



HAL
open science

Etude mécano-fiabiliste et réduction du modèle des problèmes vibro-acoustiques à paramètres aléatoires

Mohamed Mansouri

► **To cite this version:**

Mohamed Mansouri. Etude mécano-fiabiliste et réduction du modèle des problèmes vibro-acoustiques à paramètres aléatoires. Mécanique [physics]. INSA de Rouen; Université Hassan Ier (Settat, Maroc), 2013. Français. NNT : 2013ISAM0011 . tel-00845562

HAL Id: tel-00845562

<https://theses.hal.science/tel-00845562>

Submitted on 17 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE

Présentée le 22 Avril 2013 par

Mohamed MANSOURI

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Institut des Sciences Appliquées de Rouen

Discipline : Mécanique

Option : Mécanique numérique et informatique

Ecole Doctorale SPMI

et de

Docteur de l'Université Hassan 1^{er} Settât

Discipline : Physique et Science de l'Ingénieur

*Etude mécano-fiabiliste et réduction du
modèle des problèmes vibro-acoustiques
à paramètres aléatoires*

Membre de Jury :

Pr. Abdelghani Saouab	Président	Professeur, Université Le Havre, France
Pr. Moussa Karama	Rapporteur	Professeur, ENI Tarbes, France
Pr. Ahmed Mousrij	Rapporteur	Professeur, FST Settât, Maroc
Pr. Abdellah Menou	Rapporteur	Professeur, AIAC Mohamed VI, Maroc
Pr. Abdelkhalak El Hami	Directeur de thèse	Professeur, INSA Rouen, France
Pr. Bouchaïb Radi	Directeur de thèse	Professeur, FST Settât, Maroc
Pr. Hicham Fassi-Fihri	Examineur	Professeur, FST Settât, Maroc

à l'âme de mon Père
à l'âme de Abdo
à ma chère mère

Remerciements

C'est avec un réel plaisir et un grand enthousiasme que je me livre à la rédaction de cette page. C'est l'opportunité de remercier toutes les personnes, sans lesquelles cette thèse n'aurait pu aboutir, pour m'avoir aidé et soutenu tout au long de ce travail de recherche.

Je tiens tout particulièrement à remercier mes directeurs de thèse, Monsieur BOUCHAÏB RADI, professeur à la faculté des Sciences et Techniques de Settat et Monsieur ABDELKHALAK EL HAMI, professeur à l'INSA de Rouen pour toutes les qualités avec lesquelles ils ont dirigé ce travail, mais également pour le soutien et la confiance qu'ils m'ont toujours témoigné. Je suis heureux de pouvoir leur exprimer ici mes sincères remerciements. Je suis reconnaissant pour leur patience, leur sympathie et leur disponibilité à tout moment. Je laisse une porte ouverte pour de nouveaux travaux ensemble et pour des coopérations futures.

Je tiens à remercier encore Monsieur BOUCHAÏB RADI, pour son énergie, ses connaissances scientifiques et techniques et la vision qu'il a pu me transmettre pendant nos réunions. Je pense sincèrement m'être enrichi à son contact. Merci également de fond du cœur pour son soutien humain, sans lequel ce projet de thèse ne serait jamais arrivé à bon port.

Je tiens à remercier encore une fois Monsieur ABDELKHALAK EL HAMI, qui m'a accueilli dans son équipe et qui a rendu mon séjour en France agréable et qui a assuré l'encadrement scientifique durant ces trois années de thèse, en m'accordant sa confiance, son soutien.

Je tiens à remercier le professeur ABDELGHANI SAOUAB, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

J'ai grandement apprécié la présence au sein de mon jury des professeurs MOUSSA KARAMA, AHMED MOUSRIJ et ABDELLAH MENOUE, en tant que rapporteurs. Ils ont contribué, par leurs nombreuses remarques et suggestions, à enrichir le débat scientifique, et je leur en suis très reconnaissant. Je les remercie très sincèrement d'avoir fait preuve de patience dans la longue épreuve que peut constituer la lecture attentive et critique de cette thèse.

Je suis très honoré que le professeur HICHAM FASSI-FIHRI ait accepté d'être examinateur de cette thèse, J'ai apprécié ses avis éclairés sur le fond et la forme de ce document.

J'adresse une pensée au professeur ABDELILLAH MAKRIZI, de sa patience, sa disponibilité et son amitié. Je le remercie pour son soutien, son encouragement et d'être un interlocuteur inspiré et bienveillant.

Je remercie également le professeur AZIZ ELHAMDOUNI de l'université de la Rochelle qui m'a accueilli dans l'école d'été et qui a répondu à toutes mes questions avec patience.

Je tiens à remercier également l'action intégré : Ref/Volubilis AI : 039/SI /13.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à Mr KHALIL ATANI. Je lui exprime ma profonde sympathie et lui souhaite beaucoup de bien.

Mes profonds remerciements vont à ma chère mère à qui je dédie ce travail.

Je remercie chaleureusement ma femme qui m'a soutenu sans conditions, elle m'a toujours encouragé à continuer dans les moments de stress, ainsi mes enfants MOHAMED AMINE, FATIMA EZZAHRA et RAYANE.

A tous ceux qui n'ont pas été nominalement ou formellement mentionnés dans ces pages, mais qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de cette thèse.

Mohamed Mansouri

Résumé

Dans de nombreuses applications industrielles, les structures en vibration à dimensionner sont en contact avec un fluide (fluide autour des coques des bateaux, réservoirs, échangeurs de chaleur dans les centrales, l'industrie automobile, etc). Cependant, le comportement dynamique de la structure peut être modifié de façon importante par la présence du fluide. Le dimensionnement doit donc prendre en compte les effets de l'interaction fluide-structure.

Ces applications nécessitent un couplage efficace. En outre, l'analyse dynamique des systèmes industriels est souvent coûteuse du point de vue numérique. Pour les modèles éléments finis des problèmes couplés fluide-structure, l'importance de la réduction de la taille devient évidente car les degrés de liberté du fluide seront ajoutés à ceux de la structure. Des méthodes de réduction du modèle seront utilisées pour réduire la taille des matrices obtenues.

Traditionnellement, l'étude de ces systèmes couplés est fondée sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres utilisés dans le modèle prennent une valeur fixe. Par contre, il suffit d'avoir procédé à quelques expérimentations pour se rendre compte des limites d'une telle modélisation, d'où la nécessité de la prise en compte des incertitudes sur les paramètres du système couplé.

Ce travail de thèse s'articule autour de trois études principales. La première consiste à mener une étude déterministe numérique et analytique des problèmes vibro-acoustiques sans réduction de modèles. Cette dernière est basée sur une formulation non symétrique déplacement/pression et une formulation symétrique déplacement/pression et potentiel des vitesses. Dans la deuxième étude, on propose deux méthodes de réduction du modèle : analyse et synthèse modales pour la résolution des problèmes vibro-acoustiques des grandes tailles des systèmes couplés modélisés par la méthode des éléments finis. La méthode de synthèse modale développée couple une

méthode de sous-structuration dynamique de type Craig et Bampton et une méthode de sous-domaines acoustiques.

Enfin, pour tenir compte des incertitudes sur les paramètres du système couplé, on a développé dans la troisième étude une méthode numérique stochastique de synthèse modale étendue à une étude de fiabilité basée sur les approches FORM et SORM pour la résolution de ces problèmes. Ces démarches vont nous permettre de résoudre les problèmes vibro-acoustiques, sans utiliser les méthodes classiques, qui consistent à faire un calcul modal direct allié à la simulation de Monte Carlo demandant un coup de temps très élevé.

Plusieurs exemples académiques et industriels ont été traités pour valider les approches proposées. L'étude numérique est conduite en utilisant un code élaboré sous MATLAB couplé au code commercial ANSYS afin d'évaluer la fiabilité du système couplé. La confrontation des résultats numériques, analytiques et expérimentaux nous permet de valider conjointement le processus de calcul et les méthodes proposées dans le domaine de l'analyse fréquentielle et l'étude fiabiliste des structures immergées. D'un point de vue industriel, ces méthodes visent à promouvoir l'introduction de la culture de l'incertain dans les métiers de la conception et encouragent la construction d'un modèle fiable et robuste pour les problèmes d'interaction fluide-structure.

Mots clés : Interaction fluide-structure, Vibro-acoustique, Réduction du modèle, Simulation numérique, Eléments finis, Fiabilité.

Abstract

In several industrial applications, the vibrating structures are in contact with a fluid (fluid around the hulls of a boats, reservoirs, heat exchangers in power plants, ...), but the dynamic behavior of the structure can be significantly modified by the presence of the fluid. The sizing must take into account the effects of fluid-structure interaction. These applications require an effective coupling. In addition, the dynamic analysis of the industrial systems is often expensive from the numerical point of view. For the coupling fluid structure finite elements models, the importance of the size reduction becomes obvious because the fluid's freedom degrees will be added to those of the structure. A proposed condensation method will be used to reduce the matrixes size. Traditionally, the study of the fluid-structure interaction is based on a deterministic approach where all the parameters used in the model have a fixed value. But it suffices having conducted a few experimentations to realize the limitations of such modeling. Hence it need to take into accounts the uncertainty on the parameters of mechanical systems.

In this thesis, we deal with the simulation of vibro-acoustic problems. The first part presents a numerical and analytical study of deterministic problems without model's reduction, based on a non-symmetric formulation displacement/pressure and on a symmetric formulation displacement/pressure and velocity potential.

In the second part of this work, two methods are proposed to reduce the model : modal analysis and modal synthesis for solving vibro-acoustic problems of large sizes modeled by finite elements method. The developed modal synthesis method is coupling dynamic substructure of Craig and Bampton type and acoustic subdomain based on a pressure formulation.

To take into account the parameter's uncertainties of the coupled system, we have developed a numerical stochastic method of the modal synthesis and modal analysis extended to reliability

study, based on the FORM and SORM approaches. These approaches will allow us to solve the vibro-acoustic problems without using classical procedure. It may become prohibitive in terms of computation time.

Several academic and industrial examples are studied to validate the proposed methods. The numerical study is performed using a code developed with MATLAB coupled with the commercial code ANSYS in order to evaluate the reliability of systems. The comparison of numerical, analytical and experimental results enables us to jointly validate the calculation process and the proposed methods in the domain of frequency analysis and reliability study of submerged structures. From the industrial point of view, our research work aim is to promote the introduction of the uncertainty's culture during modeling in the context of design processes.

Keywords : Interaction fluid-structure, Vibro-acoustic problem, Reduction of the model, Numerical simulation, FEM, Reliability analysis.

Table des matières

dédicace	i
Résumé	iv
Abstract	vi
Liste des tableaux	xiii
Table des figures	xvi
Introduction générale	xix
I Présentation des problèmes vibro-acoustiques	1
1 Introduction	1
2 Equation du problème acoustique	2
3 Equation du problème dynamique	4
4 Equations du problème vibro-acoustique	5
4.1 Présentation du problème	7
4.2 Conditions aux limites et du couplage	8
4.3 Formulation du problème couplé fluide-structure non symétrique	9
4.4 Formulation du problème couplé fluide-structure symétrique	12
5 Approximation par la méthode des éléments finis	18
5.1 Discrétisation du problème couplé non symétrique	18
5.2 Discrétisation du problème couplé symétrique	23

6	Application aux plaques immergées	28
6.1	Etude du comportement vibro-acoustique d'une plaque élastique au sein d'une cavité acoustique	28
6.1.1	Equations du problème couplé fluide-structure	29
6.1.2	Formulation variationnelle du fluide	29
6.1.3	Formulation variationnelle de la plaque	33
6.1.4	Formulation du problème couplé	34
6.2	Résultats numériques	35
7	Application à l'étude d'un barrage	37
7.1	Présentation du problème	38
7.2	Formulation du problème couplé	39
7.3	Résolution numérique par la méthode des éléments finis	42
7.4	Résolution analytique	48
7.5	Comparaison des résultats	54
8	Conclusion	55
II Réduction de modèles par analyse et synthèse modales		57
1	Introduction	57
2	Réduction de modèle par analyse modale	59
2.1	Condensation par superposition modale du problème dynamique	60
2.2	Condensation par superposition modale du problème acoustique	60
2.3	Condensation par superposition modale du problème vibro-acoustique	61
3	Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale	62
3.1	Mise en équation	63
3.2	Formulation variationnelle du problème élasto-acoustique	64
3.3	Discrétisation par éléments finis	65
3.4	Calcul des modes élasto-acoustiques	66
3.5	Résultats numériques	67
3.5.1	Analyse modale numérique d'une plaque 2D immergée dans l'eau	67
3.5.2	Analyse modale numérique d'une plaque 3D immergée dans l'eau	71
3.5.3	Analyse modale numérique d'un solide 3D immergé dans l'eau	74
4	Réduction de modèle par synthèse modale	75
4.1	Introduction	75

Table des matières

4.2	Position du problème	76
4.3	Mise en équations du problème	77
4.4	Les formulations variationnelles	77
4.5	Approximation par éléments finis	78
4.6	Synthèse modale	79
5	Application numérique à une hélice de bateau	85
5.1	Hélice du bateau à quatre pales	85
5.1.1	Introduction	85
5.1.2	Facteurs de rendement de l'hélice	85
5.1.3	Définition de la géométrie d'une hélice	87
5.1.4	Cavitation	89
5.2	Résultats numériques	90
6	Conclusion	93
III Fiabilité des systèmes		95
1	Introduction	95
2	Problématique	96
3	Position d'un problème de fiabilité des structures	98
3.1	Modélisation d'un problème de fiabilité des structures	99
3.2	Modèle mécanique déterministe	99
3.3	Aléas et modélisation probabiliste	99
3.4	Variables aléatoires de base	100
3.4.1	Description des incertitudes	100
3.4.2	Description des variabilités	101
3.5	Fonction de performance	104
3.6	Point de conception	106
3.7	Transformation des variables de base	107
3.8	Modes de défaillance d'une structure	108
3.9	Probabilité de défaillance d'une structure	108
4	Calcul de la probabilité de défaillance	109
4.1	Calcul de la probabilité de défaillance par les méthodes de simulation	109
4.2	Calcul de la probabilité de défaillance à partir d'un indice de fiabilité	117
4.2.1	Indice de Rjanitzyne-Cornell	117
4.2.2	Indice de Hasofer et Lind	117
4.3	Méthode FORM	119

4.4	Méthode SORM	122
4.5	Méthode des surfaces de réponse	123
4.5.1	Principe et définition	124
4.5.2	Enjeux des surfaces de réponse en fiabilité	126
4.5.3	Stratégies de construction des surfaces de réponse	127
 IV Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste		 133
1	Introduction	133
2	Description de l’algorithme proposé	136
3	Plaque 2D sèche et immergée	137
3.1	Calcul probabiliste	138
3.2	Calcul de fiabilité	139
4	Plaque 3D sèche et immergée	141
4.1	Calcul probabiliste	141
4.2	Calcul de fiabilité	143
5	Bloc 3D immergé dans l’eau	143
5.1	Calcul probabiliste	144
5.2	Calcul de fiabilité	145
6	Hélice du bateau à quatre pales	145
6.1	Calcul probabiliste	147
6.2	Calcul de fiabilité	149
7	Interprétation et discussion	151
8	Conclusion	152
 Conclusion générale		 153
 Annexe 1		 156
9	Comportement acoustique d’un fluide compressible	156
9.1	Energie potentielle de déformation	156
9.2	Energie cinétique et travail des forces extérieures	157
9.3	Equation des petits mouvements du fluide	157
9.4	Conditions aux limites de types accélération normale des parois imposées	159
9.5	Equation du problème acoustique en régime harmonique	160
10	Comportement vibratoire d’une structure élastique	160
10.1	Loi de comportement en élasticité linéaire isotrope	161
10.2	Tenseurs de déformations	161

Table des matières

10.3	Conditions de compatibilité	162
10.4	Conservation de la quantité du mouvement	165
10.5	Les conditions aux limites	166
10.6	Equation du mouvement de la structure en régime harmonique	166
Annexe 2		167
1	Problèmes dynamiques linéaires	167
1.1	Equations du mouvement	167
1.2	Résolution en régime transitoire	168
1.3	Résolution en régime harmonique	168
1.4	Calcul direct	169
1.5	Calcul par superposition modale	169
1.6	Intégration directe	170
1.7	Méthode de Newmark	170
1.8	Méthode Wilson	171
2	Méthodes de synthèse modale	172
2.1	Introduction	172
2.2	Technique d'assemblage des sous-structures	174
2.3	Méthode à interface fixe	175
2.4	Méthode à interface libre de MacNeal	178
2.5	Méthode à interface libre	181
2.6	Méthode hybride	183
2.7	Réduction des d.d.l de jonction	183
Bibliographie		186

Liste des tableaux

A1.1 Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée sans réduction du modèle avec une formulation (u, p)	36
A1.2 Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée sans réduction du modèle avec une formulation (u, p, Φ)	36
A1.3 Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D sèche sans réduction.	37
A1.4 Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D immergée sans réduction.	38
A1.5 Les cinq premières fréquences propres de la poutre sèche.	55
A1.6 Les cinq premières fréquences propres de la poutre immergée.	55
A1.1 Dimensions géométriques et propriétés des matériaux pour la structure.	68
A1.2 Dimensions géométriques et propriétés des matériaux pour le fluide.	68
A1.3 Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée sans réduction.	69
A1.4 Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée avec réduction.	69
A1.5 Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D sèche avec réduction.	72
A1.6 Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D immergée avec réduction.	72
A1.7 Les cinq premières fréquences propres du bloc 3D sèche et immergé avec réduction.	75
A1.8 Les trois premières fréquences propres de l'hélice entière en air.	91

Liste des tableaux

A1.9 Les trois premières fréquences propres de l'hélice entière en eau.	91
A1.10 Les trois premières fréquences propres de la pale en air et en eau.	91
A1.1 Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques de la plaque 2D.	137
A1.2 Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques du fluide 2D	137
A1.3 les variables aléatoires	138
A1.4 Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 2D sèche	139
A1.5 Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 2D immergée	139
A1.6 Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 2D sèche	140
A1.7 Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 2D immergée	140
A1.8 Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques de la plaque 3D	141
A1.9 Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques du fluide	141
A1.10 Variables aléatoires	142
A1.11 Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 3D sèche	142
A1.12 Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 3D immergée	142
A1.13 Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 3D sèche	143
A1.14 Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 3D immergée	143
A1.15 Moyennes des paramètres et leurs écart-types et les lois de distribution pour le solide 3D	144
A1.16 Valeurs moyennes et les écart-types des cinq premières fréquences propres du solide 3D immergé	145
A1.17 Les paramètres de conception et leurs moments statistiques considérés dans le solide 3D immergé	145
A1.18 Caractéristiques Mécaniques de l'hélice	146
A1.19 Caractéristiques Mécaniques du fluide	146
A1.20 Variables aléatoires	147
A1.21 Moyennes et écarts-types des fréquences de l'hélice en air	147
A1.22 Modes propres de l'hélice en air calculé par FORM et SORM	148
A1.23 Moyennes et écarts-types des fréquences de l'hélice en eau	148
A1.24 Modes propres de l'hélice en eau calculé par FORM et SORM	148

A1.25	Paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans l'hélice en air	150
A1.26	Paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans l'hélice en eau	151

Table des figures

A1.1 Fonctionnement de certains systèmes par l'interaction fluide-structure	xx
A1.2 Dysfonctionnement de certains systèmes par l'interaction fluide-structure	xx
A1.1 Fluide compressible et conditions aux limites	3
A1.2 Structure élastique et conditions aux limites	5
A1.3 Schéma du couplage fluide-structure	7
A1.4 Plaque élastique couplée avec une cavité fluide	28
A1.5 Modèle éléments finis du système	35
A1.6 Discrétisation en éléments finis de la plaque 3D sèche et immergée	37
A1.7 Schéma de la poutre immergée dans l'eau	38
A1.8 Élément fini de la poutre	42
A1.9 Élément fini du fluide	45
A1.10 Principe du maillage du système couplé	47
A1.1 Modèle éléments finis du système	68
A1.2 L'impact du couplage sur la pression	69
A1.3 Les cinq premiers modes propres de la structure	70
A1.4 Les cinq premiers modes acoustiques	70
A1.5 Modèle de la plaque 3D immergée dans l'eau	71
A1.6 Discrétisation en éléments finis du système	72
A1.7 Les cinq premiers modes propres numériques	73
A1.8 Les cinq premiers modes propres expérimentaux	73
A1.9 Les types d'éléments et modèle éléments finis	74

A1.10	Forme générale d'une hélice	87
A1.11	Définition de la géométrie d'une pale	88
A1.12	Phénomène de cavitation (Harry Turner)	89
A1.13	Modèle éléments finis pour l'hélice entière	90
A1.14	Modèle éléments finis pour les sous-structures	91
A1.15	Les trois premiers modes de la pale en air et en eau	92
A1.16	Les trois premiers modes de l'hélice en air et en eau	92
A1.1	Fonction de répartition gaussienne, centrée, réduite	98
A1.2	Interprétation graphique des fonctions de densité et de répartition d'une variable aléatoire X	103
A1.3	Fonction de densité de probabilité conjointe dans le cas de deux variables aléatoires $X = X_1, X_2$: (a) représentation 3D, (b) isovalues de f_X	104
A1.4	Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables aléatoires $X = X_1, X_2$	106
A1.5	Transformation des variables de base.	107
A1.6	Calcul en parallèle des processus	111
A1.7	Illustration de la simulation de Monte Carlo dans l'espace standard.	112
A1.8	Exemple de Monte Carlo échantillonné à deux paramètres.	113
A1.9	Illustration de la simulation d'importance dans l'espace standard.	115
A1.10	Illustration de la simulation directionnelle.	116
A1.11	Illustration des simulations par hypercube latin.	116
A1.12	Représentation graphique de l'indice de Rjanitzyne-Cornell.	117
A1.13	Représentation géométrique de β_{HL} pour un problème à deux variables aléatoires	119
A1.14	Point le plus probable dans l'espace physique.	120
A1.15	Principe de la méthode FORM.	121
A1.16	Principe de la méthode SORM pour un problème à deux variables aléatoires.	122
A1.17	Schéma d'une fonction de transfert	124
A1.18	Expression formelle de la fonction de réponse	125
A1.19	Etapes de génération de la méthode de surfaces de réponse	126
A1.20	Comparaison d'une réponse mécanique et de sa surface de réponse.	127
A1.21	Définition des points du calcul pour le cas de deux variables.	129
A1.1	Algorithme de corrélation entre Matlab et Ansys.	136
A1.2	Interface fluide structure	138
A1.3	Discrétisation de la plaque 3D immergée	141

Table des figures

A1.4	Modèle élément finis du solide 3D couplé avec la cavité acoustique	144
A1.5	Modèle élément finis de l'hélice	146
A1.6	Sensibilité de la première fréquence en fonction du module d'Young	149
A1.7	Sensibilité de la première fréquence en fonction de la densité	149

Introduction générale

L'interaction fluide-structure concerne l'étude du comportement d'un solide en contact avec un fluide, dont la réponse peut être fortement affectée par l'action du fluide. Ces phénomènes sont courants et sont parfois à l'origine du fonctionnement de certains systèmes, ou au contraire manifestent un dysfonctionnement. Les vibrations altèrent l'intégrité des structures et doivent pouvoir être prédites afin d'éviter l'usure accélérée du système par fatigue du matériau, voire sa destruction lorsque les vibrations dépassent un certain seuil. On comprend bien alors l'importance d'établir au préalable de toute réalisation des modèles fiables permettant de prédire de tels comportements.

Actuellement, de multiples problèmes de couplage fluide-structure [2, 97, 105, 128, 129] se posent, par exemple, en génie environnemental dans le cas du transport de produits toxiques fluides, dans le cas de l'écoulement autour des pales d'éolienne, dans l'industrie automobile, dans le domaine aéronautique et aéro-acoustique, dans l'industrie de transport, et en industrie navale où l'étude de la réponse des systèmes couplés reste un sujet délicat et encore peu maîtrisé. L'étude de ces phénomènes nécessite des analyses vibro-acoustiques, ce qui a engendré des recherches scientifiques spécifiques sur le comportement des structures à moyennes et hautes fréquences [42, 46, 51, 91, 127, 130].

Le traitement analytique des problèmes de couplage fluide-structure n'est possible que pour des géométries simples, omniprésentes dans les cas académiques et rarement observées dans la réalité, telles que les carrés [104], les cylindres [87], les sphères [50], etc. En effet, pour ces géométries, la résolution se fait habituellement à partir de familles de fonctions sphériques ou cylindriques. A titre d'exemple, on mentionne les travaux de Felippa et Geers [50], dans le cas des vibrations d'une structure axisymétrique en interaction avec un fluide parfait, où la solution se fait par une décomposition en série des polynômes de Legendre de chacune des variables associée à la structure et l'utilisation des fonctions de Bessel. Ensuite, en relation avec

Introduction générale

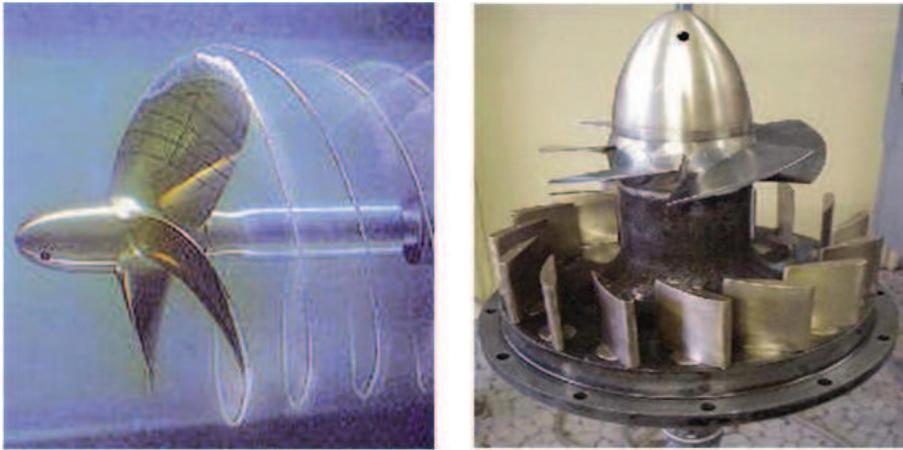


Figure A1.1 – Fonctionnement de certains systèmes par l'interaction fluide-structure

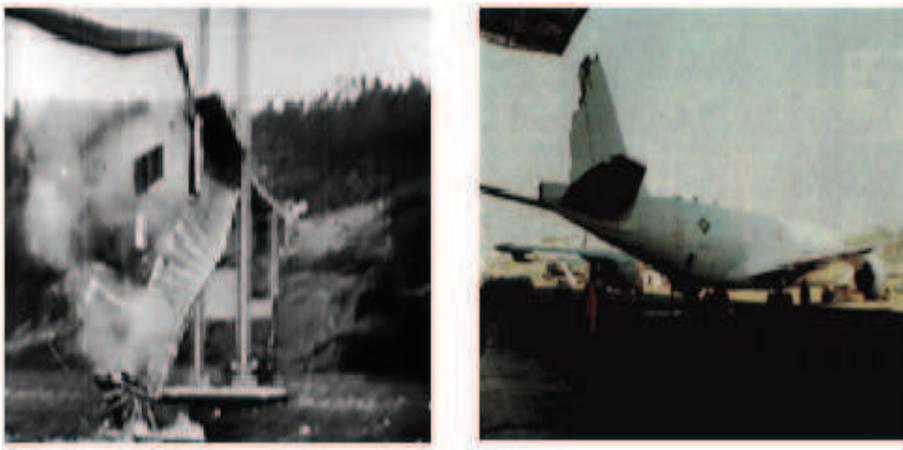


Figure A1.2 – Dysfonctionnement de certains systèmes par l'interaction fluide-structure

les conditions de continuité à l'interface fluide-structure, on obtient une formulation algébrique dont la solution permet d'accéder aux variables physiques. Par contre, la résolution analytique des cas réels est très difficile voire impossible. Dans ce cas, la résolution se fait par des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. L'outil numérique, longtemps bridé par le manque de puissance des ordinateurs, est maintenant couramment utilisé et les modèles qui y sont implémentés sont de plus en plus performants. Ces modèles numériques permettent pour une configuration donnée de déterminer, par exemple, les déformations d'un solide et la physique de l'écoulement. L'intérêt dans un contexte industriel est de pouvoir ainsi optimiser la forme et la structure des matériaux à utiliser à partir des résultats numériques, ou effectuer un contrôle actif.

Dans le cadre des études vibro-acoustiques des systèmes couplés fluide-structure modélisés par la méthode des éléments finis [9, 49, 71, 92, 128], on doit ajouter tous les degrés de liberté du domaine fluide à ceux de la structure. Cependant, la complexité des phénomènes étudiés se répercute par des coûts de calculs prohibitifs. Donc, il est envisageable de construire des modèles d'ordre réduit pour ces problèmes en s'appuyant sur les techniques de réduction développées dans chacun des deux domaines (structure et fluide). Ce qui nous amène à rechercher des modèles réduits dont le temps du calcul serait plus réaliste [46, 106, 124, 125]. Par modèle réduit, on entend l'écriture des systèmes de faibles dimensions obtenus à partir de l'analyse d'une formulation numérique classique. De plus, l'obtention des systèmes de faibles dimensions, dont le temps du calcul est alors rapide, permet d'effectuer un contrôle actif, ce qui n'est pas le cas avec une modélisation numérique classique. La construction de ces modèles réduits permettra aussi l'étude des phénomènes physiques des instabilités de couplage qui sont souvent difficiles à prédire. Ce problème est stratégique et intéresse de nombreux secteurs. C'est pour cela que l'on souhaite, dans le cadre de ce travail de thèse, consacrer un thème sur les modèles d'ordre réduit, où on présente les différents aspects de l'interaction fluide-structure dans le contexte vibro-acoustique. La réduction du modèle sera présentée dans un nouveau cadre d'analyse et de synthèse modale.

Traditionnellement, le dimensionnement des systèmes mécaniques couplés est fondé sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres géométriques et mécaniques prennent une valeur fixe. Cette approche utilise, par conséquent, une marge volontairement pessimiste conduisant le plus souvent à un surdimensionnement injustifié. Précisément, les paramètres incertains sont décrits par une valeur caractéristique défavorable. Associée à des coefficients de sécurité, l'analyse conduit alors à une réponse binaire (sûreté ou défaillance) vis-à-vis d'un critère donné, qui traduit d'une certaine manière la confiance que l'on peut accorder à ce dimensionnement précis [4, 42, 43, 52, 84]. La prise en compte de l'incertain dans les analyses mécaniques est en effet une condition indispensable pour un dimensionnement optimal et robuste. Coupler modèles mécaniques et données incertaines permet d'étudier d'une part la fiabilité de composants ou de systèmes et, d'autre part, l'influence de la variabilité des paramètres sur leur comportement.

La nature incertaine des phénomènes mis en jeu sur les systèmes mécaniques considérée (variabilités des propriétés des matériaux, imprécisions géométriques, aléas des chargements appliqués,...), a un impact significatif sur les performances du système. Aussi, il est indispensable d'intégrer ces incertitudes de façon à travailler sur des modélisations réalistes. Dans la démarche probabiliste en revanche, on construit une modélisation stochastique dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables aléatoires [19, 52, 126, 137]. On

peut, ensuite, évaluer la probabilité de défaillance de la structure (aspect quantitatif) ainsi que mesurer la sensibilité de cette probabilité par rapport à chacune des variables aléatoires introduites (aspect qualitatif).

Dans le cadre de cette thèse, on se focalisera sur la fiabilité des systèmes d'interaction fluide-structure entre une structure élastique et un fluide compressible, auxquels sont associés deux matériaux [88–90]. Dans ce contexte, l'analyse fiabiliste se décline en trois étapes :

- i) en premier lieu, la sélection des variables aléatoires de base, qui vont intégrer les incertitudes mises en jeu à travers leur loi de distribution,
- ii) dans un second temps, le choix d'une fonction de performance définissant la défaillance du système,
- iii) enfin, le calcul des indicateurs de fiabilité, qui vont fournir une évaluation quantitative et qualitative de la fiabilité de celui-ci.

Ce travail de thèse est composé de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à un rappel sur les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le milieu fluide (supposé parfait) et le milieu solide (supposé élastique homogène et isotrope) ainsi que les équations qui régissent les conditions initiales et aux limites. Pour l'écriture théorique des équations gouvernant le problème couplé en vibro-acoustique, on considère un régime harmonique et toutes les grandeurs physiques et géométriques qui caractérisent le système fluide-structure sont linéarisées. L'application de la méthode des éléments finis (géométrie et choix des approximations physique et géométrique), nous permet d'avoir une forme discrète de chacun des deux fonctionnelles, fluide et structure. Leur assemblage aboutit au système algébrique gouvernant le problème vibro-acoustique. La résolution de ce problème est menée sur des exemples en deux dimensions et en trois dimensions avec deux formulations déplacement/pression non symétrique et déplacement/(pression, potentiel des vitesses) symétrique. Enfin, une résolution analytique d'un problème couplé est réalisée, et la comparaison des résultats trouvés avec les résultats numériques montre l'efficacité de la méthode proposée.

Le second chapitre repose essentiellement sur la réduction du modèle du problème vibro-acoustique, en mettant au point deux techniques de réduction de modèle pour les problèmes couplés : la superposition modale et la synthèse modale. En s'appuyant sur les techniques de réduction développées dans chacun des deux domaines (structure et cavité acoustique), par projection sur les bases modales de la structure dans le vide d'une part et de la cavité acoustique à parois rigides découplée, d'autre part. Nous débutons par la description de la méthode de superposition modale appliquée au domaine couplé. Puis, nous présentons la synthèse modale qui utilise les techniques classiques de sous-structuration pour la structure et sous-domaine pour le fluide. Pour illustrer ces méthodes, on met en œuvre la première sur le cas des plaques

immergées pour des cas bidimensionnelle et tridimensionnelle et la deuxième méthode sur un cas industriel dans le domaine navale qui est une hélice de bateau à quatre pales.

Le troisième chapitre, présente les méthodes du calcul de la probabilité de défaillance à savoir les méthodes de simulations tellesque la simulation de Monte Carlo et la surface de réponse, et les méthodes approchées d'analyse de fiabilité et d'estimation de l'indice de fiabilité par FORM et SORM.

Le quatrième chapitre, présente des applications numériques complexes élaborées sous MATLAB faisant appel au code de calcul éléments finis ANSYS. Cette méthode couple la réduction du modèle des problèmes vibro-acoustiques développés dans le premier et le deuxième chapitres aux études mécano-fiabilistes développées dans le troisième chapitre, en considérant une fonction d'état limite implicite en se basant sur les résultats obtenus dans les calculs déterministes et expérimentaux. Ce chapitre montre aussi une analyse stochastique par la méthode de Monte Carlo et par la méthode de surfaces de réponse.

Chapitre I

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

1 Introduction

La vibro-acoustique vise à étudier un ou plusieurs fluides compressibles en contact avec un solide élastique dont la réponse peut être fortement affectée par l'action du fluide. L'étude de ce type d'interaction est motivée par le fait que les phénomènes résultants sont parfois catastrophiques pour les structures mécaniques ou constituent dans la majorité des cas un facteur dimensionnant important. Le fluide est caractérisé par son champ de pression et de vitesse. Il exerce des forces (aérodynamiques ou hydrodynamiques) sur l'interface du solide qui se déplace et/ou se déforme sous leurs actions. Le déplacement et/ou la déformation du solide affecte, au moins localement, le champ de l'écoulement et ainsi les charges aérodynamiques. Ce cycle d'interactions entre le fluide et le solide caractérise le couplage entre les deux milieux. La nature de ce couplage dépend des systèmes et, dans certains cas, on ne peut considérer que l'action du fluide sur le solide (ou l'inverse). On parle alors du couplage faible. Dans le cas contraire, les deux actions sont significatives et le couplage est dit fort. Cela se traduit par le fait que la modification d'un seul des paramètres déstabilise le cycle entier qui doit converger vers un nouvel état d'équilibre [20, 36, 89, 118].

Actuellement, multiples problèmes vibro-acoustiques se posent, par exemple, en génie environnemental dans le cas du transport de produits toxiques fluides, dans le cas de l'écoulement autour des pales d'éolienne, dans l'industrie automobile, dans le domaine aéronautique et aéroacoustique, dans l'industrie de transport, et en industrie navale où l'étude de la réponse des systèmes couplés reste un sujet délicat et encore peu maîtrisé [78, 109, 136]. L'étude de

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

ces phénomènes nécessite des analyses vibro-acoustiques, ce qui a engendré des recherches scientifiques spécifiques sur le comportement des structures à moyennes et hautes fréquences [42, 46, 51, 127, 130].

L'objectif de ce chapitre est de présenter le modèle déterministe du système vibro-acoustique et de donner les équations discrétisées du problème. Après un rappel rapide des équations générales qui traduisent le comportement du fluide et de la structure que nous analyserons dans le cadre des hypothèses classiques des petits mouvements et des petites déformations. La formulation du problème est abordée en trois parties, pour la structure, pour la cavité acoustique, puis pour le système vibro-acoustique couplé. Pour chaque partie, on présente le problème aux limites, sa formulation faible, puis sa discrétisation par la méthode des éléments finis.

Pour la résolution du problème couplé, nous adoptons une méthode numérique couplée, éléments finis/éléments finis, méthode adaptée à la résolution du problème vibro-acoustique, et une méthode analytique qui ne peut être mise en œuvre que pour des types de problèmes très particuliers, c'est-à-dire presque exclusivement pour les problèmes à symétrie de révolution. Nous illustrerons complètement ces différentes méthodes respectivement pour l'étude du comportement dynamique d'une plaque en 2D et en 3D et d'une poutre immergées dans un fluide compressible et ceci avec une formulation en déplacement/pression (u, p) non-symétrique et une formulation en déplacement/pression, potentiel des vitesses et potentiel des déplacements (u, p, Φ) symétrique [88].

2 Equation du problème acoustique

Le fluide est considéré compressible occupe un domaine Ω_f et limité par deux frontières Σ_f et Γ_f , voir figure (A1.1). Le fluide est analysé en variables eulériennes et il est décrit par deux équations locales :

Equation de continuité ou conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \rho_f v = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.1})$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide et v le vecteur vitesse des particules ;

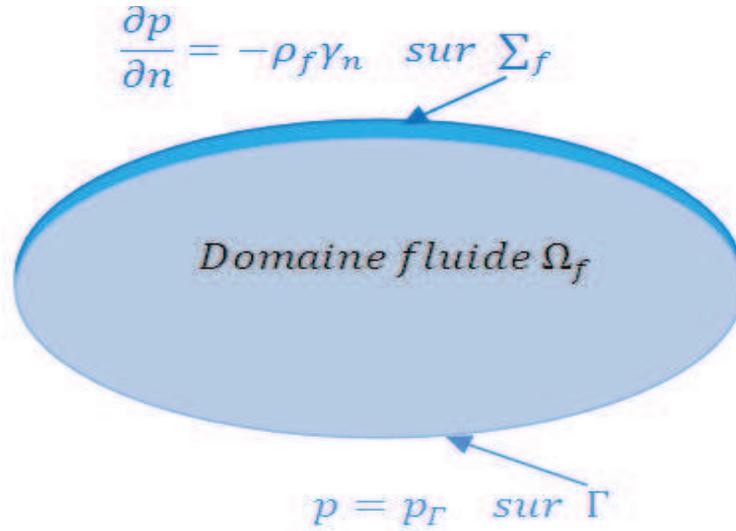


Figure A1.1 – Fluide compressible et conditions aux limites

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v \wedge v \right) = f + \nabla \sigma \text{ dans } \Omega_f \quad (\text{I.2})$$

Le tenseur des contraintes s'exprime en fonction de la pression p , de la viscosité et du tenseur gradient des taux de déformations $D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla^t v)$:

$$\sigma = pI + 2\mu D \quad (\text{I.3})$$

Nous considérons les hypothèses suivantes :

- fluide parfait, donc à viscosité nulle : $\sigma = pI$;
- mouvement irrotationnel $\text{rot} v = 0$, donc il existe un potentiel des vitesses Φ tel que $v = \nabla \Phi$;
- hypothèse des petits mouvements du fluide, par conséquent, en négligeant le terme en v^2 devant les autres termes, on aura : $p = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t}$;
- fluide compressible : on supposera un comportement adiabatique, on obtient l'équation de Helmholtz (équation des ondes) :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ dans } \Omega_f \quad (\text{I.4})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

soit en terme de potentiel des vitesses :

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.5})$$

avec c est la célérité du son dans le fluide.

Conditions aux limites du problème acoustique

- Condition de type accélération normale des parois imposées : on suppose que sur la surface Σ_f et on impose une accélération normale \ddot{u}_n ,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \ddot{u}_n \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (\text{I.6})$$

avec : $n = -n_f$ et n_f est la normale extérieure au domaine fluide.

- Condition de surface libre :

$$p = 0 \quad \text{et} \quad \Phi = 0 \quad (\text{I.7})$$

3 Equation du problème dynamique

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations en élasticité linéaire. Les équations locales, sont obtenues en écrivant dans un repère galiléen (absolu), à chaque instant t , que pour toute partie Ω_s d'un système matériel Ω (figure A1.2), le tenseur dynamique de Ω_s est égal au tenseur des forces extérieures s'exerçant sur Ω_s et les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\nabla\sigma^s + f = \rho_s \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{I.8})$$

où :

- σ^s est le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy ;
- f est le vecteur des répartitions volumiques de force ;
- \ddot{u} est l'accélération au point M , où le champ des déplacements est u .

Le vecteur des déformations associé au tenseur des petites déformations est tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{zx} \rangle \quad (\text{I.9})$$

La relation contraintes déformations donnée par la loi de Hooke généralisée, s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = D \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I.10})$$

4 Equations du problème vibro-acoustique

où :

- D est la matrice d'élasticité ;
- σ est le vecteur contrainte associé au tenseur des contraintes de Cauchy σ^s , dont les composantes sont :

$$\sigma^t = \langle \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx} \rangle \quad (\text{I.11})$$

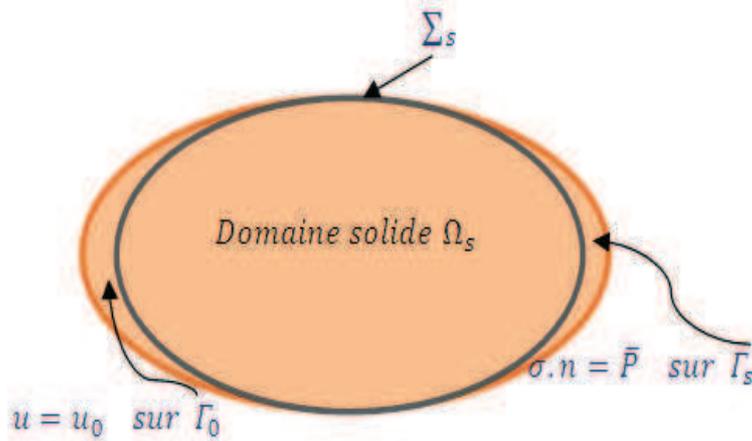


Figure A1.2 – Structure élastique et conditions aux limites

Conditions aux limites du problème structure

Les conditions aux limites appliquées sur la frontière du domaine structure sont de deux types :

- les conditions aux limites naturelles :

$$\sigma n = \bar{P} \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (\text{I.12})$$

- les conditions aux limites géométriques (ou cinématiques) :

$$u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{I.13})$$

avec : $\Gamma_s \cap \Gamma_0 = \emptyset$ et $\Gamma_s \cup \Gamma_0 = \Sigma_s$

4 Equations du problème vibro-acoustique

Il existe deux procédures de traiter les problèmes couplés fluide-structure. La première consiste à résoudre de façon simultanée toutes les équations couplées en combinant l'ensemble des degrés de liberté associés à chaque modèle au sein d'une seule et même matrice de réso-

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

lution. Un tel couplage est alors qualifié de fort. La seconde consiste à résoudre les équations de manière séquentielle, en fixant à tour de rôle l'ensemble des paramètres d'un modèle, durant l'itération de l'autre modèle. C'est ce que l'on appelle un couplage faible. L'avantage de la première méthode est qu'elle est susceptible de fournir des résultats plus précis, mais au prix de temps du calcul trop élevé. La seconde méthode, quant à elle, elle permet de bénéficier de la vitesse du calcul des solveurs spécialisés, mais avec des risques d'instabilité plus grands ainsi avec une précision sur les résultats [2, 129]. Pour modéliser ce problème, plusieurs formulations ont été proposées dans la littérature. Parmi ces formulations nous trouvons :

1. La formulation variationnelle classique en terme de déplacement u pour la structure et en terme de pression p pour le fluide (l'intérêt de cette formulation est d'avoir une seule inconnue par nœud mais conduit à un système matriciel non symétrique) [49, 77, 89, 136];
2. La formulation variationnelle en terme de déplacement u pour la structure et en terme de pression moyenne p_m pour le fluide (l'avantage de ce modèle numérique consiste à simuler la cavité fluide à une surface et donc à la mailler par des éléments finis bidimensionnels. En revanche, ce modèle est utilisable seulement aux cavités d'épaisseur faible devant la longueur d'onde acoustique);
3. La formulation variationnelle en (u, γ, p) , elle repose sur la description de la structure par deux champs vectoriels (le déplacement u et l'accélération γ de la structure, pour un problème harmonique en temps $\gamma = -\omega^2 \cdot u$) et le fluide par un seul champ scalaire (la pression p de la cavité du fluide), l'intérêt de l'utilisation de cette formulation est d'avoir un système symétrique. En revanche, elle présente l'inconvénient d'avoir un système de grande taille ;
4. La formulation variationnelle en (u, p, ϕ) , elle repose sur la description de la structure par son champ de déplacement u et le fluide par deux champs scalaires (pression p et le potentiel des vitesses ϕ). Cette formulation présente l'intérêt d'avoir un système matriciel symétrique de grande taille, après discrétisation par éléments finis [89, 90, 128, 129];
5. La formulation variationnelle en (u, p, ϕ) , elle repose sur la description de la structure par son champ de déplacements u et le fluide par deux champs scalaires (pression p et le potentiel des déplacements ϕ). Cette formulation présente l'intérêt d'avoir un système matriciel symétrique contenant tous les degrés de liberté du problème [88, 128, 132].

Dans cette section, nous présentons un modèle numérique pour le calcul des variables d'un système couplé fluide-structure, basé sur la première formulation et les deux dernières. Ce modèle nécessite le passage par les différentes étapes suivantes :

- l'écriture des équations du mouvement de la structure couplée avec une cavité fluide afin d'établir la forme variationnelle associée au système couplé vibro-acoustique,
- l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la discrétisation de la structure et la cavité fluide. En effet, cette discrétisation amène à l'écriture de l'équation matricielle gouvernant le mouvement du fluide et le mouvement de la structure et en regroupant ces équations en une seule en tenant compte des conditions de couplage, on aboutit à un système algébrique gouvernant le mouvement du système vibro-acoustique [26, 105, 106].

4.1 Présentation du problème

Le problème vibro-acoustique consiste en une structure en contact avec une cavité acoustique. Le système est modélisé par un domaine Ω_s de la structure constituée d'un matériau élastique et par un domaine Ω_f contenant un milieu acoustique modélisé par un fluide parfait, non pesant, compressible en évolution, isentropique. On désigne par $\Sigma = \Sigma_f \cap \Sigma_s$, leur surface commune (interface fluide-structure).

Le système est décrit dans le repère cartésien (o, x_1, x_2, x_3) . La normale extérieure à Ω_s est notée $n_s = (n_{s1}, n_{s2}, n_{s3})$ et extérieure à Ω_f est notée $n_f = (n_{f1}, n_{f2}, n_{f3})$. La normale à Σ extérieure à Ω_f est notée n_s . Le champ de déplacement u en chaque point du domaine Ω_s et à une fréquence

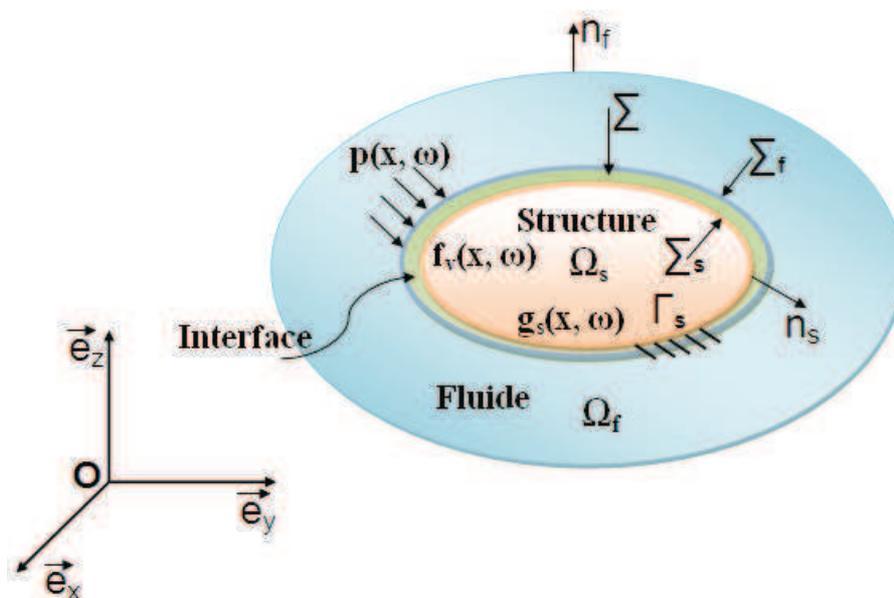


Figure A1.3 – Schéma du couplage fluide-structure

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

ω donnée est $u(x, \omega) = (u_1(x, \omega), u_2(x, \omega), u_3(x, \omega))$. La structure est bloquée sur une partie de la frontière Γ_0 empêchant ainsi le déplacement de corps rigide de la structure (voir la figure A1.3).

Afin d'obtenir les équations discrétisées du système vibro-acoustique couplé, on doit dans un premier temps faire la modélisation de chacune des deux parties de ce système, à savoir la structure et la cavité acoustique.

L'étude est menée dans le domaine fréquentiel sur une plage de fréquences $[\omega_{min} \ \omega_{max}]$ avec $0 < \omega_{min} < \omega_{max}$.

Le problème vibro-acoustique consiste alors à résoudre simultanément deux problèmes :

- l'un dans la structure soumise, sur Σ , à un champ de pression p imposé par le fluide ;
- l'autre dans le fluide soumis à un champ de déplacement u de la paroi Σ .

4.2 Conditions aux limites et du couplage

A l'interface Σ entre le fluide et la structure, comme le fluide n'est pas visqueux il n'adhère pas à la paroi, par conséquent il y a une continuité des contraintes normales et des vitesses normales à la paroi, et nullité de la contrainte tangentielle (absence de frottement visqueux). Ces conditions aux limites s'écrivent :

- La continuité des contraintes normales est :

$$\sigma.n = -p.n \text{ sur } \Sigma \quad (\text{I.14})$$

- La continuité des vitesses normales est :

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} n = \frac{\partial u}{\partial t} n \text{ sur } \Sigma \quad (\text{I.15})$$

- La continuité du déplacement normal :

$$u_f.n = u.n \text{ sur } \Sigma \quad (\text{I.16})$$

- Si on impose une accélération normale sur la surface d'interaction Σ , une condition s'ajoute :

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \rho_f \ddot{u}_n = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (\text{I.17})$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_f \omega^2 u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{I.18})$$

$$u = u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (\text{I.19})$$

Avec : $n = n_s = -n_f$, où n_s est la normale extérieure au domaine structure, n_f est la normale extérieure au domaine fluide et \ddot{u}_n est l'accélération normale de la structure.

4.3 Formulation du problème couplé fluide-structure non symétrique

L'objectif est de déterminer les équations du problème vibro-acoustique de la structure couplée avec sa cavité acoustique externe. Par commodité, on suppose que les maillages de la structure et de la cavité acoustique sont compatibles sur l'interface de couplage Σ . Dans le cas d'un maillage incompatible, la discrétisation de forme sesquilinéaire de couplage peut être trouvée dans la référence [56].

Equation du problème

Le problème couplé fluide acoustique-structure élastique est décrit par les équations suivantes : en prenant p comme variable décrivant le champ de pression dans le fluide et u le champ de déplacement dans la structure [98, 136], soit :

$$\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_i} + \rho_s \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{I.20})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.21})$$

Formulation variationnelle du problème dynamique

La résolution du problème relatif à la structure revient à chercher une solution faible satisfaisant une formulation intégrale (ou formulation variationnelle), équivalente au problème initial. La formulation faible du problème est obtenue en utilisant la méthode des fonctions tests [3, 129]. On considère un vecteur déplacement v arbitraire et régulier dans le domaine Ω_s appelé champ de déplacement virtuel vérifiant la condition $v|_{\Gamma_s} = 0$. La pondération de l'équation du mouvement de la structure (I.20) par v conduit après intégration sur le domaine Ω_s à l'équation

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

suivante :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u v dV - \int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_j} v dV = 0 \quad (\text{I.22})$$

on utilise alors la formule d'intégration par partie généralisée, décrite comme suit :

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_j} v dV = - \int_{\Omega_s} \sigma(u) \frac{\partial}{\partial x_j} (v) dV + \int_{\Sigma_s} \sigma(u) n_j v dS, \quad (\text{I.23})$$

et d'après l'équation de compatibilité sur le tenseur de déformation, on peut écrire :

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_j} v dV = - \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV + \int_{\Sigma_s} \sigma(u) n_j v dS \quad (\text{I.24})$$

En utilisant la propriété de symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes, et en tenant compte des conditions aux limites, la formulation variationnelle du problème structure est alors :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u v dV + \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV = \int_{\Sigma_s} \sigma(u) n_j v dS \quad (\text{I.25})$$

La fonctionnelle de la structure s'écrit alors :

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\sigma(u) \varepsilon_{ij}(u) - \rho_s \omega^2 \langle u, u \rangle) dV - \int_{\Sigma_s} \rho u dS \quad (\text{I.26})$$

Formulation variationnelle du problème cavité acoustique

Soit q une fonction arbitraire et suffisamment régulière dans le domaine Ω_f du fluide, la pondération de l'équation des ondes acoustiques par q conduit après intégration à l'équation suivante :

$$\int_{\Omega_f} (\Delta p + k^2 p) q dV = 0 \quad (\text{I.27})$$

avec : $k = \frac{\omega}{c}$ est le vecteur d'onde.

L'intégration par parties de cette équation aboutit à :

$$\int_{\Omega_f} (-\nabla p \nabla q + k^2 p q) dV + \int_S q \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad \text{avec } S = (\Sigma_f + \Gamma_f) \quad (\text{I.28})$$

en choisissant q nulle sur Γ_f , et en tenant compte des conditions aux limites sur Σ_f , l'équation

4 Equations du problème vibro-acoustique

variationnelle s'écrit :

$$\int_{\Omega_f} (\nabla p \nabla q - k^2 p q) dV = \int_{\Sigma_f} \rho_f c^2 k^2 u_n q d\Sigma \quad (\text{I.29})$$

On constate que le premier membre B est une forme bilinéaire symétrique en (p, q) et que le second membre L est une forme linéaire en q .

Formellement pour tout q statiquement admissible, on peut écrire :

$$B(p, q) = L(q) \quad (\text{I.30})$$

Etant donnée la symétrie de la forme bilinéaire ($B(p, q) = B(q, p)$), la solution p de l'équation variationnelle rend stationnaire la fonctionnelle :

$$F(p) = \frac{1}{2} B(p, p) - L(p) \quad (\text{I.31})$$

$$\delta F(p) = \frac{1}{2} (B(p, \delta p) + B(\delta p, p)) - L(\delta p) \quad (\text{I.32})$$

La condition de stationnarité de $F(p)$ fait que : $\delta F(p) = 0$, ce qui donne :

$$B(p, \delta p) = L(\delta p) \quad (\text{I.33})$$

cette relation est équivalente à la précédente où q joue le rôle de δp qui est aussi identiquement nulle sur Γ puisque p est imposée sur Γ , on a :

$$B(p, p) = 4\rho_f \omega^2 (H(p, p) - Q(p, p)) \quad (\text{I.34})$$

avec

$$H(p, p) = \frac{1}{4\rho_f \omega^2} \int_{V_f} \nabla p \nabla p dV \quad (\text{I.35})$$

et

$$Q(p, p) = \frac{1}{4} \int_{V_f} \frac{p^2}{\rho_f c^2} dV \quad (\text{I.36})$$

La fonctionnelle du problème fluide s'écrit :

$$F(p) = \frac{1}{2} \int_{V_f} (\nabla p \nabla p - k^2 p p) dV - \int_{\Sigma} \rho_f c^2 k^2 u_n p d\Sigma \quad (\text{I.37})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

où, $p = p_\Gamma$ sur Γ , c'est-à-dire : $\delta p = 0$ sur Γ .

Formulation variationnelle du problème vibro-acoustique

La formulation variationnelle du système couplé est la somme des deux équations variationnelles (I.26) et (I.37). La solution (u, p) rend stationnaire la fonctionnelle du problème couplé :

$$\begin{aligned} F(u, p) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\sigma(u) \varepsilon_{ij}(u) - \rho_s \omega^2 (u, u)) dV - \int_{\Sigma} p u d\Sigma \\ & - \frac{1}{2\rho_f \omega^2} \int_{V_f} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}, \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + k^2 p^2 \right] dV \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

La solution (u, p) est donnée par l'équation variationnelle $\delta F(u, p) = 0$.

4.4 Formulation du problème couplé fluide-structure symétrique

Pour symétriser le système obtenu du problème couplé après discrétisation par éléments finis, on introduit une variable supplémentaire pour le fluide (donc des degrés de libertés supplémentaires pour le problème discret) qui est le potentiel des vitesses ou le potentiel des déplacements notés ϕ [48, 89, 132].

4.4.1 Formulation en potentiel des vitesses

Le potentiel des vitesses vérifie la relation :

$$v = \nabla \phi \quad \text{où } v \text{ représente la vitesse,} \quad (\text{I.39})$$

on obtient alors, une formulation variationnelle en (u, p, ϕ) qui présente l'intérêt d'avoir un système matriciel, après discrétisation par éléments finis, symétrique mais de grande taille.

