



**HAL**  
open science

# Problèmes aux limites dispersifs linéaires non homogènes, application au système d'Euler-Korteweg

Corentin Audiard

► **To cite this version:**

Corentin Audiard. Problèmes aux limites dispersifs linéaires non homogènes, application au système d'Euler-Korteweg. Mathématiques générales [math.GM]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2010. Français. NNT : 2010LYO10261 . tel-00832913

**HAL Id: tel-00832913**

**<https://theses.hal.science/tel-00832913v1>**

Submitted on 11 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N ° d'ordre : 261 – 2010

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

**THÈSE DE DOCTORAT**

(Arrêté du 7 août 2006)

*Spécialité : Mathématiques appliquées*

Présentée et soutenue publiquement par

Corentin AUDIARD

le 1<sup>er</sup> décembre 2010

*Titre :*

PROBLÈMES AUX LIMITES DISPERSIFS LINÉAIRES NON  
HOMOGÈNES,  
APPLICATION AU SYSTÈME D'EULER-KORTEWEG.

---

*Directrice de thèse :*

Sylvie BENZONI-GAVAGE

*Rapporteurs :*

Christophe BESSE et David LANNES

---

*Jury :*

---

Mme	Sylvie	BENZONI-GAVAGE	Directrice de thèse
M.	Christophe	BESSE	Rapporteur
M.	Jean-François	COULOMBEL	Examineur
M.	David	LANNES	Rapporteur
M.	Petru	MIRONESCU	Examineur
M.	Jean-Claude	SAUT	Président de Jury
M.	Nikolay	TZVETKOV	Examineur

---



## Remerciements

En premier lieu je remercie Sylvie Benzoni-Gavage, ma directrice de thèse. Elle m'a proposé un sujet motivant et faisant intervenir des mathématiques variées. Elle a su judicieusement orienter l'angle d'attaque des problèmes que j'ai rencontrés, et j'ai apprécié sa grande disponibilité.

Je remercie chaleureusement David Lannes et Christophe Besse qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. En particulier, j'ai été touché de l'intérêt que David a manifesté lorsque je lui ai décrit le thème de cette thèse, et je remercie Christophe pour ses nombreuses corrections.

Je remercie Jean-Claude Saut et Nikolay Tzvetkov de me faire l'honneur de participer à mon jury, ainsi que Petru Mironescu. Le stage de M1 que j'ai effectué avec ce dernier a été passionnant, et j'ai pu apprécier lors de ma thèse ses excellents cours d'École doctorale. Je remercie également chaleureusement Jean-François Coulombel de faire partie de mon jury, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail et les discussions que nous avons pu avoir.

Merci également aux (ex-)doctorants de l'ICJ, en particulier Amélie, Julien, Magalie, Saïd et Valérie. Je remercie également mes camarades de promotion à l'ÉNS Cachan avec lesquels j'ai passé d'agréables années humainement et mathématiquement.

J'ai une pensée pour mes amis proches, Adrien, Fabien, Romain, Simon, Thomas ainsi que mon frère. Enfin je remercie sincèrement ma famille, pour son admiration étonnée devant mon travail de thèse, mais surtout pour le reste.



## Résumé

On s'intéresse dans ce travail aux problèmes aux limites pour une classe particulière d'équations dispersives, qui est en un certain sens une généralisation des équations strictement hyperboliques et comprend les équations d'Euler-Korteweg. Ces dernières sont notre motivation initiale et le fil rouge du mémoire.

Le premier chapitre rappelle la théorie classique initiée par H.O. Kreiss pour les problèmes aux limites hyperboliques non symétriques. En particulier on introduit des opérateurs pseudo-différentiels appelés « symétriseurs de Kreiss » permettant d'obtenir des estimations *a priori* dans des espaces  $L^2$  à poids en temps pour le problème sans donnée initiale. Ces estimations s'étendent au cas de données initiales  $L^2$  grâce à un théorème de J. Rauch valable dans le cadre strictement hyperbolique, et dont on donne une généralisation au cas des systèmes constamment hyperboliques.

Certaines propriétés algébriques des équations d'Euler-Korteweg nous permettent de généraliser cette construction de symétriseurs, ce qui donne un résultat d'existence et d'unicité pour le problème d'Euler-Korteweg linéarisé. On met ensuite en évidence une famille d'équations à coefficients constants admettant des propriétés algébriques adaptées à l'étude du problème aux limites par la méthode des symétriseurs. Ces équations sont dispersives, ce qui se traduit notamment pour une sous-famille de celles-ci par un effet régularisant à la Kato pour le problème de Cauchy, adapté d'un résultat de P. Constantin et J.C. Saut. La nature bien posée du problème aux limites associé à ces équations (avec des conditions au bord adaptées) est prouvée en établissant d'abord l'existence de symétriseurs de Kreiss généralisés pour ce problème puis l'existence et l'unicité d'une solution. Ensuite, on étudie notamment le passage au problème mixte (avec données initiales nulles ou non) et on utilise un calcul pseudo-différentiel quasi-homogène pour étendre le caractère bien posé à des cas où certains coefficients sont variables.

La fin du mémoire est plus orientée vers l'analyse numérique, notamment avec l'épineuse question des conditions aux limites artificielles. On utilise les résultats théoriques pour montrer comment obtenir les conditions aux limites transparentes dans un cadre général. On s'inspire ensuite de plusieurs résultats notamment dûs à X. Antoine, C. Besse et J.Szeftel sur l'approximation des conditions aux limites transparentes par des conditions dites « absorbantes » (plus adaptées au calcul numérique) dans le cas de l'équation de Schrödinger. Cette méthode est utilisée pour mettre en place une approximation des solutions du système d'Euler-Korteweg dans  $\mathbb{R}$ , dont on se sert alors pour tester numériquement la stabilité d'ondes progressives (solitons) solutions du modèle d'Euler-Korteweg (stabilité précédemment étudiée du point de vue théorique par S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes et D. Jamet).

## Abstract

The aim of this work is to study a family of dispersive partial differential equations, which are in some sense a generalization of strictly hyperbolic equations, including the Euler-Korteweg equations. They are our initial motivation and a guiding thread of this memoir.

The first chapter is a reminder on the classical theory of non-symmetric strictly hyperbolic boundary value problems, which was initiated by H.O. Kreiss, the author of the now called « Kreiss symmetrizers ». These are pseudo-differential operators allowing to obtain weighted  $L^2$  *a priori* estimates for the pure boundary value problem. In the strictly hyperbolic frame, these results were extended to the case of  $L^2$  initial data thanks by J. Rauch. We prove their generalization for constantly hyperbolic system.

Some algebraic properties of the Euler-Korteweg equations allow us to generalize the construction of symmetrizers, and obtain a result of well-posedness for the linearized Euler-Korteweg mixed problem. Subsequently, we point out a family of constant coefficients dispersive partial differential equations satisfying algebraic properties convenient for the study of the boundary problem by the use of symmetrizers. The fact that these equations are dispersive is reflected by a Kato smoothing effect for the solutions of the Cauchy problem, which we prove by adaptating a theorem of P. Constantin and J.C. Saut. The well posedness of the boundary value problem for these equations (with convenient boundary conditions) is proved in two steps : first we construct Kreiss symmetrizers to obtain *a priori* estimates, and then we use standard duality methods for the existence. We then extend our results to the mixed problem and to variable coefficients by the use of (quasi-homogeneous) pseudo-differential calculus.

The last part of the dissertation is turned toward numerical analysis. More specifically we compute approximate solutions on  $\mathbb{R}$  of the Euler-Korteweg system. The main difficulty encountered is the definition of artificial boundary conditions, which is known to be a delicate problem. We use theoretical results to show in a general way how to derive transparent boundary conditions. We then recall several results, notably due to X. Antoine, C. Besse and J. Szeftel on the approximation of transparent boundary conditions by so-called « absorbing boundary conditions », which are more suitable for numerical calculus. This approach is used to check numerically the stability of traveling waves (solitons) solutions of the Euler-Korteweg model (this stability had already been studied on a theoretical level by S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes et D. Jamet).







# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Théorie classique et extension</b>	<b>9</b>
1.1 Problèmes hyperboliques . . . . .	9
1.2 Condition de Kreiss-Lopatinskiĭ . . . . .	12
1.3 Symétriseurs de Kreiss et résultats liés . . . . .	14
1.3.1 Symétriseurs et estimations <i>a priori</i> . . . . .	14
1.3.2 La structure par blocs . . . . .	16
1.3.3 Une extension du théorème de Rauch . . . . .	18
1.3.4 Des généralisations quasi-homogènes . . . . .	22
<b>2 Etude du problème d'Euler-Korteweg linéarisé</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 A Kreiss-Lopatinskiĭ condition . . . . .	27
2.3 The linearized extended system . . . . .	32
2.4 Existence and uniqueness results . . . . .	40
<b>3 Une classe de problèmes dispersifs</b>	<b>49</b>
3.1 Considérations algébriques . . . . .	49
3.1.1 Condition de Petrowsky . . . . .	49
3.1.2 Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	51
3.1.3 Notion de $q$ -hyperbolicité . . . . .	55
3.2 Effet régularisant pour le problème de Cauchy . . . . .	59
3.2.1 Un résultat de Constantin et Saut . . . . .	59
3.2.2 Cas du modèle d'Euler-Korteweg étendu linéarisé . . . . .	67

<b>4</b>	<b>Symétriseurs généralisés</b>	<b>69</b>
4.1	Problème aux limites et reformulation . . . . .	69
4.1.1	Opérateurs, espaces et notations . . . . .	69
4.1.2	Reformulation : . . . . .	71
4.2	Condition de Kreiss-Lopatinskiï . . . . .	74
4.2.1	Notations et résultats de base . . . . .	74
4.2.2	Prolongement des espaces stables . . . . .	76
4.3	Symétriseurs généralisés . . . . .	80
4.3.1	Symétriseurs et estimation <i>a priori</i> . . . . .	81
4.3.2	La structure par blocs . . . . .	83
4.3.3	Construction des symétriseurs. . . . .	89
4.3.4	Retour à la $q$ -hyperbolicité . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Résolution du problème aux limites</b>	<b>99</b>
5.1	Le problème dual . . . . .	99
5.1.1	Construction d'un problème dual : . . . . .	99
5.1.2	Existence d'une solution, unicité . . . . .	101
5.1.3	Commentaires sur l'estimation <i>a priori</i> . . . . .	103
5.1.4	Effet d'une perturbation . . . . .	108
5.2	Problème mixte . . . . .	110
5.2.1	Causalité, problème à donnée initiale nulle . . . . .	110
5.2.2	Données initiales non nulles . . . . .	114
5.3	Problème à coefficients variables . . . . .	124
5.3.1	Calcul pseudo-différentiel quasi-homogène . . . . .	124
5.3.2	Analyse des problèmes à coefficients variables . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Analyse numérique du modèle d'Euler-Korteweg</b>	<b>133</b>
6.1	Conditions aux limites transparentes . . . . .	133
6.2	Résultats existants pour l'équation de Schrödinger . . . . .	138
6.3	Application au modèle d'Euler-Korteweg . . . . .	140
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>155</b>
	<b>A Densité et traces</b>	<b>157</b>
	<b>Liste des symboles</b>	<b>161</b>





# Introduction

Le fil rouge de ce mémoire est l'étude du système d'Euler-Korteweg

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla g(\rho) = \nabla (K(\rho)\Delta\rho + \frac{1}{2}K'(\rho)|\nabla\rho|^2), \end{cases}$$

qui modélise les effets de la capillarité aux interfaces entre des zones où la densité  $\rho$  est très différente (les interfaces étant alors les zones où le gradient de  $\rho$  est fort). La capillarité est mesurée par le coefficient  $K$ , qui peut dépendre de  $\rho$ . S'agissant d'un fluide en mouvement,  $u(x, t)$  représente la vitesse au point  $(x, t)$ . La première équation traduit la conservation de la masse, tandis que la deuxième (sur la quantité de mouvement) correspond à l'équation classique du système d'Euler à laquelle se rajoute un terme de troisième ordre, lié au tenseur de Korteweg. L'analyse mathématique du problème de Cauchy (délicate notamment du fait de l'absence de terme visqueux) a été développée notamment par S. Benzoni, R. Danchin et S. Descombes [11, 8, 10, 9]. L'existence et la stabilité de solutions globales régulières particulières, ondes progressives hétéroclines (modélisant par exemple les transitions de phase liquide vapeur) ou homoclines (solitons) ont été étudiées dans [9, 10]. L'existence et unicité locale de solutions régulières est obtenue dans [11] en dimension 1 et [9] en dimension quelconque.

Il est important de savoir déterminer si le problème aux limites est bien posé pour deux raisons : la première est que physiquement les domaines où évoluent les fluides considérés sont limités à une partie de l'espace. Un deuxième argument est qu'on ne sait en général pas calculer explicitement une solution, et que l'approche par analyse numérique requiert de travailler sur un nombre fini de points, donc en domaine borné.

Le système d'Euler-Korteweg présente des propriétés dispersives provenant des termes d'ordre 3. Or l'analyse théorique des problèmes aux limites dispersifs avec condition au bord générale est encore limitée. Dans les références classiques sur les problèmes aux limites non homogènes, on peut citer les traités de J.L. Lions et E. Magenes, [44, 45, 46], qui se concentrent cependant plus sur l'analyse de problèmes elliptiques et paraboliques, et dont les résultats d'existence et d'unicité pour les autres types de problèmes ne sont pas optimaux. Plus récemment, il y a eu plusieurs avancées dans l'analyse des problèmes dispersifs scalaires d'ordre 1 en temps, et en dimension 1 d'espace. Par exemple,

le problème aux limites non homogène pour l'équation de Korteweg de Vries

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 ,$$

fait l'objet de plusieurs résultats de Bona, Sun et Zhang [13, 15] et de Faminskii [23]. La nature bien posée de problèmes d'ordre plus élevé en espace a également été obtenue par A. Faminskii et N. Larkin [24] ainsi que L.Y. Sung et A.S. Fokas [26], ce dernier développant (entre autres) dans un livre [27] les méthodes d'intégration dans le plan complexe utilisées pour cela.

Si ces méthodes scalaires semblent pouvoir s'étendre à certains systèmes, elles utilisent de façon assez importante le fait de travailler en dimension 1 d'espace, notamment pour avoir une représentation explicite des solutions de la partie linéaire des équations. Parallèlement, la théorie des problèmes aux limites pour les systèmes hyperboliques est très riche et dispose de méthodes puissantes, ce qui a motivé la recherche de résultats analogues dans notre cadre. Rappelons qu'un système hyperbolique linéaire est de la forme

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(x, t) \partial_{x_j} u = f ,$$

avec la propriété

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \det(\delta + \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(x, t)) = 0 \Rightarrow \delta \in \mathbb{R} .$$

Considérons par exemple le problème aux limites sur  $\{x_d \geq 0\}$

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(x, t) \partial_{x_j} u = 0 , \\ Bu|_{x_d=0} = g , \end{cases} \quad (1)$$

avec  $B$  une matrice de rang maximal. Si les matrices  $A_j$  sont symétriques (on dit alors que le système est *Friedrichs symétrique* ou « symétrique au sens de Friedrichs »), on obtient formellement en multipliant le système par  $u$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times [0, T]$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_d \geq 0} |u(x, t)|^2 dx = \int_{x_d=0} A_d u \cdot u dy .$$

Si le problème (1) est de plus strictement dissipatif, c'est à dire que sur  $\text{Ker}(B)$ ,  $A_d v \cdot v < 0$  et que  $\text{Ker}(B)$  est un espace *maximal* pour cette propriété, on peut en déduire l'estimation *a priori* pour les solutions

$$\exists \varepsilon > 0 : \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+)} + \varepsilon |u(x_d = 0)|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [0, t])} \leq C |g|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times [0, t])} . \quad (2)$$

Lorsque le système n'est pas Friedrichs symétrique et strictement dissipatif, l'analyse du problème aux limites (même si les matrices  $A_j$  sont constantes)

s'avère très délicate. On rappelle dans le chapitre 1 comment un outil fondamental, les « symétriseurs de Kreiss » [40], permettent d'obtenir (presque) les mêmes estimations *a priori* pour les systèmes strictement hyperboliques, avec une hypothèse sur les conditions aux limites remplaçant la stricte dissipativité : la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme. Pour l'essentiel, l'idée des symétriseurs de Kreiss consiste à construire une matrice  $S(\tau, \xi)$  « symétrisant » le système

$$\tau \widehat{u} + \sum_{j=1}^{d-1} i \xi_j A_j(x, t) \widehat{u} + A_d \partial_{x_d} \widehat{u} = \widehat{f},$$

obtenu formellement par transformée de Fourier-Laplace en espace temps, et à concrétiser ces calculs formels à l'aide du calcul pseudo-différentiel et des outils associés (inégalité de Gårding). La construction effective de symétriseurs de Kreiss permet d'obtenir une estimation pour le problème aux limites sans condition initiale dans les espaces  $L_\gamma^2(\Omega \times \mathbb{R}_t) = \left\{ u \in L_{loc}^2 : \iint_{\Omega \times \mathbb{R}_t} |e^{-\gamma t} u|^2 dx dt < \infty \right\}$  :

$$\exists \Gamma > 0 : \forall \gamma \geq \Gamma, \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)} + |u|_{x_d=0} \Big|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)} \leq C \|g\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)} .$$

Cette estimation avait été complétée peu après le travail de Kreiss par J. Rauch [58] qui a démontré (2) dans le cadre des systèmes strictement hyperboliques. On rappelle plus précisément ces résultats classiques au premier chapitre, que l'on conclut par une première contribution : une extension du théorème de Rauch pour des systèmes constamment hyperboliques, notamment grâce à l'extension de la théorie de Kreiss à cette classe de systèmes effectuée par G. Métivier [51]. Ce résultat est actuellement soumis pour publication.

Le deuxième chapitre a pour objet l'étude des problèmes aux limites pour le système d'Euler-Korteweg linéarisé autour d'un état constant. Il est l'occasion de se familiariser avec la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme et de fournir la construction de symétriseurs généralisés pour le problème aux limites dans un cas assez élémentaire. On prouve également des estimations pour le problème de Cauchy qui permettent de prouver que le problème mixte est bien posé. L'une d'elles est inspirée d'un contrôle de trace dû à C. Kenig, A. Ponce et L. Vega [38] pour les solutions de  $\partial_t u - \partial_x D^{m-1} u = 0$ , où  $D$  est le multiplicateur de Fourier spatial de symbole  $|\xi|$ . Ce chapitre en anglais est repris d'un article publié au Journal of Differential Equations d'août 2010.

Le résultat obtenu laisse entendre que la construction de symétriseurs est envisageable pour une large classe d'équations aux dérivées partielles « quasi-homogènes », sous des conditions sur leur symbole à préciser. On sélectionne cette classe de symboles au chapitre 3. Plus précisément on travaille sur des systèmes de la forme

$$\sum_{k=0}^m \partial_t^k A_{m-k}(\partial_x) u = 0, \quad d^\circ(A_j) = p_j .$$



pour lesquels on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \det\left(\sum_{k=0}^m \tau^k A_{m-k}(i\xi)\right) = 0 \Rightarrow \tau \in i\mathbb{R} .$$

En particulier, l'accent est mis sur la condition de Petrowski (nécessaire à la nature bien posée du problème de Cauchy) et sur les problèmes de stabilité de cette condition par perturbation. Cette question est importante dans la mesure où elle est un bon indicateur de la faisabilité d'une analyse à coefficients variables. On prouve en particulier que, contrairement au cas des systèmes strictement hyperboliques, la condition de Petrowski n'est *pas* stable par perturbation d'ordre inférieur pour la classe considérée. On montre cependant une stabilité par perturbation d'ordre suffisamment faible. À cet égard il faut citer la notion de  $q$ -hyperbolicité, développée par L. Gindikin et S. Volevich [67, 31] pour des équations scalaires d'ordre quelconque et sur laquelle on revient à la fin du chapitre 4. En adaptant un résultat de P. Constantin et J.C. Saut [18], on prouve l'effet Kato-régularisant sur les solutions du problème de Cauchy. Cet effet peut se résumer à un gain de  $(m-1)/2$  dérivées spatiales localement si dans le système on "dérive  $m$  fois en temps pour une fois en espace". Ayant défini une classe adaptée d'équations, on reformule le problème aux limites associé sous la forme d'un problème pseudo-différentiel

$$\begin{cases} \partial_{x_d} U = G_\gamma U, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t, \\ FU|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^t. \end{cases} \quad (3)$$

Après une analyse élémentaire des espaces stables du symbole de  $G$ , on met en évidence une version généralisée de la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, que l'on suppose satisfaite dans la suite. On construit alors en détail au chapitre 4 des symétriseurs de Kreiss généralisés en modifiant convenablement la construction de Kreiss présentée par J. Chazarain et A. Piriou ([17] ch. 7). L'existence de symétriseurs permet d'obtenir l'estimation *a priori* suivante pour le problème (3)

$$\begin{aligned} & \exists \Gamma > 0 : \forall \gamma \geq \Gamma, \gamma \|U\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)}^2 + |U(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 \\ & \lesssim \frac{1}{\gamma} \left( \|\partial_x U - GU\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{p-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t))}^2 \right) + |FU(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 . \end{aligned}$$

Pour ne pas alourdir cette introduction, on se réfère au chapitre correspondant pour la définition des espaces de Sobolev à poids quasi-homogènes utilisés. On revient alors aux problèmes  $q$ -hyperboliques, pour lesquels on montre que la construction de symétriseurs est assez simple, et on indique rapidement comment l'on peut en déduire les mêmes estimations que L. Gindikin et S. Volevich dans un cadre plus large.

Après construction au chapitre 5 d'un problème aux limites adjoint convenable, l'estimation ci-dessus et les méthodes standard (prolongement de formes

linéaire, représentation de la forme) permettent de démontrer la nature bien posée du problème aux limites sans condition initiale. On montre alors en quoi ce résultat n'est pas toujours satisfaisant (en un certain sens...), et on reprend la construction de symétriseurs pour obtenir un théorème d'existence et d'unicité avec de meilleures estimations sous des hypothèses plus fortes. Afin d'étudier le problème avec condition initiale, on établit un résultat assez naturel de causalité (si les données sont nulles pour  $t < T_0$  la solution l'est aussi), ce qui permet d'étendre les résultats précédents au problème posé sur  $[0, T]$  avec donnée initiale nulle, et données au bord satisfaisant certaines conditions de compatibilité. Le cas particulier de la dimension 1, pour lequel on a déjà dit que les résultats existants étaient plus nombreux, est étudié dans une section à part. Pour celui-ci, on généralise les arguments du chapitre 3, ce qui mène à un résultat d'existence et d'unicité pour le problème mixte avec données de Cauchy arbitraires. Dans la mesure où les résultats des auteurs cités précédemment et n'utilisant pas les symétriseurs de Kreiss sont un peu plus précis, on donne rapidement les arguments essentiels sur l'exemple élémentaire mais significatif de l'équation d'Airy

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0 .$$

On conclut ce chapitre en étendant l'analyse aux coefficients variables, mais seulement en facteur de termes d'ordre suffisamment faibles. Par exemple dans l'équation  $\partial_t u + \underline{u} \partial_x u + ia \partial_x^2 u$ , nos hypothèses imposent que  $a$  soit constant, mais pas  $\underline{u}$ . Ce passage aux coefficients variables se fait à l'aide d'algèbres pseudo-différentielles quasi-homogènes, dont on peut trouver une construction dans les travaux de R. Lascar [43].

Le sixième chapitre aborde l'analyse numérique du modèle d'Euler-Korteweg. Le but de ce dernier chapitre est de tester numériquement la stabilité des solitons solutions du problème de Cauchy. Comme ces solutions sont définies sur un domaine non borné, il est nécessaire d'utiliser des conditions aux limites dites absorbantes réduisant au maximum l'amplitude des ondes réfléchies au bord. On décrit grâce aux résultats du chapitre 4 sur le prolongement des espaces stables comment se calcule la condition aux limites transparentes (c'est à dire assurant qu'aucune onde n'est réfléchi). En général, la condition transparente s'exprime au moyen d'un opérateur pseudodifférentiel non local délicat à utiliser numériquement. Il est donc nécessaire de l'approcher par les conditions dites absorbantes, plus simples à manipuler. Après avoir présenté rapidement plusieurs résultats notables sur les conditions absorbantes pour l'équation de Schrödinger, on utilise ces dernières pour calculer numériquement les solutions d'une version reformulée en coordonnées lagrangiennes du système d'Euler-Korteweg, à savoir

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y p_0(v) + \partial_y (\alpha(v) \partial_y w) = 0, \\ \partial_t w - \partial_y (\alpha(v) \partial_y u) = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations correspondent aux parties réelles et imaginaires d'une équation de Schrödinger non linéaire. On s'intéresse uniquement au cas

semi linéaire  $\alpha(v) = cst$ , et l'on calcule notamment l'évolution du système avec divers profils de solitons comme donnée initiale. Les résultats semblent mettre en évidence l'instabilité de l'un des profils, on observe également une possibilité d'explosion en temps fini pour des données initiales régulières plus arbitraires.

# Chapitre 1

## Théorie classique et extension

### 1.1 Problèmes hyperboliques

On considère ici un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaire, homogène d'ordre 1 à coefficients (matriciels) constants, de taille  $m$  et de la forme :

$$Lu := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u = f. \quad (1.1)$$

Les définitions et la théorie rappelées ici se trouvent dans [12, 17, 50], ainsi que dans les articles « historiques » [40, 58, 47] (liste non exhaustive).

**Definition 1.1.1.** Soit pour  $(\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$A(\eta) = i \sum_{j=1}^d \eta_j A_j. \quad (1.2)$$

On dit que  $L$  est *hyperbolique* lorsque  $\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \|e^{A(\eta)}\| < \infty$ .

Lorsque les valeurs propres de  $A(\eta)$  sont imaginaires pures et simples pour tout  $\eta$  réel non nul, l'opérateur est *strictement hyperbolique*.

Pour une EDP scalaire

$$Pu := \sum_{j=0}^m \partial_t^{m-j} P_j(\nabla) u = f, \quad (1.3)$$

où les  $P_j$  sont des opérateurs différentiels homogènes d'ordre  $j$ ,  $P_0 = 1$  on a une définition analogue :

**Definition 1.1.2.** On dit que l'opérateur différentiel scalaire  $P$  est *strictement hyperbolique* lorsque les racines en  $\tau$  du polynôme  $P(\tau, \eta) = \sum \tau^{m-j} P_j(i\eta)$  sont imaginaires pures et simples pour tout  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

Exemples 1.1.3. • L'équation de transport

$$\partial_t u + c \cdot \nabla u = 0$$

et l'équation des ondes

$$\partial_t^2 - c^2 \Delta u = 0,$$

sont des équations scalaires strictement hyperboliques d'ordre respectivement 1 et 2.

- Les équations d'Euler en dimension  $d$  (linéarisées au voisinage d'un état constant)

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{u} \cdot \nabla & \underline{\rho} \nabla^t & 0 \\ \underline{\rho}^{-1} \underline{\partial}_\rho p \nabla & (\underline{u} \cdot \nabla) I_d & \underline{\rho}^{-1} \underline{\partial}_e p \nabla \\ 0 & \underline{\rho}^{-1} \underline{p} \nabla^t & \underline{u} \cdot \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix} = 0,$$

sous la condition  $\underline{\partial}_\rho p + \underline{p} \underline{\partial}_e p > 0$ , forment un système hyperbolique en toute dimension, mais ce système n'est strictement hyperbolique qu'en dimension 1.

Si le problème est posé sur tout l'espace, on peut toujours passer de l'EDP scalaire (1.3) à un système (non local) d'ordre 1 en introduisant à partir de la variable scalaire  $u$  la nouvelle variable

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \Lambda^{m-1} u \\ \Lambda^{m-2} \partial_t u \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u \end{pmatrix},$$

où  $\Lambda$  est le multiplicateur de Fourier spatial

$$v \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda v(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \eta} |\eta| \widehat{v}(\eta) d\eta.$$

La fonction  $u$  satisfait (1.3) si et seulement si  $\tilde{u}$  satisfait l'équation homogène d'ordre 1

$$\partial_t \tilde{u} = A(\nabla/i) \tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0 & & \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \Lambda \\ -P_m \circ \Lambda^{1-m} & \dots & & & -P_1 \end{pmatrix} \tilde{u}.$$

En utilisant la structure de matrice compagnon de  $A$ , on voit que  $\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \|e^{A(\eta)}\| < \infty$  si et seulement si (1.3) est strictement hyperbolique, ce qui est à la fois un lien et une différence notable entre les systèmes et les équations scalaires hyperboliques.

Les opérateurs hyperboliques sont les seuls opérateurs d'évolution « raisonnables » du type de (1.1) au sens du théorème suivant.

**Théorème 1.1.4.** *Soit  $L$  un opérateur comme dans (1.1). Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s, \end{cases}$$

*est bien posé dans  $H^s$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $L$  est hyperbolique. Si l'opérateur différentiel matriciel  $L$  est strictement hyperbolique, il est hyperbolique.*

C'est un cas particulier facile d'un théorème de Kreiss, qui décrit plus précisément la nature de  $A(\eta)$  (voir par exemple [41] théorème 2.3.2 p. 45).

On s'intéresse ici aux problèmes aux limites posés sur le demi espace  $\{x_d \geq 0\}$ . Génériquement, les conditions au bord  $x_d = 0$  seront de la forme  $Fu = \varphi$ , avec  $F$  une application linéaire de  $\mathbb{C}^m$  dans  $\mathbb{C}^k$ .

Pour le problème aux limites pur ( $t \in \mathbb{R} = \mathbb{R}_t$ , la notation  $\mathbb{R}_t$  permet d'éviter la confusion avec les variables d'espaces), après transformation de Fourier-Laplace tangentielle en  $(t, x_1, \dots, x_{d-1})$ ,  $Lu = 0$  se réécrit

$$\tau U + \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j A_j U + A_d \partial_{x_d} U = 0 ,$$

avec  $U = \int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1}} e^{-\tau t} e^{-i\eta \cdot x'} u(x', x_d, t) dx' dt$ ,  $\tau = \gamma + i\delta$ . Dans la suite  $\gamma$  sera toujours positif ou nul.

Si l'on veut que cette équation soit une équation différentielle ordinaire (EDO) résolue, on est amené à l'hypothèse suivante.

**Definition 1.1.5.** Le problème aux limites

$$\begin{cases} Lu = 0, (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0, t \in [0, T] , \\ Fu|_{x_d=0} = \varphi, \end{cases} \quad (1.4)$$

est dit *non caractéristique* lorsque la conormale au bord  $(0, \dots, 0, 1)$  n'est pas caractéristique, c'est à dire lorsque  $A_d$  est inversible.

*Remarque 1.1.6.* Dans le cadre d'un problème aux limites posé dans un domaine ouvert régulier de  $\mathbb{R}^d$ , l'hypothèse à faire serait  $A(\nu)$  inversible, où  $\nu$  est la conormale au bord du domaine.

Si le problème (1.4) est non caractéristique, il se réécrit par transformation de Fourier-Laplace

$$\frac{dU}{dx_d} = -A_d^{-1}(\tau I + \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j A_j)U := G(\tau, \eta)U . \quad (1.5)$$

Ici,  $G : (\tau, \eta) \mapsto G(\tau, \eta) \in M_m(\mathbb{C})$  est homogène de degré 1 en  $(\tau, \eta) = (\tau, \eta_1, \dots, \eta_{d-1})$ . Désormais, on note en effet  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{d-1})$ , car la variable

$\eta_d$  a un rôle particulier.

Pour une équation scalaire strictement hyperbolique

$$\sum a_k(\partial_t, D_{x'}) \partial_{x_d}^{m-k} = 0, \quad a_0 = 1,$$

l'analogie de la réduction précédente isolant la variable  $x_d$  permet de se ramener à un problème pseudo-différentiel semblable. Posons

$$U_j = (|\tau|^2 + \eta_1^2 + \cdots + \eta_{d-1}^2)^{\frac{m-j}{2}} \partial_{x_d}^j \widehat{u} = r^{m-j} \partial_{x_d}^j \widehat{u},$$

$$r := (|\tau|^2 + \eta_1^2 + \cdots + \eta_{d-1}^2)^{1/2}.$$

La fonction vectorielle  $(U_0, \dots, U_{m-1})$  vérifie alors l'équation différentielle :

$$\partial_{x_d} U = r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_m(\frac{\tau}{r}, \frac{\underline{\eta}}{r}) & -a_{m-1}(\frac{\tau}{r}, \frac{\underline{\eta}}{r}) & \cdots & & -a_1(\frac{\tau}{r}, \frac{\underline{\eta}}{r}) \end{pmatrix} U := GU$$

Par transformée de Fourier-Laplace inverse, on obtient un problème pseudo-différentiel. Soit  $\chi_G(\lambda; \tau, \eta)$  le polynôme caractéristique de  $G$ . On a l'identité

$$\chi_G(\lambda; \tau, \eta) = \sum a_{m-j}(\tau, i\eta_1, \dots, i\eta_{d-1}) \lambda^j. \quad (1.6)$$

De manière générale, pour un multiplicateur de Fourier  $G$  homogène d'ordre 1 agissant sur les variables  $(t, x_1, \dots, x_{d-1})$  on dira que le système pseudo-différentiel

$$\partial_{x_d} U = GU, \quad (1.7)$$

est *strictement hyperbolique* (resp. *faiblement hyperbolique*) lorsque

$$\chi_G(\lambda; \tau, \eta) = \det(G(\tau, \eta_1, \dots, \eta_{d-1}) - \lambda),$$

est un polynôme en  $(\tau, \eta, \lambda)$  et ses racines en  $\tau$  sont imaginaires pures et simples (resp. imaginaires pures) pour  $(\eta, \lambda) \in \mathbb{R}^{d-1} \times i\mathbb{R}$ .

## 1.2 Condition de Kreiss-Lopatinskiï

Lorsque le système (1.7) est faiblement hyperbolique, la structure spectrale de  $G$  est intéressante. En décomposant  $\chi_G(\lambda; \tau, \eta) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j(\tau, \eta))$ , les espaces stables et instables sont définis par :

$$E^-(\tau, \eta) = \text{Ker} \prod_{\text{Re}(\lambda_j) < 0} (G - \lambda_j), \quad E_+(\tau, \eta) = \text{Ker} \prod_{\text{Re}(\lambda_j) > 0} (G - \lambda_j).$$

(Pour alléger les notations, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on n'écrira pas la dépendance en  $(\tau, \eta)$  de  $G$ .)

Si aucun  $\lambda_j$  n'est imaginaire pur,  $\mathbb{R}^m = E^- \oplus E_+$  d'après le théorème des noyaux.

**Proposition 1.2.1.** *Si (1.7) est faiblement hyperbolique,  $G(\tau, \eta)$  n'admet de valeur propre imaginaire pure que pour  $Re(\tau) = 0$ .*

*Pour  $Re(\tau) > 0$ ,  $\mathbb{R}^m = E_+ \oplus E^-$ , et  $dim(E^-)$  est indépendante de  $(\tau, \eta)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que si  $\lambda = i\omega$  est valeur propre de  $G$ , alors

$$\chi_G(i\omega; \tau, \eta) = 0. \quad (1.8)$$

Ainsi  $\tau$  est une racine de  $\chi_G(i\omega; \cdot, \eta)$ , ce qui implique  $\tau \in i\mathbb{R}$  par définition de l'hyperbolicité.  $\square$

Le nombre de conditions au bord à prescrire est maintenant clair :

**Proposition 1.2.2.** *Soient  $m$  la taille de  $G$ ,  $F \in \mathbb{M}_{k,m}$ . Pour que le problème*

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_d}U = GU, & x_d \geq 0, \\ FU(0) = \varphi, \end{cases} \quad (1.9)$$

*admette une unique solution bornée lorsque  $Re(\tau) > 0$ , il faut et il suffit que  $F : E^-(\tau, \eta) \rightarrow Im(F)$  soit un isomorphisme. En particulier  $k = dim(E^-)$ .*

**Definition 1.2.3.** On note  $\mathbb{C}^{+*} = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ , ainsi que  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0\}$ . On dit que  $F$  satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiï lorsque  $\forall \tau \in \mathbb{C}^{+*} = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ ,  $F : E^- \rightarrow Im(F)$  est un isomorphisme.

La condition est dite *uniforme* lorsque  $F^{-1}$  est borné uniformément en  $\tau \in \mathbb{C}^{+*}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ .

Cette condition est une des clés pour obtenir des estimations *a priori* pour le problème aux limites.

Dans le cadre **strictement hyperbolique**, on peut préciser le comportement des espaces stables.

**Théorème 1.2.4.** *(Kreiss [40])*

*Soit  $\chi_G(\lambda; \tau, \eta) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j(\tau, \eta))$  avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$ . Pour  $Re(\tau) > 0$  on a*

$$\begin{aligned} \chi_G(\lambda; \tau, \eta) &= \prod_{Re(\lambda_j) > 0} (\lambda - \lambda_j(\tau, \eta)) \prod_{Re(\lambda_j) < 0} (\lambda - \lambda_j(\tau, \eta)) \\ &:= \chi_+(\lambda; \tau, \eta) \chi_-(\lambda; \tau, \eta), \end{aligned}$$

*et  $E^- = Im(\chi_+(\lambda; \tau, \eta))$ . Les espaces stables ainsi définis sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{C}^{+*} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . La formule*

$$\forall (\tau, \eta) \in (\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}, \quad E^- := Im(\chi_+(G, \tau, \eta)),$$

*définit alors un prolongement continu de  $E^-$ .*



Le principal intérêt de ce résultat est qu'il apporte de la compacité : au lieu de travailler sur  $\mathbb{C}^{+*} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , il suffit de considérer par homogénéité la demi-sphère  $(\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}) \cap \{|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1\}$ . Le corollaire suivant est un exemple de ce principe.

**Corollaire 1.2.5.** *La condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme est satisfaite si et seulement si elle est vraie sur  $(\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}) \cap \{|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1\}$ , au sens où  $F$  reste un isomorphisme du prolongement de  $E^-$  dans  $\mathbb{C}^k$ .*

## 1.3 Symétriseurs de Kreiss et résultats liés

### 1.3.1 Symétriseurs et estimations *a priori*

Les symétriseurs sont un outil permettant d'obtenir des estimations *a priori* pour les problèmes aux limites hyperboliques.

**Definition 1.3.1.** Une application  $S : \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$  est un symétriseur de Kreiss pour (1.9) si  $\forall (\tau, \eta) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ ,

- la matrice  $S(\tau, \eta)$  est hermitienne bornée uniformément en  $(\tau, \eta)$ , de classe  $C^\infty$  sauf éventuellement en  $(0, 0)$ ,
- $\exists \alpha > 0 : \operatorname{Re}(SG) \geq \alpha \operatorname{Re}(\tau) = \alpha \gamma$ ,
- $\exists C > 0 : S \geq F^*F - C$

Comme le système (1.9) s'obtient à partir de (1.1) en utilisant la transformée de Fourier-Laplace tangentielle

$$u \mapsto \hat{u} : (x_d, \tau, \eta) \mapsto \int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1}} e^{-(\gamma+i\delta)t + \eta \cdot (x_1, \dots, x_{d-1})} \times u(x_1, \dots, x_d, t) dx_1 \cdots dx_{d-1} dt,$$

les estimations d'énergie obtenues pour  $\hat{u}$  se traduiront pour  $u$  grâce au théorème de Plancherel dans les espaces

$$L_\gamma^2 = \left\{ u : \int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+} |e^{-\gamma t} u|^2 dx dt < \infty \right\}.$$

On note la norme associée  $\|u\|_\gamma = \left( \int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+} |e^{-\gamma t} u|^2 dx dt \right)^{1/2}$ .

La norme analogue pour une application  $\varphi$  définie sur  $\{x_d = 0\}$  est notée  $|\varphi|_\gamma = \left( \int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1}} |e^{-\gamma t} \varphi|^2 dx dt \right)^{1/2}$ . Pour  $u$  définie sur  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$  et admettant une trace sur  $\{x_d = 0\}$ , on confondra  $u$  avec sa restriction sur  $x_d = 0$  pour noter  $|u|_\gamma$ .

Une conséquence facile de la définition de symétriseurs est le résultat suivant :

**Proposition 1.3.2.** *S'il existe un symétriseur de Kreiss, alors les solutions  $u$  de (1.4) satisfont l'estimation a priori suivante*

$$\gamma \|u\|_\gamma + |u(0)|_\gamma \leq C |Fu|_\gamma \quad (1.10)$$

*Remarque 1.3.3.* • Le cadre est ici (volontairement) très réduit pour la simplicité de l'exposé. On peut rajouter un terme de forçage  $f$  et étudier l'équation  $\frac{d}{dx_d}U = GU + f$ , il existe par ailleurs un énoncé de la proposition 1.3.2 lorsque  $G$  n'est pas un multiplicateur de Fourier mais un opérateur pseudo-différentiel, c'est-à-dire que l'EDP de départ a des coefficients non constants. La frontière n'est pas forcément un demi plan, mais un ouvert  $\Omega$  régulier plus général.

- La première construction de symétriseurs est dûe à Kreiss [40], dans le cas des systèmes (1.1) non caractéristiques à coefficients constants, et la généralisation à coefficients variables est annoncée sans preuve. Une version pseudo-différentielle strictement hyperbolique est décrite dans le livre de Chazarain et Piriou [17], où les conditions au bord sont également des opérateurs pseudo-différentiels.
- L'estimation (1.10) s'étend à des niveaux de régularité quelconques. Le cadre naturel pour l'énoncer est alors celui des espaces de Sobolev à poids  $H_\gamma^s$ , où

$$H_\gamma^s = \left\{ u : \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} (\gamma^2 + \delta^2 + |\eta|^2)^s e^{-\gamma \cdot u} < \infty \right\} .$$

Le résultat essentiel obtenu par Kreiss [40] 1970 est le suivant :

**Théorème 1.3.4.** *Si le problème (1.9) est strictement hyperbolique et les conditions au bord satisfont la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, alors il existe des symétriseurs de Kreiss, et ceux-ci sont des fonctions homogènes de  $(\tau, \eta)$ .*

Ce théorème a initialement été prouvé pour des opérateurs différentiels strictement hyperboliques à coefficients réels, et une note de Ralston [56] l'a étendu au cas complexe.

Par des arguments de dualité, on peut montrer à l'aide du théorème 1.3.4 que le problème aux limites à donnée initiale nulle

$$\begin{cases} \partial_{x_d} u = Gu \\ Fu = \varphi \in L^2 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution  $u \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+)$  dont la trace est dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1})$ . Plus précisément on a l'analogie de (1.10) sur  $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$  :

$$\|u\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+)} + |u(x_d = 0)|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1})} \leq C |\varphi|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{d-1})} . \quad (1.11)$$

Précisons que l'analyse des problèmes aux limites strictement hyperboliques scalaires ne requiert pas de les transformer en systèmes pseudo-différentiels.

À la même époque que Kreiss, R. Sakamoto [61, 62] avait étudié en détail les problèmes aux limites strictement hyperboliques scalaires et obtenu des estimations *a priori* similaires en étendant l'utilisation de « bons multiplicateurs » initialement développée par Leray et Gårding [30]. Une correspondance peut d'ailleurs être établie entre les points épineux des théories respectives de Kreiss et de Sakamoto : dans les deux cas, la partie de loin la plus difficile correspond à la construction d'un symétriseur symbolique/ d'un bon multiplicateur au voisinage des points dits « glancing », c'est à dire les points où  $\chi_G(\cdot, \tau, \eta)$  (resp. le symbole de l'opérateur scalaire) a des racines imaginaires pures multiples. Le passage au problème mixte (avec donnée initiale non nulle) n'est pas trivial. Sa nature bien posée a en fait été démontrée par J.Rauch peu après l'article de Kreiss, notamment en utilisant des estimations pour un problème scalaire issues de la méthode de Leray-Gårding :

**Théorème 1.3.5.** (*Rauch 1971, [58]*)

*Si  $L$  est un opérateur strictement hyperbolique,  $F$  une application linéaire satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, le problème*

$$\begin{cases} Lu = 0, & (x, t) \in (\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+ =: \Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ Fu = \varphi \in L^2, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2, \end{cases}$$

*admet une unique solution. On a de plus l'estimation ponctuelle en temps*

$$\begin{aligned} e^{-\gamma T} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\gamma} \|u\|_{L^2_\gamma([0, T] \times \Omega)} + |u(x_d = 0)|_{L^2_\gamma([0, T] \times \partial\Omega)} \\ \leq C \left( |\varphi|_{L^2_\gamma([0, T] \times \partial\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

La condition de Kreiss Lopatinskiï uniforme n'est pas absolument nécessaire pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité (voir par exemple [60, 19, 20]). En revanche, les problèmes à coefficients constants ne vérifiant pas la condition de Kreiss-Lopatinskiï « simple » sont mal posés au sens de Hadamard (voir par exemple [12] Proposition 4.2 p.107).

### 1.3.2 La structure par blocs

Suite aux travaux de Kreiss, Majda et Osher ont mis en évidence dans [48] que la construction de symétriseurs était possible dès que la matrice  $G$  satisfait une certaine condition de *structure par blocs*. Leur principal objectif était d'étendre les résultats de Kreiss à des problèmes physiques non strictement hyperboliques ou/et caractéristiques. La définition qu'on donne ici est tirée de [51].

**Definition 1.3.6.** L'application matricielle  $G$  satisfait la condition de *structure par blocs* lorsque pour tout  $(\tau_0, \eta_0) \in (\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}$ , il existe un voisinage

$\mathcal{V}(\tau_0, \eta_0)$  et des applications matricielles  $P : \mathcal{V} \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$  telles que

$$P^{-1}GP = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & Q_n \end{pmatrix}$$

où chaque bloc  $Q_k$  satisfait l'une des propriétés suivantes :

- soit  $\operatorname{Re}(Q_k) = \frac{Q_k + Q_k^*}{2}$  est définie positive,
- soit  $\operatorname{Re}(Q_k)$  est définie négative,
- soit  $Q_k$  est de taille 1, et son unique coefficient est imaginaire pur,
- soit  $Q_k$  est de taille  $p_k > 1$ , et on a

$$Q_k(\tau_0, \eta_0) = \begin{pmatrix} \lambda_k & i & & & \\ 0 & \lambda_k & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial Q_k^{p_k, 1}(\tau_0, \eta_0)}{\partial \operatorname{Re}(\tau)} \in \mathbb{R}^* .$$

On dira qu'un système

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j U,$$

est *constamment hyperbolique* lorsque la matrice  $\mathcal{A}(\eta) = \sum_{j=1}^d A_j \eta_j$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}^m$ , et que ses valeurs propres sont de multiplicité (algébrique égale à géométrique) constante pour  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Un système constamment hyperbolique est hyperbolique (voir le premier chapitre dans [12] ou [41]). Un système strictement hyperbolique est évidemment un cas particulier de système constamment hyperbolique.

Plus récemment, Métivier a prouvé une importante extension de la construction de symétriseurs pour les systèmes constamment hyperboliques.

**Théorème 1.3.7.** (Métivier [51], 2000) *Tout système constamment hyperbolique non caractéristique satisfait la condition de structure par blocs de Majda-Osher.*

Ce résultat requiert une étude poussée du déterminant du symbole, en particulier de sa factorisation, ces résultats combinés à l'hypothèse de diagonalisabilité de  $\mathcal{A}$  permettent de décrire complètement la structure de  $G$ . L'existence de cette structure permet la construction de symétriseurs pour le problème aux limites, qui implique alors le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.8.** *Pour les systèmes constamment hyperboliques et sous condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, le problème aux limites à donnée initiale nulle est bien posé, et on a la même estimation a priori (1.11) que dans le cas strictement hyperbolique.*

À notre connaissance, il n'existait pas d'analogue du théorème 1.3.5 de Rauch dans le cas constamment hyperbolique, sauf dans le cas plus simple où le système est Friedrichs symétrisable [57]. On démontre cet analogue dans ce qui suit. Ce résultat est l'objet d'un article soumis.

### 1.3.3 Une extension du théorème de Rauch

Le résultat suivant est une généralisation du théorème 1.3.5.

**Théorème 1.3.9.** *Si  $L$  est un opérateur constamment hyperbolique,  $F$  une application linéaire satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, le problème*

$$\begin{cases} Lu = 0, & (x, t) \in (\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+ =: \Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ Fu = \varphi \in L^2, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2, \end{cases}$$

admet une unique solution. On a de plus l'estimation ponctuelle en temps

$$\begin{aligned} e^{-\gamma T} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\gamma} \|u\|_{L^2_\gamma([0, T] \times \Omega)} + |u(x_d = 0)|_{L^2_\gamma([0, T] \times \partial\Omega)} \\ \leq C \left( |\varphi|_{L^2_\gamma([0, T] \times \partial\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La preuve est une adaptation du théorème original de J. Rauch [58]; on décrit rapidement sa stratégie de démonstration, en mettant l'accent sur les points qui utilisent la stricte hyperbolicité. Il en ressort que seule une proposition doit être modifiée, et nous en donnons une généralisation adaptée. Le reste de la preuve est alors une adaptation directe de [58].

Dans la suite, on note  $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ . La démonstration de l'inégalité (1.12) repose sur une estimation *a priori* pour les problèmes scalaires strictement hyperboliques.

**Lemme 1.3.10.** *(Rauch [58])*

*Soit  $P(\partial_x, \partial_t)$  un opérateur scalaire strictement hyperbolique d'ordre  $m$ . Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $T > 0$ , toute  $\phi \in H^m([-\infty, T] \times \Omega)$  et tout  $\varepsilon > 0$  assez petit*

$$\begin{aligned} \|\phi(T)\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leq C \left( \varepsilon \|P\phi\|_{L^2([-\infty, T] \times \Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi\|_{H^{m-1}([-\infty, T] \times \Omega)} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{m-1} \|\partial_{x_d}^j \phi\|_{H^{m-1-j}([-\infty, T] \times \partial\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le passage d'un système hyperbolique d'ordre 1 à une équation scalaire strictement hyperbolique se fait grâce à la proposition suivante. On verra que celle-ci n'utilise la stricte hyperbolicité que pour invoquer le lemme précédent et l'estimation *a priori* de Kreiss (1.11).

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $u$  une solution du problème aux limites*

$$\begin{cases} Lu = f, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ Bu = g, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.15)$$

avec  $L = \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$  de taille  $m$ ,  $A_d$  inversible. Si  $L$  est strictement hyperbolique, alors pour  $\gamma > 0$  assez grand on a l'estimation ponctuelle suivante :

$$e^{-\gamma T} \|u(T)\|_{H^{m-1}(\Omega)} \lesssim \frac{\|f\|_{H_\gamma^{m-1}(\mathbb{R} \times \Omega)}}{\sqrt{\gamma}} + \|g\|_{H_\gamma^{m-1}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)}. \quad (1.16)$$

*Une esquisse de preuve :* On note  $L^{\text{co}}$  la transposée de la comatrice de  $L$  (vue comme une matrice dont les coefficients sont des opérateurs différentiels). On a

$$L^{\text{co}}L = \det(L)I.$$

Ainsi, chaque coefficient diagonal de  $L^{\text{co}}L$  est un opérateur scalaire strictement hyperbolique. On peut donc appliquer le Lemme 1.3.10 à chaque coordonnée  $u_j$ , ce qui fournit

$$\begin{aligned} e^{-\gamma T} \|u(T)\|_{H^{k-1}(\Omega)} &\lesssim \varepsilon \|L^{\text{co}}L e^{-\gamma \cdot} u\|_{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|e^{-\gamma \cdot} u\|_{H^{k-1}(\mathbb{R} \times \Omega)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \|e^{-\gamma \cdot} \partial_{x_d}^j u\|_{H^{k-1-j}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Les termes de trace  $\sum_{j=0}^{k-1} \|e^{-\gamma \cdot} \partial_{x_d}^j u\|_{H^{k-1-j}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)}$  s'estiment en utilisant l'identité  $\partial_{x_d} u = A_d^{-1} \left( -\partial_t u - \sum_{j=1}^{d-1} A_j \partial_{x_j} u + f \right)$ , la continuité classique de la trace  $H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\partial\Omega)$  (Proposition A.0.9 en appendice), et l'analogue de (1.11) sur  $\mathbb{R} \times \partial\Omega$  (prouvée par Kreiss dans [40]). Enfin, en utilisant l'inégalité

$$e^{-\gamma T} \|u\|_{H^{k-1}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)} \leq \|u\|_{H_\gamma^{k-1}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)},$$

on obtient (1.16). □

L'obtention de (1.12) à partir de cette proposition s'avère fastidieuse : elle est basée sur l'introduction d'un problème dual, et une série d'estimations qui en dérivent (en particulier, l'apparition de normes dans des espaces de Sobolev d'indices négatifs est un point délicat). Heureusement, cette partie n'utilise pas l'hypothèse de stricte hyperbolicité, et nous nous abstenons de la décrire plus précisément.

On voit que la stricte hyperbolicité n'est utilisée que pour invoquer le lemme 1.3.10 ainsi qu'une estimation de Kreiss pour le problème aux limites strictement hyperbolique. Comme le résultat de Métivier étend cette estimation aux

problèmes constamment hyperboliques, le seul point épineux est l'utilisation du lemme 1.3.10.

Notons d'abord que l'esquisse de démonstration de la proposition 1.3.11 n'est effectivement pas valide pour un opérateur non strictement hyperbolique. Même si  $L$  est constamment hyperbolique,  $L^{co}L$  n'est en général pas strictement hyperbolique, comme on le voit avec l'exemple trivial de deux équations de transport indépendantes

$$\partial_t u + \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} u = 0, \quad (1.18)$$

qui forment un système clairement constamment hyperbolique et non strictement. Ici  $L^{co}L = \begin{pmatrix} (\partial_t + \partial_x)^2 & 0 \\ 0 & (\partial_t + \partial_x)^2 \end{pmatrix}$ . Même si (1.16) est vérifiée pour  $L = (\partial_t + \partial_x)I$ , on ne peut pas la déduire des équations scalaires

$$\det(L)u_j = (\partial_t + \partial_x)^2 u_j = 0, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Pour généraliser la proposition 1.3.11, on voit que tout revient à trouver un opérateur différentiel  $\tilde{L}$  tel que  $\tilde{L}L = P(\partial_t, \partial_x)I$ , avec  $P$  strictement hyperbolique.

Évidemment, le degré de  $P$  n'a aucune raison d'être encore égal au rang du système, mais l'indice de régularité dans (1.16) est sans importance puisque le lemme 1.3.10 s'applique pour des opérateurs scalaires d'ordre quelconque.

Pour construire  $\tilde{L}$ , nous aurons besoin du résultat algébrique suivant (voir la proposition 1.7 p.46 de [12]).

**Proposition 1.3.12.** *Si  $L$  est un opérateur constamment hyperbolique, le déterminant de son symbole  $\tau I + i \sum A_j \eta_j$  se factorise sous la forme suivante*

$$\prod_{k=1}^K P_k(\tau, \eta)^{q_k},$$

où

- chaque  $P_k$  est un polynôme homogène en  $(\tau, \eta)$ ,
- les  $P_k$  sont irréductibles, deux à deux distincts,
- pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , les racines de  $P_k(\cdot, \eta)$  sont réelles distinctes,
- pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $k \neq k'$ ,  $P_k(\cdot, \eta)$  et  $P_{k'}(\cdot, \eta)$  n'ont pas de racines en commun.

On peut maintenant prouver l'existence de  $\tilde{L}$ .

**Proposition 1.3.13.** *On se place dans le cadre de la Proposition 1.3.12. Alors*

- pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , le polynôme minimal de  $\sum_{j=1}^d A_j \eta_j$  est

$$\prod_1^K P_l(-\tau, \eta).$$

En particulier l'opérateur associé  $\prod P_k(\partial_t, \partial_x)$  est strictement hyperbolique ;

- les coefficients de la matrice

$$\tilde{L}(\tau, \eta) = \frac{L(\tau, \eta)^{co}}{\prod_{k=1}^K P_k^{q_k-1}(\tau, \eta)},$$

appartiennent à  $\mathbb{C}[\tau, \eta]$ ; l'opérateur  $\tilde{L}(\partial_t, \partial_x)$  est donc différentiel et satisfait  $\tilde{L}L = \prod_k P_k(\partial_t, \partial_x)$ .

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^d A_j \eta_j$  a pour polynôme caractéristique

$\prod_{k=1}^K P_k^{q_k}(-\tau, \eta)$ , la Proposition 1.3.12 et la diagonalisabilité de  $\mathcal{A}$  impliquent

directement que le polynôme  $\prod_{k=1}^K P_k(-\tau, \eta)$  est le polynôme minimal de  $\mathcal{A}$  (on rappelle qu'une matrice est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si son polynôme minimal n'a pas de racine multiple). Les racines de  $P_k(\cdot, \eta)$  étant réelles, simples, et les  $P_k$  n'ayant pas de racine en commun, on obtient la stricte hyperbolicité de  $\prod_{k=1}^K P_k$ .

On considère maintenant  $L(\tau, \eta) = \tau + \mathcal{A}$  comme une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}(\eta)[\tau]$ , anneau des polynômes en  $\tau$  sur le corps  $\mathbb{C}(\eta)$ . Puisque  $\mathbb{C}(\eta)[\tau]$  est un anneau principal, on peut définir  $D_r$ , le PGCD des mineurs de  $L$  d'ordre  $r$ , et si  $m$  est la taille du système  $D_m = \det(L)$  ( $D_m$  est à voir comme le mineur d'ordre  $m$ ). En particulier,  $D_{m-1}$  divise dans  $\mathbb{C}(\eta)[\tau]$  chaque coefficient de  $L^{co}$ . D'après la théorie des invariants de Smith (voir par exemple Gantmächer [28] chapitre VI section 3, où ils sont appelés « elementary divisors », ou Serre [63] chapitre 6, « facteurs invariants »),  $D_{k-1} | D_k$  et plus précisément  $\tau \rightarrow \frac{D_m}{D_{m-1}}(-\tau, \eta)$  est le polynôme minimal de  $\mathcal{A}$ . Ainsi

$$\frac{D_m}{D_{m-1}} = \prod_{k=1}^K P_k, \text{ ce qui implique } D_{m-1} = \prod_{k=1}^K P_k^{q_k-1}. \quad (1.19)$$

Par définition, les coefficients de  $L^{co}$  sont (au signe près) les mineurs de  $L$  d'ordre  $m-1$ . Donc chaque coefficient de  $\tilde{L}(\tau, \eta) = \frac{L(\tau, \eta)^{co}}{\prod_k P_k^{q_k-1}}$  est dans  $\mathbb{C}(\eta)[\tau]$ .

Il reste à prouver qu'ils sont en fait dans  $\mathbb{C}[\eta][\tau]$ .

Soit  $\tilde{l}$  un coefficient quelconque de  $\tilde{L}$ ,

$$\tilde{l} = \sum r_j(\eta) \tau^j = \frac{l}{\prod_{k=1}^K P_k^{q_k-1}}, \quad l \in \mathbb{C}[\tau, \eta], \quad r_j \in \mathbb{C}(\eta).$$



Soit  $q$  le PPCM des denominateurs des  $r_j$ . On a alors

$$\tilde{l} = \frac{l_1}{q}, \text{ avec } l_1 \in \mathbb{C}[\eta][\tau], \quad q \in \mathbb{C}[\eta].$$

Pour  $Q \in \mathbb{C}[\eta][\tau]$  (polynôme en  $\tau$  à coefficients dans l'anneau factoriel  $\mathbb{C}[\eta]$ ), on note  $c(Q) \in \mathbb{C}[\eta]$  le PGCD de ses coefficients (ou *contenu*). D'après le lemme de Gauss on a

$$c(Q_1 Q_2) = c(Q_1) c(Q_2) .$$

Puisque le degré de  $P_j$  est le même que le degré de  $P_j$  comme polynôme en  $\tau$ ,

$$c(P_j) = 1, \text{ on obtient } c(l_1) c\left(\prod_{k=1}^K P_k^{q_k-1}\right) = c(l) c(q), \text{ d'où}$$

$$c(l_1) = c(l) q , \tag{1.20}$$

et donc  $q|c(l_1)$ . Mais par construction  $\text{pgcd}(q, c(l_1)) = 1$ , ce qui implique  $q = 1$ . Finalement,  $\tilde{l} = q\tilde{l} = l_1 \in \mathbb{C}[\eta, \tau]$  est un polynôme, l'opérateur différentiel matriciel  $\tilde{L}$  est bien défini et  $\tilde{L}(\tau, \eta)L(\tau, \eta) = \prod_{l=1}^L P_l(\tau, \eta)$  implique

$$\tilde{L}(\partial_t, \partial_x)L(\partial_t, \partial_x) = \prod_{k=1}^K P_k(\partial_t, \partial_x) .$$

□

### 1.3.4 Des généralisations quasi-homogènes

Le théorème d'existence de symétriseurs de Kreiss s'avère être très puissant, essentiellement car il est constructif et repose sur quelques hypothèses purement algébriques, en particulier sur le fait que la partie homogène de degré  $m$  du symbole n'a pas de racine imaginaire pure pour  $\text{Re}(\tau) > 0$ .

