

Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : Application au contact rotor-stator

Loïc Peletan

▶ **To cite this version:**

Loïc Peletan. Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : Application au contact rotor-stator. Autre. INSA de Lyon, 2012. Français. ⟨NNT : 2012ISAL0146⟩. ⟨tel-00808515⟩

HAL Id: tel-00808515

https://theses.hal.science/tel-00808515v1

Submitted on 5 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

N ° d'ordre 2012-ISAL–0146 Année 2012

THÈSE

STRATÉGIE DE MODÉLISATION SIMPLIFIÉE ET DE RÉSOLUTION ACCÉLÉRÉE EN DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DES MACHINES TOURNANTES. APPLICATION AU CONTACT ROTOR-STATOR.

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Loïc PELETAN

diplômé de l'École Normale Supérieure de Cachan

Thèse soutenue le 20 décembre 2012 devant la Commission d'examen

Jury

P. CARTRAUD	Professeur, Centrale Nantes	Président
D.J. EWINS	Professeur, Imperial College	Rapporteur
B. COCHELIN	Professeur, Centrale Marseille	Rapporteur
F. THOUVEREZ	Professeur, Centrale Lyon	Examinateur
C. BORDEGARAY	Ingénieure, Turboméca	Examinatrice
M. TORKHANI	Ingénieur, EDF	Examinateur
G. JACQUET-RICHARDET	Professeur, INSA Lyon	Directeur
S. BAGUET	Maître de Conférences, INSA Lyon	Co-Directeur

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** **http://www.edchimie-lyon.fr** Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** **http://edeea.ec-lyon.fr** Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	**EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION** **http://e2m2.universite-lyon.fr** Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** **http://ww2.ibcp.fr/ediss** Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	**INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES** http://infomaths.univ-lyon1.fr	M. Johannes KELLENDONK Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 infomaths@univ-lyon1.fr
Matériaux	**MATERIAUX DE LYON** Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	**ScSo*** M. OBADIA Lionel Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Geographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Avant-propos

Avant toute chose, je tiens à remercier l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR) pour avoir financé ces travaux dans le cadre du programme de recherche COSINUS (IRINA, projet ANR 09 COSI 008 01 IRINA).

Je tiens à remercier M. le Professeur Georges Jacquet-Richardet pour avoir assumé la tâche de diriger ces travaux de thèse. Ces derniers n'auraient pu aboutir sans son aide.

Je tiens également à faire part de la sincère gratitude que je ressens envers M. Sébastien Baguet et M. Mohamed Torkhani. Leur expertise et sens de la rigueur ont apporté énormément de valeur de cette thèse et ont largement contribué à son bon déroulement.

Mes remerciements vont également à M. le Professeur Patrice Cartraud d'avoir accepté de présider le jury de thèse.

Également, merci à M. le Professeur David J. Ewins et à M. le Professeur Bruno Cochelin pour avoir accepté cette lourde tâche que de rapporter mon travail.

C'est avec respect que j'adresse un grand merci à M. le Professeur Fabrice Thouverez et à Mme Céline Bordegaray pour être présents dans ce jury.

Je n'oublie pas également tous mes collègues de l'INSA et d'EDF pour leur disponibilité, leur écoute, leur patience et leurs conseils.

L'ambiance du laboratoire et des bureaux ont largement contribué à mon épanouissement durant cette thèse. Je remercie les personnels, chercheurs, enseignants et ingénieurs d'avoir contribué par leur bonne humeur et leur stimulation à maintenir ma motivation toujours au plus haut durant trois ans. Je tiens à attribuer mes respects en particulier aux autres doctorants avec qui les échanges ont toujours été très bénéfiques : Catherine, Guillaume, Romain, Hugo, Bartolomé, Fengyan, Célio, Romain, Gilles, Assaf, El-Hadi et Olivier.

Enfin, toute ma gratitude va à mes amis et ma famille pour leur soutien, leur patience et leur compréhension.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Résumé

Les ensembles turbo-alternateurs des centrales électriques sont de grandes machines tournantes de plus de 50 mètres de long et de plusieurs centaines de tonnes. Lors du fonctionnement normal d'une telle machine, une probabilité non nulle existe d'un détachement accidentel d'une aube. Dans une telle situation, un balourd important est généré et du contact apparaît entre les parties tournantes et non tournantes de la machine. Il est alors capital de pouvoir simuler efficacement la dynamique de ce type d'évènement faisant intervenir de fortes non linéarités dans le système.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet ANR (Agence Nationale de la Recherche) IRINA (SImulation et maîtRise des rIsques en coNception des mAchines tournantes) et en particulier entre le LaMCoS (LAboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures) de l'INSA de Lyon et le département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustiques) d'EDF R&D à Clamart. Elle a pour objectif de mettre au point une technique rapide de simulation du comportement des lignes d'arbres de machines tournantes en cas de présence de non linéarité de type contact entre rotor et stator.

Pour atteindre cet objectif, une double démarche a été mise en place. La première consiste à mettre au point des modèles simplifiés afin de réduire le nombre de degrés de liberté du problème. De surcroît, une technique de réduction de modèle adaptée au cas de non linéarité localisée est utilisée afin de réduire encore plus la taille du système à résoudre. La seconde démarche consiste à mettre au point une technique de résolution rapide du système réduit afin d'obtenir la solution encore plus rapidement. Pour cela, au lieu d'utiliser les traditionnelles techniques d'intégration temporelle directe, c'est la méthode de la balance harmonique qui est mise à profit. Cette technique permet d'obtenir directement la réponse stabilisée du système grâce à une résolution des équations dans le domaine fréquentiel.

Dans ce cadre, une maquette numérique a été mise au point mettant en œuvre les fonctionnalités citées. Cette dernière permet de reproduire les phénomènes physiques périodiques ainsi que quasi-périodiques et de déterminer leur stabilité. Des études paramétriques sur des exemples de problèmes de contact rotor-stator viennent illustrer cette démarche. Enfin, une application sur un cas industriel de groupe turbo alternateur EDF est présentée.

MOTS CLÉS: dynamique des machines tournantes, contact rotor-stator, réduction de modèle, méthode de la balance harmonique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Abstract

Power plants turbo-generator sets are large rotating machines of more than 50 meters long and weight several hundred tons. During normal operation of such a machine, there is a nonzero probability of an accidental disconnection of a blade. In such a situation, a significant imbalance is generated and contact may occur between the rotating and non-rotating parts. It is therefore essential to be able to effectively simulate the dynamics of this type of event involving strong nonlinearities in the system.

This PhD was conducted within the framework of the ANR (Agence Nationale de la Recherche) IRINA (Simulation and risk control in rotating machinery design) and in particular between the LaMCoS (LAboratory of Contact Mechanics and Structures) of the INSA Lyon and the AMA department (Mechanical and Acoustic Analysis) at EDF R&D in Clamart. It aims to develop a fast technique for simulating the behavior of shafts of rotating machinery in case of presence of non-linearity of contact between rotor and stator.

To achieve this goal, a dual approach was implemented. The first is to develop simplified models to reduce the number of degrees of freedom of the problem. In addition, a model reduction technique suitable for the case of localized nonlinearity is used to further reduce the size of the system to be solved. The second approach is to develop a technique for efficient resolution of the reduced system to obtain the solution more quickly. To do this, instead of using the traditional direct temporal integration techniques, the harmonic balance method is put to use. This technique allows to directly obtain the stabilized response of the system thanks to a resolution of the equations in the frequency domain.

In this context, a numerical model has been developed to implement the features mentioned. The latter allows to reproduce the physical periodic and quasi-periodic phenomena and to determine their stability. Parametric studies of examples of problems of rotor-stator contact will illustrate this approach. Finally, an application on an industrial case of turbo generator EDF is presented.

KEYWORDS: rotating machinery dynamics, rotor-stator contact, model reduction, harmonic balance method.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Table des matières

Table des matières i

Table des figures v

Liste des tableaux xi

Introduction 1

1 Bibliographie & état de l'art 5
- 1.1 Aspects phénoménologiques du contact rotor-stator . . . 7
  - 1.1.1 Comportements observés . . . 7
  - 1.1.2 Paramètres numériques influents . . . 12
  - 1.1.3 Prise en compte des effets colinéaires à la rotation . . . 13
- 1.2 Études expérimentales . . . 13
  - 1.2.1 Le frottement entre stator et rotor . . . 14
  - 1.2.2 Le jeu rotor/stator . . . 14
  - 1.2.3 L'effet gyroscopique et la vitesse de fonctionnement . . . 15
  - 1.2.4 L'amortissement . . . 15
- 1.3 Études existantes en analytique et numérique . . . 17
  - 1.3.1 Modèles de contact . . . 17
  - 1.3.2 techniques de résolution numériques . . . 19
- 1.4 Réduction de modèle . . . 21
  - 1.4.1 Principe général . . . 22
  - 1.4.2 Techniques de projection sur modes linéaires . . . 23
  - 1.4.3 Les techniques de décomposition de domaine (condensation) . . . 24
  - 1.4.4 Les méthodes basées sur la SVD . . . 27
  - 1.4.5 Techniques basées sur la notion de modes non-linéaires . . . 27
- 1.5 Conclusion . . . 31

2 Calcul des solutions périodiques 33
- 2.1 Méthode de la Balance Harmonique (HBM) . . . 35
  - 2.1.1 Principe de la méthode . . . 35
  - 2.1.2 La méthode AFT (Alternating Frequency Time) . . . 39
  - 2.1.3 Calcul de la Jacobienne . . . 39

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.1.4 Bilan . . . 41
2.2 Techniques de continuation . . . 41
2.2.1 Continuation incrémentale (ou séquentielle) . . . 41
2.2.2 Continuation par pseudo longueur d'arc . . . 43
2.3 Robustesse et optimisation . . . 46
2.3.1 Pas adaptatif . . . 46
2.3.2 Sélection automatique des harmoniques . . . 46
2.3.3 Adimensionnement numérique des équations . . . 50
2.4 Exemples d'illustration . . . 53
2.4.1 Application sur un modèle de rotor de Jeffcott . . . 53
2.4.2 Application sur un modèle de rotor éléments finis . . . 57
2.5 Conclusion . . . 64

3 Calcul de la stabilité des solutions 67
3.1 Introduction . . . 69
3.2 Méthodes dans le domaine temporel . . . 70
3.2.1 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle en $2n$ passes (désigné comme la méthode '2n-passes' par la suite) 70
3.2.2 Calcul de la matrice de monodromie par approximations avec des exponentielles de matrice (noté 'exponentielles' par la suite) . . . 72
3.2.3 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle simple-passe avec schéma de Ruge-Kutta (noté 'RK 1-passe' par la suite) . . . 73
3.2.4 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle simple-passe avec schéma de Newmark (noté 'Nm 1-passe' par la suite) . . . 73
3.2.5 Autres méthodes . . . 74
3.3 Méthodes dans le domaine fréquentiel . . . 75
3.3.1 Méthode de Hill (notée 'Hill1' par la suite) . . . 75
3.3.2 Amélioration de la méthode de Hill (notée 'Hill2' par la suite) . . . 76
3.4 Cas tests . . . 78
3.4.1 Oscillateur de Duffing . . . 79
3.4.2 Rotor de Jeffcott non linéaire . . . 80
3.4.3 Modèle de rotor éléments finis . . . 82
3.5 Discussion . . . 86
3.6 Conclusion . . . 89

4 Traitement des phénomènes quasi-périodiques 93
4.1 Problématique . . . 95
4.2 Généralisation de la HBM aux systèmes multi-fréquentiels . . . 99
4.2.1 Conventions d'écriture . . . 99
4.2.2 Passage de l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel 100
4.2.3 Procédure AFT en quasi-périodique . . . 101

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

4.2.4 Sélection automatique des harmoniques . . . 102
4.2.5 Calcul de la Jacobienne . . . 104
4.2.6 Continuation par pseudo longueur d'arc . . . 105
4.3 Exemples d'application . . . 112
4.3.1 Oscillateur de Duffing avec relation linéaire connue entre ω_1 et ω_2 112
4.3.2 Oscillateur de Duffing avec relation non linéaire connue entre ω_1 et ω_2 . . . 114
4.3.3 Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator et relation non linéaire inconnue entre ω_1 et ω_2 . . . 114
4.3.4 Rotor éléments finis à 3 disques . . . 116
4.4 Conclusion . . . 118

5 Application industrielle : groupe turbo-alternateur GTA1300 123
5.1 Présentation du modèle . . . 124
5.2 Réponse linéaire . . . 125
5.3 Réponse non linéaire . . . 126
5.3.1 Influence de la rigidité de contact . . . 128
5.3.2 Influence du coefficient de frottement . . . 134
5.4 Conclusion . . . 136

Conclusions et perspectives 137

Annexe A 141

Annexe B 147

Annexe C 149

Bibliographie 151

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Table des figures

1 Turbine réelle de centrale électrique [ROQ 09] 2
2 Banc EURoPE (EDF R&D) 3

1.1 Illustration du phénomène de contact annulaire en précession directe. . . . 7
1.2 Illustration du phénomène de précession inverse. 8
1.3 Illustration du phénomène de rebonds. 9
1.4 Évolution de la fréquence de précession inverse en fonction de la vitesse de rotation du rotor [CHI 07]. 10
1.5 Coexistence possible de plusieurs réponses en fonction de la vitesse de rotation et du coefficient de frottement [JIA 09]. 11
1.6 Banc d'essais Turbine aéronautique [CHE 10] 15
1.7 Loi de contact par pénalisation classique. 17
1.8 Gain en terme de nombre d'opérations à virgule flottante de la méthode APHR par rapport à une intégration temporelle directe [RYC 05] 25
1.9 Représentation symbolique d'une structure [BAT 08] 26
1.10 Comparaison de l'évolution vibratoire d'un degrés de liberté entre la référence et le modèle réduit avec NNM ou LNM. [TOU 08] 30

2.1 Schéma d'un oscillateur de Duffing 38
2.2 Méthode AFT (Alternating Frequency Time) 39
2.3 Continuation incrémentale 42
2.4 Continuation par pseudo-longueur d'arc. 43
2.5 Continuation par pseudo-longueur d'arc. Détail d'un couple de prédiction / corrections. 44
2.6 Courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing avec seulement le fondamental. 47
2.7 Courbe pleine : efforts non linéaires calculés à partir des déplacements et de la loi non linéaire. Courbe pointillés : efforts non linéaires issus de F . 48
2.8 Analyse spectrale des efforts non linéaires calculés à partir des déplacements et de la loi non linéaire. Le fondamental apparaît clairement ainsi que l'harmonique 3. 48
2.9 Courbe noire : courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing avec seulement le fondamental. Courbe bleue : courbe de réponse avec sélection automatique des harmoniques. 49

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.10 Efforts non linéaires dans le domaine temporel. Les courbes pointillée et pleine sont confondues. 50
2.11 Nombre d'harmoniques retenues dans la HBM en fonction du numéro du pas de la continuation. Le nombre maximum d'harmoniques est ici limité à 20. 50
2.12 Modèle de rotor éléments finis [LAL 98] 51
2.13 Courbe de réponse d'un modèle de rotor réaliste avec contact rotor stator ($\mu = 0,2$). rouge : courbe sans adimensionnement. bleu : courbe avec adimensionnement numérique. 51
2.14 Schéma du rotor de Jeffcott 53
2.15 Courbe de réponse du rotor de Jeffcott avec contact. Comparaison HBM, intégration temporelle directe. 55
2.16 Orbite HBM du Jeffcott à petite vitesse de rotation. Il n'y a pas contact entre le rotor et le stator. 55
2.17 A gauche : Orbite HBM du Jeffcott à vitesse moyenne. Il y a phénomène de full annular rub. 56
2.18 Réponse linéaire du rotor à trois disques sur la plage de fréquence 0tr/min à 30000tr/min 57
2.19 Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. bleu : pas de réduction de modèle. orange : 2 modes encastrés. vert : 4 modes encastrés. 58
2.20 Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. bleu : pas de réduction de modèle. orange : 2 modes encastrés. vert : 4 modes encastrés. Zoom sur les deux premières fréquences de résonance. 59
2.21 Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. bleu : pas de réduction de modèle. marron : 9 modes encastrés. magenta : 16 modes encastrés. 60
2.22 Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. Zoom sur les deux premières fréquences de résonance puis sur le premier pic de résonance 60
2.23 Réponses linéaire et non linéaires du rotor éléments finis avec jeu = 1mm et μ=0,1 sans réduction de modèle. En haut : vue globale. En bas : vue agrandie sur la réponse non linéaire. 61
2.24 Réduction de modèle Craig et Bampton. Effet de la réduction à 21 ddls et 16 ddls. 62
2.25 Réduction de modèle Craig et Bampton. Effet de la réduction à 14 ddls et 11 ddls. 62
2.26 Réduction de modèle Craig et Bampton. Effet de la réduction à 9 ddls et 7 ddls. 63
2.27 Réponse non linéaire du rotor éléments finis, modèle réduit à 16 ddls. Influence du nombre maximal d'harmoniques (4 harmoniques et 1 harmonique). 64

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.28 Réponse non linéaire du rotor éléments finis, modèle réduit à 16 ddls. Influence du nombre maximal d'harmoniques (8 harmoniques et 6 harmoniques). 64
2.29 Réponse non linéaire du rotor éléments finis, modèle réduit à 16 ddls. Influence du nombre maximal d'harmoniques (16 harmoniques et 12 harmoniques). 65
2.30 Evolution du nombre d'harmoniques en fonction de l'abscisse curviligne. 65

3.1 Oscillateur de Duffing. Courbe de réponse. (▲) stable, (.) instable 79
3.2 Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse. Stabilité calculée par la méthode *2n-passes*. (▲) stable, (.) instable. 80
3.3 Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse (agrandissement). A gauche : stabilité calculée par la méthode *Hill2*. A droite : stabilité calculée par les autres méthodes (*2n-passes*, *exponentielles*, *RK 1-passe*, *Nm 1-passe*). (▲) stable, (.) instable 81
3.4 Rotor de Jeffcott. Multiplicateurs de Floquet d'une solution à environ 1,36 rad/s (voir point rouge figure 3.3). A gauche : multiplicateur donnés par la méthode *Hill2*. A droite : multiplicateurs donnés par la méthode *2n-passes*. 81
3.5 Modèle de rotor éléments finis [LAL 98] 82
3.6 Modèle de rotor éléments finis. Courbe de réponse avec stabilité calculée par la méthode *2n-passes*. Comparaison avec résultats intégration temporelle directe. (▲) stable, (.) instable. 83
3.7 Déformée du rotor juste avant contact 84
3.8 Déformée du rotor pendant full annular rub 1 85
3.9 Déformée du rotor pendant full annular rub 2 85
3.10 Déformée du rotor pendant full annular rub 3 86
3.11 Déformée du rotor instable 86
3.12 Temps CPU relatif en fonction de n_{HBM}. Temps passé à calculer la stabilité des solutions de la courbe de réponse par rapport à une simulation HBM sans calcul de la stabilité. ▲ *Hill2*, ▼ *2n-passes*, . *exponentielles* , • *RK 1-passe*, ★ *Nm 1-passe*. 90

4.1 Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse pour $\mu = 0,2$. Comparaison entre HBM et intégration temporelle directe. 96
4.2 Multiplicateurs de Floquet de la solution HBM périodique à $\Omega \approx 0,33$. . . 97
4.3 Orbite quasi-périodique calculée par intégration temporelle directe à $\Omega \approx 0,33$ pour $\mu = 0,2$. 97
4.4 Analyse spectrale des efforts de contact de la réponse temporelle à $\Omega \approx 0,33$. 98
4.5 Evolution de ω_2 en fonction de ω_1 d'après analyse spectrale des solutions temporelles. 98
4.6 Méthode AFT (Alternating Frequency Time) 101
4.7 Choix automatique des harmoniques, étape 1. 102

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

4.8 Choix automatique des harmoniques, étape 2. 103
4.9 Choix automatique des harmoniques, étape 3. 103
4.10 Continuation sur 2 paramètres. A gauche, les 2 paramètres sont indépendants. A droite, les deux paramètres sont liés. 105
4.11 Continuation sur 2 paramètres avec relation affine connue entre les deux. . 106
4.12 Continuation sur 2 paramètres avec relation non linéaire connue entre les deux. 109
4.13 Continuation sur 2 paramètres avec relation inconnue entre les deux. . . . 111
4.14 Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. Courbe de réponse en fonction de ω_1 et de ω_2. Les projections sur les trois plans sont en pointillés. 112
4.15 Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. Détail à $\omega_1 \approx 1,9\text{rad.s}^{-1}$. Déplacement en fonction de t_1 et de t_2. Bleu : valeur basse. Rouge : valeur haute. 113
4.16 Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. Détail à $\omega_1 \approx 1,9\text{rad.s}^{-1}$. A gauche : déplacement en fonction de $t_{\text{réel}}$. A droite : transformée de Fourier de la figure de gauche. 113
4.17 Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = -0,9\omega_1^2 + 5\omega_1 - 1$. Courbe de réponse en fonction de ω_1 et de ω_2. 114
4.18 Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse. (▲) stable, (.) instable. 115
4.19 Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse (vue agrandie autour de la zone de contact partiel). (▲) stable, (.) instable. 115
4.20 Rotor de Jeffcott. Orbite quasi-périodique du rotor à $\Omega \approx 0,35$ (point rouge sur la figure 4.19). 116
4.21 Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse HBM quasi-périodique. En jaune est reportée la courbe 4.5. 117
4.22 Rotor éléments finis. Courbe de réponse. (▲) stable, (.) instable. 117
4.23 Rotor éléments finis. Courbe de réponse (vue agrandie). (▲) stable, (.) instable. 118
4.24 Rotor éléments finis. Courbe de réponse HBM quasi-périodique. 119
4.25 Rotor éléments finis. Orbites du nœud 1 calculé à $\omega_1 \approx 5200$tr/min (voir point rouge sur la figure 4.23). à gauche : HBM quasi-périodique. à droite : intégration temporelle. 119
4.26 Rotor éléments finis. Vue d'ensemble du rotor à $\omega_1 \approx 5200$tr/min (voir point rouge sur la figure 4.23). 120

5.1 Photo du groupe turbo-alternateur 1300MW 124
5.2 Modèle éléments finis du GTA1300 124
5.3 Schématisation d'un flux BP 125
5.4 Courbe de réponse du GTA1300 sur la plage de fréquence de 500 tr/min à 1600 tr/min par la HBM. 126
5.5 Déformée de la ligne d'arbres au premier pic de résonance du noeud 90 (≈750 tr/min). 126
5.6 Maillage et conditions aux limites. Aubages 9 et 10 fixes. 127

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

5.7 Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°1 : 2,551.10^9N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 700 tr/min à 800 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle. 128
5.8 Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°1 : 2,551.10^9N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle. 129
5.9 Déformée de la ligne d'arbre à environ 740 tr/min. Orbite du noeud 90. . 130
5.10 Déformée de la ligne d'arbre à environ 765 tr/min. Orbite du noeud 90. . 131
5.11 Déformée instable de la ligne d'arbre à environ 788 tr/min. Orbite du noeud 90. 132
5.12 Evolution du nombre d'harmoniques en fonction de l'abscisse curviligne. Mise en évidence des différents phénomènes physiques. 133
5.13 Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°2 : 5,376.10^9N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle. 133
5.14 Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°3 : 7,634.10^9N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle. 134
5.15 Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°4 : 1,277.10^{10}N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle. 134
5.16 Courbe de réponse du GTA1300 sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min avec différents coefficients de frottement. 135

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Liste des tableaux

3.1 Les différents modèles testés. n_{ele} = nombre d'éléments. n = nombre de ddl. N = nombre d'harmoniques dans le calcul HBM. $n_{\text{HBM}} = n(2N+1)$ = dimension du système algébrique HBM. 82
3.2 Temps de calcul relatif. Le temps passé à calculer la courbe de réponse sans stabilité est normalisé à 1 comme indiqué dans la colonne 'Pas de stab.'. Les nombres avec une astérisque (*) indiquent une précision insatisfaisante. 87
3.3 Répartition du temps de calcul avec la méthode *Hill2* 88
3.4 Répartition du temps de calcul avec la méthode *exponentielles*. Les méthodes *2n-passes*, *RK 1-passe* and *Nm 1-passe* donnent des résultats très similaires. 88

4.1 ω_{na} et ω_{nb} calculés pour les premières valeurs de n pour le mouvement de contact partiel à $\Omega = 0,33$. Ici, $\omega_1 = 1 \times \Omega$ et $\omega_2 \approx 1.08 \times \Omega$. 99

5.1 Comparaison temps de calcul entre HBM et intégration temporelle. 131

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Introduction

La sécurité des turbomachines passe par la maîtrise des situations à risques induites par les contacts entres parties fixes et parties tournantes. Dans ce contexte, on distingue deux types de configurations. Dans la première configuration, des contacts entre le sommet des aubes et le carter associés à des niveaux d'efforts relativement faibles vont générer un échange énergétique entre la partie tournante et la partie fixe. Différents régimes peuvent alors apparaître, selon la vitesse de rotation du rotor, le chargement et les paramètres géométriques et physiques du système. Ces régimes peuvent induire des phénomènes instables, dont les conséquences peuvent s'avérer désastreuses. La deuxième configuration, dite à fort balourd est en général consécutive à une perte accidentelle d'aube. Elle va conduire à un contact sévère entre le rotor et le stator qui va perdurer lors du ralentissement de la machine. Cette situation bien que rare doit être envisagée et qualifiée. Ces travaux de thèse s'intéresseront en particulier à cette situation là. Néanmoins, quelle que soit la configuration, dans une démarche de conception, il est impératif de maîtriser les phénomènes physiques engendrés lors des contacts ainsi que les conséquences qui peuvent en découler (rupture de pièces, rétention des débris...).

De nombreux travaux ont été consacrés à la dynamique non-linéaire d'ensemble engendrée par des contacts rotor/stator et aube/carter. Cependant, aucun d'entre eux n'a encore permis d'avoir une compréhension exhaustive du phénomène. La principale raison est liée aux nombreux mécanismes mis en jeu qui sont à la fois multi-physiques (vibrations, contact frottant, échauffement, usure, etc.), multiéchelle (couplage local/global des réponses dynamique et thermomécanique, grandes vitesses de rotation), non-linéaires (contacts, mouvements de grande amplitude, déformations importantes, efforts de grande ampleur dans les structures palières, plasticité...). Le comportement en présence de contacts est ainsi caractérisé par un fort couplage entre la dynamique globale du système et les phénomènes locaux mettant en jeu les caractéristiques matériaux et tribologiques (température, abradabilité...).

Cette thèse s'appliquera en particulier au cas du contact rotor-stator dans les groupes turbo-alternateurs au sein d'une centrale électrique EDF. Les groupes turbo-alternateurs sont des composants imposants dont la longueur dépasse 50 mètres. Un groupe est constitué, entre autres, d'une turbine et d'un alternateur. La turbine est elle-même constituée de plusieurs corps (un corps haute pression ainsi que plusieurs corps basse pression). Au travers de tous ces corps, passe un arbre aubé qui a pour fonction de transformer l'énergie fournie par la vapeur d'eau en énergie mécanique. EDF doit s'assurer de l'intégrité de ses installations même en cas de situation accidentelle.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

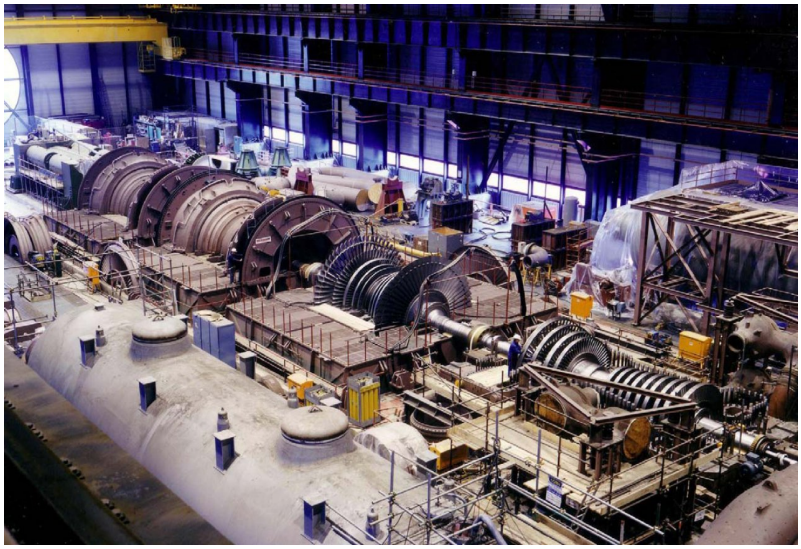


FIGURE 1: Turbine réelle de centrale électrique [ROQ 09]

Nous allons plus particulièrement nous intéresser au cas de détachement d'aube. Des études réalisées par EDF R&D ont montré des concentrations de contraintes susceptibles d'initier des fissures dans les attaches d'ailette. La propagation de ces fissures peut conduire au départ de l'ailette. Le dimensionnement doit alors vérifier que les structures palières sont capables de supporter l'effort résultant du balourd généré dans l'instant qui suit l'accident et lors du passage des vitesses critiques en phase de ralentissement. Le cas le plus défavorable est rencontré lorsque l'aube qui se détache se situe sur l'étage terminal d'un corps basse pression. Le détachement d'une aube entraîne alors un balourd important (environ 90Kg.m) et une procédure d'arrêt d'urgence est automatiquement déclenchée. Dans cette configuration, des interactions rotor-stator peuvent apparaître entre l'arbre et le diaphragme (un diaphragme est un ensemble d'aubes fixes dont la fonction principale est de redresser le flux de vapeur afin d'optimiser le rendement). Les conséquences de cette situation doivent être maîtrisées dans le cadre de la vérification de la tenue mécanique des structures.

Les développements réalisés par [ROQ 07] ont permis de mettre en place des modèles exhaustifs permettant d'envisager une étude détaillée du comportement temporel généré suite à une perte d'aube et à un contact rotor-stator induit. En particulier, la méthode permet de prendre en compte le ralentissement de la ligne d'arbre, ainsi que les valeurs caractérisant ce ralentissement (force de contact, flexibilité du stator, coefficient de glissement, torsion). En parallèle une série d'études expérimentales a été réalisée sur banc (EURoPE) afin de qualifier les résultats de la maquette numérique (Figure 2). Cette maquette a montré qu'elle était capable de donner des résultats fiables mais souffre d'un inconvénient majeur. En effet, bien que ne dépassant jamais le millier de degrés de liberté, l'étude d'un cas industriel concret avec cette maquette nécessite plusieurs jours de calcul. Le traitement des non linéarités (en particulier l'algorithme de détection de contact) est ce qui nécessite le plus de temps de calcul. Ce délai est incompatible avec les contraintes de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

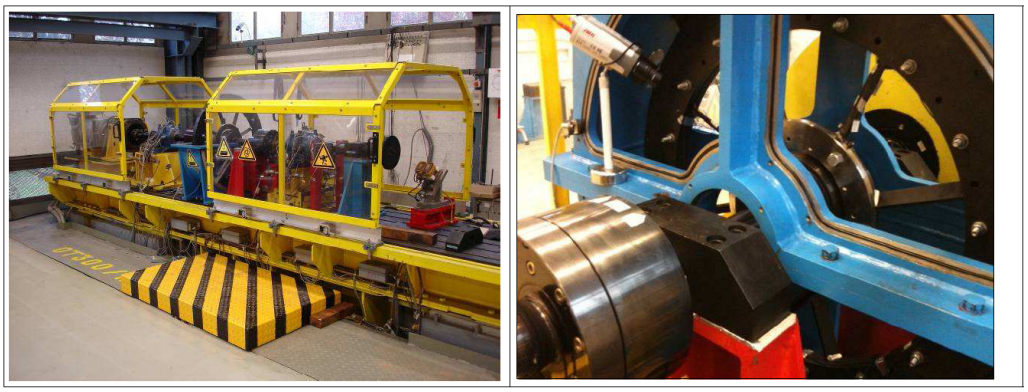


FIGURE 2: Banc EURoPE (EDF R&D)

l'ingénierie et interdit alors toute éventuelle étude paramétrique. L'objectif de nos travaux est alors de trouver un moyen d'obtenir des résultats plus rapidement tout en conservant la riche phénoménologie générée.

Dans un premier temps, il s'agira de présenter une synthèse bibliographique la plus complète possible autour des comportements de machines tournantes en présence de contacts rotor/stator. Il s'agit plus particulièrement de recenser les phénomènes physiques mis en jeu, les modèles adaptés ainsi que les résultats expérimentaux disponibles. Ces développements généraux seront ensuite illustrés par le résultat d'une double démarche numérique développée dans le cadre du contact rotor-stator.

Une première démarche pour accélérer les calculs consistera à simplifier au maximum les modèles sans sacrifier la précision des résultats. Cette démarche de simplification pourra être amplifiée par l'emploi d'une technique de réduction de modèle qui permet de diminuer encore davantage le nombre de degrés de liberté sans altérer les résultats. Les techniques de réduction de modèle ont été mises au point afin de tenter de bénéficier de la précision des modèles de grande taille tout en profitant de la vitesse d'exécution de modèles de petite taille. Dans une seconde démarche parallèle, on cherchera à résoudre efficacement les modèles issus de la première démarche afin de réduire au maximum les temps de calcul.

Dans un second temps, en vue de répondre à cet objectif, la méthode de la balance harmonique sera présentée. Le principe de cette méthode est de résoudre les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel plutôt que dans le domaine temporel. Cette technique permet de déterminer les réponses périodiques. On montrera comment cet algorithme peut être complété et amélioré par diverses techniques permettant de prendre en compte facilement les efforts non linéaires de contact mais permettant aussi de rendre la méthode fiable et robuste. Une technique de continuation permettant de mener à bien des études paramétriques sera exposée. Cette stratégie montrera son efficacité sur des modèles de contact rotor-stator.

Ensuite, seront détaillées, testées et comparées diverses méthode de calcul de stabilité basées sur la théorie de Floquet. Ces techniques permettent de déterminer si une solution calculée par HBM peut-être obtenue dans la réalité ou non. Ces différents algorithmes

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

seront comparés en terme de précision et de temps de calcul. Ces techniques sont utiles pour détecter des bifurcations le long des branches solutions, certaines pouvant indiquer l'apparition de régimes quasi-périodiques.

Une extension de la méthode de la balance harmonique sera ensuite proposée pour prendre en compte les spéficités des régimes quasi-périodiques générés par le frottement. Une description complète du principe ainsi que le détail de l'adaptation des fonctionnalités annexes à la méthode de la balance harmonique sera exposée. En particulier, une extension de la méthode de continuation mettra en évidence la faisabilité d'une telle approche.

Enfin, une étude sur un modèle de turbine de centrale nucléaire montrera la faisabilité de l'utilisation d'une telle approche sur des problèmes industriels réels.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 1

Bibliographie & état de l'art

Ce premier chapitre vise à établir un bilan des diverses méthodes de réduction de modèle et techniques de résolution numériques existantes dans la littérature afin d'envisager la plupart des possibilités permettant de réduire les temps de calcul associés au traitement des non linéarités de contact. Néanmoins il s'agit dans un premier temps, de recenser les phénomènes physiques rencontrés expérimentalement et numériquement dans la littérature. Ce sont effectivement ces phénomènes qui conditionnent les choix à effectuer dans la modélisation des problèmes et leur méthode de résolution. Les méthodes employées devront en effet être capables de reproduire ces phénomènes qui nous intéressent.

Sommaire

1.1 Aspects phénoménologiques du contact rotor-stator 7
1.1.1 Comportements observés 7
1.1.2 Paramètres numériques influents 12
1.1.3 Prise en compte des effets colinéaires à la rotation 13
1.2 Études expérimentales 13
1.2.1 Le frottement entre stator et rotor 14
1.2.2 Le jeu rotor/stator 14

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.2.3 L'effet gyroscopique et la vitesse de fonctionnement 15
1.2.4 L'amortissement 15
1.3 Études existantes en analytique et numérique 17
1.3.1 Modèles de contact 17
1.3.2 techniques de résolution numériques 19
1.4 Réduction de modèle 21
1.4.1 Principe général 22
1.4.2 Techniques de projection sur modes linéaires 23
1.4.3 Les techniques de décomposition de domaine (condensation) 24
1.4.4 Les méthodes basées sur la SVD 27
1.4.5 Techniques basées sur la notion de modes non-linéaires 27
1.5 Conclusion 31

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.1 Aspects phénoménologiques du contact rotor-stator

Avant de s'intéresser aux modélisations et techniques de réduction de modèle, il est important de faire le bilan des phénomènes physiques principaux que l'on rencontre lors de situations réelles de contact rotor-stator (rubbing). Les modèles et techniques de résolution qui seront choisis ensuite devront être capables de fidèlement reproduire ces phénomènes de manière à la fois qualitative et quantitative.

1.1.1 Comportements observés

En ce qui concerne la caractérisation du contact à fort balourd dans des situations de type rubbing, une synthèse de la littérature est donnée par [MUS 89][MUS 05] et [AHM 10]. Le spectre des scénarios observés va du contact frottant occasionnel jusqu'au frottement annulaire établi incluant le phénomène violent de précession inverse. Le retour d'expérience met en évidence trois types de comportements.

1.1.1.1 Mouvement annulaire en précession directe

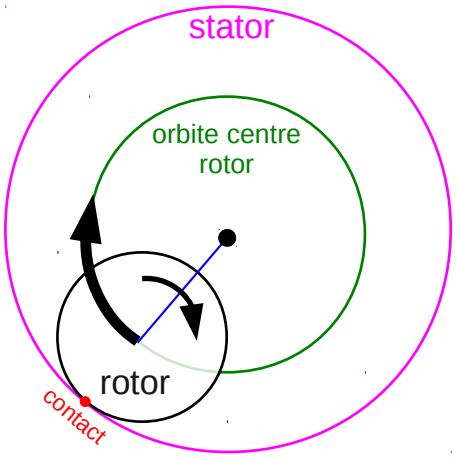


FIGURE 1.1: Illustration du phénomène de contact annulaire en précession directe.

Le frottement annulaire complet se produit généralement en précession directe à la même vitesse que la vitesse de rotation du rotor (Forward synchronous whirl). Le rotor est maintenu en contact toujours frottant avec le stator et le glissement s'établit sur la précession complète du rotor (voir figure 1.1). Ce mouvement résulte d'un équilibre de la réponse non linéaire du rotor sous balourd, combinant l'action des forces centrifuges, des forces élastiques, ainsi que des forces de contact et de frottement.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

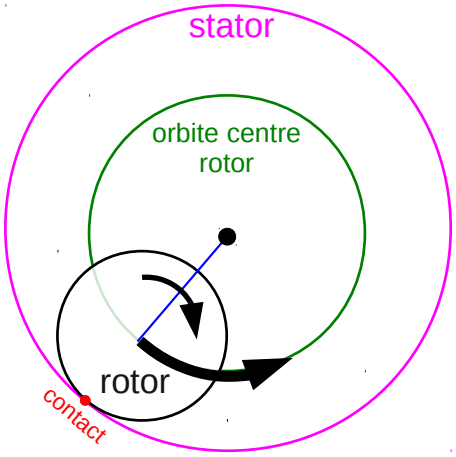


FIGURE 1.2: Illustration du phénomène de précession inverse.

1.1.1.2 Mouvement en précession inverse

Correspond à l'entraînement du rotor en précession inverse dans le stator et s'établit suite au frottement induit à l'interface de contact [BAR 00] (voir illustration figure 1.2). Le rotor roule ou glisse de manière continue sur la surface de contact et subit un mouvement de précession inverse à une vitesse non synchrone. La précession inverse se caractérise donc par une fréquence qui n'est ni liée harmoniquement à la fréquence de rotation de l'arbre, ni à la fréquence d'excitation. La configuration de roulement sans glissement correspond au terme 'dry whirl' et la configuration frottante avec glissement au terme 'dry whip'. La vibration du rotor est largement impactée par le frottement à l'interface. En effet, le niveau vibratoire du rotor augmente et peut se stabiliser autour d'une valeur moyenne constante ou continuer à augmenter. Dans ce dernier cas, le phénomène devient instable. Lors du contact, les forces de frottement sur la zone d'interaction entraînent le rotor dans la direction de la précession inverse. Si par exemple au moment du contact le rotor orbitait dans cette direction ou si le frottement est suffisamment important pour entraîner le rotor dans cette direction, les forces de frottement agissent dans la même direction que le mouvement et dans ce cas un transfert s'établit entre l'énergie de rotation et la vibration latérale du rotor. La vibration tend à être amplifiée de manière continue. Cette situation perdure jusqu'à ce que la vitesse de précession devienne plus grande que la vitesse circonférentielle du rotor au contact. Dans ce cas la vitesse relative change de signe ce qui inverse la direction des forces de frottement qui s'opposent à la précession du rotor et dissipent de l'énergie. L'amplitude de vibration tend alors à diminuer jusqu'à ce que la vitesse relative change à nouveau de signe au contact, ce qui entraînera à nouveau une tendance à l'augmentation des amplitudes de vibration. Dans ce contexte l'amplitude du rotor oscille autour d'une valeur correspondant au cas de vitesse relative nulle au contact et la vibration devient auto-entretenue. Une fois engagé ce phénomène s'établit et lors d'une descente en vitesse ne décroche qu'à très faible vitesse quand la vitesse relative de glissement reste tout le temps très proche de zéro.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

La fréquence correspondant au dry whip est très proche de la fréquence du système rotor/stator liés. Cette constatation impose d'avoir une très bonne estimation de la raideur du stator dans les modèles. Le balourd n'a pas d'effet sur le phénomène une fois engagé mais il influence les conditions d'engagement (vitesse de rotation). [BEN 02b] montre expérimentalement que pour un même rotor, la rigidité du support peut jouer un grand rôle. Le frottement annulaire en précession inverse est obtenu facilement avec un support très rigide mais pas avec un support flexible.

1.1.1.3 Rebonds

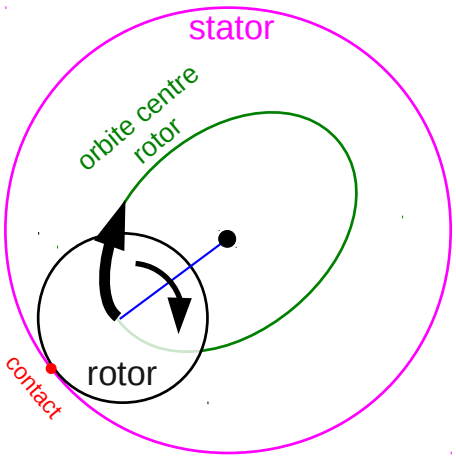


FIGURE 1.3: Illustration du phénomène de rebonds.

Le frottement partiel est caractérisé par un contact discontinu sur la précession du rotor. L'effet principal provient dans ce cas des rebonds répétés entre le rotor et le stator (voir illustration figure 1.3). La configuration de rebond peut être une configuration permanente ou une transition. En effet, l'établissement d'un comportement en frottement annulaire passe toujours par une phase transitoire et il en est de même pour les changements de précession. Les amplitudes de rebond augmentent avec l'augmentation du balourd. Ainsi lorsque le balourd est trop important alors le rebond ne peut plus être compris dans l'espace laissé par le jeu et la transition vers un frottement annulaire est inévitable.

La nature des rebonds peut être chaotique, quasi périodique ou même périodique. Ces deux dernières configurations sont les plus traitées. Elles impliquent la présence de composantes vibratoires subharmoniques ou super-harmoniques de la vitesse de rotation et vont jusqu'à la naissance de comportements chaotiques. On distingue donc le cas des réponses avec des impacts périodiques en sous et sur harmoniques de la fréquence synchrone et des impacts périodiques asynchrones. Pour le second type, [COL 03] montre que si le mouvement du rotor ne présente pas de périodicité dans le repère fixe, il devient périodique une fois transformé dans le repère tournant.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.1.1.4 Mouvements multi-phases

L'existence de différentes phases de comportement et leurs limites d'apparition et de disparition dépend des paramètres du système.

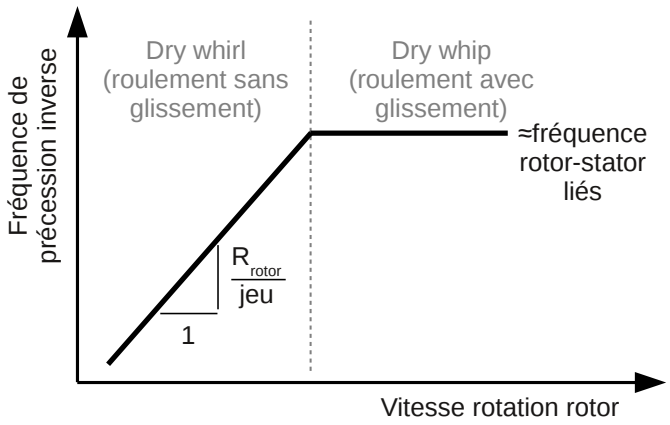


FIGURE 1.4: Évolution de la fréquence de précession inverse en fonction de la vitesse de rotation du rotor [CHI 07].

[LIN 90] étudie un rotor sous balourd en montée et descente en vitesse. Il constate un déplacement sans frottement puis une zone de frottement annulaire synchrone puis un retour aux conditions sans frottement. Au moment du frottement, un phénomène de saut en fréquence est observé. Lors de l'expérimentation il constate que l'apport d'une excitation externe (choc sur le rotor) peut faire muter à tout moment la réponse synchrone vers un comportement de type frottement annulaire en précession inverse. Une fois engagé, le mouvement s'établit en configuration roulement sans glissement à une fréquence super-synchrone égale à la fréquence synchrone multipliée par un coefficient égal au ratio rayon du rotor sur jeu. En montée en vitesse la ligne supersynchrone est suivie jusqu'à l'apparition d'un seuil où le frottement apparaît. Au delà les amplitudes augmentent et la fréquence reste constante (dry whip). Le seuil est lié à la fréquence combinée du système rotor-stator (voir figure 1.4).

[CRA 90] observe que le phénomène de dry whip peut s'établir sans perturbation externe mais être induite par le balourd et l'historique du mouvement. Lorsque le balourd est important les forces de contacts crées sont auto-suffisantes pour initier et maintenir le phénomène. Lorsque le balourd est plus faible, une perturbation extérieure est nécessaire à l'initiation.

[WIL 10] montre expérimentalement que la fréquence constante traduisant un comportement en régime whip peut, lors d'une montée en vitesse, se terminer par un saut marquant un retour vers un comportement de type whirl. La poursuite de la montée en vitesse peut mettre en évidence plusieurs alternances whip/whirl avec un saut à chaque transition [BHA 09] . Ces transitions n'avaient pas été détectées lors d'études effectuées par la même équipe sur le même système [CHI 07]. L'explication relève ici également de l'influence des conditions initiales. La première étude traitait d'une mise en contact

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

par augmentation continue des amplitudes de vibration alors que la dernière se base sur une perturbation radiale impulsionnelle. Jiang [JIA 09], [SHA 11] justifie l'apparition de

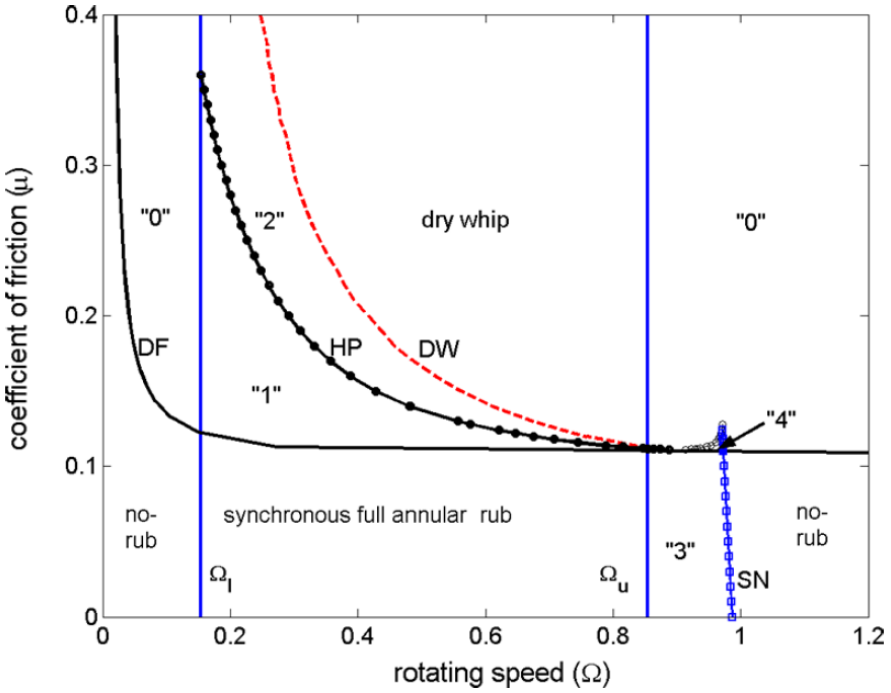


FIGURE 1.5: Coexistence possible de plusieurs réponses en fonction de la vitesse de rotation et du coefficient de frottement [JIA 09].

différents scénarios en mettant en évidence des zones de fonctionnement où co-existent différents comportement possibles. Il explique le phénomène de saut par l'existence de zones où comportement sans frottement et frottement annulaire synchrone co-existent. La figure 1.5 issue de [JIA 09] montre les zones où peuvent s'établir les différents mouvements possibles d'un rotor de Jeffcott soumis au balourd et au contact rotor stator en fonction de la vitesse de rotation et du coefficient de frottement. Ces résultats sont issus d'une étude analytique. La ligne DF montre la frontière à droite de laquelle le mouvement de précession inverse existe et est stable. La ligne HP quant à elle indique la limite d'apparition du mouvement de rebonds quasi-périodiques. La ligne DW indique à partir de quelle vitesse de rotation la seule force de balourd est suffisante pour déclencher le mouvement de précession inverse. La ligne SN indique la limite au-delà de laquelle le mouvement annulaire en précession directe n'est plus possible. A partir de ces frontières, il est possible de découper le graphique en différentes zones. Les zones marquées '0' sur le graphique désignent les zones où coexistent le mouvement sans contact (no-rub) et le mouvement en précession inverse (dry whip). Le mouvement réellement obtenu dépend donc des conditions initiales. La zone '1' est une zone où coexistent la précession inverse et le mouvement annulaire en précession directe (synchronous full annular rub). Dans la zone '2', le mouvement de précession inverse et le mouvement de rebonds quasi-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

périodiques coexistent. Le mouvement sans contact et le mouvement de contact annulaire en précession directe coexistent dans la zone '3'. Il existe même, dans cet exemple, une petite zone ('4') où trois mouvements sont possibles. Jiang montre que pour une zone donnée la précession inverse est la seule configuration stable.

[COL 08] montre également qu'avec la même configuration de départ, des réponses très différentes peuvent être obtenues en fonction des conditions initiales. Les réponses possibles varient de configurations périodiques à chaotiques [MUS 95]. L'analyse des signaux de déplacement révèle des harmoniques multiples 2X, 3X..., des demi-harmoniques tels que X/2, 3X/2... et même des tiers d'harmoniques de type X/3, 2X/3...

1.1.2 Paramètres numériques influents

L'examen des différentes publications permet de mettre en évidence les paramètres les plus influents.

1.1.2.1 Coefficient de frottement

[CHO 02] montre que le coefficient de frottement joue un rôle majeur. Dans cette étude le coefficient de frottement n'est pas fixé a priori mais déduit du système de forces calculées au contact. Les résultats montrent une très grande variation du coefficient de frottement selon la plage de fonctionnement. [PEN 09] constate également expérimentalement une grande variation du coefficient de frottement près de la vitesse critique. [CHO 94] précise que le ratio entre force tangentielle et normale au contact ne doit pas être assimilé au coefficient de frottement. En utilisant la théorie de Coulomb, le coefficient de frottement ne peut pas excéder la valeur classique associée aux surfaces en présence. Le ratio entre force tangentielle et normale mesure en revanche un coefficient de frottement dynamique.

1.1.2.2 Excentricité du rotor

[CHO 94][CHO 02], montre que l'effet de l'excentricité du rotor est important. En revanche [ZHA 09] conclut de manière inverse sur ce point en comportement annulaire synchrone. De manière générale, la présence d'anisotropies liées par exemple aux caractéristiques de palier, au mésalignement ou aux charges externes peut avoir une influence majeure sur le comportement du système frottant. Pour plus de réalisme [POP 07] considère un décalage entre les centres géométriques du rotor et du stator non déformé sans étudier spécialement son effet.

1.1.2.3 Rigidité du rotor

[CHO 87] montre que la rigidité du rotor joue un rôle important sur les limites d'apparition du mouvement en précession inverse. En effet, plus le stator est rigide, plus les forces de frottement à l'interface sont importantes.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Résultats expérimentaux et numériques convergent pour établir que la meilleure façon d'éviter le phénomène destructeur de 'dry whip' est d'avoir le maximum d'amortissement modal dans le système, d'avoir un coefficient de frottement à l'interface le plus faible possible et d'avoir un coefficient de restitution à l'impact également le plus faible possible (voir [BAR 00] en particulier).

1.1.3 Prise en compte des effets colinéaires à la rotation

La plupart des études numériques ne retiennent que les degrés de liberté latéraux traduisant le comportement du rotor en flexion. [ALB 00] montre un effet significatif sur les réponses ainsi que la possibilité d'apparition de résonance liée aux excitations paramétriques couplant flexion et torsion. En particulier, il montre que la prise en compte des termes de torsion peut entraîner un dédoublement des pics de résonance en flexion. Cependant ces études se basent généralement sur un modèle très simplifié du rotor de type Jeffcott. Les comportements couplés flexion/torsion sont bien pris en compte dans les études s'intéressant aux rotors fissurés. [PAT 09] étudie cette configuration à partir d'une modélisation poutre et montre la possibilité de résonances en torsion induites par le frottement. L'étude est centrée sur la problématique d'identification de défauts (fissure, contact).

Du point de vue du système frottant, en complément des efforts normaux et tangentiels au contact, ces modèles appliquent un moment de torsion dont l'expression est obtenue par le produit du rayon du rotor et de la force tangentielle.

Très peu de travaux concernent l'étude du ralentissement induit par le contact frottant. [PEN 09] évoque cette possibilité mais ne la considère pas en justifiant que le moteur utilisé sur le banc d'essai est capable de maintenir une vitesse constante dans les conditions de l'étude. [GRA 06] propose un modèle où les changements globaux d'énergie cinétique sont considérés et l'applique au cas des roues inertielles (flywheels). Lors de l'interaction, l'énergie cinétique est partiellement dissipée et peut être également partiellement transférée à l'énergie cinétique du rotor en flexion. [ROQ 07] [ROQ 09] s'intéresse au cas du ralentissement d'une turbine à vapeur en situation accidentelle. Le modèle éléments finis développé tient compte du caractère variable de la vitesse de rotation. Une méthode de résolution par intégration temporelle est utilisée et permet de calculer la réponse transitoire de la ligne d'arbre. Des contacts rotor-stator se produisent au passage de la vitesse critique et provoquent une décélération de la turbine. [BRA 07] s'intéresse également au ralentissement en situation accidentelle et présente une démarche couplée numérique expérimental.

1.2 Études expérimentales

Pour le contact rotor-stator, les conditions expérimentales permettant de retrouver les modes de fonctionnement les plus critiques et d'identifier les zones d'instabilité ne sont pas encore totalement maîtrisées. Cependant les différents résultats obtenus sur bancs

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

expérimentaux confirment que les comportements dynamiques peuvent varier en intensité ou évoluer d'une forme à l'autre en fonction de différents paramètres (voir [ISM 95], [FUM 97], [BAR 00], [BEN 02b], [CHO 02], [DAI 02], [CHU 07], [WIL 10]).

1.2.1 Le frottement entre stator et rotor

Un frottement annulaire complet peut donner lieu à une précession inverse en cas d'augmentation des forces de frottement. Ces dernières sont étroitement liées aux états de micro-soudure qui se créent entre partie tournante et partie fixe. Les expériences montrent que la présence d'un film lubrifiant entre rotor et stator élimine tout risque de précession inverse instable. La présence d'huile n'empêche pas, néanmoins, l'établissement de mouvements en précession inverse.

Un couplage dynamique rotor/stator associé aux fréquences respectives du rotor et du stator peut exister. Le couplage rotor-stator lié au contact induit une variation de masse et de rigidité du système couplé. Il peut en résulter une augmentation ou une réduction de la fréquence critique du système si la masse modale ajoutée est supérieure ou inférieure à l'augmentation de rigidité modale. Si la fréquence du stator est supérieure à celle du rotor, les vibrations du rotor sont d'amplitude plus élevée en phase d'accélération qu'en phase de décélération. Le pic de vibration se trouve à une fréquence plus élevée en accélération qu'en décélération (phénomène de jump). Si la fréquence du stator est inférieure à celle du rotor, on peut observer l'effet contraire. En ce qui concerne l'établissement d'une précession directe ou inverse, on constate que l'effet du frottement est dominant sur l'effet associé à la position respective des fréquences du rotor et du stator. [DAI 02] montre qu'il est possible d'identifier un ratio des rigidités stator/palier permettant d'éviter le full rubbing. Les résultats expérimentaux montrent que plus le stator est rigide et plus l'excitation nécessaire pour engendrer du frottement annulaire complet est petite.