Formulation du problème fluide

On considère des petites perturbations en évolution adiabatique d'un fluide parfait autour de sa position de repos. Le potentiel des vitesses acoustiques est défini par l'équation (I.39). La pression et le potentiel sont liés par la relation de Bernoulli suivante :

$$p = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{I.40})$$

4 Equations du problème vibro-acoustique

D'autre part, l'équation acoustique du fluide est :

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho_f} \nabla p \right) - \frac{1}{\rho_f c^2} \ddot{p} = 0 \quad (\text{I.41})$$

Si ρ_f est constante, on trouve

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad (\text{I.42})$$

à partir des deux équations (I.40) et (I.41), on déduit :

$$\frac{1}{\rho_f} \Delta \phi - \frac{1}{\rho_f c^2} \ddot{\phi} = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.43})$$

C'est l'équation des ondes qui vérifie le potentiel des vitesses.

Les conditions aux limites du domaine fluide :

$$\phi = \bar{\phi} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{V} \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{I.44})$$

On note :

- v : la vitesse acoustique,
- p : la pression acoustique,
- ρ_f : la masse volumique,
- c : la célérité du son du domaine V_f ,
- ϕ : le potentiel des vitesses acoustiques.

Formulation du problème structure

On suppose que la structure est linéaire isotrope, sans contrainte ni déformation initiale et en absence de source volumique (absence d'excitations), l'équation qui gouverne leurs comportements vibratoires est donnée par :

$$\nabla \sigma - \rho_s \ddot{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{I.45})$$

On note :

- ρ_s : la masse volumique de la structure,
- σ : le tenseur des contraintes de la structure,
- u : le champ de déplacement de la structure.

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

Les conditions aux limites associées à la structure s'écrivent :

$$u = u_0 \text{ et } \sigma n = p \text{ sur } \Sigma \quad (\text{I.46})$$

Conditions de couplage à l'interface fluide structure

Si le fluide et la structure sont en contact par la surface Σ , alors les conditions de couplage sur l'interface Σ correspondant à la continuité de la vitesse normale et à la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \dot{u}n \quad \text{et} \quad \sigma n = \dot{\phi}n \text{ sur } \Sigma \quad (\text{I.47})$$

Formulation variationnelle associée au fluide

Soit ψ un champ test quelconque suffisamment régulier sur le domaine Ω_f . Intégrons l'équation (I.43), en la multipliant par ψ , on obtient :

$$\int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \Delta \phi \psi dV - \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f c^2} \ddot{\phi} \psi dV = 0 \quad \forall \psi (c.a) \quad (\text{I.48})$$

En appliquant la formule d'intégration par partie généralisée :

$$\int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \Delta \phi \psi dV = - \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n^i \psi dS \quad (\text{I.49})$$

On trouve :

$$- \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n^i \psi dS - \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f c^2} \ddot{\phi} \psi dV = 0 \quad (\text{I.50})$$

En tenant compte des conditions aux limites (I.44) et (I.47), l'équation (I.50) devient alors :

$$\int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV + \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f c^2} \ddot{\phi} \psi dV - \int_{\Sigma} \dot{u}^s n^s \psi dS = \int_{\Sigma} \dot{u}^s n^s \psi dS - \int_{\Omega_f} \bar{V} \psi dV \quad \forall \psi c.a. \quad (\text{I.51})$$

Formulation variationnelle associée à la structure

Soit v un champ test quelconque suffisamment régulier sur le domaine Ω_s . Intégrons l'équation

(I.45), en la multipliant par v , on obtient :

$$\int_{\Omega_s} \nabla \sigma v dV - \int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} v dV = 0 \text{ sur } \Omega_s \quad (\text{I.52})$$

Soit :

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_i} v dV - \int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} v dV = 0 \quad (\text{I.53})$$

D'après la formule d'intégration par partie généralisée, on a :

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_i} v dV = - \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV + \int_{\Sigma} \sigma(u) n_j^s v dS \quad (\text{I.54})$$

En reportant dans l'équation (I.53), et en tenant compte des conditions aux limites (I.46), on trouve :

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} v dV + \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV - \int_{\Sigma} \sigma(u) n_j^s v dS = \int_S v \bar{p} dS \quad (\text{I.55})$$

En tenant compte des conditions aux limites (I.47), l'équation (I.55) devient :

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} v dV + \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon(v) dV - \int_{\Sigma} \dot{\phi} m v dS = \int_S v \bar{p} dS \quad (\text{I.56})$$

4.4.2 Formulation en potentiel des déplacements

Toujours dans le même but qui est de symétriser le système obtenu après discrétisation par éléments finis, une forme symétrique du problème élasto-acoustique peut être obtenue en utilisant une formulation couplée, basée sur une représentation du problème structure en termes de déplacement u et le problème fluide en termes de pression p et le potentiel des déplacements, noté ϕ qui est donné par la relation :

$$u = \nabla \phi \quad (\text{I.57})$$

Formulation du problème fluide

le potentiel des déplacements ϕ est relié à la pression par la relation :

$$p = -\rho_f \omega^2 \phi \quad (\text{I.58})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

l'équation de l'acoustique du fluide est :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \text{ avec } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{I.59})$$

d'après les deux équations (I.58) et (I.59), on peut écrire :

$$\Delta(\rho_f \omega^2 \phi) + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (\text{I.60})$$

si ρ_f est constante, on peut écrire :

$$\Delta \phi + \frac{p}{\rho_f c^2} = 0 \quad (\text{I.61})$$

Soit

$$\frac{p}{\rho_f c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (\text{I.62})$$

donc les équations du fluide sont :

$$p - \rho_f \omega^2 \phi = 0 \quad (\text{I.63})$$

$$\Delta \phi + \frac{p}{\rho_f c^2} = 0 \quad (\text{I.64})$$

Formulation du problème structure

l'équation du mouvement de la structure est :

$$\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_j} + \rho_s \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{I.65})$$

si on suppose que la structure est chargée sur sa surface extérieure, on aura :

$$\sigma n_j + \bar{p} n = 0 \quad (\text{I.66})$$

Les conditions de couplage

Les conditions de couplage fluide-structure sont :

$$\sigma n_j^s = \rho_f \omega^2 \phi n \quad \text{sur } \Sigma, \quad (\text{I.67})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_j = u_j n_j \quad \text{sur } \Sigma, \quad (\text{I.68})$$

4 Equations du problème vibro-acoustique

soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u_n^s \quad \text{sur } \Sigma, \quad (\text{I.69})$$

ces conditions expriment la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes et de la composante normale du déplacement à l'interface fluide-structure.

Formulation variationnelle du fluide

La formulation variationnelle du fluide est obtenue en multipliant respectivement les équations (I.63) par un champ de pression virtuel q et un champ de potentiel de déplacement virtuel ψ . Après intégration par parties sur le domaine fluide V_f et prise en compte des termes de conditions aux limites, on écrit les formes intégrales suivantes :

$$\frac{1}{\rho_f c^2} \left\{ \int_{\Omega_f} p q dV - \int_{\Omega_f} \rho_f \omega^2 \phi q dV \right\} = 0, \quad (\text{I.70})$$

soit

$$\frac{1}{\rho_f c^2} \int_{V_f} (p - \rho_f \omega^2 \phi) q dV = 0 \quad (\text{I.71})$$

et

$$\rho_f \int_{\Omega_f} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV - \int_{\Omega_f} \frac{p \psi}{c^2} dV - \rho_f \int_{\Sigma} u_n \psi d\Sigma = 0 \quad (\text{I.72})$$

Formulation variationnelle de la structure

la formulation variationnelle du problème structure est obtenue en multipliant l'équation (I.65) par un champ de déplacement virtuel v . Après intégration par parties sur le domaine Ω_s et prise en compte des conditions aux limites (I.66) et (I.69), on écrit la forme intégrale suivante :

$$\int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) - \rho_s \omega^2 u v dV = \int_{\Sigma} \rho_f \omega^2 \phi v d\Sigma + \int_S \rho_f \bar{p} v dS \quad (\text{I.73})$$

Formulation variationnelle du problème couplé

En sommant les trois équations (I.71), (I.72) et (I.73), on obtient l'égalité variationnelle suivante :

$$\mathcal{L}((u, p, \phi), (v, q, \psi)) = L(v), \quad \forall (v, q, \psi), \quad (\text{I.74})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

avec \mathcal{L} la forme bilinéaire symétrique donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((u, p, \phi), (v, q, \Psi)) &= \int_{V_f} \left(\rho_f \omega^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - k^2 (\phi q + p \Psi) + \frac{1}{\rho_f c^2} p q \right) dV \\ &+ \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) - \rho_s \omega^2 (u, v) dV - \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} (\phi v + u \Psi) d\Sigma \end{aligned} \quad (I.75)$$

et L la forme linéaire associée au chargement externe qui est supposé connu :

$$L(v) = \int_S \bar{p} v dS \quad (I.76)$$

la fonctionnelle du problème couplé fluide-structure s'écrit :

$$\begin{aligned} F(u, p, \phi) &= \frac{1}{2} \int_{V_f} \left(\rho_f \omega^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - 2k^2 \phi p + \frac{1}{\rho_f c^2} p p \right) dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) - \rho_s \omega^2 (u, u) dV - 2\rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} \phi u d\Sigma - \int_S \bar{p} u dS \end{aligned} \quad (I.77)$$

(u, p, ϕ) rend stationnaire la fonctionnelle, c'est à dire $\delta F(u, p, \phi) = 0$

5 Approximation par la méthode des éléments finis

5.1 Discrétisation du problème couplé non symétrique

5.1.1 Discrétisation du problème structure

La méthode des éléments finis est adoptée d'une façon classique pour la résolution de la formulation variationnelle (I.73).

On cherche une solution discrète approchée de la solution exacte du problème continu, en travaillant sur un domaine géométrique discret sur lequel les équations intégrales continues sont approchées à l'aide de relations algébriques. Le domaine Ω_s est ainsi approché par N_s volumes élémentaires Ω_{s_e} de forme polygonale de sorte qu'on puisse écrire :

$$\Omega_s \sim \bigcup_{e=1}^{e=N_s} \Omega_{s_e}.$$

5 Approximation par la méthode des éléments finis

On réalise ainsi un maillage de la structure étudiée, les intégrales de la formule (I.73) sont alors approchées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_s} \rho_s u v dV &\sim \sum_{e=1}^{e=N_s} \int_{\Omega_{s_e}} \rho_s u v dV \\
 \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV &\sim \sum_{e=1}^{e=N_s} \int_{\Omega_{s_e}} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV_e \\
 \int_{\partial\Omega_s} p v_p dS &\sim \sum_{e=1}^{e=N_s} \int_{\partial\Omega_{s_e}} p v_p dS
 \end{aligned} \tag{I.78}$$

Calculons donc, les termes de masse et de raideur sur chaque élément fini Ω_{s_e} suivants :

$$\int_{\Omega_{s_e}} \rho_s u v dV_e \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_{s_e}} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV_e \tag{I.79}$$

Principe de discrétisation

On calcule le champ de déplacement $u|_{\partial\Omega_{s_e}}$ sur chaque élément fini Ω_{s_e} à partir d'un nombre fini de valeurs en des points (nœuds) donnés sur l'élément fini, par interpolation polynomiale.

On écrit ainsi sur l'élément Ω_{s_e} fini une relation linéaire de type :

$$U|_{\partial\Omega_{s_e}}(x, t) = N_s^e(x) U_e(t),$$

où :

- U_e est le vecteur des inconnues nodales en déplacement sur l'élément fini Ω_{s_e} ;
- N_s^e est la matrice des fonctions de forme (polynômes d'interpolation) pour l'élément fini Ω_{s_e} .

Le passage du vecteur des inconnus globales du problème U au vecteur des inconnues locales U_e sur l'élément fini Ω_{s_e} est réalisé formellement au moyen de la relation matricielle :

$$U_e = A_s^e U$$

où A_s^e est la matrice de localisation des degrés de liberté de l'élément fini Ω_{s_e} dans l'ensemble des degrés de liberté du problème. On utilise une relation similaire pour les champs virtuels, c'est à dire $V|_{\partial\Omega_{s_e}} = N_s^e V_e$, et on calcule alors les termes de masses et de raideur de la façon suivante :

Calcul du terme de masse

On approche le produit scalaire $u.v$ sur un élément fini structure, puis on le calcule en utilisant

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

les interpolations des champs u et v , soit :

$$u.v = V_e^T N_s^{eT} N_s^e U_e,$$

et on déduit le terme de masse :

$$\int_{\Omega_{s_e}} \rho_s u v dV_e = V_e^T \left(\int_{\Omega_{s_e}} \rho_s N_s^{eT} N_s^e dV_e \right) U_e, \quad (\text{I.80})$$

et on pose :

$$[M_s^e] = \int_{\Omega_{s_e}} \rho_s N_s^{eT} N_s^e dV_e,$$

est la matrice de masse élémentaire. on trouve :

$$\int_{\Omega_{s_e}} \rho_s u v dV_e = V_e^T [M_s^e] U_e. \quad (\text{I.81})$$

Calcul du terme raideur

On approche le produit scalaire $\sigma(u)\varepsilon_{ij}(v)$ sur l'élément fini Ω_{s_e} . On se place sans perte de généralité dans un système de coordonnées cartésiennes. Le produit scalaire précédent s'écrit comme suit :

$$\sigma \varepsilon_{ij} = \varepsilon^T \sigma,$$

où ε et σ sont des vecteurs à six composantes données par :

$$\sigma^T = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rangle \quad (\text{I.82})$$

$$\varepsilon^T = \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \sigma_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz} \rangle \quad (\text{I.83})$$

Puisque les tenseurs $\sigma(u)$ et $\varepsilon(u)$ sont symétriques. La relation de liaison s'écrit :

$$\varepsilon = H U_e,$$

où : la matrice : $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot G$, avec : $G = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ est l'opérateur gradient.

Ainsi, on a : $\varepsilon^e = B_s^e U_e$ avec $B_s^e = H N_s^e$,

5 Approximation par la méthode des éléments finis

où B^e est la matrice des dérivées des fonctions de l'interpolation.

D'après la loi de comportement (Loi de Hooke) pour un corps élastique linéaire, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon} \text{ avec } E = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où L et M sont données par :

$$L = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

On peut écrire donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = EB_s^e U_e$$

et on calcule alors le terme raideur sur un élément fini comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{se}} \boldsymbol{\sigma}(u)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(v)dV_e &= V_e^T \left(\int_{\Omega_{se}} B_s^{eT} E B_s^e dV_e \right) U_e \\ &= V_e^T \left(\int_{\Omega_{se}} N_s^{eT} H^T E H N_s^e dV_e \right) U_e, \end{aligned} \quad (\text{I.84})$$

on pose : $[K_s^e] = \int_{\Omega_{se}} N_s^{eT} H^T E H N_s^e dV_e$ est la matrice de raideur élémentaire.

On trouve :

$$\int_{\Omega_{se}} \boldsymbol{\sigma}(u)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(v)dV_e = V_e^T [K_s^e] U_e \quad (\text{I.85})$$

Pour généraliser sur toute la structure, il suffit d'assembler les matrices de rigidités élémentaires, et les matrices masses élémentaires :

$$[K_s] = \sum_e [K_s^e] \quad (\text{I.86})$$

$$[M_s] = \sum_e [M_s^e] \quad (\text{I.87})$$

$$[u] = \sum_e [u^e] \quad (\text{I.88})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

Donc, le système global à résoudre est le suivant :

$$\{[K_s] - \rho_s \omega^2 [M_s]\} [u] = [P] \quad (\text{I.89})$$

5.1.2 Discrétisation du problème cavité acoustique

La discrétisation par élément finis de la formulation variationnelle (I.37) du fluide donne :

$$H(p, q) = \frac{1}{4\rho_f \omega^2} \{q\}^T [H] \{p\} \quad (\text{I.90})$$

$$Q(p, q) = \frac{1}{4\rho_f c^2} \{q\}^T [Q] \{p\} \quad (\text{I.91})$$

$$L(q) = \rho_f c^2 k^2 \{q\}^T \{\ddot{u}_n\} \quad (\text{I.92})$$

- $[H]$ et $[Q]$ sont les matrices globales du fluide ;
- $\{p\}$ est la pression nodale du fluide ;
- $\{\ddot{u}_n\}$ est le vecteur nodal second membre.

La fonctionnelle du fluide peut s'écrire sous la forme :

$$F(p) = \frac{1}{2} \{p\}^T ([H] - k^2 [Q]) \{p\} - \rho_f c^2 k^2 \{p\}^T \{\ddot{u}_n\} \quad (\text{I.93})$$

L'équation matricielle dynamique du fluide s'écrit :

$$([H] - k^2 [Q]) \{p\} = \rho_f c^2 k^2 \{\ddot{u}_n\} \quad (\text{I.94})$$

Pour la détermination des modes acoustiques d'une cavité fluide, il suffit de résoudre l'équation matricielle suivante :

$$([H] - k^2 [Q]) \{p\} = \{0\} \quad (\text{I.95})$$

5.1.3 Discrétisation du problème vibro-acoustique

L'intégrale de surface apparaissant dans la formulation (I.38), peut être approchée de la façon suivante :

$$\int_{\Sigma} p v d\Sigma \sim \sum_{e=1}^{e=E_e} \int_{\Sigma_e} p_e v_e d\Sigma_e \quad (\text{I.96})$$

On peut écrire :

$$\int_{\Sigma_e} p_e v_e d\Sigma_e = Q_e^T \left(\int_{\Sigma_e} N_s^{eT} N_s^e d\Sigma_e \right) P_e \quad (\text{I.97})$$

$$= Q_e^T [C^e] P_e \quad (\text{I.98})$$

Et, en sommant sur toute la surface Σ , on obtient :

$$\int_{\Sigma} p v d\Sigma = \{Q^T\} [C] \{P\} \quad (\text{I.99})$$

$[C]$ est la matrice de couplage.

La discrétisation de la formulation faible (I.38) du problème couplé, par éléments finis en utilisant les opérateurs M_s, K_s, M_f, K_f et C , conduit au système algébrique suivant :

$$\begin{pmatrix} [K_s] - \omega^2 [M_s] & -[C] \\ -[C]^T & \frac{1}{\rho_f \omega^2} [M_f] - \frac{1}{\rho_f c^2} [K_f] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.100})$$

- $[K_s]$ et $[M_s]$ sont les matrices de rigidité et de masse de la structure ;
- $[K_f]$ et $[M_f]$ sont les matrices globales du fluide ;
- $[C]$ est la matrice de couplage ;
- u est le vecteur déplacement nodal de la structure ;
- p est le vecteur de la pression nodale dans la cavité fluide.

Remarque

Le recours à une formulation symétrique permet de traiter le problème couplé avec les outils classiques de l'analyse vibratoire des structures. Plusieurs formulations variationnelles pour la modélisation de ce problème ont été proposées dans la littérature. Nous avons choisis, parmi ces formulations, la formulation en (u, p, ϕ) qui repose sur une description de la structure par le champ de déplacement vectoriel u et la description du fluide par deux champs scalaires (la pression du fluide p et le potentiel des vitesses ϕ ou bien le potentiel des déplacements). Toutefois, la symétrisation est possible aussi via des processus telsque celui basé sur un découplage sur la raideur proposé par Iron [68, 109].

5.2 Discrétisation du problème couplé symétrique

5.2.1 Discrétisation du problème en formulation potentiel des vitesses

La discrétisation des termes masse et raideur des problèmes fluide et structure avec la méthode

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

des éléments finis permet de calculer les matrices M_f , M_s , K_f , K_s . La formulation (I.56) fait apparaître des termes supplémentaires qui peuvent être discrétisé avec les opérateurs définis précédemment :

$$\int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \ddot{\Phi} \Psi dV \hookrightarrow \Psi^T [M_f] \{\ddot{\Phi}\} \quad (\text{I.101})$$

$$\int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dV \hookrightarrow \Psi^T [K_f] \{\Phi\} \quad (\text{I.102})$$

La discrétisation du terme décrivant l'action de la structure sur le fluide donne :

$$\int_{\Sigma} i n^f \Psi dS \hookrightarrow \Psi^T [C]^T \{\dot{U}\} \quad (\text{I.103})$$

$$\int_{\Sigma} \bar{v} \Psi dS \hookrightarrow \Psi^T \{V^f\} \quad (\text{I.104})$$

La discrétisation de la formulation (I.56), donne :

$$\Psi^T \{[M_f] \ddot{\Phi} + [K_f] \Phi + [C] \dot{U}\} = \Psi^T \{V^f\} \quad (\text{I.105})$$

La formulation (I.56) fait apparaître des termes supplémentaires qui peuvent être discrétisé avec les opérateurs définis précédemment comme suit :

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} v dV \hookrightarrow V^T [M_s] \{\ddot{U}\} \quad (\text{I.106})$$

$$\int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon(v) dV \hookrightarrow V^T [K_s] \{U\} \quad (\text{I.107})$$

La discrétisation du terme décrivant l'action du fluide sur la structure donne :

$$\int_{\Sigma} \dot{\Phi} n v dS \hookrightarrow V^T [C] \{\dot{\Phi}\} \quad (\text{I.108})$$

$$\int_S V \bar{P} dS \hookrightarrow V^T \{P_s\} \quad (\text{I.109})$$

La discrétisation de la formulation (I.56), donne :

$$V^T \{[M_s] \ddot{U} + [K_s] U + [C] \dot{\Phi}\} = V^T \{P\} \quad (\text{I.110})$$

5 Approximation par la méthode des éléments finis

On assemble le domaine structure et le domaine acoustique selon un vecteur global contenant tous les degrés de liberté, structure et fluide organisé selon la forme suivante :

$$U = (u, \phi) \quad (\text{I.111})$$

Alors, en tenant compte du fait que le vecteur test (v, ψ) est quelconque, on montre que l'assemblage des formulations (I.105) et (I.110) aboutit au système algébrique suivant :

$$[M] \ddot{U} + [C] \dot{U} + [K] U = \{f\} \quad (\text{I.112})$$

où :

$$[M] = \begin{pmatrix} [M_s] & 0 \\ 0 & [M_f] \end{pmatrix}, \quad [K] = \begin{pmatrix} [M_s] & 0 \\ 0 & [M_f] \end{pmatrix}$$

$$[C] = \begin{pmatrix} 0 & [C] \\ [C]^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} P \\ V_f \end{Bmatrix}$$

Remarques

- Les matrices $[M]$, $[K]$ et $[C]$ sont symétriques ;
- Pour des problèmes vibro-acoustiques de grande taille la résolution du système globale assemblé (I.112) peut devenir très coûteuse en terme d'espace mémoire et de temps du calcul, voire impossible.

5.2.2 Discrétisation du problème en formulation potentiel des déplacements

La discrétisation des termes de masse et raideur des problèmes fluide et structure avec la méthode des élément finis permet du calculer les matrices M_s , M_f , K_s et K_f . La formulation (I.77) fait apparaître des termes supplémentaires qui peuvent être discrétisés avec les opérateurs suivants :

$$\int_{V_f} \nabla \phi \nabla \psi \psi dV \hookrightarrow \Psi^T [K_f] \Phi \quad (\text{I.113})$$

$$\int_{V_f} \frac{p \Psi}{c^2} dV \hookrightarrow \Psi^T [M_f] P \quad (\text{I.114})$$

$$\int_{V_f} \frac{\phi q}{c^2} dV \hookrightarrow Q^T [M_f] \Phi \quad (\text{I.115})$$

$$\int_{\Sigma} \phi n q_i dS \hookrightarrow Q^T [C] \Phi \quad (\text{I.116})$$

$$\int_{\Sigma} u n \psi dS \hookrightarrow \Psi^T [C]^T U \quad (\text{I.117})$$

$$\int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV \hookrightarrow V^T [M_s] U \quad (\text{I.118})$$

$$\int_{\Omega_s} u v dV \hookrightarrow V^T [K_s] U \quad (\text{I.119})$$

$$\int_S v \bar{p} dS \hookrightarrow V^T \{f\} \quad (\text{I.120})$$

On déduit de ce qui précède les équations suivantes :

$$-\omega^2 V^T [M_s] U + V^T [K_s] U + \rho_f V^T [C] \Phi = 0 \quad (\text{I.121})$$

$$\frac{1}{\rho_f} Q^T [M_f] P - \omega^2 \Psi^T [M_f] \Phi = 0 \quad (\text{I.122})$$

$$-\rho_f \Psi^T [K_f] \Phi + \Psi^T [M_f] P + \rho_f \Psi^T [C]^T U = 0 \quad (\text{I.123})$$

Ces équations sont valables pour tout v , q et ψ .

En multipliant la dernière équation par $(-\omega^2)$, on obtient le système matriciel symétrique suivant :

$$\begin{pmatrix} [K_s] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_f} [M_f] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ \Phi \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} [M_s] & 0 & \rho_f [C] \\ 0 & 0 & [M_f] \\ \rho_f [C]^T & [M_f] & -\rho_f [K_f] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.124})$$

En l'absence des charges, le système (I.124) se réduit à :

$$\begin{pmatrix} [K_s] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_f}[M_f] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ \Phi \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} [M_s] & 0 & \rho_f[C] \\ 0 & 0 & [M_f] \\ \rho_f[C]^T & [M_f] & -\rho_f[K_f] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.125})$$

A partir de la dernière ligne du système (I.125), on déduit :

$$\Phi = \frac{1}{\rho_f}[K_f]^{-1}[M_f][P] + [K_f]^{-1}[C]^T[U] \quad (\text{I.126})$$

En reportant l'équation (I.126) dans les deux dernières lignes du système (I.125) on peut éliminer la variable ϕ , et le système devient :

$$\begin{pmatrix} [K_s] & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_f}[M_f] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} [M_s] + \rho_f[e][C]^T & [e][M_f] \\ [m][C]^T & \frac{1}{\rho_f}[m][M_f] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.127})$$

Avec : $[e] = [C][K_f]^{-1}$ et $[m] = [M_f][K_f]^{-1}$

Remarques

- les formulations précédentes font intervenir des matrices de masse et de raideur symétriques, écrites uniquement en fonction des opérateurs utilisés pour la formulation non symétrique ;
- Dans la formulation (I.124), la taille du problème fluide est doublée par rapport à la formulation (I.127), mais les matrices sont symétriques et creuses ;
- Dans la formulation (I.127), les matrices sont symétriques mais pleines, cette formulation nécessite également une opération d'inversion matricielle (la qualité du calcul dépend donc du conditionnement de la matrice K_f) ;
- Dans la pratique les codes du calcul mettant en œuvre la formulation symétrique (u, p, ϕ) , utilisent les matrices données par l'équation (I.124) ;
- Les fonctions : U, P et ϕ sont des fonctions de ω .

6 Application aux plaques immergées

6.1 Etude du comportement vibro-acoustique d'une plaque élastique au sein d'une cavité acoustique

Cette section est consacré à l'étude du comportement vibro-acoustique d'une plaque élastique couplée avec une cavité fluide (voir figure A1.4). On considère une plaque mince simple-

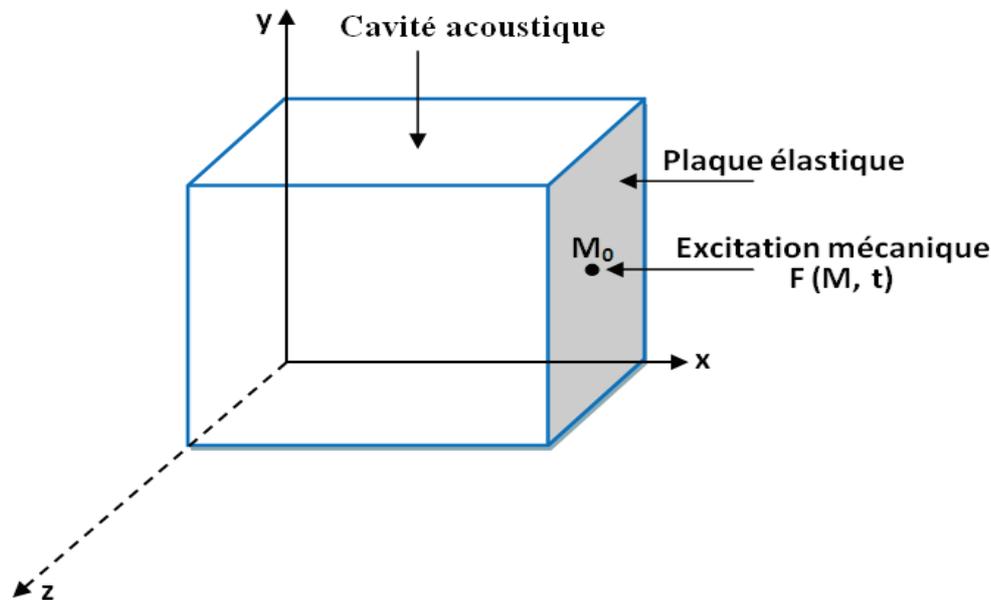


Figure A1.4 – Plaque élastique couplée avec une cavité fluide

ment supportée sur ses quatre bords. e est son épaisseur. Les hypothèses de ce travail sont les suivantes :

- On travaille dans le cadre de l'élasticité linéaire et de l'acoustique linéaire,
- On considère un régime permanent (harmonique en temps).

Dans cette étude, l'excitation mécanique est modélisée par une force ponctuelle au point M_0 appliquée sur la plaque élastique. Cette force peut s'écrire sous la forme :

$$F(M, t) = F_x(M, t) = F_0 \delta(M - M_0) e^{i\omega t} \quad (\text{I.128})$$

avec, $\delta(M - M_0)$ est la fonction Dirac.

6.1.1 Equations du problème couplé fluide-structure

L'équation de mouvement de la plaque mince élastique s'écrit :

$$D\Delta\Delta w - \rho_s \omega^2 w = F_0 \delta(M - M_0) + p \quad \text{dans} \quad (\Sigma) \quad (\text{I.129})$$

avec,

- D est le module de flexion de la plaque ;
- ρ_s est la masse surfacique de la plaque ;
- $p(x, y, z)$ est la pression du fluide ;
- $w(y, z)$ est le déplacement normal (flèche) de la plaque élastique.

Les conditions aux limites sur tous les bords de la plaque s'écrivent :

$$w = 0 \quad (\text{I.130})$$

L'équation de mouvement de la cavité fluide s'écrit :

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad \text{dans} \quad (\Omega_f) \quad (\text{I.131})$$

avec, k est le nombre d'ondes acoustiques : $k = \frac{\omega}{c}$, c est la célérité du son dans le fluide.

Les conditions aux limites sur toutes les facettes rigides de la cavité fluide sont les suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{I.132})$$

Les conditions de couplage fluide - structure au niveau de la surface d'interaction sont :

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_f \omega^2 w = 0 \quad \text{sur} \quad (\Sigma) \quad (\text{I.133})$$

$$\sigma n_j + p n = 0 \quad \text{sur} \quad (\Sigma) \quad (\text{I.134})$$

ρ_f est la masse volumique du fluide. n est la normale sortante à la surface Σ .

6.1.2 Formulation variationnelle du fluide

Dans cette formulation, on utilisera une présentation modale afin d'écrire l'équation matricielle du mouvement de la plaque couplée avec la cavité fluide sur la base modale de la structure et la base modale acoustique.

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

La pression du fluide se décompose sur sa base modale comme suit :

$$p(x, y, z) = \sum_n \alpha_n q_n = \sum_{ijl} \alpha_{ijl} q_{ijl} \quad (\text{I.135})$$

avec,

$$q_{ijl} = \cos \frac{i\pi}{a} x \cos \frac{j\pi}{b} y \cos \frac{l\pi}{c} z \quad (\text{I.136})$$

Quel que soit q_m fonction test, on peut écrire :

$$\int_{\Omega_f} q_m (\Delta + k^2) p d\Omega_f = 0 \quad \text{dans} \quad (\Omega_f) \quad (\text{I.137})$$

q_m est le vecteur généralisé qui correspond au mode acoustique m .

L'intégration par parties de cette équation donne :

$$\int_{\Omega_f} (-(\nabla q_m, \nabla p) + k^2 q_m p) d\Omega_f + \int_{\partial\Omega_f} q_m \nabla p n d\partial\Omega_f = 0 \quad (\text{I.138})$$

$\partial\Omega_f$ correspond aux frontières de la cavité fluide Ω_f .

En appliquant les conditions aux limites et les conditions de couplage fluide - structure, on a :

$$\int_{\Omega_f} (-(\nabla q_m, \nabla p) + k^2 q_m p) d\Omega_f + \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} q_m w d\Sigma = 0 \quad (\text{I.139})$$

Le déplacement normal de la plaque élastique se décompose sur sa base modale comme suit :

$$w(y, z) = \sum_r \beta_r W_r = \sum_{pq} \beta_{pq} W_{pq} \quad (\text{I.140})$$

avec,

$$W_{pq} = \sin \frac{p\pi}{b} y \sin \frac{q\pi}{c} z \quad (\text{I.141})$$

L'équation variationnelle devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} (-(\nabla q_m, \nabla \sum_n \alpha_n q_n) + k^2 q_m \sum_n \alpha_n q_n) d\Omega_f \\ + \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} q_m \sum_r \beta_r W_r d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.142})$$

6 Application aux plaques immergées

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\Sigma_n \alpha_n \int_{\Omega_f} (-\nabla q_m, \nabla q_n) + k^2 q_m q_n d\Omega_f + \rho_f \omega^2 \Sigma_r \beta_r \int_{\Sigma} q_m W_r d\Sigma = 0 \quad (\text{I.143})$$

On sait que :

$$\int_{\Omega_f} (\nabla q_m, \nabla q_n) d\Omega_f = \int_{\partial\Omega_f} \text{div}(q_m \nabla q_n) d\partial\Omega_f - \int_{\Omega_f} q_m \Delta q_n d\Omega_f \quad (\text{I.144})$$

D'après l'équation de Helmotz, on peut écrire :

$$\Delta q_n = -k_n^2 q_n \quad (\text{I.145})$$

d'où,

$$\begin{aligned} \Sigma_n \alpha_n \int_{\partial\Omega_f} -\text{div}(q_m \frac{\partial q_n}{\partial n}) d\partial\Omega_f + \Sigma_n \alpha_n \int_{\Omega_f} q_m \Delta q_n d\Omega_f + \Sigma_n \alpha_n \int_{\Omega_f} k^2 q_m q_n d\Omega_f \\ + \rho_f \omega^2 \Sigma_r \beta_r \int_{\Sigma} q_m W_r d\Sigma = \end{aligned} \quad (\text{I.146})$$

Cette équation peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\Sigma_n \alpha_n \int_{\Omega_f} (k^2 - k_n^2) q_m q_n d\Omega_f + \rho_f \omega^2 \Sigma_r \beta_r \int_{\Sigma} q_m W_r d\Sigma = 0 \quad (\text{I.147})$$

avec,

$$\int_{\Omega_f} q_m q_n d\Omega_f = \delta_{mn} \cdot \text{Cte} \quad (\text{I.148})$$

Cte est une constante qui dépend de i,j et l et δ_{mn} est le symbole de Kronecker,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Calcul de la constante : Cte

- $i = j = l = 0$

$$\int_{\Omega_f} q^2(x, y, z) d\Omega_f = abc = V \quad (\text{I.149})$$

V est le volume de la cavité fluide,

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

- $i = j = 0, l \neq 0$ ou, $i = l = 0, j \neq 0$ ou, $l = j = 0, i \neq 0$

$$\int_{\Omega_f} q^2(x, y, z) d\Omega_f = \frac{abc}{2} = \frac{V}{2} \quad (\text{I.150})$$

- $i = 0, j \neq 0, l \neq 0$ ou, $j = 0, i \neq 0, l \neq 0$ ou, $l = 0, i \neq 0, j \neq 0$

$$\int_{\Omega_f} q^2(x, y, z) d\Omega_f = \frac{abc}{4} = \frac{V}{4} \quad (\text{I.151})$$

- $i \neq 0, j \neq 0, l \neq 0$

$$\int_{\Omega_f} q^2(x, y, z) d\Omega_f = \frac{abc}{8} = \frac{V}{8} \quad (\text{I.152})$$

L'équation (I.147) s'écrit de nouveau sous la forme :

$$(k^2 - k_n^2) \alpha_n C_{te} + \rho_f \omega^2 \Sigma_r \beta_r C_{nr} = 0 \quad (\text{I.153})$$

avec,

$$C_{nr} = \int_{\Sigma} q_n W_r d\Sigma \quad (\text{I.154})$$

Calcul de la matrice modale du couplage C_{nr}

Pour $x = 0$, on a :

$$q_{ijl} = \cos \frac{j\pi}{b} y \cos \frac{l\pi}{c} z \quad (\text{I.155})$$

d'où,

$$C_{nr} = \int_{\Sigma} \sin \frac{p\pi}{b} y \cos \frac{j\pi}{b} y \sin \frac{q\pi}{c} z \cos \frac{l\pi}{c} z dy dz \quad (\text{I.156})$$

La matrice modale du couplage est donnée par la relation suivante :

$$C_{nr} = \frac{bc p q}{\pi^2 (p^2 - j^2)(q^2 - l^2)} y [(1 - (-1)^{p+j}(1 - (-1)^{q+l}))] \quad (\text{I.157})$$

Pour $p = j$ ou $q = l$ ce qui entraîne que $C_{nr} = 0$.

6.1.3 Formulation variationnelle de la plaque

Quel que soit w_m fonction test cinématiquement admissible, on peut écrire :

$$\int_{\Sigma} w_m (D\Delta\Delta w - \sigma\omega^2 w) d\Sigma = w_m(X_0)F_0 + \int_{\Sigma} w_m p d\Sigma \quad (\text{I.158})$$

w_m est le vecteur déplacement généralisé qui correspond au mode structure m .

En utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_{\Sigma} Dw_m \Delta\Delta w d\Sigma = - \int_{\Sigma} D\nabla w_m \nabla \Delta w d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} Dw_m \nabla \Delta w d\partial\Sigma \quad (\text{I.159})$$

et,

$$\int_{\Sigma} D\nabla w_m \nabla \Delta w d\Sigma = - \int_{\Sigma} D\Delta w_m \Delta w d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} D\nabla w_m \Delta w d\partial\Sigma \quad (\text{I.160})$$

Ce qui donne,

$$\int_{\Sigma} Dw_m \Delta\Delta w d\Sigma = \int_{\Sigma} D\Delta w_m \Delta w d\Sigma \quad (\text{I.161})$$

L'équation (I.158) devient,

$$\int_{\Sigma} D\Delta w_m \Delta w d\Sigma - \int_{\Sigma} w_m \sigma\omega^2 w d\Sigma = w_m(X_0)F_0 + \int_{\Sigma} w_m p d\Sigma \quad (\text{I.162})$$

En remplaçant le vecteur déplacement de la plaque et la pression de la cavité fluide par leurs expressions, on peut écrire,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} D\Delta w_m \Delta (\sum_r \beta_r w_r) d\Sigma - \int_{\Sigma} w_m \sigma\omega^2 \sum_r \beta_r w_r d\Sigma = \\ w_m(X_0)F_0 + \int_{\Sigma} w_m \sum_n \alpha_n q_n d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{I.163})$$

Pour $m = r$, on a :

$$\beta_r \int_{\Sigma} (D\Delta w_m \Delta w_r - \sigma\omega^2 w_r w_r) d\Sigma = w_r(X_0)F_0 + \int_{\Sigma} w_r \sum_n \alpha_n q_n d\Sigma \quad (\text{I.164})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

En remplaçant le vecteur déplacement modal de la plaque par son expression, on peut écrire :

$$\beta_r \int_{\Sigma} \left(D \left(\frac{p^2 \pi^2}{b^2} + \frac{q^2 \pi^2}{c^2} \right) w_r w_r - \sigma \omega^2 w_r w_r \right) d\Sigma = w_r(X_0) F_0 + \int_{\Sigma} w_r \sum_n \alpha_n q_n d\Sigma \quad (\text{I.165})$$

En posant :

$$\omega_r^2 = \frac{D}{\sigma} \left(\frac{p^2 \pi^2}{b^2} + \frac{q^2 \pi^2}{c^2} \right) \quad (\text{I.166})$$

On a alors,

$$\beta_r \int_{\Sigma} ((\omega_r^2 - \omega^2) w_r w_r) d\Sigma = w_r(X_0) \frac{F_0}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_n \alpha_n \int_{\Sigma} w_r q_n d\Sigma \quad (\text{I.167})$$

On sait que,

$$\int_{\Sigma} w_r w_r d\Sigma = \frac{bc}{4} = \Sigma_p \quad (\text{I.168})$$

Σ_p est la surface de la plaque.

On a finalement,

$$(\omega_r^2 - \omega^2) \beta_r - \frac{4}{\sigma \Sigma_p} \sum_n \alpha_n C_m = w_r(X_0) \frac{4F_0}{\sigma \Sigma_p} \quad (\text{I.169})$$

6.1.4 Formulation du problème couplé

En utilisant les équations (I.165 et I.168), l'équation du mouvement modal de la plaque couplée avec la cavité fluide s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \omega_r^2 - \omega^2 & \frac{-4}{\sigma \Sigma_p} C_m \\ \frac{-4}{\sigma \Sigma_p} C_{nr} & (k_n^2 - k^2) \frac{4Cte}{\rho_f \omega^2 \sigma \Sigma_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_r \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.170})$$

avec $F_s = w_r(X_0) \frac{4F_0}{\sigma \Sigma_p}$

6.2 Résultats numériques

6.2.1 Pour la plaque 2D

Cet exemple illustre un problème d'état stable d'interaction vibro-acoustique, et l'utilisation du couplage à petite déformation structurelle linéaire. Il s'agit d'une plaque élastique : son module d'Young $E = 2.11 \times 10^{11}$, sa masse volumique $\rho_s = 7860 \text{Kg.m}^{-3}$ et son coefficient de poisson $\nu = 0.3$ en immersion complète dans un fluide compressible qui est au repos (de masse volumique $\rho_f = 1000 \text{Kg.m}^{-3}$ et vitesse du son $c = 1500 \text{m.s}^{-1}$). Le but du problème est de déterminer les fréquences propres de la structure couplée avec l'eau et l'effet du couplage sur la vibration du système sans réduction du modèle [89, 91]. La structure est supposée encadrée de son côté supérieur, et n'est soumise à aucun chargement, ainsi le fluide est supposé immobile aux bords et la pression est nulle aux bords aussi sauf sa partie supérieure qui est supposée libre.

Pour le calcul éléments finis par ANSYS, le fluide et la structure ont été maillés avec un élément rectangulaire à quatre nœuds respectivement FLUID29 et PLANE42 [88]. Le maillage choisi est un maillage compatible où les nœuds des deux domaines se coïncident à l'interface fluide-structure, à 600 éléments 100 pour la structure et 500 pour le fluide, chaque élément a quatre nœuds et chaque nœud a trois degrés de libertés U_x et U_y (les déplacements suivants x et y) et P la pression pour l'interface. La figure (A1.5) montre le modèle du problème couplé et sa discrétisation en éléments finis. Les résultats obtenus pour la structure sèche et immergée sont

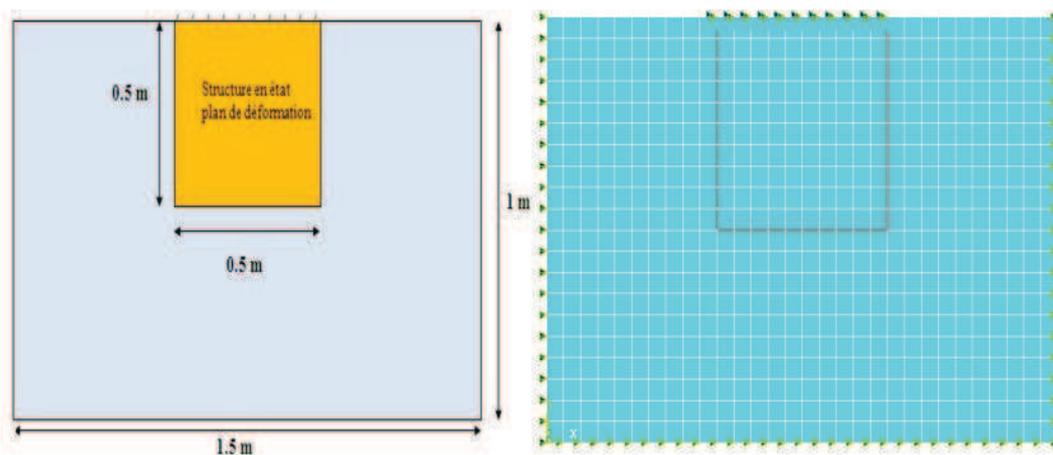


Figure A1.5 – Modèle éléments finis du système

illustrés dans les tableaux (A1.1 et A1.2) : On remarque que les résultats trouvés par les deux méthodes sont bien en concordance mais avec un temps du calcul très élevé.

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

TABLE A1.1 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée sans réduction du modèle avec une formulation (u, p) .

Mode	structure sèche	structure immergée
R_1	1122	890.12
R_2	2743.9	998.16
R_3	3016	1312.9
R_4	4850.1	1595.7
R_5	5108.6	1930.9

TABLE A1.2 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée sans réduction du modèle avec une formulation (u, p, Φ) .

Mode	structure sèche	structure immergée
R_1	1122, 1	890.14
R_2	2743.93	998.15
R_3	3016, 15	1312.92
R_4	4850.16	1595.73
R_5	5108.66	1930.94

6.2.2 Pour la plaque 3D

Dans cette section nous proposons l'étude d'une structure 3D de faible épaisseur que l'on peut considérer comme une membrane. La structure est encadrée de son côté supérieur (suivant sa largeur), et n'est soumise à aucun chargement. Ce problème illustre l'utilisation du couplage à petite déformation structurelle linéaire. Il s'agit d'une plaque d'épaisseur faible de 1 mm en immersion complète dans l'eau qui est au repos. L'objectif est la détermination des cinq premières fréquences propres.

L'étude numérique est conduite en utilisant le code du calcul éléments finis ANSYS. Une méthode de couplage éléments finis/éléments finis est proposée pour modéliser le système couplé fluide-structure, avec une formulation non symétrique en pression/déplacement. Une comparaison des résultats numériques et expérimentaux est alors proposée [89, 91]. L'étude expérimentale a été réalisée en utilisant un dispositif basé sur la mesure optique interférométrique de champs, qui offre l'avantage d'une haute résolution spatiale, mesure en temps réel et sans contact mécanique avec la structure analysée [13].

Les paramètres géométriques et les propriétés des matériaux des deux domaines sont les suivants :

- Pour la structure : densité = 7800 kg.m^{-3} ; module d'Young = $2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; coefficient de Poisson = 0.3 ; longueur = 9.6 cm ; largeur = 7.2 cm ; hauteur = 1 mm.

7 Application à l'étude d'un barrage

- Pour le fluide : densité = 1000 kg.m^{-3} ; vitesse du son = 1500 m.s^{-1} ; longueur = 28.5 cm ; largeur = 14 cm ; hauteur = 19 cm.

Le maillage choisi est un maillage tétraédrique, à 800 éléments, chaque élément a quatre nœuds et chaque nœud a six degrés de libertés U_x , U_y et U_z (les déplacements suivants x, y et z), θ_x, θ_y et θ_z (les rotations suivants x, y et z).

La figure (A1.6) montre le schéma du modèle et sa discrétisation en éléments finis : Les résultats

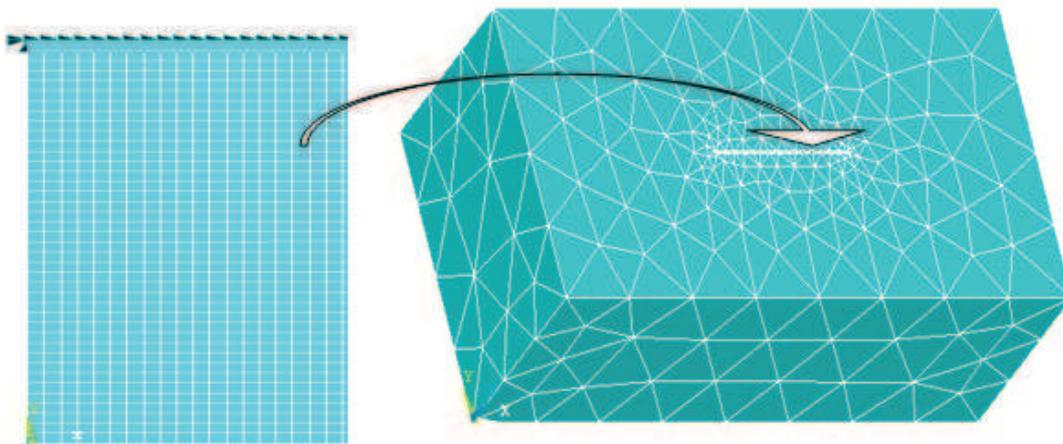


Figure A1.6 – Discretisation en éléments finis de la palque 3D sèche et immergée

obtenus pour la structure sèche et immergée sans réduction du modèle sont illustrés dans les tableaux (A1.3 et A1.4) :

TABLE A1.3 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D sèche sans réduction.

Mode	Numérique	Expérimental
R_1	90.12	87.9
R_2	279.64	280
R_3	552.38	548
R_4	960.93	---
R_5	1162.74	1184

7 Application à l'étude d'un barrage

Le but de cette section est de mettre en œuvre les techniques de couplage vibro-acoustique sur un exemple académique. Il ne faut pas chercher la réalité physique sur ce petit modèle,

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

TABLE A1.4 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D immergée sans réduction.

Mode	Numerique	Expérimental
R_1	45.56	38
R_2	147.63	152
R_3	277.25	260
R_4	488.74	---
R_5	694.14	703

mais seulement en profiter pour démystifier les stratégies de couplage. Il s'agit de l'étude d'un barrage assimilé à une poutre cantilever, encastrée à sa base et libre à son extrémité supérieure.

7.1 Présentation du problème

On considère la poutre de la figure (A1.7), d'axe (oz) , de section S circulaire de rayon R , de longueur L et d'épaisseur e , de masse volumique ρ_s , de module d'Young E et de moment quadratique de la section droite par rapport à un diamètre I . Immergée dans un fluide compressible de hauteur h , limité par une surface libre et un fond rigide parallèle à la surface libre et illimité dans les autres directions, ses caractéristiques physiques étant notées ρ_f et C (masse volumique et célérité des ondes acoustiques).

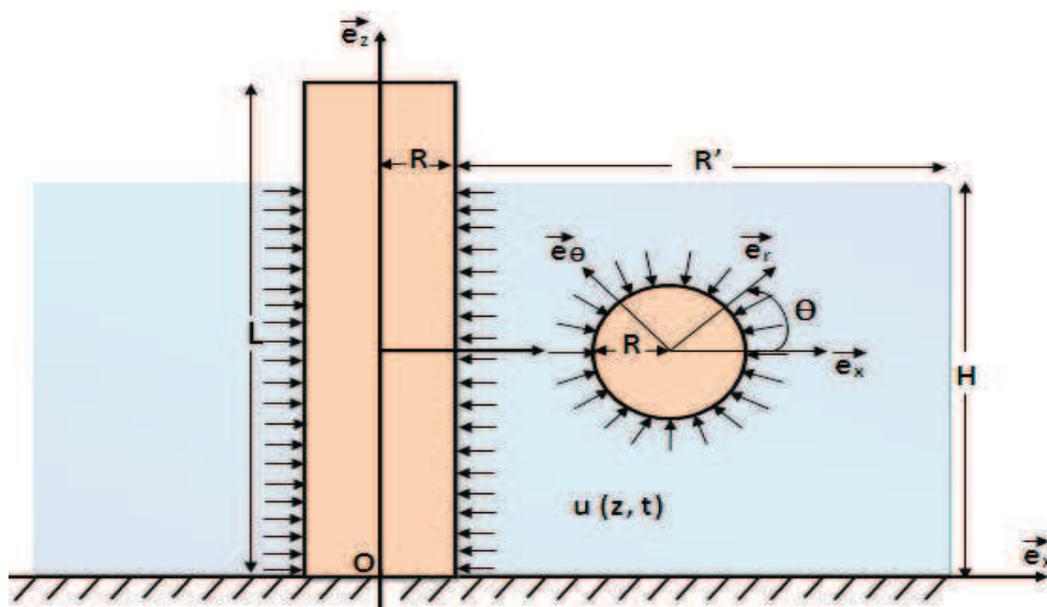


Figure A1.7 – Schéma de la poutre immergée dans l'eau

7.2 Formulation du problème couplé

On s'intéresse au cas générale où le fluide apporte une énergie potentielle instationnaire (ou fluctuante). C'est le cas en particulier d'un fluide compressible (potentiel élastique). Les deux entités fluide et structure possèdent tous les deux leurs degrés de liberté propres et le système dynamique est régi par les équations vibratoires de la structure et du fluide, couplées entre elles. On présente les formulations couplées non symétriques, basées sur les équations proposées dans les deux premières sections pour les systèmes découplés (en pression pour le fluide et le déplacement pour la structure).

7.2.1 Comportement de la poutre

a - Equation du mouvement

Pour analyser le comportement de la poutre, on se place dans le cadre classique de l'hypothèse de Bernoulli, ce qui conduit dans le domaine fréquentiel, en notant $u(z, \omega)$ la flèche comptée suivant (ox) , aux équations du mouvement suivantes :

$$-\omega^2 \rho_s S u + EI \frac{\partial^4 u}{\partial Z^4} = f_h(z, \omega) \quad \text{sur } (z, \omega) \in]0, L[\times]\omega_{min}, \omega_{max}[\quad (\text{I.171})$$

avec $f_h(z, \omega)$ est la résultante linéaire suivant e_x des pressions hydrodynamiques, c'est à dire :

$$f_h(z, \omega) = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta, z, \omega) R \cos \theta d\theta, \quad \text{pour } z \in [0, h] \quad (\text{I.172})$$

$$f_h(z, \omega) = 0, \quad \text{pour } z \in [h, L] \quad (\text{I.173})$$

b - Les conditions aux limites et de couplage

$$u(z, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(L, t) = 0 \quad (\text{I.174})$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}(L, t) = 0$$

pour $t \in]0, T[$

c - Formulation variationnelle

Soit C_u l'espace des champs de déplacements de la structure, définie sur Ω_s et suffisamment différentiables. Soit $C_u^0 \subset C_u$, le sous-espace de C_u constitué des champs de déplacements qui sont nuls sur Γ_s . L'espace C_u^0 est donc l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles de la structure.

Soit v une fonction de l'espace C_u^0 , on multiplie l'équation (I.171) par v , on intègre sur Ω_s puis on utilise la formulation de Green. En tenant compte des conditions aux limites et de couplage (I.174), la forme faible du problème structure s'écrit donc pour tout v dans C_u^0 ,

$$-\omega^2 \int_0^h \rho_s S u v dz + \int_0^h EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz = v q_{z=h} - \int_0^{2\pi} \int_0^h p_{r=R} v R \cos \theta d\theta dz$$

7.2.2 Comportement de la cavité acoustique

a - Equation du mouvement

Nous adoptons la modélisation fournie par l'équation des ondes classique :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{C^2} p = 0 \tag{I.175}$$

b - Les conditions aux limites

Condition sur le fond pour tout r et tout θ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \tag{I.176}$$

Condition de surface libre pour tout r et tout θ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \tag{I.177}$$

Condition au bord du fluide pour tout h et tout θ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{r=R'} = 0 \tag{I.178}$$

Condition sur l'interface fluide-structure :

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{r=R} = \rho_s \omega^2 u \cos \theta \tag{I.179}$$

où $u \cos \theta$ est le déplacement normal en un point M de la surface latérale de la poutre (surface d'interface fluide-structure).

c - Formulation variationnelle

Soit C_p l'espace admissible des champs de pression de la cavité acoustique, définis sur Ω_f et suffisamment différentiables. Il est à noter que l'espace C_p contient des champs $x \mapsto p(x, \omega) = p_0(\omega)$ à pression constante dans Ω_f .

Soit q de l'espace C_p , on multiplie l'équation (I.175) par q et on intègre sur Ω_f puis on utilise la formule de Green. En tenant compte des conditions aux limites et de couplage (I.176, I.177, I.178 et I.179), on en déduit que :

$$-\omega^2 \int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{pq}{C^2} r dr d\theta dz + \int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^h \nabla p \nabla q r dr d\theta dz = -\rho_f \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^h u q |_{r=R} R \cos \theta d\theta dz \quad (I.180)$$

Compte tenu de la géométrie à symétrie de révolution d'axe (oz), la pression est déterminée en utilisant un développement en série de Fourier soit :

$$p(r, \theta, z, \omega) = \underbrace{\sum_{n=0}^{n=\infty} p_n(r, z, \omega) \cos(n\theta)}_{\text{modes symtriques}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{m=\infty} p_m(r, z, \omega) \sin(m\theta)}_{\text{modes anti-symtriques}} \quad (I.181)$$

Cette représentation permet de ramener l'étude du problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. La dépendance en θ est décrite par les fonctions trigonométriques $\cos(n\theta)$ et $\sin(m\theta)$. L'orthogonalité des fonctions trigonométriques conduit au découplage des différents systèmes.