En 2005, Métivier et Zumbrun [52] ont utilisé des techniques analogues pour étudier la nature bien posée de problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques « visqueux », c'est à dire de la forme

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u - \varepsilon \sum_{j,k} \partial_j B_{j,k} \partial_k u .$$

Ils introduisent comme dans le cas classique le symbole  $\tau + i\mathcal{A} + \varepsilon \sum B_{j,k} \eta_j \eta_k$ . Une difficulté importante vient de la non homogénéité du symbole, ce qui les conduit à distinguer les basses fréquences ( $(\tau, \eta)$  sont petits) où le caractère hyperbolique prévaut en un certain sens, des hautes fréquences, où c'est le caractère parabolique qui l'emporte.

Bien que la partie la plus délicate de l'article corresponde à l'étude à basse fréquence, l'étude à haute fréquence a aussi son intérêt : les auteurs notent que

le système a une « quasi-homogénéité » naturelle, où  $\eta$  a pour poids 1, et  $\tau$  a pour poids 2. La construction de symétriseurs à haute fréquence se fait alors en utilisant cette quasi-homogénéité. Cette construction d'un symétriseur quasi-homogène pour un système parabolique est beaucoup plus simple que dans le cas hyperbolique, essentiellement parce que dans le problème aux limites qui apparaît après transformation de Fourier-Laplace  $\partial_x U = G(\tau, \eta)U$ , les valeurs propres de  $G$  ne sont jamais imaginaires pures, même pour  $\text{Re}(\tau) = 0$  (en terme de construction de symétriseurs, cela signifie que tous les points sont « elliptiques »).

L'étude de problèmes aux limites pour des équations quasi-homogènes non paraboliques a été abordée dans le cas scalaire dès 1978 par Gindikin et Volevich [67] qui introduisaient la notion de *q-hyperbolicité*, pour  $q$  entier impair. Un livre [31] où ils décrivent leurs résultats pour les problèmes aux limites quasi-homogènes est paru en anglais en 1995. Le résultat le plus notable est sans doute l'obtention d'une estimation presque identique à (1.11) dans des espaces à poids en temps *et* espace. L'exemple canonique d'équation  $q$  hyperbolique en dimension quelconque est

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d \partial_j^q u = 0 .$$

On reviendra sur cette notion au chapitre 3 pour la comparer à celle que nous avons choisi de développer.



# Chapitre 2

## Etude du problème d'Euler-Korteweg linéarisé

Ce chapitre correspond à un article publié au Journal of Differential Equations [5], on y étudie une version linéarisée à coefficients constants du système d'Euler-Korteweg. Ce sera l'occasion de se familiariser avec les symétriseurs de Kreiss généralisés pour l'étude du problème aux limites, ainsi qu'avec les estimations dispersives (en dimension 1) pour le problème de Cauchy, qui permettent d'établir par le principe de superposition la nature bien posée du problème mixte.

### 2.1 Introduction

The Euler-Korteweg system consists of the Euler equations with an additional “stress” term :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla g(\rho) = \nabla (K(\rho)\Delta\rho + \frac{1}{2}K'(\rho)|\nabla\rho|^2), \end{cases} \quad (2.1)$$

where  $\rho$  represents the density,  $u \in \mathbb{R}^d$  the velocity of a compressible fluid,  $g : \rho \rightarrow g(\rho)$  (chemical potential) and  $K : \rho \rightarrow K(\rho)$  (capillarity) are given smooth functions. The additional Korteweg tensor is intended to take into account capillarity effects. It is named after the work of Korteweg [39] in the XIXth century, see [66] for the derivation of the modern form of the equations. This is a quasilinear third order system and it is known to admit local in time smooth solutions [8] and global smooth solutions such as traveling waves [10] in the whole space  $\mathbb{R}^d$ . A key point for the Cauchy problem analysis is the use of an additional dependent variable  $v = \nabla\zeta$ , where  $\nabla\zeta = \sqrt{\frac{K'(\rho)}{\rho}}\nabla\rho$  : the extended system in the variables  $(\zeta, u, v)$  takes the form of a transport equation with source term for  $\zeta$  coupled with a degenerate Schrödinger equation for  $z = u + iv$ . A priori estimates without loss of derivatives can then be obtained by integration by parts, suitable choices of weight functions and commutator

estimates.

In this paper, we are concerned with initial boundary value problems (IBVP) for (2.1), which are more relevant from a physical point of view. As usual, they are more complicated to deal with than the Cauchy problem, in particular because of boundary terms in the integrations by parts. For dispersive PDE's in general, the IBVP has been addressed only recently (see [26]). For (2.1) in particular, it is mostly open.

As a first step, we consider the initial boundary value problem in a half space. Our aim is twofold :

- 1) To characterize boundary conditions that are both physically reasonable and likely to yield suitable a priori estimates (possibly with no loss of derivatives) ;
- 2) To actually prove a priori estimates for those boundary conditions, at least for the linearized problem with constant coefficients.

The analysis of a constant coefficient linear problem in the half space  $\{x_d > 0\}$  is classically tackled by Fourier-Laplace transform, Laplace in time and Fourier in directions of the hyperplane  $\{x_d = 0\}$ , which transforms the PDE system into an ODE of the form  $\partial_{x_d} \widehat{U} + G\widehat{U} = \widehat{U}_0$ , where the matrix  $G$  depends on  $\tau \in \mathbb{C}$ , dual variable to  $t$ , and  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ , dual variable to  $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$ , and  $\widehat{U}_0$  is the Fourier transform of the initial condition for the unknown  $U$ .

Our approach is inspired by the strategy of Métivier and Zumbrun [52] for hyperbolic -parabolic IBVP, which consists in constructing quasi-homogeneous generalized Kreiss symmetrizers to obtain a priori estimates. However, we have to cope with two notable difficulties : the homogeneity properties of the system are definitely worse, due to dispersive third order terms, and some eigenvalues of  $G$  are purely imaginary when  $\text{Re}(\tau) = 0$  (as in hyperbolic IBVPs).

The first one is dealt with by working on the extended system rather than the initial one, since it appears to have better homogeneity properties. If  $d \geq 2$ , it turns out that the boundary value problem is characteristic, this is one of the reasons why we shall restrict the analysis to the one-dimensional case ( $d = 1$ ). The second difficulty requires to study carefully the asymptotic behavior of  $G$ 's eigenvalues. It turns out that in dimension 1 the eigenvalues of  $G$  split into two of positive real part and two of negative real part, which remain well separated when  $\text{Re}(\tau) \rightarrow 0$ , at least if  $|\tau|$  is large enough, which is the most relevant case. This will allow us to construct a Kreiss symmetrizer under a generalized Kreiss-Lopatinskiï condition.

The paper is organized as follows : the Kreiss-Lopatinskiï condition will be derived in Section 2 and we give an asymptotic development of  $G$ 's eigenvalues. In Section 3, we introduce the extended system, exhibit physically reasonable boundary conditions that do satisfy the Kreiss-Lopatinskiï condition, and the actual construction of symmetrizers is done. The subsequent derivation of a priori estimates is followed in section 4 by existence and uniqueness results.

## 2.2 Kreiss-Lopatinskiĭ condition for the linearized Euler-Korteweg system

We linearize the Euler-Korteweg equations (2.1) about a constant state  $(\underline{\rho}, \underline{u})$ , supposed to be thermodynamically stable which means  $g'(\underline{\rho}) > 0$ . In what follows, we use the simplified notations  $\underline{g}' = g'(\underline{\rho})$ ,  $\underline{K} = K(\underline{\rho})$ .

The linearized system reads

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \underline{u} \cdot \nabla \rho + \underline{\rho} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \underline{g}' \nabla \rho - \underline{K} \nabla \Delta \rho + \underline{u} \cdot \nabla u = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

For  $\underline{\rho} > 0$ ,  $\underline{g}' > 0$ ,  $\underline{K} > 0$ , the operator  $(\rho, u) \mapsto (-u \cdot \nabla \rho - \underline{\rho} \operatorname{div} u, -\underline{g}' \nabla \rho + \underline{K} \nabla \Delta \rho - \underline{u} \cdot \nabla u)$  is the infinitesimal generator of a  $\mathcal{C}^0$  semi-group of contractions on  $H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  (see [10] section 3.1). So the Cauchy problem is rather well understood.

To deal with the IBVP in the half space  $\{x_d > 0\}$ , we apply a Fourier transform in  $(x_1, \dots, x_{d-1})$  and a Laplace transform in time, under which (2.2) becomes

$$\begin{cases} \tau \hat{\rho} + \underline{v} \cdot i\eta \hat{\rho} + \underline{w} \partial_d \hat{\rho} + \underline{\rho}(i\eta \cdot \hat{v} + \partial_d \hat{w}) = \mathcal{F}(\rho_0), \\ \tau \hat{v} + \underline{g}' i\eta \hat{\rho} - \underline{K} i\eta(-|\eta|^2 + \partial_d^2) \hat{\rho} + \underline{v} \cdot \eta \hat{v} + \underline{w} \partial_d \hat{v} = \mathcal{F}(v_0), \\ \tau \hat{w} + \underline{g}' \partial_d \hat{\rho} - \underline{K} \partial_d(-|\eta|^2 + \partial_d^2) \hat{\rho} + \underline{v} \cdot \eta \hat{w} + \underline{w} \partial_d \hat{w} = \mathcal{F}(w_0), \end{cases} \quad (2.3)$$

where we have decomposed  $\hat{u} = (\hat{v}, \hat{w})$ ,  $\hat{v} \in \mathbb{C}^{d-1}$ ,  $\hat{w} \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\tau) > 0$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\mathcal{F}$  is the Fourier transform on the  $d-1$  first coordinates and  $(\rho_0, u_0, v_0)$  are initial data.

The equations in (2.3) can be written in the matricial form :

$$B \partial_d \hat{U} = A(\tau, \eta) \hat{U} + f \quad (2.4)$$

where  $\hat{U} = (\hat{\rho}, \partial_d \hat{\rho}, \partial_d^2 \hat{\rho}, i\hat{v}, \hat{w})$  and  $f = (0, 0, -\mathcal{F}(w_0), i\mathcal{F}(v_0), \mathcal{F}(\rho_0))$ . Up to a galilean transformation in the direction  $x_d = 0$ , we can choose  $\underline{v} = 0$ . Then the matrices reduce to :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{K} & 0 & -\underline{w} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\rho} \end{pmatrix},$$

$$A(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{g}' + \underline{K}|\eta|^2 & 0 & 0 & \tau \\ (\underline{g}' + \underline{K}|\eta|^2)\eta & 0 & -\underline{K}\eta & -\tau I_{d-1} & 0 \\ -\tau & -\underline{w} & 0 & -\rho\eta^t & 0 \end{pmatrix}.$$

If  $\underline{w}\underline{\rho}\underline{K} \neq 0$ ,  $B$  is invertible, and the system (2.4) can be put in the form  $\partial_d \hat{U} = B^{-1} A \hat{U} + B^{-1} f$ . The characteristic polynomial reads

$$\begin{aligned} P(\omega; \tau, \eta) &:= \det(B^{-1} A(\tau, \eta) - \omega) \\ &= (\tau + \underline{w}\omega)^{d-1} ((\tau + \underline{w}\omega)^2 - \underline{\rho}(\underline{g}' - \underline{K}(\omega^2 - \eta^2))(\omega^2 - \eta^2)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

If  $d = 1$ , we just have to set  $\eta = 0$ , and we find the reduced polynomial for the one-dimensional version of (2.4) :

$$P(\omega; \tau) = (\tau + \underline{w}\omega)^2 - \underline{\rho}(\underline{g}' - \underline{K}\omega^2)\omega^2 . \quad (2.6)$$

**Proposition 2.2.1.** *If  $Re(\tau) > 0$ , the matrix  $B^{-1}A$  is hyperbolic, i.e. it has no purely imaginary eigenvalue.*

*Démonstration.* Obviously, the root  $\omega_0 = \frac{-\tau}{\underline{w}}$  associated to the factor  $(\tau + \underline{w}\omega)^{d-1}$  in (2.5) is not purely imaginary if  $Re(\tau) > 0$ .

Assume that  $\omega = i\nu \in i\mathbb{R}$  is a root of the other factor in  $P$ , i.e.

$$(\tau + \underline{w}i\nu)^2 + \underline{\rho}(\underline{g}' + \underline{K}(\nu^2 + \eta^2))(\nu^2 + \eta^2) = 0 . \quad (2.7)$$

Since  $\underline{\rho}(\underline{g}' + \underline{K}(\nu^2 + \eta^2))(\nu^2 + \eta^2) \in \mathbb{R}^+$ ,  $\tau + i\underline{w}\nu$  must be purely imaginary and thus also  $\tau$  has to be purely imaginary.  $\square$

We assume here that boundary conditions  $FU = \varphi(t, y)$  are prescribed, with  $F$  a linear operator to be specified later, and  $y = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ . We now work in an heuristic way to derive necessary algebraic properties of  $F$  for the IBVP to be well-posed. Let us consider  $(\tau, \eta)$  as parameters of the BVP :

$$\begin{cases} \partial_{x_d} \widehat{U} = B^{-1}A\widehat{U} + f , & x_d > 0, \\ F\widehat{U} = \widehat{\varphi}, & x_d = 0 , \end{cases} \quad (2.8)$$

(where we wrote abusively  $f$  instead of  $B^{-1}f$ ).

If we want (2.8) to have just one solution  $\widehat{U} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , the boundary data must belong to the stable subspace  $E^-$  of  $B^{-1}A$  (sum of the generalized eigenspaces corresponding to the eigenvalues of negative real part). So the existence and uniqueness of an  $L^2$  solution amounts to the unique solvability of the algebraic system

$$\begin{cases} F\widehat{U}(0) = \widehat{\varphi}, \\ \widehat{U}(0) \in E^- . \end{cases}$$

Thus  $F$  must be an isomorphism  $E^- \rightarrow Im(F)$  : this is the Lopatinskiï condition (for more details, see the introduction in [51]), which requires at least that  $E^-$  have a constant dimension on  $Re(\tau) > 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$  (the number of boundary conditions).

We investigate now this last condition. In order to simplify the notations, we will use a rescaled version of the polynomial  $P$ . We consider the nondimensional quantities

$$\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{\underline{\rho}\underline{K}}}{\underline{c}^2}\tau, \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{\underline{\rho}\underline{K}}}{\underline{c}}\omega, \quad \tilde{\eta} = \frac{\sqrt{\underline{\rho}\underline{K}}}{\underline{c}}\eta, \quad \underline{M} = \frac{\underline{w}}{\underline{c}} \text{ (the Mach number)}, \quad (2.9)$$

with  $\underline{c} = \sqrt{\underline{g}'\underline{\rho}}$  the sound speed, and define

$$\tilde{P}(\tilde{\omega}; \tilde{\tau}, \tilde{\eta}) = ((\tilde{\tau} + \underline{M}\tilde{\omega})^2 - (\tilde{\omega}^2 - \tilde{\eta}^2)(1 - (\tilde{\omega}^2 - \tilde{\eta}^2))) \times (\tilde{\tau} + \underline{M}\tilde{\omega})^{d-1} . \quad (2.10)$$

It is easily checked that  $P(\omega; \tau, \eta) = 0$  is equivalent to  $\tilde{P}(\tilde{\omega}; \tilde{\tau}, \tilde{\eta}) = 0$ .

In what follows, we omit the tildas for simplicity.

The roots of  $P$  consist of (obviously)  $-\tau/\underline{M}$ , of multiplicity  $d - 1$ , and those of  $Q(\omega, \tau, \eta) = (\tau + \underline{M}\omega)^2 - (\omega^2 - \eta^2)(1 - (\omega^2 - \eta^2))$ .

**Lemma 2.2.2.** *For  $Re(\tau) > 0$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ , there are two roots of  $Q$  (counted with multiplicity) in  $\{Re(\omega) > 0\}$ , and two in  $\{Re(\omega) < 0\}$ .*

*Démonstration.* We already know from Proposition 2.2.1 that  $Q(\cdot; \tau, \eta)$  admits no purely imaginary root for  $Re(\tau) > 0$ . So it suffices by a connectedness argument to prove the result for some arbitrary  $(\tau, \eta)$ . We are going to study the case  $(\tau, \eta) = (\tau, 0)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\tau \gg 1$ . The equation  $P(\omega, \tau, \eta) = 0$  becomes

$$(\tau + \underline{M}\omega)^2 - \omega^2(1 - \omega^2) = 0 . \quad (2.11)$$

Dividing by  $\tau^2$ , we get :

$$\left(1 + \underline{M}\varepsilon\hat{\omega}\right)^2 - \hat{\omega}^2(\varepsilon^2 - \hat{\omega}^2) = 0 , \quad (2.12)$$

where  $\hat{\omega} := \varepsilon\omega$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ .

For  $\varepsilon = 0$ , Equation (2.12) reduces to  $1 + \hat{\omega}^4 = 0$ , whose roots are  $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ . Obviously, they are distinct, two have a positive real part and two a negative real part.

We conclude by continuity of the roots of (2.12) (see for example Kato [37] p. 107) that (2.11) has exactly two solutions of positive real parts and two solutions of negative real part for all  $(\tau, \eta)$  in the connected set  $\{(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} : Re(\tau) > 0\}$ .  $\square$

**Remark.** This lemma indicates that the stable subspace of  $B^{-1}A$  has a constant dimension, depending on the sign of  $\underline{M}$  (or equivalently the sign of  $\underline{w}$ ). Therefore, there should be 2 boundary conditions if  $\underline{M} < 0$ , and  $d + 1$  if  $\underline{M} > 0$ . That this number depends on  $\underline{w}$  should not be surprising, since the first equation of (2.2) can be seen as an advection equation with speed  $\underline{w}$  transversally to the boundary  $\{x_d = 0\}$ .

In general, boundary conditions as in (2.8) have no reason to be ‘dissipative’, in the sense that a priori estimates cannot be obtained by direct energy methods. Symmetrizers are useful tools that were originally introduced by Kreiss [40] to cope with this problem for (homogeneous) hyperbolic (in the sense of PDEs) IBVPs.

**Definition 2.2.3.** A (generalized) symmetrizer  $S$  for (2.8) is a  $d \times d$  self adjoint operator, depending smoothly on  $(\tau, \eta)$  for  $\gamma := Re(\tau) \geq 0$ , uniformly bounded and satisfying :

$$\exists \alpha(\tau, \eta) > 0 : S(\tau, \eta)B^{-1}A(\tau, \eta) \geq \gamma\alpha(\tau, \eta)I_d , \quad (2.13)$$

$$\exists C(\tau, \eta) > 0, \exists \beta(\tau, \eta) > 0 : S(\tau, \eta) \geq \beta(\tau, \eta)I_d - C(\tau, \eta)F^*F . \quad (2.14)$$



We can see the main interest of a symmetrizer in the following standard property.

**Proposition 2.2.4.** *If there is a symmetrizer  $S$  satisfying (2.13), (2.14), any smooth solution of (2.8) satisfies :*

$$\alpha(\tau, \eta) \frac{\gamma}{2} \|\widehat{U}\|^2 + \beta(\tau, \eta) |\widehat{U}(0)|^2 \leq C(\tau, \eta) |\widehat{\varphi}|^2 + \frac{\|S\|_\infty^2}{2\gamma\alpha(\tau, \eta)} \|f\|^2, \quad (2.15)$$

where  $|\cdot|$  is the usual euclidean norm in  $\mathbb{C}^{2d+3}$ , and  $\|\cdot\|$  is the  $L^2$  norm for functions of  $x_d \in \mathbb{R}^+$ .

If  $\alpha, \beta, C$  do not depend on  $(\tau, \eta)$ , we have the a priori estimate

$$\alpha \frac{\gamma}{2} \|U_\gamma\|^2 + \beta |U_\gamma(0)|^2 \leq C |\varphi_\gamma|^2 + \frac{\|S\|_\infty^2}{2\gamma\alpha} \|\mathcal{F}^{-1}(f)_\gamma\|^2, \quad (2.16)$$

where  $\gamma = \text{Re}(\tau)$  is fixed,  $\varphi, U$  are the inverse Fourier-Laplace transform of  $\widehat{\varphi}, \widehat{U}$ , generically  $g_\gamma = e^{-\gamma t} g$ , and the norms are now integrated in both space and time.

**Remark.** If  $\alpha$  depends on  $(\tau, \eta)$ , we may derive from (2.15) a priori estimates with loss of derivatives instead of (2.16).

Typically,  $\alpha = \beta = \frac{\gamma^{2s}}{(|\tau|^2 + \|\eta\|^2)^s}$  gives

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \|U_\gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)}^2 + \beta |U_\gamma(0)|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1})}^2 &\leq C |\varphi_\gamma|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^s(\mathbb{R}^{d-1}))}^2 \\ &+ \frac{\|S\|_\infty^2}{2\gamma} \|\mathcal{F}^{-1}(f)_\gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H^s(\mathbb{R}))}^2. \end{aligned}$$

Note that  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$  is not the usual product of time by space, but  $\{x_d > 0\} \times \{x_1, \dots, x_{d-1}, t\}$  (and the same goes for  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ ).

*Démonstration.* Taking the inner product of  $S\partial_d \widehat{U} = S(B^{-1}A\widehat{U} + f)$  with  $\overline{\widehat{U}}$ , integrating on  $\mathbb{R}$  and using that  $S$  is hermitian gives :

$$\int_0^\infty \widehat{U}^* \cdot SB^{-1}A\widehat{U} dx_d + \widehat{U}^*(0) \cdot S\widehat{U}(0) = - \int_0^\infty \widehat{U}^* \cdot Sf \quad (2.17)$$

for  $\widehat{U}$  smooth enough and vanishing at  $\infty$ .

Using (2.13), (2.14) we obtain :

$$\alpha\gamma \|\widehat{U}\|^2 + \beta |\widehat{U}(0)|^2 \leq C |\widehat{\varphi}|^2 + \|S\|_\infty \|f\| \|\widehat{U}\| \quad (2.18)$$

hence (2.15) by Young's inequality.

Now, if  $\alpha, \beta$  are constants, we integrate this inequality on  $\mathbb{R}^d = \{(\delta, \zeta_1, \dots, \zeta_{d-1}) \in \mathbb{R}^d\}$ , and since  $\mathcal{F}U_\gamma(t, y_1, \dots, y_{d-1}) = \widehat{U}(\gamma + i\delta, \zeta_1, \zeta_{d-1})$ , we obtain (2.16) by Plancherel's theorem.  $\square$

In the remain of this section, we focus on the case  $d = 1$ . Would there exist a bounded symmetrizer  $S$  satisfying an inequality of the kind (2.13) with  $\alpha$  constant, the real part of the eigenvalues of  $G$  should remain bounded away from 0 for  $\operatorname{Re}(\tau) > 0$  as  $|\operatorname{Im}(\tau)| \rightarrow \infty$ . We are going to show that this is not the case.

**Proposition 2.2.5.** *Let  $\tau = \gamma + i\delta$ ,  $\gamma > 0$ . Denote by  $(\omega_1^+, \omega_2^+)$ , resp.  $(\omega_1^-, \omega_2^-)$  the roots of positive real part, resp negative, of  $P(\cdot; \tau)$ .*

*Two of them have their real part vanishing when  $\delta \rightarrow +\infty$ , while the other two have their real part vanishing when  $\delta \rightarrow -\infty$ .*

*More precisely, we may choose the numbering of eigenvalues in such a way that :*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega_1^\pm) &\sim \pm \frac{\gamma}{2\sqrt{\delta}}, \quad \delta \rightarrow +\infty, \\ \operatorname{Re}(\omega_2^\pm) &\rightarrow \pm\infty, \quad \delta \rightarrow +\infty, \\ \operatorname{Re}(\omega_1^\pm) &\rightarrow \pm\infty, \quad \delta \rightarrow -\infty, \\ \operatorname{Re}(\omega_2^\pm) &\sim \pm \frac{\gamma}{2\sqrt{|\delta|}}, \quad \delta \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Recall the notation  $\widehat{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{|\tau|}}$ . Using this variable, the equation

$P(\omega, \tau) = 0$  amounts to (2.12), which implies  $\widehat{\omega}^4 + \frac{\tau^2}{|\tau|^2} + o(1) = 0$  when  $\operatorname{Im}(\tau) = \delta \rightarrow \infty$  (by the proof of Lemma 2.2.1). Thus :

$$\omega = e^{\sqrt[4]{-\tau^2}} + \mu \text{ with } e \in \{1, -1, i, -i\}, \quad \mu = o(\sqrt{|\tau|}). \quad (2.19)$$

Here above  $\sqrt[4]{\cdot}$  is defined by the determination of the logarithm on  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$  for which  $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$ .

We study the case  $e = 1$ , i.e.  $\omega = \sqrt[4]{-\tau^2} + \mu$  first. When  $\delta \rightarrow -\infty$ ,  $\operatorname{Re}\sqrt[4]{-\tau^2} \sim \sqrt{|\delta|} \rightarrow +\infty$ . When  $\delta > 0$ , we have

$$\sqrt[4]{-\tau^2} = \sqrt{\delta} \sqrt[4]{1 - \frac{2i\gamma}{\delta} - \frac{\gamma^2}{\delta^2}}.$$

Since  $\operatorname{Log}(1 - i\varepsilon) = 2i\pi - i\varepsilon + o(\varepsilon)$ , we have :

$$\mu_0 := \sqrt[4]{-\tau^2} = \sqrt{\delta} i \left( 1 - \frac{i\gamma}{2\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \right) = \sqrt{\delta} \left( i + \frac{\gamma}{2\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \right) \quad (2.20)$$

It suffices to check that  $\operatorname{Re}(\mu) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$  to complete the proof.

Applying twice the method used to obtain  $\omega_0$ , we find the asymptotic expansion :

$$\omega_+ = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\right), \quad (2.21)$$

$$\text{with } \mu_1 = -\frac{\tau M}{\mu_0^2}, \quad \mu_2 = \frac{-1}{4\mu_0^3} (6\mu_0^2 \mu_1^2 + (M^2 - 1)\mu_0^2 + 2\tau M \mu_1) \quad (2.22)$$

By (2.20) and a Taylor expansion again, we obtain that  $|Re(\mu_1)| \lesssim \frac{1}{|\tau|}$  and  $Re(\mu_2) \lesssim \frac{1}{\sqrt{|\tau|^3}}$  (the notation  $a \lesssim b$  means that  $a \leq Cb$  with  $C$  a constant

independent of the parameters), so that  $Re(\omega_+) = Re(\mu_0) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\right)$  as claimed. Thus  $\omega = \sqrt[4]{-\tau^2}$  is the  $\omega_1^+$  described in Proposition 2.2.5.

Now, noticing that the other roots are (essentially) obtained by multiplying  $\omega_1^+$  by  $i$ ,  $-1$  and  $-i$ , we would get  $\omega_1^- = -\omega_1^+$ ,  $\omega_2^+ = -i\omega_1^+$ , and  $\omega_2^- = i\omega_1^+$ .  $\square$

As the real parts of the eigenvalues of  $B^{-1}A$  do not remain bounded away from zero when  $Re(\tau) > 0$ , the construction of a classical symmetrizer for (2.8) is compromised. However, we can still search for a generalized symmetrizer as for weakly stable hyperbolic IBVP, see [19] for a general approach. A bigger problem is the very nonhomogeneous structure of  $B^{-1}A$  which makes it hard to manipulate. That is why we will use in the next part another equivalent system with better properties.

## 2.3 The linearized extended system

In [8], the authors introduce the *extended system* :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + u \cdot \nabla \zeta + a(\zeta) \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \nabla \left( \frac{1}{2} |v|^2 \right) - \nabla (a(\zeta) \operatorname{div} v) = -g'(\zeta) v, \\ \partial_t v + \nabla (u \cdot v) + \nabla (a(\zeta) \operatorname{div} v) = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

satisfied by  $(\zeta = R(\rho), u, v = \nabla \zeta)$ , if  $(\rho, u)$  is a (smooth) solution of (2.1), with  $R$  a primitive of  $\rho \rightarrow \sqrt{K(\rho)}/\rho$  and  $a(\zeta) = \sqrt{\rho K(\rho)}$  ( $\rho$  is to be seen here as  $R^{-1}(\zeta)$ ). For simplicity we have written  $g'(\zeta)$  for  $(g \circ R^{-1})'(\zeta)$ .

The main interest of this new system is that it yields a priori estimates without loss of derivatives on the whole space. Indeed, summing the second equation with  $i$  times the third, a Schrödinger-type equation appears. As we will see, the analysis of the boundary problem is made possible on the half line too.

Let  $(\underline{\zeta}, \underline{u}, \underline{v})$  be a constant state solution of (2.23), the linearized equations about  $(\underline{\zeta}, \underline{u}, \underline{v})$  read :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \underline{u} \cdot \nabla \zeta + \underline{a} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + (\underline{u} \cdot \nabla) u - \nabla (\underline{v} \cdot v) - \nabla (\underline{a} \operatorname{div} v) = -\underline{g}' v - \underline{v} g', \\ \partial_t v + \nabla (\underline{u} \cdot v) + \nabla (\underline{a} \operatorname{div} v) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

where  $a(\underline{\zeta}) = \underline{a}$ ,  $g'(\underline{\zeta}) = \underline{g}'$ .

We first focus on the pure boundary value problem, where  $t$  runs in  $\mathbb{R}$ . Decomposing  $u = (\tilde{u}, u_d), v = (\tilde{v}, v_d)$ , with  $\tilde{u}$  and  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^{d-1}$  and making a Fourier-

Laplace transform on (2.23) we get the system :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_d \partial_d \widehat{\zeta} = -(\tau \widehat{\zeta} + (\underline{\tilde{u}} \cdot i\eta) \widehat{\zeta} + \underline{a} i\eta \cdot \widehat{u} + \underline{a} \partial_d \widehat{u}_d) , \\ \underline{u}_d \partial_d \widehat{u} = -(\tau \widehat{u} + (\underline{\tilde{u}} \cdot i\eta) \widehat{u} + \underline{g}' \widehat{v} + \underline{g}' \underline{\tilde{v}} - i\eta(\underline{\tilde{v}} \cdot \widehat{v} + \underline{v}_d \widehat{v}_d + \underline{a}(i\eta \cdot \widehat{v}) \\ + \underline{a} \partial_d \widehat{v}_d)) , \\ \partial_d \widehat{u}_d = \partial_d \widehat{u}_d , \\ \underline{a} \partial_d (i\eta \cdot \widehat{u}) + \underline{a} \partial_d^2 \widehat{u}_d + \partial_d \underline{\tilde{u}} \cdot \widehat{v} = -(\tau \widehat{v}_d + \partial_d (\underline{u}_d \widehat{v}_d)) , \\ 0 = -(\tau \widehat{v} + \underline{a} i\eta (i\eta \cdot \widehat{u} + \partial_d \widehat{u}_d) + i\eta(\underline{\tilde{u}} \cdot \widehat{v} + \underline{u}_d \widehat{v}_d)) , \\ \partial_d \widehat{v}_d = \partial_d \widehat{v}_d , \\ \partial_d \underline{\tilde{v}} \cdot \widehat{v} + \underline{a} \partial_d^2 \widehat{v}_d = \tau \widehat{u}_d + \underline{\tilde{u}} \cdot i\eta \widehat{u}_d + \underline{u}_d \partial_d \widehat{u}_d + \underline{g}' \widehat{v}_d - \partial_d \underline{v}_d \widehat{v}_d + \underline{g}' \underline{v}_d . \end{array} \right. \quad (2.25)$$

This is an algebro-differential system in  $\widehat{U} = (\widehat{\zeta}, \widehat{u}, \widehat{u}_d, \widehat{v}, \widehat{v}_d)$  which can be rewritten as  $B \partial_d U = AU$ ,  $U = (\widehat{\zeta}, \widehat{u}, \widehat{u}_d, \partial_d \widehat{u}_d, \widehat{v}, \widehat{v}_d, \partial_d \widehat{v}_d)$ .

The matrix  $B$  is not invertible, except if  $d = 1$ . In what follows, we restrict ourselves to the *one-dimensional* case, and we omit the superscript  $d$ . Since  $v$  is supposed to be the gradient of  $\zeta$ , we linearize at  $\underline{v} = 0$ .

The system (2.25) reduces to

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \partial_x \widehat{\zeta} = -(\tau \widehat{\zeta} + \underline{a} \partial_x \widehat{u}) , \\ \partial_x \widehat{u} = \partial_x \widehat{u} , \\ \underline{a} \partial_x^2 \widehat{u} = -(\tau \widehat{v} + \partial_x (\underline{u} \widehat{v})) , \\ \partial_x \widehat{v} = \partial_x \widehat{v} , \\ \underline{a} \partial_x^2 \widehat{v} = \tau \widehat{u} + \underline{u} \partial_x \widehat{u} + \underline{g}' \widehat{v} , \end{array} \right.$$

Or equivalently  $\partial_x U = GU$ , with

$$G = \begin{pmatrix} \frac{-\tau}{\underline{u}} & 0 & \frac{-\underline{a}}{\underline{u}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\tau}{\underline{a}} & \frac{-\underline{u}}{\underline{a}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\tau}{\underline{a}} & \frac{\underline{u}}{\underline{a}} & \frac{\underline{g}'}{\underline{a}} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \widehat{\zeta} \\ \widehat{u} \\ \partial_x \widehat{u} \\ \widehat{v} \\ \partial_x \widehat{v} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

The characteristic polynomial of  $G$  is then :

$$\chi_G(X) = \frac{-1}{\underline{a}^2} \left( X + \frac{\tau}{\underline{u}_d} \right) \left( (\tau + X \underline{u}_d)^2 - \underline{a} X^2 (\underline{g}' - \underline{a} X^2) \right), \quad (2.27)$$

which is unsurprisingly nearly the same polynomial as the one associated to the original Euler-Korteweg system. Consequently the spectral analysis previously done in Lemma 2.2.2 and Proposition 2.2.4 still applies.

The form of  $G$  is of special interest, because it is very near to the one obtained by Métivier and Zumbrun in [51] : it enjoys a ‘quasi homogeneity’ property that we will use to construct symmetrizers. We emphasize this with the following observation.

The restriction of the extended problem to the new variables  $V = (\sqrt{|\tau|\widehat{u}}, \sqrt{|\tau|\widehat{v}}, \partial_x \widehat{u}, \partial_x \widehat{v})$  reads :

$$\partial_x V = \sqrt{|\tau|} H V, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\tau}{\underline{a}|\tau|} & 0 & \frac{-\underline{u}}{\underline{a}\sqrt{|\tau|}} \\ \frac{\tau}{\underline{a}|\tau|} & \frac{g'}{\underline{a}|\tau|} & \frac{\underline{u}}{\underline{a}\sqrt{|\tau|}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

**Remarks :**

- It is worth noting that for  $|\tau| \gg 1$  :

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\tau}{\underline{a}|\tau|} & 0 & 0 \\ \frac{\tau}{\underline{a}|\tau|} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon) = H_0\left(\frac{\tau}{|\tau|}\right) + H_1(\varepsilon) \quad (2.29)$$

with  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}$ . Whether we focus on medium/low or high frequencies, we will consider  $H$  as a matrix depending on  $\tau$  or on  $(\frac{\tau}{|\tau|}, \varepsilon) = (\widehat{\tau}, \varepsilon)$ . This method will allow us to consider the area of high frequencies as a compact set (see figure 2.3), and thus obtain uniform estimates. The necessity to study the case  $\widehat{\gamma} \rightarrow 0$  appears naturally even for  $\gamma > 0$  if we let  $\delta \rightarrow \infty$ .

- If there is a forcing term  $f$  in (2.24), the problem after Fourier transform reads  $\partial_x V = \sqrt{|\tau|} H V + F$ , with  $F = (0, f)$ . Since it does not complicate the analysis and in sight of further nonlinear analysis, we will study this more general problem.
- Since  $\sqrt{|\tau|} H$  is conjugated to  $(G_{i,j})_{i \geq 2, j \geq 2}$ , its characteristic polynomial is  $\chi_H(X) = (\tau + X \underline{u}_d)^2 - \underline{a} X^2 (g' - \underline{a} X^2)$ .
- The first equation in (2.24) can be seen as an advection equation (with speed  $\underline{u}$ ) for  $\zeta$  with a forcing term  $\underline{a} \operatorname{div} u$ . If  $\underline{u} > 0$  we have to prescribe  $\zeta$  at the boundary to solve it, if  $\underline{u} < 0$  there is no other boundary condition to add. In what follow we only focus on the existence and regularity of  $(u, v)$ .

We are now in position to introduce suitable boundary conditions. Let  $F$  be a boundary operator as in (2.8). As we have seen previously, the Lopatinskiï condition requires that the number of boundary conditions equal the dimension of  $H$ 's stable subspace. Applying Lemma 2.2.1, we see that this number is two. Thus a natural and simple candidate for the boundary operator  $F$  is

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Denote by  $\Pi^-$  (resp  $\Pi^+$ ) the projector on  $E^-(H)$  (resp  $E^+(H)$ ). The following lemma establishes that  $F$  satisfies a refined Lopatinskiï condition, in the sense that there is a 'good transversality' of  $E^-$  and  $\operatorname{Ker}(F)$  as  $\operatorname{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ .

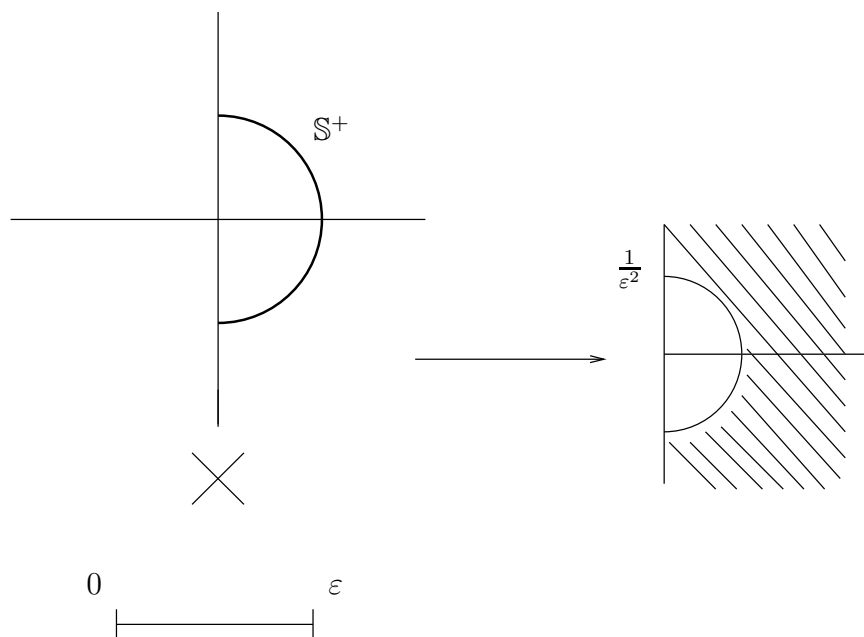


FIGURE 2.1 – Correspondence between high frequencies (the hatched area)  $\{Re(\tau) \geq 0, |\tau| \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\} \cup \{\infty\}$  and  $S^+ \times [0, \varepsilon]$  via the application  $(\hat{\tau}, s) \rightarrow \frac{\hat{\tau}}{s^2}$ .

**Lemme 2.3.1.** *There exists  $\Gamma > 0$  such that for  $Re(\tau) \geq \Gamma$  the spaces  $Ker(F)$  and  $E^-(\tau)$  are transverse, and*

$$\exists C > 0 : \forall X \in \mathbb{R}^4, |X|^2 \leq C(|\Pi^+ X|^2 + |FX|^2), \quad (2.31)$$

where  $C$  only depends on  $\Gamma$ .

*Démonstration.* We use the variables  $(\hat{\tau}, \varepsilon)$  to obtain an uniform inequality. If  $\omega$  is an eigenvalue of  $G$ , we generically denote  $V_\omega$  an eigenvector associated to  $\omega$ . Since we deal with simple eigenvalues when  $\varepsilon$  is small, this notation will make sense in what follows.

According to the notations of Proposition 2.2.5, we extend the space  $E^-$  at  $Re(\hat{\tau}) = 0$  for  $\varepsilon$  small enough by defining  $E^-(\hat{\tau}, \varepsilon) = \text{vect}(V_{\omega_1^-}, V_{\omega_2^-})$ .

The eigenvectors of  $H(\hat{\tau}, 0)$  can be directly computed :

$$V_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{\hat{\tau}}\omega^2 \\ \omega \\ -\frac{a}{\hat{\tau}}\omega^3 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Obviously,  $F : E^- \mapsto Im(F)$  is an isomorphism if and only if  $(FV_{\omega_1^-}, FV_{\omega_2^-})$  is a basis of  $\mathbb{C}^2$ , or equivalently if  $\Delta(\hat{\tau}) := \det(FV_{\omega_1^-}, FV_{\omega_2^-}) \neq 0$ . This last quantity is called a Lopatinskiï determinant. We have

$$\Delta(\hat{\tau}) = \frac{-a}{\hat{\tau}}((\omega_1^-)^2 - (\omega_2^-)^2) = \frac{-2a}{\hat{\tau}}(\omega_1^-)^2 \neq 0, \quad (2.33)$$

indeed, for  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega_2^- = -i\omega_1^-$ .

Thus  $\Delta$  does not vanish, *even for*  $Re(\hat{\tau}) = 0$ .

Now, if  $\varepsilon \neq 0$  by continuity of  $\Delta$  it suffices to choose  $\varepsilon_0$  small enough such that the condition  $\Delta(\hat{\tau}, \varepsilon) \neq 0$  remains true for  $(\hat{\tau}, \varepsilon) \in \mathbb{S}^+ \times [0, \varepsilon_0]$ , where  $\mathbb{S}^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1, Re(\tau) \geq 0\}$ . Since  $\mathbb{S}^+ \times [0, \varepsilon_0]$  is a compact set, we obtain

$$\inf_{\mathbb{S}^+ \times [0, \varepsilon_0]} |\Delta(\hat{\tau}, \eta)| > 0 .$$

This implies that  $F : E^- \longrightarrow \mathbb{R}^2$  is an isomorphism with bounded inverse. Thus we have

$$\begin{aligned} \forall (\hat{\tau}, \varepsilon) \in \mathbb{S}^+ \times [0, \varepsilon_0], \forall X \in E^-(\hat{\tau}, \varepsilon), |X|^2 &\leq 2(|\Pi^+(X)|^2 + |\Pi^-(X)|^2) \\ &\leq 2(|\Pi^+(X)|^2 + C|F(X - \Pi^+(X))|^2) \\ &\leq C'(|\Pi^+(X)|^2 + |F(X)|^2). \end{aligned}$$

This inequality holds for  $(\hat{\tau}, \varepsilon) \in \mathbb{S}^+ \times [0, \varepsilon_0]$ , or for the original variable  $\tau$  when  $Re(\tau) \geq 0$  and  $|\tau| \geq 1/\varepsilon_0^2$ . In particular, if we set  $\Gamma = 1/\varepsilon_0^2$  the inequality holds for  $\tau \in \{Re(\tau) \geq \Gamma\}$ .  $\square$

### Remarks.

- In fact, we have proven something slightly better than the initial statement : the inequality holds on the set  $\{Re(\tau) \geq 0, |\tau| \geq M\}$  for some  $M$  large enough, with an appropriate extension of  $E^\pm$  on  $Re(\tau) = 0$ .
- The lemma is stated for Dirichlet boundary conditions, however it is clear from the proof that the only ingredient is the nonvanishing of the Lopatinskiï determinant  $\Delta(\hat{\tau}, 0)$  (which is very easy to compute), this gives a practical criterion to select general boundary conditions. For example, one may check that Neumann boundary conditions also satisfy Lemma 2.3.1.

The following proposition is the analogue of Lemmas 2.12, 2.13, 2.14 in [51] :

**Proposition 2.3.2.** *High and medium/low frequencies symmetrizers :*

- *High frequencies :* Recall that  $\mathbb{S}^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1, Re(\tau) \geq 0\}$ . For all  $\hat{\tau}_0 \in \mathbb{S}^+$ , there is a neighbourhood  $\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_0)$  of  $(\hat{\tau}_0, 0)$  in  $\mathbb{S}^+ \times \mathbb{R}^+$  and a smooth application  $S$  on  $\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_0)$  with value in the set of self adjoint matrices such that :

$$\forall (\hat{\tau}, \varepsilon) \in \mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_0), Re(SH(\hat{\tau}, \varepsilon)) \geq \alpha(\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_0))Re(\hat{\tau})Id \quad (2.34)$$

- *Medium/low frequencies :* Fix  $M$  and  $\Gamma > 0$ . For all  $\tau_0 \in Re(\tau) \geq \Gamma, |\tau_0| \leq M$ , there is a neighbourhood  $\mathcal{V}(\tau_0)$  of  $\tau_0$  and a smooth application  $S$  on  $\mathcal{V}(\tau_0)$  with value in the set of self adjoint matrices such that :

$$\forall \tau \in \mathcal{V}(\tau_0), Re(SH(\tau)) \geq \alpha(\Gamma, M)Re(\tau)Id \quad (2.35)$$

Moreover,  $S$  can be chosen such that  $S \geq \beta I - CF^*F$ , with  $c, C'$  only depending on  $\tau_0, \Gamma$  or  $\hat{\tau}_0, \Gamma$ .

*Démonstration.* The eigenvalues of  $\sqrt{|\tau|}H$  are exactly those of  $G$  except  $\frac{-\tau}{u_d}$ . According to Proposition 2.2.1 and Lemma 2.2.2, they cannot be purely imaginary for  $\Gamma > 0$  and there are two eigenvalues of positive real part and two negative ones (counted with multiplicity). Therefore, there is a matrix  $P$  on a neighbourhood  $\mathcal{V}(\tau_0)$  of  $\tau_0$  such that

$$P^{-1}HP = \begin{pmatrix} H^+ & 0 \\ 0 & H^- \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

where  $H^\pm$  have their spectrum in  $\pm Re(\omega) > 0$ .

To deal with low/medium frequencies, it suffices to take  $S$  of the form

$$S = (P^{-1})^* \begin{pmatrix} kS^+ & 0 \\ 0 & S^- \end{pmatrix} P^{-1} \quad (2.37)$$

with  $S^\pm = \int_{-\infty}^0 e^{\pm tH^\pm} e^{\pm tH^\pm} dt$  given by the Lyapunov matrix theorem, and  $k > 0$ . Indeed,

$$SH = P^{-1*} \begin{pmatrix} kI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P^{-1} > 0,$$

and since  $\{Re(\tau) \geq \Gamma, |\tau| \leq M\}$  is compact the eigenvalues of  $H$  remain bounded away from zero, thus  $S$  is bounded.

We note that by construction,

$$\forall X \in \mathbb{R}^4, \langle SX, X \rangle = \langle DP^{-1}X, P^{-1}X \rangle$$

with  $D = \begin{pmatrix} kS^+ & \\ & S^- \end{pmatrix}$  and  $S^\pm$  are positive/negative symmetric matrices.

We thus have

$$\langle SX, X \rangle \geq ck|\Pi^+X|^2 - C_1|\Pi^-X|^2,$$

and, by lemma 2.3.1,

$$|\Pi^+X|^2 \geq \frac{|X|^2}{C} - |FX|^2 \Rightarrow \langle SX, X \rangle \geq \beta|X|^2 - C|FX|^2, \quad (2.38)$$

provided  $k$  is large enough (i.e.  $\frac{ck}{C} > C_1|\Pi_-|_{L^\infty(\mathcal{V}(\tau_0))}$ ), so  $S$  satisfies the second inequality too.

To deal with high frequencies, we distinguish the cases  $Re(\hat{\tau}_0) > 0$  and  $Re(\hat{\tau}_0) = 0$ .

- If  $Re(\hat{\tau}_0) > 0$ , the eigenvalues of  $H(\hat{\tau}_0, 0)$  are not purely imaginary and are distinct. By continuity of the roots, there is a neighbourhood of  $(\hat{\tau}_0, 0)$  in  $\mathbb{S}^+ \times \mathbb{R}^+$  and applications  $P, H^\pm(\hat{\tau}, \varepsilon)$  allowing to define  $S$  as previously.



- If  $Re(\hat{\tau}_0) = 0, \varepsilon = 0$  (i.e.  $\hat{\tau}_0 = \pm i$ ), two of the roots are purely imaginary, so that we cannot sort the roots as previously. However, by proposition 2.2.5,  $\sqrt{|\tau|}H$  has four *distinct* eigenvalues  $(\omega_1^\pm, \omega_2^\pm)$ , with  $Re(\omega_2^\pm) = 0$  if  $Re(\hat{\tau}) = 0$ . Thus,  $H$  is smoothly diagonalizable on a neighbourhood of  $(\pm i, 0)$  :

$$\exists P(\tau) : P^{-1}HP = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} \begin{pmatrix} \omega_1^+ & & & \\ & \omega_2^+ & & \\ & & \omega_1^- & \\ & & & \omega_2^- \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

with,

$$Re(\omega_2^\pm) \asymp \frac{\pm\gamma}{\sqrt{|\delta|}} \asymp \pm\hat{\gamma}\sqrt{|\tau|}, \quad (2.40)$$

the notation  $x \asymp y$  meaning that there exist  $\beta \geq \alpha > 0$  such that  $\alpha x \leq y \leq \beta x$ .

If we set  $S = P^{-1*} \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ , obviously  $SH \geq \alpha\hat{\gamma}$ . Moreover,

similarly to the proof of Lemma 2.3.1, we can extend the projectors  $\Pi^\pm$  to  $(i, \varepsilon)$  for  $\varepsilon$  small enough. Thus  $\langle SX, X \rangle \geq ck|\Pi^+X|^2 - C_1|\Pi^-X|^2$  makes sense on a neighbourhood  $\mathcal{V}_\infty(i, 0)$ . But according to the remark after lemma 2.3.1, on  $\mathcal{V}_\infty(i, 0)$  :

$$|X|^2 \leq C(|\Pi^+X| + |FX|^2) \Rightarrow \langle SX, X \rangle \geq \frac{ck}{C}|X|^2 - C_1|\Pi^-X|^2 - ck|FX|^2$$

and again, it suffices to choose  $k$  large enough to conclude.  $\square$

**Remarks :** The matrices exhibited are not like the ones obtained in the usual theory of homogeneous hyperbolic IBVP. Indeed, for high frequencies we just have  $Re(SH) \geq \alpha Re(\hat{\tau})I_d$  (and so,  $Re(S\sqrt{|\tau|}H) \geq \alpha \frac{Re(\tau)}{\sqrt{|\tau|}}$  instead of  $Re(S\sqrt{|\tau|}G_1) \geq \alpha Re(\tau)$  ).

The results of proposition 2.3.2 and Lemma 2.3.1 can be summarized with the following assertion :

Let  $\gamma$  be a real positive number. There exists a self adjoint bounded operator  $S(\tau)$  for  $\tau \in \gamma + i\mathbb{R}$  for the problem (2.8) satisfying the estimates

$$\sqrt{|\tau|}SH \geq \alpha \frac{\gamma}{\sqrt{|\tau|}}, \quad (2.41)$$

$$S \geq \beta I - CF^*F. \quad (2.42)$$

Indeed, for any  $\tilde{\tau} \in \mathbb{S}^+$ , there is a neighbourhood  $\mathcal{V}_\infty(\tilde{\tau}) \subset \mathbb{S}^+ \times \mathbb{R}^+$  as in proposition 2.3.2 (high frequencies). By compactness of  $\mathbb{S}^+$ , we obtain a finite

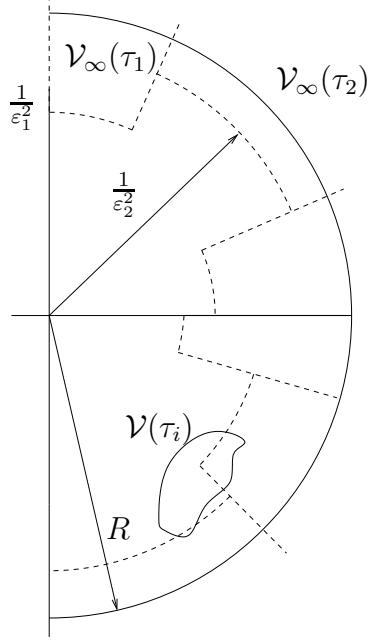


FIGURE 2.2 – High frequencies are in the (truncated) cones, low/medium inside the half circle

family  $(\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_i))_{1 \leq i \leq n}$  such that the projections of  $\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_i)$  on  $\mathbb{S}^+$  cover it. Up to taking smaller  $\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_i)$ , we may assume that they have the form  $\{e^{i\theta}, \theta_i \leq \theta \leq \theta'_i\} \times [0, \varepsilon_i]$ . Let  $R \in \mathbb{R}^{+*}$  be greater than  $\frac{1}{\min(\varepsilon_i^2)}$ . We can obtain a finite covering of  $\{\tau : \operatorname{Re}(\tau) \geq \Gamma \text{ and } |\tau| \leq R\}$  by sets  $(\mathcal{V}(\tau_j))_{1 \leq j \leq m}$  as in proposition 2.3.2 (low/medium frequencies). Since  $(\mathcal{V}_\infty(\hat{\tau}_i)) \cup (\mathcal{V}(\tau_j))$  is a finite covering of  $\{\operatorname{Re}(\tau) \geq \Gamma\}$  (see fig 2.3), using a partition of the unity, we finally obtain an operator  $S$  on the whole set  $\{\tau : \operatorname{Re}(\tau) \geq \Gamma\}$  satisfying (2.41). Finally, Proposition 2.2.4 gives :

**Théorème 2.3.3.** *Let  $\Gamma$  be a real positive number,  $\exists C > 0$  such that for all  $\tau \in \operatorname{Re}(\tau) \geq \Gamma$ , and  $V$  solution of*

$$\begin{cases} \partial_x V = \sqrt{|\tau|} H V + f \\ F V(0) = \psi \end{cases} \quad (2.43)$$

we have

$$\frac{\alpha\gamma}{2\sqrt{|\tau|}} \|V\|^2 + \beta |V(0)|^2 \leq C |\varphi|^2 + \frac{\sqrt{|\tau|}}{2\alpha\gamma} \|f\|^2 \quad (2.44)$$

In term of the original unknowns, Theorem 1 reads

$$\begin{aligned} \frac{\gamma\sqrt{|\tau|}}{2} \|(\hat{u}, \hat{v})\|^2 + \frac{\gamma}{2\sqrt{|\tau|}} \|\partial_x(\hat{u}, \hat{v})\|^2 + \beta |\tau| |(\hat{u}, \hat{v})(0)|^2 + \beta |\partial_x(\hat{u}, \hat{v})(0)|^2 \\ \leq C |\tau| |\hat{\varphi}|^2 + \frac{|\sqrt{|\tau|}}{2\gamma} \|0, f\|^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

In order to derive higher order estimates, we introduce the weighted Sobolev spaces

$$H_\gamma^s(\mathbb{R}) = \{f : \|f\|_{s,\gamma} = \left( \int |\widehat{e^{-\gamma \cdot} f}(\delta)|^2 (\gamma^2 + \delta^2)^s d\delta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \} . \quad (2.46)$$

These norms appear naturally because of the coefficient  $\sqrt{|\tau|}$  in our inequalities. Note in particular that  $\sqrt{|\tau|} = (\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{4}}$ .

By integration in  $Im(\tau)$  and use of the Plancherel theorem, the previous estimate gives an inequality in term of these norms :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \|(u, v)\|_{L_x^2(H_{\gamma,t}^{1/2})}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\partial_x(u, v)\|_{L_{x,t}^2} + \beta \|(u, v)(0)\|_{H_{\gamma,t}^{3/4}} + \\ \beta \|\partial_x(u, v)(0)\|_{H_{\gamma,t}^{1/4}} \leq C \|\varphi\|_{H_{\gamma,t}^{3/4}}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|f\|_{L_x^2(H_{\gamma,t}^{1/2})} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

## 2.4 Existence and uniqueness results

In this section we shall use the previous construction of symmetrizers to actually prove the well-posedness of IBVP for the extended system. Actually, it allows us to solve the problem with zero initial data, and the general IBVP is treated by proving trace results for an explicit solution of the Cauchy problem on the whole line. As in the previous paragraph, we focus on the equations on  $(u, v)$  since the equation on  $\zeta$  is simpler.

**Théorème 2.4.1.** *For any  $T > 0$ , there exists  $C(T)$  such that the problem*

$$\begin{cases} \partial_t u + \underline{u} \partial_x u - \underline{a} \partial_x^2 v = -\underline{g}' v , \\ \partial_t v + \underline{u} \partial_x v + \underline{a} \partial_x^2 u = 0 , & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] , \\ (u, v)|_{t=0} = (u_0, v_0) \in H^1(\mathbb{R}^+) , & x \in \mathbb{R}^+ , \\ (u, v)|_{(0)} = \varphi \in H^{3/4}([0, T]) , & t \in [0, T] , \end{cases} \quad (2.48)$$

*admits a unique solution in  $L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^{1/2}([0, T]))$  if  $\varphi(0) = (u_0(0), v_0(0))$ .*

*Moreover, this solution satisfies the estimate :*

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H^{1/2}([0, T]))} + \|\partial_x(u, v)(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times [0, T])} + \|(u, v)(0)\|_{H^{3/4}([0, T])} \\ + \|\partial_x(u, v)(0)\|_{H^{1/4}([0, T])} \leq C(T) \left( \|(u_0, v_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^+)} + \|\varphi\|_{H^{3/4}([0, T])} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

*Démonstration. Existence :* The proof is in two parts : we first give the solution of a Cauchy problem, and check that its restriction to  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$  satisfies the appropriate estimate. To do it, we will adapt a trace regularity result (see Fokas and Sung [26], Lemma 5.1) for scalar PDEs on the real line to our case. In the second part, we find a solution of the pure boundary value problem. By linearity this gives a solution to the IBVP.

Let  $(u_0, v_0) \in H^1(\mathbb{R}^+)$  be the initial data. We extend them continuously as functions in  $H^1(\mathbb{R})$  still written  $(u_0, v_0)$ , and then we solve the Cauchy problem :

$$\begin{cases} \partial_t u + \underline{u} \partial_x u - \underline{a} \partial_x^2 v + \underline{g}' v = 0, \\ \partial_t v + \underline{u} \partial_x v + \underline{a} \partial_x^2 u = 0, \\ (u, v)|_{t=0} = (u_0, v_0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \in [0, T], \ x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

It is equivalent after a Fourier transform in space to solve  $\partial_t U - AU = 0$ ,  $U|_{t=0} = U_0 = (\widehat{u}_0, \widehat{v}_0)$ , where  $U = (\widehat{u}, \widehat{v})$ ,  $A = \begin{pmatrix} -i\underline{u}\xi & -\underline{a}\xi^2 - \underline{g}' \\ \underline{a}\xi^2 & -i\underline{u}\xi \end{pmatrix}$ .

Therefore,  $U = e^{At}U_0$ , and  $(u, v) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{At} U_0 d\xi$ . The matrix  $A(\xi)$  has two distinct purely imaginary eigenvalues, except for  $\xi = 0$  :

$$\lambda_{\pm} = -i\underline{u}\xi \pm i\sqrt{\underline{a}\xi^2(\underline{a}\xi^2 + \underline{g}')}.$$

Let  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_+ + i\underline{u}\xi}{\underline{a}\xi^2 + \underline{g}'} & \frac{\lambda_- + i\underline{u}\xi}{\underline{a}\xi^2 + \underline{g}'} \end{pmatrix}$ .

