



HAL
open science

OUTILS D'ANALYSES DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE MULTICOUCHES

Armelle Chabot

► **To cite this version:**

Armelle Chabot. OUTILS D'ANALYSES DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE MULTICOUCHES. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université de Nantes, 2013. tel-00848650

HAL Id: tel-00848650

<https://theses.hal.science/tel-00848650v1>

Submitted on 29 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License



Mémoire scientifique d'Habilitation à Diriger les Recherches

UNIVERSITÉ DE NANTES

Ecole Doctorale 498 SPIGA : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture de
l'Université de Nantes, Angers, Le Mans
Champ disciplinaire : Mécanique des Matériaux et des Structures

OUTILS D'ANALYSES DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE MULTICOUCHES

Armelle Chabot

Soutenu le 5 avril 2013, devant le jury composé de :

Hélène Dumontet, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Rapporteur

Alain Ehlacher, Professeur à l'Ecole des Ponts Paris Tech, Examineur

Ferhat Hammoum, Directeur de Recherche à l'Ifsttar, Examineur

Nicolas Moës, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, Rapporteur

Christophe Petit, Professeur à l'Université de Limoges, Rapporteur

Anh le Van, Professeur à l'Université de Nantes, Président du jury

« On peut comparer le monde à un bloc de cristal aux facettes innombrables. Selon sa structure et sa position, chacun de nous voit certaines facettes. Tout ce qui peut nous passionner, c'est de découvrir un nouveau tranchant, un nouvel espace. »

Alberto Giacometti

REMERCIEMENTS

Entre 2004 et 2012, mes avancées scientifiques sur le sujet de la modélisation de la fissuration dans les structures de chaussées et sur la mise au point d'un essai de caractérisation d'interface, n'auraient pas pu être faites sans la confiance à l'encadrement de ses étudiants de Master 2 de Mécanique Numérique des Structures de l'Université de Nantes que le Professeur Anh le Van a su m'accorder. Assez démunie sur Nantes, j'ai grandement apprécié de pouvoir bénéficier de stagiaires travailleurs et très bien formés aux sciences de la mécanique du solide et de la modélisation numérique pour aborder et faire évoluer en 5 à 6 mois seulement les modélisations M4. J'ai été très honorée qu'Anh le Van ait accepté de faire partie de mon jury d'HdR et je lui suis très reconnaissante de l'avoir présidé aussi humainement.

Je tiens ici à exprimer aussi toutes mes marques de sympathie et de reconnaissance à mon ancien Professeur de Paris VI, Françoise Léné, pour son soutien à ce que je puisse soutenir finalement ma thèse de doctorat avant l'été 1997, pour l'obtention de mon 1/2 poste d'ATER à ENS de Cachan en 1997/98 et l'appui aux différents concours qui ont suivis. En mémoire de ce lien que j'ai historiquement avec l'Université Pierre et Marie Curie, ayant été formée initialement et découvert la puissance des sciences de la mécanique en ce lieu, le Professeur Hélène Dumontet de Paris VI a sans hésité bien voulu rapporter ce travail d'HdR. Ça été pour moi un grand plaisir et honneur de pouvoir bénéficier dans mon jury d'une telle belle et grande personnalité. Je ne saurais jamais assez la remercier pour le temps passé qu'elle a bien voulu consacrer à rédiger un tel rapport élogieux et complet de mon travail. Il faut avouer que l'été précédent mon début de thèse en juillet 1990, j'ai été impressionnée et ai eu le privilège d'assister pour la première fois à une soutenance de thèse, la soutenance de Doctorat d'Etat d'Hélène sur « l'homogénéisation et les effets de bords dans les matériaux composites ». En un sens, la boucle a été ainsi bouclée.

Depuis la réunion RILEM de L. Francken au BRRC de Bruxelles de 2001, je n'ai cessé de côtoyer le Professeur Christophe Petit de l'Université de Limoges. A ces côtés, j'ai eu plaisir à œuvrer, à ma maigre échelle, à l'organisation de la 5^{ème} conférence internationale CP2004 dont il a eu la charge. J'ai grandement apprécié son amitié et sa clairvoyance française lors de nos différents déplacements. Je ne saurais jamais assez le remercier pour m'avoir encouragé et poussé à soutenir ce mémoire d'HDR et l'avoir rapporté aussi précisément. Au niveau du TC241-MCD de la Rilem, la tâche scientifique est immense pour faire converger les sensibilités étrangères et outre-Atlantique à l'écriture d'un livre état de l'art sur la fissuration, le décollement et les techniques de détections de fissures des chaussées, mais je sais que je peux compter sur le regard pertinent de Christophe pour contribuer au succès de ce projet ambitieux.

Après mon retour des US en 2010, j'ai eu la chance de pouvoir bénéficier d'une écoute scientifique attentive et intéressée du Professeur Nicolas Moës sur les questions de fissurations interfaciales. Je le remercie très sincèrement pour avoir accepté de rapporter ce travail. Dans un intérêt commun, je suis ravie que nous puissions continuer à pouvoir échanger, notamment au travers d'une thèse en démarrage pour 2013, sur les

développements numériques nécessaires à la construction d'un outil de calcul simplifié de chaussées fissurées.

Travailler aux côtés d'Alain a été pour moi un grand honneur et un choc scientifique. J'ai rarement connu un esprit aussi savamment façonné en intuitions scientifiques et raisonnements logiques. A ses côtés, j'ai souvent atteint mes limites, mais les visant ainsi, j'ai eu le plaisir de tenter l'impossible et de ressentir le bonheur de comprendre l'incompréhensible. Je souhaite lui témoigner ici toute mon amitié et ma gratitude pour les avis éclairés qu'il continue à m'offrir.

Notamment durant ces trois dernières années, dans un contexte intense de restructurations internes et variées, j'ai apprécié pouvoir me reposer sur mon collègue et ami, Ferhat, Directeur de Recherche, en charge du Laboratoire sur les Matériaux pour Infrastructures de Transport et l'en remercier infiniment. En nous donnant généreusement sa confiance, dans des élans de modestie tout à fait remarquables, il a su mettre à disposition toute l'aide nécessaire, non seulement administrative mais scientifique que ce soit en moyens humains ou expérimentaux, pour la mise au point d'un essai de décollement sous eau. J'ai eu autant plaisir à encadrer mon doctorant Manitou Hun qu'à partager les résultats scientifiques de ces travaux de thèse avec Ferhat. Ces trois dernières années scientifiques ont été sources de ressourcement personnel.

Je souhaite rendre ici également hommage au Professeur A.A.A. Molenaar de TU Delft pour les longues, instructives et amicales conversations que nous avons partagées lors des différentes rencontres internationales de la Rilem que ce soit en Europe ou aux USA. J'ai grandement apprécié l'intelligence remarquable de ce scientifique au service de l'Ingénierie et sa confiance pour accepter de clôturer en 2009 l'opération de recherche Fondephy (<http://or.lcpc.fr/fondephy>) dont j'avais la charge au niveau du LCPC. J'ai été impressionnée par la culture des Pays-Bas lors de ma participation au jury de thèse de M. Myradi en 2009 ou lors de la cérémonie de départ à la retraite d'André suivant la 7th conférence Rilem sur la fissuration des chaussées de CP2012 en juin 2012. Dans un contexte où, notamment en France, la formation par l'Université est toujours mal reconnue, il est rassurant de réaliser, qu'ailleurs, d'autres pays savent rendre les honneurs et leur titre de noblesse à la formation par l'Université et la Recherche.

Je remercie également ici tout particulièrement tous les étudiants cités dans ce mémoire, chercheurs et différents collègues nantais qui de près ou de loin ont contribué aux quelques résultats livrés succinctement dans ce manuscrit.

Ma gratitude va finalement à ma famille en particulier à mes parents et mon grand-père maternel pour m'avoir donné, sans le savoir, le goût de l'aventure et des découvertes, chacun à ses différentes échelles. Grâce à mon mari et boostée par l'arrivée de mes deux enfants, j'ai pu concrétiser dans les sciences de la mécanique une partie de mes rêves. Je leur suis très reconnaissante pour m'avoir supportée et encouragée pendant toutes ces années, jusqu'à la nuit précédant le dépôt de ce manuscrit.