En effet, pour les fonctions cosinus, on a :

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(n'\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n' \\ 2\pi & \text{si } n = n' = 0 \\ \pi & \text{si } n = n' \neq 0 \end{cases}$$

pour les fonctions sinus, on a :

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq m' \\ \pi & \text{si } m = m' \end{cases}$$

et pour les fonctions croisées, on a :

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin(n'\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(n'\theta) d\theta = 0$$

La formulation du problème acoustique devient :

$$-\omega^2 \int_R^{R'} \int_0^h \frac{\rho_m q_m}{C^2} r dr dz + \int_R^{R'} \int_0^h \nabla p_m \nabla q_m r dr dz = 0 \quad (\text{I.182})$$

où :

$$\nabla p_m \nabla q_m = \frac{\partial p_m}{\partial r} \frac{\partial q_m}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} p_m q_m + \frac{\partial p_m}{\partial z} \frac{\partial q_m}{\partial z} \quad (\text{I.183})$$

7.3 Résolution numérique par la méthode des éléments finis

7.3.1 Discrétisation en éléments finis de la poutre

La poutre est discrétisée en éléments finis type poutre à deux nœuds de numéros courants $j, j+1$ de coordonnées z_j, z_{j+1} et de longueur l_j . Sur un élément fini j , la flèche $u(z, \omega)$ est interpolée

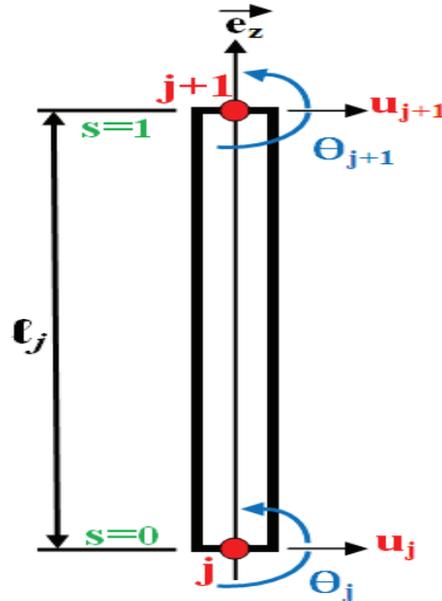


Figure A1.8 – Élément fini de la poutre

de façon classique en choisissant une approximation cubique (polynôme d’Hermite cubique)

soit,

$$u(z, \omega) = N_s^T(z)U^e(\omega) \quad (\text{I.184})$$

avec :

$U^e(\omega) = [u_{j,j}, u_{j+1}, \theta_{j+1}]$, est le vecteur des valeurs modales en déplacement de l'élément, $N_s^T = [1 - 3s^2 + 2s^3, l_j(s - 2s^2 + s^3), (3s^2 - 2s^3), l_j(-s^2 + s^3)]$, est le vecteur des fonctions de forme,

où :

$s = \frac{z - z_j}{l_j} \in [0, 1]$, $l_j = z_{j+1} - z_j$ et $\theta = \frac{\partial u}{\partial z}$, désigne la rotation d'une section droite de la poutre.

Le choix des fonctions de forme de l'élément fini poutre est guidé par la formulation variationnelle du problème. Celle-ci est en effet constituée d'un terme intégral faisant intervenir les dérivées secondes du champ de déplacement $u(z)$, ce qui nécessite d'utiliser une fonction polynômiale de degré deux au moins, ceci impose également le recours à deux inconnues nodales par nœud.

Pour un élément fini à deux nœuds, un total de quatre inconnues nodales est à considérer. Le choix réalisé ici est de considérer la valeur au nœud du déplacement et de sa dérivée première soit u_j et u'_j . La fonction de forme retenue est donc un polynôme de degré trois, défini par quatre paramètres, qui sont calculés de façon à assurer la continuité des valeurs nodales interpolées.

Soit, par exemple, $N_u(s)$ la fonction de forme associée au degré de liberté en déplacement u du nœud j ; $N_u(s)$ doit vérifier :

$$N_u(0) = 1; \quad N'_u(0) = 0; \quad N_u(1) = 0; \quad N'_u(1) = 0.$$

En posant $N_u(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$; les relations précédentes conduisent à écrire :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 3a_2 + 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

d'où : $a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $a_2 = -3$; $a_3 = 2$;

soit $N_u(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3$.

Un raisonnement similaire permet de déterminer les fonctions de forme associées aux degrés de liberté de l'élément fini.

On utilise les mêmes fonctions de forme pour le calcul de v et on discrétise les termes de la

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

formulation variationnelle comme suit :

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_s S u v dz = V_j^T \left(\int_{z_j}^{z_{j+1}} N_s^{jT} N_s^j dz \right) U_j = V^T A_j^{sT} m_j^s A_j^s U \quad (\text{I.185})$$

avec A_j^s la matrice de localisation des degrés de liberté élémentaires U_j dans l'ensemble des degrés de liberté U du problème.

De la même façon, on écrit :

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz = V_j^T \left(\int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{d^2 N_s^{jT}}{dz^2} \frac{d^2 N_s^j}{dz^2} dz \right) U_j = V^T A_j^{sT} k_j^s A_j^s U \quad (\text{I.186})$$

Les matrices M^s et K^s sont assemblées à partir des matrices élémentaires m_u^j et k_u^j selon les relations :

$$M^s = \sum_{j=1}^{j=NE^s} A_j^{sT} m_j^s A_j^s; \quad K^s = \sum_{j=1}^{j=NE^s} A_j^{sT} k_j^s A_j^s.$$

où : NE^s est le nombre d'éléments de la structure.

La matrice de localisation A_j^s est une matrice de dimension $4 \times 2(NE^s + 1)$ qui permet d'établir la correspondance entre les degrés de liberté locaux et globaux.

Avec les fonctions de forme choisies, les matrices élémentaires ont pour expression :

$$m_u^j = \frac{\rho_s S l_j}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{pmatrix} \quad k_u^j = \frac{EI}{l_j^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l_j & -12 & 6l_j \\ 6l_j & 4l_j^2 & -6l_j & 2l_j^2 \\ -12 & -6l_j & 12 & -6l_j \\ 6l_j & 2l_j & -6l_j & 4l_j^2 \end{pmatrix}$$

Le problème finale devient :

$$(K^s - \omega^2 M^s) U = F \quad (\text{I.187})$$

où les matrices M^s et K^s sont obtenues à partir des matrices globales, dont on a retiré les deux premières lignes et les deux premières colonnes, afin de prendre en compte les conditions aux limites en $z = 0$.

7.3.2 Discrétisation en éléments finis de la cavité acoustique

On discrétise le problème fluide dans le plan (x,z) , dans lequel le domaine fluide est $[R, R'] \times [0, h]$. Ce domaine est divisé en élément fini bidimensionnel $[r_i, r_{i+1}] \times [z_j, z_{j+1}]$

avec $(i, j) \in [1, NE^s] \times [1, NE^f]$, de façon à écrire :

$$\int_R \int_0^h \left(\frac{p_m q_m}{C^2} + \nabla p_m \nabla q_m \right) r dr dz = \sum_{i=1}^{NE^f} \sum_{j=1}^{NE^s} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(\frac{p_m q_m}{C^2} + \nabla p_m \nabla q_m \right) r dr dz \quad (\text{I.188})$$

où NE^f est le nombre d'éléments du fluide et NE^s est le nombre d'éléments de la structure.

On utilise des éléments à quatre nœuds, un degré de liberté par nœud. Les composantes $(p_n)_{n \geq 1}$

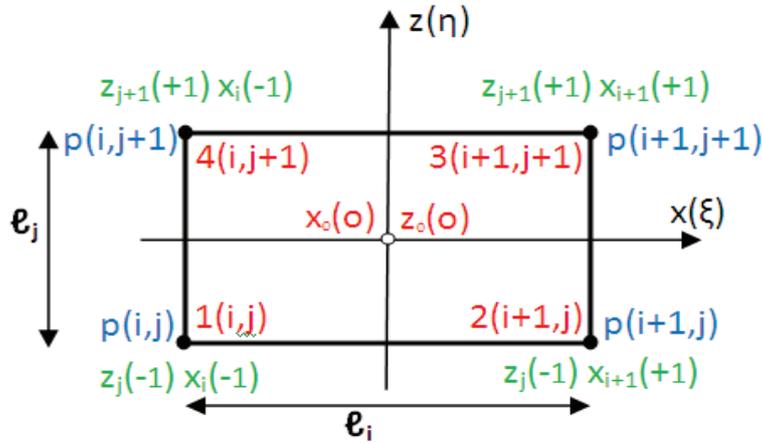


Figure A1.9 – Élément fini du fluide

du développement (I.181) se calcule sur chaque élément de la façon suivante :

$$(p_n)_{|[r_i, r_{i+1}] \times [z_j, z_{j+1}]} = N_{i,j}^F p_{i,j}^n \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{I.189})$$

avec :

- $p_{i,j}^n$, le vecteur des valeurs nodales en pression de l'élément : $p_{i,j}^{nT} = (p_{i,j}^m, p_{i,j+1}^m, p_{i+1,j+1}^m, p_{i+1,j}^m)$
- $N_{i,j}^F$, le vecteur des fonctions de forme.

Les fonctions de forme pour l'élément de dimension $l_i \times l_j$ sont choisies linéaires. En posant $r = r_0 + \alpha l_i$ pour $r \in [r_i, r_{i+1}]$ et $z = z_0 + \beta l_j$ pour $z \in [z_j, z_{j+1}]$; avec $l_i = r_{i+1} - r_i$ et $l_j = z_{j+1} - z_j$, la fonction de forme associée au nœud $k \in [1, 4]$ s'écrit sous la forme :

$$N_k^F(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} (1 + \alpha_k \alpha) (1 + \beta_k \beta) \quad (\text{I.190})$$

avec $\alpha_k = \pm 1$, $\beta_k = \pm 1$ et $(\alpha, \beta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

De même pour les termes de pression anti-symétriques p_m et on utilise des interpolations iden-

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

tiques pour q_n/m , on discrétise les termes de la formulation variationnelle comme suit :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{p_m q_m}{C^2} r dr dz = Q_{i,j}^{nT} \left(\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} N_{i,j}^{fT} N_{i,j}^f r dr dz \right) P_{i,j}^n = Q_n^T A_{i,j}^{fT} m_{i,j}^f A_{i,j}^f P_n \quad (\text{I.191})$$

avec $A_{i,j}^f$ la matrice de localisation des degrés de liberté élémentaires $P_{i,j}^n$ dans l'ensemble des degrés de liberté P^n du problème. On écrit de même :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \nabla p_m \nabla q_m r dr dz = Q_{i,j}^{nT} \left(\int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} G_{i,j}^{fT} G_{i,j}^f r dr dz \right) P_{i,j}^n = Q_n^T A_{i,j}^{fT} k_{i,j}^f A_{i,j}^f P_n \quad (\text{I.192})$$

Les matrices M^f et K^f sont assemblées à partir des matrices élémentaires $m_{i,j}^f$ et $k_{i,j}^f$ selon les relations :

$$M^f = \sum_{i=1}^{NE^f} \sum_{j=1}^{NE^s} A_{i,j}^{fT} m_{i,j}^f A_{i,j}^f; \quad K^f = \sum_{i=1}^{NE^f} \sum_{j=1}^{NE^s} A_{i,j}^{fT} k_{i,j}^f A_{i,j}^f.$$

où NE^s est le nombre d'éléments de la structure, et NE^f est le nombre d'éléments du fluide

La matrice de localisation A_j^f est une matrice de dimension $4 \times 2(NE^s + 1) \times 2(NE^f + 1)$, qui permet d'établir la correspondance entre les degrés de liberté locaux et globaux.

Finalement, le problème acoustique s'écrit :

$$\left(K^f - \omega^2 M^f \right) P = 0 \quad (\text{I.193})$$

7.3.3 Discrétisation par éléments finis du problème vibro-acoustique

On utilise un maillage dans le plan (x, z) en discrétisant la poutre et le fluide respectivement en NE^s et NE^f éléments, le principe de ce maillage est schématisé par la figure (A1.10). En tenant compte des conditions aux limites et de couplage sur l'interface Σ de contact des deux domaines fluide et structure, on calcule le terme de couplage, en écrivant la pression sous forme $p(r, \theta, z) = p(r, z) \cos \theta$ (composante symétrique d'ordre un dans le développement en série de Fourier (I.181)) :

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} p|_{r=R} v R \cos \theta d\theta = R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^h p|_{r=R} v dz = \pi R \int_0^h p|_{r=R} v dz \quad (\text{I.194})$$

En utilisant un couplage compatible entre les éléments poutre monodimensionnels et les éléments fluides bidimensionnels, la discrétisation du terme de couplage est :

$$\int_0^h p|_{r=R} v dz = V^T \sum_{j=1}^{j=NE^s} A_j^{sT} \int_{z_j}^{z_{j+1}} N_j^{sT} N_{i,j}^f dz A_{i,j}^f P \quad (\text{I.195})$$

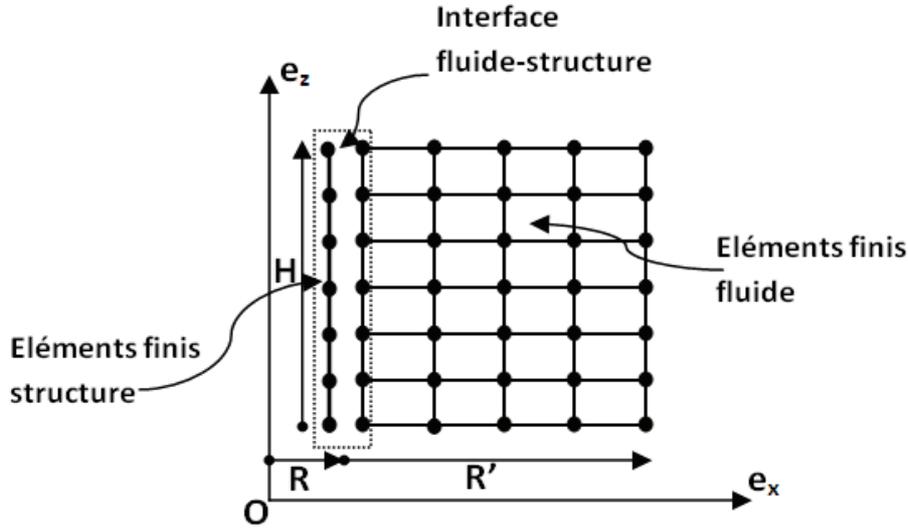


Figure A1.10 – Principe du maillage du système couplé

Cette expression met en évidence une matrice élémentaire d'interaction fluide-structure, notée C_j dont les composantes se calculent par l'équation suivante :

$$C_j(k, l) = \pi R \int_{z_j}^{z_{j+1}} N_k^s(z) N_l^f(z) dz = \pi R \int_0^1 N_k^s(s) N_l^{f'}(s) ds \quad (\text{I.196})$$

avec :

$$N_l^{f'}(s) = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta + 2\beta s)}{4}.$$

En tenant compte du changement de variable ($\beta = -1 + 2s$) introduit pour réaliser le couplage conforme entre l'élément poutre et l'élément fluide et faire coïncider les variables locales des deux éléments couplés suivant z , la matrice élémentaire C_j est donnée explicitement par :

$$C_j = \frac{\pi R l_j}{20} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 3 \\ l_j & 0 & 0 & \frac{2}{3} l_j \\ 3 & 0 & 0 & 7 \\ -\frac{2}{3} l_j & 0 & 0 & -l_j \end{pmatrix}$$

L'assemblage des matrices élémentaires C_j permet d'obtenir la matrice d'interaction pour le problème couplé, cette matrice est notée C . Les termes de couplage se calculent à partir de cette matrice comme suit :

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} p|_{r=R} v R \cos \theta d\theta dz = V^T C P \quad (\text{I.197})$$

$$-\rho_f \omega^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} q|_{r=R} u R \cos \theta d\theta dz = \rho_f \omega^2 Q^T C^T U \quad (\text{I.198})$$

Le problème discret s'écrit :

– pour la structure

$$(K^s - \omega^2 M^s) U = -CP \quad (\text{I.199})$$

– pour le fluide

$$(K^f - \omega^2 M^f) P = -\rho_f \omega^2 C^T U \quad (\text{I.200})$$

– pour le problème vibro-acoustique

Soit en regroupant les deux équations en une seule :

$$-\omega^2 \left(\begin{bmatrix} M^s & 0 \\ \rho_f C^T & M^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^s & -C \\ 0 & K^f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U(\omega) \\ P(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.201})$$

7.4 Résolution analytique

7.4.1 Fluide incompressible

L'équation locale du fluide dans ce cas est l'équation de Laplace.

a - Détermination du potentiel des vitesses

Le potentiel des vitesses $\Phi(M, t) = \phi(M) f(t)$ est cherché en coordonnées cylindriques (r, θ, z) sous la forme d'une solution à variables séparées :

$$\phi(r, \theta, z) = A(r)B(\theta)C(z) \quad (\text{I.202})$$

Il est solution de l'équation de Laplace qui est en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.203})$$

En posant : $A' = \frac{dA}{dr}$; $A'' = \frac{d^2A}{dr^2}$; $B' = \frac{dB}{d\theta}$; $B'' = \frac{d^2B}{d\theta^2}$; $C' = \frac{dC}{dz}$; $C'' = \frac{d^2C}{dz^2}$;
l'équation (I.203) s'écrit :

$$\frac{A''}{A} + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} + \frac{1}{r^2} \frac{B''}{B} + \frac{C''}{C} = 0 \quad (\text{I.204})$$

On en déduit :

$$\frac{B''}{B} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{C''}{C} = \gamma \quad (\text{I.205})$$

où β et γ sont des coefficients constants et on cherche $A(r)$ solution de :

$$r^2 A''(r) + rA'(r) + (\gamma r^2 + \beta)A(r) = 0 \quad (\text{I.206})$$

D'autre part, la fonction $B(\theta)$ est périodique de période 2π de la forme :

$$B(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta \quad (\text{I.207})$$

ce qui fixe la valeur de la constante $\beta = -k^2$. Les valeurs, que peut prendre la constante, fixent la forme de la fonction $C(z)$:

$$\gamma = 0 \quad C(z) = a_0 z + b_0$$

$$\gamma = q^2 \quad C(z) = a_1 e^{qz} + b_1 e^{-qz} \quad (\text{I.208})$$

$$\gamma = -q^2 \quad C(z) = a_2 \cos(qz) + b_2 \sin(qz)$$

et dans ces conditions, l'équation (I.206) devient :

$$r^2 A''(r) + rA'(r) + (\gamma r^2 - k^2)A(r) = 0 \quad \text{o} : \quad \gamma = \pm q^2 \quad (\text{I.209})$$

Le potentiel ϕ s'annule quand $r \rightarrow \infty$ (pas d'écoulement à l'infini) donc $A(r)$ doit s'annuler quand $r \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\gamma = 0 \quad A(r) = m_k r^{-k}$$

$$\gamma = q^2 \quad A(r) = d_k J_k(qr) + e_k Y_k(qr) \quad (\text{I.210})$$

$$\gamma = -q^2 \quad A(r) = f_k K_k(qr)$$

Les termes J_k et Y_k sont les fonctions de Bessel de 1^{re} et 2^e espèce d'ordre entier k , et K_k , les fonctions de Bessel modifiées. La fonction potentiel $\phi(r, \theta, z)$ est donc une combinaison linéaire des trois solutions ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 :

$$\phi_1(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) m_k r^{-k} (a_0 z + b_0) \quad (\text{I.211})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

$$\phi_2(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) m_k r^{-k} (a_0 z + b_0) (d_k J_k(qr) + e_k Y_k(qr)) (a_1 e^{qz} + b_1 e^{-qz}) \quad (\text{I.212})$$

$$\phi_3(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) (f_k K_k(qr)) (a_2 \cos(qz) + b_2 \sin(qz)) \quad (\text{I.213})$$

La condition de glissement sur le fond $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ pour $z = 0$ et pour tous r et θ se traduit par $a_0 = a_1 - b_1 = b_2 = 0$. La condition de surface libre $\phi = 0$ en $z = h$ et pour tous r et θ implique :

$$b_1 = 0$$

$$a_1 \cosh(qh) = 0 \implies a_1 = 0 \quad (\text{I.214})$$

$$a_2 \cos(qh) = 0 \implies q = q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi; \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalement, la solution cherchée est de la forme :

$$\phi = \phi_3(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) (f_{kn} K_k(q_n r)) \cos(q_n z) \quad (\text{I.215})$$

La condition de glissement sur la surface latérale mouillée de la poutre :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) f(t) = \cos \theta \quad (\text{I.216})$$

implique $B(\theta) = \cos \theta$ donc $k = 1$ et $b_k = 0$ et, par conséquent, la solution générale du potentiel est de la forme :

$$\phi = \phi_3(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n K_1(q_n r) \cos(q_n z) \cos \theta \quad (\text{I.217})$$

avec : $q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi$

D'autre part en cherchant $u(z, t)$ sous la forme $u(z, t) = U(z)g(t)$, avec $g(t)$ fonction périodique, la condition de glissement sur la surface latérale de la poutre entraîne $f(t) = \dot{g}(t)$ et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n q_n K_{1,qr}(q_n a) \cos(q_n z) = U(z) \quad (\text{I.218})$$

Avec : $q_n = \frac{2n-1}{2h}\pi$

Les coefficients F_n sont explicités en prémultipliant l'équation (I.215) par $\cos(pz)$, avec $p = (2m-1)/2h$, puis en intégrant entre 0 et h . On obtient alors, en notant $K'_1 = K_{1,qr}$ (il s'agit ici de la dérivée du terme K_1 par rapport au produit qr , comme défini dans l'équation (I.218)).

$$F_n = \frac{4}{(2n-1)\pi K'_1\left(\frac{2n-1}{2h}\pi a\right)} \int_0^h U(z) \cos\left(\frac{2n-1}{2h}\pi z\right) dz \quad (\text{I.219})$$

du fait des conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^h \cos\left(\frac{2m+1}{2h}\pi z\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right) dz = \frac{h}{2} \delta_{mn} \quad (\text{I.220})$$

Le potentiel des vitesses s'exprime alors par la relation :

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \frac{K_1(q_n r)}{K'_1(q_n a)} \left(\int_0^h U(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{g}(t) \quad (\text{I.221})$$

et le calcul de $f_h(z, t)$ donne :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)} \rho_f a \frac{K_1(q_n a)}{K'_1(q_n a)} \left(\int_0^h U(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \cos \theta f(t) \quad (\text{I.222})$$

b - Développement de la flèche sur les modes propres de la poutre sèche

Les pulsations et les modes propres de la poutre dans l'air sont déterminés en cherchant $u(z, t)$ solution des équations (I.171) où $f_h(z, t) = 0$. En posant $\Omega^4 = \frac{\rho_s S}{EI} \cdot \omega^2$, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$U(z) = A \cos \Omega z + B \sin \Omega z + C \cosh \Omega z + D \sinh \Omega z \quad (\text{I.223})$$

La prise en compte des conditions aux limites permet de trouver l'équation donnant les pulsations propres et de déterminer les constantes d'intégration fixant la forme des modes propres, soit : $\cos \Omega l \cosh \Omega l + 1 = 0$ soit $\Omega_r \cong \frac{(2r-1)\pi}{2l}$ pour $r > 2$ et

$$U_r(z) = \frac{1}{\sqrt{l}} (\cos \Omega_r z - \cosh \Omega_r z + C_r (\sinh \Omega_r z - \sin \Omega_r z)) \quad (\text{I.224})$$

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

Avec : $C_r = \frac{\cos \Omega_r l + \cosh \Omega_r l}{\sin \Omega_r l + \sinh \Omega_r l}$

Cette base des modes propres est utilisée pour développer la flèche réelle de la poutre immergée :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(z) \eta_i(t) \quad \eta_i(t) = a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t \quad (\text{I.225})$$

La résultante hydrodynamique $f_h(z, t)$ de l'équation (I.222) a alors pour expression :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\rho_f a}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K'_1(q_n a)} \left(\int_0^h U_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{\eta}_i(t) \quad (\text{I.226})$$

En reportant cette approximation de la flèche et de la résultante hydrodynamique dans l'équation locale de (I.171) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres de la poutre dans l'air, les équations aux pulsations propres de la poutre immergée sont données, pour la i^e pulsation propre de la poutre sèche, par :

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{1}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\rho_f a}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K'_1(q_n a)} \left(\int_0^h U_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h U_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \ddot{\eta}_j(t) \quad (\text{I.227})$$

La résolution se fait en choisissant une base des modes propres tronquée à l'ordre m . On obtient le problème aux valeurs propres donnant les pulsations propres et modes propres de la poutre immergée :

$$(I + M_a) \ddot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = 0 \quad (\text{I.228})$$

avec M_a , matrice masse ajoutée dont le terme général s'écrit :

$$(M_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K'_1(q_n a)} \left(\int_0^h U_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h U_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \quad (\text{I.229})$$

soit également :

$$(M_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K'_1(q_n a)} A_{ni} A_{nj} \quad (\text{I.230})$$

avec :

* $q_n \neq \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{1}{q_n^2 - \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} q_n (\cos \Omega_i h - C_i \sin \Omega_i h) + C_i \Omega_i] + \frac{1}{q_n^2 + \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} q_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i] \quad (\text{I.231})$$

* $q_n = \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{1}{q_n^2 - \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} q_n (\cos \Omega_i h - C_i \sin \Omega_i h) + C_i \Omega_i] + \frac{h}{2} - \frac{C_i h}{(2n-1)\pi} + \frac{1}{q_n^2 + \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} q_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i] \quad (\text{I.232})$$

7.4.2 Fluide compressible

Comme précédemment, le potentiel des vitesses $\Phi(M, t) = \phi(M)f(t)$ est cherché en coordonnées cylindriques (r, θ, z) sous la forme d'une solution à variables séparées :

$$\phi(M)f(t) = A(r)B(\theta)C(z) \quad (\text{I.233})$$

et en réponse forcée. Si ω est la pulsation d'excitation, on note le nombre d'ondes $k = \frac{\omega}{c}$ et ϕ est solution de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (\text{I.234})$$

La même démarche que celle qui a été détaillée pour le fluide incompressible conduit à la solution, qui s'exprime cette fois en fonction de la fonction de Hankel H_1 :

$$\phi = \phi_3(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n H_1(\beta_n r) \cos(q_n z) \cos \theta \quad (\text{I.235})$$

avec : $q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi$ et $\beta_n = k^2 - q_n^2$

La détermination de F_n et le calcul de la résultante hydrodynamique $f_h(z, t)$ conduisent à :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{(\beta_n h)} \rho_f a \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1'(\beta_n a)} \left(\int_0^h U(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{g}(t) \quad (\text{I.236})$$

et en projetant la flèche $u(z, t)$ de la poutre sur la base modale, on obtient :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi}{(\beta_n h)} \rho_f a \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1'(\beta_n a)} \left(\int_0^h U_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{\eta}_j(t) \quad (\text{I.237})$$

En reportant cette approximation de la flèche et de la résultante hydrodynamique dans l'équation locale de (I.171) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres de la poutre

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

dans l'air, les équations aux pulsations propres de la poutre immergée sont données par :

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \frac{H_1(q_n a)}{H_1'(q_n a)} \left(\int_0^h U_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h U_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \ddot{\eta}_j(t) \quad (\text{I.238})$$

pour la i^e pulsation propre de la poutre sèche.

Comme précédemment, la résolution se fait en choisissant une base de modes propres tronquée à l'ordre m , et en effectuant un balayage en fréquence, puisque les coefficients du système sont des fonctions du nombre d'ondes k , on résout alors :

$$(I + M_a) \ddot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = 0 \quad (\text{I.239})$$

où M_a est la matrice masse ajoutée dont le terme général s'écrit cette fois :

$$(M_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1'(\beta_n a)} \left(\int_0^h U_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h U_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \quad (\text{I.240})$$

soit également :

$$(M_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1'(\beta_n a)} A_{ni} A_{nj} \quad (\text{I.241})$$

avec :

* $\beta_n \neq \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{1}{\beta_n^2 - \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} \beta_n (\cos \Omega_i h - C_i \sin \Omega_i h) + C_i \Omega_i] + \frac{1}{\beta_n^2 + \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} \beta_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i] \quad (\text{I.242})$$

* $\beta_n = \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{1}{q_n^2 - \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} q_n (\cos \Omega_i h - C_i \sin \Omega_i h) + C_i \Omega_i] + \frac{h}{2} - \frac{C_i h}{(2n-1)\pi} + \frac{1}{\beta_n^2 + \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} \beta_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i] \quad (\text{I.243})$$

7.5 Comparaison des résultats

Les paramètres géométriques et physiques du problème étudié sont les suivants :

– Pour la structure : densité = 7800 kg.m^{-3} ; module d'Young = $2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; coefficient

de Poisson = 0.3 ; longueur= 30 m ; rayon = 0.5 m ; hauteur d’immersion = 20 m.

– Pour le fluide : densité = 1000 kg.m^{-3} ; vitesse du son = 1500 m.s^{-1} ; rayon = 2 m ; hauteur = 20 cm.

Les résultats obtenus pour la poutre sèche et immergée sont illustrés dans les tableaux (A1.5 et A1.6) :

TABLE A1.5 – Les cinq premières fréquences propres de la poutre sèche.

Mode	Calcul direct		Calcul par superposition modale
	Analytique	Ansys	Ansys
R_1	2,19	2.18	2.178
R_2	13,72	13.72	13.71
R_3	38,44	38,46	38,43
R_4	75,47	75,463	75,45
R_5	124,8	124,82	124,77

TABLE A1.6 – Les cinq premières fréquences propres de la poutre immergée.

Mode	Calcul direct		Calcul par superposition modale
	Analytique	Ansys	Ansys
R_1	1,89	1,89	1.873
R_2	9,43	9,35	9,312
R_3	25,56	26,5	27,32
R_4	53,9	54,2	55,27
R_5	87,7	89,1	90,21

8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté le problème vibro-acoustique. On a commencé par exposer les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le milieu fluide et la structure ainsi que les équations qui régissent les conditions initiales et aux limites. Ensuite, en se situant dans le cadre des faibles perturbations des variables physiques autour de leur état d’équilibre, on a transformé le problème initial en un problème faible en utilisant les espaces tests suffisamment réguliers. Par la suite on a élaboré un modèle discrétisé par éléments finis, pour l’analyse du problème couplé. Finalement, on a validé la formulation pour les cas suivants : les modes de vibration d’une plaque 2D et 3D et un barrage rempli d’eau modélisé par une poutre. Enfin une résolution numérique par ANSYS est menée sur les cas précédents et les résultats trouvés sont comparés

Présentation des problèmes vibro-acoustiques

à quelques résultats expérimentaux. Et on a proposé une résolution analytique d'un modèle simplifié de la poutre immergée dans l'eau. Les résultats trouvés affirment les potentialités des démarches proposées.

Chapitre II

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

1 Introduction

Dans le cadre des études vibro-acoustiques des systèmes couplés fluide-structure modélisés par la méthode des éléments finis. La plupart des structures ont des géométries imposantes, leur maillage entraîne plus d'éléments, donnant lieu à des matrices très larges car on doit ajouter tous les degrés de liberté du domaine fluide à ceux de la structure. Ce qui pénalise considérablement l'étude dynamique qui devient très gourmande en temps CPU à cause des manipulations répétitives de matrices de grandes dimensions. La réduction de la taille du problème devient évidente [27, 28].

Dans le contexte industriel, l'intérêt est de pouvoir ainsi optimiser la forme et la structure des matériaux à utiliser à partir des résultats numériques. Cependant, la complexité des phénomènes étudiés se répercute par des coûts de calculs prohibitifs, ce qui nous amène à rechercher des modèles réduits dont le temps du calcul serait plus réaliste. Par modèle réduit, on entend l'écriture de systèmes de faibles dimensions obtenus à partir de l'analyse d'une formulation numérique classique. Cette réduction a donc un coût initial, mais ce coût peut être largement compensé par la suite si le modèle réduit est utilisable pour une gamme de paramètres différents de ceux de la formulation initiale. De plus l'obtention des systèmes de faibles dimensions, permet d'effectuer un contrôle actif, ce qui n'est pas le cas avec une modélisation numérique classique.

Aussi, il est actuellement envisageable de construire des modèles d'ordre réduit pour les problèmes d'interaction fluide-structure en s'appuyant sur les techniques de réduction développées dans chacun des deux domaines (vibration des structures et écoulement des fluides). Plusieurs méthodes ont été développées dans la littérature par des auteurs de différentes spécialités [25, 68, 74, 106, 129, 137–139].

La construction de ces modèles réduits permettra d'envisager le développement du calcul en temps réel. Il permet aussi l'étude des phénomènes physiques des instabilités de couplage qui sont souvent difficile à prédire. Ce problème est stratégique et intéresse de nombreux secteurs. C'est pour cela qu'on propose dans ce chapitre des modèles d'ordre réduit où il est envisagé de mettre en commun les compétences acquis dans les techniques d'analyse modale et synthèse modale, dans cette dernière technique, on adopte la méthode de sous-structuration de type Craig et Bampton pour la structure et la méthode des sous-domaines pour la cavité acoustique. Dans un premier temps, la résolution numérique est menée sur les plaques 2D et 3D sèches et immergées en appliquant la technique de superposition modale. Dans un deuxième temps, elle est menée sur une hélice de bateau sèche et immergée en proposant une réduction de modèle [89, 90].

Le problème discrétisé est décrit par le système d'équations différentielles suivant :

Pour la structure

$$M^s \ddot{u} + K^s u = f^s(u, t) \quad (\text{II.1})$$

où $u(x, t)$ est le déplacement de la structure, M^s est la matrice de masse, K^s est la matrice raideur et f^s sont les excitations extérieures.

Pour le fluide

$$M^f \ddot{p} + K^f p = a^f(p, t) \quad (\text{II.2})$$

où $p(x, t)$ est la pression du fluide, M^f est la matrice de masse, K^f est la matrice raideur et a^f sont les accélérations extérieures imposées sur le fluide.

On présente par la suite deux méthodes fortement liés de la réduction de modèle en mécanique :

- La première est basée sur une analyse modale du système étudié ;
- La deuxième méthode utilise la première en décomposant le fluide en sous-domaines et la structure en sous-structures comportant chacune une base modale différente et couplés par leurs interfaces communes.

2 Réduction de modèle par analyse modale

On peut dénombrer quatre méthodes principales de réduction de modèle par analyse modale :

La première méthode est dénommée méthode modale et regroupe les approches utilisant comme base réduite les modes du système dynamique (II.1) en considérant que le terme f est nul. Les plus répandues sont l'analyse modale en déplacement qui consiste à prendre comme base spatiale les vecteurs propres du système dynamique sans amortissement, l'analyse en accélération dont la base contient au premier ordre la base modale en déplacement et la troisième méthode la plus répandue, utilise la base modale en accélération au premier ordre auquel est rajouté un terme à l'ordre 2.

La deuxième classe des méthodes utilisent une base de Ritz [134].

Tandis que pour la troisième catégorie, la base réduite est calculée par la méthode de Lanczos [103].

La dernière méthode consiste à combiner les méthodes précédentes [22] par superposition modales.

Dans les références [94, 95] on trouve respectivement une comparaison dans le cas d'une structure encadrée à ses extrémités et dans le cas où elles sont entièrement libres. Nour-Omid et Clough [103] ont montré que la base de Ritz et Lanczos sont identiques. Dans le cas des problèmes non linéaires plusieurs variantes ont été proposées. Un recensement de ces méthodes a été effectué par Kapiana [75]. Dans le cadre de ce travail, la méthode de réduction de modèle par projection sur les bases modales de la structure dans le vide d'une part et de la cavité interne à parois rigides découplée d'autre part sont utilisées.

Dans cette méthode de réduction de modèle, les équations discrétisées du modèle vibro-acoustique sont projetées sur les m_s modes élastiques de la structure ne contenant pas les modes de corps rigides (structure fixée sur Γ_0) et sur les m_f modes acoustiques de la cavité contenant le mode de pression constante à valeur propre nulle [88–90].

Soient $m_s \ll n_s$ et $m_f \ll n_f$, avec n_s et n_f sont respectivement les degrés de liberté de la structure et la cavité acoustique. Cette réduction de modèle est décrite dans ce qui suit.

2.1 Condensation par superposition modale du problème dynamique

Les modes élastiques de la structure sont obtenus en calculant les solutions $\mu^s > 0$ et ϕ^s dans R^{n_s} du problème généralisé aux valeurs propres de la structure dans le vide tel que :

$$(K^s - \mu^s M^s) \phi^s = 0, \quad (\text{II.3})$$

où $0 < \mu_1^s \leq \mu_2^s \leq \dots \leq \mu_{m_s}^s$ sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\phi_1^s, \phi_2^s, \dots, \phi_{m_s}^s$ qui vérifient les propriétés d'orthogonalité :

$$[\phi_i^s]^T M^s [\phi_j^s] = \delta_{ij} \quad (\text{II.4})$$

$$[\phi_i^s]^T K^s [\phi_j^s] = \mu_i^s \delta_{ij} \quad (\text{II.5})$$

où δ_{ij} est le symbole de Krœnecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

Les déplacements physiques peuvent être décrits par la superposition des m_s premiers modes propres de la structure, soit :

$$\{u\} = [\phi] \{v\} \quad (\text{II.6})$$

où :

$[\phi] = \phi_1^s, \phi_2^s, \dots, \phi_{m_s}^s$ est la matrice des m_s premiers modes propres de la structure ;

$\{v\}$ est le vecteur des variables modales de la structure.

Après projection, l'équation du mouvement de la structure devient :

$$M_r^s \{\ddot{v}\} + K_r^s \{v\} = \phi^T \{f^s\} \quad (\text{II.7})$$

avec : $M_r^s = \phi^T M^s \phi$; $K_r^s = \phi^T K^s \phi$; $f_r^s = \phi^T f^s$

M_r^s et K_r^s sont les matrices généralisées condensées de masse et de raideur modales dont la dimension n'est que $(m_s \times m_s)$.

2.2 Condensation par superposition modale du problème acoustique

La méthode de superposition modale peut être aussi utilisé en acoustique. En négligeant l'effet de la pesanteur sur la surface libre du fluide, les modes acoustiques de la cavité sont obtenus en calculant les solutions $\mu^f > 0$ et ψ dans R^{n_f} du problème généralisé aux valeurs

2 Réduction de modèle par analyse modale

propres de la cavité à paroi rigide telles que :

$$\left(K^f - \mu^s M^f \right) \Psi = 0 \quad (\text{II.8})$$

où $0 = \mu_1^f < \mu_2^f \leq \dots \leq \mu_{m_f}^f$ sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{m_f}$ qui vérifient aussi les propriétés d'orthogonalité :

$$[\Psi_i]^T M^f [\Psi_j] = \delta_{ij} \quad (\text{II.9})$$

$$[\Psi_i]^T K^f [\Psi_j] = \mu_i^f \delta_{ij} \quad (\text{II.10})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Alors la cavité acoustique possède un premier mode de pression constant associé à la première valeur propre nulle et $m_f - 1$ modes acoustiques à paroi rigide.

Les pressions nodales peuvent être décrites par la superposition des m_f premiers modes propres de la cavité, soit :

$$\{p\} = [\Psi] \{q\} \quad (\text{II.11})$$

où :

- $[\Psi] = \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{m_f}$ est la matrice des m_f premiers modes propres du fluide ;
- $\{q\}$ est le vecteur des variables modales du fluide.

Après projection, on peut écrire le système (II.8) comme suit :

$$M_r^f \{\ddot{q}\} + K_r^f \{q\} = \Psi^T \left\{ f_r^f \right\} \quad (\text{II.12})$$

avec : $M_r^f = \Psi^T M^f \Psi$; $K_r^f = \Psi^T K^f \Psi$; $f_r^f = \Psi^T f^f$

M_r^f et K_r^f sont les matrices généralisées condensées de masse et de raideur modales dont la dimension n'est que $(m_f \times m_f)$. L'analyse acoustique sur la base du modèle réduit mène à un gain considérable en temps de CPU sans dégradation de la solution.

2.3 Condensation par superposition modale du problème vibro-acoustique

En regroupant les équations (II.7 et II.12) en une seule, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \Psi \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v \\ q \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Le problème vibro-acoustique réduit s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_r^s & 0 \\ \rho_f C^t & M_r^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r^s & -C \\ 0 & K_r^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_r^s \\ f_r^f \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Ainsi pour tout $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, la solution de l'équation (II.14) du modèle matriciel vibro-acoustique réduit est cherchée sous la forme,

$$u(\omega) = [\phi]v(\omega) \quad (\text{II.15})$$

$$p(\omega) = [\psi]q(\omega) \quad (\text{II.16})$$

où les vecteurs $v(\omega)$ et $q(\omega)$ sont les coordonnées généralisées associées respectivement aux m_s premiers modes élastiques de la structure constituant la matrice $[\phi]$ et aux m_f premiers modes acoustiques incluant le mode constant de la cavité constituant la matrice $[\psi]$ et la matrice $[C]$ est la matrice généralisée de couplage vibro-acoustique.

Les coordonnées généralisées vérifient alors l'équation matricielle réduite suivante :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_r^s & 0 \\ \rho_f C^t & M_r^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r^s & -C \\ 0 & K_r^f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v(\omega) \\ q(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_r^s(\omega) \\ f_r^f(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

où les vecteurs $f_r^s(\omega)$ et $f_r^f(\omega)$ sont respectivement les vecteurs des forces généralisées appliquées à la structure et des sources acoustiques généralisées, définis par :

$$f^s(\omega) = [\phi]f_r^s(\omega) \quad (\text{II.18})$$

$$f^f(\omega) = [\psi]f_r^f(\omega) \quad (\text{II.19})$$

3 Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale

Dans cette section, nous présentons un modèle numérique réduit par l'analyse modale pour le calcul des modes élasto-acoustiques d'un système couplé fluide-structure. Ce modèle nécessite le passage par les différentes étapes suivantes :

3 Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale

- l'écriture des équations du mouvement de la structure couplée avec une cavité fluide afin d'établir la forme variationnelle associée au système couplé élasto-acoustique,
- l'utilisation d'une méthode couplée éléments finis/éléments finis pour la discrétisation de la structure et de la cavité fluide. En effet, cette discrétisation amène à l'écriture de l'équation matricielle gouvernant le mouvement du système élasto-acoustique,
- l'utilisation d'une méthode modale pour le déplacement de la structure d'une part, et la décomposition de la pression modale en une pression modale statique et d'une pression modale dynamique d'autre part, nous aboutissons à un système matriciel symétrique de petite taille facile à mettre en œuvre numérique pour le calcul des modes élasto-acoustiques.

3.1 Mise en équation

Le déplacement de la structure $u(M,t)$ et la pression de la cavité fluide sont considérés harmonique par rapport au temps,

$$u(M,t) = \text{Re}(u(M,t)e^{-i.\omega.t}) \quad (\text{II.20})$$

$$p(M,t) = \text{Re}(p(M,t)e^{-i.\omega.t}) \quad (\text{II.21})$$

Re désigne la partie réelle. ω est la pulsation.

L'équation du mouvement de la structure s'écrit,

$$\sigma_{ij} - \rho_s.\omega^2.u_i = 0 \quad \text{dans } (V_s) \quad (\text{II.22})$$

où σ est le tenseur des contraintes et ρ_s est la masse volumique de la structure.

La loi de comportement de la structure élastique s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}.u_{k,l} \quad \text{avec } C \text{ est le tenseur d'élasticité} \quad (\text{II.23})$$

La pression dans la cavité obéit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2.p = 0 \quad \text{dans } (V_f) \quad (\text{II.24})$$

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

Les deux équations de couplage au niveau de la surface d'interaction fluide-structure sont les suivantes :

$$\sigma_{ij}.n_j + p.n_i = T_{ij}.n_i = 0 \quad \text{sur } (\Sigma) \quad (\text{II.25})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_f.\omega^2.u_n = 0 \quad \text{sur } (\Sigma) \quad (\text{II.26})$$

3.2 Formulation variationnelle du problème élasto-acoustique

En tenant compte de la condition aux limites (II.25), l'équation variationnelle de la structure en termes de déplacement, pour tout v cinématiquement admissible, s'écrit :

$$\int_{V_s} (C_{ijkl}.u_{k,l}.v_{i,j} - \rho_s.\omega^2.u_i.v_i)dV = \int_{\Sigma} p.v.d\Sigma \quad (\text{II.27})$$

En tenant compte de la condition aux limites (II.26), l'équation variationnelle du fluide, pour tout q statiquement admissible, s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_f.\omega^2} \cdot \int_{V_f} (\nabla p, \nabla q) - k^2.p.q).dV = \int_{\Sigma} .u.q.d\Sigma \quad (\text{II.28})$$

La formulation variationnelle du système couplé est la somme des deux équations variationnelles (II.12) et (II.13). La solution (u, p) rend stationnaire la fonctionnelle du problème couplé :

$$\begin{aligned} F(u, p) &= \frac{1}{2} \cdot \int_{V_s} (C_{ijkl}.u_{k,l}.u_{i,j} - \rho_s.\omega^2.(u, u))dV - \int_{\Sigma} p.u.d\Sigma \\ &- \frac{1}{2.\rho_f.\omega^2} \cdot \int_{V_f} ((grad(p), grad(p)) + k^2.p^2).dV \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

La solution (u, p) est donnée par l'équation variationnelle : $\delta F(u_s, p) = 0$.

3.3 Discrétisation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis de la fonctionnelle (II.29) du problème couplé conduit au système algébrique,

$$\begin{pmatrix} [K] - \omega^2[M] & -[C] \\ -[C]^T & \frac{1}{\rho_f \cdot \omega^2} \cdot [H] - \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot [Q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.30})$$

- $[K]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité et de masse de la structure.
- $[H]$ et $[Q]$ sont les matrices globales du fluide ;
- $[C]$ est la matrice du couplage ;
- u est le vecteur déplacement nodal de la structure ;
- p est le vecteur de la pression nodale dans la cavité.

La projection de ce système matriciel (II.30) sur les deux bases modales de la structure et du fluide non couplés conduit à,

$$\begin{pmatrix} [K_r] - \omega^2[M_r] & -[C_r] \\ -[C_r]^T & \frac{1}{\rho_f \cdot \omega^2} \cdot [H_r] - \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot [Q_r] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.31})$$

où v est le vecteur des composantes modales du déplacement,

$$\{u\} = [\Phi]\{v\} \quad (\text{II.32})$$

et q est le vecteur des composantes modales de la pression,

$$\{p\} = [\Psi]\{v\} \quad (\text{II.33})$$

$[\Phi]$ et $[\Psi]$ sont respectivement les bases modales propre de la structure et de la cavité. On a :

$$\begin{aligned} [M_r] &= [\Phi]^t [M] [\Phi] \\ [K_r] &= [\Phi]^t [K] [\Phi] \\ [C_r] &= [\Phi]^t [C] [\Psi] \\ [Q_r] &= [\Psi]^t [Q] [\Psi] \\ [H_r] &= [\Psi]^t [H] [\Psi] \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

Les matrices modales condensées $[M_r]$ et $[K_r]$ sont diagonales et de dimension $(m^s \times m^s)$, où m^s est le nombre des modes propres de la structure très inférieur au nombre de degré de liberté. Les matrices modales condensées $[Q_r]$ et $[H_r]$ sont diagonales et de dimension $(m^f \times m^f)$, où m^f est le nombre des modes propres de la cavité fluide très inférieur au nombre de degré de liberté. La matrice modale condensée de couplage $[C_r]$ est pleine de dimension $(m^s \times m^f)$.

3.4 Calcul des modes élasto-acoustiques

Le premier terme de la matrice modale $[H_r]$ correspond à un mode fluide de la cavité à pression constante. Nous isolons l'équation correspondante à ce mode fluide. Les matrices relatives au fluide et du couplage s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{aligned} [H_r] &= \begin{bmatrix} 0 \\ H'_r \end{bmatrix} \\ [Q_r] &= \begin{bmatrix} Q'_0 \\ Q'_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

$$[C_r] = [\{C'_0\}, \{C'_r\}]$$

Le vecteur modal de la pression dans la cavité fluide s'écrit :

$$\{q\} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_r \end{pmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Pour mettre le système algébrique sous forme d'un problème aux valeurs propres, on utilise une transformation proposée par B.M. Irons [68],

$$\{q_r\} = \rho_f \cdot \omega^2 \cdot [H'_r]^{-1} ([C'_r]^t \cdot \{v\} + \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} [Q'_r] \{q_r\}) \quad (\text{II.37})$$

Dans le cas où les vecteurs propres de la structure sont normés par rapport à la matrice masse $[M]$ de la structure et ceux de la cavité fluide par rapport à la matrice du fluide $[Q]$, et en considérant le changement de variables ci-dessous (II.38), on obtient le système final (II.39) :

$$\{q_r\} = \sqrt{\rho_f \cdot c^4 \cdot [H'_r]^{-2}} \cdot \{r\} \quad (\text{II.38})$$

3 Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \Omega_s^2 & -C'_0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\rho_f \cdot c^2} & 0 \\ -C'_0{}^t & 0 & \Omega_f^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ q_0 \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \rho_f \cdot c^2 \cdot C'_r \cdot \Omega_f^{-2} \cdot C_r{}^t & 0 & \sqrt{\rho_f \cdot c^2} \cdot \Omega_f^{-1} \cdot C_r' \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\rho_f \cdot c^2} \cdot \Omega_f^{-1} \cdot C_r{}^t & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ q_0 \\ r \end{Bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Ω_s correspond à une matrice diagonale qui contient les pulsations propres de la structure, Ω_f contient les $(m_f - 1)$ pulsations propres de la cavité fluide, m_f est le nombre de modes fluide, c est la vitesse du son dans la cavité fluide, I est la matrice d'identité.

L'avantage de cette transformation est d'avoir un système matriciel symétrique. La détermination des fréquences et des modes vibro-acoustiques d'une structure couplée avec une cavité fluide se fait par la résolution de ce système modal.

3.5 Résultats numériques

3.5.1 Analyse modale numérique d'une plaque 2D immergée dans l'eau

Cet exemple illustre un problème d'état stable d'interaction vibro-acoustique, et l'utilisation du couplage à petite déformation structurelle linéaire. Il s'agit d'une plaque élastique en immersion complète dans un fluide compressible qui est au repos. Le but du problème est de déterminer les fréquences propres de la structure couplée avec l'eau et l'effet du couplage sur la vibration du système avec réduction de modèle et sans réduction [89, 91].

La structure est supposée encadrée de son côté supérieur, et n'est soumise à aucun chargement, ainsi le fluide est supposé immobile aux bords et la pression est nulle aux bords aussi sauf sa partie supérieure qui est supposée libre.

Dans le calcul numérique par le code commercial ANSYS, La solution en boucle fluide-structure a été exécutée jusqu'à ce que les critères de convergence ont été respectés. Une tolérance de convergence de 0,5 pour cent a été utilisée. Pour l'analyse de la structure sèche, 40 itérations globales étaient suffisantes pour converger la solution. Dans la boucle d'interaction fluide-structure, la convergence est atteint en 100 itérations.

Les dimensions géométriques et propriétés des matériaux sont illustrées dans les tableaux (A1.1 et A1.2) :

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

TABLE A1.1 – Dimensions géométriques et propriétés des matériaux pour la structure.

Module d'Young (Pa)	coefficient de Poisson	Densité ($kg.m^{-3}$)	Longueur (m)	Largeur (m)
2.1×10^{11}	0.3	7800	0.5	0.5

TABLE A1.2 – Dimensions géométriques et propriétés des matériaux pour le fluide.

Densité ($kg.m^{-3}$)	Vitesse du son ($m.s^{-1}$)	Longueur (m)	Largeur (m)
1000	1500	1.5	1

Pour le calcul éléments finis, le fluide et la structure ont été maillés avec un élément rectangulaire à quatre nœuds respectivement FLUID29 et PLANE42. Le maillage choisi est un maillage compatible où les nœuds des deux domaines se coïncident à l'interface fluide-structure, à 600 éléments 100 pour la structure et 500 pour le fluide, chaque élément a quatre nœuds et chaque nœud a trois degrés de libertés U_x et U_y (les déplacements suivants x et y) et P la pression pour l'interface. La figure (A1.2) montre la discrétisation du système couplé en éléments finis. Les résultats obtenus pour la structure sèche et immergée sont illustrés dans les tableaux (A1.3

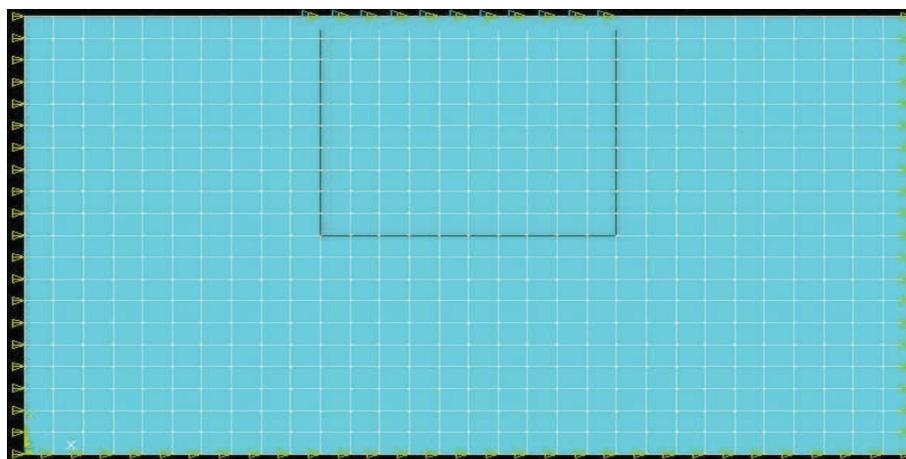


Figure A1.1 – Modèle éléments finis du système

et A1.4).

D'après les résultats affichés dans les tableaux (A1.3 et A1.4) et la figure (A1.2), on constate une baisse considérable des fréquences propres de la structure après son immersion dans le fluide ce qui change son comportement vibratoire.

Les premiers modes propres de la structure et les modes propres acoustiques sont illustrés dans les figures (A1.3 et A1.4).

3 Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale

TABLE A1.3 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée sans réduction.

Mode	structure sèche	structure immergée
R_1	1122	890.12
R_2	2743.9	998.16
R_3	3016	1312.9
R_4	4850.1	1595.7
R_5	5108.6	1930.9

TABLE A1.4 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 2D sèche et immergée avec réduction.

Mode	structure sèche	structure immergée
R_1	1121.9	888.32
R_2	2743.4	997.07
R_3	3015.85	1312.17
R_4	4850.36	1595.6
R_5	5107.61	1929.87

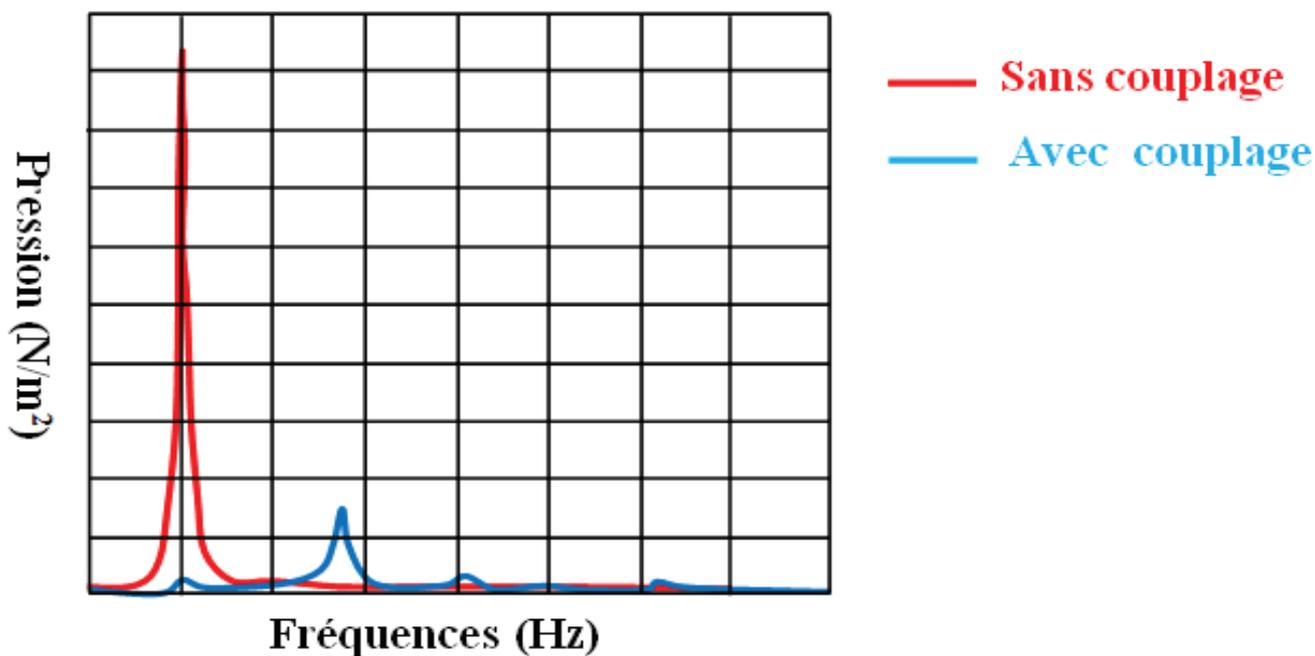


Figure A1.2 – L'impact du couplage sur la pression

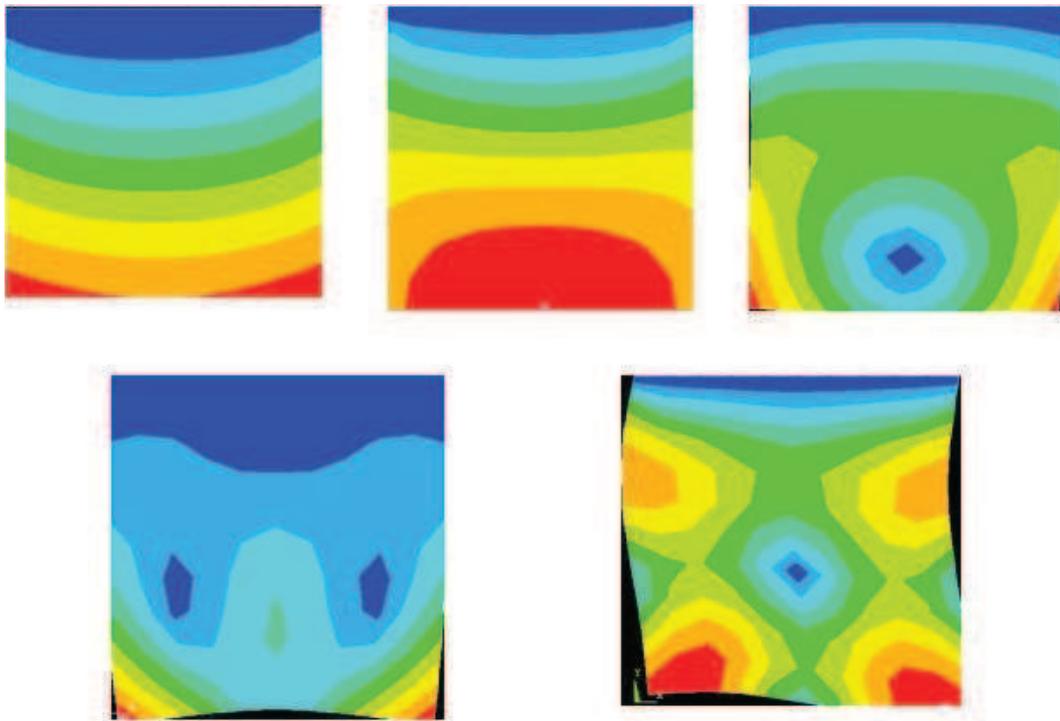


Figure A1.3 – Les cinq premiers modes propres de la structure

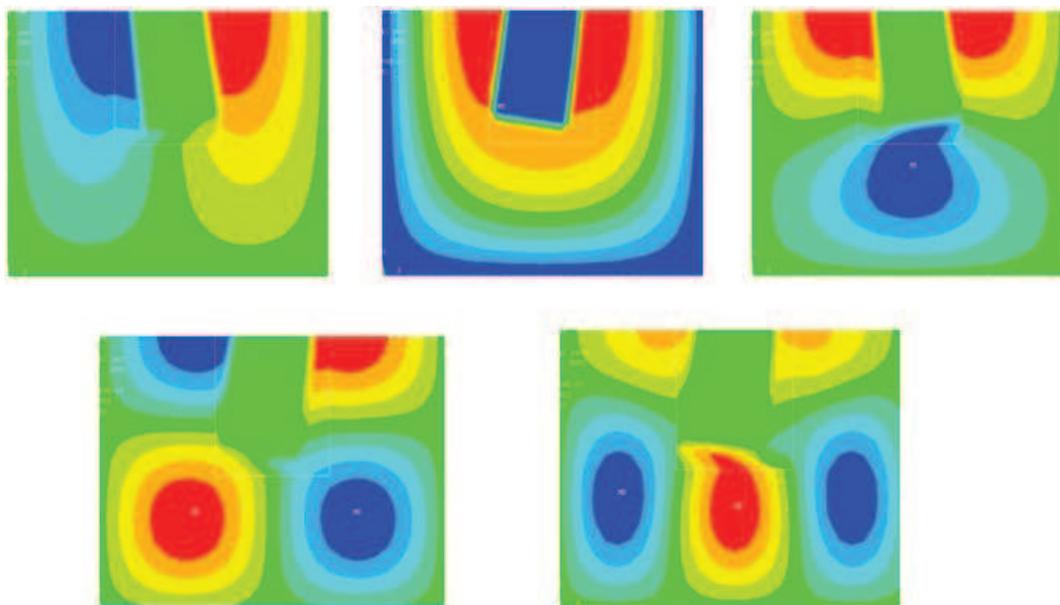


Figure A1.4 – Les cinq premiers modes acoustiques

3 Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale

3.5.2 Analyse modale numérique d'une plaque 3D immergée dans l'eau

Dans cette section, nous proposons l'étude déterministe d'une structure 3D de faible épaisseur que l'on peut considérer comme une membrane. La structure est encadrée de son côté supérieur (suivant sa largeur), et n'est soumise à aucun chargement. Ce problème illustre l'utilisation du couplage à petite déformation structurelle linéaire. Il s'agit d'une plaque d'épaisseur faible de 1 mm en immersion complète dans l'eau qui est au repos. L'objectif est la détermination des cinq premières fréquences propres numériques et expérimentales [88, 90].