Le contact rotor-stator peut également se traduire par des phénomènes de couplage dynamique forts accompagnés par la propagation d'ondes dans la structure. Ce phénomène se présente uniquement avec des stators caractérisés par la propriété de symétrie cyclique. Le temps de maintien à une vitesse de rotation constante est une autre condition importante pour l'établissement du couplage. En phase transitoire et en présence d'un stator non-isotrope le risque de couplage fort est réduit.

1.2.2 Le jeu rotor/stator

Si le ratio entre le jeu et le diamètre de l'arbre au point de contact est petit, les rebonds sont fréquents et le phénomène est plutôt instationnaire. Avec l'augmentation du jeu, le phénomène perd son caractère chaotique et devient stationnaire. Plus le jeu est élevé, plus l'excentricité vibratoire nécessaire pour dépasser le jeu et plus le niveau d'excitation du rotor sont importants. La forme de l'orbite du rotor devient alors très sensible à la vitesse de rotation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

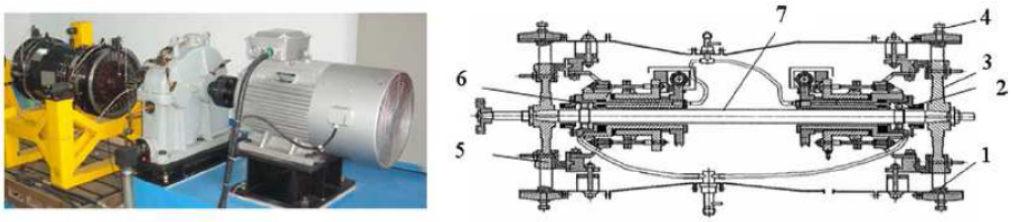
1.2.3 L'effet gyroscopique et la vitesse de fonctionnement

On constate que l'effet gyroscopique est généralement négligeable. Néanmoins, avec un effet gyroscopique important, on peut séparer les modes directs et les modes inverses. Cette configuration est représentative d'un moteur d'avion mais moins d'un corps à basse pression d'une turbine, où les modes direct et inverse sont très proches.

Pour un même ensemble de paramètres expérimentaux, l'établissement d'un comportement vibratoire en précession directe ou inverse semble dépendre des conditions de vitesse antérieures (rotor en ralentissement ou en accélération). Cependant, aucune conclusion générale ne peut être donnée.

1.2.4 L'amortissement

On relève que l'augmentation de l'amortissement modal limite l'apparition de mouvements en précession inverse. [CHE 10] reproduit sur banc la configuration de contact rotor-stator au sein d'une turbine aéronautique (dimension du prototype égale au tiers d'une turbine réelle : figure 1.6). Il démontre que le fait d'adopter un support flexible per-



(a) Photo of the aero-engine rotor tester (b) Section drawing of the aero-engine rotor tester

FIGURE 1.6: Banc d'essais Turbine aéronautique [CHE 10]

met non seulement d'éviter la vitesse critique de flexion mais aussi de réduire les excentricités vibratoires à cette vitesse critique. Il constate que le fait d'augmenter la flexibilité du support permet de générer beaucoup moins de composantes non linéaires (multiples ou fractionnelles). Le risque de comportement chaotique observé avec un support rigide est réduit.

[CHO 01] analyse expérimentalement les phénomènes non linéaires de super-harmoniques, de sous-harmoniques et de jump à l'aide d'un banc d'essais mettant en jeu des contacts intermittents. L'étude compare des résultats numériques obtenus avec deux modèles de contact (un modèle de pénalisation linéaire et un modèle de rebonds de type coefficient de restitution) aux résultats expérimentaux. Les paramètres de restitution, le coefficient de frottement et la raideur de contact sont recalés expérimentalement. Les résultats numériques les plus proches des résultats d'essais en termes de niveau vibratoire et de forme d'orbite sont obtenus à l'aide du modèle de contact linéaire pénalisé. Les orbites expérimentales et numériques sont parfois complètement différentes lors de la montée en vitesse. Ceci paraît indiquer l'existence de réponses multiples, qui peuvent potentiellement donner naissance aux phénomènes de jump, de sous et super-harmoniques,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

voire à des régimes chaotiques.

[CHU 05] présente différents bancs d'essais avec une structure statorique spéciale utilisée pour obtenir un frottement annulaire complet. La concentricité du rotor et du stator est ajustable. Le jeu peut être modifié en inter-changeant les manchons intérieurs pour contrôler l'instant de contact et sa sévérité. Quatre bancs sont utilisés, allant d'un simple rotor mono-disque à un bi-rotor multi-disque. On peut observer les vibrations non linéaires correspondant aux états de contact léger (harmoniques 1 et 2 avec mouvement périodique régulier), contact léger et lourd avec bifurcation (harmoniques 1, 2, 1/2 et 3/2 avec mouvement bi-périodique régulier, tri-périodique dans certaines configurations donnant naissance en plus à l'harmonique 3 ainsi qu'aux composantes fractionnelles 1/3, 2/3, 4/3 et 5/3), contact lourd (mouvement quasi-périodique irrégulier avec un spectre continu autour de l'harmonique 1), comportement chaotique. On observe aussi l'effet rigidifiant du contact.

[DIA 00] réalise des expérimentations de contact rotor-stator pour différentes vitesses de rotation. Les mesures des vibrations latérales sont conformes aux résultats classiques de la littérature. En ce qui concerne les mesures des vibrations en torsion, on constate que la fréquence de torsion mesurée lors du frottement est supérieure à celle sans frottement et atteint une valeur maximale seuil.

[FUM 97] étudie le contact entre un rotor et plusieurs stators de matériaux différents (Graphite, Bronze Béryllium, Bronze, Nylon) associés à des conditions de suspension différentes. Un point intéressant abordé est l'échange d'énergie lors des différentes phases de fonctionnement entre les deux corps en interaction. Une partie de l'énergie de rotation sert à maintenir le mouvement de précession, l'autre partie correspond à la perte thermique sous forme de chaleur.

[BEN 02b] réalise des essais de contact frottant acier/téflon de type annulaire complet avec précession directe (forward precessional full annular rub) et précession inverse (reverse precessional full annular rub ou dry whip) entre un rotor et un joint d'étanchéité. L'analyse s'intéresse au phénomène de saut lors de la précession directe, au mécanisme de déclenchement du rub lors de la précession inverse, aux effets du balourd, de l'état de lubrification en surface, de la vitesse de rotation et de la rigidité du joint. De grands efforts de contact sont générés et l'échauffement local par frottement déforme de façon sévère le joint en téflon et change, par conséquent, la direction normale de contact et le coefficient de frottement équivalent. Le frottement annulaire complet avec mouvement de précession directe peut se transformer en frottement annulaire complet avec mouvement de précession inverse autour de la fréquence de résonance et ce quand le coefficient de frottement rotor/joint devient grand dans les configurations avec petits ratios rayon du rotor/jeu (de l'ordre de 10 à 40) même sans perturbation externe. Pour ce cas de figure, le rotor vient au contact du joint à une fréquence pratiquement constante, supérieure à la fréquence naturelle du rotor seul mais inférieur à la fréquence naturelle du système couplé. Une fois généré, le rub à mouvement de précession inverse peut se maintenir sur toute la gamme de vitesse de rotation du moment qu'il y a encore glissement.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.3 Études existantes en analytique et numérique

La modélisation numérique des phénomènes envisagés suppose des choix de base comme un modèle de contact adapté ou la technique de résolution du problème non linéaire. Compte tenu des efforts de calcul nécessaires, il est en général indispensable d'inclure des techniques de réduction efficaces dans la boucle de résolution.

1.3.1 Modèles de contact

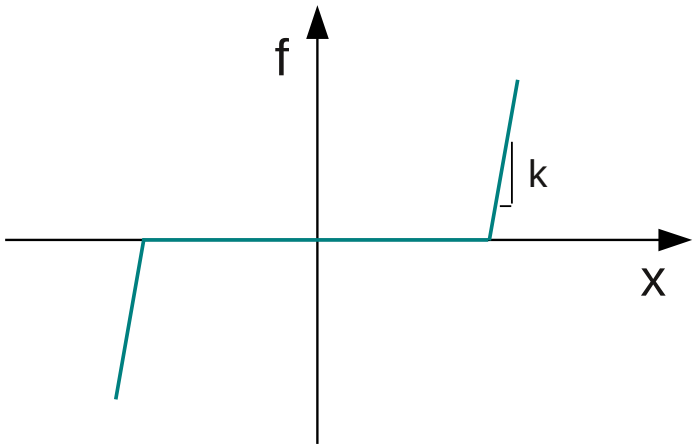


FIGURE 1.7: Loi de contact par pénalisation classique.

La modélisation la plus simple est basée sur l'utilisation d'un coefficient de restitution qui lie les vitesses du rotor avant et après le contact [CON 11]. Ce modèle suppose que le contact est intermittent et qu'un temps significatif sépare deux contacts successifs. Le contact n'induit pas de perte d'énergie. Le temps d'impact et les déformations induites ne sont pas pris en compte, ce qui rend ce modèle peu adapté aux cas du contact rotor stator. De manière plus générale, Les conditions de contact peuvent être intégrées de différentes manières, voir par exemple [WRI 08] :

1. Méthodes des *multiplicateurs de Lagrange*, où le problème de contact unilatéral est traduit en ajoutant des efforts inconnus. Cette méthode permet de respecter les conditions de contact (pas de pénétration aux erreurs numériques près) mais conduit à augmenter la taille du problème en fonction du nombre de multiplicateurs qui reste variable.
2. Méthodes de *pénalité* qui transforment le problème de contact en un problème d'optimisation sans contraintes. La pénalité extérieure, qui autorise une légère pénétration entre les structures, est la plus répandue dans les codes commerciaux. Au contraire, pour la pénalité intérieure ou méthode de barrière, une force empêche

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

les corps de rentrer en contact. Dans ce cas on maintient actives toutes les contraintes de contact, contrairement aux cas des méthodes de Lagrange ou de pénalité extérieure.

3. Méthodes *hybrides ou mixtes*. La méthode des Lagrangiens perturbés a été développée en modifiant les contraintes de contact par des termes de pénalité extérieure. La méthode des Lagrangiens augmentés combine les avantages des Lagrangiens classiques et des méthodes des pénalités. Dans ce cas la condition de non-pénétration est respectée et le problème non-linéaire est équivalent à un problème d'optimisation sans contraintes.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée dans [BAT 08], [BAT 10], [LEG 05], [LEG 09], [ROQ 07], [ROQ 09]. Cependant, la majorité des modèles se basent sur la pénalité et insèrent donc une raideur de contact entre rotor et stator lorsque le déplacement radial du rotor (d) devient égal au jeu (e). Le contact apporte alors une raideur ajoutée qui induit une force de rappel (voir figure 1.7) :

$$f_x = k(1-e/d)(x-\mu y)$$
ou
$$f_x = k(1-e/d)(x+\mu y)$$
$$f_y = k(1-e/d)(y+\mu x)$$
ou
$$f_y = k(1-e/d)(y-\mu x)$$

k représente la raideur du stator dans la direction radiale. L'effort tangentiel est généralement obtenu à partir de la loi de Coulomb avec μ coefficient de frottement. x et y sont les déplacements plans du centre du rotor. Le signe + ou - utilisé est conditionné par le signe de $\Omega R + V_t$, avec Ω la vitesse angulaire du rotor, R son rayon et V_t la vitesse du centre du rotor dans la direction tangente au contact comptée positive dans la direction trigonométrique. Si le signe est positif, la force de frottement agit dans la direction anti-trigonométrique et les signes - /+ s'appliquent respectivement pour f_x et f_y. Les modèles ne prenant pas en compte l'évolution possible de ces signes ne sont pas en mesure de rendre compte du phénomène de dry whip.

La prise en compte d'un système ressort amortisseur ne pose pas de difficulté de principe mais dans tous les cas ce type de modèle suppose une bonne estimation de la raideur de contact et du coefficient d'amortissement. Les études réalisées considèrent souvent une raideur de contact trop faible, ceci pour améliorer la convergence des schémas numériques. [ZHA 09] propose une technique permettant d'assurer une bonne estimation de k. [WIL 10] recale le coefficient d'amortissement à partir de résultats expérimentaux. [POP 07] établit une relation entre la raideur du ressort et le coefficient d'amortissement par l'intermédiaire de la théorie des chocs [BRA 91]. Il peut ainsi fixer la raideur et en déduire la valeur du coefficient d'amortissement.

Pour les modèles incluant un amortisseur, il est nécessaire de faire attention aux conditions de séparation du rotor et du stator. La séparation correspond à l'instant où la force

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

de contact s'annule. Du fait de la prise en compte de l'amortissement, il n'y a plus coïncidence entre annulation de la force et pénétration nulle, la force s'annulant généralement un peu avant la fin de la pénétration.

D'autres modèles existent pour le contact rotor-stator/aube-carter. La théorie de Hertz suppose que la force au contact est proportionnelle à $(d-e)^{(3/2)}$. L'utilisation de ce type de modèle pose deux problèmes. Son caractère non linéaire le rend complexe à manipuler et les géométries en contact ne respectent généralement pas les conditions d'utilisation de la théorie qui suppose que les rayons de courbure des surfaces ne soient pas trop proches. Selon [POP 07], [RIV 99] propose deux relations pour décrire la force de contact entre deux surfaces cylindriques de rayons proches. Une linéaire $k(d-e)$ valable pour les faibles valeurs de forces et $k(d-e)^2$ ailleurs. [WIL 10] modélise la force au contact sous la forme $k_1(d-e)+k_2(de)^2+c(d-e)(d-e)$ dérivée de la théorie de contact développée par Hunt et Crossley. [CHU 07] s'intéresse à la raideur globale du système au moment de l'impact. Il identifie cette raideur à partir de résultats numériques ou expérimentaux. La prise en compte de déformations plastiques induites par le contact est évoquée dans plusieurs publications qui suspectent un effet significatif mais n'est jamais mise en œuvre.

1.3.2 techniques de résolution numériques

Pour l'analyse numérique des problèmes dynamiques en présence de contacts on distingue les méthodes temporelles et les méthodes fréquentielles. Les méthodes fréquentielles permettent de déterminer des régimes périodiques ou quasi-périodiques, tandis que les méthodes temporelles permettent également de déterminer des régimes chaotiques.

1.3.2.1 Méthodes temporelles

Les méthodes temporelles sont basées sur les schémas d'intégration numérique usuels : Runge-Kutta [EDW 99], [FEN 02], [CHO 02], [WIL 10], [CHU 98], [GRA 06], [CHU 97], schéma prédicteur correcteur [ALB 00], Newmark [BAT 08], [BAT 10], [CHO 87], [LEG 05], [LEG 09], [PAT 09], [QIN 04], [PEN 09], [ROQ 07], [ROQ 09], time forward integration [POP 07], implicit Hilbert-Hughes-Taylor [CHE 97]. L'utilisation de schémas numériques nécessite de détecter avec précision les instants de mise en contact et de séparation. Ces paramètres influencent fortement la précision des résultats calculés.

1.3.2.2 Méthodes fréquentielles

La plus ancienne mais également la moins élaborée des méthodes fréquentielle est la méthode spectrale. Nelson et Alam dans [ALA 85] utilisent cette méthode pour estimer la réponse d'un rotor à la suite d'une perte d'aube. Ils utilisent une approche spectrale issue de la théorie des chocs. Cette approche est efficace mais reste linéaire, tant du point de vue du comportement des paliers que de l'absence de prise en compte du contact possible

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

rotor-stator. Une méthode similaire mais cette fois appliquée à un système non linéaire est proposée par Ferreira et Serpa dans [FER 05]. Dans leur article, l'hypothèse est faite que la fréquence fondamentale a une importance prépondérante dans la réponse du système, les harmoniques ayant alors une influence du second ordre.

La recherche des solutions périodiques se fait le plus souvent par la méthode de la Balance Harmonique (HBM) qui consiste à rechercher les solutions sous la forme d'une série de Fourier contenant un certain nombre d'harmoniques. Les expérimentations montrent que le contenu fréquentiel des réponses en fonctionnement est souvent limité, ce qui justifie l'intérêt pour ce type de méthodes. En revanche, pour être intéressante et ne pas nécessiter l'emploi de trop de composantes, l'utilisation de la balance harmonique suppose une certaine connaissance a priori du comportement du système, connaissance obtenue à partir de l'expérience acquise, d'expérimentations ou de simulations temporelles préalables. Plusieurs variantes existent : HBM appliquée dans le repère tournant en se basant sur la fréquence fondamentale du contact [COL 03], HBM appliquée dans le repère fixe avec continuation par longueur d'arc [VON 01], HBM simple [CHU 98], HBM et algorithme alterné temps fréquence [KIM 96] (l'étude néglige le frottement). Cette méthode a déjà prouvé son efficacité dans l'étude des interactions entre plusieurs étages d'une même turbine [HE 02] ou pour l'étude de zones de contact avec frottement en cas de perte d'aube [PET 04, PET 08a, PET 08b, PET 06]. Petrov va plus loin en proposant aussi une étude analytique de la stabilité et de la sensibilité [PET 09b, PET 09a, PET 03] de sa méthode. Une autre variante de la balance harmonique est la technique dite de la balance harmonique incrémentale. Les premiers travaux concernant cette méthode ont été effectués par Lau et Cheung [LAU 81, LAU 82]. Bien qu'elle soit légèrement plus complexe à mettre en œuvre, cette variante est en réalité équivalente à la méthode de balance harmonique standard. Néanmoins, les termes non-linéaires sont plus faciles à calculer car la procédure de Newton-Raphson est effectuée en premier ce qui linéarise les équations du mouvement. Des améliorations ont été proposées pour ces méthodes afin de pouvoir prédire des régimes quasi-périodiques (ce qui peut arriver par exemple lorsque plusieurs excitations périodiques de périodes incommensurables sont exercée en même temps sur la structure). Lau [LAU 83] ainsi que Kim et Choi[KIM 97] ont développé la MHBM (Multiple Harmonic Balance Method). Coudeyras [COU 09] propose une généralisation de la méthode de la balance harmonique qu'il nomme GCHBM pour Generalized Constrained Harmonic Balance Method qui permet elle aussi de calculer des réponses pseudo-périodiques.

Comme autre méthode fréquentielle, on peut également mentionner la méthode de collocation trigonométrique. Zhao [ZHA 94a, ZHA 94b] utilise cette méthode pour étudier le comportement d'un rotor en présence de paliers non linéaires à film d'huile. Pour étudier un système similaire, Shiau [SHI 93] propose une méthode hybride entre la HBM et la méthode de collocation trigonométrique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.3.2.3 Méthodes analytiques

Dans le cas de modèles de rotors simples, quelques formulations analytiques ont été développées. [ZHA 09] propose une formulation analytique adaptée à la configuration de frottement annulaire synchrone. Déjà cité plus haut, Jiang [JIA 09] développe une formulation analytique plus générale incluant différentes phases de comportement. Pour les phases de comportement en frottement partiels, il met en évidence les limites d'apparition du comportement frottant. [GRA 06] traite un problème de roue inertielle avec un rotor rigide et peut ainsi développer une formulation analytique simple. [CHI 07] traite les mouvements établis whirl et whip à partir d'un modèle réduit obtenu après projection des équations du rotor en base modale.

1.4 Réduction de modèle

Pour les systèmes linéaires, on distingue quatre grandes familles de techniques pour développer des modèles réduits.

- Les méthodes d'approximation modale
- Les méthodes de Krylov (Krylov based methods)
- Les méthodes basées sur la décomposition en valeurs singulières (SVD methods)
- Les méthodes hybrides Krylov-SVD qui tentent d'allier les avantages de ces deux dernières

Ces techniques sont largement traitées dans la littérature. En revanche, en ce qui concerne les techniques de réduction en non-linéaire, nous verrons que moins de choses sont disponibles.

Dans un premier temps on peut s'intéresser à l'utilisation de méthodes de *projections modales en linéaire*. L'approche la plus simple consiste à réduire le nombre de degrés de liberté du problème non linéaire en projetant les équations dans la base des modes propres linéaires. Pour être efficace les bases modales sont tronquées et il est possible d'utiliser des techniques spécifiques (Mode Acceleration ou Modal Truncation Augmentation [PAR 04, SUN 03, SUN 08]) pour diminuer l'effet des troncatures. On peut étudier pour cela la thèse de Batailly [BAT 08] ainsi que les travaux de Ahrens et Ahaus [AHR 06].

Une évolution de cette première possibilité consiste à distinguer au sein de la structure quelles sont les parties qui conservent un comportement linéaire et les parties qui sont susceptibles d'avoir un comportement non linéaire (typiquement ici, les parties qui peuvent subir du contact) [ZHE 99][SIN 07]. On sépare alors les degrés de liberté en degrés de liberté linéaires et degrés de liberté non-linéaire. On peut alors traiter séparément les deux en projetant la partie linéaire sur ses modes propres pour en réduire le nombre de degrés de liberté tout en conservant l'ensemble des degrés de liberté non linéaire dans la base physique. On peut coupler les deux parties par des méthodes de type mortar method [FAU 03] pour retrouver la dynamique de l'ensemble. Dans la même famille de méthode, notons également la méthode dite d'*hyper-réduction* [RYC 05]. Cette méthode est aussi une méthode de projection modale cependant l'intérêt est ici de ne pas avoir à calculer à priori les modes propres de la structure. En effet, l'algorithme détermine lui-même, à

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

partir de critères d'erreur bien choisis, les modes qui sont à calculer et à utiliser pour la projection du champ de déplacements. Cette méthode fait l'objet de recherches en cours et pourrait être creusée avec intérêt.

Une autre branche consiste à effectuer une *décomposition de domaine du système*. La thèse de Sternschüss [STE 09] fait un état de l'art de l'ensemble des méthodes de décomposition de domaine qui ont un intérêt dans le cadre de l'étude de turbines davion. On peut noter en particulier la méthode de synthèse modale (Component Mode Synthesis method (CMS)) qui est utilisée par Sundararajan et Noah [SUN 98] et par Blah [BLA 01a, BLA 01b, BLA 02] consistant à décomposer la structure en un ensemble de sous-structures indépendantes qui sont séparées par des interfaces et sur lesquelles on peut condenser les degrés de liberté. Le nombre global de degrés de liberté de la structure est réduit tout en conservant les degrés de liberté sur lesquels vont agir les non linéarités. Les schémas de résolution restent cependant inchangés et le défi consiste à réaliser et optimiser le degré de réduction. Le principe de base de ces méthodes est maintenant bien connu et illustré dans la littérature sur des exemples restant souvent simple. De nombreuses techniques de sous-structuration existent. On peut citer les techniques de Craig et Martinez, MacNeal, Rubin, Hurty ou bien Hintz, la plus souvent employée étant la technique de Craig et Bampton.

Enfin, il existe des développements qui introduisent le concept de *modes non linéaires*. Un mode non linéaire est vu comme un mouvement vibratoire libre d'un système autonome avec un déphasage éventuel entre les degrés de liberté. Il n'y a alors plus besoin de faire de séparation entre les domaines avec comportement linéaire ou non. On peut citer les travaux de Butcher [BUC 01, BUT 07], Laxalde et Thouverez [LAX 09] et Pesheck et Pierre [PES 01, PES 02b] qui appliquent cette méthode dans le cas de machines tournantes. Cette même technique est utilisée sur des modèles de structures minces par Touzé [TOU 04][TOU 06][TOU 08]. La technique dite des variétés (variétés centrales, variétés invariantes) (center manifolds, invariant manifolds) [SIN 04b, SIN 05b, SIN 05a] semble allier qualité des résultats et rapidité d'exécution.

1.4.1 Principe général

De manière générale, toutes les techniques de réduction de modèle visent à résoudre un système matriciel de plus petite taille que le problème initial.

Le système non réduit à résoudre peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{1.1}$$

Avec,
M la matrice de masse,
C la matrice d'amortissement (qui peut contenir les termes gyroscopiques),
K la matrice de rigidité.
On note **x** le vecteur déplacement des nœuds et **F** le vecteur des efforts extérieurs.

Ce système est caractérisé par sa taille n qui dépend de la discrétisation en éléments finis du modèle physique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Les techniques de réduction de modèle consistent donc à trouver une base ϕ de vecteurs sur laquelle le système sera projeté. On aboutit après projection à un système du type :

$$\widehat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \widehat{\mathbf{F}} \tag{1.2}$$

Avec,
$\widehat{\mathbf{M}} = \phi^T \mathbf{M}\phi$ la matrice de masse réduite,
$\widehat{\mathbf{C}} = \phi^T \mathbf{C}\phi$ la matrice d'amortissement réduite,
$\widehat{\mathbf{K}} = \phi^T \mathbf{K}\phi$ la matrice de rigidité réduite.
$\mathbf{q} = \phi^T \mathbf{x}$ représente la nouvelle inconnue dans la base réduite.
$\widehat{\mathbf{F}} = \phi^T \mathbf{F}$ est le vecteur des forces extérieures projeté.

Le nouveau problème à résoudre n'est plus de taille $n \times n$ mais $m \times m$ avec m le nombre de vecteurs retenus dans la base ϕ.

1.4.2 Techniques de projection sur modes linéaires

1.4.2.1 Principe de base

Une première approche possible pour traiter le problème serait d'effectuer une réduction de modèle par projection sur une base tronquée des modes propres linéaires non amortis obtenus par résolution de :

$$\mathbf{K}\phi = \mathbf{M}\phi\omega^2 \tag{1.3}$$

où ω^2 représente la matrice diagonale contenant le carré des fréquences propres des modes retenus.

Cette technique peut permettre une résolution directe avec, par exemple, une technique d'intégration temporelle. Cependant, elle présente certains inconvénients. La première question qui se pose est relative au nombre de modes qu'il convient de conserver pour bien représenter le comportement dynamique du système. En général, on ne conserve que les modes dont la fréquence propre est inférieure à une valeur choisie. On peut alors se contenter de ne calculer que les m premiers modes propres du système par une méthode de Krylov (Lanczos, Arnoldi) ou bien par une méthode de Newton (Jacobi, Davidson), ce qui permet de gagner du temps.

Appliquée à un problème non linéaire, en plus du problème concernant le nombre de modes à conserver pour avoir une bonne représentation dynamique du système, se pose celui du traitement des non linéarités. En effet, dans le cas que nous cherchons à traiter, apparaissent des efforts extérieurs non linéaires qui nécessitent donc la connaissances des déplacements dans la base physique pour pouvoir être déterminés. Or, la détermination des inconnues se fait dans la base modale. Il serait donc nécessaire, à chaque pas de temps, de basculer dans la base physique afin de calculer les efforts $\mathbf{F}$, puis rebasculer dans la base modale pour avoir $\widehat{\mathbf{F}}$ et résoudre le problème réduit. Le coût en terme de temps de calcul de cette opération peut être pénalisant.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Lors de la projection des efforts extérieurs **F**, seulement une partie de la dynamique de l'effort est représentée. Cette troncature provoque une perte d'information sur le second membre de l'équation à résoudre. Plusieurs techniques existent pour tenter de diminuer l'effet de cette troncature. Parmi elles, la méthode MTA (Modal Truncation Augmentation method) (détaillée en annexe A) est la plus souvent utilisée. Il a notamment été prouvé que cette dernière est supérieure à la méthode MA (mode acceleration method) [DIC 97].

1.4.2.2 Technique d'hyperréduction de modèle

Toutes les méthodes de réduction modale sont des méthodes dites à posteriori car il est nécessaire de d'abord calculer la base de projection avant de pouvoir effectuer une résolution de modèle réduit. Une piste potentiellement intéressante est celle des techniques dites d'hyperréduction à priori [RYC 05]. La méthode décrite dans cet article parle de l'extension de la technique de Karhumen-Loève à priori. L'algorithme détermine tout seul quels sont les modes à calculer afin de respecter des critères d'évolution sur les variables choisies. La construction du modèle réduit est alors automatisée et son adaptation se fait en complétant le sous-espace des fonctions de forme puis en sélectionnant celles qui représentent au mieux l'évolution de la variable d'état choisie. L'hyperréduction est obtenue en faisant une prévision de l'évolution des variables du modèle réduit en utilisant une partie des points d'intégration du modèle éléments finis. Ainsi, on réduit à la fois le nombre de degrés de liberté et le nombre de points d'intégration. Dans la publication [RYC 05], la technique est appliquée à un problème de thermique transitoire non linéaire 3D mais rien en théorie n'en empêche l'adaptation à un problème de contact avec frottement. Il ressort que la taille du modèle réduit ne dépend pas du nombre de degrés de liberté utilisé initialement pour discrétiser la structure. Ainsi, l'auteur fait remarquer que les gains en vitesse d'exécution deviennent appréciables pour un modèle non réduit d'environ 2000 degrés de liberté.

Cette méthode pourrait être utilisée avec intérêt dans le cadre de notre problématique. Cependant, il est difficile de prévoir à l'avance si les gains seront réellement au rendez-vous. En effet, l'étude de cas industriels aboutit à des modèles 1D de l'ordre du millier de degrés de liberté. Bien que le type de problème traité soit différent que celui de Ryckelynck il n'est pas sur que les gains soient effectifs. Cette technique est surtout adaptée à des problèmes 3D. De plus, l'implémentation de cette technique est particulièrement complexe.

1.4.3 Les techniques de décomposition de domaine (condensation)

Les techniques de décomposition de domaine consistent à découper le modèle en sous-domaines reliés entre-eux par des interfaces. L'objectif initial de ces techniques est de pouvoir traiter indépendamment chaque sous-domaine dans des buts de parallélisation des calculs. Comme nous venons de le voir, le principal inconvénient des techniques de projection modale classiques pour des problèmes non linéaires est le fait qu'une fois projetés sur la base modale, on ne peut plus utiliser les coordonnées physiques des degrés de lib-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

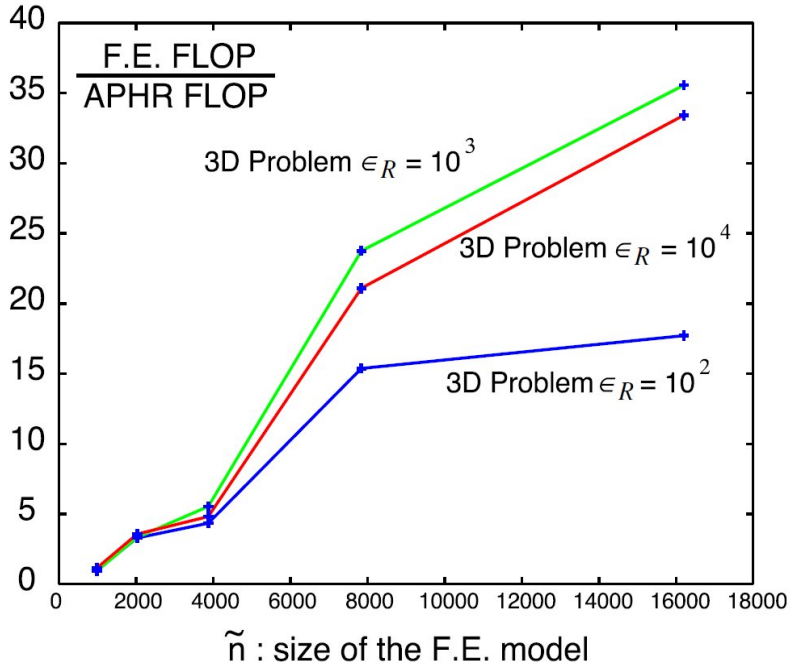


FIGURE 1.8: Gain en terme de nombre d'opérations à virgule flottante de la méthode APHR par rapport à une intégration temporelle directe [RYC 05]

erté. Le calcul des efforts non linéaires requiert donc un aller-retour continu entre la base physique et la base modale. Or, comme nous allons le voir dans ce paragraphe, derrière les techniques de décomposition de domaine se cachent des techniques de condensation qui, pour certaines, permettent de réduire le modèle tout en conservant la possibilité de garder certains degrés de liberté choisis dans le domaine physique. Ces techniques utilisent aussi les notions de modes de projection.

1.4.3.1 Aspects théoriques

Quelle que soit la méthode CMS appliquée il est nécessaire de procéder à un découpage du domaine d'étude Ω. La frontière $\partial\Omega$ est partagée en trois sous-domaines tels que $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{f_1} \cup \partial\Omega_{f_0}$. $\partial\Omega_u$ est la partie de la frontière $\partial\Omega$ où sont appliquées des conditions aux limites en déplacement. $\partial\Omega_{f_1}$ est la partie de la frontière où sont appliqués des efforts non nuls (avec $\partial\Omega_{f_1} \cap \partial\Omega_u = \varnothing$). Enfin, $\partial\Omega_{f_0}$ est la partie de la frontière où l'on impose un effort extérieur nul (avec $\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_{f_0} = \varnothing$ et $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{f_0} = \varnothing$). On fera dans la suite la distinction entre les degrés de liberté dits « extérieurs » qui sont les degrés de liberté appartenant à l'ensemble $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{f_1}$ et les degrés de liberté « intérieurs » qui sont ceux qui appartiennent à l'ensemble $\Omega \cup \partial\Omega_{f_0}$ (cf Fig 1.9).

Nous allons nous intéresser à deux méthodes particulières. Une méthode dite à interface fixe, celle de Craig et Bampton [CRA 68], qui est la méthode de décomposition de domaine la plus répandue. En effet, sa facilité de mise en œuvre, sa stabilité et la qualité de ses résultats en ont fait une référence en la matière. La seconde méthode que nous

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

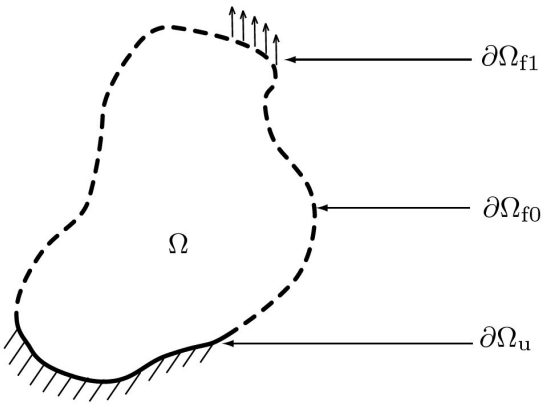


FIGURE 1.9: Représentation symbolique d'une structure [BAT 08]

allons voir est une méthode à interfaces libres, la méthode de Craig et Martinez. Ces deux méthodes sont comparées de façon complète dans la thèse de Batailly [BAT 08]. Elles

1.4.3.2 La technique de Craig et Bampton

La réduction de modèle par la méthode de Craig et Bampton se fait en plusieurs étapes. Après permutation des lignes et des colonnes des matrices **K**, **M** et **C** suivant qu'elles sont associées à des degrés de liberté intérieurs ou des degrés de liberté extérieurs, plusieurs modes linéaires sont calculés. Dans la méthode de Craig et Bampton, il existe deux types de modes.

- *Les modes statiques.* Les modes statiques correspondent aux déformées du domaine lorsque l'on impose un déplacement unitaire à un des degrés de liberté extérieurs alors que tous les autres degrés de liberté extérieurs sont bloqués. Il existe donc autant de modes statiques que de degrés de liberté extérieurs.
- *Les modes encastrés.* Les modes encastrés correspondent au modes libres de la structure ayant ses degrés de liberté extérieurs bloqués. En réalité, pour avoir une réduction de modèle effective, on tronquera cette base.

La matrice de projection peut ainsi être construite en concaténant les modes statiques et la partie des modes encastrés que l'on aura conservé. La projection du système s'opère alors comme décrit plus haut (voir Eq. 1.1 et 1.2).

1.4.3.3 La technique de Craig et Martinez

La méthode de Craig et Martinez est une méthode dite à interfaces libres, c'est à dire que la base modale de la structure est calculée lorsque les degrés de liberté extérieurs sont libres. Les modes que l'on calcule alors sont donc les modes propres classique de la structure. Cependant, dans la méthode de Craig et Martinez, ces modes propres sont enrichis par des modes de correction pseudo-statiques. Ces modes existent du fait qu'en projection modale classique, seulement une partie des efforts qui s'exercent sur la struc-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

ture est prise en compte. En effet, lors de l'étape de projection du modèle complet sur la base réduite, le vecteur force **F** est lui aussi projeté. Il en résulte que certaines des composantes modales de **F** ne sont pas représentées dans le modèle réduit. Les termes de correction pseudo-statiques sont calculés en faisant l'hypothèse que les composantes modales non représentées de **F** n'ont qu'une influence sur la statique du système (l'influence dynamique est nulle). Cette hypothèse est d'ailleurs la base de la méthode MA (Mode Acceleration [WIL 45]).

1.4.4 Les méthodes basées sur la SVD

Il existe une autre classe de méthodes de réduction : les méthodes basées sur la POD (Proper Orthogonal Decomposition). En dimension finie, ces techniques se basent sur la SVD (Singular Value Decomposition). Contrairement aux techniques que nous avons vu dans les précédents paragraphes, les techniques basées sur la SVD traitent le problème de façon purement mathématique. En effet, dans les techniques de projection modale ou bien dans les techniques de condensation de type Craig et Bampton, on fait appel à des modes composants qui ont une signification physique (modes libres, modes contraints). Avec la SVD, ces notions là n'existent pas. La construction du modèle réduit se base sur le calcul de la solution du modèle non réduit sur quelques pas de temps.

Le principal avantage de la méthode SVD est qu'elle permet de prendre en compte le chargement réel (et non pas une projection sur des modes) pour la détermination de la base de projection. Ceci constitue aussi sont plus gros inconvénient car il est nécessaire de faire un calcul sur le modèle non réduit sur plusieurs pas de temps. Même si le nombre de pas de temps est faible, le temps de calcul nécessaire peut-être handicapant. De plus, dans notre cas, la complexité du chargement dû notamment à sa nature intermittente (contact), nécessiterait d'effectuer plusieurs calculs de cette base à des instants différents. Le coût de calcul serait alors potentiellement prohibitif. Ces techniques sont développées plus en détails en annexe A.

1.4.5 Techniques basées sur la notion de modes non-linéaires

1.4.5.1 Non linear Normal Modes

Une autre branche, qui reste l'objet de nombreuses recherches est la famille des méthodes qui se basent sur la notion de modes non linéaires ou modes normaux non linéaires (NNM Nonlinear Normal Mode). Comme vu plus haut, il est tout à fait possible de se contenter des modes linéaires pour traiter un problème non linéaire, cependant, essayer d'appliquer une analyse linéaire à un système non linéaire aboutit au mieux à un résultat non optimal. C'est pourquoi on pourrait penser que les NNM sont de bons candidats pour aboutir à une analyse plus fine du problème.

En réalité, les modes non linéaires ont eut plusieurs définitions selon l'époque et les auteurs. Dans [KER 09], les auteurs retracent de façon générale l'histoire des modes non linéaires depuis les premiers développements fait par Rosenberg [ROS 60, ROS 62,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

ROS 66] jusqu'aux développements les plus récents fait entre autres par Pierre et Shaw [SHA 91, SHA 93]. La définition la plus large que l'on peut donner à un NNM (celle de Rosenberg) est *vibration à l'unisson du système*. Notons que cette définition englobe aussi aux modes normaux linéaires (LNM Linear Normal Mode). Cette définition signifie que lorsqu'un système vibre selon un NNM, tous les points matériels atteignent leur déplacement maximal au même moment. De même, cela signifie aussi qu'ils passent par leur zéro en même temps. Cependant, les NNM se distinguent par le fait que la fréquence de vibration évolue en fonction de l'amplitude du mouvement (autrement dit, en fonction du niveau énergétique). Cette définition sera plus tard étendue pour prendre en compte les système amortis ainsi que pour représenter les résonances internes. On préférera alors parler de *mouvement périodique non nécessairement synchrone*.

On remarque que l'utilisation industrielle des NNM est quasi-inexistante. Les principales raisons qui expliquent cela sont :

1. Garder un modèle linéaire est plus pratique car les systèmes non linéaires peuvent avoir des comportements complexes : sauts, bifurcations, résonances internes, intéractions modales, chaos, etc.
2. Les NNM ont deux limitations que les LNM n'ont pas. Le principe de superposition ne s'applique pas. Les NNM ne vérifient pas les mêmes propriétés d'orthogonalité que les LNM. Il est donc plus délicat de former des bases de NNM pour faire, par exemple, de la réduction de modèle.
3. La plupart des exemples d'application dans la littérature n'utilisent que des modèles à très faible nombre de degrés de liberté.
4. Il existe relativement peu de méthodes numériques pour calculer les NNM. Beaucoup d'approches, en revanche, consistent à faire des développements asymptotiques, ce qui implique des traitements mathématiques assez lourds.

Les NNM ont cependant un gros potentiel car ils permettent de modéliser la réalité plus fidèlement, mettant plus facilement en évidence certains phénomènes physiques [KER 09]. Les NNM ont des propriétés uniques.

1. Contrairement aux LNM, les NNM ont une fréquence qui dépend du niveau énergétique de celui-ci. Cette dépendance interdit la séparation entre temps et espace dans les équations du mouvement.
2. Il existe avec les NNM, des phénomènes d'interaction modales et de résonance interne. L'interaction modale est le fait de pouvoir observer un transfert d'énergie entre les modes. Par exemple, si on excite une structure selon un modes haute fréquence alors il est possible que la réponse soit un mouvement selon un mode de basse fréquence.
3. Il se peut que certains NNM soient instables. On peut en effet observer des bifurcations dans la réponse modale d'un système. Ce phénomène n'existe pas avec les LNM. De plus, pour un système discrétisé à n degrés de liberté, il peut exister un nombre de NNM supérieur à n. Les modes de résonance interne en sont un exemple.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.4.5.2 Calcul des NNM

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les NNM d'un système. Elles sont ici classées en méthodes analytiques et en méthodes numériques. Ceci n'est en aucun cas une liste exhaustive.

Méthodes analytiques Les méthodes analytiques ont été les premières à avoir été développées. Rosenberg est à l'origine de la première méthode basée sur l'énergie [ROS 66]. Il existe aussi les méthodes basées sur les variétés invariantes (invariant manifold method) introduites par Shaw et Pierre [SHA 91, SHA 93] qui est une extension de la méthodes des variétés centrées (center manifold method) qui est similaire dans l'esprit à la méthode énergétique de Rosenberg.

Dans un autre registre on peut aussi noter les méthodes basées sur les échelles multiples (multiple scales method) qui sont des méthodes de perturbation [NAY 94, GEN 04, WAN 07].

Les détails de ces méthodes ne sont pas développés ici car ces méthodes analytiques ont plusieurs inconvénients très handicapants dans le cadre de notre problématique. Comme ces méthodes se basent sur des développements asymptotiques, elles ne sont valables que pour de faibles non-linéarités géométriques seulement. De plus, leur nature analytique rend leur mise en œuvre délicate, surtout pour des systèmes dont le nombre de degrés de liberté dépasse quelques unités.

Méthodes numériques Relativement peu de méthodes numériques ont été développées pour le calcul des NNM. Nous allons en citer deux exemples. Les méthodes numériques n'ont pas les inconvénients des méthodes analytiques citées ci-dessus, c'est à dire qu'elles sont applicables à des systèmes ayant beaucoup plus de degrés de liberté et comportant de fortes non-linéarités. Plusieurs de ces méthodes sont des extensions des méthodes analytiques citées ci-dessus.

La première méthode, basée sur la définition des NNM de Rosenberg, consiste à faire une intégration temporelle directe des équations du mouvement en utilisant des algorithmes de type Newmark ou Runge-Kutta [SLA 96] puis à isoler une période de la réponse une fois le régime périodique atteint. Cette méthode, très lourde en terme de temps de calcul, ne présente évidement que peu d'intérêt sauf si elle est couplée avec des techniques pour réduire le temps de calcul comme la méthode de tir (Shooting method[PEE 09]) et des méthodes de continuation comme la continuation séquentielle ou (pseudo-) continuation par longueur d'arc ((pseudo-)arc length continuation). D'autres méthodes se basent sur l'extension de la méthode des variétés invariantes ou la formulation polynomiale est remplacée par une méthode de Galerkin [PES 00, PES 02a], et d'autres sur l'extension de la méthode à échelles multiples.

La seconde méthode est celle de la méthode de la balance harmonique [LAX 09][GUS 08][COU 09][SAR 11]. Cette technique peut d'ailleurs être considérée comme une méthode semi-analytique car bien qu'elle puisse être mise en œuvre

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

entièrement numériquement, elle peut aussi être améliorée par des considérations analytiques.

1.4.5.3 Réduction de modèle utilisant les NNM

Un des axes de recherche sur les NNM concerne la réduction de modèle. En effet, il est légitime d'essayer d'utiliser les NNM pour la construction de bases de projection à la manière dont on utilise habituellement les LNM. On s'attend à ce que l'usage des bases de projection établies à partir des NNM permettent d'obtenir de meilleurs résultats que celles obtenues à partir de LNM car les NNM représentent directement les réponses libres ou forcées du système. Cette différence de précision dans les résultats serait d'autant plus accentuée que le système posséderait de fortes non-linéarités (voire même, des non-linéarités non linéarisables). Cependant, comme dit plus haut, la principale difficulté réside dans le fait que les NNM ne possèdent pas les mêmes propriétés d'orthogonalité que les LNM. On ne peut donc pas former les bases de NNM de la même façon que l'on forme des bases à partir de LNM. La construction de modèle réduit à partir de NNM se fait par un changement non linéaire de coordonnées [TOU 06] (qui peut être couplé ou non avec une réduction classique utilisant les modes linéaires). Dans [TOU 08], les auteurs appliquent cette méthode à un problème de vibration de plaque fine avec non linéarité géométrique. Les résultats obtenus avec un seul NNM sont similaires à ceux obtenus avec une dizaine de LNM (voir Fig 1.10).

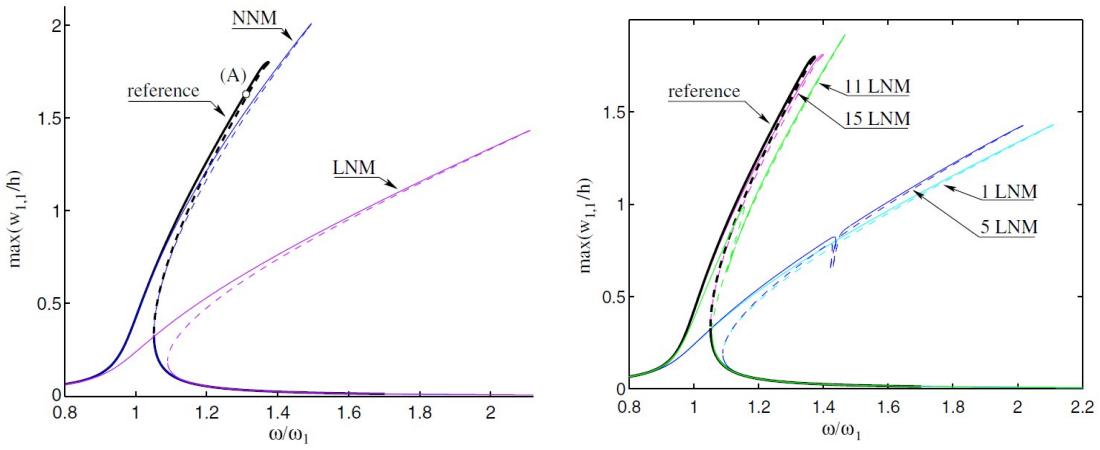


FIGURE 1.10: Comparaison de l'évolution vibratoire d'un degrés de liberté entre la référence et le modèle réduit avec NNM ou LNM. [TOU 08]

Deux approximations font que la mise en œuvre est limitée à des non linéarités géométriques et à de relativement faibles amplitudes d'excitation. La première est liée au fait que les NNM sont calculés par un développement asymptotique par la technique des variétés invariantes. D'autres part, les NNM calculés ainsi ne dépendent pas du temps mais sont cependant utilisés pour approximer des variétés invariantes qui elles dépendent du temps [JIA 05a] [PES 00]. Il existe, néanmoins, des techniques qui utilisent des NNM

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

qui dépendent du temps (des NNM calculés numériquement) pour s'affranchir de ces limitations au prix d'un temps de calcul plus long. Ceci a été fait par Jiang [JIA 04, JIA 05b] ainsi que par Pesheck [PES 00, PES 02a]. Le principal intérêt de ces techniques qui sont quasiment entièrement numériques est qu'il est alors possible d'étudier des systèmes avec de fortes non linéarités [SIN 05b] [PES 01].

On peut encore notamment citer les travaux d'Apiwattanalunggarn [API 05] qui a proposé une extension de la technique CMS de Craig et Bampton pour pouvoir utiliser des modes non linéaires. Les modes à interfaces fixes sont alors des NNM calculés par la technique des variétés invariantes. Les auteurs affirment que leur méthode est utilisable sur des systèmes éléments finis avec de nombreux degrés de liberté.

D'autre part, les travaux de Butcher ont mis en évidence la possibilité d'utiliser les modes non linéaires avec des non linéarités de type contact/choc. Les auteurs proposent dans [BUT 07] deux méthodes pour construire un modèle réduit à partir de NNM. Une de ces méthode est appliquée sur un système à 4 degrés de liberté avec des non linéarités de type choc, géométrique et amortissement.

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de dresser un bilan des aspects et phénomènes physiques dont il faut tenir compte dans le choix de modélisation et de résolution du problème de contact rotor-stator afin d'obtenir des simulations rapides tout en restant fidèle à la réalité physique. Si l'on met de côté le cas chaotique relativement peut étudié, l'étude bibliographique met en évidence trois comportements typiques du contact rotor-stator :

- Le contact annulaire complet (ou partial) périodique en précession directe.
- Le contact partiel quasi-périodique en précession directe.
- Le contact violent en précession inverse (avec ou sans glissement).

Les paramètres les plus influents pour l'apparition ou non de ces phénomènes sont le coefficient de frottement rotor-stator, le jeu entre le rotor et le stator, l'excentricité et la rigidité du rotor, l'amortissement du système et du contact en particulier, l'effet gyroscopique et la vitesse de fonctionnement. Il a été montré qu'à cause de la nature non linéaire de ce type de problème, ces phénomènes peuvent coexister pour un jeu de paramètres donné.

Plusieurs modèles de contact ont été répertoriés. La méthode de pénalisation (couplée à un simple modèle de frottement de Coulomb) est celle qui semble la plus répandue, la plus facile à implémenter et celle qui donne des résultats les plus proches des résultats expérimentaux. Malgré sa simplicité, elle permet de reproduire l'intégralité des phénomènes physiques répertoriés à condition que le modèle de frottement puisse prendre en compte un changement de signe potentiel dans la vitesse de glissement entre rotor et stator (sous peine de ne pas pouvoir reproduire le phénomène de précession inverse). Un modèle simple est préférable à un modèle complexe pour une résolution rapide. C'est cette méthode que nous avons choisi pour la suite.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Les méthodes de réductions de modèle basées sur la notion de modes non linéaires ne semblent pas encore assez mûres pour une utilisation industrielle. Ces derniers ont des propriétés très différentes des modes linéaires classiques ce qui rend leur appréhension délicate. De plus, leur calcul et leur utilisation ne sont pas aisés. On leur préférera les techniques de projection sur base tronquée de modes linéaires à condition que celles-ci soit utilisées au sein de techniques de condensation qui permettent de conserver les degrés de liberté non linéaires dans la base physique. Dans cet esprit, les méthodes de Craig et Bampton ou Craig et Martinez semblent bien adaptées. On préférera toutefois la méthode de Craig et Bampton qui est la plus utilisée et qui semble donner des résultats légèrement meilleurs. On peut oublier en revanche la technique d'hyperréduction de modèle qui apparaît adaptée à des modèles 3D de grande taille de même que les techniques basées sur la SVD davantage adaptées à d'autres types de problème comme la mécanique des fluides par exemple.

Enfin, en ce qui concerne les méthodes de résolution des modèles. Les méthodes d'intégration temporelle directe sont les plus utilisées, les plus robustes et les plus génériques. Cependant ce sont aussi les plus lourdes en temps de calcul et dans le cas de problèmes non linéaires, le résultat dépend souvent des conditions initiales choisies. On préférera utiliser une technique fréquentielle (la méthode de la balance harmonique) qui bien que limitée aux réponses périodiques et quasi-périodiques, permet des gains substantiels en temps de calcul. Cette méthode est le plus souvent utilisée sur des problèmes présentant des non linéarités faibles mais l'usage de non linéarités fortes n'est pas exclu à condition d'implémenter quelques amélioration à la méthode. Parmi ces améliorations, on notera en particulier les techniques de continuation qui permettent d'effectuer des études paramétriques robustes et qui permettent également de plus facilement capturer les différents comportements possibles du rotor pour un jeu de paramètres donné ce que ne permettent pas facilement les méthodes d'intégration temporelle directe.

Les choix de modélisation retenus sont développés, illustrés et validés dans les chapitres suivants.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 2

Calcul des solutions périodiques

Ce second chapitre se focalise sur les aspects théoriques de la méthode retenue de la balance harmonique (HBM) et sur les fonctionnalités et améliorations qui ont été développées. Des techniques de continuation permettant des études paramétriques sont présentées. Ce chapitre fait le point également sur des méthodes permettant d'augmenter la robustesse de l'algorithme et d'optimiser la vitesse d'exécution sans impacter la précision des résultats. Des exemples d'application en lien avec la problématique de contact rotor-stator illustrent ces développements.

Sommaire

2.1 Méthode de la Balance Harmonique (HBM) 35
2.1.1 Principe de la méthode 35
2.1.2 La méthode AFT (Alternating Frequency Time) 39
2.1.3 Calcul de la Jacobienne 39
2.1.4 Bilan 41
2.2 Techniques de continuation 41
2.2.1 Continuation incrémentale (ou séquentielle) 41
2.2.2 Continuation par pseudo longueur d'arc 43
2.3 Robustesse et optimisation 46

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.3.1 Pas adaptatif 46
2.3.2 Sélection automatique des harmoniques 46
2.3.3 Adimensionnement numérique des équations 50
2.4 Exemples d'illustration 53
2.4.1 Application sur un modèle de rotor de Jeffcott 53
2.4.2 Application sur un modèle de rotor éléments finis 57
2.5 Conclusion 64

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Les problèmes dynamiques non linéaires sont lourds à traiter car il n'existe pas de méthode générale pour les traiter. Les méthodes utilisées dépendent de nombreux paramètres comme la nature du problème ou le type de solution recherchée (transitoire, périodique, etc.). Le type de non linéarité rencontré est un élément également important. Certaines méthodes sont connues pour pouvoir traiter des non linéarités dites faibles (non linéarité géométrique par exemple) c'est à dire les non linéarités où il n'y a pas de variation brusque dans la dérivée première de la fonction caractéristique de la non linéarité. D'autres méthodes peuvent gérer plus facilement les non linéarités dites fortes comme celle associée au contact unilatéral pénalisé avec jeu par exemple. La méthode qui a été retenue dans notre cas est la méthode de la balance harmonique. C'est une méthode classique qui résout les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel plutôt que dans le domaine temporel. Cette méthode est généralement utilisée dans des cas de non linéarité faible mais il est également possible de l'utiliser dans des cas de non linéarités fortes, même si alors elle a tendance à moins bien converger. Nous allons montrer qu'il est possible de pallier à ces difficultés de convergence grâce à des techniques spécifiques.