Given  $R > 0$ , one can check that  $P(\xi)$  is invertible on  $] -\infty, -R] \cup [R, \infty[$ , such that  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$  and  $P, P^{-1}$  are bounded. Thus  $(t, \xi) \longrightarrow e^{A(\xi)t}$  remains bounded on  $[0, \infty[ \times (] -\infty, -R] \cup [R, \infty[)$ .

The first consequence is that  $(u, v) \in L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R}^+))$  :

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R}^+))}^2 &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (|e^{A(\xi)t}| |U_0(\xi)|)^2 (1 + \xi^2) d\xi dt \\ &\leq C \int_0^T \|u_0, v_0\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}^2 \leq CT \|u_0, v_0\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}^2 \end{aligned}$$

and we will now focus on the regularity of the trace at  $x = 0$ .

We first note that for  $R$  large enough,  $\xi \in \mathbb{R}^* \longrightarrow \lambda_{\pm}(\xi)/i$  is a diffeomorphism on  $] -\infty, R]$  and  $]R, +\infty[$ , with the asymptotic behavior  $|\lambda_{\pm}(\xi)| \sim \underline{a}\xi^2$ ,  $|\lambda'_{\pm}(\xi)| \sim 2\underline{a}|\xi|$ . Therefore, the solution will be split into three terms :

$$(u, v)(x, t) = \int_{-\infty}^{-R} e^{ix\xi} e^{At} U_0 d\xi + \int_{-R}^R e^{ix\xi} e^{At} U_0 d\xi + \int_R^{\infty} e^{ix\xi} e^{At} U_0 d\xi. \quad (2.50)$$

The second term obviously defines a  $C^\infty$  function, thus we just need to study the regularity of the two others. In fact, we will only study the third one, the analysis of the first being exactly the same.

Since  $P \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} P^{-1} = A$ , we have

$$\int_R^{\infty} e^{ix\xi} e^{At} U_0 d\xi = \int_R^{\infty} e^{\lambda_+ t} B_+ U_0 + e^{\lambda_- t} B_- U_0 d\xi$$

where  $B_{\pm}(x, \xi)$  are bounded matrices. Since on  $[R, \infty[$ ,  $\lambda_{\pm}/i$  are diffeomorphism we can use the changes of variable  $\xi = (\lambda_{\pm}/i)^{-1}(\eta_{\pm})$  to get

$$\begin{aligned} & \int_R^{\infty} e^{\lambda+t} B_+ U_0 + e^{\lambda-t} B_- U_0 d\xi \\ &= \int_{(\lambda_+/i)(R)}^{\infty} e^{i\eta_+ t} B_+ ((\lambda_+/i)^{-1}(\eta_+)) \frac{U_0 d\eta_+}{(\lambda_+/i)' \circ (\lambda_+/i)^{-1}(\eta_+)} \\ &+ \int_{(\lambda_-/i)(R)}^{-\infty} e^{i\eta_- t} B_- ((\lambda_-/i)^{-1}(\eta_-)) \frac{U_0 d\eta_-}{(\lambda_-/i)' \circ (\lambda_-/i)^{-1}(\eta_-)} . \end{aligned}$$

These integrals can be seen as (truncated) inverse Fourier transforms in  $t$ , so the trace of  $(u, v)$  at  $x = 0$  is in  $H^{3/4}$  if

$$\begin{aligned} & \int_{(\lambda_+/i)(R)}^{\infty} (1 + |\eta_+|)^{3/2} |e^{i\eta_+ t} B_+ ((0, \lambda_+/i)^{-1}(\eta_+)) U_0|^2 \frac{d\eta_+}{|(\lambda_+/i)' \circ (\lambda_+/i)^{-1}(\eta_+)|^2} \\ & \qquad \qquad \qquad < \infty, \\ & \int_{(\lambda_-/i)(R)}^{\infty} (1 + |\eta_-|)^{3/2} |e^{i\eta_- t} B_- (0, (\lambda_-/i)^{-1}(\eta_-)) U_0|^2 \frac{d\eta_-}{|(\lambda_-/i)' \circ (\lambda_-/i)^{-1}(\eta_-)|^2} \\ & \qquad \qquad \qquad < \infty. \end{aligned}$$

Going back to the initial variables we get by using the asymptotic behavior of  $\lambda_{\pm}$ ,  $\lambda'_{\pm}$

$$\begin{aligned} & \int_{(\lambda_{\pm}/i)(R)}^{\pm\infty} (1 + |\eta_{\pm}|)^{3/2} |B_{\pm}((0, \lambda_{\pm}/i)^{-1}(\eta_{\pm})) U_0|^2 \frac{d\eta_{\pm}}{|(\lambda_{\pm}/i)' \circ (\lambda_{\pm}/i)^{-1}(\eta_{\pm})|^2} \\ &= \int_R^{\infty} (1 + |\lambda_{\pm}(\xi)|)^{3/2} |B_{\pm}(0, \xi) U_0|^2 \frac{d\xi}{|\lambda'_{\pm}(\xi)|} \leq C \int_R^{\infty} (1 + |\xi|)^3 |U_0|^2 \frac{d\xi}{1 + |\xi|} \\ & \qquad \qquad \qquad \leq C \|(u_0, v_0)\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Finally, we have the estimate

$$\|(u, v)|_{(0)}\|_{H^{3/4}([0, T])} \leq C(T) \|(u_0, v_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}, \quad (2.51)$$

and the same kind of argument leads to

$$\|\partial_x(u, v)|_{x=0}\|_{H^{1/4}([0, T])} \leq C(T) \|(u_0, v_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}, \quad (2.52)$$

(since  $e^{A(\xi)T} = O(T)$  on the neighbourhood of  $\xi = 0$ , the contribution of the second term may not be bounded as  $T \rightarrow \infty$ ).

We now prove that  $(u, v) \in L^2_x(\mathbb{R} : H^{1/2}([0, T]))$ . First write

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (e^{\lambda+t} B_+ + e^{\lambda-t} B_-) U_0(\xi) d\xi . \quad (2.53)$$

We have by definition, and using the Plancherel equality :

$$\begin{aligned} & \|(u, v)\|_{L^2_x(H^{1/2}([0, T]))} = \|(u, v)\|_{L^2_x(L^2_t)}^2 + \\ & \int_{\mathbb{R}} \iint_{[0, T]^2} \frac{|(u, v)(x, t) - (u, v)(x, s)|^2}{|t - s|^2} dt ds dx = \|(u, v)\|_{L^2_x(L^2_t)}^2 + \\ & \iint_{[0, T]^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|(e^{\lambda+t} B_+ + e^{\lambda-t} B_- - e^{\lambda+s} B_+ - e^{\lambda-s} B_-) U_0(\xi)|^2}{|t - s|^2} d\xi dt ds . \end{aligned}$$

If  $\lambda_{\pm} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \iint_{[0,T]^2} \frac{|(e^{\lambda_{\pm}t} - e^{\lambda_{\pm}s})|^2}{|t-s|^2} ds dt &= \iint_{[0, \lambda_{\pm}T/i]} \frac{|e^{it'} - e^{is'}|^2}{|t'-s'|^2} ds' dt' \\ &\leq \int_0^{\lambda_{\pm}T/i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{it'} - 1|^2}{|t'|^2} dt' ds' \leq |\lambda_{\pm}T| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{it'} - 1|^2}{|t'|^2} dt' , \end{aligned}$$

and the inequality is obviously true for the special case  $\lambda_{\pm} = 0$ . Using this, the boundedness of  $B_{\pm}$  and the estimate  $|\lambda_{\pm}(\xi)| = O(\xi^2)$  when  $|\xi| \rightarrow \infty$ , we obtain

$$\|(u, v)\|_{L_x^2(H^{1/2}([0,T]))} \leq C \int_{\mathbb{R}} |U_0|^2 (1 + \xi^2) d\xi \leq C' \|(u_0, v_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}^2 . \quad (2.54)$$

To sum it up, the restriction to  $\mathbb{R}^+$  of the solution of the Cauchy problem satisfies

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H^{1/2}([0,T]))} + \|\partial_x(u, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times [0,T])} + \|(u, v)\|_{H^{3/4}([0,T])} \\ + \|\partial_x(u, v)\|_{H^{1/4}([0,T])} \lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^+)} . \end{aligned}$$

Now, since we have a solution of the Cauchy problem with control of the boundary data, by linearity we are left to deal with a pure boundary value problem (BVP) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \underline{u} \partial_x u - \underline{a} \partial_x^2 v + \underline{g}' v = 0, \\ \partial_t v + \underline{u} \partial_x v + \underline{a} \partial_x^2 u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \geq 0, \\ (u, v)(0) = \varphi & t \in \mathbb{R} . \end{cases} \quad (2.55)$$

where  $\varphi$  has been continuously extended on  $\mathbb{R}$  as an  $H^{3/4}$  function with  $\varphi = 0$ ,  $t < 0$ .

To solve it, we now use a Fourier transform in time which gives the ODE :

$$\partial_x V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\tau}{\underline{a}} & 0 & \frac{-\underline{u}}{\underline{a}} \\ \frac{\tau}{\underline{a}} & \frac{\underline{g}'}{\underline{a}} & \frac{\underline{u}}{\underline{a}} & 0 \end{pmatrix} V, \quad FV(0) = \widehat{\varphi}, \quad V(0) \in E^-(\tau) . \quad (2.56)$$

Here,  $\tau = \gamma + i\delta$  for some  $\gamma > 0$ , and generically  $\widehat{f} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau t} f(t) dt$ .

Since  $F$  is an isomorphism  $E^- \rightarrow \mathbb{R}^2$ , for any fixed  $\tau$ , the ODE problem (2.56) has a unique solution. To begin with, we may assume that  $\varphi$  has compact support, so that  $\widehat{\varphi}$  is  $\tau$ -holomorphic and  $V$  as well.

We define the weighted  $L^2$  spaces by  $\|h\|_{L^2, s}^2 = \int |h|^2 |\tau|^{2s} d\tau$ , and we will assume that  $\varphi \in L^{2, 3/4}$ . We use too  $\|j\|_{L_x^2(L^2, s)}^2 = \int |j|^2 |\tau|^{2s} dx d\tau$ .

By construction, for all  $\tau$  the solution  $V(\cdot, \tau)$  belongs to  $H^1(\mathbb{R}^+)$ , thus it admits a trace  $V(0, \tau)$  holomorphic in  $\tau$ ; we can apply the estimate (2.44), and integrate in  $\tau$  to obtain the ‘‘Fourier version’’ of (2.47). If  $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  :

$$\alpha \frac{\gamma}{2} \|V_1\|_{L_x^2(L^{2, 1/2})}^2 + \alpha \frac{\gamma}{2} \|V_2\|_{L_x^2(L^2)}^2 + \beta \|V_1(0)\|_{L^{2, 3/4}}^2 +$$

$$\beta \|V_2(0)\|_{L^{2,1/4}} \leq C \|\widehat{\varphi}\|_{L^{2,3/4}}^2. \quad (2.57)$$

In particular,  $\|V\|_{L_x^2(L^2)}$  is bounded; the Paley-Wiener theorem gives the existence of a function  $U \in L_{x,t}^2$  such that  $\widehat{U} = V$ ,  $U \equiv 0$  if  $t < 0$ . By inverse Fourier transform,  $U_1 = \mathcal{F}^{-1}(V_1)$  is a solution of (2.55), and as  $U_1 \equiv 0$   $t < 0$ , the trace of  $U_1$  is null at  $t = 0$ .

Finally,  $U$  is a solution of the boundary value problem since by inverse Fourier transform  $V_1(0, \tau) = \widehat{\varphi} \Rightarrow U(0, t) = \varphi$ .

Now, we allow  $\varphi$  not to have a compact support : by truncature/regularization, we find  $\varphi_n$  with compact support such that  $\widehat{\varphi}_n \rightarrow \widehat{\varphi}$  in  $L^{2,3/4}$ . Let  $V^n$  be the solution of (2.56) with data  $\widehat{\varphi}_n$ , and  $U^n$  the associated solution of (2.24). Using the Fourier version of (2.47), we see that  $V^n$  has a limit  $V = (V_1, V_2) \in L_x^2(L^{2,1/2}) \times L_x^2(L^{2,0})$ , and  $V^n(0)$  has a limit  $(W^1(\tau), W^2(\tau)) \in L^{2,3/4} \times L^{2,1/2}$  (and similar convergence for  $U^n$ ). We prove that  $(W^1, W^2)$  is the trace at  $x = 0$  of  $(V_1, V_2)$ .

By convergence of  $V^n$ ,  $V$  is an  $L_x^2$  solution of  $\partial_x V = GV$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*})$ , but  $GV$  also belongs to  $L_x^2$ , thus  $V$  admits a trace at  $x = 0$  defined by  $V(0) = \int_0^\infty V \partial_x V dx$ , which is in  $L^{2,-1/2}$ . By convergence of  $V^n(0)$  and uniqueness of the limit, we conclude that  $(V_1(0), V_2(0)) \in L^{2,1/2} \times L^2$ ,  $V_1(0) = \widehat{g}$ , and  $U|_{[0,T]}$  is a solution of the pure boundary value problem satisfying :

$$\begin{aligned} & \| (u, v) \|_{L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^+))} + \| (u, v)(0) \|_{H^{3/4}([0,T])} + \| \partial_x (u, v)(0) \|_{H^{1/4}([0,T])} \leq \\ & C \left( \| (u, v) \|_{L_x^2(H_\gamma^{1/2})}^2 + \| \partial_x (u, v) \|_{L_{x,t}^2} + \| (u, v)(0) \|_{H_\gamma^{3/4}} + \| \partial_x (u, v)(0) \|_{H_\gamma^{1/4}} \right) \\ & \leq C' \| \varphi \|_{H_\gamma^{3/4}(\mathbb{R})} \leq C'' \| \varphi \|_{H^{3/4}([0,T])} \end{aligned}$$

*Uniqueness* : The uniqueness is a consequence of the existence of a priori estimates, see for example [12] for a proof in the case of homogeneous first order systems, which can be directly adapted to our case.  $\square$

If the data are more regular, higher regularity can be obtained in anisotropic spaces. We define

$$H^{m,2}(\mathbb{R}^+ \times [0, T]) = \{ u : \forall 0 \leq k \leq m, \partial_x^k u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^{\frac{m-k}{2}}([0, T])) \},$$

and the analogous weighted spaces

$$H_\gamma^{m,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) = \{ u : \forall 0 \leq k \leq m, \partial_x^k u \in L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^{\frac{m-k}{2}}(\mathbb{R})) \}.$$

Since we deal with higher levels of regularity, we require that the data satisfy the following compatibility condition : if  $(u_c, v_c)$  is the solution of the Cauchy problem on  $[0, T]$  (as in the previous proof), the function  $\varphi - (u_c, v_c)|_{x=0}$  is in  $H^{m/2+1/4}([0, T])$  and the extension defined by

$$\begin{cases} \varphi - (u_c, v_c)|_{x=0} = 0 & \text{for } t < 0, \\ \varphi - (u_c, v_c)|_{x=0} = \psi & \text{with } \psi \text{ a compactly supported smooth extension,} \end{cases}$$

must be in  $H_\gamma^{m/2+1/4}(\mathbb{R})$  (a simpler -but less accurate- condition would be to assume that  $\varphi$ , resp.  $(u_0, v_0)$ , are flat at  $t = 0$ , resp.  $x = 0$ ).

**Corollaire 2.4.2.** *Let  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , and  $(u, v)$  be the unique solution of*

$$\begin{cases} \partial_t u + \underline{u}\partial_x u - \underline{a}\partial_x^2 v = -\underline{g}'v, \\ \partial_t v + \underline{u}\partial_x v + \underline{a}\partial_x^2 u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \\ (u, v)|_{t=0} = (u_0, v_0), & x \in \mathbb{R}^+, \\ (u, v)|(0) = \varphi, & t \in [0, T], \end{cases}$$

If  $(u_0, v_0) \in H^m(\mathbb{R}^+)$  and  $\varphi \in H^{m/2+1/4}$  then  $u \in H^{m,2}(\mathbb{R}^+ \times [0, T])$  and  $(\partial_x u, \partial_x v)(0) \in H^{(m-1)/2+1/4}([0, T])$ .

*Démonstration.* It is sufficient to check that the solution constructed in the previous proof has the desired regularity. We shortly describe how this is done for the Cauchy problem and the pure boundary value problem. We keep the notations of the previous proof.

- Cauchy problem : we first study space-time regularity.

From  $U = e^{A(\zeta)t}U_0(\xi)$  we get

$$(u, v) \in L^2([0, T]; H^m(\mathbb{R}^+)) .$$

The equations

$$\begin{cases} \partial_t u + \underline{u}\partial_x u - \underline{a}\partial_x^2 v = -\underline{g}'v, \\ \partial_t v + \underline{u}\partial_x v + \underline{a}\partial_x^2 u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \end{cases}$$

imply (by spatial regularity of  $(u, v)$ ) that  $(\partial_t u, \partial_t v) \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ . Differentiating in  $t$  and  $x$  and applying again the argument we obtain  $\forall (k, l) \in \mathbb{N}$  such that  $k + 2l \leq m$ ,  $\partial_t^l \partial_x^k u \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ .

Now if  $(m - k)/2 \notin \mathbb{N}$ , we write  $\frac{m-k}{2} = l + \frac{1}{2}$ , to complete the regularity we have to check that  $\partial_t^l \partial_x^k(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^+; H^{1/2}([0, T]))$ , or equivalently (as in the proof of the previous theorem) :

$$\iint_{[0, T]^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|(e^{\lambda+t}B_+ + e^{\lambda-t}B_- - e^{\lambda+s}B_+ - e^{\lambda-s}B_-)U_0(\xi)|^2}{|t-s|^2} |\xi|^{2k} |A(\xi)|^{2l} d\xi dt ds < \infty .$$

Recall that  $A(\xi) = O(\xi^2)$ , using  $k + 2l + 1 = m$  we get :

$$\begin{aligned} \iint_{[0, T]^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|(e^{\lambda+t}B_+ + e^{\lambda-t}B_- - e^{\lambda+s}B_+ - e^{\lambda-s}B_-)U_0(\xi)|^2}{|t-s|^2} \times \\ |\xi|^{2k} |A(\xi)|^{2l} d\xi dt ds \leq C \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{k+2l} (1 + |\xi|^2) |U_0(\xi)|^2 d\xi \\ \leq C' \|U_0\|_{H^m} . \end{aligned}$$

For the boundary regularity, the crucial estimate was

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda_{\pm}(\xi)|)^{3/2} |B_{\pm}(0, \xi)U_0|^2 \frac{d\xi}{|\lambda_{\pm}(\xi)|} \\ \leq C \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^3 |U_0|^2 \frac{d\xi}{1 + |\xi|} \\ \leq C \|(u_0, v_0)\|_{H^1}^2 , \end{aligned}$$



and we simply have to replace it by

$$\begin{aligned} & \int_R^\infty (1 + |\lambda_\pm(\xi)|)^{m+(1/2)} |B_\pm(0, \xi)U_0|^2 \frac{d\xi}{|\lambda'_\pm(\xi)|} \\ & \leq C \int_R^\infty (1 + |\xi|)^{2m+1} |U_0|^2 \frac{d\xi}{1 + |\xi|} \\ & \leq C \|(u_0, v_0)\|_{H^m}^2 . \end{aligned}$$

- Pure boundary value problem : the compatibility conditions ensure that the data of the pure boundary value problems are flat at  $t = 0$ . The first step is to obtain time-like regularity. We start with the estimate (2.44) :

$$\frac{\alpha\gamma}{2\sqrt{|\tau|}} \|U\|^2 + \beta |U(0)|^2 \leq C |\tau| |\varphi|^2 ,$$

and multiply it by  $|\tau|^{m+1/2}$  (instead of  $\sqrt{|\tau|}$  as it was done for the low regularity theorem), this gives as for (2.47) :

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \|(u, v)\|_{L_x^2(H_{\gamma,t}^{m/2})}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\partial_x(u, v)\|_{L_x^2(H^{(m-1)/2})} + \beta \|(u, v)(0)\|_{H_{\gamma,t}^{m/2+1/4}} + \\ & \beta \|\partial_x(u, v)(0)\|_{H_{\gamma,t}^{(m-1)/2+1/4}} \leq C \|\varphi\|_{H_{\gamma,t}^{m/2+1/4}}^2 . \end{aligned}$$

If we differentiate  $\partial_x U = \sqrt{|\tau|} H U$  with respect to  $x$ , this gives a new estimate

$$\frac{\alpha\gamma}{2\sqrt{|\tau|}} \|\partial_x U\|^2 + \beta |\partial_x U(0)|^2 \leq C |\tau| |(\partial_x \hat{u}(0), \partial_x \hat{v}(0))|^2 ,$$

and with the estimate (2.44) we have

$$\frac{\alpha\gamma}{2\sqrt{|\tau|}} \|\partial_x U\|^2 + \beta |\partial_x U(0)|^2 \leq C |\tau|^2 |\varphi|^2 .$$

Proceeding inductively finally gives

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \|(u, v)\|_{H_\gamma^{m,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})}^2 + \beta \|(u, v)(0)\|_{H_\gamma^{m/2+1/4}} + \\ & \beta \|\partial_x(u, v)(0)\|_{H_\gamma^{(m-1)/2+1/4}} \leq C' \|\varphi\|_{H_\gamma^{m/2+1/4}}^2 . \end{aligned}$$

□

**Conclusion :** The construction of Kreiss symmetrizers for the extended system has allowed us to obtain a priori estimates and well-posedness results. It would be of very high interest to know how far the hyperbolic (homogeneous) theory may be adapted to the fully nonlinear, dispersive problem. A first step would be to use a quasi-homogeneous pseudo/para-differential calculus to treat the case of low regularity variable coefficients (as was initiated by Majda [47]),

and eventually obtain at least local or for small data well-posedness results as was done by Mokrane [53] or Métivier [50]. The formal algebraic construction is actually expected to be a straightforward adaptation of what was done in this article. It is the passage from a Kreiss symmetrizer to a functional symmetrizer that involves very technical difficulties that do not arise in the case of hyperbolic systems.

The investigation of Kreiss symmetrizers for more general dispersive boundary value problems, which should help to understand more accurately the specific Euler-Korteweg BVP, is investigated in the next chapters.



# Chapitre 3

## Une classe de problèmes dispersifs

### 3.1 Considérations algébriques

#### 3.1.1 Condition de Petrowsky

Considérons par exemple l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 .$$

Le symbole associé est  $-\delta^2 + |\xi|^2$ , homogène de degré 2. L'opérateur est strictement hyperbolique car pour  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  les racines en  $\delta$  sont  $\pm|\xi|$ , réels non nuls distincts. Dans l'équation de Schrödinger

$$\partial_t u + i\Delta u = 0 , \tag{3.1}$$

si l'on regarde seulement la partie homogène du symbole la partie associée à  $\partial_t$  n'apparaît pas. Cependant, le symbole complet  $i\delta - i|\xi|^2$  vérifie évidemment la même propriété algébrique que précédemment : les racines en  $\delta$  sont réelles et distinctes, ce qui était l'une des hypothèses clés pour la construction de symétriseurs. Cette propriété n'est pas rare dans la « faune » des EDP. Par exemple, l'extension multidimensionnelle de l'équation des poutres

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0 \tag{3.2}$$

a pour symbole  $-\delta^2 + |\xi|^4$ , et les racines en  $\delta$  sont  $\pm|\xi|^2$ .

On remarque que pour les deux équations (3.1), (3.2) (qui entrent dans la catégorie des EDP dispersives), les opérateurs sont « quasi-homogènes », l'ordre des dérivées spatiales étant le double de l'ordre des dérivées temporelles. Pour des équations plus générales, on est donc raisonnablement tenté de considérer la partie « quasi-homogène » et de négliger les termes d'ordre inférieur. Cette approche doit être faite avec précaution, car la notion de dispersivité est moins stable que la notion d'hyperbolicité. On sait depuis Gårding [29] que les seules EDP à coefficients constants pour lesquelles on a existence et unicité locale (dans un sens très fort : si les données initiales tendent vers 0 au voisinage

d'un point, il existe un voisinage de ce point *en espace et temps* sur lequel la solution tend vers 0) sont les équations hyperboliques. Cette condition étant beaucoup trop forte, on va s'intéresser au critère classique plus faible, dit de Petrowsky (voir par exemple [17] chapitre 6 ).

Génériquement, on écrit pour un multi-indice  $\alpha$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d} ,$$

et la longueur de  $\alpha$  est  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ .

**Théorème 3.1.1.** *Soit*

$$L = \sum_{k=0}^m \sum_{\alpha} a_{\alpha,k} \partial_x^\alpha \partial_t^k ,$$

*un opérateur différentiel scalaire à coefficients constants,*

$$P(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^m \sum_{\alpha} \tau^k a_{\alpha,k} (i\xi)^\alpha ,$$

*son symbole. On suppose que  $a_{0,m} = 1$  et  $a_{\alpha,m} = 0$  pour  $\alpha \neq 0$ .*

*Si le problème de Cauchy associé à  $L$  est bien posé alors il existe  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$  tel que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \tau \in \{\operatorname{Re}(z) > \gamma_0\} : P(\tau, \xi) \neq 0 . \quad (3.3)$$

**Definition 3.1.2.** La condition (3.3) est appelée *condition de Petrowsky* pour  $L$ . On appelle *condition de Petrowsky rétrograde* la propriété

$$\exists \gamma_0 \in \mathbb{R} : \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \tau \in \{\operatorname{Re}(z) < \gamma_0\} : P(\tau, \xi) \neq 0 , \quad (3.4)$$

qui est un critère de stabilité du problème de Cauchy posé en temps négatifs. Les conditions de Petrowsky normale et rétrograde sont satisfaites simultanément si et seulement si les racines en  $\tau$  de  $P(\tau, \xi)$  sont dans une bande  $\{-C \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq C\}$ .

Un opérateur strictement hyperbolique satisfait clairement ces conditions puisque les racines de son symbole sont dans  $\{\operatorname{Re}(\tau) = 0\}$ . Mieux, la stricte hyperbolicité donne une stabilité de la condition de Petrowsky par perturbation d'ordre inférieur, au sens suivant.

**Proposition 3.1.3.** *(voir [17] chapitre 6 ou [33] chapitre 5 pour une discussion plus complète)*

*Soit  $P_m$  la partie principale d'ordre  $m$  du symbole  $P$ . Si les racines en  $\tau$  de  $P_m(\tau, \xi)$  sont des imaginaires purs distincts (i.e.  $P_m$  est strictement hyperbolique), alors  $P$  satisfait la condition de Petrowsky.*

*Remarque 3.1.4.* Reprenons alors l'équation de Schrödinger en dimension 1 que l'on perturbe par un terme d'ordre 1 :

$$\partial_t u + i\varepsilon \partial_x u + i\partial_x^2 u = 0 .$$

Son symbole est  $\tau - \varepsilon\xi - i|\xi|^2$ . Sa racine en  $\tau$  est  $\varepsilon\xi + i\xi^2$ , dont la partie réelle n'est évidemment pas majorée uniformément en  $\xi$  (même si  $\varepsilon$  est choisi petit). Ceci montre qu'il faut faire un minimum attention aux termes d'ordre inférieur dans les EDP dispersives. Ce problème de stabilité par perturbation d'ordre inférieur est largement discuté dans [41], chapitre 2, où sont introduites les notions de problème bien posé dans  $L^2$ , de problème faiblement bien posé (cette notion coïncide avec celle donnée par Hadamard), et de problème « non faiblement bien posé ». En particulier, il est démontré au paragraphe 2.6 que si le système

$$\partial_t u + P(\nabla)u + Q(\nabla)u = 0$$

est bien posé quelle que soit la perturbation  $Q$  d'ordre inférieur à celui de  $P$ , alors soit  $P$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 hyperbolique, soit le problème est parabolique (c'est à dire que  $P$  est d'ordre pair  $2m$ , et les valeurs propres du symbole  $A_{2m}(i\xi)$  de sa partie principale satisfont  $\operatorname{Re}(\tau(\xi)) \leq -\delta|\xi|^{2m}$ ,  $\delta > 0$ ). La question de la stabilité du critère de Petrowsky par perturbations d'ordre inférieur est en général importante en vue de l'analyse à coefficients variables : moralement, si on a stabilité par perturbation d'ordre inférieur, les termes supplémentaires apparaissant dans des commutateurs pourront être absorbés dans les estimations *a priori* (c'est effectivement le cas dans la théorie de Kreiss).

### 3.1.2 Définitions et propriétés élémentaires

On définit ici les symboles sur lesquels on va travailler, ainsi que leurs propriétés algébriques. Dans tout ce qui suit on considère des polynômes en  $(\tau, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d$ .

**Definition 3.1.5.** Soit  $p$  un entier non nul.

Le  $p$ -degré d'un monôme  $\tau^n \xi^\alpha$  est  $np + |\alpha|$ .

Le  $p$ -degré d'un polynôme est le plus grand  $p$  degré de ses monômes. On le note dans la suite  $d_p^o$ . Un polynôme est  $p$ -homogène lorsqu'il est somme de monômes de  $p$ -degré constant.

Si  $P$  est de degré  $n$ , la  $p$  partie principale de  $P$  est  $\sum_{|\alpha|+kp=n} a_\alpha \xi^\alpha \tau^k$ .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et pour alléger les notations, on parlera souvent de degré, homogénéité, partie principale... au lieu de  $p$  degré etc.

*Exemples 3.1.6.* • Le symbole de l'équation de Schrödinger (3.1) est 2-homogène, de degré 2.

- Le symbole de l'équation des poutres (3.2) est 2-homogène, de degré 4.
- Le symbole de l'équation scalaire en dimension 1

$$\partial_t u + i \sum_1^p a_k (-i\partial_x)^k u$$

a simplement pour partie  $p$ -principale  $\tau + ia_p \xi^p$ .

**Definition 3.1.7.** Soient  $m, p$  des entiers non nuls tels que  $p \geq 2$ . Un opérateur scalaire à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha| \leq p(m-k)} a_{\alpha,k} \partial_x^\alpha \partial_t^k \quad (3.5)$$

est dit *purement dispersif* d'ordre  $m$  lorsque  $a_{0,m} \neq 0$  et les racines en  $\tau$  du polynôme

$$P(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha| \leq p(m-k)} a_{\alpha,k} (i\xi)^\alpha (\tau)^k$$

sont imaginaires pures pour  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Par abus, on parlera de polynôme dispersif pour le symbole d'un opérateur dispersif.

*Remarque 3.1.8.* L'équation

$$\sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha| \leq p(m-k)} a_{\alpha,k} \partial_x^\alpha \partial_t^k u = 0$$

admet pour solutions particulières les ondes planes progressives monochromatiques  $e^{i\delta t} e^{i\xi \cdot x}$  pour  $(i\delta, \xi)$  solutions de la relation de dispersion  $P(i\delta, \xi) = 0$ . Lorsque  $p > 1$ , les solutions  $\delta = \delta(\xi)$  n'ont aucune chance de satisfaire  $\xi \cdot \nabla_\xi \delta = \delta$  (ce qui signifie que la vitesse de groupe est une vitesse de phase, voir [68] pour une discussion générale sur la notion de dispersion), on s'attend plutôt à un comportement asymptotique comme  $|\delta(\xi)|/|\xi| \rightarrow_{|\xi| \rightarrow \infty} \infty$ . C'est en ce sens que l'opérateur est dispersif.

Dans un livre en cours d'écriture, J. Rauch définit la notion de pure dispersivité pour les *systèmes hyperboliques d'ordre 1* en imposant comme condition que la variété caractéristique ne contienne pas d'hyperplan. Notre définition est évidemment différente comme elle implique des systèmes quasi-homogènes, on souligne cependant que la variété caractéristique est toujours « courbe » dans notre cadre (du fait de la quasi-homogénéité, même en dimension 1 pour des équations scalaires d'ordre 1 en temps).

Clairement, cette classe d'opérateurs satisfait (3.3), et en fait beaucoup d'opérateurs pour lesquels le problème de Cauchy et le problème de Cauchy rétrograde sont bien posés ont au moins leur partie principale dispersive :

**Proposition 3.1.9.** *Soit  $P(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha| \leq p(m-k)} a_{\alpha,k} (i\xi)^\alpha \tau^k$ ,  $a_{0,m} \neq 0$ . Si ses racines en  $\tau$  sont contenues dans une bande  $|Re(\tau)| \leq \gamma_0$  pour  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , alors la partie principale de  $P$ ,  $P_{mp}(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=p(m-k)} a_{\alpha,k} \xi^\alpha \tau^k$  est un polynôme dispersif.*

*Démonstration.* On vérifie facilement que

$$P_{mp}(\tau, \xi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{P(r^p \tau, r\xi)}{r^{mp}}.$$

Mais si  $(\tau, \xi)$  est racine de  $P(r^p \cdot, r \cdot)$ ,  $(r^p \tau, r \xi)$  est racine de  $P$ , ainsi les racines de  $P^r$  sont contenues dans la bande  $\{|\operatorname{Re}(\tau)| \leq \frac{\gamma_0}{r^p}\}$ , on obtient le résultat en faisant  $r \rightarrow \infty$  et par continuité des racines (car  $a_{0,m} \neq 0$ ).  $\square$

Si  $P$  est un opérateur dispersif, au vu des commentaires faits après la proposition 3.1.3, des perturbations d'ordre inférieur au  $p$ -degré de  $P$  peuvent le transformer en un opérateur pour lequel le problème de Cauchy est (très) mal posé. Cependant on a un énoncé affaibli de la stabilité par perturbation d'ordre inférieur énoncé pour les polynômes strictement hyperboliques.

**Proposition 3.1.10.** *Si les racines en  $\tau$  de  $P_{mp}$  sont imaginaires pures, simples et  $a_{\alpha,k} = 0$  pour  $p(m-k-1) < |\alpha| < p(m-k)$  (c'est à dire que tous les termes d'ordre compris strictement entre  $p(m-1)$  et  $pm$  sont nuls), alors il existe  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $(\tau, \xi) \in \{\operatorname{Re}(\tau) \geq \gamma_0\} \times \mathbb{R}^d$ ,  $P(\tau, \xi) \neq 0$ .*

*Démonstration.* On factorise  $P_{mp} = \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j(\xi))$ , où les  $\tau_j$  sont imaginaires purs distincts deux à deux. On peut supposer  $m > 1$  puisque le cas  $m = 1$  est trivial. Soit

$$\varepsilon(\xi) = \min_{i \neq j} |\tau_i(\xi) - \tau_j(\xi)|$$

C'est évidemment une fonction homogène de degré  $p$  (comme les  $\tau_j$ ), continue sur  $\{|\xi| = 1\}$ , donc il existe  $\alpha, \beta : \alpha|\xi|^p \leq \varepsilon \leq \beta|\xi|^p$ . De même  $C_1|\xi|^p \leq \max |\tau_j| \leq C_2|\xi|^p$ .

Montrons qu'il existe  $\gamma_0$  tel que pour  $\gamma \geq \gamma_0$ ,  $P_{mp}(\gamma + i\delta, \xi) \gtrsim \gamma(\gamma + |\delta| + |\xi|^p)^{m-1}$ . Pour cela, on distingue deux cas :

- Si  $|\delta| \geq \max |\tau_j|$ . Alors pour  $k$  tel que  $\tau_k \neq i \max |\tau_j|$  on a :

$$\frac{|i\delta - \tau_k|}{\delta} \geq \frac{|\delta| - \max |\tau_j| + |\tau_k - i \max |\tau_j||}{\delta} \geq \frac{|\delta| - \max |\tau_j| + \varepsilon(\xi)}{\delta},$$

La fonction minorante est continue, non nulle et tend vers 1 pour  $|\delta| \rightarrow \infty$  donc  $|i\delta - \tau_k| \gtrsim |\delta|$ . Mais comme les  $\tau_j$  sont distincts, il y a  $m-1$  indices  $k$  vérifiant cette propriété et l'hypothèse  $|\delta| \geq \max |\tau_j|$ , implique  $|\delta| \geq \alpha/2|\xi|^p$ . Pour le dernier indice, puisque les  $\tau_j$  sont imaginaires purs, on a toujours la minoration  $|\tau - \tau_j| \geq \gamma$ . D'où l'existence de  $c > 0$  tel que pour  $|\delta| \geq \max |\tau_j|$  :

$$\left| \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j) \right| \geq c\gamma(\gamma^2 + |\delta|^2 + |\xi|^p)^{\frac{m-1}{2}}$$

- Si  $|\delta| \leq \max |\tau_j|$ , pour au moins  $m-1$  indices on a (principe des tiroirs) :

$$|i\delta - \tau_k| \geq \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\alpha}{2}|\xi|^p \geq c'(|\delta| + |\xi|^p),$$

d'où à nouveau

$$\left| \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j) \right| \geq c''|\gamma|(|\gamma|^2 + |\delta|^2 + |\xi|^p)^{\frac{m-1}{2}}.$$



On peut maintenant conclure grâce à l'hypothèse sur les coefficients :

$$\begin{aligned} |P(\tau, \xi)| &\geq |P_{mp}(\tau, \xi)| - C(|\gamma| + |\delta| + |\xi|^p)^{m-1} \\ &\geq \min(c, c'') |\gamma| (|\gamma| + |\delta| + |\xi|^p)^{m-1} - C(|\gamma| + |\delta| + |\xi|^p)^{m-1} \end{aligned}$$

et il suffit de choisir  $|\gamma_0| > C/\min(c, c'')$ .  $\square$

*Remarque 3.1.11.* \* L'hypothèse  $a_{\alpha,k} = 0$  pour  $p(m-1) < |\alpha| + kp < pm$  n'a rien de superflu, typiquement dans l'exemple pathologique  $\partial_t + i\varepsilon\partial_x + i\partial_x^2$  c'est exactement elle qui est mise en défaut.

\* La proposition 3.1.10 indique que la condition de Petrowsky normale et rétrograde est vérifiée, on s'intéresse donc à des problèmes réversibles.

La partie homogène du symbole définit donc partiellement le comportement du symbole complet. Cela motive la définition suivante :

**Definition 3.1.12.** On dit qu'un opérateur scalaire de symbole  $P$  est strictement dispersif d'ordre  $m$  (et  $p$ -quasi-homogène) lorsque

- $P$  est purement dispersif
- la partie  $p$ -principale  $P_{mp}(\tau, \xi)$  a ses racines en  $\tau$  imaginaires pures et distinctes lorsque  $\xi \neq 0$ .

*Remarque 3.1.13.* Lorsque  $p = 1$ , un opérateur strictement dispersif est en fait un opérateur hyperbolique de partie principale strictement hyperbolique.

Le lemme suivant précise le comportement des racines du polynôme complet  $P$ .

**Lemme 3.1.14.** *Soit  $P$  strictement dispersif. Il existe  $M > 0$  tel que si  $P(\tau, \xi) = 0$  avec  $(|\tau|^2 + |\xi|^{2p})^{1/2p} \geq M$ , alors  $\tau$  est une racine simple.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe une suite  $(\tau_n, \xi_n)$  telle que

$$P(\tau_n, \xi_n) = 0, \text{ avec } r_n := (|\tau_n|^2 + |\xi_n|^{2p})^{1/2p} \geq n$$

et  $\tau_n$  racine d'ordre  $\geq 2$  de  $P(\cdot, \xi_n)$ .

La suite  $(\tau_n/r_n^p, \xi_n/r_n)$  est bornée, on peut en extraire une sous suite convergente de limite non nulle  $(\tau, \xi)$ . Mais  $1/r_n^{mp} P(r_n^p \cdot, r_n \cdot) \rightarrow P_{mp}(\cdot, \cdot)$  uniformément sur les compacts, par suite  $(\tau, \xi)$  est racine de  $P_{mp}$ , et  $\tau$  est racine d'ordre  $\geq 2$  de  $P(\cdot, \xi)$ , ce qui implique  $\xi = 0$  par hypothèse de stricte dispersivité, puis  $\tau = 0$  puisque  $a_m \neq 0$ . C'est une contradiction.  $\square$

*Remarque 3.1.15.* Dans la suite, on utilisera surtout le corollaire évident du lemme : si une partie des coordonnées  $(\tau, \xi)$  est grande, la norme complète  $(|\tau|^2 + |\xi|^{2p})^{1/(2p)}$  est grande et donc les racines en  $\tau$  sont simples.

Comme première application on en déduit le théorème suivant, prolongement de la proposition 3.1.10.

**Théorème 3.1.16.** *Si  $L$  est un opérateur strictement dispersif toute perturbation d'ordre au plus  $p(m-1)$  du symbole partiel satisfait les conditions de Petrowsky et de Petrowsky rétrograde.*

*Démonstration.* Écrivons le symbole de la perturbation comme  $P+Q$ ,  $P$  strictement dispersif,  $Q$  de  $p$  degré au plus  $p(m-1)$ . D'après le lemme précédent, pour  $|\xi|^p$  assez grand les racines en  $\tau$  de  $P$  sont distinctes. En utilisant exactement le même argument que pour la proposition 3.1.10 (noter que la seule hypothèse utilisée lors de la démonstration est la séparation des racines), on montre que :

$$\exists \alpha, M > 0 : \forall |\xi| \geq M, |P(\gamma + i\delta, \xi)| \geq \alpha|\gamma|(|\tau| + |\xi|^p)^{mp-1}$$

et puisque  $|Q| \leq C(|\tau| + |\xi|^p)^{m-1}$ , pour  $|\gamma| > C$ ,  $|\xi| \geq M$ ,  $|P+Q|(\gamma + i\delta, \xi) \geq |P| - |Q|$ . Mais pour  $|\xi| \leq M$ , les racines en  $\tau$  sont uniformément bornées, donc a fortiori leur partie réelle aussi, ce qui conclut.  $\square$

*Exemple 3.1.17.* Soit  $P(\tau, \xi) = \tau^2 + 1 - \xi^2 + \xi^4$ . Les racines en  $\tau$  sont bien des imaginaires purs, la partie principale  $P_2$  est  $\tau^2 + \xi^4$ , dont les racines en  $\tau$  sont des imaginaires purs distincts, mais le polynôme partiel  $P_1 = \tau^2 - \xi^2 + \xi^4$  admet des racines en  $\tau$  réelles non nulles (mais évidemment bornées) et qui deviennent imaginaires pures pour  $\xi > 1$ .

### 3.1.3 Notion de $q$ -hyperbolicité

Gindikin et Volevitch ont développé la notion de  $q$ -hyperbolicité, généralisation quasi-homogène de la stricte hyperbolicité. L'exposé de cette section est repris de [31].

**Definition 3.1.18.** Soit  $q \geq 1$  un entier impair.

Un opérateur différentiel  $P(\partial_t, D_x)$  (avec  $D = \frac{1}{i}\partial$ ) est dit  $q$ -hyperbolique lorsque

- le symbole  $P(\tau, \xi)$  est résolu en  $\tau$  et  $q$ -homogène,
- ses racines en  $\tau$  sont distinctes et imaginaires pures pour  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,
- pour  $q > 1$ , il existe une direction  $n \in \mathbb{R}^d$  telle que pour toute racine  $\tau(\xi)$  de  $P$ ,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \frac{1}{i} \langle n, \nabla_\xi \tau \rangle > 0. \quad (3.6)$$

*Remarque 3.1.19.* • La 1-hyperbolicité coïncide avec la stricte hyperbolicité.

- L'entier  $q$  doit être impair car la propriété (3.6) ne peut jamais être vraie pour  $q$  pair.
- Dans la suite, on verra que toute perturbation d'ordre inférieure est acceptable (en un certain sens) pour les opérateurs  $q$ -hyperboliques. La condition de  $q$ -homogénéité donnée dans la définition n'est donc pas primordiale.

- La différence entre opérateurs strictement dispersifs et  $q$  hyperboliques est la propriété (3.6). L'absence d'une telle propriété est un obstacle majeur pour l'analyse à coefficients variables.

Comme on l'a déjà dit, les seuls opérateurs pour lesquels la condition de Petrowsky est stable par perturbation d'ordre inférieur sont les opérateurs strictement hyperboliques ou paraboliques. L'intérêt des opérateurs  $q$ -hyperboliques est qu'ils satisfont une version affaiblie de cette stabilité.

**Definition 3.1.20.** Un opérateur  $P(\partial_t, D_x)$  est *faiblement  $q$ -stable* dans la direction  $n$  lorsque pour tout polynôme  $Q$  tel que  $d_q^\circ(Q) < d_q^\circ(P)$ , il existe  $\nu_0(Q)$  tel que pour  $\nu \geq \nu_0(Q)$  on ait

$$\forall (\tau, \zeta), \zeta = \xi + i\nu n, \operatorname{Re}(\tau) \geq \gamma_0(\nu, Q), (\xi, \operatorname{Im}(\tau)) \in \mathbb{R}^{d+1}, \\ P(\tau, \zeta) + Q(\tau, \zeta) \neq 0 .$$

Un opérateur  $q$ -homogène faiblement  $q$ -stable satisfait le critère de Petrowsky, on peut vérifier qu'un opérateur strictement hyperbolique ou parabolique est faiblement  $q$ -stable, avec  $q$  correspondant à sa quasi-homogénéité. Le point intéressant est que les opérateurs  $q$ -hyperboliques sont également faiblement  $q$ -stables ;

**Théorème 3.1.21.** *Tout opérateur  $q$ -hyperbolique est faiblement  $q$  stable dans la direction  $n$  de la définition de  $q$ -hyperbolicité.*

*Plus précisément, on a l'inégalité*

$$\exists R, \nu_0, C > 0, \forall \zeta = \xi + i\nu n, \nu \geq \nu_0, \operatorname{Re}(\tau) > R\nu^q, \\ (\xi, \operatorname{Im}(\tau)) \in \mathbb{R}^{n+1}, C(|\operatorname{Re}(\tau)| + \nu|\zeta|^{q-1})(|\tau| + |\zeta|^q)^{m-1} \leq |P(\tau, \zeta)| . \quad (3.7)$$

Quitte à faire un changement de base, on suppose pour alléger les notations que  $n = (0, \dots, 0, 1)$ .

L'apparition de la quantité  $\zeta = \xi + i\nu n$  ainsi que l'inégalité (3.7) laisse entendre que les espaces où peuvent être obtenues des estimations *a priori* sont les espaces de Sobolev à poids anisotropes

$$H_{\gamma, \nu}^{[m, s], q} = \{u : \|u\|_{[m, s], q, (\gamma, \nu)}^2 \\ = \sum_{j=0}^m \iint e^{2\nu x_d} (1 + |\xi'|^2 + |\tau|^{2/q})^{m+s-j} |\widehat{u}|^2 d\xi' d\tau dx_d < \infty\},$$

où  $u \rightarrow \widehat{u}$  est la transformée de Fourier-Laplace relativement aux variables  $(x_1, \dots, x_{d-1}, t) = (x', t)$ , et  $\xi'$  est la variable duale de  $x'$ . Similairement, on note

$$|v|_{[m, s], q, \gamma}^2 = \iint (1 + |\xi'|^2 + |\tau|^{2/q})^{m+s-j} |\widehat{v}|^2 d\xi' d\tau ,$$

la norme correspondante pour des fonctions définies sur  $\{x_d = 0\}$ . Les auteurs considèrent le problème aux limites scalaire

$$\begin{cases} P(\partial_t, D_x)u = f, (x, t) \in (\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+ , \\ B_j(\partial_t, D_x)u|_{x_d=0} = g_j, 1 \leq j \leq \mu , \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

où la partie  $q$ -homogène de  $P$  est  $q$ -hyperbolique dans la direction de  $x_d$ , les opérateurs différentiels de bord  $B_j$  satisfont la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme,  $\mu$  est le nombre de conditions aux limites. On note  $\beta_j$  l'ordre de  $B_j$ . En généralisant les arguments de Sakamoto pour les problèmes hyperboliques, ils obtiennent

**Théorème 3.1.22.** *Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , il existe  $\nu_0$  tel que pour  $\nu \geq \nu_0$ ,  $\operatorname{Re}(\tau) \geq C(\nu)$ , toute solution  $u$  de (3.8) satisfasse l'estimation*

$$\begin{aligned} & |\nu| \|u\|_{[m,s],q,(\gamma,\nu)}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} |\partial_d^j u(\cdot, 0, \cdot)|_{m+s-j,q,\gamma}^2 \\ & \leq C \left( \frac{1}{\nu} \|f\|_{[0,s+1],q,(\gamma,\nu)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|g_j\|_{m+s-\beta_j,q,\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'argument clé de la preuve réside dans l'analyse des racines du symbole  $p(\tau, \eta, \cdot)$  pour  $\operatorname{Re}(\tau) \geq 0$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ . Pour des fonctions  $a$  et  $b$ , la relation d'équivalence  $a \asymp b$  signifie qu'il existe  $C_1, C_2 > 0$  :  $C_1 a \leq b \leq C_2 a$ .

**Proposition 3.1.23.** *Soit  $p(\tau, \xi)$  un symbole quasi-homogène  $q$ -hyperbolique de degré  $mq$ ,  $\xi = (\eta_1, \dots, \eta_{d-1}, \frac{\lambda}{i})$ .*

1. *Lorsque  $\operatorname{Re}(\tau) > 0$  le symbole considéré comme un polynôme en  $\lambda$  n'a pas de racine imaginaire pure, admet  $m \frac{q+1}{2}$  racines en  $\lambda$  de partie réelle positive, et  $m \frac{q-1}{2}$  racines de partie réelle négative.*
2. *Pour  $(\tau, \eta) \in (i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}$ ,  $p$  admet exactement  $m$  racines imaginaires pures simples en  $\lambda$ , et  $m \frac{q-1}{2}$  racines de partie réelle positive/négative. Chaque racine imaginaire pure est limite pour  $\operatorname{Re}(\tau) \rightarrow 0^+$  d'une racine (simple) de partie réelle positive.*
3. *On peut classer les racines de la manière suivante :  $\lambda_j^+(\tau, \eta)$ ,  $j = 1, \dots, m \frac{q-1}{2}$ ,  $\lambda_j^-(\tau, \eta)$ ,  $j = 1 \dots m \frac{q-1}{2}$ ,  $\lambda_j^h$ ,  $j = 1 \dots m$ , telles qu'on ait les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall (\tau, \eta) \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad |\operatorname{Re}(\lambda_j^\pm)| &\asymp c(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)}, \\ \operatorname{Re}(\lambda_j^h) &\asymp \gamma(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{(1-q)/(2q)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* 1) Pour  $(\eta, \frac{\lambda}{i}) = (0, \frac{\lambda}{i})$ , on pose  $\omega = \frac{\lambda}{i}$ . Par homogénéité et  $q$ -hyperbolicité on a la factorisation suivante du symbole

$$p(\tau, 0, \omega) = \prod_{j=1}^m (\tau - ia_j \omega^q), \quad a_j > 0. \quad (3.10)$$

En calculant directement les zéros en  $\omega$  de chaque facteur, on voit que pour  $\tau = \gamma + i\delta$ ,  $\gamma > 0$ , il y a  $m \frac{q-1}{2}$  racines de partie imaginaire positive, et  $m \frac{q+1}{2}$  racines de partie imaginaire négative, ce qui correspond à pour la variable  $\lambda$  à  $m \frac{q-1}{2}$  racines de partie réelle négative et  $m \frac{q+1}{2}$  racines de partie réelle positive.

Puisque  $p(\tau, \xi)$  a ses racines en  $\tau$  imaginaires pures pour  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $p(\tau, \eta, \cdot)$  n'a pas de racine imaginaire pure en  $\lambda$  pour  $\tau \in i\mathbb{R}$ . Le nombre de racines de partie réelle positive (ou négative) reste donc constant pour  $(\tau, \eta) \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

2) Lorsque  $\operatorname{Re}(\tau) = 0$  et pour  $\lambda/i = \omega \in \mathbb{R}$ , on écrit

$$p(\tau, \eta, \omega) = \prod (i\delta - i\delta_j(\eta, \omega)) = i^m \prod (\delta - \delta_j(\eta, \omega)) .$$

À  $\eta$  fixé, par  $q$ -hyperbolicité  $\omega \rightarrow \delta_j(\eta, \omega)$  est une fonction strictement croissante, qui tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  en  $-\infty$ . Pour chaque terme du produit  $\delta - \delta_j(\eta, \omega)$  il existe un unique  $\omega_j(\delta, \eta)$  réel tel que  $\delta - \delta_j(\eta, \omega_j) = 0$ .

Les  $\omega_j$  sont distincts deux à deux car si  $\omega_j(\delta, \eta) = \omega_k(\delta, \eta)$ ,  $j \neq k$ ,  $\delta$  serait une racine double de  $p(\cdot, \eta, \omega_j)$ , ce qui est incompatible avec la  $q$ -hyperbolicité, il y a donc exactement  $m$  racines  $\lambda_j = i\omega_j$  racines imaginaires pures. En utilisant la factorisation (3.10) pour  $\operatorname{Re}(\tau) = 0$ , on voit que  $p(i\delta, 0, \frac{\lambda}{i})$  a  $m(q-1)/2$  racines en  $\lambda$  de partie réelle positive/négative pour  $\delta \neq 0$ . Or on vient de montrer que les racines imaginaires pures sont de nombre constant  $m$  sur le connexe  $(\{\operatorname{Re}(\tau) = 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}$  (ou sur chaque connexe  $\{\tau = i\delta, \delta \in \mathbb{R}^{\pm*}\}$  si  $d = 1$ ). Par continuité des racines, les racines non imaginaires pures ne peuvent donc pas traverser l'axe des imaginaires sur le connexe  $(\{\operatorname{Re}(\tau) = 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}$ , leur nombre reste donc constant, égal à  $m(q-1)/2$ . Comme pour  $\operatorname{Re}(\tau) > 0$  il y a  $m(q+1)/2$  racines de partie réelle positive, on en déduit en particulier que les racines imaginaires pures sont limite pour  $\operatorname{Re}(\tau) \rightarrow 0^+$  de racines de partie réelle positive.

3) On se place sur la demi-sphère  $S^+ = \{(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)} = 1, \operatorname{Re}(\tau) \geq 0\}$ . On note  $\lambda_j^-$  (resp.  $\lambda_j^+$ ) les racines dont la partie réelle reste strictement négative (resp. positive). Par continuité et compacité, il existe  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  telles que pour tout  $(\tau, \eta) \in S^+$ ,  $\alpha_2 \geq |\operatorname{Re}(\lambda_j^\pm)| \geq \alpha_1$ . D'où par homogénéité pour tout  $(\tau, \eta)$  tels que  $\operatorname{Re}(\tau) \geq 0$ , on a

$$\alpha_2(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)} \geq |\operatorname{Re}(\lambda_j^\pm(\tau, \eta))| \geq \alpha_1(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)} .$$

Notons  $\lambda_j^h$  les  $m$  racines qui sont imaginaires pures pour  $\operatorname{Re}(\tau) = 0$ . Par simplicité des racines et comme elles sont toutes de partie réelle positive ou nulle, on a

$$\forall (\tau, \eta) \in S^+, \quad c_1\gamma \leq \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq c_2\gamma ,$$

puis par quasi-homogénéité, pour tous  $(\tau, \eta)$  tels que  $\operatorname{Re}(\tau) \geq 0$

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\gamma}{(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/2}} (|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)} &\leq \operatorname{Re}(\lambda_j) \\ &\leq c_2 \frac{\gamma}{(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/2}} (|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Corollaire 3.1.24.** *Si  $p$  est un symbole  $q$ -hyperbolique de degré  $mq$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall (\tau, \eta, \lambda) : P(\tau, \eta, \lambda) = 0, \gamma \geq C\nu^q \Rightarrow |\operatorname{Re}(\lambda + \nu)| \geq \frac{\nu}{2}.$$

*Démonstration.* Comme dans la proposition précédente, on sépare les racines  $\lambda_j^\pm$  et  $\lambda_j^h$ . Pour  $\lambda_j^+$  et  $\lambda_j^h$  on a

$$\operatorname{Re}(\lambda_j^+ + \nu) \geq \nu, \operatorname{Re}(\lambda_j^h + \nu) \geq \nu.$$

Tandis que pour  $\lambda_j^-$

$$\operatorname{Re}(\lambda_j^- + \nu) \leq -\alpha_1(|\tau|^2 + |\eta|^{2q})^{1/(2q)} + \nu \leq -\alpha_1\gamma^{1/q} + \nu,$$

il suffit alors de prendre  $C = \left(\frac{3}{2\alpha_1}\right)^q$  pour obtenir

$$\operatorname{Re}(\lambda_j^- + \nu) \leq -\frac{\nu}{2}.$$

□

L'utilisation du corollaire pour obtenir une estimation *a priori* n'est pas immédiate. Gindikin et Volevich obtiennent (3.9) pour des équations scalaires en adaptant la méthode de Sakamoto [61]. On montre au paragraphe 4.3.4 comment l'estimation peut s'obtenir dans le cas des systèmes par la méthode des symétriseurs (généralisés) de Kreiss.

## 3.2 Effet régularisant pour le problème de Cauchy

### 3.2.1 Un résultat de Constantin et Saut

La régularisation locale des solutions d'équations dispersives *réversibles* est un phénomène assez surprenant, dont l'observation remonte au moins aux travaux de Kato [36] sur l'équation de Korteweg-de-Vries. Un des premiers résultats généraux sur cet effet de « régularisation dispersive » est dû à Constantin et Saut [18] (1988). Ils démontrent (entre autres) le résultat suivant :

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $u$  solution de*

$$\begin{cases} \partial_t u + iP(D)u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où  $D = 1/i(\partial_1, \dots, \partial_d)$ ,  $P(D)$  est défini par son symbole réel  $p(\xi)$ .

On suppose que  $p$  vérifie

- $p \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et est  $\mathcal{C}^1$  en dehors d'une boule de rayon  $R \geq 0$ ,

- il existe  $m \geq 2$  entier et une constante  $c > 0$  tels que

$$\forall 1 \leq j \leq d, \forall |\xi| \geq R, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \right| \geq c |\xi|^{m-2} |\xi_j|. \quad (3.11)$$

Si  $(x, t) \rightarrow \chi(x, t) = \chi_0(t) \chi_1(x_1) \cdots \chi_d(x_d)$  est un produit de fonctions de troncature ( $\chi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ), alors  $u$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \chi^2(x, t) |(1 - \Delta)^{(2s+m-1)/4} u(x, t)|^2 dx dt \leq C_\chi^2 \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (3.12)$$

où  $(1 - \Delta)^{(2s+m-1)/4}$  est le multiplicateur de Fourier spatial de symbole  $(1 + |\xi|^2)^{(2s+m-1)/4}$  et

$$C_\chi = C \left( \prod_{j=0}^d \|\chi_j\|_2 + \|\chi_0\|_\infty \sum_{j=1}^d \|\chi_j\|_\infty \prod_{k \neq j} \|\chi_k\|_{L^2} \right).$$

On parle de régularisation dispersive car ce résultat implique que  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, H_{loc}^{s+(m-1)/2}(\mathbb{R}^d))$  alors que la donnée initiale n'est que  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , et que l'estimation globale optimale est seulement

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^d))} = \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

### Exemples :

- L'opérateur de Schrödinger  $\partial_t + i\Delta$  satisfait les hypothèses du théorème, avec  $p(\xi) = -i|\xi|^2$ .
- L'opérateur  $\partial_t + i(\partial_1^2 - \partial_2^2)$  satisfait également ces hypothèses, puisque comme pour l'opérateur de Schrödinger

$$\left| \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \right| = 2|\xi_i|.$$

- De façon surprenante, l'hypothèse (3.11) n'est pas indépendante par changement de variable. En effet, si l'on reprend l'exemple précédent, après le changement  $y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ ,  $y_2 = \frac{x_1-x_2}{2}$ , l'opérateur devient  $\partial_t + i \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}$ , qui ne satisfait clairement plus l'hypothèse

$$\left| \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \right| \geq |\xi_i|.$$

On va prouver l'analogie de ce résultat pour une classe d'opérateurs strictement dispersifs d'ordre  $m$  en  $t$ . Pour commencer, on décrit la forme des solutions du problème de Cauchy avec la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $P$  un opérateur strictement dispersif de  $p$ -degré  $mp$ . On note  $\tau_j$  les racines (imaginaires pures) de  $P(\cdot, \xi)$ . Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} P(\partial_t, \partial_x)u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s, \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = u_{m-1} \in H^{s-p(m-1)}, \end{cases} \quad (3.13)$$

admet une unique solution dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ , dont la transformée de Fourier spatiale peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi, t) &= \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{j+1}(\xi, t) \widehat{u}_j, \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j(\xi) e^{\tau_j(\xi)t}, \quad \forall (\xi, t) \in \{|\xi| \geq R\} \times \mathbb{R}\end{aligned}$$

où  $R > 0$  est tel que, pour  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\int_{|\xi| \geq R} |\alpha_j|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty, \quad \forall \xi : |\beta_j| \leq C(t)/(1 + |\xi|)^{p(j-1)}.$$

Si de plus  $P$  est égal à sa partie  $p$ -principale,  $|\xi|^{p(j-1)} \beta_j$  est borné uniformément en  $\xi, t$  pour  $j = 1, \dots, m$ .