L'avenir reste inconnu et fascinant, c'est ce qui me pousse à chercher toujours plus loin.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	3
SOMMAIRE.....	5
MEMOIRE SCIENTIFIQUE D’HDR	7
OUTILS D’ANALYSES DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE MULTICOUCHES	7
PREAMBULE	8
INTRODUCTION	9
<i>Principales références bibliographiques et encadrements du CV</i>	15
PARTIE 1.....	23
DEVELOPPEMENTS D’OUTILS MECANIQUE POUR L’EVALUATION DES EFFORTS D’INTERFACE AU BORD OU FISSURES VERTICALES DE MULTICOUCHES ELASTIQUES	23
1 <i>Principe de construction des Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)</i>	25
1.1 Approximations en contraintes et définitions	26
1.2 Les équations généralisées des M4 – Cas du M4-7n et du M4-5n.....	27
1.3 Equations du modèle M4_(2n+1)M.....	40
2 <i>Cas de la traction : solutions analytiques M4 pour l’étude du délaminage des matériaux composites</i>	41
2.1 Evaluation des différents M4 dans le cas de la plaque (0°,90°) _s	42
2.2 Généralisation des solutions M4_5n and M4_(2n+1) aux plaques $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$ non trouées.....	51
2.3 Solutions M4_5n and M4_(2n+1) pour les plaques $(\theta_1, \theta_2)_s$ trouées.....	53
3. <i>Cas de la flexion : adaptation des M4 à la modélisation des chaussées (projet FissuRoute)</i>	58
3.1. Combinaison du M4-5n avec un massif de Boussinesq.....	61
3.2. Combinaison du M4-5n avec un massif de Winkler.....	69
4. <i>Développement d’un essai de décollement pour les chaussées BCMC</i>	74
4.1 Démarche pour la mise au point d’un essai	75
4.2 Application et validation des critères M4 aux essais mixtes de décollements	79
4.3 Premiers résultats d’essais sous eau.....	83
5. <i>Bilan</i>	86
<i>Bibliographie</i>	88
PARTIE 2.....	95
EVALUATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES MATERIAUX BITUMINEUX DANS LE CALCUL DE STRUCTURES DE CHAUSSEES SOLLICITES PAR DES CHARGES MOBILES	95
1. <i>Méthode de calcul</i>	96
2. <i>Validations</i>	100
3. <i>L’outil de calcul ViscoRoute©</i>	104
4. <i>Applications</i>	105
4.1 Comparaisons ViscoRoute avec deux logiciels existants	105
4.2 Limites de l’hypothèse d’équivalence fréquence-vitesse.....	106
4.3 Effet structure sur le calcul de la résistance au roulement	107
4.4 Analyse de différents chargements sur le haut des couches de chaussées	109
4.5 Développement de ViscoRoute pour l’étude des décollements	111
5. <i>Bilan</i>	115

*« La liberté est pour la Science ce que l'air est pour l'animal. »
Henri Poincaré*

MEMOIRE SCIENTIFIQUE d'HdR

OUTILS D'ANALYSES DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE MULTICOUCHES

Que ce soit pour les secteurs de l'aéronautique ou des chaussées dans lesquels j'ai œuvré successivement, les structures multicouches par empilement successif de couches de différents matériaux présentent l'avantage, lorsqu'elles sont conçues, de pouvoir être arrangées spécifiquement en fonction du rôle que l'on souhaite leur voir jouer. En mécanique, les propriétés de chacune des couches agrémentées par leur ordre d'empilement et leur liaison entre couches constituent les facteurs essentiels du dimensionnement de l'assemblage final pour peu que l'on sache précisément ce qu'il doit subir, c'est-à-dire pour peu que l'on sache bien établir l'écriture des conditions aux limites. Par leur géométrie relativement simple, les structures multicouches ont également l'avantage de pouvoir être ainsi réalisées aisément mais aussi naturellement au cours de l'histoire. Ainsi, en dehors des domaines d'applications investiguées dans mes travaux de recherche, on rencontre ce genre d'ouvrage dans la nature (massif rocheux, sédiments, peau de l'homme, atmosphère, phénomènes météorologiques des Arcus multicouches). Si ces types de structures par leur géométrie sont naturels ou simples à concevoir et à réaliser, il n'en demeure pas moins que l'étude de leur endommagement reste complexe lorsqu'il se produit bien souvent près des bords ou surfaces de discontinuités orthogonales au plan d'empilement. Aussi, il me plaît à rêver que les sources de progrès et d'innovation dans la connaissance de ces structures et la détermination de solutions de renforcement de ce type d'ouvrages pourraient être puisées dans l'observation de ce que la nature a à nous offrir.



PREAMBULE

Le présent document ne prétend ainsi ni être exhaustif ni être un document de référence. Il se veut être le simple reflet synthétique des principaux travaux de recherche qui ont ponctués mon parcours effectué, pour l'essentiel après l'ENPC, au LCPC devenu IFSTTAR en janvier 2011. Le lecteur, possiblement frustré par un manque de détails dans le texte, trouvera je l'espère, soit dans les citations et/ou soit dans les publications fournies en annexe, les informations nécessaires à une compréhension plus fine des résultats ainsi présentés.

INTRODUCTION

Pour chacun des sujets qu'il m'a été donné d'étudier depuis 1990 (thèse de doctorat comprise), l'objectif final recherché est de finalement pouvoir offrir aux utilisateurs des outils mécaniques simplifiés, rapides et efficaces, pour analyser le fonctionnement de structures multicouches, leurs endommagements et évolutions. Plus particulièrement, ces modélisations doivent être capables, si possible à l'aide de calculs simplifiés analytiques ou semi-analytiques, de fournir à l'ingénieur type bureau d'études les informations tridimensionnelles nécessaires à cette analyse.

Deux grandes époques, ponctuées d'une phase de transition en 1999 due à ma prise de poste de chargée de recherche au LCPC – centre de Nantes, ont rythmé mes travaux de recherche. Dans cette introduction j'en résume les grandes lignes, associées aux références et encadrement de mon parcours scientifique.

La première époque concerne essentiellement des travaux de recherche effectués pour le domaine aéronautique sous la direction du Professeur Alain Ehrlacher à l'ENPC. Dans la première phase de ma thèse de doctorat (1990-1995) réalisée en lien avec un contrat du laboratoire et de la SNECMA et ponctuées par la naissance de mes enfants (janvier 1994 et août 1995), plusieurs travaux de recherche sur l'écriture de modèles, l'obtention de solutions analytiques et numériques ont été réalisés. Tout d'abord, pour la correction des effets de bords dans les poutres multicouches et l'analyse des poutres en flexion, un modèle curviligne cinématiquement très riche, dit d'ordre supérieur, à $18n$ ddl par nœud, prenant en compte la déformation et la courbure de chaque section de chaque couche ainsi qu'un logiciel "Poutre $18n$ ddl" en fortran 77 a été développé (Viau, 1990, 1991) (Chabot-Viau, 1992). Ses résultats ont été comparés et validés avec succès à ceux obtenus par le code élément finis Samcef (Chabot et *al.*, 1993). En HPP pour les structures multicouches élastiques (à n couches), à partir d'une définition classique des efforts membranaires et de cisaillements généralisés de plaque par couche, d'une définition de contrainte de cisaillement d'inter-couches et l'utilisation du principe des puissances virtuelles, ces travaux ont contribué à bâtir en 1993 une première version de l'écriture du Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches (M4) à $2n+1$ équations d'équilibre, dit le M4- $2n+1$ (Ehrlacher 1993, 1994, 1994b). Sur un problème de plaque en flexion cylindrique, la comparaison des solutions de ce premier modèle M4-($2n+1$) membrane avec celles de Pagano (1969) a été faite et publiée (Naciri et *al.*, 1998). Sur cette version j'ai également contribué à divers travaux de recherche de solutions analytiques pour le calcul des efforts dans une plaque stratifiée ($0^\circ, 90^\circ$), en traction trouée (Chabot, 1995) ou non. En 1995, j'ai également participé à la première version de la « maille éléments finis M4 » programmée en fortran dans la thèse de Smaoui (1996).

Puis dans une deuxième phase de mes travaux de thèse à partir de l'automne 1995, lors du recul des années pris pendant mes congés maternité, nous avons développé en 1996 et j'ai soutenu finalement en 1997 (Chabot, 1997), toujours dans le cadre de l'élasticité en petites déformations, une méthode de création de modèles théoriques élastiques conduisant à des critères adaptés à la prise en compte simplifiée du délaminage de systèmes multicouches en matériaux composites (homogènes et anisotropes). Grâce au logiciel de calcul formel, MATHEMATICA, j'ai pu obtenir plus facilement que par le passé, quelques solutions analytiques (Chabot, 1997b) (Chabot et Ehrlacher, 1998). J'ai pu enseigner certains de ces

modèles ponctuellement et, avant de quitter l'ENPC, ai produit un certain nombre de rapports de synthèse ou supports utiles à leur utilisation (Chabot 1997c-d) (Chabot et Ehlacher, 1997) (Chabot et Ehlacher 1998b-c, 1999, 2001).

J'ai, par ailleurs à la suite de ma soutenance de thèse, eu le plaisir de participer, pendant 2 années, au co-encadrement de la thèse de Laurent Lagarde, codirigée par Alain Ehlacher (de l'ENPC) et Françoise Léné (de l'Université Pierre et Marie-Curie), et à son jury de thèse en 2000 (Lagarde, 2000). Cette thèse avait pour but de tenter une adaptation théorique ardue de l'écriture des M4 à la modélisation quasi-analytique de poutres multicouches en grandes transformations planes (Lagarde et *al.*, 1999a, 1999b). Le but était d'analyser les contraintes génératrices de délaminage ou de flambement global ou local dans les butées lamifiées acier-élastomère utilisées dans l'industrie aéronautique. Les premières étapes de construction de ce modèle ont conduit à proposer une description totalement Lagrangienne des champs reposant sur une formulation variationnelle mixte avec le 2^{ème} tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et de déformation de Green-Lagrange. Du fait des non linéarités des relations contraintes-déformations et contraintes-déplacements, l'approximation des champs sous forme polynomiale en z s'est effectué, contrairement au cas HPP, à la fois sur les contraintes et les déformations. Cette cinématique enrichie reste suffisamment riche pour prendre en compte un éventuel gauchissement des sections. Les valeurs exactes des transformations aux niveaux de ces interfaces ont été introduites comme transformations généralisées du modèle, fournissant ainsi une information importante pour une étude éventuelle des phénomènes d'endommagement. Le problème simplifié ainsi formulé en variables généralisées reste non linéaire mais devient unidimensionnel. Une première écriture de ce modèle a été faite pour une approximation des champs au 1^{er} degré. Les premiers calculs sur MATHEMATICA ont montré qu'il est possible de traiter analytiquement un premier exemple 2D de validation de poutre multicouche en grandes transformations. Afin de conserver une signification physique au modèle proposé, la thèse de Laurent Lagarde s'est intéressée également aux définitions d'efforts généralisés de type résistance des matériaux adaptés à ces grandes transformations. Pour finir, une démarche de résolution numérique assez simple a été proposée.