2.1 Méthode de la Balance Harmonique (HBM)

2.1.1 Principe de la méthode

Une fois le modèle éléments finis établit, l'équation de la dynamique non linéaire à résoudre est la suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\omega)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(t) \tag{2.1}$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$, représentent respectivement les matrices assemblées de masse d'amortissement (qui inclut également la matrice de gyroscopie) et de rigidité. Le vecteur $\mathbf{f}$ représente ici les efforts non linéaires et le vecteur $\mathbf{p}$ les efforts linéaires extérieurs. Étant donné que, dans les cas d'application qui nous intéressent, les efforts extérieurs $\mathbf{p}$ sont périodiques (force de balourd à vitesse de rotation constante) il est alors raisonnable de supposer que la réponse en régime établi est également périodique. Avec cette hypothèse on peut écrire les grandeurs d'intérêt sous forme de séries de Fourier :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=0}^{N} \mathbf{Q}_{2j-1}\cos(k_j\omega t) + \mathbf{Q}_{2j}\sin(k_j\omega t) \tag{2.2}$$

où les $\mathbf{Q}_j$ $(j = 0..2N)$ sont les vecteurs de coefficients harmoniques et les k_j sont les harmoniques retenues dans la décomposition tronquée à l'ordre N. Le nombre d'harmoniques retenu peut être aussi élevé que désiré afin d'approximer correctement la solution. La grandeur ω est la pulsation fondamentale du système correspondant à la période de vibration T telle que $\omega = 2\pi/T$. De la même façon, les efforts linéaires et les efforts non

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

linéaires peuvent être écrits sous forme de série de Fourier :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_0 + \sum_{j=0}^{N} \mathbf{P}_{2j-1}\cos(k_j\omega t) + \mathbf{P}_{2j}\sin(k_j\omega t) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_0 + \sum_{j=0}^{N} \mathbf{F}_{2j-1}\cos(k_j\omega t) + \mathbf{F}_{2j}\sin(k_j\omega t) \tag{2.4}$$

Si on pose

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{n\times n(2N+1)} = [\underbrace{\mathbf{Id}}_{n\times n}, \underbrace{\mathbf{Id}\cdot\cos(m_1\omega t)}_{n\times n}, \mathbf{Id}\cdot\sin(m_1\omega t), \ldots, \mathbf{Id}\cdot\cos(m_N\omega t), \mathbf{Id}\cdot\sin(m_N\omega t)]$$

où **Id** représente la matrice identité, on peut alors reformuler les équations (2.2) (2.3) (2.4) ainsi :

$$\underbrace{\mathbf{q}(t)}_{n\times 1} = \underbrace{\mathbf{A}(\omega)}_{n\times n(2N+1)} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}}_{n(2N+1)\times 1}$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{A}(\omega)\mathbf{P}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{A}(\omega)\mathbf{F}(\mathbf{Q})$$

avec

$$\underbrace{\mathbf{Q}}_{n(2N+1)\times 1} = [\underbrace{\mathbf{Q}_0}_{n\times 1}, \mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{2N-1}, \mathbf{Q}_{2N}]^T$$

vecteur de l'ensemble des coefficients de Fourier regroupant tous les degrés de liberté de déplacement. De même, $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{2N}]^T$ et $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_{2N}]^T$ représentent l'ensemble des coefficients de Fourier des efforts linéaires extérieurs et des efforts non linéaires respectivement. Les écritures (2.2), (2.3) et (2.4) sont injectées dans l'équation (2.1) ce qui aboutit à :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^{N} &[\mathbf{Q}_{2j-1}[\cos(m_j\omega t)(\mathbf{K} - m_j^2\omega^2\mathbf{M}) - m_j\omega\mathbf{C}\sin(m_j\omega t)] \\ &+\mathbf{Q}_{2j}[\sin(m_j\omega t)(\mathbf{K} - m_j^2\omega^2\mathbf{M}) + m_j\omega\mathbf{C}\cos(m_j\omega t)]] \\ &+\mathbf{A}(\omega)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{A}(\omega)\cdot\mathbf{P} = 0\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire en :

$$\mathbf{A}(\omega)(\underbrace{\mathbf{Z}(\omega)}_{n(2N+1)\times n(2N+1)}\mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{P}) = 0 \tag{2.5}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

avec :

$$\mathbf{Z}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} - k_1^2\omega^2\mathbf{M} & k_1\omega\mathbf{C} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_1\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - k_1^2\omega^2\mathbf{M} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{K} - k_n^2\omega^2\mathbf{M} & k_n\omega\mathbf{C} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - k_n^2\omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Une procédure de Galerkin permet alors d'annuler l'équation 2.5 en moyenne temporelle pondérée. Les fonctions de pondération utilisées sont les fonctions trigonométriques ($\cos(m_j\omega t)$, j allant de 1 à N et $\sin(m_j\omega t)$, j allant de 1 à N). On multiplie donc l'équation 2.5 successivement par chacune de ces fonctions de pondération puis on intègre sur une période $[0,T]$. Cette opération s'appelle *la balance harmonique* ou bien *l'équilibrage des termes harmoniques*. Cela conduit au système :

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q},\omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{P} = 0 \tag{2.6}$$

qui représente l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel. Cette équation a pour inconnue $\mathbf{Q}$ c'est à dire l'ensemble des coefficients de Fourier des déplacements. Ce système est de taille plus importante ($n_{HBM} = n(2N+1)$), cependant il s'agit maintenant d'un système algébrique et non plus d'un système d'équations différentielles. Même dans le domaine fréquentiel, l'équation du mouvement est toujours non linéaire car les coefficients de Fourier des efforts non linéaires ($\mathbf{F}$) dépendent des coefficients de Fourier des déplacements ($\mathbf{Q}$). Usuellement, l'équation (2.6) est traitée de façon itérative par un algorithme de Newton-Raphson par exemple. L'itération de Newton-Raphson s'écrit comme suit :

$$\mathbf{Q}^{(k+1)} = \mathbf{Q}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{-1}_{|\mathbf{Q}^{(k)}} \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}) \tag{2.7}$$

avec $\mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{Q}^{(k)} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(k)}) - \mathbf{P}$ qui est le résidu de l'équation d'équilibre du mouvement à l'itération (k). Ainsi, l'équation (2.7) peut se réécrire :

$$\mathbf{Q}^{(k+1)} = \mathbf{Q}^{(k)} + \left(\mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{-1}_{|\mathbf{Q}^{(k)}} \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}) \tag{2.8}$$

A cause de la nature non linéaire des problèmes traités, l'algorithme de Newton-Raphson n'a aucune garantie de convergence. La non linéarité rend potentiellement la solution de l'équation (2.8) non unique. Dans ce cas, la solution vers laquelle l'algorithme converge dépend de la solution initiale $\mathbf{Q}^{(0)}$ choisie pour initialiser les itérations. Si la solution initiale $\mathbf{Q}^{(0)}$ est trop éloignée de(s) (la) solution(s) de l'équation (2.8) alors il se peut que les itérations de Newton-Raphson ne convergent pas. Dans tous les cas, à chaque itération de l'algorithme il faut calculer le résidu $\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)})$ et la jacobienne du système $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$. Nous allons voir dans les sections suivantes comment effectuer ces opérations.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Pour pouvoir effectuer les itérations de Newton-Raphson, il faut être capable d'évaluer le résidu **R** du système et donc être capable de calculer $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$. Il faut donc être capable de calculer les coefficients de Fourier des efforts non linéaires en fonction des coefficients de Fourier des déplacements. Il existe plusieurs façons de procéder pour atteindre ce but. La première consiste à déterminer une relation analytique entre les deux grandeurs **F** et **Q**. Ainsi, lors des itérations de Newton-Raphson, une fois que **Q** est connu, on en déduit **F** grâce à la formule analytique. La formule analytique reliant les efforts aux déplacements est connue dans le domaine temporel alors que, dans le domaine fréquentiel elle reste inconnue à priori. Des développements analytiques spécifiques à chaque type de non linéarité sont nécessaires et selon le type de non linéarité, ces développements peuvent être très lourds voire impossibles. Cette façon de procéder permet cependant une vitesse d'exécution rapide.

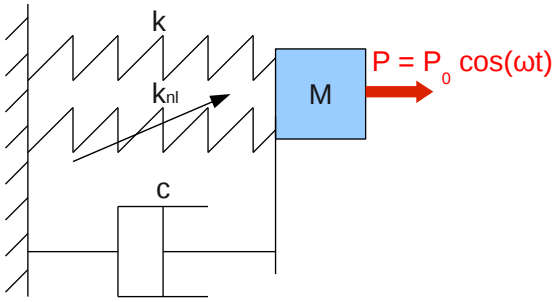


FIGURE 2.1: Schéma d'un oscillateur de Duffing

Illustration sur l'oscillateur de duffing L'oscillateur de duffing est un système discret à un degré de liberté (voir schéma 2.1). La non linéarité est une force de rappel proportionnelle au cube du déplacement de la masse. L'équation différentielle d'équilibre du système est la suivante :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) + k_{nl}q(t)^3 = p_0\cos(\omega t)$$

Ici, $f(q(t)) = k_{nl}q(t)^3$ avec k_{nl} représentant la rigidité non linéaire. Pour connaître la formule analytique donnant **F** en fonction de **Q** il faut développer l'expression de $f(q(t))$ en remplaçant $q(t)$ par son développement en série de Fourier.

$$\begin{aligned} f(q(t)) &= k_{nl}q(t)^3 \\ &= k_{nl}\left(Q_0 + \sum_{j=1}^{N} Q_{2j-1}\cos(m_j\omega t) + Q_{2j}\sin(m_j\omega t)\right)^3 \end{aligned}$$

Cette opération aboutit à des développements fastidieux et dans le cas de non linéarités plus complexes, ils deviennent généralement impossibles en particulier dans le cas d'expressions non analytiques pour $f(q,\dot{q})$. C'est la cas par exemple pour les forces non linéaires dans les paliers hydrodynamiques qui sont obtenues en résolvant l'équation différentielle de Reynolds pour les films minces.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

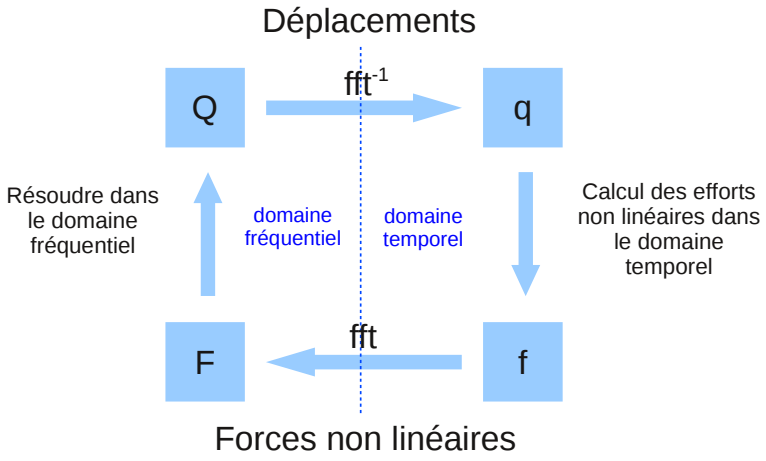


FIGURE 2.2: Méthode AFT (Alternating Frequency Time)

2.1.2 La méthode AFT (Alternating Frequency Time)

La technique retenue dans ce travail consiste à utiliser la méthode AFT (Alternating Frequency Time) (voir figure 2.2) [CAM 89] qui consiste à exploiter le fait que la force non linéaire reste facile à exprimer dans le domaine temporel. A chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson, les déplacements sont basculés dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse. Une fois dans le domaine temporel, les efforts non linéaires sont facilement obtenus. Ces efforts non linéaires sont ensuite à nouveau basculés dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier directe. Cette méthode a l'avantage d'être beaucoup plus générique que la méthode analytique car elle permet de traiter n'importe quel type de loi non linéaire. En revanche, les aller-retour très fréquents entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel induisent un coût de calcul plus élevé que dans le cas analytique. Toutefois, le coût en calcul peut être limité tout en maintenant une excellente précision en utilisant les routines existantes de transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform (fft)). Il est alors préférable d'échantillonner la période T avec un nombre d'instants égal à une puissance de deux. La finesse minimale de la discrétisation temporelle qu'il faut utiliser dépend notamment de l'harmonique la plus élevée retenue dans la décomposition en série de Fourier. Plus les harmoniques sont élevées et plus les variations des phénomènes observés sont susceptibles d'être rapides et plus la discrétisation temporelle doit être fine. Typiquement, il faut que la composante fréquentielle k_N soit représentée par environ $10k_N$ instants durant la période T. Le calcul de F n'est cependant pas la seule opération délicate à effectuer lors des itérations du Newton-Raphson.

2.1.3 Calcul de la Jacobienne

L'autre opération qui doit être effectuée à chaque itération corrective du Newton-Raphson est le calcul de la matrice jacobienne $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$. Il s'agit alors de calculer la matrice

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

qui décrit la variation des coefficients de Fourier des efforts non linéaires en fonction des coefficients de Fourier des déplacements.

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_0} & \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_{2N}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Q}_0} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Q}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Q}_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{2N}}{\partial \mathbf{Q}_0} & \frac{\partial \mathbf{F}_{2N}}{\partial \mathbf{Q}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_{2N}}{\partial \mathbf{Q}_{2N}} \end{bmatrix}$$

avec,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{Q}_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{i0}}{\partial \mathbf{Q}_{j0}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{i0}}{\partial \mathbf{Q}_{j1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_{i0}}{\partial \mathbf{Q}_{jn}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{i1}}{\partial \mathbf{Q}_{j0}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{i1}}{\partial \mathbf{Q}_{j1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_{i1}}{\partial \mathbf{Q}_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{in}}{\partial \mathbf{Q}_{j0}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{in}}{\partial \mathbf{Q}_{j1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_{in}}{\partial \mathbf{Q}_{jn}} \end{bmatrix}$$

Là encore, il existe plusieurs façons de calculer cette matrice jacobienne.

2.1.3.1 Calcul par différences finies

La première façon est purement numérique et consiste à calculer la matrice par différences finies. Si on écrit la jacobienne comme suit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \left[\underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{00}}}_{n(2N+1)\times 1}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{01}}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{0n}}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{10}}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{2Nn}} \right]$$

Chaque terme est alors calculé selon la formule d'approximation d'ordre 1 suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{e}_{ij}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\Delta}$$

ou bien avec l'approximation d'ordre 2 :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{e}_{ij}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q} - \Delta \mathbf{e}_{ij})}{2\Delta}$$

où $\mathbf{e}_{ij}$ est un vecteur de même taille que $\mathbf{Q}$ rempli de zéros sauf à l'emplacement ij où se trouve un 1. La jacobienne est alors calculée colonne par colonne. La qualité de l'approximation dépend de Δ qui doit être choisi suffisamment petit (de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-8}). L'évaluation de $\mathbf{F}(\mathbf{Q} \pm \Delta \mathbf{e}_{ij})$, comme précédemment, peut se faire grâce à une formule analytique ou bien grâce à une méthode AFT qui est ici aussi plus facile à programmer, très générique mais qui peut s'avérer assez lourde en temps de calcul.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.1.3.2 Calcul semi-analytique

Une autre façon de calculer cette matrice est d'utiliser une technique semi-analytique qui consiste à écrire la dérivée des efforts non linéaires par rapport aux déplacements dans le domaine temporel ce qui normalement est toujours possible mais nécessite des efforts de développement théoriques et de programmation supplémentaires. Pour ce faire il faut réécrire la jacobienne comme suit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(0,0)} & \dots & \mathbf{J}^{(0,2j-1)} & \mathbf{J}^{(0,2j)} & \dots & \mathbf{J}^{(0,2N-1)} & \mathbf{J}^{(0,2N)} \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2i-1,0)} & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2i,0)} & & & \hat{\mathbf{J}} & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2N-1,0)} & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2N,0)} & & & & & & \end{bmatrix}$$

L'expression des éléments de la jacobienne est donnée dans l'annexe B. En pratique, comme pour l'AFT, on préférera utiliser les fonctions de transformée de Fourier rapides. On calcule ainsi la jacobienne par blocs de n colonnes par n colonnes. Pour chaque bloc de n colonnes on calcule la transformée de Fourier de la dérivée des efforts qui aura été préalablement multipliée par la fonction cosinus ou sinus adaptée. Cette technique est plus rapide à exécuter que la méthode par différences finies dans le cas de l'usage d'une technique AFT.

2.1.4 Bilan

Les méthodes décrites pour calculer les efforts non linéaires $\mathbf{F}$ et la jacobienne $\mathbf{J}$ permettent de mener à bien les itérations de Newton-Raphson. Les itérations sont stoppées lorsque le critère sur le résidu $\mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)})$ est atteint. Typiquement, un critère sur la norme du résidu (L_2 ou L_∞) est appliqué. La solution ainsi obtenue correspond directement à la réponse périodique du système pour un jeu de paramètres donné. Cependant, on est souvent intéressé par l'évolution de la réponse du système pour un paramètre donné (étude paramétrique). Typiquement, dans les études de rotor, on est intéressé par l'évolution de la réponse du système avec la vitesse de rotation du rotor. Pour effectuer un étude paramétrique avec la méthode de la balance harmonique, il convient de l'associer à une technique de continuation.

2.2 Techniques de continuation

2.2.1 Continuation incrémentale (ou séquentielle)

Plusieurs façon existent pour déterminer l'évolution d'un système en fonction d'un paramètre (nommé λ). La façon la plus simple consiste à effectuer une continua-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

tion incrémentale consistant à progressivement augmenter (ou diminuer) la valeur du paramètre. Une fois la réponse connue pour une certaine valeur du paramètre, la valeur du paramètre λ est légèrement augmentée (ou diminuée) et une nouvelle procédure de Newton-Raphson est entamée avec comme condition initiale la solution du pas précédent soit :

$$\begin{aligned} \lambda_{j+1} &= \lambda_j + \Delta\lambda \\ \mathbf{Q}^{(0)}_{\lambda_{j+1}} &= \mathbf{Q}_{\lambda_j} \end{aligned}$$

où $\mathbf{Q}_{\lambda_j}$ représente la solution convergée pour la valeur λ_j du paramètre λ.

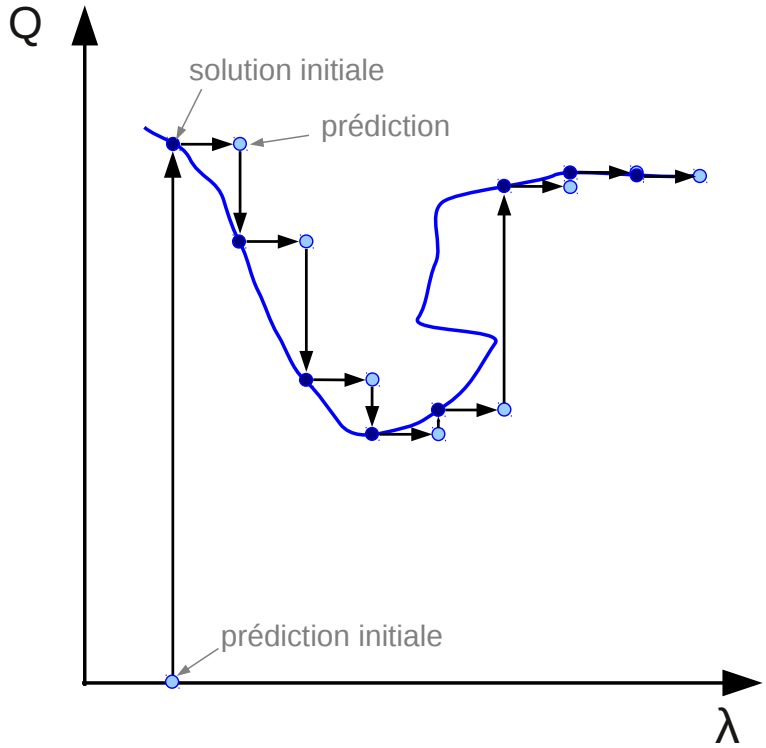


FIGURE 2.3: Continuation incrémentale

Une illustration graphique de la méthode est présentée figure 2.3. L'avantage de ce type de continuation est qu'elle est simple à programmer en revanche elle ne permet pas de suivre la branche solution si cette dernière présente des points de rebroussement. Cette technique peut également présenter des difficultés de convergence si la solution réelle varie beaucoup après une incrémentation de λ à cause notamment des phénomènes de saut de réponse.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.2.2 Continuation par pseudo longueur d'arc

Les systèmes non linaires ont la particularité de souvent présenter plusieurs réponses possibles pour une valeur donnée du paramètre λ. La continuation incrémentale ne pourra ne donner qu'une solution par valeur de λ. Il est alors plus judicieux d'utiliser une technique capable de suivre les branches solution à travers les points de rebroussement. La technique de continuation par longueur d'arc permet cela. Soit un point $M_{(i)}$ de coordonnées $\left(\mathbf{Q}_{(i)}, \lambda_{(i)}\right)$ vérifiant $\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i)}, \lambda_{(i)}) = \mathbf{0}$, on cherche un point $M_{(i+1)}$ de coordonnées $\left(\mathbf{Q}_{(i+1)} = \mathbf{Q}_{(i)} + \Delta\mathbf{Q}_{(i)}, \lambda_{(i+1)} + \Delta\lambda_{(i)}\right)$ vérifiant également $\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i+1)}, \lambda_{(i+1)}) = 0$. La continuation se fait alors en deux étapes :

- une étape de prédiction
- une étape de corrections

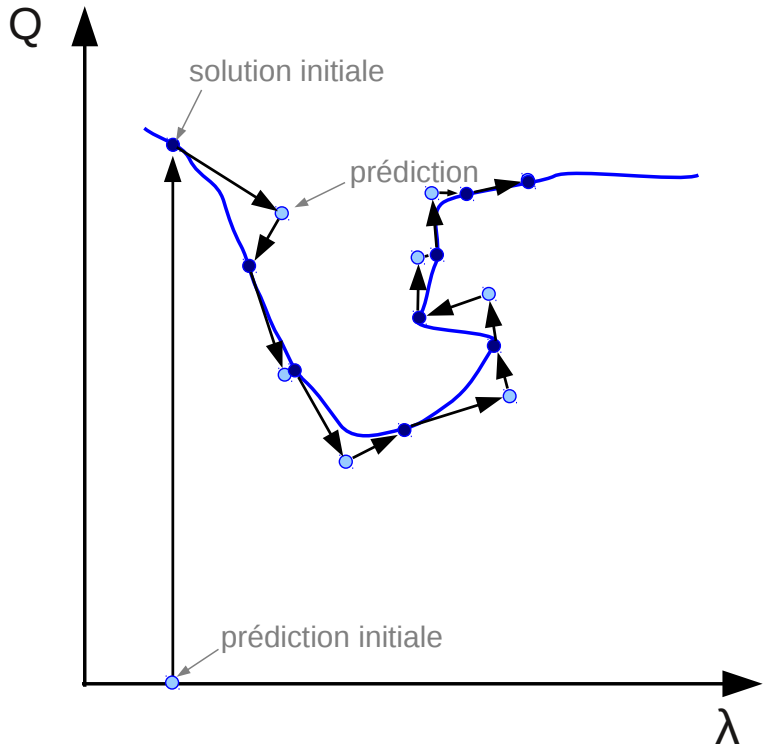


FIGURE 2.4: Continuation par pseudo-longueur d'arc.

2.2.2.1 Prédiction.

L'étape de prédiction consiste à essayer de deviner la solution pour la prochaine valeur de λ. La prédiction se fait dans une direction tangente à la courbe solution. Sous l'hy-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

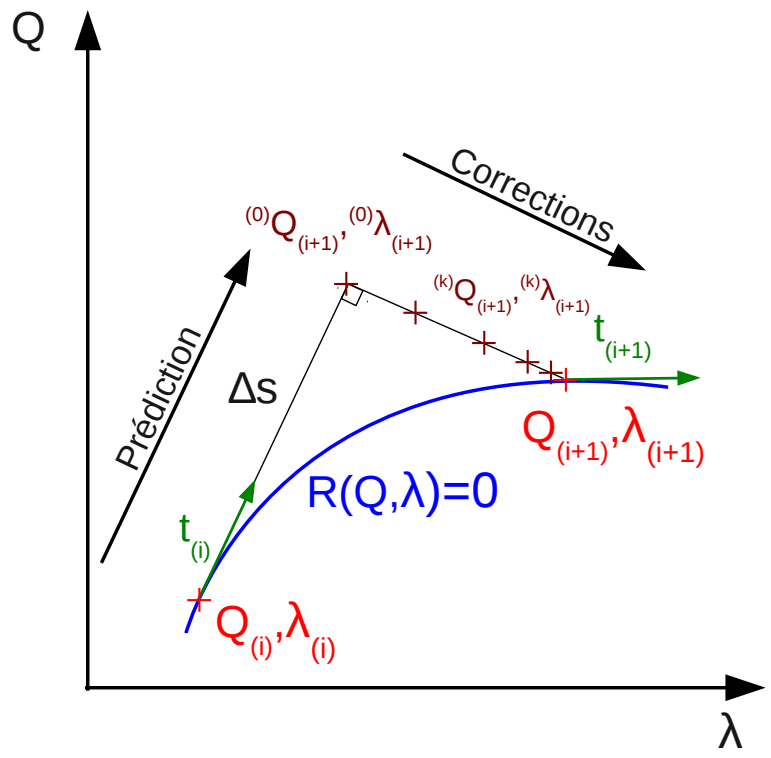


FIGURE 2.5: Continuation par pseudo-longueur d'arc. Détail d'un couple de prédiction / corrections.

pothèse de petites variations, on peut faire l'approximation du premier ordre suivante :

$$\underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i+1)},\lambda_{(i+1)})}_{=0} \approx \underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i)},\lambda_{(i)})}_{=0} + \Delta\mathbf{Q}_{(i)}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} + \Delta\lambda_{(i)}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda}_{|M_{(i)}} \tag{2.9}$$

avec,
$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{Z}(\lambda) + \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}}$
$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\lambda}\mathbf{Q}$
Le vecteur tangent $\mathbf{t}_{(i)} = [\Delta\mathbf{Q}^T_{(i)}, \Delta\lambda_{(i)}]$ est de norme :

$$||\mathbf{t}_{(i)}||^2 = \Delta\mathbf{Q}^T_{(i)}\Delta\mathbf{Q}_{(i)} + \Delta\lambda^2_{(i)}$$

Soit $a_{(i)} = \Delta\lambda_{(i)}$, $\Delta\mathbf{Q}_{(i)} = a_{(i)}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}$ et le vecteur tangent de norme 1 défini par :

$$||\mathbf{t}_{(i)}||^2 = 1 \Leftrightarrow a^2_{(i)}(\Delta\hat{\mathbf{Q}}^T_{(i)}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} + 1) = 1$$

Il vient alors :

$$a_{(i)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\Delta\hat{\mathbf{Q}}^T_{(i)}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} + 1}} \tag{2.10}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Le signe de $a_{(i)}$ est choisi de sorte à ce que deux vecteurs tangents successifs aient un produit scalaire positif (conservation du sens de parcours). L'équation (2.9) devient :

$$\Delta\mathbf{Q}_{(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} + \Delta\lambda_{(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\lambda}_{|M_{(i)}} = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

Étant donné les expressions de $a_{(i)}$ ($a_{(i)} = \Delta\lambda_{(i)}$) et de $\Delta\mathbf{Q}_{(i)}$ ($\Delta\mathbf{Q}_{(i)} = a_{(i)}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}$), l'équation (2.11) peut également s'écrire ainsi :

$$\cancel{a_{1(i)}}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} + \cancel{a_{(i)}}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\lambda}_{|M_{(i)}} = \mathbf{0} \tag{2.12}$$

La procédure pour déterminer le vecteur tangent $\mathbf{t}_{(i)}$ se résume ainsi :

- Résoudre le système suivant pour $\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}$:

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}}_{|M_{(i)}}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} = -\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\lambda}_{|M_{(i)}}$$

- En déduire $a_{(i)}$ (voir équation (2.10))
- En déduire $\Delta\lambda_{(i)} = a_{(i)}$:

Une fois le vecteur tangent normalisé calculé, on fait une prédiction à partir de la dernière solution convergée obtenue :

$$\mathbf{Q}^{(0)}_{(i+1)} = \mathbf{Q}_{(i)} + \Delta s_{(i)} \cdot \mathbf{t}_{(i)} \tag{2.13}$$

avec $\Delta s_{(i)}$ la taille du pas tangent.

2.2.2.2 Corrections :

La solution prédite ne vérifie pas, à priori, l'équation d'équilibre. Cette solution doit être corrigée de façon itérative de sorte à annuler le résidu. A l'itération (k) on a :

$$\underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}_{(i+1)}, \lambda^{(k)}_{(i+1)})}_{=\mathbf{R}^{(k)}} = \underbrace{\mathbf{Z}(\lambda^{(k)}_{(i+1)})}_{=\mathbf{Z}^{(k)}}\mathbf{Q}^{(k)}_{(i+1)} + \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(k)}_{(i+1)})}_{=\mathbf{F}^{(k)}} - \mathbf{P}$$

On abandonne la notation $(i+1)$ dans la suite pour alléger les écritures. On impose également que les corrections se fassent dans une direction orthogonale au vecteur $\mathbf{t}$, le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{R}^{(k)}}{\partial\mathbf{Q}} & \frac{\partial\mathbf{R}^{(k)}}{\partial\lambda} \\ \Delta\hat{\mathbf{Q}}^{T}_{(i)} & \Delta\lambda_{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{(k+1)} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

La continuation par pseudo-longueur d'arc ajoute donc une équation et une inconnue au système à résoudre. A chaque itération de la procédure de Newton-Raphson, une correction sur λ et $\mathbf{Q}$ sera apportée. Comme pour la version sans continuation de la HBM, on itère jusqu'à ce que le résidu atteigne une valeur suffisamment basse. Une illustration de cette méthode est présentée figure 2.4 et figure 2.5. Cette méthode est plus robuste que la continuation incrémentale et permet de suivre les branches solution. Par la suite c'est cette méthode qui sera utilisée dans nos applications.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.3 Robustesse et optimisation

La méthode de la balance harmonique est habituellement utilisée pour des problèmes où la non linéarité est dite faible. Cependant dans nos applications, les non linéarités rencontrées sont dites fortes. En théorie, rien n'empêche la HBM de fonctionner avec des non linéarités fortes. D'ailleurs il n'y a pas de définition rigoureuse permettant de distinguer ces deux types de non linéarités. Ceci dit, comme nous allons le voir, certains aménagements se sont avérés nécessaires afin que la HBM avec continuation par pseudo longueur d'arc puisse être utilisée de façon efficace et robuste sur des applications réelles.

2.3.1 Pas adaptatif

Pour davantage de robustesse, la valeur du pas de continuation Δs (voir équation (2.13)) peut être adaptée de façon continue tout au long de l'étude paramétrique en fonction de la difficulté de convergence de la procédure de Newton-Raphson. Dans les zones où un plus grand nombre d'itérations est nécessaire pour converger (par exemple dans une zone où la réponse varie fortement avec λ) alors la valeur de Δs est réduite afin de faire en sorte que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence soit réduit pour le pas suivant. De manière générale, nous avons remarqué qu'il est préférable que la procédure de Newton-Raphson converge en cinq itérations maximum. Au delà de cinq itérations, des phénomènes non désirables peuvent se produire comme des sauts de branche par exemple. Au contraire, lorsque l'algorithme de Newton-Raphson converge en une ou deux itérations seulement, on peut se permettre d'augmenter la valeur de Δs afin de décrire la branche solution plus rapidement et d'éviter ainsi une discrétisation inutilement trop fine de cette dernière. Ainsi, après chaque solution calculée, on ajuste la valeur de Δs avec la formule suivante :

$$\Delta s_{(i+1)} = \Delta s_{(i)} \cdot 2^{\frac{n_{iter}-n_{opt}}{n_{opt}}} \tag{2.15}$$

avec n_{iter} représentant le nombre d'itérations de Newton-Raphson au point i et n_{opt} représentant le nombre ciblé d'itérations de Newton-Raphson. Typiquement, on cherche à ce que le nombre d'itérations soit compris entre 2 et 3. Après de nombreux essais, nous avons retenu la valeur de $n_{opt} = 2,7$.

2.3.2 Sélection automatique des harmoniques

La méthode de la balance harmonique exploite l'hypothèse de périodicité des déplacements et des efforts pour les ré-écrire sous forme d'une série de Fourier tronquée. La question est de savoir comment tronquer cette série de Fourier et quelles harmoniques retenir dans la décomposition. Il n'est pas toujours évident de savoir à priori comment effectuer ce choix. Une solution est de tronquer la série de Fourier à une valeur très grande de N. Cependant, cette solution a évidemment un coût non négligeable en terme de temps de calcul et d'usage mémoire car le système à résoudre a une taille qui croit proportionnellement avec le nombre d'harmoniques. A l'image de ce qui a été fait dans la thèse de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Laxalde [LAX 07] ou bien dans l'article de Jaumouillé [JAU 10], une procédure a été mise en place permettant de sélectionner automatiquement les harmoniques les plus pertinentes à retenir dans la décomposition. La procédure se résume ainsi :

- Converger par Newton-Raphson avec un jeu d'harmoniques arbitraire.
- Une fois le résidu annulé. Effectuer une analyse spectrale des efforts non linéaires dans le domaine temporel.
- Déduire de cette analyse spectrale les harmoniques prépondérantes qui apparaissent dans le système.
- Projeter la solution actuelle avec le nouveau jeu d'harmoniques.
- Recommencer une procédure de Newton-Raphson jusqu'à convergence avec ce nouveau jeu d'harmoniques.
- Retourner au point 2 jusqu'à convergence sur le jeu d'harmoniques à utiliser.

Le tout premier choix d'harmonique peut se résumer au fondamental. Il est souvent nécessaire de fixer une limite supérieure au nombre total d'harmoniques que cette procédure peut retenir. Dans ce cas là, il se peut que cette procédure dans certaines circonstances ne converge pas. Par exemple, la procédure peut basculer en permanence entre deux jeux (parfois davantage) d'harmoniques sans jamais converger.

2.3.2.1 illustration sur oscillateur de Duffing.

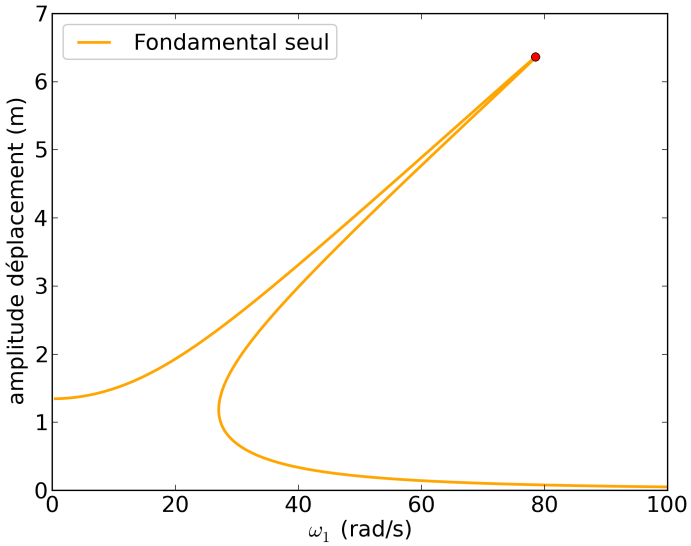


FIGURE 2.6: Courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing avec seulement le fondamental.

On rappelle ici l'équation du mouvement de l'oscillateur de Duffing :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) + k_{nl}q(t)^3 = p_0\cos(\omega t)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

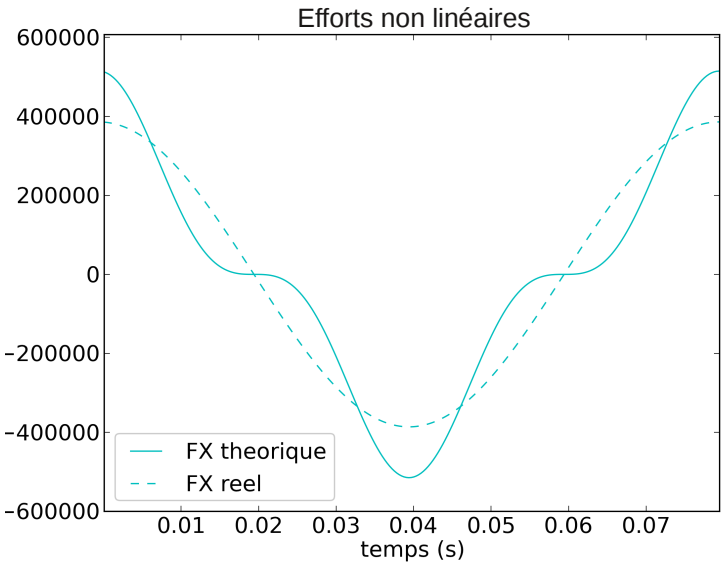


FIGURE 2.7: Courbe pleine : efforts non linéaires calculés à partir des déplacements et de la loi non linéaire. Courbe pointillés : efforts non linéaires issus de F

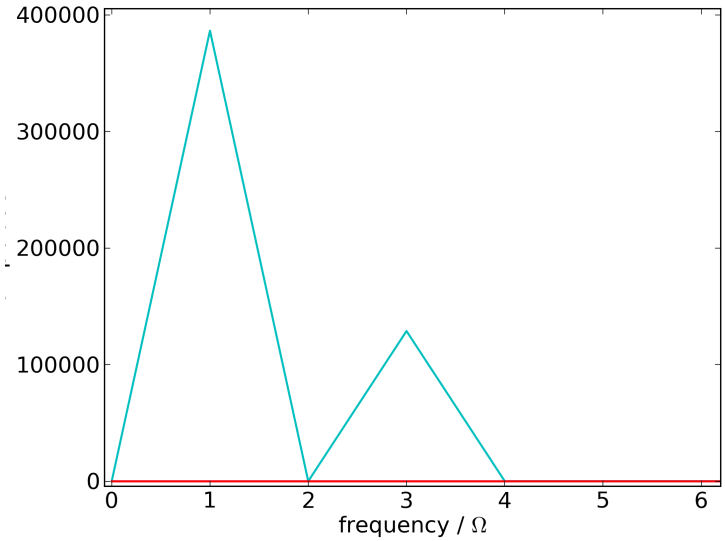


FIGURE 2.8: Analyse spectrale des efforts non linéaires calculés à partir des déplacements et de la loi non linéaire. Le fondamental apparaît clairement ainsi que l'harmonique 3.

Sur la figure 2.6 on peut voir la courbe de réponse du système pour les paramètres suivants : $m = 10\text{kg}$, $k = 1000\text{N.m}^{-1}$, $k_{nl} = 2000\text{N.m}^{-3}$, $c = 10\text{N.s.m}^{-1}$, $p_0 = 5000\text{N}$. Le calcul a été effectué en ne retenant que le fondamental dans le développement en série de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Fourier ($N = 1$). La figure 2.7 montre le détail des efforts non linéaires sur une période pour un point de la courbe choisi à proximité du point de rebroussement (point rouge sur la courbe 2.6). La courbe pleine montre la courbe des efforts non linéaires tels qu'ils sont calculés à partir des déplacements et de la loi non linéaire. La courbe pointillée représente les efforts non linéaires calculés par transformée de Fourier inverse à partir du vecteur **F** à convergence. Cette courbe en pointillés n'a donc qu'une seule composante fréquentielle (en $1 \times \omega$). On peut constater que les deux courbes ne se superposent pas. Ceci est du au fait que la prise en compte des harmoniques supérieures est nécessaire. L'analyse spectrale en puissance de la courbe pleine (voir figure 2.8) montre que l'harmonique 3 a une influence significative. Lorsque la même simulation est faite en activant le choix

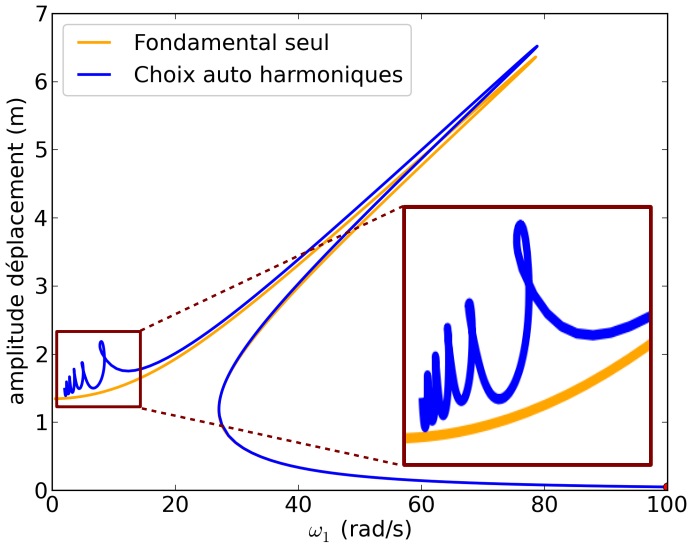


FIGURE 2.9: Courbe noire : courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing avec seulement le fondamental. Courbe bleue : courbe de réponse avec sélection automatique des harmoniques.

automatique des harmoniques (voir courbe de réponse figure 2.9) les deux courbes d'effort non linéaire (voir figure 2.10) concordent parfaitement. Enfin, la figure 2.11 montre l'évolution du nombre d'harmoniques utilisées dans la HBM en fonction de l'abscisse curviligne. On constate que dans le cas où le choix des harmoniques est automatique, ce nombre varie entre 2 et 20 (20 étant la limite maximum imposée) suivant la position sur la branche solution. Au niveau des basses fréquences d'excitation, de nombreuses résonances sur-harmoniques sont présentes, d'où le nombre plus élevé d'harmoniques dans cette zone. Au niveau de la résonance principale du système (à environ 78rad/s) ce sont 4 composantes fréquentielles qui sont utilisées au total (composantes 1,3,5,7).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

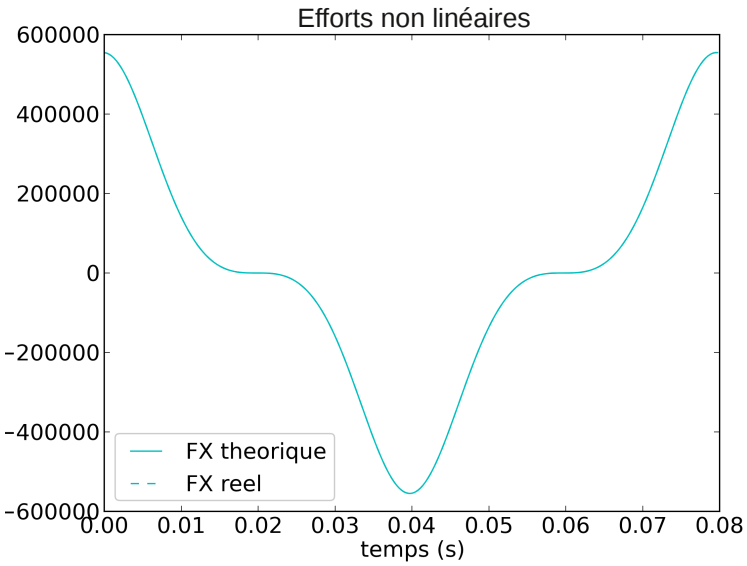


FIGURE 2.10: Efforts non linéaires dans le domaine temporel. Les courbes pointillée et pleine sont confondues.

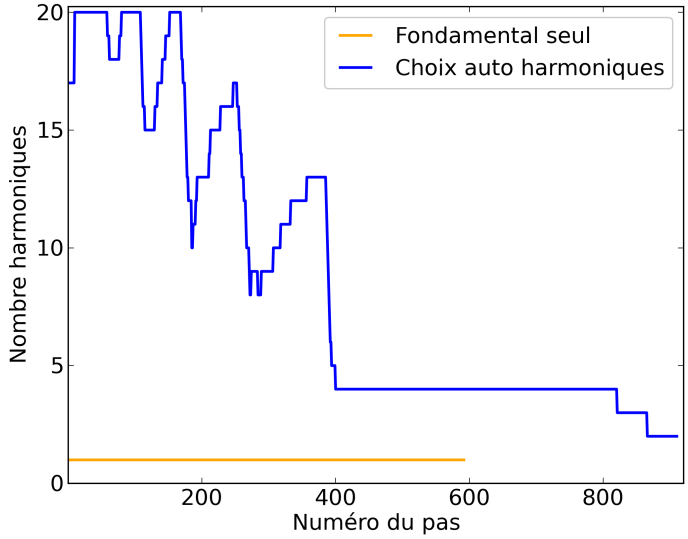


FIGURE 2.11: Nombre d'harmoniques retenues dans la HBM en fonction du numéro du pas de la continuation. Le nombre maximum d'harmoniques est ici limité à 20.

2.3.3 Adimensionnement numérique des équations

La continuation par longueur d'arc aide à suivre les branches solution à travers les points de rebroussement éventuels. Cependant, suivant les paramètres du problème traité la continuation peut soit très bien se dérouler comme dans [VON 01] où les auteurs Von

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Groll et Ewins traitent un modèle rotor de Jeffcott avec contact rotor stator soit au contraire s'interrompre prématurément faute de convergence de la procédure de Newton-Raphson. Nous allons voir ici au travers d'un exemple de modèle de rotor à plusieurs nœuds avec des valeurs réalistes de masse, de rigidité de jeu et autres que la continuation peut très mal fonctionner et l'algorithme se terminer prématurément faute de convergence (voir figure 2.13).

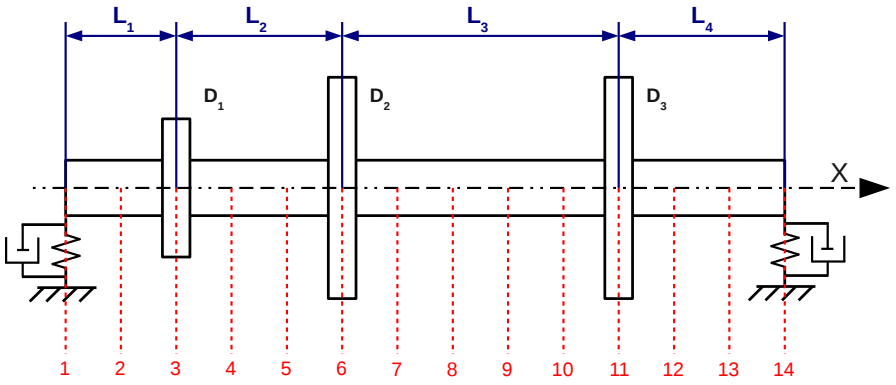


FIGURE 2.12: Modèle de rotor éléments finis [LAL 98]

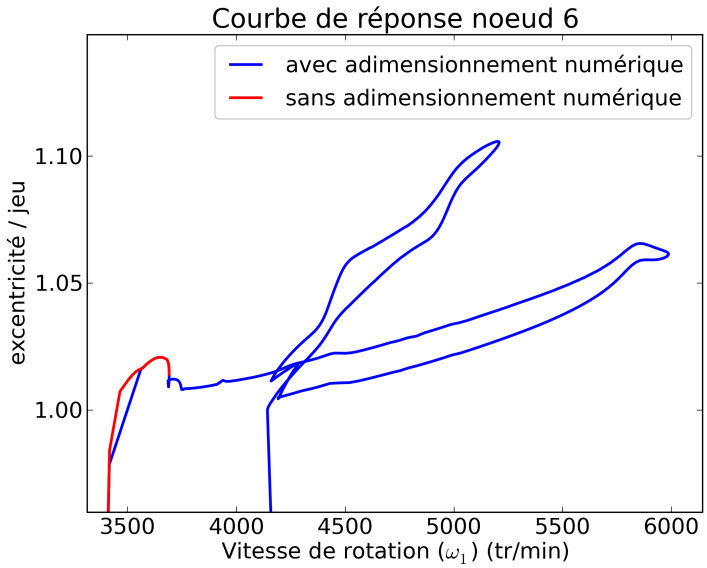


FIGURE 2.13: Courbe de réponse d'un modèle de rotor réaliste avec contact rotor stator ($\mu = 0,2$). rouge : courbe sans adimensionnement. bleu : courbe avec adimensionnement numérique.

Le système académique présenté ici (issu de [LAL 98]) est représentatif des systèmes réels (voir figure 2.12). Il s'agit d'un modèle éléments finis composé de 13 éléments

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

poutres de type Timoshenko ayant un total de 69 degrés de liberté. Le modèle représente un rotor d'environ 1 mètre de longueur avec un diamètre d'arbre de 10cm. Les structures palières se situent à chaque extrémité du rotor. Bien que linéaires, ces dernières possèdent une certaine orthotropie. Les disques sont au nombre de 3 et sont placés respectivement aux aux nœuds 3, 6 et 11. Ils sont modélisés par des masses et des inerties ajoutées sur les nœuds du maillages. L'excitation extérieure est provoquée par une force de balourd présente sur le disque numéro 2 (nœud numéro 6 du maillage) d'une valeur de 2.10^{-2} kg.m et le contact est possible sur ce même nœud avec un modèle de stator fixe et rigide d'une rigidité de l'ordre de 10 fois supérieure à la rigidité des paliers. Le jeu initial entre le rotor et le stator est choisi à 1mm. L'équation du mouvement (2.16) est écrite sous forme éléments finis.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\omega)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_c(q) = \mathbf{p}(\omega, t) \tag{2.16}$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}(\omega)$ et $\mathbf{K}$ représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.

D'un point de vue numérique, le mauvais comportement de la continuation provient du mauvais conditionnement de la matrice utilisée lors des itérations de Newton-Raphson (voir équation (2.14)). Ce mauvais conditionnement est causé par les grandes différences dans les ordres de grandeur des valeurs numériques trouvées dans ses sous-blocs $\frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}}$, $\frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \lambda}$, $\Delta\hat{\mathbf{Q}}^T_{(i)}$ et $\Delta\lambda_{(i)}$. Autrement dit, d'une façon un peu plus physique, il faut que les composantes du vecteur tangent $\mathbf{t}$ soient du même ordre de grandeur pour que la continuation par pseudo longueur d'arc fonctionne bien. Dans l'illustration présentée ici, typiquement, la dernière composante d'un vecteur tangent $\mathbf{t}$ (correspondant à la composante selon $\lambda = \omega$) est environ 10 millions de fois supérieure aux autres composantes du vecteur (les variations selon ω sont beaucoup plus importantes que les variations selon $\mathbf{Q}$). Avec de telles différences entre les composantes de $\mathbf{t}$, de très petites valeurs de Δs sont nécessaires pour pouvoir espérer passer les points de rebroussement. Valeurs tellement petites que d'autres problèmes numériques interviennent et empêchent la convergence. Il est donc primordial de faire en sorte que toutes les composantes de $\mathbf{t}$ soient du même ordre de grandeur. Pour cela, nous proposons un adimensionnement numérique des équations du mouvement.

La technique consiste à définir un temps caractéristique t_c et une dimension caractéristique l_c du problème. Typiquement, on peut choisir $t_c = T = \frac{2\pi}{\omega}$ correspondant à la période cherchée de la réponse. Si la continuation se fait sur le paramètre ω, une valeur moyenne de ω peut être estimée à priori permettant ainsi d'évaluer t_c. Dans les cas de contact rotor-stator, la dimension caractéristique l_c peut par exemple être prise égale à la valeur du jeu initial entre le rotor et le stator.

Une fois ces valeurs caractéristiques évaluées, on définit deux nouvelles variables adimensionnées $\bar{t} = \frac{t}{t_c}$ et $\bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{l_c}$ et on remplace ces grandeurs dans l'équation temporelle du mouvement :

$$\frac{l_c}{t_c^2}\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \frac{l_c}{t_c}\mathbf{C}(\omega)\dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + l_c\mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}(\bar{t})) = \mathbf{p}(\bar{t}) \tag{2.17}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

C'est cette nouvelle équation qui est utilisée pour effectuer la procédure de Galerkin menant à la formulation du problème dans le domaine fréquentiel.

$$\mathbf{Z}(\bar{\omega})\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}}) - \mathbf{P} = 0 \tag{2.18}$$

Cette nouvelle équation est résolue pour $\bar{\mathbf{Q}}$. Pour retrouver la grandeur physique $\mathbf{Q}$ il suffit de remultiplier par l_c c'est à dire $\mathbf{Q} = l_c\bar{\mathbf{Q}}$. Cette procédure d'adimensionnement donne de très bons résultats comme illustré figure 2.13.

2.4 Exemples d'illustration

2.4.1 Application sur un modèle de rotor de Jeffcott

2.4.1.1 Description du modèle

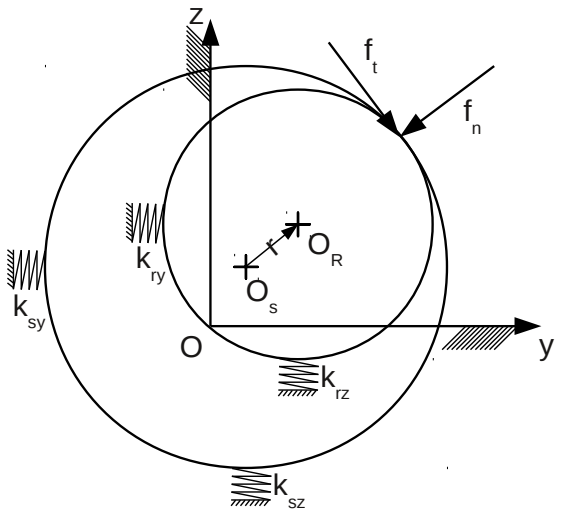


FIGURE 2.14: Schéma du rotor de Jeffcott

Le modèle de rotor de Jeffcott n'est pas un modèle éléments finis mais un modèle discret de seulement deux degrés de liberté (déplacements radiaux) [CHO 02]. Il s'agit du modèle de rotor le plus simple cependant il est souvent suffisant pour mettre en évidence un grand nombre de phénomènes physiques spécifiques aux rotors réels (du moins qualitativement) tels que le phénomène de précession inverse [CHI 07] ou bien le contact intermittent [JIA 09]. Une masse ponctuelle est suspendue par un système classique ressort et amortissement linéaires dans les deux directions de l'espace. L'absence de degré de liberté de rotation implique le fait qu'il n'y ait pas de matrice de gyroscopie à prendre en compte dans ce modèle. Des modèles de Jeffcott modifiés peuvent intégrer un ou plusieurs degrés de liberté supplémentaires comme par exemple un ddl de déplacement axial [AN 09] ou bien un ddl de torsion [EDW 99]. Pour la prise en compte de la non linéarité de type

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

contact, un modèle de stator fixe [JIA 01] [BEN 02a] ou suspendu [POP 07] peut être employé.

Les équations pour le modèle qui a été utilisé pour tous les exemples présentés dans cette thèse sont les suivantes :

$$\mathbf{m}_r\ddot{\mathbf{q}}_r(t)+\mathbf{c}_r\dot{\mathbf{q}}_r(t)+\mathbf{k}_r\mathbf{q}_r(t)+\mathbf{f}_c(t)=\mathbf{p}(t) \tag{2.19}$$

$$\mathbf{m}_s\ddot{\mathbf{q}}_s(t)+\mathbf{c_s}\dot{\mathbf{q}}_s(t)+\mathbf{k}_s\mathbf{q}_s(t)-\mathbf{f}_c(t)=\mathbf{0} \tag{2.20}$$

où $\mathbf{m}_r$ et $\mathbf{m}_s$ représentent les matrices de masse du rotor et du stator respectivement. De même, $\mathbf{c}_r$ et $\mathbf{c}_s$ sont les matrices d'amortissement et $\mathbf{k}_r$ et $\mathbf{k}_s$ sont les matrices de rigidité. $\mathbf{q}_r(t)=[q_{ry}(t),q_{rz}(t)]^T$ représente le déplacement du rotor et $\mathbf{q}_s(t)=[q_{sy}(t),q_{sz}(t)]^T$ le déplacement du stator. $\mathbf{f}_c(t)$ représente la force de contact et $\mathbf{p}(t)$ l'excitation extérieure. Dans l'exemple présent une loi de contact pénalisée a été couplée à une loi de friction de type Coulomb :

$$\mathbf{f}_c(t)=\mathbf{f}_n(t)+\mathbf{f}_t(t)=-k\boldsymbol{\delta}(t)-\mu||k\boldsymbol{\delta}(t)||\frac{\mathbf{v_{rel}}(t)}{||\mathbf{v_{rel}}(t)||} \tag{2.21}$$

où $\mathbf{f}_n$ et $\mathbf{f}_t$ représentent la force de contact normale et tangentielle respectivement.

$$\boldsymbol{\delta}(t)=\begin{cases}(r(t)-\delta_0)\mathbf{n_{norm}}(t) & \text{si } r>\delta_0,\\ [0,0]^T & \text{sinon.}\end{cases} \tag{2.22}$$

où

$$r(t)=\sqrt{(q_{ry}(t)-q_{sy}(t))^2+(q_{rz}(t)-q_{sz}(t))^2}$$

et

$$\mathbf{n_{norm}}(t)=\left[\frac{(q_{ry}(t)-q_{sy}(t))}{r(t)},\frac{(q_{rz}(t)-q_{sz}(t))}{r(t)}\right]^T$$

k est la rigidité de contact et δ_0 est le jeu initial entre le rotor et le stator. μ est le coefficient de friction de Coulomb et $\mathbf{v_{rel}}$ est la vitesse relative entre le rotor et le stator au point de contact. Dans ce modèle, l'excitation externe est générée par un balourd :

$$\mathbf{p}(t)=p_0\omega^2\left[\cos(\omega t),\sin(\omega t)\right]^T \tag{2.23}$$

Dans les exemples où le stator est modélisé comme étant fixe, l'équation (2.20) est ignorée et q_s est forcé à zéro dans les autres équations.