*Démonstration.* Par transformation de Fourier, le système devient une EDO résolue

$$P(\partial_t, \xi) \widehat{u} = 0.$$

D'après le lemme 3.1.14, pour  $\xi$  assez grand les  $\tau_j$  sont distincts, la solution est donc de la forme  $\sum_{j=1}^m \alpha_j(\xi) e^{\tau_j t}$ . Les  $\alpha_j$  sont déterminés par les conditions initiales

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_j &= \widehat{u}_0, \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\tau_j}{|\xi|^p} &= \frac{\widehat{u}_1}{|\xi|^p}, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\frac{\tau_j}{|\xi|^p}\right)^{m-1} &= \frac{\widehat{u}_{m-1}}{|\xi|^{p(m-1)}}, \end{cases}$$

Si  $V(\xi)$  est la matrice de Vandermonde associée à  $\frac{1}{|\xi|^p}(\tau_1, \dots, \tau_m)$  il vient

$$\exists R > 0 : \forall \xi \geq R, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0 \\ \vdots \\ \frac{\widehat{u}_{m-1}}{|\xi|^{p(m-1)}} \end{pmatrix}.$$

Soient  $P_{mp}$  la partie  $p$  principale de  $P$ ,  $\tilde{\tau}_j$  ses racines, par hypothèse imaginaires pures et distinctes. Par quasi-homogénéité et quitte à permuter les racines, on a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty, \frac{\xi}{|\xi|} = \tilde{\xi}} \frac{\tau_j(\xi)}{|\xi|^p} = \tilde{\tau}_j(\tilde{\xi}).$$

On en déduit que  $\|V^{-1}\|$  est uniformément bornée pour  $|\xi| \geq R$  et donc

$$\sum_{j=1}^m \int_{|\xi| \geq R} |\alpha_j|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \leq C(\|u_0\|_{H^s}^2 + \dots + \|u_{m-1}\|_{H^{s-p(m-1)}}^2). \quad (3.14)$$



On déduit de

$$\widehat{u}(\xi, t) = (e^{\tau_j t})_{1 \leq j \leq m} \cdot V^{-1} \cdot (\widehat{u}_j(\xi, t)/|\xi|^{pj})_{0 \leq j \leq m-1},$$

que pour  $|\xi| \geq R$ ,  $\widehat{u} = \sum \beta_j \widehat{u}_j$ , avec  $|\beta_j| \leq C/(1 + |\xi|^{pj})$ .

Pour  $|\xi| \leq R$  fixé, l'EDO  $P(\partial_t, \xi) = 0$  admet une unique solution globale en temps satisfaisant les conditions initiales, de la forme  $\sum_{j=1}^m \beta_j(\xi, t) \widehat{u}_j(\xi)$  et par compacité les  $\beta_j$  sont bornés localement en temps.

Dans le cas où  $P$  est  $p$ -homogène, les fonctions  $\tau_j$  sont homogènes de degré  $p$ , ce qui implique que les coefficients de  $V^{-1}$  sont homogènes de degré 0. On note ces derniers  $v_{k,l}^{-1}$ . Il vient

$$|\beta_j(\xi, t)| = \left| \frac{1}{|\xi|^{p(j-1)}} \sum_{k=1}^m e^{\tau_k t} v_{k,j}^{-1}(\xi) \right| \leq \frac{m}{|\xi|^{p(j-1)}} \sup_{|\xi|=1, 1 \leq k, l \leq m} |v_{k,l}^{-1}|.$$

$$\Rightarrow \exists C > 0 : \forall \xi, t \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, |\xi|^{p(j-1)} |\beta_j(\xi, t)| \leq C.$$

□

*Remarque 3.2.3.* Il n'y a pas de majoration uniforme de  $(1 + |\xi|^{p(j-1)}) |\beta_j(\xi, t)|$ . Par exemple pour l'équation des ondes  $(1 + |\xi|) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$  diverge pour  $|\xi| = 1/t \rightarrow 0$ .

Le lemme suivant établit un analogue de la propriété (3.11).

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $P$  un opérateur strictement dispersif de partie  $p$ -principale  $P_{mp}$  (Définition 3.1.12 p.54). On suppose qu'il est « elliptique en espace » au sens où  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $P_{mp}(0, \xi) \neq 0$ , alors*

$$\begin{aligned} & \forall \widehat{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}, \exists C_{\widehat{\xi}} > 1, R_{\widehat{\xi}} > 0 : \\ & \forall \xi \in \{R_{\widehat{\xi}} \leq |\xi| < C_{\widehat{\xi}} \langle \widehat{\xi}, \xi \rangle\}, 1 \leq j \leq m, \left| \frac{\partial \sigma_j}{\partial \widehat{\xi}} \right| \geq c_{\widehat{\xi}} (1 + |\xi|)^{m-1} \quad (3.15) \end{aligned}$$

*En particulier, il existe  $R > 0$  tel qu'il existe un nombre fini d'ouverts  $C_k$ , recouvrant  $\{|\xi| \geq R\}$ , de la forme  $\{\xi : R \leq |\xi| \leq C_k \langle \xi^k, \xi \rangle\}$  où les  $\xi^k$  sont des vecteurs de norme 1, et sur lesquels :*

$$\exists c > 0 : \forall \xi \in C_k, \left| \frac{\partial \sigma_j}{\partial \xi^k} \right| \geq c (1 + |\xi|)^{m-1} \quad (3.16)$$

*Démonstration.* On utilise la quasi-homogénéité :  $\tau_j := h^p \widehat{\tau}_j(\xi/h, 1/h)$ , et  $\widehat{\tau}_j$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\{|\xi| \geq 1\} \times [0, 1/R]$  pour  $R$  assez grand. Notons  $\nabla_1$  la dérivation par rapport aux  $d$  premières variables,  $\partial_2$  la dérivation relativement à la dernière. La dérivation de  $\tau_j := |\xi|^{p-1} \widehat{\tau}_j(\xi/|\xi|, 1/|\xi|)$  donne

$$\begin{aligned} \nabla \tau_j &= |\xi|^{p-1} \xi / |\xi| \widehat{\tau}_j + |\xi|^m \nabla_1 \widehat{\tau}_j \cdot (I/|\xi| - \xi \otimes \xi / |\xi|^3) - |\xi|^m \partial_2 \widehat{\tau}_j \xi / |\xi|^3 \\ &= |\xi|^{m-1} \left( \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{\tau}_j + \nabla_1 \widehat{\tau}_j \cdot \left( I - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) - \frac{\xi}{|\xi|^2} \partial_2 \widehat{\tau}_j \right). \end{aligned}$$

Etant donnée une direction  $\widehat{\xi}$  on obtient pour  $|\xi| \geq R$  :

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial \widehat{\xi}} = |\xi|^{m-1} \left( \frac{\xi \cdot \widehat{\xi}}{|\xi|} \widehat{\tau}_j + \nabla_1 \widehat{\tau}_j \cdot \left( \widehat{\xi} - \frac{(\xi \cdot \widehat{\xi}) \xi}{|\xi|^2} \right) - \frac{\xi \cdot \widehat{\xi}}{|\xi|^2} \partial_2 \widehat{\tau}_j \right).$$

On prend  $C_{\widehat{\xi}} = \frac{1}{1-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$  à fixer ; sur  $\{|\xi| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \widehat{\xi} \cdot \xi\}$ , on a l'inégalité

$$|\xi| \geq \xi \cdot \widehat{\xi} \geq (1-\varepsilon)|\xi|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tau_j}{\partial \widehat{\xi}} \right| &\geq |\xi|^{m-1} \left( (1-\varepsilon) \inf_{\mathbb{S}^{d-1} \times [0,1/R]} |\widehat{\tau}_j| - \sup_{\mathbb{S}^{d-1} \times [0,1/R]} |\nabla_1 \widehat{\tau}_j| \left| \widehat{\xi} - \frac{(\xi \cdot \widehat{\xi}) \xi}{|\xi|^2} \right| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|\xi|} \sup_{\mathbb{S}^{d-1} \times [0,1/R]} |\partial_2 \widehat{\tau}_j| \right). \end{aligned}$$

Soit  $\alpha = \inf_{\mathbb{S}^{d-1} \times [0,1/R]} |\widehat{\tau}_j|$ , par hypothèse d'ellipticité spatiale, pour  $R$  assez grand, on a  $\alpha > 0$ . Pour  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ,  $(1-\varepsilon) \inf |\widehat{\tau}_j| \geq \alpha/2$ , de plus

$$\begin{aligned} \left| |\xi|^2 \widehat{\xi} - (\xi \cdot \widehat{\xi}) \xi \right|^2 &= |\xi|^4 - 2|\xi|^2 (\xi \cdot \widehat{\xi})^2 + (\xi \cdot \widehat{\xi})^2 |\xi|^2 \\ &= |\xi|^4 - |\xi|^2 (\xi \cdot \widehat{\xi})^2 \\ &= |\xi|^2 (|\xi| - \xi \cdot \widehat{\xi})(|\xi| + \xi \cdot \widehat{\xi}) \\ &\leq 2|\xi|^4 \varepsilon, \end{aligned}$$

et (évidemment)

$$|\xi| \geq R \Rightarrow \frac{1}{|\xi|} \sup |\partial_2 \widehat{\tau}_j| \leq \frac{1}{R} \sup |\partial_2 \widehat{\tau}_j|.$$

On en tire pour  $R \geq 8 \frac{\max(\sup |\partial_2 \widehat{\tau}_j|, 1/\eta)}{\alpha}$ ,  $\varepsilon \leq \frac{\alpha^2}{128 \sup |\nabla_1 \widehat{\tau}_j|^2}$ ,

$$\forall R \leq |\xi| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \xi \cdot \widehat{\xi}, \quad \frac{\partial \tau_j}{\partial \widehat{\xi}} \geq |\xi|^{m-1} \frac{\alpha}{4} \geq \alpha' (1+|\xi|)^{m-1},$$

ce qui prouve la première partie du lemme. La deuxième partie s'en déduit facilement : notons

$$C_{\widehat{\xi}} = \{R_{\widehat{\xi}} \leq |\xi| < C_{\widehat{\xi}} \langle \widehat{\xi}, \xi \rangle\}.$$

Soit  $\Pi$  la « projection » sur la sphère ;  $\Pi(\xi) = \xi/|\xi|$ .

Comme  $\Pi(C_{\widehat{\xi}})$  est un ouvert de  $\mathbb{S}^{d-1}$ , par compacité on extrait un recouvrement fini  $\cup_k \Pi(C_{\widehat{\xi}^k})$ , et il est clair que

$$\bigcup_k \{\max R_k \leq |\xi| \leq C_k \langle \xi, \widehat{\xi}^k \rangle\}$$

est un recouvrement de  $\{|\xi| \geq \max_k (R_k)\}$  qui convient.  $\square$

On peut maintenant énoncer le résultat de régularisation locale.

La fonction de troncature utilisée sera différente de celle du théorème 3.2.1 : ici  $\chi = \chi_0(t)\chi_1(x \cdot \widehat{\xi}^1) \cdots \chi_N(x \cdot \xi^N)$ , avec  $(\xi^1, \dots, \xi^N)$  comme dans le lemme 3.2.4 (i.e.  $\chi$  est un produit de fonctions qui tronquent dans chaque direction  $\xi^k$ ).

**Théorème 3.2.5.** *Soit  $P(\partial_t, D_x)$  un opérateur différentiel strictement dispersif de partie principale  $P_{mp}$  et de degré  $mp$ . On suppose que la partie spatiale du symbole principal est elliptique, c'est à dire*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, P_{mp}(0, \xi) \neq 0 .$$

Alors le résultat du théorème 3.2.1 est encore vrai pour  $u$  solution du problème de Cauchy (3.13)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\partial_t, \partial_x)u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s, \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1}u|_{t=0} = u_{m-1} \in H^{s-p(m-1)} , \end{array} \right.$$

i.e. on a l'estimation

$$\begin{aligned} \exists C > 0 : \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \chi^2(x, t) |(1 - \Delta)^{\frac{2s+m-1}{4}} u(x, t)|^2 dx dt &\leq C (\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ \cdots + \|u_{m-1}\|_{H^{s-p(m-1)}}^2) . \end{aligned}$$

*Remarque 3.2.6.* La preuve de ce résultat est quasiment identique à celle du théorème original, à l'utilisation près du lemme 3.2.4.

*Démonstration.* Comme dans l'article original on raisonne par dualité, il s'agit de prouver que pour  $f \in L_{x,t}^2$

$$\iint \chi(1 - \Delta)^{\frac{2s+m-1}{4}} u f dx dt \leq C \|f\|_{L_{x,t}^2} (\|u_0\|_{H^s} + \cdots + \|u_{m-1}\|_{H^{s-p(m-1)}}) .$$

Quitte à remplacer  $u$  par  $(1 - \Delta)^{s/2}u$ , on peut supposer  $s = 0$ . On note  $\widehat{\cdot}$  la transformée de Fourier relativement aux variables d'espaces,  $\mathcal{F}(\cdot)$  la transformée de Fourier complète, et  $\tau_j(\xi) = i\sigma_j(\xi)$  les racines de  $P(\cdot, \xi)$ .

La formule de Plancherel donne

$$\begin{aligned} \iint \chi(1 - \Delta)^{\frac{m-1}{4}} u f dx dt &= \iint (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \widehat{u}(\xi, t) \widehat{\chi} f d\xi dt \\ &= \iint_{t, |\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \widehat{u}(\xi, t) \widehat{\chi} f d\xi dt \\ &+ \iint_{t, |\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \widehat{u}(\xi, t) \widehat{\chi} f d\xi dt . \end{aligned}$$

La première intégrale s'estime facilement ; soit  $T$  tel que  $\chi = 0$  pour  $|t| \geq T$  :

$$\begin{aligned} \iint_{t, |\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \widehat{u}(\xi, t) \widehat{\chi f} d\xi dt &\leq 2T \|u\|_{C([-T, T]; L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\times (1 + R^2)^{\frac{m-1}{4}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on choisit  $R > 0$  tel que pour  $|\xi| > R$  les  $\tau_j$  sont distincts et on utilise la représentation  $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{\tau_j t}$ ,  $\tau_j = i\sigma_j$  :

$$\begin{aligned} &\iint (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{\tau_j t} \right) \widehat{\chi f} d\xi dt \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \alpha_j \left( \int_{\mathbb{R}_t} e^{\tau_j t} \widehat{\chi f} dt \right) d\xi \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \alpha_j(\xi) \mathcal{F}(\chi f)(\xi, \sigma_j(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Vu l'estimation (3.14) sur les  $\alpha_j$ , il suffit de prouver

$$\forall 1 \leq j \leq m, \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}} |\mathcal{F}(\chi f)(\xi, \sigma_j)|^2 d\xi \leq C_\chi \|f\|_{L^2_{x,t}}^2. \quad (3.17)$$

L'idée pour cela est d'adapter le cas simple de la dimension 1 avec  $\sigma(\xi) = \xi^m$ , pour lequel on effectue le changement de variable  $\eta = \xi^m$  :

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}} |\mathcal{F}(\chi f)(\xi, \xi^m)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\eta| \geq R^m} (1 + |\eta|^{2/m})^{\frac{m-1}{2}} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta^{1/m}, \eta)|^2 \frac{d\eta}{m\eta^{\frac{m-1}{m}}} \\ &\leq C \int_{|\eta| > R^m} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta^{1/m}, \eta)|^2 d\eta \\ &= C \int_{|\eta| > R^m} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_t(\chi_1)(\mu - \eta^{1/m}) \mathcal{F}(\chi_0 f)(\mu, \eta) d\mu \right)^2 d\eta \\ &\leq C \|\chi_1\|_{L^2}^2 \int_{|\eta| > R^m} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\chi_0 f)(\mu, \eta)|^2 d\mu d\eta \quad (\text{Cauchy Schwarz}) \\ &\leq C \|\chi_1\|_{L^2}^2 \|\chi_0\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{L^2_{x,t}}^2 \quad (\text{Parseval}). \end{aligned}$$

Dans le cas général, on utilise le lemme 3.2.4 : si  $R$  est fixé assez grand,  $\{|\xi| > R\}$  peut s'écrire comme une réunion finie d'ouverts coniques  $\mathcal{C}_k$  de la forme  $\{\xi : R \leq |\xi| \leq C_k \langle \xi^k, \xi \rangle\}$  où les  $\xi^k$  sont des vecteurs de norme 1, et sur lesquels :

$$\exists c > 0 : \forall \xi \in \mathcal{C}_k, \forall 1 \leq j \leq m, \left| \frac{\partial \sigma_j}{\partial \xi^k} \right| \geq c(1 + |\xi|)^{m-1}. \quad (3.18)$$

Puisque  $\cup_{k=1}^N \mathcal{C}_k$  recouvre  $\{|\xi| > R\}$ , on a l'inégalité

$$\left| \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{4}} \mathcal{F}(\chi f)(\xi, \sigma_j(\xi)) d\xi \right| \leq \sum_{k=1}^N \left| \int_{\xi \in \mathcal{C}_k} (\dots) \right| =: \sum_1^N I_k^j ,$$

et on va montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $1 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $I_k^j \leq C \|f\|_{L_{x,t}^2}^2$ . Quitte à faire un changement de base orthogonal, on peut supposer que  $\xi^k = (1, 0, \dots, 0)$ , et on effectue sur  $\mathcal{C}_k$  le changement de variable

$$\begin{cases} \eta_1 = \sigma_j(\xi) , \\ \eta_2 = \xi_2 , \\ \vdots \\ \eta_d = \xi_d . \end{cases}$$

C'est bien un difféomorphisme, puisque  $\eta(\xi) = \eta(\tilde{\xi}) \Rightarrow \xi_2 = \tilde{\xi}_2, \dots, \xi_d = \tilde{\xi}_d$ , et  $x \rightarrow \sigma_j(x, \xi_2, \dots, \xi_d)$  est strictement monotone d'après l'hypothèse  $|\frac{\partial \sigma_j}{\partial \xi^k}| \geq c(1 + |\xi|)^{m-1}$  (noter que  $\mathcal{C}_k$  est connexe).

On note abusivement  $\xi(\eta)$  la bijection réciproque de  $\eta$ , la formule de changement de variable donne

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}_k} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}} |\mathcal{F}(\chi f)(\xi, \sigma_j(\xi))|^2 d\xi \\ &= \int_{\eta(\mathcal{C}_k)} (1 + |\xi(\eta)|^2)^{\frac{m-1}{2}} |\mathcal{F}(\chi f)(\xi(\eta), \eta_1)|^2 \frac{d\eta}{J(\eta)} , \end{aligned}$$

avec  $J(\eta) = \frac{\partial \sigma_j}{\partial \xi_1}(\xi(\eta)) \geq c(1 + |\xi(\eta)|)^{m-1}$ , on en déduit

$$\begin{aligned} I_k^j &\leq C \int_{\eta(\mathcal{C}_k)} (1 + |\xi(\eta)|)^{m-1} |\mathcal{F}(\chi f)(\xi(\eta), \eta_1)|^2 \frac{d\eta}{(1 + |\xi(\eta)|)^{m-1}} \\ &= C \int_{\eta(\mathcal{C}_k)} |\mathcal{F}(\chi f)(\xi(\eta), \eta_1)|^2 d\eta \\ &= C \int_{\eta(\mathcal{C}_k)} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi_k}(\mu - \xi_1(\eta)) \mathcal{F}(\chi f)(\mu, \eta_2, \dots, \eta_d, \eta_1) d\mu \right|^2 d\eta . \end{aligned}$$

Comme pour la dimension 1, on utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'égalité de Parseval, ce qui fournit :

$$\begin{aligned} I_k^j &\leq C \int_{\eta(\mathcal{C}_k)} \|\chi_k\|_{L^2}^2 |\mathcal{F}(\chi f)(\mu, \eta_2, \dots, \eta_d, \eta_1) d\mu|^2 d\mu d\eta \\ &\leq C \|\chi_k\|_{L^2}^2 \prod_{l \neq k} \|\chi_l\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{L_{x,t}^2}^2 . \end{aligned}$$

On obtient l'estimation annoncée en sommant sur  $1 \leq j \leq m$  et  $1 \leq k \leq N$ .  $\square$

### 3.2.2 Cas du modèle d'Euler-Korteweg étendu linéarisé

On veut établir ici le même type d'effet régularisant que précédemment. Plus précisément, on va voir que la forme « dégénérée » du système implique des résultats un peu moins bons.

Si l'on linéarise les équations sur  $u$  et  $v$  autour d'un état constant, on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t u + (\underline{u} \cdot \nabla)u - \nabla(\underline{a} \operatorname{div} v) = -\underline{g}'v, \\ \partial_t v + \nabla(\underline{u} \cdot v) + \nabla(\underline{a} \operatorname{div} u) = 0 \end{cases}$$

Quitte à effectuer le changement de variable  $y = x - \underline{u}t$ , on peut supposer  $\underline{u} = 0$ . Les équations prennent la forme simplifiée

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla(\underline{a} \operatorname{div} v) = -\underline{g}'v, \\ \partial_t v + \nabla(\underline{a} \operatorname{div} u) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

avec  $\underline{g}' > 0$  (pression monotone) et  $\underline{a} > 0$ . Soit, après transformation de Fourier en espace

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + \underline{a}\xi \otimes \xi \hat{v} = -\underline{g}'\hat{v}, \\ \partial_t \hat{v} - \underline{a}\xi \otimes \xi \hat{u} = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \underline{a}\xi \otimes \xi + \underline{g}' \\ -\underline{a}\xi \otimes \xi & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.2.7.** *Pour  $d > 1$  et  $\xi \neq 0$ ,  $A$  admet trois valeurs propres : 0 de multiplicité géométrique  $d - 1$  et algébrique  $2d - 2$ ,  $\pm i\sqrt{\underline{a}}|\xi|\sqrt{\underline{a}|\xi|^2 + \underline{g}'}$  de multiplicité 1. De plus  $A^2$  a 0 pour valeur propre de multiplicité géométrique  $2d - 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ . Il satisfait

$$-\lambda^2 u = (\underline{a}\xi \otimes \xi + \underline{g}')\underline{a}\xi \otimes \xi u = \underline{a}(\underline{a}|\xi|^2 + \underline{g}')\xi \otimes \xi u$$

Soit  $(e_1, \dots, e_{d-1})$  une base orthonormée de  $\xi^\perp$ ,  $\xi \otimes \xi$  se diagonalise dans la base orthonormée  $(e_1, \dots, e_{d-1}, \frac{\xi}{|\xi|})$  en  $\begin{pmatrix} 0_{d-1} & 0 \\ 0 & |\xi|^2 \end{pmatrix}$ .

Si  $\tau$  est valeur propre, on a donc soit  $\tau = 0$ , soit  $\tau = \pm i\sqrt{\underline{a}}|\xi|\sqrt{\underline{a}|\xi|^2 + \underline{g}'} =: \tau_\pm$ . On voit directement que les vecteurs associés aux valeurs propres non nulles sont

$$U_\pm = \begin{pmatrix} \alpha_\pm \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \alpha_\pm = \frac{\sqrt{\underline{a}|\xi|^2 + \underline{g}'}}{\pm i\sqrt{\underline{a}}|\xi|}.$$

Puisque  $\underline{a}, \underline{g}' > 0$ ,  $\underline{a}\xi \otimes \xi + \underline{g}'$  est inversible, et le noyau de  $A$  est

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, v \in \xi^\perp \right\}.$$

Enfin,  $A^2 = \begin{pmatrix} -\underline{a}|\xi|^2(\underline{a}|\xi|^2 + \underline{g}')\xi \otimes \xi & 0 \\ 0 & -\underline{a}|\xi|^2(\underline{a}|\xi|^2 + \underline{g}')\xi \otimes \xi \end{pmatrix}$ , de noyau

$$\text{Ker}(A^2) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, (u, v) \in (\xi^\perp)^2 \right\} \Rightarrow \dim(\text{Ker}(A^2)) = 2d - 2 .$$

□

En particulier, la démonstration de cette proposition indique, en gardant les mêmes notations, que dans la base  $\left( \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ e_{d-1} \end{pmatrix}, U_+, U_- \right)$ , la matrice  $A$  a pour réduite de Jordan

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{g}' & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \underline{g}' & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & \lambda_+ \\ & & & & & \lambda_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} N & & \\ & \lambda_+ & \\ & & \lambda_- \end{pmatrix} .$$

Il n'y a manifestement pas d'effet régularisant pour la partie de  $(u, v)$  qui est gouvernée par  $N$  (elle peut être stationnaire). Il y a tout de même une régularisation pour des "bonnes" données initiales.

**Proposition 3.2.8.** *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla(\underline{a} \operatorname{div} v) = -\underline{g}'v , \\ \partial_t v + \nabla(\underline{a} \operatorname{div} u) = 0 , \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s , \\ v|_{t=0} = v_0 \in H^s . \end{cases} \quad (3.21)$$

*Si les données initiales sont de rotationnel nul, alors la solution  $(u, v)$  satisfait le résultat du théorème 3.2.1.*

*Démonstration.* L'hypothèse de rotationnel nul implique que

$$(\widehat{u}_0, \widehat{v}_0)(\xi) \in \left\langle \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

on peut donc écrire pour  $\xi \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \widehat{u} \\ \widehat{v} \end{pmatrix} = \alpha_+ e^{\tau_+ t} U_+ + \alpha_- e^{\tau_- t} U_- .$$

On vérifie facilement que  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  satisfont

$$\int_{|\xi| \geq 1} |\alpha_\pm(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \leq C(\|u_0\|_{H^s}^2 + \|v_0\|_{H^s}^2),$$

et que  $\tau_\pm/i$  satisfait le résultat du lemme 3.2.4. Il suffit ensuite de répéter la démonstration du théorème 3.2.5. □

# Chapitre 4

## Symétriseurs généralisés

### 4.1 Problème aux limites et reformulation

#### 4.1.1 Opérateurs, espaces et notations

Dans  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t$  on note génériquement les coordonnées  $(x, t) = (x_1, \dots, x_d, t) = (x', x_d, t)$ .

**Multiplicateurs de Fourier :** On définit

$$L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t) = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+)) : \|u\|_{L_\gamma^2}^2 := \iint e^{-2\gamma t} |u|^2 dx dt < \infty\} .$$

Pour  $u \in L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)$ , on note la transformée de Fourier-Laplace (tangentielle) sur  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1}$

$$\widehat{u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta) = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t} u(x', x_d, t) e^{-ix' \cdot \eta - (\gamma + i\delta)t} dx' dt .$$

On rappelle qu'un multiplicateur de Fourier  $A(\partial_t, D_{x'})$  est défini grâce à son symbole  $a(i\delta, \eta)$  par la formule

$$\widehat{Au} = a(i\delta, \eta) \widehat{u}(\eta, x_d, i\delta) .$$

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé, on note  $\Lambda_p^\gamma$  le multiplicateur de Fourier (à paramètre) de symbole

$$\zeta_p(\gamma + i\delta, \eta) := \sqrt[2p]{\gamma^2 + \delta^2 + |\eta|^{2p}} ,$$

et les multiplicateurs de Fourier à poids  $\Lambda_{\gamma,p}$  (dans l'optique de l'utilisation de la transformée de Fourier Laplace) par

$$\Lambda_{\gamma,p} u = e^{\gamma t} \Lambda_p^\gamma(e^{-\gamma t} u), \quad \gamma \in \mathbb{R}^{+*} ,$$



pour lesquels on a en particulier l'égalité

$$\widehat{\Lambda_{\gamma,p}u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta) = \zeta_p(\gamma + i\delta, \eta)\widehat{u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta).$$

Plus généralement, si  $A^\gamma$  est une famille de multiplicateurs de Fourier dépendant d'un paramètre  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^+$ , que l'on note formellement  $A(\partial_t + \gamma, D_{x'})$ , on définit les opérateurs  $A_\gamma = e^{\gamma t} A^\gamma e^{-\gamma t}$ , ils satisfont la relation

$$\begin{aligned} \widehat{A_\gamma u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t} e^{-i\delta t - i\eta \cdot x'} A(\gamma + \partial_t, D_{x'}) u \\ &= a(\gamma + i\delta, \eta)\widehat{u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta). \end{aligned}$$

L'opérateur  $A_\gamma$  est donc un *multiplicateur de Fourier-Laplace à paramètre* de symbole  $a(\gamma + i\delta, \eta)$ . Pour éviter trop de lourdeurs, on désigne dans la suite ces opérateurs comme des *multiplicateurs de Fourier*. La notation est cohérente au sens où si  $A(\partial_t, D_{x'})$  est un opérateur différentiel, son symbole (polynomial)  $a(i\delta, \eta)$  se prolonge bien sûr analytiquement sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$  et on a

$$\widehat{Au}(\eta, x_d, \gamma + i\delta) = A(\gamma + i\delta, \eta)\widehat{u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta).$$

On dit qu'un multiplicateur de Fourier est d'ordre  $m$  si son symbole  $f(\eta, \tau)$  satisfait  $f = O(\zeta_p^m)$ . Si un symbole vérifie  $f(r^p \tau, r\eta) = r^m f(\tau, \eta)$ , on dit qu'il est *p-homogène d'ordre m (ou quasi-homogène)*. Par exemple,  $\zeta_p$  est *p-homogène d'ordre 1*.

Un multiplicateur  $A$  est *p-classique* lorsqu'il existe des applications  $a_{m-j}$  *p-homogènes d'ordre m - j* telles que

$$\forall j \geq 0, \left| a - \sum_{k=0}^j a_{m-k} \right| \leq C \zeta_p^{m-j-1}.$$

Comme pour les opérateurs pseudo-différentiels usuels, on note alors

$$a \sim \sum_{j \geq 0} a_{m-j},$$

et on dit que  $A_m$  (de symbole  $a_m$ ) est la partie principale de  $A$ .

On note la famille d'opérateurs

$$\mathcal{M}_{\gamma,p}^m = \{ e^{\gamma t} A e^{-\gamma t}, A \text{ multiplicateur } p\text{-classique d'ordre } m \}.$$

*Remarque 4.1.1.* Dans cette partie, où l'on va étudier des problèmes aux limites à coefficients constants, les multiplicateurs de Fourier suffiront pour mener l'analyse. La construction d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels quasi-homogènes est cependant possible, et est décrite notamment par R. Lascar dans [42], initialement pour étudier la propagation des singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non hyperboliques (par exemple l'équation de Schrödinger).

**Espaces de Sobolev :** Pour les systèmes hyperboliques, le « bon » cadre fonctionnel est celui des espaces à poids  $H_\gamma^s$ , les espaces de Sobolev anisotropes  $H_{\gamma,p}^s$  correspondants sont définis pour  $n$  entier par :

$$H_{\gamma,p}^n(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t) = \{u \in L_\gamma^2 : \sum_{k=0}^n \int \zeta_p^{2(n-k)} |\partial_x^k \widehat{u}(\eta, x_d, \gamma + i\delta)|^2 < \infty\},$$

et pour  $s \in \mathbb{R}$  par interpolation/dualité. Si  $n = kp$  est un multiple de  $p$ ,  $H_{\gamma,p}^n$  est l'ensemble des fonctions telles que  $\partial_t^l \partial_x^\alpha u \in e^{\gamma t} L^2$  pour  $lp + |\alpha| \leq np$ .

Pour  $s = 0$ ,  $H_{\gamma,p}^0$  est simplement  $e^{\gamma t} L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t) = L_\gamma^2$ .

Pour une application  $\varphi$  définie sur l'hyperplan  $\mathbb{R}^{d-1} (\times \{0\}) \times \mathbb{R}_t$ , on utilisera les normes tangentielles

$$|\varphi|_{s,\gamma,p}^2 := |\varphi|_{H_{\gamma,p}^s(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t} \zeta_p^{2s} |\widehat{\varphi}(\eta, \gamma + i\delta)|^2 d\eta d\delta.$$

Pour  $A_\gamma \in \mathcal{M}_\gamma^m$ ,  $A_\gamma : H_{\gamma,p}^s \longrightarrow H_{\gamma,p}^{s-m}$  est continu.

### 4.1.2 Reformulation :

Soit un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\sum_{j=0}^m \partial_t^j A_{p(m-j)}(D_x)u = \sum_{|\alpha_j|+pj \leq m} A_{\alpha_j} \partial_t^j D_x^{\alpha_j} u = f, \quad (4.1)$$

où les  $A_{p(m-j)}(D_x)$  sont des opérateurs différentiels matriciels d'ordre  $p(m-j)$  et de taille  $n$ , les  $\alpha_j$  sont des multi-indices et les  $A_{\alpha_j}$  sont des matrices indépendantes de  $(x, t)$  (de taille  $n$  également).

On suppose que  $A_0 = I_n$ , et que le déterminant du symbole complet

$$\det\left(\sum_{j=0}^m \tau^j a_{p(m-j)}(\xi)\right) := P(\tau, \xi), \quad (4.2)$$

est un polynôme *strictement dispersif* au sens de la définition 3.1.12.

*Exemples 4.1.2.* • Soit l'équation de Schrödinger linéaire avec un terme de transport

$$\partial_t u + (a \cdot \nabla)u + i\Delta u = f.$$

Son symbole complet est  $\tau + i(a \cdot \xi - |\xi|^2)$ , dont la partie 2-principale est  $\tau - i|\xi|^2$ .

• Soit l'équation de KdV linéarisée

$$\partial_t u + \underline{u} \partial_x u + \partial_x^3 u = 0.$$

Son symbole est  $\tau + i(\underline{u}\xi - \xi^3)$ , dont la partie 3-principale est  $\tau - i\xi^3$ .

- Soient les systèmes de type Boussinesq linéarisés, de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha_1 \partial_x^3 v + \alpha_2 \partial_x^5 v = 0 \\ \partial_t v + \beta_1 \partial_x^3 u + \beta_2 \partial_x^5 u = 0 \end{cases}, \quad \alpha_2 \beta_2 > 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \leq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \leq 0.$$

Le déterminant du symbole complet est

$$\tau^2 + \xi^6(-\alpha_1 + \alpha_2 \xi^2)(-\beta_1 + \beta_2 \xi^2).$$

D'après les hypothèses, pour  $\xi \in \mathbb{R}^*$ ,  $(\alpha_1 + \alpha_2 \xi^2)(\beta_1 + \beta_2 \xi^2) > 0$ , les racines en  $\tau$  sont donc imaginaires pures distinctes. La partie 5-principale du polynôme est  $\tau^2 + \alpha_2 \beta_2 \xi^{10}$ .

On distingue une coordonnée  $x_d$  qui sera la variable normale au bord, on rappelle qu'on note  $x = (x', x_d)$  et on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha_j|+pj \leq mp} A_{\alpha_j} \partial_t^j \partial_x^{\alpha_j} u = f, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t, \\ B(\partial_t, D_x)u|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t. \end{cases}, \quad (4.3)$$

avec  $B$  s'écrivant sous la forme

$$B(\partial_t, \partial_x) = \sum_{j=0}^{mp-1} B_{mp-j-1, \gamma} \partial_{x_d}^j, \quad (4.4)$$

pour  $0 \leq k \leq mp$ ,  $B_{k, \gamma}$  est un multiplicateur de Fourier tangentiel de  $p$ -degré  $k$ . Le nombre de composantes de  $\varphi$  est un nombre  $\mu$  compris entre 0 et  $mp$ . On suppose que le symbole de  $B$  est de rang maximal, donc égal au nombre de composantes de  $\varphi$ .

*Remarque 4.1.3.* \*Dans le cas où  $B_k$  est un opérateur différentiel,  $\partial_t$  est à voir comme  $e^{\gamma t}(\partial_t + \gamma)e^{-\gamma t}$ .

\*Pour inclure le cas standard des conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} u|_{x_d=0} = \varphi_0, \\ \vdots \\ \partial_{x_d}^{\mu-1} u|_{x_d=0} = \varphi_{\mu-1}, \end{cases}$$

il suffit d'écrire  $\partial_{x_d}^k u|_{x_d=0} = \varphi_k \Leftrightarrow \partial_{x_d}^k \Lambda^{mp-1-k} u = \Lambda^{mp-1-k} \varphi$ , car pour la deuxième formulation  $\partial_{x_d}^k \Lambda^{mp-1-k}$  est bien de  $p$ -degré  $mp-1$ . On note que les nouvelles conditions aux limites  $\Lambda^{mp-1-k} \varphi$  perdent  $mp-1-k$  niveaux de régularité dans les espaces  $H_{\gamma, p}^s$ .

On suppose que la matrice  $A_{(0, \dots, 0, mp)}$  est inversible, c'est à dire que le problème est non-caractéristique. Le système se réécrit

$$\partial_{x_d}^{mp} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{mp-1} A'_{mp-j} (D_{x'}, \partial_t) \partial_{x_d}^j u + f',$$

où les  $A'_k$  sont des opérateurs différentiels matriciels « tangentiels » de  $p$ -degré au plus  $k$ ,  $f' = A_{(0, \dots, 0, mp)}^{-1} f$ .

On le réduit en un système d'ordre 1 par une transformation de Calderon quasi-homogène, en posant

$$U = (\Lambda_\gamma^{mp-1} u_1, \dots, \Lambda_\gamma^{mp-1} u_n, \dots, \partial_{x_d}^{mp-1} u_1, \dots, \partial_{x_d}^{mp-1} u_n)^t .$$

Le système d'équations sur tout l'espace se réécrit

$$\begin{aligned} \partial_{x_d} U &= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_\gamma I_n & 0 & & \\ & 0 & \Lambda_\gamma I_n & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda_\gamma I_n \\ A'_{mp} \circ \Lambda_\gamma^{1-mp} & A'_{mp-1} \circ \Lambda_\gamma^{2-mp} & \dots & & A'_1 \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix} \\ &=: G_\gamma U + \tilde{f}, \end{aligned}$$

La matrice  $G_\gamma$  est de taille  $mpn$ , les blocs sont de taille  $n$ . Grâce à l'identité

$$\begin{aligned} A'_k \circ \Lambda_\gamma^{1-k} &= A'_k e^{\gamma t} \Lambda^{1-k} e^{-\gamma t} = e^{\gamma t} (A'_k (\partial_t + \gamma, D_{x'}) \circ \Lambda^{1-k}) e^{-\gamma t} \\ &= (A'_k (\partial_t + \gamma, D_{x'}) \circ \Lambda^{1-k})_\gamma, \end{aligned}$$

on voit que le symbole de  $G_\gamma$  (en variables de Fourier-Laplace) est simplement

$$g(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_p I_n & 0 & & \\ & 0 & \zeta_p I_n & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta_p I_n \\ A'_{mp}(\tau, \eta) \zeta_p^{1-mp} & A'_{mp-1}(\tau, \eta) \zeta_p^{2-mp} & \dots & & A'_1(\tau, \eta) \end{pmatrix} .$$

Le polynôme caractéristique  $\chi_g(\lambda; \tau, \eta)$  de  $g$  est le polynôme strictement dispersif  $P(\tau, \eta, \lambda/i)$ . Les conditions aux limites se réécrivent quand à elles,

$$F_\gamma U := ((B_{mp-1}(\Lambda^\gamma)^{1-mp})_\gamma \quad (B_{mp-2}(\Lambda^\gamma)^{2-mp})_\gamma \quad \dots \quad B_{0,\gamma}) U = \varphi, \quad (4.5)$$

on souligne que l'opérateur  $F_\gamma$  est d'ordre 0.

**Problème générique :** Le système d'équations (4.3) se met donc sous la forme d'un système d'ordre 1

$$\begin{cases} \partial_{x_d} U = G_\gamma U + \tilde{f}, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t, \\ F_\gamma U|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t, \end{cases} \quad (4.6)$$

avec

1.  $G$  d'ordre 1,  $F$  d'ordre 0,
2. le polynôme caractéristique du symbole de  $G$  est un polynôme en  $(\lambda, \tau, \eta)$  strictement dispersif.

On se propose d'étudier dans la suite la classe de problèmes aux limites satisfaisant ces trois hypothèses. Plus précisément ce chapitre est dédié à l'adaptation de la construction de symétriseurs de Kreiss ainsi qu'aux estimations *a priori* en découlant.

On établit au chapitre suivant que les problèmes étudiés sont bien posés dans des espaces de Sobolev anisotropes à poids introduits précédemment. On en déduit également la nature bien posée du problème à donnée initiale nulle. Le cas des données initiales non nulles est traité dans le cadre plus simple de la dimension 1, où il existe déjà divers résultats similaires dans le cas des équations scalaires (Fokas [26, 27], Bona-Sun-Zhang [13], Faminskii [23]), en particulier issus de l'étude du problème aux limites pour l'équation de Korteweg-de Vries.

## 4.2 Condition de Kreiss-Lopatinskiĭ

Le problème (4.6) se réduit après une transformation de Fourier-Laplace à une famille d'EDO :

$$\begin{cases} \partial_{x_d} \widehat{U} = g(\tau, \eta) \widehat{U} + \widehat{f}, & x_d \geq 0, \\ F(\tau, \eta) \widehat{U}|_{x_d=0} = \widehat{\varphi}, & , \\ \widehat{U}|_{x_d=0} \in E^-(g(\tau, \eta)) \end{cases} \quad (4.7)$$

pour  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\tau = \gamma + i\delta$ ,  $\gamma > 0$  fixé,  $\delta \in \mathbb{R}$ . On a noté pour alléger  $\widehat{f} = \widetilde{f}$ , et le symbole de  $F$  est encore noté  $F$  pour éviter les confusions avec le terme de forçage. On désigne par  $E^-(\tau, \eta)$  le sous espace stable de  $g(\tau, \eta)$ , la condition  $\widehat{U}|_{x_d=0} \in E^-(g(\tau, \eta))$  vient du fait que l'on cherche des solutions s'annulant à l'infini.

La partie qui suit établit quelques résultats fondamentaux sur la dépendance des espaces stables en  $(\tau, \eta)$ .

### 4.2.1 Notations et résultats de base

**Notations "géométriques" :** On utilise dans la suite les ensembles suivants

- Le demi plan complexe positif  $\{Re(z) \geq 0\} := \mathbb{C}^+$ , et  $\{Re(z) > 0\} := \mathbb{C}^{++}$ .
- Le demi espace époiné  $\mathcal{E}^+ = (\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{E}^{++} = \mathbb{C}^{++} \times \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\mathcal{E}^0 = (\{Re(\tau) = 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\}$ .
- La « p-boule »  $B_p(0, r) = \{(\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C} : (|\tau|^2 + |\eta|^{2p})^{\frac{1}{2p}} < r\}$ , ainsi que  $B_p^+ = B_p \cap \mathcal{E}^+$ ,  $B_p^{++} = B_p \cap \mathcal{E}^{++}$  et  $B_p^0 = B_p \cap \mathcal{E}^0$ .
- La "p-sphère"  $\mathbb{S}_p(0, r) = \{(\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{C} : (|\tau|^2 + |\eta|^{2p})^{\frac{1}{2p}} = r\}$  ainsi que  $\mathbb{S}_p^+ = \mathbb{S}_p \cap \mathcal{E}^+$ ,  $\mathbb{S}_p^{++} = \mathbb{S}_p \cap \mathcal{E}^{++}$  et  $\mathbb{S}_p^0 = \mathbb{S}_p \cap \mathcal{E}^0$ .

**Espaces stables et instables :** On étudie ici certains aspects spectraux du problème (4.6). Le spectre d'une matrice carrée  $A$  est noté  $\text{Sp}(A)$ . Si  $\text{Sp}(A) \cap$

$i\mathbb{R} = \emptyset$ , on a  $\text{Sp}(A) = (\text{Sp}(A) \cap \mathbb{C}^{--}) \cup (\text{Sp}(A) \cap \mathbb{C}^{++}) = \text{Sp}(A|_{E^-} \cup \text{Sp}(A|_{E^+})$ , et on rappelle que les projecteurs sur les espaces stables et instables  $\Pi_{\pm}$  sont donnés par la formule intégrale de Dunford

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^{\pm}} (zI - A)^{-1} dz ,$$

avec  $C^{\pm}$  un contour englobant les racines de partie réelle strictement positive/négative de  $A$ . Plus généralement, si  $C$  entoure une partie du spectre de  $A$ , le projecteur sur l'espace associé est donné par

$$\Pi = \frac{1}{2i\pi} \int_C (zI - A)^{-1} dz . \quad (4.8)$$

Si  $A$  dépend d'un paramètre avec une certaine régularité, les projecteurs en dépendent avec la même régularité d'après les théorèmes standards de régularité des intégrales à paramètres.

Soit  $g_1$  la partie principale de  $g$  comme dans (4.6). Son polynôme caractéristique correspond à la partie principale  $p$ -homogène du polynôme caractéristique de  $g$ , qui est par hypothèse strictement dispersive.

Le principal avantage de  $g_1$  par rapport à  $g$  est que, par quasi-homogénéité,  $E^-(g_1(r^p\tau, r\eta)) = E^-(g_1(\tau, \eta))$ . C'est pourquoi on considère dans la suite  $E^-(g_1)$ , comme un fibré vectoriel, qu'on note  $E^-(\tau, \eta)$ . De la même manière, on note  $E^-(g(\tau, \eta)) = E^-(\tau, \eta)$ . La proposition suivante 4.2.1 précise la base et la régularité de ces fibrés.

On note  $P(\lambda; \tau, \eta)$  le polynôme caractéristique de  $g$ . On rappelle que le polynôme  $(\sigma, \tau, \eta) \rightarrow P(i\sigma, \tau, \eta)$  est strictement dispersif, c'est à dire que ses racines en  $\delta$  sont réelles, et sa partie  $p$ -principale a ses racines en  $\delta$  réelles distinctes. La propriété suivante est l'analogie de la proposition 1.2.1.

**Proposition 4.2.1.** *Pour  $\text{Re}(\tau) > 0$ ,  $g$  (resp  $g_1$ ) n'a pas de valeurs propres imaginaires pures, les espaces  $E^+(g)$  et  $E^-(g)$  dépendent de manière  $C^\infty$  de  $(\tau, \eta)$  (resp  $\widehat{\tau}, \widehat{\eta}$ ), sont de dimension constante pour  $(\tau, \eta) \in \mathcal{E}^+ \setminus \mathcal{E}^0$  (resp  $\widehat{\tau}, \widehat{\eta} \in \mathbb{S}_p^+ \setminus \mathbb{S}_p^0$ ), et cette dimension est égale à celle de  $E^-(g_1)$ . On notera  $m_- = \dim(E^-)$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse, si  $\lambda \in i\mathbb{R}$  les racines en  $\tau$  sont imaginaires pures, donc si  $P(\lambda; \eta, \tau) = 0$ , avec  $\tau \notin i\mathbb{R}$ , on a  $\lambda \notin i\mathbb{R}$ . Puisque  $\mathbb{C}^{++} \times \mathbb{R}^{d-1}$  est connexe, le nombre de racines dans  $\mathbb{C}^{++}$  et  $\mathbb{C}^{--}$  reste constant, et donc  $\dim(E^-)$  et  $\dim(E^+)$  sont constantes.

Le même argument montre que la dimension de  $E^-(g_1)$  est constante, mais comme

$$\det(\varepsilon g(\varepsilon^{-p}, 0) - \lambda I) \longrightarrow \det(g_1(1, 0) - \lambda I),$$

on a égalité des dimensions par continuité des racines.

La régularité se déduit de la formule (4.8) et du commentaire qui la suit.  $\square$

**Condition de Kreiss-Lopatinskiï généralisée** Pour  $(\tau, \eta) \in \mathcal{E}^{++}$  fixés et pour un  $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}^\mu$ , le problème (4.7) admet une unique solution si et seulement si  $F : E^-(\tau, \eta) \rightarrow \text{Im}(F)$  est un isomorphisme, ce qui motive la définition suivante.

**Definition 4.2.2.** On dit que  $F$  satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiï lorsqu'il existe  $\gamma_0 > 0$  tel que  $F : E^-(\tau, \eta) \rightarrow \text{Im}(F)$  est un isomorphisme pour  $(\tau, \eta) \in \{\text{Re}(z) \geq \gamma_0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

Lorsque la condition de Kreiss-Lopatinskiï n'est pas satisfaite le problème a des instabilités du type d'Hadamard. C'est une condition nécessaire pour que le problème soit bien posé, mais pas suffisante.

Dans le cas des systèmes hyperboliques, la « non uniformité » de cette condition (explosion de la norme de la bijection réciproque de  $F$  lorsque  $\text{Re}(\tau) \rightarrow 0$ ) n'implique pas forcément que le problème aux limites est mal posé, mais il y a des pertes de dérivées. Ce cas a été étudié notamment par M. Sablé-Tougeron [60] et J.-F. Coulombel [19][20].

Dans ce qui suit, on montre que comme pour les problèmes aux limites hyperbolique le fibré des espaces stables, défini sur  $\mathcal{E}^{++}$ , peut se prolonger continûment sur une partie de  $\mathcal{E}^0$ , ce qui permet de présenter plus simplement la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme.

**Une « compactification » :** Pour  $g = g(\tau, \eta)$ , écrivons (abusivement)

$$E^-(g) = E^-(\tau, \eta) = E^-\left(\zeta_p \frac{\tau}{\zeta_p^p}, \zeta_p \frac{\eta}{\zeta_p}\right) = E^-(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon),$$

avec

$$\hat{\tau} = \frac{\tau}{\zeta_p^p}, \quad \hat{\eta} = \frac{\eta}{\zeta_p}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\zeta_p}, \quad \zeta_p = (|\tau|^2 + |\eta|^{2p})^{\frac{1}{2p}}.$$

On définit ainsi  $E^-(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$  pour  $0 < \varepsilon \leq 1$ , et  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}) \in \mathbb{S}_p^{++}$ , qui n'est pas un ensemble compact, mais qui a déjà le mérite d'être borné.

Dans toute la suite, on confondra systématiquement  $(\tau, \eta)$  avec  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$ , et on notera indifféremment  $f(\tau, \eta)$  ou  $f(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$ .

## 4.2.2 Prolongement des espaces stables

On fixe  $\gamma = \text{Re}(\tau) > 0$ . Lorsque l'on utilise la relation

$$E^-(\tau, \eta) = E^-(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon),$$

on identifie  $(\tau, \eta)$  à  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$  (avec  $\varepsilon = 1/\sqrt[2p]{|\tau|^2 + |\eta|^{2p}}$ ). Si  $\gamma = \text{Re}(\tau) > 0$  est fixé et qu'on fait  $|\eta| \rightarrow \infty$ , on a  $\text{Re}(\hat{\tau}) \leq \gamma/|\eta| \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . L'étude à hautes fréquences du problème (4.7) et donc de  $E^-(\tau, \eta)$  pour  $\eta$  grand amène donc naturellement à étudier la limite de  $E^-(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$  lorsque  $\text{Re}(\hat{\tau})$  et  $\varepsilon$  tendent vers  $\rightarrow 0$ .

Dans le cas des systèmes homogènes d'ordre 1 strictement hyperboliques, l'existence d'un prolongement continu de  $E^-$  sur  $\text{Re}(\tau) = 0$  a été obtenue par Kreiss [40]. Ce résultat a ensuite été étendu par Métivier [51] dans le cas constamment hyperbolique. On adapte ici la preuve de Kreiss au cas des systèmes quasi-homogènes. La principale différence vient du fait que même pour une analyse à coefficients constants, on doit considérer le symbole complet au lieu du symbole principal (voir à ce sujet la remarque 3.1.4 p.50). Cette difficulté technique se traduit dans la suite par la présence du paramètre  $\varepsilon$  lorsque l'on travaille sur les variables « normalisées »  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$ .

**Théorème 4.2.3.** *Soient  $\lambda_j$  les racines du polynôme caractéristique de  $\varepsilon g$ . L'application définie sur  $\mathcal{E}^{++}$  par*

$$P_+(\lambda; \widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) = \prod_{\text{Re}(\lambda_j(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)) > 0} (\lambda - \lambda_j)$$

se prolonge continûment sur  $\mathcal{E}^+$  pour  $\varepsilon$  assez petit, et on peut alors prolonger continûment l'espace  $E^-$  sur  $\mathcal{E}^0 \cap \{|\zeta_p| \geq M\}$  pour  $M$  assez grand grâce à la formule :

$$E^-(\tau, \eta) = \text{Im}(P_+(g(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon); \widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)) .$$

De plus,  $E^-(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, 0) = E^-(g_1(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}))$ .

*Démonstration.* Le fait évident suivant est important :

$$\forall r > 0, E^-(rg) = E^-(g).$$

On travaillera donc sur  $\varepsilon g(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  (borné) plutôt que  $g(\tau, \eta)$ . Le polynôme caractéristique de  $\varepsilon g$  est de la forme

$$\begin{aligned} P(\lambda; \widehat{\eta}, \widehat{\tau}, \varepsilon) &= \sum_{|\alpha|+j+kp \leq mp} a_{\alpha,j,k} \varepsilon^{mp} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^j \tau^k \eta^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|+j+kp \leq mp} a_{\alpha,j,k} \varepsilon^{mp-j-kp-|\alpha|} \lambda^j \widehat{\tau}^k \widehat{\eta}^\alpha \end{aligned}$$

et le polynôme caractéristique de  $g_1$  en est la partie (p-)principale :

$$P_1 = \sum_{|\alpha|+j+kp=mp} a_{\alpha,j,k} \lambda^j \widehat{\tau}^k \widehat{\eta}^\alpha .$$

On remarque en particulier que  $P_1 = P(\lambda; \widehat{\eta}, \widehat{\tau}, 0)$ .

Pour  $\text{Re}(\widehat{\tau}) > 0$ ,  $P_+$  est simplement le polynôme caractéristique de la restriction de  $\varepsilon g$  à  $E^+$  (avec la convention  $0 \cdot g(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, 0) = g_1$ ), et puisque le projecteur sur  $E^+$  est donné localement par

$$\Pi_+ = \int_{C^+} (\lambda I_{mp} - G)^{-1} d\lambda ,$$



avec  $C^+$  un (petit) contour entourant les racines de partie réelle strictement positive, les coefficients de  $P_+(\lambda)$  sont  $C^\infty$ . Par continuité des racines et les relations entre coefficients et racines, les coefficients de  $P_+$  se prolongent par continuité sur  $\mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon]$ .

Notons  $P = P_+P_-$ . Pour  $Re(\tau) > 0$ ,  $E_- = \text{Im}(P_+(g; \tau, \eta))$  car  $E_- = \text{Ker}P_- \supset \text{Im}(P_+)$  et on a égalité des dimensions

$$\begin{aligned} \text{rang}(P_+) &= mp - \dim(\text{Ker}(P_+)) = mp - \dim(E_+) \\ &= mp - (mp - \dim(E_-)) = \dim(E_-) \end{aligned}$$

Posons  $E^- = \text{Im}(P_+)$ . On vient de voir que les coefficients de  $P_+$  sont continus. Donc si le rang de  $P_+$  reste constant sur  $\mathbb{S}_p^+ \times [0, \frac{1}{M}]$ , l'espace  $E^-$  est défini de manière continue. Cela a déjà été établi à la proposition précédente dans le cas où  $Re(\widehat{\tau}_0) > 0$ , on s'intéresse donc uniquement au cas limite  $\widehat{\tau}_0 \in i\mathbb{R}$ .

Soit  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{S}_p^0 \times [0, \frac{1}{M}]$  fixé. Au voisinage de ce point,  $g$  se réduit sous la forme diagonale par blocs  $\text{diag}(g_1, \dots, g_n, g_+, g_-)$ . avec  $Sp(g_\pm) \subset \mathbb{C}^{\pm\pm}$ , et

$$g_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0) = \begin{pmatrix} \lambda_j & i & & & \\ 0 & \lambda_j & i & & \\ & & \dots & & \\ & & & & i \\ & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Admettons provisoirement qu'il existe  $M > 0$  tel que pour  $\zeta_p \geq M$ ,  $k \neq j$ ,  $\lambda_k \neq \lambda_j$  (voir le lemme 4.2.4 suivant où l'on explicitera  $M$ ). Par continuité des racines, il existe des disques disjoints  $D_j = D(\lambda_j, r)$ , et  $\nu$  assez petit tels que pour  $0 \leq \widehat{\gamma} \leq \nu$ , toute racine de  $P(\cdot; \widehat{\gamma} + i\widehat{\delta}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0)$  est dans  $\sqcup D_j \sqcup \{Re(\lambda) \geq 2r\} \sqcup \{Re(\lambda) \leq -2r\}$ .

Pour  $0 < \widehat{\gamma} < \nu$ , posons  $\mu_j$  le nombre (constant) de racines de partie réelle négative dans  $D_j$ ,  $m_j$  le nombre total de racines et  $\mu_-$  le nombre de racines dans  $\{Re(\lambda) \leq -\varepsilon\}$ . On a  $\dim(E_-) = \mu_- + \sum_j \mu_j$ .

Mais par construction,

$$P_+(\lambda; i\widehat{\delta}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0) = \chi_{g_+}(\lambda; i\widehat{\delta}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0) \prod_j (\lambda_j - \lambda)^{m_j - \mu_j}.$$

Il est alors clair vu la structure de  $g(i\widehat{\delta}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0)$  que

$$\begin{aligned} \text{rang}(P_+(g; i\widehat{\delta}_0, \widehat{\eta}_0, \varepsilon_0)) &= \text{rang}(g_-) + \sum m_j - (m_j - \mu_j) \\ &= \mu_- + \sum \mu_j = m_- . \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.2.4.** *Dans la décomposition  $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n, g_+, g_-)$ , il existe  $M > 0$  tel que si  $\zeta_p \geq M$ ,  $k \neq j$ , alors  $\lambda_k(\eta, \tau) \neq \lambda_j(\eta, \tau)$ , i.e. la multiplicité géométrique de toute racine imaginaire pure est 1.*

*On a le même résultat pour  $g_1(\widehat{\tau}, \widehat{\eta})$  lorsque  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}) \in \mathbb{S}_p^+$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda_0$  une valeur propre imaginaire pure de  $g(i\delta_0, \eta_0)$ . À changement de base près, on peut supposer que

$$g = \left( \begin{array}{c|c} \lambda_0 & *1 \\ \hline 0 & *2 \\ \hline 0 & \end{array} \right).$$

D'après le lemme 3.1.14, il existe  $M > 0$  tel que si  $|\tau|^2 + |\eta|^{2p} + |\lambda|^{2p} \geq M$  alors  $\tau$  est une racine simple. En particulier, si  $|\delta_0|^2 + |\eta|^{2p} \geq M$ ,  $\delta_0$  est une racine simple, donc  $\frac{\partial \chi_g}{\partial \gamma}(\lambda_0; i\delta_0, \eta_0) \neq 0$ . Mais

$$\frac{\partial \chi_g}{\partial \gamma}(\lambda_0; i\delta_0, \eta_0) = \det \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \gamma} & *1 \\ \hline \frac{\partial g_{2,1}}{\partial \gamma} & \\ \hline \frac{\partial g_{mp,1}}{\partial \gamma} & *2 - \lambda_0 I_{mp-1} \end{array} \right),$$

et en particulier les vecteurs de  $\begin{pmatrix} *1 \\ *2 - \lambda_0 I_{mp-1} \end{pmatrix}$  sont libres, d'où  $\dim(\text{Ker}(g) - \lambda_0) = 1$ .