L'étude numérique est conduite en utilisant le code de calcul éléments finis ANSYS. Une méthode de couplage éléments finis/éléments finis est proposée pour modéliser le système couplé fluide-structure, avec une formulation non symétrique en pression/déplacement. Une comparaison des résultats numériques et expérimentaux est alors proposée.

Les paramètres géométriques et les propriétés des matériaux des deux domaines sont les suivants :

- Pour la structure : densité = 7800 kg.m^{-3} ; module d'Young = $2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; coefficient de Poisson = 0.3 ; longueur = 9.6 cm ; largeur = 7.2 cm ; hauteur = 1 mm.
- Pour le fluide : densité = 1000 kg.m^{-3} ; vitesse du son = 1500 m.s^{-1} ; longueur = 28.5 cm ; largeur = 14 cm ; hauteur = 19 cm.

Le maillage choisi est un maillage tétraédrique, à 800 éléments, chaque élément a quatre nœuds et chaque nœud a six degrés de liberté U_x , U_y et U_z (les déplacements suivants x, y et z), θ_x , θ_y et θ_z (les rotations suivants x, y et z).

Les figures (A1.5 et A1.6) montrent le schéma du modèle et sa discrétisation en éléments finis.

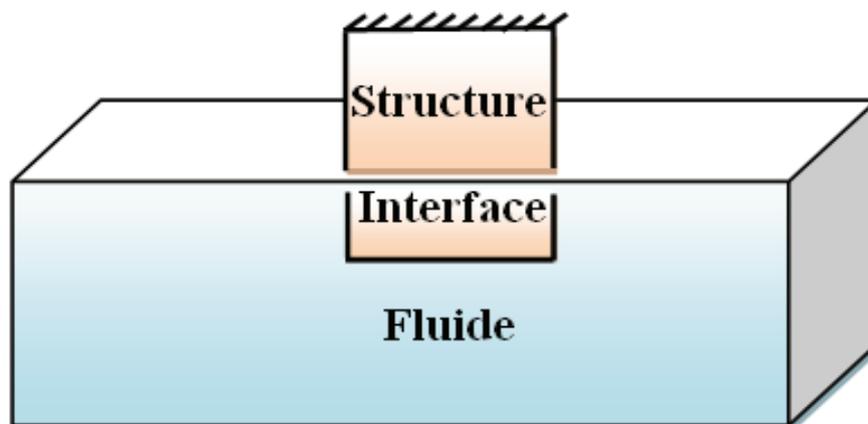


Figure A1.5 – Modèle de la plaque 3D immergée dans l'eau

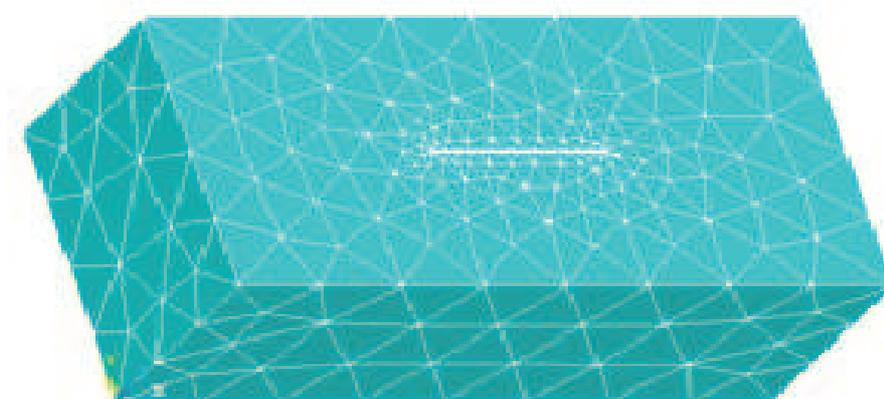


Figure A1.6 – Discrétisation en éléments finis du système

Les résultats obtenus pour la structure sèche et immergée sont illustrés dans les tableaux (A1.5) et (A1.6).

TABLE A1.5 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D sèche avec réduction.

Mode	Numérique	Expérimental
R_1	90.666	87.9
R_2	279.30	280
R_3	554.54	548
R_4	961.26	— — —
R_5	1153.8	1184

TABLE A1.6 – Les cinq premières fréquences propres de la structure 3D immergée avec réduction.

Mode	Ansys	Expérimental
R_1	46.677	38
R_2	143.21	152
R_3	289.72	260
R_4	492.25	— — —
R_5	691.28	703

Les figures (A1.7 et A1.8) montrent respectivement les cinq premiers modes propres numériques et expérimentaux de la structure immergée. On note que le quatrième mode propre expérimental n'est pas obtenu.

3 Calcul des modes vibro-acoustiques par superposition modale

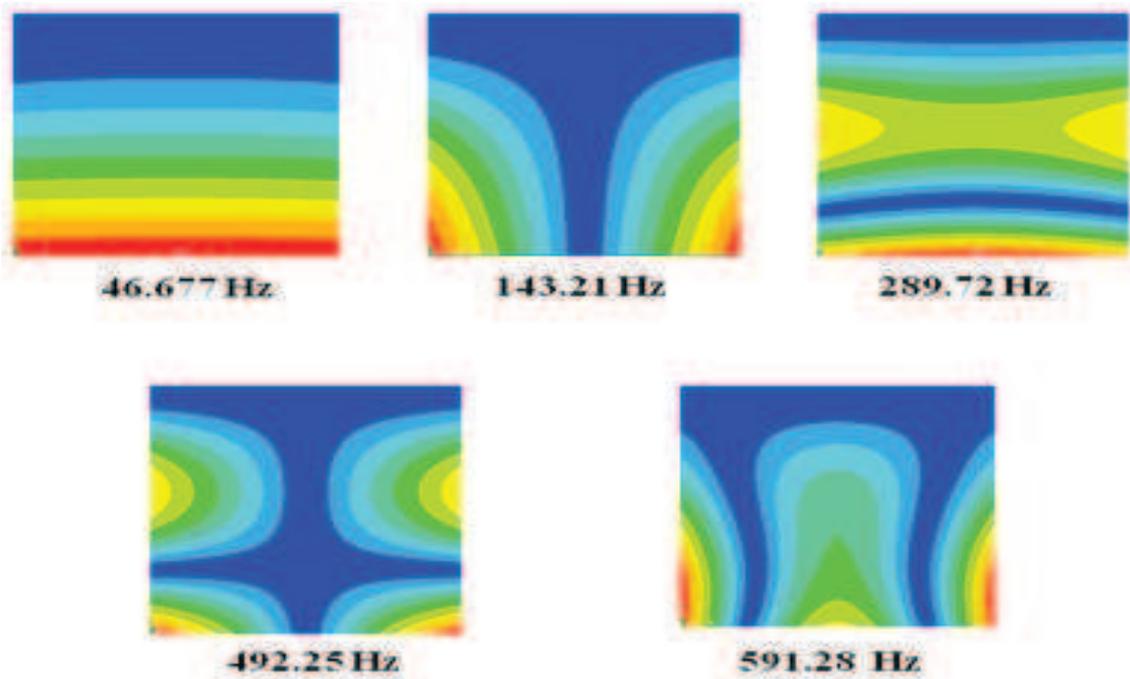


Figure A1.7 – Les cinq premiers modes propres numériques

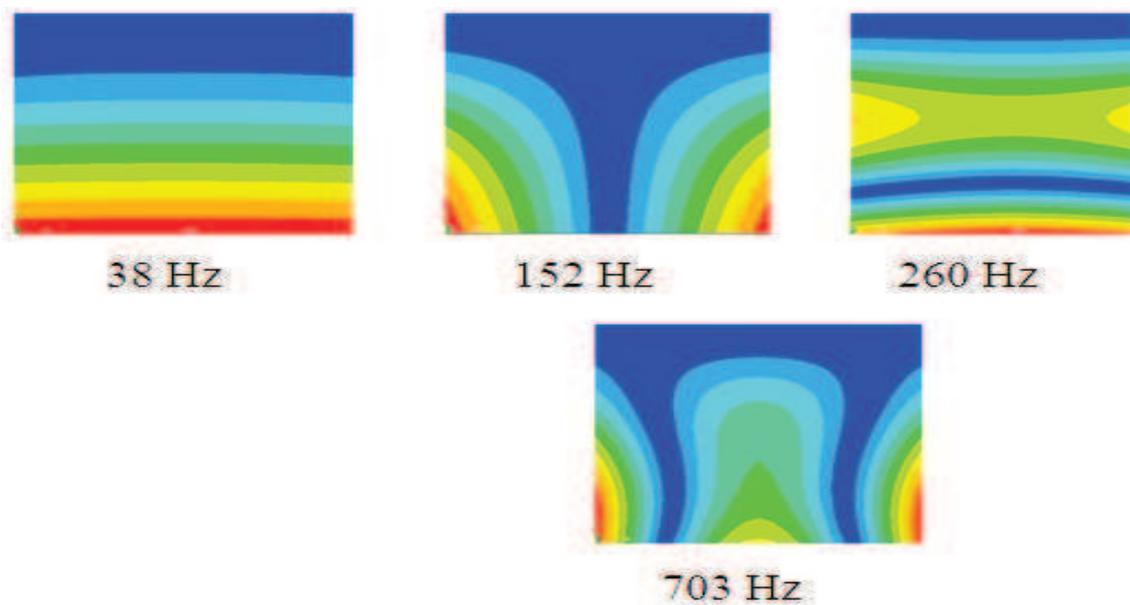


Figure A1.8 – Les cinq premiers modes propres expérimentaux

3.5.3 Analyse modale numérique d'un solide 3D immergé dans l'eau

Nous présentons dans cette étude, une analyse modale numérique d'un solide immergé dans l'eau afin de simuler la réponse du système et de tester l'efficacité de la méthode proposée en 3D, en moyennes fréquences. L'approche numérique consiste à proposer un modèle éléments finis de la structure en eau et a permis de valider le calcul numérique par ANSYS pour la modélisation numérique de problèmes couplés fluide-structure. La méthode est illustrée par un exemple d'un solide élastique 3D immergé dans l'eau dont les propriétés des matériaux sont :

- Pour la structure : densité = 7860 kg.m^{-3} ; module d'Young = $2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; coefficient de Poisson = 0.3 ; longueur = 2 m ; largeur = 1 m ; hauteur = 0.2 m.
- Pour le fluide : densité = 1000 kg.m^{-3} ; vitesse du son = 1500 m.s^{-1} ; longueur = 20 m ; largeur = 10 m ; hauteur = 10 m.

En ce qui concerne le calcul éléments finis, l'élément SOLID45 est utilisé pour la modélisation de la structure en 3D. Cet élément est défini par huit nœuds ayant trois degrés de liberté à chaque nœud, les déplacements suivant x, y et z. Et l'élément FLUID30 est utilisé pour la modélisation du milieu fluide et l'interface dans le problème vibro-acoustique. L'équation régissant l'acoustique, à savoir l'équation d'onde en 3D, a été discrétisée en tenant compte du couplage de pression acoustique et le mouvement structurel à l'interface. L'élément de l'interface a huit nœuds et quatre degrés de liberté par nœud (x, y, z, p). Les déplacements, cependant, ne sont applicables que dans les nœuds qui sont sur l'interface.

La figure (A1.9) montre un schéma des types d'éléments utilisés dans cette étude et la discrétisation par éléments finis de cette structure immergée. Les résultats numériques trouvés avec

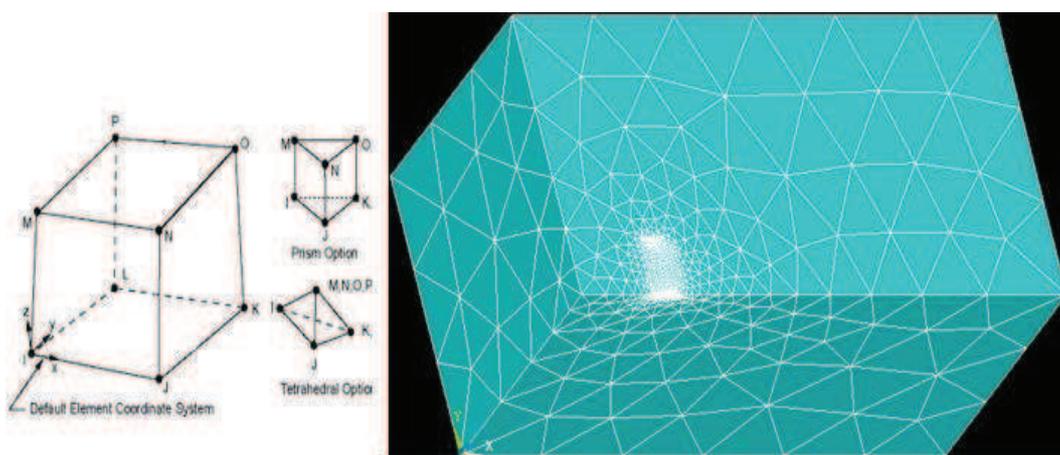


Figure A1.9 – Les types d'éléments et modèle éléments finis

réduction de modèle sont donnés dans le tableau (A1.7) suivant :

TABLE A1.7 – Les cinq premières fréquences propres du bloc 3D sèche et immergé avec réduction.

Mode	structure sèche	structure immergée
R_1	42.734	23.395
R_2	167.442	67.646
R_3	180.851	91.626
R_4	260.761	131.76
R_5	535.856	210.458

4 Réduction de modèle par synthèse modale

4.1 Introduction

La réduction de modèle par sous-structuration ou par décomposition du domaine consiste à diviser le domaine en plusieurs sous-structures [36, 37, 44]. Pour chaque sous-structure, on garde une base réduite constituée par les vecteurs de Ritz incluant les modes propres de la structure. Les méthodes diffèrent par le choix de la base de Ritz utilisée et des techniques d'assemblage des sous-structures. On peut distinguer en premier lieu la méthode de Hurty [65] et Craig-Bampton [23–25], ou méthode à interface bloquée. Elle consiste à utiliser comme base les vecteurs correspondants à une réponse statique de la sous-structure à un déplacement unité pour un des degrés de libertés de l'interface et les vecteurs propres de la structure lorsque l'interface est bloquée. Les méthodes à interface libre [85, 120] utilisent les modes propres des sous-structures sans contraintes à l'interface, et traitent les liaisons entre les sous-structures soit en introduisant des éléments déformables entre elles, soit une sous-structure de liaison est introduite. Les méthodes mixtes ou de substitution modales [12, 37, 55, 131] consistent à diviser le domaine en une sous-structure principale pour laquelle on recherche les modes propres à interface libre, et plusieurs sous-structures secondaires pour lesquelles on applique la méthode de Craig-Bampton voir (annexe 2).

Devant la complexité des systèmes mécaniques d'interaction fluide-structure, les méthodes numériques ou expérimentales classiques de la mécanique vibratoire se révèlent coûteuses, parfois même inutilisables. En parfaite cohérence avec l'organisation modulaire des grands projets, les méthodes de sous-structuration et sous-domaines apparaissent comme le moyen le plus efficace de réaliser l'étude vibratoire de l'ensemble à partir du comportement dynamique des

domaines constituant le système [5, 7, 11]. Cependant, l'application d'une méthode de synthèse modale à un problème vibro-acoustique couplé soulève deux problèmes cruciaux, liés d'une part au choix de la formulation acoustique et d'autre part au choix de la méthode des sous-domaines associée. La synthèse modale impose d'étudier d'abord séparément chaque composant, afin de déterminer leur base de projection. Chaque sous-structure est représentée par une base de projection composée de modes propres dynamiques et de déformées statiques aux interfaces. Dans ce travail, nous adoptons la technique du calcul par sous-structuration classique, de Craig-Bampton pour la structure et la méthode de sous-domaines pour la cavité acoustique. Les mérites respectifs de cette approche seront comparés et illustrés par un exemple issu de l'industrie marine de mise en œuvre sur un problème industriel d'interaction fluide-structure en vibro-acoustique [92].

4.2 Position du problème

Nous considérons un fluide acoustique dans une cavité rigide, en contact avec une structure élastique. Les variables utilisés pour décrire la structure Ω et la cavité acoustique Ω' sont respectivement le déplacement u et la fluctuation de pression p . On note ρ_f la masse volumique du fluide, c la célérité du son dans le fluide, et ρ_f , E et ν sont respectivement : la masse volumique, le module d'Young et le coefficient de Poisson de la structure. Dans toute la suite, les exposants (et indices) s et f désigneront respectivement les numéros de sous-structures et de sous-domaines fluide.

Chaque sous-structure occupe un volume noté Ω^s et chaque sous-domaine fluide occupe un volume Ω^f . La structure Ω est composée de N^s sous-structures Ω^s ($s = 1, \dots, N^s$) et le fluide acoustique Ω' est constitué de N^f sous-domaines acoustiques Ω^f ($f = 1, \dots, N^f$). On distingue trois sortes d'interface, définies de la manière suivante :

$$L^{ss'} = \Omega^s \cap \Omega^{s'}, \quad L^{ff'} = \Omega^f \cap \Omega^{f'}, \quad L^{sf} = \Omega^s \cap \Omega^f \quad (\text{II.40})$$

$L^{ss'}$ désigne ainsi l'interface (ou jonction) entre la sous-structure ss et la sous-structure ss' ($L^{ss'} = \emptyset$ si ces deux domaines ne sont pas en contact). $L^{ff'}$ représente l'interface fluide-fluide entre les sous-domaines fluides Ω^{ff} et $\Omega^{ff'}$ ($L^{ff'} = \emptyset$ en l'absence de contact entre les deux sous-domaines fluide). L^{sf} est l'interface fluide-structure entre la sous-structure Ω^{ss} et le sous-domaine fluide Ω^{ff} ($L^{sf} = \emptyset$ si Ω^s et Ω^f ne sont pas en contact).

4.3 Mise en équations du problème

* Pour la sous-structure :

$$\sigma_{ij,j}^s(u) + \omega^2 \rho_s u^s = F_e^s + F_L^{s'} \quad \text{dans } \Omega^s \quad s = 1, \dots, N^s \quad (\text{II.41})$$

$$u^s = 0 \quad \text{sur } L^{ss} \quad (\text{II.42})$$

$$\sigma_{ij}^{ss}(u) n_j^{ss} = F_e^{ss} n_i^{ss} \quad \text{sur } \frac{L^{ss}}{L^{sf}} \quad (\text{II.43})$$

* Pour le sous-domaine acoustique :

$$\Delta p^f + \frac{\omega^2}{C^2} p^f = a_e^f + a_L^{f'} \quad \text{dans } \Omega^f \quad f = 1, \dots, N^f \quad (\text{II.44})$$

$$p^f = 0 \quad \text{sur } L^{ff} \quad (\text{II.45})$$

* Les conditions du couplage

$$\sigma_{ij}^s(u) n_j^s = p^f n_i^f \quad \text{sur } L^{sf} \quad (\text{II.46})$$

$$\frac{\partial p^f}{\partial n^f} = \omega^2 \rho_f u^s n^f \quad \text{sur } L^{sf} \quad (\text{II.47})$$

où :

- n^s est la normale sortante de la sous-structure Ω^s ;
- n^f est la normale sortante du sous-domaine acoustique Ω^f ;
- L^{ss} est la frontière de la sous-structure, f_e^s est le vecteur des forces extérieures exercées sur la sous-structure ;
- $f_L^{s'}$ est le vecteur des forces de liaison exercées par les sous-structures $\Omega^{s'}$ adjacentes à Ω^s .

4.4 Les formulations variationnelles

En introduisant les espaces des fonctions tests suffisamment régulières et indépendantes du temps $C_u^* = \{u^s \text{ tel que } u^s = 0 \text{ sur } L^{ss}\}$ et $C_p^* = \{p^f \text{ tel que } p^f = 0 \text{ sur } L^{ff}\}$, et en tenant compte des conditions de couplage (II.46 et II.47), les formulations variationnelles associées

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

aux sous-structure et sous-domaine fluide sont tel que : $u^s \in C_u^*$ et $p^f \in C_p^*$ sachant que pour tout $v \in C_u^*$ et pour tout $q \in C_p^*$, on a :

la formulation variationnelle de la sous-structure est :

$$\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^s u_i \epsilon_{ij}^s v d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega^s} \rho_s u^s v d\Omega = \int_{L^{ss}/L^{sf}} F_e^s v dL + \int_{L^{ss'}} F_L^{s'} v dL + \int_{L^{sf}} p^f n^f v dL \quad (\text{II.48})$$

la formulation variationnelle du sous-domaine acoustique est :

$$\int_{\Omega^f} \frac{p^f}{c^2} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega^f} \frac{1}{c^2} p^f q d\Omega = \omega^2 \int_{L^{sf}} u^{ss} n^f q dL \quad (\text{II.49})$$

4.5 Approximation par éléments finis

Après discrétisation en éléments finis de la formulation variationnelle (II.48) et dans le cas du calcul modal [9, 136], nous pouvons écrire :

$$M^s \ddot{u}^s + K^s u^s = F_e^s + \sum_{s'=1}^{N^s} \left\{ F_L^{s'} \right\}, \quad s = 1, \dots, N^s \quad (\text{II.50})$$

$$\text{avec } \{u^s\} = \begin{Bmatrix} u_j^s \\ u_i^s \end{Bmatrix}, [M^s] = \begin{bmatrix} M_{ii}^s & M_{ij}^s \\ M_{ji}^s & M_{jj}^s \end{bmatrix}, [K^s] = \begin{bmatrix} K_{ii}^s & K_{ij}^s \\ K_{ji}^s & K_{jj}^s \end{bmatrix}$$

u^s vecteur déplacement de chaque sous-structure,

u_i^s vecteur des degrés de liberté interne,

u_j^s vecteur des degrés de liberté de jonction.

En notation complexe, on peut écrire :

- Le champ des forces de liaison : $F_L^{s'}(t) = F_L^{s'} e^{j\omega t}$

- Le champ des forces équivalentes extérieures incluant les excitations de type déplacement imposé : $F_e^s(t) = F_e^s e^{j\omega t}$

- Le champ des déplacements : $u^s(t) = u^s e^{j\omega t}$

- Les champs de vitesse et d'accélération s'écrivent : $\dot{u}^s(t) = j\omega u^s e^{j\omega t}$ $\ddot{u}^s(t) = -\omega^2 u^s e^{j\omega t}$

Finalement, la sous-structure Ω^s vérifie l'équation suivante :

$$(K^s - \omega^2 M^s) u^s = F_e^s + \sum_{s'=1}^{N^s} F_L^{s'} \quad (\text{II.51})$$

4 Réduction de modèle par synthèse modale

Après discrétisation en éléments finis de la formulation variationnelle (II.49) et dans le cas du calcul modal nous pouvons écrire :

$$E^f \ddot{P}^f + H^f P^f = a_e^f + \sum_{f'=1}^{N^f} a_L^{f'} \quad f = 1, \dots, N^f \quad (\text{II.52})$$

Soit :

$$(H^f - \omega^2 E^f) P^f = a_e^f + \sum_{f'=1}^{N^f} a_L^{f'} \quad (\text{II.53})$$

Le vecteur P^f contient tous les degrés de liberté inconnus associé à la pression (les degrés de liberté sur les frontières Γ_{pp}^f de pression imposée, connu ne sont pas contenus dans ces vecteurs).

Avec :

- $[H^f]$ la matrice masse du sous-domaine fluide Ω^f ,
- $[E^f]$ la matrice de rigidité du sous-domaine fluide Ω^f ,
- a^f le vecteur des pressions équivalentes extérieures (incluant les excitations inhérentes à la frontière Γ_p^f , de type pression imposé),
- $a_L^{f'}$ représente physiquement les accélérations aux niveaux de l'interface entre le sous-domaine fluide Ω^f et le sous-domaine fluide $\Omega^{f'}$.

L'assemblage des équations (II.51) et (II.53) donne le système algébrique décrivant le problème vibro-acoustique sous-structure /sous-domaine suivant :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M^s & 0 \\ \rho_f L^{sf} & E^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^s & -L^{sf} \\ 0 & H^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^s \\ p^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e^s \\ a_e^f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{s'=1}^{N^s} \{F_L^{s'}\} \\ \sum_{f'=1}^{N^f} \{a_L^{f'}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

où $[L^{sf}]$ est la matrice de couplage entre la sous-structure Ω^s et le sous-domaine fluide Ω^f .

4.6 Synthèse modale

* Pour la structure

La méthode de synthèse modale consiste à rechercher le champ de déplacement inconnu, issue de la modélisation éléments finis, sur un espace approprié, de dimension réduite (transformation de Ritz). Pour chaque sous-structure, cet espace est composé de modes propres dynamiques et de déformées statiques :

$$u^s = [\varphi_i^s \quad \psi_j^s] \begin{Bmatrix} v_i^s \\ v_j^s \end{Bmatrix} = \phi^s v^s \quad (\text{II.55})$$

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

où :

- φ_i^s sont les vecteurs modaux associés aux modes propres dynamiques de la sous-structure Ω^s ,
- ψ_j^s sont les vecteurs modaux associés aux déformées statiques de la sous-structure Ω^s ,
- v_i^s est le vecteur des coordonnées généralisées associées aux modes propres de la sous-structure Ω^s ,
- v_j^s est le vecteur des coordonnées généralisées associées aux déformées statiques de la sous-structure Ω^s ,
- v^s est le vecteur des coordonnées généralisées de la sous-structure Ω^s .

La projection de l'équation (II.51) sur la base de la sous-structure Ω^s en tenant compte de l'équation (II.55), nous permet d'écrire :

$$(\bar{K}^s - \omega^2 \bar{M}^s)v^s = \bar{F}_e^s + \sum_{s'=1}^{N^s} \bar{F}_L^{s'} \quad (\text{II.56})$$

En supposant que les modes propres dynamiques et les déformées statiques sont organisées comme le montre la formule (II.55) et en considérant que les vecteurs propres associés aux modes dynamiques sont normés par rapport à la masse modale unitaire, les matrices de masse et de rigidité généralisées prennent la forme suivante :

$$\bar{M}^s = \begin{bmatrix} I & \varphi^s M^s \psi^s \\ \psi^s M^s \varphi^s & \psi^s M^s \psi^s \end{bmatrix} \quad \bar{K}^s = \begin{bmatrix} \mu^s & \varphi^s K^s \psi^s \\ \psi^s K^s \varphi^s & \psi^s K^s \psi^s \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

avec I est la matrice identité,

μ^s est la matrice diagonale des carrés des pulsations propres de la base. On démontre, dans le cas de la méthode de Craig-Bampton, que les modes normaux et les modes contraints sont orthogonaux vis-à-vis de la matrice de rigidité dont les termes extra-diagonaux sont, dès lors, nuls. L'équation du mouvement de la structure entière est obtenue en regroupant les N^s sous-structures selon un seul vecteur global contenant tous les degrés de liberté de la structure : $\langle u \rangle = \langle u^1 \ u^2 \ \dots u^{N^s} \rangle$ et en projetant sur l'équation suivante :

$$\{u\} = [\varphi] \{v\} \quad (\text{II.58})$$

avec :

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi^1 & 0 \\ 0 & \varphi^{N^s} \end{bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{N^s} \end{Bmatrix}$$

4 Réduction de modèle par synthèse modale

L'assemblage des équations (II.56) aboutit au système algébrique suivant :

$$(\bar{K} - \omega^2 \bar{M})\{v\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}_L\} \quad (\text{II.59})$$

où :

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{M}^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{M}^{N^s} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{K}^{N^s} \end{bmatrix} \quad (\text{II.60})$$

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}^1 \\ \vdots \\ \bar{F}^{N^s} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{F}_L\} = \begin{Bmatrix} \sum_{S' \neq 1} \bar{F}_L^{1S'} \\ \vdots \\ \sum_{S' \neq N^s} \bar{F}_L^{N^s S'} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Les matrices $[\bar{M}]$ et $[\bar{K}]$ sont symétriques. Et en tenant compte des conditions de compatibilités à l'interface, continuité des déplacements entre sous-structure (équation (II.60)) et l'équilibre de l'interface (équation (II.61)), le dernier terme de l'équation (II.57) disparaîtra.

$$\{v_j\}^1 = \{v_j\}^2 = \dots = \{v_j\}^{N^s} = \{v_j\} \quad (\text{II.62})$$

$$\sum_{s=1}^{N^s} \{F_j\}^{N^s} = 0 \quad (\text{II.63})$$

En effet, les degrés de liberté v ne sont pas linéairement indépendants. Les relations linéaires entre ces degrés de liberté sont issues de l'égalité des déplacements aux interfaces sous-structure/sous-structure. Elles peuvent s'exprimer par une matrice globale de connectivité $[S]$:

$$\{v\} = [S] \{w\} \quad (\text{II.64})$$

$\{w\}$ ne contient que les degrés de liberté linéairement indépendants.

Pour une méthode de Graig et Bampton, la matrice $[S]$ est booléenne et facile à exprimer puisque les degrés de liberté physiques de jonction font partie explicitement des inconnus généralisés $\{v\}$. D'après l'équation (II.60), il est facile de montrer que cette équation implique :

$$[S]^t [\varphi]^t \{F_L\} = \{0\} \quad (\text{II.65})$$

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

Ainsi, le système suivant est obtenu après projections de l'équation (II.62) sur l'équation (II.58) :

$$\left(\left[\bar{\bar{K}} \right] - \omega^2 \left[\bar{\bar{M}} \right] \right) \{w\} = \left\{ \bar{\bar{F}} \right\} \quad (\text{II.66})$$

avec :

$$\left[\bar{\bar{K}} \right] = [S]^t [\bar{K}], \quad \left[\bar{\bar{M}} \right] = [S]^t [\bar{M}], \quad \left\{ \bar{\bar{F}} \right\} = \left\{ \bar{F} \right\}$$

A ce stade, la taille des matrices correspond au nombre total des modes locaux orthogonaux retenus après troncature, auquel il faut ajouter le nombre total de degrés de liberté de jonction.

* Pour le fluide

La stratégie du choix du nombre des modes retenus est la même utilisée pour la structure. Les degrés de liberté physique de chaque sous-domaine fluide peuvent maintenant être composés sur leur base modale locale comme suit :

$$\{P^f\} = \left[\Psi^f \right] \{q^f\}, \quad f = 1, \dots, N^f \quad (\text{II.67})$$

où :

- $[\Psi^f]$ est la matrice des modes à interfaces complaisantes retenus après troncature et qui sont disposés en colonnes,

- q^f est le vecteur des coordonnées généralisés associés au sous-domaine Ω^f , contenant les coefficients associés aux modes à interfaces complaisantes ainsi que les degrés de liberté physiques (c-à-dire les potentiels nodaux) de jonction fluide.

La projection de l'équation (II.53) sur la base du sous-domaine Ω^f permet d'écrire :

$$\left(\bar{H}^f - \omega^2 \bar{E}^f \right) \{q^f\} = \{\bar{a}_e^f\} + \left[\Psi^f \right]^t \sum_{f'=1;f'}^{N^S} \{a_L^{f'}\} \quad (\text{II.68})$$

avec :

$$\left[\bar{E}^f \right] = \left[\Psi^f \right]^t \left[E^f \right] \{ \Psi^f \}, \quad \left[\bar{H}^f \right] = \left[\Psi^f \right]^t \left[H^f \right] \{ \Psi^f \}, \quad \{\bar{a}_e^f\} = \left[\Psi \right]^t \{a_e^f\}$$

En assemblant les N^f sous-domaines fluide selon un vecteur global contenant tous les degrés de liberté fluide, organisé selon la forme suivante :

$$\langle p \rangle = \langle p^1 \quad p^2 \quad \dots p^{N^f} \rangle$$

L'assemblage des équations (II.67) aboutit au système algébrique suivant :

$$(H - \omega^2 E) \{p\} = \{a_e\} + \{a_L\} \quad (\text{II.69})$$

Où :

$$[E] = \begin{bmatrix} E^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & E^{N^f} \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} H^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H^{N^f} \end{bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

$$\{\bar{a}\} = \begin{Bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^{N^s} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{F}_L\} = \begin{Bmatrix} \sum_{f \neq 1} a_L^{1f'} \\ \vdots \\ \sum_{f' \neq N^f} F_L^{ff'} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.71})$$

Les matrices $[E]$ et $[H]$ sont symétriques. Le dernier terme de l'équation (II.68) disparaîtra par la suite lorsque la continuité des pressions entre les sous-domaines fluide sera forcée. La décomposition locale de l'équation (II.65) peut être assemblée comme suit :

$$\{p\} = [\Psi]\{q\} \quad (\text{II.72})$$

$$\text{avec : } [\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Psi^{N^f} \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^{N^f} \end{Bmatrix}$$

$[\Psi]$ est la matrice rassemblant les bases modales réduites de tous les sous-domaines fluide.

La projection de l'équation (II.69) sur (II.68) aboutit au système algébrique suivant :

$$([\bar{H} - \omega^2 [\bar{E}]]\{q\} = \{\bar{a}_e\} + \{a_L\}) \quad (\text{II.73})$$

avec :

$$[\bar{E}] = [\Psi]^t [E] [\Psi], \quad [\bar{H}] = [\Psi]^t [H] [\Psi], \quad \{\bar{a}_e\} = [\Psi]^t \{a_e\}$$

La prise en compte des conditions de continuité aux interfaces fluide/fluide (égalité des accélérations sur ces interfaces) sera assurée par la matrice $[T]$ tel que :

$$\{q\} = [T]\{r\} \quad (\text{II.74})$$

où r ne contient que des degrés de liberté linéairement indépendants. La matrice $[T]$ caractérise la connectivité des sous-domaines fluide entre eux, et de plus elle est booléenne et facile à exprimer (comme c'est le cas pour la structure).

Et en tenant compte des conditions de compatibilités à l'interface (II.64), le dernier terme de l'équation (II.70) disparaîtra :

$$\{a_L^{f'}\} + \{a_L^f\} = \{0\} \quad (\text{II.75})$$

Réduction de modèles par analyse et synthèse modales

On peut alors montrer que cette équation implique : $[T]^t [\Psi]^t \{a_L\} = \{0\}$ Ainsi, le système final à résoudre pour le domaine s'écrit :

$$\left(\left[\bar{\bar{H}} \right] - \omega^2 \left[\bar{\bar{E}} \right] \right) \{r\} = \{\bar{\bar{a}}_r\} \quad (\text{II.76})$$

avec :

$$\left[\bar{\bar{E}} \right] = [T]^t [\bar{E}] [T], \quad \left[\bar{\bar{H}} \right] = [T]^t [\bar{H}] [T], \quad \{\bar{\bar{a}}_r\} = [T]^t \{\bar{a}_e\}$$

Comparé au système (II.68), ce modèle est considérablement réduit en pratique puisque sa taille correspond au nombre local des modes locaux orthogonaux retenus après troncature, auquel il faut ajouter le nombre total des degrés de liberté de jonction. Comme pour les structures, ce dernier modèle pourra être condensé par la suite avec la méthode de superposition modale.

* Pour le problème vibro-acoustique

Les degrés de liberté structuraux et fluides sont regroupés selon un vecteur global :

$$\langle u \ p \rangle = \langle u^1 \ u^2 \ \dots u^{N^s} \ P^1 \ P^2 \ \dots P^{N^f} \rangle$$

En tenant compte de l'interaction entre la sous-structure Ω^s et le sous-domaine fluide Ω^f , la matrice globale d'interaction fluide-structure s'écrit :

$$[L] = \begin{bmatrix} L^{11} & \dots & L^{1N^f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L^{N^s 1} & \dots & L^{N^s N^f} \end{bmatrix}$$

Dans cette expression, $[L^{sf}]$ sont implicitement nulles lorsqu'il n'y a pas d'interface entre la sous-structure Ω^s et le sous-domaine fluide Ω^f .

Les équations (II.75) ci-dessous peuvent être assemblées en une seule (II.76) :

$$\{u\} = [S] [\Phi] \{w\}, \quad \{p\} = [T] [\Psi] \{r\} \quad (\text{II.77})$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = [C] [R] \begin{pmatrix} w \\ r \end{pmatrix} \quad (\text{II.78})$$

où :

$$[C] = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [R] = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Psi \end{bmatrix}$$

Finalement, l'équation à résoudre du modèle vibro-acoustique réduit par synthèse modale est :

$$[C]^t [R]^t \left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^t & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H \end{bmatrix} \right) [C][R] \begin{Bmatrix} w \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.79})$$

5 Application numérique à une hélice de bateau

5.1 Hélice du bateau à quatre pales

5.1.1 Introduction

De nos jours, le principe de l'hélice trouve de nombreuses applications dans différents domaines, comme la marine (qui d'ailleurs l'employa avant l'aviation), l'éolien ou le nucléaire (le principe de la turbine étant dérivé de l'hélice). Mais c'est en aéronautique qu'elle est le plus présente, sous différentes formes : hélices classiques, turbopropulseurs ou turboréacteurs (composés d'une série de compresseurs et de turbines, dérivés des hélices). C'est autour de l'hélice que l'eau se trouve propulsée du bord d'attaque vers le bord de fuite, créant ainsi un effet de vis sans fin. Les molécules d'eau comprimées alors sur elles mêmes retranscrivent cette force par l'avancement du bateau. Depuis les débuts de la construction navale, les hommes ont toujours cherché à améliorer les performances et la sécurité de leurs navires. Cette volonté a motivé, il y a maintenant un siècle, la construction chez les principales nations maritimes des premiers moyens d'études hydrodynamiques et bassins océaniques ont permis de réaliser des avancées spectaculaires dans les domaines respectifs de la prévision de la puissance, de la manœuvrabilité, de l'hydroacoustique et de la tenue à la mer. L'hélice est l'élément technique le plus important sur un bateau. Sa conception et ses caractéristiques ont une influence directe sur le rendement énergétique. Un mauvais type d'hélice contribue très souvent à une inefficacité énergétique. Il est important de comprendre que la conception d'une hélice n'est pas chose simple, surtout dans le cas des chalutiers où la spécification technique doit être confiée à un professionnel qualifié et expérimenté. Un tel appui peut être trouvé chez les agents des fabricants d'hélices et de moteurs ou, dans certains cas, auprès des services techniques des programmes gouvernementaux de développement des pêches. A quoi sert une hélice ? Cela semble une question évidente - une hélice transforme la puissance fournie par le moteur en une poussée propulsant le bateau sur l'eau. En concevant une hélice, on doit s'assurer qu'elle propulsera efficacement le bateau.

5.1.2 Facteurs de rendement de l'hélice

Il y a plusieurs paramètres à prendre en compte (outre le moteur) :

Diamètre. est le facteur essentiel pour déterminer l'efficacité de l'hélice. Ainsi le diamètre de l'hélice devrait toujours être aussi grand que possible, compte tenu de l'espace disponible entre les pales et la coque, de sorte que la plus grande quantité possible d'eau passe à travers l'hélice.

Vitesse de l'arbre (tr/min). Plus le diamètre de l'hélice est important et plus l'arbre tournera lentement pour absorber la même puissance. Par conséquent, pour avoir une hélice efficace, non seulement son diamètre devra être aussi important que possible mais, en conséquence, la vitesse de rotation de l'arbre devra être lente.

Cavitation. est un problème résultant d'une hélice mal conçue et, bien qu'elle n'affecte pas directement le rendement en carburant, elle indique que le choix de l'hélice installée n'est pas bon et que, dans le temps, les effets de la cavitation conduiront à une consommation accrue de carburant.

Nombre de pales. En général, pour une vitesse donnée de l'arbre porte-hélice (tr/min) moins l'hélice a de pales et mieux cela vaut. Cependant, on en déduit que, avec moins de pales, chacune subit une plus forte charge. Cela peut entraîner de nombreuses vibrations (en particulier avec une hélice à deux pales) et contribue à la cavitation.

Surface de pales. Une hélice avec des pales est plus efficace qu'une hélice à pales larges. Cependant, une hélice avec un taux faible de surface de pale est plus sujette à cavitation car la poussée produite par l'hélice est répartie sur une plus petite surface de pale.

Section de pales. L'épaisseur des pales d'une hélice a peu d'influence sur son rendement, compte tenu des normes exigées pour conserver une résistance suffisante des pales.

Moyeu. La dimension du moyeu d'hélice affecte directement le rendement de celle-ci. Cela est particulièrement vrai quand on envisage l'installation d'une hélice à pas variable qui a un moyeu nettement plus important que celui d'une hélice à pas fixe équivalente.

Espaces libres et cage d'hélice. Les distances entre l'hélice et la coque déterminent l'efficacité de l'hélice dans l'eau qui s'écoule le long de la coque et l'intensité des vibrations produites par l'hélice. D'une manière générale, on peut dire que, plus l'hélice est dégagée, mieux cela vaut.

Inclinaison. L'inclinaison d'une pale d'hélice n'a pas d'effet direct sur l'efficacité de l'hélice, mais les effets d'interaction entre l'hélice et la coque sont importants. Souvent la forme de la cage dans la coque est telle que plus les pales sont inclinées vers l'arrière et plus le diamètre de l'hélice qui peut être installée est important, et l'inclinaison se révèle très utile.

Etat des pales. Un mauvais état des pales d'hélice dû à des chocs, des salissures, la corrosion ou l'érosion réduit le rendement de l'hélice. Cet état de la surface des pales influe sur le rendement de l'hélice en fonction de la vitesse et de la charge de l'hélice - les hélices fortement chargées sont plus sensibles à l'état de surface.

La forme de l'hélice. Une hélice en rotation exerce une poussée dans l'axe de l'hélice. En complément elle exerce d'autres forces sur le bateau. Sur une bipale, la pale montante a tendance à enfoncer l'arrière du bateau et la pale descendante à relever l'arrière du bateau.

5.1.3 Définition de la géométrie d'une hélice

Les pales ont des formes variées (A1.10). En général, vue de l'arrière, la forme d'une pale n'est pas symétrique par rapport à un rayon. Vue par le travers, la pale est, en général, également inclinée vers l'arrière. La géométrie de la pale est définie à partir d'une courbe rencontrant l'axe

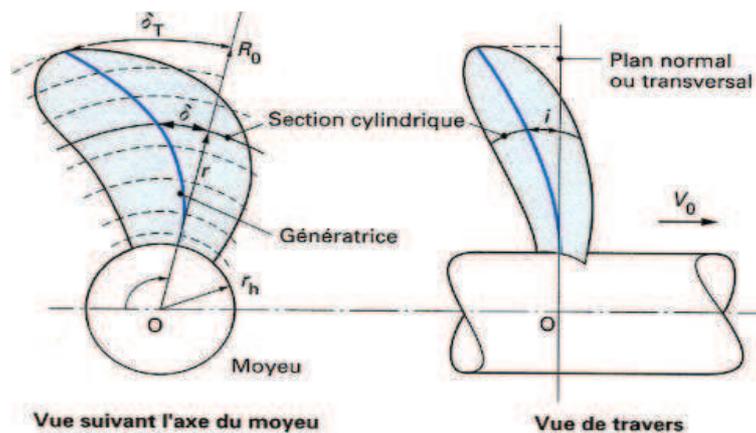


Figure A1.10 – Forme générale d'une hélice

appelée génératrice. Cette courbe définit généralement le milieu des sections de la pale (mais ce n'est pas une règle), sections qui sont empilées les unes sur les autres suivant la loi définissant la valeur du pas $P(r)$ fonction du rayon r . Compte tenu du mouvement de rotation de l'hélice, une section de pale est définie par le développement de l'intersection de la pale par un cylindre de rayon r centré sur l'axe. Chaque section développée a la forme d'un profil d'aile dont la longueur $C(r)$ est définie par sa corde, droite joignant le bord d'attaque au bord de fuite du profil (A1.11). L'angle $\Phi_0(r)$ de cette corde avec le plan perpendiculaire à l'axe de l'hélice définit l'angle de pas hydrodynamique. Le pas géométrique est alors défini par la relation :

$$p(r) = 2\pi r \tan \Phi_0(r) \quad (\text{II.80})$$

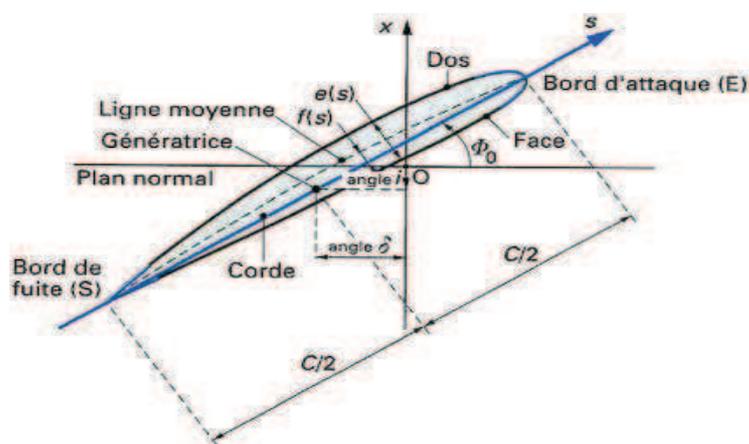


Figure A1.11 – Définition de la géométrie d'une pale

La forme de la section de pale est elle-même définie par :

- la loi d'épaisseur $e(s)$ en fonction de l'abscisse s de la corde (E entrée ou bord d'attaque, S sortie ou bord de fuite) ;
- la ligne moyenne, courbe passant à mi-épaisseur qui définit la cambrure de la section $f(s) : f_0 = f_{max}/C$.

En définitive, la forme géométrique d'une pale d'hélice est donc définie à chaque rayon r :

- par la génératrice fixant les angles de devers δ et d'inclinaison i ;
- par la longueur de corde $C(r)$;
- par le profil de la section définie par la loi d'épaisseur $e(s)$ et la loi de cambrure $f(s)$.

Enfin, les caractéristiques générales de l'hélice sont définies par :

- le nombre de pales N ;
- le diamètre D (rayon R_0) ;
- le diamètre du moyeu d_h (rayon r_h) ;
- le pas géométrique moyen :

$$\bar{p} = \frac{p(r)dr}{(R_0 r_h)} \quad (\text{II.81})$$

- le pas géométrique réduit :

$$\bar{p}_0 = \frac{\bar{p}}{D} \quad (\text{II.82})$$

- la fraction de surface :

$$\frac{A_e}{A_0} = \frac{1}{\pi(R_0^2 - r_h^2)} \int_{R_0}^0 C(r)dr \quad (\text{II.83})$$

5 Application numérique à une hélice de bateau

Le diamètre D d'une hélice peut varier dans de grandes proportions de $D = 0,20$ à $0,40m$ pour les bateaux de plaisance à $D = 10$ à $11m$ (poids $65t$) pour les pétroliers géants. Le pas réduit P/D varie de $0,6$ à $1,4$ et la fraction de surface est en moyenne de $0,6$ à $0,8$. Quant au nombre de pales, il est le plus souvent égal à 4 ou 5 , mais peut atteindre 7 lorsque des problèmes de vibrations excités par l'hélice sont à craindre. Enfin, la vitesse de rotation des hélices (nombre de tours) varie comme l'inverse du diamètre, la vitesse tangentielle πnD en bout de pales étant de 30 à $5m/s$ dans les conditions normales d'utilisation.

5.1.4 Cavitation

La cavitation se produit quand la pression sur la face avant de la pale d'hélice devient si faible que des bulles gazeuses se forment et que l'eau bouillonne. Quand les bulles gazeuses dépassent la face de la pale et quittent la zone de dépression, elles éclatent et se condensent en eau. Généralement, les bulles se forment près du bord d'attaque de la face avant de la pale de l'hélice et elles s'écrasent près du bord de fuite avec un effet souvent plus net près de la pointe de la pale. L'éclatement des bulles peut paraître sans importance, mais c'est en réalité un mouvement très violent produisant une érosion et des piqûres à la surface de la pale d'hélice allant jusqu'à la fissuration du matériau des pales. La photo (A1.12) montre comment la cavitation apparaît d'abord en extrémité de pales, puis recouvre l'ensemble des pales. Les micros bulles

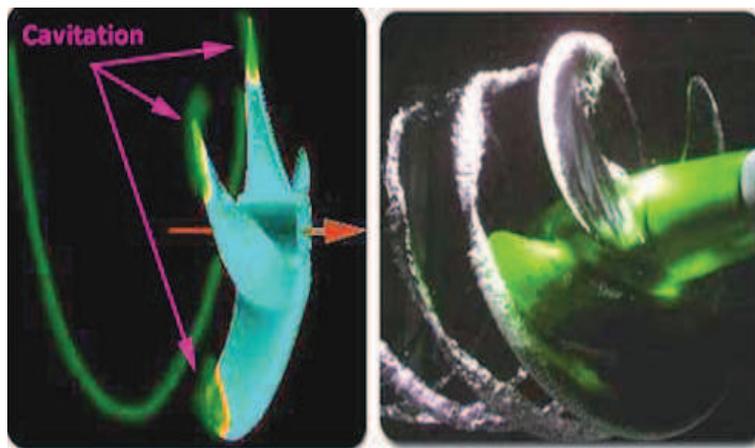


Figure A1.12 – Phénomène de cavitation (Harry Turner)

d'air éclatent et creusent la matière de la pale sous forme d'impacts, au moment de leur détonation. La cavitation se distingue donc visuellement sur les pales par des bords de fuite dentelés ou un revêtement de surface (peinture) érodé. Lorsque la cavitation est plus généralisée, c'est

tout un film de gaz qui entoure la palme ou une partie d'une des faces de la pale c'est une hélice supercavitante.

5.2 Résultats numériques

Pour montrer les potentialités de la méthode proposée, nous avons considéré un exemple concret issu de la mécanique : une hélice à quatre pâles immergée dans l'eau. Les figures (A1.13) et (A1.14) présentent le modèle éléments finis de la structure.

Les développements numériques ont été réalisés par ANSYS. Et la méthode de réduction proposée est appliquée à un modèle simplifié de l'hélice constitué de quatre sous-structures, contenant chacune approximativement le même nombre d'éléments voir figure (A1.13) et (A1.14) et la cavité acoustique est décomposée en quatre sous-domaines acoustiques [92]. Les propriétés des matériaux des deux domaines sont les suivants :

- Pour la structure : densité = 9200 kg.m^{-3} ; module d'Young = $9.6 \times 10^{10} \text{ Pa}$; coefficient de Poisson = 0.3.
- Pour le fluide : densité = 1000 kg.m^{-3} ; vitesse du son = 1500 m.s^{-1} .



Figure A1.13 – Modèle éléments finis pour l'hélice entière

Les calculs numériques déterministes sont effectués sur la structure entière et ensuite sur une seule pale en air et en eau, les résultats sont illustrés dans les tableaux (A1.8, A1.9 et A1.10) et sont comparés aux résultats expérimentaux [128]. La figure (A1.15) montre les trois premiers



Figure A1.14 – Modèle éléments finis pour les sous-structures

TABLE A1.8 – Les trois premières fréquences propres de l’hélice entière en air.

Mode	Numérique	Expérimental
R_1	75.534	73
R_2	121.46	117
R_3	209.17	201

TABLE A1.9 – Les trois premières fréquences propres de l’hélice entière en eau.

Mode	Numérique	Expérimental
R_1	37.581	36
R_2	68.629	65
R_3	127.46	123

TABLE A1.10 – Les trois premières fréquences propres de la pale en air et en eau.

Mode	Pale en air	Pale en eau
R_1	74.863	37.71
R_2	119.82	67.54
R_3	205.58	126.32

modes propres d’une seule pale en air et en eau et la figure (A1.16) montre les trois premiers modes de la structure entière en air et en eau.

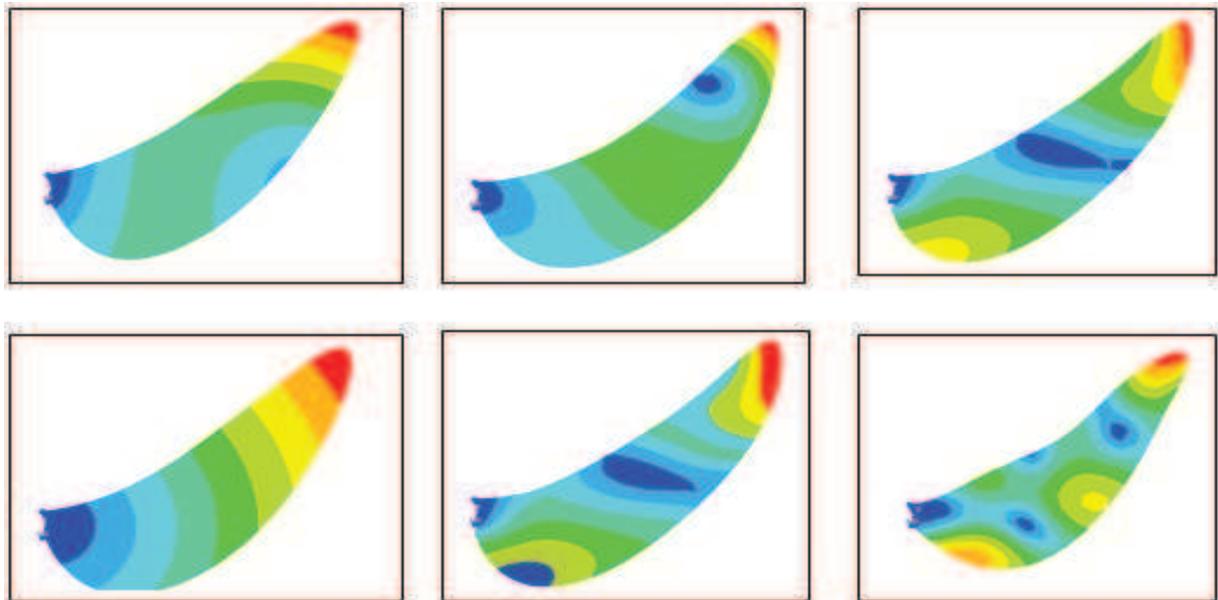


Figure A1.15 – Les trois premiers modes de la pale en air et en eau

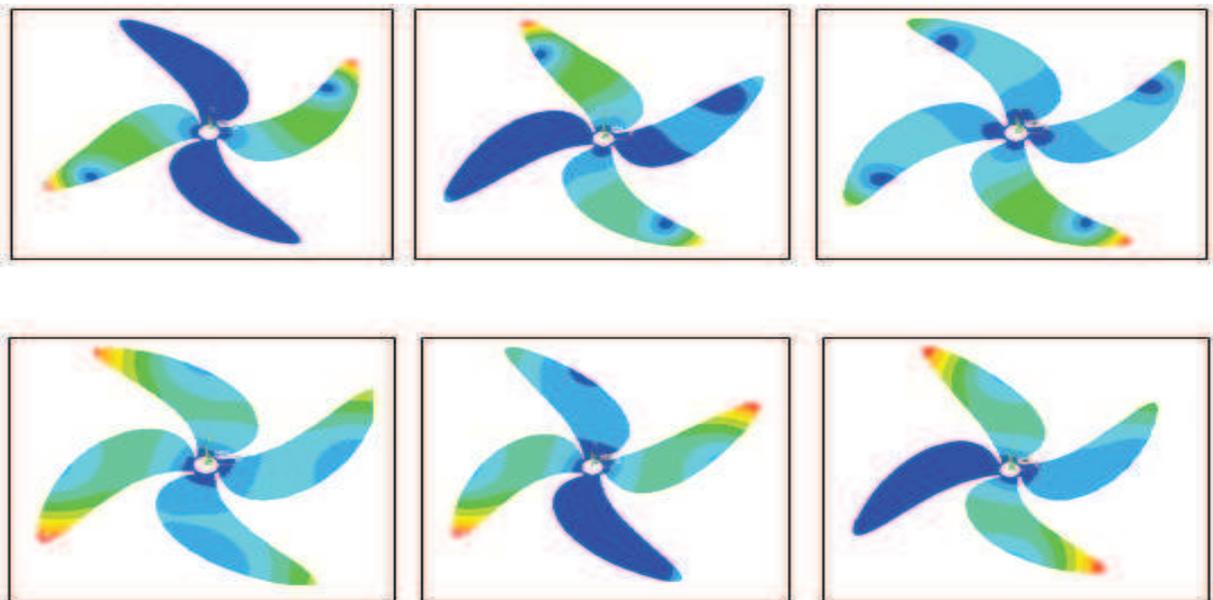


Figure A1.16 – Les trois premiers modes de l'hélice en air et en eau

L'observation d'une baisse en fréquences de l'hélice en eau montre que les effets des ondes

acoustiques sur la structure sont correctement décrits par le calcul numérique. Les tableaux (A1.1 et A1.2) donnent les résultats du calcul et de la mesure en air et en eau réalisés sur l'hélice complète et le tableau (A1.3) illustre les résultats du calcul en air et en eau pour une seule pale d'hélice. Le calcul numérique donnent des résultats comparables à ceux obtenus par l'expérimentation, avec une incertitude de comparaison à celle donné par d'autres auteurs [20, 128]. La réduction de modèle pour le calcul numérique de notre problème est un enjeu important. En effet, nous avons obtenu un modèle à faible degré de liberté qui est capable de reproduire les principaux caractéristiques du problème complet.