2.4.1.2 Résultats numériques, confrontation avec des résultats de référence

L'exemple montré ici est inspiré de l'article de Jiang [JIA 09]. Dans ce modèle, le stator est fixe. Les paramètres du modèle sont les suivants : $k_r=100\text{N.m}^{-1}$, $m_r=1\text{kg}$, $c_r=5\text{N.s.m}^{-1}$, $p_0=0,1\omega^2$, $\delta_0=0,105\text{m}$, $k=2500\text{N.m}^{-1}$, rayon arbre$=2,1\text{m}$, $\mu=0,1$. Les données sont fournies ici en fonction de la pulsation adimensionnée Ω telle que $\Omega=\frac{\omega}{\omega_2}$ avec $\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

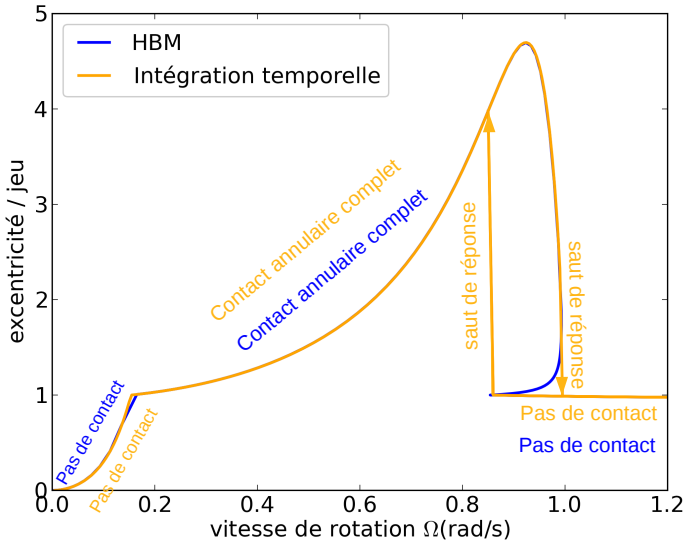


FIGURE 2.15: Courbe de réponse du rotor de Jeffcott avec contact. Comparaison HBM, intégration temporelle directe.

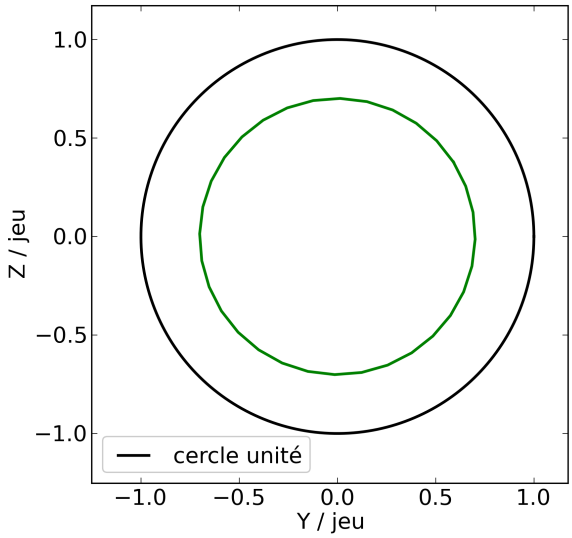


FIGURE 2.16: Orbite HBM du Jeffcott à petite vitesse de rotation. Il n'y a pas contact entre le rotor et le stator.

La figure 2.15 montre la courbe de réponse obtenue par HBM. On distingue deux types de phénomènes. Pour des vitesses de rotation faibles ($0 < \Omega < 0,15$), la force de balourd est trop faible et le rotor n'entre pas en contact avec le stator. La réponse est donc linéaire dans cette zone de fréquence. L'orbite du rotor est parfaitement circulaire car les paliers sont isotropes. Dans la bande de fréquence de $\Omega = 0,15$ environ jusqu'à $\Omega = 0,85$,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

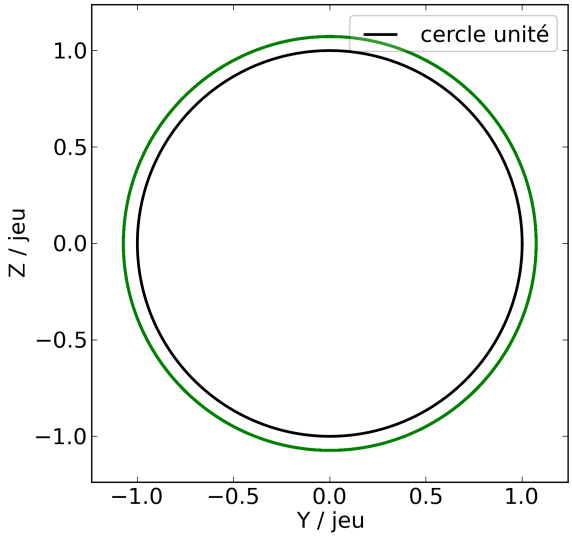


FIGURE 2.17: A gauche : Orbite HBM du Jeffcott à vitesse moyenne. Il y a phénomène de full annular rub.

le phénomène de full annular rub est le seul à être prédit par la HBM. L'orbite du rotor en full annular rub peut être vue figure 2.17. L'orbite est toujours parfaitement circulaire et le diamètre de l'orbite dépasse la valeur du jeu car le modèle de contact est un modèle par pénalisation et donc autorise l'interpénétration.

Dans la bande de fréquence $\Omega = 0,85$ à $\Omega = 1,0$, la HBM prévoit 3 comportements possibles, deux comportements en full annular rub et une solution sans contact. Au delà de $\Omega = 1,0$, seule la solution sans contact est prédite.

La figure 2.15 montre également la courbe de réponse calculée par intégration temporelle directe. Dans ce cas là, deux passes successives sont effectuées. Dans la première passe une augmentation progressive, par paliers, de la vitesse de rotation du rotor est effectuée. Après chaque augmentation de la vitesse de rotation, la situation finale du pas précédent est prise comme condition initiales du nouveau pas. Alors, les équations du mouvement sont intégrées suffisamment longtemps pour que le régime transitoire disparaisse complètement. La vitesse de rotation est ainsi augmentée par pas réguliers. Dans la seconde passe, on effectue une démarche similaire mais en descente en vitesse cette fois-ci.

La simulation transitoire montre bien le cycle d'hystérésis que présente ce système. Lors de la montée en vitesse, la réponse du système est d'abord une solution sans contact comme prédit par la HBM. L'amplitude de la réponse croit avec Ω. A partir de $\Omega = 0,15$ environ, le contact est établi entre le rotor et le stator et le phénomène de contact annulaire complet (full annular rub) apparaît. L'amplitude de la réponse vibratoire continue d'augmenter avec Ω jusqu'à un maximum se situant à environ $\Omega = 0,92$. Une fois franchie cette vitesse critique, l'amplitude de la réponse décroit à nouveau jusqu'à $\Omega = 1,0$ où alors un saut de réponse apparaît vers une solution sans contact. Une fois le saut vers la réponse

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

sans contact effectué, l'amplitude vibratoire continue à diminuer légèrement avec Ω.

Lors de la descente en vitesse, la première réponse du système est une réponse sans contact. Le système persiste en mouvement sans contact en dessous de $\Omega = 1,0$ jusqu'à $\Omega = 0,85$ où un autre saut de réponse intervient cette fois-ci en brutale augmentation vibratoire. Lorsque l'on continue la descente en vitesse la courbe de réponse suit alors la même courbe que lors de la montée en vitesse mais en sens de parcourt inverse.

On constate alors une parfaite concordance entre la courbe de réponse HBM et la courbe de réponse par intégration temporelle. Une portion de la courbe de réponse HBM n'est pas retrouvée par intégration temporelle et correspond en réalité à une partie de branche instable. Comme on le verra dans le chapitre 3, les solutions instables sont des solutions qui vérifient les équations du mouvement mais qu'on ne peut pas obtenir dans la réalité.

2.4.2 Application sur un modèle de rotor éléments finis

Le modèle étudié ici est le même que celui décrit au paragraphe 2.3.3. Une analyse de l'influence de la réduction de modèle sur la courbe de réponse et les performances en temps de calcul est effectuée à la fois en linéaire et en non linéaire. L'influence d'autres paramètres comme le nombre d'harmoniques retenues dans la décomposition en série de Fourier est également présentée.

2.4.2.1 Effet de la réduction de modèle sur la réponse linéaire

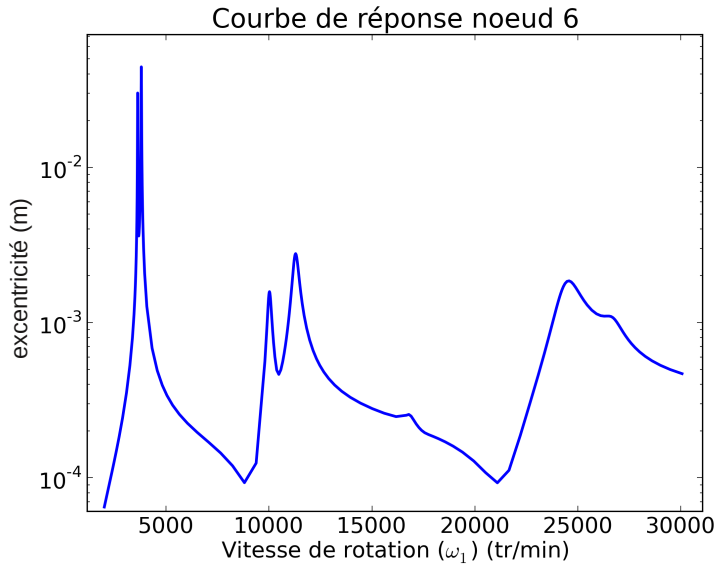


FIGURE 2.18: Réponse linéaire du rotor à trois disques sur la plage de fréquence 0tr/min à 30000tr/min

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

La figure 2.18 montre la courbe de réponse du rotor sans prise en compte de la non linéarité de contact. Quand le problème est linéaire, seul le fondamental (première harmonique) et nécessaire dans la décomposition en série de Fourier. Cette courbe de réponse est obtenue sans réduction de modèle. La simulation est donc effectuée sur les 69 degrés de libertés de la base physique (calcul de référence). Ce nombre total de degrés de liberté

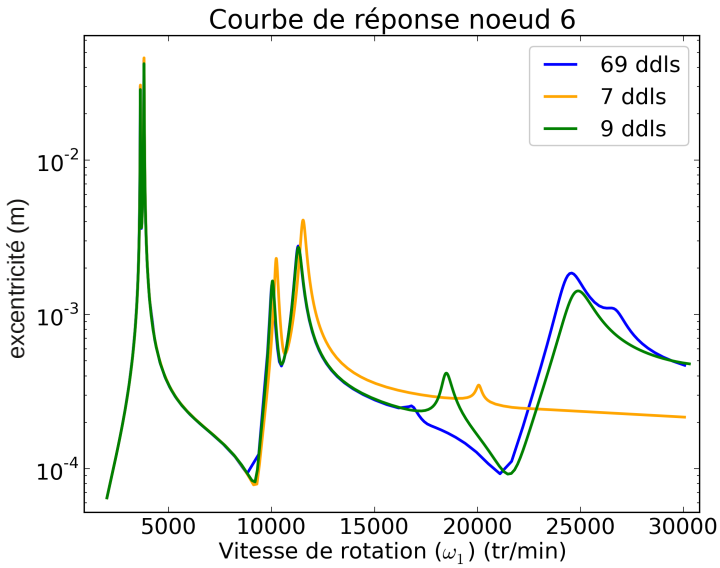


FIGURE 2.19: Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. bleu : pas de réduction de modèle. orange : 2 modes encastrés. vert : 4 modes encastrés.

n'est, dans l'absolu, pas très élevé et la vitesse d'exécution n'est ici pas un problème. En revanche, lors d'un calcul non linéaire, le nombre total de degrés de liberté influe beaucoup sur le temps de calcul de la stabilité de la solution HBM (voir chapitre 3). Dans ce contexte, il est important de réduire au maximum le nombre de degrés de liberté. Pour cela, comme présenté dans la section 1.4, une réduction de modèle par la méthode de Craig et Bampton est effectuée. Les degrés de liberté non linéaires du nœud numéro 6 (correspondant au nœud du disque 2) sont toujours conservés dans la base physique. La base de projection Craig et Bampton est donc toujours constituée de 5 modes statiques. La courbe de réponse a été calculée avec différents nombres de modes encastrés retenus dans la base de projection. Le nombre de degrés de liberté total est donc égal au nombre de modes encastrés retenus plus 5.

La figure 2.19 montre la courbe de réponse du rotor avec 2 et 4 modes encastrés retenus dans la base de projection (respectivement 7 et 9 degrés de liberté généralisés). A chaque fois ce sont les modes encastrés de plus faible fréquence propre qui sont conservés. La réduction à 7 degrés de liberté semble à première vue plutôt correcte pour approximer la réponse pour les deux premiers pics de résonance (aux alentours de 3700 tours par minute). En revanche, au delà, la réponse est trop éloignée de la référence. Avec

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

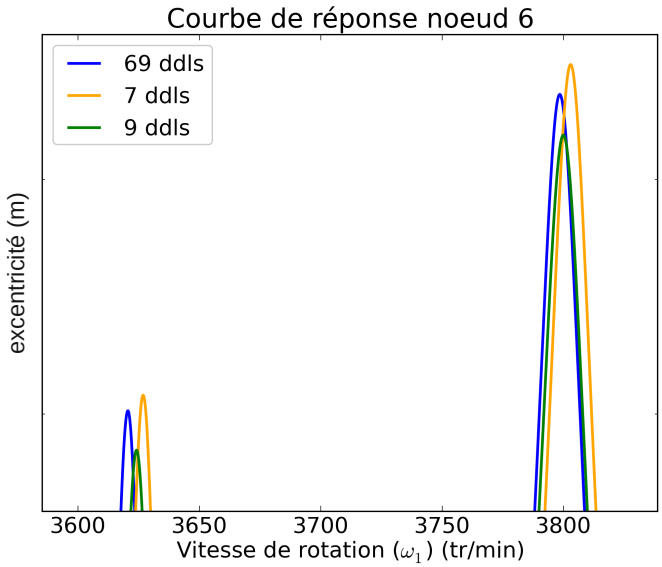


FIGURE 2.20: Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. bleu : pas de réduction de modèle. orange : 2 modes encastrés. vert : 4 modes encastrés. Zoom sur les deux premières fréquences de résonance.

deux modes encastrés supplémentaires (9 degrés de liberté au total), le second couple de fréquences de résonance (aux alentours de 11000tr/min) est correctement approximé. En revanche au delà, la réponse s'écarte de la référence. Une vue agrandie de la courbe de réponse aux alentours du premier couple de pics de résonance est montrée figure 2.20. La figure 2.21 montre la courbe de réponse avec 9 et 16 modes encastrés retenus dans la base de projection (respectivement 14 et 21 degrés de liberté généralisés). La courbe de réponse apparaît correctement approximée sur la plage de fréquence de 0 tr/min à 30000tr/min dès l'utilisation de 9 modes encastrés (14 degrés de liberté). La figure 2.22 montre une vue agrandie de la courbe de réponse autour du premier couple de fréquences de résonance. Il est très difficile de distinguer la courbe de réponse obtenue avec 16 modes encastrés (21 degrés de liberté) avec la courbe de référence.

En conclusion, seul un faible nombre de modes est nécessaire pour bien approximer la solution linéaire autour des toutes premières vitesses de résonance du système. La question est maintenant de savoir si un plus grand nombre de modes est nécessaire lors du calcul de la réponse non linéaire.

2.4.2.2 Effet de la réduction de modèle sur la réponse non linéaire

Dans cette section, l'étude de l'influence de la réduction de modèle de type Craig et Bampton est faite sur la réponse non linéaire du système. Dans cet exemple, le jeu entre le rotor et le stator a été fixé à 1mm et le coefficient de frottement à $\mu = 0,1$. La figure 2.23 montre les courbes de réponse linéaire et non linéaires dans le cas où aucune réduction de modèle n'est effectuée. La réponse non linéaire a été calculée avec un maximum de 32

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

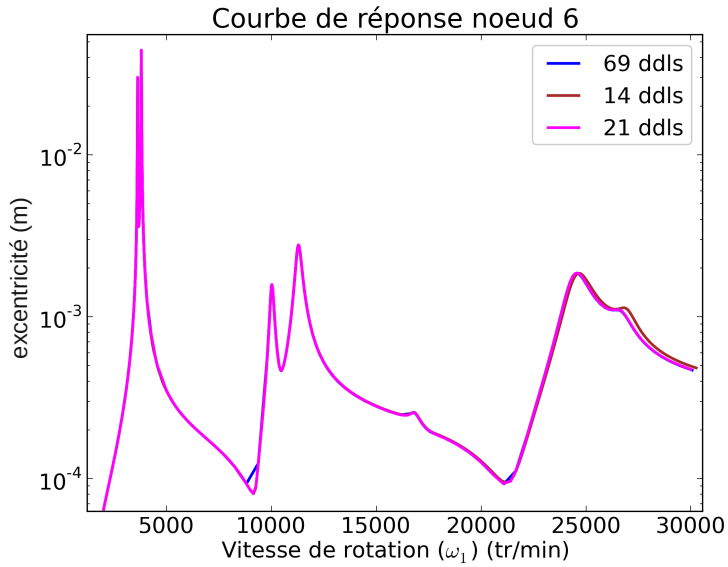


FIGURE 2.21: Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. bleu : pas de réduction de modèle. marron : 9 modes encastrés. magenta : 16 modes encastrés.

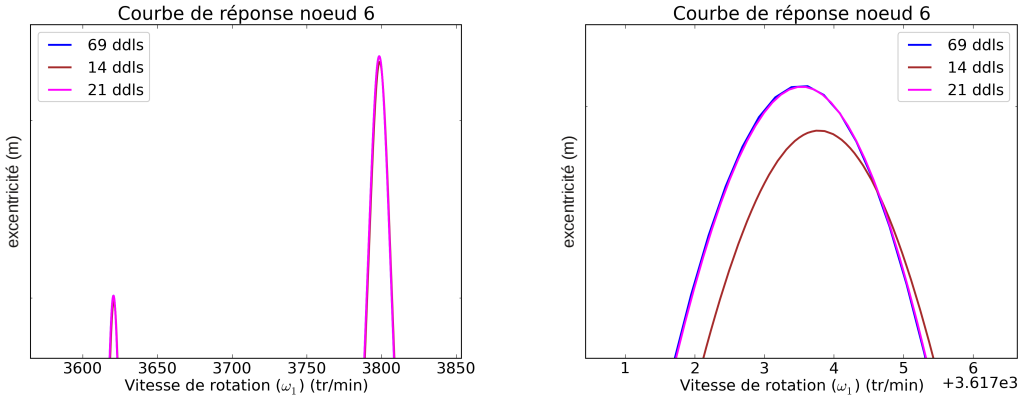


FIGURE 2.22: Réponse linéaire du rotor à trois disques. Réduction de modèle Craig et Bampton. Zoom sur les deux premières fréquences de résonance puis sur le premier pic de résonance

harmoniques. Sur la vue globale, on constate un écrasement des pics de résonance correspondant à la grande rigidification apportée par le contact. Un décalage de la fréquence de résonance vers des vitesses de rotation plus élevées en est la conséquence. La loi de contact par pénalisation autorise un dépassement du jeu. Ce dépassement est plus aisé à observer sur la vue agrandie de la courbe de réponse de cette même figure. On observe de nombreuses résonances internes sous forme de pics de réponse très fins tout au long de la branche solution. Une analyse un peu plus détaillée de l'évolution de la réponse le long

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

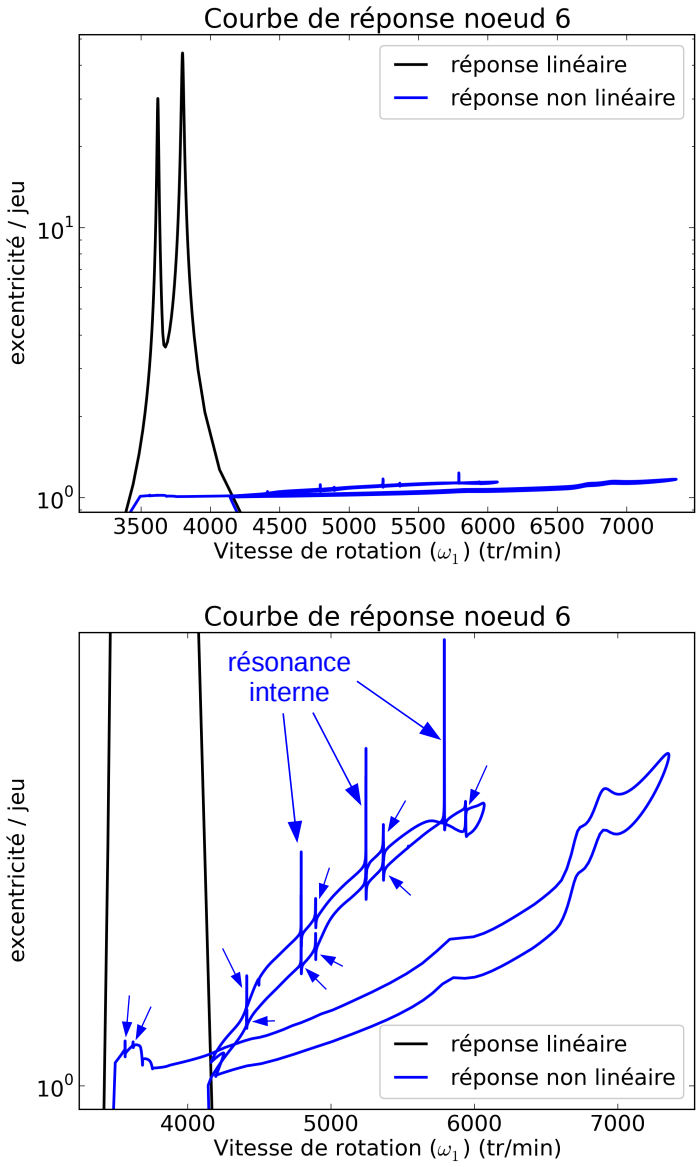


FIGURE 2.23: Réponses linéaire et non linéaires du rotor éléments finis avec jeu = 1mm et μ=0,1 sans réduction de modèle. En haut : vue globale. En bas : vue agrandie sur la réponse non linéaire.

de cette branche solution est donnée chapitre 3.

L'évolution de cette branche solution en fonction du nombre de modes encastrés peut être observée figures 2.24, 2.25 et 2.26. On peut constater qu'avec 16 modes encastrés retenus (21 ddls au total), la courbe de réponse n'est quasiment pas modifiée par rapport à la référence. Les résonances internes sont toujours présentes. En revanche lorsque l'on ne retient que 11 modes encastrés (16 ddls au total) les résonances internes disparaissent. La disparition des résonances internes est plutôt une bonne chose car parcourir ces dernières

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

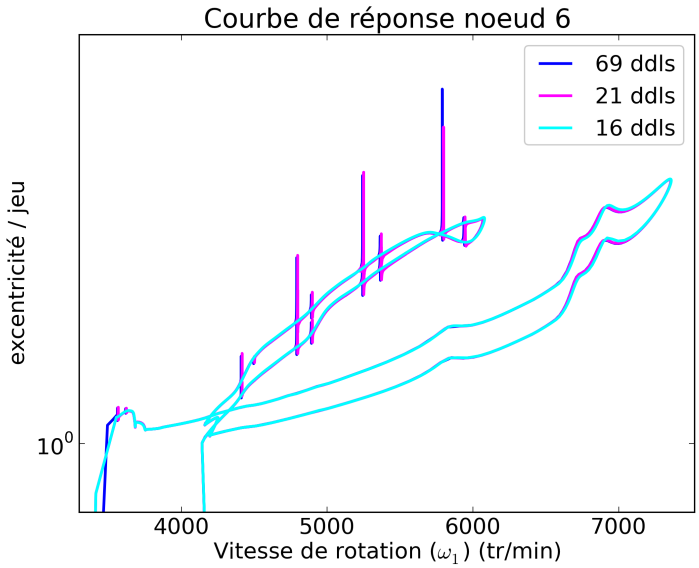


FIGURE 2.24: Réduction de modèle Craig et Bampton. Effet de la réduction à 21 ddls et 16 ddls.

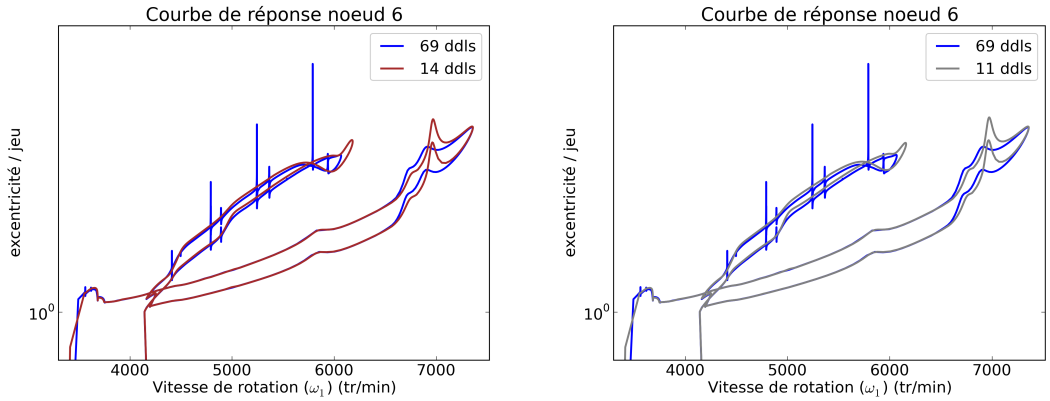


FIGURE 2.25: Réduction de modèle Craig et Bampton. Effet de la réduction à 14 ddls et 11 ddls.

est assez pénalisant en terme de temps de calcul alors qu'elles ont une probabilité quasi-nulle de se produire dans la réalité. A part cette remarque sur les résonances internes, le reste de la courbe de réponse est très proche de la courbe de référence.

Les courbes de réponse obtenues avec respectivement 9, 6, 4 et 2 modes encastrés (14, 11, 9 et 6 ddls) montrent cette fois-ci des différences non négligeables avec la référence. On note donc qu'un plus grand nombre de modes est nécessaire pour calculer une réponse non linéaire que pour calculer une réponse linéaire. Alors qu'une réduction à 7 ddls seulement donnait une bonne approximation de la solution linéaire aux alentours de la première fréquence de résonance du système, on constate que cette approximation n'est

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

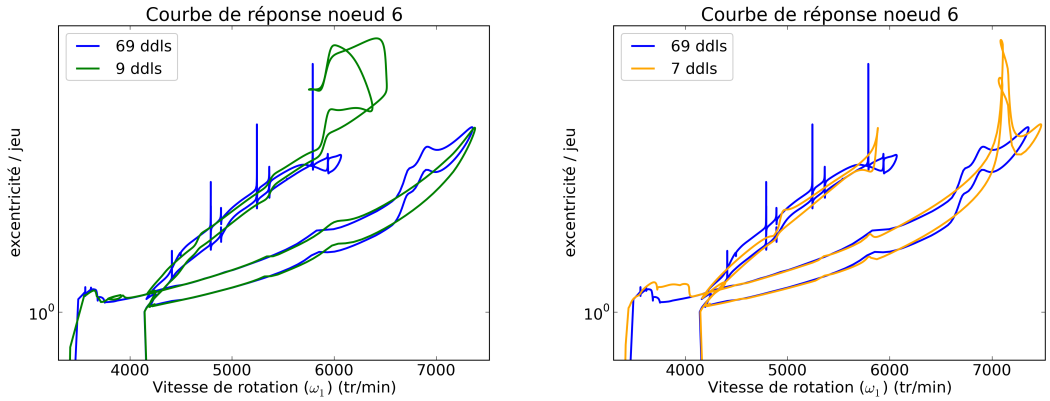


FIGURE 2.26: Réduction de modèle Craig et Bampton. Effet de la réduction à 9 ddls et 7 ddls.

plus du tout valable lorsque c'est la réponse non linéaire qui est étudiée. Cette constatation n'est pas étonnante car la réponse non linéaire fait intervenir des composantes modales de fréquence plus élevées que la réponse linéaire (décalage du pic de résonance vers des vitesses de rotation plus élevées). Pour la suite de l'étude, une réduction utilisant 11 modes encastrés est utilisée car nous venons de voir que c'est le choix permettant d'obtenir le meilleur compromis entre réduction du nombre de ddls et précision des résultats.

2.4.2.3 Effet du nombre d'harmoniques sur la réponse non linéaire

Dans cette section, la non linéarité de contact est prise en compte. Nous allons voir maintenant l'évolution du nombre d'harmoniques sur la réponse non linéaire du système. Dans cette section, le modèle a été réduit à 16 ddls en utilisant une méthode de Craig et Bampton.

Les figures 2.27 2.28 2.29 montrent l'influence du nombre d'harmoniques retenues sur la courbe de réponse. Comme on peut le voir, avec une seule harmonique (le fondamental seul) la réponse est très approchée. Avec 4 harmoniques, certaines partie de la courbe de réponse semblent très bien approchées. A partir de 6 ou 8 harmoniques retenues, la courbe de réponse est très proche de celle obtenue avec 32 harmoniques. A partir de 12 harmoniques retenues, il devient très difficile de faire une distinction avec la courbe de référence. La courbe de réponse converge donc rapidement avec le nombre d'harmoniques. Cette convergence est accélérée grâce à la procédure de sélection automatique des harmoniques. En effet, la figure 2.30 montre l'évolution du nombre d'harmoniques en fonction de l'abscisse curviligne de la continuation par pseudo-longueur d'arc. Comme on peut le voir, sur certaines parties de la courbe solution seul un petit nombre (entre 4 et 6) d'harmoniques est nécessaire pour obtenir la solution. Imposer davantage d'harmoniques sur ces parties n'aurait aucun sens et ne ferait que ralentir les calculs sans améliorer la précision.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

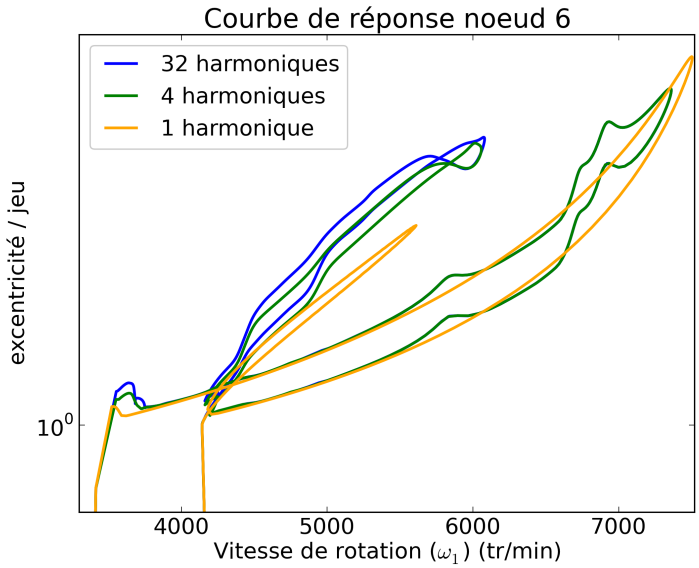


FIGURE 2.27: Réponse non linéaire du rotor éléments finis, modèle réduit à 16 ddls. Influence du nombre maximal d'harmoniques (4 harmoniques et 1 harmonique).

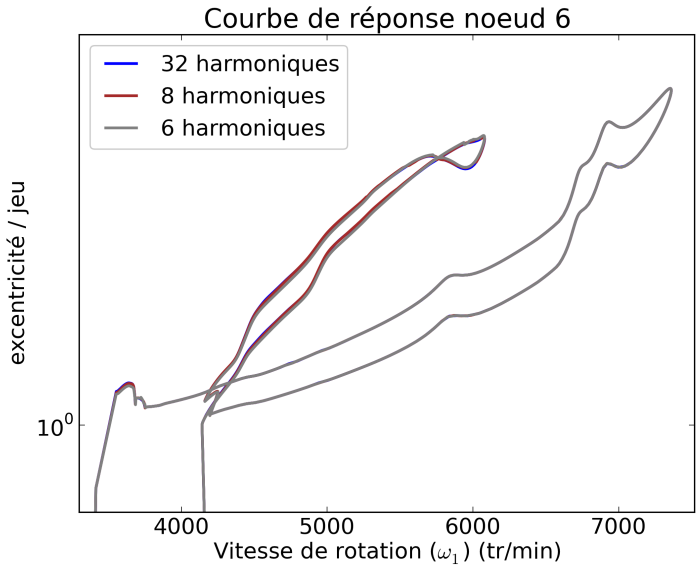


FIGURE 2.28: Réponse non linéaire du rotor éléments finis, modèle réduit à 16 ddls. Influence du nombre maximal d'harmoniques (8 harmoniques et 6 harmoniques).

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le principe de la méthode de la balance harmonique a été rappelé. La méthode consiste à transformer le système d'équations différentielles du mouvement du domaine temporel en un système algébrique d'équations dans le domaine fréquentiel.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

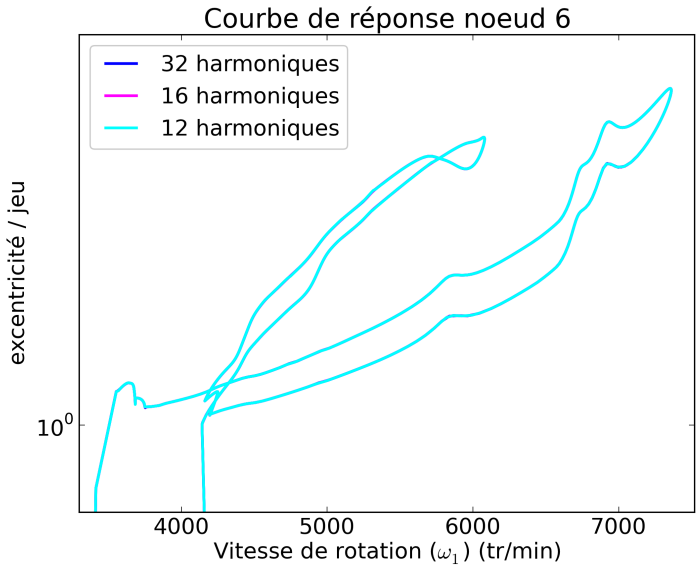


FIGURE 2.29: Réponse non linéaire du rotor éléments finis, modèle réduit à 16 ddls. Influence du nombre maximal d'harmoniques (16 harmoniques et 12 harmoniques).

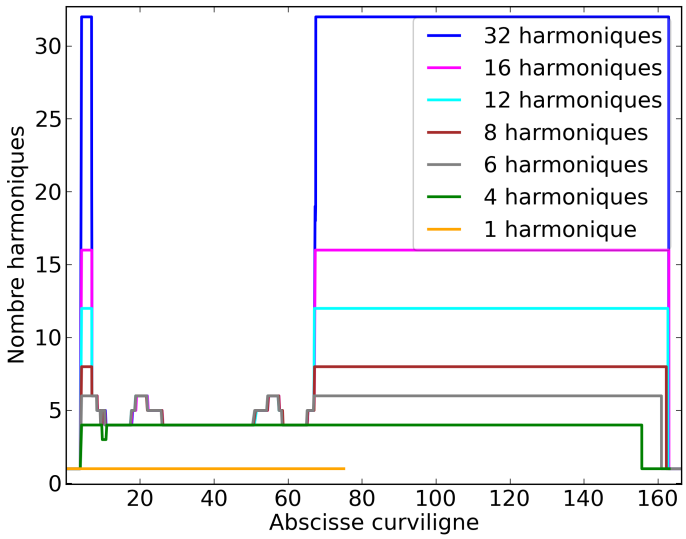


FIGURE 2.30: Evolution du nombre d'harmoniques en fonction de l'abscisse curviligne.

Plusieurs fonctionnalités associées ont également été présentées comme, par exemple, la procédure AFT (Alternating Frequency Time) qui permet de traiter virtuellement n'importe quelle loi non linéaire. Il a également été montré comment coupler la méthode HBM à une technique de continuation (continuation par pseudo-longueur d'arc) afin de pouvoir mener à bien des études paramétriques efficacement tout en suivant les branches solutions

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

au travers des points de rebroussement. La méthode HBM est davantage optimisée grâce à une procédure de sélection automatique des harmoniques et grâce à une procédure d'adimensionnement numérique des équations. La sélection automatique des harmoniques permet d'optimiser à la fois la vitesse d'exécution et la précision des résultats. L'adimensionnement permet de rendre robuste la procédure de continuation lorsque des systèmes aux dimensions réalistes sont étudiés.

Le tout a été illustré sur des exemples de problèmes de contact rotor-stator où la HBM s'est révélée être un outil rapide et fiable. Un exemple de modèle de rotor éléments finis a permis d'illustrer la faisabilité de l'usage d'une technique de réduction de modèle (comme la méthode de Craig et Bampton) afin de réduire la taille du système algébrique et d'accélérer encore davantage la vitesse de résolution.

Cependant, il a également été montré que la méthode de la balance harmonique avec continuation converge vers des solutions stables ainsi que des solutions instables. Une technique de calcul de la stabilité des solutions est donc nécessaire pour pouvoir discriminer les différents types de solutions.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 3

Calcul de la stabilité des solutions

Ce troisième chapitre recense les principales méthodes de calcul de stabilité des solutions HBM. Certaines d'entre-elles, basées sur la théorie de Floquet, sont testées et comparées en terme de précision et de coût de calcul sur des exemples de problèmes principalement en lien avec la dynamique des machines tournantes et du contact rotor-stator.

Sommaire

3.1 Introduction 69

3.2 Méthodes dans le domaine temporel 70

3.2.1 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle en $2n$ passes (désigné comme la méthode '2n-passes' par la suite) . . . 70

3.2.2 Calcul de la matrice de monodromie par approximations avec des exponentielles de matrice (noté 'exponentielles' par la suite) 72

3.2.3 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle simple-passe avec schéma de Ruge-Kutta (noté 'RK 1-passe' par la suite) 73

3.2.4 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle simple-passe avec schéma de Newmark (noté 'Nm 1-passe' par la suite) 73

3.2.5 Autres méthodes 74

3.3 Méthodes dans le domaine fréquentiel 75

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.3.1 Méthode de Hill (notée 'Hill1' par la suite) 75
3.3.2 Amélioration de la méthode de Hill (notée 'Hill2' par la suite) . . . 76
3.4 Cas tests 78
3.4.1 Oscillateur de Duffing 79
3.4.2 Rotor de Jeffcott non linéaire 80
3.4.3 Modèle de rotor éléments finis 82
3.5 Discussion 86
3.6 Conclusion 89

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu, la technique de la balance harmonique permet des gains substantiels dans la vitesse d'obtention d'une solution périodique d'un système dynamique non linéaire. Cependant, cette technique (tout comme la technique de shooting [SUN 98]), converge aussi bien vers les solutions stables que vers les solutions instables du système. Or, seules les solutions stables peuvent être obtenues dans la réalité. Une solution instable est une solution qui vérifie l'équation du mouvement mais n'est associée à aucun bassin d'attraction. Ainsi, une infime perturbation de ce mouvement instable le modifie et le fait s'éloigner de cette position instable pour aller se stabiliser sur un autre état d'équilibre (stable cette fois-ci) ou bien pour diverger en cas d'absence de solution bornée.

Une solution dynamique est donc considérée comme stable si le mouvement induit par une perturbation reste borné avec le temps. Il existe plusieurs définitions mathématiques associées : stabilité au sens de Lyapunov, stabilité Lagrangienne, stabilité orbitale, stabilité asymptotique, stabilité locale, etc. La stabilité globale d'une solution étant en pratique très difficile à prouver, on ne s'intéresse en général qu'à sa stabilité locale. Déterminer la stabilité locale consiste à déterminer l'évolution d'une « petite » perturbation autour de l'état d'équilibre. Si la perturbation s'atténue avec le temps alors la solution est considérée comme stable sinon elle est instable.

L'évolution de la stabilité d'une solution en fonction d'un paramètre de contrôle peut également faire apparaître des bifurcations de solution (cyclic fold, period doubling, secondary hopf, etc.). Davantage de détails sur la définition de la stabilité d'une solution et sur les différents types de bifurcation rencontrés sont donnés dans les thèse de Guskov [GUS 07], Demailly [DEM 03], et Lesaffre [LES 07] par exemple. Il est important de pouvoir déterminer le type de bifurcation car cela permet par exemple de détecter l'apparition de solutions quasi-périodiques (bifurcation de type Hopf secondaire) (voir chapitre 4).

Il est donc primordial de pouvoir discriminer les solutions stables des solutions instables. La recherche sur les techniques de calcul de stabilité, depuis plusieurs décennies, a engendré une vaste quantité de références bibliographiques. Ces techniques ont d'abord été principalement appliquées à l'étude de systèmes linéaires avec coefficients périodiques comme dans le cas des rotors non axisymétriques, des rotors sujets à des effets aérodynamiques ou bien des rotors embarqués avec support à mouvement périodique [FRI 77, FRI 86, GAO 81, SIN 91, WU 94].

Dans notre cas il n'est pas possible de déterminer la stabilité des solutions à priori, en revanche il est possible de la déterminer à posteriori par un calcul supplémentaire intervenant après le calcul de la solution périodique. La théorie de Floquet et la technique basée sur l'utilisation des exposants de Lyapunov sont les deux moyens les plus utilisés pour déterminer la stabilité des solutions périodiques. Plusieurs implémentations de ces théories ont déjà été développées et utilisées par le passé (voir l'article de Friedmann [FRI 86]). Plus récemment, ces méthodes ont été appliquées sur des systèmes non linéaires. Liaw [LIA 93] a étudié la stabilité d'un oscillateur d'un degré de liberté avec rigidité linéaire par morceaux avec la technique des exposants de Lyapunov. Plus tard, Raghothama et Narayan [RAG 99] ainsi que Zhen et Hasebe [ZHE 99] ont appliqué

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

cette technique à des modèles de rotor. Différentes variantes de la théorie de Floquet ont également été fréquemment utilisées. Kim et Noah [KIM 96] ont étudié la stabilité d'un modèle de rotor de Jeffcott non linéaire en construisant et analysant la matrice dite de monodromie (ou matrice de transition de Floquet) tandis que Shen [SHE 08] a opté pour une approximation de cette dernière dans leur étude d'un oscillateur de Mathieu-Duffing. La méthode de Hill, qui est également une variante de la théorie de Floquet, a été utilisée par Rook [ROO 02] pour étudier la stabilité d'un oscillateur de Duffing et par Von Groll et Ewins [VON 01] ainsi que par Sinha [SIN 04a] dans des applications de dynamique des rotors.

Les techniques qui viennent d'être mentionnées ne sont pas équivalentes en terme de précision et temps de calcul. Comme nous allons le voir, l'aspect performance est très important car les techniques de calcul de stabilité ont tendance à être très lourdes et peuvent annuler le principal avantage de la méthode de la balance harmonique. Dans la suite de ce chapitre, plusieurs implémentations différentes de la théorie de Floquet sont passées en revues et cinq d'entre-elles sont testées et comparées en terme de précision et de temps de calcul sur des exemples de problèmes non linéaires principalement en rapport avec les machines tournantes. Le choix a été fait de ne pas considérer les techniques basées sur les exposants de Lyapunov car ces dernières sont moins souvent utilisées que les techniques basées sur les coefficients de Floquet. De plus, ces deux méthodes étant différentes sur le principe, leurs résultats ne sont pas directement comparables.

Parmi les différents algorithmes inspirés de la théorie de Floquet certains se basent sur la description du problème dans le domaine temporel et consistent à construire la matrice de monodromie puis à calculer ses valeurs propres tandis que d'autres se basent sur la description du problème dans le domaine fréquentiel. Il faut souligner le fait que toutes ces techniques peuvent être utilisées avec d'autres techniques de résolution telle que la méthode de shooting ou bien par la méthode de collocation trigonométrique [NAT 89]. Cependant l'effort de programmation ainsi que les performances en temps de calcul peuvent grandement varier.

3.2 Méthodes dans le domaine temporel

3.2.1 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle en $2n$ passes (désigné comme la méthode '2n-passes' par la suite)

On rappelle ici l'équation du mouvement dans le domaine temporel :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\omega)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(t) \tag{3.1}$$

Pour cet algorithme, l'équation du mouvement doit être réécrite sous forme d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{p}}(t) \tag{3.2}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

où $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]^T$; $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) = \left[\mathbf{0}, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\right]^T$; $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \left[\mathbf{0}, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}(t)\right]^T$ et :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

où **Id** représente la matrice identité. On note $\mathbf{x}_0(t)$ une solution de l'équation (3.2), et $\mathbf{y}(t)$ une petite perturbation de cette dernière. Quand $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t)$ est injectée dans l'équation (3.2), on obtient :

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{L} \times (\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t)) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t)) + \tilde{\mathbf{p}}(t) \tag{3.4}$$

Comme $\mathbf{y}(t)$ est petit par hypothèse, l'approximation du premier ordre suivante est valide :

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0(t)) + \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \mathbf{y}(t)$$

avec :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(t) & \mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix}$$

L'équation (3.4) peut alors être simplifiée comme suit :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{y}(t) \tag{3.5}$$

où :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{L} - \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}(t) \tag{3.6}$$

Il est important de remarquer que $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)$ est également périodique de période T et que l'équation (3.5) a un maximum de $2n$ solutions linéaires indépendantes. On note $\mathbf{y}_{0_i}(t) \quad , i \in [1..2n]$ ces $2n$ solutions de l'équation (3.5), et on note $\mathbf{y}_0(t)$ la matrice $2n \times 2n$ formé par ces solutions. Si $\mathbf{y}_0(0)$ est solution de l'équation (3.5), alors $\mathbf{y}_0(T)$ est également solution. Cela signifie que les vecteurs de $\mathbf{y}_0(T)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathbf{y}_0(0)$. Autrement dit, il existe une matrice $\mathbf{H}(\mathbf{y}_0)$ telle que :

$$\mathbf{y}_0(T) = \mathbf{H}(\mathbf{y}_0)\mathbf{y}_0(0) \tag{3.7}$$

Si on choisit $\mathbf{y}_0$ de sorte que $\mathbf{y}_0(0) = \mathbf{Id}$, alors :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{Id}) = \mathbf{y}_0(T) \tag{3.8}$$

H est appelée la matrice de monodromie ou bien la matrice de transition de Floquet. C'est un opérateur linéaire qui décrit l'évolution d'une perturbation sur une période. Ses valeurs propres sont appelées les multiplicateurs de Floquet. Si un seul de ces multiplicateurs a un module supérieur à 1, alors la solution est instable, sinon cette dernière est stable. Davantages de détails (sur les différents types de bifurcations notamment) sont donnés dans les thèses de Demailly [DEM 03] et de Lesaffre [LES 07].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

La première manière de calculer $\mathbf{H}$ est de procéder colonne par colonne. L'équation différentielle linéaire (3.5) doit être traitée en procédant à $2n$ intégrations temporelles sur une durée de une période T en utilisant $2n$ conditions initiales linéairement indépendantes. Typiquement on choisit $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{e}_i, \quad i \in [1,\ldots,2n]$ où $\mathbf{e}_i$ est le i^{ème} vecteur unité.

$$\mathbf{H} = [\mathbf{y}_1(T), \mathbf{y}_2(T), \ldots, \mathbf{y}_{2n}(T)] \tag{3.9}$$

Cet algorithme requiert relativement peu d'effort de programmation car il existe de nombreux outils numériques dans les librairies scientifiques de la plupart des langages de programmation permettant de traiter des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Du moment que l'intégration temporelle est faite correctement(choix d'un pas de temps suffisamment petit), cette méthode donne des résultats très précis. Dans les résultats qui seront donnés par la suite, cette méthode est utilisée comme référence relativement à la précision des résultats. Cette méthode requiert cependant de très long temps de calcul. Notons cependant que dans le cas où l'équation du mouvement est traitée par une méthode de shooting la matrice de monodromie est un sous-produit de la procédure de résolution. Ainsi, aucune opération supplémentaire n'est requise pour obtenir cette matrice.

Une version simple passe de cet algorithme existe dans laquelle l'équation (3.5) est réécrite en transformant la matrice $\mathbf{J}$ en une matrice $4n^2 \times 4n^2$ et de sorte à ce que les vecteurs $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{e}_i, \quad i \in [1,\ldots,2n]$ de taille $2n$ soient assemblés pour former un vecteur de taille $4n^2$. L'intégration temporelle se fait sur un système de plus grande taille mais une seule fois au lieu de $2n$ fois. Cet algorithme simple passe peut, d'après Gaonkar [GAO 81], réduire le coût de calcul jusqu'à 50% mais seulement dans le cas d'un calcul en simple précision. Sinha [SIN 91] montre que cette façon de faire n'est pas significativement plus efficace en double précision qui constitue le standard actuel.

3.2.2 Calcul de la matrice de monodromie par approximations avec des exponentielles de matrice (noté 'exponentielles' par la suite)

La matrice de monodromie peut être approximée de façon à réduire le temps de calcul avec peu de perte de précision. Pour cela, on suppose que $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t)$ est constante par morceaux (voir les travaux pionniers de Hsu [HSU 72], puis ceux de Friedmann [FRI 77][FRI 86]). L'intervalle de temps $[0,T]$ est subdivisé en K intervalles $([0,t_1,t_2,\ldots,t_{K-1},t_K])$. La matrice $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t)$ est supposée constante dans chaque sous-intervalle. Ainsi, $\mathbf{H}$ peut être approximée par la formule suivante :

$$\mathbf{H} \approx \tilde{\mathbf{H}} = \prod_{k=K}^{1} \mathrm{e}^{[\mathbf{J}_k](t_k - t_{k-1})} \tag{3.10}$$

où $\mathbf{J}_k$ est la valeur moyenne de $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t)$ sur l'intervalle $[t_{k-1},t_k]$. En pratique, comme $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t)$ est calculée seulement aux instants $t_k \quad k \in [0..K]$, on peut écrire $\mathbf{J}_k = (\mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t_k) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t_{k-1}))/2$. La qualité de l'approximation dépend de K. En effet :

$$\lim_{K \to +\infty} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \tag{3.11}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

En pratique des exponentielles de matrice doivent être calculées. Parmi les très nombreuses méthodes existante permettant de calculer des exponentielles de matrices on peut citer l'approximation de Padé, de Taylor ou bien le calcul basé sur la décomposition en valeurs singulières. Dans [CAR 98], Cardona détermine une formule maximisant l'erreur d'approximation lorsque la technique de Taylor est utilisée.

3.2.3 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle simple-passe avec schéma de Ruge-Kutta (noté 'RK 1-passe' par la suite)

Comme précisé, la méthode $2n$-passes peut être modifiée de sorte à ne faire qu'une seule intégration temporelle au lieu de $2n$. Friedmann [FRI 77] a proposé une version simple passe améliorée basée sur le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. Dans cet algorithme $\mathbf{H}$ est calculé avec la formule suivante :

$$\mathbf{H} = \prod_{k=1}^{K} \mathbf{G}(T - kh)$$

avec $h = T/K$ le pas de temps et $\mathbf{G}$ une matrice (qui dépend du temps) calculée à partir de la matrice $\mathbf{J}$ ainsi que d'autres paramètres (les coefficients de Gill notamment). D'un point de vue programmation, cette méthode est très similaire à la méthode '*exponentielles*' car la matrice de monodromie est calculée comme un produit d'autres matrices calculées à l'avance. Ces deux méthodes diffèrent simplement par la façon dont ces matrices intermédiaires sont calculées.

3.2.4 Calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle simple-passe avec schéma de Newmark (noté 'Nm 1-passe' par la suite)

De nombreux schémas d'intégration temporel peuvent être utilisés pour calculer la matrice de monodromie. A titre d'illustration, Gaonkar [GAO 81] compare différents schémas (y compris les schémas de Runge-Kutta, de Hamming and de Gear) à la fois en simple-passe et en multi-passes. Dans le domaine de la dynamique des rotors et des structures linéaires, le schéma implicite de Newmark à accélération moyenne est souvent utilisé du fait de propriétés intéressantes comme la stabilité inconditionnelle du schéma par exemple. Une méthode de shooting couplée à la version non linéaire du schéma de Newmark a été utilisée dans [PEE 09, IBR 09] pour calculer la réponse non linéaire de systèmes. Il est montré que la matrice de monodromie peut être obtenue lors de l'étape de calcul de la Jacobienne du système au sein du solveur de Newton-Raphson. On aboutit à un système d'équations linéaires semblable à celui décrit dans la section 3.2.1 mais avec un système de taille n au lieu de taille $2n$ puisqu'il n'est pas nécessaire de mettre les équations du mouvement sous forme d'état.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.2.5 Autres méthodes

3.2.5.1 Calcul implicite de la matrice de monodromie par intégration temporelle k-passes

Dans [BAU 01] Bauchau et Nikishkov ont développé une méthode qui ne requiert pas le calcul explicite de la matrice de monodromie. Seulement ses k ($k \leq 2n$) plus grandes valeurs propres sont approximées grâce à l'algorithme d'Arnoldi. A partir de conditions initiales aléatoires, k intégrations numériques sont effectuées sur une période. A la fin de chacune des k intégrations, une colonne de $\tilde{\mathbf{H}}$ est déterminée. $\tilde{\mathbf{H}}$ est une matrice de Hessenberg de taille k qui représente la vraie matrice de monodromie $\mathbf{H}$. Les valeurs propres de $\tilde{\mathbf{H}}$ sont des approximations des plus grandes (en module) valeurs propres de $\mathbf{H}$. Si $2n$ intégrations sont effectuées sur une période alors les valeurs propres de $\tilde{\mathbf{H}}$ sont exactement les mêmes que celles de $\mathbf{H}$. Dans ce cas, cette méthode est équivalente à la méthode $2n$-passe.

Cette méthode est plus rapide que la méthode $2n$-passe car seulement k intégrations sont effectuées au lieu de $2n$. Cependant, cette méthode est plus lente qu'une méthode simple passe tout en introduisant un degré d'approximation supplémentaire. En conséquence cette méthode montrant à priori peu d'intérêt n'a pas été retenue.

3.2.5.2 Calcul de la matrice de monodromie par utilisation des polynômes de Chebyshev

Sinha et Wu [SIN 91] ont développé une technique efficace basée sur l'idée que l'équation d'état linéarisée peut être développée sous forme d'un polynôme de Chebyshev sur la période T. En conséquence, au lieu d'effectuer une intégration temporelle d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre sur une période, on doit résoudre un système algébrique linéaire. Cette méthode a été testée sur des systèmes de taille relativement petite (jusqu'à 10 ddls dans [WU 94]). Bien que cette méthode ait l'air intéressante en terme de performance, elle introduit un degré d'approximation supplémentaire puisque la précision du résultat dépend du nombre de termes retenus dans l'expansion de Chebyshev. Cette méthode n'a pas été retenue.

3.2.5.3 Calcul de la matrice de monodromie par la procédure de ondelette-Galerkin

Dans [PER 01] puis plus tard dans [PER 03], Pernot et Lamarque ont introduit le concept de la procédure d'ondelette-Galerkin dans le but d'obtenir les solutions transitoires et périodiques de systèmes dynamiques linéaires et non linéaires multi-ddl avec coefficients périodiques. Grâce à de bonnes propriétés de localisation temps-fréquence, cette méthode basée sur les ondelettes s'est montrée fiable même dans les cas de problèmes à grand nombre de degrés de liberté impliquant des excitations paramétriques à la fois régulières et non régulières. D'après les auteurs la procédure d'ondelette-Galerkin est efficace pour calculer la matrice de monodromie en une seule passe. On peut alors construire rapide-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

ment des diagrammes de stabilité caractérisant les aires stables et instable en fonction de paramètres. On peut également construire des indicateurs de niveau de stabilité/instabilité. Cette méthode requiert cependant un important effort de programmation. Pour cette raison, cette méthode a également été rejetée.

3.3 Méthodes dans le domaine fréquentiel

3.3.1 Méthode de Hill (notée 'Hill1' par la suite)

Toutes les méthodes décrites ci-dessus sont basées sur une description du problème dans le domaine temporel. Toutefois, comme l'équation du mouvement 3.1 est traitée dans le domaine fréquentiel grâce à la méthode de la balance harmonique, il paraît plus naturel de considérer la stabilité des solutions également dans le domaine fréquentiel. La méthode de Hill permet justement de rester dans le domaine fréquentiel pour la détermination de la stabilité.

Pour Hill, la perturbation est écrite sous forme d'un produit entre un terme périodique et un terme d'exponentielle décroissante.