La démonstration du lemme pour  $g_1$  est exactement la démonstration précédente privée de l'étape où l'on choisit  $M$ .  $\square$

*Remarque 4.2.5.* L'un des arguments clés de ce résultat est le fait qu'à toute racine imaginaire pure correspond un et un seul bloc de Jordan, ceci étant conséquence de la dispersivité stricte. Le même résultat a été utilisé dans l'étude de systèmes strictement hyperboliques par Kreiss. Pour généraliser cette étude aux systèmes constamment hyperboliques, Métivier [51] utilise une factorisation non triviale du polynôme caractéristique et effectue une analyse poussée de la dimension des espaces propres et des blocs de Jordan associés. Essentiellement, la présence d'une caractéristique de multiplicité  $\alpha$  pour le problème de Cauchy impose pour le problème aux limites la présence de  $\alpha$  blocs de Jordan associés à une même valeur propre.

Cette analyse peut sans doute s'adapter au cadre quasi-homogène. Cela semble cependant peu pertinent dans la mesure où (à notre connaissance) il n'existe pas d'exemples physiques entrant dans ce cadre (contrairement au cas hyperbolique qui contient de nombreux exemples de systèmes dont les caractéristiques sont à multiplicité constante).

**Le point à retenir.** Les espaces  $E^-(g(\tau, \eta))$  forment un fibré  $C^\infty$  de base  $\mathcal{E}^{++}$ . Il existe un prolongement *continu* de ce dernier sur  $(B_p^+(0, M))^c$  pour

$M$  assez grand, de même  $E^-(g_1(\tau, \eta))$  est continu pour  $(\tau, \eta) \in \mathbb{S}_p^+$ . Cependant, il n'y a pas forcément de prolongement continu de  $E^-(g)$  sur  $\mathcal{E}^+ \setminus \{0\}$ . L'application

$$(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \frac{1}{M}] \rightarrow \begin{cases} E^-(\frac{\widehat{\tau}}{\varepsilon}, \frac{\widehat{\eta}}{\varepsilon}) & \text{si } \varepsilon > 0, \\ E^-(g_1(\widehat{\tau}, \widehat{\eta})) & \text{si } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

est continue *sur un ensemble compact*. Dans la suite, on gardera la notation avec ce  $M$ .

Ce résultat permet de définir une version plus forte de la condition de Kreiss-Lopatinskiï.

**Definition 4.2.6.** On dit que  $F$  satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme (KLU) lorsque  $F : E^-(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \rightarrow \text{Im}(F)$  est un isomorphisme pour tout  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \frac{1}{M}]$ ,  $M$  fixé assez grand.

*Remarque 4.2.7.* Si  $F$  satisfait la condition (KLU), par continuité et compacité  $\|F\| + \|F^{-1}\|$  est borné uniformément en  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \frac{1}{M}]$ .

La présence du paramètre  $\varepsilon$  rend (KLU) assez désagréable à manipuler. La proposition suivante montre que c'est une difficulté artificielle, et que quitte à augmenter  $M$  il suffit de vérifier (KLU) seulement pour  $\varepsilon = 0$ .

**Proposition 4.2.8.** *Si la condition (KLU) est vérifiée,  $F$  est un isomorphisme  $E^-(g_1) \rightarrow \text{Im}(F)$ .*

*Inversement, si pour tout  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}) \in \mathbb{S}_p^+$ ,  $F : E^-(g_1) \rightarrow \text{Im}(F)$  est un isomorphisme, alors -quitte à augmenter  $M$ -  $F$  satisfait (KLU) sur  $\mathbb{S}_+^p \times [0, \frac{1}{M}]$ .*

*Démonstration.* Si KLU est vraie,

$$\forall (\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times ]0, \frac{1}{M}], \|F\| + \|F|_{E^-(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)}^{-1}\| \leq C .$$

Donc en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et par continuité,  $F(\widehat{\tau}, \widehat{\eta})$  est un isomorphisme également sur  $E^-(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, 0) = E^-(g_1(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}))$ .

Réciproquement, si  $\forall (\widehat{\tau}, \widehat{\eta}) \in \mathbb{S}_p^+$ ,  $F$  est un isomorphisme sur  $E^-$ , alors par continuité des espaces  $E^-$  (théorème 6) et compacité de  $\mathbb{S}_p^+$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que :

$$\forall (\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0], F \text{ est inversible sur } E^- \text{ et d'inverse borné,}$$

ce qui est exactement (KLU) pour  $\zeta_p \geq \frac{1}{\varepsilon_0}$  (on augmentera donc  $M$  si  $M \leq 1/\varepsilon_0$ ).  $\square$

### 4.3 Symétriseurs généralisés

Les deux principaux résultats de cette section sont :

- L'existence de symétriseurs généralisés,

- Les estimations *a priori* en découlant.

On commence par définir les symétriseurs généralisés et décrire comment on tire de leur existence des estimations *a priori*. Les parties suivantes, plus techniques, décrivent la construction pratique de symétriseurs. Plus précisément, le plan de cette construction se fait en deux étapes. On prouve que localement en les variables  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$ , le symbole matriciel  $g$  admet une structure par blocs (4.11) décrite par la proposition 4.3.10 (celle-ci est très similaire à celle obtenue par Kreiss [40] et mise en exergue par Majda [47] pour le cas hyperbolique). Cette structure établie, on effectue la construction *locale* d'un symétriseur de symbole  $s$  adapté à la structure par blocs de  $g$ . Cette construction suit la méthode décrite dans [17] qui donne plus de précisions sur la structure de  $sg$  (proposition 4.3.9 p.85). On obtient enfin un symétriseur global par partition de l'unité.

### 4.3.1 Symétriseurs et estimation *a priori*

**Definition 4.3.1.** Un symétriseur de Kreiss global (généralisé) pour le système (4.6) est un opérateur quasi-homogène  $S$  défini par son symbole

$$s(\tau, \eta) : \mathbb{R}^{d-1} \times \{Re(\tau) \geq \Gamma\} \longrightarrow \mathbb{M}_{mp}(\mathbb{C})$$

vérifiant :

- $S$  est borné,  $s(\tau, \eta)^* = s(\tau, \eta)$  et  $s$  est  $\mathcal{C}^\infty$ ,
- Il existe  $\alpha > 0$  tel qu'au sens du produit scalaire usuel

$$Re(sg(\tau, \eta)) \geq \alpha \frac{Re(\tau)}{\zeta_p^{p-1}}, \quad (\text{K1})$$

où l'on note  $Re(A)$  la « partie réelle » d'une matrice carrée  $A$  définie par

$$Re(A) := \frac{A + A^*}{2}.$$

- Il existe  $C > 0$  tel que

$$s \geq I - CF^*F. \quad (\text{K2})$$

Un symétriseur local est un symbole vérifiant les propriétés ci-dessus sur un sous ensemble de  $\mathcal{E}^+$ .

*Remarque 4.3.2.* Le  $\Gamma$  de cette définition est arbitraire, on verra plus tard comment on le choisit.

Le principal résultat de cette section est le suivant.

**Théorème 4.3.3.** *Supposons que les conditions aux limites  $F$  satisfassent (KLU). Alors le système (4.6) admet un symétriseur de Kreiss généralisé.*

*Remarque 4.3.4.* On va en fait construire un symétriseur défini en tout point de l'espace  $\mathcal{E}^+ \cap \{\zeta_p \geq M\} \supset \{Re(\tau) \geq M\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

**Proposition 4.3.5.** *S'il existe un symétriseur global, alors toute fonction  $U \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)$  satisfait l'estimation :*

$$\begin{aligned} & \forall \gamma \geq \Gamma, \quad \gamma \|U\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)}^2 + |U(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 \\ & \lesssim \frac{1}{\gamma} \|\partial_x U - GU\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{p-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t))}^2 + |FU(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 \end{aligned} \quad (\text{ED})$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} & \forall \gamma \geq \Gamma, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \gamma \|U\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^s)}^2 + |U(0)|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{s+(p-1)/2})}^2 \\ & \lesssim \frac{1}{\gamma} \|\partial_x U - GU\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{s+p-1})}^2 + |FU(0)|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{s+(p-1)/2})}^2 \end{aligned} \quad (\text{EDs})$$

*Démonstration.* Soit  $f = \partial_x U - GU$ . En appliquant l'opérateur  $S$  et par transformée de Fourier-Laplace, on a

$$s \partial_x \widehat{U} - sg(\tau, \eta) \widehat{U} = s \widehat{f}. \quad (4.9)$$

En prenant le produit scalaire avec  $\widehat{U}$ , et en intégrant par rapport à  $x_d \geq 0$ , puis en  $\eta, \delta = \text{Im}(\tau)$ , il vient

$$\int_{\eta, \delta} \left( \langle s \widehat{U}(0), \widehat{U}(0) \rangle + \int_{x_d} \langle sg \widehat{U}, \widehat{U} \rangle \right) \leq \left| \int_{x_d, \eta, \delta} \langle s \widehat{f}, \widehat{U} \rangle \right|,$$

d'où par l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \alpha}{2} \int_{x_d, \delta, \eta} |\widehat{U}|^2 + \int_{\delta, \eta} |\zeta_p^{p-1} \widehat{U}(0)|^2 & \leq C \int_{\delta, \eta} \zeta_p^{p-1} |F \widehat{U}(0)|^2 \\ & \quad + \frac{|s|^2}{2\alpha\gamma} \int_{x_d, \delta, \eta} \zeta_p^{2p-2} |\widehat{f}|^2. \end{aligned}$$

On conclut par l'égalité de Plancherel pour (ED), puis (EDs) s'obtient de la même manière en multipliant (4.9) par  $\zeta_p(\eta, \gamma + i\delta)^s$ .  $\square$

Pour alléger les notations, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{p-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)) & = L^2(H_{\gamma,p}^{p-1}), \\ H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t) & = H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}. \end{aligned}$$

A partir de l'estimation (ED) on tire un résultat d'unicité et de régularité pour une plus grande classe de fonctions. Une partie de la démonstration repose sur des arguments de trace, densité, injections dans les espaces de Sobolev (assez classiques pour les espaces de Sobolev homogènes) qu'on démontre en annexe pour des espaces anisotropes.

**Théorème 4.3.6.** *Soit  $u \in L^2_\gamma$  solution de*

$$\begin{cases} Lu := \partial_{x_d} u - G_\gamma U = f \in L^2(\mathbb{R}^+; H^{p-1}_{\gamma,p}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)), \\ F_\gamma U|_{x_d=0} = \varphi \in H^{\frac{p-1}{2}}_{\gamma,p}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t). \end{cases}$$

*Alors  $u$  admet une trace sur  $\{x_d = 0\}$  qui est  $H^{\frac{p-1}{2}}_{\gamma,p}$  et  $u$  satisfait l'estimation (ED).*

*Démonstration.* D'après la proposition A.0.11 en appendice,  $C_c^\infty$  est dense dans  $V := \{u \in L^2_\gamma : Lu \in L^2(H^{p-1}_{\gamma,p})\}$  pour la norme  $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{L^2_\gamma} + \|\cdot\|_{L^2(H^{p-1}_{\gamma,p})}$ , de plus cette densité permet de définir une trace  $u|_{x_d=0} \in H^{-1/2}_{\gamma,p}$  pour  $u \in V$ . Quitte à utiliser une fonction de troncature, on peut supposer que  $u$  est à support compact. Supposons pour commencer que  $u \in H^1(\mathbb{R}^+; H^{p-1}_{\gamma,p})$ , la trace de  $u$  sur  $\{x_d = 0\}$  est dans  $H^{(p-1)/2}_{\gamma,p}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$  (voir appendice). Grâce à la densité de  $C_c^\infty$  dans  $H^1(\mathbb{R}^+; H^{p-1}_{\gamma,p})$ , et par continuité de l'opérateur de trace de  $H^1(\mathbb{R}^+; H^{p-1}_{\gamma,p})$  dans  $H^{(p-1)/2}_{\gamma,p}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$ , l'estimation (ED) passe à la limite. Revenons au cas général  $u \in L^2_\gamma$ . Soit  $\lambda_n : \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}$  une suite régulière selon les variables tangentielles, et  $u_n = \lambda_n * u$ . L'égalité

$$\partial_x u_n = Lu_n + Gu_n$$

implique  $\partial_x u_n \in L^2(H^{p-1}_{\gamma,p})$ , donc  $u_n \in H^1(H^{p-1}_{\gamma,p})$ . On peut donc appliquer (ED) à  $u_n$ . Mais comme  $\lambda_n$  agit seulement sur les variables tangentielles, il vient

$$Fu_n = \lambda_n * Fu \rightarrow Fu (H^{\frac{p-1}{2}}_{\gamma,p}), \quad Lu_n = \lambda_n * Lu \rightarrow Lu (L^2(H^{p-1}_{\gamma,p})).$$

Puisque  $u_n - u_m \in H^1(H^{p-1}_{\gamma,p})$ , on peut appliquer (ED), la convergence de  $Fu_n$  et  $Lu_n$  implique que  $u_n|_{x_d=0}$  est une suite de Cauchy dans  $H^{\frac{p-1}{2}}_{\gamma,p}$ . Le théorème de trace dans  $V$  implique que  $u_n|_{x_d=0} \rightarrow u|_{x_d=0}$  dans  $H^{-1/2}_{\gamma,p}$ . Ainsi par unicité de la limite on a  $u_n|_{x_d=0} \rightarrow u|_{x_d=0}$  dans  $H^{\frac{p-1}{2}}_{\gamma,p}$ . On obtient (ED) en passant à la limite dans cette inégalité sur  $u_n$ . □

### 4.3.2 La structure par blocs

On a décrit dans la section 1.3 la condition de structure par blocs de Majda [48]. On établit ici cette structure pour le problème (4.6).

Afin de travailler sur des quantités bornées, on travaille sur  $H := \varepsilon g(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  plutôt que  $g$ . En guise d'échauffement on traite deux cas élémentaires pour lesquels la structure par bloc qui apparaît est particulièrement simple, et pour laquelle on montre rapidement comment en déduire la construction (locale) de symétriseurs.

**Voisinage d'un point elliptique.** Supposons qu'en  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ ,  $H$  n'ait pas de valeur propre imaginaire pure : on dit que  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  est elliptique. C'est le cas en particulier de tous les points où  $Re(\widehat{\tau}_0) > 0$ . Par continuité des racines, il existe un voisinage  $\mathcal{V}(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  sur lequel  $H(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure. On peut donc localement réduire  $H$  sous la forme

$$\begin{pmatrix} e_+ & 0 \\ 0 & e_- \end{pmatrix}, \quad Sp(e_{\pm}) \subset \mathbb{C}_{>}^{\pm}.$$

et l'existence d'un symétriseur se déduit du lemme classique suivant, variante du théorème de la matrice de Lyapunov (voir [12] lemme 9.2 par exemple) :

**Lemme 4.3.7.** *Soit  $h$  une matrice dont la partie réelle des valeurs propres est strictement positive. Alors il existe  $s$  hermitienne strictement positive telle que*

$$Re(sh) \geq I,$$

*et si  $h$  dépend d'un paramètre,  $s$  en dépend avec le même niveau de régularité.*

La partie réelle des valeurs propres de  $e^+$  et  $-e^-$  étant strictement positive, le lemme précédent fournit  $s^+$  et  $s^-$  tels que  $Re(s^{\pm}e^{\pm}) \geq I$ . On pose  $s = \text{diag}(\kappa s^+, -s^-)$ . Clairement  $Re(sh)$  est définie positive, ce qui implique (K1). Pour (K2), écrivons  $X = (x^+, \Pi^- x)$ , alors

$$\langle SX, X \rangle \geq \kappa c^+ |x^+|^2 - (\|s^-\| \|\Pi^-\|^2) |x^-|^2$$

mais d'après la proposition 4.3.14 (énoncée et prouvée plus tard au paragraphe sur la construction générale des symétriseurs),

$$\kappa c^+ |x^+|^2 - \|s^-\| |x^-|^2 \geq \kappa \left( \frac{|X|^2}{C} - |FX|^2 \right) - (\|s^-\| \|\Pi^-\|^2) |x^-|^2,$$

d'où le résultat pour  $\kappa > C \|s^-\| \|\Pi^-\|^2$ .

**Voisinage d'un point « elliptique-strictement hyperbolique »** Supposons qu'en  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ , les valeurs propres imaginaires pures de  $H$  soient simples. Sur un voisinage de ce point,  $H$  se réduit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^+ & 0 & \\ & & & 0 & e^- & \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

avec  $\lambda_j \in i\mathbb{R}$  pour  $(\tau, \eta, \varepsilon) = (\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ ,  $Re(\text{Sp}(e^{\pm})) \subset \mathbb{R}^{\pm*}$ .

Pour  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  proche de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ , on a soit  $Re(\lambda_i) \geq 0$ , soit  $Re(\lambda_i) \leq 0$ ,

avec inégalité stricte lorsque  $\operatorname{Re}(\widehat{\tau}) > 0$ . Renumérotions les racines comme  $(\lambda_1^-, \dots, \lambda_{\mu_-}^-, \lambda_1^+, \dots, \lambda_{\mu_+}^+)$ , avec

$$\pm \operatorname{Re}(\lambda_k^\pm) \geq 0$$

Le sous espace  $E^\pm$  est la somme des espaces propres associés aux  $\lambda_j^\pm$  et de l'espace stable de  $e^\pm$ , on définit alors le symbole

$$s = \begin{pmatrix} \kappa & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \kappa & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \kappa s^+ & 0 \\ & & & & & 0 & -s^- \end{pmatrix},$$

avec  $s^+$  et  $s^-$  comme au paragraphe précédent. Comme les racines sont simples, on a le développement limité  $\operatorname{Re}(\lambda_j^\pm(\widehat{\tau} + \widehat{\gamma}, \widehat{\eta}, \varepsilon)) = \alpha_j^\pm \widehat{\gamma} + O(\gamma^2)$  avec  $\alpha_j^\pm \in \mathbb{R}^{*\pm}$ , d'où en revenant aux variables  $(\tau, \eta)$  :

$$\operatorname{Re}(sg) \geq \min(\alpha_j) \zeta_p \frac{\gamma}{\zeta_p^p} = \frac{\min(\alpha_j)}{\zeta_p^{p-1}}.$$

L'argument pour choisir  $\kappa$  tel que  $S \geq I - CF^*F$  est identique à celui du cas précédent.

*Remarque 4.3.8.* On voit dans ces deux cas que  $sg$  a une propriété plus fine que  $\operatorname{Re}(sg) \geq \alpha\gamma/\zeta_p^{p-1}$ , à savoir que  $\operatorname{Re}(sg)$  se divise en un bloc d'ordre  $1-p$  (correspondant aux valeurs propres imaginaires) et un bloc elliptique positif d'ordre 1 (correspondant aux valeurs propres de partie réelle non nulle).

Ce résultat est encore vrai dans le cas général, et peut s'énoncer ainsi.

*Proposition 4.3.9.* Soit  $s$  le symétriseur local construit au voisinage d'un point  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ . Il existe une matrice de passage  $T$  sur ce voisinage de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  telle que

$$\operatorname{Re}(sg) = (T^{-1})^* \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T,$$

où

$$h \text{ est d'ordre } 1-p, \quad h \geq \alpha\gamma/\zeta_p^{p-1}, \quad (\text{B1})$$

$$e \text{ est d'ordre } 1, \text{ et } e \geq c\zeta_p. \quad (\text{B2})$$

*Démonstration.* On a vu que c'est vrai pour les voisinages de points elliptiques et de points elliptiques-strictement hyperboliques. Dans le cas général c'est une conséquence de la construction explicite des symétriseurs qui suit, on renvoie donc à cette construction.  $\square$



**Le cas général** On considère un point  $X_0 = (\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  arbitraire. On a vu que si  $\operatorname{Re}(\widehat{\tau}_0) > 0$  c'est un point elliptique pour lequel la construction d'un symétriseur est facile, on ne perd donc rien à supposer  $\widehat{\tau}_0$  imaginaire pur. Au voisinage de ce point, il y a un changement de base réduisant  $H$  sous la forme

$$P^{-1}HP := H_r = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & & & & \\ 0 & h_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^+ & 0 & \\ & & & 0 & e^- & \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

avec  $\operatorname{Sp}(e^\pm) \subset \mathbb{C}^{\pm\pm}$ ,

$$h_j(X_0) = \begin{pmatrix} \lambda_j & i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & i & \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in i\mathbb{R},$$

et d'après le lemme 1, on a  $k \neq j \Rightarrow \lambda_k \neq \lambda_j$ .

Pour la construction de symétriseurs, on a besoin d'une description plus précise des  $h_j$ .

**Proposition 4.3.10.** *Soit  $h_j$  un bloc associé à une valeur propre  $\lambda_j$  imaginaire pure en  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ , dans la décomposition*

$$h_j(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) = h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + (h_j(\operatorname{Im}(\widehat{\tau}), \widehat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)) \\ + (h_j(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\operatorname{Im}(\widehat{\tau}), \widehat{\eta}, \varepsilon)),$$

(en particulier  $\widehat{\tau}_0 = i\delta_0$  est imaginaire pur d'après la proposition 4.2.1).

Alors on a

$$h_j(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\operatorname{Im}(\widehat{\tau}), \widehat{\eta}, \varepsilon) = \widehat{\gamma} \left( \begin{array}{c|c} * & \star \\ \hline \alpha_j & \end{array} \right) + O(\widehat{\gamma}^2) := \widehat{\gamma}D_j + O(\widehat{\gamma}^2),$$

et  $\alpha_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) \in \mathbb{R}^*$ .

On peut de plus choisir le changement de base réduisant  $h$  sous la forme  $\operatorname{diag}(h_1, \dots, e^+, e^-)$  de sorte que sur un voisinage de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  on ait

$$B_j := h_j(\operatorname{Im}(\widehat{\tau}), \widehat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) \in i\mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

*Remarque 4.3.11.* La deuxième partie de la proposition est une version quasi-homogène du lemme de Ralston [56], la preuve en est très similaire à l'étape près du choix de  $\varepsilon$ .

**Lemme 4.3.12.** *Soit*

$$\chi_H(i\omega; \hat{\eta}, \hat{\tau}, \varepsilon) = \det(H(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon) - i\omega).$$

Le polynôme  $\chi_H$  se factorise sous la forme

$$\chi_H = ci^{mp-m} \prod_{j=1}^m (\hat{\tau} - i\hat{\delta}_j), \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

En particulier pour  $\hat{\tau} = i\hat{\delta} \in i\mathbb{R}$  on a

$$\chi_H = ci^{mp} \prod_{j=1}^m (\hat{\delta} - \hat{\delta}_j), \quad c \in \mathbb{R}, \quad \hat{\delta}_j \in \mathbb{R}.$$

De plus, en tant que polynôme en  $\omega$ ,  $\chi_H(\cdot; \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon)/i^{mp}$  est à coefficients réels, si  $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$  est une racine de  $\chi_H(\cdot; i\hat{\delta}, \hat{\eta}, \varepsilon)$ , alors  $-\lambda_R + i\lambda_I$  l'est également.

*Démonstration.* Par définition de la dispersivité, les racines en  $\hat{\tau}$  sont des imaginaires purs,  $\chi$  se factorise donc sous la forme  $d \prod (\hat{\tau} - i\hat{\delta}_j)$ . Par ailleurs le coefficient de  $\omega^{mp}$  est  $(-i)^{mp}$ , d'où par identification  $di^m \in i^{mp}\mathbb{R}$ .

Puisque  $\prod (\hat{\delta} - \hat{\delta}_j) \in \mathbb{R}$ , les coefficients de  $\omega \rightarrow \chi_H/i^{mp}(i\omega)$  sont réels. En particulier

$$\overline{\chi_H/i^{mp}(i\omega; \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon)} = \chi_H/i^{mp}(i\bar{\omega}; \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon).$$

Si  $\chi_H(\lambda; \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon) = 0$ , on a donc  $\chi_H(i\bar{\lambda}/i; \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon) = 0$ , c'est à dire que

$$i(-\bar{\lambda}/i) = -\lambda_R + i\lambda_I$$

est racine de  $\chi_H(\cdot; \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon)$ . □

*Démonstration.* de la proposition 4.3.10.

On rappelle que d'après la formule (4.8), le changement de base peut être choisi de manière  $C^\infty$  en  $(\tau, \eta, \varepsilon)$ .

Montrons que  $\alpha_j \in \mathbb{R}^*$ . Le développement limité de  $h_j$  à l'ordre 1 relativement à  $\hat{\gamma}$  s'écrit :

$$h_j(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\text{Im}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \varepsilon) = \hat{\gamma} \frac{\partial}{\partial \hat{\gamma}} h_j(\text{Im}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \varepsilon) + O(\gamma)^2$$

Posons  $\lambda_j(\hat{\tau}_0, \hat{\eta}_0, 0) = i\omega_j$ , de sorte que

$$h_j(\hat{\tau}_0, \hat{\eta}_0, 0) - i\omega_j = \begin{pmatrix} 0 & i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & i \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{\gamma}} \det(h_j - i\omega_j)(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = \det \left( \begin{array}{c|ccc} & i & 0 & \\ * & & \ddots & \\ \alpha_j & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) = \alpha_j (-1)^{m_j+1} i^{m_j-1} . \quad (4.12)$$

Or comme  $i\omega_j$  est une valeur propre de  $H(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ ,  $\chi_H(i\omega_j; \widehat{\eta}_0, i\widehat{\delta}_0, 0) = 0$ , d'où :

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{\gamma}} \det(H - i\omega_j)(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = ci^{mp-1} \prod_{\widehat{\delta}_k \neq \widehat{\delta}_0} (\widehat{\delta}_0 - \widehat{\delta}_k) . \quad (4.13)$$

En particulier, le facteur  $\prod_{\widehat{\tau}_k \neq \widehat{\tau}_0} (\widehat{\delta}_0 - \widehat{\delta}_k)$  est réel non nul car les  $\tau_k$  sont distincts. Soit  $n$  le nombre de  $\omega_j$  distincts. Écrivons alors

$$\begin{aligned} \det(H - i\omega_j) &= \det(e_+ - i\omega_j) \det(e_- - i\omega_j) \prod_{k=1}^n \det(h_k - i\omega_j) \\ &=: \Delta_e \prod_{k=1}^n \Delta_k . \end{aligned}$$

En utilisant (4.13) il vient

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{\gamma}} \det(h_j - i\omega) = \frac{ci^{mp-1} \prod (\widehat{\delta}_0 - \widehat{\delta}_k)}{\Delta_e \prod_{k \neq j} \Delta_k(i\omega_j; (\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0))} .$$

Puisque les racines en  $\lambda$  sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires, on a  $\Delta_k \in i^{m_k} \mathbb{R}$ ,  $\Delta_e \in i^{m_e} \mathbb{R}$  (avec  $m_e, m_k$  le degré de  $\Delta_e, \Delta_k$ ) d'où tout compte fait

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{\gamma}} \det(h_j - i\omega) \in i^{mp-1-m_e-\sum_{k \neq j} m_k} \mathbb{R}^* = i^{m_j-1} \mathbb{R}^* \text{ et finalement } \alpha_j \in \mathbb{R}^* .$$

*Existence d'une base adaptée* : On vérifie maintenant l'existence d'un changement de base pour lequel  $h_j(\text{Im}(\widehat{\tau}), \widehat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) \in i\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  (remarquer que la propriété  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  ne dépend que de la forme de  $h$  en  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ , donc pour tout changement de base gardant cette forme on gardera cette propriété). Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{m_j})(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  une base associée à la réduction de Jordan de  $h_j$ .

Comme précédemment, on pose  $i\omega_j = \lambda_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ . La famille

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left( \frac{(h_j - i\omega_j)^{m_j-1}}{i^{m_j-1}} e_1, \frac{(h_j - i\omega_j)^{m_j-2}}{i^{m_j-2}} e_1, \dots, e_1 \right)$$

est localement libre (toutes les quantités sont sous entendues comme dépendant de  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$ ) car  $\widetilde{\mathcal{B}}(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = \mathcal{B}(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  et est stable par  $H$ .

La matrice  $h_j$  s'écrit alors dans la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  :

$$\tilde{h}_j = \left( \begin{array}{c|cc} b_1 & i & 0 \\ \hline b_2 & i\omega_j & i \\ & & \ddots \\ b_{m_j} & & & i\omega_j \end{array} \right),$$

et comme

$$\tilde{h}_j(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon) - h_j(\hat{\tau}_0, \hat{\eta}_0, 0) = \begin{pmatrix} b_1 - i\omega_j & & \\ b_2 & & 0 \\ \vdots & & \\ b_{m_j} & & \end{pmatrix},$$

il s'agit de vérifier que pour  $1 \leq k \leq m_j$ ,  $b_k \in i\mathbb{R}$  lorsque  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon) = (i\hat{\delta}, \hat{\eta}, \varepsilon)$ .

Or  $\det(\tilde{h}_j - i(\omega + \omega_j)) = \Delta_j(i(\omega + \omega_j); \hat{\eta}, i\hat{\delta}, \varepsilon)$ , pour lequel on a vu précédemment que  $\Delta_j \in i^{m_j}\mathbb{R}$ .

Un calcul élémentaire montre que  $i^{k-1}b_k$  (resp.  $b_1 - i\omega_j$  pour  $k = 1$ ) est le coefficient de  $(i\omega)^{m_j-k}$ . On en déduit par identification des coefficients que  $i^{m_j-1}b_k \in i^{m_j}\mathbb{R}$  et donc  $b_k \in i\mathbb{R}$ .  $\square$

*Remarque 4.3.13.* Dans la démonstration de l'existence d'une base adaptée, l'hypothèse de dispersivité stricte n'apparaît pas, seule la dispersivité est utilisée. En revanche la stricte dispersivité est nécessaire pour obtenir  $\alpha_j \neq 0$ .

### 4.3.3 Construction des symétriseurs.

**Une conséquence de (KLU) :** Soit  $N$  la taille de  $G$ , la décomposition  $\mathbb{C}^N = E^+(\tau, \eta) \oplus E^-(\tau, \eta)$  selon les espaces stables et instables de  $g$  ainsi que la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme impliquent la proposition suivante.

**Proposition 4.3.14.** *Si l'opérateur de bord  $F$  vérifie (KLU), alors*

$$\exists A > 0 : \forall (\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \frac{1}{M}], \forall X \in \mathbb{R}^N, |X| \leq C(|FX| + |X^+|)$$

avec par définition  $X^+ = X - \Pi^-(X)$ , et  $\Pi^-$  la projection sur  $E^-$ . (Noter que  $X^+$  n'est pas forcément la projection sur le sous espace vectoriel instable de  $g$  lorsque  $\text{Re}(\tau) = 0$ .)

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe une suite  $X_n$  avec  $|X_n| = 1$ , et

$$|F(\hat{\tau}_n, \hat{\eta}_n, \varepsilon_n)X_n| + |X_n^+| \longrightarrow 0.$$

Quitte à extraire des sous suites, on peut supposer que  $X_n$  et  $(\hat{\tau}_n, \hat{\eta}_n, \varepsilon_n)$  convergent. On note  $X$  et  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$  leur limite.

Mais alors  $|F(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)X| + |X^+| = 0$ . En particulier  $X^+ = 0$ ,  $F\Pi^-(X) = 0$  et comme  $F$  est un isomorphisme  $E^- \longrightarrow \text{Im}(F)$ ,  $\Pi^-(X) = 0$ , d'où  $X = X^+ + \Pi^-(X) = 0$ , ce qui est absurde.  $\square$

**Du local au global** Supposons que pour tout point  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, 0) \in \mathbb{S}_p^+ \times \{0\}$ , il y ait un voisinage  $\mathcal{V}(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, 0)$  dans  $\mathbb{S}_p^+ \times [0, \frac{1}{M}]$  sur lequel on sache construire un symétriseur local  $s_j$ .

Notons  $\Pi_{\mathbb{S}_p^+}$  la projection  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \mapsto (\widehat{\tau}, \widehat{\eta})$ . Par compacité de  $\mathbb{S}_p^+$ , il existe une famille finie  $\mathcal{V}(\widehat{\tau}_j, \widehat{\eta}_j, 0) := \mathcal{V}_j \subset \mathbb{S}_p^+ \times [0, \infty[$ ,  $1 \leq j \leq n$  telle que  $\Pi_{\mathbb{S}}(\cup \mathcal{V}_j) = \mathbb{S}_p^+$  (la projection est simplement un recouvrement). Puisque la famille est finie, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $s_j g \geq \alpha \operatorname{Re}(\tau) / \zeta_p^{p-1}$ .

Soit  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\cup \mathcal{V}_j \supset \mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0]$ .

(Pour se convaincre que  $\varepsilon_0$  existe, considérer par exemple la fonction semi-continue inférieurement  $\varepsilon(x) = \sup_{r,j} \{r : \{x\} \times [0, r[ \subset \mathcal{V}_j\}$ .)

Soit  $\chi_j$  une partition de l'unité associée à  $(\mathcal{V}_j)$  en tant que recouvrement de l'espace compact  $\mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0]$ , on définit alors le symbole

$$s(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}) = \sum \chi_j s_j ,$$

et le multiplicateur de Fourier associé  $S$  convient. En effet :

- Le symbole  $s$  est défini pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , et donc pour  $\operatorname{Re}(\tau) \geq \frac{1}{\varepsilon_0}$  d'après la correspondance  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \leftrightarrow (\tau, \eta)$ ,
- $\sum_{j=1}^n \chi_j s_j g \geq \sum \frac{\operatorname{Re}(\tau)}{\zeta_p^{p-1}} \alpha \chi_j \geq \alpha \frac{\operatorname{Re}(\tau)}{\zeta_p^{p-1}}$ , donc la propriété (K1) est vérifié.
- $\sum_{j=1}^n \chi_j s_j \geq \sum \chi_j (I - C_j F^* F) \geq I - C F^* F$  pour  $C = \max(C_j)$  donc (K2) est vérifié.

**Construction locale** La structure par blocs (4.11) précisée par la proposition 4.3.10 étant acquise, la construction des symétriseurs est technique et un peu astucieuse, mais complètement similaire au cas hyperbolique. Pour être complet, on décrit ici comment elle s'effectue.

Clairement, si on sait construire un symétriseur  $(s_j, s^+, s^-)$  pour chaque bloc  $(h_j, e^+, e^-)$ , on obtient un symétriseur pour  $H$  en considérant la matrice diagonale par blocs  $\operatorname{diag}(s_j, s^+, s^-)$ .

Ecrivons d'abord (K1) dans les coordonnées  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$ , plus adaptée aux fonctions utilisées

$$\operatorname{Re}(s \zeta_p h(\tau, \eta)) \geq \alpha \zeta_p \frac{\gamma}{\zeta_p^p} = \frac{\alpha \gamma}{\zeta_p^{p-1}} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(sh)(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \geq \alpha \widehat{\gamma} .$$

On va construire  $s_j$  et  $s^\pm$  satisfaisant cette deuxième inégalité pour les blocs  $h_j$  et  $e^\pm$ . Le cas de  $e^\pm$  est simple : la construction se fait exactement comme dans le cas d'un point elliptique 4.3.2 p.84. On obtient même mieux : au lieu de  $s^\pm h^\pm \geq \alpha \widehat{\gamma}$ , on a  $s^\pm h^\pm \geq \alpha$ , ce qui correspond à (B2) dans la proposition 4.3.9.

Il reste donc à construire un symétriseur pour les blocs  $h_j$ .

**L'inégalité (K1) :** On cherche  $s_j$  sous la forme  $E_j + F_j(i\widehat{\delta}, \widehat{\eta}, \varepsilon) - i\widehat{\gamma}G_j$ , avec  $E_j, F_j$  symétriques réelles,  $G_j$  antisymétrique réelle, et  $F_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = 0$ . D'après la proposition 4.3.10,  $h_j$  s'écrit sous la forme

$$h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + B_j(i\widehat{\delta}, \widehat{\eta}, \varepsilon) + \widehat{\gamma}D_j(i\widehat{\delta}, \widehat{\eta}, \varepsilon) + O(\gamma^2)$$

avec  $h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  un bloc de Jordan associé à la valeur propre  $i\omega_j$ ,  $B_j$  à coefficients imaginaires purs, et  $(D_j)_{m_j,1} = \alpha_j \in \mathbb{R}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(s_j h_j) &= \operatorname{Re}((E_j + F_j)(h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + B_j)) \\ &+ \widehat{\gamma} \operatorname{Re}(E_j D_j + G_j A_j) + O(\widehat{\gamma}) \left( O(\widehat{\gamma}) + O((\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) - (i\widehat{\delta}, \widehat{\eta}, \varepsilon)) \right), \end{aligned}$$

il suffit donc de satisfaire les conditions

$$(E_j + F_j)(h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + B_j) \in iS_{m_j}(\mathbb{R}), \quad (4.14)$$

$$\operatorname{Re}(E_j D_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) - iG_j h_j) > 0, \quad (4.15)$$

pour obtenir (au moins si  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  est assez proche de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ ) la propriété  $SH \geq \alpha\widehat{\gamma}$ . Ce résultat correspond à (B1) dans la proposition 4.3.9.

**Le cas de  $(E_j + F_j)(h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + B_j)$  :** En  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ , la condition (4.14) est  $E_j h_j \in iS_{m_j}$ , c'est à dire :

$$i\omega_j E_j + iE_j \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} := i\omega_h E_j + iE_j N_j \in iS_{m_j}$$

donc  $E_j N_j$  doit être symétrique. Cela se lit

$$\forall k, l \geq 1, (E_j N_j)_{k,l} = (E_j)_{k,l-1} = (E_j N_j)_{l,k} = (E_j)_{l,k-1}$$

avec la convention  $(E_j)_{k,0} = 0$ . Couplé à la condition de symétrie  $(E_j)_{k,l} = (E_j)_{l,k}$ , on obtient  $(E_j)_{k,l} = (E_j)_{k-1,l+1}$ , ainsi  $E_j$  est de la forme :

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 & & & e_1 \\ & & & e_2 \\ & & \ddots & \ddots \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{m_j} \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que l'on peut choisir  $F_j$  tel que  $F_j(h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + B_j) + E_j B_j \in iS_{m_j}$ . Cela donne un système de  $m_j \frac{m_j-1}{2}$  équations à satisfaire, qui est donc est

sous déterminé, ce qui empêche de définir  $F_j$  comme une application régulière. On cherche donc une forme particulière :

$$F_j = \left( \begin{array}{c|c} \widetilde{F}_j & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \widetilde{F}_j \in S_{m_j-1} .$$

La condition  $F_j(h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) + B_j) + E_j B_j \in iS_{m_j}$  donne un système de Cramer sur un voisinage de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ . En effet,  $F_j h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) \in iS_{m_j}$  s'écrit

$$i\omega_j F_j + iF_j N_j \in iS_{m_j} \Rightarrow F_j N_j \in iS_{m_j} .$$

Comme pour  $E_j$ , on en déduit que  $F_j$  est simultanément de la forme

$$F_j = \begin{pmatrix} 0 & & & f_1 \\ & & & f_2 \\ & \ddots & \ddots & \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{m_j} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{c|c} \widetilde{F}_j & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \widetilde{F}_j \in S_{m_j-1} ,$$

ce qui impose  $F_j = 0$ . Ainsi le système est de Cramer au voisinage de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  et  $F_j$  est bien définie de manière  $C^\infty$  comme solution d'un système linéaire.

**Choix de  $G_j$  :** On a

$$E_j D_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = \begin{pmatrix} e_1 \alpha_j & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

On prend  $G_j$  de la forme

$$G_j = \begin{pmatrix} 0 & -g_2 & 0 & \cdots \\ g_2 & 0 & -g_3 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \Rightarrow G_j N_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_2 & 0 & \cdots \\ 0 & g_2 & 0 & -g_3 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix},$$

et  $\text{Re}(iG_j i\omega_j I_{m_j}) = 0$ .

Ainsi pour tout  $X \in \mathbb{C}^{m_j}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Re}(\langle -iG_j h_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) X, X \rangle) &= \sum_2^{m_j} g_k |x_k|^2 - \sum_1^{m_j-2} \text{Re}(g_{k+1} x_{k+2} \overline{x_k}) , \\ g_{k+1} |x_{k+2}| |x_k| &= \sqrt{g_{k+2}} |x_{k+2}| \sqrt{g_k} |x_k| \frac{g_{k+1}}{\sqrt{g_{k+2} g_k}} \\ &\leq \frac{g_{k+1}}{2\sqrt{g_{k+2} g_k}} (g_{k+2} |x_{k+2}|^2 + g_k |x_k|^2) , \end{aligned}$$

d'où en choisissant  $g_k > 0$  défini par  $\frac{g_{k+1}}{\sqrt{g_{k+2}g_k}} = \frac{1}{2}$ ,  $g_1 = g_2 = 1$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle g_j N_j X, X \rangle) &\geq -\frac{1}{4}|x_1|^2 + \sum_2^{m_j} \frac{g_k}{2}|x_k|^2, \\ \forall 1 \leq k \leq m_j - 2, \quad g_{k+2} &= 4g_{k+1}^2/g_k \geq g_{k+1}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \langle E_j D_j + g_j N_j X, X \rangle &\geq (\alpha_j e_1 - C)|x_1|^2 + \frac{g_2}{2}|(x_2, \dots, x_{m_j})|^2 \\ &\quad - C|(x_2, \dots, x_{m_j})|^2 - \frac{1}{4}|x_1|^2 \\ &> 0 \text{ si } g_2 > 2C \text{ et } \alpha_j e_1 > C \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Evidemment on peut faire ce choix, et cela définit  $s_j$  satisfaisant (K1).

**L'axiome (K2) :** On rappelle que par construction du prolongement des espaces stables, pour une base  $(e_1, \dots, e_{m_j})$  dans laquelle  $H|_{\operatorname{Ker}(H-i\omega_j)^{m_j}}$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} i\omega_j & i & & \\ 0 & i\omega_j & i & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

une base de  $E^-(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) \cap H|_{\operatorname{Ker}(H-i\omega_j)^{m_j}}$  est  $(e_1, \dots, e_{\mu_j})$ , où  $\mu_j$  est le nombre de valeurs propres de partie réelle négative ayant  $i\omega_j$  pour limite en  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$ . Pour la suite, on a besoin de préciser la valeur de  $\mu_j$ .

**Proposition 4.3.15.** *Si  $m_j$  est pair,  $\mu_j = \frac{m_j}{2}$ .*

*Si  $m_j$  est impair, on a  $\mu_j = \frac{m_j + \operatorname{sgn}(\alpha_j)}{2}$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse de stricte dispersivité et comme  $\lambda_j$  est un zéro d'ordre  $m_j$  :

$$\begin{aligned} \chi_H(i\omega_j; \widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \chi_H}{\partial \widehat{\gamma}} \in \mathbb{R}^*, \\ \frac{\partial^k \chi_H(i\omega_j; \widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)}{\partial \lambda^k} &= 0, \quad 0 \leq k \leq m_j - 1 \end{aligned}$$

Écrivons alors

$$\langle s_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)X, X \rangle = \langle E_j X, X \rangle = \sum_{k+l \leq m_j+1} e_k x_{m_j+2-k-l} \overline{x_l}$$

Puisque  $\chi_H(\lambda, \widehat{\tau}, \widehat{\eta}_0, 0)$  est un polynôme en  $(\lambda, \widehat{\tau})$ , c'est une fonction analytique et on peut appliquer le théorème de préparation de Weierstrass (voir par exemple [35] paragraphe 7.5).



Sur un voisinage de  $\mathcal{V}(\widehat{\tau}_0, i\omega_j)$ , il existe  $c(\widehat{\tau}, \lambda), a_1(\widehat{\tau}), \dots, a_{m_j-1}(\widehat{\tau})$  analytiques avec  $c(\widehat{\tau}_0) \neq 0, a_k(\widehat{\tau}_0) = 0$  tels que pour tout  $(\widehat{\tau}, \lambda) \in \mathcal{V}(\widehat{\tau}_0, i\omega_j)$ ,

$$\chi_H = c(\widehat{\tau}, \lambda) \left( (\lambda - i\omega_j)^{m_j} + a_{m_j-1}(\lambda - i\omega_j)^{m_j-1} + \dots + a_0(\widehat{\tau}) \right) \quad (4.16)$$

Pour  $\widehat{\tau} = \widehat{\tau}_0$ , ce n'est rien d'autre que la factorisation

$$\chi_H(\lambda; \widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = (\lambda - i\omega_j)^{m_j} Q(\lambda), \quad (4.17)$$

avec  $Q$  le quotient de  $\chi_H$  par  $(\lambda - i\omega_j)^{m_j}$ .

En dérivant (4.16) il vient

$$\frac{\partial \chi_H}{\partial \widehat{\gamma}} = c(\widehat{\tau}_0, i\omega_j) \frac{\partial a_0}{\partial \widehat{\gamma}}(\widehat{\tau}_0),$$

puis en utilisant (4.12) et (4.17)

$$\frac{\partial a_0}{\partial \widehat{\gamma}}(\widehat{\tau}_0) = (-i)^{m_j-1} \alpha_j.$$

Cette formule permet d'obtenir un développement asymptotique des racines proches de  $i\omega_j$ . En effet quitte à diminuer  $\mathcal{V}$ ,  $\chi_H(\widehat{\tau}, \lambda) = 0$  équivaut à  $(\lambda - i\omega_j)^{m_j} + a_{m_j-1}(\lambda - i\omega_j)^{m_j-1} + \dots + a_0(\widehat{\tau}) = 0$  pour  $(\widehat{\tau}, \lambda) \in \mathcal{V}$ . Or par régularité des  $a_j$ ,  $a_j(\widehat{\tau}_0 + \widehat{\gamma}) = O(\widehat{\gamma})$ , donc si  $\lambda$  est une racine de  $\chi_H(\widehat{\tau}, \cdot)$  :

$$(\lambda - i\omega_j)^{m_j} + (-i)^{m_j-1} \alpha_j \widehat{\gamma} = o(\widehat{\gamma}).$$

On en tire  $(\lambda - i\omega_j)^{m_j} = O(\widehat{\gamma})$ , puis

$$(\lambda - i\omega_j)^{m_j} \sim -(-i)^{m_j-1} \alpha_j \widehat{\gamma} = i^{m_j} (-1)^{m_j+1} i \alpha_j \widehat{\gamma} \text{ lorsque } \widehat{\gamma} \rightarrow 0.$$

Posons  $\lambda = i\omega_j + ir\widehat{\gamma}^{1/m_j} + o(\widehat{\gamma}^{1/m_j})$ . On note  $r_k$  les racines de

$$r^{m_j} = (-1)^{m_j+1} i \alpha_j. \quad (4.18)$$

Comme précédemment, on trouve que les  $m_j$  racines proches de  $i\omega_j$  admettent le développement  $\lambda = i\omega_j + ir_k \widehat{\gamma}^{1/m_j} + O(\widehat{\gamma}^{2/m_j})$ . Clairement,  $r_j \notin \mathbb{R}$ , donc pour  $\widehat{\gamma}$  assez petit, le signe de la partie réelle de  $\lambda$  est l'opposé du signe de la partie imaginaire de  $r_k$ , on en tire facilement la dimension de  $E^-$ .

(La figure 4.3.3 montre l'organisation en polygone « presque » régulier des  $\lambda_k$  autour de leur limite  $i\omega_j$  pour  $m_j = 5, 6$ .)  $\square$

Avec ce résultat, on peut maintenant prouver (K2). Dans un premier temps, vérifions que l'on peut choisir  $E_j$  tel que

$$\begin{aligned} \langle E_j X, X \rangle &\geq \kappa |X - \Pi^-(X)|^2 - C |\Pi^-(X)|^2 \\ &= \kappa (|x_{\mu_j+1}|^2 + \dots + |x_{m_j}|^2) - C (|x_1|^2 + \dots + |x_{\mu_j}|^2) \end{aligned}$$

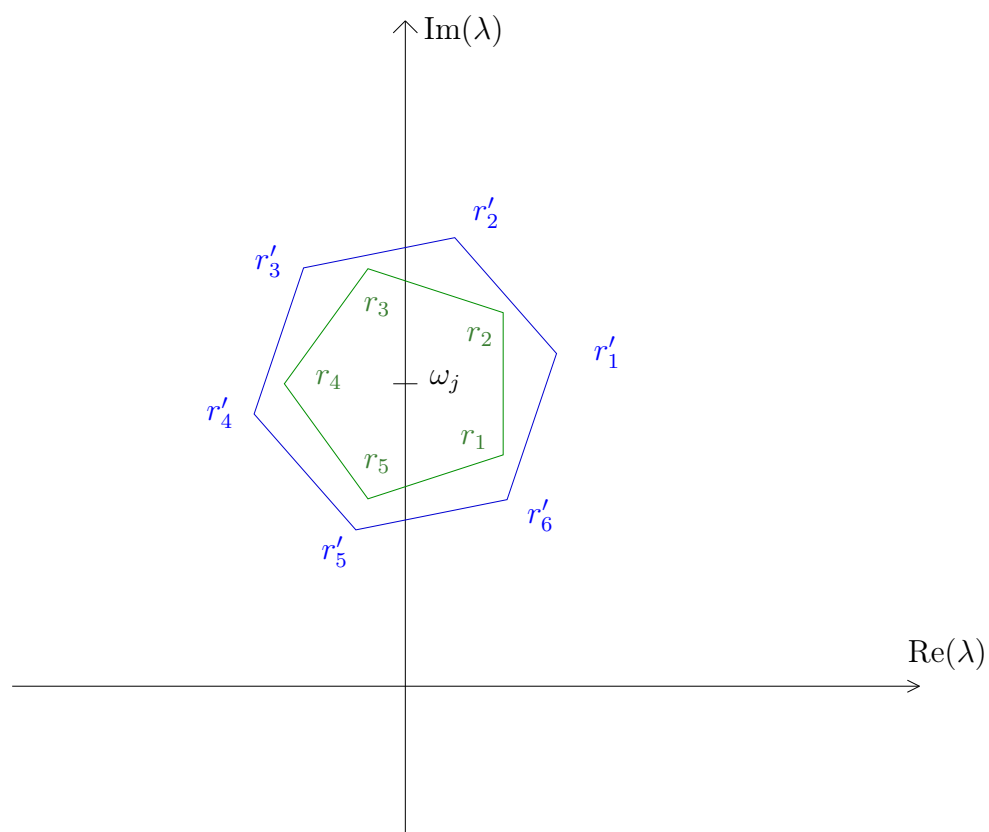


FIGURE 4.1 – Répartition (grossière) des racines de limite  $i\omega_j$  pour  $\gamma > 0$  et  $\alpha_j > 0$ , en vert pour  $m_j = 5$  et en bleu pour  $m_j = 6$ . La dimension de l'espace stable est le nombre de racines de partie réelle négative.

avec  $\kappa$  arbitrairement grand et  $C$  une constante fixée. En effet :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{C}^{m_j}, \langle E_j X, X \rangle &= \sum_{k=1}^{m_j} e_1 x_{m_j+1-k} \overline{x_k} + \sum_{k=2}^{m_j} e_2 x_{m_j+2-k} \overline{x_k} + \cdots \\ &=: S_1 + S_2 + \cdots + S_{m_j} . \end{aligned}$$

Si  $m_j$  est pair, choisissons pour  $1 \leq k \leq m_j/2 - 1$ ,  $e_{2k+1} = 0$ . On rappelle que  $e_1$  a été fixé pour satisfaire (K1), et que  $\mu_j = m_j/2$ . Alors

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq l \leq \frac{m_j}{2} - 1, S_{2l+1} &= 0, \\ \forall 1 \leq l \leq m_j/2, S_{2l} &= \sum_{k=2l}^{m_j} e_{2l} x_{m_j+2l-k} \overline{x_k} \\ &\geq e_{2l} |x_{m_j/2+l}|^2 - \sum_{2l}^{m_j/2} |x_k|^2 \\ &\quad - \sum_{\substack{m_j/2+1 \leq k, \\ k \neq m_j/2+l}} e_l^2 |x_k|^2 . \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \langle E_j X, X \rangle &\geq \sum_1^{m_j/2} e_{2k} |x_{m_j/2+k}|^2 - (|e_1|^2 + m_j/2) \sum_1^{m_j/2} |x_k|^2 \\ &\quad - (e_2^2 + 1) |x_{m_j/2+2}|^2 - (e_2^2 + e_4^2 + 1) |x_{m_j/2+3}|^2 \\ &\quad - \cdots - (e_2^2 + \cdots + e_{m_j-2}^2 + 1) |x_{m_j}|^2 , \end{aligned}$$

et on voit directement qu'en choisissant  $e_{2k+2} \gg e_2^2 + \cdots + e_{2k}^2 + 1$  on obtient le résultat attendu.

Le cas où  $m_j$  est impair se fait essentiellement de la même manière, il suffit de remarquer que  $e_1$  a le « bon » signe selon le signe de  $\alpha_i$ , et de choisir les  $e_{2k+1}$  croissant assez rapidement.

On a donc trouvé  $E_j$  tel que

$$\langle E_j X, X \rangle \geq \kappa |X - \Pi^-(X)|^2 - C |\Pi^-(X)|^2 .$$

Comme  $S_j(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0) = E_j$ , on a par continuité sur un voisinage de  $(\widehat{\tau}_0, \widehat{\eta}_0, 0)$  l'estimation

$$\langle S_j X, X \rangle \geq \kappa/2 |X - \Pi^-(X)|^2 - 2C |\Pi^-(X)|^2 .$$

On applique alors la proposition 4.3.14 exactement comme pour la conclusion du cas elliptique :

$$\exists C_1, C_2 : \langle S_j X, X \rangle \geq \left( \frac{\kappa}{C_1} - C_2 \right) |X|^2 - \kappa |FX|^2 ,$$

finalement, on choisit  $\kappa$  assez grand pour conclure.

### 4.3.4 Retour à la $q$ -hyperbolicité

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} P(\partial_t, D_x)u = f, & (x, t) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}) \times \mathbb{R}^+ , \\ B_j(\partial_t, D_x)u|_{x_d=0} = g_j, & 1 \leq j \leq \mu , \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

pour lequel on suppose que le déterminant du symbole  $P$  satisfait les hypothèses de la définition 3.1.18 p.55 avec pour  $n$  la direction  $(0, \dots, 0, 1)$ . On rappelle que l'estimation *a priori* (3.9) obtenue par Gindikine et Volevich [31] fait intervenir les espaces à poids

$$H_{\gamma, \nu}^{[m, s], q} = \{u : \|u\|_{[m, s], q, (\gamma, \nu)}^2 := \sum_{j=0}^m \iint e^{2\nu x_d} (1 + |\xi'|^2 + |\tau|^{2/q})^{m+s-j} |\widehat{u}|^2 d\xi' d\tau dx_d < \infty\}.$$

Le but ici est de montrer succinctement comment l'approche par les symétriseurs de Kreiss permet de retrouver le théorème 3.1.22 pour des équations scalaires, et de l'étendre aux systèmes. Comme pour les problèmes strictement dispersifs, on réduit le problème scalaire sous la forme d'un système d'ordre 1

$$\begin{cases} \partial_{x_d} U = G_\gamma U, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t , \\ F U|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^t , \end{cases}$$

avec  $U = (\Lambda_{\gamma, p}^{mp-1} u, \Lambda_{\gamma, p}^{mp-2} \partial_{x_d} u, \dots, \partial_{x_d}^{mp-1} u)$ . Si  $U$  est solution du problème aux limites ci-dessus,  $V = e^{\nu x_d} U$  satisfait

$$\begin{cases} \partial_{x_d} V = (G_\gamma + \nu) V, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t , \\ F(\partial_t, D_{x'}, \partial_{x_d} - \nu) V|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^t , \end{cases}$$

La construction de symétriseurs pour ce problème particulier est simple. En effet, la proposition 3.1.23 p.57 indique que les valeurs propres imaginaires pures de  $g$  sont simples, ce qui correspond au cas simple « elliptique-strictement hyperbolique » ((4.10) dans la construction de symétriseurs). Après changement de base, on a localement

$$g + \nu = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \nu & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_2 + \nu & 0 & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & e^+ + \nu & 0 & \\ & & & 0 & e^- + \nu & \end{pmatrix},$$

et d'après le corollaire 3.1.24, il existe  $\nu_0, C > 0$  tels que pour  $\nu \geq \nu_0, \gamma \geq C\nu^q$ ,

$$\text{Sp}(e^\pm + \nu) \subset \{\text{Re}(z) \geq \pm\nu/2\}, \quad \text{Re}(\lambda_j + \nu) \geq \frac{\nu}{2}.$$

En particulier, l'espace stable  $E^-(g + \nu)$  est réduit à l'espace associé au bloc  $e^- + \nu$ . En répétant l'argument de la construction pour les points « elliptiques » (paragraphe 4.3.2 p.84), on obtient des matrices  $s^+$  et  $s^-$  telles que  $\operatorname{Re}(s^\pm(e^\pm + \nu)) \geq \nu/2$ , on prend alors

$$s = \begin{pmatrix} \kappa & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \kappa & & & \\ & & & \kappa s^+ & 0 & \\ & & & 0 & -s^- & \end{pmatrix},$$

qui définit un symétriseur local pour  $G + \nu I$ . En effet,

$$\operatorname{Re}(s(g + \nu)) = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \kappa \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \kappa \lambda_2 & & & \\ & & & \kappa s^+ & 0 & \\ & & & 0 & -s^- & \end{pmatrix} \geq \frac{\nu}{2},$$

et la condition (K2)  $s \geq I - CF^*F$  se montre comme au paragraphe 4.3.2, en utilisant la structure particulière ici de  $E^-$ .

On en déduit une estimation par la même méthode d'énergie que pour (ED) :

$$\int_{\eta, \delta} \left( \langle s \widehat{V}(0), \widehat{V}(0) \rangle + \int_{x_d} \langle s g \widehat{V}, \widehat{V} \rangle \right) \leq \left| \int_{x_d, \eta, \delta} \langle s \widehat{f}, \widehat{V} \rangle \right|,$$

d'où par l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \int_{x_d, \delta, \eta} |\widehat{V}|^2 + \int_{\delta, \eta} |\widehat{V}(0)|^2 &\leq C \int_{\delta, \eta} |F \widehat{V}(0)|^2 \\ &\quad + \frac{|s|^2}{2\alpha\gamma} \int_{x_d, \delta, \eta} |\widehat{f}|^2. \end{aligned}$$

On retrouve le théorème 3.1.22 p.57 pour  $s = 0$  en remplaçant

$$V = e^{\nu x_d} (\Lambda_{\gamma, p}^{mp-1} u, \Lambda_{\gamma, p}^{mp-2} \partial_{x_d} u, \dots, \partial_{x_d}^{mp-1} u),$$

et pour  $s$  quelconque en appliquant la preuve de (EDs).

# Chapitre 5

## Résolution du problème aux limites

### 5.1 Le problème dual

#### 5.1.1 Construction d'un problème dual :

On veut résoudre le problème aux limites (4.6), dont on rappelle la forme :

$$\begin{cases} \partial_{x_d} U = GU + f, & x' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d \geq 0, t \in \mathbb{R}, \\ FU|_{x_d=0} = \varphi, & x' \in \mathbb{R}^{d-1}, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $G$  un multiplicateur de Fourier de  $p$ -ordre 1 agissant selon les variables  $(x', t)$ , tel que le polynôme caractéristique de son symbole soit strictement dispersif,  $F$  un multiplicateur d'ordre 0 satisfaisant la condition  $(KLU)$ .

Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+)$ , et  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire sur  $L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$ .

On pose  $L = \partial_x - G$ . On cherche un problème dual, c'est à dire de la forme

$$\begin{cases} L'V = g, & x_d \geq 0, t \in \mathbb{R}, \\ F'V = \psi, & x_d = 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.2)$$

de sorte qu'on ait une formule de dualité :

$$\langle LU, V \rangle = \langle U, L'V \rangle + (FU(0), MV(0)) + (NU(0), F'V(0)). \quad (5.3)$$

Par intégration par parties sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\langle (\partial_x - G)U, V \rangle = \langle U, (-\partial_x - G^*)V \rangle + (U(0), V(0))$$

où  $G^*$  est le multiplicateur adjoint de  $G$  :

$$\widehat{G^*U} = g^*(\tau, \eta)\widehat{U}.$$

On voit donc qu'en choisissant  $L' = -\partial_x - G^*$ , on est ramené à trouver des matrices  $M, N, F'$  telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^{mp}, (Fu, Mv) + (Nu, F'v) = (u, v),$$

ce qui revient à

$$F^*M + N^*F' = I. \quad (5.4)$$

Le nombre de conditions au bord du problème adjoint (et donc le rang de  $F'$ ) est

$$\dim(E^-(-g^*)) = \dim(E^+(g^*)) = \dim(E^+(g)),$$

qui est donc la codimension de  $E^-(g)$ . La proposition suivante montre que cette condition est compatible avec l'identité (5.4).