En 1999, suite au stage de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie de Sabine Cantournet (Chabot et Cantournet, 2000) (Chabot et *al.*, 2000), alors que mon premier sujet de thèse sur la recherche de critère venait d'être acceptée par la direction, mon départ de l'ENPC, ne m'a pas permis d'aller plus avant théoriquement.

Après toutes ces années, car non utilisés depuis, je ne relaterai ainsi pas malheureusement dans ce document ces travaux théoriques faits en grandes transformations bien que je sois convaincue qu'ils méritent d'être repris avec soin, développés et appliqués pour l'étude de comportement de structures multicouches prenant en compte à la fois la viscoélasticité des matériaux et de la fissuration tel qu'on pourrait l'envisager pour la modélisation de structures de chaussées endommagées. Même si, personnellement, je n'ai pu finalement cosigner en 2006 un seul article de synthèse (Caron et *al.*, 2006) et une communication internationale avec actes (Caron et *al.*, 2003) sur l'écriture finalisée d'un de ces modèles M4, j'ai eu la satisfaction de constater que les nombreuses années consacrées à mettre au point ces modélisations n'ont pas été vaines. Aussi comme dit Joan Miró : «Ce qui est important, ce n'est pas de finir une œuvre, mais d'entrevoir qu'elle permette un jour de commencer quelque chose ». Ces modèles ont été largement utilisés dans de nombreuses thèses (> 15) et restent encore exploités actuellement au Laboratoire Navier de l'Ecole des Ponts Paris Tech. Pour une revue de ces travaux et des très nombreuses publications faites par mes anciens collègues, le lecteur intéressé pourra se référer à la bibliographie des dernières thèses soutenues à l'Ecole des Ponts Paris Tech, comme celles de Nguyen V.T

(2004) et de l'Université Paris Est de Nguyen D.T. (2012) pour lesquelles j'ai été invitée à participer aux jurys (cf. <http://hal.archives-ouvertes.fr/>).

La deuxième époque issue de ma mobilité thématique, institutionnelle et géographique sur Nantes lors de ma prise de poste de CR2 au LCPC fin 1999, concerne la modélisation de l'endommagement des infrastructures de transport. Dans la phase de prise de poste dans ce laboratoire dit de « recherches appliquées », j'ai dû me former à l'étude du comportement mécanique des structures de chaussées et à la fatigue des matériaux bitumineux. Arrivant dans l'unité, en même temps que Didier Bodin, j'ai apprécié et pu participer activement du point de vue expérimental (sur des essais de cisaillement et de flexion) et théorique à son encadrement de thèse sur l'endommagement par fatigue des enrobés bitumineux dirigée par Gilles Pijaudier-Cabot (de l'ECN à l'époque). Bénéficiant de nombreux travaux antérieurs de l'équipe chaussée du centre de Nantes, la mise au point d'un nouveau modèle élastique d'endommagement non local à l'aide d'un scalaire et l'analyse des effets thermiques pour modéliser l'évolution de l'endommagement des matériaux bitumineux lors d'essais normalisés de fatigue en laboratoire à grands nombres de cycles ont pu être publiés dans l'article de (Bodin *et al.*, 2004) et diverses communications (Bodin *et al.*, 2001, 2002b-d, 2003, 2004b-c). En parallèle extrêmement sollicitée par de divers et variés besoins de modélisation dans l'unité, en phase avec les propositions faites dans mon dossier de chargée de Recherche, j'ai ressentie le besoin très tôt d'adapter et de fixer finalement dans un rapport mon projet de recherche pour ce secteur (Chabot, 2000b). Mes travaux de recherche ont ainsi consisté à développer, à l'aide de partenariats publics/privés et divers encadrements d'étudiants, des modèles et outils sur essentiellement trois sujets chaussées exposés dans ce mémoire : adaptabilité des M4 aux chaussées, étude des décollements dans les chaussées, introduction des comportements viscoélastiques thermo-susceptibles des matériaux bitumineux dans la mise au point d'un logiciel de calcul de structure de chaussée.

Ces divers travaux, concernent essentiellement la durabilité des structures pour la conservation du patrimoine et son adaptabilité. Ils peuvent se résumer à l'étude du comportement mécanique des matériaux et des structures multicouches innovantes. Pour le domaine d'application chaussée, j'ai largement apprécié le caractère international que ces travaux ont pris depuis 2001. Ces coopérations internationales se sont accélérées dès 2004 pour aboutir pour 5ans au co-pilotage, avec le professeur Bill Buttlar de l'Université de l'Illinois où j'ai séjournée en 2010, du comité technique de la Rilem sur les mécanismes de fissuration et de décollement des chaussées bitumineuses et composites (TC241-MCD - <http://www.rilem.org/> - 2011-16). J'organise à ce titre la 8th conférence internationale sur le sujet à la cité des congrès de Nantes les 7-9 juin 2016 (<http://mcd2016.org>).

Ce mémoire scientifique est ainsi découpé en deux parties à tailles inégales.

La première partie concerne la mise au point et l'applicabilité des outils M4 depuis mes travaux de thèse jusqu'à présent pour l'évaluation élastique des contraintes d'interface responsables de décollement aux bords ou fissures verticales des structures multicouches. Outre un bilan final, elle est découpée en quatre sections.

La première section, concerne ainsi seule, la synthèse de la méthode finale de construction des modèles M4 soutenue dans ma thèse de doctorat (Chabot, 1997).

Dans la deuxième section, sont illustrées pour deux de ces M4, quelques solutions analytiques obtenues sur les cas d'école des matériaux composites en traction. Ces travaux effectués aux Ponts durant mes différents statuts précaires, outre le mémoire de thèse, font l'objet de deux rapports internes détaillés en anglais (Chabot et Ehrlicher, 1999, 2001).

Les chaussées étant des structures multicouches, la troisième section concerne le développement et l'adaptabilité des M4 à ce type de structure. En poste au LCPC, répondant aux besoins de modélisation du milieu chaussée, j'ai tenté de me concentrer sur le développement des M4 pour des analyses en statique des contraintes aux interfaces près des bords ou fissures de systèmes multicouches de chaussées à couches élastiques discontinues sur sol (projet FissuRoute). L'initiation de ces travaux a pu être faite dans le stage de DEA 2001 puis dans la thèse de Tran (2004) dirigée par Alain Ehrlicher. Ces travaux sont publiés dans l'article (Chabot et *al.*, 2005) et d'autres communications avec actes et comité de lecture (Tran et *al.*, 2003, 2004b) (Chabot et *al.*, 2004a-b, 2007). Ils ont consisté à développer un modèle de chaussée (M4-5nB) couplant un des M4, le M4-5n adapté aux problèmes de flexion, à un massif de Boussinesq. Si cette thèse a conduit à une approche théorique intéressante, le développement de l'outil pré-réalisé sous Matlab (Tran et *al.*, 2004c) n'a pas pu être finalisé, dans le temps imparti à cette thèse, pour être livré et utilisé de façon efficace comme espéré aux utilisateurs potentiels. Aussi, malgré de gros problèmes de recrutement d'étudiants en thèse sur ce domaine, j'ai personnellement pu continuer à avancer sur le projet grâce à l'encadrement de trois étudiants de Master2 de l'Université de Nantes (Guillo, 2004) (Bürkli, 2010) (Berthemet, 2012) (Berthemet et Chabot, 2013) à travers la réalisation de divers programmes développés sous l'environnement Scilab (Bürkli et Chabot, 2010) (Berthemet et Chabot, 2012). En parallèle quelques études faites en lien avec les essais accélérées du manège de fatigue et les machines Fabac servent à éclairer les réflexions sur le sujet (Pérez et *al.*, 2008) (Hornych et *al.*, 2008, 2010) (Kerzrého et *al.*, 2012). Dans l'objectif d'analyser les problèmes de propagations de fissure dans les chaussées, ces différents travaux ont conduit à proposer un nouveau modèle, le M4-5nW, basé sur une simplification plus grande du problème, par utilisation d'un massif de sol de Winkler et une réduction de la chaussée à trois couches M4-5n équivalentes.