6 Conclusion

Dans ce chapitre on a proposé une méthode de réduction modale associée pour la résolution des problèmes de grande taille d'interaction fluide-structure. La formulation du problème est abordée en trois parties, pour la structure, pour la cavité acoustique, puis pour le système vibro-acoustique couplé. Ce chapitre est divisé en deux parties où on a proposé deux techniques de réduction, la superposition pour réduire les problèmes d'interaction du fluide avec les structures constituées d'une seule entité tel que les plaques immergées et la synthèse modale pour réduire les problèmes comportant les structures complexes constituées de plusieurs parties tel que l'hélice du bateau.

Dans la première partie, on a proposé un modèle numérique réduit par l'analyse modale pour le calcul des modes vibro-acoustiques d'un système couplé fluide-structure. Et ce à travers l'écriture des équations du mouvement de la structure couplée avec la cavité acoustique. Puis on a établi la forme variationnelle associée au système couplé. L'utilisation d'une méthode couplée éléments finis/éléments finis pour la discrétisation de la structure et de la cavité fluide, a amené à l'écriture de l'équation matricielle gouvernant le mouvement du système vibro-acoustique.

Par la suite, l'utilisation d'une méthode modale pour le déplacement de la structure d'une part, et la décomposition de la pression modale en une pression modale statique et d'une pression modale dynamique d'autre part, a donné un système matriciel symétrique de petite taille facile à mettre en œuvre numériquement pour le calcul des modes élasto-acoustiques.

Les résultats obtenus dans le cas d'analyse numérique d'une plaque 2D et 3D couplée à un fluide montrent la validité et les potentialités de la méthode proposée, qui présente plusieurs intérêts. Tout d'abord, elle s'avère relativement facile à implémenter dans un code du calcul existant puisque le traitement local de la structure et du fluide est indifférencié. D'autre part, la matrice globale du couplage fluide-structure est susceptible d'inclure directement les effets

d'amortissement (structural et acoustique) sans aucune modification notable de la méthode, ce qui permet a priori d'aboutir aux modes amortis du système couplé (une éventuelle corrélation essais/calculs s'en trouve alors facilitée).

La deuxième partie du chapitre est consacrée à la réduction de modèle par la synthèse modale. La méthode développée couple une méthode de sous-structuration dynamique de type Craig et Bampton et une méthode de sous-domaines acoustiques basée sur une formulation acoustique en pression. Dans un premier temps on a établi les équations de base de problème vibro-acoustique en utilisant une formulation déplacement/pression pour une sous-structure et un sous-domaine et en considérant les espaces tests réguliers on a construit les formulations variationnelles correspondantes. Après une discrétisation en éléments finis, on a abouti à un système algébrique décrivant le problème couplé sous-structure/sous-domaine. Et en regroupant les degrés de liberté structuraux et fluides selon un vecteur global, on a abouti à un système algébrique décrivant le problème vibro-acoustique mais de grande taille, qui a été réduit par la méthode de synthèse modale. L'application de la méthode proposée est réalisée sur une hélice de Bateau à quatre pâles, en air et en eau. La comparaison de nos résultats numériques à ceux issus de l'expérimentation permet de valider conjointement le processus de calcul et la méthode proposée dans le domaine de l'analyse fréquentielle des structures immergées, pour construire un modèle fiable et robuste pour les problèmes d'interaction fluide-structure. L'application de la méthode de réduction par synthèse modale sur ce cas réel montre l'efficacité de cette méthode de réduction dans les problèmes vibro-acoustique d'une structure complexe. Le modèle proposé, dont les choix ont été dictés par les phénomènes physiques mis en jeu et les données expérimentales disponibles, a permis d'apporter un éclairage sur l'effet du couplage et l'utilité de la réduction du problème.

Chapitre III

Fiabilité des systèmes

1 Introduction

La prise en compte de l'incertain dans les analyses mécaniques est nécessaire pour un dimensionnement optimal et robuste des structures. C'est avec cet objectif que les approches probabilistes pour la mécanique des structures sont développées depuis plusieurs décennies [1, 69, 99]. Ces méthodes permettent en effet d'étudier d'une part la fiabilité des composants ou des systèmes, et d'autre part l'influence de la variabilité des paramètres sur le comportement du composant ou du système. Les modèles mécaniques sont souvent complexes (comportement non-linéaire, dynamique, fatigue, mécanique de la rupture, etc) nécessitant, pour leurs résolutions, l'utilisation des codes éléments finis [38, 64, 110, 111, 135]. Cette complexité doit être prise en compte par les méthodes de couplage mécano-fiabiliste si l'on veut que l'analyse de fiabilité présente un sens. Cette prise en compte requiert un effort supplémentaire sur les ressources informatiques nécessaires. En effet, les méthodes de couplage nécessitent un appel au calcul déterministe du modèle mécanique pour des tirages judicieux de variables aléatoires. Ce nombre d'appels augmente généralement avec le nombre de variables aléatoires, ainsi le temps du calcul devient rapidement prohibitif par les méthodes traditionnelles.

La fiabilité des systèmes est donc plus que jamais, un enjeu majeur pour les entreprises industrielles. Celles-ci doivent répondre à des exigences de plus en plus fortes des donneurs d'ordre, dont le non-respect entraîne des pénalités ou des extensions de garantie, et d'importants coûts de non-qualité lorsqu'il s'agit de remédier à des défauts, voir une insatisfaction clients de noto-

riété internationale compromettant des marchés futurs [10, 35, 47, 111, 123].

L'un des enjeux clé de la fiabilité des systèmes est également de pouvoir établir une surveillance rigoureuse capable de prédire et de détecter les modes de défaillances du système, dans les phases de développement afin d'éviter tout impact significatif sur le comportement et la sécurité du système en question. Dans ce cas, les techniques de diagnostic et de détection de défauts peuvent être combinées pour garantir une performance optimale du processus et des systèmes [21, 29, 30, 45, 79, 80]. L'objectif principal est donc de minimiser le nombre de calculs à effectuer tout en conservant une robustesse et une confiance satisfaisante du résultat : la probabilité de défaillance et ses facteurs d'importance. Le présent chapitre a pour objectif de donner les éléments de base pour le calcul de la probabilité de défaillances des systèmes mécaniques et d'analyser leurs fiabilités [112, 113].

2 Problématique

La sécurité offerte par une structure est considérée comme suffisante dès lors qu'une éventuelle défaillance exposerait les personnes, les biens et l'environnement à un risque inférieur à une limite acceptable. La fiabilité d'une structure se caractérise quant à elle par la performance de celle-ci à remplir une fonction définie sous des conditions données, pendant une durée fixée et en respectant le niveau de sécurité exigé. La difficulté dans l'évaluation de la fiabilité provient de la nature incertaine des phénomènes mis en jeu sur la structure considérée (variabilités des propriétés des matériaux, imprécisions géométriques, aléas des chargements appliqués, ect), qui vont avoir un impact significatif sur les performances du système. Aussi il est indispensable d'intégrer ces incertitudes de façon à travailler sur des modélisations réalistes.

Traditionnellement, le dimensionnement des structures est fondé sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres précités prennent une valeur fixe. Précisément, les paramètres incertains sont décrits par une valeur caractéristique défavorable. Associée à des coefficients de sécurité, l'analyse conduit alors à une réponse binaire (sûreté ou défaillance) vis-à-vis d'un critère donné, qui traduit d'une certaine manière la confiance que l'on peut accorder à ce dimensionnement précis. L'approche déterministe utilise par conséquent une marge volontairement pessimiste conduisant le plus souvent à un surdimensionnement injustifié. Dans la démarche probabiliste en revanche, on construit une modélisation stochastique dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables aléatoires [6]. On peut ensuite évaluer

la probabilité de défaillance de la structure (aspect quantitatif) ainsi que mesurer la sensibilité de cette probabilité par rapport à chacune des variables aléatoires introduites (aspect qualitatif). Deux applications sont envisageables : soit on connaît les caractéristiques de la structure et on vérifie que sa fiabilité est satisfaisante ; soit on optimise le dimensionnement de celle-ci de façon à respecter un niveau de fiabilité donné. Par un traitement plus rationnel des incertitudes, l'approche fiabiliste permet donc une meilleure appréciation des marges de sécurité à l'aide d'indicateurs de confiance objectifs, et constitue en ce sens un outil adéquat pour l'aide à la décision en phases de conception et de maintenance. On se focalisera par la suite sur la fiabilité d'un composant d'un système mécanique, auquel est associé un seul matériau. Dans ce contexte, l'analyse fiabiliste se décline en trois étapes :

- En premier lieu, la sélection des variables aléatoires de base, qui vont intégrer les incertitudes mises en jeu au travers de leur loi de distribution,
- Dans un second temps, le choix d'une fonction de performance définissant la défaillance du système,
- Enfin, le calcul des indicateurs de fiabilité, qui vont fournir une évaluation quantitative et qualitative de la fiabilité de celui-ci.

L'apparition et l'influence d'aléas en mécanique des structures sont évidentes dès lors qu'on étudie un système « réel » (aléas atmosphériques sur des ponts [38], usure des tuyauteries de centrales nucléaires [21], ect). Bien souvent, on connaît la loi d'apparition des événements et les limites à partir desquelles un état est modifié. On cherche alors à connaître la loi de probabilité pour que, soumise à l'aléa, la structure ne dépasse pas cet état limite. Ce problème se ramène essentiellement à l'étude de l'intégrale :

$$Pf = \int_{D=\{x|G(x)\geq 0\}} f_X(x)dx \quad (\text{III.1})$$

- X vecteur aléatoire de R^n de densité f_X ,
- la fonction G modélise le phénomène physique : G est appelée fonction d'état,
- le domaine D caractérise le domaine de défaillance.

Il est très rare qu'une telle intégrale puisse être étudiée analytiquement. Généralement nous sommes conduits à utiliser des méthodes numériques en fonction du problème proposé. La distribution de X et les propriétés de G guident notre choix vers l'algorithme le mieux adapté. Nous portons une attention particulière aux intégrales multinormales : souvent, les paramètres aléatoires peuvent être modélisés par des lois gaussiennes. Dans le cas contraire, il existe des transformations T qui permettent d'obtenir, à partir d'un vecteur aléatoire quelconque X , un

vecteur aléatoire $U = T(X)$ de loi gaussienne centrée réduite (Figure A1.1) tel que toutes ses composantes sont indépendantes deux à deux [102, 116]. L'intégrale se présente alors sous la forme :

$$Pf = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{G(y) \geq 0} e^{-\frac{\|y\|_2^2}{2}} dy \quad (\text{III.2})$$

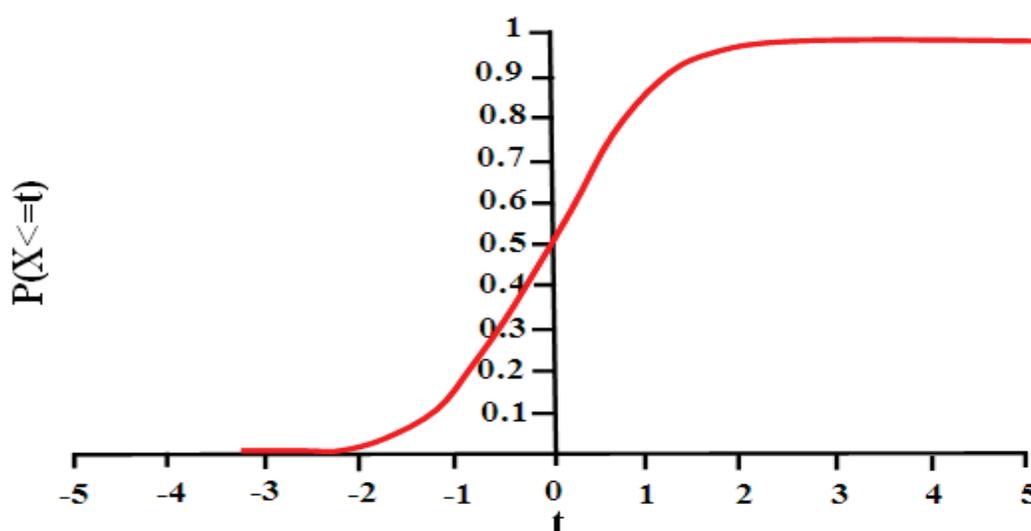


Figure A1.1 – Fonction de répartition gaussienne, centrée, réduite

3 Position d'un problème de fiabilité des structures

Une structure est réalisée pour répondre à un ensemble de besoins clairement identifiés. La fiabilité des structures a pour objectif d'évaluer la probabilité qu'une structure, soumise à des aléas (vibrations, température, chocs, fatigue, etc.), soit capable de satisfaire l'intégralité de ces besoins et ce pour une durée de vie donnée. Cependant, le calcul de cette probabilité impose une méthodologie d'étude rigoureuse en quatre étapes :

1. Définir un modèle mécanique déterministe adapté au problème traité ;
2. Identifier les paramètres aléatoires de ce modèle et les modéliser par un outil probabiliste adéquat ;
3. définir les modes et scénarios de défaillance du problème ;
4. Evaluer les probabilités d'occurrence de ces modes de défaillance.

La précision, l'exactitude du résultat et la probabilité de défaillance de la structure, sont ainsi conditionnées par un ensemble de facteurs experts, expérimentaux, mathématiques, numériques et pratiques intervenant à chaque étape de l'étude fiabiliste.

3.1 Modélisation d'un problème de fiabilité des structures

La défaillance d'une structure n'est rarement due qu'à un seul événement. En général, le dysfonctionnement d'un système mécanique est le résultat d'un enchaînement ou d'une combinaison d'événements de défaillance élémentaires. Dans ces cas complexes, une méthodologie rigoureuse doit être suivie. Dans un premier temps, chaque mode de défaillance potentiel du problème doit être identifié. Dans un second temps, un scénario de défaillance, décrivant précisément l'enchaînement des événements élémentaires conduisant à la défaillance, est alors construit. On introduit la notion de composant. Un composant i est défini par un mode de défaillance et une fonction d'état limite $G_i(X)$ où X est le vecteur aléatoire de dimension m du problème. Le composant i est dit :

- défaillant si sa fonction d'état limite est inférieure ou égale à zéro, soit $E_i = \{G_i(X) \leq 0\}$,
- sûr si sa fonction d'état limite est supérieure à zéro, soit $\bar{E}_i = \{G_i(X) > 0\}$.

Chaque composant intervient donc dans la fiabilité ou la défaillance de la structure et la combinaison d'événements de succès ou de défaillance conduit au bon fonctionnement ou à la défaillance du système résultant.

3.2 Modèle mécanique déterministe

La première étape d'une étude de fiabilité est d'identifier le problème de mécanique traité. Un modèle mécanique déterministe adapté est alors défini. Celui-ci intègre la géométrie de la structure, les propriétés mécaniques des matériaux et les conditions aux limites.

3.3 Aléas et modélisation probabiliste

Parmi les différents paramètres intervenant dans ce modèle, certains ne sont connus que d'une manière aléatoire. Les aléas portant sur les propriétés physiques des matériaux et les caractéristiques géométriques des pièces de la structure sont appelés aléas internes. Ces incertitudes dépendent de la qualité et de la précision de fabrication et de caractérisation des matériaux et des éléments structuraux. Les aléas portant sur les actions s'exerçant sur la structure sont appelés aléas externes. L'origine de ces incertitudes provient souvent de la difficulté d'évaluer précisément la valeur d'une sollicitation non-maîtrisée, l'action de la houle, du vent ou du trafic

routier sur un pont par exemple.

Une identification des paramètres est réalisée et des tests statistiques d'adéquation valident ou non les hypothèses posées. Si le problème possède m variables aléatoires X_i , on définit le vecteur aléatoire :

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T \quad (\text{III.3})$$

Notons que certaines actions, accidentelles ou catastrophiques notamment, relèvent difficilement d'un modèle probabiliste. Le choc d'un navire sur une pile de pont ou l'écrasement d'un avion sur une construction sensible n'obéissent par nature à aucune loi du hasard. Toutefois, ce type d'événements, extrêmement rares, ne peut être pris en compte de manière réaliste dans le dimensionnement d'une structure.

3.4 Variables aléatoires de base

L'enjeu à ce stade est de préciser les paramètres incertains pouvant jouer un rôle significatif sur la fiabilité de la structure, appelés variables aléatoires de base ou variables de conception, et de quantifier leur variabilité.

3.4.1 Description des incertitudes

La sélection des variables aléatoires est une étape cruciale pour le modèle fiabiliste qui nécessite une connaissance fine du matériau étudié (origine, microstructure, comportement mécanique) et de la structure considérée (fabrication, actions). Les sources d'incertitudes sont globalement de deux ordres :

- microscopique, i.e. se rapportant à la microstructure du matériau : les propriétés mécaniques des constituants, leur répartition (position spatiale, fractions volumiques, orientation), la nature des interfaces, l'impact des défauts divers (porosité, microfissuration, etc.), causes du (ou des) mode(s) de défaillance.
- macroscopique : représentativité de la modélisation, propriétés mécaniques macroscopiques du matériau, géométrie de la structure, couplage, chargement appliqué, causes du (ou des) mode(s) de défaillance. Ces incertitudes proviennent le plus souvent de variabilités liées au processus de fabrication, aux imperfections des conditions d'essais de caractérisation (non reproductibilité des résultats, base de données limitée, effets d'échelle entre éprouvettes d'expérimentation et structure réelle,..), à des facteurs incontrôlés tels que les

fluctuations du chargement ou simplement de la difficulté d'accéder à certaines données ou informations [59, 115].

De la même façon que les variables d'état d'une modélisation, le choix des variables aléatoires est guidé par plusieurs critères :

- l'objectif de l'étude fiabiliste : par exemple, l'utilisation des propriétés mécaniques macroscopiques suffira à évaluer la probabilité de défaillance d'un matériau donné ; en revanche, pour la conception d'un nouveau matériau, le recours à des données microstructurales sera plus pertinent,
- l'explication physique des aspects du comportement mécanique du matériau, notamment le mode de défaillance et les causes de sa mise en place : dans le cas des systèmes vibro-acoustiques, on s'intéressera ainsi à différents paramètres (propriétés de la cavité acoustique, conditions à l'interface) suivant le couplage envisagé,
- la disponibilité des résultats expérimentaux : les modèles probabilistes associés aux variables aléatoires doivent effectivement être physiquement justifiés pour conduire à une représentation réaliste.

3.4.2 Description des variabilités

Lorsque l'identification ou le contrôle de propriétés physiques amènent à l'acquisition de mesures non strictement reproductibles, il est indispensable en vue du calcul de structures de définir un outil à la fois représentatif des variabilités enregistrées et dont la formulation demeure adaptée à l'intégration dans les codes de simulation. L'enjeu est en effet de modéliser ces multiples informations à l'aide de lois mathématiques qui fourniront notamment les fréquences d'apparition de chaque résultat, leur valeur moyenne et les oscillations autour de cette moyenne. La modélisation des distributions nécessite de connaître un nombre suffisant de données, le plus important possible de façon à travailler sur un faisceau représentatif d'informations. Considérons donc une variable aléatoire réelle et continue X dont on connaît par expérimentation un certain nombre N de valeurs (ou réalisations) indépendantes $\{x_i\}_{i \in [1, \dots, N]}$ de X constituant un échantillon. Un traitement statistique de ce faisceau d'informations permet en premier lieu d'analyser la variabilité de cette donnée : la répartition des valeurs (à l'aide des fréquences relatives et cumulées) ainsi que les caractéristiques de tendance centrale (moyenne) et de dispersion (écart type). Il s'agit ensuite de modéliser l'incertitude observée par une fonction mathématique qui précisera les issues pour X et associera à chacune d'elles ses chances de réalisation. Dans ce contexte, on peut recourir soit à la fonction de densité de probabilité $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit à la

Fiabilité des systèmes

fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ associées à X telles que (P la probabilité) :

$$f(x)dx = P(x \leq X < x + dx) \quad (\text{III.4})$$

$$F_X(x)dx = P(X < x) \quad (\text{III.5})$$

avec les liens :

$$\forall x, F_X(x)dx = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx \text{ et } \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) \quad (\text{III.6})$$

et vérifiant les propriétés :

$$\forall x, f_X(x) \geq 0; \quad F_X \text{ est non décroissante} \quad (\text{III.7})$$

$$F_X(-\infty) = 0; \quad F_X(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = 1; \quad (\text{III.8})$$

La probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure à une valeur donnée a , soit :

$$P(X < a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(u)du \quad (\text{III.9})$$

correspond donc graphiquement à l'aire sous la courbe de f_X entre $x = -\infty$ et $x = a$, et la probabilité que X soit comprise entre deux valeurs données a et b , soit :

$$P(a < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_b^a f_X(u)du \quad (\text{III.10})$$

représente quant à elle l'aire sous la courbe f_X comprise entre $x = a$ et $x = b$ (cf. figure A1.2). La probabilité d'un évènement étant naturellement reliée à la notion de fréquence statistique pour des échantillons de grande taille, on détermine donc par une procédure d'ajustement les fonctions f_X et F qui représentent au mieux les variabilités expérimentales. Dans le cas des études fiabilistes, on introduit généralement plus d'un paramètre aléatoire. L'ensemble des k variables X_i du problème constitue dans ce cas un vecteur $\{X\} = \{X_i\}_{i=1, \dots, k}$ de \mathbb{R}^k dont les probabilités d'occurrence sont décrites par une densité de probabilité conjointe $F_{\{X\}} : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ telles que :

$$f_{\{X\}}(\{x\}) \prod_{i=1}^k dx_i = P(x_i \leq X_i < x_i + dx_i); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (\text{III.11})$$

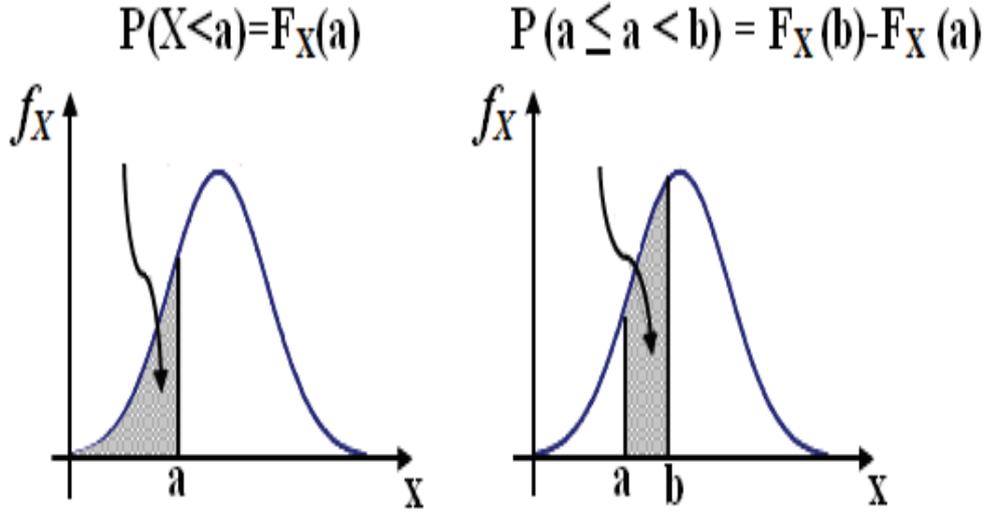


Figure A1.2 – Interprétation graphique des fonctions de densité et de répartition d'une variable aléatoire X.

$$F_{\{X\}}(\{x\}) = P(X_i < x_i); \quad \forall i = 1 \dots k \quad (\text{III.12})$$

où : $\{x\} = \{x_i\}_{i=1, \dots, k}$ est un vecteur de \mathbb{R}^k , avec :

$$\int_{\mathbb{R}^k} f_{\{X\}}(\{x\}) \prod_{i=1}^k dx_i = 1 \quad (\text{III.13})$$

A titre illustratif, la figure (A1.3) présente l'allure d'une fonction f_X dans le cas de deux variables aléatoires.

Lorsque les k variables aléatoires X_i sont indépendantes, l'expression de la densité conjointe se ramène au produit des densités marginales f_{X_i} de chaque variable :

$$f_{\{X\}}(\{x\}) = \prod_{i=1}^k f_{X_i}(x_i); \quad \forall \{x\} = \{x_i\}_{i=1 \dots k} \quad (\text{III.14})$$

Dans le cas contraire, il y a lieu de préciser absolument la nature de leur dépendance pour le calcul des indicateurs de fiabilité. C'est pourquoi est introduite une matrice de corrélation $[\rho] = [\rho_{ij}]_{(ij)=[1 \dots k]}^2$ dont les composantes ρ_{ij} mesurent la dépendance linéaire entre chaque couple de variables aléatoires X_i et X_j de la façon suivante :

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{(S_i, S_j)}; \quad \forall (i, j) \in [1 \dots k]^2 \quad (\text{III.15})$$

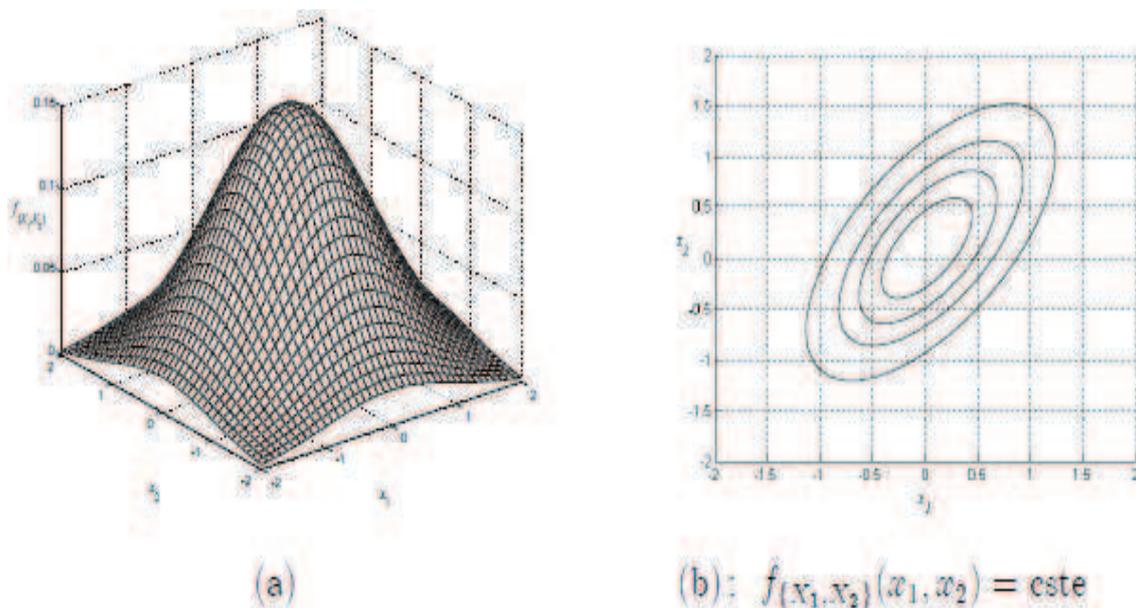


Figure A1.3 – Fonction de densité de probabilité conjointe dans le cas de deux variables aléatoires $X = X_1, X_2$: (a) représentation 3D, (b) isovaleurs de f_X .

où : $Cov(X_i, X_j)$ représente la covariance de ces deux variables, S_{X_i} et S_{X_j} désignant leur écart type respectif [70]. Chaque composante ρ_{ij} est un nombre appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$:

- si $\rho_{ij} = 0$, les variables X_i et X_j ne sont pas reliées linéairement entre elles (mais peuvent l'être d'une autre manière) ;
- si $\rho_{ij} > 0$ (resp. $\rho_{ij} < 0$), X_i et X_j ont tendance à varier dans le même sens (resp. dans le sens contraire) ;
- lorsque $\rho_{ij} > 0.9$, la liaison linéaire est considérée comme forte.
Précisons enfin que pour des variables $X_{i=1, \dots, k}$ indépendantes, la matrice de corrélation se réduit à la matrice identité d'ordre k .

3.5 Fonction de performance

Il s'agit dans cette partie de construire le scénario de défaillance de la structure, i.e. de préciser l'état limite au-delà duquel celle-ci n'est plus considérée comme fiable. Ces états limites correspondent principalement à des exigences en termes de tenue mécanique (la défaillance

3 Position d'un problème de fiabilité des structures

est associée à la rupture du matériau ou la ruine de la structure) ou d'aptitude au service (la défaillance est associée à des déformations ou un endommagement excessifs). Une campagne AMDEC (Analyse des Modes de Défaillances, des Effets et des Criticités) permet par exemple d'identifier les modes de défaillance possibles, leurs causes ainsi que leurs conséquences sur le fonctionnement de la structure [83].

La notion de fiabilité étant posée, un critère de défaillance est défini à l'aide d'une fonction dite de performance (ou d'état limite), notée G , et qui dépend des variables aléatoires du modèle. Par convention, on définit le domaine de sûreté D_s et le domaine de défaillance D_f de \mathbb{R}^k comme suit :

$$D_s = \left\{ \{X\} \in \mathbb{R}^k, \quad G(\{X\}) > 0 \right\} \quad (\text{III.16})$$

$$D_f = \left\{ \{X\} \in \mathbb{R}^k, \quad G(\{X\}) \leq 0 \right\} \quad (\text{III.17})$$

La frontière $\{\{X\} \in \mathbb{R}^k, G(\{X\}) = 0\}$ est la surface d'état limite. La figure (A1.4) illustre cette définition sur le cas de deux variables aléatoires de base.

Les points importants concernant le critère de défaillance sont les suivants :

- le choix de la fonction de performance se doit d'être dicté par la cause physique de la défaillance de façon à en obtenir une représentation réaliste ; son expression peut alors porter sur des données microscopiques (dans le cas par exemple d'une défaillance par rupture locale) ou macroscopique (dans le cas par exemple d'une défaillance par instabilité structurale) ;
- si la forme du critère est généralement du type $G = R - S$ avec R une caractéristique de résistance et S une donnée relative à la sollicitation appliquée, la fonction G n'est pas forcément une fonction explicite des variables de base X , elle peut dépendre en effet de la réponse de la structure (par exemple contraintes ou déformations) et son évaluation nécessite alors un calcul mécanique préalable (le plus souvent par éléments finis) faisant intervenir une loi de comportement (couplage mécano-fiabiliste) ;
- certaines considérations d'ordre pratique peuvent enfin influencer sur son choix : la complexité du couplage précité ou encore les propriétés mathématiques de la fonction G qui vont conditionner les calculs de probabilité de défaillance exposés par la suite.

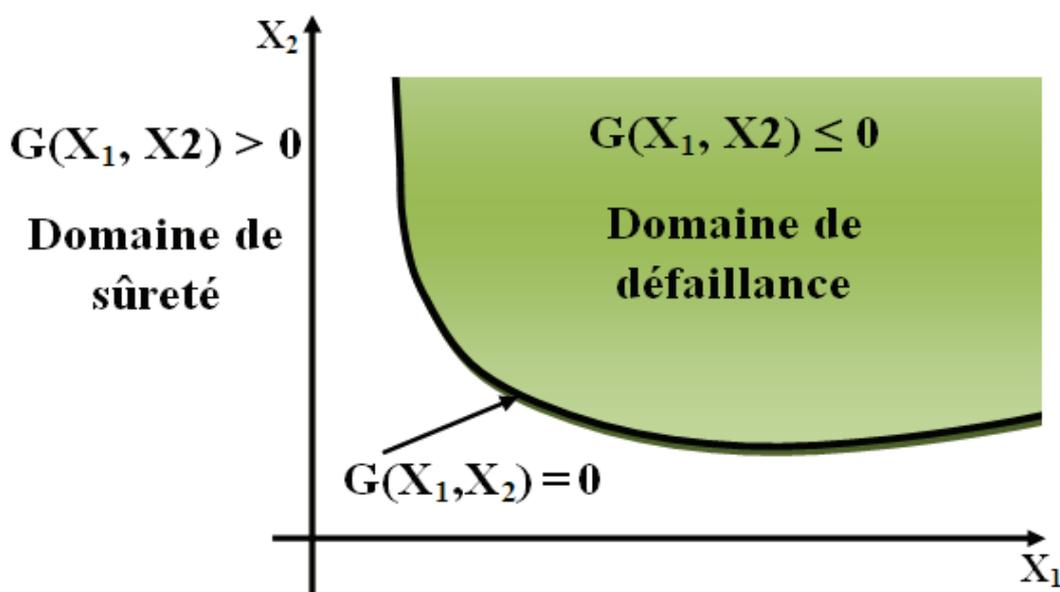


Figure A1.4 – Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables aléatoires $X = X_1, X_2$.

3.6 Point de conception

Appelé aussi le point de défaillance le plus probable ou point critique (point P^* de la figure A1.5), il est le point de la zone de défaillance qui a la plus grande probabilité d'occurrence lors d'une réalisation des variables aléatoires. Il est le point de la frontière entre le domaine de sécurité et le domaine de défaillance, le plus proche de l'origine dans l'espace des variables centrées réduites [41, 45]. Les trois voies principales du calcul de la probabilité de ruine P_f sont :

- Technique de simulation directe par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode est la plus précise mais elle aussi est la plus coûteuse. Le calcul d'une probabilité de ruine approchée \tilde{P}_f se fait en mesurant la taille de l'échantillon (composé de N tirages de variables de base) des réalisations situées à l'intérieur du domaine de défaillance. Notons qu'en faisant tendre la taille de l'échantillon vers l'infini, la probabilité de défaillance approchée \tilde{P}_f tend vers la probabilité de défaillance réelle P_f ;
- Calcul par l'intermédiaire de l'indice de fiabilité β . Les méthodes FORM et SORM sont utilisées pour permettre d'évaluer β ;
- Échantillonnage par tirage d'importance, elle permet de cibler les tirages des variables de base X_i autour du point de conception P^* . Cela permet de réaliser de meilleures approximations de \tilde{P}_f pour des échantillons de taille limitée.

3.7 Transformation des variables de base

Pour la plupart des méthodes du calcul, le préalable au calcul de la probabilité de défaillance consiste à se placer, non pas dans l'espace des variables physiques, mais dans un espace dit standard. Le vecteur des variables de base X , défini par sa fonction de densité conjointe est transformé en un vecteur de variables normales centrées, normées et indépendantes U , défini dans l'espace standard. Les transformations classiques utilisées sont celles de Nataf et Rosenblatt [39, 40, 79]. La transformation de Nataf consiste en particulier à passer de variables aléatoires x_i de lois marginales quelconques et éventuellement corrélées à des lois normales centrées réduites non corrélées (indépendantes) u_i , par l'expression suivante :

$$u_i = T_i(x_k) = \Gamma_{ij} \Phi^{-1} [F_{X_j}(x_j)] \quad (\text{III.18})$$

où Γ_{ij} est l'inverse de la triangularisation de Choleski de la matrice de corrélation équivalente, $F_{X_j}(x_j)$ est la fonction de répartition de la variable x_j et Φ^{-1} est l'inverse de la loi de répartition gaussienne standard. Une méthode du calcul de la transformation où des détails sont donnés sur un calcul approché de la matrice de corrélation équivalente est disponible dans [34].

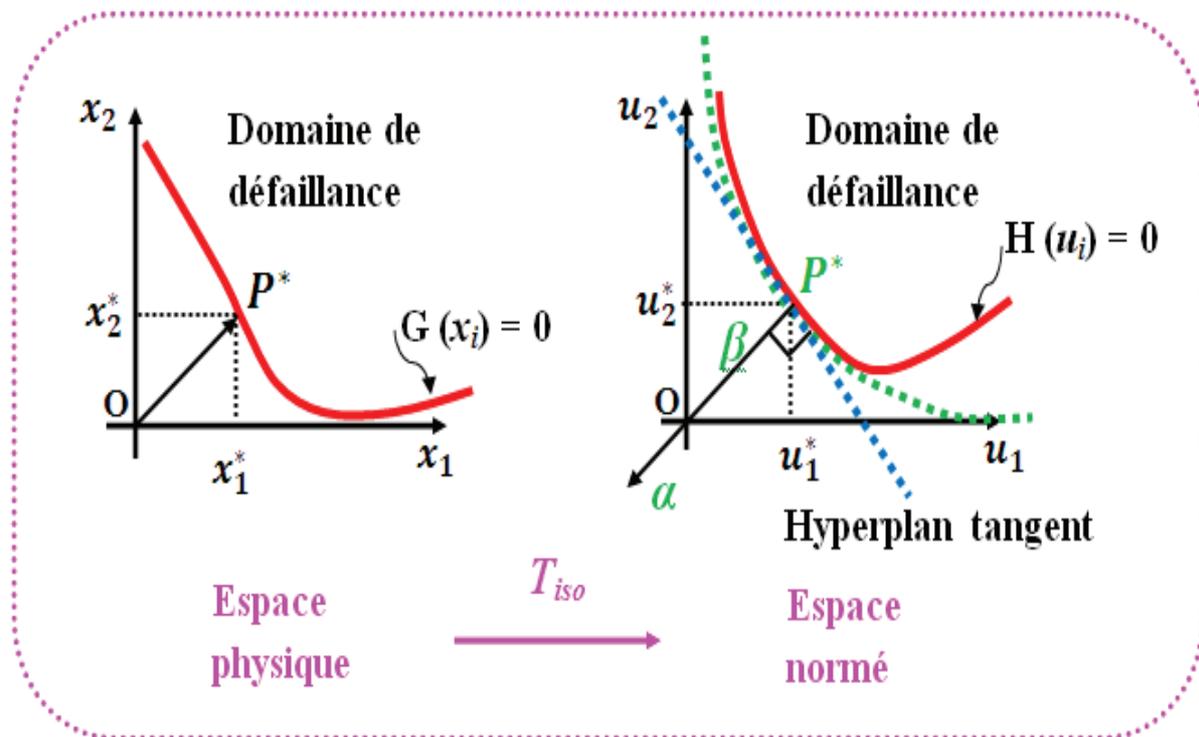


Figure A1.5 – Transformation des variables de base.

3.8 Modes de défaillance d'une structure

Pour assurer l'intégrité de la structure face aux risques envisagés, des règles de bon fonctionnement sont établies. Le non-respect de l'un de ces critères provoque alors un mode élémentaire de défaillance de la structure. L'enchaînement d'événements entraînant une défaillance constitue un scénario de défaillance. Les modes ou scénarios de défaillance sont établis en fonction des risques potentiels : la présence de contraintes ou des déformations excessives dans un élément structural, la rupture d'une pièce, etc.

Plusieurs phénomènes physiques peuvent être à l'origine d'une défaillance : la plastification, la fatigue, le fluage, la présence de fissures, de grandes déformations, etc. Chacun ou la combinaison de ces phénomènes entraîne un mode ou un scénario de défaillance. Pour simplifier les notations, nous nous plaçons dorénavant dans le cas d'une structure ne possédant qu'un seul mode de défaillance. La modélisation probabiliste d'un mode de défaillance se fait par la définition d'une fonction $G(X)$ appelée fonction d'état limite ou fonction de performance. Notons que par construction la fonction $G(X)$ est elle-même une variable aléatoire. Ainsi, on a :

- $G(X) > 0$ définit le domaine de sécurité de la structure ;
- $G(X) < 0$ définit le domaine de défaillance de la structure ;
- $G(X) = 0$ définit la surface d'état limite.

La structure possède donc deux états possibles : un état de bon fonctionnement et un état de défaillance, séparés par une frontière dite d'état limite. Notons toutefois que la réalité est souvent bien plus complexe que cette modélisation binaire.

3.9 Probabilité de défaillance d'une structure

La probabilité de défaillance de la structure est alors égale à :

$$P_f = P(G(X) \leq 0) \quad (\text{III.19})$$

soit :

$$P_f = \int_{G(X) \leq 0} f_X(x) dx \quad (\text{III.20})$$

f_X est la densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire X . La fiabilité de la structure est définie par :

$$P_s = 1 - P_f \quad (\text{III.21})$$

Si la formulation de P_f est simple, son calcul peut s'avérer extrêmement complexe. La difficulté de connaître f_X explicitement et l'expression souvent non-linéaire de la frontière de D_f rendent

en général un calcul analytique impossible.

4 Calcul de la probabilité de défaillance

La fiabilité R (en anglais, reliability) d'une structure est conventionnellement définie de la façon suivante :

$$R = 1 - P_f \quad (\text{III.22})$$

où la probabilité de défaillance P_f (en anglais, probability of failure) correspond à la probabilité d'occurrence de l'événement $G(X) \leq 0$:

$$P_f = P(G(\{X\}) \leq 0) \quad (\text{III.23})$$

Cet indicateur de confiance constitue le résultat essentiel d'un calcul fiabiliste. Si l'on introduit la densité de probabilité conjointe f_X des variables aléatoires X du modèle, la probabilité de défaillance s'écrit alors comme suit :

$$P_f = \int_{D_f} f_X(x) \prod_{i=1}^k dx_i \quad (\text{III.24})$$

Il est très rare que cette intégrale puisse être étudiée analytiquement voire numériquement. Dans la pratique, on ne dispose pas en général de la densité de probabilité conjointe du vecteur X , on doit se contenter le plus souvent des lois marginales relatives à chaque variable X_i et à certaines informations sur leur corrélation. De plus, le domaine d'intégration D_f peut être défini de façon implicite et complexe selon le modèle mécanique retenu.

Diverses méthodes de résolution ont ainsi été développées pour pallier ces difficultés [79, 93]. On distingue deux grandes familles : les méthodes basées sur des simulations et celles recourant à une approximation. On se propose de présenter ici les grandes lignes des trois méthodes utilisées dans le cadre de cette étude.

4.1 Calcul de la probabilité de défaillance par les méthodes de simulation

Les méthodes de simulation sont basées sur le calcul de la fonction de performance pour un échantillon représentatif (et souvent de grande taille) de la population. Ces méthodes sont les plus coûteuses en temps du calcul, mais restent la référence sur le résultat en probabilité de défaillance. Certaines variantes permettent de diminuer les nombres d'appels à la fonction de performance. Le temps du calcul est ainsi diminué, mais reste trop important pour s'en contenter

dans le cadre des calculs industriels, dans lesquels le temps du calcul de la fonction de performance est non négligeable et le nombre de variables aléatoires important. De multiples travaux sont toutefois réalisés sur ces méthodes, car elles sont robustes et qu'elles peuvent être utilisées sur des substituts de la fonction de performance où l'évaluation de l'état-limite devient alors très rapide. Après quelques données sur la simulation de Monte-Carlo originale, les variantes les plus courantes sont détaillées. Les illustrations sont inspirées du manuel de Phimeca Softwarec [107] et [80].

Monte Carlo directe

La méthode numérique dite de Monte-Carlo peut être décrite globalement comme une méthode de simulation statistique qui utilise une séquence de nombres aléatoires pour la réaliser. Elle est utilisée aujourd'hui dans des champs d'applications aussi variés et complexes que les transferts radiatifs dans l'atmosphère, les processus sub-nucléaires, l'interaction de la lumière avec la matière vivante ou les phénomènes de turbulence. La méthode de Monte-Carlo doit être opposée aux méthodes conventionnelles de simulation par éléments finis qui utilisent le système d'équations différentielles décrivant le système physique ou mathématique sous-jacent. Dans bien des applications, le processus physique est simulé directement par la méthode de Monte-Carlo et il n'y a pas besoin d'écrire le système d'équations différentielles qui décrivent le comportement du système. La seule hypothèse nécessaire est que le système physique ou mathématique peut être décrit par des fonctions de densité de probabilité $p(x)$ où x est un ensemble de variables aléatoires. La méthode de Monte-Carlo présente deux énormes avantages sur les méthodes par éléments finis.

- En procédant par échantillonnage, le nombre des calculs élémentaires nécessaires pour obtenir un résultat donné est considérablement plus petit. Les simulations Monte Carlo sont les seules méthodes probabilistes adaptées à des fins d'analyse comparative et de validation.

- Il est extrêmement simple d'utiliser des processeurs en parallèle, par exemple un réseau d'ordinateurs, car chaque "réalisation" se fait par un calcul identique et peut se faire simultanément. Les boucles de simulations individuelles sont intrinsèquement indépendantes ; les boucles de simulation individuelle ne dépendent pas des résultats de toutes les boucles de simulation. Cela rend les techniques de simulation de Monte Carlo des candidats idéaux pour le traitement parallèle [17].

Il s'agit de la technique la plus ancienne et la plus intuitive d'évaluation de la probabilité de défaillance. Cette méthode est basée sur l'application de la loi des grands nombres, elle consiste à déterminer un estimateur de P_f par succession de tirages aléatoires indépendants. Le but est

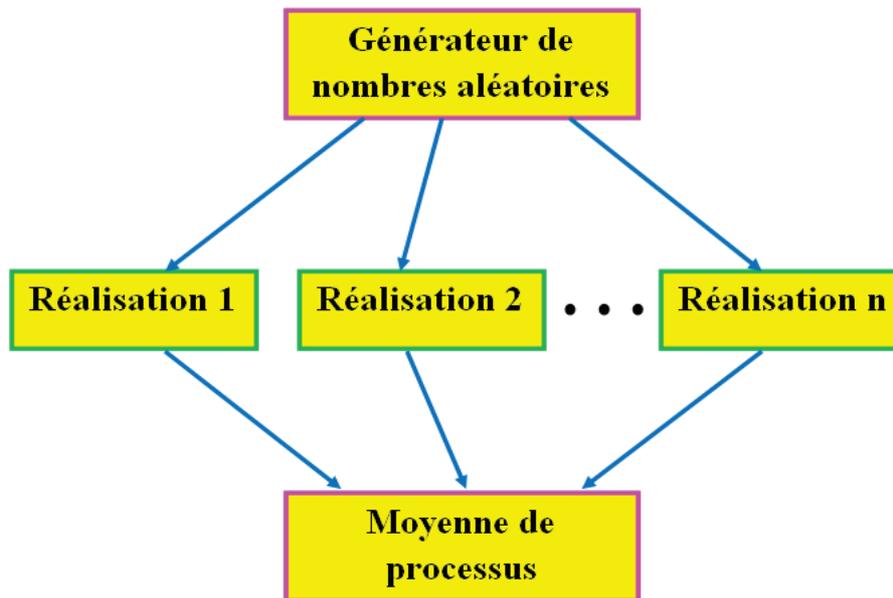


Figure A1.6 – Calcul en parallèle des processus

alors d'estimer l'intégrale suivante :

$$P_f = \int_{G(x) \leq 0} f_X(x) dx \quad (\text{III.25})$$

Cette intégrale limitée au domaine de défaillance peut être ramenée à une intégrale sur l'espace entier en introduisant la fonction indicatrice :

$$I_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } G(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Les réalisations sont générées autour de l'origine suivant la distribution de la multinormale centrée réduite.

L'expression de la probabilité de défaillance prend alors la forme suivante :

$$P_f = \int I_f(x) f_X(x) dx \quad (\text{III.27})$$

La probabilité de défaillance est alors estimée par l'expression suivante :

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_f(x_i) = E [I_f(x_i)] \quad (\text{III.28})$$

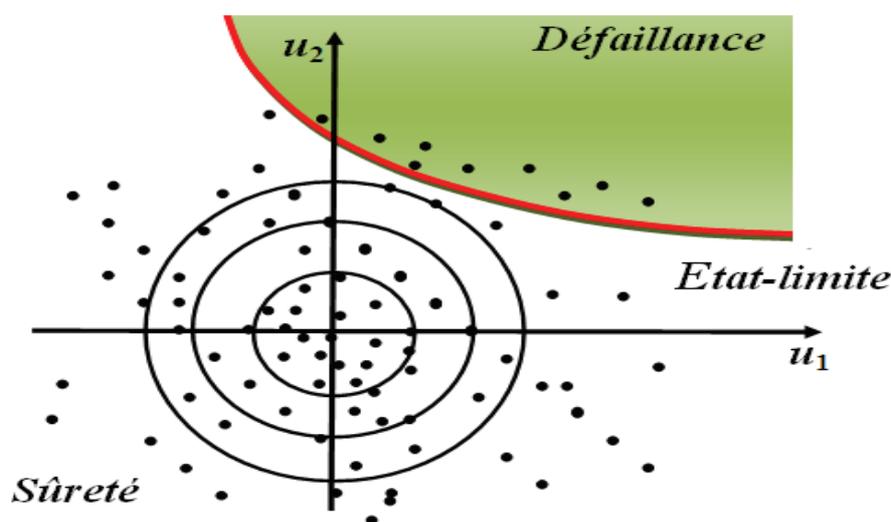


Figure A1.7 – Illustration de la simulation de Monte Carlo dans l'espace standard.

en utilisant N réalisations du vecteur X , sachant que pour obtenir un bon estimateur de la probabilité de défaillance, il faut un grand nombre N de simulations. Dans le cas de la fiabilité des structures, ceci est d'autant plus vrai que les probabilités recherchées sont faibles (les structures sont fiables). Pour estimer une probabilité de défaillance de l'ordre de 10^{-n} , il faut classiquement un échantillon de 10^{n+2} voire 10^{n+3} . Cette méthode est extrêmement coûteuse en temps de calcul. Elle reste cependant l'une des plus robustes.

Les simulations de Monte-Carlo sont considérées comme les réponses de référence au problème de la fiabilité. Il faut préciser que seuls les tirages dans le domaine de défaillance contribuent à l'amélioration de l'estimateur de la probabilité de défaillance. Les variantes de la méthode basique de Monte-Carlo utilisent cette propriété et tentent de rendre les tirages plus performants. L'objectif est de réduire la variance de l'estimation de la probabilité de défaillance, à nombre de simulations identiques, ou de réduire le nombre de simulations pour atteindre une variance donnée sur cette probabilité de défaillance.

En conclusion, pour les probabilités moyennes à grandes ($> 10^{-2}$), la méthode de Monte Carlo Directe est performante car un nombre restreint de tirages permet d'obtenir une précision satisfaisante. En revanche dès que les probabilités recherchées diminuent, le nombre important de tirages cumulé aux limites numériques, en font une méthode à proscrire. Cette configuration est précisément celle dans laquelle s'inscrit notre étude. De nombreuses méthodes dérivées de la méthode Directe [53, 96, 122] existent. Celles-ci apportent un complément à la méthode de base et tentent d'améliorer ses résultats. Cependant, aucune ne se généralise aussi facilement

que la méthode de Monte Carlo Directe. Ces méthodes sont développées pour répondre à des problèmes particuliers : réduction de la variance, meilleures précisions à nombre de tirages égal, meilleure répartition et économie des tirages au détriment de la précision, optimisation du rapport coût/précision, etc. Nous présentons dans les trois paragraphes suivants quelques-unes de ces méthodes.

Monte Carlo échantillonné

Son principe, simple, se déduit de la méthode Directe de Monte Carlo : réduire le nombre de tirages en conservant une précision équivalente. On partitionne l'espace d'étude en secteurs disjoints. On limite les tirages à un seul des secteurs. Considérons une partition sous forme d'hypercubes imbriqués les uns dans les autres (figure A1.7). Ici, le tirage est effectué dans le plus grand cube et n'appartient à aucun autre cube. Ensuite, par des opérations géométriques (rotations, translations, homothéties ou affinités), on adapte le tirage initial aux secteurs inférieurs. Dans l'exemple proposé, en notant R le rapport constant entre les surfaces de deux secteurs successifs, une affinité de rapport $1/R$ du tirage initial nous place dans une configuration permettant de valider le tirage dans le second cube uniquement. Il ne reste qu'à répéter ce procédé autant de fois qu'il y a de secteurs. Le nombre de secteurs ne doit pas être trop élevé afin que les tirages initiaux puissent bénéficier d'un espace de liberté suffisant. Il ne reste qu'à déterminer l'estimateur en fonction du nombre d'expériences. Celui-ci est calculé par le même rapport que dans la méthode de Monte Carlo Directe.

Les carrés correspondent aux domaines successifs. Les tirages initiaux sont marqués par le

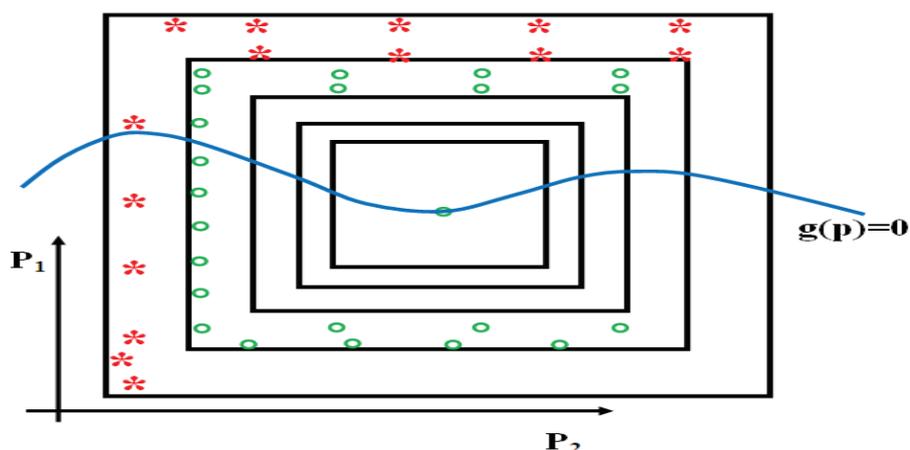


Figure A1.8 – Exemple de Monte Carlo échantillonné à deux paramètres.

symbole *, ceux obtenus après une transformation sont indiqués par le symbole o.

L'estimateur que l'on obtient par cette méthode est non biaisé, et sa variance reste contrôlée par le nombre de simulations. L'opération de stratification permet de corriger certains défauts rencontrés avec la méthode directe. En premier lieu le nombre de tirages à effectuer est limité à ceux du plus grand cube. La répartition des points testés est plus homogène que dans le cas direct. Cette méthode s'adapte à différents critères par un choix de stratification en fonction du problème.

Cependant, on rencontre encore certains problèmes inhérents aux méthodes de simulations. Le temps du calcul reste important et dépend du nombre de tirages initiaux. A ceci s'ajoute un autre inconvénient : la recherche du point vers lequel va converger le procédé itératif sur les tirages (centre de la série d'hypercubes). Un bon choix est le point de conception défini au paragraphe (3.6). En conclusion, on peut définir à partir de cette méthode échantillonnée de nombreuses variantes qui répondent à différents problèmes. On peut remplacer le découpage en hypercubes par un quadrillage stratifié ou créer des cellules à l'intérieur du découpage pour une meilleure répartition des simulations. Il est également possible de contrôler l'évolution du nombre de tirages reportés entre chaque étape ou leur nombre initial.

Simulations d'importance

Le principe est de produire les échantillons dans les régions qui contribuent le plus à la mesure de l'intégrale. Les points ayant le plus de poids dans la probabilité de défaillance sont généralement situés autour du point de conception si celui-ci est unique. Par conséquent, l'essentiel des tirages est situé autour de P^* .

Deux étapes sont nécessaires : il s'agit de chercher d'abord le point de défaillance le plus probable et de réaliser ensuite une simulation centrée sur ce point. La probabilité de défaillance est alors estimée par l'expression suivante :

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_f(x_i) \frac{\varphi_N(u_i)}{f_N(u_i - u^*)} \quad (\text{III.29})$$

où φ_N est la densité multi-normale et f_N dépend du choix de la densité utilisée pour la simulation.

Les réalisations sont générées autour du point de défaillance le plus probable.

L'intérêt du tirage d'importance repose essentiellement sur la réduction du nombre de simulations, par leur concentration vers les zones les plus informatives. La densité d'échantillonnage est définie à partir de ces secteurs et de la loi initiale des variables aléatoires. Nous verrons par la suite que cette technique peut compléter avantageusement les méthodes approchées.