**Proposition 5.1.1.** *Si  $F^*M + N^*F' = I$ , alors  $\text{Ker}(F') = \text{Ker}(F)^\perp$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in \text{Ker}(F')$ . Alors

$$F^*Mx = x \Rightarrow x \in \text{Im}(F^*) = (\text{Ker}(F))^\perp.$$

Mais comme  $\text{rang}(F') = \dim(E^+(g)) = \dim(\text{Ker}(F))$  on a égalité des dimensions donc l'égalité des sous espaces.  $\square$

Vérifions que l'on peut effectivement construire  $F'$  (il y aura forcément une part d'arbitraire, la seule condition importante étant la nature du noyau). Puisque  $F(\tau, \eta)$  est de rang maximal et que  $\mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0]$  est contractile, il existe une application  $C^\infty$  à valeurs matricielles  $N$  telle que

$$\forall (\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0], \begin{pmatrix} F(\tau, \eta) \\ N(\tau, \eta) \end{pmatrix} \in GL_{mp}(\mathbb{C}).$$

(ceci revient à dire que le fibré vectoriel  $E^-(\tau, \eta)$  est trivialisable, cf Hirsch [32] chap.1)

Ecrivons alors l'inverse de cette matrice sous forme de bloc

$$\begin{pmatrix} F \\ N \end{pmatrix}^{-1} = (M^*, (F')^*),$$

avec  $F'$  de rang maximal, comptant  $mp$  colonnes et  $mp - \text{rang}(F)$  lignes. Pour ce choix de  $M, N, F'$ , on a évidemment (5.4), et d'après la proposition 5.1.1,  $\text{Ker}(F') = \text{Ker}(F)^\perp$ . On note enfin que  $M$  est de rang maximal, égal au rang de  $F$ .

Maintenant qu'il est défini, on peut s'intéresser aux propriétés algébriques du problème adjoint. Pour ce dernier, le rôle de  $G$  est joué par  $-G^*$ , dont le polynôme caractéristique du symbole est

$$\begin{aligned} \chi_{-g^*}(\lambda) &= \det(-g^* - \lambda I) = (-1)^{mp} \det(g^* + \lambda I) \\ &= (-1)^{mp} \overline{\det(g + \bar{\lambda} I)} = (-1)^m \overline{\chi_g(\bar{\lambda}; \tau, \eta)}. \end{aligned}$$

Or on a vu précédemment qu'à un facteur scalaire près,  $\chi_g(\lambda; i\delta, \eta)$  est un polynôme à coefficients réels en  $(\lambda, \delta, \eta)$ , donc à un facteur près

$$\forall (\lambda, \tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad \overline{\chi_g(\bar{\lambda}; \tau, \eta)} = \chi_g(\lambda; \tilde{\tau}, \eta),$$

$$\text{où } \widetilde{\gamma + i\delta} = -\gamma + i\delta$$

Clairement, l'analyse de l'espace  $E^-(g)$  peut se faire *mutatis mutandis* pour  $E^-(-g^*)$ , en remplaçant en particulier  $\gamma > 0$  par  $\gamma < 0$ . Cette différence peut se voir comme un changement du sens du temps. En conséquence la condition de Lopatinskiï du problème adjoint est qualifiée de rétrograde.

La proposition suivante résume ce qu'on utilisera sur le problème dual.

**Proposition 5.1.2.** *Il existe un problème dual à (5.1) de la forme (5.2) satisfaisant la formule (5.3).*

*La condition de Lopatinskiï rétrograde est satisfaite pour (5.2) si et seulement la condition de Lopatinskiï est satisfaite pour le problème (5.1).*

*Si la condition est uniforme pour l'un elle est uniforme pour l'autre.*

*Démonstration.* Vu la formule  $\chi_{-g^*}(\lambda; \tilde{\tau}, \eta) = \chi_g(\lambda; \tau, \eta)$ , on a pour  $\gamma > 0$  :

$$\begin{aligned} E^-(-g^*(\tilde{\tau})) &= \text{Im}(P^+(-g^*)) = \text{Im}(P^-(g^*)) \\ &= \text{Ker}(P^-(g(\tau)))^\perp = E^-(g(\tau))^\perp, \end{aligned}$$

Mais d'après la proposition 5.1.1,  $\text{Ker}(F') = \text{Ker}(F)^\perp$  d'où

$$E^-(-g^*(\tilde{\tau})) \cap \text{Ker}(F') = E^-(g(\tau))^\perp \cap \text{Ker}(F)^\perp = (E^-(g(\tau)) + F)^\perp$$

et on voit directement que  $E^-(-g^*(\tilde{\tau}))$  et  $\text{Ker}(F'(\tilde{\tau}))$  sont en somme directe si et seulement si c'est le cas de  $E^-(g(\tau))$  et  $\text{Ker}(F'(\tau))$ . Par continuité, on en déduit la même chose pour la condition de Kreiss Lopatinskiï uniforme.  $\square$

### 5.1.2 Existence d'une solution, unicité

On utilise ici de manière standard les estimations *a priori* pour le problème dual et le théorème de Hahn Banach pour obtenir l'existence d'une solution à (5.1).

Soit  $E$  l'espace des applications  $C_c^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^{mnp})$  telles que

$$F'U|_{x_d=0} = 0.$$

(En particulier,  $E \supset C_c^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*})$ .)

Soit  $T$  l'application linéaire définie sur  $L'(E)$  par

$$T(L'V) = \langle f, V \rangle - (\varphi, MV).$$



Pour alléger les notations, on pose  $\|\cdot\|_{s,\gamma,p} = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^s(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1}))}$ . D'après l'estimation a priori (EDs) rétrograde, on a

$$\begin{aligned} T(L'V) &= \leq \|f\|_{p-1,\gamma,p} \|V\|_{1-p,-\gamma,p} + |\varphi|_{\frac{p-1}{2},\gamma,p} |V|_{\frac{1-p}{2},-\gamma,p} \\ &\leq \|L'V\|_{L_{-\gamma}^2} \left( \frac{\|f\|_{p-1,\gamma,p}}{\gamma} + \frac{|\varphi|_{\frac{p-1}{2},\gamma,p}}{\sqrt{\gamma}} \right). \end{aligned}$$

La forme linéaire  $T$  est donc continue sur  $L'E$  (pour la topologie de  $L_{-\gamma}^2$ ). Par le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge donc en une forme linéaire continue sur  $L_{-\gamma}^2$ , et d'après le théorème de Riesz il existe  $U \in L_{\gamma}^2$  tel que

$$\forall V \in E, \langle V, L'V \rangle = \langle f, V \rangle - (\varphi, MV). \quad (5.5)$$

En particulier, l'égalité est vraie pour  $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*})$ , donc

$$LU = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*}).$$

Pour donner un sens à la trace de  $U$  on a besoin du lemme général suivant :

**Lemme 5.1.3.** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*}$ , si  $u \in L_{\gamma}^2(\Omega)$  et  $Lu \in L_{\gamma}^2(\Omega)$ , alors il existe une suite de fonctions  $\psi_n \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$  telles que*

$$\|u - \psi_n\|_{L_{\gamma}^2} + \|Lu - L\psi_n\|_{L_{\gamma}^2} \longrightarrow 0$$

et  $u$  admet une trace  $H_{\gamma,p}^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir le lemme A.0.11 en appendice.  $\square$

Soit  $\psi_n$  comme dans le lemme,  $V \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ , puisque  $\psi_n$  et  $V$  sont régulières on a l'identité :

$$\langle \psi_n, L'V \rangle = \langle L\psi_n, V \rangle - (F\psi_n, MV) - (N\psi_n, F'V),$$

et en passant à la limite

$$\forall V \in C_c^\infty(\overline{\Omega}), \langle U, L'V \rangle = \langle LU, V \rangle - (FU, MV) - (NU, F'V) \quad (5.6)$$

(la quantité  $(\cdot, \cdot)$  est maintenant à voir comme un crochet de dualité puisque  $u|_{\partial\Omega} \in H_{\gamma,p}^{-1/2}$ ).

Remarquons que l'identité (5.6) se prolonge par densité pour  $V \in H_{\gamma,p}^1$ . On utilise alors cette dernière ainsi que (5.5) pour obtenir :

$$\forall V \in H_{\gamma,p}^1 \cap \{F'V = 0\} =: \tilde{E}, (FU - \varphi, MV) = 0.$$

Pour obtenir  $FU = \varphi$ , il ne reste plus qu'à vérifier que  $M\tilde{E}$  est « assez gros ». Plus précisément, on montre qu'il contient  $C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t; \mathbb{C}^{\text{rang}(F)})$ . Vu l'identité (5.4),  $\text{Ker}(F') \cap \text{Ker}(M) = \{0\}$ , donc  $M$  induit un isomorphisme

$\text{Ker}(F') \longrightarrow \text{Im}(M)$  pour tout  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0]$ . Par compacité de  $\mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0]$ ,  $M$  est uniformément borné ainsi que son inverse. Si  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$ , on a donc

$$\mathcal{F}^{-1}(M|_{\text{Ker}(F')}^{-1}\widehat{\psi}(\tau, \eta)) \in H_{\gamma, p}^1.$$

Donc  $M\widetilde{E} \supset C_c^\infty$ , et finalement pour tout  $V \in \widetilde{E}$ ,  $(FU - \varphi, MV) = 0 \Rightarrow FU = \varphi$ .

*Remarque 5.1.4.* La preuve classique pour les problèmes aux limites hyperboliques (voir par exemple [17] p.391) suppose que  $F$  est une matrice dont les coefficients sont des fonctions régulières de  $(x, t)$  (en particulier c'est un opérateur d'ordre 0) et utilise le fait que  $ME = C_c^\infty$ . Cette dernière égalité n'a pas de raison d'être vraie lorsque  $F$  est un multiplicateur de Fourier, ce dernier ne préservant en général pas le support.

Pour résumer, on a obtenu une solution  $U \in L_\gamma^2$  du problème aux limites en passant par le problème dual. A l'aide du théorème 4.3.6 on obtient le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 5.1.5.** *Soit le problème aux limites (voir (5.1) p.99)*

$$\begin{cases} \partial_{x_d} U = GU + f, & x' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d \geq 0, t \in \mathbb{R}, \\ FU|_{x_d=0} = \varphi, & x' \in \mathbb{R}^{d-1}, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.7)$$

*On suppose que le polynôme caractéristique du symbole de  $G$  est strictement dispersif, et que  $F$  satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme.*

*Alors il existe  $\Gamma > 0$  tel que pour  $\gamma \geq \Gamma$ , le problème (5.1) admet une unique solution  $U \in L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)$ . Sa trace sur  $\{x_d = 0\}$  est définie, et on a l'estimation (ED) :*

$$\begin{aligned} \forall \gamma \geq \Gamma, \quad & \gamma \|U\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 + |U(0)|_{H_{\gamma, p}^{(p-1)/2}}^2 \\ & \lesssim \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma, p}^{p-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t))}^2 + |\varphi|_{H_{\gamma, p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Il suffit de coupler l'existence que l'on vient de démontrer au théorème d'unicité 4.3.6.  $\square$

### 5.1.3 Commentaires sur l'estimation *a priori*

**Retour au problème différentiel.** Revenons au problème original (4.3) p.72 qui a motivé l'analyse du problème (5.1) :

$$\begin{cases} Lu = f, & x_d \geq 0 \\ B(u, \partial_x u, \dots, \partial_x^{mp-1} u) = \varphi, & x_d = 0, \end{cases}$$

où  $L$  est un opérateur (de symbole) strictement dispersif, de  $p$ -degré  $mp$ ,  $B$  est comme dans (4.4) et satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme au

sens où l'opérateur  $F$  associé comme dans (4.5) la satisfait.

On a vu que cette EDP se ramenait à un système de la forme (5.1), avec

$$U = \begin{pmatrix} \Lambda_{\gamma,p}^{mp-1} u \\ \Lambda_{\gamma,p}^{mp-2} \partial_{x_d} u \\ \vdots \\ \partial_{x_d}^{mp-1} u \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\|U\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)} = \|u\|_{H_{\gamma,p}^{mp-1}}, \quad |U(x_d = 0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}} = |u|_{H_{\gamma,p}^{mp-1+(p-1)/2}}.$$

L'estimation (ED) se lit donc

$$\gamma \|u\|_{H_{\gamma,p}^{mp-1}} + |u|_{H_{\gamma,p}^{mp-1+(p-1)/2}} \leq C \left( \frac{\|f\|_{L^2(H_{\gamma,p}^{p-1})}}{\gamma} + |\varphi|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}} \right). \quad (5.8)$$

Cette estimation montre une régularisation partielle par rapport au forçage  $f$  : la norme de la solution est contrôlée par les dérivées tangentielles de  $f$ . *A contrario* on n'a pas besoin de contrôler les dérivées normales  $\partial_{x_d} f$ .

Ce résultat est lié à l'hypothèse de non caractéristicité de la frontière, et quantifie l'idée simple selon laquelle "si  $u(x_1, x_2)$  est régulière en  $x_2$ , et  $\partial_{x_1} u - \partial_{x_2} u = 0$ , alors  $u$  est régulière en  $x_1$  également" (pour une discussion plus générale là-dessus, voir aussi [34] section 2.1).

Ce résultat n'est cependant pas satisfaisant, car il serait naturel que l'estimation *a priori* varie selon *la quantité de directions caractéristiques*.

Considérons par exemple l'équation de Schrödinger  $\partial_t u + i\Delta u = f$  sur  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t$ , avec conditions au bord de Dirichlet homogène. Comme le Laplacien est elliptique, le problème n'est caractéristique dans aucune direction, on peut vérifier que la condition de Lopatinskiï uniforme est satisfaite. On sait (voir [44] par exemple) que si  $(f, f') \in L^2$ , pour une donnée initiale  $H^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1})$  la solution est continue en temps à valeur  $H_x^2$ , indépendamment de la régularité spatiale de  $f$ . On s'attend donc à avoir un contrôle de la solution par  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+; H_{\gamma}^{1/2}(\mathbb{R}_t))}$ .

Or l'estimation *a priori* donne seulement

$$\gamma \|u\|_{H_{\gamma,2}^1} + |u|_{H_{\gamma,2}^{3/2}} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,2}^1)}.$$

Il y a donc un défaut dans cette estimation : sa faiblesse réside dans le fait qu'elle s'applique aussi à certaines équations pour lesquelles le résultat n'est pas améliorable, comme on le décrit dans le paragraphe suivant.

On prouve ensuite sous certaines hypothèses supplémentaires (essentiellement similaires à l'ellipticité du laplacien dans l'équation de Schrödinger) que l'estimation de base peut être améliorée.

**Optimalité, amélioration.** L'estimation pour les solutions impose une certaine régularité sur le terme de forçage  $f$  relativement aux variables  $(x', t)$ . On se propose ici d'expliquer dans quelle mesure ceci est naturel dans le cas général, et comment certaines hypothèses sur le symbole permettent d'améliorer l'estimation.

Considérons d'abord le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u + i(\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2)u = f, & x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

L'opérateur associé  $\tau - i(\xi_1^2 - \xi_2^2)$  est strictement dispersif, 2-homogène. On va vérifier que l'inégalité

$$\|u\|_{L^2([0,1]; H^1(\mathbb{R}^d))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d; H^{1/2}([0,T]))}, \quad (5.9)$$

ne peut pas être satisfaite.

Après transformée de Fourier spatiale, la formule de Duhamel donne

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_0^t e^{i(\xi_1^2 - \xi_2^2)(t-s)} \widehat{f}(\xi, s) ds$$

Choisissons  $f$  indépendante du temps. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d; H^{1/2}([0,T]))} &= T \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \text{ et} \\ \widehat{u}(\xi, t) &= \frac{e^{i(\xi_1^2 - \xi_2^2)t} - 1}{i(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

On prend alors  $f = 1_Z$ , avec :

$$Z = \{(\xi_1, \xi_2); \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, |\xi_1 - \xi_2| \leq \frac{1}{6 + 6\xi_1^2}\},$$

( $Z$  est une « bande » suivant la direction caractéristique  $\xi_1 = \xi_2$  qui rétrécit lorsque  $|\xi|$  augmente.)

On a :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int 1_Z \leq \int_0^\infty \frac{2}{6 + 6\xi_1^2} < \infty,$$

et

$$\|f\|_{H^1}^2 = \int 1_Z (\xi_1^2 + \xi_2^2) \geq \int_1^\infty \frac{2|\xi_1|^2}{6 + 6\xi_1^2} = \infty.$$

Or, pour  $\xi \in Z$ ,  $|\xi_1^2 - \xi_2^2| \leq \frac{(3\xi_1 + 1)}{6 + 6\xi_1^2} \leq \frac{2}{3}$ , et comme  $(e^{ix} - 1)/x$  est non nul pour  $x \in [-2/3, 2/3]$ , on obtient :

$$|\widehat{u}(\xi, t)| = \left| \frac{e^{it(\xi_1^2 - \xi_2^2)} - 1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} 1_Z \right| \geq ct 1_Z, \quad (5.10)$$

dont on déduit directement  $u \notin L^2([0, 1]; H^1(\mathbb{R}^2))$ . On voit donc qu'un problème de Cauchy dispersif très simple, partant d'une donnée initiale nulle avec

un forçage  $L_x^2$  (et  $C^\infty$  en  $t$ !) admet une solution qui ne peut pas être dans  $L_t^2 H_x^1$ .

Voyons maintenant ce que donne l'approche par les symétriseurs pour le problème aux limites avec condition aux bord de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \partial_t u + i(\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2)u = f, x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \\ u|_{x_2=0} = 0. \end{cases}$$

En posant  $U = (\Lambda_{\gamma,2} u, \partial_{x_2} u)$  le problème ci-dessus se réécrit

$$\begin{cases} \partial_{x_2} U = \Lambda_{\gamma,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Lambda_{\gamma,2}^{-2}(-i\partial_t + \partial_{x_1}^2) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ if \end{pmatrix}, \\ U_1 = 0. \end{cases}$$

L'estimation *a priori* (5.8) implique :

$$\|(\Lambda_{\gamma,2} u, \partial_{x_2} u)\|_{L_\gamma^2}^2 \leq C \|\Lambda_{\gamma,2} f\|_{L_\gamma^2}.$$

Comme pour le problème de Cauchy, on a seulement un contrôle de  $\|u\|_{H_x^1}$  par  $\|f\|_{H_x^1}$  (en fait un peu mieux que ça, puisque la dérivée selon  $x_2$  de  $f$  n'est pas prise en compte dans  $\|\Lambda_{\gamma,2} f\|_{L^2}$ ). Dans la construction d'une solution pour le problème de Cauchy qui n'est pas dans  $H^1$ , on voit que le point clé est la nature non elliptique de l'opérateur  $\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ . A contrario, on a déjà dit qu'il devrait être possible de faire mieux pour l'équation de Schrödinger. On est ainsi amené à penser qu'une bonne condition est l'ellipticité de la partie spatiale du symbole. La proposition suivante quantifie cette idée.

**Proposition 5.1.6.** *On se place dans le cadre du problème (5.1). Soit  $P_m$  la partie ( $p$ -)principale du polynôme caractéristique du symbole de  $G$ . On suppose que la partie spatiale de  $P_m$  est elliptique, c'est-à-dire :*

$$\forall (\lambda, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, P_m(\lambda; 0, \eta) \neq 0.$$

Alors on peut remplacer l'estimation (ED) par :

$$\begin{aligned} & \gamma \|U\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)} + |U(0)|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_\gamma^{(p-1)/(2p)}(\mathbb{R}_t))} \\ & \lesssim \frac{1}{\gamma} \|\partial_x U - GU\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+; H_\gamma^{(p-1)/p}(\mathbb{R}_t))} + |FU(0)|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_\gamma^{(p-1)/(2p)}(\mathbb{R}_t))}. \end{aligned} \quad (\text{EDell})$$

*Démonstration.* En reprenant la preuve de (ED) p.82, on voit qu'il suffit de vérifier

$$\text{Re}(sg) \geq \frac{\gamma}{|\tau|^{1-1/p}}.$$

Si l'on reprend la construction de symétriseurs, on voit qu'aux points dits elliptique, c'est à dire les points  $(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)$  où  $g$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure :

$$\text{Re}(sg(\hat{\tau}, \hat{\eta}, \varepsilon)) \geq c, \quad (5.11)$$

avec  $c$  une constante indépendante de  $(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$ .

Considérons  $\chi_g(\lambda; \widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  le polynôme caractéristique de  $g(\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$ . L'hypothèse « d'ellipticité spatiale » signifie

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \chi_g(i\omega; 0, \widehat{\eta}, 0) \neq 0.$$

Ainsi par continuité des racines et compacité, il existe  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu$  positifs tels que si  $\lambda$  est racine de  $\chi_g(i\omega; \widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon)$  avec  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $|\widehat{\tau}| \leq \varepsilon_1$ , on a  $|\operatorname{Re}(\lambda)| \geq \mu$ . On en déduit :

$$\forall (\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0], |\widehat{\tau}| \leq \varepsilon_1, \chi_g(i\omega; \widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Re}(\lambda)| \geq \mu$$

et comme  $\operatorname{Re}(\lambda(\widehat{\tau}, \widehat{\eta})) \neq 0$  pour  $\widehat{\gamma} > 0$ , on en tire

$$\begin{aligned} \exists c > 0 : \forall (\widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) \in \mathbb{S}_p^+ \times [0, \varepsilon_0], \chi_g(i\omega; \widehat{\tau}, \widehat{\eta}, \varepsilon) = 0 \\ \Rightarrow |\operatorname{Re}(\lambda)| \geq \begin{cases} \mu & \text{si } |\widehat{\delta}| \leq c(|\widehat{\gamma}| + |\widehat{\eta}|^p) \\ \alpha \widehat{\gamma} = \frac{\alpha \gamma}{(|\tau| + |\eta|^p)^{1-1/p}} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mais lorsque  $|\widehat{\delta}| > c(|\widehat{\gamma}| + |\widehat{\eta}|^p)$ , on a

$$\frac{\gamma}{(|\tau| + |\eta|^p)^{1/p}} \geq c \frac{\gamma}{|\tau|^{1-1/p}},$$

ce qui permet de conclure que  $|\operatorname{Re}(\lambda)| \geq c' \frac{\gamma}{|\tau|^{1-1/p}}$  dans tous les cas.  $\square$

*Remarque 5.1.7.* • En dimension 1, l'ellipticité spatiale est automatique puisque l'on considère uniquement des problèmes non caractéristiques.

- On a seulement prouvé la nouvelle estimation pour des fonctions régulières, cependant il est facile (mais long!) de vérifier que la démonstration du théorème d'existence et d'unicité 5.1.5 p.103 s'applique également et fournit un résultat analogue avec  $(ED)$  remplacée par  $(EDell)$ . En effet, l'existence se déduit d'un problème dual construit indépendamment de la forme de l'estimation *a priori*, celle-ci servant uniquement à justifier l'utilisation du théorème de Hahn-Banach.

On énonce donc la version « symbole spatial elliptique » du théorème 5.1.5, et qui se démontre exactement de la même manière.

**Théorème 5.1.8.** *On se place sous les hypothèses du théorème 5.1.5, avec  $f \in L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{(p-1)/p}(\mathbb{R}_t))$ ,  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}_t))$ . Il existe une unique solution  $U \in L^2_\gamma$ , sa trace est dans  $L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}_t))$ , et  $U$  satisfait l'estimation*

$$\begin{aligned} \forall \gamma \geq \Gamma, \quad \gamma \|U\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)}^2 + |U(0)|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_\gamma^{(p-1)/(2p)}(\mathbb{R}_t))}^2 \\ \lesssim \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+; H_\gamma^{(p-1)/p}(\mathbb{R}_t))}^2 + |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_\gamma^{(p-1)/(2p)}(\mathbb{R}_t))}^2 \end{aligned}$$

### 5.1.4 Effet d'une perturbation

L'analyse menée au paragraphe 2.1 a montré que la condition de Petrowsky pour un problème dispersif scalaire est stable par perturbation d'ordre suffisamment faible, ce qui implique (moralement) la stabilité du problème de Cauchy pour ces petites perturbations. On se propose ici de quantifier cette idée pour le problème aux limites en étendant les résultats d'existence et d'unicité pour des opérateurs qui sont des perturbations d'opérateurs strictement dispersifs. À titre heuristique, on part du cas scalaire : soit  $L$  un opérateur strictement dispersif d'ordre  $mp$ ,  $F$  définissant les conditions aux limites et satisfaisant la condition (KLU),  $P$  une perturbation d'ordre  $p(m-1)$ . On suppose que les coefficients de  $P$  sont des fonctions régulières bornées ainsi que leurs dérivées. On a vu que l'équation  $(L+P)U=0$  pouvait se réécrire  $\partial_{x_d}U - GU=0$ , avec  $G$  un multiplicateur de Fourier tangentiel. Plus précisément, si

$$L = \sum_{k=0}^{mp} L_{mp-k} \partial_{x_d}^k, \quad L_{mp-k}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{d-1}}, \partial_t) \text{ d'ordre } mp-k,$$

$$P = \sum_{k=0}^{p(m-1)} P_{p(m-1)-k} \partial_{x_d}^k, \quad P_{p(m-1)-k} \text{ d'ordre } p(m-1)-k,$$

alors  $G = G_L + G_P$ , de symboles

$$g_L = \zeta_p \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ L_{mp} \zeta_p^{-mp} & L_{mp-1} \zeta_p^{-mp+1} & \dots & & L_1 \zeta_p^{-1} \end{pmatrix},$$

$$g_P = \zeta_p \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \\ P_{p(m-1)} \zeta_p^{-mp} & \dots & P_0 \zeta_p^{-p} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Remarque 5.1.9.* L'opérateur  $G_P$  n'est pas un multiplicateur de Fourier, mais un opérateur pseudo-différentiel, on renvoie au paragraphe 5.3.1 pour les règles de calcul pseudo-différentiel. Le fait que  $g_L$  est indépendant de  $(x, t)$  est crucial ici, on verra au paragraphe 5.3.2 que l'analyse lorsque  $g_L$  dépend de  $(x, t)$  est plus délicate.

En particulier,  $g_P(\tau, \eta) = O(\frac{1}{\zeta_p^{p-1}})$ . On voit directement l'intérêt de cette majoration lorsque l'on applique la méthode d'énergie comme pour (ED) p.82, avec  $S$  un symétriseur pour  $G_L$  :

$$\langle sgU, U \rangle \geq \alpha \frac{\gamma}{\zeta_p^{p-1}} |U|^2 - |S| |g_P| |U|^2 \geq \frac{\alpha\gamma - C}{\zeta_p^{p-1}} |U|^2.$$

Il suffit donc de choisir  $\gamma$  assez grand pour pouvoir absorber le terme de perturbation, et avoir l'inégalité (K1). L'inégalité (K2) est automatiquement vérifiée car elle est indépendante de  $G_P$ .

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de cet argument.

**Théorème 5.1.10.** *Soit un problème de la forme (5.1) satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme,  $G_P$  un opérateur pseudodifférentiel matriciel quasi homogène d'ordre  $1 - p$ . Le problème perturbé*

$$\begin{cases} \partial_x U = (G + G_P)U + f \\ FU = \varphi \end{cases}$$

admet une unique solution  $U \in L^2_\gamma$  (pour  $\gamma$  assez grand), et celle ci satisfait alors l'estimation (ED).

*Démonstration.* Soit  $S$  un symétriseur de Kreiss pour le système non perturbé. Quitte à augmenter  $\Gamma$ , la discussion précédant le théorème indique que (K1) et (K2) restent vraies. Donc  $S$  est un symétriseur pour le système perturbé. On obtient de la même manière l'existence d'un symétriseur pour le problème perturbé adjoint. Comme le résultat d'existence et d'unicité repose uniquement sur l'estimation a priori (ED) pour le problème aux limites et son problème dual, elle même conséquence de l'existence de symétriseurs, on en déduit que le théorème 5.1.5 reste vrai pour le problème perturbé.  $\square$

La nature bien posée de (5.1) est donc stable par perturbation d'ordre  $1 - p$ . Similairement, si le système (4.3) p.72 est d'ordre  $mp$ , une perturbation est acceptable si elle est de  $p$  degré inférieur ou égal à  $p(m - 1)$ .

*Remarque 5.1.11.* On aurait aussi pu introduire l'application  $T : v \rightarrow U$  solution de  $\partial_x U - GU = f + G_P v$ , définie sur des espaces ad hoc, et appliquer un théorème de point fixe pour  $\gamma$  assez grand.

De nombreux opérateurs classiques ne sont pas dispersifs pour notre définition (peut-être trop rigide), mais sont des perturbations d'opérateurs dispersifs. Par exemple

$$L = \partial_t^2 + \Delta^2 + \Delta, \text{ de symbole } \tau^2 + \eta^4 - \eta^2$$

n'est pas dispersif, cependant  $\tau^2 + \eta^4 - \eta^2 + 1$  l'est (et 1 est évidemment une perturbation acceptable).

Un autre exemple (donné dans [18] comme exemple de système ayant une régularisation de type Kato) est

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_4 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 ,$$

avec  $p_j$  des opérateurs différentiels à symbole réel tels que

$$\frac{(p_1(\eta) - p_2(\eta))^2}{4} + p_3 p_4(\eta) > 0 \text{ pour } |\eta| \geq M .$$



Alors

$$\det \begin{pmatrix} \delta + C + p_1 & p_3 \\ p_4 & \delta - C + p_2 \end{pmatrix} = \tau^2 + \tau(p_1 + p_2) + p_1 p_2 - C^2 - p_3 p_4$$

a pour discriminant  $(p_1 - p_2)^2 + p_3 p_4 + C^2 > 0$  en choisissant  $C$  assez grand. Pour un tel  $C$ , les racines en  $\delta$  sont réelles distinctes.

## 5.2 Problème mixte

### 5.2.1 Causalité, problème à donnée initiale nulle

On a obtenu une solution de (4.6) pour  $\gamma$  assez grand. L'indépendance par rapport à  $\gamma$  n'est cependant pas complètement immédiate et fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $\Gamma$  tel que pour  $\gamma \geq \Gamma$  le théorème 5.1.5 s'applique. Soient  $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in [\Gamma, \infty[$ , supposons que  $f, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma_i, p}^{p-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)) \times H_{\gamma_i, p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$ ,  $i = 1, 2$ . Alors si  $u_i$  est la solution correspondant à  $\gamma_i$ , alors on a  $u_1 = u_2$ .*

*Démonstration.* La preuve est une adaptation du cas hyperbolique, traité par exemple dans [17] VI.6.

Supposons par exemple  $\gamma_1 < \gamma_2$ . Soit  $v = u_1 - u_2$ ,  $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$  telle que  $\theta(t) = 1$ ,  $t \leq 0$  et  $\theta(t) = e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t}$ ,  $t \geq 1$ . Puisque  $u_2 \in e^{\gamma_2 t} L^2$  et  $|\theta| \leq 1$ , on a  $\theta u_2 \in e^{\gamma_1 t} L^2$ , et donc  $\theta v \in e^{\gamma_1 t} L^2$ .

La fonction  $\theta v$  satisfait alors :

$$\begin{aligned} \theta(\partial_x - G)v = 0 &\Rightarrow (\partial_x - G)\theta v + [\theta, -G] \frac{1}{\theta} \theta v = 0, \\ \theta Fv = 0 &\Rightarrow F\theta v + [\theta, F] \frac{1}{\theta} \theta v = 0. \end{aligned}$$

Mais d'après les règles de calcul pseudodifférentiel quasi-homogène (voir le paragraphe 5.3.1)  $[\theta, G]$  est un opérateur d'ordre  $1 - p$  de symbole principal  $\frac{\partial G}{\partial \tau} \theta'(t)$ , en particulier c'est une perturbation acceptable au sens du théorème 5.1.10.

De même,  $F + [\theta, F] \frac{1}{\theta}$  satisfait la condition uniforme de Kreiss Lopatinskiï, ainsi la partie unicité du théorème 5.1.5 implique  $v = 0$ , et comme  $\theta$  ne s'annule pas  $u_1 = u_2$ .  $\square$

On en tire un principe de causalité.

**Proposition 5.2.2.** *Supposons que les données  $f$  et  $g$  de (5.1) soient nulles pour  $t \leq 0$ . Alors pour  $\gamma$  assez grand la solution de (5.1) est nulle pour  $t \leq 0$ .*

*Démonstration.* Admettons provisoirement que  $f$  (resp.  $g$ ) est bornée dans  $H_{\gamma,p}^{p-1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$  (resp.  $H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$ ) pour  $\gamma \geq \Gamma$ . Cela implique que  $u$  est bornée dans  $L_\gamma^2$  d'après (ED) uniformément en  $\gamma$ . Mais

$$\forall \varepsilon > 0 : \|u\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times ]-\infty, -\varepsilon])}^2 \geq e^{(\gamma-\Gamma)\varepsilon} \|u\|_{L_\Gamma^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times ]-\infty, -\varepsilon])}^2,$$

d'où en faisant  $\gamma \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \|u\|_{L_\Gamma^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times ]-\infty, -\varepsilon])}^2 = 0$$

Pour prouver que  $f$  et  $g$  sont bornées, on prouve plus généralement : soient  $0 \leq s \leq p$ ,  $\varphi \in H_{\Gamma,p}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$  telle que  $\varphi = 0$  pour  $t \leq 0$ . Alors  $\forall \gamma \geq \Gamma$ ,  $\varphi \in H_{\gamma,p}^s$  et  $\|\varphi\|_{H_{\gamma,p}^s} \leq C\|\varphi\|_{H_{\Gamma,p}^s}$ . On commence par deux cas faciles.

\* Cas  $s = 0$  :  $|e^{-\gamma t}\varphi| \leq |e^{-\Gamma t}\varphi|$ , le résultat est donc immédiat.

\* Cas  $s = p$  :

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-\gamma t}\partial_t\varphi} &= (\gamma + i\delta)\widehat{e^{-\gamma t}\varphi}, \quad \widehat{e^{-\gamma t}\partial_{x_j}^p\varphi} = (i\eta_j)^p\widehat{e^{-\gamma t}\varphi} \\ \Rightarrow \|\varphi\|_{H_{\gamma,p}^p}^2 &\asymp \|e^{-\gamma t}\partial_t\varphi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^d \|e^{-\gamma t}\partial_{x_j}^p u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|e^{-\Gamma t}\partial_t\varphi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^d \|e^{-\Gamma t}\partial_{x_j}^p u\|_{L^2}^2 \asymp \|u\|_{H_{\Gamma,p}^p}^2. \end{aligned}$$

\* Le cas général  $0 < s < p$  pourrait s'en déduire par interpolation. On préfère ici utiliser un argument plus élémentaire, donnant une constante  $C$  dépendant polynomialement de  $\gamma$  (ce qui est suffisant pour le résultat de causalité  $u|_{t < 0} = 0$ ).

Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\chi \equiv 0$ ,  $t \leq -1$ ,  $\chi(t) = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$ . Notons encore  $\varphi$  un prolongement continu de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t$ ,  $\chi_\gamma = \chi(\gamma \cdot)$ . Il suffit de prouver

$$\int \widehat{\chi_\gamma\varphi}(\gamma^2 + \delta^2 + |\xi|^{2p})d\delta d\xi \leq C \int \widehat{\chi_\Gamma\varphi}(\Gamma^2 + \delta^2 + |\xi|^{2p})d\delta d\xi$$

Ecrivons :

$$\widehat{e^{-\gamma t}\varphi} = \mathcal{F}(e^{-(\gamma-\Gamma)t}e^{-\Gamma t}\varphi) = \mathcal{F}(\chi_{\gamma-\Gamma}\chi_\Gamma\varphi) := \frac{\widehat{\chi}(\frac{\delta}{\gamma-\Gamma})}{\gamma-\Gamma} * \widehat{\varphi}_\Gamma.$$

On obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz puis le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\chi}(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma - \Gamma})}{\gamma - \Gamma} \widehat{\varphi}_\Gamma(\delta_2) d\delta_2 \right)^2 (\gamma^2 + \delta_1^2 + |\xi|^{2p})^{s/p} d\delta_1 d\xi \\ &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\chi}(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma - \Gamma})|}{\gamma - \Gamma} d\delta_2 \right) \times \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\chi}(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma - \Gamma})|}{\gamma - \Gamma} |\widehat{\varphi}_\Gamma(\delta_2, \xi)|^2 d\delta_2 \right) \\ &\quad (\gamma^2 + \delta_1^2 + |\xi|^{2p})^{s/p} d\delta_1 d\xi \\ &= C \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\chi}(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma - \Gamma})|}{\gamma - \Gamma} (\gamma^2 + \delta_1^2 + |\xi|^{2p})^{s/p} d\delta_1 |\widehat{\varphi}_\Gamma(\delta_2, \xi)|^2 d\delta_2 d\xi \end{aligned}$$

puis avec le changement de variables  $\delta' = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma - \Gamma}$  :

$$\begin{aligned} &= C \iiint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} |\widehat{\chi}(\delta')| (\gamma^2 + ((\gamma - \Gamma)\delta' + \delta_2)^2 + |\xi|^{2p})^{s/p} d\delta' |\widehat{\varphi}_\Gamma(\delta_2, \xi)|^2 \\ &\hspace{20em} d\delta' d\delta_2 d\xi \\ &\leq C'(\gamma) \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} (\Gamma^2 + \delta_2^2 + |\xi|^{2p})^{s/p} |\widehat{\varphi}_\Gamma(\delta_2, \xi)|^2 d\delta' d\delta_2 d\xi, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C'(\gamma) &= C \sup_{\xi, \delta_2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi}(\delta')| \left( \frac{\gamma^2 + ((\gamma - \Gamma)\delta' + \delta_2)^2 + |\xi|^{2p}}{\Gamma^2 + \delta_2^2 + |\xi|^{2p}} \right)^{s/p} d\delta' \\ &\hspace{15em} \leq C' \left( 1 + \frac{\gamma}{\Gamma} \right)^s, \end{aligned}$$

car  $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et donc  $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi}(\delta')| (1 + |\delta'|^2) < \infty$ .  $\square$

On déduit de la proposition 5.2.2 l'existence et l'unicité pour le problème mixte à donnée initiale nulle.

On y utilise les espaces de Sobolev  $H^{s,r}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$  définis par la norme

$$|\theta|_{H_{\gamma,p}^{s,r}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)}^2 = \iint |\widehat{\theta}|^2(\tau, \eta) \left( (\gamma^2 + \delta^2)^{r/p} + |\eta|^{2s} \right) d\delta d\eta,$$

cette notation permettant d'isoler la régularité par rapport à la variable  $t$ . On note que  $H_{\gamma,p}^{s,s} = H_{\gamma,p}^s$ .

Pour tout espace  $X$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_t \times \Omega$ , on note  $X_0$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}_t^+ \times \Omega$  dont le prolongement par 0 pour  $t < 0$  est dans  $X$ , la norme dans  $X_0$  est définie comme la norme du prolongement.

**Théorème 5.2.3.** *On suppose que le problème mixte*

$$\begin{cases} Lu := \sum_{|\alpha_j| + pj \leq m} A_{\alpha_j} \partial_t^j \partial_x^{\alpha_j} u = f, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t, \\ B(D_x, \partial_t)u|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t, \\ u|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = \dots = \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (5.12)$$

*est strictement dispersif, satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, et que l'on a les conditions de compatibilité suivantes :*

1. *le prolongement de  $f$  par 0 sur  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t^-$  est dans  $L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{p-1})$ ,*
2. *le prolongement de  $\varphi$  par 0 sur  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^-$  est dans  $H_{\gamma,p}^{\frac{p-1}{2}}$ .*

*Alors il existe une unique solution dans  $H_{\gamma,p}^{mp-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t^+)$ , dont la trace en  $x_d = 0$  appartient à  $H_{\gamma,p}^{mp-1+\frac{p-1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t^+)$ , et on a de plus l'estimation*

$$\sqrt{\gamma} \|u\|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1}} + \sum_{j=0}^{mp-1} |\partial_{x_d}^j u|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1-j+(p-1)/2}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{0,\gamma,p}^{p-1})} + |\varphi|_{H_{0,\gamma,p}^{(p-1)/2}}. \quad (5.13)$$

(qui est la version mixte de (ED).)

Sous les hypothèses de la proposition 5.1.6, on a la version mixte de (EDell) :

$$\begin{aligned} & \gamma \|u\|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)} + \sum_{j=0}^{m-1} |\partial_{x_d}^j u(0)|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1-j, mp-1-j+(p-1)/2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)} \\ & \lesssim \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+; H_{0,\gamma}^{(p-1)/p}(\mathbb{R}_t))} + |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1}; H_{0,\gamma}^{(p-1)/(2p)}(\mathbb{R}_t))} . \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soient  $f^0, \varphi^0$  les prolongements de  $f$  et  $\varphi$  par 0 pour  $t < 0$ . On rappelle que le forçage correspondant à  $f$  en mettant le système sous la forme (5.1) est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f^0 \end{pmatrix} .$$

Le théorème 5.1.5 fournit une solution  $U$  du problème aux limites, et comme  $U = (\Lambda^{mp-1}u, \dots, \partial_{x_d}^{mp-1}u)$ , on a

$$\begin{aligned} \|U\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t)} &= \|u\|_{H_{\gamma,p}^{mp-1}}, \\ |U(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}} &= \sum_{j=0}^{mp-1} |\partial_{x_d}^j u(0)|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1+(p-1)/2-j}} . \end{aligned}$$

De plus, la proposition 5.2.2 implique que  $U = 0$  pour  $t \leq 0$ , on en conclut que (ED) fournit précisément l'inégalité attendue.

Pour l'unicité, on remarque que si  $\tilde{u}$  est une autre solution,  $\tilde{u}^0$  est dans  $H_{\gamma,p}^{mp-1}$ , et il suffit d'appliquer la partie unicité du théorème 5.1.5 pour le problème aux limites.

La démonstration de la version mixte de (EDell) est identique.  $\square$

**Corollaire 5.2.4.** *Le même résultat reste vrai sur pour des fonctions  $\varphi$  et  $f$  définies sur  $[0, T]$ , admettant un prolongement continu dans  $L^2(\mathbb{R}; H_{\gamma,p}^{p-1})$ , resp.  $H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}$  et nul pour  $t < 0$ .*

*Démonstration.* En prolongeant les fonctions  $\varphi$  et  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient l'existence d'une solution par application du théorème 5.2.3. L'unicité est conséquence du fait que si  $u$  et  $v$  sont deux solutions, la différence  $u - v$  vérifie  $L(u - v) = 0$  sur  $[0, T]$  et  $F(u - v) = 0$  sur  $[0, T]$ . On applique alors le principe de causalité (proposition 5.2.2) à  $u^0 - v^0$ , prolongements par 0 pour  $t < 0$ , pour obtenir  $u^0 = v^0$  sur  $] -\infty, T]$ , et donc  $u = v$  sur  $[0, T]$ .  $\square$

### 5.2.2 Données initiales non nulles

Comme pour les problèmes hyperboliques, le passage au problème mixte à condition initiale non nulle est délicat. On commence par décrire une obstruction notable à l'obtention d'une estimation *a priori* ponctuelle en temps. Dans le cas des systèmes hyperboliques, Rauch [58] obtient un contrôle de la norme au bord pour le problème mixte en adaptant une méthode due à Leray et Gårding. Son principe est assez simple : si  $L(D_t, D_x)u = 0$  est une EDP scalaire d'ordre  $m$ , avec  $L$  un opérateur strictement hyperbolique, les zéros en  $\tau$  du symbole  $\partial_\tau L(\tau, \xi)$  *séparent* (strictement) les zéros de  $L(\tau, \xi)$ . Cette remarque permet d'écrire

$$\operatorname{Re}(Lu \partial_\tau L u) = \partial_t Q(u, u) + \sum \partial_{x_j} Q_j(u, u) + Q_0(u),$$

avec  $Q$  une forme quadratique en les dérivées d'ordre  $m-1$  définie positive,  $Q_j$  quadratique d'ordre  $m-1$  et  $Q_0$  d'ordre inférieur à  $m-1$ . On déduit de cette décomposition une estimation d'énergie ponctuelle en temps. Par exemple, pour l'équation des ondes  $P(\partial_t, \partial_x)u = (\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0$ , l'inégalité d'énergie s'obtient en intégrant le produit de cette équation avec le multiplicateur de Leray-Gårding qui est ici

$$\frac{\partial P(\partial_t, \partial_x)}{\partial \tau} u := 2\partial_t u,$$

qui fournit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^T (\partial_t^2 u - \partial_x^2 u) 2\partial_t u &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^T \partial_t (|\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2) dt dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^T 2\partial_x u(0) \partial_t u(0) dt \\ \Rightarrow \|(\partial_t u, \partial_x u)|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &\leq \|(\partial_t u, \partial_x u)|_{x=0}\|_{L^2([-\infty, T])}^2 \end{aligned}$$

Cette estimation combinée à l'estimation *a priori* de Kreiss pour les problèmes aux limites hyperboliques fournit une estimation ponctuelle en temps, qui permet, en passant à nouveau par des arguments de dualité, de montrer que le problème mixte est bien posé.

Pour l'équation de Schrödinger, le multiplicateur naturel à utiliser est

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} (\partial_t + i\Delta) \right) u = u,$$

mais ce dernier fournit

$$\operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}^+} \int_{-\infty}^T (\partial_t + i\Delta) u \cdot \bar{u} \right) = \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2}^2 + \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^T i \partial_x u \bar{u} \right),$$

et le second terme est délicat à contrôler : en effet l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne seulement

$$\|u(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq |(u, \partial_x u)|_{x=0}|_{L^2([-\infty, T])} ,$$

le terme de bord ne pouvant plus être contrôlé grâce aux résultats sur le problème aux limites pur.

*Remarque 5.2.5.* On verra plus tard (proposition 6.3.4) dans un cas particulier de problème aux limites pour l'équation de Schrödinger que l'obtention d'une estimation ponctuelle en temps est possible en utilisant une inégalité de *dualité* au lieu de l'inégalité de Cauchy Schwarz. Il semble probable que cette méthode puisse se généraliser au cas général des problèmes strictement dispersifs, mais nous n'en avons pas de preuve.

Le cas des EDP dispersives scalaires en dimension 1 est plus riche en résultats. En particulier, le problème aux limites pour l'équation de Korteweg de Vries fait l'objet d'une littérature assez abondante (Fokas-Pelloni [25], Bona-Sun-Zhang [13][15][14]), Faminskii [23]), avec des généralisations notamment de Fokas [27][26] aux équations dispersives linéaires d'ordre quelconque, et Faminskii-Larkin [24] aux équations d'ordre impair avec la non linéarité  $u\partial_x u$  (comme dans KdV).

La stratégie de ces travaux consiste à exprimer explicitement la transformée de Laplace de la solution du problème aux limites à données initiale nulle, montrer que cette solution est dans les "bons" espaces, puis utiliser les estimations *a priori* (similaires aux résultats de Kenig-Ponce-Vega [38]) du problème de Cauchy pour obtenir, par linéarité, une solution du problème aux limites.

Le théorème suivant fournit l'existence d'une solution avec une estimation similaire à celles obtenues pour le problème aux limites pur.

**Théorème 5.2.6.** *On suppose que la dimension d'espace est 1, que l'opérateur différentiel matriciel  $L = \sum_{k_j+p_j \leq mp} A_{k_j} \partial_t^j \partial_x^{\alpha_j}$  est strictement dispersif et que  $B$  satisfait la condition KLU. Alors le problème mixte*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k_j+p_j \leq mp} A_{k_j} \partial_t^j \partial_x^{\alpha_j} D_x u = f \in L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^{p-1}), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \\ B(D_x, \partial_t)u|_{x=0} = \varphi \in H_\gamma^{\frac{p-1}{2p}}, \quad t \in [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^{(mp-1)}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = u_{m-1} \in H^{p-1}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right.$$

admet une unique solution dans  $H_{0,\gamma,p}^{mp-1}(\mathbb{R}^+ \times [0, T])$ , qui satisfait de plus l'estimation

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} \|u\|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1}} + \sum_{j=0}^{mp-1} |\partial_{x_d}^j u|_{H_{0,\gamma}^{(mp-1-j+(p-1)/2)/p}} &\lesssim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{0,\gamma,p}^{p-1})} \\ &+ |\varphi|_{H_{0,\gamma}^{(p-1)/(2p)}} + \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

*Remarque 5.2.7.* Notre preuve n'utilise pas la représentation explicite de la transformée de Laplace de la solution, elle n'est basée que sur les résultats pour le problème aux limites pur, et des estimations de trace pour le problème de Cauchy. Cette méthode permet de considérer des *systèmes* et de traiter aisément la présence d'un terme de forçage. Cependant elle a le défaut de ne pas fournir un contrôle ponctuel en temps, et il est également probable que la norme de contrôle sur le forçage n'est pas optimale.

**Lemme 5.2.8.** *Soient*

$$(u_0, \dots, u_{m-1}) \in \prod_0^{m-1} H^{mp-1-jp}(\mathbb{R}), \quad L = \sum_{j=0}^m \partial_t^j A_{m-j}(\partial_x),$$

où  $A_k$  est d'ordre  $kp$ , de polynôme caractéristique strictement dispersif, et tel que  $A_m(\partial_x) = \widetilde{A}_m \partial_x^m + R(\partial_x)$ , avec  $R$  d'ordre  $< mp$ ,  $\widetilde{A}_m$  inversible (c'est-à-dire que  $\{x=0\}$  est non caractéristique pour  $L$ ).

Alors le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu := \sum_{j=0}^m \partial_t^j A_{m-j}(\partial_x)u = f \in L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^{p-1}), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^{mp-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = u_{m-1} \in H^{p-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

a une solution dans  $H_p^{mp-1}(\mathbb{R} \times [0, T])$  qui satisfait les estimations :

$$\|u\|_{H_p^{mp-1}(\mathbb{R} \times [0, T])} \leq C(T) \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k\|_{H^{mp-1-pk}}, \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{j=0}^{mp-1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^j u(x, \cdot)|_{H^{(mp-1-j)/p+(p-1)/(2p)}([0, T])} \leq C(T) \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k\|_{H^{mp-1-pk}}. \quad (\text{E2})$$

*Démonstration.* Le lemme 3.2.2 p.60 s'adapte facilement au cas des systèmes et donne l'existence d'une solution

$$u \in C([0, T]; H^{mp-1}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{mp-1-p}) \cap \dots \cap C^{m-1}([0, T]; H^{p-1}),$$

telle que, en notant  $\tau_j(\xi) = i\sigma_j(\xi)$ ,  $1 \leq j \leq mn$  les racines du polynôme caractéristique de  $L$ , on a

$$\begin{aligned} \exists R > 0 : \forall |\xi| \geq R, \quad \widehat{u}(\xi, t) &= \sum e^{\tau_j t} \alpha_j(\xi), \\ \int |\alpha_j|^2 (1 + |\xi|^2)^{mp-1} d\xi &\leq C \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}}^2. \end{aligned}$$

En effet, on peut écrire l'EDO d'ordre 1 associée à l'EDP après transformation de Fourier spatiale

$$\partial_t \begin{pmatrix} \xi^{p(m-1)} \widehat{u} \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi^p & & \\ & 0 & \xi^p & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^p \\ -\frac{A_m(\xi)}{\xi^{p(m-1)}} & \dots & & -A_1(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{p(m-1)} \widehat{u} \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u \end{pmatrix} \\ := A(\xi) \begin{pmatrix} \xi^{p(m-1)} \widehat{u} \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u \end{pmatrix} .$$

La stricte dispersivité implique que  $A$  est diagonalisable pour  $|\xi|$  assez grand. De plus

$$\frac{1}{\xi^p} A(\xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ -\widetilde{A}_m & \dots & & -\widetilde{A}_1 \end{pmatrix}, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

où  $\widetilde{A}_j$  est la matrice coefficient de  $\xi^j$  dans  $A_j(\xi)$ . On en déduit qu'on peut choisir les matrices de passage bornées en  $\xi$ , et que les valeurs propres sont  $O(\xi^p)$ .

**Cas de (E1).** La solution  $u$  se décompose comme

$$\widehat{u} = (1_{|\xi| \leq R} + 1_{|\xi| > R}) \widehat{u} .$$

Le premier terme ne pose pas de problème car

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} 1_{|\xi| \leq R} |\partial_t^k \widehat{u}|^2 (1 + \xi^2)^{mp-1-kp} d\xi dt \leq T \|u\|_{C^k([0,T]; H^{mp-kp-1})} ,$$

$$\partial_t^m 1_{|\xi| \leq R} \widehat{u} = - \sum_0^{m-1} A_{m-k}(\xi) \partial_t^k 1_{|\xi| \leq R} \widehat{u} \\ \Rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}} 1_{|\xi| \leq R} |\partial_t^m \widehat{u}|^2 d\xi dt \lesssim T(1+R) \sum_{k=0}^{m-1} \|u\|_{C^k([0,T]; H^{mp-kp-1})} .$$

On traite maintenant  $\widehat{u} 1_{\xi > R}$ . Pour  $0 \leq k \leq \frac{mp-1}{p}$ , on a

$$1_{|\xi| > R} \partial_t^k \widehat{u} = \sum_j 1_{|\xi| \geq R} \partial_t^k e^{\tau_j t} \alpha_j(\xi) = \sum_j 1_{|\xi| \geq R} \tau_j^k e^{\tau_j t} \alpha_j(\xi) ,$$



dont on tire

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{|\xi| \geq R} |\partial_t^k \widehat{u}|^2 (1 + \xi^2)^{mp-1-kp} d\xi dt \\ & \lesssim \sum_j \int_0^T \int_{|\xi| \geq R} |\alpha_j|^2 (1 + \xi^2)^{mp-1} dx dt \\ & \leq T \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}}^2 . \end{aligned}$$

Enfin  $\partial_t^{m-1} \widehat{u}|_{|\xi| \geq R} \in L^2(\mathbb{R}; H^{(p-1)p}([0, T]))$  si

$$\sum_{j=1}^{mn} \int_{|\xi| \geq R} \iint_{[0, T]^2} |\tau_j|^{2(m-1)} |\alpha_j|^2 \frac{|e^{\tau_j t} - e^{\tau_j s}|^2}{|s - t|^{1+2(p-1)/p}} ds dt d\xi < \infty ,$$

on fait le changement de variable  $s' = \sigma_j s$ ,  $t' = \sigma_j t$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|\xi| \geq R} \iint_{[0, T]^2} |\tau_j|^{2(m-1)} |\alpha_j|^2 \frac{|e^{\tau_j t} - e^{\tau_j s}|^2}{|s - t|^{1+2\frac{p-1}{p}}} ds dt d\xi \right| \\ & = \left| \int_{|\xi| \geq R} \iint_{[0, \sigma_j T]^2} |\tau_j|^{2(m-1)-1+2\frac{p-1}{p}} |\alpha_j|^2 \frac{|e^{it'} - e^{is'}|^2}{|s' - t'|^{1+2\frac{p-1}{p}}} ds' dt' d\xi \right| \\ & \qquad \qquad \qquad =: I_j . \end{aligned}$$

On utilise alors

$$\begin{aligned} \left| \iint_{[0, \sigma_j T]^2} \frac{|e^{it'} - e^{is'}|^2}{|s' - t'|^{1+2\frac{p-1}{p}}} ds' dt' \right| & \leq \left| \int_0^{\sigma_j T} \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it'} - e^{is'}|^2}{|s' - t'|^{1+2\frac{p-1}{p}}} ds' dt' \right| \\ & \leq |\sigma_j T| \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{ir} - 1|}{r^{1+2\frac{p-1}{p}}} dr = C |\tau_j T| , \end{aligned}$$

on peut donc majorer  $I_j$  :

$$\begin{aligned} I_j & \leq CT \int_{|\xi| \geq R} |\tau_j|^{2(m-1)+2\frac{p-1}{p}} |\alpha_j|^2 d\xi \leq C'T \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2p(m-1)+2(p-1)} |\alpha_j|^2 d\xi \\ & = C'T \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2(mp-1)} |\alpha_j|^2 d\xi \\ & \lesssim \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}}^2 , \end{aligned}$$

ce qui fournit (E1).

**Cas de (E2).** On décompose  $\widehat{u} = (1_{|\xi| < R} + 1_{|\xi| \geq R})\widehat{u}$ . Comme précédemment, la composante basse fréquences  $1_{|\xi| < R}\widehat{u}$  est facile à contrôler, on n'écrira pas

les détails de cette majoration.

Pour le deuxième terme :

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha_j e^{\tau_j t} 1_{|\xi| \geq R}) = \int_R^\infty e^{ix\xi} \alpha_j e^{\tau_j t} d\xi + \int_{-\infty}^{-R} e^{ix\xi} \alpha_j e^{\tau_j t} d\xi$$

Comme en dimension 1 la non caractéristicité est identique à l'hypothèse d'ellipticité spatiale du lemme 3.2.4 p.62, quitte à augmenter  $R$  on peut appliquer ce dernier :

$$\forall |\xi| \geq R, \quad 1 \leq j \leq mn, \quad \left| \frac{d\sigma_j}{d\xi} \right| \geq c|\xi|^{p-1} .$$

En particulier,  $\sigma_j$  est inversible sur  $] -\infty, -R]$  et sur  $[R, +\infty[$ .