La quatrième section concerne l'étude en laboratoire et l'évaluation théorique, numérique et expérimentale de la durabilité du collage de bimatériaux de chaussées BCMC (Béton de Ciment Mince Collé sur un matériau bitumineux.). Ces dernières combinaisons de matériaux sont dédiées en France à des structures urbaines et sont actuellement intensivement utilisées par la ville de Nantes pour ses nouvelles aires d'arrêts des Chronobus. Pour l'étude des problèmes de collage entre couches de béton de ciment et matériaux bitumineux, j'ai bénéficié du co-encadrement de deux doctorants. Tout d'abord la thèse Cifre ATILH de (Pouteau, 2004) a été dirigée par François de Larrard (du LCPC à l'époque). L'équipe d'accueil avait négocié le contrat à mon arrivée. A la fois un essai labo avec des pré-analyses M4 pour sa mise au point, des expérimentations sur route nationale et essais accélérés à l'aide des machines Fabac avec utilisation de techniques de mesures non destructives ont pu être réalisés. Les résultats de cette thèse, diffusés pour la profession dans les articles (Pouteau et *al.*, 2006) et (De Larrard et *al.*, 2001), sont publiés dans différentes communications avec actes et comité de lecture (Pouteau et *al.*, 2002, 2004b, 2005) (Chabot et *al.*, 2004a, 2008) (De Larrard et *al.*, 2001, 2005). Puis j'ai pu poursuivre ces travaux de modélisation et de programmation (Pouteau et *al.*, 2004c) (Le Corvec et *al.*, 2008) sur le sujet par l'encadrement de trois stages de Master2 de l'Université de Nantes (Guillo, 2004) (Spilman, 2007) (Le Corvec, 2008). Suite également

aux travaux du groupe eau/gel de mon opération de recherche Fondephy (Chabot, 2010a) (Vulcano-Greullet et *al.*, 2010) (Mauduit et *al.*, 2013), c'est finalement sur ce sujet que j'ai souhaité concentrer mes efforts de recherche pour évaluer mes modèles et mettre au point un nouvel essai. J'ai ainsi pu proposer et co-encadrer avec succès la thèse de Manitou Hun (Hun, 2012) dirigée par Ferhat Hammoum (Directeur de Recherche à L'Ifsttar). Outre un essai en laboratoire et un logiciel de pré dimensionnement des éprouvettes mis au point (Hun et Chabot, 2010), une partie de ces travaux récents vient d'être publiée dans l'article (Chabot et *al.*, 2013) et d'autres communications avec actes et comité de lecture (Hun et *al.*, 2011) (Hun et *al.*, 2012a) (Chabot et *al.*, 2013b). Ces travaux récents font l'objet d'un projet d'article sur les observations expérimentales par analyses d'images des effets de l'eau sur le collage des matériaux cimentaires coulés sur matériaux enrobés et de partenariats dans le cadre international du TC241-MCD de la Rilem (Hun et *al.*, 2012b).

La seconde partie de ce mémoire présente les travaux de recherche effectués lors de mon poste de Chargé de Recherche à Nantes, sur l'évaluation sous charges roulantes du comportement structural des chaussées à base de matériaux bitumineux considérés viscoélastiques et thermo-susceptibles. Cette partie est ainsi entièrement consacrée au sujet nommé ViscoRoute. Avant un bilan, elle est elle-même découpée en quatre sections très synthétiques.

Dans la première section, je résume les principaux éléments du problème mécanique à résoudre.

Dans une seconde section, les différentes validations réalisées sont données.

Dans une troisième section, le logiciel ViscoRoute réalisé finalement est présenté. Le noyau de ce logiciel a été adapté et mis au point ponctuellement entre 2002 et 2005 en partenariat avec Denis Duhamel de l'école des Ponts Paris Tech qui avait en parallèle pu bénéficier, pour les problèmes ferroviaires, de l'encadrement de la thèse de VH Nguyen (2002) sur le sujet. Avec une première version d'interfaçage du logiciel sous Visual Basic faite par le technicien informaticien de l'équipe du LCPC de l'époque, ces travaux ont fait l'objet de plusieurs publications (Duhamel et *al.*, 2003a-b) (Chabot et *al.*, 2006) dont un article paru dans le Bulletin des Ponts et Chaussées par (Duhamel et *al.*, 2005). Puis, le noyau de calcul généralisé à la prise en compte de plusieurs charges à diverses formes géométriques, a pu être interfacé en langage Python dans une seconde version par Tung le post-doctorant du chef de division de l'époque. A partir de fin 2007, chargée officiellement du projet par ma direction, ce logiciel a pu être finalisé grâce notamment au support d'Olivier Chupin post-doctorant sur le sujet puis chercheur dans l'équipe. Depuis fin 2008, associé à l'article (Chabot et *al.*, 2010), le logiciel ViscoRoute©2.0 est distribué gratuitement répondant ainsi à de multiples demandes des entreprises, des enseignants et des laboratoires de recherche non seulement français mais étrangers (Chabot et *al.*, 2009). Par ailleurs, en allant notamment donner diverses conférences lors d'invitation ou de visite à l'Université Technologique de Delft (Chabot, 2009) et à l'Université de Réno (Chabot, 2010b), j'ai pu comparer les résultats du logiciel ViscoRoute© ainsi bâti avec ceux obtenus par les deux autres logiciels comparables et existants à ma connaissance sur la planète. Comme pour ViscoRoute©, j'ai incité l'équipe américaine de l'Université de Réno à mettre en ligne gratuitement leur logiciel 3D-Move sur le net ayant ainsi l'espoir que certaines avancées de la recherche financées par les différents états, soient ainsi restituées à la collectivité.

La quatrième section évoque les diverses applications et développements qui ont pu être faits et publiés dans l'équipe avec cet outil (Chupin et *al.*, 2009, 2010, 2010b, 2012) (Hammoum et *al.*, 2010). Outre le post-doc d'Olivier Chupin que j'ai eu la chance de co-encadrer certains de ces résultats ont été obtenus en parallèle à l'aide de l'encadrement de divers étudiants type Master 2 de l'Université de Dresden (Loft, 2005), d'Evry (Senti, 2007) et de Nantes (Poché, 2005). Par ailleurs, il est à noter que plusieurs travaux de thèses de l'équipe ont utilisées et utilisent le logiciel dont les thèses en cours d'Antoine Martin (2011-14) sur un sujet ferroviaire et la thèse de Damien Grellet (2009-2013) (Grellet et *al.*, 2012), en partenariat avec l'Université de Laval au Québec, sur l'étude avancée de l'effet du type et de la pression des pneus sur le comportement mécanique des chaussées.

Principales références bibliographiques et encadrements du CV

- Berthemet F. 2012. *Contribution au développement d'un outil de calcul rapide de chaussées fissurées*. Stage de MASTER2 Mécanique Numérique des Structures (MN2S) de l'Université de Nantes.
- Berthemet F., **Chabot A.**, 2012. Calcul de structures de chaussée tricouche fissurée en 2D par le modèle M4-5nW, programmation scilab version recherche.
- Berthemet F., **Chabot A.**, 2013. Apports du massif de Winkler dans la construction d'un outil de calcul d'analyse de structure multicouche fissurée reposant sur un sol. 21^{ème} *Congrès Français de Mécanique*, 26-30 Août, Bordeaux.
- Bodin D., **Chabot A.**, De la Roche C., Piau J. M., Pijaudier-Cabot G., 2001. Essais de fatigue sur enrobés bitumineux et perspectives de modélisation par la mécanique de l'endommagement. 15^{ème} *Congrès Français de Mécanique*, 3-7 Septembre, Nancy, 6 pages.
- Bodin D. (thèse soutenue le 12 décembre 2002). *Endommagement par fatigue des enrobés bitumineux. Modélisation – Expérimentation*. Thèse de l'ECN. http://media.lpc.fr/ext/pdf/theses/rou/throu_bodin.pdf
- Bodin D., Pijaudier-Cabot G., De la Roche C., **Chabot A.**, 2002b. Application d'un modèle d'endommagement aux essais de fatigue sur enrobés bitumineux. 3^{ème} *rencontres du Réseau Doctoral Génie Civil*, 10-13 mars, Aussois.
- Bodin D., **Chabot A.**, De la Roche C., Pijaudier-Cabot G., 2002c. Endommagement par fatigue des matériaux bitumineux – Recherche de lois d'évolution de l'endommagement. *Matériaux 2002*, 21-25 octobre, Tours, 5 pages. (http://pem.utbm.fr/materiaux_2002/file/pdf/CM04003.PDF)
- Bodin D., Pijaudier-Cabot G., de La Roche C., **Chabot A.**, 2002d. A continuum Damage Approach of Asphalt Concrete Fatigue Tests. *Proceedings of 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, June 2-5, Columbia University, New York, USA, 8 pages on CD (Paper263.pdf).
- Bodin D., **Chabot A.**, De la Roche C., Pijaudier-Cabot G., 2003. Une nouvelle loi pour l'endommagement par fatigue des enrobés bitumineux. 16^{ème} *Congrès Français de Mécanique*, 1-3 Septembre, Nice, 6 pages.
- Bodin D., de La Roche C., **Chabot A.**, 2004b. Prediction of bituminous mixes fatigue behavior during laboratory fatigue tests. *Proceedings of the 3rd Eurasphalt & Eurobitume Congress*, 12-14 mai, Vienne, Autriche. **2**, 1935-1945, Print ISBN 90-802884-4-6.
- Bodin D., Belzung F., de La Roche C., **Chabot A.**, 2004c. Thermomechanical Modelling for Fatigue Damage of Bituminous Materials. *Proceedings of the Fifth International RILEM Conference Cracking in Pavements*, May 5-8, Limoges. In Rilem Proceedings: 675-682, Print ISBN 2-912143-47-0.
- Bodin D., Pijaudier-Cabot G., de La Roche C., Piau J. M., **Chabot A.**, 2004. Continuum Damage Approach to Asphalt Concrete Fatigue Modeling. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **130** (6): 700-708. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:6(700).
- Bürkli L. 2010. *Contribution au développement d'un outil d'analyse mécanique pour chaussées fissurées*. Stage de MASTER2 PRO Analyse numérique de l'Université de Nantes.
- Bürkli L., **Chabot A.**, 2010. Calcul de structures de chaussée bi-couche fissurée en 2D par le modèle M4-5nW, programmation scilab version recherche.