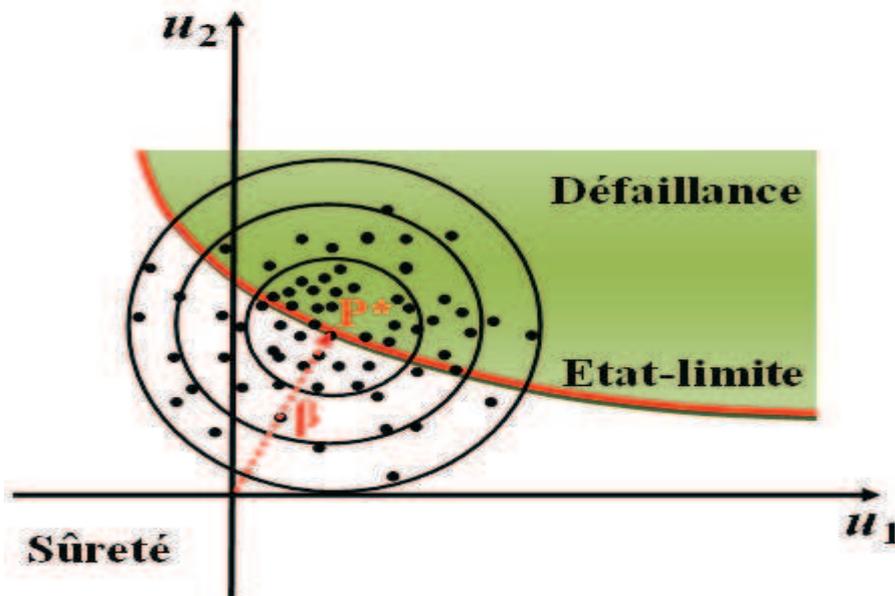


Figure A1.9 – Illustration de la simulation d'importance dans l'espace standard.

Simulations directionnelles

Les simulations directionnelles sont basées sur le concept de probabilité conditionnelle et utilisent la symétrie de l'espace standard. Les simulations sont alors réalisées de manière radiale. Des directions dans l'espace sont généralement générées aléatoirement et la probabilité de défaillance est calculée conditionnellement à la direction. La probabilité de défaillance est alors estimée par l'expression suivante :

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [1 - d_N^2(\rho_i)] \quad (\text{III.30})$$

Où d_N^2 est la loi de répartition du d^2 à N degrés de liberté.

Il est nécessaire de déterminer les intersections des directions avec l'état-limite de manière itérative.

Pour conclure, on note que cette méthode donne des résultats très corrects si le domaine vérifie de bonnes conditions. Cependant, la qualité des résultats se dégrade rapidement dès que la géométrie se modifie. Comme toutes les méthodes de tirages, le nombre d'expériences influe sur la qualité des résultats. Néanmoins, comparativement aux méthodes de Monte Carlo, les défaillances pour les petites probabilités sont atténuées. Le choix de directions pertinentes reste un frein important. Certaines correspondent à des simulations échouées et n'apportent pas de

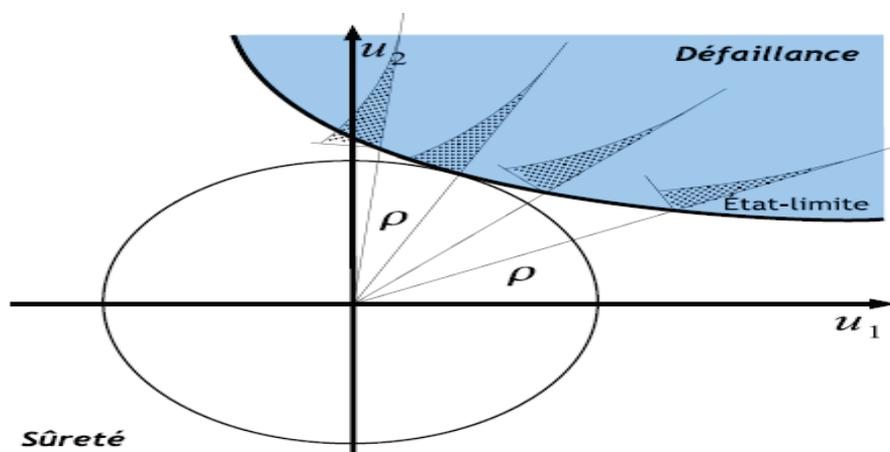


Figure A1.10 – Illustration de la simulation directionnelle.

précision supplémentaire à l'estimateur, bien qu'elles soient prises en compte. Pour corriger ce dernier point, une alternative est mise en œuvre : les tirages d'importance.

Carré Latin

Dans cette méthode de simulation, les tirages sont effectués de manière uniforme dans un pavé autour du point de conception. La fonction de densité uniforme s'écrit :

$$f_{U_k}(u_k) = \frac{1}{V(p)}, \text{ où } V(p) \text{ est le volume du pavé.}$$

La probabilité de défaillance s'estime par l'intégrale suivante :

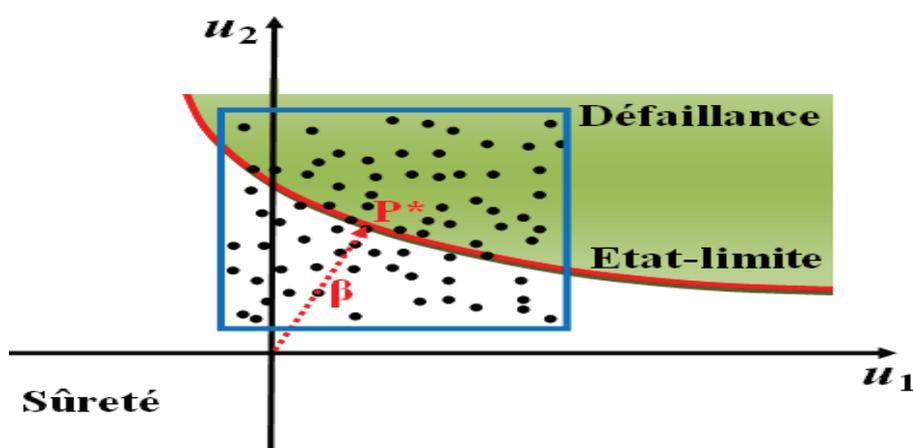


Figure A1.11 – Illustration des simulations par hypercube latin.

$$\tilde{p}_f = \frac{V(p)}{N} \sum_{i=1}^N I_f(x_i) \frac{\varphi_N(u_i)}{f_N(u_i)} \quad (\text{III.31})$$

4.2 Calcul de la probabilité de défaillance à partir d'un indice de fiabilité

Plusieurs auteurs ont proposé des indices ou index de fiabilité. Les plus connus sont ceux de Rjanitzyne-Cornell et de Hasofer-Lind.

4.2.1 Indice de Rjanitzyne-Cornell

L'indice de Rjanitzyne-Cornell β_c est obtenu à partir de la moyenne μ_G et l'écart type σ_G de la fonction de performance G :

$$\beta_c = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (\text{III.32})$$

On peut voir sur la figure (A1.12) que cet indice multiplié par l'écart type σ_G représente l'écart

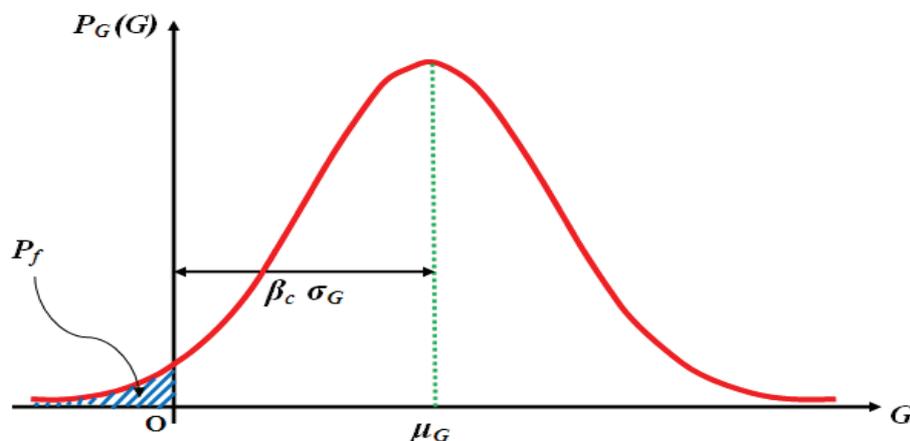


Figure A1.12 – Représentation graphique de l'indice de Rjanitzyne-Cornell.

entre le point moyen μ_G et l'état limite ($G = 0$). L'inconvénient majeur de cette indice est qu'il donne des valeurs différentes pour différentes expressions de la fonction d'état limite.

4.2.2 Indice de Hasofer et Lind

Pour lever le risque de dépendance de l'indice de fiabilité vis-à-vis de l'état limite, Hasofer et Lind ont proposé d'effectuer le calcul de β dans l'espace des variables aléatoires normales centrées réduites et statistiquement indépendantes [61, 72]. Pour cela, le vecteur aléatoire X est

transformé en vecteur aléatoire U , avec :

$$U_i = T(X_i) \quad (\text{III.33})$$

Les variables aléatoires suivent une loi normale centrée réduite et $\forall i \neq j, U_i$ et U_j sont mutuellement indépendantes. Cette transformation probabiliste T impose de connaître les distributions statistiques de chacune des variables aléatoires. La fonction d'état limite devient après transformation :

$$H(U) = G[X(U)] \quad (\text{III.34})$$

La probabilité de défaillance est alors égale à :

$$P_f = P(H(U) \leq 0) \quad (\text{III.35})$$

soit,

$$P_f = \int_{H(u) \leq 0} \Phi_m(u) du \quad (\text{III.36})$$

Φ_m est la fonction de densité de la loi multinormale centrée réduite. L'indice de fiabilité β_{HL} est défini comme étant la distance euclidienne de l'origine de l'espace normal standard à la surface d'état limite $H(u) = 0$ (figure A1.13). u est une réalisation du vecteur aléatoire U , soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$. $H(u)$ est une réalisation de la variable aléatoire $H(U)$. Il faut donc résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{cases} \beta_{HL} = \min \sqrt{u^T \cdot u} \\ u \in \mathbb{R}^m, \text{ vérifiant :} \\ H(u) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Ce problème est équivalent à

$$\begin{cases} \beta_{HL} = \min f(u) \\ u \in \mathbb{R}^m, \text{ vérifiant :} \\ H(u) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

avec

$$f(u) = \frac{1}{2} u^T \cdot u \quad (\text{III.39})$$

L'indice de fiabilité est donc le minimum de la fonction f sous la contrainte $H(u) = 0$. Le calcul analytique de β_{HL} n'est réalisable que dans un nombre limité de cas particuliers et une

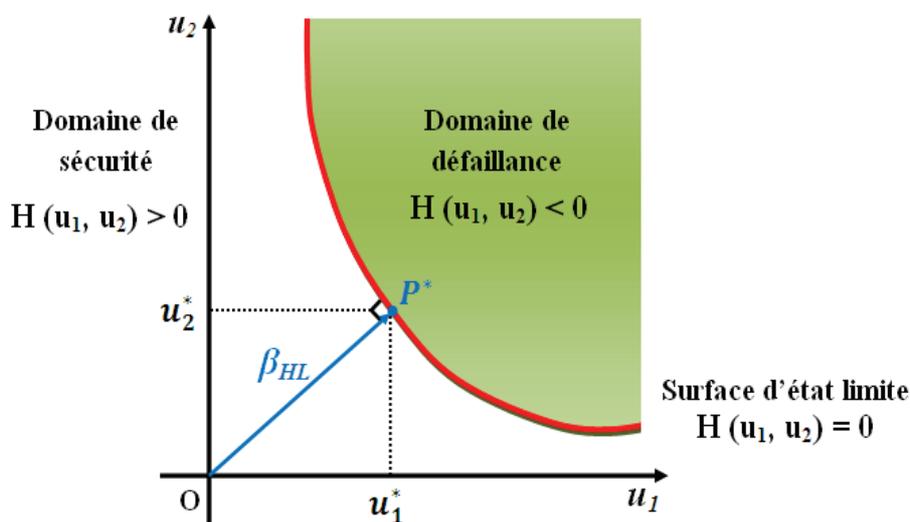


Figure A1.13 – Représentation géométrique de β_{HL} pour un problème à deux variables aléatoires

résolution numérique est généralement nécessaire. La fonction objectif f est une forme quadratique, convexe, deux fois continûment différentiables par rapport aux variables u_i . En revanche, la fonction de contrainte $H(u)$ est rarement convexe. De plus, la fonction $H(u)$ est parfois complexe, implicite et non continûment différentiable par rapport aux variables u_i .

Soient u^* le vecteur solution du problème (III.38) et P^* le point de la surface d'état limite tel que $OP^* = u^*$. P^* est appelé point de conception ou point de défaillance le plus probable (voir figure A1.13). Par ailleurs :

$$u^* = -\beta_{HL}\alpha \quad (\text{III.40})$$

α est le vecteur normal à la surface $H(u) = 0$ au point u^* , soit son gradient normalisé. L'objectif est alors de relier β_{HL} à la probabilité de défaillance de la structure. Plusieurs méthodes existent et apportent une valeur plus ou moins fine de P_f .

4.3 Méthode FORM

La méthode FORM (First Order Reliability Method), consiste à remplacer la surface d'état limite par l'hyperplan tangent au point de conception P^* , $Z(u) = 0$, approximation linéaire de $H(u) = 0$ (Figure A1.15) [8, 38, 41]. Le principe général de la méthode FORM est le suivant :

Etape 1 : Définition de la transformation probabiliste T entre l'espace physique initial et l'espace gaussien standard.

Etape 2 : Transformation de la surface de défaillance $G(u) = 0$ dans l'espace initial en la sur-

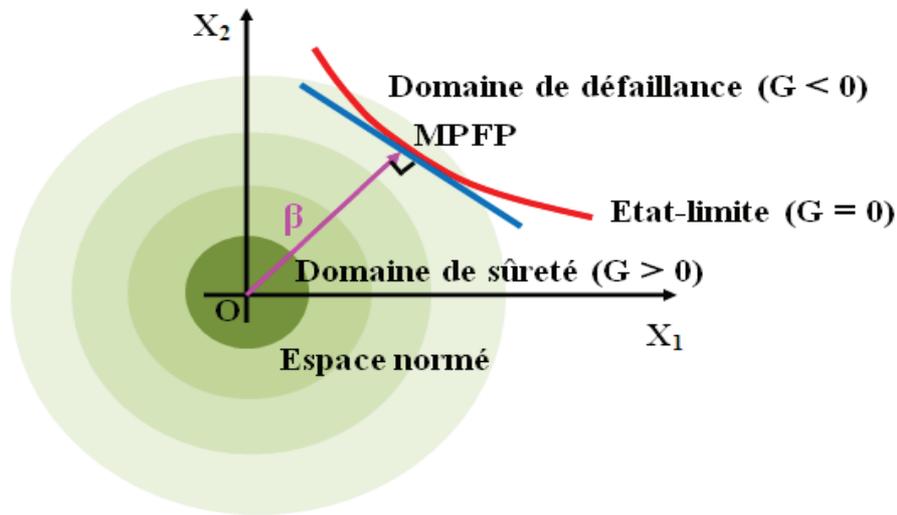


Figure A1.14 – Point le plus probable dans l'espace physique.

face de défaillance $H(u) = 0$ dans l'espace gaussien standard.

Etape 3 : Calcul de l'indice de fiabilité β_{HL} solution du problème (III.38).

Etape 4 : Calcul de P_f^* , valeur approchée de P_f , définie par :

$$P_f^* = \int_{Z(u) \leq 0} \Phi_m(u) du \quad (\text{III.41})$$

soit,

$$P_f^* = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (\text{III.42})$$

Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et D_f^* le domaine de \mathbb{R}^m tel que $Z(u) \leq 0$ avec :

$$Z(u) = \alpha^T \cdot u + \beta_{HL} \quad (\text{III.43})$$

Si la surface d'état limite est :

- convexe alors $P_f^* > P_f$,
- concave alors $P_f^* < P_f$,
- un hyperplan alors $P_f^* = P_f$.

La précision de l'approximation FORM dépend fortement de la courbure de la surface d'état limite au point de conception et donc de la non-linéarité de la fonction $H(u) = 0$ [8, 38, 61]. Un des inconvénients majeurs de la méthode FORM est la difficulté d'estimer l'erreur du calcul de la probabilité de défaillance. Une solution de validation est alors de faire appel aux simulations

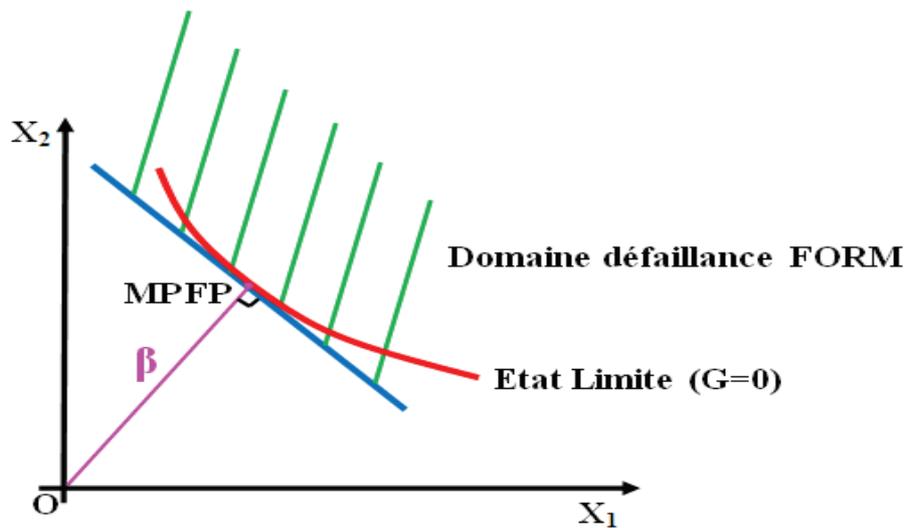


Figure A1.15 – Principe de la méthode FORM.

de Monte Carlo présentées précédemment. Le nombre des calculs nécessaires dépend directement du nombre de variables aléatoires du problème.

Grâce à la méthode FORM, on procure un ensemble de résultats particulièrement riche. Ainsi, on a une estimation de P_f , le point de défaillance le plus probable P^* (MPFP : Most Probable Failure Point) dans l'espace normé et potentiellement la sensibilité de la probabilité de défaillance aux différents aléas du problème. En effet, en utilisant l'équation (III.40), les cosinus directeurs sont définis par :

$$\alpha_i = -\frac{1}{\beta_{HL}} u_i^* \quad (\text{III.44})$$

Ces cosinus directeurs mesurent l'importance des variables aléatoires U_i dans la fonction $\sqrt{u^T \cdot u}$ au point de défaillance le plus probable u^* . Un cosinus directeur $\alpha_i \approx 0$ signifie que $u_i^* \approx 0$ et $x_i^* \approx E[X_i]$. L'importance de u_i^* dans la valeur de β_{HL} est donc quasi nulle. Or $P_f = \Phi(-\beta_{HL})$, ainsi, la distribution statistique de la variable X_i n'influence pas la valeur de la probabilité de défaillance et ce paramètre peut être considéré comme déterministe. Inversement, un cosinus directeur α_i ayant une valeur absolue élevée caractérise l'importance stochastique de la variable aléatoire U_i dans la probabilité de défaillance de la structure. Les paramètres α_i^2 sont appelés facteurs d'importance des variables aléatoires U_i . Par ailleurs, par la transformation probabiliste T qui relie U à X , ils reflètent l'importance des variables aléatoires dans l'espace physique si celles-ci sont mutuellement indépendantes.

De plus, ces cosinus directeurs indiquent la sensibilité de l'indice de fiabilité à de petites varia-

tions de la valeur moyenne \bar{u}_i de U_i . En effet :

$$\alpha_i \approx -\frac{\partial \beta_{HL}}{\partial \bar{u}_i} \quad (\text{III.45})$$

si le cosinus directeur d'une variable aléatoire U_i est positif, la variable est dite de "résistance". En effet, l'augmentation de sa valeur moyenne entraînerait une diminution de la probabilité de défaillance. Si le cosinus directeur d'une variable aléatoire U_i est négatif, la variable est dite de "solicitation".

4.4 Méthode SORM

Si la fonction d'état limite est fortement non-linéaire, l'approximation de la surface d'état limite par un hyperplan peut conduire à une probabilité de défaillance erronée. Les méthodes SORM (Second Order Reliability Method), consistent à remplacer la surface d'état limite au point de défaillance le plus probable par une surface quadratique. Ainsi [8, 31–33, 38], la fonction d'état limite est approchée au point u^* par un développement de Taylor à l'ordre deux. Sous

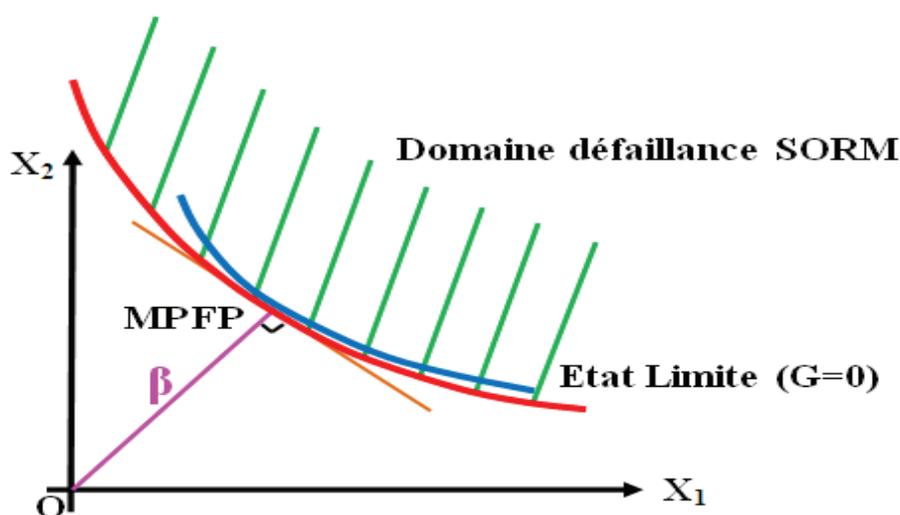


Figure A1.16 – Principe de la méthode SORM pour un problème à deux variables aléatoires.

les hypothèses que le point u^* soit unique, que la fonction d'état limite admette des dérivées secondes au point u^* et que les courbures principales κ_i , $i = 1$ à $m - 1$, de la surface d'état limite au point u^* vérifient : $\kappa_i \beta_{HL} \geq -1$, avec $\beta_{HL} \rightarrow +\infty$, la probabilité de défaillance de la structure

est égale à :

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_i \beta_{HL}}} \quad (\text{III.46})$$

Les courbures principales κ_i , $i = 1, \dots, m-1$ au point u^* sont les valeurs propres de la matrice A de dimension $(m-1) \times (m-1)$ dont les composantes sont définies par :

$$a_{ij} = -\frac{(Q \cdot \nabla_u^2 H(u^*) \cdot Q^T)_{ij}}{\|\nabla_u H(u^*)\|}, \quad i, j = 1, \dots, m-1 \quad (\text{III.47})$$

Q est la matrice orthogonale de rotation dans l'espace Gaussien telle que dans le nouveau repère, le point u^* appartient à l'axe de première coordonnée et $\nabla_u^2 H(u^*)$ est la matrice Hessienne de la fonction d'état limite $H(u)$ au point u^* .

La probabilité de défaillance exacte n'est obtenue que lorsque l'indice de fiabilité β_{HL} devient infini. La méthode est donc asymptotiquement exacte. Si un rayon de courbure κ_i , $i = 1, \dots, m-1$ est égal à $-\frac{1}{\beta_{HL}}$, la méthode est mise en défaut. Par ailleurs, si $\beta_{HL} \approx 0$, le résultat trouvé par la méthode SORM est égal au résultat trouvé par la méthode FORM.

Un calcul par la méthode SORM nécessite l'évaluation de la matrice Hessienne de la fonction d'état limite au point u^* et le calcul des valeurs propres d'une matrice de dimensions $(m-1) \times (m-1)$, en imposant une fonction d'état limite deux fois différentiable. Si le nombre de variables aléatoires est élevé, le temps du calcul devient prohibitif.

Ces méthodes approchées sont nettement moins onéreuses en temps du calcul que l'estimation de Monte Carlo, FORM étant évidemment la plus économique des deux. Par ailleurs, elles sont d'autant plus précises que le point de conception est éloigné de l'origine dans l'espace norme, i.e. dans le domaine des petites probabilités de défaillance ($P_f \leq 10^{-2}$), et fournissent en plus de P_f des renseignements sur la sensibilité de la fiabilité. Notons pour finir qu'une vérification de leur résultat à l'aide de quelques simulations de type Monte Carlo est recommandée pour valider l'approximation sur laquelle elle reposent.

4.5 Méthode des surfaces de réponse

La méthode de surface de réponse est largement utilisée en mécanique probabiliste qui est une extension de l'approche déterministe. Elle est un outil de dimensionnement des structures sollicitées par des chargements aléatoires comme c'est le cas pour les structures marines, où la prise en compte des incertitudes et des aléas en terme de modélisation est nécessaire. La méthode de surfaces de réponse permet une approche rationnelle des études de sensibilité et fournit des outils d'aide à la décision qui intègrent le risque structural et le risque socio-économique

[114, 117].

4.5.1 Principe et définition

Dans le cas général, on appelle surface de réponse, la représentation géométrique de la réponse d'un processus physique spatio-temporel aléatoire à des variables stimuli. La propriété étudiée, ou réponse Y , résulte alors du transfert par une fonction de réponse explicite, ou fonction de transfert, des variables d'entrée du système, le changement de valeurs de ces variables entraînant un changement de la valeur de la fonction de réponse. Les modèles expérimentaux des surfaces de réponse prennent en considération le choix des variables stimuli, la définition des périodes d'observation et le calcul d'erreur. Les variables d'entrée, stimuli représentatifs du phénomène, sont notées $X_i (i = 1, \dots, n)$, et sont appelées aussi variables de base du phénomène. Elles sont caractérisées par un ensemble d'informations statistiques notées $\theta_j (j = 1, \dots, p)$ (fonctions de distribution indépendantes ou corrélées, moments normalisés, etc.). Dans le cas général, les variables X_i sont des processus spatio-temporels, dits stochastiques ramenés à des vecteurs aléatoires lorsqu'on fixe les indices de temps et d'espace. Ce transfert des variables stimuli peut être représenté par le schéma de la figure (A1.17). En général, la forme explicite

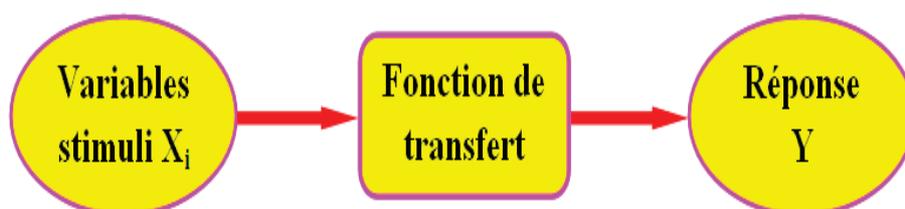


Figure A1.17 – Schéma d'une fonction de transfert

de cette fonction de transfert en fonction des variables de base est inconnue, et la recherche d'une approximation, appelée fonction de réponse, devient nécessaire. Le plus souvent, elle appartient à une famille de fonctions usuelles linéaires ou non, caractérisées par des paramètres $\chi_k (k = 1; \dots; m)$, aléatoires ou déterministes. L'ajustement de la réponse, basée sur une base de données expérimentales (expérimentation physique ou numérique) et une métrique pour le calcul d'erreur, permet de déduire les paramètres χ_k . La représentation géométrique de la fonction de réponse sous la forme d'une courbe, d'une surface ou d'une hypersurface est appelée surface de réponse. En terme de fiabilité, l'introduction d'outils géométriques comme les lignes de niveau relatives à cette surface est très utile et traduit la frontière entre le domaine de défaillance et le domaine de sécurité.

La fonction de réponse peut donc s'écrire formellement comme indiquée dans la figure (A1.18). Pour construire une surface de réponse, il faut donc fournir :

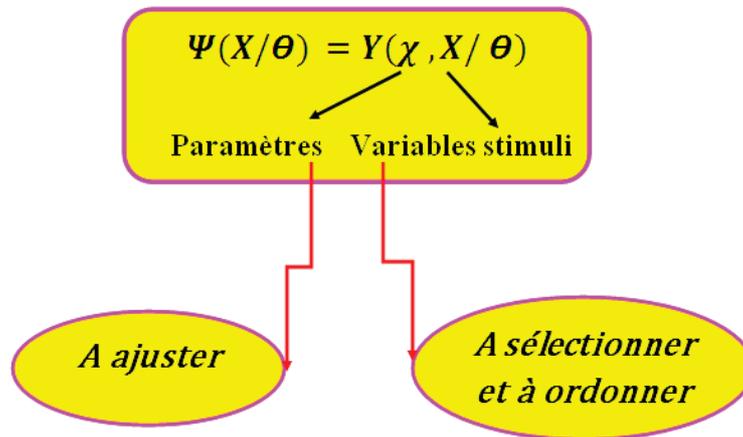


Figure A1.18 – Expression formelle de la fonction de réponse

$X = \{X_1; \dots; X_n\}$, ensemble représentatif et ordonné des variables de base ;

$\theta = \{\theta_1; \dots; \theta_p\}$, ensemble d'informations statistiques sur le vecteur X (fonctions de distributions indépendantes ou corrélées, moments normalisés, . . .) ;

$\psi(X/\theta)$, approximation de la réponse Y , formulée explicitement en fonction de X sachant les données statistiques θ , et obtenue soit par ajustement des paramètres χ (surface de réponse analytique), soit par modèles physiques successifs (surface de réponse physique) ;

$|\cdot|$, une métrique dans l'espace des variables de base et de la réponse. Cette métrique permet de mesurer la qualité de l'ajustement de l'approximation ψ à la réponse Y .

La mise en œuvre de la méthode SRSM repose sur les étapes suivantes :

- Expression des variables aléatoires d'entrée en termes d'un ensemble de variables normales standard ;
- Expansion spécifique pour la variable de sortie aléatoire ;
- Détermination des paramètres de l'expansion.

Les variables aléatoires standards sont choisies dans un ensemble de variables normales, aléatoires qui sont indépendantes et identiquement distribuées notées ξ_i^n $i=1, \dots, n$, où n est le nombre de variables d'entrées indépendantes, et chaque ξ_i est de moyenne nulle et de variance égale à 1. Quand les variables d'entrée aléatoires sont indépendantes, l'incertitude sur la i ème entrée X_i est exprimée directement en fonction de la i ème variable aléatoire standard ξ_i . Une telle transformation est utile pour la représentation standard des entrées aléatoires, dont chacune pourrait avoir des propriétés de distribution très différentes. La figure (A1.19) donne les étapes néces-

saires pour mener une analyse des incertitudes en employant la méthode de surfaces de réponse.

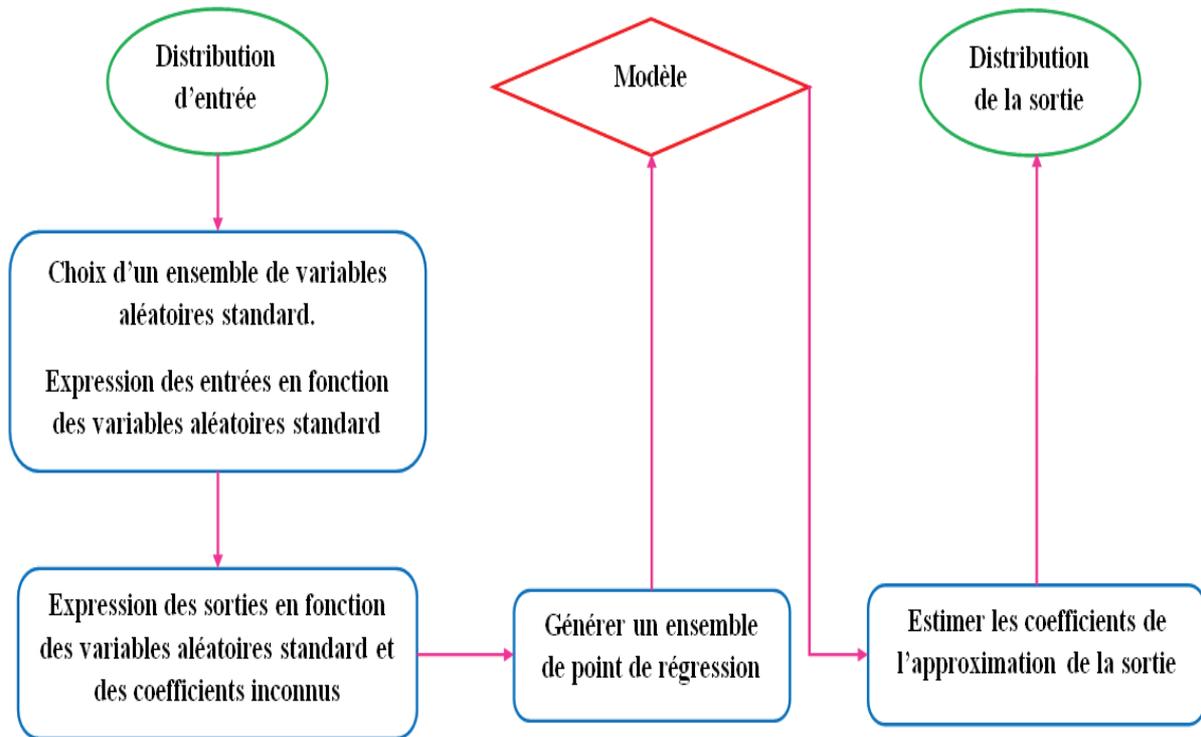


Figure A1.19 – Etapes de génération de la méthode de surfaces de réponse

4.5.2 Enjeux des surfaces de réponse en fiabilité

Les algorithmes du calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind β supposent que la fonction d'état $G(X)$ est disponible sous forme explicite dans l'espace des variables aléatoires de base X_i . Généralement, cette condition est satisfaite uniquement pour quelques problèmes mécaniques linéaires ou si des approximations sont faites. Dans les autres cas, les expressions analytiques des fonctions d'état limite en fonction des variables X_i sont indisponibles. La marge de sécurité ne peut donc être obtenue que sous forme implicite. C'est le cas en particulier des calculs aux éléments finis dans les cas de non linéarité géométrique ou mécanique. Comme on l'a mentionné, une alternative est la technique de simulation directe. Son défaut principal est le coût du calcul. Cela peut être réglé en procédant à une parallélisation des calculs, technique largement répandue aujourd'hui. Une autre alternative est la méthode d'échantillonnage par tirage d'importance, qui constitue une possibilité de réduire significativement le temps du

calcul. Elle est généralement utilisée pour comparer les résultats provenant d'autres méthodes. On peut aussi évaluer l'indice de fiabilité β_{HL} associé à différents types de fonctions d'état limite en utilisant les méthodes FORM et SORM dans une voie implicite [100] en la liant au modèle mécanique et en utilisant des dérivations numériques. Toutefois, d'une part à cause d'un grand nombre d'appels au modèle mécanique, le temps du calcul nécessaire pour cette méthode itérative est significatif (il est fonction du nombre de variables aléatoires) et d'autre part, les dérivations numériques peuvent amener à des erreurs appréciables. Une troisième voie est l'utilisation d'une approximation de la fonction d'état limite par surface de réponse. Il faut alors souligner l'importance du domaine de validité des SR et les risques associés à une extension de ce domaine. La figure (A1.20) indique notamment les perturbations engendrées par des SR aux tendances asymptotiques mal contrôlées.

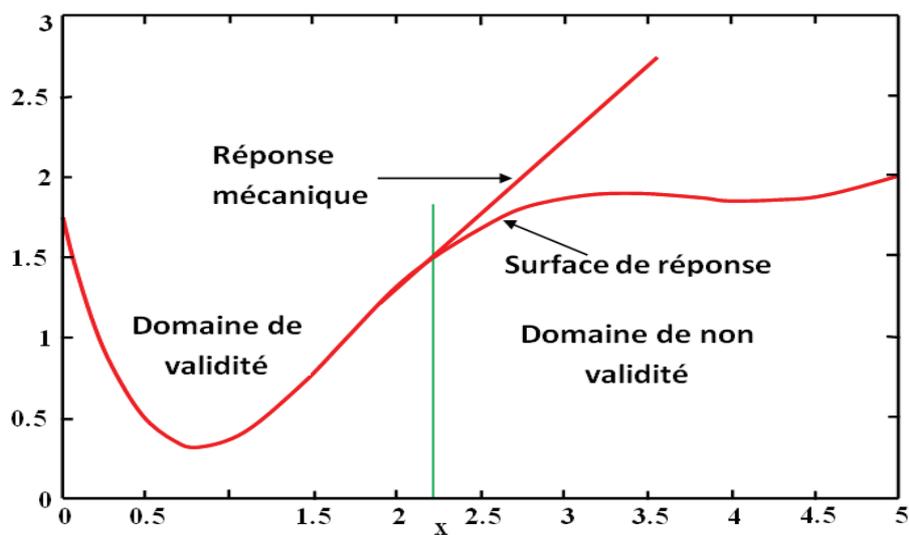


Figure A1.20 – Comparaison d'une réponse mécanique et de sa surface de réponse.

4.5.3 Stratégies de construction des surfaces de réponse

Les surfaces de réponse analytiques

L'illustration proposée ici concerne l'approximation par surface de réponse de la fonction d'état pour un calcul en fiabilité. Il faut savoir que d'autres utilisations sont possibles (approximation d'une réponse de type contrainte) et reposent sur une méthode de construction identique. La méthode des surfaces de réponse est basée sur le remplacement de la fonction d'état implicite par une fonction explicite construite à partir de valeurs numériques obtenues à partir de simulations sur des modèles mécaniques. Cela permet l'utilisation des algorithmes classiques pour

le calcul de l'indice de fiabilité β qui demande une forme explicite de la fonction d'état limite. Pour limiter le temps du calcul, on a recours à la méthode des surfaces de réponse quadratiques. Ici ψ est noté Q pour une fonction quadratique complète $Q(X)$, elle est adoptée comme base de l'approximation [18, 54, 62, 76, 81, 101], ect. Ce degré d'interpolation est reconnu comme le plus performant dans le couplage avec la méthode des éléments finis. Il permet également d'éviter les problèmes d'oscillation dans les approximations et le nombre de réalisations reste ainsi limité. Une première approximation de $Q(X)$ est construite pour un premier ensemble de réalisations, ce qui conduit à déterminer un premier point de défaillance le plus probable. Au voisinage de ce point une nouvelle approximation de $Q(X)$ est construite pour améliorer la position du point de conception. Un processus itératif est ainsi conduit pour contrôler et améliorer la précision des résultats. Ainsi, dans l'espace des n variables aléatoires X_i , une approximation de la fonction d'état limite $G(X)$ à la k^{me} itération possède la forme générale suivante :

$$G(X) \approx Q^k(X) = c + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} X_i X_j \quad (\text{III.48})$$

où c , a_i et b_{ij} sont des coefficients constants à déterminer. Parfois les termes croisés $b_{ij} X_i X_j$ ne sont pas pris en compte. La fonction d'approximation $Q^k(X)$, définie par (3.48), est prise comme une fonction d'interpolation de l'hypersurface de l'état limite $G(X_m)$ dans l'espace des n variables aléatoires. La détermination des coefficients nécessite un nombre minimum R_{min} de réalisations indépendantes :

$$R_{min} = L = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (\text{III.49})$$

où L est le nombre de coefficients de (III.49) à déterminer. Le nombre de réalisations R plus grand que L , associé à la méthode des moindres carrés, stabilise la solution du calcul des coefficients de l'expression de $Q^k(X)$. Ainsi,

$$\sum_{r=1}^R \left| q^k(x^r) - g(x^r) \right|^2 \quad (\text{III.50})$$

où $g(x^r)$ est une réalisation de la fonction d'état et $q^k(x^r)$ est son approximation. La figure (A1.21) illustre les points où les calculs sont réalisés dans un espace de dimension 2 des variables aléatoires de base. La minimisation de l'équation (1.9) mène à la solution du système suivant de L équations à L inconnues :

$$[P] \{C\} = \{H\} \quad (\text{III.51})$$

où $[P]$ est une fonction matrice des réalisations x^r , $\{C\}$ le vecteur des L coefficients inconnus $[a_i b_{ij} c]$ et $\{H\}$ une fonction vectorielle des réalisations $g(x^r)$ de la fonction d'état limite. La

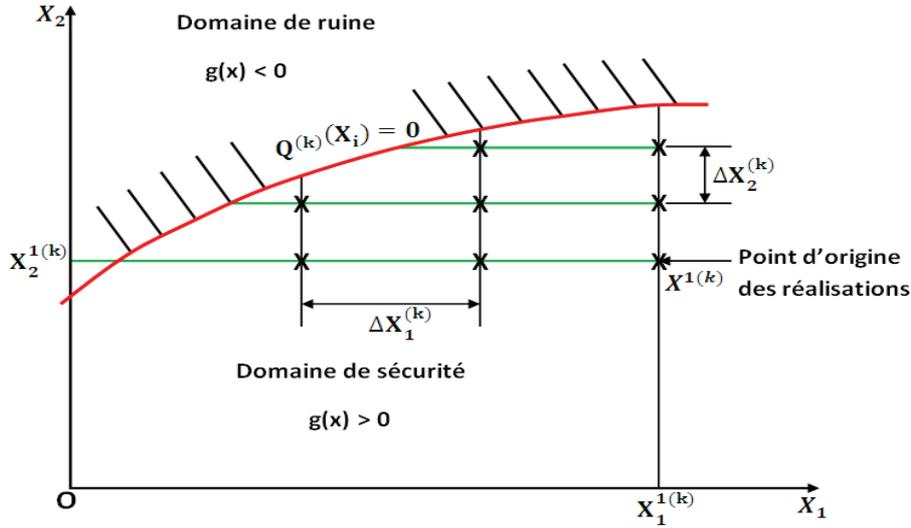


Figure A1.21 – Définition des points du calcul pour le cas de deux variables.

solution de l'équation (III.51) permet d'obtenir les coefficients de la fonction $q(X)$. L'équation cartésienne approximative de la fonction d'état limite est obtenue par l'intersection de l'hyper-surface $q(X)$ avec l'hyperplan des variables X_i ; elle est définie par $q(X) = 0$. La forme explicite de $q(X)$ peut être utilisée dans un algorithme classique pour calculer une approximation β^k et un point de défaillance le plus probable P^{*k} d'ordre k , de coordonnées x^{*k} . Pour construire le système linéaire à partir de (III.51), on considère la formulation suivante du vecteur transposé $\langle C \rangle$ des coefficients inconnus :

$$\langle C \rangle = \langle c, a_{i(i=1, \dots, n)}; b_{ii(i=1, \dots, n)}, b_{ij(i=1, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n)} \rangle \quad (\text{III.52})$$

et $\langle x^r \rangle$ le vecteur transposé des combinaisons des réalisations des variables aléatoires :

$$\langle x^r \rangle = \langle 1, x_{i(i=1, \dots, n)}; x_i^2 (i=1, \dots, n), x_i x_j (i=1, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n) \rangle \quad (\text{III.53})$$

L'expression vectorielle de $q(x^r)$ est donc :

$$q(x^r) = q^r = \langle x^r \rangle \{C\} \quad (\text{III.54})$$

La relation à minimiser par rapport à $\{C\}$ (équation (III.50)) est :

$$\sum_{r=1}^R (q^r - g^r)^2 \quad (\text{III.55})$$

La condition de minimisation est la suivante :

$$\sum_{r=1}^R (q^r - g^r) \left\langle \frac{r}{\partial \{C\}} \right\rangle d \{C\} = 0 \quad (\text{III.56})$$

Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{r=1}^R (\{x^r\} \langle x^r \rangle) \{C\} = \sum_{r=1}^R (g^r \{x^r\}) \quad (\text{III.57})$$

La sélection de l'ensemble des points du calcul x^r doit être choisie soigneusement pour permettre une convergence rapide. L'itération k commence avec un nouveau système de points x^k sélectionné dans le domaine de sécurité calculé lors de l'itération précédente ($k - 1$), mais trié de telle manière qu'il reste dans le domaine de sécurité de $G(X)$ (défini par $G(X) > 0$). Pour la première itération ($k = 1$) le point de départ $x^{1(1)}$ peut être pris comme le point correspondant à \bar{X} , la valeur moyenne de X , seul point connu à priori est localisé à distance raisonnable de la surface de défaillance, dans le domaine de sécurité. Ainsi, l'ensemble des points x^{rk} est déterminé à partir d'incrémentés réalisés par rapport à x^{1k} selon différentes directions. Les coordonnées des différents points sont obtenues par la relation suivante (avec $r = 2, \dots, R$) :

$$x_i^{rk} = \lambda d_{ij}^k \Delta x_j^k + x_i^{1k} \quad (\text{III.58})$$

où λ est un entier et d_{ij}^k est une matrice diagonale définissant les directions des pas Δx_j^k (figure A1.21), et ses valeurs sont telles que :

- si $i \neq j : d_{ij} = 0$
- si $\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i} > 0 : d_{ij} = -1$ ou 0
- si $\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_i} < 0 : d_{ij} = +1$ ou 0

où le choix de d_{ii} entre -1 et 0 ou 0 et $+1$ est conditionné par le fait que les incréments Δx_j^k doivent être dirigés suivant le sens décroissant des réalisations $g(x_j)$. Des considérations physiques et réalistes à propos de la nature de la variable aléatoire X_i permettent souvent la connaissance du signe du gradient a priori.

– λ est un entier lié au nombre de points R : $1 < \lambda < 10$

– pour une itération k , le point de départ est choisi proche du point de défaillance le plus probable calculé pour l'itération $(k-1)$:

$$x_i^{1k} = (1 - \mu)x_i^{1(k-1)} + \mu x_i^{*(k-1)}; \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (\text{III.59})$$

– Δx_i est l'incrément, choisi égal à $v x^{1(1)}$ quand $k = 1$, avec $0 < v < 1$ et, généralement, $v = 0, 1$.

Pour l'itération d'ordre k , il devient :

$$\Delta x_i^k = v(x_i^{*(k-1)} - x_i^{1k}); \quad (0 \leq v \leq 1) \quad (\text{III.60})$$

La répétition de cette procédure itérative permet une bonne approximation de la solution du problème de fiabilité.

Les surfaces de réponse analytiques par chaos polynômial

Une approche basée sur la méthode du chaos polynômial est présentée dans [82, 86], son intérêt réside dans la décomposition spectrale du champ aléatoire. Cela permet de prendre en compte la variabilité spatiale à travers ses modes. L'orthogonalité de cette méthode simplifie le calcul des moments statistiques. Le chaos polynômial $\Gamma_p(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_p(\omega), \dots)$ d'ordre p est l'ensemble des polynômes formés par une combinaison d'une infinité de variables gaussiennes indépendantes $\xi_j(\omega)$ à une puissance n'excédant pas p . Toute réponse $\psi(\omega)$ de l'espace Ω des variables aléatoires peut s'exprimer par la relation :

$$\psi(\omega) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Gamma_1(\xi_i(\omega)) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i a_{ij} \Gamma_2(\xi_i(\omega), \xi_j(\omega)) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j a_{ijk} \Gamma_3(\xi_i(\omega), \xi_j(\omega), \xi_k(\omega)) + \dots \quad (\text{III.61})$$

La réponse $\psi(\omega)$ peut s'écrire sous une forme condensée pour $i = 1, \dots, n$:

$$\psi(\omega) = \sum_{j=0}^{J=J(n,p)} \psi_j[\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)] \quad (\text{III.62})$$

Les développements détaillés de la méthode sont présentés dans [58]. Cette méthode est de plus en plus utilisée et généralisée au cas de variables non gaussiennes. Une augmentation du nombre de variables et du degré des polynômes conduit à une amélioration de la qualité de la réponse. Une mesure de cette qualité doit alors être proposée. Toutefois son inconvénient majeur réside dans le fait que l'on perd les variables aléatoires d'entrée au profit d'un ensemble de variables aléatoires sans signification physique. Les études de sensibilité et d'incertitudes, si utiles au calcul de fiabilité, sont alors beaucoup plus délicates.

Les surfaces de réponse physiques

La construction d'une surface de réponse n'est pas unique et le choix de la solution retenue résulte d'une optimisation sous contraintes. Les critères considérés comme majeurs dans le cas de constructions de surfaces de réponse en mécanique sont les suivants :

respect du sens physique ;

effets des distributions ;

réduction du niveau de complexité et adaptation au calcul numérique.

La compréhension du sens physique sous-jacent au phénomène étudié est fondamentale pour le choix de l'ensemble des variables stimuli et de la fonction d'approximation. Ce critère peut être particulièrement bien respecté si l'on utilise une formulation de la fonction de réponse basée sur des lois déterministes. La variabilité intrinsèque s'exprime par l'introduction de variables aléatoires et l'incertitude sur le modèle est prise en compte par des paramètres aléatoires. L'analyse de sensibilité, permettant de déterminer le poids des variables aléatoires de base sur la variance de la réponse, est menée en utilisant deux méthodes : méthode de Monte Carlo et analyse différentielle utilisée généralement pour des structures peu complexes pour lesquelles on a des surfaces de réponse explicites des variables de base. L'analyse de sensibilité peut conduire à réduire le nombre de variables et d'affiner la modélisation de certaines d'entre-elles en concentrant les coûts d'investigation.

Chapitre IV

Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste

1 Introduction

La théorie des probabilités est utilisée en Mécanique depuis plusieurs décennies. Elle est aujourd'hui de plus en plus utilisée pour modéliser, d'une part les phénomènes aléatoires (couplage, turbulence, onde sismique, houle, charges mobiles, etc) qui interviennent comme excitation des systèmes mécaniques, et d'autre part, les milieux aléatoires (matériaux composites, bétons, sols, structures multicouches, etc). L'approche probabiliste prend en compte les incertitudes aléatoires sur les données de ces modèles en vue d'améliorer la robustesse des prévisions et de l'optimisation. Elle permet aussi d'effectuer des études de sensibilité en prenant en compte tout le domaine de variation de l'ensemble des paramètres influents en un seul calcul, ce qui n'est pas le cas de l'approche déterministe.

Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressés particulièrement à la modélisation et simulation probabiliste des problèmes d'interaction fluide-structure mécanique notamment les problèmes vibro-acoustiques. Les difficultés principales associées à ce problème proviennent des conditions aux limites à l'interface. De plus, les non-linéarités physiques s'ajoutent aux non-linéarités géométriques et matérielles, augmentant ainsi la complexité du problème à résoudre. Les conditions aux limites à l'interface, la géométrie des deux domaines fluide et solide, les propriétés des matériaux ainsi que les sollicitations constituent des paramètres de grand intérêt dans l'établissement d'un modèle probabiliste d'interaction fluide -structure.

On note, dans le cas de ce problème, la présence de plusieurs paramètres à caractères aléatoires et qui présentent souvent une grande variabilité. On entend par grandes variabilités, des variations excédant (10 pour cent) de la valeur moyenne. Des valeurs de variabilité supérieures à cette limite mènent inévitablement à une perte de précision importante [123]. Ce caractère aléatoire est particulièrement dû à la complexité des différents phénomènes physiques et/ou géométriques intervenant dans le problème du couplage vibro-acoustique. Une meilleure maîtrise de ces paramètres est ainsi basée sur l'utilisation des méthodes stochastiques dont l'objectif principal est d'améliorer la qualité ainsi que la réinterprétation des résultats issus des simulations. Pour ce faire, une bonne compréhension et une formulation des principaux phénomènes intervenant dans le problème du couplage sont nécessaires.

Toutes les méthodes du calcul font généralement appel à un solveur numérique (le code éléments finis) pour obtenir une évaluation de la réponse, ou à un substitut adéquat de la fonction de performance. Dans le cas de structures complexes, la fonction de performance est définie de manière implicite par l'intermédiaire d'un code éléments finis. Dans ce cas, il y a un intérêt non négligeable à approximer de manière simple mais cependant précise la fonction d'état-limite, afin d'éviter un nombre d'appels trop important au code du calcul. La construction d'un approximant de la fonction d'état-limite constitue, ces dernières années, une des voies de développement des méthodes de la fiabilité. Les méthodes telles que les méthodes approchées FORM et SORM relèvent de cette optique. D'autres méthodes basées sur ce même principe sont également utilisées par les équipes de recherche, par exemple des méthodes utilisant les techniques et outils issus de l'Apprentissage Statistique (Statistical Learning) tels que les réseaux de neurones (Neural Networks), ou encore plus récemment, les machines à vecteurs supports (Support Vector Machine - SVM).

Ce travail s'attache à trois objectifs principaux. Le premier consiste à mener une étude aléatoire du problème vibro-acoustique à l'aide du code du calcul commercial ANSYS ; cette étude a la particularité de prendre en considération l'aspect aléatoire des paramètres qui interviennent dans les équations régissant le problème. L'utilisation d'un outil informatique générique, sera notre deuxième objectif. Cette tâche consiste à intégrer cet outil dans le noyau du calcul par éléments finis à l'aide de l'utilisation d'une interface entre le logiciel MATLAB et le code du calcul ANSYS. Quant au troisième objectif, il vise l'analyse de la fiabilité et la robustesse des méthodes utilisées. Plus particulièrement, il consiste à quantifier l'influence de l'incertitude des variables aléatoires sur les prédictions des résultats sélectionnés.

Dans le système de conception probabiliste, Nous avons sélectionné deux méthodes principales, la simulation de Monte-Carlo et la méthode de la surface de réponse, proposées par le programme ANSYS qui peuvent être utilisés pour améliorer l'efficacité du processus de concep-

tion probabiliste. Pour les simulations de Monte Carlo, avec ANSYS nous avons choisi la méthode d'échantillonnage hypercube latin(Latin Hypercube Sampling LHS). Cette méthode est une technique plus avancée et efficace pour les méthodes de simulation de Monte Carlo. La seule différence entre LHS et la technique d'échantillonnage directe de Monte Carlo est que LHS a un échantillon "mémoire", ce qui signifie qu'il évite de répéter les échantillons qui ont été évalués avant (il évite le regroupement des échantillons). Elle oblige aussi les queues d'une distribution à participer au processus d'échantillonnage. Généralement, la technique d'échantillonnage hypercube latin nécessite moins de 20 pour cent à 40 pour cent des boucles de simulations que la technique de simulation de Monte Carlo directe pour offrir les mêmes résultats avec la même précision. Pour la méthode de surface de réponse, nous avons choisi la méthode "Design Composite centrale(CCD)", car elle permet de maintenir le nombre de boucles de simulation raisonnable, et garantit une précision suffisante pour l'évaluation des coefficients des termes du second ordre.

2 Description de l’algorithme proposé

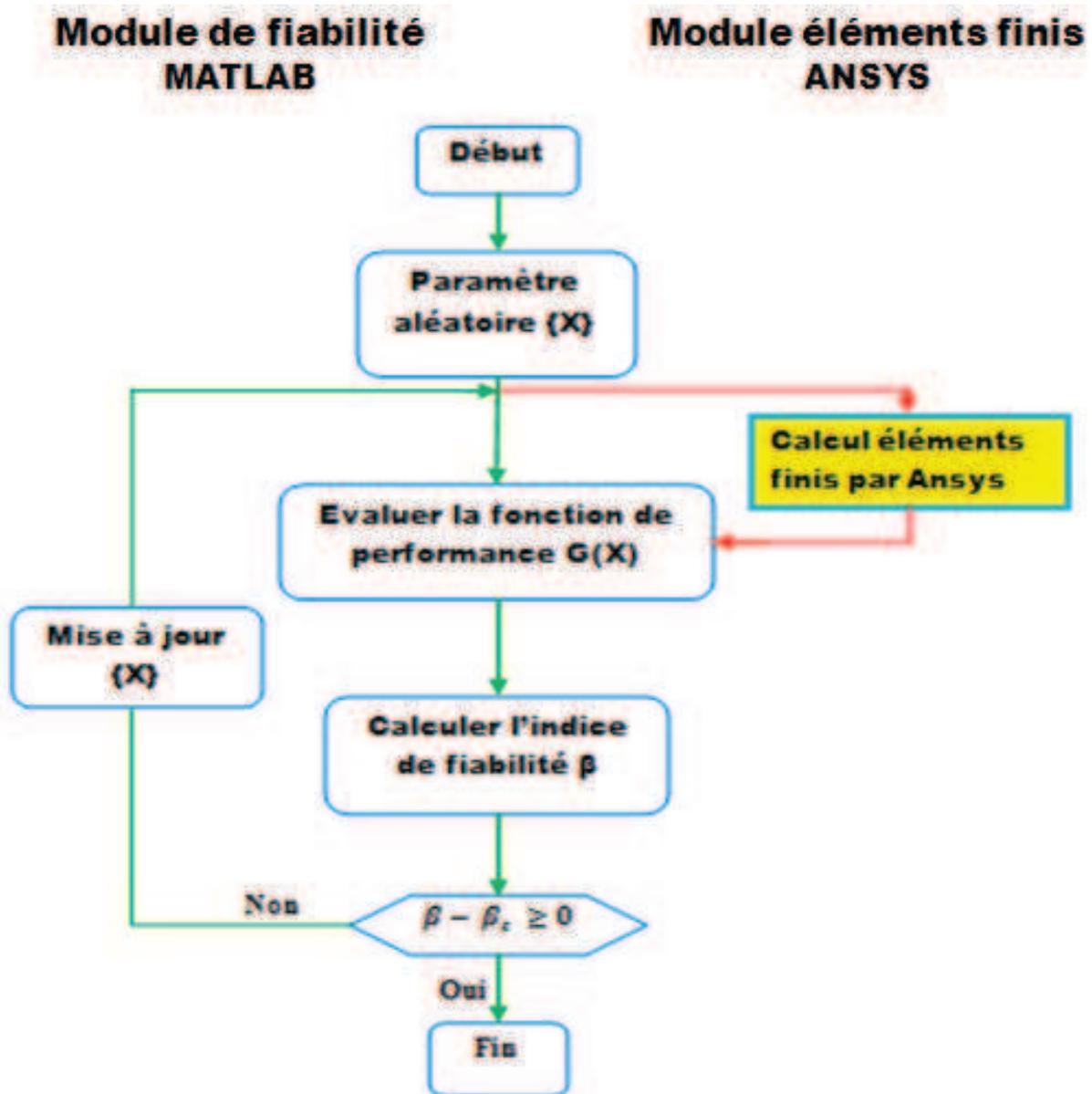


Figure A1.1 – Algorithme de corrélation entre Matlab et Ansys.