On montre que l'intégrale sur  $[R, \infty[$  (égale définit en fait une fonction appartenant à  $L^\infty(\mathbb{R}_x; H^{(mp-1)/p+(p-1)/2p}(\mathbb{R}_t))$  (la preuve pour l'intégrale sur  $] -\infty, R]$  est identique). Pour simplifier les notations on suppose que  $\sigma_j$  est strictement croissante sur  $[R, \infty[$  :

$$\forall \xi \geq R, \quad \frac{d\sigma_j}{d\xi} \geq c\xi^{p-1} .$$

On note  $\sigma_j^{-1} : [\sigma_j(R), +\infty[ \rightarrow [R, \infty[$  l'application réciproque, et on fait dans  $\int_R^\infty e^{ix\xi} \alpha_j e^{\tau_j t} d\xi$  le changement de variable  $\xi = \sigma_j^{-1}(\sigma)$  :

$$u_{j,R}(x, t) := \int_R^\infty e^{ix\xi} \alpha_j e^{\tau_j t} d\xi = \int_{\sigma_j(R)}^\infty e^{i\sigma t} \frac{e^{ix\sigma_j^{-1}(\sigma)} \alpha_j}{\sigma'_j \circ \sigma_j^{-1}(\sigma)} d\sigma ,$$

qui fait apparaître une transformée de Fourier inverse (tronquée) en temps. La fonction  $u_{j,r}$  appartient donc à  $L^\infty(\mathbb{R}_x; H^{(mp-1)/p+(p-1)/2p}(\mathbb{R}_t))$  si

$$\begin{aligned} I &:= \int_R^\infty \frac{|e^{ix\sigma_j^{-1}(\sigma)} \alpha_j|^2}{|\sigma'_j \circ \sigma_j^{-1}(\sigma)|^2} (1 + \sigma^2)^{(mp-1)/p+(p-1)/(2p)} d\sigma \\ &= \int_R^\infty \frac{|\alpha_j|^2}{|\sigma'_j \circ \sigma_j^{-1}(\sigma)|^2} (1 + \sigma^2)^{(mp-1)/p+(p-1)/(2p)} d\sigma < \infty . \end{aligned}$$

On fait dans  $I$  le changement de variable inverse  $\sigma = \sigma_j(\xi)$ , soit :

$$\begin{aligned} I &= \int_R^\infty \frac{|\alpha_j|^2}{|\sigma'_j(\xi)|^2} (1 + \sigma_j(\xi)^2)^{(mp-1)/p+(p-1)/2p} \sigma'_j(\xi) d\xi \\ &= \int_R^\infty \frac{|\alpha_j|^2}{|\sigma'_j(\xi)|} (1 + \sigma_j(\xi)^2)^{(mp-1)/p+(p-1)/(2p)} d\xi . \end{aligned}$$

On utilise alors les estimations  $\sigma_j = O(\xi)^p$  et  $\sigma'_j(\xi) \geq c\xi^{p-1}$  :

$$\begin{aligned}
I &\leq C \int_R^\infty \frac{|\alpha_j|^2}{\xi^{p-1}} (\xi^{2p})^{(mp-1)/p+(p-1)/(2p)} d\xi \\
&= C' \int_R^\infty |\alpha_j|^2 (|\xi|^2)^{mp-1+(p-1)/2-(p-1)/2} d\xi \\
&\leq C' \int_R^\infty |\alpha_j|^2 (1 + |\xi|^2)^{mp-1} d\xi \\
&\leq C'' \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}}^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve  $u \in L^\infty(\mathbb{R}; H^{(mp-1)/p+(p-1)/(2p)}([0, T]))$ . La démonstration de

$$\partial_x^k u \in L^\infty(\mathbb{R}; H^{(mp-1-k)/p+(p-1)/(2p)}([0, T])),$$

est similaire, il suffit d'utiliser

$$\partial_x^k u_{j,R} = \int_R^\infty (i\xi)^k e^{ix\xi} \alpha_j e^{\tau_j t} d\xi,$$

et d'appliquer la même méthode que précédemment. On omet les détails.  $\square$

*Démonstration.* du théorème 5.2.6 :

**Existence** On prolonge continûment les données initiales

$$(u_0, \dots, u_{m-1}) \text{ en fonctions } (\tilde{u}_0, \dots, \widetilde{u_{m-1}}) \in \prod_0^{m-1} H^{mp-1-jp}(\mathbb{R}).$$

D'après le lemme 5.2.8, le problème de Cauchy associé aux  $\tilde{u}_j$  admet une solution  $u_C$  satisfaisant les estimations (E1, E2). Comme  $B$  est de  $p$ -ordre  $mp-1$ , (E2) implique

$$\|F(u_C|_{x=0})\|_{H^{(p-1)/(2p)}([0, T])} \leq C \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}}.$$

D'après le théorème 5.2.3, le problème

$$\begin{cases} Lu = f, (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \\ F(D_x, \partial_t)u|_{x=0} = \varphi - F(\partial_x, \partial_t)u_C|_{x=0}, t \in [0, T], \\ u|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = \dots = \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = 0, x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} .$$

admet une unique solution  $u_B$ , pour laquelle (5.13) se lit

$$\begin{aligned}
\sqrt{\gamma} \|u_B\|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1}} &+ \sum_{j=0}^{mp-1} |\partial_{x_d}^j u_B|_{H_{0,\gamma,p}^{mp-1-j+(p-1)/2}} \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{0,\gamma,p}^{p-1})} + |\varphi - Fu_C|_{H_{0,\gamma,p}^{p-1+(p-1)/2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{0,\gamma,p}^{p-1})} + |\varphi|_{H_{0,\gamma,p}^{p-1+(p-1)/2}} \\
&+ C \sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{H^{mp-1-jp}} .
\end{aligned}$$

Par linéarité,  $u_B + u_C$  est solution du problème aux limites à données initiales non nulles, l'estimation sur la solution est conséquence directe de l'inégalité triangulaire et des estimations sur  $u_B$  et  $u_C$ .

**Unicité** Si  $v$  est une autre solution,  $u - v$  est solution du problème à données initiales et conditions aux limites et forçage nuls, et on applique le résultat d'unicité du théorème 5.2.3.  $\square$

Les résultats des articles cités précédemment [13, 26, 23] sont un peu différents/meilleurs. En particulier la forme explicite des solutions est utilisée pour obtenir la continuité en temps des solutions. Citons à cet égard le théorème général suivant qui concerne les équations d'ordre 1 en temps.

**Théorème 5.2.9.** (Fokas [26])

On considère le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + i \sum_{j=1}^n \alpha_j D_x^j u = 0, & (x, t) \in [0, \infty[ \times [0, T], \\ \partial_x^k u|_{x=0} = \varphi_k \in H^{\tilde{n}/n+(n-1)/(2n)}([0, T]), & 0 \leq k \leq \mu - 1, \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^{\tilde{n}}([0, \infty[). \end{cases} \quad (5.15)$$

avec  $\tilde{n}$  le plus petit entier plus grand que  $n/2$ ,  $D_x = \partial_x/i$ , et

$$\mu = \begin{cases} \mu = n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair et } \alpha_n > 0, \\ \mu = (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair et } \alpha_n < 0. \end{cases}$$

Si  $(u_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\mu-1})$  satisfait les conditions de compatibilité

$$\forall 0 \leq l \leq \mu - 1, \quad \varphi_l(0) = \partial_x^l u_0(0),$$

Alors il existe une unique solution  $u$  telle que

- $u \in C([0, T]; H^{\tilde{n}}(\mathbb{R}^+))$ ,
- pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $\partial_x^k u|_{x=0} \in H^{(\tilde{n}-k)/n+(n-1)/(2n)}([0, T])$ ,

avec dépendance continue en  $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq \mu}$ ,  $u_0$ .

*Remarque 5.2.10.* On vérifie facilement que le nombre de conditions aux limites coïncide avec celui donné par la condition de Kreiss-Lopatinskiï. Les indices de régularité au bord sont les mêmes que ceux obtenus par la méthode des symétriseurs, mais les estimations sont ponctuelles en temps. Une limitation (uniquement technique) de ces résultats est qu'ils ne concernent que les conditions aux limites de Dirichlet.

Comme pour notre résultat (th 5.2.6), la stratégie de la démonstration consiste à utiliser la linéarité pour calculer une solution du problème de Cauchy, puis une solution du problème aux limites à données initiales nulles. L'analyse du problème de Cauchy est identique, mais le calcul explicite par transformée de Laplace de la solution formelle du problème aux limites fournit la continuité en temps.

Afin de décrire plus précisément cette méthode en limitant la technicité, on considère l'équation d'Airy

$$(\partial_t + \partial_x^3)u = 0, \quad (\text{A})$$

qui devient après transformation de Laplace

$$(\tau + \partial_x^3)\hat{u} = 0, \quad \text{Re}(\tau) > 0.$$

On note  $\lambda_-(\tau)$  l'unique solution de partie réelle négative de  $\tau + \lambda^3 = 0$ , d'où si  $\text{Re}(\tau) = \gamma > 0$  et  $u(0, t) = \varphi$ ,

$$\hat{u} = e^{\lambda_-(\tau)x}\hat{\varphi} \Rightarrow u(x, t) = \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{\tau t} e^{\lambda_-(\tau)x} \hat{\varphi}(\gamma + i\delta) d\tau.$$

L'application du théorème de Cauchy permet de déformer le contour d'intégration jusqu'à  $\gamma = 0$ , soit

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta t} e^{(-i\delta)^{1/3}x} \hat{\varphi}(i\delta) d\delta.$$

avec

$$(-i\delta)^{1/3} = \begin{cases} e^{5i\pi/6} |\delta|^{1/3} & \text{si } \delta < 0, \\ e^{7i\pi/6} |\delta|^{1/3} & \text{si } \delta > 0. \end{cases}$$

Les intégrales sont alors contrôlées notamment grâce à deux lemmes élémentaires (prouvés dans [13], où ils sont présentés comme un « succédané pour le problème au limite du théorème de Plancherel pour le problème de Cauchy »).

**Lemme 5.2.11.** Soit  $f \in L^2([a, \infty[)$ , on définit

$$Kf(x) := \int_a^{\infty} e^{\lambda(\delta)x} f(\delta) d\delta,$$

où  $\lambda$  est continu à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et satisfait les hypothèses

- $Re(\lambda(\delta)) < 0$  pour  $\delta > a$ ,
- $\exists \varepsilon, c > 0$  tels que

$$\sup_{a < \mu < a + \delta} \frac{|Re(\lambda)(\delta)|}{\delta - a} \geq c .$$

- il existe un complexe  $\alpha + i\beta$ ,  $\alpha < 0$  tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\delta)}{\delta} = \alpha + i\beta .$$

Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $f$  telle que

$$\|Kf\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C \|f\|_{L^2([a, \infty[)} .$$

Le deuxième est une inégalité de type Van der Corput.

**Lemme 5.2.12.** Soit  $a > 0$ ,  $f \in L^2([0, a])$ , on définit l'application  $Gf$  par

$$Gf(x) = \int_0^a e^{i\xi(\delta)x} f(\delta) d\delta ,$$

où  $\xi$  est continue à valeurs réelles,  $C^1(]0, a[$ , et satisfait

- $\xi' \neq 0$  sur  $]0, a[$ ,
- il existe  $C > 0$  tel que

$$\sup_{]0, a[} \frac{1}{|\xi'|} \leq C$$

Alors il existe une constante  $C' > 0$  indépendante de  $f$  telle que

$$\|Gf\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C' \|f\|_{L^2([0, a])} .$$

Par exemple, on déduit facilement du lemme 5.2.11 l'estimation ponctuelle en temps dans les espaces « optimaux » :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}^+))}^2 &\leq \sup_t \left\| \int_{-\infty}^0 e^{i\sigma^3 t} e^{e^{5i\pi/6}|\sigma|x} \widehat{\varphi} 3\sigma^2 d\sigma \right\|_{L_x^2}^2 \\ &+ \sup_t \left\| \int_0^\infty e^{i\sigma^3 t} e^{e^{7i\pi/6}|\sigma|x} \widehat{\varphi} 3\sigma^2 d\sigma \right\|_{L_x^2}^2 \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}|^2 \sigma^2 d\sigma \\ &\leq C' \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}|^2 |\delta|^{4/3} \frac{d\delta}{|\delta|^{2/3}} \\ &\leq C' \|\varphi\|_{H^{1/3}} . \end{aligned}$$

Ici les calculs sont assez simples car la racine de partie réelle négative est explicite et le changement de variable  $\sigma^3 = \delta$  est immédiat. Dans le cas général étudié par Fokas [26], en l'absence d'un changement de variable réel évident il faut recourir à des intégrales dans le plan complexe, mais les idées et outils restent essentiellement les mêmes.

## 5.3 Problème à coefficients variables

### 5.3.1 Calcul pseudo-différentiel quasi-homogène

Dans [43], R. Lascar définit les algèbres de symboles adaptées à un calcul pseudo-différentiel quasi-homogène, il établit l'existence d'un calcul symbolique, et la continuité des opérateurs dans les espaces de Sobolev quasi-homogènes. J. Szeftel utilise une version tangentielle de ces opérateurs pour étudier le problème aux limites pour l'équation de Schrödinger.

On résume ici l'essentiel des résultats à utiliser.

Rappelons notre notation

$$\zeta_p(\tau, \eta) = (\gamma^2 + \delta^2 + \delta^{2p})^{\frac{1}{2p}}, \quad \tau = \gamma + i\delta .$$

**Definition 5.3.1.** On note  $S_p^m(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$  l'ensemble des applications  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$  telles que pour tout  $(\alpha, \beta, j, k) \in \mathbb{N}^{d-1} \times \mathbb{N}^{d-1} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , il existe  $C(\alpha, \beta, j, k)$ ,

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^j \partial_\eta^\beta \partial_\delta^k a(x, t, \eta, \gamma + i\delta)| \leq C(\alpha, \beta, j, k) \zeta_p^{m-\beta-kp}.$$

L'algèbre d'opérateurs  $\text{Op}S_p^m$  est associée à  $S_p^m$  de la façon suivante. Pour  $a \in S_p^m$  l'opérateur associé  $A$  est défini par

$$Au(x', t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{\mathbb{R}^d} e^{ix' \cdot \eta + i\delta t} a(x', t, \tau, \eta) \widehat{u}(\eta, \delta) d\eta d\delta .$$

On dit que  $a =: \sigma(A)$  est le symbole de  $A$ .

La classe de  $a$  modulo  $S_p^{m-1}$  est appelée *symbole principal* de  $A$ .

*Remarque 5.3.2.* Par abus, on désigne une fonction de  $S_p^m$  comme « le » symbole principal lorsque c'est un choix possible (on privilégie lorsque c'est possible le choix où  $a$  une fonction quasi-homogène de  $(\tau, \eta)$ ).

**Proposition 5.3.3.** Les éléments de  $\text{Op}S_p^0$  envoient continûment  $L^2$  dans  $L^2$ . Pour  $m > 0$ , les éléments de  $\text{Op}S_p^m$  sont continus de  $H_p^r(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)$  dans  $H_p^{r-m}$ .

**Definition 5.3.4.** On dit qu'un opérateur  $A \in \text{Op}S_p^m$  est asymptotique à une série d'opérateurs  $\sum_k A_k$ ,  $A_k \in S_p^{m-k}$  lorsque  $A - \sum_0^n A_k \in \text{Op}S_p^{m-n-1}$ . On note alors  $A \sim \sum A_k$ , et on écrit de même pour les symboles  $a \sim \sum a_k$ .

Comme pour les opérateurs pseudo-différentiels usuels, il existe un calcul symbolique.

**Proposition 5.3.5.** Soit  $A \in \text{Op}S_p^m$ , son adjoint  $A^*$  est dans  $\text{Op}S_p^m$  et

$$a^* \sim \sum_{\alpha, j} \frac{1}{\alpha! j!} \partial_\xi^\alpha \partial_\delta^j D_x^\alpha D_t^j \bar{a}.$$

En particulier,  $\bar{a}$  est le symbole principal de  $A$ .

Soient  $A, B \in OpS_p^m \times OpS_p^n$ , l'opérateur  $A \circ B$  est dans  $OpS_p^m$ , on note  $a\#b$  son symbole, et

$$a\#b \sim \sum_{\alpha, j} \frac{1}{\alpha!j!} \partial_\xi^\alpha \partial_\delta^j a D_x^\alpha D_t^j b.$$

En particulier,  $ab$  est le symbole principal de  $A \circ B$ .

Enfin, on aura besoin de l'inégalité de Gårding, dans ses versions usuelle et précisée (« sharp ») quasi-homogène.

**Proposition 5.3.6.** On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $L^2$ . Soit  $A \in S_p^m$ , dont le symbole vérifie  $Re(a) \geq \zeta_p^m$ . Alors

$$\exists \alpha, C > 0 : \forall u \in H_p^{m/2}, Re(\langle au, u \rangle) \geq \alpha \|u\|_{H^{m/2}}^2 - C \|u\|_{H_p^{m/2-1}}^2 .$$

Soit  $A \in S_p^m$ , dont le symbole vérifie  $Re(a) \geq 0$ . Alors

$$\exists C > 0 : \forall u \in H_p^{m/2}, Re(\langle au, u \rangle) \geq -C \|u\|_{H_p^{(m-1)/2}}^2 .$$

### 5.3.2 Analyse des problèmes à coefficients variables

La proposition 3.1.10 établit que pour un opérateur strictement dispersif

$$\sum a_{\alpha, j}(x, t) \partial_x^\alpha \partial_t^j, \text{ d'ordre } mp,$$

la condition de Petrowsky est stable par perturbation d'ordre  $\leq p(m-1)$ . Cela laisse à penser que les commutateurs apparaissant dans l'analyse à coefficients variables ne pourront être négligés que s'ils font apparaître des termes d'ordre au plus  $p(m-1)$ , ce qui sera le cas si

$$a_{\alpha, j} \text{ est constant pour } |\alpha| + pj \geq p(m-1) + 2 . \quad (5.16)$$

On montre ici que cette condition est suffisante pour mener l'analyse du problème à coefficients variables.

*Exemples 5.3.7.* On reprend les exemples 4.1.2 indiqués pour l'analyse à coefficients constants. L'équation de Schrödinger perturbée

$$\partial_t u + (a \cdot \nabla) u + i\Delta u = f$$

(qui est une version multi- $d$  du système (5.17) considéré au paragraphe précédent), l'équation de KdV linéarisée

$$\partial_t u + \underline{u} \partial_x u + \partial_x^3 u = 0,$$

ou les systèmes de type Boussinesq linéarisés

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha_1 \partial_x^3 v + \alpha_2 \partial_x^5 v = 0 \\ \partial_t v + \beta_1 \partial_x^3 u + \beta_2 \partial_x^5 u = 0 \end{cases}, \alpha_2 \beta_2 > 0, \alpha_1 \alpha_2 \leq 0, \beta_1 \beta_2 \leq 0,$$

vérifient ces hypothèses.



La procédure suivie pour obtenir des symétriseurs de Kreiss à coefficients constants donne, dans le cas des coefficients variables, des fonctions  $s(x, t, \tau, \eta)$  aussi régulières en  $(x, t)$  que les  $a_{\alpha, j}$ , que l'on suppose donc  $C^\infty$  bornés ainsi que leurs dérivées de tout ordre. On décrit dans le paragraphe suivant comment l'étude se mène dans le cas du système d'Euler-Korteweg linéarisé en dimension 1 avant de passer au cas général.

**Cas du système d'Euler-Korteweg** On considère le problème avec condition aux limites de Dirichlet provenant du système d'Euler-Korteweg linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t u + \underline{u} \partial_x u - \underline{a} \partial_x^2 v = -g'v, & t \in \mathbb{R}, x \geq 0 \\ \partial_t v + \underline{u} \partial_x v + \underline{a} \partial_x^2 u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \geq 0 \\ u(0, t) = g_1 \in H^{3/4}, \\ v(0, t) = g_2 \in H^{1/4}, \end{cases} \quad (5.17)$$

avec  $\underline{u}$  et  $\underline{g}'$  « régulières » et  $\underline{a}$  constante (ce qui revient à supposer  $K = \frac{\varepsilon}{\rho}$ ). Le système (5.17) se réécrit (en posant  $\underline{a} = 1$  pour simplifier)

$$\partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \\ \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \\ -\partial_t v - \underline{u} \partial_x v \\ \partial_t u + \underline{g}'v + \underline{u} \partial_x v \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Étant donné un opérateur pseudodifférentiel à paramètre  $A(x, t, \partial_t + \gamma)$  de symbole  $a(x, t, i\delta + \gamma)$ , on définit  $A_\gamma = e^{\gamma t} A e^{-\gamma t}$ . Les remarques du paragraphe 4.1.1 s'appliquent encore. On rappelle que  $\Lambda$  est l'opérateur de symbole  $\sqrt{|\tau|}$  et on réécrit le système (5.18) pour faire apparaître une « quasi-homogénéité » :

$$\begin{aligned} \partial_x \begin{pmatrix} \Lambda_\gamma u \\ \Lambda_\gamma v \\ \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda_\gamma \partial_x u \\ \Lambda_\gamma \partial_x v \\ -\partial_t \Lambda_\gamma^{-1} \Lambda_\gamma v - \underline{u} \partial_x v \\ \partial_t \Lambda_\gamma^{-1} \Lambda_\gamma u + \underline{g}' \Lambda_\gamma^{-1} \Lambda_\gamma v + \underline{u} \partial_x v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_\gamma \\ 0 & -(\partial_t + \gamma)_\gamma \Lambda_\gamma^{-1} & 0 & -\underline{u} \\ (\partial_t + \gamma)_\gamma \Lambda_\gamma^{-1} & \underline{g}' \Lambda_\gamma^{-1} & \underline{u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_\gamma u \\ \Lambda_\gamma v \\ \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'équation pseudodifférentielle pour  $U = \begin{pmatrix} \Lambda_\gamma u \\ \Lambda_\gamma v \\ \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix}$

$$\partial_x U = G_\gamma U, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{|\tau|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{|\tau|} \\ 0 & -\tau/\sqrt{|\tau|} & 0 & -\underline{u} \\ \tau/\sqrt{|\tau|} & \underline{g}'/\sqrt{|\tau|} & \underline{u} & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{|\tau|} h.$$

On pose  $\widehat{\tau} = \tau/|\tau|$ ,  $\varepsilon = 1/\sqrt{|\tau|}$ , et on écrit le symbole de  $G$ ,  $g(x, t, \tau) = \widehat{g}(x, t, \widehat{\tau}, \varepsilon)$ , comme somme d'un symbole homogène  $g_{1/2}$  d'ordre  $1/2$  indépendant de  $(x, t)$  et d'un symbole  $g_0$  d'ordre  $0$ .

Par construction, le symbole  $s(x, t, \widehat{\tau}, \varepsilon)$  du symétriseur obtenu formellement en « gelant »  $(x, t)$  est une application régulière, on a donc

$$s(x, t, \widehat{\tau}, \varepsilon) = s(x, t, \widehat{\tau}, 0) + \int_0^\varepsilon \partial_4 s(x, t, \widehat{\tau}, \nu) d\nu,$$

et comme  $g_{1/2}$  ne dépend pas de  $(x, t)$ , il en est de même de  $s(x, t, \widehat{\tau}, 0)$ . Par suite, le symbole de  $S$  est la somme d'un symbole  $s_0 = s(\widehat{\tau}, 0)$  homogène d'ordre  $0$ , indépendant de  $(x, t)$  et d'un symbole  $s_{-1/2} = \int_0^\varepsilon \partial_4 s(x, t, \widehat{\tau}, \nu) d\nu$  d'ordre  $-1/2$ .

On vérifie alors que l'opérateur

$$R_\gamma = \frac{1}{2}(S_\gamma + S_\gamma^*)$$

définit un symétriseur fonctionnel. Puisque le symbole  $s$  est autoadjoint,  $r = s_0 + s_{-1/2} + q$ , où  $q$  est d'ordre  $-3/2$ . On remarque que  $Q \circ G$  est d'ordre  $-1$ , ainsi

$$\langle |\Lambda Q \circ GU, U \rangle | \leq C \|U\|_{H_p^{-1/4}} \leq C \|U\|_{L^2},$$

comme l'estimation d'énergie (ED) fait intervenir  $\gamma \|U\|_{L^2}$ , on voit que  $q$  peut y être absorbé et c'est pourquoi on ne l'écrit pas dans la suite.

Si on applique la méthode standard d'énergie, en notant  $\cdot$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{C}^4$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $L^2(\{x \geq 0\})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x U = G_\gamma U &\Rightarrow R_\gamma \partial_x \Lambda_\gamma^{1/2} U = R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} G U \\ &\Rightarrow \langle R_\gamma \partial_x \Lambda_\gamma^{1/2} U, \Lambda_\gamma^{1/2} U \rangle = \langle R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} G U, \Lambda_\gamma^{1/2} U \rangle \\ &\Rightarrow -R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} U(0) \cdot \Lambda_\gamma^{1/2} U(0) = \operatorname{Re} \left( \langle \Lambda_\gamma^{1/2} R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} G U, U \rangle \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\Lambda_\gamma$  est d'ordre  $1/2$ , et la décomposition de  $S$  et  $G$ , on obtient

$$\sigma(\Lambda_\gamma^{1/2} R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} G) = \Lambda S G + q', \quad \deg(q') = -1/2. \quad (5.19)$$

Le symbole  $\sqrt{|\tau|} s g$  est d'ordre  $1$ , le symbole  $r$  est d'ordre  $0$ . Par construction,  $\sqrt{|\tau|} s g \geq \alpha \gamma$ ,  $s \geq I - C b^* b$ . L'inégalité de Gårding fournit pour  $\gamma$  assez grand

$$\begin{aligned} -R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} U(0) \cdot \Lambda_\gamma^{1/2} U(0) &\leq -\frac{1}{2} |\Lambda_\gamma^{1/2} U(0)|^2 + C |F \Lambda_\gamma^{1/2} U(0)|^2 \\ &\leq -\frac{1}{4} |\Lambda_\gamma^{1/2} U(0)|^2 + 2C |\Lambda_\gamma^{1/2} F U(0)|^2. \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que le commutateur  $[F, \Lambda^{1/2}]$  était d'ordre  $-1/2$ , et donc en particulier

$$|[F, \Lambda^{1/2}] U(0) \cdot \Lambda^{1/2} U(0)| \leq C |U(0)|_{L^2} \leq |\Lambda^{1/2} U(0)| / \gamma^{1/p}.)$$

L'inégalité de Gårding précisée donne

$$\operatorname{Re} \left( \langle \Lambda_\gamma^{1/2} R_\gamma \Lambda_\gamma^{1/2} G U, U \rangle \right) \geq \alpha \gamma \|U\|^2 .$$

En utilisant ces deux inégalités on obtient

$$\frac{1}{4} |\Lambda_\gamma^{1/2} U(0, \cdot)|_{L_\gamma^2(\mathbb{R})} + \alpha \gamma \|U\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq 2C |\Lambda_\gamma^{1/2} F U|_{L_\gamma^2(\mathbb{R})} .$$

Le même raisonnement avec un forçage  $f = (f_1, f_2)$  donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |\Lambda_\gamma^{1/2} U(0, \cdot)|_{L_\gamma^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\alpha \gamma}{2} \|U\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}^2 &\leq 2C |\Lambda_\gamma^{1/2} F U|_{L_\gamma^2(\mathbb{R})}^2 \\ &+ \frac{2}{\alpha \gamma} \|\Lambda_\gamma f\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit en revenant aux variables initiales

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \left( |(u, v)(0, \cdot)|_{H_\gamma^{3/4}(\mathbb{R})}^2 + |\partial_x(u, v)(0, \cdot)|_{H_\gamma^{3/4}(\mathbb{R})}^2 \right) \\ &+ \alpha \gamma \left( \|(u, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^{1/2}(\mathbb{R}))}^2 + \|\partial_x(u, v)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}^2 \right) \\ &\leq C \left( |(g_1, g_2)|_{H_\gamma^{3/4}(\mathbb{R})}^2 + \frac{2}{\alpha \gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^{1/2}(\mathbb{R}))}^2 \right) . \end{aligned} \quad (5.20)$$

**Cas général** Soit un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\sum_{j=0}^m \partial_t^j A_{p(m-j)}(x, t, D_x) u = \sum_{|\alpha_j| + pj \leq m} A_{\alpha_j}(x, t) \partial_t^j D_x^{\alpha_j} u = f , \quad (5.21)$$

où  $A_{p(m-j)}(x, t, D_x)$  est un opérateur différentiel matriciel d'ordre  $p(m-j)$ . On suppose que  $A_0 = 1$ , que l'hypothèses (5.16)

$$pj + |\alpha_j| \geq p(m-1) + 2 \Rightarrow a_{\alpha_j} \text{ est constant}, \quad (5.22)$$

est satisfaite, et que le déterminant du symbole  $\det(\sum \tau^j a_{p(m-j)}(x, t, \eta))$  fixés est un polynôme en  $(\tau, \eta)$  strictement dispersif à  $(x, t)$  fixés.

On a vu que le système (5.21) pouvait se réécrire sous la forme

$$\partial_x U = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_\gamma I_n & 0 & & \\ & 0 & \Lambda_\gamma I_n & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda_\gamma I_n \\ a'_{mp, \gamma} \circ \Lambda_\gamma^{1-mp} & a'_{mp-1, \gamma} \circ \Lambda_\gamma^{2-mp} & \dots & & a'_{1, \gamma} \end{pmatrix} U = G_\gamma U \quad (5.23)$$

La matrice ci-dessus est de taille  $mpn$ , les blocs sont de taille  $n$ . Puisque  $\Lambda_\gamma$  est un multiplicateur de Fourier, le symbole de l'opérateur  $G_\gamma$  est simplement

$$\begin{pmatrix} 0 & \zeta_p I_n & 0 & & \\ & 0 & \zeta_p I_n & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta_p I_n \\ a'_{mp}(x, t, \tau, \eta) \zeta_p^{1-mp} & a'_{mp-1}(x, t, \tau, \eta) \zeta_p^{2-mp} & \dots & & a'_1(x, t, \tau, \eta) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a  $G = G_1 + G_{-p+2}$ , avec  $G_1$  d'ordre 1 indépendant de  $(x, t)$ , et  $G_{-p+2}$  d'ordre  $-p+2$ . En effet, tout terme dans  $a'_{mp-j,k,i}$  à coefficients variables est d'après l'hypothèse (5.16) de degré au plus  $p(m-1)+1-j$ , donc le degré de la « partie variable » de  $a'_{mp-j,i,k} \Lambda^{j+1-mp}$  est  $p(m-1)+1-j+j+1-mp = -p+2$ .

**Definition 5.3.8.** On appelle *symétriseur fonctionnel* pour le problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_x U - G_\gamma U = f, & (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t, \\ Fu|_{x_d=0} = \varphi, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t, \end{cases}$$

un opérateur pseudodifférentiel  $S$  d'ordre 0 tel que pour  $\gamma \geq \Gamma$  assez grand

$$\begin{cases} \langle \Lambda^{(p-1)/2} S \Lambda^{(p-1)/2} G U, U \rangle \geq \alpha \gamma \|U\|_{L_\gamma^2}^2, \\ \Lambda^{(p-1)/2} S \Lambda^{(p-1)/2} U(0) \cdot U(0) \geq c |\Lambda^{(p-1)/2} U(0)|^2 - C |\Lambda^{(p-1)/2} F U(0)|^2. \end{cases}$$

**Proposition 5.3.9.** Soit  $S$  le symétriseur (d'ordre 0) obtenu algébriquement. Alors (quitte à augmenter  $\gamma$ )  $\partial_x S$  et  $\partial_t S$  sont d'ordre  $1-p$ .

*Démonstration.* Elle repose sur la construction effective de  $S$ , dont on extrait quelques faits importants.

La construction locale de  $S$  se fait en utilisant un « bon » changement de base qui change  $G$  en  $T^{-1}GT = \tilde{G}$ ,  $T$  étant défini localement sur un certain ouvert  $\mathcal{V}$ . Le symétriseur  $\tilde{S}$  construit pour  $\tilde{G}$  est en fait une matrice constante sur  $\mathcal{V}$ . Pour  $\gamma$  assez grand,  $T$  est défini sur un voisinage de  $(\tau, \eta)$  globalement en  $(x, t)$ . La matrice  $T$  s'obtient de manière explicite par des intégrales de Dunford ((4.8) p.75) et est d'ordre 0. Comme  $G$  est d'ordre 1,  $S$  d'ordre 0, et  $\partial_x G$ ,  $\partial_t G$  sont d'ordre  $2-p$ , les dérivées en  $(x, t)$  de  $S$  sont donc d'ordre  $1-p$ . On en tire que

$$S = \sum (T_j(x, t)^{-1})^* \varphi_j \tilde{S}_j T_j(x, t)^{-1},$$

où les  $\varphi$  ne dépendent que de  $\xi', \tau$ , et donc les dérivées en  $x, t$  de  $S$  sont d'ordre  $1-p$ .  $\square$

**Théorème 5.3.10.** Soit  $S$  l'opérateur pseudo-différentiel associé au symétriseur (algébrique). Alors  $R = \frac{1}{2}(S + S^*)$  est un symétriseur fonctionnel pour  $\gamma \geq \Gamma$  assez grand, dont l'existence implique l'estimation a priori pour le problème aux limites

$$\begin{aligned} \gamma \|U\|_{L_\gamma^2}^2 + |U(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}}^2 &\lesssim \frac{1}{\gamma} \|\partial_x U - GU\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{p-1})}^2 \\ &+ |FU(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}}^2. \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après les règles de calcul pseudodifférentiel,

$$\sigma(A^*) = \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi'}^\alpha D_x^\alpha \overline{\sigma(A)},$$

donc  $\sigma(R) = S + \text{ordre} \leq -p$ , dans toute la suite on négligera ce reste car il peut être absorbé comme dans la section précédente.

Comme pour le système d'Euler-Korteweg, on écrit

$$\begin{aligned} \partial_x U &= G_\gamma U \\ \Rightarrow \langle R_\gamma \partial_x \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U, \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U \rangle &= \langle \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} R_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma U, U \rangle \\ \Rightarrow -R_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0) \cdot \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0) &= \text{Re} \left( \langle \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} R_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma U, U \rangle \right) \end{aligned}$$

il faut donc vérifier que l'opérateur  $\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} R_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G$  satisfait une inégalité de Gårding. Pour cela, on étudie plus précisément son symbole :

$$\begin{aligned} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) &= \sum \partial_{\xi'}^\alpha \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma) \partial_{x'}^\alpha (\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) \\ &= \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma) \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) \\ &\quad + \sum_j \partial_{\xi_j} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma) \partial_{x_j} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) \\ &\quad + (\text{ordre inférieur}) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma) &= \zeta_p^{(p-1)/2} S + \sum \partial_{\eta_j} \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} \partial_{x_j} S + (\text{ordre inférieur}) \\ &= \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S + r_S, \\ \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) &= \zeta_p^{(p-1)/2} G + \sum \partial_{\eta_j} \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} \partial_{x_j} G + (\text{ordre inférieur}) \\ &= \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G + r_G, \end{aligned}$$

où  $d^\circ(r_S) = \frac{p-1}{2} - p$ ,  $d^\circ(r_G) = \frac{p-1}{2} - p + 1$ .

On en tire

$$\begin{aligned} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma) \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) &= \Lambda_\gamma^{p-1} S G + r_1, \\ \sum_j \partial_{\xi_j} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma) \partial_{x_j} \sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) &= r_2, \end{aligned}$$

avec  $d^\circ(r_1) = d^\circ(r_2) = 0$ .

(Par exemple,  $d^\circ(r_S \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G) = \frac{p-1}{2} - p + \frac{p-1}{2} + 1 = 0$ , on vérifie facilement que les autres termes d'ordre inférieurs sont bien d'ordre 0.)

Au final, on a

$$\sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) = \Lambda_\gamma^{p-1} S G + r, \quad d^\circ(r) = 0, \quad (5.24)$$

d'où par définition de  $S$ , pour  $\gamma$  assez grand :

$$\sigma(\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma) \geq \frac{\alpha}{2} \gamma. \quad (5.25)$$

Ce n'est cependant pas suffisant pour utiliser directement une inégalité de Gårding, puisque  $\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} S_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} G_\gamma$  est d'ordre  $p$ . On rappelle (Proposition 4.3.9) que le symétriseur  $S$  est construit à partir d'une famille finie de symboles matriciels  $(s_j)_{1 \leq j \leq n}$  définis localement en  $(\tau, \eta, x, t)$ , pour lesquels on a

$$\operatorname{Re}(s_j g) = (T_j^{-1})^* \begin{pmatrix} h_j & 0 \\ 0 & e_j \end{pmatrix} T_j^{-1} \quad (5.26)$$

où les matrices  $h_j, e_j$  satisfont

$$\begin{cases} \zeta_p^{p-1} h_j / \gamma \geq c \text{ uniformément en } (\tau, \xi') \text{ pour } \gamma \text{ assez grand,} \\ e_j \text{ est d'ordre 1, et } e_j \geq \alpha \zeta_p \end{cases}$$

(on souligne que la taille des blocs  $h_j$  et  $e_j$  n'est *pas* indépendante de  $j$ .)

Le symbole du symétriseur s'obtient alors grâce à une partition (microlocale)  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$  de l'unité

$$\operatorname{Re}(s g) = \sum_{j=1}^n (\varphi_j T_j^{-1})^* \begin{pmatrix} h_j & 0 \\ 0 & e_j \end{pmatrix} (\varphi_j T_j^{-1}), \quad (5.27)$$

avec

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j T_j^{-1})^* (\varphi_j T_j^{-1}) \geq c. \quad (5.28)$$

On note

$$\varphi_j T_j^{-1} = P_j, \quad M_j = \begin{pmatrix} h_j & 0 \\ 0 & e_j \end{pmatrix}.$$

Quitte à prolonger les  $M_j$ , on peut supposer qu'ils sont définis globalement, et satisfont les mêmes conditions (5.27).

Il vient, en utilisant les mêmes arguments d'estimation des commutateurs que précédemment

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \langle \Lambda^{p-1} S G U, U \rangle \right) &= \sum \Lambda^{p-1} (P_j^* M_j P_j)_\gamma U, U \rangle \\ &= \sum \langle \Lambda_\gamma^{p-1} (P_j^*)_\gamma (M_j)_\gamma (P_j)_\gamma U, U \rangle + O(\|U\|^2) \\ &= \sum \langle \Lambda_\gamma^{p-1} (M_j)_\gamma (P_j)_\gamma U, (P_j)_\gamma U \rangle + O(\|U\|^2) \\ &= \sum \langle (\Lambda^{p-1} M_j)_\gamma U_j, U_j \rangle + O(\|U\|^2) \end{aligned}$$

avec  $U_j = (P_j)_\gamma U$ , et  $\Lambda^{p-1} M_j$  désigne l'opérateur de symbole  $\zeta_p^{p-1} M_j$ . On pose

$$U_j = \begin{pmatrix} U_j^h \\ U_j^e \end{pmatrix},$$

et on applique alors l'inégalité de Gårding à chaque  $\langle (\Lambda^{p-1}M_j)_\gamma U_j, U_j \rangle$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \langle \Lambda^{p-1}SGU, U \rangle \right) &\geq \sum_{j=1}^n \langle \Lambda^{p-1}h_j U_j^h, U_j^h \rangle + \langle \Lambda^{p-1}e_j U_e^h, U_e^h \rangle - C\|U\|^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^n \alpha\gamma \|U_j^h\|^2 + \beta \|\Lambda^{p/2}U_e^h\|^2 - C\|U\|^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^n \alpha'\gamma \sum \|U_j\|^2 - C\|U\|^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé  $\|\Lambda^{p/2}V\|^2 \geq \gamma\|V\|^2$ .

On conclut grâce à (5.28) que pour  $\gamma$  assez grand

$$\operatorname{Re} \left( \langle \Lambda^{p-1}SGU, U \rangle \right) \geq c'\gamma \|U\|^2 .$$

Le terme de bord se traite comme précédemment avec l'inégalité de Gårding

$$\begin{aligned} -R_\gamma \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0) \cdot \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0) &\leq -\frac{1}{2} |\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0)|^2 \\ &\quad + C |F \Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0)|^2 \\ &\leq -\frac{1}{4} |\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} U(0)|^2 \\ &\quad + 2C |\Lambda_\gamma^{(p-1)/2} F U(0)|^2 . \end{aligned}$$

(Cette fois ci on a utilisé

$$|[\Lambda^{(p-1)/2}, F]U(0), \Lambda^{(p-1)/2}U(0)| \leq C |\Lambda^{(p-1)/2}U(0)|^2 / \gamma^{1/p} .)$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on obtient la même estimation *a priori* que pour le problème à coefficients constants, à savoir :

$$\begin{aligned} \gamma \|U\|_{L_\gamma^2}^2 + |U(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}}^2 &\lesssim \frac{1}{\gamma} \|\partial_x U - GU\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^{p-1})}^2 \\ &\quad + |FU(0)|_{H_{\gamma,p}^{(p-1)/2}}^2 . \end{aligned}$$

□

# Chapitre 6

## Analyse numérique du modèle d'Euler-Korteweg

Les objectifs de ce chapitre sont multiples. Après quelques rappels sur les notions de conditions aux limites transparentes et absorbantes, on montre comment l'analyse des espaces stables et les résultats théoriques précédents donnent un éclairage original sur l'obtention de ces conditions. Puis on s'inspire des conditions aux limites absorbantes connues pour l'équation de Schrödinger afin de mettre en oeuvre une méthode numérique permettant de tester la stabilité des solutions du modèle d'Euler-Korteweg.

### 6.1 Conditions aux limites transparentes

L'approximation numérique des solutions d'un problème posé sur toute la droite se heurte à une difficulté évidente : la nécessité de travailler sur un intervalle borné. Sur celui ci, il faut donc définir des conditions aux limites *artificielles* qui « laissent sortir la solution du domaine de calcul ». Lorsque l'on peut donner explicitement des conditions aux limites à partir du problème de Cauchy, on parle de conditions aux limites transparentes. Par exemple, prenons l'équation des ondes sur  $[0, 1]$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \in C_c^1([0, 1]), \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \in C_c([0, 1]). \end{cases} \quad (6.1)$$

D'après la théorie standard des problèmes hyperboliques [8], il faut définir une condition aux limites en  $x = 0$  et une en  $x = 1$ . L'opérateur  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  se factorise en  $(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$ . Il y a donc une caractéristique sortante en 0, et une sortante en 1. L'idée d'annuler les caractéristiques sortantes donne les conditions

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x)u|_{x=0} = 0, \\ (\partial_t + \partial_x)u|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$



Comme l'opérateur est d'ordre 2 en espace, la discrétisation de ces conditions aux limites est en principe suffisante pour programmer la résolution numérique du problème. Pour justifier quantitativement la pertinence de ces conditions aux limites, rappelons que d'après la formule de D'Alembert, la solution s'écrit

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy.$$

Les hypothèses de support impliquent

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_x)u|_{x=0} &= -u'_0(-t) - u'_1(-t) = 0, \\ (\partial_t + \partial_x)u|_{x=1} &= u'_0(1+t) + u'_1(1+t) = 0, \end{aligned}$$

Ainsi la solution du problème aux limites (6.1, 6.2) coïncide sur  $[0, 1]$  avec la solution du problème de Cauchy. Les équations (6.2) sont ainsi des *conditions aux limites transparentes* pour l'équation des ondes, plus précisément elles donnent la *relation de Dirichlet-Neumann*, exprimant la dérivée normale  $\partial_x u$  comme une fonction de la trace.

Le lien entre réflexions et conditions au bord est assez bien décrit pour les problèmes hyperboliques grâce à la notion de réflexion des singularités (les premiers résultats généraux remontent au milieu des années 70, avec notamment les travaux de Nirenberg [54, 55], Majda-Osher-Engquist [48, 22]).

Pour les problèmes non hyperboliques, la littérature est plus limitée. On peut cependant citer le cas de l'équation de Schrödinger, pour laquelle la condition aux limites transparentes se calcule explicitement en dimension 1, et dont la discrétisation numérique est un sujet riche. En dimension supérieure, J. Szeftel [65] a adapté (à l'aide de résultats de Wunsch [69], Robbiano-Zuily [59]) les notions de propagation des singularités au cadre du calcul pseudo-différentiel 2-homogène pour obtenir rigoureusement l'opérateur de Dirichlet-Neumann dans un domaine de complémentaire convexe.

On décrit ici comment on peut déduire du chapitre 4 des conditions aux limites transparentes sur le demi-espace pour un problème scalaire dispersif

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^m \partial_t^j A_{p(m-j)}(D_x)u = \sum_{|\alpha_j|+pj \leq m} A_{\alpha_j} \partial_t^j D_x^{\alpha_j} u = Lu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d), \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u|_{t=0} = u_{m-1} \in H^{s-(m-1)p}(\mathbb{R}^d), \end{array} \right. \quad (6.3)$$

On suppose que le symbole  $\sum_{j=0}^m \tau^j A_{p(m-j)}(\xi)$  est strictement dispersif. On a vu au chapitre 3 l'existence d'une solution  $C([0, \infty[; H^s) \cap C^1([0, \infty[; H^{s-p}) \cap \dots \cap C^{m-1}([0, \infty[; H^{s-(m-1)p})$ . Notons  $u_+$  la restriction de  $u$  à  $\mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty[ \times \mathbb{R}_t^+$ . Si les données initiales sont de support inclus dans le demi espace  $\{x_d < 0\}$ ,

$u_+$  satisfait

$$\begin{cases} Lu_+ = 0, & x_d \geq 0, & (x', t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t \\ u_+|_{t=0} = 0, & x_d \geq 0, & x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1} u_+|_{t=0} = 0, & x_d \geq 0, & x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

et pour  $s$  est assez grand,  $u_+|_{x_d=0}$ ,  $\partial_x u_+|_{x_d=0}$ , ... sont définis comme traces de la solution du problème de Cauchy. Comme au chapitre 4, ces équations se reformulent en

$$\partial_{x_d} U = GU, U|_{x_d=0} = \varphi, \quad (6.4)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \chi_{\gamma,p}^{mp-1} u_+ \\ \vdots \\ \partial_{x_d}^{mp-1} u_+ \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{\gamma,p} & & & \\ 0 & 0 & \Lambda_{\gamma,p} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \Lambda_{\gamma,p} \\ A'_{mp,\gamma} \circ \Lambda_{\gamma,p}^{1-mp} & \dots & & & A'_{1,\gamma} \end{pmatrix},$$

$\varphi = (\Lambda_{\gamma,p}^{mp-1} u|_{x_d=0}, \dots, \partial_{x_d}^{mp-1} u|_{x_d=0})$ . On a vu au chapitre 4 que le nombre de conditions aux limites doit être égal à la dimension de l'espace stable du symbole matriciel  $g(\tau, \eta)$  de  $G$  (constante pour  $\text{Re}(\tau) > 0$ ). Soit alors  $F$  un opérateur satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme pour (6.4). D'après le chapitre 5, le problème aux limites

$$\partial_{x_d} U = GU, FU|_{x_d=0} = F\varphi, \quad (6.5)$$

est bien posé, la trace de  $U$  en  $x_d = 0$  existe, et de plus, la transformée de Fourier-Laplace  $\widehat{U}|_{x_d=0}$  est dans  $E^-(g(\tau, \eta))$ . Si  $F$  est de rang  $\mu$ , les équations sur  $(U_1|_{x_d=0}, \dots, U_{mp}|_{x_d=0})$  traduisant cette inclusion donnent un système de rang  $mp - \mu$  qui sont précisément les conditions aux limites transparentes.

Dans le cas de données à support inclus dans  $\{x_d > 0\}$ , l'espace stable n'est évidemment plus associé aux valeurs propres de partie réelle négative, mais à celles de partie réelle positive. Sa dimension est donc  $mp - \mu$ , et le système traduisant les conditions aux limites transparentes est de rang  $mp - (mp - \mu) = \mu$ . On remarque que le nombre total d'équations ainsi obtenu est  $mp - \mu + \mu = mp$ , ce qui (en principe) est le nombre nécessaire pour résoudre le problème aux limites sur un intervalle borné.

*Exemples 6.1.1.* • Pour l'équation de Schrödinger libre,

$$i\partial_t u + \Delta u = 0,$$

la matrice  $g$  obtenue en reformulant le problème est

$$g(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_2 \\ \frac{|\eta|^2 - i\tau}{\zeta_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = (|\tau|^2 + |\eta|^4)^{1/4}.$$

Le polynôme caractéristique de  $g$  est  $\chi_g = \lambda^2 - |\eta|^2 + i\tau$ . Pour  $\tau \notin i\mathbb{R}$ , la matrice a deux valeurs propres distinctes non imaginaires pures, et est donc diagonalisable, l'espace stable étant engendré par le vecteur propre  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{|\eta|^2 - i\tau}}{\zeta_2} \end{pmatrix}$ , avec  $\sqrt{\cdot}$  la détermination de la racine sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Pour  $\tau = i\delta$  imaginaire pur et  $|\eta|^2 + \delta \neq 0$ , l'espace stable (prolongé) est encore engendré par le même vecteur propre. De même, pour les points glancing correspondant à  $\delta = -|\eta|^2$ , le prolongement de  $E^-$  est engendré par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

*Remarque 6.1.2.* Au chapitre 4, dont on reprend les notations, le prolongement de l'espace  $E^-$  était défini comme l'image de  $P_+(G)$ . Le prolongement obtenu ici est cohérent puisque  $P_+(G(-|\eta|^2, \eta)) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Les conditions aux limites de Dirichlet  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  satisfont clairement la condition (KLU), et la condition aux limites transparente s'écrit donc ici  $\widehat{U}_2 = -\frac{\sqrt{|\eta|^2 - i\tau}}{\zeta_2} \widehat{U}_1$ , ce qui se traduit pour  $u$  par

$$\partial_{x_d} \widehat{u}|_{x_d=0} = -\sqrt{|\eta|^2 - i\tau} \widehat{u}|_{x_d=0}.$$

Les mêmes calculs menés pour le problème sur  $] -\infty, 0]$  fournissent

$$\partial_{x_d} \widehat{u}|_{x_d=0} = +\sqrt{|\eta|^2 - i\tau} \widehat{u}|_{x_d=0},$$

On retrouve donc pour le problème de Cauchy avec données initiales à support dans  $]0, 1[$  les conditions transparentes classiques

$$\begin{aligned} \partial_{x_d} \widehat{u}|_{x_d=1} &= -\sqrt{|\eta|^2 - i\tau} \widehat{u}|_{x_d=1}, \\ \partial_{x_d} \widehat{u}|_{x_d=0} &= \sqrt{|\eta|^2 - i\tau} \widehat{u}|_{x_d=0}, \end{aligned}$$

ou sous une forme plus condensée

$$\partial_{\mathbf{n}} \widehat{u} = -\sqrt{|\eta|^2 - i\tau} \widehat{u}, \text{ avec } \mathbf{n} \text{ la normale extérieure.} \quad (6.6)$$

On reviendra au paragraphe suivant sur le problème de la discrétisation de ces conditions en dimension 1.

- Pour l'équation d'Airy

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0,$$

la matrice  $g$  est  $g = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \\ \frac{-\tau}{\zeta_3^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\zeta_3 = |\tau|^{1/3}$ . Son polynôme caractéristique est  $\tau + \lambda^3$ . Pour  $\text{Re}(\tau) > 0$ , ce polynôme admet une racine de partie réelle négative et deux de partie réelle positive. Pour  $\tau \neq 0$  les racines sont distinctes,  $g$  est diagonalisable et il n'y a donc pas de points de

glancing. Dans le cadre du problème aux limites sur  $\mathbb{R}^+$ , l'espace stable est engendré par le vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{j\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3} \\ \left(\frac{j\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3}\right)^2 \end{pmatrix}, \text{ où } \sqrt[3]{\cdot} \text{ est la détermination sur } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, j = e^{2i\pi/3}.$$

Les conditions aux limites de Dirichlet  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  satisfont la condition (KLU), et la résolution de

$$F\widehat{U}|_{x=0} = |\tau|^{2/3}\widehat{u}|_{x=0}, \quad (6.7)$$

$$\widehat{U}|_{x=0} \in E^-, \quad (6.8)$$

fournit les deux conditions aux limites transparentes

$$\begin{aligned} \partial_x \widehat{u}|_{x=0} &= j\sqrt[3]{-\tau}\widehat{u}|_{x=0}, \\ \partial_x^2 \widehat{u}|_{x=0} &= (j\sqrt[3]{-\tau})^2 \widehat{u}|_{x=0}. \end{aligned}$$

L'analyse du problème sur  $\mathbb{R}^-$  est un peu différente. En effet, l'espace stable est de dimension 2, engendré par les deux vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3} \\ \left(\frac{\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3}\right)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{j^2\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3} \\ \left(\frac{j^2\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3} & \frac{j^2\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3} \end{vmatrix} = (j^2 - 1)\frac{\sqrt[3]{-\tau}}{\zeta_3} \neq 0 \text{ pour } \operatorname{Re}(\tau) \geq 0,$$

l'opérateur  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  satisfait la condition (KLU), et comme précédemment, on obtient la condition aux limites transparente

$$\partial_x^2 \widehat{u}|_{x=0} = \frac{\tau}{\sqrt[3]{-\tau} + j\sqrt[3]{-\tau}} \widehat{u}|_{x=0} + \frac{(1-j^2)\sqrt[3]{-\tau}^2}{\sqrt[3]{-\tau} + j\sqrt[3]{-\tau}} \partial_x \widehat{u}|_{x=0}.$$

Pour le problème de Cauchy avec données initiales à support inclus dans  $]0, 1[$ , les conditions transparentes s'écrivent donc

$$\begin{cases} \partial_x \widehat{u}|_{x=1} &= j\sqrt[3]{-\tau}\widehat{u}|_{x=1}, \\ \partial_x^2 \widehat{u}|_{x=1} &= (j\sqrt[3]{-\tau})^2 \widehat{u}|_{x=1}, \\ \partial_x^2 \widehat{u}|_{x=0} &= \frac{\tau}{\sqrt[3]{-\tau} + j\sqrt[3]{-\tau}} \widehat{u}|_{x=0} + \frac{(1-j^2)\sqrt[3]{-\tau}^2}{\sqrt[3]{-\tau} + j\sqrt[3]{-\tau}} \partial_x \widehat{u}|_{x=0}. \end{cases}$$

*Remarque 6.1.3.* Le nombre de conditions aux limites obtenues en 0 et 1 est le même que celui utilisé dans l'analyse du problème aux limites pour l'équation d'Airy dans [15] ou [24].

## 6.2 Résultats existants pour l'équation de Schrödinger

On a vu au chapitre 2 que les équations d'Euler-Korteweg s'écrivent, pour des variables adaptées, comme une équation de Schrödinger. C'est pourquoi on utilisera des conditions absorbantes développées pour l'équation de Schrödinger, qu'on présente rapidement dans ce paragraphe. On considère le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger linéaire en dimension 1

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \text{ supp}(u_0) \subset ]0, 1[. \end{cases} \quad (6.9)$$

Les conditions aux limites transparentes (6.6) s'écrivent

$$\partial_{\mathbf{n}} \hat{u} = -\sqrt{-i\tau} \hat{u}, \text{ avec } \mathbf{n} \text{ la normale extérieure.}$$

En faisant tendre  $\text{Re}(\tau)$  vers 0, on en déduit pour  $u$  assez régulière

$$\partial_{\mathbf{n}} u = -e^{-i\pi/4} \sqrt{\partial_t} u,$$

où l'opérateur  $\sqrt{\partial_t}$  est défini par la représentation intégrale (non locale)

$$\sqrt{\partial_t} \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int_0^t \frac{\psi(s)}{\sqrt{t-s}} ds.$$

Cette représentation est délicate à mettre en oeuvre numériquement. La façon sans doute la plus directe pour discrétiser cette condition au bord serait de stocker les valeurs de  $u$  au bord en fonction du temps et d'évaluer (approximativement)  $e^{-i\pi/4} u \sqrt{\partial_t} u$  par intégration numérique. Cette méthode, la plus ancienne, est introduite dans [49] puis implémentée dans [6]. Il est cependant souligné par X. Antoine et C. Besse [1] que cette approche n'est pas inconditionnellement stable, ce qui limite son utilisation. C. Bruneau et L. Di Menza [16] utilisent une approximation rationnelle de  $\sqrt{\cdot}$  sur l'axe imaginaire pour approcher  $\sqrt{\partial_t}$  par des opérateurs *locaux*. Cette méthode d'approximation rationnelle est également développée en dimension 1 et plus par J. Szeftel, et elle est très efficace pour le problème linéaire (voir [64]). Une troisième approche, également performante, est due à A. Arnold et M. Ehrhardt [21][4] et consiste à discrétiser le problème de Cauchy sur *toute* la droite réelle, puis à écrire les conditions aux limites transparentes pour le problème discrétisé (la méthode par transformée de Laplace est alors remplacée par une transformée en  $\mathcal{Z}$ ). Une dernière méthode, développée par X. Antoine et C. Besse [1], utilise le fait que la solution du problème de Cauchy est solution d'un problème avec des données initiales nulles et un forçage bien choisi. Plus précisément, soit  $u$  la solution de (6.9), et  $v$  solution de

$$\begin{cases} i\partial_t v + \partial_x^2 v = \partial_x u \otimes \delta_1, \\ v|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$\delta_1$  désigne la distribution de Dirac en  $x = 1$ . Par calcul explicite de la solution, on voit que  $v|_{x=1} = u|_{x=1}$ . Les auteurs de [1] considèrent alors la discrétisation de Crank-Nicolson en temps

$$\begin{cases} i \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + \partial_x^2 \frac{v^{n+1} + v^n}{2} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \otimes \delta_{x=1}, \\ u^0 = 0 \end{cases}$$

Un calcul par transformation de Fourier montre alors

$$v^{n+1}(1) = -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{2\Delta t}}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \partial_x u^{n+1-k},$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_j = \begin{cases} \prod_{k=1}^{j/2} \frac{2k-1}{2k} & \text{si } j \text{ est pair,} \\ \alpha_{j-1} & \text{si } j \text{ est impair.} \end{cases}$$

En utilisant  $u^n(1) = v^n(1)$ , l'équation ci-dessus fournit la relation Neumann-Dirichlet discrète (trace de la solution en  $x = 1$  exprimée en fonction de la dérivée). Les auteurs déduisent également de cette formule la relation Dirichlet-Neumann discrète

$$\partial_x u^{n+1}(1) = -e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\Delta t}} \sum_{j=0}^{n+1} \beta_j u^{n+1-k}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \beta_j = (-1)^j \alpha_j.$$

Enfin, ils montrent le résultat de stabilité suivant.

**Proposition 6.2.1.** (*Antoine, Besse [1]*)

Soit  $u_n$  la solution du problème discrétisé avec condition au bord de Neumann Dirichlet

$$\begin{cases} i \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \partial_x^2 \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0, \\ u^0 = u_0, \\ u^{n+1}(e) = -e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \sum_0^{n+1} \alpha_k \partial_n u^{n+1-k}(e), \quad e = 0, 1. \end{cases}$$

La norme  $L^2([0, 1])$  de  $u^n$  satisfait l'estimation  $\|u^n\| \leq \|u_0\|$ .

De plus, le même résultat est vrai pour la solution du système avec condition au bord de Dirichlet Neumann

$$\partial_x u^{n+1}(e) = -e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\Delta t}} \sum_0^{n+1} (-1)^k \alpha_k u^{n+1-k}.$$

Il existe également des stratégies pour l'équation de Schrödinger avec potentiel ou non linéaire (voir par exemple [4][3] [2]), qu'on ne décrira pas ici car l'analyse effectuée ci-après ne nécessite pas des méthodes aussi fines.

### 6.3 Application au modèle d'Euler-Korteweg

Les équations d'Euler-Korteweg s'écrivent en dimension 1

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u = \partial_x \left( K(\rho) \partial_x^2 \rho + \frac{1}{2} K'(\rho) (\partial_x \rho)^2 - g_0(\rho) \right). \end{cases}$$

Si  $(\rho, u)$  est une solution régulière, et si la densité  $\rho$  reste éloignée de 0, ce système se réécrit en coordonnées lagrangiennes  $(y, t)$  avec  $dy = \rho dx - \rho u dt$ , pour  $u$  la vitesse et  $v$  le volume spécifique :

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y p_0 = -\partial_y \left( \kappa \partial_y^2 v + \frac{1}{2} \kappa'(v) (\partial_y v)^2 \right), \end{cases} \quad (6.10)$$

où  $\kappa(v) = K(1/v)/v^5$ , et  $p_0(1/\rho) = \rho g_0(\rho)$ .

Dans cette formulation, les équations sur  $(v, u, \sqrt{\kappa} \partial_y v) = (v, u, w)$  sont

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y p_0(v) + \partial_y (\alpha \partial_y w) = 0, \\ \partial_t w - \partial_y (\alpha \partial_y u) = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

avec  $\alpha = \sqrt{\kappa}$ . En particulier on reconnaît pour les deux dernières lignes une équation de Schrödinger pour  $z = u + iw$ ,

$$\partial_t z - i \partial_y \alpha \partial_y z + \partial_y p_0(v) = 0,$$

couplée à la première équation à travers le « forçage »  $\partial_y p_0(v)$ .

Comme remarqué dans [9], ces équations admettent (formellement) une formulation hamiltonienne

$$\partial_t \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & 0 & -\partial_y \alpha \partial_y \\ 0 & \partial_y \alpha \partial_y & 0 \end{pmatrix} \delta \mathcal{H}(u, v, w), \quad \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}} f_0(v) + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 dx,$$

$\delta$  est la dérivée variationnelle et  $f_0$  une primitive de  $-p_0$ .