Le déplacement $\mathbf{q}(t)$ est écrit comme somme d'une solution $\mathbf{q}_0(t)$ de l'équation (3.1) et d'une perturbation $\mathbf{s}(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{s}(t) \tag{3.12}$$

avec $\mathbf{s}(t) = \tilde{\mathbf{s}}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où $\tilde{\mathbf{s}}$ est périodique de période T. Comme on suppose $\mathbf{s}$ petit, on peut ici aussi faire une approximation du premier ordre pour $\mathbf{f}$, soit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) \approx \mathbf{f}(\mathbf{q}_0(t)) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}(t)\mathbf{s}(t) \tag{3.13}$$

En substituant les équations (3.12) et (3.13) dans l'équation (3.1) :

$$\mathbf{K}\mathbf{s}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}}(t) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}(t)\mathbf{s}(t) = \mathbf{0} \tag{3.14}$$

Une procédure de Galerkin, similaire à celle utilisée pour la méthode HBM, peut être appliquée à l'équation Eq. (3.14). On obtient alors le problème aux valeurs propres quadratique suivant :

$$\left(\mathbf{H}_0 + \lambda\mathbf{H}_1 + \lambda^2\mathbf{H}_2\right)\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

où $\mathbf{H}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}}\right)_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} = \mathbf{Z}(\mathbf{Q}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}\right)_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0}$ avec $\mathbf{Q}_0$ étant une solution convergée, et :

$$\mathbf{H}_1 = \mathrm{diag}\left(\mathbf{C}, \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2m_1\omega\mathbf{M} \\ -2m_1\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2m_N\omega\mathbf{M} \\ -2m_N\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}\right)$$

et $\mathbf{H}_2 = \mathrm{diag}\left(\mathbf{M}, \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}\right)$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

L'équation (3.15) est un problème aux valeurs propres quadratique de dimension $n(2N+1)$. Les valeurs propres solution représentent les exposants de Floquet (λ). Comme c'est un problème quadratique, il y a $2n(2N+1)$ solutions. Les multiplicateurs de Floquet (η) peuvent être déduits des exposants de Floquet à partir de la formule suivante :

$$\eta_i = e^{\lambda_i T} \tag{3.16}$$

Comme $\mathbf{H}_2$ est inversible (c'est toujours le cas car $\mathbf{M}$ est toujours inversible), l'équation (3.15) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(\hat{\mathbf{H}} - \lambda \mathbf{Id})\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

avec $\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} \\ -\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_0 & -\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1 \end{bmatrix}$ et $\hat{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{s}} \\ \lambda\tilde{\mathbf{s}} \end{pmatrix}$.

En conséquence, trouver les valeurs propres de l'équation (3.15) est équivalent à trouver les valeurs propres de la matrice réelle $\hat{\mathbf{H}}$ de taille $2n(2N+1) \times 2n(2N+1)$. Néanmoins, comme $\tilde{\mathbf{s}}$ est écrit sous forme d'une série de Fourier tronquée, la précision de cette méthode dépend du nombre d'harmoniques retenu dans cette décomposition. Utiliser un nombre infini d'harmoniques mènerait au résultats exact mais conduirait également à une matrice $\hat{\mathbf{H}}$ de taille infinie. Pour des raisons numérique évidentes seul un nombre restreint d'harmoniques peut être utilisé dans la pratique. Cette méthode est connue pour donner des résultats peu fiables la plupart du temps, surtout pour des systèmes de taille relativement grande [FRI 86, SIN 91]. Elle est également connue pour être lourde en temps de calcul pour des système de grande taille. Pour ces raisons, les résultats donnés par cette méthode ne seront pas montrés par la suite.

3.3.2 Amélioration de la méthode de Hill (notée 'Hill2' par la suite)

La méthode *Hill1* donne $2n(2N+1)$ multiplicateurs de Floquet mais seulement $2n$ parmi eux ont une réelle signification physique. L'existence des multiplicateurs de Floquet non physiques peut avoir pour conséquence une mauvaise évaluation de la stabilité des solutions. Pour tenter de résoudre ce problème, Lazarus et Thomas [LAZ 10] ont proposé une technique pour identifier puis filtrer les multiplicateurs non physiques. La technique est légèrement différente de celle utilisée dans *Hill1*. L'équation (3.5) a $2n$ solutions linéairement indépendantes $\mathbf{y}_k, \quad k \in [1,\ldots,2n]$. Toute solution $\mathbf{y}$ de l'équation (3.5) peut donc être écrire sous forme d'une somme des $2n$ solutions :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \mathbf{y}_k(t) \tag{3.18}$$

En faisant l'hypothèse que $\mathbf{y}_k$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{d}_k(t) e^{\lambda_k t} \tag{3.19}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

où d_k est une fonction T-périodique qui peut être développée en série de Fourier :

$$\mathbf{d}_k(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_k^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\omega t} \tag{3.20}$$

Il vient,

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}_k^j \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\, j\omega + \lambda_k)t} \tag{3.21}$$

De manière analogue, $\mathbf{J}$ peut également être développée sous forme de série de Fourier car également périodique de période T :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}_h \mathrm{e}^{\mathrm{i} h\omega t} \tag{3.22}$$

Les équations (3.21) et (3.22) sont substituées dans l'équation (3.5) puis une procédure de type Galerkin est appliquée afin d'obtenir le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\bar{\mathbf{H}} - \lambda \mathbf{Id}\right) \mathbf{s} = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

où,

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \mathbf{J_0} + \mathrm{i}\omega\mathbf{Id} & \mathbf{J}_{-1} & \mathbf{J}_{-2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_{-1} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 - \mathrm{i}\omega\mathbf{Id} & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Pour les mêmes raisons que dans la méthode *Hill1*, $\bar{\mathbf{H}}$ doit être tronquée à une taille finie. Les valeurs propres de $\bar{\mathbf{H}}$ sont filtrées à partir d'un critère basé sur les vecteurs propres associés $\mathbf{s}_i$. Davantage de détails sont donnés dans [LAZ 10]. Cette approche souffre des mêmes inconvénients que la méthode *Hill1* en ce sens qu'un choix sur les harmoniques à retenir dans la décomposition doit être fait mais est également censée donner des résultats plus précis grâce au filtrage. Cette technique de filtrage ne peut pas être directement appliquée à la méthode *Hill1*.

L'effort de programmation entre ces deux méthodes de Hill est similaire, cependant la construction de $\hat{\mathbf{H}}$ ou de $\bar{\mathbf{H}}$ peut être plus ou moins lourde en fonction de la méthode employée. par exemple, la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ est un sous produit de la méthode HBM lorsque cette dernière est couplée à la méthode asymptotique numérique (MAN [COC 07]) pour la continuation. Inversement, $\hat{H}$ est plus facile à construire quand la HBM est associée à la technique de continuation par pseudo longueur d'arc. Notons par ailleurs que la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ décrite ici n'est pas seulement non symétrique mais également complexe. De telles propriétés ne sont pas optimales pour le calcul des valeurs propres. De surcroît, contrairement à la méthode de *Hill1*, le jeu d'harmoniques utilisé pour la construction de $\bar{\mathbf{H}}$ doit, *a priori*,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

être différent de celui utilisé pour calculer la solution périodique en elle-même. En effet, ici ce sont les coefficients de Fourier de la matrice jacobienne $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0,t)$ qui doivent être déterminés. Or le calcul de la Jacobienne implique la détermination de la dérivée partielle première des efforts non linéaires $\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ (voir équation (3.6)). Ainsi, si par exemple les non linéarités contiennent des termes en $\mathbf{x}^3$ (comme dans le cas de l'oscillateur de Duffing par exemple), alors la dérivée première contiendra des termes en $\mathbf{x}^2$. Toutefois, l'expansion en série de Fourier de termes en $\mathbf{x}^3$ produit des coefficients de Fourier d'ordre pair non nuls et les termes en $\mathbf{x}^2$ ont des coefficients de Fourier d'ordre impair non nuls. Donc dans la pratique, à la fois les coefficients de Fourier d'ordre pair et impair sont utilisés dans la construction de $\bar{\mathbf{H}}$.

3.4 Cas tests

Les algorithmes mentionnés ont été implémentés dans la maquette numérique associée à ce travail. Trois cas tests ont été utilisés pour analyser leurs précision et performances. Il est important de préciser que ces techniques sont paramétrables et que ces paramètres ont une très grande influence sur la précision des résultats et sur les performances.

Contrairement aux autres techniques, la méthode *2n-passes* n'a pas de paramètre important car le schéma d'intégration temporelle de Scipy [JON] (bibliothèque python de calcul scientifique de syntaxe similaire à celle de matlab qui a été largement utilisée pour élaborer la maquette numérique) a des routines intégrées qui permettent de régler automatiquement les paramètres importants comme la durée du pas de temps par exemple.

La technique *exponentielles* a deux paramètres principaux. Le plus important est le nombre d'intervalles choisi. Des tests préliminaires ont permis de déterminer que 256 intervalles réguliers étaient suffisants pour obtenir une précision satisfaisante dans toutes les situations testées. Ce nombre a été utilisé dans tous nos tests. Le second paramètre est la précision avec laquelle les exponentielles de matrice sont calculées. Lorsque les méthodes de Taylor ou de Padé sont utilisées, les fonctions Scipy utilisent des valeurs par défaut qui s'avèrent fournir une précision satisfaisante dans tous les cas.

La méthode *Nm 1-passe* utilise également une période découpée en 256 intervalles réguliers. Les paramètres du schéma de Newmark ont été choisis à $\gamma = 0.5$ and $\beta = 0.25$ correspondant à l'accélération moyenne. La technique *RK 1-passe* utilise également 256 intervalles de temps. Les coefficients de Gill ont été utilisés. Cependant pour des raisons de convergence, le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre n'étant pas inconditionnellement stable, un plus grand nombre d'intervalles (1024) a du être utilisé pour le dernier cas test (rotor multi-ddl). La dernière variante du dernier cas test a d'ailleurs nécessité 2048 intervalles de temps pour converger.

La méthode *Hill2* utilise tous les harmoniques entre 0 et la plus grande harmonique utilisée lors du calcul HBM.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.4.1 Oscillateur de Duffing

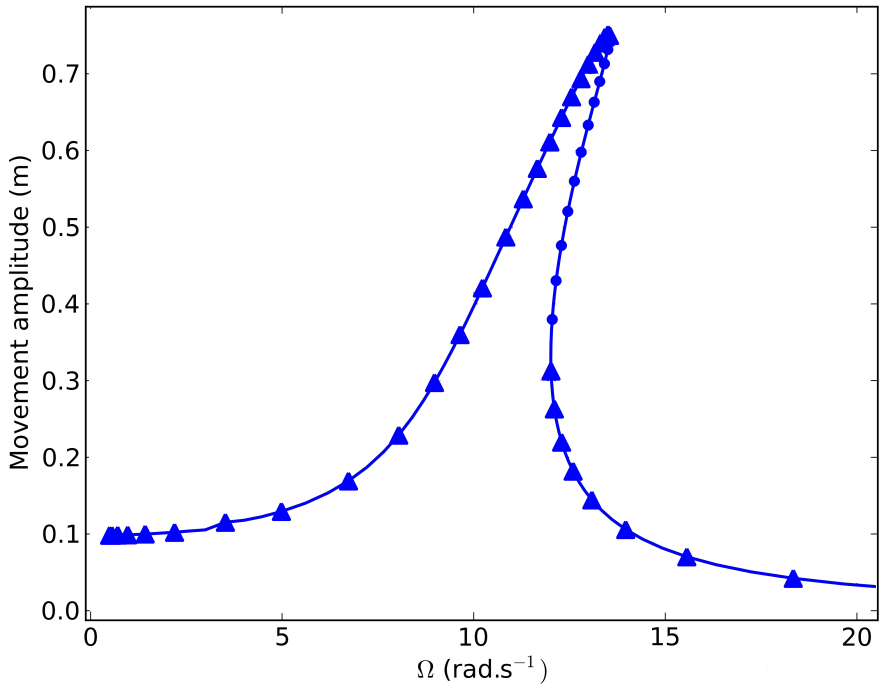


FIGURE 3.1: Oscillateur de Duffing. Courbe de réponse. (▲) stable, (.) instable

On rappelle ici l'équation du mouvement pour un oscillateur de Duffing :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) + k_{\text{nl}}q^3(t) = p(t) \tag{3.25}$$

Dans le cadre de ce cas test, les paramètres suivant ont été utilisés :
$m = 10\text{kg}$, $c = 10\text{N.s.m}^{-1}$, $k = 1000\text{N.m}^{-1}$, $k_{\text{nl}} = 2000\text{N.m}^{-3}$, $p(t) = p_0\cos(\omega t)$, $p_0 = 100\text{N}$.

Le calcul HBM a été effectué avec 3 harmoniques ($\{1,3,5\}$) en plus du terme d'ordre constant. Comme expliqué plus haut, le jeu d'harmoniques $\{1,2,3,4,5\}$ a été utilisé pour construire $\bar{\mathbf{H}}$ dans le cas de la méthode *Hill2*. La figure 3.1 montre la courbe de réponse du système avec mise en évidence de la stabilité. Toutes les méthodes testées donnent ici une précision satisfaisante. La précision du résultat est jugée insatisfaisante lorsque qu'au moins deux points de la courbe de réponse indiquent un mauvais état de stabilité (la référence étant donnée par la méthode *2n-passes*). Du point de vue des performances en temps de calcul tous les résultats sont regroupés Table 3.2 et les méthodes sont comparées relativement au temps mis par le calcul HBM sans calcul de stabilité (temps normalisé à 1). Sur ce cas test, la méthode *Hill2* semble la plus prometteuse car elle donne une précision satisfaisante tout en étant la plus rapide (augmentation du temps de calcul de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

seulement 30% comparé à un calcul HBM sans détermination de la stabilité). La méthode de référence (*2n-passes*) multiplie quant à elle le temps de calcul par un peu plus de 7. les autres méthodes du domaine temporel multiplient les temps de calcul par une valeur comprise entre 2 et 4 suivant la méthode. On constate donc dès à présent que le calcul de stabilité représente une part importante du coût de calcul total.

3.4.2 Rotor de Jeffcott non linéaire

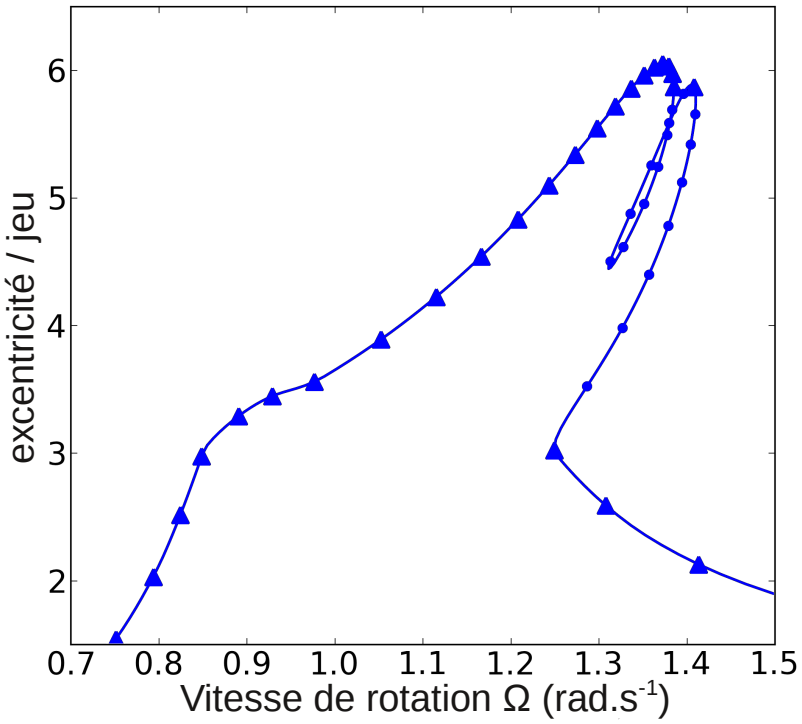


FIGURE 3.2: Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse. Stabilité calculée par la méthode *2n-passes*. (▲) stable, (.) instable.

Le second cas test est un rotor de Jeffcott modifié, inspiré de [VON 01], qui peut venir au contact d'un stator. Deux variantes de ce modèle ont été testées. Dans la première variante, le stator est fixe. Cette variante n'a donc que deux degrés de liberté. Dans la seconde variante, le stator agit comme un oscillateur interagissant avec le rotor. Cette variante possède quatre degrés de liberté. Les supports du rotor sont orthotropes. Lorsque les supports sont isotropes l'orbite du rotor demeure circulaire en toutes circonstances et ainsi seul la fréquence fondamentale est sollicitée dans le calcul HBM. Inversement, lorsque les supports sont orthotropiques, l'orbite du rotor n'est pas circulaire. Ainsi le contact avec le stator n'est pas permanent (a priori). Plusieurs harmoniques sont ainsi sollicitées dans le calcul par balance harmonique. Dans l'exemple présent, 24 harmoniques ont été utilisées

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

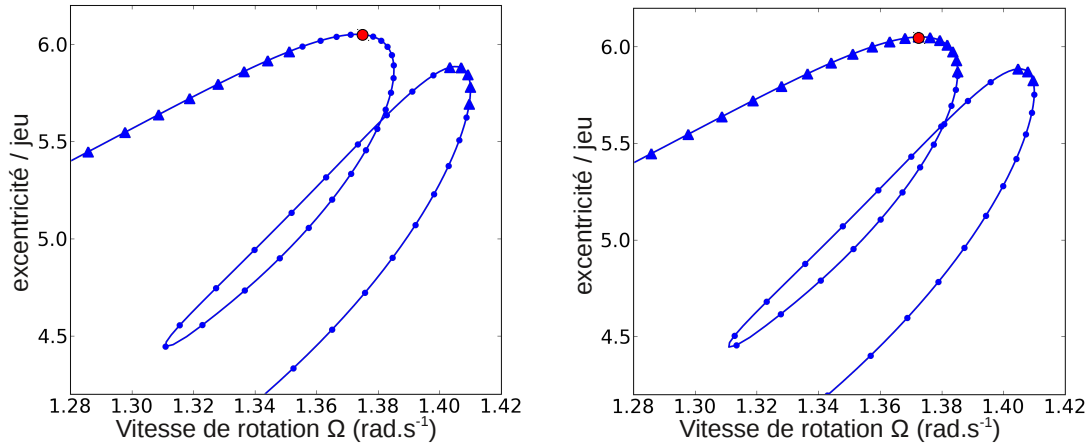


FIGURE 3.3: Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse (agrandissement). A gauche : stabilité calculée par la méthode *Hill2*. A droite : stabilité calculée par les autres méthodes (*2n-passes*, *exponentielles*, *RK 1-passe*, *Nm 1-passe*). (▲) stable, (.) instable

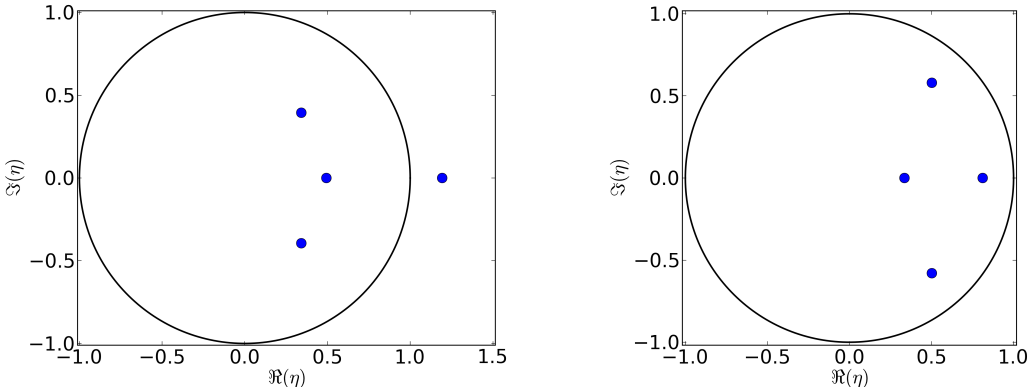


FIGURE 3.4: Rotor de Jeffcott. Multiplicateurs de Floquet d'une solution à environ 1,36 rad/s (voir point rouge figure 3.3). A gauche : multiplicateur donnés par la méthode *Hill2*. A droite : multiplicateurs donnés par la méthode *2n-passes*.

dans la première variante et 32 dans la seconde. Ces deux variantes sont résumées table 3.1. Les équations du mouvement sont décrites section 2.4.1.

Les figures 3.2 et 3.3 montrent les résultats de la simulation pour les cinq techniques (*2n-passes*, *exponentielles*, *RK 1-passe*, *Nm 1-passe*, *Hill2*). Tous les résultats sont regroupés dans le tableau 3.2.

La méthode *2n-passes* est très lente puisque le temps de calcul est multiplié par 23 comparé à la même simulation sans calcul de la stabilité. Les méthodes *exponentielles*, *RK 1-passe* et *Nm 1-passe* restent quant à elles relativement rapides (entre 1,3 et 1,7

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

fois plus lentes que sans le calcul de la stabilité), tout en donnant des résultats avec une bonne précision. La méthode *Hill2* s'est montré plutôt lente en comparaison, et de surcroît donne des résultats erronés. Contrairement au cas de l'oscillateur de Duffing, la technique de filtrage des multiplicateurs de Floquet ne semble pas fonctionner dans ce cas test. Les multiplicateurs de Floquet correspondant aux méthodes *Hill2* et *2n-passes* pour une solution aux environ de 1,36 rad/s (voir points rouges figure 3.3) sont montrés figure 3.4. On peut constater qu'effectivement, la méthode *Hill2* a conservé un multiplicateur de Floquet qui a un module plus grand que 1.

3.4.3 Modèle de rotor éléments finis

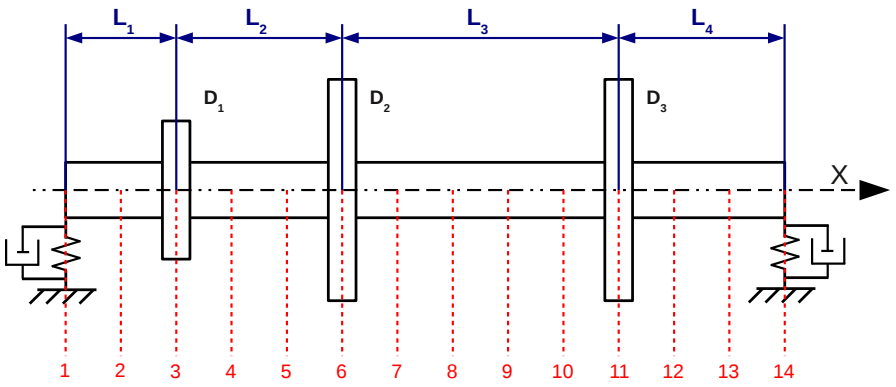


FIGURE 3.5: Modèle de rotor éléments finis [LAL 98]

modèle	n_{ele}	n	N	n_{HBM}
Duffing	N/A	1	3	7
Jeffcott v.1	N/A	2	24	98
Jeffcott v.2	N/A	4	32	260
FE rotor v.1	4	24	12	600
FE rotor v.2	6	34	12	850
FE rotor v.3	9	49	12	1225
FE rotor v.4	13	69	12	1725
FE rotor v.5	17	89	12	2225

TABLE 3.1: Les différents modèles testés. n_{ele} = nombre d'éléments. n = nombre de ddl. N = nombre d'harmoniques dans le calcul HBM. $n_{\text{HBM}} = n(2N+1)$ = dimension du système algébrique HBM.

Pour cette étude comparative, cinq variantes de ce modèle ont été testées. Pour quatre d'entre elles, le nombre total de ddls a été modifié en jouant sur le nombre d'éléments du

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

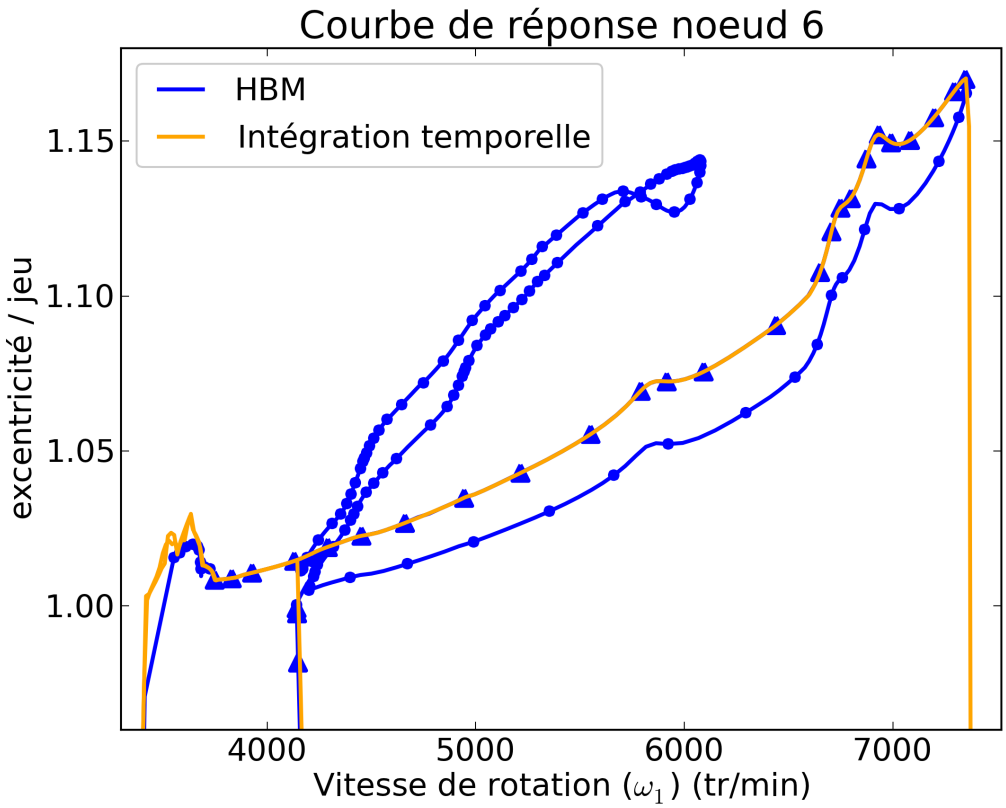


FIGURE 3.6: Modèle de rotor éléments finis. Courbe de réponse avec stabilité calculée par la méthode *2n-passes*. Comparaison avec résultats intégration temporelle directe. (▲) stable, (.) instable.

modèle (voir table 3.1). L'influence du nombre total de degrés de liberté peut ainsi être testée.

Dans les variantes 1 et 2, le système a été réduit à 24 ddls et 34 ddls. Dans les troisième et dernière variantes, le nombre de ddl a été modifié à 49 et 89. Le nombre d'éléments dans le modèle a toujours été suffisant pour éviter de modifier significativement la courbe de réponse du système dans la plage de fréquence testée. Le calcul HBM a été effectué dans tous les cas avec 12 harmoniques au total.

La courbe de réponse du système est tracée figure 3.6 et les résultats sont regroupés table 3.2. La méthode *Nm 1-passe* donne des résultats avec une bonne précision et est de loin la plus rapide des cinq méthodes testées. Toutefois, on peut voir que le coût relatif de la méthode augmente avec le nombre de degrés de liberté. Le temps de calcul est multiplié par 1,4 dans le cas du rotor de Jeffcott à 2 ddls mais est multiplié par 10 dans le cas du rotor éléments finis avec 89 ddls. Les méthodes *exponentielles* et Rk 1-passe deviennent également plus lentes avec l'augmentation de la taille du système traité mais à un rythme bien plus élevé que la méthode *Nm 1-passe*. La méthode *Hill2* est à peu près aussi lente

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

que la méthode *2n-passes* tout en fournissant des résultats imprécis.

La figure 3.6 montre également une comparaison entre les résultats donnés par le calcul HBM et les résultats issus d'un calcul effectué par intégration temporelle directe. Le calcul dans le domaine temporel a été conduit avec une procédure tout à fait similaire à celle présentée pour le rotor de Jeffcott. Ici aussi, une très bonne corrélation entre les résultats est obtenue. Le calcul de la stabilité des solutions est confirmé par le calcul transitoire. Les solutions données comme instables par la HBM ne sont pas retrouvée par le calcul temporel. A l'instar du modèle de Jeffcott présenté plus haut, un phénomène d'hystérésis entre la montée en vitesse et la descente en vitesse peut être observé.

Cette étude de stabilité (voir figure 3.6) montre que malgré une forme assez complexe, seule une relative petite partie de la courbe est stable. Les figures 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 et

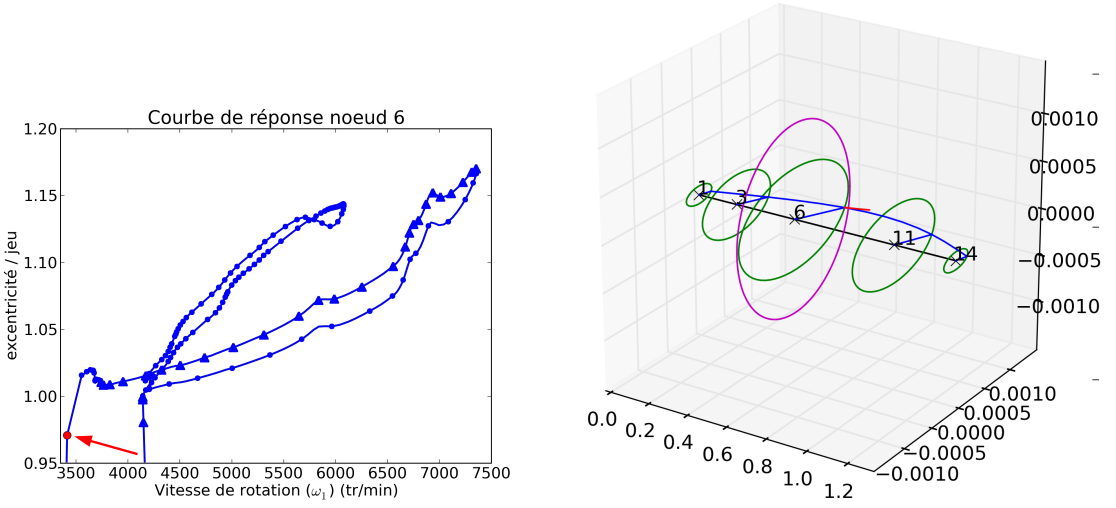


FIGURE 3.7: Déformée du rotor juste avant contact

3.11 montrent l'évolution de la déformée de la ligne d'arbre en fonction de la vitesse de rotation du rotor. D'abord, la figure 3.7 montre la déformée du rotor à environ 3410tr/min associé à un mouvement sans contact avec le stator. L'orbite (en vert) du nœud 6 ne touche pas le stator (représenté par un cercle de couleur magenta). On peut constater que la déformée est largement dominée par le premier mode de flexion du rotor. L'orbite n'est pas circulaire mais elliptique à cause de l'orthotropie des paliers. Étant donné que cette vitesse de rotation est relativement éloignée de la première vitesse de résonance, la force de balourd (en rouge) est quasiment en phase avec le mouvement. Seule la fréquence fondamentale est présente dans cette réponse.

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 montrent le rotor en mouvement de contact annulaire complet à différentes vitesses de rotation. Les orbites ont tendance à perdre leur forme elliptique et le second mode de flexion devient de plus en plus prépondérant dans la déformée de la ligne d'arbre à mesure que la vitesse de rotation augmente. En réalité, ces mouvements de contact annulaire complet n'ont pas une grande richesse spectrale puisque moins de 5 composantes fréquentielles sont présentes. On remarquera que seules les har-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

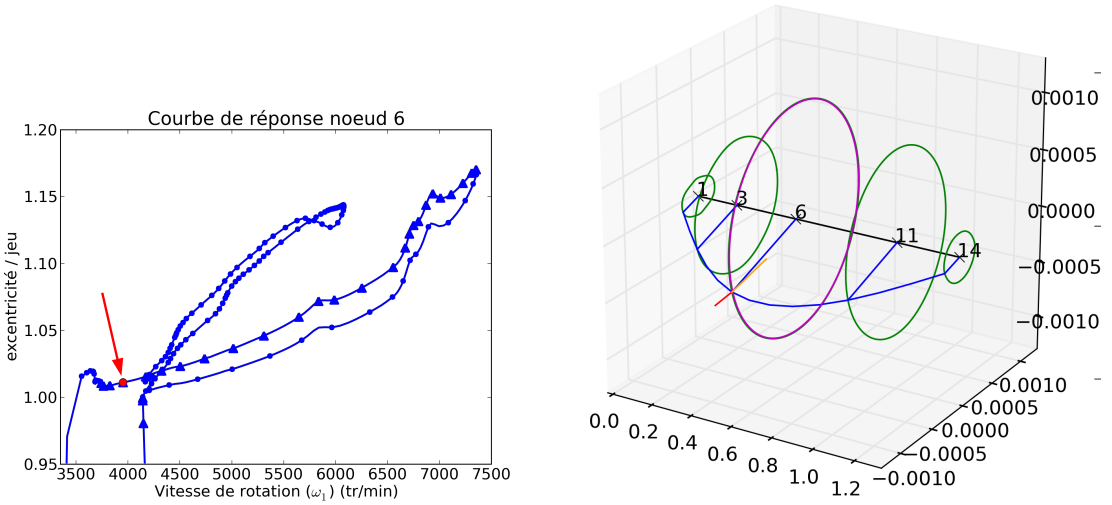


FIGURE 3.8: Déformée du rotor pendant full annular rub 1

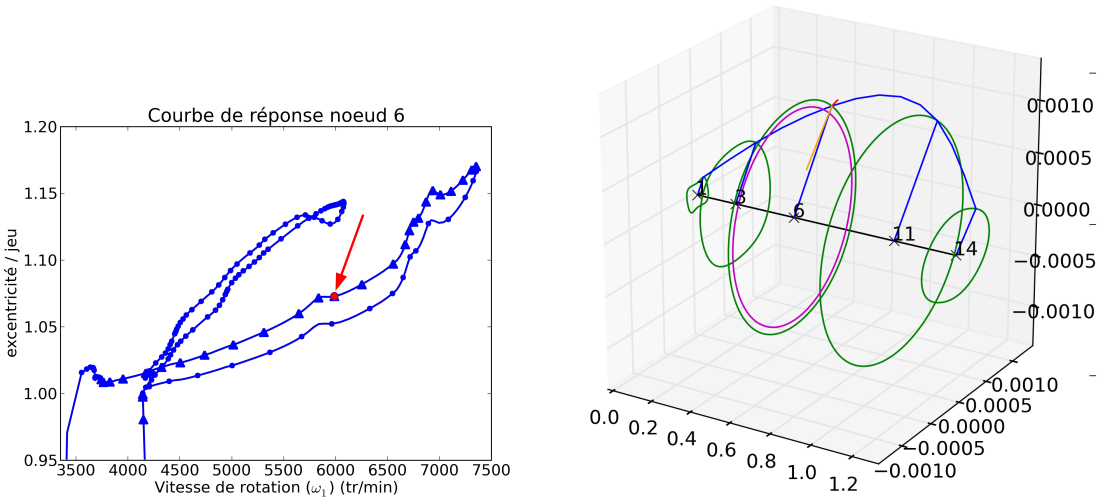


FIGURE 3.9: Déformée du rotor pendant full annular rub 2

moniques impaires composent ces mouvements du fait de la nature de la loi non linéaire de contact.

Enfin, la figure 3.11 montre une solution instable qui n'est pas en contact annulaire complet. Le mouvement illustré sur cette figure fait intervenir des harmoniques d'ordre élevé ce qui explique la complexité des orbites surtout au niveau des paliers (nœuds 1 et 14).

Une discussion sur les performances ainsi que d'autres informations sont fournies dans la section suivante.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

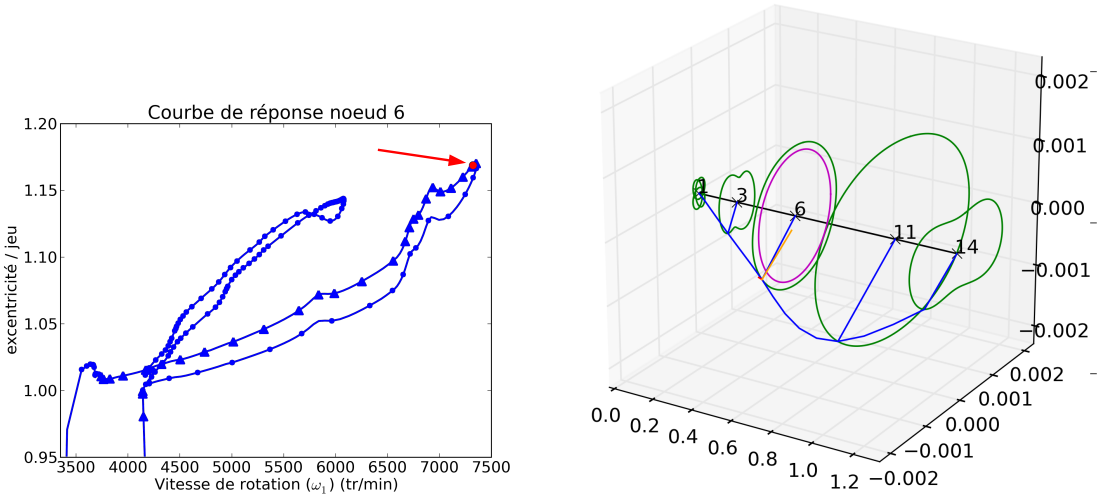


FIGURE 3.10: Déformée du rotor pendant full annular rub 3

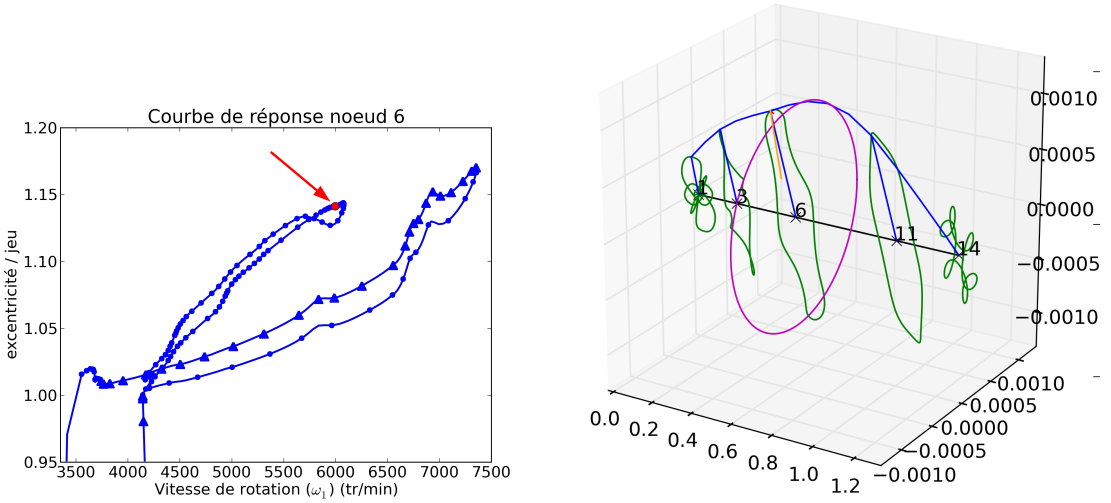


FIGURE 3.11: Déformée du rotor instable

3.5 Discussion

Les résultats des trois cas tests sont regroupés dans le tableau 3.2. Bien que la précision des résultats donnés par la méthode *Hill2* soit le plus souvent mauvaise, une analyse fine des performances atteintes par les cinq méthodes permet une meilleure compréhension des méthodes et une anticipation de leurs performances sur des systèmes de taille encore plus grande. Indépendamment de la précision des résultats, on peut constater que les différentes techniques testées ne sont pas du tout équivalentes en terme de coût de calcul. Suivant les exemples traités, le coût additionnel du calcul de la stabilité peut aller de 30% (dans le cas de la méthode *RK 1-passe* sur l'exemple du rotor de Jeffcott) à près de 1×10^7% (méthode *2n-passes* dans le cas du rotor éléments finis à 89 ddls). De façon

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

	Pas de stab.	domaine fréquentiel	domaine temporel			
modèle		*Hill2*	*2n-passes*	*exponentielles*	*RK 1-passe*	*Nm 1-passe*
Duffing	1	1.3	7.2	3.7	2.4	2.2
Jeffcott v.1	1	9.5*	23	1.7	1.3	1.4
Jeffcott v.2	1	151*	45	2.0	1.6	1.5
FE rotor v.1	1	2.4×10^3*	1.4×10^3	10	7.9	1.8
FE rotor v.2	1	4.6×10^3*	5.3×10^3	22	16	2.3
FE rotor v.3	1	1.1×10^4*	1.3×10^4	51	34	3.5
FE rotor v.4	1	5.9×10^4*	3.7×10^4	170	81	5.7
FE rotor v.5	1	N/A	9.9×10^4	260	300	10

TABLE 3.2: Temps de calcul relatif. Le temps passé à calculer la courbe de réponse sans stabilité est normalisé à 1 comme indiqué dans la colonne 'Pas de stab.'. Les nombres avec une astérisque (*) indiquent une précision insatisfaisante.

générale, et quelle que soit la méthode employée, on constate une augmentation du coût relatif lorsque la taille du système traité augmente. Pour mieux comprendre cette tendance, il est important de noter que le calcul de stabilité se fait principalement en deux étapes :

- construire une matrice **H**,
- calculer ses valeurs propres.

La nature de **H** et/ou la façon de construire cette dernière est différente suivant la méthode. Lorsque c'est une méthode fréquentielle qui est utilisée, la taille de **H** est $d = 2n(2N_H + 1)$ alors quelle est de taille $d = 2n$ lorsque c'est une méthode temporelle qui est utilisée (où N_H représente le nombre d'harmoniques utilisées dans la méthode de Hill). Dans les cas tests qui ont été présentés ici, $N_H = 2N - 1$ pour la méthode *Hill2*. Suivant la situation, la plus grande partie du temps de calcul sera passée soit sur la construction de la matrice, soit sur le calcul de ses valeurs propres. Les tableaux 3.3 et 3.4 indiquent la proportion de temps passée sur chacune de ses deux étapes pour les méthodes *Hill2* et *exponentielles* respectivement. Les résultats relatifs aux autres méthodes du domaine temporel (*2n-passes*, *RK 1-passe* et *Nm 1-passe*) ne sont pas montrés car très similaires aux résultats de la méthode *exponentielles*.

Dans le cas de la méthode *Hill2*, on constate que pour les systèmes de relative petite taille comme dans le cas de l'oscillateur de Duffing, la plus grande partie du temps est passée à construire **H**. En revanche, la tendance s'inverse rapidement à mesure que la taille du système augmente. Pour la première variante du rotor de Jeffcott, la construction de la matrice ne représente plus que 17% du temps de calcul. Dans tous les autres cas tests, la construction de la matrice représente moins de 2% du temps de calcul. La plus grosse partie du temps est alors passée à calculer les valeurs propres. Les algorithmes classiques pour le calcul des valeurs propres d'une matrice ont une complexité algorithmique en $O(d^3)$ mais la complexité algorithmique pour construire **H** est en $O(d^2)$. En conséquence, la proportion de temps passée à calculer les valeurs propres de la matrice est censée augmenter avec la taille du système. Les mauvaises performances de la méthode

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Hill2 viennent donc du fait que la taille de la matrice **H** est grande ($d = 2n(2N_H + 1)$) ce qui demande beaucoup de temps pour calculer les valeurs propres.

Hill2			
modèle	dimension de **H**	construction de **H**	calcul valeurs propres
Duffing	22	85%	15%
Jeffcott v.1	380	17%	83%
Jeffcott v.2	1016	2%	98%
FE rotor v.1	2256	0.1%	99.9%
FE rotor v.2	3196	<0.1%	>99.9%
FE rotor v.3	4606	<0.1%	>99.9%
FE rotor v.4	6486	<0.1%	>99.9%
FE rotor v.5	8366	<0.1%	>99.9%

TABLE 3.3: Répartition du temps de calcul avec la méthode *Hill2*

exponentielles			
modèle	dimension de **H**	construction de **H**	calcul valeurs propres
Duffing	2	99.8%	0.2%
Jeffcott v.1	4	99.8%	0.2%
Jeffcott v.2	8	99.8%	0.2%
FE rotor v.1	48	99.9%	0.1%
FE rotor v.2	68	99.9%	0.1%
FE rotor v.3	98	>99.9%	<0.1%
FE rotor v.4	138	>99.9%	<0.1%
FE rotor v.5	178	>99.9%	<0.1%

TABLE 3.4: Répartition du temps de calcul avec la méthode *exponentielles*. Les méthodes *2n-passes*, *RK 1-passe* and *Nm 1-passe* donnent des résultats très similaires.

Contrairement à la méthode de Hill, pour les méthodes temporelles, la plupart du temps est passé à construire **H**. Ceci est du au fait que la dimension de **H** dans ces méthodes est uniquement proportionnel à n (et pas à N). La taille de cette dernière est donc beaucoup plus petite qu'avec les méthodes fréquentielles. Le calcul des valeurs propres reste donc relativement rapide d'autant plus que dans l'absolu, la construction de **H** est par nature plus longue avec les méthodes temporelles qu'avec les méthodes fréquentielles. Cependant, dans l'absolu, les méthodes temporelles deviennent également relativement inefficaces avec l'augmentation de la taille du système. Au sein des méthodes temporelles, de grands écarts de performances peuvent être notés. La méthode *2n-passes* est de loin la

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

plus lente car $2n$ intégrations numériques doivent être effectuées sur une période. Cette propriété devient évidemment problématique lorsque n augmente. Les méthodes simple passe n'ont pas ce problème et sont de fait plus rapides. Néanmoins, la méthode *Nm 1-passe* est notablement plus rapide que la technique *exponentielles* ou la technique *RK 1-passe*. Ces deux dernières sont similaires dans leur implémentation puisque la matrice $\mathbf{H}$ est calculée dans ce cas comme un produit de matrices intermédiaires pré-calculées. Dans la méthode *exponentielles*, ces matrices intermédiaires sont calculées par des fonctions permettant de calculer des exponentielles de matrices. Ces fonctions ont une complexité algorithmique en $O(d^3)$ et ces opérations deviennent prépondérantes quand n augmente. On peut en conclure que les performances de cet algorithme ne peuvent que se détériorer davantage avec l'augmentation de la taille du système.

La méthode *RK 1-passe*, d'un côté ne nécessite pas de coûteux calcul d'exponentielle de matrice mais d'un autre côté, un nombre sans cesse plus important de pas de temps est nécessaire pour éviter la divergence numérique. Pour cette raison, les méthodes *exponentielles* et *RK 1-passe* deviennent toutes les deux lentes lorsque n augmente.

La figure 3.12 montre le temps de calcul relatif comme une fonction de la taille totale du système HBM et ce pour les cinq techniques étudiées ici. La méthode *Nm 1-passe* s'est montrée la plus efficace. Comme le schéma de Newmark ne nécessite pas de transformer les équations du mouvement sous forme d'état, la taille du système reste à n au lieu de $2n$. De plus, seulement 256 pas de temps suffisent pour obtenir une bonne précision dans tous les cas grâce aux bonnes propriétés de stabilité du schéma d'accélération moyenne. Cependant, dans l'absolu, cette méthode multiplie malgré tout les temps de calcul par 10 dans le cas du rotor éléments finis à 89 ddls par rapport à un calcul HBM sans stabilité. La complexité algorithmique de la méthode *Nm 1-passe* est plus élevée que celle de la balance harmonique. Ainsi, les performances relative de cette méthode sont amenées à se dégrader avec l'étude de systèmes plus complexes.

3.6 Conclusion

Cinq techniques basées sur la théorie de Floquet couramment utilisées pour déterminer la stabilité de solutions périodiques de systèmes dynamiques ont été testées et comparées en termes de précision et de temps de calcul sur différents cas tests. Une technique est basée sur la méthode de Hill (domaine fréquentiel) et les autres méthodes sont basées sur le calcul de la matrice de monodromie dans le domaine temporel. Toutes ces techniques requièrent principalement la construction d'une matrice $\mathbf{H}$ suivi du calcul de ses valeurs propres. Elles diffèrent principalement de par la nature de $\mathbf{H}$ et/ou de par la façon de l'obtenir.

Il a été montré que malgré les améliorations apportées par lazarus et Thomas [LAZ 10], la version modifiée de Hill ne donne pas des résultats de précision suffisante pour les applications de contact rotor-stator. De plus, les temps de calcul avec cette technique deviennent très longs avec l'augmentation de la taille du système traité (beaucoup de temps passé à calculer les valeurs propres de $\mathbf{H}$).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

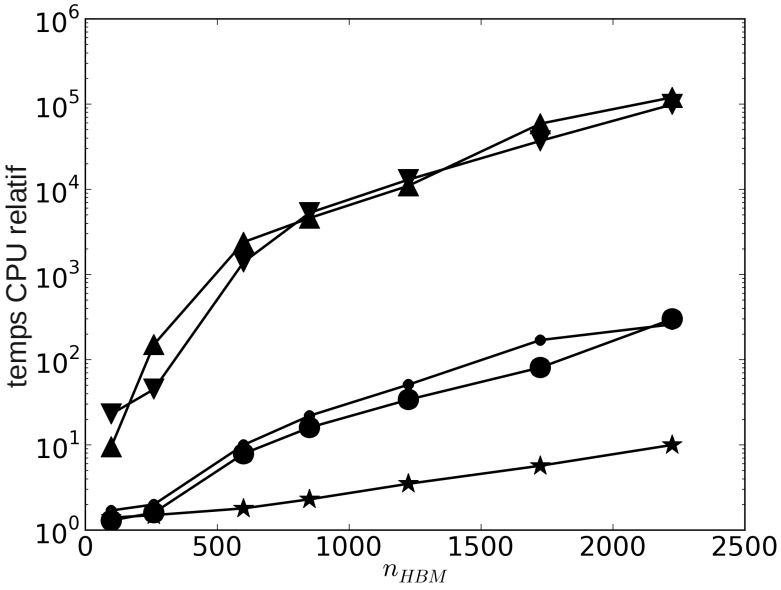


FIGURE 3.12: Temps CPU relatif en fonction de n_{HBM}. Temps passé à calculer la stabilité des solutions de la courbe de réponse par rapport à une simulation HBM sans calcul de la stabilité. ▲ *Hill2*, ▼ *2n-passes*, . *exponentielles* , • *RK 1-passe*, ★ *Nm 1-passe*.

Les quatre techniques basées sur le calcul de la matrice de monodromie dans le domaine temporel montrent une bien meilleure précision et contrairement à la méthode de Hill, la plus grande partie du temps est passé à construire **H**. Le calcul de la matrice de monodromie par la méthode d'intégration temporelle en 2n passes, bien que donnant des résultats très précis, est extrêmement lente à cause des nombreuses intégrations temporelles à effectuer. Les techniques simple passes (*exponentielles*, Runge-Kutta-Gill, Newmark) sont beaucoup plus rapides tout en conservant une précision très acceptable. Cependant, de nombreux écarts au sein de ces technique simple-passe ont été notés.

Toutes choses considérées, pour les exemple traités ici, c'est la méthode de Newmark simple passe qui semble offrir le meilleur compromis entre la précision des résultats et les temps de calcul. Sa précision est très satisfaisante tout en étant de loin la plus rapide des techniques testées.

Quelle que soit la méthode utilisée, le coût de calcul de la stabilité est plus élevé que le coût de calcul de la solution périodique et ce surcoût augmente avec la taille du problème. Il est toutefois possible de limiter l'augmentation du surcoût de calcul en ayant recours à des techniques de réduction de modèle. Pour des systèmes où les non linéarités sont localisées, utiliser une technique de condensation [HAH 94, SAR 11] [SUN 98] ou de variétés invariantes [GAB 11] est un bon moyen de maintenir relativement bas le nombre de degrés de libertés comme montré dans la section 1.4.

Quoi qu'il en soit, un grand avantage de ces techniques est de pouvoir détecter des

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

bifurcations y compris les bifurcations de type Hopf secondaire annonciatrices de l'apparition de régime quasi-périodique. La méthode de la balance harmonique a été adaptée à ce genre de situation comme montré dans le chapitre suivant.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 4

Traitement des phénomènes quasi-périodiques

Ce quatrième chapitre détaille l'extension de la méthode de la balance harmonique aux systèmes multi-fréquentiels. Toutes les adaptations à apporter à la HBM ainsi qu'aux aménagements supplémentaires (AFT, détermination automatique des harmoniques, continuation, etc.) sont présentées. Cette extension est illustrée au travers de divers exemples où la relation entre les fréquences fondamentales est soit connue soit inconnue.

Sommaire

4.1 Problématique 95

4.2 Généralisation de la HBM aux systèmes multi-fréquentiels 99

4.2.1 Conventions d'écriture 99

4.2.2 Passage de l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel . 100

4.2.3 Procédure AFT en quasi-périodique 101

4.2.4 Sélection automatique des harmoniques 102

4.2.5 Calcul de la Jacobienne 104

4.2.6 Continuation par pseudo longueur d'arc 105

4.3 Exemples d'application 112

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

4.3.1 Oscillateur de Duffing avec relation linéaire connue entre ω_1 et ω_2 . 112
4.3.2 Oscillateur de Duffing avec relation non linéaire connue entre ω_1 et ω_2 114
4.3.3 Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator et relation non linéaire inconnue entre ω_1 et ω_2 114
4.3.4 Rotor éléments finis à 3 disques 116
4.4 Conclusion 118

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

4.1 Problématique

Comme vu dans les chapitres précédents, la dynamique associée au contact rotor-stator est, lors de la réponse stabilisée au balourd, parfois sujette à des comportements non pas périodiques mais quasi-périodiques. Il a été constaté lors de simulations dans le domaine temporel que la vitesse de rotation du rotor n'est pas la seule fréquence fondamentale qui peut apparaître dans la réponse du système. Contrairement au cas classique du bi-rotor (voir thèse de Guskov [GUS 07]), la seconde pulsation fondamentale qui apparaît dans la réponse ne provient pas d'une excitation extérieure mais est le résultat d'une excitation interne auto-entretenue causée par le frottement. Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple du rotor de Jeffcott présenté section 2.4.1. La seule différence ici est que le coefficient de frottement n'est pas égal à $\mu = 0,1$ mais égal à $\mu = 0,2$.

La courbe de réponse est montrée figure 4.1. Trois calculs ont été effectués avec ce système. La courbe bleue montre la courbe de réponse telle que calculée par la HBM périodique. La HBM périodique permet de mettre en évidence les phénomènes périodiques que sont le mouvement sans contact (l'excentricité est tout le temps inférieure au jeu) et le mouvement en contact annulaire complet (où le rotor est en contact permanent avec le stator). Le calcul HBM montre cependant une perte de stabilité de la solution en contact annulaire complet pour une valeur de Ω (grandeur adimensionnée) légèrement inférieure à 0,3 environ. Les multiplicateurs de Floquet donnés par l'étude de stabilité de la solution périodique à $\Omega \approx 0,33$ peuvent être visualisés figure 4.2. On constate qu'une paire de multiplicateurs de Floquet est sortie du cercle unité avec une valeur imaginaire non nulle. Ceci indique l'apparition d'une bifurcation de Hopf secondaire signalant l'apparition d'une seconde pulsation dans la réponse et l'initiation d'un régime quasi-périodique. Bien que la réponse périodique en contact annulaire complet soit toujours théoriquement possible (vérifie les équations du mouvement), il n'est plus possible de l'obtenir dans la réalité à cause de son instabilité.