Dans le schéma du couplage mécano-fiabiliste, un protocole de dialogue doit se mettre en place entre le code éléments finis et le code fiabiliste. Le pilotage doit se faire par le module fiabiliste. A chaque itération de recherche du point de conception, le transfert d’informations est nécessaire entre les deux modules : le code fiabiliste transmet au code éléments finis les

réalisations des variables aléatoires avec lesquelles l'analyse mécanique doit se faire et à la fin du calcul éléments finis, la réponse est intégrée dans le code fiabiliste pour le calcul de la fonction de performance. Cette interactivité est indispensable pour permettre au module fiabiliste de définir sa stratégie de recherche de l'indice β . Dans cette étude, nous avons utilisé un couplage externe avec un code éléments finis commercial ANSYS ; le protocole de dialogue est automatisé grâce à un code élaboré sous MATLAB.

La méthodologie d'analyse de fiabilité utilisée dans notre étude numérique est d'intégrer un ensemble d'outils d'analyse de fiabilité basé sur les méthodes FORM et SORM développées sous MATLAB et ANSYS appliquée à un ensemble de cas académiques pour bien comprendre le mécanisme et par la suite elle sera appliquée à un cas industriel.

Pour comprendre la terminologie impliqués dans la conception probabiliste et fiabiliste, Nous réalisons une conception probabiliste (PDS) des exemples étudiés précédemment dans le cas déterministe pour voir l'influence de l'incertitude sur les résultats avec la méthode de Monte Carlo et celle de la surface de réponse, le problème est donc trouvons la dispersion des fréquences propres de la structure en considérant son module d'Young et sa densités comme variables aléatoires dans le cas de la structure seule, et le module d'Young , la densité de la structure et la densité du fluide comme variables aléatoires dans le cas de la structure immergée dans le fluide.

3 Plaque 2D sèche et immergée

Cette étude numérique concerne une plaque 2D immergée dans un fluide compressible qui a été modélisé en utilisant MATLAB. Cette application vise à illustrer la méthodologie proposée [89, 91].

TABLE A1.1 – Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques de la plaque 2D.

Module d'Young	Coefficient de Poisson	Densité	Longueur	Largeur
2.1×10^{11}	0.3	7800	0.5	0.5

TABLE A1.2 – Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques du fluide 2D

Densité	Vitesse du son	Longueur	Largeur
1000	1500	1.5	1

Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste

Pour le calcul éléments finis, le fluide et la plaque ont été modélisé par des éléments rectangulaires à quatre nœuds, FLUID29 pour le fluide et PLANE42 pour la plaque. Les résultats obtenus dans les deux cas (sèche et immergée) pour le cas déterministe sont illustrés dans les tableau (A1.1 et A1.2).

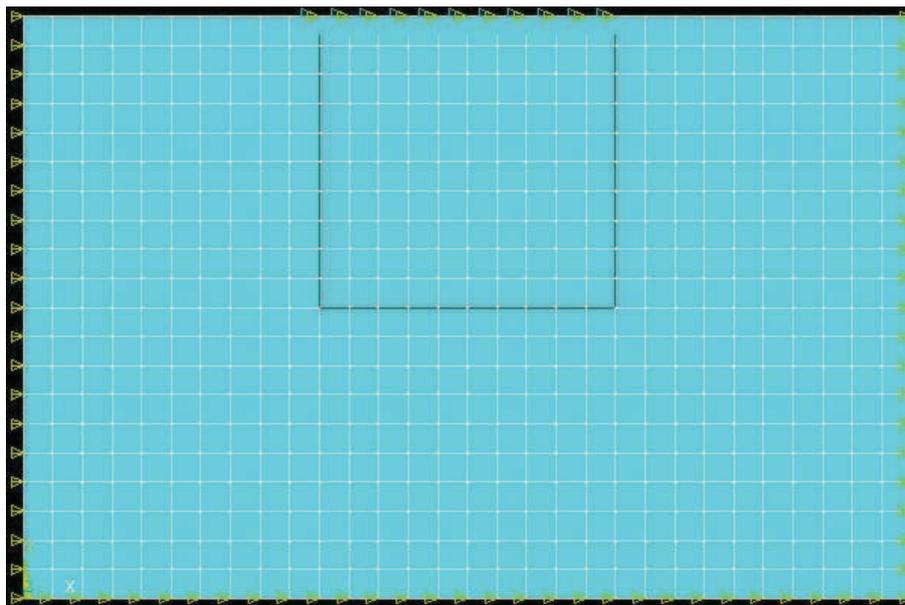


Figure A1.2 – Interface fluide structure

3.1 Calcul probabiliste

les variables aléatoires choisies sont regroupés dans le tableau (A1.3) :

TABLE A1.3 – les variables aléatoires

Paramètres	Moyennes	Ecart-type	Distribution
module d'Young	2.1×10^{11}	0.021×10^{11} m	gaussienne
densité de la structure	7800	786	uniforme
densité du fluide	1000	100	uniforme

Le calcul stochastique a été réalisé en utilisant un code élaboré avec MATLAB et le système de conception probabiliste de ANSYS basé sur un calcul avec simulation de Monte Carlo (pour 100 échantillons) et la méthode de surface de réponse (pour 40 échantillons). Les tableaux (A1.4 et A1.5) regroupent les résultats trouvés :

TABLE A1.4 – Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 2D sèche

Mode	Cas déterministe	M C	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	1122	1142.86	139.48	1127.95	142.47
R_2	2743.9	2794.87	367.22	2758.39	372.324
R_3	3016	3072.01	403.26	3031.92	411.49
R_4	4850.1	4940.16	651.63	4875.69	663.07
R_5	5108.6	5203.41	695.69	5135.505	709.53

FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
1125.86	148.72	1125.22	156.9
2755.01	365.94	2755.01	383.71
3026.83	418.92	3026.31	421.76
4870.5	659.35	4870.44	678.24
5129.41	687.71	5129.17	692.51

TABLE A1.5 – Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 2D immergée

Mode	Cas déterministe	M C	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	890.12	888.50	10.68	891.45	10.79
R_2	998.16	992.84	17.47	896.78	17.84
R_3	1312.9	1211.35	150.91	1297.91	164.23
R_4	1595.7	1496.06	211.32	1537.82	223.44
R_5	1930.9	1791.68	261.26	1883.94	273.51

FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
890.11	11.23	890.11	11.41
998.15	18.78	998.15	19.17
1312.86	194.89	1312.86	217.12
1595.66	238.62	1595.66	243.08
1930.86	294.81	1930.86	301.18

Remarque

La méthode de la surface de réponse (RSM) avait donné des meilleurs résultats au niveau du temps du calcul que celle de Monte-Carlo (MC).

3.2 Calcul de fiabilité

Pour l'analyse de fiabilité, Comme il est difficile de trouver une fonction d'état limite explicite, on a proposé une fonction d'état limite implicite unique sur la première fréquence de la structure (R_1) pour les deux cas sèche et immergée.

Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste

La fonction d'état limite pour la structure 2D sèche est :

$$G(E, \rho_s) = R_1 - R_0 \quad \text{avec} \quad R_0 = 1123.5Hz \quad (\text{IV.1})$$

La fonction d'état limite pour la structure 2D immergée est :

$$G(E, \rho_s, \rho_f) = R_1 - R_0 \quad \text{avec} \quad R_0 = 892Hz \quad (\text{IV.2})$$

Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la structure découplée et couplée pour cet exemple sont présentés dans le tableau (A1.6).

TABLE A1.6 – Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 2D sèche

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (pa)	$0.5 \cdot 10^{11}$	$0.5 \cdot 10^{11}$
Densité de la structure (Kg/m^3)	7780	7780
Indice de fiabilité β	3.223	3.487
Probabilité pf	0.03	0.008
Fiabilité	99.970	99.992

TABLE A1.7 – Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 2D immergée

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (pa)	$0.49 \cdot 10^{11}$	$0.49 \cdot 10^{11}$
Densité de la structure (Kg/m^3)	7560	7560
Densité du fluide (Kg/m^3)	920	920
Indice de fiabilité β	3.788	3.981
Probabilité pf	0.88	0.07
Fiabilité	99.12	99.93

Remarque

D'après les résultats obtenus à partir des méthodes FORM et SORM. De toute évidence, la deuxième présente des meilleurs résultats. Ces résultats sont jugés satisfaisants et démontrent l'applicabilité des techniques proposés pour résoudre les problèmes de fiabilité pour les structures immergées.

4 Plaque 3D sèche et immergée

Cette étude numérique concerne une plaque 3D immergée dans un fluide compressible modélisée par MATLAB et ANSYS. Cette application vise à illustrer la méthodologie proposée en trois dimension.

TABLE A1.8 – Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques de la plaque 3D

Module d'Young	Coefficient de Poisson	Densité	Longueur	Largeur	Hauteur
2.1×10^{11}	0.3	7800	0.096	0.072	0.001

TABLE A1.9 – Caractéristiques Mécaniques et dimensions géométriques du fluide

Densité	Vitesse du son	Longueur	Largeur	Hauteur
1000	1500	0.285	0.14	0.19

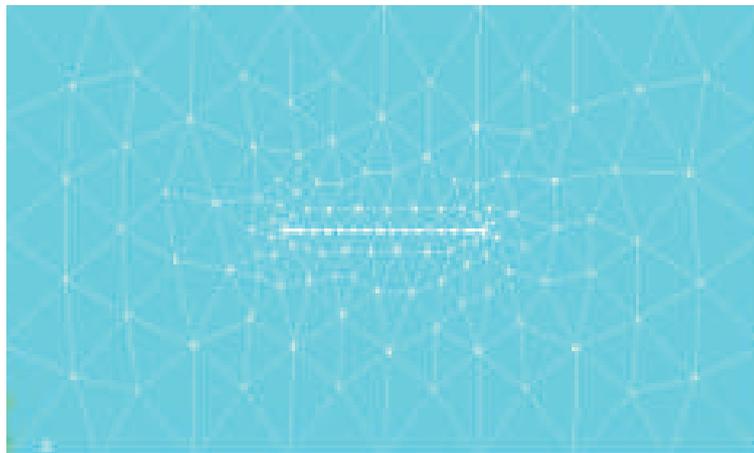


Figure A1.3 – Discretisation de la plaque 3D immergée

4.1 Calcul probabiliste

les variables aléatoires choisies sont regroupés dans le tableau A1.10. Le calcul stochastique a été réalisé en utilisant un code élaboré avec MATLAB et le système de conception probabiliste de ANSYS basé sur un calcul avec simulation de Monte Carlo et la méthode de surface de réponse. Les tableaux (A1.11 et A1.12) regroupent les résultats trouvés :

Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste

TABLE A1.10 – Variables aléatoires

Paramètres	Moyennes	Ecart-type	Distribution
Module d'Young	2.1×10^{11}	0.08×10^{11}	gaussienne
Densité de la structure	6450	345	uniforme
Densité du fluide	1000	150	uniforme

TABLE A1.11 – Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 3D sèche

Mode	Cas déterministe	M C	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	90.12	90.22	8.59	90.64	9.72
R_2	279.64	275.47	12.63	278.85	13.92
R_3	552.38	550.30	14.91	549.53	15.41
R_4	960.93	951.18	17.59	948.36	18.81
R_5	1162.74	1147.67	24.51	1144.05	25.27

FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
91.15	9.85	91.15	10.13
275.01	13.98	275.01	14.84
552.43	16.77	552	17.89
954.88	18.44	954.88	20.35
1147.67	28.56	1147.67	30.23

TABLE A1.12 – Moyennes et écarts-types des fréquences pour la plaque 3D immergée

Mode	Cas déterministe	M C	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	45.56	43.61	5.33	41.53	5.76
R_2	147.63	141.16	8.27	140.48	8.49
R_3	277.25	273.11	9.97	272.29	10.86
R_4	488.74	485.37	14.49	482.52	15.45
R_5	694.14	691.55	19.27	689.28	20.66

FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
44.34	6.88	44.341	6.23
142.16	9.98	142.16	9.44
273.37	11.14	273.37	10.85
484.61	14.78	484.61	14.93
690.77	17.02	690.77	18.65

4.2 Calcul de fiabilité

Pour l'étude de fiabilité on a choisi la même fonction d'état limite (IV.1 et IV.2) respectivement pour le cas sèche et immergée. Avec $R_0 = 90.12Hz$ pour la structure sèche et $R_0 = 45.56Hz$ pour la structure immergée. Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la structure découplée et couplée pour cet exemple sont présentés dans les tableaux (A1.13 et A1.14).

TABLE A1.13 – Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 3D sèche

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (pa)	0.1×10^{11}	0.1×10^{11}
Densité de la structure (Kg/m^3)	6458	6458
Indice de fiabilité β	3.02	3.23
Probabilité pf	0.065	0.011

TABLE A1.14 – Les paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans la plaque 3D immergée

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (pa)	9.88×10^{10}	9.88×10^{10}
Densité de la structure (Kg/m^3)	5830	5830
Densité du fluide (Kg/m^3)	876	876
Indice de fiabilité β	2.726	2.984
Probabilité pf	0.91	0.085

Remarque

D'après les résultats obtenus à partir des méthodes FORM et SORM. De toute évidence, la deuxième présente des meilleurs résultats. Ces résultats sont jugés satisfaisants et démontrent l'applicabilité des techniques proposées pour résoudre les problèmes de fiabilité pour les structures immergées.

5 Bloc 3D immergé dans l'eau

Nous continuons dans cet exemple la validation de la méthode proposée en 3D en proposant une méthode de corrélation ANSYS/MATLAB dans le cadre d'une analyse modale d'un solide 3D immergé dans l'eau [90].

Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste

Les propriétés géométriques et mécaniques du système étudié sont les suivantes :

– Pour la structure : densité = 7860 kg.m^{-3} ; module d'Young = $2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; coefficient de Poisson = 0.3 ; longueur = 2 m ; largeur = 1 m ; hauteur = 0.2 m.

– Pour le fluide : densité = 1000 kg.m^{-3} ; vitesse du son = 1500 m.s^{-1} ; longueur = 20 m ; largeur = 10 m ; hauteur = 10 m.

La figure ci-dessous montre le modèle éléments finis de la structure et la cavité acoustique étudiées,

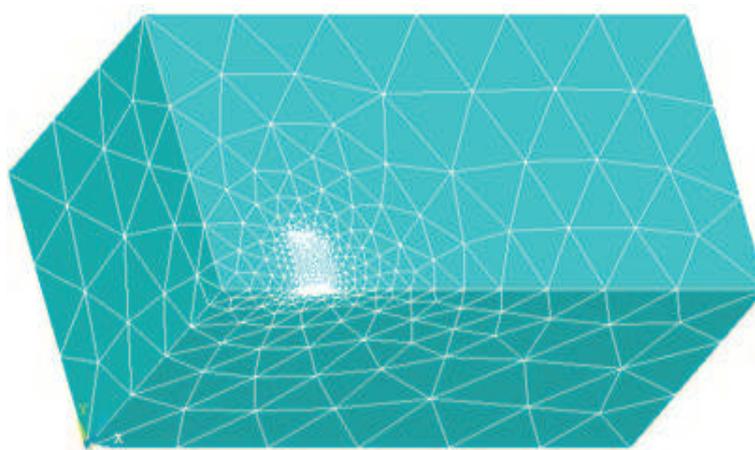


Figure A1.4 – Modèle élément fini du solide 3D couplé avec la cavité acoustique

5.1 Calcul probabiliste

Le choix des variables aléatoires est basé sur les calculs déterministes, et sont mentionnés dans le tableau (A1.15).

TABLE A1.15 – Moyennes des paramètres et leurs écart-types et les lois de distribution pour le solide 3D

Paramètres	Moyennes	Ecart-type	Distribution
Module d'Young (Pa)	2.1×10^{11}	0.05×10^{11}	gaussienne
Densité de la structure (Kg/m^3)	7860	250	uniforme
Densité du fluide (Kg/m^3)	1000	40	uniforme

Le tableau (A1.16) illustre les valeurs des cinq premières fréquences propres par les différentes méthodes du calcul déterministe et stochastique :

TABLE A1.16 – Valeurs moyennes et les écart-types des cinq premières fréquences propres du solide 3D immergé

Mode	Déterministe	M C	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	23.39	21.21	2.16	22.14	2.3
R_2	67.64	70.51	3.47	68.13	4.1
R_3	91.62	90.98	5.06	91.01	6.55
R_4	131.76	129.23	6.88	130.87	8.17
R_5	210.45	215.43	9.54	211.99	11.8

FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
22.78	2.23	22.78	2.63
67.04	3.15	67.04	3.24
91.11	4.43	91.11	4.15
131.52	5.98	131.52	6.07
212.62	10.22	212.62	10.68

5.2 Calcul de fiabilité

Dans cette étude on considère toujours la même fonction d'état limite implicite(IV.2) basée sur la première fréquence propre R_1 du système couplé avec $R_0 = 24Hz$.

Le tableau (A1.17) montre la comparaison des résultats trouvés par les deux approches FORM et SORM. Ces résultats sont considérés satisfaisants et montrent l'efficacité de la technique proposée pour la résolution des problèmes de fiabilité pour les systèmes vibro-acoustiques.

TABLE A1.17 – Les paramètres de conception et leurs moments statistiques considérés dans le solide 3D immergé

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (Pa)	2.165×10^{11}	2.165×10^{11}
Densité de la structure (Kg/m^3)	7389.76	7389.76
Densité du fluide (Kg/m^3)	947.93	947.93
Indice de fiabilité β	2.83	3.41
Probabilité $P_f(0/0)$	0.92	0.13

6 Hélice du bateau à quatre pales

Suite à l'étude déterministe de l'hélice du bateau en air et en eau [91, 92]. Nous avons remarqué une variation des résultats par rapport aux résultats expérimentaux. Pour remédier à ce

problème nous avons pensé à étendre la présente étude à une étude stochastique et fiabiliste pour tenir compte des incertitudes des variables d'entrées. La figure (A1.5) présente le modèle éléments finis de la structure. Le fluide et l'hélice, sont définis par leurs propriétés illustrées dans les tableaux (A1.18 et A1.19). Pour vérifier la fiabilité de cette structure la première fréquence propre R_1 est analysée. L'objet de cette étude est la démonstration de l'intérêt de la méthode proposée pour les structures complexes (hélice de bateau) [91, 92]. Les développements numériques ont été réalisés sous MATLAB et ANSYS. Les méthodes d'apprentissage sont validées par rapport à différents critères : La valeur de la probabilité de défaillance et le calcul de l'indice de fiabilité. La méthode de réduction par synthèse modale proposée est appliquée à un modèle simplifié de l'hélice constitué de quatre sous-structures et la cavité acoustique est décomposée en quatre sous-domaines contenant chacune approximativement le même nombre d'éléments voir figure (A1.5). Les calculs numériques déterministes sont effectués sur la structure entière et puis sur une seule pale et sont comparés aux résultats expérimentaux [20, 128].

TABLE A1.18 – Caractéristiques Mécaniques de l'hélice

Module d'Young	Coefficient de Poisson	Densité
9.6×10^{10}	0.3	9200

TABLE A1.19 – Caractéristiques Mécaniques du fluide

Densité	Vitesse du son
1000	1500



Figure A1.5 – Modèle élément finis de l'hélice

6.1 Calcul probabiliste

La mise en évidence de l'importante dispersion des propriétés des matériaux des problèmes vibro-acoustiques nous a incité à se tourner vers les méthodes stochastiques pour les analyser. Devant la complexité du problème, nous avons choisi de ne prendre en compte dans ce travail que des sources d'incertitudes liées aux propriétés des matériaux et nous allons nous limiter à l'étude d'une seule pale en air et en eau. De fait, les aléas concernant les autres éléments de la structure (géométrie, conditions aux limites ou comportement mécanique) n'ont pas été pris en compte dans une optique de simplification. Le choix des écarts types et des moyennes des variables aléatoires choisies a été basé sur les analyses déterministes et expérimentales [20, 91, 128]. Les écarts type considérés ont été également ajustés afin de maintenir des plages réalistes des matériaux en cause.

Le tableau (A1.20) contient les moyennes des variables aléatoires et leurs écarts type utilisées dans cette étude et les lois de distributions choisies.

TABLE A1.20 – Variables aléatoires

Paramètres	Moyennes	Ecart-type	Distribution
Module d'Young	9.6×10^{10}	0.5×10^{10} m	gaussienne
Densité de la structure	9200	2669.6	uniforme
Densité du fluide	1000	295.72	uniforme

Le calcul stochastique a été réalisé en utilisant un code élaboré avec MATLAB et le système de conception probabiliste de ANSYS basé sur un calcul avec simulation de Monte Carlo (pour 100 échantillons) et la méthode de surface de réponse (pour 40 échantillons). Les tableaux (A1.21, A1.23, A1.26 et A1.24) regroupent les résultats trouvés :

TABLE A1.21 – Moyennes et écarts-types des fréquences de l'hélice en air

Mode	Déterministe	MC	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	74.863	72.465	12.503	73.583	15.28
R_2	119.82	115.88	23.56	118.58	28.793
R_3	205.58	199.60	37.119	194.70	45.364

TABLE A1.22 – Modes propres de l’hélice en air calculé par FORM et SORM

Mode	FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
R_1	70.35	3.44	69.87	3.18
R_2	116.44	5.78	115.63	5.36
R_3	201.24	7.39	201.09	7.21

TABLE A1.23 – Moyennes et écarts-types des fréquences de l’hélice en eau

Mode	Déterministe	MC	Ecart-type	RSM	Ecart-type
R_1	37.71	35.671	5.62	34.22	7.15
R_2	67.54	66.34	11.16	67.45	14.462
R_3	126.32	124.12	25.87	121.93	27.738

TABLE A1.24 – Modes propres de l’hélice en eau calculé par FORM et SORM

Mode	FORM	Ecart-type	SORM	Ecart-type
R_1	36.56	1.48	35.671	1.56
R_2	65.73	3.65	65.58	3.83
R_3	123.49	4.18	123.24	4.21

Une étude de sensibilité des fréquences propres par rapport à chacune des variables aléatoires est effectuée. La simulation de Monte-Carlo est utilisée dans cet objectif. L’étude de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo consiste à analyser les statistiques d’une réponse en fixant alternativement une des variables à une valeur déterministe, en général sa moyenne. On construit alors les échantillons pour la simulation pour toutes les autres variables aléatoires. Pour des réponses non gaussiennes et un transfert non linéaire, une bonne description nécessite en général un nombre de réalisations élevé. La méthode hypercube latin [67, 121] nous permet de nous limiter ici à un hypercube d’arête 1000. L’influence de la variable prise comme déterministe sur la variation de la réponse est obtenue en comparant son coefficient de variation à celui obtenu en prenant toutes les variables aléatoires. Il est à noter que cette méthode induit en général un biais sur l’estimation de l’espérance de la réponse.

Du fait que les cinq premières fréquences propres varient de la même manière en fonction du module d’Young et la densité, on montre seulement la sensibilité de la première fréquence sur la quelle une étude de fiabilité sera menée par la suite. Les diagrammes (1) et (2) illustrent la sensibilité de la première fréquence propre en fonction du module d’Young et de la densité.

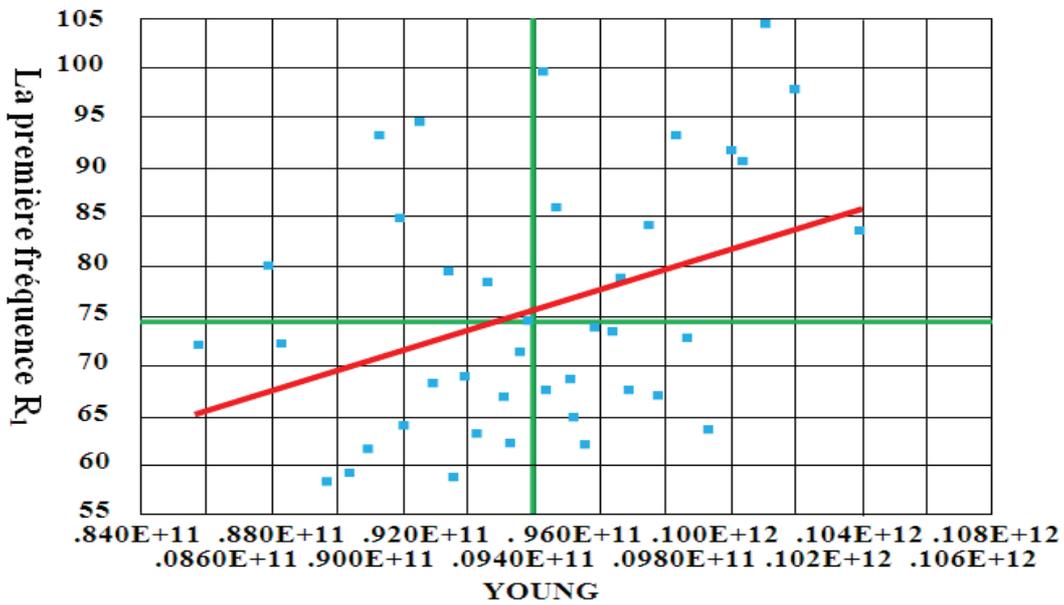


Figure A1.6 – Sensibilité de la première fréquence en fonction du module d’Young

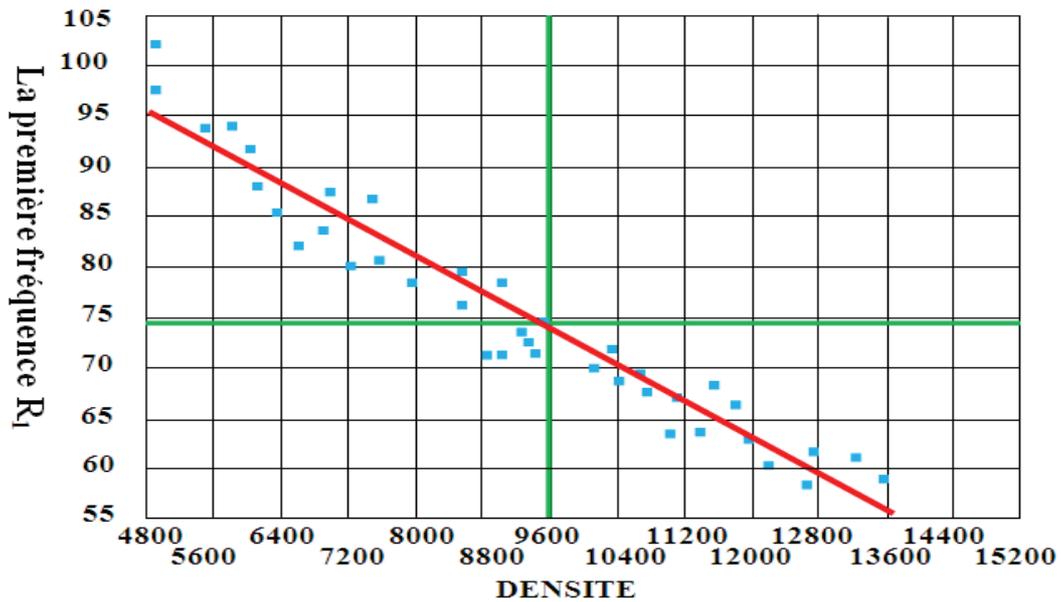


Figure A1.7 – Sensibilité de la première fréquence en fonction de la densité

6.2 Calcul de fiabilité

Le code du calcul par éléments finis ANSYS présente des modules probabilistes mais il ne permet cependant pas un accès à ces fichiers sources, ce qui représente un handicap majeur

Etude numérique du couplage mécano-fiabiliste

dans la perspective d'implémentation du modèle couplé. Afin de pallier cette difficulté, nous avons choisi de mettre en place un couplage direct entre un code fiabiliste élaboré sous MATLAB et le code par éléments finis ANSYS. Ces deux codes répondent en effet à nos besoins en termes de capacité du calcul et de possibilité de dialogue. La première étape consiste en la déclaration au sein du code MATLAB des variables aléatoires du modèle (lois de distribution et paramètres associés), de la fonction de défaillance G et de tous les paramètres indispensables à la résolution du calcul fiabiliste. A partir de ces informations, ce code probabiliste peut générer les réalisations du vecteur X des variables aléatoires. Faisant appel à ANSYS, on déduit via le calcul par éléments finis les premières fréquences propres de l'hélice induites dans les différents éléments de la structure pour le tirage X . Le code MATLAB dispose alors de l'ensemble des informations pour évaluer la quantité $G(X)$. Ces différentes étapes sont répétées jusqu'à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour l'obtention de l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance. Dans cette étude numérique, l'analyse de la fiabilité de l'hélice en air et en eau s'appuyait sur une fonction d'état limite G implicite basée sur la première fréquence propre R_1 .

La fonction d'état limite pour l'hélice en air

$$G(E, \rho_s) = 1 - \frac{R_1}{R_0} \text{ avec } R_0 = 73Hz \quad (IV.3)$$

La fonction d'état limite pour l'hélice en eau

$$G(E, \rho_s, \rho_f) = 1 - \frac{R_1}{R_0} \text{ avec } R_0 = 73Hz \quad (IV.4)$$

Les valeurs moyennes des variables aléatoires et leurs écart-types, ainsi que les distributions choisies pour cette étude sont illustrés dans le tableau (A1.20). Les tableaux (A1.25 et A1.26) résument les paramètres de conception et les moments statistiques considérés dans la structure couplée et découplée pour cet exemple, et ils illustrent une comparaison entre les résultats trouvés par les approches FORM et SORM.

TABLE A1.25 – Paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans l'hélice en air

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (pa)	8.5×10^{10}	8.5×10^{10}
Densité de la structure (Kg/m^3)	9030	9030
Indice de fiabilité β	3.68	3.68
Probabilité pf	0.083	0.012

TABLE A1.26 – Paramètres de conception et leurs moments statistiques pris en compte dans l'hélice en eau

Paramètres	FORM	SORM
Module d'Young (pa)	8.37×10^{10}	8.37×10^{10}
Densité de la structure (Kg/m^3)	8980	8980
Densité du fluide (Kg/m^3)	890	890
Indice de fiabilité β	3.54	3.54
Probabilité pf	0.11	0.087

7 Interprétation et discussion

Dans le cas déterministe les résultats obtenus par les calculs numériques demeurent un peu proches de ceux obtenus par l'expérimentation, avec une incertitude de comparaison à celle donnée par d'autres auteurs [128]. Pour pallier à ce problème nous avons étendu notre étude à une étude stochastique qui consiste, dans un premier temps, à mettre en place une technique de simulation basée sur la méthode de Monte Carlo et la méthode de surface de réponse puis, dans un deuxième temps, à procéder à une analyse de caractère fiabiliste. Cette technique implique un traitement particulier des variables aléatoires d'entrées et de sorties dans le but de construire un domaine de confiance sur les paramètres du système étudié.

Sur la base de l'étude déterministe préalable, l'analyse fiabiliste basée sur les méthodes approchées FORM et SORM a été menée. Précisément, étant données les faibles valeurs de probabilité de défaillance P_f , il nous est apparu plus commode de raisonner en terme d'indice de fiabilité β . dans le but de construire un domaine de confiance sur les paramètres d'entrées choisis. En comparant les probabilités de défaillances et l'indice de fiabilité calculés, avec les gammes de valeurs de probabilité de défaillance et d'indice de fiabilité β correspondant acceptés dans divers secteurs industriels notamment pour les structures marines ($P_f \in [10^{-2}, 10^{-4}]$ et $\beta \in [2.33, 3.72]$) nous trouvons qu'il y'a un niveau de fiabilité très important des structures étudiées.

Par la suite une étude de sensibilité sur les paramètres matériaux a été menée afin de relever les paramètres dominant le comportement des matériaux et d'après les diagrammes (1) et (2) nous constatons que les fréquences propres dépendent du module d'Young plus que la densité. Par un traitement plus rationnel des incertitudes, l'approche fiabiliste permet donc une meilleure appréciation des marges de sécurité à l'aide d'indicateurs de confiance objectifs, et constitue en ce sens un outil adéquat pour l'aide à la décision en phases de conception et de maintenance.

8 Conclusion

Ce travail propose une méthode numérique probabiliste étendu à une étude mécano-fiabiliste basée sur les approches FORM et SORM pour la résolution des problèmes vibro-acoustique de grande taille des systèmes couplés fluide-structure modélisés par la méthode des éléments finis, pour prendre en compte des incertitudes liées aux paramètres des deux domaines. A cet effet, une approche intégrée associant les méthodes de fiabilité et la modélisation par éléments finis a été proposée pour rendre compte de la défaillance de structures immergées. Du point de vue des concepteurs, cette démarche offre un cadre adéquat pour l'analyse de la fiabilité des structures en contact avec les fluides, qui confère notamment une signification physique aux incertitudes introduites.

Pour l'analyse fiabiliste, on a proposé une fonction d'état limite basée sur la première fréquence propre permettant d'évaluer l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance des systèmes couplés fluide-structure. Ce qui a prouvé que la prise en compte de l'incertitude dans les analyses mécaniques est en effet une condition indispensable pour un dimensionnement optimal et robuste. Coupler modèles mécaniques et données incertaines permet d'étudier d'une part la fiabilité des composants ou des systèmes et, d'autre part, l'influence de la variabilité des paramètres sur leur comportement.

La méthode numérique utilisée tient compte des incertitudes des paramètres d'entrées à savoir les propriétés des deux domaines fluide et solide. L'application réalisée sur des cas académiques tel que les plaques immergées en deux et trois dimensions a montré la validité et la potentialité de la méthode proposée. Ce qui a encouragé l'application de cette méthode sur un cas réel (l'hélice d'un bateau à quatre pales), en air et en eau. L'étude numérique est conduite en utilisant un code élaboré sous MATLAB couplé au code commercial ANSYS afin d'évaluer la fiabilité de la structure. La confrontation des résultats numériques nous permet de valider conjointement le processus du calcul et la méthode proposée dans le domaine de l'analyse fréquentielle et la fiabilité des structures immergées, pour construire un modèle fiable et robuste pour les problèmes d'interaction fluide.

Les résultats obtenus à travers l'étude des hélices sont très encourageants. Le modèle proposé, dont les choix ont été dictés par les phénomènes physiques mis en jeu, les résultats déterministes et les données expérimentales disponibles, semblent en effet aptes à rendre compte de la fiabilité de ces structures immergées à différentes échelles. Si l'étude déterministe a permis d'apporter un éclairage sur l'effet du couplage, l'étude stochastique a démontré la pertinence de cette approche dans une optique d'améliorer la robustesse des prévisions des résultats dans l'approche probabiliste.

Conclusion générale

L'objectif principal de cette thèse est le développement des outils analytiques et numériques pour étudier le couplage vibro-acoustique dans le cadre d'interaction fluide-structure et faire de l'analyse mécano-fiabiliste de ces systèmes complexes. Ce travail a été réalisé en collaboration avec le Laboratoire "LOFIMS" «Laboratoire d'Optimisation et Fiabilité en Mécanique des Structures» de l'INSA de Rouen en tant que thèse en cotutelle.

On a commencé par exposer les équations aux dérivées partielles qui gouvernent la cavité acoustique et la structure et ensuite le problème couplé vibro-acoustique en formulation déplacement/pression (u, p) et déplacement/pression, potentiel des vitesses (u, p, ϕ) . Dans le cadre des petites perturbations des variables physiques autour de leur état d'équilibre, on a transformé le problème fort en un problème faible. En utilisant la discrétisation en éléments finis du problème faible, on a aboutit, à un système algébrique non-symétrique pour la première formulation et un système symétrique pour la deuxième formulation. Finalement, on a validé la formulation pour les cas suivants : les plaques immergées en 2D et 3D et pour un barrage modélisé par une poutre immergée dans l'eau.

Par la suite, on a présenté la réduction du modèle pour le problème vibro-acoustique. Les travaux utilisant la superposition modale comme outil de réduction du modèle ont donné de bons résultats et ont permis de réduire la taille du problème de manière drastique pour les plaques immergées. La superposition modale semble une technique adaptée pour construire des modèles réduits en interaction fluide-structure pour les structures constituées d'une seule entité. Par contre, pour les structures constituées de plusieurs parties, on a remarqué que la synthèse modale est la méthode la plus adaptée pour la résolution des problèmes couplés. Cette méthode est illustrée en faisant l'étude d'une hélice de bateau immergée dans l'eau et a donné des résultats satisfaisants comparés aux résultats expérimentaux.

Pour les systèmes vibro-acoustiques complexes, la taille des modèles numériques ne cesse

Conclusion générale

d'augmenter. Les incertitudes de modélisation, les incertitudes sur les paramètres du modèle, doivent être prises en compte dans le processus de conception en vibro-acoustique. Afin de traiter ce problème tout en prenant en compte les incertitudes, on a proposé une approche fiabiliste pour calculer l'indice de fiabilité.

En présentant l'état de l'art, nous avons d'abord identifié les approches généralement utilisées dans le cadre de l'analyse de fiabilité. Leur hiérarchisation par rapport à leur impact sur le processus de conception des systèmes mécaniques, dont on exploite une décomposition systématique classique, a été réalisée. On a d'abord modélisé le système vibro-acoustique par un modèle numérique déterministe. Ce modèle numérique est réduit classiquement par projection modale pour obtenir le modèle réduit. Ensuite, on a effectué la modélisation probabiliste des incertitudes en utilisant les méthodes de simulation et les méthodes approchées de fiabilité. Cette approche prend en compte les deux sources d'incertitudes, les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle.

L'industrie mécanique, en particulier sa composante navale, est confrontée au problème déterminant de la conception de systèmes innovants, aux exigences de fiabilité toujours plus ambitieuses et cruciales. L'évaluation et l'élaboration de la fiabilité au cours de leur processus de conception constituent donc des enjeux majeurs. Les challenges qu'ils suscitent, nécessitent la mise en œuvre de démarches multidisciplinaires. Elles visent à assurer, dès les premières phases et jusqu'à la fin du développement d'un nouveau produit, que les différents choix de conception permettent bien la convergence du produit final vers un niveau de fiabilité élevé.

Ensuite, On a proposé l'évaluation d'un tel modèle de fiabilité au moyen des outils classiques du couplage mécano-fiabiliste. On a défini plusieurs stratégies d'analyse et introduit le concept d'analyse FORM et SORM. D'une part, on a évalué les probabilités d'occurrences marginales des modes de défaillance (probabilité de défaillance) potentiellement générés par les scénarios examinés, leurs corrélations et leurs probabilités d'occurrence conditionnelles. D'autre part, on a construit des chaînes de facteurs d'importance. Elles ont pour intérêt de caractériser l'influence de chaque variable du modèle sur la réalisation des phénomènes physiques qu'elle induit et sur la fiabilité du système : à n'importe quel niveau des scénarios de défaillance physico-probabilistes, à travers n'importe quelle branche dans laquelle elle intervient.

Enfin, à partir de l'étude d'un système de l'hélice de bateau, on a souligné la capacité de ces approches à guider l'activité de conception, ainsi que la création de plans de validations ou d'améliorations de la fiabilité adéquate. Du point de vue industriel, la première retombée de nos travaux de recherche est l'introduction de la culture de l'incertain dans les métiers de la conception industrielle pour les problèmes vibro-acoustiques. A l'origine, la conception s'est intéressée à la recherche des quantités optimales, c'est-à-dire des meilleures valeurs nominales.

Aujourd'hui, il est également nécessaire de prendre en compte l'incertain car un niveau de performance, a priori moins bon, peut être une meilleure solution s'il diminue la variabilité et engendre, de ce fait, une meilleure appréciation de la fiabilité ou de la durée de vie des systèmes mécaniques.

Un autre apport de nos travaux de recherche se situe au niveau du développement d'une plateforme logicielle implémentée sous MATLAB et ANSYS, support de l'approche par la modélisation système et physique du problème de fiabilité suggérée. Celle-ci a été motivée par deux objectifs essentiels :

- i) automatiser la réalisation et le traitement des modèles systèmes et physiques de fiabilité qui deviennent vite lourds et fastidieux à mettre en œuvre à la main et surtout pour les problèmes d'interaction fluide-structure ;
- ii) assurer la vulgarisation de l'analyse de fiabilité proposée afin de convaincre les acteurs de la conception industrielle ainsi que les décideurs de son potentiel.

Annexe 1

9 Comportement acoustique d'un fluide compressible

L'acoustique est une composante de la physique qui contient l'étude de la dynamique des petites perturbations d'un fluide compressible. Cette étude permet l'analyse de la propagation d'onde dans ce milieu (l'équation des ondes) et des caractéristiques sur la surface de la cavité (conditions aux limites). On considère une onde acoustique se propageant sans amortissement dans ce milieu compressible homogène isotrope, de densité ρ_f et vitesse du son c . Le fluide est supposé idéal, barotrope, irrotationnel, de vitesse d'écoulement nulle. La dépendance temporelle des variables, dans tout le document et sauf précision contraire, est suivant $e^{i\omega t}$ ou ω désigne la pulsation du régime harmonique. Les grandeurs physiques qui sont manipulées dépendent de la position du point M dans le domaine fluide et de la variable temps t .

Dans cette partie, on s'intéresse d'une part à l'écriture des équations du problème acoustique. D'autre part, on va établir la formulation variationnelle d'un problème fluide. La discrétisation par éléments finis de cette forme variationnelle aboutit à l'écriture d'une équation matricielle qui traduit le comportement dynamique d'un fluide compressible.

9.1 Energie potentielle de déformation

Pour un fluide parfait, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[T] = -p \cdot [I] \quad (\text{IV.1})$$

$[I]$ est la matrice d'identité,

p est la pression fluctuante au sein du fluide au point M,

9 Comportement acoustique d'un fluide compressible

Le comportement acoustique du fluide est caractérisé par une relation contrainte-déformation qui s'écrit :

$$p = -\rho_f \cdot c^2 \cdot \text{div}(u) \quad (\text{IV.2})$$

u est le déplacement acoustique au point du domaine fluide. ρ_f et c sont respectivement la masse volumique du fluide et la célérité du son dans le domaine fluide.

L'énergie potentielle de déformation s'écrit :

$$E_{pf} = \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f \cdot c^2 \cdot (\nabla(u))^2 dV \quad (\text{IV.3})$$

En utilisant la relation(IV.2), l'expression de l'énergie potentielle de déformation s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{pf} = \frac{1}{2} \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot p^2 dV \quad (\text{IV.4})$$

9.2 Energie cinétique et travail des forces extérieures

L'expression de l'énergie cinétique du fluide s'écrit :

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f \cdot (\dot{u})^2 dV \quad (\text{IV.5})$$

est la vitesse acoustique au point M du domaine fluide. On suppose qu'on exerce seulement une pression p_Γ sur la surface Γ limitant le domaine fluide. Le travail des forces extérieures s'écrit :

$$W_{ef} = - \int_{\Gamma} p_\Gamma \cdot u \cdot n \cdot d\Gamma \quad (\text{IV.6})$$

n est la normale sortante (extérieure) du domaine fluide.

9.3 Equation des petits mouvements du fluide

L'application du principe des travaux virtuels donne pour un déplacement δu arbitraire :

$$\delta E_{pf} + \delta E_{cf} + \delta W_{ef} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Annexe 1

avec :

$$\delta E_{pf} = \int_{V_f} \rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u) \nabla(\delta u) dV \quad (\text{IV.8})$$

$$\delta E_{pf} = \int_{\Gamma} \rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u) \delta u \cdot nd\Gamma - \int_{V_f} \nabla(\rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u)) \cdot \delta u dV \quad (\text{IV.9})$$

$$\delta E_{cf} = \int_{V_f} \rho_f \cdot \ddot{u} \cdot \delta u dV \quad (\text{IV.10})$$

$$\delta W_{ef} = - \int_{\Gamma} p_{\Gamma} \cdot \delta u \cdot nd\Gamma \quad (\text{IV.11})$$

$$(\text{IV.12})$$

Ce qui donne :

$$\int_{V_f} (-\nabla(\rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u)) + \rho_f \cdot \ddot{u}) \delta u dV + \int_{\Gamma} (\rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u) - p_{\Gamma}) \delta u \cdot nd\Gamma = 0 \quad (\text{IV.13})$$

L'équation d'équilibre dynamique s'écrit alors :

$$\nabla(\rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u)) - \rho_f \cdot \ddot{u} = 0 \quad \text{dans } (V_f) \quad (\text{IV.14})$$

Cette équation s'écrit aussi sous la forme :

$$\nabla(p) + \rho_f \cdot \ddot{u} = 0 \quad \text{dans } (V_f) \quad (\text{IV.15})$$

Les conditions aux limites sur la surface Γ s'écrivent :

$$p_{\Gamma} = -\rho_f \cdot c^2 \cdot \nabla(u) \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{IV.16})$$

En utilisant les équations (IV.2) et (IV.15), on peut écrire :

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \right) - \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \ddot{p} = 0 \quad \text{dans } (V_f) \quad (\text{IV.17})$$

Dans le cas où la masse volumique du fluide ne dépend pas de la position du point M du domaine fluide (masse volumique constante), on obtient l'équation classique de l'acoustique : :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{p} = 0 \quad \text{dans } V_f \quad (\text{IV.18})$$

9.4 Conditions aux limites de types accélération normale des parois imposées

Le problème aux limites pour les petits mouvements autour de d'une configuration d'équilibre statique prise comme configuration de référence pour la cavité acoustique : On suppose que sur la surface (Σ), on impose une accélération normale :

$$\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \cdot n = \ddot{u} \cdot n \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{IV.19})$$

On peut écrire également :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \cdot \gamma_n \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{IV.20})$$

γ_n est l'accélération normale.

La fonctionnelle, pour ce type de problème, s'écrit alors :

$$F(p) = \frac{1}{2} \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \cdot (\nabla(p))^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot (\dot{p})^2 dV + \int_{\Sigma} \gamma_n \cdot p \cdot d\Sigma \quad (\text{IV.21})$$

La solution du problème p est donnée en minimisant la fonctionnelle $F(p)$:

$$\begin{aligned} \delta F(p) &= \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \cdot (\nabla(p) \cdot \nabla(\delta p)) dV + \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot \dot{p} \cdot \delta \dot{p} dV + \int_{\Sigma} \gamma_n \cdot \delta p \cdot d\Sigma \quad (\text{IV.22}) \\ &= \int_{V_f} \left(-\text{div} \left(\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \right) + \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot \ddot{p} \right) \cdot \delta p \cdot dV + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \cdot n + \gamma_n \right) \cdot \delta p \cdot d\Sigma \quad (\text{IV.23}) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \right) - \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot \ddot{p} = 0 \quad \text{dans } V_f \quad (\text{IV.24})$$

et,

$$\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \cdot n + \gamma_n = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{IV.25})$$

9.5 Equation du problème acoustique en régime harmonique

Il s'agit d'un état de vibrations entretenues pour une pulsation d'excitation donnée. La dépendance temporelle est alors harmonique :

$$p(M, t) = \text{Re}(p(M)).e^{-i\omega t} \quad (\text{IV.26})$$

Re désigne la partie réelle.

L'équation des ondes acoustiques entretenues s'écrit alors :

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho_f} \cdot \nabla(p) \right) + \frac{\omega^2}{\rho_f \cdot c^2} \cdot \ddot{p} = 0 \quad \text{dans } V_f \quad (\text{IV.27})$$

$$\frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} = -\gamma_n = \omega^2 \cdot u_n \quad \text{sur } \Sigma, \quad (\text{IV.28})$$

On peut écrire aussi :

$$\Delta p + k^2 \cdot p = 0 \quad \text{dans } V_f \quad (\text{IV.29})$$

et,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \cdot \omega^2 \cdot u_n \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{IV.30})$$

avec : $u_n = u \cdot n$, et $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'ondes acoustiques. la fonctionnelle associée est :

$$F(p) = \frac{1}{2} \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f} \cdot (\nabla(p))^2 dV - \frac{\omega^2}{2} \int_{V_f} \frac{1}{\rho_f \cdot c^2} \cdot (p)^2 dV - \omega^2 \cdot \int_{\Sigma} u_n \cdot p \cdot d\Sigma. \quad (\text{IV.31})$$

Les trois termes de cette équation correspondent respectivement à l'énergie cinétique du fluide, l'énergie de compressibilité du fluide et du travail des forces à la frontière Σ .

10 Comportement vibratoire d'une structure élastique

Soit une structure linéaire et isotrope, sans contraintes ni déformations initiales, définie dans un domaine Ω_s .

On considère un domaine Ω_A du domaine Ω_s , soumis à l'action des forces extérieures suivantes :

- force volumique f_v ;

- force surfacique t .

L'état de la structure est définie par son champ de déplacement $U, U = u(u_0 = 0)$.

10.1 Loi de comportement en élasticité linéaire isotrope

Par la loi de comportement, nous entendons la manière dont le matériau s'oppose à la sollicitation, cette loi peut être linéaire ou non. En un point donné, elle peut dépendre de la position de ce point sur le matériau considéré, de la température et du temps.

Dans cette section nous définissons pour les solides élastiques isotropes (dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope) les relations contraintes-déformations en notation indicielle suivantes :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (\text{IV.32})$$

où : C_{ijkl} est la matrice des constantes élastiques caractérisant le matériau (les modules d'élasticités). La condition de symétrie des tenseurs de déformations et de contraintes conduit aux égalités suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (\text{IV.33})$$

Le nombre total de coefficients élastiques formant le tenseur C_{ijkl} dépend de la symétrie du cristal formant le matériau élastique.

la loi de comportement peut s'écrire sous la loi de Hooke comme suit :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \cdot \epsilon_{kk}(u) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \epsilon_{ij}(u) \quad (\text{IV.34})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé de la structure, supposés connus. Ces coefficients peuvent être calculés à partir du module d'Young (E) et du coefficient de Poisson (ν) de la structure selon les équations suivantes :

$$\lambda = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (\text{IV.35})$$

10.2 Tenseurs de déformations

Soit u le champ de déplacement que subissent les points d'un milieu continu lors de sa déformation, ses composantes dans un repère orthonormé, seront désignées par $u_i (i = 1, 2, 3)$.

Annexe 1

La déformation d'un milieu est caractérisée par le tenseur symétrique des déformations suivant :

$$[\varepsilon] = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

Les composantes du tenseur précité sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (\text{IV.37})$$

où $x_i (i = 1, 2, 3)$ sont les coordonnées cartésiennes des points du milieu continu.

avec l'hypothèse des petites déformations, les composantes ε_{ij} sont petites en module par rapport à l'unité. Si, en outre les angles de rotations des éléments d'un corps l'un par rapport à l'autre s'avèrent suffisamment petits, on peut alors négliger les termes du second ordre et par conséquent les composantes du tenseur de déformation prennent les formes suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{IV.38})$$

10.3 Conditions de compatibilité

Ainsi que nous l'avons constaté, les différents tenseurs de déformations sont issus de la donnée d'un champ vectoriel, le champ de déplacement. Les relations permettent sans ambiguïté de calculer, dans un repère quelconque, les composantes de chacun de ces tenseurs dès lors que l'on connaît les composantes du vecteur déplacement.

Par contre la démarche inverse n'est pas immédiate. On conçoit en effet qu'il soit délicat de remonter à un champ de déplacement à partir de la connaissance d'un tenseur de déformation. Nous allons raisonner sur la forme linéaire des déformations, donc à partir du tenseur de déformation $\bar{\varepsilon}$. Ce tenseur symétrique est déterminé par six composantes. Il est clair que les relations doivent exister entre ces six composantes si le tenseur représente un état de déformation obtenu à partir d'un champ vectoriel ayant trois composantes.

Ces relations s'appellent les conditions de compatibilité et elle ne sont en effet que les conditions d'intégrabilités au sens de Cauchy pour un système d'équations différentielles. Dans

10 Comportement vibratoire d'une structure élastique

un système de coordonnées cartésiennes, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right), \quad (\text{IV.40})$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right), \quad (\text{IV.41})$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right), \quad (\text{IV.42})$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}. \quad (\text{IV.43})$$

Nous venons ainsi de montrer que nous sommes capables de calculer les composantes de ω_{ij} . Toutefois nous obtiendrons effectivement un vecteur si le rotationnel est nul, c'est à dire si nous pouvons vérifier les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0 = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Ce sont en fait les conditions d'intégrabilité de Cauchy de la différentielle :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_m} dx_m$$

exprimées en fonction des composantes du tenseur de déformations, ces conditions nous donnent un système de six équations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \quad (\text{IV.44})$$

Annexe 1

soit sous forme développée :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (\text{IV.45})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad (\text{IV.46})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad (\text{IV.47})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0, \quad (\text{IV.48})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0, \quad (\text{IV.49})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (\text{IV.50})$$

On peut démontrer aussi que ces conditions de compatibilité prennent la forme intrinsèque suivante :

$$\nabla(\overrightarrow{\nabla(\vec{\varepsilon})}) + \nabla(\overrightarrow{\nabla(\vec{\varepsilon})})^T - \nabla(\overrightarrow{\nabla(\text{tr}(\vec{\varepsilon}))}) - \Delta \vec{\varepsilon} = 0. \quad (\text{IV.51})$$

Donc, si ces conditions sont vérifiées, il est possible de déterminer le champ de déplacement. La méthode consiste à calculer les composantes du tenseur antisymétrique à l'aide des différentielles totales exactes :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) \cdot dx_k \quad (\text{IV.52})$$

Puis de déterminer les composantes du champ déplacement à l'aide des trois autres différentielles totales exactes :

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) \cdot dx_j \quad (\text{IV.53})$$

Le champ de déplacement ainsi obtenu est défini à un champ de déplacement de solide indéformable près.

10.4 Conservation de la quantité du mouvement

L'équilibre des forces extérieures ($\Sigma F_{ext} = m.\gamma$), du domaine Ω_A de la structure, s'écrit en égalant la somme des forces extérieures agissant sur le domaine Ω_A à la variation de la quantité de mouvement de cette partie du solide .

$$\int_{\Omega_A} f_v(M)dV + \int_{\partial\Omega_A} t(M.n)dS = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_A} \rho_s.v.dV \right) = \int_{\Omega_A} \rho_s.v.dV \quad (IV.54)$$

On sait que :

$$\int_{\partial\Omega_A} t(M.n)dS = \int_{\partial\Omega_A} \sigma(M).n.dS \quad (IV.55)$$

La transformation de Green-Ostrogradsky (théorème de la divergence), appliquée au vecteur contrainte dans l'équation précédente donne :

$$\int_{\partial\Omega_A} \sigma(M).n.dS = \int_{\Omega_A} \nabla\sigma.dV \quad (IV.56)$$

En reportant cette équation dans l'équation globale précédente, on obtient l'intégrale volumique suivante, qui doit être nulle sur tout le domaine Ω_A :

$$\int_{\Omega_A} (\nabla\sigma + f_v - \rho_s.\gamma).dV = 0. \quad (IV.57)$$

Il s'en suit que la quantité intégrée doit être nulle dans le domaine Ω_A , ce qui fournit l'équation locale de la dynamique :

$$\forall M \in \Omega_A, \quad \nabla\sigma + f_v - \rho_s.\gamma = 0. \quad (IV.58)$$

En l'absence des forces volumiques f_v , on trouve :

$$\nabla\sigma - \rho_s.\gamma = 0 \quad (IV.59)$$

$$\nabla\sigma - \rho_s.\ddot{u} = 0 \quad (IV.60)$$

avec :

σ_s : le tenseur des contraintes de la structure,

ρ_s : la masse volumique de la structure,

$\gamma_n = -\ddot{u}_n$: l'accélération de la structure,

u : le champ de déplacement de la structure.

Soit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij,j} - \rho_s \cdot \frac{d^2 u_i}{dt^2} = 0. \quad (\text{IV.61})$$

10.5 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites de la structure sont :

$$\begin{aligned} u_i &= u_0 \text{ dans } \partial\Omega_s \\ \sigma_{ij}(u) \cdot n_j &= \bar{p} \text{ dans } \partial\Omega_s \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

n_j est la normale sortante de $\partial\Omega_s$.

10.6 Equation du mouvement de la structure en régime harmonique

En régime harmonique l'équation du mouvement de la structure en l'absence des forces volumiques autres que les forces d'inerties, s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} + \rho_s \cdot \omega^2 \cdot u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (\text{IV.63})$$

$$\begin{aligned} u_i &= u_0 \text{ dans } \partial\Omega_s \\ \sigma_{ij}(u) \cdot n_j &= \bar{p} \text{ dans } \partial\Omega_s \end{aligned} \quad (\text{IV.64})$$

n_j est la normale sortante de $\partial\Omega_s$.

Dans le cas général, il n'est pas possible de déterminer une solution forte au problème posé, c'est à dire de trouver une solution u satisfaisant l'équation (IV.63), avec les conditions aux limites (IV.64) et les relations (IV.34) et (IV.38).

Annexe 2

1 Problèmes dynamiques linéaires

La résolution du système d'équation d'équilibre dynamique d'une structure peut être réalisée en utilisant l'une des deux stratégies classiques [66]. La stratégie de résolution la plus courante est la superposition modale, qui convient aux structures linéaires dont seuls les premiers modes propres sont excités. Par contre les méthodes de résolution directes, font l'intégration des équations du mouvement, afin de traiter les structures non linéaires ou bien si le contenu fréquentiel de l'excitation couvre un grand nombre de modes de la structure.

1.1 Equations du mouvement

La méthode des éléments finis appliquée au calcul dynamique d'une structure à N degrés de liberté (d.d.l), conduit au système d'équations suivant :

$$[M] \{\ddot{y}(t)\} + [C] \{\dot{y}(t)\} + [K] \{y(t)\} = \{F(t)\} \quad (\text{IV.1})$$

Où : [M], [C] et [K] sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de rigidité. Elles sont carrées d'ordre N. La matrice [M] est symétrique définie positive ; la matrice [K] est symétrique définie non négative.