L'existence d'ondes progressives comme solutions particulières de (6.11) est étudiée en détail dans [9]. Une onde voyageant à vitesse  $\sigma$  est une solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -\sigma \dot{v} - \dot{u} & = 0, \\ -\sigma \dot{u} - \dot{p}_0 & = -(\kappa \ddot{v} + \frac{1}{2} \dot{\kappa} \dot{v}^2), \end{cases}$$

qui est de plus constante à l'infini (ce sont donc des orbites homoclines ou hétéroclines). Soit  $v_+$  (resp.  $v_-$ ) la limite de  $v$  en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ). Par intégration de la deuxième équation et en éliminant  $\dot{u}$  grâce à la première on obtient

$$\kappa \ddot{v} + \frac{1}{2} \dot{\kappa} \dot{v} + p_0 + \tau^2 v = p_0(v_{\pm}) + \tau^2 v_{\pm}. \quad (6.12)$$

En multipliant par  $\dot{v}$  et en intégrant de  $v_{\pm}$  à  $v$ , on obtient l'intégrale première

$$I(v, v_{\pm}) = \frac{1}{2}\kappa(v)\dot{v}^2 + f_0(v_{\pm}) - f_0(v) - p_0(v_{\pm})(v - v_{\pm}) + \frac{1}{2}\sigma^2(v - v_{\pm})^2, \quad (6.13)$$

identiquement nulle le long de  $v$ . L'analyse détaillée du signe de  $I$  en tant que fonction de  $v$  effectuée dans [9] permet de décrire les différentes orbites possibles. Deux classes en particulier sont dégagées : les solitons correspondent à  $v_+ = v_-$  (orbite homocline), les « sauts » à  $v_+ \neq v_-$ . Les auteurs étudient également la *stabilité orbitale* de ces solutions, au sens de la définition suivante.

**Definition 6.3.1.** Une onde de profil  $(v_p, u_p)$  est dite *orbitalement stable* lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $(v, u)$  de (6.10) de donnée  $(v_0, u_0)$ , si  $\|(v_p - v_0, u_p - u_0)\|_{H^1 \times L^2} \leq \eta$ , alors

$$\sup_{t \in [0, T]} \inf_{s \in \mathbb{R}} \|(v_p(\cdot - s) - v, u_p(\cdot - s) - u)\|_{H^1 \times L^2} \leq \varepsilon.$$

Le *moment d'instabilité* d'un soliton de vitesse  $\sigma$  et d'état à l'infini  $(v_{\infty}, u_{\infty})$  est

$$m(\sigma, v_{\infty}, u_{\infty}) = \int_{\mathbb{R}} \kappa(v(\xi))\dot{v}(\xi)^2 d\xi.$$

**Théorème 6.3.2.** (Benzoni, Danchin, Descombes, Jamet [9])

*Les solutions dont les profils sont des orbites hétéroclines sont orbitalement stables. Un soliton de vitesse  $\sigma$  et d'état à l'infini  $(v_{\infty}, u_{\infty})$  est orbitalement stable si son moment d'instabilité satisfait*

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} m(\sigma, v_{\infty}, u_{\infty}) > 0.$$

Ce théorème donne une condition suffisante de stabilité et un résultat laissant penser qu'elle est nécessaire est prouvé dans [9]). L'instabilité linéaire lorsque  $\partial_{\sigma}^2 m < 0$  a été prouvée ultérieurement en dimension 1 par K. Zumbrun [70], et en dimension quelconque par S. Benzoni [7]. L'approximation numérique des solitons est un bon test pour vérifier en pratique leur (in)stabilité : du fait des erreurs générées par le calcul approché, le soliton calculé numériquement devrait « perdre son profil » s'il n'est pas orbitalement stable.

**Calcul du profil d'un soliton** Pour un soliton de limite  $v_{\infty}$ , l'équation (6.12) s'écrit

$$\kappa\ddot{v} + \frac{1}{2}\dot{\kappa}\dot{v} + p_0 + \tau^2 v = p_0(v_{\infty}) + \tau^2 v_{\infty}, \quad (6.14)$$

ce qui donne le système d'ordre 1 sur  $(v, w) = (v, \alpha\dot{v})$

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}w, \\ \dot{w} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(-p_0(v) + p_0(v_{\infty}) - \tau^2(v - v_{\infty})). \end{cases}$$



Pour le résoudre, on utilise un schéma de type RK2, explicite sur la première variable, et utilisant la conservation de (6.13) pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
v^{n+1/2} &= v^n + \frac{h}{2}w^n, \\
w^{n+1/2} &= \text{signe}\left(w^n + \frac{h}{2\alpha}(-p_0(v^{n+1/2}) + p_0(v_\infty)) - \tau^2(v^{n+1/2} - v_\infty)\right)\sqrt{2} \\
&\quad \times \sqrt{f_0(v^{n+1/2}) - f_0(v_0) + p_0(v_\infty) * (v^{n+1/2} - v_\infty) - 1/2\tau^2(v^{n+1/2} - v_\infty)^2}, \\
v^{n+1} &= v^n + hw^{n+1/2}, \\
w^{n+1} &= \text{signe}\left(w^n + \frac{h}{\alpha}(-p_0(v^n) + p_0(v_\infty)) - \tau^2(v^n - v_\infty)\right)\sqrt{2} \\
&\quad \times \sqrt{f_0(v^{n+1}) - f_0(v_0) + p_0(v_\infty) * (v^{n+1} - v_\infty) - 1/2\tau^2(v^{n+1} - v_\infty)^2}.
\end{aligned}$$

Pour les tests numériques, on utilise comme loi de pression la loi de Van der Waals pour l'eau comme dans [9].

$$\begin{aligned}
p_0(v) &= \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \\
R &= 8.3144 \quad , \quad T = 600K, \quad a = 553600, \quad b = 30.49, \\
f_0(v) &= -RT\ln(v-b) - \frac{a}{v}.
\end{aligned}$$

On prend de plus  $\kappa$  constant égal à 0.02 (cela correspond à  $K = 0.02/\rho^5$ ).

**Résolution du système d'Euler-Korteweg** On suppose que le profil a été calculé sur un intervalle  $[0, R]$ , soit  $\Delta x$  le pas d'espace,  $\Delta t$  le pas de temps,  $J = R/\Delta x$ . On calcule la solution sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Les points du domaine sont notés  $x_j = j\Delta x$ ,  $0 \leq j \leq J$ ,  $t_n = n\Delta t$ ,  $n \geq 0$ ,  $u_j^n$  est la valeur approchée de  $u(x_j, t_n)$ .

Pour  $1 \leq j \leq J-1$  (intérieur du domaine) on utilise un schéma de Crank Nicolson centré :

$$\begin{aligned}
2\frac{v_j^{n+1/2} - v_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0, \\
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{p'_0(v_j^{n+1/2})}{\alpha}w_j^{n+1/2} + \alpha\frac{w_{j+1}^{n+1/2} - 2w_j^{n+1/2} + w_{j-1}^{n+1/2}}{2\Delta x^2} &= 0, \\
\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} - \alpha\frac{u_{j+1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{2\Delta x^2} &= 0, \\
u_j^{n+1/2} = \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}, \quad w_j^{n+1/2} = \frac{w_j^n + w_j^{n+1}}{2} \\
2\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= 0,
\end{aligned}$$

*Remarque 6.3.3.* Le schéma utilisé ici n'est pas le schéma de Crank Nicolson usuel, puisque l'on n'a pas  $v_j^{n+1/2} = (v_j^n + v_j^{n+1})/2$ . Ce choix permet de faire l'économie d'une méthode de point fixe tout en conservant un schéma d'ordre 2.

**Choix des conditions aux limites** Puisque (au terme de pression près) les équations sur  $u$  et  $w$  correspondent à l'équation de Schrödinger linéaire, on utilise les conditions aux limites absorbantes décrites au paragraphe précédent. Bien qu'il soit connu (voir [3]) que ces conditions sont peu performantes pour les équations de Schrödinger non linéaires, elles nous suffiront ici. En effet, les solitons se déplacent très lentement par rapport à la taille du profil et l'amplitude de l'onde arrivant au bord est faible même pour des temps assez grands. De plus, on désire seulement vérifier qualitativement la stabilité des solitons.

Rappelons que  $z = u + iw$  satisfait

$$i\partial_t z + \alpha \partial_y^2 z = -ip'_0(v) \frac{\text{Im}(z)}{\alpha} .$$

Les conditions absorbantes (du problème linéarisé) s'écrivent pour  $z$

$$\begin{aligned} \frac{z_J^{n+1/2} - z_{J-2}^{n+1/2}}{2\Delta x} &= -e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta t}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k z_{J-1}^{n+1/2-k}, \\ \frac{z_0^{n+1/2} - z_2^{n+1/2}}{2\Delta x} &= -e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta t}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k z_1^{n+1/2-k} \end{aligned}$$

soit pour  $u$  et  $w$

$$\begin{aligned} \frac{u_J^{n+1/2} - u_{J-2}^{n+1/2}}{2\Delta x} &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta t}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k (u_{J-1}^{n+1/2-k} + w_{J-1}^{n+1/2-k}), \\ \frac{w_J^{n+1/2} - w_{J-2}^{n+1/2}}{2\Delta x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta t}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k (u_{J-1}^{n+1/2-k} - w_{J-1}^{n+1/2-k}), \\ \frac{u_0^{n+1/2} - u_2^{n+1/2}}{2\Delta x} &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta t}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k (u_1^{n+1/2-k} + w_1^{n+1/2-k}), \\ \frac{w_0^{n+1/2} - w_2^{n+1/2}}{2\Delta x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha\Delta t}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k (u_1^{n+1/2-k} - w_1^{n+1/2-k}). \end{aligned}$$

Enfin, on approche  $v$  au bord par différences finies décentrées

$$\begin{aligned} \frac{v_J^{n+1} - v_J^n}{\Delta t} - \frac{u_J^{n+1/2} - u_{J-1}^{n+1/2}}{\Delta x} &= 0, \\ \frac{v_0^{n+1} - v_0^n}{\Delta t} - \frac{u_1^{n+1/2} - u_0^{n+1/2}}{\Delta x} &= 0. \end{aligned}$$

**Une estimation.** Avant de décrire les résultats numériques, on va donner une estimation *a priori* pour le problème mixte continu posé sur  $\mathbb{R}^+$ . Commençons par un résultat auxiliaire pour l'équation de Schrödinger sur la demi-droite, qui nous a semblé intéressant en lui même. Des résultats pour le problème sur un intervalle borné existent également, mais n'utilisent pas d'effet régularisant sur la trace et sont donc un peu moins précis. Ainsi dans [64] l'existence d'une solution  $C([0, T]; H^1([0, 1]))$  requiert une donnée initiale dans  $H^2([0, 1])$ .

Dans la suite, on utilise des notations condensées : si  $H$  est un espace fonctionnel, on écrit  $H_x$  pour  $H([0, \infty[)$ ,  $H_t$  pour  $H([0, T])$ ,  $H_{1,x}H_{2,t}$  resp.  $H_{2,t}H_{1,x}$  correspondent respectivement à  $H_1([0, \infty[; H_2([0, T]))$  et  $H_2([0, T]; H_1([0, \infty[))$ . On utilise une double barre  $\|\cdot\|$  pour les normes impliquant la variable d'espace et  $|\cdot|$  si la norme n'est prise que sur la variable de temps. Dans ce contexte si  $f = f(x, t)$ , on écrit  $\|f(\alpha)\| = \|f(\alpha, \cdot)\|$ , et  $|f(\beta)| = |f(\cdot, \beta)|$ .

**Proposition 6.3.4.** *Soit  $\alpha$  un réel positif,  $z \in C([0, T]; H^1)$ , solution de*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x \alpha \partial_x u = g, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \\ (\partial_x u - e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\partial_t}{\alpha}} u)|_{x=0} = 0, & t \in [0, T], \\ z|_{t=0} = z_0. \end{cases}$$

Alors  $z$  satisfait l'estimation

$$\|z(T)\|_{H_x^1} + \|z\|_{L_t^2 H_x^1 \cap L_x^2 H_t^1} \leq C(\|z_0\|_{H^1} + \|g\|_{L_t^2 H_x^1 \cap L_x^2 H_t^1}).$$

*Démonstration.* En multipliant l'équation par  $\bar{z}$ , intégrant sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$  et en prenant la partie imaginaire on obtient

$$\|z(T)\|_{L^2}^2 - 2\alpha \operatorname{Im} \left( \int_0^t \partial_x z(0) \bar{z}(0) dt \right) = \|z_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T \int_0^\infty g \bar{z} \Delta x dt.$$

Or les conditions aux limites sont dissipatives au sens suivant (voir [21] ou [64])

$$-2\alpha \int_0^t [(\partial_y w)u - (\partial_y u)w]_0 \geq 0.$$

On en déduit

$$\|z(T)\|_{L^2}^2 \leq \|z_0\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L_{x,t}^2}^2 + \|z\|_{L_{x,t}^2}^2. \quad (6.15)$$

On utilise maintenant le fait que  $\partial_x z$  est solution de

$$\begin{cases} i\partial_t \partial_x z + \partial_x (\alpha \partial_x \partial_x z) = \partial_x g, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, t], \\ \partial_x z|_{t=0} = \partial_x z_0, \quad \operatorname{supp}(\partial_x z_0) \subset \mathbb{R}^{+*}, \\ (\partial_x z - e^{-i\pi/4} z)|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment, en multipliant par  $\partial_x \bar{z}$  et en intégrant il vient

$$\begin{aligned} \|\partial_x z(T)\|_{L_x^2}^2 - 2\alpha \operatorname{Im} \left( \int_0^t \partial_x^2 z(0) \overline{\partial_x z(0)} dt \right) &= \|\partial_x z_0\|_{L_x^2}^2 \\ &+ 2 \int_0^T \int_0^\infty \partial_x g \overline{\partial_x z} \Delta x dt \\ &\leq \|\partial_x z_0\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x g\|_{L_{x,t}^2}^2 + \|\partial_x z\|_{L_{x,t}^2}^2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Pour contrôler les termes de trace, on utilise un résultat général du chapitre précédent, ce qui est justifié car l'équation de Schrödinger est une équation 2-homogène strictement dispersive (au sens de la définition 3.1.12 p.3.1.12).

On a vu à l'exemple 1 que la matrice associée à ce problème aux limites est

$$g = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{|\tau|} \\ -i\tau/\sqrt{|\tau|} & 0 \end{pmatrix}, \text{ le vecteur propre associé à l'espace stable est } V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-i\tau}/\sqrt{|\tau|} \end{pmatrix}.$$

La condition transparente  $\partial_x z - e^{-i\pi/4}\sqrt{\partial_t}z = 0$  satisfait la condition Kreiss-Lopatinskiï uniforme. En effet l'opérateur correspondant s'écrit en variable de Laplace

$$F = \begin{pmatrix} -\sqrt{-i\tau}/\sqrt{|\tau|} & 1 \end{pmatrix},$$

son déterminant de Lopatinskiï est donc simplement

$$FV_- = -\sqrt{-i\tau}/\sqrt{|\tau|} - \sqrt{-i\tau}/\sqrt{|\tau|} = -2\sqrt{-i\tau}/\sqrt{|\tau|} \neq 0.$$

On peut alors appliquer la partie estimation *a priori* (5.14) du théorème 5.2.6 p.115 qui s'écrit ici

$$\begin{aligned} |z(0)|_{H_t^{3/4}} + |\partial_x z(0)|_{H_t^{1/4}} + \|z\|_{L_x^2 H_t^{1/2}}^2 + \|z\|_{L_t^2 H_x^1} \\ \leq C \left( \|z_0\|_{H^1} + \|g\|_{L_x^2 H_t^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Comme  $\partial_x^2 z = -i/\alpha(\partial_t z + g)$ , on déduit de (6.16), (6.17) :

$$\begin{aligned} \|\partial_x z(T)\|_{L_x^2}^2 &\leq C \left( (|z(0)|_{H_t^{3/4}}^2 + |g(0)|_{H_t^{-1/4}}^2 + |\partial_x z(0)|_{H_t^{1/4}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_x z_0\|_{L^2}^2 + \|\partial_x g\|_{L_{x,t}^2}^2 + \|\partial_x z\|_{L_{x,t}^2}^2 \right) \\ &\leq C \left( \|z_0\|_{H^1}^2 + \|g\|_{L_x^2 H_t^{1/2} \cap L_t^2 H_x^1}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus ainsi que (6.15) et (6.17) on obtient le résultat annoncé.  $\square$

**Proposition 6.3.5.** *Soient*

$$v \in L^\infty \cap C([0, T]; \dot{H}^2), \quad (u, w) := (u, \alpha \partial_y v) \in C([0, T]; H^1)^2,$$

*solutions de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y p_0(v) + \partial_y \alpha \partial_y w = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \\ \partial_t w - \partial_y \alpha \partial_y u = 0, \\ (v, u, w)|_{t=0} = (v_0, u_0, w_0), \quad \text{supp}(u_0, w_0) \subset \mathbb{R}^{+*}, \\ (\partial_y u - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\partial_t}{\alpha}}(u+w))|_{y=0} = 0, \\ (\partial_y w + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\partial_t}{\alpha}}(u-w))|_{y=0} = 0. \end{array} \right.$$

On suppose que  $p_0$  est  $C^1$  sur un intervalle  $J$ , et que  $v(\mathbb{R}^+ \times [0, T])$  est inclus dans un sous intervalle compact de  $J$ . Alors on a l'estimation

$$\|(v, u)(T)\|_{H_y^2 \times H_y^1} \leq C(T) \left( \|v_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2 + \|\partial_y p_0(v)\|_{L_y^2 H_t^{1/2} \cap L_t^2 H_y^1}^2 \right). \quad (6.18)$$

*Démonstration.* L'intégration en temps de la première équation fournit

$$v(y, T) = v_0(y) + \int_0^T \partial_y u(y, t) dt,$$

d'où en utilisant l'inégalité de Jensen

$$\|v(T)\|_{L_y^2}^2 \leq 2\|v_0\|_{L^2}^2 + 2T\|\partial_y u\|_{L_{y,t}^2}^2. \quad (6.19)$$

On utilise maintenant le fait que la variable  $z = u + iw$  satisfait

$$\begin{cases} i\partial_t z + \partial_y(\alpha \partial_y z) = -\partial_y p_0(v), \\ \partial_y z|_{y=0} = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\partial_t}{\alpha}} z|_{y=0}, \\ z|_{t=0} = u_0 + iw_0. \end{cases}$$

L'application de la proposition 6.3.5 fournit donc

$$\begin{aligned} \|(u, w)(T)\|_{H_y^1} + \|(u, w)\|_{L_t^2 H_y^1 \cap L_y^2 H_t^{1/2}} &\leq C \left( \|(u_0, w_0)\|_{H_x^1} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_y p_0(v)\|_{L_x^2 H_t^{1/2} \cap L_t^2 H_x^1}^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui, conjointement avec (6.19) fournit le résultat.  $\square$

*Remarque 6.3.6.* La non linéarité fait apparaître dans l'estimation (6.18) le terme délicat

$$\|\partial_y p_0(v)\|_{L_y^2 H_t^{1/2} \cap L_t^2 H_y^1} = \|p'_0(v)w/\alpha\|_{L_y^2 H_t^{1/2} \cap L_t^2 H_y^1}.$$

Il ne correspond cependant pas à une perte de dérivée puisqu'on s'attend à  $v \in L_{x,t}^\infty$  et  $\partial_t v \in C_t L_x^2$ ,  $p'_0(v)$  serait alors un multiplicateur  $L_x^2 H_t^{1/2} \rightarrow L_x^2 H_t^{1/2}$ , et si  $w \in L_x^2 H_t^{1/2}$  le produit  $p'_0(v)w$  serait dans  $L_x^2 H_t^{1/2}$ , de même on s'attend à ce que  $p'_0(v)w$  soit dans  $L_t^2 H_x^1$  parce que  $H_x^1$  est une algèbre.

*Remarque 6.3.7.* L'estimation nécessite que  $v$  soit à valeur dans un domaine où  $p_0$  est régulier, on ne peut donc pas espérer d'estimation en temps long. Ce problème n'est sans doute pas uniquement technique : on verra avec les tests numériques que des données initiales régulières, éloignées des points singuliers de  $p_0$  peuvent donner des solutions qui explosent en temps fini *parce que  $v$  atteint les points singuliers de  $p_0$ .*

**Résultats numériques.** Pour les calculs numériques, on prend  $\Delta x = 1/20$ ,  $dt = 1/400$ . Les solitons sont calculés sur des intervalles où leur norme au bord est inférieure à  $10^{-5}$ .

On teste les valeurs de  $v_\infty$  qui ont été utilisées dans [9]. Lorsque le graphe du moment d'instabilité comprend des parties (apparemment) concave et convexe, on utilise des valeurs de  $\tau$  correspondant à ces deux régions. On constate sur la figure 6.3 que le maximum du soliton tend à « s'étirer » avec le temps, ce qui pourrait être un indice de non stabilité. Pour vérifier cela, on calcule la solution sur un temps plus long  $T = 30$ , d'abord avec le même pas de temps et d'espace, puis avec des pas de temps et d'espace plus petits, respectivement  $dt = 1/600$ ,  $\Delta x = 1/60$ , les figures 6.3 et 6.3 montrent le même phénomène d'étirement.

Les autres tests ne montrent pas d'augmentation flagrante de l'erreur relative selon que  $\tau$  ait été pris dans une zone convexe ou concave du moment d'instabilité.

Enfin, si  $(\underline{v}, \underline{u}, \underline{w})$  est le profil du soliton de vitesse 0,01 et d'état infini 58.678, on prend pour données initiales  $(\underline{v}(\cdot/3), \underline{u}(\cdot/3), \underline{w}(\cdot/3))$ . Le minimum de  $v(\cdot, t)$  s'approche de 30.49 (singularité de  $p_0$ ), jusqu'à l'atteindre à  $t \simeq 4.2$ .

*Remarque 6.3.8.* Parmi tous les graphes de moment d'instabilité de [9], celui qui a la concavité la plus « prononcée » est celui correspondant aux données de la figure 6.3.

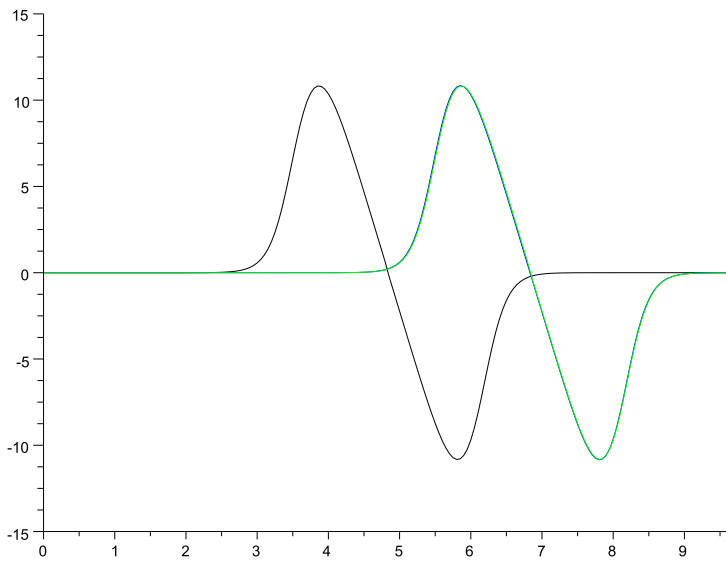


FIGURE 6.1 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 58.678$ ,  $\tau = 0.1$ , ce qui correspond à une zone convexe. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 1.5%.

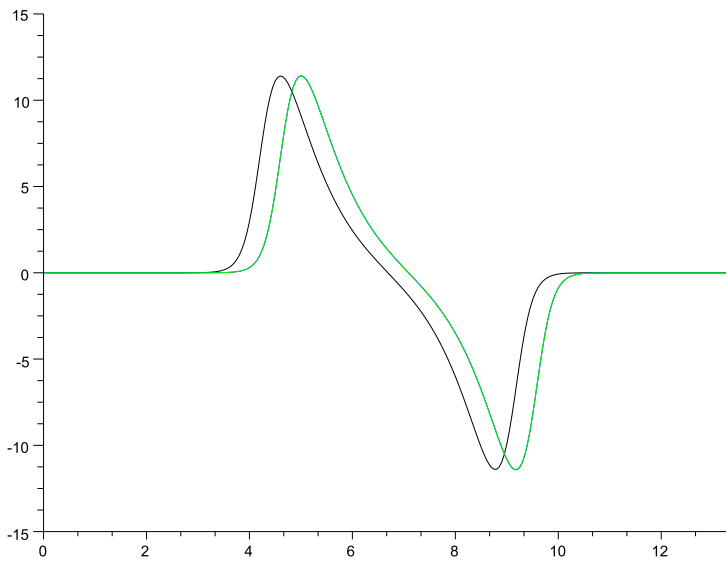


FIGURE 6.2 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 58.678$ ,  $\tau = 0.02$ , ce qui correspond à une zone concave. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 0.15%.

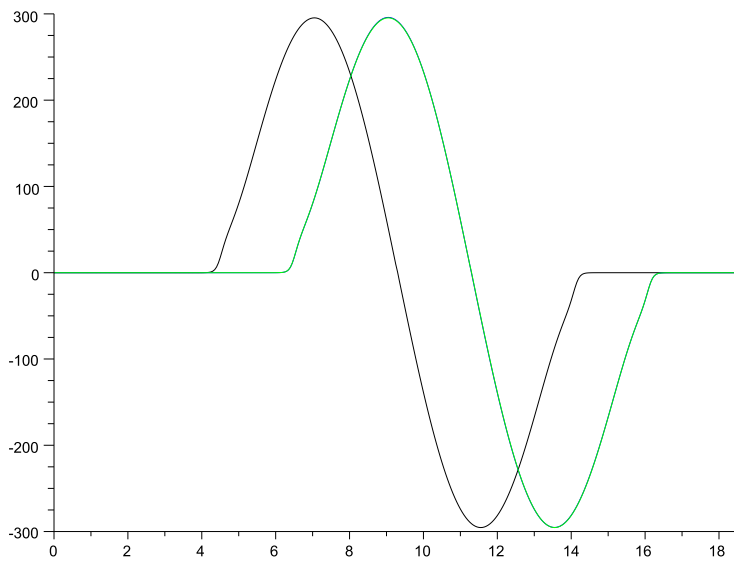


FIGURE 6.3 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 50.018$ ,  $\tau = 0.1$ , ce qui correspond à une zone convexe. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 0.2%.

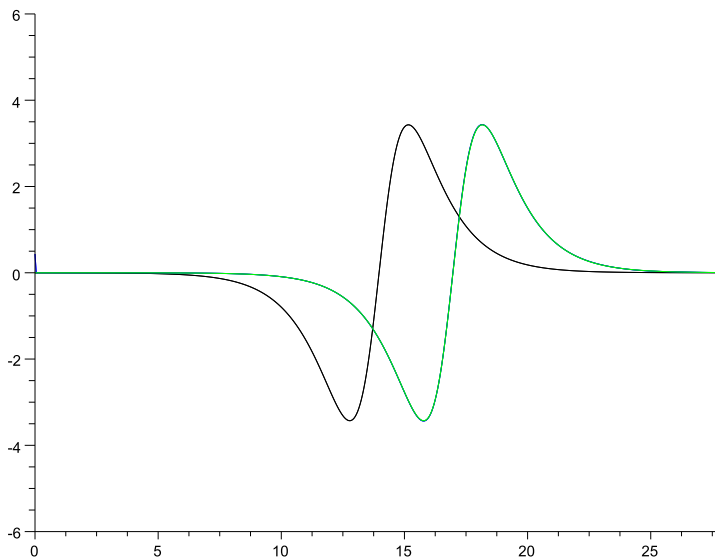


FIGURE 6.4 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 180$ ,  $\tau = 0.15$  ( $v_\infty$  est un maximum), ce qui correspond à une zone convexe. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 2%.



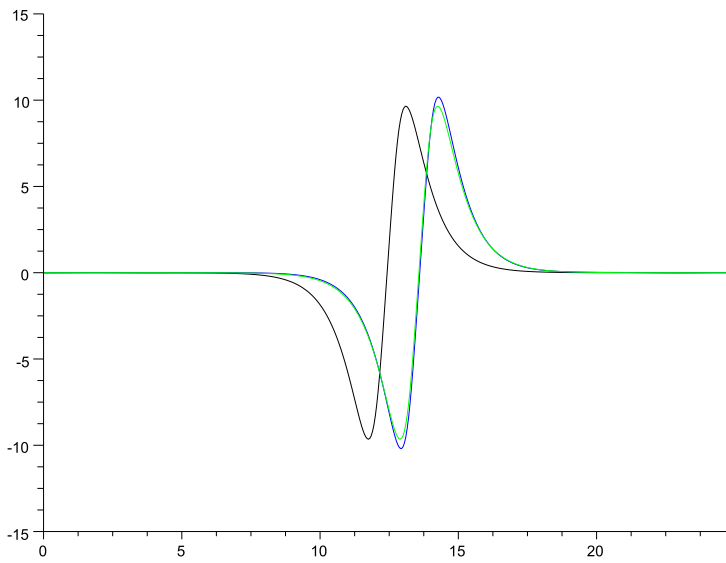


FIGURE 6.5 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 180$ ,  $\tau = 0.06$  ( $v_\infty$  est un maximum), ce qui correspond à une zone concave. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 6.3%.

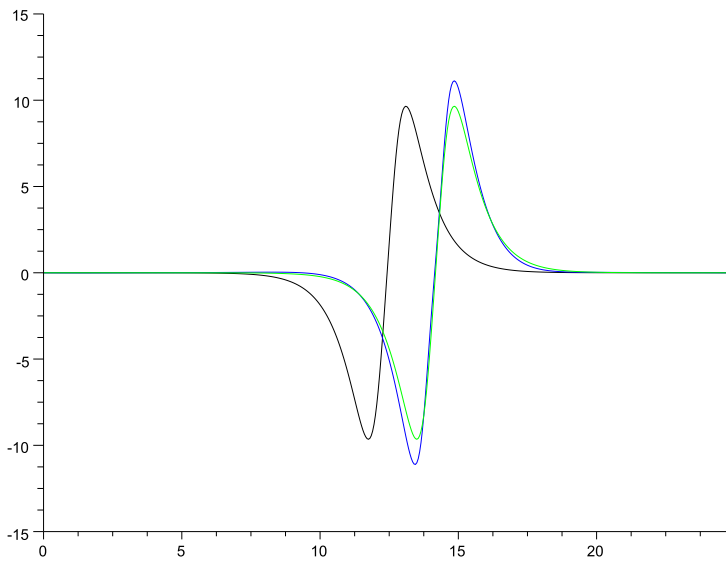


FIGURE 6.6 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 180$ ,  $\tau = 0.06$  ( $v_\infty$  est un maximum), ce qui correspond à une zone concave. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 30$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 14%.

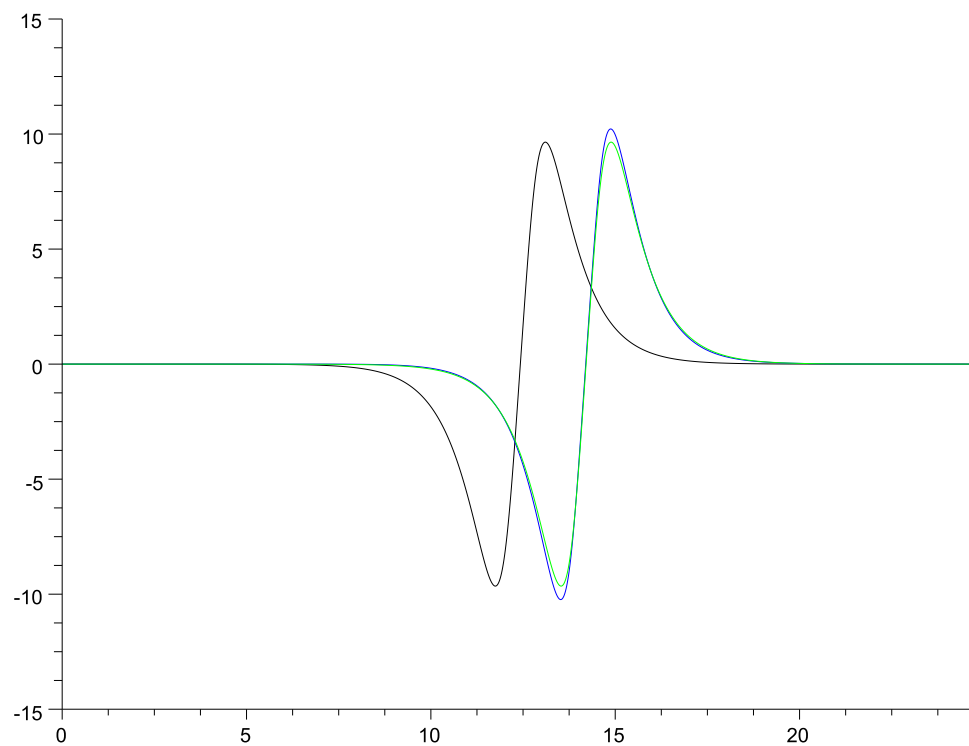


FIGURE 6.7 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 180$ ,  $\tau = 0.06$  ( $v_\infty$  est un maximum), ce qui correspond à une zone concave. On prend ici  $dt = 1/600$ ,  $\Delta x = 1/60$ . En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 30$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 5.1%.

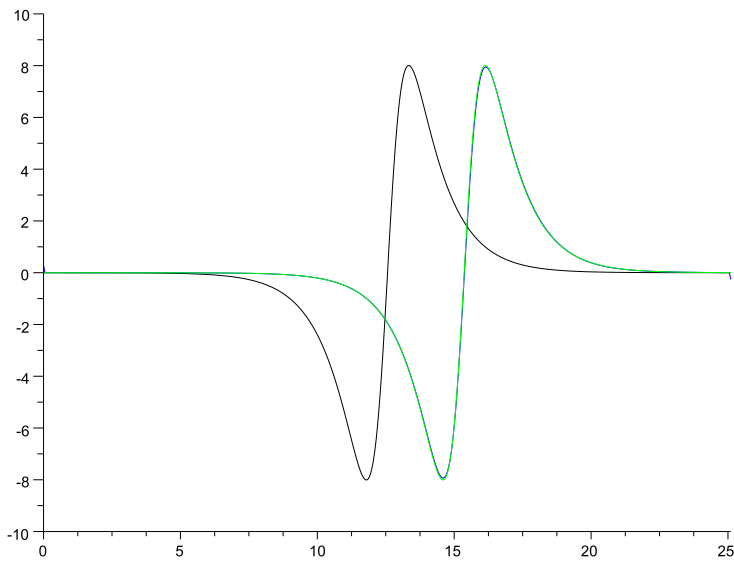


FIGURE 6.8 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 201.179$ ,  $\tau = 0.14$  ( $v_\infty$  est un maximum), ce qui correspond à une zone concave. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 1.6%.

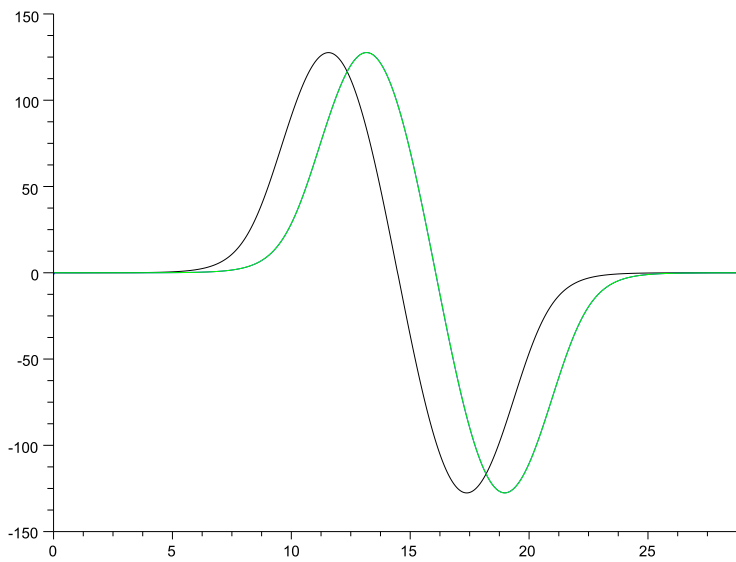


FIGURE 6.9 – Graphe de  $w$  pour  $v_\infty = 201.179$ ,  $\tau = 0.08$  ( $v_\infty$  est un minimum), ce qui correspond à une zone convexe. En noir la donnée initiale, en bleu la solution numérique à  $t = 20$  et en vert la solution exacte. L'erreur relative est de 0.14%.

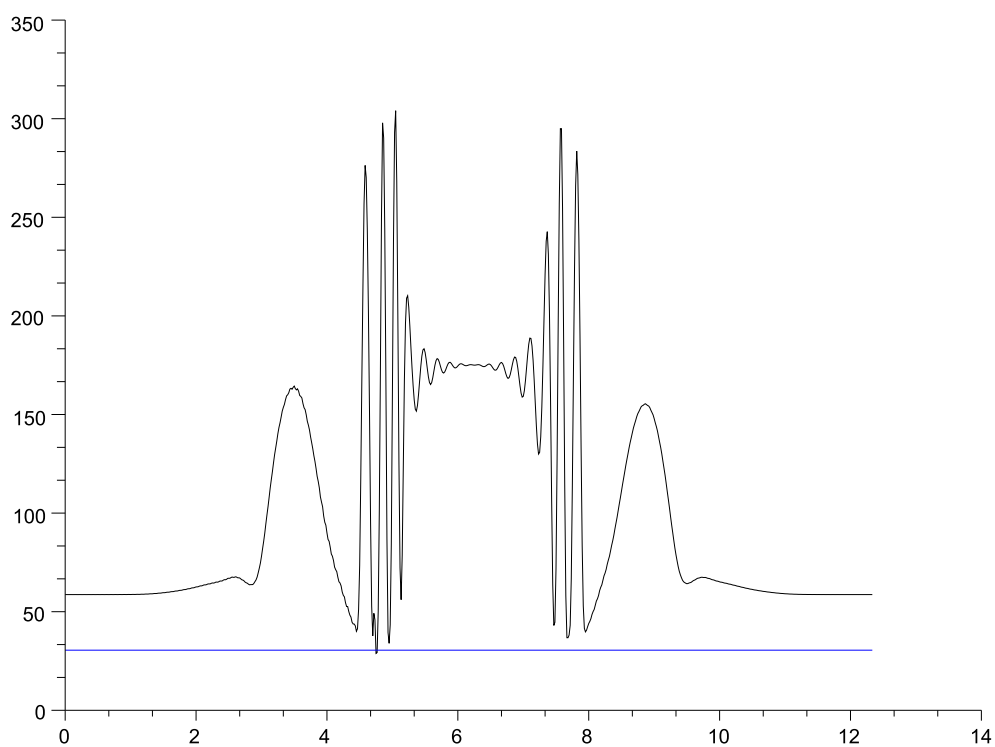


FIGURE 6.10 – En noir, graphe de  $v$  à  $t = 4.2$ , pour une donnée initiale  $(\underline{v}(\cdot/3), \underline{u}(\cdot/3), \underline{w}(\cdot/3))$ , avec  $(\underline{v}, \underline{u}, \underline{w})$  le profil du soliton de vitesse 0,01 et d'état infini 58.678. En bleu, la droite  $y = 30.49$ .



# Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse a m'a permis de me familiariser avec la théorie générale des problèmes aux limites hyperboliques et aux notions associées ; calcul pseudo/para-différentiel, symétriseurs de Kreiss, réflexion de singularités... Une contribution à ce domaine a été la généralisation d'un résultat de J. Rauch, pour laquelle j'ai montré que les problèmes aux limites hyperboliques à multiplicité constante sont bien posés pour des données initiales  $L^2$ .

J'ai alors mis en évidence une classe d'équation aux dérivées partielles pour laquelle les techniques d'analyse des problèmes hyperboliques s'avèrent fructueuses. Ce choix a été motivé par plusieurs raisons : satisfaction du critère de Petrowsky (nature bien posée du problème de Cauchy), et nécessité d'englober une classe d'équations assez large, en particulier en vue de l'analyse du problème aux limites pour le modèle d'Euler-Korteweg. La nature dispersive des équations étudiées a été soulignée par un résultat d'effet régularisant « à la Kato ».

J'ai alors développé des versions quasi-homogènes des concepts manipulés pour les problèmes hyperboliques (condition de Kreiss-Lopatinskiï, symétriseurs de Kreiss...), ce qui m'a permis de montrer que les problèmes aux limites « purs » sur le demi-espace ainsi que les problèmes à donnée initiale nulle sont bien posés sous des hypothèses *ad hoc*.

L'analyse de ces problèmes pour des données initiales non nulles est comprise (au moins pour le cas des coefficients constants) en dimension 1 d'espace. Il reste cependant plusieurs interrogations en dimension supérieure. Au vu de la discussion du paragraphe 5.1.3, il n'est pas certain que les estimations obtenues impliquent les espaces de trace « optimaux », et l'analyse du problème à données initiales non nulles doit encore être faite. La stratégie de la proposition 6.3.4 semble une direction prometteuse.

L'analyse du problème à coefficients variables a pu être effectuée lorsque les coefficients des dérivées « d'ordre élevé » sont constants, ce qui est cohérent avec les résultats sur la stabilité du critère de Petrowsky. L'analyse d'un problème où tous les coefficients seraient variables est pourtant nécessaire, ne serait-ce que pour traiter les problèmes posés sur des ouverts plus généraux. En dimension supérieure à 1 c'est un problème clairement difficile qui imposera certainement des hypothèses plus précises que la régularité des coefficients. Une autre direction importante est l'étude de problèmes semi-linéaires, pour lesquels j'espère appliquer les méthodes usuelles (itérative, point fixe...) au moins pour des ni-

veaux de régularité assez élevés.

J'ai également développé une approche numérique élémentaire pour l'analyse qualitative du problème d'Euler-Korteweg. Les tests numériques ont mis en évidence le fait que le problème de Cauchy n'admet pas forcément de solution globale en temps, et on a pu observer un défaut de stabilité dans le profil d'un soliton. Il faut cependant rappeler que les conditions aux limites utilisées ne sont pas suffisamment adaptées à l'étude d'un problème non linéaire. Cela appelle le développement de conditions aux limites plus pertinentes, que ce soit pour le problème aux limites semi-linéaire ou quasi-linéaire (dont l'analyse numérique comme théorique est essentiellement vierge). Enfin, comme il est important de savoir si des conditions aux limites définissent un problème (localement) bien posé, on souligne que l'estimation *a priori* obtenue pour le problème d'Euler-Korteweg semi-linéaire en coordonnées lagrangiennes devrait permettre l'obtention par une méthode itérative de résultats d'existence et d'unicité pour toute condition aux limites satisfaisant (KLU).

# Annexe A

## Densité et traces

La première proposition est très simple et non optimale.

**Proposition A.0.9.** *Soit  $m \geq 1$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ . L'opérateur de trace  $H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\partial\Omega)$ ,  $u \rightarrow u|_{x_d=0}$  est défini et continu, avec  $\|u|_{x_d=0}\|_{H^{m-1}} \lesssim \|u\|_{H^m}$ .*

*Démonstration.* On décompose  $x = (x', x_d)$ . Par densité, il suffit de prouver le résultat pour une fonction  $u$  régulière. Pour  $m = 1$  on utilise l'identité

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^2 &= 2 \int_{\mathbb{R}^+} u(x', x_d) \partial_{x_d} u(x', x_d) dx_d \\ \Rightarrow \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_d} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Le cas général se fait de la même manière en utilisant

$$|\partial_x^k u(x', 0)|^2 = \int \partial_x^k u \partial_x^{k+1} u dx_d.$$

□

**Proposition A.0.10.** *L'opérateur de trace est défini et continu sur  $H^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^s)$  à valeur dans  $H_{\gamma,p}^{s/2}$ .*

*Démonstration.* Soit  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t)$ . Notons  $u_b$  sa restriction à  $x_d = 0$ , on utilise l'identité

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_b(\tau, \eta)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\eta, \eta_d, \tau) d\eta_d \right| \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 (\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s} + \eta_d^2) d\eta_d} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s} + \eta_d^2} d\eta_d}, \end{aligned}$$

soit après changement de variable  $\eta_d = \widetilde{\eta}_d \sqrt{\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s}}$

$$\widehat{u}_b(\tau, \eta) = \sqrt{\pi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 (\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s} + \eta_d^2) d\eta_d} \sqrt{\frac{1}{\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s}}},$$



on intègre alors en  $\tau, \eta$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \|u_b\|_{H_{\gamma,p}^{s/2}}^2 &= \int \sqrt{\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s}} |\widehat{u}_b|^2 d\delta d\eta \\ &\leq \pi \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 (\gamma^{2s/p} + \delta^{2s/p} + |\eta|^{2s} + \eta_d^2) d\eta_d d\eta d\delta \\ &= \pi \|u\|_{H^1(\mathbb{R}; H_{\gamma,p}^s)} . \end{aligned}$$

On définit par densité la trace sur  $H^1(\mathbb{R}; H_{\gamma,p}^s)$ , puis sur  $H^1(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^s)$  en utilisant le fait que  $u \in H^1(\mathbb{R}^+; H_{\gamma,p}^s)$  est la restriction d'une fonction  $H^1(\mathbb{R}; H_{\gamma,p}^s)$  (il est clair que la trace est indépendante du choix du prolongement, puisque la continuité de l'opérateur trace implique  $u|_{x_d=r} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} u|_{x_d=0}$ ).  $\square$

**Proposition A.0.11.** *Soit  $V = \{u \in L_{\gamma}^2(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) : Lu \in L^2(H_{\gamma,p}^{p-1})\}$  avec  $L$  comme dans 4.3.6 p.83, que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_V = \|L(\cdot)\|_{L^2} + \|\cdot\|_{L^2(H_{\gamma,p}^{p-1})}$ . L'espace  $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  est dense dans  $(V, \|\cdot\|_V)$ .*

*Remarque A.0.12.* On souligne le fait que l'on prend des fonctions *ne s'annulant pas forcément* en  $x_d = 0$ .

*Démonstration.* On fixe  $u \in V$ ,  $\chi \in C_c^{\infty}$ ,  $\chi_n = \chi(x/n)$  une suite tronquante (c'est à dire telle que  $\chi = 1$  pour  $|(x, t)| \leq 1$ ,  $\chi = 0$  pour  $|(x, t)| \geq 2$ ).

On a  $\chi_n u \rightarrow u$  dans  $V$ , en effet

$$\begin{aligned} \|\chi_n u - u\|_{L^2} &\rightarrow 0 \text{ par convergence dominée,} \\ \|L\chi_n u - Lu\|_{L^2(H_{\gamma,p}^{p-1})} &= \int \zeta^{2(p-1)} |L(\tau, \eta)|^2 |\widehat{\chi}_n * \widehat{u}(\eta, x_d, \tau) - \widehat{u}|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car  $\widehat{\chi}_n = n\widehat{\chi}(\cdot/n)$  est une suite régularisante (relativement à  $(\tau, \eta)$ ).

Supposons donc  $u$  à support compact, et on note  $\underline{u}$  son prolongement par 0 sur  $x_d < 0$ . On prend une suite régularisante de la forme  $\rho_n \otimes \lambda_n$ ,

$$\begin{aligned} \rho_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ supp}(\rho) \subset ]-1, 0], \\ \lambda_n : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} &\rightarrow \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Soit  $\underline{u}_n = (\rho_n \otimes \lambda_n) * \underline{u}$ , on a pour  $x_d > 0$

$$\begin{aligned} L\underline{u}_n(x', x_d, t) &= L \iint \rho_n(y_d) \lambda_n(y', s) \underline{u}(x' - y', x_d - y_d, t - s) dy ds \\ &= L \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} \int_{-1/n}^0 \rho_n(y_d) \lambda_n(y', s) u(x' - y', x_d - y_d, t - s) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} \int_{-1/n}^0 \rho_n(y_d) \lambda_n(y', s) Lu(x' - y', x_d - y_d, t - s) dy ds \\ &= ((\rho_n \otimes \lambda_n) * \underline{Lu})(x', x_d, t). \end{aligned}$$

Comme  $\rho_n \otimes \lambda_n$  est une suite régularisante, on en tire

$$\begin{aligned} \underline{u}_n|_{x_d>0} &\longrightarrow u (L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*})), \\ (L\underline{u}_n)|_{x_d>0} &= ((\rho_n \otimes \lambda_n) * \underline{Lu})|_{x_d>0} \longrightarrow Lu (L^2(\mathbb{R}^{+*}; H_{\gamma,p}^{p-1}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1})), \end{aligned}$$

(dans le deuxième cas, on utilise le fait que généralement,  $\mu_n * v \longrightarrow v$  dans  $H_{\gamma,p}^s(\mathbb{R}^k)$  lorsque  $\mu_n$  est une suite régularisante).  $\square$

**Corollaire A.0.13.** *On peut définir un opérateur trace  $V \longrightarrow H_{\gamma,p}^{-1/2}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{d-1})$ , prolongement de l'opérateur défini sur  $C_c^\infty$  qui à  $\psi$  associe  $\psi|_{x_d=0}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\psi \in C_c^\infty$ ,  $\underline{\psi}$  son prolongement par 0 sur  $x_d < 0$ . Puisque  $L = \partial_{x_d} - G$ , avec  $G$  opérateur tangentiel, on a

$$L\underline{\psi} = \underline{L\psi} + \delta(x_d) \otimes (\psi|_{x_d=0})$$

d'où  $\|\delta \otimes \psi\|_{H_{\gamma,p}^{-1}} \leq C(\|\underline{\psi}\|_{L_\gamma^2} + \|\underline{L\psi}\|_{L_\gamma^2})$ . Posons alors  $\psi(x_1, \dots, x_{d-1}, 0, t) = \varphi(x', t)$ , on a

$$\|\delta \otimes \psi\|_{H_{\gamma,p}^{-1}}^2 = \int \frac{|\widehat{\varphi}(\tau, \eta)|^2}{\gamma^{2/p} + \delta^{2/p} + |\eta|^2 + \eta_d^2} d\delta d\eta d\eta_d$$

d'où en posant  $\eta_d = \sqrt{\gamma^{2/p} + \delta^{2/p} + |\eta|^2} \widetilde{\eta}_d$  :

$$\|\delta \otimes \varphi\|_{H_{\gamma,p}^{-1}}^2 = \int \frac{|\widehat{\varphi}(\tau, \eta)|^2 \sqrt{\gamma^{2/p} + \delta^{2/p} + |\eta|^2}}{(\gamma^{2/p} + \delta^{2/p} + |\eta|^2)(1 + \widetilde{\eta}_d^2)} d\delta d\eta d\widetilde{\eta}_d = \pi \|\varphi\|_{H_{\gamma,p}^{-1/2}}^2,$$

ainsi l'opérateur de trace est continu  $(C_c^\infty, \|\cdot\|_V) \longrightarrow H_{\gamma,p}^{-1/2}$ , et se prolonge sur  $V$  par densité d'après la proposition précédente.  $\square$



# Liste des symboles

- $\simeq$  , page 36
- $\mathbb{C}^+$ ,  $\mathbb{C}^{++}$  , page 72
- $\Lambda_{\gamma,p}$  , page 67
- $\mathbb{S}_p^+$ ,  $\mathbb{S}_p^{++}$ ,  $\mathbb{S}_p^0$  , page 72
- $\mathcal{E}^+$ ,  $\mathcal{E}^{++}$ ,  $\mathcal{E}^0$  , page 72
- $\partial_{\mathbf{n}}$  , page 134
- $\mathbb{R}_t$  , page 9
- $\hat{u}$  transformée de Fourier-Laplace , page 67
- $\zeta_p$  , page 67
- $A_\gamma$  (opérateur générique), page 68
- $B_p^+$ ,  $B_p^{++}$ ,  $B_p^0$  , page 72
- $d_p^c$   $p$ -degré , page 49
- $D_j = \partial/(i\partial_j)$  , page 53
- $E^+(G(\tau, \eta))$  , page 10
- $E^-(G(\tau, \eta))$  , page 10
- $G_\gamma$  , page 71
- $H_{\gamma,p}^s$  , page 69
- $H_{\gamma,p}^{s,r}$  , page 110
- $H_{0,\gamma,p}^s$  , page 110
- $K(\rho)$  « capillarité », page 1
- $L_\gamma^2$  , page 67
- (KLU) , page 78



# Bibliographie

- [1] X. Antoine and C. Besse. Unconditionally stable discretization schemes of non-reflecting boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.*, 188(1) :157–175, 2003.
- [2] Xavier Antoine, Anton Arnold, Christophe Besse, Matthias Ehrhardt, and Achim Schädle. A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Comput. Phys.*, 4(4) :729–796, 2008.
- [3] Xavier Antoine, Christophe Besse, and Stéphane Descombes. Artificial boundary conditions for one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6) :2272–2293 (electronic), 2006.
- [4] Anton Arnold, Matthias Ehrhardt, and Ivan Sofronov. Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation : fast calculation, approximation, and stability. *Commun. Math. Sci.*, 1(3) :501–556, 2003.
- [5] C. Audiard. Kreiss symmetrizer and boundary conditions for the euler–korteweg system in a half space. *J. Differential Equations*, 249(3) :599–620, 2010.
- [6] V. A. Baskakov and A. V. Popov. Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation. *Wave Motion*, 14(2) :123–128, 1991.
- [7] S. Benzoni-Gavage. Spectral transverse instability of solitary waves in Korteweg fluids. *J. Math. Anal. Appl.*, 361(2) :338–357, 2010.
- [8] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, and S. Descombes. On the well-posedness for the euler-korteweg model in several space dimensions. *Indiana Univ. Math. J.*, 56 :1499–1579, 2007.
- [9] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, S. Descombes, and D. Jamet. Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces. *Interfaces Free Bound.*, 7(4) :371–414, 2005.
- [10] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, S. Descombes, and D. Jamet. Stability issues in the euler korteweg model. *AMS*, 220 :103–127, 2007.
- [11] Sylvie Benzoni-Gavage, Raphaël Danchin, and Stéphane Descombes. Well-posedness of one-dimensional Korteweg models. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 59, 35 pp. (electronic), 2006.

- [12] Sylvie Benzoni-Gavage and Denis Serre. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2007. First-order systems and applications.
- [13] J. Bona, M. Sun, and B. Zhang. A non homogeneous boundary value problem for the Korteweg de Vries equation in a quarter plane. *Trans. AMS*, 354 :427–490, 2002.
- [14] Jerry L. Bona, S. M. Sun, and Bing-Yu Zhang. Non-homogeneous boundary value problems for the Korteweg-de Vries and the Korteweg-de Vries-Burgers equations in a quarter plane. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(6) :1145–1185, 2008.
- [15] Jerry L. Bona, Shu Ming Sun, and Bing-Yu Zhang. A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(7-8) :1391–1436, 2003.
- [16] Charles-Henri Bruneau and Laurent Di Menza. Conditions aux limites transparentes et artificielles pour l'équation de Schrödinger en dimension 1 d'espace. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(1) :89–94, 1995.
- [17] Jacques Chazarain and Alain Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [18] P. Constantin and J.-C. Saut. Local smoothing properties of dispersive equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(2) :413–439, 1988.
- [19] Jean-François Coulombel. Weak stability of nonuniformly stable multidimensional shocks. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(1) :142–172 (electronic), 2002.
- [20] Jean-François Coulombel. Weakly stable multidimensional shocks. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(4) :401–443, 2004.
- [21] M. Ehrhardt and A. Arnold. Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation. *Riv. Mat. Univ. Parma (6)*, 4\* :57–108, 2001. Fluid dynamic processes with inelastic interactions at the molecular scale (Torino, 2000).
- [22] Bjorn Engquist and Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977.
- [23] A. V. Faminskii. An initial boundary-value problem in a half-strip for the Korteweg-de Vries equation in fractional-order Sobolev spaces. *Comm. Partial Differential Equations*, 29(11-12) :1653–1695, 2004.
- [24] Andrei V. Faminskii and Nikolai A. Larkin. Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 01, 20, 2010.
- [25] A. S. Fokas and B. Pelloni. The solution of certain initial boundary-value problems for the linearized Korteweg-de Vries equation. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 454(1970) :645–657, 1998.

- [26] A.S. Fokas and L.Y. Sung. Initial boundary value problems for linear dispersive evolution equations on the half-line. *Industrial mathematics institute at the University of South Carolina Technical report*, 1999.
- [27] Athanassios S. Fokas. *A unified approach to boundary value problems*, volume 78 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2008.
- [28] F. R. Gantmacher. *The theory of matrices. Vol. 1*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1998. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Reprint of the 1959 translation.
- [29] Lars Gårding. Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. *Acta Math.*, 85 :1–62, 1951.
- [30] Lars Gårding. Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. In *La théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, 9-15 avril 1956*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXI, pages 71–90. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1956.
- [31] S. G. Gindikin and L. R. Volevich. *Mixed problem for partial differential equations with quasihomogeneous principal part*, volume 147 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the Russian manuscript by V. M. Volosov.
- [32] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.
- [33] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [34] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. of Math. (2)*, 83 :129–209, 1966.
- [35] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Distribution theory and Fourier analysis.
- [36] Tosio Kato. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. In *Studies in applied mathematics*, volume 8 of *Adv. Math. Suppl. Stud.*, pages 93–128. Academic Press, New York, 1983.
- [37] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [38] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2) :323–347, 1991.



- [39] D.J. Korteweg. Sur la forme que prennent les équations des mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires par des variations de densité. *Arch. Néer. Sci. Exactes Sér. II*, 6 :1–24, 1901.
- [40] Heinz-Otto Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :277–298, 1970.
- [41] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 47 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004. Reprint of the 1989 edition.
- [42] Richard Lascar. Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à partie principale quasi homogène. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 279 :737–739, 1974.
- [43] Richard Lascar. Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 27(2) :vii–viii, 79–123, 1977.
- [44] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [45] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18. Dunod, Paris, 1968.
- [46] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 3*. Dunod, Paris, 1970. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 20.
- [47] A. Majda. The stability of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 41(275) :iv+95, 1983.
- [48] Andrew Majda and Stanley Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5) :607–675, 1975.
- [49] B Mayfield. *Non-local boundary conditions for the Schrödinger equation*. PhD thesis, University of Rhodes Island, Providence, 1989.
- [50] G. Métivier. Stability of multidimensional shocks. In *Advances in the theory of shock waves*, volume 47 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 25–103. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [51] Guy Métivier. The block structure condition for symmetric hyperbolic systems. *Bull. London Math. Soc.*, 32(6) :689–702, 2000.
- [52] Guy Métivier and Kevin Zumbrun. Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear hyperbolic problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 175(826) :vi+107, 2005.
- [53] A Mokrane. *Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1987.

- [54] L. Nirenberg. *Lectures on linear partial differential equations*. American Mathematical Society, 1973. Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the Texas Technological University, Lubbock, Tex., May 22–26, 1972, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 17.
- [55] L. Nirenberg. Propagation of singularities for linear partial differential equations and reflections at a boundary. In *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1975/1976), Équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle*, pages Exp. No. 26, 19. Centre Math., École Polytech., Palaiseau, 1976. Paper presented at Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975.
- [56] James V. Ralston. Note on a paper of Kreiss. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24(6) :759–762, 1971.
- [57] Jeffrey Rauch. *Energy inequality for hyperbolic initial boundary value problems*. PhD thesis, New York University, 1971.
- [58] Jeffrey Rauch.  $\mathcal{L}_2$  is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 25 :265–285, 1972.
- [59] Luc Robbiano and Claude Zuily. Microlocal analytic smoothing effect for the Schrödinger equation. *Duke Math. J.*, 100(1) :93–129, 1999.
- [60] Monique Sablé-Tougeron. Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3) :261–292, 1988.
- [61] Reiko Sakamoto. Mixed problems for hyperbolic equations. I. Energy inequalities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 10 :349–373, 1970.
- [62] Reiko Sakamoto. Mixed problems for hyperbolic equations. II. Existence theorems with zero initial datas and energy inequalities with initial datas. *J. Math. Kyoto Univ.*, 10 :403–417, 1970.
- [63] Denis Serre. *Matrices*, volume 216 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. Theory and applications, Translated from the 2001 French original.
- [64] Jérémie Szeftel. Design of absorbing boundary conditions for Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^d$ . *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(4) :1527–1551 (electronic), 2004.
- [65] Jérémie Szeftel. Réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger. *Comm. Partial Differential Equations*, 29(5-6) :707–761, 2004.
- [66] C. Truesdell and W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004. Edited and with a preface by Stuart S. Antman.
- [67] L. R. Volevič and S. G. Gindikin. Energy estimates in a mixed problem for  $(2b + 1)$ -hyperbolic equations. *Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint*, (137) :63, 1978.

- [68] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [69] Jared Wunsch. Propagation of singularities and growth for Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, 98(1) :137–186, 1999.
- [70] Kevin Zumbrun. A sharp stability criterion for soliton-type propagating phase boundaries in Korteweg’s model. *Z. Anal. Anwend.*, 27(1) :11–30, 2008.