Cette perte de stabilité est confirmée par un calcul temporel effectué grâce à Code_Aster [EDF] (courbe jaune) qui met alors en évidence un phénomène de contact partiel (voir figure 4.3) qui est effectivement quasi-périodique. La figure 4.4 montre l'analyse spectrale de la réponse temporelle quasi-périodique à $\Omega \approx 0,33$. L'analyse de ce graphique montre que les pics présents le sont à des combinaisons linéaires de deux fréquences incommensurables. La première de ces fréquences (notée ω_1) correspond naturellement la vitesse de rotation du rotor ($1 \times \Omega$). La seconde fréquence (notée ω_2) ne peut pas être précisément mesurée depuis cette analyse spectrale mais peut néanmoins être estimée à environ $1,08 \times \Omega$ pour cette vitesse de rotation du rotor ($\Omega \approx 0,33$). Cette même analyse spectrale menée à différentes vitesses de rotation montre que cette seconde fréquence varie de façon non linéaire avec Ω (voir figure 4.5). Cependant, dans tous les cas, les pics dans le spectre fréquentiel apparaissent toujours par paires selon la formule suivante :

$$\omega_{na} = (2n+1)\omega_1 + (n+0)\omega_2 \tag{4.1}$$

$$\omega_{nb} = (2n+1)\omega_1 + (n+1)\omega_2 \tag{4.2}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

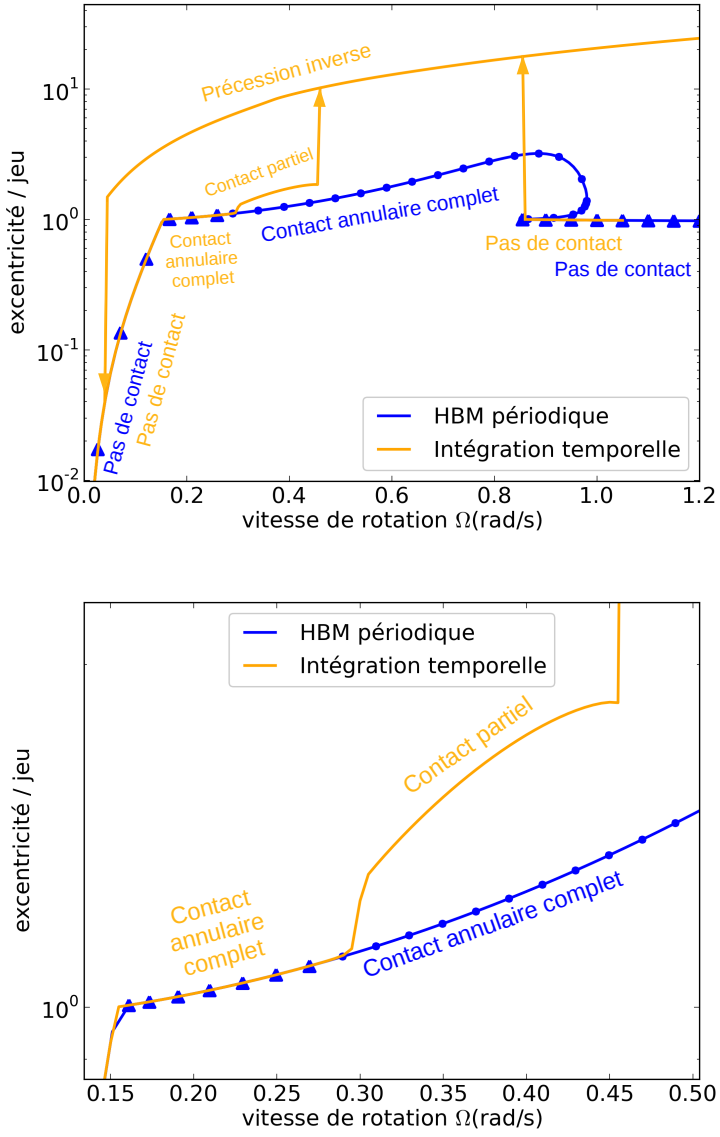


FIGURE 4.1: Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse pour $\mu = 0,2$. Comparaison entre HBM et intégration temporelle directe.

Les valeurs de ω_{na} et ω_{nb} pour les premières valeurs de n sont données table 4.1.

Cette seconde pulsation est donc inconnue à priori et évolue de surcroît de façon non linéaire avec la vitesse de rotation du rotor. La méthode de la balance harmonique doit donc être adaptée en conséquence afin de pouvoir traiter ce genre de situation.

Une étude bibliographique montre que la HBM quasi-périodique est utilisée pour divers type d'applications. On trouve un certain nombre de travaux qui étudient les réponses autonomes (sans excitation extérieure) de systèmes montrant des cycles limites : Roques et Legrand [ROQ 06] sur des systèmes de turbines d'avion interagissant

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

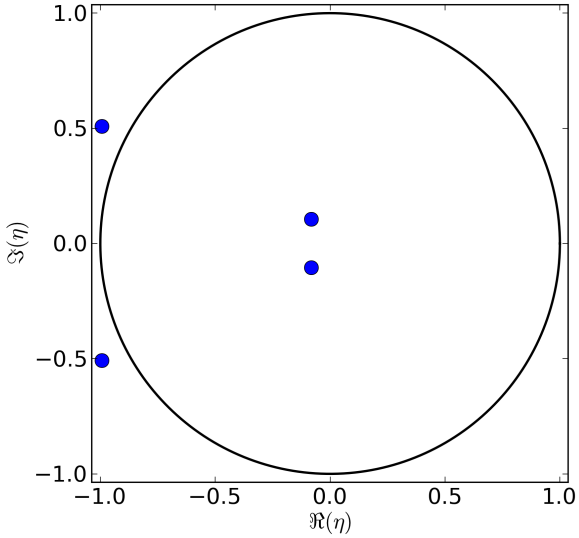


FIGURE 4.2: Multiplicateurs de Floquet de la solution HBM périodique à $\Omega \approx 0,33$.

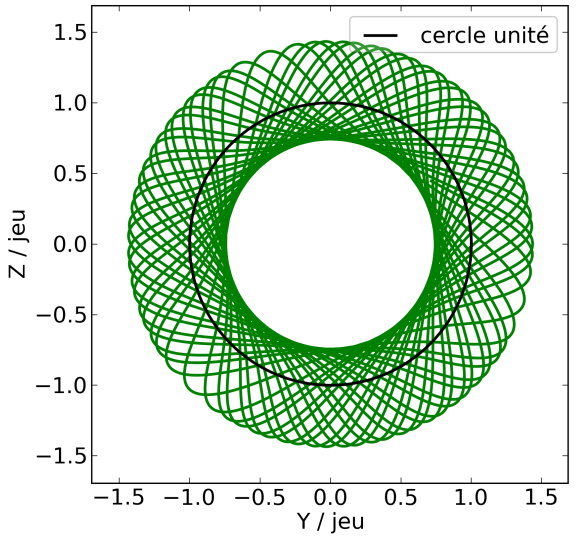


FIGURE 4.3: Orbite quasi-périodique calculée par intégration temporelle directe à $\Omega \approx 0,33$ pour $\mu = 0,2$.

avec leur carter, Coudeyras [COU 09] pour des problèmes de crissement de freins. Ce concept est assez proche de celui de mode non linéaire complexe où la HBM quasi-périodique est utilisée pour calculer des réponses libres de systèmes amortis : Laxalde [LAX 07] ainsi que Laxalde et Thouverez [LAX 09] pour des problèmes de contact frottant aube-carter. On peut également noter les travaux de Lau [LAU 83] consistant à utiliser

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

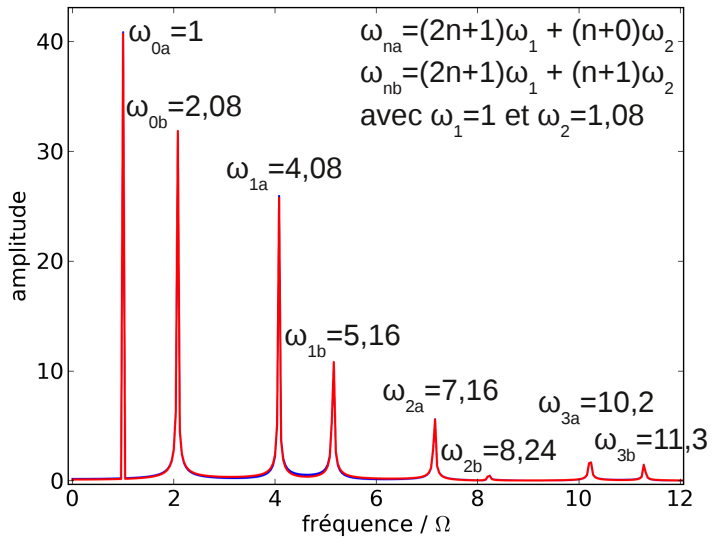


FIGURE 4.4: Analyse spectrale des efforts de contact de la réponse temporelle à $\Omega \approx 0,33$.

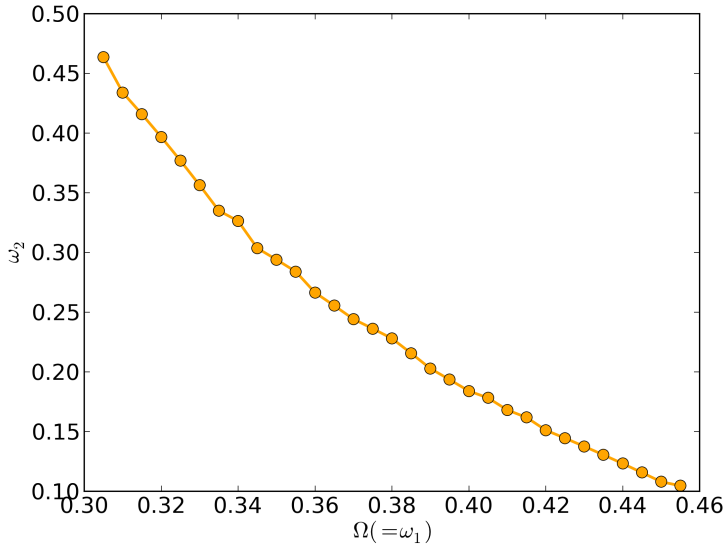


FIGURE 4.5: Evolution de ω_2 en fonction de ω_1 d'après analyse spectrale des solutions temporelles.

la HBM incrémentale pour calculer la réponse libre quasi-périodique d'une poutre encastrée-encastrée sujette à de grandes flexions.

La HBM quasi-périodique est également utilisée pour calculer la réponse forcée de systèmes subissant plusieurs excitations extérieures à différentes fréquences : Guskov

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

n	$\omega_{na}(\times\Omega)$	$\omega_{nb}(\times\Omega)$
0	1	2,08
1	4,08	5,16
2	7,16	8,24
3	10,2	11,3

TABLE 4.1: ω_{na} et ω_{nb} calculés pour les premières valeurs de n pour le mouvement de contact partiel à $\Omega = 0,33$. Ici, $\omega_1 = 1 \times \Omega$ et $\omega_2 \approx 1.08 \times \Omega$.

[GUS 07] pour des problèmes de bi-rotors. Aucun travaux n'existe dans le cadre qui nous intéresse. On peut néanmoins citer l'article de Kim et Noah [KIM 96] où les auteurs font usage d'une méthode HBM couplée avec l'AFT pour étudier un rotor de Jeffcott soumis au balourd et à du contact rotor-stator. Leur méthode fait usage d'une analyse fréquentielle basée sur un algorithme de transformée de Fourier rapide pour déterminer le ratio entre les deux pulsations fondamentales de la réponse. Cependant, la technique nécessite certains développements analytiques spécifiques au modèle étudié et manque de généralité. De plus, aucun développement sur une quelconque technique de continuation n'est donné.

Dans la suite du chapitre une nouvelle méthode HBM quasi-périodique est développée permettant la détermination des réponses quasi-périodiques des problèmes de contact rotor-stator. Via une extension de la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc, des études paramétriques sont menées à bien. La méthode développée permet de calculer automatiquement la seconde pulsation fondamentale ω_2 (générée par le frottement) du système en fonction de la vitesse de rotation du rotor. Les aménagements supplémentaires (AFT, détermination automatique des harmoniques, etc.) adaptés au cas quasi-périodique sont également détaillés.

4.2 Généralisation de la HBM aux systèmes multi-fréquentiels

4.2.1 Conventions d'écriture

On rappelle, principalement pour les notations, l'équation du mouvement dans le domaine temporel :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\omega)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(t) \tag{4.3}$$

L'hypothèse HBM consiste à supposer le mouvement quasi-périodique. En réalité on fait appel au concept d'hypertemps et on dit le mouvement bi-périodique d'où l'écriture sous forme de série de Fourier suivante :

$$\mathbf{q}(t_1,t_2) = \mathbf{Q_0} + \sum_{j=0}^{N} \mathbf{Q}_{2j-1}\cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2) + \mathbf{Q}_{2j}\sin(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2) \tag{4.4}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

On se limite ici au cas bi-périodique, c'est à dire au cas où il n'y a que 2 pulsations de référence mais l'écriture est généralisable à un nombre arbitraire de pulsations. Les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont censées être incommensurables. Deux nombres sont incommensurables si leur ratio appartient à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On note en particulier que le temps réel $t_{\text{réel}}$ a été remplacé par un temps bi-dimensionnel comprenant deux temps indépendants $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$. Il est bien entendu toujours possible, connaissant les coefficients de Fourier $Q_i \quad i \in [0..2N]$, de reconstruire les déplacements dans le domaine temporel 'réel' par la formule suivante :

$$\mathbf{q}(t_{\text{réel}}) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=0}^{N} \mathbf{Q}_{2j-1} \cos((k_{j_1}\omega_1 + k_{j_2}\omega_2)t_{\text{réel}}) + \mathbf{Q}_{2j} \sin((k_{j_1}\omega_1 + k_{j_2}\omega_2)t_{\text{réel}}) \quad (4.5)$$

Il faut cependant bien garder à l'esprit que l'utilisation du temps 'réel' $t_{\text{réel}}$ est uniquement réservé à un éventuel posttraitement visuel des données. Dans la suite des développements théoriques ainsi que dans l'implémentation informatique finale, le temps 'réel' $t_{\text{réel}}$ n'existe plus et est remplacé par le temps bi-dimensionnel $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$. Une autre conséquence du passage en dimension 2, les harmoniques $\mathbf{k}_j$ sont également bi-dimensionnelles, $\mathbf{k}_j = (k_{j_1}, k_{j_2})$. Il est donc également important de noter que dans la suite du texte, à chaque fois que l'on parle d'une harmonique il s'agit en fait d'un couple de deux nombres. De même, la pulsation ω est bi-dimensionnelle, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Ainsi, une autre écriture possible pour $\mathbf{q}$ est la suivante (écriture généralisée) :

$$\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=0}^{N} \mathbf{Q}_{2j-1} \cos(\mathbf{k}_j \omega \mathbf{t}) + \mathbf{Q}_{2j} \sin(\mathbf{k}_j \omega \mathbf{t}) \quad (4.6)$$

où les grandeurs sont bi-dimensionnelles comme décrit ci-dessus. On remarque alors que cette écriture est complètement identique à celle employée lorsque que l'on fait de la HBM classique (ie mono-dimensionnelle). Dans la suite, on utilisera indifféremment l'écriture de l'équation (4.4) ou bien de l'équation (4.6) suivant celle qui parait la plus adaptée. Les deux écritures sont bien évidement équivalentes.

4.2.2 Passage de l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel

L'écriture généralisée permet de se rendre compte que la procédure pour passer du système d'équations différentielles (dans le domaine temporel) aux système algébrique (dans le domaine fréquentiel) est analogue à celle utilisée pour la HBM classique. Ainsi, le système algébrique à résoudre est :

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \omega_1, \omega_2) = \mathbf{Z}(\omega_1, \omega_2)\mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{P} \quad (4.7)$$

avec,

$$\mathbf{Z}(\omega) = \text{diag}(\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1(\omega), \ldots, \mathbf{Z}_N(\omega)) \quad (4.8)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

où $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{K}$ et $\mathbf{Z}_j(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j\omega)^2\mathbf{M} & (\mathbf{k}_j\omega)\mathbf{C}(\omega) \\ -(\mathbf{k}_j\omega)\mathbf{C}(\omega) & \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j\omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix}$,

ou bien $\mathbf{Z}_j(\omega_1,\omega_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k_{j_1}\omega_1 + k_{j_2}\omega_2)^2\mathbf{M} & (k_{j_1}\omega_1 + k_{j_2}\omega_2)\mathbf{C}(\omega_1,\omega_2) \\ -(k_{j_1}\omega_1 + k_{j_2}\omega_2)\mathbf{C}(\omega_1,\omega_2) & \mathbf{K} - (k_{j_1}\omega_1 + k_{j_2}\omega_2)^2\mathbf{M} \end{bmatrix}$.

On cherche à annuler le résidu $\mathbf{R}$ et la procédure est la même qu'avec la HBM classique (AFT, Newton-Raphson, continuation, etc.). Cependant chaque étape doit être adaptée au cas quasi-périodique.

4.2.3 Procédure AFT en quasi-périodique

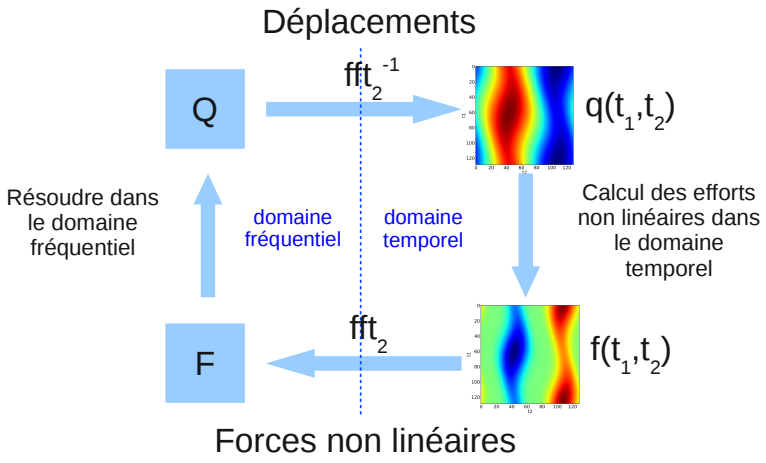


FIGURE 4.6: Méthode AFT (Alternating Frequency Time)

Point du vue général. Les termes non linéaires sont déterminés par AFT adaptée au cas bi-périodique. L'équation (4.4) peut être utilisée pour reconstruire le déplacement dans le domaine temporel à partir des coefficients de Fourier. On obtient ainsi le déplacement $(\mathbf{q}(t_1,t_2))$ fonction de t_1 et de t_2 . Les efforts non linéaires sont alors déduits de façon classique. On obtient les efforts non linéaires $(\mathbf{f}(t_1,t_2))$ également en fonction de t_1 et de t_2. Ensuite, les coefficients de Fourier correspondant en sont déduits. Les formules classiques sont les suivantes :

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\mathbf{f}(t_1,t_2)dt_2dt_1 \tag{4.9}$$

$$\mathbf{F}_{2j-1} = 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\mathbf{f}(t_1,t_2)\cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)dt_2dt_1$$

$$\mathbf{F}_{2j} = 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\mathbf{f}(t_1,t_2)\sin(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)dt_2dt_1$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

où $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ représentent respectivement les périodes relatives aux deux dimensions temporelles. En pratique on préférera les fonctions de transformée de Fourier rapide en dimension 2 (fft_2 et fft_2^{-1}) qui allient performance, robustesse et précision (voir figure 4.6).

Détails sur la fft_2. Lorsque les efforts ($\mathbf{f}(t_1,t_2)$) sont disponibles dans le domaine temporel sous forme discrétisée, l'objet $\mathbf{f}$ est un tableau de dimension 2 de taille $n_{t_1} \times n_{t_2}$ avec n_{t_1} et n_{t_2} les nombres arbitraires d'instants choisis pour l'AFT. Typiquement on a donc un tableau $\mathbf{f}$ de taille 256×256 (on choisit $n_{t_1} = n_{t_2}$ par facilité) qui doit être traité par la fonction fft_2. Il en ressort un tableau $\mathbf{F}$ de même dimension calculé par la formule suivante :

$$\mathbf{F}(k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{n_{t_1}} \sum_{n_2=0}^{n_{t_2}} \mathbf{f}(n_1,n_2) \mathrm{e}^{(-i2\pi k_{j_1} n_1)} \mathrm{e}^{(-i2\pi k_{j_2} n_2)}$$

Pour être correct, ce tableau doit être normalisé selon :

$$\mathbf{F} = \frac{2\mathbf{F}}{n_{t_1} \times n_{t_2}}$$
$$\mathbf{F}(0,0) = \frac{\mathbf{F}(0,0)}{2}$$

Utiliser la fonction fft_2 revient rigoureusement à appliquer $n_{t_1} + n_{t_2}$ fft mono-dimensionnelles sur le tableau f (d'abord sur les lignes puis sur les colonnes). Il y a donc là un surcoût non négligeable en terme de performances par rapport à la procédure AFT en mono-périodique. Dans le cas d'un nombre arbitraire de 256 instants AFT, la procédure AFT sera donc 512 fois plus lente qu'en mono-périodique. On a donc intérêt à réduire le nombre d'instants AFT au strict minimum pour ne pas trop affecter les performances.

4.2.4 Sélection automatique des harmoniques

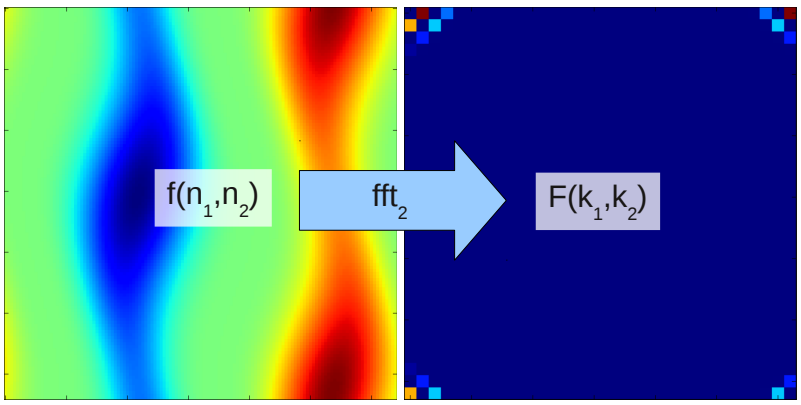


FIGURE 4.7: Choix automatique des harmoniques, étape 1.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

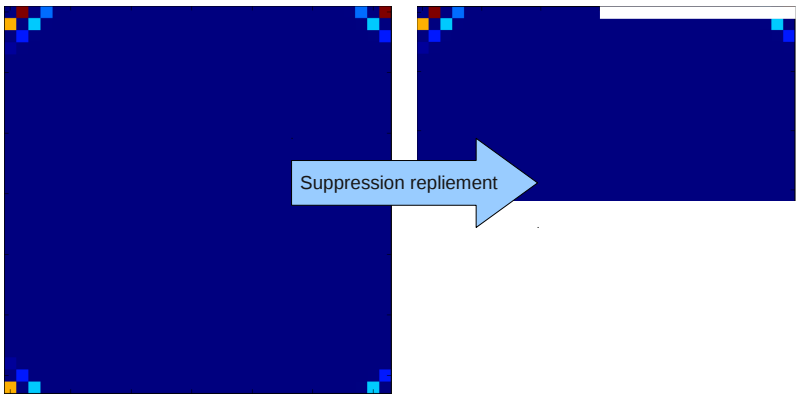


FIGURE 4.8: Choix automatique des harmoniques, étape 2.

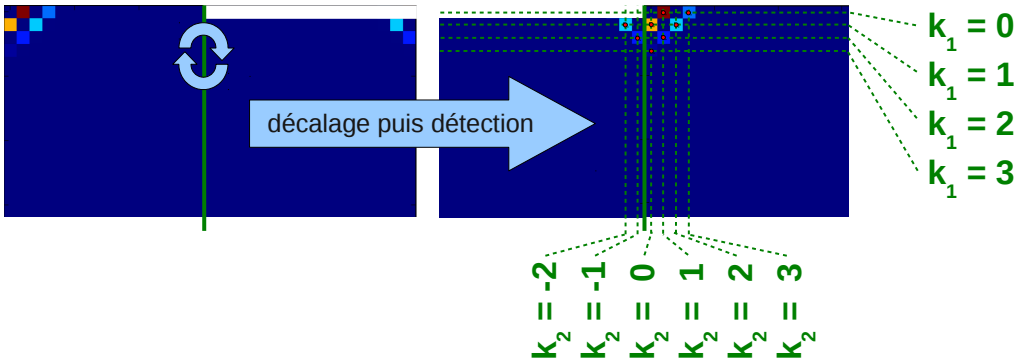


FIGURE 4.9: Choix automatique des harmoniques, étape 3.

De façon classique, un choix arbitraire des harmoniques est effectué pour mener à bien la simulation. Par exemple Chua et Ushida [CHU 81] ou bien Kim et Choi [KIM 97] choisissent les harmoniques en fonction d'un nombre arbitraire M. Les harmoniques sont alors choisies de sorte que :

$$|k_1| + |k_2| \leq M$$

Legrand [LEG 05] utilise une formule encore moins restrictive :

$$\text{pour } i \text{ dans } [1,2], |k_i| \leq M$$

Ces choix arbitraires font utiliser un très grand nombre d'harmoniques (le nombre d'harmoniques retenues croit très vite avec M) dont la plupart se révèlent finalement inutiles d'une part et sans garantie, d'autre part, que M aura été choisi suffisamment grand pour prendre en compte toutes les harmoniques prépondérantes.

Pour pallier à ce problème et de la même façon qu'en mono-périodique, on peut mettre au point une procédure pour choisir automatiquement les harmoniques prépondérantes dans la réponse du système. Le principe est le même qu'en périodique seulement le raisonnement doit maintenant être fait en deux dimensions au lieu d'une seule. On peut résumer la procédure en trois étapes. Une fois la convergence atteinte :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

- *Étape 1 :* Transformée de fourrier rapide en dimension 2 des efforts non linéaires (voir figure 4.7). A gauche, on peut voir la représentation sous forme d'image du tableau contenant les efforts non linéaires dans le domaine temporel (bleu = valeur basse, rouge = valeur haute). Notons que l'origine de l'image (correspondant au temps $(t_1 = 0, t_2 = 0)$) se situe en haut à gauche. A droite, la transformée de Fourier (en puissance) de ces efforts est dessinée. Chaque carré de couleur (ou pixel) représente une composante du spectre. Le pixel est bleu lorsque la composante est nulle et rouge lorsque la composante est d'intensité maximale. Ce spectre, comme dans le cas mono-dimensionnel, présente un phénomène de repliement. L'information est redondante.
- *Étape 2 :* Suppression des informations redondantes du spectre (voir figure 4.8). Cette étape consiste à supprimer le repliement pour ne garder que des informations uniques. On peut arbitrairement conserver soit la première moitié des lignes, soit la première moitié des colonnes. Ici, le choix a été fait de conserver la première moitié des lignes. Cependant cette étape n'est pas suffisante et la moitié droite de la première ligne doit également être supprimée. Dans le cas où on conserve la première moitié des colonnes, c'est la moitié basse de la première colonne qu'il faut également supprimer.
- *Étape 3 :* Décalage (ou 'shift') de la partie droite du spectre puis détection des harmoniques les plus importantes en terme de puissance (voir figure 4.9). Pour des raisons de commodité, la moitié droite du spectre restant est intervertie avec la moitié gauche et on utilise des coordonnées négatives pour les colonnes de la nouvelle moitié gauche. Dans l'exemple montré ici, on détecte 8 (couples d') harmoniques $\{(0,1);(0,3);(1,-2);(1,0);(1,2);(2,-1);(2,1);(3,0)\}$. Il faut ensuite vérifier que ces couples correspondent bien à des fréquences positives. Par exemple si dans l'exemple présent on a $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ alors l'harmonique numéro 3, $(1,-2)$ correspond à une fréquence négative $1 \times \omega_1 - 2 \times \omega_2 \approx -0,414$. Il convient alors de remplacer l'harmonique $(1,-2)$ par son opposé $(-1,2)$ afin de conserver une fréquence positive $(\approx +0,414)$ (cette harmonique opposée apparaît dans le spectre complet en tant qu'information redondante).

Cette étape de discrimination des harmoniques utiles est encore plus intéressante en quasi-périodique qu'en périodique car elle permet de réduire encore plus le nombre d'harmoniques retenues dans le calcul et donc de réduire le temps CPU tout en optimisant la précision du calcul.

4.2.5 Calcul de la Jacobienne

Comme pour le cas périodique, les étapes de correction lors du Newton-Raphson nécessitent le calcul de la jacobienne du système. Pour rappel, l'étape de correction du Newton-Raphson est la suivante :

$$\mathbf{Q}^{(k+1)} = \mathbf{Q}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}, \omega_1, \omega_2)}{\partial \mathbf{Q}} \right)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}, \omega_1, \omega_2) \tag{4.10}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Étant donné l'expression du résidu **R** donné par l'expression (4.7) :

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}, \omega_1, \omega_2)}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{Z}(\omega_1, \omega_2) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(k)})}{\partial \mathbf{Q}}$$

On va s'intéresser en particulier au calcul du terme $\mathbf{J}(\mathbf{Q}^{(k)})) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(k)})}{\partial \mathbf{Q}}$. Comme dans le cas périodique, il est pertinent de calculer ce terme d'une façon semi-analytique. En s'inspirant des travaux de Lesaffre [LES 07], on peut travailler sur une expression analytique de cette jacobienne.

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(0,0)} & \dots & \mathbf{J}^{(0,2j-1)} & \mathbf{J}^{(0,2j)} & \dots & \mathbf{J}^{(0,2N-1)} & \mathbf{J}^{(0,2N)} \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2i-1,0)} & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2i,0)} & & & \hat{\mathbf{J}} & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2N-1,0)} & & & & & & \\ \mathbf{J}^{(2N,0)} & & & & & & \end{bmatrix}$$

L'expression de chacun des termes de cette matrice (et la démonstration qui va avec) est donnée en annexe C. En pratique, comme pour l'AFT, on préférera utiliser les fonctions de transformée de Fourier rapides en dimension 2. On calcule ainsi la jacobienne colonne par colonne. Pour chaque colonne on calcule la transformée de Fourier d'ordre 2 de la dérivée des efforts qui aura été préalablement multipliée par la fonction cosinus ou sinus adaptée. On doit donc là encore faire face à un surcoût en terme de temps CPU.

4.2.6 Continuation par pseudo longueur d'arc

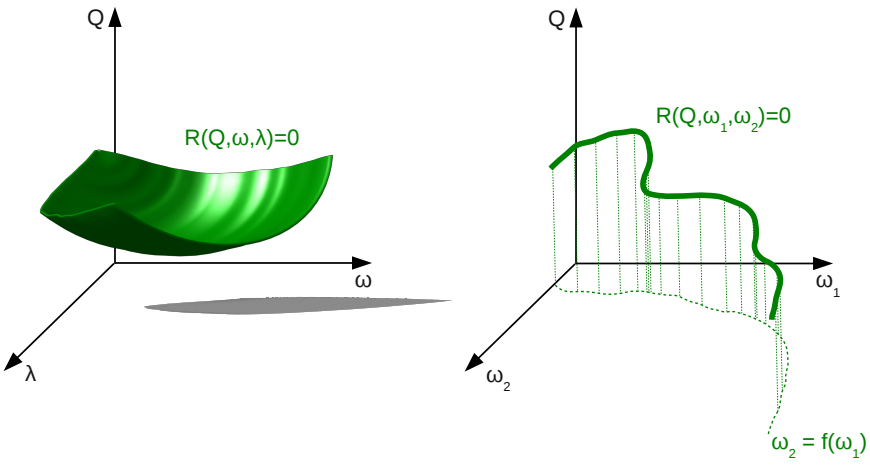


FIGURE 4.10: Continuation sur 2 paramètres. A gauche, les 2 paramètres sont indépendants. A droite, les deux paramètres sont liés.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Ici la continuation se fait sur deux paramètres (ω_1 et ω_2), seulement, ces deux paramètres sont liés. La figure 4.10 montre, à gauche, le cas où la continuation se fait sur deux paramètres indépendants (notés ω et λ). Dans ce cas là, l'ensemble des points de l'espace où le résidu est nul forme une surface (ou bien plusieurs surfaces). A droite, dans le cas où les deux paramètres sont liés (notés ω_1 et ω_2), l'ensemble des points où le résidu est nul est une ligne (ou bien un ensemble de lignes). Dans le cadre qui nous intéresse, il existe une relation entre les deux paramètres. On est donc dans le cas de la figure de droite. En revanche cette relation entre ω_1 et ω_2 n'est pas forcément connue à priori.

4.2.6.1 Cas de relation affine connue entre ω_1 et ω_2

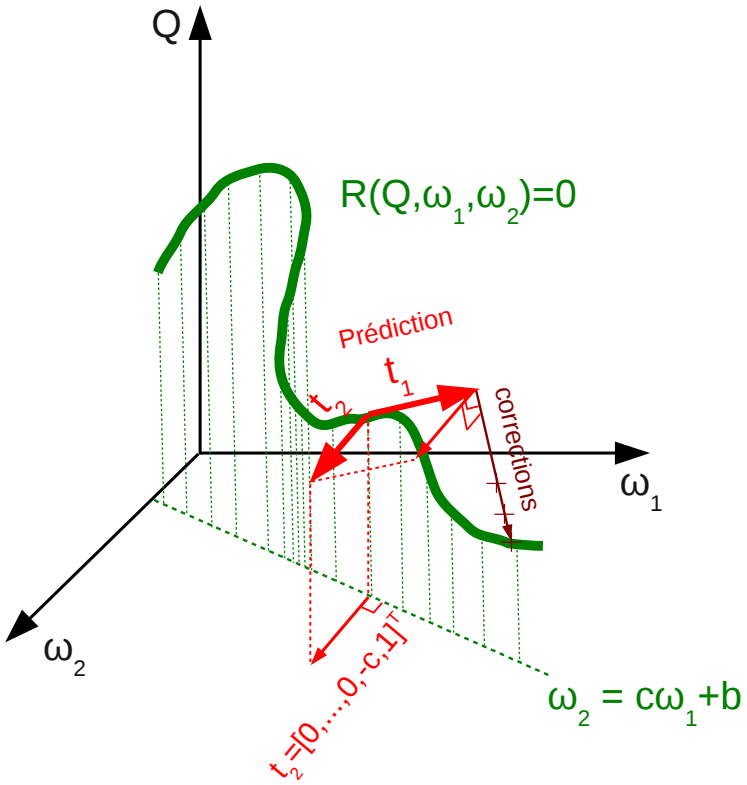


FIGURE 4.11: Continuation sur 2 paramètres avec relation affine connue entre les deux.

On se place dans un premier temps dans le cas où la relation entre les deux paramètres ω_1 et ω_2 est de forme affine $\omega_2 = c\omega_1 + b$ avec c et b connus (ou imposés). Une fois convergé sur un point de la ligne d'équation $\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \omega_1, \omega_2) = \mathbf{0}$, il faut suivre la tangente à cette ligne qui est d'équation $\mathbf{dR} = \mathbf{0}$. Soit un point $M_{(i)}$ de coordonnées $(\mathbf{Q}_{(i)}, \omega_{1(i)}, \omega_{2(i)})$ vérifiant $\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i)}, \omega_{1(i)}, \omega_{2(i)}) = \mathbf{0}$, on cherche un point $M_{(i+1)}$ de coordonnées $(\mathbf{Q}_{(i+1)} = \mathbf{Q}_{(i)} + \Delta\mathbf{Q}_{(i)}, \omega_{1(i+1)} = \omega_{1(i)} + \Delta\omega_{1(i)}, \omega_{2(i+1)} = \omega_{2(i)} + \Delta\omega_{2(i)})$ vérifiant également $\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i+1)}, \omega_{1(i+1)}, \omega_{2(i+1)}) = \mathbf{0}$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Prédiction : Sous l'hypothèse de petites variations, on peut faire l'approximation du premier ordre suivante :

$$\underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i+1)},\omega_{1(i+1)},\omega_{2(i+1)})}_{=0} \approx \underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{(i)},\omega_{1(i)},\omega_{2(i)})}_{=0} + \Delta\mathbf{Q}_{(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} + \Delta\omega_{1(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_1}_{|M_{(i)}} + \Delta\omega_{2(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_2}_{|M_{(i)}} \quad (4.11)$$

avec,
$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}} = \mathbf{Z}(\omega_1,\omega_2) + \frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dQ}}$
$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_1} = \frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial\omega_1}\mathbf{Q}$
$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial\omega_2}\mathbf{Q}$
Le vecteur tangent $\mathbf{t}_{1(i)} = [\Delta\mathbf{Q}_{(i)}^T, \Delta\omega_{1(i)}, \Delta\omega_{2(i)}]$ est de norme :

$$||\mathbf{t}_{1(i)}||^2 = \Delta\mathbf{Q}_{(i)}^T\Delta\mathbf{Q}_{(i)} + \Delta\omega_{1(i)}^2 + \Delta\omega_{2(i)}^2$$

Étant donnée la relation affine entre ω_1 et ω_2, on a $\Delta\omega_{2(i)} = c\Delta\omega_{1(i)}$, d'où :

$$||\mathbf{t}_{1(i)}||^2 = \Delta\mathbf{Q}_{(i)}^T\Delta\mathbf{Q}_{(i)} + \Delta\omega_{1(i)}^2(1+c^2)$$

Soit $a_{(i)} = \Delta\omega_{1(i)}\sqrt{1+c^2}$ et $\Delta\mathbf{Q}_{(i)} = a_{(i)}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}$.
On souhaite avoir un vecteur tangent de norme 1.

$$||\mathbf{t}_{1(i)}||^2 = 1 \Leftrightarrow a_{(i)}^2(\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}^T\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} + 1) = 1$$

d'où,

$$a_{(i)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}^T\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} + 1}} \quad (4.12)$$

Le signe de $a_{(i)}$ est choisi de sorte que deux vecteurs tangents successifs aient un produit scalaire positif (conservation du sens de parcours). L'équation (4.11) devient :

$$\Delta\mathbf{Q}_{(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} + \Delta\omega_{1(i)}\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_1}_{|M_{(i)}} + c\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_2}_{|M_{(i)}}\right) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

Étant donné les expressions de $a_{(i)}$ ($a_{(i)} = \Delta\omega_{1(i)}\sqrt{1+c^2}$) et de $\Delta\mathbf{Q}_{(i)}$ ($\Delta\mathbf{Q}_{(i)} = a_{(i)}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}$), l'équation (4.13) peut également s'écrire ainsi :

$$\cancel{\Delta\omega_{1(i)}}\sqrt{1+c^2}\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} + \cancel{\Delta\omega_{1(i)}}\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_1}_{|M_{(i)}} + c\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega_2}_{|M_{(i)}}\right) = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

On peut donc résumer la procédure ainsi :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

– Résoudre le système suivant pour $\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}$:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}}_{|M_{(i)}} \Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_1}_{|M_{(i)}} + c \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_2}_{|M_{(i)}} \right)$$

– En déduire $a_{(i)}$ (voir équation (4.12))

– En déduire $\Delta\omega_{1(i)}$ et $\Delta\omega_{2(i)}$:

$$\Delta\omega_{1(i)} = \frac{a_{(i)}}{\sqrt{1+c^2}}$$
$$\Delta\omega_{2(i)} = c\Delta\omega_{1(i)} = \frac{ca_{(i)}}{\sqrt{1+c^2}}$$

Corrections : En ce qui concerne l'étape de corrections, on cherche à annuler de façon itérative le résidu (non nul) de la solution prédite du point $M_{(i+1)}$. A l'itération (k) on a :

$$\underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(k)}_{(i+1)}, \omega^{(k)}_{1(i+1)}, \omega^{(k)}_{2(i+1)})}_{=\mathbf{R}^{(k)}} = \underbrace{\mathbf{Z}(\omega^{(k)}_{1(i+1)}, \omega^{(k)}_{2(i+1)})}_{=\mathbf{Z}^{(k)}} \mathbf{Q}^{(k)}_{(i+1)} + \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(k)}_{(i+1)})}_{=\mathbf{F}^{(k)}} - \mathbf{P}$$

On abandonne la notation $(i+1)$ dans la suite pour alléger les écritures. On impose également que les corrections se fassent dans une direction orthogonale au vecteur $\mathbf{t}_1$, le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_2} \\ \Delta\hat{\mathbf{Q}}^T_{(i)} & \Delta\omega_{1(i)} & \Delta\omega_{2(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{(k+1)} \\ \Delta\omega_1^{(k+1)} \\ \Delta\omega_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Comme on peut le constater ce système est sous déterminé ($(n(2N+1)+2)$ colonnes (inconnues) pour $(n(2N+1)+1)$ lignes (équations)). Il faut en effet définir une dernière équation pour que le système soit complètement déterminé. On comprend vite qu'il manque, dans le système, une relation entre $\Delta\omega_1^{(k+1)}$ et $\Delta\omega_2^{(k+1)}$. En effet, la relation affine entre ω_1 et ω_2 doit également s'appliquer aux corrections. On doit donc imposer la relation suivante entre $\Delta\omega_1^{(k+1)}$ et $\Delta\omega_2^{(k+1)}$:

$$\Delta\omega_2^{(k+1)} = c\Delta\omega_1^{(k+1)} \tag{4.16}$$

Le système (4.15) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_2} \\ \Delta\hat{\mathbf{Q}}^T_{(i)} & \Delta\omega_{1(i)} & \Delta\omega_{2(i)} \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{(k+1)} \\ \Delta\omega_1^{(k+1)} \\ \Delta\omega_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}^{(k)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Cette dernière relation peut être vue comme une condition additionnelle d'orthogonalité des corrections par rapport à un vecteur $\mathbf{t}_2$ (voir schéma figure 4.11). Les corrections se font donc dans une direction orthogonale à la fois aux vecteurs $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$. Les vecteurs $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ sont orthogonaux entre eux.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

4.2.6.2 Cas de relation non linéaire connue entre ω_1 et ω_2

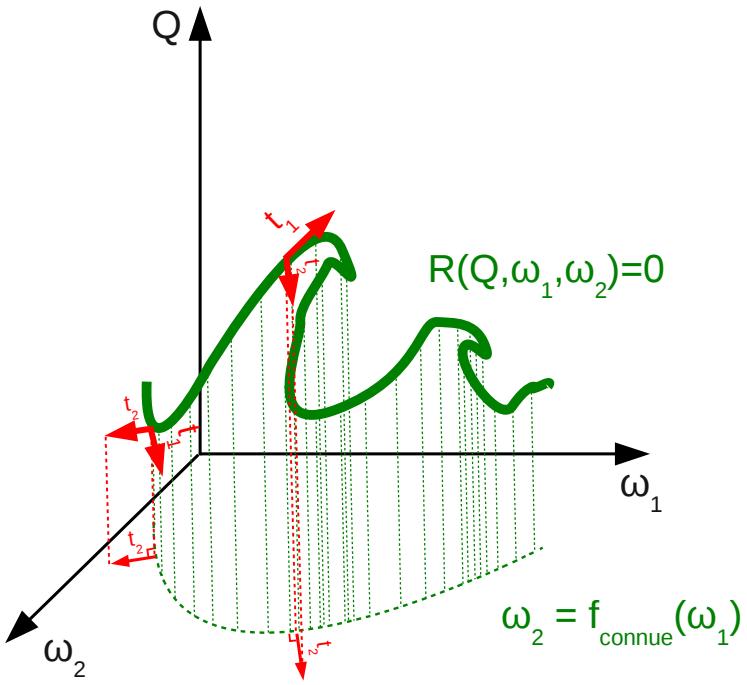


FIGURE 4.12: Continuation sur 2 paramètres avec relation non linéaire connue entre les deux.

La relation liant ω_1 à ω_2 peut tout à fait ne pas être linéaire (ou affine). Dans le cas où la fonction non linéaire qui relie ω_1 à ω_2 est connue (voir figure 4.12), une procédure de continuation similaire à celle utilisée dans le cas où la relation entre ω_1 et ω_2 est affine peut être utilisée. Cependant, certaines modifications sont à prendre en compte.

Prédiction : L'étape de prédiction est très similaire à celle du cas affine. Le paramètre c est cependant ici variable selon le point ($c_{(i)}$) et correspond en fait à la pente de la fonction f_{connue} au point $M_(i)$.

$$c_{(i)} = \frac{df_{\text{connue}}}{d\omega_1}_{|M_{(i)}}$$

Le reste de la procédure de prédiction reste inchangée. Il faut noter toutefois qu'à la différence avec le cas affine, le point prédit $\left(M^{(0)}_{(i+1)}\right)$ ne vérifie pas $\omega^{(0)}_{2(i+1)} = f_{\text{connue}}(\omega^{(0)}_{1(i+1)})$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Corrections : Les corrections, ici aussi se font de façon orthogonale au vecteur $\mathbf{t}_1$ défini lors de l'étape de prédiction. D'une façon similaire également, une équation supplémentaire doit être fournie pour obtenir un système complètement déterminé. L'équation utilisée dans le cas affine (voir eq. (4.16)) ne peut pas être utilisée ici à cause de la non linéarité. En effet, la correction $\Delta\omega_2^{(k+1)}$ doit être telle que (avec l'hypothèse des petites corrections) :

$$\begin{aligned}\underbrace{\omega_2^{(k)}+\Delta\omega_2^{(k+1)}}_{=\omega_2^{(k+1)}} &= f_{\text{connue}}(\underbrace{\omega_1^{(k)}+\Delta\omega_1^{(k+1)}}_{=\omega_1^{(k+1)}}) \\ &\approx f_{\text{connue}}(\omega_1^{(k)})+\Delta\omega_1^{(k+1)}\frac{df_{\text{connue}}}{d\omega_1}_{|\omega_1^{(k)}}\end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\Delta\omega_2^{(k+1)} \approx \frac{df_{\text{connue}}}{d\omega_1}_{|\omega_1^{(k)}}\Delta\omega_1^{(k+1)} + f_{\text{connue}}(\omega_1^{(k)}) - \omega_2^{(k)}$$

Le système (4.17) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_2} \\ \Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}^T & \Delta\omega_{1(i)} & \Delta\omega_{2(i)} \\ 0 & -\frac{df_{\text{connue}}}{d\omega_1}_{|\omega_1^{(k)}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{(k+1)} \\ \Delta\omega_1^{(k+1)} \\ \Delta\omega_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}^{(k)} \\ 0 \\ f_{\text{connue}}(\omega_1^{(k)}) - \omega_2^{(k)} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Les itérations sont effectuées jusqu'à ce que k soit suffisamment grand pour que $||\mathbf{R}^{(k)}|| < \varepsilon_{\mathbf{R}}$ et $|f_{\text{connue}}(\omega_1^{(k)}) - \omega_2^{(k)}| < \varepsilon_f$, avec $\varepsilon_{\mathbf{R}}$ et ε_f des constantes arbitraires choisies suffisamment 'petites'. En réalité, le cas affine n'est qu'un cas particulier de relation 'non linéaire' (au sens large). Une seule implémentation informatique englobant ces deux configurations est nécessaire.

4.2.6.3 Cas de relation inconnue (à priori non linéaire) entre ω_1 et ω_2

Le cas où la relation entre ω_1 et ω_2 existe mais n'est pas connue à priori est plus délicat. On rencontre cette situation dans des systèmes où la seconde pulsation n'est pas issue d'une excitation extérieure mais est une fréquence propre au système et qui apparaît spontanément dans sa réponse lorsque les conditions favorables sont réunies. Dans ce genre de situation la continuation est plus compliquée car la pulsation ω_2 doit être déterminée en même temps que le reste des inconnues du problème.

Corrections : Pour ce faire, on ajoute au système (4.15) une condition d'orthogonalité des corrections par rapport à un vecteur t_2 qui a des composantes nulles selon ω_1 et ω_2 ($t_2 = [\ldots, 0, 0]$). Ce vecteur $\mathbf{t}_2$ doit être modifié à chaque itération (pour ne pas se priver d'une partie de l'espace de recherche) mais doit toujours rester orthogonal à $\mathbf{t}_1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

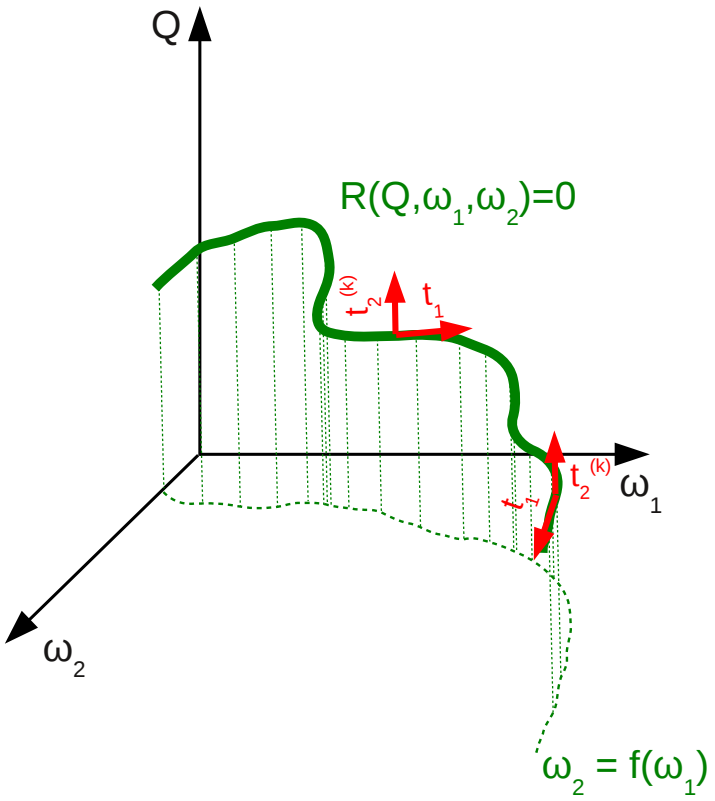


FIGURE 4.13: Continuation sur 2 paramètres avec relation inconnue entre les deux.

De façon analogue à ce qui est fait dans l'algorithme du gradient conjugué, on choisit $\mathbf{t}_2^{(k)} = [\Delta\mathbf{Q}^{(k)T}, 0, 0]$. Le système à résoudre devient alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \omega_2} \\ \Delta\hat{\mathbf{Q}}_{(i)}^T & \Delta\omega_{1(i)} & \Delta\omega_{2(i)} \\ \Delta\mathbf{Q}^{(k)T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{(k+1)} \\ \Delta\omega_1^{(k+1)} \\ \Delta\omega_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}^{(k)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

La première correction (et uniquement la première) est alors apportée par une résolution par moindres carrés sur le système sous déterminé (4.15).

Prédiction : L'étape de prédiction est inchangée à l'exception du fait que le coefficient $c_{(i)}$ doit être approximé par différences finies sur les deux derniers points solutions calculés :

$$c_{(i)} = \frac{\omega_{2(i)} - \omega_{2(i-1)}}{\omega_{1(i)} - \omega_{1(i-1)}}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

4.3 Exemples d'application

Quelques applications sont données en exemple pour illustration de ces développements.

4.3.1 Oscillateur de Duffing avec relation linéaire connue entre ω_1 et ω_2

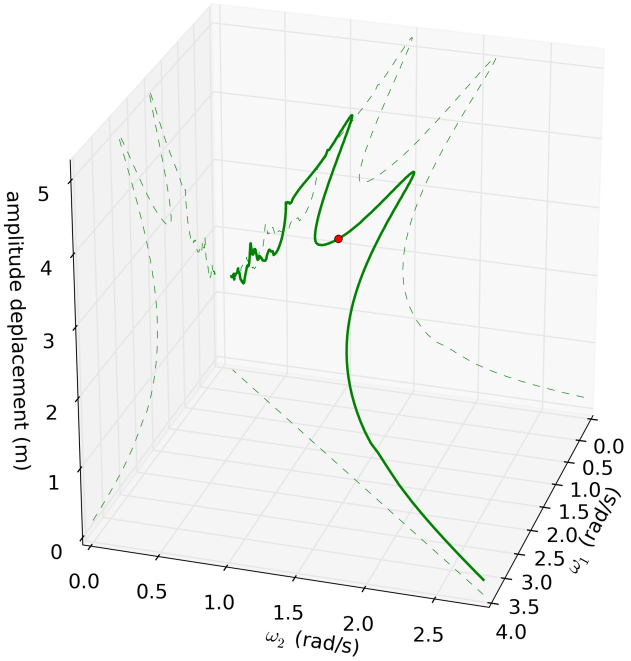


FIGURE 4.14: Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. Courbe de réponse en fonction de ω_1 et de ω_2. Les projections sur les trois plans sont en pointillés.

Dans un premier temps nous allons nous intéresser au cas de l'oscillateur de Duffing avec relation linéaire connue entre les deux fréquences fondamentales. Ici, c'est l'excitation extérieure qui présente deux fréquences fondamentales. L'équation du mouvement est la suivante :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) + k_{\text{nl}}q(t)^3 = \cos(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$$

avec $m = 1\text{kg}$, $c = 0,1\text{N.m}^{-1}\text{.s}$, $k = 1\text{N.m}^{-1}$ et $k_{\text{nl}} = 0,2\text{N.m}^{-3}$. D'autre part, $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. La figure 4.14 montre la courbe de réponse du système. On note deux résonances principales et une multitude de résonances sur-harmoniques. La figure 4.15 montre le détail du déplacement de la masse en fonction de t_1 et de t_2 pour un point situé à $\omega \approx 1,9\text{rad.s}^{-1}$ (point rouge sur la figure 4.14). Pour être plus facilement lisible, ce même déplacement a été reconstruit, sur la figure 4.16, dans le temps réel ($t_{\text{réel}}$) sur une durée correspondant à $25 \times T_1$. Le caractère non périodique de la réponse apparaît clairement. Le

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

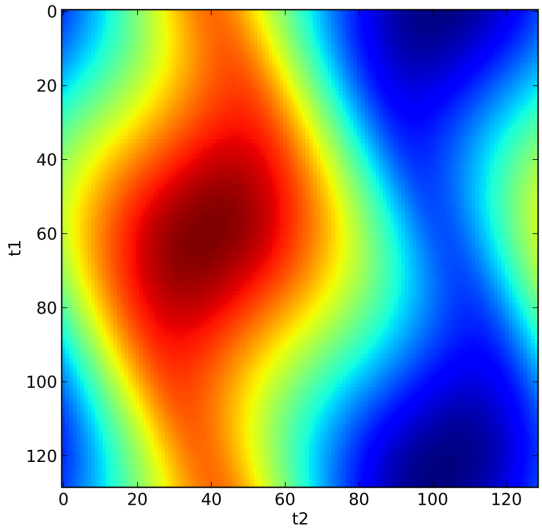


FIGURE 4.15: Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. Détail à $\omega_1 \approx 1,9\text{rad.s}^{-1}$. Déplacement en fonction de t_1 et de t_2. Bleu : valeur basse. Rouge : valeur haute.

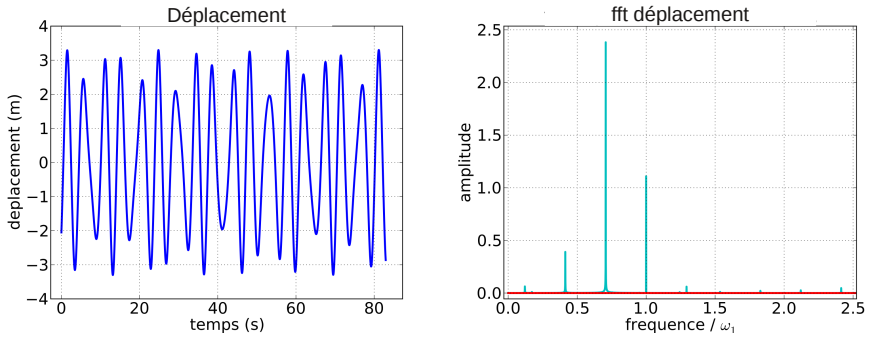


FIGURE 4.16: Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$. Détail à $\omega_1 \approx 1,9\text{rad.s}^{-1}$. A gauche : déplacement en fonction de $t_{\text{réel}}$. A droite : transformée de Fourier de la figure de gauche.

spectre fréquentiel de ce signal a été tracé en partie droite de la figure. On note un pic à $1 \times \omega_1$ correspondant à la première fréquence excitatrice fondamentale. On note aussi un pic à $\approx 0,707 \times \omega_1$ ce qui correspond à la seconde fréquence fondamentale $(1/\sqrt{2} \approx 0,707)$. D'autres pics sont présents à des fréquences combinaison linéaire de ses deux fréquences fondamentales. Par exemple, un pic de fréquence $\approx 0,414 \times \omega_1$ est présent. Or $0,414 \approx 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ ce qui correspond à l'harmonique (-1,2).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

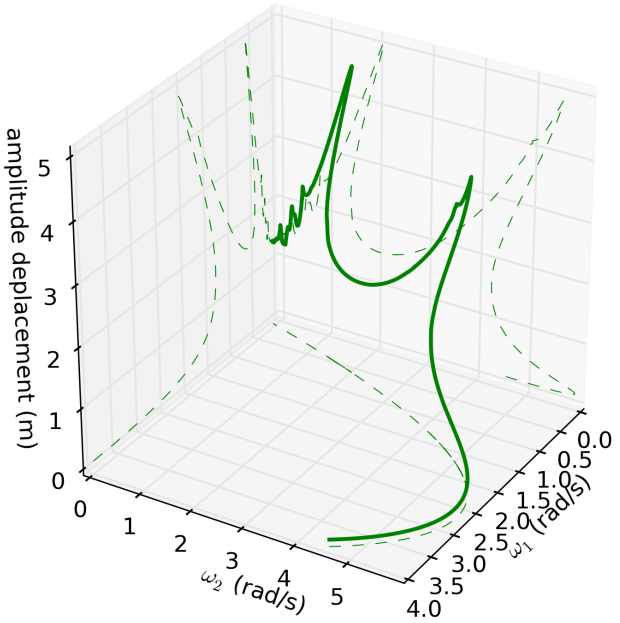


FIGURE 4.17: Oscillateur de Duffing. $\omega_2 = -0,9\omega_1^2 + 5\omega_1 - 1$. Courbe de réponse en fonction de ω_1 et de ω_2.