- Cantournet S. 1999. Taux de restitution d'énergie dans le délaminage des matériaux composites. Stage de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- Caron J.-F., Diaz Diaz A., Carreira R. P., **Chabot A.**, 2003. Multiparticle modelling for the prediction of delamination in multilayer", *Workshop on Advances in the Statics and Dynamics of Delamination*, 15-16-17 Septembre, Cachan, France, 2 pages.
- Caron J. F., Diaz Diaz A., Carreira R. P., **Chabot A.**, Ehrlacher A., 2006 (Available on line February 8, 2005). Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Sciences and Technology*, **66** (6): 755-765. DOI:10.1016/j.compscitech.2004.12.022.
- Chabot-Viau A.** (décembre) 1992, "*Modélisation d'une poutre multicouche à N*18ddl*". 2^{ème} version. Rapport d'avancement du contrat Convention N°486 SNECMA-AENPC-CERAM.
- Chabot A.**, Ehrlacher A., Naciri T. (11-14 mai) 1993. Modélisation d'une poutre multicouche à 18n ddl. *Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 178-185.
- Chabot A.**, Ehrlacher A. (juin) 1995. *Calcul d'une plaque trouée par le modèle M4 simplifié*. Note interne du CERAM (ENPC).
- Chabot A.** (Juin) 1997. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00197853/fr/>).
- Chabot A.** 1997b. Logiciels de calcul semi-analytiques d'effets de bord dans des plaques d'empilement quelconque à l'aide des modélisations M4. Programmmations sous MATHEMATICA.
- Chabot A.** 1997c. Support théorique de TP sur les essais de délaminage du cours "Endommagement des matériaux composites". Module d'enseignement expérimental de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Chabot A.** 1997d. Calcul du (0°,90°) par le modèle multiparticulaire M4_(2n+1)M du cours "Matériaux et structures composites =". Module d'enseignement expérimental de l'ENPC.
- Chabot A.** et Ehrlacher A. 1997. Chapitre 6 du cours "Matériaux et structures composites". Module d'enseignement expérimental de l'Ecole Polytechnique.
- Chabot A.**, Ehrlacher A. (janvier) 1998b. Méthode de construction de Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (modèles M4) pour l'analyse des efforts à l'interface entre les couches de plaques composites. Rapport de recherche du CERAM (ENPC).
- Chabot A.** (mai) 1998c. Analyse des contraintes à l'interface entre les couches d'une plaque composite trouée à l'aide de deux Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4). Rapport de recherche du CERAM (ENPC).
- Chabot A.**, Ehrlacher A. (18-20 nov.) 1998. Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4_5n et M4_(2n+1)M pour l'étude des effets de bord. *Comptes-rendus aux 11ème Journées Nationales sur les Composites (JNC11)*, Arcachon, **3**, 1389-1397, (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00325238/en/>).
- Chabot A.**, Ehrlacher A., 1999. New simplified models for interlaminar stress analysis of laminates. Rapport CERMMO en anglais
- Chabot A.**, Cantournet S., A. Ehrlacher (15-17 novembre) 2000. Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches. *Comptes-rendus aux 12ème Journées Nationales sur les Composites (JNC12)*, ENS de Cachan, ISBN 2-9515965-0-2, **2** : 775-784.
- Chabot A.**, Cantournet S. (25 mai) 2000. Analyse des taux de restitution d'énergie dans le délaminage des multicouches à l'aide de modèles multiparticulaires. *Journée*

Scientifique et Technique AMAC – Délaminage des multicouches phénomènes, modèles et critères, Champs-sur-Marne, Annales des Composites, 1 : 83-90.

- Chabot A.** (juin) 2000b. Projet de recherche pour la modélisation des chaussées période 2000-2004. Rapport DMSC/CCGR (LCPC).
- Chabot A.,** Ehrlacher A., 2001. New simplified analysis of interlaminar stresses in a multilayered plate with a hole. Rapport CERMMO en anglais.
- Chabot A.,** Tran Q. D., Pouteau B., 2004a. Simplified modelling of a cracked composite pavement. *First International Elsevier Conference on Failure Analysis*, 12-14 juillet, Lisbonne, Portugal, 1 page + 1 Poster format double.
- Chabot A.,** Tamagny P., Tran Q. D., Ehrlacher A., 2004b. Modeling of stresses for cracking in pavements. *5th International CROW-workshop*, 31 mars-2 avril, Istanbul, Turkey, 10 pages on CD.
- Chabot A.,** Tran Q. D., Ehrlacher A. 2005. A simplified modeling for cracked pavements - Modèle simplifié pour le calcul des chaussées. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées*, ISSN 1269-1496, (258-259) : 105-120.
- Chabot A.,** Tamagny P., Duhamel D., Poché D., 2006. Visco-elastic modeling for asphalt pavements – software ViscoRoute. Proceedings of the *10th International Conference on Asphalt Pavements*, 12-17 August, Québec, Canada. Proceedings, **2**: 5-14, Print ISBN 978-2-550-49009-8.
- Chabot A.,** Tran Q. D., Ehrlacher A., 2007, A modeling to understand where a vertical crack can propagate in pavements. Proceedings of the *International Conference on Advanced Characterization of Pavement and Soil Engineering Materials*©, June 20-22, Athens, Greece. In Taylor & Francis Group Proceedings, **1**: 431-440, Print ISBN 978-0-415-44882-6.
- Chabot A.,** Pouteau B., Balay J.-M., De Larrard F., 2008. FABAC Accelerated Loading Test of Bond between Cement Overlay and Asphalt layers. Proceedings of the *Sixth International RILEM Conference on Cracking in Pavements*©, June 16-18, Chicago, US. In Taylor & Francis Group Proceedings, 13-23, Print ISBN 978-0-415-47575-4.
- Chabot A.** Chupin O., Deloffre L., Duhamel D, 2009. Viscoroute2.0: qualification RST 28/11/08, dépôt logiciel à l'APP le 12/10/09 et mis à disposition gratuite sur le site web du LCPC (www.lcpc.fr) décembre 2009

A noter :

- 1 an après mise à disposition gratuite sur le net, plus de 150 utilisateurs dans 20 pays étrangers, évaluation à réactualiser plus finement lors d'un workshop à organiser
- Plus de 30 pays utilisateurs jusqu'à présent:
 - Europe : Angleterre (Université de Nottingham) ; Allemagne, Belgique (CRR , ...) ; Danemark, France (Lycée Toulouse, Prépa Nantes, LCPC, LR, STAC, Insa Rennes/Lyon/Strasbourg, ENTPE, Université de Bordeaux, de Limoges, Dom tom – Mayotte – différentes sociétés d'ingénieries - ITECH, Eurovia, Eiffage, Colas, Michelin) ; Hongrie (Budapest) ; Italie (Université de Pise, de Parme, ...) ; Pays-Bas (TU Delft, OOMS, ...) ; Pologne ; République Tchèque ; Suisse (Zurich, EMPA Dübendorf),
 - Afrique: Algérie, Bénin, Cameroun, Gabon, Madagascar, Mali, Maroc, République Centre Africaine (Bangui), Sénégal (Dembani), Tchad, Tunisie, Tunisie,
 - Amérique: Canada (Monreal, Quebec, MTQ, Mont Royal, Univ. Laval) ; USA (Nevada - Univ. Reno et Carson city -, Univ. Illinois, Michican State University, Colas US), Brésil (Florinopolis, Santo Amaro da Imperatin, Sao Paulo); Argentine (Buenos Aires)
 - Asie: Israël, Irak
 - Océanie : Australie (ARRB)

© Conference Proceedings Citation Index- Science (CPCI-S)