La matrice d'amortissement n'est pas calculable en pratique. En général l'amortissement est introduit dans les modèles sous forme d'un amortissement modal. Dans ce cas le système des équations du mouvement (IV.1), se ramène à des équations différentielles découplées de second ordre :

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = f_i(t) \quad (\text{IV.2})$$

1.2 Résolution en régime transitoire

La solution des équations différentielles classiques précédentes peut s'écrire sous la forme de produits de convolution de la fonction d'excitation et la réponse impulsionnelle $h_i(t)$ du mode i :

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) f_i(\tau) d\tau + \eta_i(0) g_i(t) + \dot{\eta}_i(0) h_i(t) \quad (\text{IV.3})$$

Si le mode i a un amortissement sous-critique $\xi_1 < 1$ on a :

$$h_i(t) = \frac{e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i t}{\sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i} \quad (\text{IV.4})$$

$$g_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\cos \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i t + \frac{\xi_i \sin \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i t}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} \right] \quad (\text{IV.5})$$

Dans le cas d'amortissement sur-critique $\xi_1 = 1$ on a :

$$h_i(t) = t e^{i \omega_i t} \quad (\text{IV.6})$$

$$g_i(t) = (1 - \omega_i t) e^{-\omega_i t} \quad (\text{IV.7})$$

Dans le cas d'amortissement sur-critique $\xi_1 > 1$ on a :

$$h_i(t) = \frac{e^{-\xi_i \omega_i t} \operatorname{sh} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \omega_i t}{\sqrt{\xi_i^2 - 1} \omega_i} \quad (\text{IV.8})$$

$$g_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\operatorname{ch} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \omega_i t + \frac{\xi_i \operatorname{sh} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \omega_i t}{\sqrt{\xi_i^2 - 1}} \right] \quad (\text{IV.9})$$

On évalue alors numériquement l'intégrale de Duhamel.

1.3 Résolution en régime harmonique

Considérons le cas d'une excitation sinusoïdale de pulsation ω , on a :

$$F(t) = F e^{i \omega t} \quad (\text{IV.10})$$

La solution harmonique sera donc :

$$y(t) = ye^{i\omega t} \quad (\text{IV.11})$$

L'équation du mouvement (IV.1) devient :

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])y = F \quad (\text{IV.12})$$

La fonction de transfert $H_{ij}(\omega)$ est définie comme :

$$y_i = H_{ij}F_j \quad (\text{IV.13})$$

La fonction de réponse en fréquence $H_{ij}(\omega)$ peut ne pas exister pour certaines valeurs de ω (cas d'instabilité, résonance non amortie).

1.4 Calcul direct

Le calcul direct consiste à inverser pour chaque valeur de pulsation cherchée le système matriciel :

$$[H] = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])^{-1} \quad (\text{IV.14})$$

Lorsque la taille des matrices est importante, ce type de calcul peut devenir très coûteux. Une autre méthode consiste à utiliser les modes propres de la structure.

1.5 Calcul par superposition modale

En utilisant la base modale tronquée ($m < n$), on a l'expression fondamentale suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i \eta_i(t) = [\phi] \eta \quad (\text{IV.15})$$

En pré-multipliant par ϕ_j , on obtient les contributions modales grâce aux propriétés d'orthogonalité des modes propres :

$$y_j = \frac{\phi_j F}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_j \omega \omega_j} \quad (\text{IV.16})$$

La fonction de transfert est alors donnée par :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{\phi_{m_i} \phi_{m_j}}{\omega_m^2 - \omega^2 + 2i\xi_m \omega \omega_m} \quad (\text{IV.17})$$

1.6 Intégration directe

Il y a de très nombreuses méthodes d'intégration des équations du mouvement. Le procédé général est de discrétiser le temps et de formuler ce qui se passe à l'instant $t + \Delta t$ en fonction de ce qui se passe à l'instant t à partir de développement limité des déplacements, vitesses et /ou accélération, plus ou moins proche des développements de Taylor. La principale interrogation sur ces méthodes c'est leur stabilité en relation avec leur précision.

Supposons qu'on cherchera la solution de l'équation entre l'instant $t = 0$ et l'instant T , l'intervalle de temps sera divisé en n intervalles de même longueur $\Delta t = \frac{T}{n}$.

On va chercher les vecteurs $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ aux instants $\Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$, sachant que les conditions initiales sont données.

1.7 Méthode de Newmark

Les développements des déplacements et les vitesses sont donnés par [73] :

$$\dot{y}(t + \Delta t) = \dot{y}(t) + [(1 - \delta) \ddot{y}(t) + \delta \ddot{y}(t + \Delta t)] \Delta t \quad (\text{IV.18})$$

$$\{y(t + \Delta t)\} = \{y(t)\} + \{\dot{y}(t)\} \Delta t + [(0.5 - \alpha) \{\ddot{y}(t) + \alpha \{\ddot{y}(t + \Delta t)\}\}] (\Delta t)^2 \quad (\text{IV.19})$$

α et δ sont deux paramètres qui assurent la précision et la stabilité de la solution. Lorsque $\delta \geq 0.5$ et la méthode de Newmark est inconditionnellement stable. A partir équations (IV.18) et (IV.19) on peut trouver $\{\dot{y}(t + \theta \Delta t)\}$ et $\{\ddot{y}(t + \theta \Delta t)\}$ en fonction seulement de l'inconnue $\{y(t + \theta \Delta t)\}$ et la solution à l'instant t :

$$\ddot{y}(t + \Delta t) = a_0 [y(t + \Delta t) - y(t)] - a_2 \dot{y}(t) - a_3 \ddot{y}(t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\dot{y}(t + \Delta t) = \dot{y}(t) + a_6 \ddot{y}(t) + a_7 \ddot{y}(t + \Delta t) \quad (\text{IV.21})$$

Dans lesquelles :

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

$a_6 = \Delta t(1 - \delta)$ $a_7 = \delta\Delta t$ (IV.22) L'équation du mouvement (IV.1) est donnée à l'instant $t + \Delta t$ par :

$$[M] \ddot{y}(t + \Delta t) + [C] \dot{y}(t + \Delta t) + [K] y(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) \quad (\text{IV.23})$$

Remplaçons les équations (IV.20) et (IV.21) dans l'équation (IV.23), on obtient les équations suivantes :

$$() [K_{eq}] y(t + \Delta t) = F_{eq} \quad (\text{IV.24})$$

$$[K_{eq}] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \quad (\text{IV.25})$$

$$F_{eq} = \text{left} F(t + \Delta t) + [M] (a_0 y(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3 \ddot{y}(t)) + [C] (a_1 y(t) + a_4 \dot{y}(t) + a_5 \ddot{y}(t)) \quad (\text{IV.26})$$

Une fois le déplacement $\{y(t + \theta\Delta t)\}$ est déterminé à partir de l'équation (IV.24), les vecteurs vitesses $\{\dot{y}(t + \theta\Delta t)\}$ et accélération $\{\ddot{y}(t + \theta\Delta t)\}$ seront obtenus à partir des équations (IV.20) et (IV.21).

1.8 Méthode Wilson

Il s'agit de l'extension d'une méthode dans laquelle l'accélération est supposée varier linéairement durant l'intervalle $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t]$; Wilson [73] suppose que cette variation linéaire s'effectue sur l'intervalle $[n\Delta t, (n + \theta)\Delta t]$. θ est un paramètre (la valeur 1.4 est recommandée par Wilson). Si τ désigne le temps dans l'intervalle $[0, \theta\Delta t]$ alors l'accélération dans l'intervalle $[t, t + \theta\Delta t]$ est écrite :

$$\{\ddot{y}(t + \tau)\} = \{\ddot{y}(t)\} + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\{\ddot{y}(t + \theta\Delta t)\} - \{\ddot{y}(t)\}) \quad (\text{IV.27})$$

La vitesse et le déplacement sont obtenus par intégrations successives :

$$\{\dot{y}(t + \tau)\} = \{\dot{y}(t)\} + \tau \{\ddot{y}\} + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\{\ddot{y}(t + \theta\Delta t)\} - \{\ddot{y}(t)\}) \quad (\text{IV.28})$$

$$\{y(t + \tau)\} = \{y(t)\} + \tau \{\dot{y}(t)\} + \frac{1}{2} \tau^2 \{\ddot{y}\} + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\{\ddot{y}(t + \theta\Delta t)\} - \{\ddot{y}(t)\}) \quad (\text{IV.29})$$

Posons $t = \theta\Delta t$, les équations permettent de déterminer $\{y(t + \theta\Delta t)\}$ et $\{\dot{y}(t + \theta\Delta t)\}$ sont :

$$\{\ddot{y}(t + \theta\Delta t)\} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (\{y(t + \theta\Delta t)\} - \{y(t)\}) - \frac{6}{\theta\Delta t} \{\dot{y}(t)\} - 2\{\ddot{y}(t)\} \quad (\text{IV.30})$$

$$\{\dot{y}(t + \theta\Delta t)\} = \frac{3}{\theta\Delta t} (\{y(t + \theta\Delta t)\} - \{y(t)\}) - 2\{\dot{y}(t)\} - \frac{\theta\Delta t}{2} \{\ddot{y}(t)\} \quad (\text{IV.31})$$

Remplaçons les équations (IV.28) et (IV.29) dans l'équation du mouvement (IV.1) à l'instant , on obtient les équations suivantes pour déterminer $\{y(t + \theta\Delta t)\}$:

$$[K_{eq}] \{y(t + \theta\Delta t)\} = F_{eq} \quad (\text{IV.32})$$

$$[K_{eq}] = [K] + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} [C] \quad (\text{IV.33})$$

$$F_{eq} = F(t) + \theta[\{F(t + \Delta t)\} - \{F(t)\}] + [M] \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \{y(t)\} + \frac{6}{\theta\Delta t} \{\dot{y}(t)\} + 2\{\ddot{y}(t)\} \right) + [C] \left(\frac{6}{\theta\Delta t} \{y(t)\} + 2\{\dot{y}(t)\} + \frac{\theta\Delta t}{2} \{\ddot{y}(t)\} \right) \quad (\text{IV.34})$$

Une fois le déplacement $\{y(t + \theta\Delta t)\}$ est déterminé à partir de l'équation (IV.32), les vecteurs vitesses $\{\dot{y}(t + \theta\Delta t)\}$ et accélération $\{\ddot{y}(t + \theta\Delta t)\}$ seront obtenus à partir des équations (IV.30) et (IV.31)

2 Méthodes de synthèse modale

2.1 Introduction

L'un des problèmes posés en dynamique des structures est de déterminer un nombre suffisant de solutions propres (fréquences et modes propres, car ils sont la base de la prédiction du comportement vibratoire. Pour atteindre cet objectif, des méthodes reposant sur une discrétisation de la structure considérée (méthode des éléments finis) ont été développées.

Toute fois la précision nécessaire à la description d'une structure industrielle nécessite généralement une modélisation avec un grand nombre d'éléments. En conséquence, il en résulte, pour la grande structure, une taille de modèle prohibitive. Pour faire face à ce genre de problème furent développées de méthodes de sous-structuration dynamique [24, 65, 85, 120] considérées

comme les meilleures et souvent les seules stratégies d'analyse dynamique des structures complexes.

La structure globale est divisée en plusieurs sous-structures $SS^{(s)}$ ($s = 1, \dots, S$) liées par leurs interfaces. S est le nombre de sous-structures. On procède ensuite à la condensation de chacune des sous-structures séparément à l'aide d'un nombre réduit de paramètres. A partir de ces caractéristiques, on obtient un système correspondant à la structure complète de taille beaucoup plus réduite que celle du système original.

Toutes les matrices sont affectées de l'indice supérieur (s) relatif à la sous-structure SS^s . Le vecteur déplacement p

$$\text{structure est le suivant : } \{y\}^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{y}_j \end{Bmatrix}^s \quad (\text{IV.35})$$

- $\{y_j\}^s$ ($j \times 1$) : sous vecteur des degrés de liberté de jonction ;
- $\{y_i\}^s$ ($i \times 1$) : sous vecteur des degrés de liberté interne.

De même pour le vecteur des forces appliquées :

$$\{f\}^s = \{f_j\}^s + \{f_e\}^s \quad (\text{IV.36})$$

- $\{f_j\}^s$: vecteur effort à l'interface ;
- $\{f_e\}^s$: vecteur effort extérieur.

Nous avons la partition correspondante des matrices de rigidité et de masse :

$$[K] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

Le principe de la sous-structuration est basé sur le choix des modes de représentation des déplacements de chaque sous-structure.

Le vecteur déplacement de chaque sous-structure peut s'exprimer :

$$\{y\}^s = [Q]^s \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_j^s \\ \boldsymbol{\eta}_p^s \end{Bmatrix} = [Q]^s \{y_c\}^s \quad (\text{IV.38})$$

où $\{\boldsymbol{\eta}_p\}^s$: vecteur des coordonnées généralisées

La matrice $[Q]$ sera définie selon la méthode de sous-structuration utilisée.

Remarque : Cette formulation n'est pas applicable à la méthode de MacNeal présentée ultérieurement.

L'énergie cinétique de chaque sous-structure $SS^{(s)}$ devient en utilisant l'équation (IV.38) :

$$T^s = \frac{1}{2} \{\dot{y}_c\}^s [M_c]^s \{\dot{y}_c\}^s \quad (\text{IV.39})$$

avec :

$$[M_c]^s = [Q]^s [M]^s [Q]^s \quad (\text{IV.40})$$

De même pour l'énergie potentielle de chaque sous-structure $SS^{(s)}$ est de la forme :

$$U^s = \frac{1}{2} \{y_c\}^s [K_c]^s \{y_c\}^s \quad (\text{IV.41})$$

avec :

$$[K_c]^s = [Q]^s [K]^s [Q]^s \quad (\text{IV.42})$$

2.2 Technique d'assemblage des sous-structures

L'équation du mouvement de la structure assemblée est obtenue en exprimant les conditions de compatibilité à l'interface :

- Continuité de déplacement,

$$\{y_j\}^1 = \{y_j\}^2 = \dots = \{y_j\}^S = \{y_j\} \quad (\text{IV.43})$$

- L'équilibre de l'interface,

$$\sum_{s=1}^S \{f_j\}^s = 0 \quad (\text{IV.44})$$

Deux approches peuvent être utilisées :

1. Assemblage par la méthode des équations de Lagrange avec contraintes [15] : l'équation du mouvement de la structure assemblée est obtenue à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs introduisant les relations de liaison.

2. Méthode d'assemblage des superéléments : la conservation des d.d.l de jonction dans les méthodes de sous-structuration dynamique permet d'assembler ces matrices comme des éléments finis ordinaires. Soit le vecteur des déplacements indépendants de la structure assemblée :

$$\{y_c\} = \begin{pmatrix} \eta_p^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_p^S \\ y_j \end{pmatrix} \quad (\text{IV.45})$$

La compatibilité des déplacements de jonctions de la structure assemblée est obtenue en écrivant pour chaque sous-structure $SS^{(s)}$ la relation matricielle suivante :

$$\{y_c\}^s = [\beta]^s \{y_c\} \quad (\text{IV.46})$$

$[\beta]^s$: matrice de localisation ou de connectivité géométrique de la sous-structure $SS^{(s)}$. Elle permet de localiser ou de repérer les d.d.l de chaque sous-structure $SS^{(s)}$ dans l'ensemble des d.d.l de la structure assemblée. sont des matrices booléennes dont les éléments sont des 0 ou des 1.

On définit alors une matrice de transformation pour chaque sous-structure :

$$[Z]^s = [Q]^s [\beta]^s \quad (\text{IV.47})$$

Les matrices condensées de masse et de rigidité sont alors données par :

$$[M_c] = \sum_{s=1}^S [Z]^s [M]^s [Z]^s \quad (\text{IV.48})$$

$$[K_c] = \sum_{s=1}^S [Z]^s [K]^s [Z]^s \quad (\text{IV.49})$$

2.3 Méthode à interface fixe

Le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes à interface fixe ainsi que les modes statiques de liaison [24], l'indice (s) a été omis dans les équations (IV.50-IV.65) :

$$\{y\} = [Y] \{\eta\} + [\Psi_c] \{y_j\} \quad (\text{IV.50})$$

Annexe 2

Dans ce cas, la matrice $[Q]$ est donnée alors par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \Psi_c & Y \end{bmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

$[Y]$: base modale tronquée de la sous-structure à interface fixe c'est-à-dire $\{y_j\} = \{0\}$ qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$[Y] = \begin{bmatrix} \Phi_{ip} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

avec :

$$[\Phi_{ip}] = \begin{bmatrix} \{x_i\}^1 & \dots & \{x_i\}^p & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

telle que $x_i^{(p)}$ solution propre du système homogène :

$$[K_{ii}] \{x_i\} = \lambda [M_{ii}] \{x_i\} \quad (\text{IV.54})$$

$[\Psi_c]$: matrice des modes statiques de liaison obtenue en calculant les déplacements correspondant à un déplacement unité en un d.d.l de jonction en supposant que les autres d.d.l de jonction sont fixes, obtenue par :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ij} \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

En développant les équations relatives au premier groupe de lignes, on obtient :

$$\phi_{ij} = -K_{ii}^{-1} K_{ij} \quad (\text{IV.56})$$

La matrice $[\Psi_c]$ devient alors :

$$[\Psi_c] = \begin{bmatrix} -K_{ii}^{-1} K_{ij} \\ I_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.57})$$

La matrice de masse condensée pour chaque sous-structure définie en (IV.40) :

$$[M_c] = \begin{bmatrix} I_p & \bar{M}_{pj} \\ \bar{M}_{pj} & \bar{M}_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

Expression dans laquelle on trouve les sous-matrices suivantes :

- Matrice de masse condensée aux interfaces,

$$\bar{M}_{jj} = [\Psi_c] [M] [\Psi_c] \quad (\text{IV.59})$$

- Matrice de couplage de masse entre les modes statiques d'interface et les modes propres à frontière fixe,

$$\bar{M}_{jp} = [\psi_c][M][Y] \quad (\text{IV.60})$$

De même pour la matrice de rigidité condensée pour chaque sous-structure définie en (IV.42) :

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \Omega_p & 0 \\ 0 & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

Expression dans laquelle on trouve les sous matrices suivantes : - Matrice de rigidité statiquement condensée aux d.d.l d'interface,

$$\bar{K}_{jj} = [\Psi_c][K][\Psi_c] = K_{jj} - K_{ij}K_{ii}^{-1}K_{ij} \quad (\text{IV.62})$$

- Matrice diagonale des rigidités généralisées des modes propres encastés,

$$[\Omega_p] = \phi_{ip}K_{ii}\phi_{ij} \quad (\text{IV.63})$$

Pour faire l'assemblage, on définit pour chaque sous-structure (s) une matrice de localisation des d.d.l de jonction telle que :

$$\{y_j\}^s = [\beta_j]^s \{y_j\} \quad (\text{IV.64})$$

Les matrices $[M_c]$ et $[K_c]$ définies dans les équations (IV.48) et (IV.49) sont données dans ce cas par :

$$[M_c] = \begin{bmatrix} I_p^1 & & \bar{M}_{pj}^1 \\ & \ddots & \\ & & I_p^S & \bar{M}_{pj}^S \\ & & & \bar{M}_{jj} \end{bmatrix} \quad [K_c] = \begin{bmatrix} \Omega_p^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Omega_p^S & \\ & & & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.65})$$

avec :

$$\bar{M}_{jj} = \sum_{s=1}^S [\beta_j]^s \bar{M}_{jj}^s [\beta_j]^s \quad (\text{IV.66})$$

$$\bar{M}_{jp}^s = [\beta_j]^s \bar{M}_{jp}^s \quad (\text{IV.67})$$

$$\bar{K}_{jj} = \sum_{s=1}^S [\beta_j]^s \bar{K}_{jj}^s [\beta_j]^s \quad (\text{IV.68})$$

Soient $[Y]$ et $[\eta]$ la matrice modale, et le vecteur des coordonnées modales correspondant au problème aux valeurs propres du système complet, on a :

$$\begin{bmatrix} \eta_p^1 \\ \vdots \\ \eta_p^s \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p^1 \\ \vdots \\ Y_p^s \\ Y_j \end{bmatrix} \{\eta\} \quad (\text{IV.69})$$

d'où pour chaque sous-structure, en utilisant la relation (IV.50), on obtient les relations de substitutions suivantes :

$$\{y_j\}^s = [\beta_j]^s [Y_j] \{\eta\} \quad (\text{IV.70})$$

$$\{\eta_p\}^s = [Y_p] \{\eta\} \quad (\text{IV.71})$$

$$\{y_i\}^s = [\phi_{ij}^s \beta_j^s Y_j + \phi_{ip}^s Y_p^s] \{\eta\} \quad (\text{IV.72})$$

L'avantage principal de cette méthode réside dans sa précision. Sa formulation est tout à fait compatible avec l'organisation des logiciels d'analyse des structures. Les inconvénients sont les suivants :

- * Dans le vecteur d'état du système les d.d.l d'interface peuvent être élevés dans le cas de structures complexes.
- * cette méthode n'est pratiquement pas compatible avec l'utilisation de données de sous-structures d'origine expérimentale [66].

2.4 Méthode à interface libre de MacNeal

La méthode de synthèse modale la plus usuelle à interfaces libres est celle de MacNeal. Soit l'équation modale du mouvement de chaque sous-structure (s) prise séparément sans amortissement :

$$([K] - \lambda[M]) \{y\} = \{f\} \quad (\text{IV.73})$$

Le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes avec interfaces libres, soit pour les d.d.l d'interface :

$$\{y\} = [Y] \{\eta\} \quad (\text{IV.74})$$

$[Y]$: est la base modale tronquée de la sous-structure à interface libre.

L'utilisation d'une matrice modale tronquée peut induire des erreurs inacceptables sur le comportement dynamique des sous-structures. Ceci motive la nécessité de prise en compte de l'effet statique des modes supérieures tronqués par une correction de flexibilité résiduelle. D'où la relation de base de chaque sous-structure :

$$\{y\} = [Y] \{\eta\} + [R] \{f\} \quad (\text{IV.75})$$

$[R]$: matrice de flexibilité résiduelle. Elle représente la contribution des modes non retenues.

Compte tenu de l'orthogonalité des matrices $[Y]$ et $[R]$ par rapport aux matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$:

$$[Y] [M] [R] = [0] \quad [Y] [K] [R] = [0] \quad (\text{IV.76})$$

La pré multiplication par $[Y]^s$ et la relation (IV.76) permettent de réécrire l'équation (IV.73) sous la forme :

$$([\Omega]^s - \lambda [I]^s) \{\eta\}^s = [Y]^s \{f\}^s \quad (\text{IV.77})$$

La répartition du vecteur $\{Y\}$ en $\{Y_i\}$ et $\{Y_j\}$ décrite précédemment permet d'avoir les matrices $[Y]$ et $[R]$ de la manière suivante :

$$[Y]^s = \begin{bmatrix} Y_i^s \\ Y_j^s \end{bmatrix} \quad [R]^s = \begin{bmatrix} R_{ii}^s & R_{ij}^s \\ R_{ij}^s & R_{jj}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.78})$$

Par ailleurs les équations modales du mouvement de chaque sous-structure pris isolément sans amortissement et sans force extérieure ($\{f_e\}^{(s)} = 0$) s'écrivent :

$$([\Omega]^s - \lambda [I]^s) \{\eta\}^s = [Y_j]^s \{f_j\}^s \quad (\text{IV.79})$$

L'équation du mouvement correspondant aux d.d.l de jonction :

$$\{y_j\} = [Y_j]^s \{\eta\}^s + [R_{jj}]^s \{f_j\}^s \quad (\text{IV.80})$$

On obtient en substituant les deux équations (IV.80) pour les deux sous-structures dans l'équation (IV.79) :

$$\{f_j\}^1 = [R_{jj}^1 + R_{jj}^2]^{-1} [Y_j^2 \{\eta\}^2 - Y_j^1 \{\eta\}^1] \quad (\text{IV.81})$$

Annexe 2

On tire de l'équation (IV.77) et des deux équations (IV.79) les équations suivantes :

$$[-\lambda M^1 + \Omega^1] \{\eta\}^1 = -Y_j^1 [R_{jj}^1 + R_{jj}^2]^{-1} \left[Y_j^2 \{\eta\}^2 - \left[Y_j^1 \{\eta\}^1 \right] \right] \quad (\text{IV.82})$$

$$[-\lambda M^2 + \Omega^2] \{\eta\}^2 = -Y_j^2 [R_{jj}^1 + R_{jj}^2]^{-1} \left[Y_j^1 \{\eta\}^1 - \left[Y_j^2 \{\eta\}^2 \right] \right] \quad (\text{IV.83})$$

D'où le problème aux valeurs propres pour l'étude du système couplé :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} I^1 & 0 \\ 0 & I^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.84})$$

Avec :

$$\bar{K}_{11} = \Omega^1 + Y_j^1 [k_{jj}] Y_j^1 \quad \bar{K}_{22} = \Omega^2 + Y_j^2 [k_{jj}] Y_j^2 \quad (\text{IV.85})$$

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = Y_j^1 [k_{jj}] Y_j^2 \quad [k_{jj}] = [R_{jj}^1 + R_{jj}^2]^{-1} \quad (\text{IV.86})$$

Ce type de méthode a des avantages par rapport à la méthode à interfaces fixes. En effet la résolution du problème condensé donne une précision supérieure avec une efficacité numérique plutôt meilleure (rapidité de la résolution). De plus, elle est compatible avec des données analytiques et expérimentales.

Toutefois, le problème condensé final de cette méthode est fonction des seules coordonnées généralisées. Cette propriété est pénalisante d'une part, dans le cas où l'on s'intéresse à quelques d.d.l physiques imposés dans le modèle condensé, et d'autre part si l'on veut faire du calcul des réponses forcées. En effet, il faut remonter des coordonnées généralisées aux d.d.l physiques. L'autre difficulté majeure apparaît lors de l'assemblage de plus de deux sous-structures. En effet, le problème condensé n'est pas de la forme $([L_c] = {}^t [Z][L][Z] = [K], [M])$, ce qui entraîne des difficultés d'exploitation de cette méthode dans les procédures de recalage de modèle et d'optimisation. Dans ce cas, les techniques d'assemblage présentées précédemment ne sont plus applicables et par conséquent, seules les procédures manuelles, qui peuvent être longues et coûteuses, sont envisagées pour le calcul explicite des matrices condensées assemblées.

Dans la suite, on peut utiliser une méthode de condensation par multiplication dynamique utilisant les modes à interfaces libres des sous-structures [131]. Cette technique présente par rapport à la méthode de MacNeal l'avantage qu'on conserve les d.d.l de jonction permettant d'assembler les sous-structures d'une manière simple et systématique.

2.5 Méthode à interface libre

Dans ce cas le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes à interface libre, ses modes de corps rigide dans le cas où ils existent et ses modes d'attache [131].

D'où la relation de base de chaque sous-structure l'indice (s) a été omise dans les équations (IV.84-IV.103) :

$$\{y\} = [Y] \{\eta\} + [\Psi_r] \{\xi_r\} + [\Psi_a] \{\xi_a\} \quad (\text{IV.87})$$

où :

- $[Y]$: Base modale tronquée de la sous-structure à interface libre ;
- $[\Psi_r]$: Matrice des modes de corps rigide ;
- $[\Psi_a]$: Matrice des modes d'attache obtenue en calculant les déplacements produits par des forces unité appliquées aux à d.d.l de jonction en supposant que les autres d.d.l de jonction sont fixe obtenue par la relation :

$$[\Psi_a] = [G] [F_j] \quad (\text{IV.88})$$

avec :

$$[F_j] = \begin{pmatrix} 0 \\ I_j \end{pmatrix} \quad (\text{IV.89})$$

L'expression de la matrice $[G]$ dépend de la nature de la structure [15], dans le cas d'une structure qui ne contient pas de modes de corps rigides :

$$[G] = [K]^{-1} \quad (\text{IV.90})$$

Dans le cas d'une structure comportant des modes de corps rigide cette matrice devient :

$$[G] = [A] [K_c]^{-1} [A] \quad (\text{IV.91})$$

avec :

$$[A] = [I] - [\varphi^r]^t [\varphi^r] [M] \quad (\text{IV.92})$$

$$[{}^t\Psi_r] [M] [\Psi_r] = [I] \quad (\text{IV.93})$$

$[K_c]$: matrice de rigidité obtenue en fixant des d.d.l arbitraires pour rendre la structure isostatique. C'est-à-dire en remplaçant la partie correspondante de la matrice de rigidité de la structure initiale par zéro.

Annexe 2

Pour conserver les d.d.l de jonction, nous utilisons le découpage suivant :

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{bmatrix} \quad [\Psi_r] = \begin{bmatrix} \Psi_{ri} \\ \Psi_{rj} \end{bmatrix} \quad [\Psi_a] = \begin{bmatrix} \Psi_{ai} \\ \Psi_{aj} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.94})$$

On peut réécrire l'équation (IV.84) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{bmatrix} \{\eta\} + \begin{bmatrix} \Psi_{ri} \\ \Psi_{rj} \end{bmatrix} \{\xi_r\} + \begin{bmatrix} \Psi_{ai} \\ \Psi_{aj} \end{bmatrix} \{\xi_a\} \quad (\text{IV.95})$$

En développant les équations relatives au premier groupe de lignes, on obtient :

$$\{\xi_a\} = \Psi_{aj}^{-1} \{y_j\} - \Psi_{aj}^{-1} Y_j \{\eta\} + \Psi_{aj}^{-1} \Psi_{rj} \{\xi_r\} \quad (\text{IV.96})$$

En remplaçant $\{\xi_a\}$ dans l'équation (IV.84), on obtient :

$$\{y\} = \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} \{y_j\} + (\Psi_r - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} \Psi_{rj}) \{\xi_r\} + (Y - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} Y_j) \{\eta\} \quad (\text{IV.97})$$

La matrice $[Q]$ devient alors dans ce cas :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} & \Psi_r - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} \Psi_{rj} & Y - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} Y_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.98})$$

Les modes d'attaches résiduelles sont obtenus en enlevant des modes d'attache des modes à interface libre déjà retenus dans la base modale tronquée de la sous-structure à interface libre dans ce cas :

$$\{y\} = [Y] \{\eta\} + [\Psi_r] \{\xi_r\} + [\Psi_{ar}] \{\xi_a\} \quad (\text{IV.99})$$

$[\Psi_{ar}]$: matrice des modes d'attache résiduelle obtenue par :

$$[\Psi_{ar}] = [R] [F_j] \quad (\text{IV.100})$$

avec :

$$[R] = [G] - [Y] [\Omega]^{-1} [Y] \quad (\text{IV.101})$$

$[\Omega]$ est la matrice des valeurs propres retenues.

La matrice $[Q]$ devient alors :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} & \Psi_r - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} \Psi_{rj} & Y - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} Y_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.102})$$

2.6 Méthode hybride

Dans ce cas l'interface est divisée en une interface fixe et une interface libre [131]. Le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes propres, ses modes statiques de liaison et ses modes d'attaches.

D'où la relation de base de chaque sous-structure est donnée par :

$$\{y\} = [Y] \{\eta\} + [\Psi_{cj}] \{\{y_j f\}\} + [\Psi_{aj}] \{\xi_{jl}\} \quad (\text{IV.103})$$

$[Y]$: Base modale tronquée de la sous-structure $SS^{(s)}$;

$[\Psi_{cj}]$: Matrice des modes statiques de liaison obtenue en calculant les déplacements correspondant à un déplacement unité en un d.d.l d'interface fixe en supposant que les d.d.l d'interface libre sont libres ;

$[\Psi_{aj}]$: Matrice des modes d'attache obtenue en calculant les déplacements produits par des forces unité appliquées aux d.d.l d'interface libre en supposant que les d.d.l d'interface sont fixes.

La matrice $[Q]$ dans ce cas devient :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} & \Psi_{cj} - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} \Psi_{cj} & Y - \Psi_a \Psi_{aj}^{-1} Y_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.104})$$

Si on utilise les modes d'attache résiduelles, cette matrice devient :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \Psi_{ar} \Psi_{arj}^{-1} & \Psi_c - \Psi_{ar} \Psi_{arj}^{-1} \Psi_{cj} & Y - \Psi_{ar} \Psi_{arj}^{-1} Y_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.105})$$

2.7 Réduction des d.d.l de jonction

L'un des problèmes posé pour les méthodes de multiplication à interface fixe ou à interface libre est que l'on conserve tous les d.d.l de jonction entre les sous-structures. Ce qui augmente considérablement la taille du modèle condensé. Les méthodes de multiplication dynamique restent parfois insuffisantes pour réduire l'ordre du système condensé final, et la condensation des d.d.l de jonction devient nécessaire [14, 15, 131].

Nous proposons dans ce paragraphe une méthode de réduction des d.d.l de jonction basée sur l'utilisation des modes de l'interface. Ces modes sont obtenus à partir de la condensation aux interfaces de Guyan de la structure complète.

Le vecteur du déplacement de la structure globale est le suivant :

- $\{Y_j\}$ ($j \times 1$) : sous-vecteur des d.d.l de jonction, maîtres à conserver ;

Annexe 2

- $\{Y_i\}$ ($i \times 1$) : sous-vecteur des d.d.l internes esclave à éliminer.

L'équation modale du mouvement du système complet devient :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ij} & K_{jj} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ M_{ij} & M_{jj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.106})$$

On suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures sur les d.d.l internes.

En développant les équations relatives aux premier groupe de lignes, on obtient une relation entre $\{Y_j\}$ et $\{Y_i\}$ du type :

$$\{y_i\} = [t_{ij}(\lambda)] \{y_j\} \quad (\text{IV.107})$$

avec :

$$[t_{ij}(\lambda)] = -(K_{ii} - \lambda M_{ii})^{-1} (K_{ij} - \lambda M_{ij}) \quad (\text{IV.108})$$

La méthode proposée par Guyan [60] largement utilisée en analyse dynamique des structures, elle utilise uniquement la transformation statique ($\lambda = 0$) suivant :

$$[t_{ij}] = -K_{ii}^{-1} K_{ij} \quad (\text{IV.109})$$

L'équation de transformation est exprimée uniquement en termes de d.d.l de jonction (maîtres) :

$$\{y_i\} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \\ I_j \end{bmatrix} \{y_j\} = [T_{ij}] \{y_j\} \quad (\text{IV.110})$$

Cette transformation appliquée au problème initiale de la structure globale permet d'aboutir à un problème condensé de la forme :

$$([K_{cj}] - \lambda [M_{cj}]) \{y_j\} = 0 \quad (\text{IV.111})$$

avec :

$$[K_{cj}] = [T_{ij}] [K] [T_{ij}] [M_{cj}] = [T_{ij}] [M] [T_{ij}] \quad (\text{IV.112})$$

Le vecteur déplacement de l'interface peut s'exprimer par :

$$[y_j] = [\varphi_j] \{\eta_j\} \quad (\text{IV.113})$$

où $[\varphi_j]$ est la matrice tronquée des modes propres de l'interface.

Le vecteur condensé des déplacements de la structure assemblée devient :

$$\{y_c\} = \begin{Bmatrix} \eta_p^1 \\ \vdots \\ \eta_p^K \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots & I^K & \\ 0 & \dots & & \varphi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_p^1 \\ \vdots \\ \eta_p^K \\ \eta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.114})$$

Dans ce cas, la matrice de transformation pour chaque sous-structure devient :

$$[Z]^k = [Q]^k [\beta]^k [T] \quad (\text{IV.115})$$

avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} I^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots & I^K & \\ 0 & \dots & & \varphi_j \end{bmatrix} \quad (\text{IV.116})$$

Bibliographie

- [1] C. Andrieu-Renaud, S. Sudret and M. Lemaire, « *The PHI2 method : A way to compute time-variant reliability.* » *Reliability Engineering and System Safety*, 84(1), 75-86, 2004.
- [2] F. Axisa, « *Modélisation des systèmes mécaniques. Interaction fluide-structure .* » *Heniès*, 1, 11, 2001.
- [3] K. Bathe, « *Finite element procedures in Engineering Analysis .* » *Prentice-Hall, Englewood cliffs*, 1982.
- [4] A. Batou and C. Soize, « *Experimental identification of turbulent fluid forces applied to fuel assemblies using an uncertain model and fretting-wear estimation.* » *Mechanical Systems and Signal Processing Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(7), 2141-2153, 2009.
- [5] J. L. Batoz, et G. Dhatt, « *Modélisation des structures par éléments finis.* » vol. 1, *Solides élastiques*, 1990.
- [6] J.L. Beck and S.K. Au, « *Reliability of dynamic systems using stochastic simulation.* » In *EURODYN*, 2005.
- [7] M. Benaouicha, « *Contribution au développement d'algorithmes de couplage en interaction Fluide-Structure.* » *PhD thesis, Université de La Rochelle*, 2007.
- [8] P. Bjerager, « *Reliability evaluation by FORM/SORM and simulation.* » *Proceeding of Nordic Seminar on Applied Probabilistic Methods in Design of Structure*, 1986.

- [9] A. Bermudez, L. Hervella-Nieto, R. Rodriguez, « *Finite element computation of three-dimensional elasto-acoustic vibrations.* » *Journal of Sound and Vibration*, 2(19), 279-306, 1999.
- [10] R.M. Bennett, and A.H.-S. Ang, « *Formulation of structural system reliability.* » *Journal of Engineering Mechanics*, 112(11), 1135-1151, 1986.
- [11] T. Belytschko, D. P. Flanagan, and J. M. Kennedy, « *Finite element methods with user-controlled meshes for fluid-structure interaction.* » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1-3(33), 669-688, 1981.
- [12] W. A. Benfield, and R. Hrudá, « *Vibration analysis of structures by component mode substitution.* » *AIAA Journal* 7, 1255-61, 1971.
- [13] D. Borza, A. Makhoulfi and A. El Hami, « *Holographic vibration measurement and numerical modelling of immersed structures.* » *Proceedings of Speckle'06, SPIE Proceedings vol : 6341, Nimes, 2006.*
- [14] F. Bourquin, « *Component mode synthesis and eigenvalues of second-order operators, discretization and algorithm.* » *Math. Model. Number Anal.*, 26(3), 385-423, 1992.
- [15] K. Brahmí, « *Double condensation en sous-structuration dynamique.* » *Thèse de doctorat, Université de Franche-comté, France, 1996.*
- [16] A. Chateaufneuf, « *Comprendre les éléments finis : Principes, formations et exercices corrigés.* » *Ellipses Edition Marketing S.A., 2010.*
- [17] E. Capiiez Lernout, and C. Soize, « *Nonparametric Modeling of Random Uncertainties for Dynamic Response of Mistuned Bladed Disks.* » *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126, 610-618, 2004.
- [18] F. Casciati, S. Casciati, and L. Faravelli, « *Damage detection via response surface approximations.* » *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, 511-516, 2003.
- [19] H. Chebli et C. Soize, « *Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of nonhomogeneous uncertainties for dynamical systems.* » *JASA*, 115(2), 697-705, 2004.
- [20] P. Castellini, and C. Santolini, « *Vibration Measurements on Blades of a Naval Propeller Rotating in Water with Tracking Laser Vibrometer.* » *Measurement*, 24(1), 43-54, 1998.

Bibliographie

- [21] S. Cambier, « *Fiabilité, Approche probabiliste pour la prise en compte de la dispersion de paramètres mécaniques : Application à la fatigue vibratoire.* » *Thèse d'état, soutenue à L'ENSAM Paris, 2000.*
- [22] R. E. Cornwell, R. R. Craig, and C. P. Johnson, « *On the application of the mode-acceleration method to structural engineering problems.* » *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 11(5), 679-688, 1983.
- [23] R. R. Craig, « *Substructure methods in vibration.* » *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 117, 207-213, 1995.
- [24] R. R. Craig, and M. C. C. Bampton, « *Coupling of substructures for dynamic analyses.* » *A.I.A.A. Journal*, 6, 1313-1319, 1968.
- [25] R. R. Craig, « *Coupling of substructures for dynamic analyses : an overview.* » *In Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Atlanta, Etats-Unis, Avril 2000.*
- [26] V. Cotoni, R. Langley, and P. Shorter, « *A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory.* » *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5), 1077-1108, 2008.
- [27] W. J. T. Daniel, « *Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems. Role of part inversion in fluid-structure problems with mixed variables.* » *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, 1161-1175, 1980.
- [28] W. J. T. Daniel, « *Performance of reduction methods for fluid-structure eigenvalue problems.* » *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, 1585-1594, 1980.
- [29] A. Der Kiureghian, « *Analysis of structural reliability under model and statistical uncertainties : A bayesian approach.* » *Computational Structural Engineering* 1(2), 81-87, 2001.
- [30] A. Der Kiureghian, O. Ditlevsen, and J. Song, « *Availability, reliability and downtime of systems with repairable components.* » *In Reliability Engineering and System Safety*, 92(2), 231-242, 2007
- [31] A. Der Kiureghian, H.-Z. Lin, and S.-J. Hwang, « *Second-order reliability approximations.* » *Journal of Engineering Mechanics* 113(8), 1208-1225, 1987.

- [32] A. Der Kiureghian, and T. Dakessian, « *Multiple design point in first and second order reliability.* » *Structural Safety*, 20, 37-49, 1998.
- [33] A. Der Kiureghian, H.Z. Lin, and S.J. Hwang, « *Second order reliability approximations.* » *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, 113(8), 1208-1225, 1987.
- [34] A. Der Kiureghian, and Liu P.L., « *Structural reliability under incomplete probability information.* » *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 112(1), 85-104, 1986.
- [35] A. Der Kiureghian, and Y. Zhang, « *Space-variant finite element reliability analysis.* » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168, (1-4), 173-183, 1999.
- [36] P. Destuyender, « *Vibration des structures et des systèmes couplés.* » *L'Avoisier*, 2007.
- [37] P. Destuyender, « *Remarks on dynamic substructuring.* » *Eur. J. Mech., A/Solids* 8(3), 201-218, 1989.
- [38] N. Devictor, « *Fiabilité et mécanique : méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives.* » *Thèse d'état, soutenue à l'Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand*, 1996.
- [39] O. Ditlevsen, and P. Bjerager, « *Methods of structural systems reliability.* » *Structural Safety*, 3, 195-229, 1986.
- [40] O. Ditlevsen, and H.O. Madsen, « *Structural reliability methods.* » *John Wiley and Sons*, 1996.
- [41] K. Dolinski, « *First order, second moment approximation in reliability of structural systems : critical review and alternative approach.* » *Structural Safety*, 1, 211-231, 1983.
- [42] J.F. Durand, « *Modélisation de Véhicules en Vibroacoustique Numérique avec Incertitudes de Modélisation et Validation Expérimentale.* » *Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée*, 2007.
- [43] J.F. Durand, C. Soize, and L. Gagliardini, « *Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation.* » *Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3), 1513-1525, 2008.
- [44] A. El hami, G. Lallement, P. Minotti, and S. Cogan, « *Methods that combine finite group theory with component mode synthesis in the analysis of repetitive structures.* » *Computers and Structures*, 48, 975-982, 1993.

Bibliographie

- [45] A. El Hami, et B. Radi, « *Fiabilité et optimisation des systèmes, théorie et application, cours et exercices corrigés.* » *Ellipses, Technosup, 2011.*
- [46] A. El Hami, D. Borza, and J. Eduardo Souza de Corsi, « *Vibroacoustic analysis of cyclic structures by using dof's size reduction and holographic measurements.* » *International journal of Shock and Vibration*, 13(4-5), 355-366, 2006.
- [47] B. Fiessler, H.J. Neumann and R. Rackwitz, « *Quadratic limit states in structural reliability.* » *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, 105(4), 661-676, 1979.
- [48] C. A. Felippa, « *Symmetrization of the contained compressible-fluid vibration eigenproblem.* » *Appl. Num. Meth.*, 1, 241-247, 1985.
- [49] C. A. Felippa, and R. Ohayon, « *Mixed variational formulation of finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction.* » *Int. J. of Fluids and Structures*, 4, 35-57, 1990.
- [50] C. A. Felippa, and T. L. Geers, « *Axisymmetric free vibration of submerged spherical shell.* » *Jour. Acous. Sc. America*. 67(5), 1427-1431. 1980.
- [51] C. Fernandez, C. Soize, and L. Gagliardini, « *Modeling sound-insulation layers in vibroacoustics systems.* » *G. Manson and K. Worden, éd. : USD07, Sheffield, United Kingdom, 2007.*
- [52] C. Fernandez, C. Soize, and L. Gagliardini, « *Probabilistic modeling soundinsulation layers in vibroacoustic systems with a non parametric model of uncertainties.* » *In USNCCM09, US National Congress on Computational Mechanics, San Francisco, USA, 2007.*
- [53] G. S. Fishman, « *Monte Carlo concepts, algorithms and applications.* » *Springer Series in Operations Research, 1995.*
- [54] R. O. Foschi, « *Reliability theory and applications to risk analysis of power components and systems.* » *Electrical Power and Energy Systems*, 26, 249-256, 2004.
- [55] G. Gladwell, « *Branch mode analysis of vibrating systems.* » *J. of Sound and Vibration* 1, 41-59, 1964.
- [56] M. Guerich, and M. Hamdi, « *A numerical method for vibro-acoustic problems with incompatible finite element meshes using b-spline functions.* » *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(1), 1682-1694, 1999.

- [57] N. Gayton, J.M. Bourinet, and M. Lemaire, « *CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis.* » *Structural Safety*, 25(4), 99-121, 2003.
- [58] R. G. Ghanem, and P.D. Spanos, « *Stochastic finite elements : A spectral approach.* » Springer, Berlin, 1991.
- [59] Z. Guédé, « *Approche probabiliste de la durée de vie des structures sollicitées en fatigue thermique.* » Thèse de doctorat, Université de Clermont II, 2005.
- [60] R.J. Guyan, « *Reduction of stiffness and mass matrices.* » *AIAA Journal*, 3(2), 380-380, 1965.
- [61] A.M. Hasofer, and N. Lind, « *An exact and invariant first-order reliability format.* » *Journal of Engineering Mechanics*, 100, 111-121, 1974.
- [62] J. Huh, A. Haldar, and S.Y. Lee, « *Reliability assessment of real structures.* » *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, 313-320, 2003.
- [63] J. E. Hurtado, « *An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory.* » *Structural Safety*, 26, 271-293, 2004.
- [64] T. Haukaas, « *Finite Elements Reliability and Sensitivity Methods for Performance Based Engineering.* » PhD thesis, University of California, Berkeley, 2003.
- [65] W. Hurty, « *Dynamic analysis of structural systems using component modes.* » *AIAA J.* 3(4), 678-685, 1965.
- [66] R. F. Imbert, « *Analyse des structures par éléments finis.* » Cepadues édition, Toulouse, France, 1995.
- [67] R. L. Iman, J. C. Helton, and J. E. Campbell, « *An approach to sensitivity analysis of computer models-part i : Introduction, input variable selection and preliminary variable assessment.* » *Journal of Quality Technology*, 13(3), 1981.
- [68] B. M. Irons, « *Role of part inversion in fluid-structure problems with mixed variables.* » *AIAA Journal*, 7, 568, 1970.
- [69] N. Impollonia, and G. Ricciardi, « *Explicit solutions in the stochastic dynamics of structural systems.* » *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21, 171-181, 2005.
- [70] J. M. Jolion, « *Probabilités et statistiques.* » cours de l'INSA Lyon, 2006.

Bibliographie

- [71] M. C. Junger, and D. Feit, « *Sound, Structures, and Their Interaction.* » Originally published in 1972, Acoustical Society of America, New York, USA, 1993.
- [72] G. Kharmanda, and N. Olhoff, « *An extension of optimum safety factor approach to nonlinear reliability based design optimization.* » *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34,367-380, 2007.
- [73] M. Kleiber, and T. D. Hien, « *The stochastic finite element method.* » Ed. John Wiley, 1992.
- [74] K. Kubomura, « *A theory of substructure modal synthesis.* » *ASME J. Appl. Mech.*, 49, 903-909, 1982.
- [75] R. K. Kapania, and C. Byun, « *Reduction methods based on eigenvectors and ritz vectors for nonlinear transient analysis.* » *Computational Mechanics* 11(1), 65-82, 1993.
- [76] B.J. Leira, T. Holmas, and K. Herfjord, « *Response surface parameterization for estimation of fatigue damage and extreme response of marine structures.* » *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, 589-597, 2003.
- [77] B. Lalanne, M. Touratier, and T. Desmaison, « *Formulation linéarisée des problèmes couplés de vibrations dans les turbomachines.* » *Revue Française de Mécanique*, 78(2), 81-88, 1998.
- [78] C. Lesueur, « *Rayonnement acoustique des structures, vibroacoustique, interactions fluide-structures.* » Eyrolles, Paris, 1988.
- [79] M. Lemaire, « *Fiabilité des structures-Couplage mécano-fiabiliste statique.* » Hermès Science, 2005.
- [80] M. Lemaire, A. Chateaufneuf, J. C. Mitteau, « *Structural Reliability.* » Wiley, 341-439, 2010.
- [81] M. Lemaire, « *Finite element and reliability : Combined methods by response surface.* » *ROBAMAT-21st Century : Probabilities and Materials*, 46, 317-331, 1997.
- [82] M. Lemaire, « *Eléments finis et fiabilité : un mariage à la mode.* » *Fiabilité des Matériaux et des Structures*, 95-112, 1998.
- [83] P. Lyonnet, « *Ingénierie de la fiabilité.* » Ed. Tec Doc, Lavoisier, Paris, 2006.

- [84] B. R. Mace, and P. J. Shorter, « *A local modal/perturbational method for estimating frequency response statistics of built-up structures with uncertain properties.* » *Journal of Sound and Vibration*, 242(5), 793-811, 2001.
- [85] R. H. MacNeal, « *A hybrid method of component mode synthesis.* » *Comput. Struct.*, 1, 581-601, 1971.
- [86] S. Mahadevan, and R. Rebba, « *Computational model validation under uncertainty.* » *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, 345-351, 2003.
- [87] A. Mamouzi, A. Laneville, and P. Vittecoq, « *On ovaling oscillations of cylindrical shells in cross-flow : an improved model.* » *Eur. Jour. Mech., A/Solids*, 9(3), 233-251, 1990.
- [88] M. Mansouri, B. Radi, and A. El Hami, D. Borza, « *Reliability analysis of the vibro-acoustic problem, Numerical and experimental study.* » in *Proceedings of the International Conference Uncertainties, Brasil, 2012.*
- [89] M. Mansouri, B. Radi, and A. El Hami, « *RBDO Reliability analysis of the vibro-acoustic problem.* » in *Proceedings of the International Symposium on Aircraft Materials (ACMA), Fèz, 09-11 Mai, Maroc, 2012.*
- [90] M. Mansouri, B. Radi, and A. El Hami, « *Reliability-Based Design Optimization for the Analysis of Vibro-Acoustic Problems, application to a solid elastic 3D immersed in water.* » *CST2012, The Eleventh International Conference on Computational Structures Technology Dubrovnik, Croatia 4-7 September 2012.*
- [91] M. Mansouri, B. Radi, and A. El Hami, « *Contribution to the analysis and numerical simulation of vibro-acoustic phenomena by the modal synthesis methods.* » *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 6(1), 1-12, 2013.
- [92] M. Mansouri, B. Radi, and A. El Hami, « *Reliability analysis of vibro-acoustic problem.* » *Advanced Materials Research, Trans Tech Publications, Switzerland*, 682, 73-83, 2013.
- [93] J. Maynadier, « *Approches statistiques et fiabilistes en dynamique des structures.* » *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse*, 2003.
- [94] D. M. McGowan, and S. W. Bostic, « *Comparison of advanced reducedbasis methods for transients structural analysis.* » *AIAA journal* 31(9), 1712-1719, 1993.

Bibliographie

- [95] D. M. McGowan, S. W. Bostic, and C. J. Camarda, « *Development and comparison of advanced reduced-basis methods for the transient structural analysis of unconstrained structures.* » *NASA STI/Recon Technical Report N°94*, 1993.
- [96] M. P. Mignolet and C. C. Lin, « *A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks.* » *ASME Paper 96-GT-414*, 1996.
- [97] H. J. P. Morand, and R. Ohayon, « *Fluid-Structure Interaction : applied numerical methods.* » *John Wiley and Son Ltd*, 1995.
- [98] H. J. P. Morand, and R. Ohayon, « *Interactions fluides-structures.* » *Masson*, 1992.
- [99] G. Muscolino, G. Ricciardi, and N. Impollonia, « *Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input.* » *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15, 199-212, 1999.
- [100] J. P. Muzeau, and M. Lemaire, « *Reliability analysis with implicit formulations.* » *Probabilistic Methods for Structural Design*, 56, 141-160, 1997.
- [101] J. P. Muzeau, M. Lemaire, P. Besse, and J.-M. Locci, « *Evaluation of reliability in case of complex mechanical behaviour.* » *In OMAE, editor, Safety and Reliability*, 2, 47-56, 1993.
- [102] A. Nataf, « *Détermination des distributions dont les marges sont données.* » *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 225, 42-43, 1962.
- [103] B. Nour-Omid, and R. W. Clough, « *Dynamic analysis of structures using lanczos coordinates.* » *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 12(4), 565-577, 1984.
- [104] I. Nakayama, R. Nakamuta, R. Takeuchi, « *Sound insulation evaluated in radiation field of vibrating circular plate.* » *Acustica*, 47, 89-96, 1981.
- [105] R. Ohayon, and C. Soize, « *Structural Acoustics and Vibration. Mechanical Models Variational Formulations and Discretization.* » *Academic press, San Diego, USA*, 1998.
- [106] R. Ohayon, « *Reduced models for fluid-structure interaction problems.* » *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, 139-152, 2003.
- [107] PHIMECA, « *PHIMECA Engineering SA.* » *Phimeca Software-User's manual*, 2006.

- [108] M. Papadrakakis, and N.D. Lagaros, « *Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation.* » *Applied Mechanics and Engineering*, 191(32), 3491-3507, 2002.
- [109] R. Pavanello, « *Contribution à l'étude hydro-élastique des structures à symétrie cyclique.* » *PhD thesis, INSA de Lyon, France, 1991.*
- [110] B. Radi, A. Ayadi, A. Cherouat, L. Moreau, and A. El Hami, « *Identification of characteristics of Hydroformed structures using optimization methods.* » *Key Engineering Materials*, 473, 723-730, 2011.
- [111] B. Radi, and A. El Hami, « *Reliability analysis of the metal forming process.* » *Mathematical and Computer Modelling*, 45, 431-439, 2007.
- [112] B. Radi, A. Makhloufi, M. Sbaa, and A. El Hami, « *Analysis of the ultrasonic motor based Optimization Safety Factor.* » *International Journal Simulation of Multidisciplinary Design Optimization*, 4, 71-76, 2010.
- [113] B. Radi, and A. Makrizi, « *Analysis of a decomposed topology optimization problem.* » *International Journal of Design and Innovation Research*, 4(2), 47-57, 2009.
- [114] D. Roos, and C. Bucher, « *Adaptive response surfaces for structural reliability of nonlinear finite element structures.* » *NAFEMS Seminar*, 2003.
- [115] F. Richard, « *Approche fiabiliste de la défaillance des composants en matériaux composites.* » *Cours de mécanique, Université de Franche-Comté, 2004.*
- [116] M. Rosenblatt, « *Remarks on a multivariate transformation.* » *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 470-472, 1952.
- [117] M. Rguig, and F. Schoefs, « *Modélisation par surfaces de réponse d'une structure fissurée : cas d'une plate-forme offshore.* » *In XVIIème Congrès Français de Mécanique*, 6 pages, Troyes, France, 29 août-2 septembre 2005.
- [118] M. S. Ryu, « *Application des mobilités énergétiques au couplage fluide-structure.* » *Thèse de doctorat, Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA) ECL-INSA-UCBL, 2002.*
- [119] R. Rackwitz, « *Reliability analysis-a review and some perspectives.* » *Structural Safety*, 23, 365-395, 2001.

Bibliographie

- [120] S. Rubin, « *Improved component-mode representation for structural dynamic analysis.* » *AIAA Journal* 13(8), 995-1006, 1975.
- [121] F. Schoefs, « *Surface de réponse des efforts de houle dans le calcul de fiabilité des ouvrages.* » *PhD Thesis, Génie civil, Université de Nantes, Novembre 1996.*
- [122] A. Sinha, « *Calculating the statistics of forced response of mistuned cyclic assembly.* » *AIAA Journal*, (24)11, 1797-1801, 1986.
- [123] B. Sudret, « *Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansion.* » *Reliability Engineering and System Safety*, 93(7), 964-979, 2008.
- [124] C. Soize, « *Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems.* » *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17(4), 657-685, 1998.
- [125] C. Soize, « *Reduced models for structures in the medium-frequency coupled with internal acoustic cavities range for general external structural-acoustic systems.* » *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(6), 3362-3374, 1999.
- [126] C. Soize, « *A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics.* » *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15, 277-294, 2000.
- [127] C. Soize, « *A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy.* » *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2), 849-865, 1993.
- [128] J. F. Sigrist, « *Interaction fluide-structure : Analyse vibratoire par éléments finis.* » *Ellipses Edition Marketing S.A.*, 2011.
- [129] M. Souli, J.F. Sigrist, « *Interaction fluide-structure : modélisation et simulation numérique.* » *Lavoisier*, 2009.
- [130] P. Shorter et R. Langley, « *Vibro-acoustic analysis of complex systems.* » *Journal of Sound and Vibration*, 288(1), 669-699, 2005.
- [131] D. M. Tran, « *Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry.* » *Computers and Structures*, 79, 209-222, 2001.

- [132] F. Treyssede, and A. El hami, « *Une méthode couplée de sous-structuration dynamique/sous-domaines acoustiques pour des problèmes d'interactions fluide-structure de grande taille.* » *XIVe Colloque Vibrations Chocs et Bruits, Lyon, 16-18 juin 2004.*
- [133] Bureau Veritas, « *Building and operations of vibrations free propulsion plant and ships.* » *NR. 207-SMSE 1987.*
- [134] E. L. Wilson, M. W. Yuan, and J. M. Dickens, « *Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors.* » *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10(6), 813-821, 1982.*
- [135] P.H. Waarts, « *Structural Reliability using Finite Element Method, An appraisal of DARS.* » *Delft University Press, 2000.*
- [136] X. Wang, and K. J. Bathe, « *Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems.* » *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 2001-2017, 1997.*
- [137] J. T. Xing, W. G. Price, and Q. H. Du, « *Mixed finite element substructure-subdomain methods for the dynamical analysis of coupled fluid-solid interaction problems.* » *Philosophical Transactions of the Royal Society London, Series A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 354, 259-295, 1996.*
- [138] O. C. Zienkiewicz, and P. Bettess, « *Fluid-structure interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment.* » *Int. J. Num. Meth. Eng., 13(1), 1-17, 1978.*
- [139] O. C. Zienkiewicz, and R. E. Newton, « *Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid.* » *Int. Symp. Finite Element Techn., Stuttgart, 1969.*