4.3.2 Oscillateur de Duffing avec relation non linéaire connue entre ω_1 et ω_2

L'exemple est ici très similaire à celui considéré précedemment. La seule différence vient du fait que la relation liant ω_1 à ω_2 est non linéaire : $\omega_2 = -0,9 \times \omega_1^2 + 5 \times \omega_1 - 1$. La figure 4.17 montre la courbe de réponse en fonction de ω_1 et de ω_2.

4.3.3 Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator et relation non linéaire inconnue entre ω_1 et ω_2

Dans les deux exemples précédents, la relation entre ω_1 et ω_2 était imposée. Dans l'exemple qui suit ω_2 est le résultat d'une excitation interne auto-entretenue générée par le frottement, l'excitation extérieure étant monoharmonique. Il s'agit d'un cas simple de contact rotor-stator inspiré de Jiang [JIA 09] dont les caractéristiques sont identiques à celles du modèle présenté section 4.1. Le mouvement quasi-périodique est parfaitement reproduit grâce à la HBM quasi-périodique (courbe verte figures 4.18 et 4.19 rendant compte de l'état de contact partiel). La HBM quasi-périodique a pour cela été initialisée avec les données issues du calcul temporel. La figure 4.21 montre la courbe de réponse donnée par la HBM quasi-périodique en fonction des pulsations adimensionnées Ω_1 et de Ω_2. On constate le caractère non linéaire de la relation entre les deux pulsations fondamentales. Ω_2 décroît lorsque la vitesse de rotation du rotor ($\Omega = \Omega_1$) croît.

Il y a de surcroît une très bonne concordance avec les données de la figure 4.5 qui

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

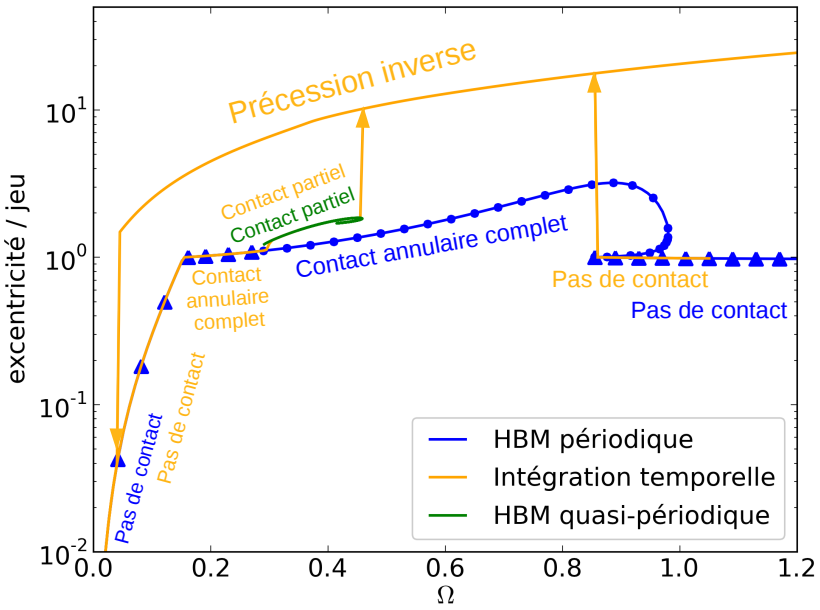


FIGURE 4.18: Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse. (▲) stable, (.) instable.

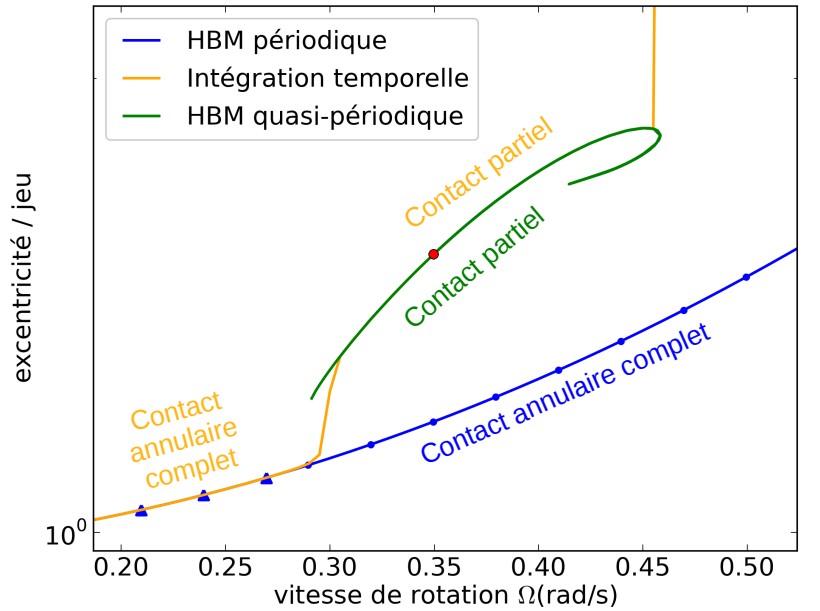


FIGURE 4.19: Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse (vue agrandie autour de la zone de contact partiel). (▲) stable, (.) instable.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

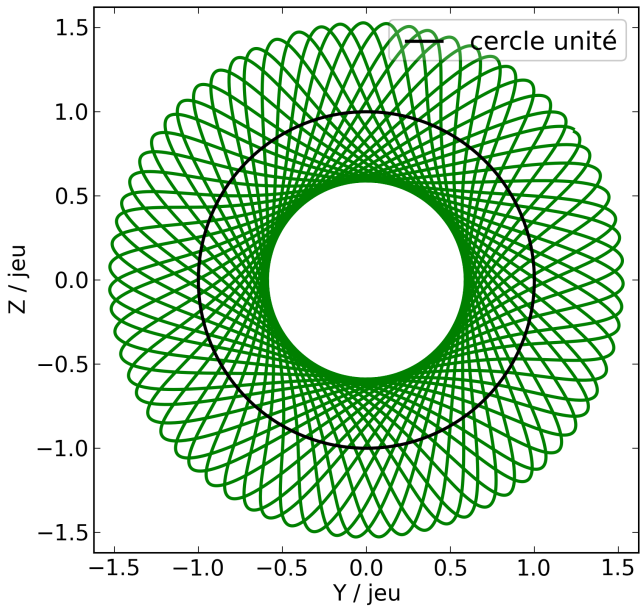


FIGURE 4.20: Rotor de Jeffcott. Orbite quasi-périodique du rotor à $\Omega \approx 0,35$ (point rouge sur la figure 4.19).

montre l'évolution de Ω_1 en fonction de Ω_2 issu des résultats de l'intégration temporelle directe. Un exemple d'orbite quasi-périodique du rotor calculée par HBM est montré figure 4.20. L'algorithme de sélection automatique des harmoniques montre également son efficacité car les harmoniques retenues dans le calcul correspondent aux formules données équation 4.1.

Malgré une procédure qui est censée théoriquement être en tout point identique, la méthode présentée n'a pas été en mesure de reproduire le mouvement de précession inverse. Le résidu initial en erreur dans le domaine fréquentiel étant anormalement élevé, la procédure de Newton-Raphson ne parvient pas à converger sur la branche solution. Cette situation est problablement causée par un boggue qui n'a pas pu être corrigé par faute de temps.

4.3.4 Rotor éléments finis à 3 disques

Des phénomènes quasi-périodiques ont pu également être relevés sur le modèle de rotor éléments finis à trois disques. La figure 4.22 montre la courbe de réponse du modèle pour un coefficient de frottement $\mu = 0,2$. La courbe de réponse du système donnée par la balance harmonique périodique est très similaire à celle obtenue pour $\mu = 0,1$ (revoir figure 3.6), cependant la stabilité des solutions, elle, change de façon notable. En effet, la solution HBM périodique est donnée instable au delà d'une vitesse de rotation environ égale à 4500tr/min alors qu'elle était donnée stable jusqu'au point de rebroussement le

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

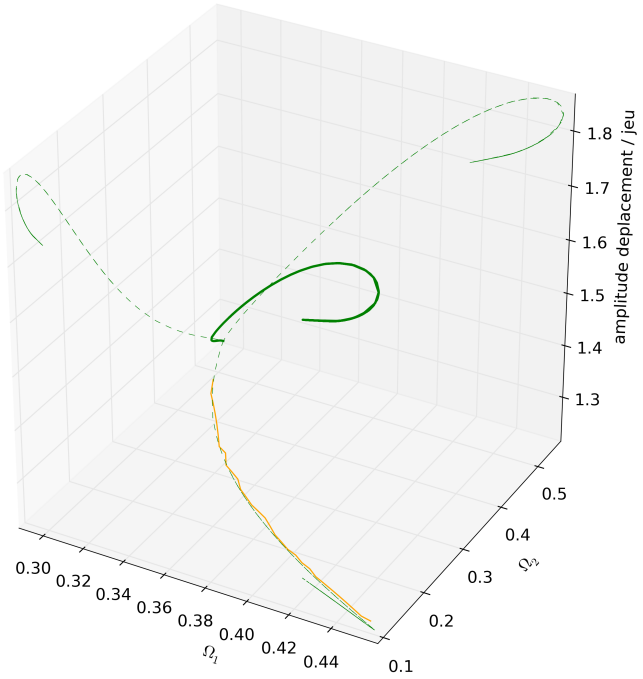


FIGURE 4.21: Rotor de Jeffcott. Courbe de réponse HBM quasi-périodique. En jaune est reportée la courbe 4.5.

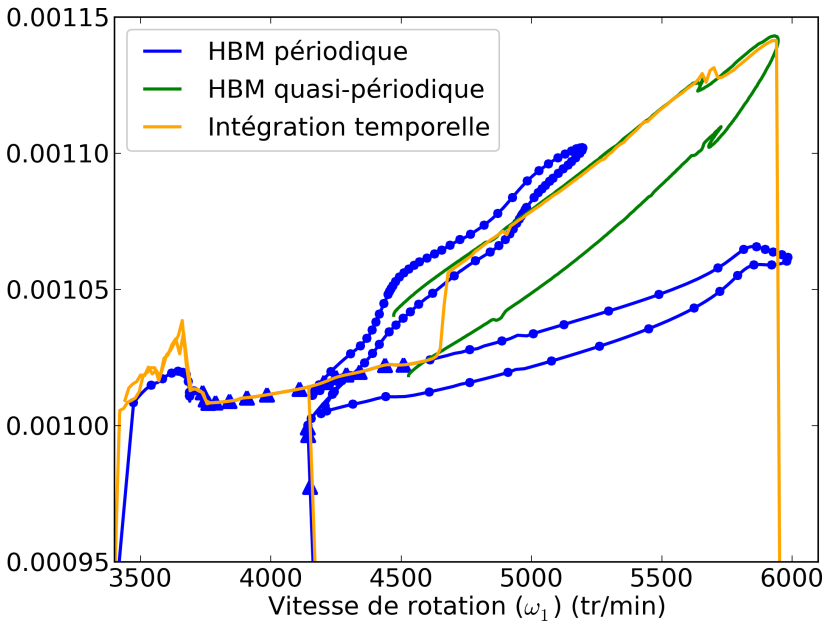


FIGURE 4.22: Rotor éléments finis. Courbe de réponse. (▲) stable, (.) instable.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

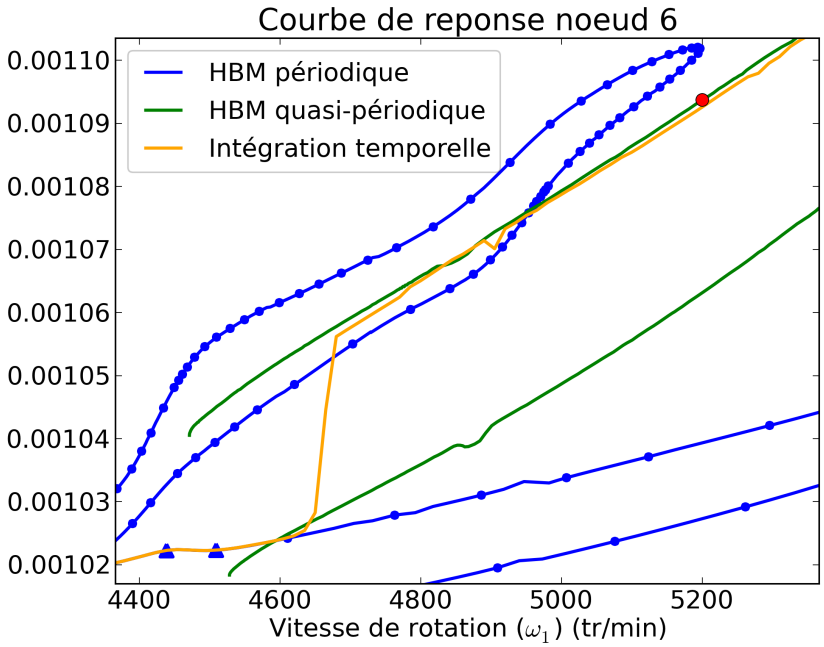


FIGURE 4.23: Rotor éléments finis. Courbe de réponse (vue agrandie). (▲) stable, (.) instable.

plus avancé (à environ 6000tr/min) lorsque le coefficient de frottement était égal à 0,1. La vue agrandie de la courbe de réponse (voir figure 4.23) montre que la courbe de réponse obtenue par intégration temporelle s'éloigne de celle obtenue par balance harmonique périodique lorsque cette dernière devient instable. La solution stable devient alors quasi-périodique et une nouvelle branche solution est révélée. Cette dernière a pu être suivie grâce à la méthode de la balance harmonique quasi-périodique.

Comme dans le cas du rotor de Jeffcott, la maquette a du être initialisée avec une solution temporelle. On peut constater sur la courbe de réponse du système (figures 4.22 et 4.23) que les solutions données par intégration temporelle et par HBM sont très proches. Un exemple de réponse quasi-périodique à environ 5200tr/min peut être observé figures 4.25 et 4.26.

4.4 Conclusion

Ce chapitre montre que l'extension de la méthode de la balance harmonique aux systèmes multi-fréquentiels est possible dans le cadre de la dynamique des machines tournantes. L'extension fait appel à la notion de temps multi-dimensionnel. L'algorithme de HBM multi-fréquentiel est globalement très similaire à celui en mono-fréquentiel, cependant chaque étape du calcul doit être modifiée pour prendre en compte plusieurs fréquences fondamentales. En particulier, les procédures AFT et le calcul de la jacobienne doivent faire appel aux algorithmes de transformée de Fourier (directe et inverse)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

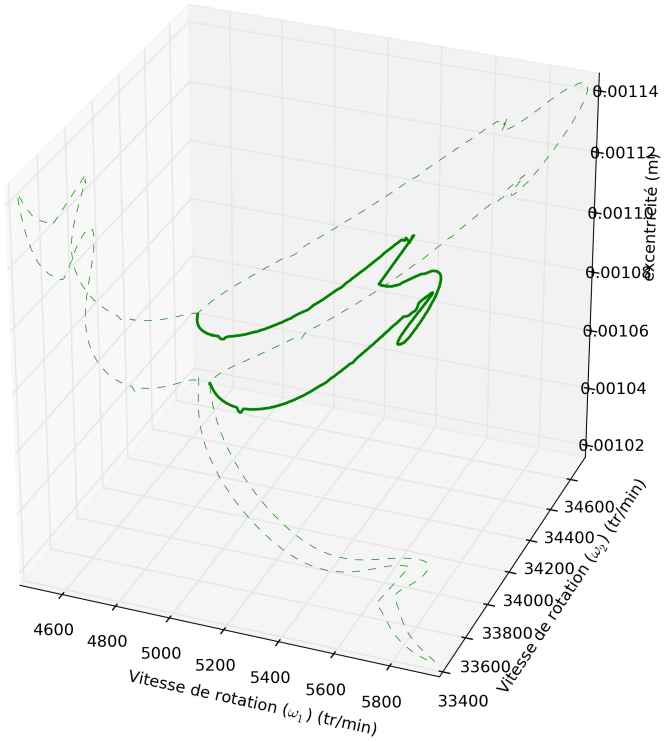


FIGURE 4.24: Rotor éléments finis. Courbe de réponse HBM quasi-périodique.

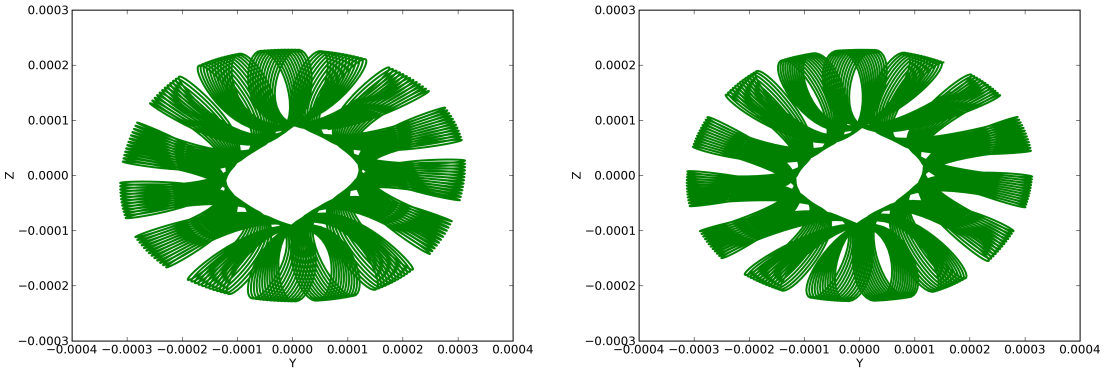


FIGURE 4.25: Rotor éléments finis. Orbites du nœud 1 calculé à $\omega_1 \approx 5200$tr/min (voir point rouge sur la figure 4.23). à gauche : HBM quasi-périodique. à droite : intégration temporelle.

de dimension supérieure. Tout ce qui a été implémenté et testé dans ce contexte a été limité à la dimension 2 (2 fréquences fondamentales). Cet augmentation de la dimension de certains opérateurs se traduit par une augmentation significative du temps de calcul ; augmentation qui reste néanmoins raisonnable et les gains de vitesse par rapport à

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

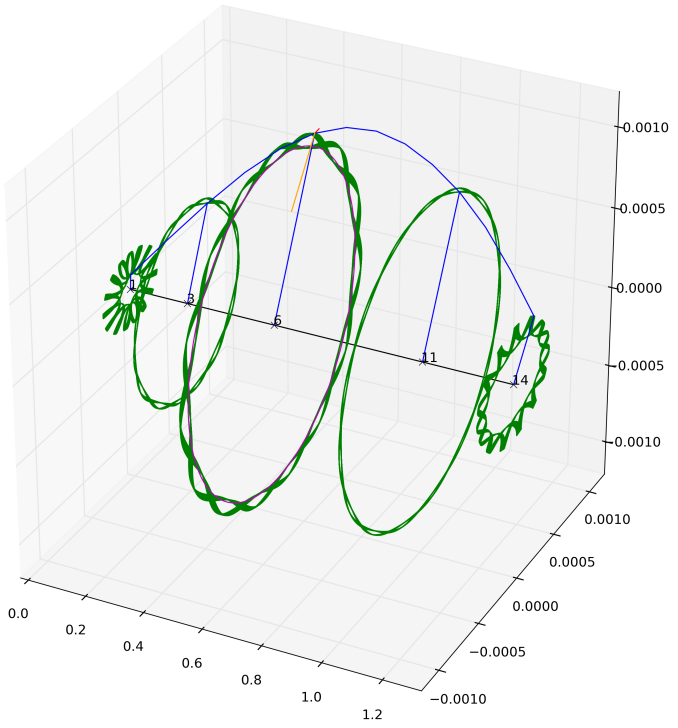


FIGURE 4.26: Rotor éléments finis. Vue d'ensemble du rotor à $\omega_1 \approx 5200$tr/min (voir point rouge sur la figure 4.23).

l'intégration temporelle directe restent effectifs. La procédure de sélection automatique des harmoniques reste valable et montre d'ailleurs un intérêt encore plus grand qu'avec la HBM périodique.

La continuation par pseudo-longueur d'arc a du être adaptée pour pouvoir prendre en compte les situations où la seconde pulsation fondamentale du système est une inconnue du problème (fréquence issue d'une excitation interne du système générée par le frottement et donc inconnue à priori) situation fréquente dans les cas de contact rotor-stator. Cette adaptation de la technique de continuation constitue ici le principale apport du chapitre. La méthode a été illustrée sur divers exemples de contact rotor-stator avec une très bonne concordance constatée entre les résultats de la HBM quasi-périodique et les résultats issus de l'intégration temporelle directe.

En perspective on peut évoquer une alternative à la façon d'initialiser la HBM quasi-périodique. Dans les exemples de contact rotor-stator donnés ci-dessus l'initialisation se fait à partir d'un résultat obtenu par intégration temporelle directe. Une alternative consisterait à utiliser une technique d'embranchement (branch switching) à partir de la réponse HBM périodique. En effet, la perte de stabilité de la réponse périodique est détectée par l'analyse de Floquet ce qui permet de déterminer de façon arbitrairement précise l'endroit de la bifurcation. De plus, les multiplicateurs de Floquet qui sortent du cercle unité donnent une information sur la valeur de la seconde pulsation fondamentale qui apparaît dans

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

le système. Les vecteurs propres associés à ces multiplicateurs donnent une information sur la direction de recherche à emprunter pour bifurquer sur la branche quasi-périodique. Cette façon de faire permettrait de s'affranchir de fastidieuses simulations dans le domaine temporel.

Aussi, la notion de stabilité des solutions existe également pour les régimes quasi-périodiques et des extensions de la théorie de Floquet existent. On pourra étudier par exemple la thèse de Guskov [GUS 07] pour implémenter une technique de calcul de stabilité basée sur l'extension de la notion de section de Poincaré aux dimensions supérieures.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 5

Application industrielle : groupe turbo-alternateur GTA1300

Ce cinquième et dernier chapitre est consacré à l'étude d'un cas industriel réel. L'étude porte sur un modèle de groupe turbo-alternateur 1300MW de centrale électrique exploitée par EDF. Une confrontation est faite entre résultats donnés par HBM et résultats donnés par intégration temporelle. Les résultats sont comparés d'un point de vue précision et temps de calcul. A travers quelques études, on montre la faisabilité de calculs paramétriques par la maquette HBM.

Sommaire

5.1 Présentation du modèle 124
5.2 Réponse linéaire 125
5.3 Réponse non linéaire 126
5.3.1 Influence de la rigidité de contact 128
5.3.2 Influence du coefficient de frottement 134
5.4 Conclusion 136

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

5.1 Présentation du modèle

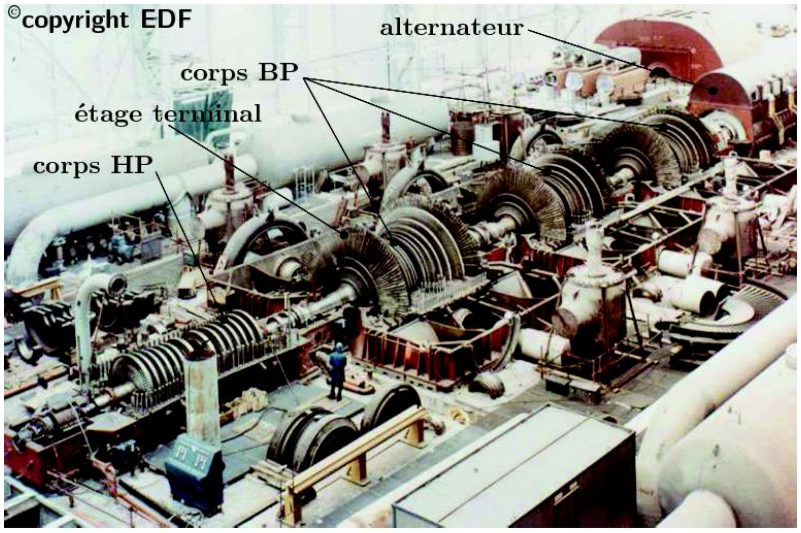


FIGURE 5.1: Photo du groupe turbo-alternateur 1300MW

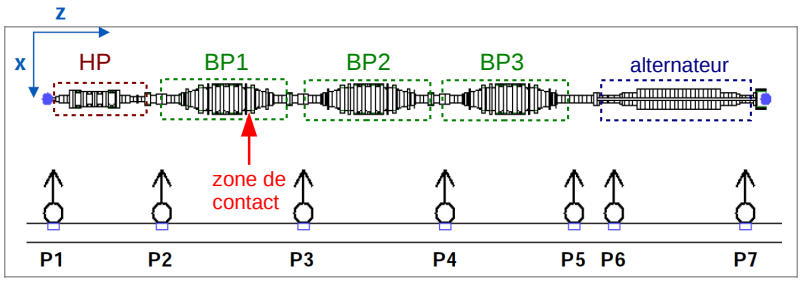


FIGURE 5.2: Modèle éléments finis du GTA1300

On analyse le comportement accidentel du Groupe Turbo Alternateur (GTA) (voir figure 5.1) suite à la perte de l'ailette au niveau du dernier étage du premier corps basse pression, côté deuxième corps basse pression (amplitude du balourd égale à 90 kg.m.) Le modèle (voir figure 5.2) représente la géométrie basée sur approximativement 300 noeuds (environ 1200 degrés de liberté) décrivant les différentes caractéristiques de la ligne d'arbres (sections, inerties, matériaux, etc...). Comme pour le cas académique du rotor à trois disques vu précédemment, ce sont des éléments de type poutre de Timoshenko qui ont été utilisés. Le GTA 1300 repose sur 7 paliers reposant eux-même sur un support rigide.

Pour les calculs dits linéaires, les sept paliers de la ligne d'arbres sont caractérisés par des matrices de coefficients de raideur et d'amortissement linéarisés, obtenues par des calculs avec le code EDYOS (Études DYnamiques des Organes de Supportage (logiciel EDF)) autour de la position d'équilibre du palier en condition nominale, pour des vitesses

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

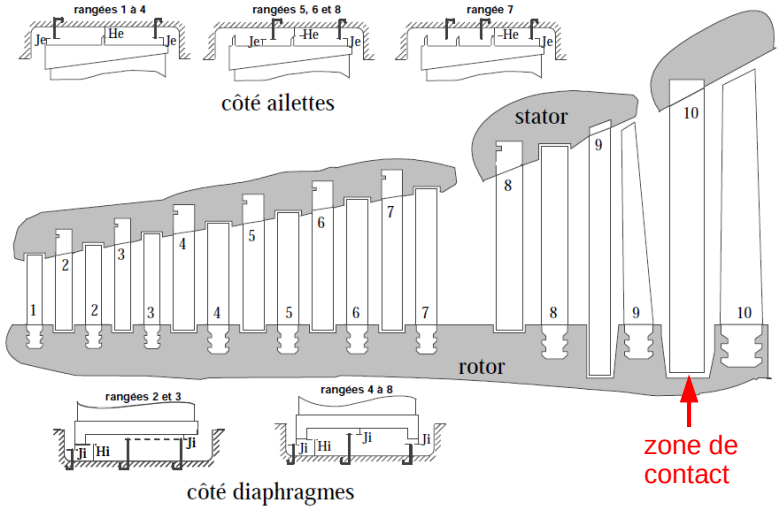


FIGURE 5.3: Schématisation d'un flux BP

allant de 750 tr/min à 1500 tr/min. Le support du GTA est, quant à lui, considéré comme rigide.

Les simulations numériques du comportement accidentel du GTA 1300 MW montrent que le contact rotor/stator survient principalement au niveau des jantes porte-étanchéité des diaphragmes de la rangée 10 (voir figure 5.3). L'aubage 10 est constitué par 46 ailettes soudées à une structure en acier moulé.

En plus de la sollicitation due au balourd, ici le poids propre de l'ensemble doit être pris en compte. La prise en compte du poids se fait en effectuant un premier calcul statique de la ligne d'arbres en ne prenant en compte que le poids propre (appelé calcul de la chaînette de la ligne d'arbres). La déformée ainsi obtenue est utilisée pour la définition du maillage. La réponse au balourd est ainsi calculée dans un second temps, sans prendre en compte la pesanteur, autour de cette position sous poids propre.

5.2 Réponse linéaire

On s'intéresse dans un premier temps à la réponse linéaire du système. Suivant la même démarche que pour le cas du rotor éléments finis à trois disques présenté section 2.4.2, le calcul a été fait sur une base réduite par la technique de Craig et Bampton où 22 modes encastrés ont été retenus dans la réduction pour un total de 26 degrés de libertés généralisés. La courbe de réponse du noeud 90 (noeud où se situent le balourd et le contact) est montrée figure 5.4. On s'intéressera en particulier à la résonance principale située à environ 750 tr/min et correspondant au premier mode de flexion du rotor BP1. La déformée de la ligne d'arbres à cette vitesse de rotation peut être observée figure 5.5.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

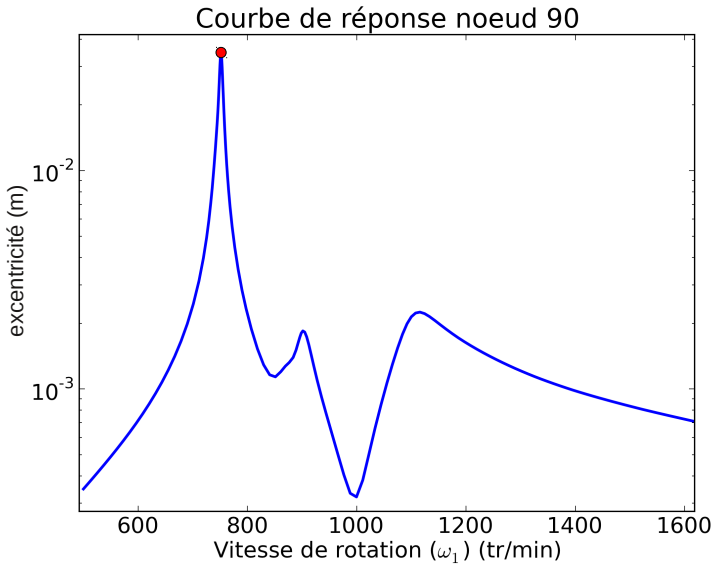


FIGURE 5.4: Courbe de réponse du GTA1300 sur la plage de fréquence de 500 tr/min à 1600 tr/min par la HBM.

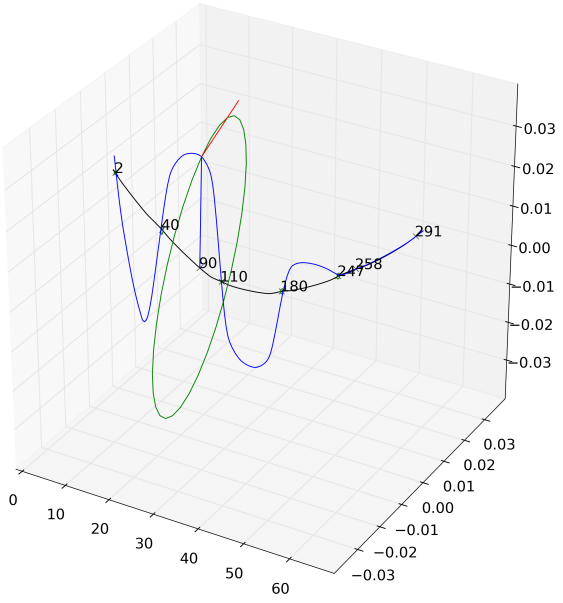


FIGURE 5.5: Déformée de la ligne d'arbres au premier pic de résonance du noeud 90 (≈750 tr/min).

5.3 Réponse non linéaire

Pour les calculs non linéaires, conformément aux modèles de contact déjà développés précédemment chez EDF, le diaphragme est modélisé par un stator fixe et le contact

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

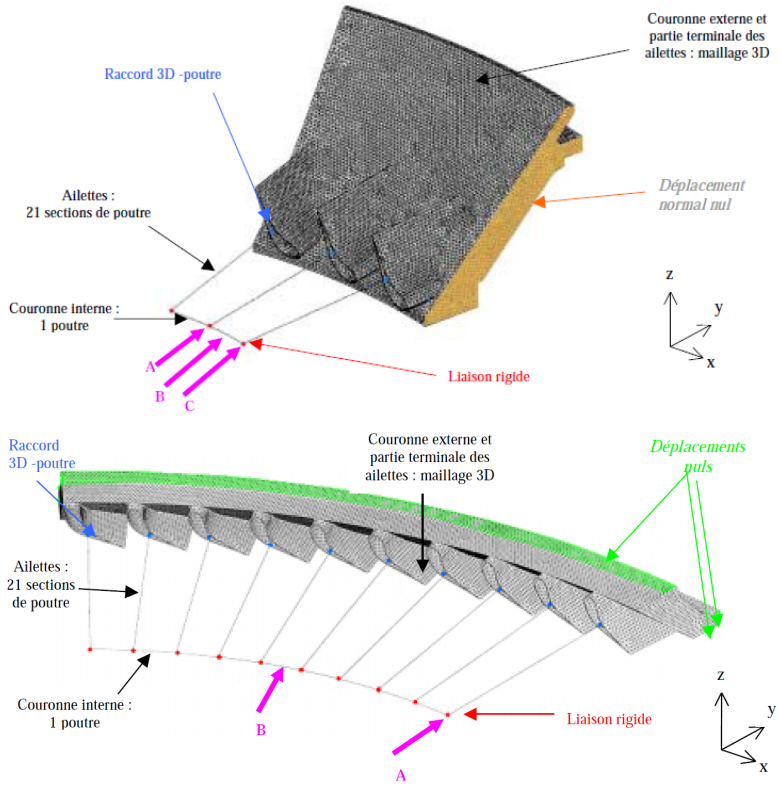


FIGURE 5.6: Maillage et conditions aux limites. Aubages 9 et 10 fixes.

est traité par pénalisation avec modèle de frottement de Coulomb (comme dans le cas du rotor académique à 3 disques). L'ensemble constitué de la couronne intérieure (CI), de la couronne extérieure (CE) et des aubages est donc réduit à une rigidité de contact équivalente et à un coefficient de frottement équivalent. Cette rigidité équivalente a été déterminée préalablement par EDF par des calculs statiques éléments finis où les aubes constituant le diaphragme, la CI et la CE sont modélisées avec des éléments poutres et éléments 3D (voir figure 5.6). Le ratio entre une force statique et le déplacement résultant donne la rigidité de contact équivalente.

Afin de prendre en compte les incertitudes inhérentes à cette procédure simplifiée plusieurs valeurs de raideur, autour de la valeur calculée, seront considérées. Pour les mêmes raisons, trois simulations avec différents coefficients de frottement seront confrontées dans cette section.

Les études effectuées par EDF par le passé ont montré, à partir de calculs temporels, que l'intégrité de la ligne d'arbre n'est pas remise en cause dans les conditions qui ont été exposées. Il s'agit de montrer que la méthodologie basée sur la HBM permet d'obtenir des résultats comparables dans des délais plus courts.

Dans toute la suite, les calculs (HBM et intégration temporelle) ont été effectués sur base réduite avec, comme dans le cas linéaire, 26 degrés de libertés généralisés. Une étude de convergence préalable a montré qu'une limitation à un maximum de 16 harmoniques

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

(borne supérieure) était suffisant pour obtenir convergence des résultats HBM. Les calculs par intégration temporelle sont, pour rappel, effectués en deux passes. La première passe est une montée en vitesse progressive par paliers de 2 tr/min. A chaque palier, les conditions initiales en vitesse et déplacement sont récupérées des conditions finales du palier précédent et la vitesse de rotation est maintenue constante. Alors, 100 révolutions rotor sont simulées afin d'atteindre le régime stabilisé. Une fois les 100 révolutions simulées, on passe au palier de vitesse supérieur et ainsi de suite. La seconde passe fonctionne sur le même principe mais en descente en vitesse. Les deux passes sont nécessaires afin de reproduire la plus grande part possible de la courbe de réponse calculée par HBM à des fins de validation (validation de la solution HBM et de sa stabilité).

5.3.1 Influence de la rigidité de contact

Dans tous les cas présentés dans cette sous-section, le coefficient de frottement est réglé à 0,2 et le jeu radial est de 8mm. Le contact est donc attendu aux alentours de la première fréquence de résonance à environ 750 tr/min. Quatre paramètres de pénalisation différents ont été testés. La rigidité de pénalisation va ainsi, suivant le modèle, de $2{,}551.10^{9}\text{N.m}^{-1}$ à $1{,}277.10^{10}\text{N.m}^{-1}$ en passant par $5{,}376.10^{9}\text{N.m}^{-1}$ et $7{,}634.10^{9}\text{N.m}^{-1}$.

5.3.1.1 Cas n°1

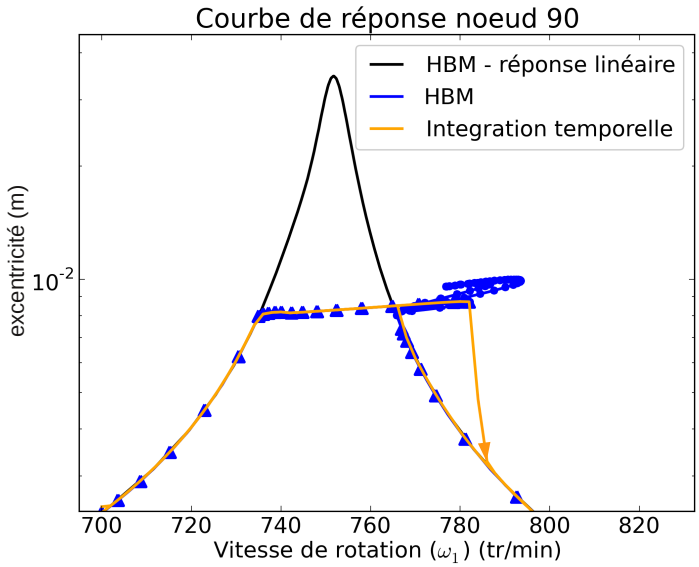


FIGURE 5.7: Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°1 : $2{,}551.10^{9}\text{N.m}^{-1}$) sur la plage de fréquence de 700 tr/min à 800 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle.

Le premier cas d'étude est celui de la rigidité de pénalisation la plus faible ($2{,}551.10^{9}\text{N.m}^{-1}$). La courbe de réponse du système au noeud 90 peut être visualisée

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

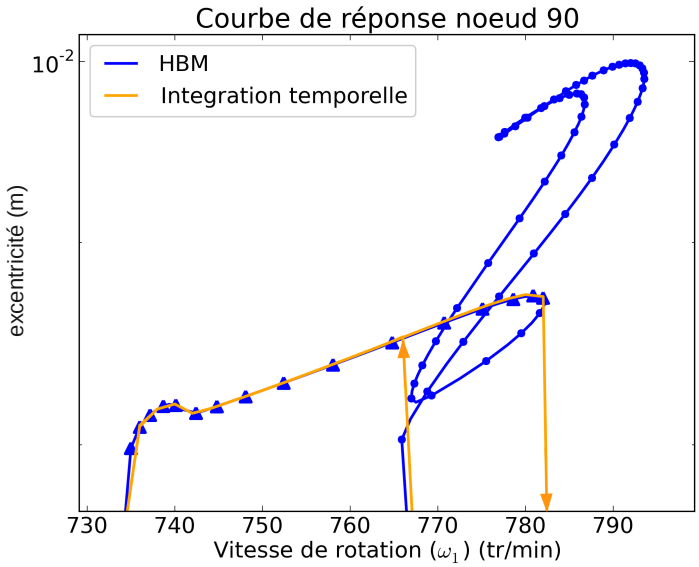


FIGURE 5.8: Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°1 : $2{,}551.10^{9}$N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle.

figures 5.7 et 5.8. Cette dernière est similaire à ce qui avait pu être observé dans le cas du rotor académique à trois disques. Globalement, on observe logiquement une rigidification du système qui se traduit par un aplatissement du pic de résonance et un décalage de cette dernière vers des fréquences plus élevées.

Plusieurs phénomènes physiques sont mis en évidence le long de la branche solution. Tout d'abord, entre 735 tr/min et 740 tr/min environ, un phénomène stable de contact partiel périodique est mis en lumière. Lors de ce mouvement, deux contacts par révolution ont lieu toujours au même endroit du stator (voir figure 5.9 pour illustration). A des vitesses de rotation plus élevées (de 740 tr/min à 782 tr/min environ) c'est un phénomène de contact annulaire complet en précession directe qui est capté (voir figure 5.10). Ce phénomène est présent sous forme stable et sous forme instable, la limite entre ces deux zones de stabilité se trouve au niveau du point de rebroussement (à environ 788 tr/min). On trouve enfin une zone de contact partiel instable avec également deux contacts rotor-diaphragme par révolution dont l'illustration est montrée figure 5.11.

L'évolution du nombre d'harmoniques peut être observée figure 5.12. On constate clairement que le phénomène de contact annulaire complet est spectralement pauvre puisque seulement trois composantes fréquentielles sont nécessaires pour une représentation exacte du phénomène. Seize harmoniques (le maximum autorisé pour cette simulation) ont été utilisées pour le calcul des mouvements de contact partiel. Une plus grande richesse spectrale est effectivement provoquée par la discontinuité du contact au cours du mouvement.

La solution HBM ainsi que sa stabilité sont validées par le calcul par intégration temporelle. La courbe de réponse temporelle se superpose parfaitement à celle obtenue

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

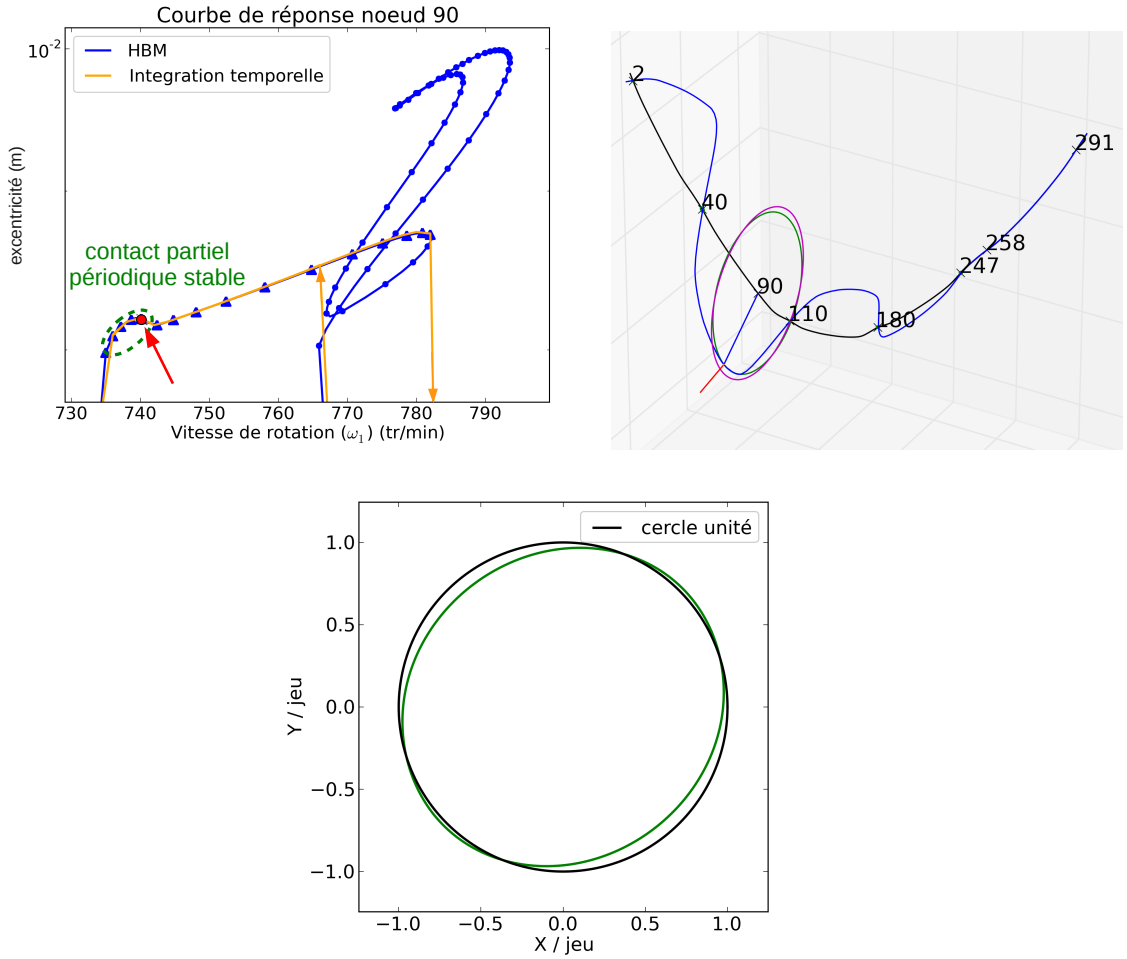


FIGURE 5.9: Déformée de la ligne d'arbre à environ 740 tr/min. Orbite du noeud 90.

par HBM (partie calculée comme stable uniquement). On observe le même phénomène d'hystérésis entre la montée en vitesse et la descente en vitesse que dans le cas du rotor de Jeffcott ou que dans le cas du rotor à trois disques étudiés dans les chapitres précédents. Un comparatif des performances entre HBM et intégration temporelle est donné table 5.1. Les résultats affichés ne prennent pas en compte le temps nécessaire pour la mise en données du problème. Pour ne pas fausser les résultats, le temps requis pour appliquer la réduction de modèle (21 secondes dans cet exemple) n'est pas non plus comptabilisé à cause d'un manque notable d'optimisation de cette procédure dans l'état actuel de la maquette. Dans le cas de l'intégration temporelle, la montée et la descente en vitesse prennent sensiblement le même temps de calcul (environ 1500 secondes) pour un total d'un peu moins de 3000 secondes. Le calcul HBM a quant à lui duré 71 secondes dont 12 secondes pour le calcul de stabilité en utilisant l'algorithme de Newmark 1 passe (voir section 3.2.4). La HBM se montre alors environ 42 fois plus rapide que le calcul par intégration temporelle. Pour information, le même calcul HBM sur base physique (sans

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

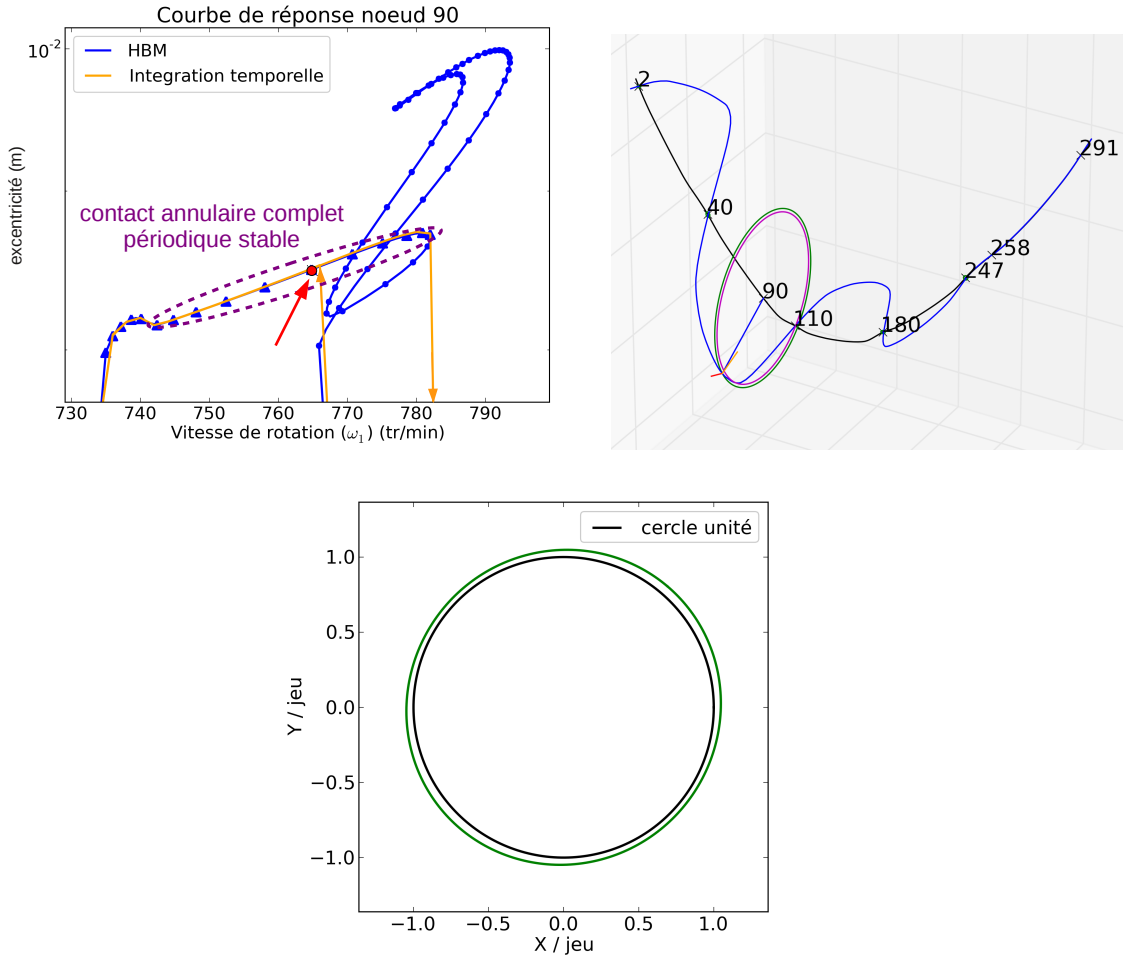


FIGURE 5.10: Déformée de la ligne d'arbre à environ 765 tr/min. Orbite du noeud 90.

réduction de modèle) a pris 442 secondes mais sans le calcul de stabilité qui, avec les quelque 1200 degrés de liberté, est alors extrêmement lourd.

Intégration temporelle			HBM			Gain
montée	descente	total	solution	stabilité	total	
1480s	1500s	2980s	59s	12s	71s	42

TABLE 5.1: Comparaison temps de calcul entre HBM et intégration temporelle.

5.3.1.2 Cas n˚2, n˚3 et n˚4

Dans le second cas étudié, la rigidité de contact est plus élevée que dans le premier cas. La courbe de réponse du système est montrée figure 5.13. Qualitativement la courbe

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

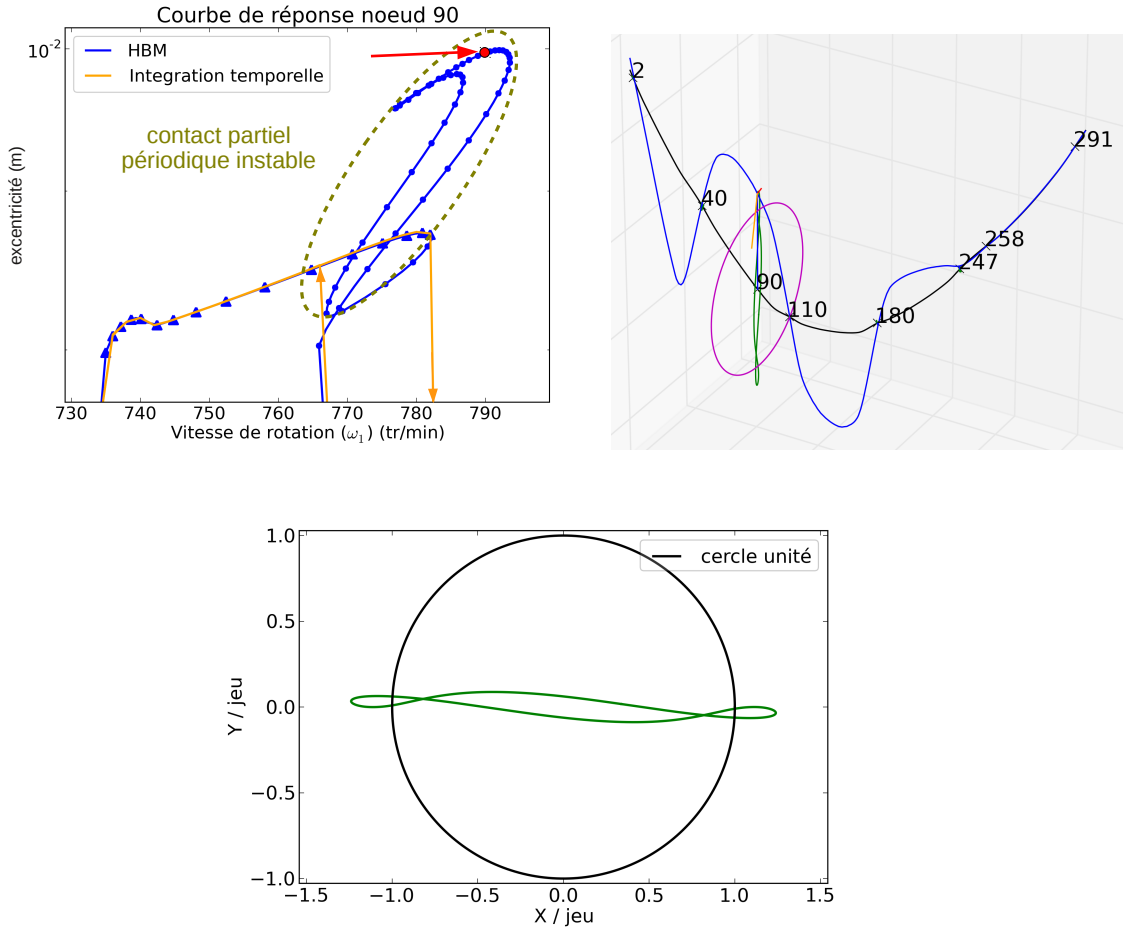


FIGURE 5.11: Déformée instable de la ligne d'arbre à environ 788 tr/min. Orbite du noeud 90.

est très similaire à celle du premier cas. On retrouve les mêmes phénomènes physiques dans le même ordre d'apparition avec la même stabilité. Quantitativement, on remarquera simplement que l'amplitude des déplacement est plus faible que dans le premier cas, ce qui est cohérent avec le fait que la rigidité de contact soit plus élevée (la courbe de réponse du cas n°1 est superposée en gris pour comparaison).

Le troisième cas étudié présente une rigidité du stator encore accrue par rapport aux deux précédents exemples. Ici aussi, les choses sont qualitativement les mêmes. Quantitativement, on note la même évolution des résultats, c'est à dire une légère diminution de l'amplitude des déplacements (la courbe de réponse du cas n°2 est superposée en gris pour comparaison).

Les conclusions sont les mêmes pour le dernier cas de figure où la rigidité de contact est alors maximale. La maquette HBM développée montre ici sa robustesse et sa capacité à faire face à des non linéarités de plus en plus fortes. Dans tous les cas, le calcul HBM est validé par le calcul par intégration temporelle. Les temps de calcul en HBM ou en

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

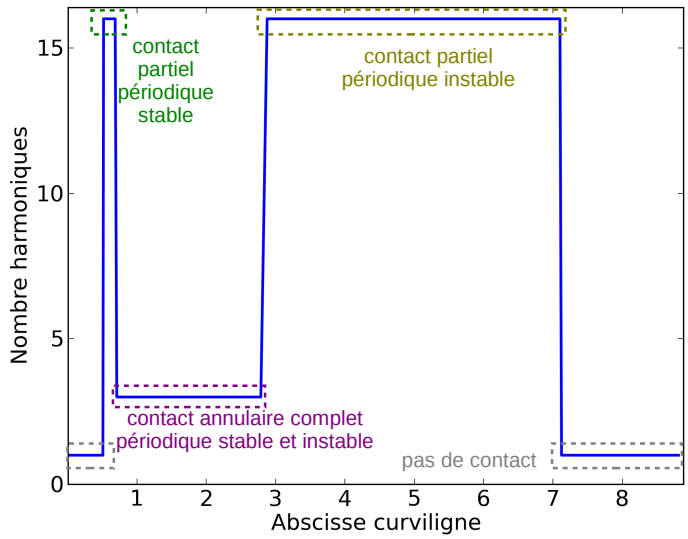


FIGURE 5.12: Evolution du nombre d'harmoniques en fonction de l'abscisse curviligne. Mise en évidence des différents phénomènes physiques.