- Chabot A.**, 2009, Simulation of Moving Load Effects on Asphalt Pavement. *International workshop on Artificial Intelligence and Visco-Elastic Analyses for Modelling of Pavement Structures*, April 8, University of Delft, Pays Bas (Invitation de l'Université Technologique de Delft - Présentation distribuée aux auditeurs via un CD).
- Chabot A.**, Chupin O., Deloffre L., Duhamel D., 2010. Viscoroute 2.0: a tool for the simulation of moving load effects on asphalt pavement. *RMPD Special Issue on Recent Advances in Numerical Simulation of Pavements*, **11** (2): 227-250, DOI: 10.1080/14680629.2010.9690274.
- Chabot A.**, 2010a, Final Results of Fondephy – A Four years research program lead by LCPC. *International session of the AAPT conference*, March 7-10, Sacramento, US (Invitation)
- Chabot A.**, 2010b, ViscoRoute© software: simulation of Moving load on asphalt pavement. March 12. *Visiting - University of Reno*, US (Séminaire de visite)
- Chabot A.**, Hun M., Hammoum, F. 2013 (Available on line December 29, 2012). Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for “composite” pavements. *Construction and Building Materials*, **40**: 1076-1087. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2012.11.027.
- Chabot A.**, Hun M., Hammoum F., 2013b. Determination of energy release rate for a mixed-mode debonding test for « composite » pavements. 6th International Symposium on defect and Material Mechanics, July 1-5, Centrale Nantes, France.
- Chupin O., **Chabot A.**, 2009. Influence of Sliding interfaces on the response of flexible pavement. Proceeding of the 6th *International Conference on Maintenance and Rehabilitation of Pavements and Technological control, MAIREPAV6*, July 6-10, Politecnico Di Torino, Italie. Edited by Ezio Santagata, **2**:675-684, Print ISBN 978-88-8202-0293
- Chupin O., Piau J.M., **Chabot A.**, 2010b. Effect of Bituminous Pavement Structures on the Rolling Resistance. Proceedings of the *11th International Conference on Asphalt Pavements*, 1-6 August, Nagoya Aichi, Japan. Curran Associates: **2**: 1287-1296, Print ISBN: 978-1-61839-073-8 (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00508784>)
- Chupin O., **Chabot A.**, Piau J.-M., Duhamel D., 2010 (Available on line September 28, 2010). Influence of sliding interfaces on the response of a visco-elastic multilayered medium under a moving load. *International Journal of Solids and Structures*, **47**:3435-3446, DOI:10.1016/j.ijsolstr.2010.08.020.
- Chupin O., Piau J.M., **Chabot A.**, 2013 (Available on line August 3, 2012). Evaluation of the Structure-induced Rolling Resistance (SRR) for pavements including viscoelastic material layers. *Materials and Structures*, **46** (4): 683-696. DOI: 10.1617/s11527-012-9925-z
- De Larrard F., Pouteau B., **Chabot A.**, Clément J. L., Balay J. M. (mars) 2001. Chaussées composites et nouvelles applications du ciment dans la route. *TPTech*, Paris (6 pages).
- De Larrard F., **Chabot A.**, Sedran T., Pouteau B., Mathias V., 2005, Recent developments in French concrete pavement technology. *Global Construction: Ultimate concrete opportunities*, 5-7 July, Dundee, Scotland. Proceedings of the *International Conference on concrete for transportation Infrastructure*, 19-26, DOI: 10.1680/cfti.34020, Print ISBN: 978-0-7277-3402-0.
- Duhamel D., V. H. Nguyen, **Chabot A.**, Tamagny P., 2003a. Modélisation de chaussées viscoélastiques. *16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 1-3 Septembre, Nice, 6 pages.

- Duhamel D., Nguyen V. H., **Chabot A.**, Tamagny P., 2003b. Modelling of multilayer viscoelastic road structures under moving loads. Proceedings of the 9th *International Conference on Civil and Structural Engineering Computing*, September 2-4, Amsterdam, Netherlands, 15 pages on CD, ISBN 9780948749896.
- Duhamel D., **Chabot A.**, Tamagny P., Harfouche L., 2005. Viscoroute: Visco-elastic modeling for asphalt pavements - Viscoroute: Modélisation des chaussées bitumineuses. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées*, ISSN 1269-1496, (258-259) : 89-103.
- Ehrlacher A., Caron J. F., **Chabot A.**, Douçot E., Naciri T., 1993. Modélisation multiphasique des plaques composites en flexion. *1er Congrès National de Mécanique*, 13-16 avril, Rabat (Maroc), Tome I : 149-156 (<http://smsm.fsac.ma/congres/c1t1/>).
- Ehrlacher A., **Chabot A.**, Naciri T. 1994 (janvier), "Prévision de l'initiation du délaminage". Convention SNECMA-AENPC N°486.
- Ehrlacher A., Naciri T., **Chabot A.**, Caron J. F. (novembre) 1994b. Analyse des efforts d'interface à l'aide de la modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4). *Comptes-rendus aux 9ème Journées -Nationales sur les Composites (JNC9)*, St. Etienne, ISBN- 2-9505117-2-4, 1, 203-212.
- Grellet D., Doré G., Kerzrého J.-P., Piau J. M., **Chabot A.**, Hornych P. 2012. Experimental and theoretical investigation of three dimensional strain occurring near the surface in asphalt concrete layers. Proceedings of the 7th *Rilem International Conference on Cracking in Pavements*, June 20-22, 2012, Delft, The Netherlands. RILEM Bookseries, 4: 1017-1027, DOI: 10.1007/978-94-007-4566-7_97, Print ISBN: 978-94-007-4565-0.
- Guillo C. 2004. *Validations par éléments finis d'un modèle simplifié pour l'étude de décollement à l'interface d'un multicouche de chaussée*. Stage de DESS de l'Université de Nantes.
- Hammoum F., **Chabot A.**, St. Laurent D., Chollet H., Vulturescu B., 2010 (Available on line December 15, 2009). Accelerating and Decelerating Effects of Tramway Loads moving on Bituminous Pavement. *Materials and Structures*, 43:1257-1269, DOI 10.1617/s11527-009-9577-9.
- Hornych P., Kerzreho JP, **Chabot A.**, Bodin D., Balay J.-M., Deloffre L. 2008, The LCPC's ALT facility contribution to pavement cracking knowledge. Proceedings of the *Sixth International RILEM Conference on Cracking in Pavements* [©], June 16-18, Chicago, US. In Taylor & Francis Group Proceedings, 671-681, Print ISBN 978-0-415-47575-4.
- Hornych P., Kerzrého J.-P., Sohm J., **Chabot A.**, Trichet S., Joutang J.-L., Bastard N. 2012. Full scale tests on grid reinforced flexible pavements on the French fatigue carousel. Proceedings of the 7th *Rilem International Conference on Cracking in Pavements*, June 20-22, 2012, Delft, The Netherlands. RILEM Bookseries, 4: 1251-1260, DOI: 10.1007/978-94-007-4566-7_119, Print ISBN: 978-94-007-4565-0.
- Hun M., **Chabot A.**, 2010. Logiciel de calcul des champs mécaniques de l'essai bicouche délaminant en flexion 4pt, programmation scilab version recherche.
- Hun M., **Chabot A.**, Hammoum F., 2011. Analyses mécaniques d'une structure bi-couches délaminantes par flexion 4 points. 20^{ème} *Congrès Français de Mécanique*, 28 Août – 2 septembre, Besançon, 1815-1820 (<http://hdl.handle.net/2042/46451>).

- Hun M., **Chabot A.**, Hammoum F. 2012a. A four point bending test for the bonding evaluation of composite pavement. Proceedings of the *7th Rilem International Conference on Cracking in Pavements*, June 20-22 2012, Delft, The Netherlands. RILEM Bookseries, **4**: 51-60, DOI: 10.1007/978-94-007-4566-7_6, Print ISBN: 978-94-007-4565-0.
- Hun M., **Chabot A.**, Hammoum F. 2012b. Characterization of interface behaviors of bilayer materials using digital image correlation. Contribution to the Rilem TC241-MCD STAR for TG3, 8 p.
- Hun M. (thèse soutenue le 29 Octobre 2012). *Influence de l'eau dans le décollement par flexion de bicouches de chaussée urbaine*. Thèse de l'ED SPIGA, ECN.
- Kerzrého J.P., Hornych P., **Chabot A.**, Deloffre L., Trichet S., Coirier G., Gouy T, 2012. Evaluation of the aggressiveness of different multi-axle loads using APT tests. Proceedings of the *4th International Conference on Accelerated Pavement Testing*, September 19-21, Davis, California, USA. CRC Press 2012: 505–517, DOI: 10.1201/b13000-62, Print ISBN: 978-0-415-62138-0
- Lagarde L., **Chabot A.**, Ehrlacher A., Léné F., 1999a. A simplified model for large deformations solutions of multilayered composites. *Sixth International Conference on Composites Engineering*, June 27 – July 3, Orlando, Florida, USA, 2 pages en 2 colonnes (<http://www.gbv.de/dms/tib-ub-hannover/300534930.pdf>)
- Lagarde L., **Chabot A.**, Ehrlacher A., Léné F. (30 août-3septembre) 1999b. Recherche d'un modèle simplifié de poutre multicouche en grandes transformations. *14e Congrès Français de Mécanique*, Toulouse, 6 pages.
- Lagarde L. (thèse soutenue le 14 décembre) 2000. Recherche de méthodes simplifiées pour le calcul de poutres multicouches en grandes transformations. Thèse de l'ENPC. <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00838664/>
- Le Corvec G. 2008. *Simulations des effets du retrait du béton de ciment sur la flexion de bicouches de chaussées fissurés*. Stage de MASTER2 PRO Analyse numérique de l'Université de Nantes.
- Le Corvec G., Spilman N., **Chabot A.** 2008. Calcul des contraintes proches des fissures de l'essai Mefisto symétrique, programmation scilab version recherche
- Loft A. (Septembre-décembre) 2005. *Evaluation de Viscoroute-v1 pour l'étude de quelques chaussées souples*. Stage de 5ème année de Dresden University of Technology spécialité Urban and Road construction, Option « Chaussées et aménagement des villes ».
- Mauduit V., Mauduit C., Vulcano-Grellet N., Coulon N., Hammoum F., Hamon D., Kerzreho JP, Piau JM, **Chabot A.**, 2013. Dégradation subite des enrobés bitumineux par période de gel/dégel : analyse de cas de terrain et recherche exploratoire en laboratoire. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées*, (279): 47-63.
- Naciri T., Ehrlacher A., **Chabot A.**, 1998. Interlaminar Stress Analysis with a new Multiparticle Modelisation of Multilayered Materials (M4). *Composites Sciences and Technology*, **58** (3): 337-343. DOI: 10.1016/S0266-3538(97)00085-7.
- Pérez S. A., Balay J.M., Tamagny P., **Chabot A.**, Petit C., Millien A., Wendling L., 2008. Accelerated Pavement Cracking Testing - Experimental and Finite Element Analysis. Proceedings of the *Sixth International RILEM Conference Cracking in Pavements* [©], June 16-18, Chicago, US. In Taylor & Francis Group Proceedings, 55-65, Print ISBN 978-0-415-47575-4.
- Poché D. 2005. *Validation et premières applications de Viscoroute à l'étude des chaussées souples*. Stage de MASTER2 PRO Analyse numérique 2^{ème} année de l'Université de Nantes.

- Pouteau B., **Chabot A.**, De Larrard F., 2002. Etude en laboratoire du collage béton/matériaux bitumineux. *Matériaux 2002*, 21-25 octobre, Tours, 5 pages.
(http://pem.utbm.fr/materiaux_2002/file/pdf/CM06026.PDF)
- Pouteau B. (thèse soutenue le 3 décembre 2004). *Durabilité mécanique du collage blanc sur noir dans les chaussées*. Thèse CIFRE ATILH de l'ED MTGC de Nantes.
- Pouteau B., Balay J.-M., **Chabot A.**, De Larrard F., 2004b, "Fatigue test and mechanical study of adhesion between concrete and asphalt". Proceedings of the *9th International Symposium on Concrete Roads*, April 3-6, Istanbul, Turkey, 13 pages on CD, ISBN 975-8136-20-8.
- Pouteau B., Guillo C., Chabot A., 2004c. Logiciel de calcul de bicouche délaminé. Programmation sous matlab.
- Pouteau B., **Chabot A.**, Balay J. M., De Larrard F., 2005. Essai accéléré de durabilité du collage blanc sur noir dans une chaussée composite. *17^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 29 Août - 2 Septembre, Troyes, 6 pages.
- Pouteau B., **Chabot A.**, De Larrard F., Balay J. M. (mars) 2006. Mécanique des chaussées Béton sur grave-bitume, étude de la tenue du collage entre béton et enrobé sur chaussée expérimentale (1re partie). *Revue Générale des Routes et des Aérodrômes (RGRA)*, (847): 85- 90.
- Senti A. 2007, "Application du logiciel Viscoroute-v2 pour l'étude des multicharges sur chaussées bitumineuses". Stage de MASTER2 Génie Mécanique de l'IUP d'Evry.
- Smaoui M., **Chabot A.**, 1995. 1^{ère} version maille M4 - Programmation en fortran 77. CERAM
- Spilmann N. 2007. *Analyse des contraintes de l'essai Méfisto à l'aide du M4-5n*. Stage de MASTER2 PRO Analyse numérique de l'Université de Nantes.
- Tran Q. D. 2001. *Utilisation d'un modèle multiparticulaire pour l'analyse des contraintes dans une chaussée*. Stage de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- Tran Q. D., **Chabot A.**, Ehlacher A., Tamagny P., 2003. Modèle simplifié pour le calcul de chaussées. *16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 1-3 Septembre, Nice, 6 pages.
- Tran. Q. D. (thèse soutenue le 30 septembre 2004). *Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches*. Thèse de l'ED MODES de Marne la Vallée.
- Tran Q. D., **Chabot A.**, Ehlacher A., Tamagny P., 2004b. A simplified modelling for cracking in pavements. Proceedings of the *Fifth International RILEM Conference Cracking in Pavements*, May 5-8, Limoges. In Rilem Proceedings: 299-306, Print ISBN 2-912143-47-0.
- Tran Q. D., **Chabot A.**, Guillo C., Ehlacher A. 2004c, « Fissuroute-v1 », logiciel de calcul de chaussées bicouches fissurée verticalement dans l'épaisseur de la 1ère couche. Programmation sous Matlab.
- Viau A. (juin) 1990, "*Initiation du délaminage dans les structures en matériaux composites carbone-polyimide*". Stage de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- Viau A. (juin) 1991, "*Initiation du délaminage dans les structures en matériaux composites carbone-polyimide*". Rapport d'avancement du contrat Convention N°486 SNECMA-AENPC-CERAM.
- Vulcano-Greullet N., Kerzreho J. P., Mauduit V., **Chabot A.**, 2010. Stripping phenomenon of top layers of thick pavements. Proceedings of the *11th International Conference on Asphalt Pavements*, 1-6 August, Nagoya Aichi, Japan. Curran Associates: **1** :552-561, Print ISBN: 978-1-61839-073-8

Partie 1

DEVELOPPEMENTS D'OUTILS MECANIQUE POUR L'EVALUATION DES EFFORTS D'INTERFACE AU BORD OU FISSURES VERTICALES DE MULTICOUCHES ELASTIQUES

Depuis la fin des années 1960, dans le domaine des matériaux composites pour l'aéronautique, l'étude des phénomènes d'endommagement des structures multicouches et les modèles permettant de les décrire et de les prévoir se sont naturellement orientés vers l'analyse des efforts à l'interface entre les couches avant l'apparition du premier endommagement. En général, lorsque cette rupture se produit, la ruine des systèmes multicouches est attendue assez rapidement près des bords ou fissures verticale, lieux privilégiés de concentration de contraintes (Fig. 1) (Fig. 2).

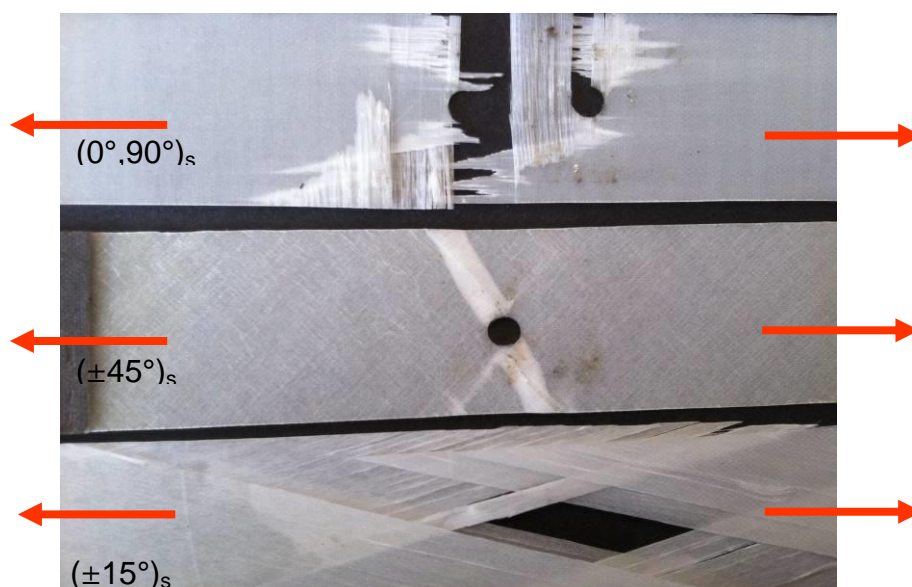


Figure 1. Délaminage lors de la rupture par traction de diverses éprouvettes composites en fibre de verre
(Cours A. Chabot, 1997)

En ces endroits, les champs de contraintes sont 3D, complexes et singuliers (Williams, 1959) (England, 1965). Des traitements spécifiques des équations doivent être utilisés (Dundurs, 1969) (Cooks et Erdogan, 1972) (Comminou, 1977), Cf. également (Hutchinson J.W., Suo Z., 1992), etc. En vue d'être utilisés par les ingénieurs de bureau d'études, il faut cependant pouvoir disposer d'outils d'analyse simples et adaptés pour leur étude. C'est dans ce cadre que se sont portés mes travaux de recherche.