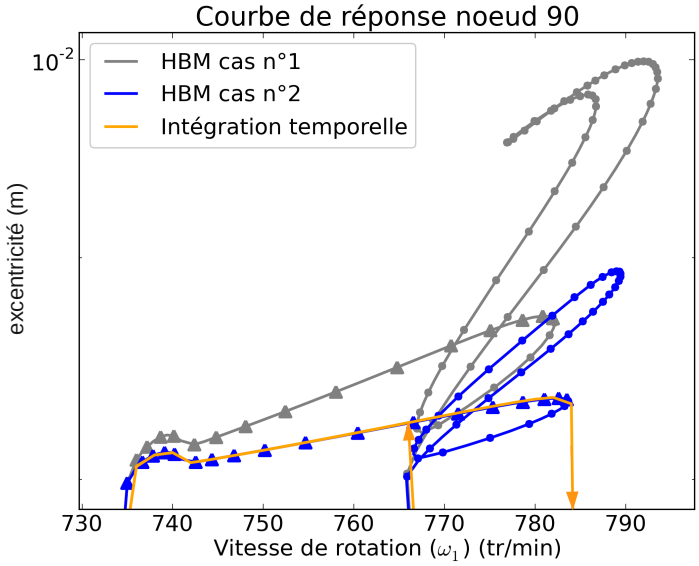


FIGURE 5.13: Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°2 : 5,376.10^9N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle.

intégration temporelle sont sensiblement les mêmes que dans le premier cas.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

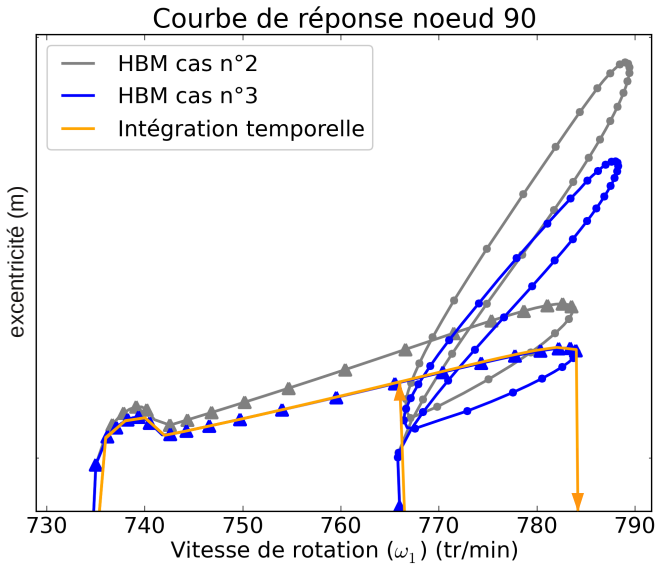


FIGURE 5.14: Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°3 : 7,634.10^9N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle.

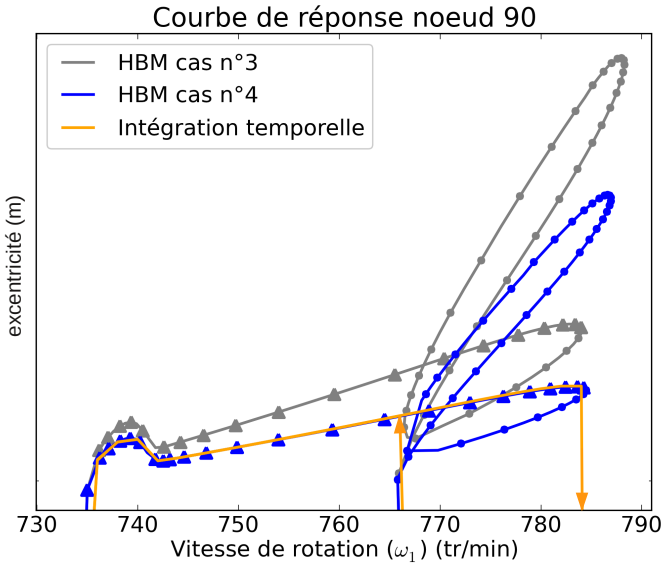


FIGURE 5.15: Courbe de réponse du GTA1300 (cas n°4 : 1,277.10^{10}N.m^{-1}) sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min. Comparaison HBM avec intégration temporelle.

5.3.2 Influence du coefficient de frottement

Dans cette section c'est le coefficient de frottement qui varie de 0,1 à 0,3. La rigidité de contact est prise égale à 5,376.10^9N.m^{-1} correspondant au cas n°2 de la section précédente.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

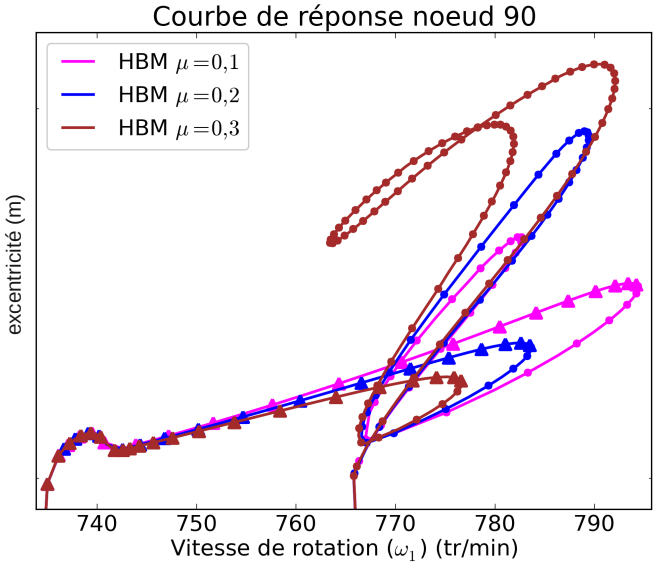


FIGURE 5.16: Courbe de réponse du GTA1300 sur la plage de fréquence de 730 tr/min à 790 tr/min avec différents coefficients de frottement.

La figure 5.16 montre les courbes de réponse obtenues pour $\mu = 0,1$, $\mu = 0,2$ et $\mu = 0,3$. Ici, contrairement au cas du rotor académique à trois disques, la branche solution en contact annulaire complet ne perd pas sa stabilité avec l'augmentation du coefficient de frottement. Ainsi, que ce soit avec un coefficient de frottement relativement faible ($\mu = 0,1$) ou relativement élevé ($\mu = 0,3$), la physique des phénomènes observés ne change pas qualitativement.

La partie de la courbe solution correspondant au contact partiel périodique stable (entre 735 tr/min et 740 tr/min environ) semble très peu affectée par le changement de coefficient de frottement. En revanche, l'influence du frottement sec est davantage marquée sur le mouvement de contact annulaire complet. A mesure que μ augmente, on observe une diminution de l'amplitude ainsi qu'un raccourcissement de la partie de la branche solution correspondant. En effet, le point de rebroussement correspondant au changement de stabilité de ce mouvement passe de 795 tr/min pour $\mu = 0,1$ à 775 tr/min environ pour $\mu = 0,3$. On observe donc, sur cette partie de la réponse, une augmentation de la dissipation énergétique causée par le frottement.

La partie instable de la courbe correspondant à du contact partiel est également modifiée par l'augmentation du frottement mais se traduit cette fois-ci par un rallongement de la branche solution correspondant à ce mouvement. Ces solutions restent néanmoins instables et donc impossibles à obtenir dans la réalité.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

5.4 Conclusion

La faisabilité de l'utilisation de la méthode de la balance harmonique sur un cas industriel a ici été démontrée. Les résultats donnés par la balance harmonique concordent parfaitement avec ceux donnés par intégration temporelle tout en s'exécutant 40 fois plus rapidement environ.

Au niveau des phénomènes physiques pour ce cas de figure réglementaire, quels que soient la rigidité ou le coefficient de frottement utilisés, apparaissent les mouvements périodiques de contact partiel stable et de contact annulaire complet en précession directe stable. Des phénomènes de contact périodique partiel de plus grande amplitude sont révélés par la HBM mais ces derniers sont instables. Aucun phénomène quasi-périodique n'a été capté. La méthodologie basée sur la méthode de balance harmonique montre donc ici sa robustesse, sa rapidité et sa capacité à traiter des problèmes industriels réels.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Conclusions et perspectives

Conclusion générale

Dans le cadre de cette thèse nous avons développé une méthode numérique rapide pour la simulation de la dynamique d'ensemble des machines tournantes dans les situations de fort balourd et de contact rotor-stator. Il a été montré que lors de telles situations, une grande variété de phénomènes physiques peut apparaître. La solution stabilisée du système peut-être périodique, quasi-périodique voire chaotique suivant les conditions. Si on exclut le comportement chaotique, les trois types de phénomènes qui sont fréquemment rencontrés sont :

- Le contact annulaire complet (ou partiel) périodique
- Le contact partiel quasi-périodique
- Le phénomène de précession inverse quasi-périodique

Le soucis de reproduction de ces phénomènes a été au cœur des développements réalisés dans le cadre d'une démarche efficace, compatible avec une utilisation industrielle.

La rapidité d'exécution de la méthode de résolution qui a été mise au point est le résultat d'une double démarche.

Premièrement, un travail sur la simplification du modèle de ligne d'arbre a permis une première réduction du nombre de degrés de libertés. La ligne d'arbre est pour cela modélisée par une succession de poutres de Timoshenko. Cette ensemble de poutres contient l'intégralité des degrés de liberté du système. Les roues aubées sont alors modélisées par des ajouts de masses et d'inerties sur les nœuds concernés du maillage. La non linéarité de contact est localisée autour d'un nœud. Le stator (circulaire et infiniment rigide) est modélisé par une loi de contact unilatérale avec jeu et traitée par pénalisation couplée à une loi de friction de type Coulomb. Le contact se fait donc entre un nœud et une ligne géométrique. Il a été montré que le nombre total de degrés de liberté du système peut davantage être réduit grâce à une méthode de réduction de modèle de type Craig et Bampton qui, bien qu'ancienne, se montre bien adaptée à cette problématique où les non linéarités sont localisées. En effet, dans la technique de Craig et Bampton, les degrés de liberté non linéaires sont conservés dans la base physique ce qui facilite le traitement des efforts non linéaires. Il a été montré que seulement une dizaines de modes encastrés sont suffisants pour représenter fidèlement la réponse non linéaire du système pour des vitesses de rotation du même ordre de grandeur que la vitesse associée à la première fréquence de résonance. La taille du système à résoudre s'en trouve ainsi grandement réduite.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

En parallèle, a été développée une technique de résolution accélérée des équations. La technique adoptée est celle de la balance harmonique dont le principe est de transformer le système d'équations différentielles en un système algébrique dans le domaine fréquentiel. Cette technique, couplée à une méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc, permet de mener à bien des études paramétriques et donc de suivre l'évolution de la réponse en fonction de la vitesse de rotation de la machine tout en suivant les branches solutions au travers des points de rebroussement. Cette méthode a été davantage optimisée grâce à diverses procédures comme l'adaptation automatique du pas de continuation, la sélection automatique des harmoniques ou bien l'adimensionnement numérique des équations. Cette combinaison d'algorithmes s'est montrée fiable et robuste pour obtenir les réponses périodiques de modèles de rotor réalistes.

Bien que fiable et rapide, nous avons vu que la méthode de la balance harmonique convergeait vers les solutions stables ainsi que les solutions instables. Pour palier cet inconvénient, de nombreuses techniques de détermination de la stabilité des solutions périodiques existent. Cependant, il s'est avéré qu'elles montrent toutes rapidement leurs limites que ce soit en termes de difficulté d'implémentation, de coût de calcul (souvent très élevé) ou de précision. Ainsi, un recensement et un comparatif des différentes techniques existantes a permis d'en révéler une en particulier qui offre une bonne précision tout en étant ayant un surcoût raisonnable en terme de temps de calcul et de difficulté d'implémentation. Toutes ces techniques d'évaluation de stabilité permettent non seulement de déterminer si une solution est stable ou instable mais permettent également de connaitre le type de bifurcation. Notamment, elles permettent de détecter l'apparition d'une bifurcation de Hopf secondaire souvent synonyme de l'apparition d'une seconde pulsation fondamentale dans la réponse du système, ce qui rend la réponse non plus périodique mais quasi-périodique.

Un comportement quasi-périodique est un comportement faisant intervenir une seconde pulsation (en plus de celle liée à la vitesse de rotation du rotor) issue non pas d'une seconde excitation externe mais issue d'une excitation interne auto-entretenue générée par le contact-frottant. La méthode de la balance harmonique a du être adaptée pour pouvoir reproduire ces phénomènes. La difficulté vient du fait que cette seconde fréquence fondamentale est a priori inconnue et doit être déterminée en même temps que le reste des inconnues du problème.

Enfin, il a été montré que l'ensemble de cette stratégie est appliquable à un modèle de rotor industriel réel. L'algorithme développé s'est très bien comporté face à l'augmentation du nombre de degrés de liberté comparativement aux petits modèles académiques considérés auparavant. Une rapide étude paramétrique a permis de mettre en évidence des phénomènes périodiques ne contact partiel et de contact annulaire complet ne compromettant pas l'intégrité de la ligne d'arbres.

Perspectives

Les suites de ces travaux peuvent se partager en trois catégories :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

– L'amélioration de l'outil numérique. La maquette numérique qui a été développée pendant ces travaux de thèse pourrait bénéficier encore de nombreuses améliorations et compléments. La première d'entre elle consisterait à automatiser la bascule entre la HBM périodique et la HBM quasi-périodique et mettre à profit les techniques existantes d'embranchement (branching) afin de se dispenser des fastidieux calculs temporels pour initialiser la HBM quasi-périodique. Le calcul de la stabilité de ces réponses quasi-périodiques devra idéalement également être implémenté. Enfin, des optimisations purement informatiques peuvent être envisagées. Ces optimisations consisteraient à passer tout ou partie du code (actuellement en langage python) en langage compilé (C ou Fortran) pour gagner en performances.
– Enrichissement du modèle. Une fois l'outil numérique finalisé, le modèle de rotor pourra être enrichi. D'autres modèles de contact et d'autres modèles de stator pourront être testés. Aussi, la non linéarité des paliers est un élément important à modéliser et à prendre en compte. Cette prise en compte pourra dans un premier temps se faire par l'intermédiaire de modèles analytiques de paliers infiniment courts ou longs. Dans un second temps, ces modèles simplifiés pourront être remplacés par des modèles plus évolués et plus proches de la réalité. Dans cet objectif, des travaux effectués par le passé à EDF pourront être mis à profit. Ces travaux ont permis de précalculer (à partir de simulations numériques transitoires) de façon discrétisée les rigidités et amortissement équivalents des paliers réels des turbines en fonction de la position et de la vitesse de la ligne d'arbre à l'intérieur des ces paliers.
– Comparaison numérique expérimentale. Les résultats numériques obtenus devraient être confrontés avec les résultats expérimentaux donnés par la banc d'essais EURoPE situé dans les locaux d'EDF. Ce banc modulable, dont la ligne d'arbre mesure environ 3 mètres de long, permet de tester une grande variété de situations de contact rotor-stator aussi bien en ralentissement qu'à vitesse constante.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Annexe A

Amélioration avec la méthode MTA

La méthode MTA consiste à ajouter à la base ϕ un certain nombre de vecteurs qui sont calculés de la façon suivante. On part de l'équation d'équilibre (1.1) et que l'on réécrit sous la forme suivante.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x})\mathbf{p}(t)$$

avec $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ qui représente la composante spatiale des chargements et $\mathbf{p}(t)$ qui représente la composante temporelle. $\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$ est de dimension $n \times n_c$ avec n_c le nombre de chargements spatiaux. $\mathbf{p}(t)$ est de dimension $n_c \times 1$. On écrit $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_t$ avec $\mathbf{R}_s$ la composante des efforts qui est représentable par la base ϕ et $\mathbf{R}_t$ la composante non représentable. Ainsi le problème statique est :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{R}_0$$

On définit $\mathbf{R}_s$ comme suit :
$\mathbf{R}_s = \mathbf{K}\phi\mathbf{q}$
d'où
$\phi^T\mathbf{K}\phi\mathbf{q} = \phi^T\mathbf{R}_s$
Mais comme $\mathbf{R}_t$ est la partie non représentable par ϕ alors :
$\underbrace{\phi^T\mathbf{K}\phi}_{\omega^2}\mathbf{q} = \phi^T\mathbf{R}_s + \underbrace{\phi^T\mathbf{R}_t}_{=\mathbf{0}} = \phi^T\mathbf{R}_0$
d'où
$\mathbf{q} = (\omega^2)^{-1}\phi^T\mathbf{R}_0$
donc
$\mathbf{R}_s = \mathbf{K}\phi(\omega^2)^{-1}\phi^T\mathbf{R}_0$
Ce qui, d'après 1.3, donne
$\mathbf{R}_s = \mathbf{M}\phi\underbrace{(\omega^2)(\omega^2)^{-1}}_{=\mathbf{Id}}\phi^T\mathbf{R}_0$
d'où finalement,
$\mathbf{R}_s = \mathbf{M}\phi\phi^T\mathbf{R}_0$

Pour calculer les vecteurs à ajouter à la base ϕ, on procède donc de la façon suivante : On résout le problème statique suivant :

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{R}_t$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

On calcule ensuite les matrices suivantes :

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}$$

On résout ensuite le problème aux valeurs propres suivant :

$$\overline{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{M}}\mathbf{Q}\overline{\omega}^2$$

Les vecteurs à ajouter à la base peuvent maintenant être calculés :

$$\varphi = \mathbf{X}\mathbf{Q}$$

La nouvelle base de projection ainsi formée est :

$$\tilde{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n_c}]$$

Cette technique calcule donc autant de vecteurs additionnels qu'il y a de chargements spatiaux indépendants. Une fois que le problème réduit est résolu, on recalcule les déplacements physiques exactement de la même façon qu'avec une projection modale standard. Les nouveaux vecteurs φ ne dépendent pas de la composante temporelle du chargement et n'ont donc pas à être recalculés à chaque pas de temps. L'utilisation de la MTA ne dispense cependant pas pour autant de basculer à chaque pas de temps entre l'espace physique et l'espace projeté afin de pouvoir calculer les chargements.

La technique de Craig et Bampton

La réduction de modèle par la méthode de Craig et Bampton se fait en plusieurs étapes. Premièrement, il faut permuter les lignes et les colonnes des matrices **K**, **M** et **C** suivant qu'elles sont associées à des ddl intérieurs ou des ddl extérieurs.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ie} \\ \mathbf{M}_{ei} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ie} \\ \mathbf{C}_{ei} & \mathbf{C}_{ee} \end{bmatrix}$$

Les indices *i* correspondent aux ddl intérieurs et les indices *e* correspondent aux ddl extérieurs (qui sont généralement en nombre beaucoup plus faible que les ddl intérieurs).

La seconde étape consiste à calculer des modes linéaires qui formeront la base de projection. Dans la méthode de Craig et Bampton, il existe deux types de modes.

– *Les modes statiques.* Les modes statiques correspondent aux déformées du domaine lorsque l'on impose un déplacement unitaire à un des ddl extérieurs alors que tous les autres ddl extérieurs sont bloqués. Il existe donc autant de modes statiques que de ddl extérieurs. La base contenant les modes statiques est notée Φ_S. Cette base est la solution du système suivant.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_S \\ \mathbf{Id} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\Phi_S = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ie}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

– *Les modes encastrés.* Les modes encastrés correspondent au modes libres de la structure ayant ses ddl extérieurs bloqués. Les modes encastrés sont donc solutions du problème aux valeurs propres suivant.

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ie} \\ \mathbf{M}_{ei} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi_E \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En réalité, pour avoir une réduction de modèle effective, on tronquera la base Φ_E afin de ne conserver qu'un nombre $\tilde{N}$ de modes (dont les fréquences propres seront les plus faibles). On note $\Phi_{E,\tilde{N}}$ cette base tronquée.

La matrice de projection peut ainsi être contruite en concaténant les modes statiques et la partie des modes encastrés que l'on aura conservé. La base de projection est donc.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_S & \Phi_{E,\tilde{N}} \\ \mathbf{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

La projection du système s'opère alors comme décrit plus haut (voir équations (1.1) et (1.2)). On remarque alors effectivement qu'une partie des ddl restent physiques. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \Phi \mathbf{q} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_S & \Phi_{E,\tilde{N}} \\ \mathbf{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi_S \mathbf{q}_a + \Phi_{E,\tilde{N}} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_a \end{pmatrix} \\ \text{d'où } \mathbf{x}_e &= \mathbf{q}_a \end{aligned}$$

On a bien conservation des ddl extérieurs.

La technique de Craig et Martinez

Si on note Φ_{lib} la base des modes propres de la structure alors :

$$\mathbf{x} = \Phi_{\text{lib}} \mathbf{q} + \underbrace{RF}_{\substack{\text{terme de correction} \\ \text{pseudo-statique}}} \tag{5.1}$$

avec,
$\mathbf{R} = \Phi_{\text{lib}} (\underbrace{\Phi_{\text{lib}}^T \mathbf{K} \Phi_{\text{lib}}}_{\Omega})^{-1} \Phi_{\text{lib}}^T$
R est appelé terme de flexibilité statique résiduelle. Si on réécrit l'équation (5.1) en termes de ddl intérieurs et extérieurs on a :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{\text{lib},i} \\ \Phi_{\text{lib},e} \end{pmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{ie} \\ \mathbf{R}_{ee} \end{pmatrix} \mathbf{F}_e \qquad \text{car } \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

Lorsque l'on injecte la seconde ligne de (5.2) dans la première ligne de cette même équation on aboutit après calcul à :

$$\mathbf{x}_i = (\Phi_{\text{lib},i} - \mathbf{R}_{ie}\mathbf{R}_{ee}^{-1}\Phi_{\text{lib},e})\mathbf{q} + \mathbf{R}_{ie}\mathbf{R}_{ee}^{-1}\mathbf{x}_e$$

Ceci s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_{\text{lib},i} - \mathbf{R}_{ie}\mathbf{R}_{ee}^{-1}\Phi_{\text{lib},e} & \mathbf{R}_{ie}\mathbf{R}_{ee}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{pmatrix}}_{\Phi} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix}$$

Φ constitue alors la base de projection de la méthode de Craig et Martinez. On a bien conservation des ddl extérieurs.

Les méthodes basées sur la SVD

Principe théorique Soit $\mathbf{B}$ une matrice à coefficients réels de taille $n \times m$. La décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{B}$ consiste à écrire $\mathbf{B}$ sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$$

avec $\mathbf{U}$ matrice unitaire de dimension $n \times n$, $\mathbf{V}$ matrice unitaire de dimension $m \times m$ et Σ matrice $n \times m$ dont les coefficient diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres sont nuls (matrice « diagonale »). La matrice Σ contient les valeurs singulières de $\mathbf{B}$. Cette décomposition a comme propriété d'exister pour toute matrice $\mathbf{B}$ mais n'est pas unique. Par convention, on organise la matrice Σ de telle sorte à ce que les valeurs singulières soient classées par valeurs décroissantes, cependant les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ ne sont pas uniques.

Utilisation de la SVD pour la réduction de modèle Il est possible de faire de la réduction de modèle en utilisant la décomposition en valeurs singulières. Supposons que l'on connaisse l'état du système pour m pas de temps donnés (par exemple, on connait le vecteur déplacement $\mathbf{x}$ de tous les ddl pour les m premiers pas de temps), on peut alors former la matrice $\mathbf{B}$ de dimension $n \times m$ telle que :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m]$$

On peut ensuite effectuer une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{B}$. Cette décomposition est ensuite tronquée à l'ordre s ($s < \min(m,n)$), c'est à dire qu'on ne conserve que les s plus grandes valeurs singulières de Σ. Ceci aboutit à la matrice $\mathbf{B}_s$ suivante :

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{U}_s\Sigma_s\mathbf{V}_s^T$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

où $\mathbf{U}_s$ représente la troncature de $\mathbf{U}$ à ses s premières colonnes, $\mathbf{V}_s$ la troncature de $\mathbf{V}$ à ses s premières lignes. Σ_s est alors une matrice carrée diagonale ne contenant que les s plus grandes valeurs singulières de Σ. $\mathbf{B}_s$ est alors toujours de dimension $m \times n$ mais on prouve que c'est alors la meilleure approximation de $\mathbf{B}$ d'ordre s au sens de la norme de Frobenius [ANI 00]. Il est plus avantageux d'un point de vue temps de calcul de ne calculer que les s premières valeurs singulières de Σ plutôt que de faire la décomposition complète puis d'effectuer la troncature à l'ordre s. La matrice $\mathbf{B}_s$ contitue alors une base de projection du problème. Le problème réduit est alors :

$$\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_s\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s\mathbf{q} = \mathbf{F}_s$$

avec, $\mathbf{M}_s = \mathbf{B}_s^T\mathbf{M}\mathbf{B}_s$, $\mathbf{C}_s = \mathbf{B}_s^T\mathbf{C}\mathbf{B}_s$, $\mathbf{K}_s = \mathbf{B}_s^T\mathbf{K}\mathbf{B}_s$ et $\mathbf{F}_s = \mathbf{B}_s^T\mathbf{F}$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Annexe B

Expression des éléments de la matrice jacobienne (dans le cas où les efforts non linéaires dépendent des déplacements et des vitesses :)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(0,0)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} dt \\
\mathbf{J}^{(0,2j-1)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \cos(k_j \omega t) - k_j \omega \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \sin(k_j \omega t) \right) dt \\
\mathbf{J}^{(0,2j)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \sin(k_j \omega t) + k_j \omega \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cos(k_j \omega t) \right) dt \\
\mathbf{J}^{(2i-1,0)} &= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \cos(k_i \omega t) dt \\
\mathbf{J}^{(2i,0)} &= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \sin(k_i \omega t) dt \\
\mathbf{J}^{(2i-1,2j-1)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \cos(k_j \omega t) - k_j \omega \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \sin(k_j \omega t) \right) \cos(k_i \omega t) dt \\
\mathbf{J}^{(2i-1,2j)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \sin(k_j \omega t) + k_j \omega \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cos(k_j \omega t) \right) \cos(k_i \omega t) dt \\
\mathbf{J}^{(2i,2j-1)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \cos(k_j \omega t) - k_j \omega \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \sin(k_j \omega t) \right) \sin(k_i \omega t) dt \\
\mathbf{J}^{(2i,2j)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{q}} \sin(k_j \omega t) + k_j \omega \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cos(k_j \omega t) \right) \sin(k_i \omega t) dt
\end{aligned}
$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Annexe C

Expression des éléments de la matrice jacobienne en quasi-périodique

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(0,0)} &= \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(0,2j-1)} &= \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(0,2j)} &= \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\sin(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(2i-1,0)} &= 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\cos(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(2i,0)} &= 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\sin(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(2i-1,2j-1)} &= 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)\cos(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(2i-1,2j)} &= 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\sin(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)\cos(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(2i,2j-1)} &= 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)\sin(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2 \\
\mathbf{J}^{(2i,2j)} &= 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\sin(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)\sin(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

Démonstration. Pour le premier terme :

$$
\mathbf{J}^{(0,0)} = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_0}
$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

d'après l'équation (4.9) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_0} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_0}\left(\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))dt_2dt_1\right)\\ &= \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{Q}_0}dt_2dt_1\\ &= \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}_0}dt_2dt_1\end{aligned}$$

or d'après l'équation (4.4) :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}_0} = \mathbf{1}$$

donc,

$$\mathbf{J}^{(0,0)} = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_0} = \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}dt_2dt_1 \quad \text{CQFD}$$

D'une façon similaire :

$$\mathbf{J}^{(0,2j-1)} = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_{2j-1}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_{2j-1}} = \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}_{2j-1}}dt_2dt_1$$

or toujours d'après l'équation (4.4) :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}_{2j-1}} = \cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)$$

d'où,

$$\mathbf{J}^{(0,2j-1)} = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Q}_{2j-1}} = \frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\cos(k_{j_1}\omega_1 t_1 + k_{j_2}\omega_2 t_2)dt_2dt_1 \quad \text{CQFD}$$

Pour le terme $\mathbf{J}^{(2i-1,0)}$,

$$\mathbf{J}^{(2i-1,0)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{2i-1}}{\partial \mathbf{Q}_0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{2i-1}}{\partial \mathbf{Q}_0} = 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))\cos(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)}{\partial \mathbf{q}}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}_0}}_{=\mathbf{1}}dt_2dt_1$$

d'où,

$$\mathbf{J}^{(2i-1,0)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{2i-1}}{\partial \mathbf{Q}_0} = 2\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}(t_1,t_2))}{\partial \mathbf{q}}\cos(k_{i_1}\omega_1 t_1 + k_{i_2}\omega_2 t_2)dt_2dt_1 \quad \text{CQFD}$$

Tous les autres termes de la jacobienne se démontrent de façon très analogue.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Bibliographie

[AHM 10] AHMAD S.
Rotor Casing Contact Phenomenon in Rotor Dynamics – Literature Survey. *Journal of Vibration and Control*, vol. 16, n° 9, 2010, p. 1369–1377.

[AHR 06] AHRENS J., AHAUS G.
Dynamic behavior of gas turbines considering large unbalance and blade rubbing. *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 25-28 September 2006*, 2006.

[ALA 85] ALAM M., NELSON H.
A blade Loss Response Spectrum for Flexible Rotor Systems. *Journal of engineering for gas turbines and power*, vol. 107, n° 1, 1985, p. 197–204.

[ALB 00] AL-BEDOOR B. O.
Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, n° 3, 2000, p. 627 - 645.

[AN 09] AN X., ZHOU J., XIANG X., LI C., LUO Z.
Dynamic response of a rub-impact rotor system under axial thrust. *Archive of Applied Mechanics*, vol. 79, n° 11, 2009, p. 1009–1018.

[ANI 00] ANINDYA C.
An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, vol. 78, 2000, p. 808–817.

[API 05] APIWATTANALUNGGARN P., SHAW S. W., PIERRE C.
Component Mode Synthesis Using Nonlinear Normal Modes. *Nonlinear Dynamics*, vol. 41, n° 1, 2005, p. 17–46.

[BAR 00] BARTHA A. R.
Dry Friction Backward Whirl of Rotors. Thèse de doctorat, Swiss federal institute of technology, 2000.

[BAT 08] BATAILLY A.
Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2008.

[BAT 10] BATAILLY A., LEGRAND M., CARTRAUD P., PIERRE C.
Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 26, 2010, p. 5546 - 5562.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[BAU 01] BAUCHAU O. A., NIKISHKOV Y. G.
An Implicit Transition Matrix Approach to Stability Analysis of Flexible Multi-Body Systems. *Multibody System Dynamics*, vol. 5, 2001, p. 279-301, Springer Netherlands. 10.1023/A :1011488504973.

[BEN 02a] BENTLY D. E., GOLDMAN P., YU J. J.
Full Annular RUB in Mechanical Seals, Part II : Analytical Study. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 8, n° 5, 2002, p. 329–336.

[BEN 02b] BENTLY D. E., YU J. J., GOLDMAN P., MUSZYNSKA A.
Full Annular RUB in Mechanical Seals, Part I : Experimental Results. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 8, n° 5, 2002, p. 319–328.

[BHA 09] BHATTACHARYA A. C.-D. W.
Dry-friction whirl and whip between a rotor and a stator : Effect of rotor-stator coupling due to seals and rotor rigid-body dynamics. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009 Orlando*, 2009.

[BLA 01a] BLADH R., CASTANIER M. P., PIERRE C.
Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks—Part I : Theoretical Models. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, n° 1, 2001, p. 89-99, ASME.

[BLA 01b] BLADH R., CASTANIER M. P., PIERRE C.
Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks—Part II : Application. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, n° 1, 2001, p. 100-108, ASME.

[BLA 02] BLADH R., PIERRE C., CASTANIER M. P., KRUSE M. J.
Dynamic Response Predictions for a Mistuned Industrial Turbomachinery Rotor Using Reduced-Order Modeling. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 124, n° 2, 2002, p. 311-324, ASME.

[BRA 91] BRACH R.
Mechanical Impact Dynamics : Rigid Body Collisions. Wiley, 1991.

[BRA 07] BRAUT S., ZIGULIC R., SKOBLAR A., STIMAC G., BUTKOVIC M., JOKIC M.
Dynamic Analysis of the Rotor-Stator Contact due to Blade Loss. *12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June18-21, 2007*, 2007.

[BUC 01] BUCHER I., EWINS D. J.
Modal analysis and testing of rotating structures. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 359, n° 1778, 2001, p. 61-96.

[BUT 07] BUTCHER E., LU R.
Order reduction of structural dynamic systems with static piecewise linear nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, vol. 49, n° 3, 2007, p. 375–399.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[CAM 89] CAMERON T. M., GRIFFIN J. H.
An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, n° 1, 1989, p. 149-154, ASME.

[CAR 98] CARDONA A., LERUSSE A., GÉRADIN M.
Fast Fourier nonlinear vibration analysis. *Computational Mechanics*, vol. 22, n° 2, 1998, p. 128–142.

[CHE 97] CHEN S.L. G.-M.
Finite element simulation of nonlinear transient response due to rotor-stator contact. *Engineering computations*, vol. 14-6, 1997, p. 591–603.

[CHE 10] CHEN G. LI C. G. W. D. Y.
Nonlinear dynamic analysis and experiment verification of rotor-ball bearings-support-stator coupling system for aeroengine with rubbing coupling faults. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 132-2, 2010, page (9 pages).

[CHI 07] CHILDS D. W., BHATTACHARYA A.
Prediction of Dry-Friction Whirl and Whip Between a Rotor and a Stator. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 129, n° 3, 2007, p. 355-362, ASME.

[CHO 87] CHOY F., PADOVAN J.
Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 113, n° 3, 1987, p. 529 - 545.

[CHO 94] CHOI Y.
Dynamics of rotor rub in annular clearance with experimental evaluation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 8-4, 1994, p. 404–413.

[CHO 01] CHOI Y., BAE C.
Nonlinear dynamic analysis of partial rotor rub with experimental observations. *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conference*, 2001.

[CHO 02] CHOI Y. S.
Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, n° 1, 2002, p. 191 - 198.

[CHU 81] CHUA L., USHIDA A.
Algorithms for computing almost periodic steady state response of non-linear systems to multiple input frequencies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, 1981, p. 953–971.

[CHU 97] CHU F., ZHANG Z.
Periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations of a rub-impact rotor system supported on oil film bearings. *International Journal of Engineering Science*, vol. 35, n° 10-11, 1997, p. 963 - 973.

[CHU 98] CHU F., ZHANG Z.
Bifurcation and chaos in a rub-impact jeffcott rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 210, n° 1, 1998, p. 1 - 18.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[CHU 05] CHU F., LU W.
Experimental observation of nonlinear vibrations in a rub-impact rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, n° 3-5, 2005, p. 621 - 643.

[CHU 07] CHU F., LU W.
Stiffening effect of the rotor during the rotor-to-stator rub in a rotating machine. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 308, n° 3-5, 2007, p. 758 - 766. Vibro-Impact Systems.

[COC 07] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M.
Méthode asymptotique numérique. Lavoisier, 2007.

[COL 03] COLE M., KEOGH P.
Asynchronous periodic contact modes for rotor vibration within an annular clearance. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 217, n° 10, 2003, p. 1101–1115.

[COL 08] COLE M. O.
On stability of rotordynamic systems with rotorstator contact interaction. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, vol. 464, n° 2100, 2008, p. 3353-3375.

[CON 11] CONG F., CHEN J., DONG G., HUANG K.
Experimental validation of impact energy model for the rubimpact assessment in a rotor system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, n° 7, 2011, p. 2549 - 2558.

[COU 09] COUDEYRAS N., NACIVET S., SINOU J.-J.
Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 328, n° 4-5, 2009, p. 520 - 540.

[CRA 68] CRAIG R., BAMPTON M.
Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, vol. 6, 1968, p. 1313–1319.

[CRA 90] CRANDALL S.
From whirl to whip in rotordynamics. *3rd International conference on Rotordynamics ifToMM, Lyon France*, 1990, p. 19 - 24.

[DAI 02] DAI X., JIN Z., ZHANG X.
Dynamic behavior of the full rotor-stop rubbing : numerical simulation and experimental verification. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, n° 5, 2002, p. 807 - 822.

[DEM 03] DEMAILLY D.
Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel : application à la dynamique rotor. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003.

[DIA 00] DIANGUI H.
Experiment on the characteristics of torsional vibration of rotor-to-stator rub in turbomachinery. *Tribology International*, vol. 33, n° 2, 2000, p. 75 - 79.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[DIC 97] DICKENS J. M., NAKAGAWA J. M., WITTBRODT M. J.
A critique of mode acceleration and modal truncation augmentation methods for modal response analysis. *Computers & Structures*, vol. 62, n° 6, 1997, p. 985 - 998.

[EDF] EDF R&D
. « Code_Aster : A general code for structural dynamics simulation under GNU GPL licence. http ://www.code-aster.org », 2001–.

[EDW 99] EDWARDS S., LEES A. W., FRISWELL M. I.
The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, n° 4, 1999, p. 767 - 778.

[FAU 03] FAUCHER V., COMBESCURE A.
A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n° 5-6, 2003, p. 509 - 533.

[FEN 02] FENG Z., ZHANG X.-Z.
Rubbing phenomena in rotor-stator contact. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 14, n° 2, 2002, p. 257 - 267.

[FER 05] FERREIRA J., SERPA A.
Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, n° 1-2, 2005, p. 133 - 149.

[FRI 77] FRIEDMANN P., HAMMOND C. E., WOO T.-H.
Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, n° 7, 1977, p. 1117–1136, John Wiley & Sons, Ltd.

[FRI 86] FRIEDMANN P. P.
Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity. *Computers &amp ; Mathematics with Applications*, vol. 12, n° 1, Part A, 1986, p. 131 - 148.

[FUM 97] FUMAGALLI M. A.
Modeling and measurement analysis of the contact interaction between a high speed rotor and its stator. Thèse de doctorat, Swiss Institute of Technology, 1997.

[GAB 11] GABALE A. P., SINHA S.
Model reduction of nonlinear systems with external periodic excitations via construction of invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, n° 11, 2011, p. 2596 - 2607.

[GAO 81] GAONKAR G. H., SIMHA PRASAD D. S., SASTRY D.
On Computing Floquet Transition Matrices of Rotorcraft. *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 26, n° 3, 1981, p. 56-61.

[GEN 04] GENDELMAN O. V.
Bifurcations of Nonlinear Normal Modes of Linear Oscillator with Strongly Nonlinear Damped Attachment. *Nonlinear Dynamics*, vol. 37, n° 2, 2004, p. 115–128.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[GRA 06] GRAPIS O., TAMUZS V., OHLSON N.-G., ANDERSONS J.
Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 290, n° 3-5, 2006, p. 910 - 927.

[GUS 07] GUSKOV M.
Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors. Etudes numériques et expérimentale. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007.

[GUS 08] GUSKOV M., SINOU J.-J., THOUVEREZ F.
Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics. *Mechanics Research Communications*, vol. 35, n° 8, 2008, p. 537 - 545.

[HAH 94] HAHN E. J., CHEN P. Y. P.
Harmonic Balance Analysis of General Squeeze Film Damped Multidegree-of-Freedom Rotor Bearing Systems. *Journal of Tribology*, vol. 116, n° 3, 1994, p. 499-507, ASME.

[HE 02] HE L., CHEN T., WELLS R. G., LI Y. S., NING W.
Analysis of Rotor-Rotor and Stator-Stator Interferences in Multi-Stage Turbomachines. *Journal of Turbomachinery*, vol. 124, n° 4, 2002, p. 564-571, ASME.

[HSU 72] HSU C. S.
Impulsive Parametric Excitation : Theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, n° 2, 1972, p. 551-558, ASME.

[IBR 09] IBRAHIM S., PATEL B., NATH Y.
Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 44, n° 10, 2009, p. 1073 - 1084.

[ISM 95] ISMEURT O.
Contribution à l'étude de l'influence du frottement rotor/stator sur le comportement dynamique des machines tournantes. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1995.

[JAU 10] JAUMOUILLÉ V., SINOU J.-J., PETITJEAN B.
An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems–Application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 19, 2010, p. 4048 - 4067.

[JIA 01] JIANG J., ULBRICH H.
Stability Analysis of Sliding Whirl in a Nonlinear Jeffcott Rotor with Cross-Coupling Stiffness Coefficients. *Nonlinear Dynamics*, vol. 24, n° 3, 2001, p. 269–283.

[JIA 04] JIANG D.
Nonlinear modal analysis based on invariant manifolds - application to rotating blade systems. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2004.

[JIA 05a] JIANG D., PIERRE C., SHAW S.
The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, n° 5, 2005, p. 729 - 746.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[JIA 05b] JIANG D., PIERRE C., SHAW S.
Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 288, n° 4-5, 2005, p. 791 - 812.

[JIA 09] JIANG J.
Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, n° 3, 2009, p. 351–361.

[JON] JONES E., OLIPHANT T., PETERSON P. et al.
. « Scipy : Open source scientific tools for Python. http ://www.scipy.org/ », 2001–.

[KER 09] KERSCHEN G., PEETERS M., GOLINVAL J., VAKAKIS A.
Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 1, 2009, p. 170 - 194. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.

[KIM 96] KIM Y. B., NOAH S. T.
Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 190, n° 2, 1996, p. 239 - 253.

[KIM 97] KIM Y. B., CHOI S. K.
A multiple harmonic balance method for the internal resonant vibration of a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 208, n° 5, 1997, p. 745 - 761.

[LAL 98] LALANNE M., FERRARIS G.
Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley and Sons, 1998.

[LAU 81] LAU S. L., CHEUNG Y. K.
Amplitude Incremental Variational Principle for Nonlinear Vibration of Elastic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, n° 4, 1981, p. 959-964, ASME.

[LAU 82] LAU S. L., CHEUNG Y. K., WU S. Y.
A Variable Parameter Incrementation Method for Dynamic Instability of Linear and Nonlinear Elastic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 49, n° 4, 1982, p. 849-853, ASME.

[LAU 83] LAU S. L., CHEUNG Y. K., WU S. Y.
Incremental Harmonic Balance Method With Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, n° 4a, 1983, p. 871-876, ASME.

[LAX 07] LAXALDE D.
Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon, 2007.

[LAX 09] LAXALDE D., THOUVEREZ F.
Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 322, n° 4-5, 2009, p. 1009 - 1025.

[LAZ 10] LAZARUS A., THOMAS O.
A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 338, 2010, p. 510 - 517.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[LEG 05] LEGRAND M.
Modèles de prédiction de l'intéraction rotor/stator dans un moteur d'avion. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2005.

[LEG 09] LEGRAND M., PIERRE C., CARTRAUD P., LOMBARD J.-P.
Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, n° 1-2, 2009, p. 366 - 391.

[LES 07] LESAFFRE N.
Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007.

[LIA 93] LIAW C. Y., KOH C. G.
Dynamic stability and chaos of system with piecewise linear stiffness. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 119, 1993, p. 1542-1558.

[LIN 90] LINGENER A.
Experimental investigation of reverse whirl of a flexible rotor. CNRS, Ed., *3rd International Conference on Rotordynamics*, 1990.

[MUS 89] MUSZYNSKA A.
Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery. *The Shock and Vibration Digest*, vol. 21-3, 1989, p. 3 - 11.

[MUS 95] MUSZYNSKA A., GOLDMAN P.
Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 5, n° 9, 1995, p. 1683 - 1704. Some Nonlinear Oscillations Problems in Engineering Sciences.

[MUS 05] MUSZYNSKA A.
Rotordynamics. Taylor & Francis Group, 2005.

[NAT 89] NATARAJ C. N. H.
Periodic solutions in rotor dynamic systems with nonlinear supports : A general approach. *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, vol. 111 (2), 1989, p. 187–193.

[NAY 94] NAYFEH A. H., NAYFEH S. A.
On Nonlinear Modes of Continuous Systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 116, n° 1, 1994, p. 129-136, ASME.

[PAR 04] PARTHASARATHY N. K.
An efficient algorithm for blade loss simulations applied to a high-order rotor dynamics problem. Master's thesis, Texas A&M University, 2004.

[PAT 09] PATEL T. H., DARPE A. K.
Coupled bending-torsional vibration analysis of rotor with rub and crack. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, n° 35, 2009, p. 740 - 752.

[PEE 09] PEETERS M., VIGUIÉ R., SÉRANDOUR G., KERSCHEN G., GOLINVAL J.-C.
Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 1, 2009, p. 195 - 216. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[PEN 09] PENNACCHI P., BACHSCHMID N., TANZI E.
Light and short arc rubs in rotating machines : Experimental tests and modelling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 7, 2009, p. 2205 - 2227.

[PER 01] PERNOT S. L. C.
A wavelet-galerkin procedure to investigate time-periodic systems : Transient vibration and stability analysis. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 245-5, 2001, p. 845–875.

[PER 03] PERNOT S. L. C.
A wavelet-balance method to investigate the vibrations of nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, vol. 32, 2003, p. 33–70.

[PES 00] PESHECK E.
Reduced order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2000.

[PES 01] PESHECK E., PIERRE C., SHAW S. W.
Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 33, n° 10-11, 2001, p. 1085 - 1097.

[PES 02a] PESHECK E., PIERRE C., SHAW S. W.
A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, n° 5, 2002, p. 971 - 993.

[PES 02b] PESHECK E., PIERRE C., SHAW S. W.
Modal Reduction of a Nonlinear Rotating Beam Through Nonlinear Normal Modes. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, n° 2, 2002, p. 229-236, ASME.

[PET 03] PETROV E. P., EWINS D. J.
Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks. *Journal of Turbomachinery*, vol. 125, n° 2, 2003, p. 364-371, ASME.

[PET 04] PETROV E., EWINS D.
State-of-the-art dynamic analysis for non-linear gas turbine structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 218, n° 3, 2004, p. 199–211.

[PET 06] PETROV E. P., EWINS D. J.
Effects of Damping and Varying Contact Area at Blade-Disk Joints in Forced Response Analysis of Bladed Disk Assemblies. *Journal of Turbomachinery*, vol. 128, n° 2, 2006, p. 403-410, ASME.

[PET 08a] PETROV E. P.
Explicit Finite Element Models of Friction Dampers in Forced Response Analysis of Bladed Disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 130, n° 2, 2008, page 022502, ASME.

[PET 08b] PETROV E. P.
A Sensitivity-Based Method for Direct Stochastic Analysis of Nonlinear Forced Re-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

sponse for Bladed Disks With Friction Interfaces. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 130, n° 2, 2008, page 022503, ASME.

[PET 09a] PETROV E. P.
Method for Sensitivity Analysis of Resonance Forced Response of Bladed Disks With Nonlinear Contact Interfaces. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 131, n° 2, 2009, page 022510, ASME.

[PET 09b] PETROV E.
Analysis of sensitivity and robustness of forced response for nonlinear dynamic structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 1, 2009, p. 68 - 86. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.

[POP 07] POPPRATH S., ECKER H.
Nonlinear dynamics of a rotor contacting an elastically suspended stator. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 308, n° 3-5, 2007, p. 767 - 784. Vibro-Impact Systems.

[QIN 04] QIN W., CHEN G., MENG G.
Nonlinear responses of a rub-impact overhung rotor. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 19, n° 5, 2004, p. 1161 - 1172.

[RAG 99] RAGHOTHAMA A., NARAYANAN S.
Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 226, n° 3, 1999, p. 469 - 492.

[RIV 99] RIVIN E.
Stiffness and damping in mechanical design. Marcel Dekker, 1999.

[ROO 02] ROOK T.
An Alternate Method to the Alternating Time-Frequency Method. *Nonlinear Dynamics*, vol. 27, 2002, p. 327-339, Springer Netherlands.

[ROQ 06] ROQUES S.
n-dimensional Harmonic Balance Method extended to non-explicit nonlinearities. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, 2006, p. 269-280.

[ROQ 07] ROQUES S.
Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.

[ROQ 09] ROQUES S., LEGRAND M., CARTRAUD P., STOISSER C., PIERRE C.
Modeling of a rotor speed transient response with radial rubbing. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, 2009, p. 527 - 546.

[ROS 60] ROSENBERG R.
Normal mode of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, 1960, p. 263–268.

[ROS 62] ROSENBERG R.
The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, 1962, p. 7–14.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[ROS 66] ROSENBERG R.
On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 9, 1966, p. 155–242.

[RYC 05] RYCKELYNCK D.
A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, vol. 202, n° 1, 2005, p. 346 - 366.

[SAR 11] SARROUY E., SINOU J.-J.
Non-Linear Periodic and Quasi-Periodic Vibrations in Mechanical Systems - On the use of the Harmonic Balance Methods. EBRAHIMI F., Ed., *Advances in Vibration Analysis Research*, p. 419-434 InTech, 2011.

[SHA 91] SHAW S. W., PIERRE C.
Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 150, n° 1, 1991, p. 170 - 173.

[SHA 93] SHAW S. W., PIERRE C.
Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 164, n° 1, 1993, p. 85 - 124.

[SHA 11] SHANG Z., JIANG J., HONG L.
The global responses characteristics of a rotor/stator rubbing system with dry friction effects. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, 2011, p. 2150–2160.

[SHE 08] SHEN J., LIN K., CHEN S., SZE K.
Bifurcation and route-to-chaos analyses for Mathieu-Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method. *Nonlinear Dynamics*, vol. 52, n° 4, 2008, p. 403–414.

[SHI 93] SHIAU T. N., HWANG J. L., CHANG Y. B.
A Study on Stability and Response Analysis of a Nonlinear Rotor System With Mass Unbalance and Side Load. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 115, n° 2, 1993, p. 218-226, ASME.

[SIN 91] SINHA S., WU D.-H.
An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 151, n° 1, 1991, p. 91 - 117.

[SIN 04a] SINHA S. K.
Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 273, n° 4-5, 2004, p. 875 - 919.

[SIN 04b] SINOU J. J., THOUVEREZ F., JEZEQUEL L.
Non-linear stability analysis of a complex rotor/stator contact system. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 278, n° 4-5, 2004, p. 1095 - 1129.

[SIN 05a] SINHA S. C., REDKAR S., DESHMUKH V., BUTCHER E. A.
Order Reduction of Parametrically Excited Nonlinear Systems : Techniques and Applications. *Nonlinear Dynamics*, vol. 41, n° 1, 2005, p. 237–273.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[SIN 05b] SINHA S., REDKAR S., BUTCHER E. A.
Order reduction of nonlinear systems with time periodic coefficients using invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, n° 3-5, 2005, p. 985 - 1002.

[SIN 07] SINOU J.-J.
HDR - Dynamique non-linéaire des structures complexes, fixes et tournantes. Approches théoriques, numériques et expérimentales. rapport, 2007, Ecole Centrale de Lyon et Université Claude-Bernard Lyon 1.

[SLA 96] SLATER J. C.
A numerical method for determining nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, vol. 10, n° 1, 1996, p. 19–30.

[STE 09] STERNCHÜSS A.
Multi-level parametric reduced models of rotating bladed disk assemblies. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2009.

[SUN 98] SUNDARARAJAN P., NOAH S. T.
An algorithm for response and stability of large order non-linear systems – Application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 214, n° 4, 1998, p. 695 - 723.

[SUN 03] SUN G., KAUSHIK N., PALAZZOLO A. B., PROVENZA A. J., LAWRENCE C., CARNEY K.
An Efficient Algorithm for Blade Loss Simulations Using a High Fidelity Ball Bearing and Damper Model. *ASME Conference Proceedings*, vol. 2003, n° 37033, 2003, p. 1011-1020, ASME.

[SUN 08] SUN G., PALAZZOLO A., PROVENZA A., LAWRENCE C., CARNEY K.
Long duration blade loss simulations including thermal growths for dual-rotor gas turbine engine. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 316, n° 1-5, 2008, p. 147 - 163.

[TOU 04] TOUZÉ C., THOMAS O., CHAIGNE A.
Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 273, n° 1-2, 2004, p. 77 - 101.

[TOU 06] TOUZÉ C., AMABILI M.
Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, n° 4-5, 2006, p. 958 - 981.

[TOU 08] TOUZÉ C., AMABILI M., THOMAS O.
Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, n° 21-24, 2008, p. 2030 - 2045.

[VON 01] VONGROLL G., EWINS D. J.
The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241, n° 2, 2001, p. 223 - 233.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

[WAN 07] WANG F., BAJAJ A.
Nonlinear normal modes in multi-mode models of an inertially coupled elastic structure. *Nonlinear Dynamics*, vol. 47, n° 1, 2007, p. 25–47.

[WIL 45] WILLIAMS D. E.
Dynamic loads in aeroplanes under given impulsive loads with particular reference to landing and gust loads on a large flying boat. *Great Britain Royal Aircraft Establishment Reports*, vol. 5, 1945, p. 3309–3316.

[WIL 10] WILKES J. C., CHILDS D. W., DYCK B. J., PHILLIPS S. G.
The Numerical and Experimental Characteristics of Multimode Dry-Friction Whip and Whirl. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 132, n° 5, 2010, page 052503, ASME.

[WRI 08] WRIGGERS P.
Nonlinear finite element methods. Springer, 2008.

[WU 94] WU D.-H S. S.
A new approach in the analysis of linear systems with periodic coefficients for applications in rotorcraft dynamics. *The aeronautical journal of the royal aeronautical society*, vol. 1, 1994, p. 8–16.

[ZHA 94a] ZHAO J. Y., LINNETT I. W., MCLEAN L. J.
Stability and Bifurcation of Unbalanced Response of a Squeeze Film Damped Flexible Rotor. *Journal of Tribology*, vol. 116, n° 2, 1994, p. 361-368, ASME.

[ZHA 94b] ZHAO J. Y., LINNETT I. W., MCLEAN L. J.
Subharmonic and Quasi-Periodic Motions of an Eccentric Squeeze Film Damper-Mounted Rigid Rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 116, n° 3, 1994, p. 357-363, ASME.

[ZHA 09] ZHANG G., XU W., XU B., ZHANG W.
Analytical study of nonlinear synchronous full annular rub motion of flexible rotor-stator system and its dynamic stability. *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, n° 4, 2009, p. 579–592.

[ZHE 99] ZHENG T., HASEBE N.
An Efficient Analysis of High-Order Dynamical System with Local Nonlinearity. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 121, n° 3, 1999, p. 408-416, ASME.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : PELETAN DATE de SOUTENANCE :20 décembre 2012

Prénoms : Loïc, François, Thomas

TITRE : Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator.

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2012-ISAL-0146

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

RÉSUMÉ :

Les ensembles turbo-alternateurs des centrales électriques sont de grandes machines tournantes de plus de 50 mètres de long et de plusieurs centaines de tonnes. Lors du fonctionnement normal d'une telle machine, une probabilité non nulle existe d'un détachement accidentel d'une aube. Dans une telle situation, un balourd important est généré et du contact apparaît entre les parties tournantes et non tournantes de la machine. Il est alors capital de pouvoir simuler efficacement la dynamique de ce type d'évènement faisant intervenir de fortes non linéarités dans le système.
Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet ANR (Agence Nationale de la Recherche) IRINA (SImulation et maîtRise des rIsques en coNception des mAchines tournantes) et en particulier entre le LaMCoS (LAboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures) de l'INSA de Lyon et le département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustiques) d'EDF R&D à Clamart. Elle a pour objectif de mettre au point une technique rapide de simulation du comportement des lignes d'arbres de machines tournantes en cas de présence de non linéarité de type contact entre rotor et stator.
Pour atteindre cet objectif, une double démarche a été mise en place. La première consiste à mettre au point des modèles simplifiés afin de réduire le nombre de degrés de liberté du problème. De surcroît, une technique de réduction de modèle adaptée au cas de non linéarité localisée est utilisée afin de réduire encore plus la taille du système à résoudre. La seconde démarche consiste à mettre au point une technique de résolution rapide du système réduit afin d'obtenir la solution encore plus rapidement. Pour cela, au lieu d'utiliser les traditionnelles techniques d'intégration temporelle directe, c'est la méthode de la balance harmonique qui est mise à profit. Cette technique permet d'obtenir directement la réponse stabilisée du système grâce à une résolution des équations dans le domaine fréquentiel.
Dans ce cadre, une maquette numérique a été mise au point mettant en œuvre les fonctionnalités citées. Cette dernière permet de reproduire les phénomènes physiques périodiques ainsi que quasi-périodiques et de déterminer leur stabilité. Des études paramétriques sur des exemples de problèmes de contact rotor-stator viennent illustrer cette démarche. Enfin, une application sur un cas industriel de groupe turbo alternateur EDF est présentée.
MOTS-CLÉS : dynamique des machines tournantes, contact rotor-stator, réduction de modèle, méthode de la balance harmonique.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
18-20 rue des Sciences
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : M. Georges JACQUET-RICHARDET

Président du jury : M. Patrice CARTRAUD

Composition du jury : P. Cartraud
B. Cochelin
C. Bordegaray
S. Baguet
D.J. Ewins
F. Thouverez
M. Torkhani

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0146/these.pdf
© [L. Peletan], [2012], INSA de Lyon, tous droits réservés