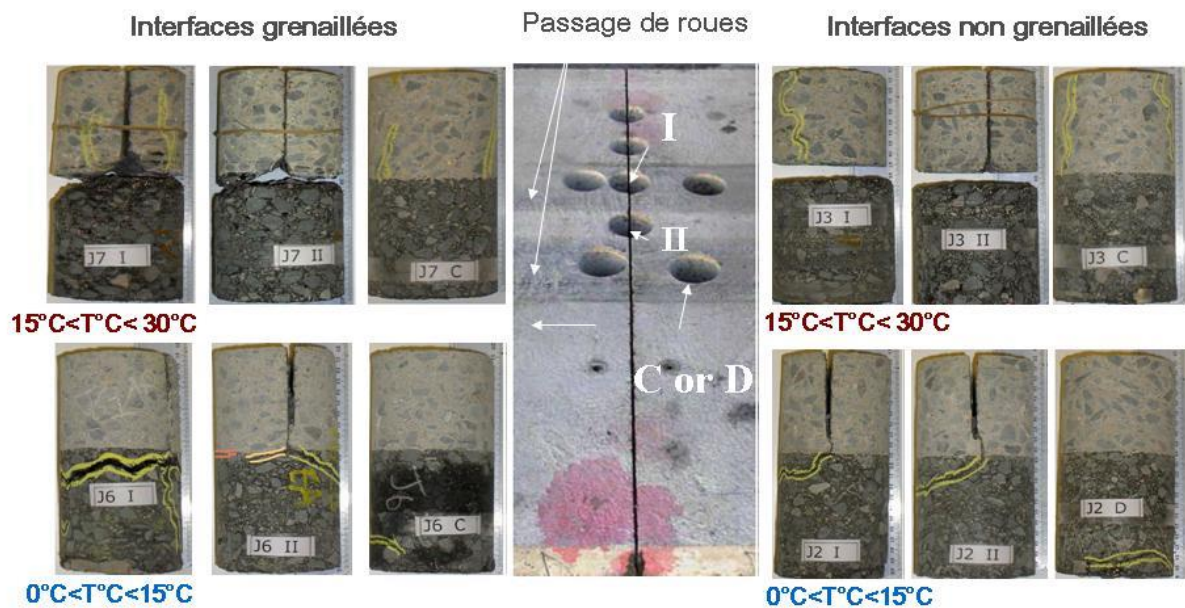


Figure 2. Etat des carottes bicouches près des joints de chaussées BCMC testés sous différentes conditions après 1 million de chargement de flexion des machines FABAC de l'IFSTTAR (Pouteau, 2004) (Chabot et al., 2008)

Les théories classiques de plaque de Love-Kirchhoff (Kirchhoff, 1850) (Love, 1934) ou de Reissner-Mindlin (Reissner, 1945) (Mindlin, 1951) permettent une bonne description des déformations globales de la plaque et des champs de contrainte, sauf au voisinage des bords, jusqu'à une distance d'environ 3 ou 4 fois l'épaisseur, là où la concentration de contrainte est tridimensionnelle (Koiter et Simmonds, 1972). Aussi, malgré une géométrie assez simple de ces structures multicouches, plusieurs auteurs se sont intéressés très tôt à des modélisations numériques (Leguillon et Sanchez-Palencia, 1985) type différences finies (Pipes and Pagano, 1970) (Rybicki, 1971) ou éléments finis 3D (Wang and Crossman, 1977) (Raju and Crews, 1981). Mais, cette manière d'aborder le problème peut être trop lourde pour être contenue, sans simplifications a priori, dans un logiciel de conception des structures. Aussi un certain nombre d'auteurs ont tenté de proposer des approches simplifiées pour l'étude des effets de bord dans les matériaux multicouches. Dans ma thèse de doctorat (Chabot, 1997), nous les avons classées en 3 familles :

- les champs correcteurs d'effet de bord soit par approche asymptotique des champs de déplacement (Cf. (Lecuyer et al., 1987) par exemple), soit par approches mixtes en traitant le problème extérieur différemment par des développements en série de Fourier (Cf. (Allix, 1989) par exemple), ces deux approches ont été comparées dans (Perret et al., 1991) ;
- les théories de plaque d'ordre supérieur telles que généralisées et décrites par (Reddy, 1989) par exemple ;
- les modèles multiparticulaires dont le tout premier peut être associé à (Biot, 1941) pour la mécanique des sols ou modèles.

L'utilisation d'une approximation du champ de contrainte à partir de champs en (x, y) définis par couche tel que proposé principalement par (Puppo et Evensen, 1970) ou (Pagano, 1978) pour les matériaux composites, nous a semblé conduire à des modèles plus simples que les deux premiers types de modèles cités ci-dessus. Ce choix revient à retenir une cinématique généralisée définie elle aussi à partir de champs en (x, y) par couche. On est ainsi amené à considérer qu'en un point de la surface définissant géométriquement

l'objet, se trouvent n particules, n étant le nombre de couches. C'est sur cette troisième famille de modèles approchés, dits modèles multiparticulaires, ou nommés plus récemment layerwise plate models (Carrera and Ciuffreda, 2004), que se sont basés mes travaux pour aborder finalement les problèmes de fissuration dans les structures de chaussée.

Comme évoqué dans l'introduction, l'ensemble des travaux exposés dans cette première partie de ce chapitre scientifique concerne, outre mes travaux effectués à l'ENPC dans le cadre de ma thèse principalement, l'encadrement de trois doctorants (Tran, 2004) (Prouteau, 2004) (Hun, 2012) et sept équivalents Master 2 (Berthemet, 2012) (Bürkli, 2010) (Le Corvec, 2008) (Spilmann, 2007) (Guillo, 2004) (Tran, 2001) (Cantournet, 1999). Ils sont présentés dans six articles dans des revues dont trois dans le WOS (Web of Sciences), une vingtaine de communications dans des conférences avec actes et comité de lecture dont onze internationales, sept programmes en version recherche, trois conférences invités ainsi que divers rapports et contributions notamment au sein de la Rilem.

Dans cette partie, le principe de construction des modèles multi particulaires des matériaux multicouches (M4) mis au point dans ma thèse de doctorat est d'abord résumé. Puis la synthèse des solutions M4 obtenues pour les matériaux composites sollicités en traction sont données dans une deuxième section. Pour l'analyse des problèmes de flexion des structures de chaussées, la troisième section présente les développements effectués pour combiner un de ces modèles, le M4-5n à 5n équations d'équilibre par couche (n : nbre total de couches) à différents massif de sol trouvés dans la littérature. La quatrième section expose le développement d'essai de caractérisation du décollement d'éprouvettes bi-matériau de chaussée rendu possible par l'utilisation du M4-5n.

1 Principe de construction des Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)

Dans la suite, le multicouche considéré est parallèle au plan (x, y) dans le repère de référence $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. L'empilement des n couches s'effectue selon la direction \mathbf{e}_3 . L'indice i indique le numéro de couche variant de 1 à n . (x_1, x_2, x_3) ou (x, y, z) sont les trois composantes du point dans le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ($x = x_1$; $y = x_2$; $z = x_3$). La couche i est constituée d'un ensemble de points contenu selon l'axe d'empilement et le plan de la couche ainsi: $z \in [h_i^-, h_i^+] \left(h_{i+1}^- = h_i^+ \right)$, $(x, y) \in \omega$. On note par $e^i = h_i^+ - h_i^-$, l'épaisseur de la couche i et par $\bar{h}_i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2}$, sa côte moyenne. \underline{A} , \overline{A} et $\overline{\overline{A}}$ désignent respectivement un tenseur A d'ordres 1, 2 et 4. Les indices grecs (α, β, \dots) sont supposés varier dans l'intervalle $\{1, 2\}$ (c'est à dire que les composantes planes du tenseur des contraintes sont notées $\sigma_{\alpha\beta}$ ou par une notation en tilde soit $\tilde{\sigma}$). Enfin, pour simplifier le raisonnement, on suppose que les forces volumiques sont nulles

La construction de la famille des modèles M4 se décompose en 4 étapes (Chabot, 1997) (Chabot et Ehlacher, 1998a) (Chabot et Ehlacher, 1999).

1.1 Approximations en contraintes et définitions

Etape I

La première étape de construction de Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches (modèles M4) consiste à proposer une approximation des champs de contraintes tridimensionnels vérifiant l'équilibre tridimensionnel et s'écrivant sous forme de polynôme de Legendre en z par couche. Suivant l'information recherchée, deux familles d'approximations qui diffèrent suivant le degré de l'approximation de la contrainte membranaire par couche ont été proposées (Cf tableau 1).

Tableau 1: Les deux types d'approximation des champs de contraintes tridimensionnels des modélisations M4

Modèles M4 de membrane (M)	Modèles M4 de plaque (P)
$\sigma_{\alpha\beta}^a(x, y, z)$ de degré 0 en z par couche	$\sigma_{\alpha\beta}^a(x, y, z)$ de degré 1 en z par couche
$\sigma_{\alpha 3}^a(x, y, z)$ de degré 1 en z par couche	$\sigma_{\alpha 3}^a(x, y, z)$ de degré 2 en z par couche
$\sigma_{33}^a(x, y, z)$ de degré 2 en z par couche	$\sigma_{33}^a(x, y, z)$ de degré 3 en z par couche

Dans la colonne de gauche du tableau 1, nous avons les modèles type (M) "de membrane par couche" construits, pour vérifier l'équilibre tridimensionnel, à partir d'une approximation de la contrainte membranaire $\sigma_{\alpha\beta}$ uniforme en z dans la couche. Notons que cette simplification des modèles permet également de considérer des problèmes de flexion aussitôt qu'il y a plus d'une couche. Dans la colonne de droite, nous avons les modèles type (P) "de plaque par couche" déduits d'une approximation affine en z de la contrainte membranaire. Ces derniers modèles prennent en compte le moment de flexion propre \tilde{M}^i de chacune des couches par rapport à son propre plan de symétrie. Les degrés des approximations par couche de $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} sont imposés pour avoir une approximation de $\bar{\sigma}$ statiquement admissible. L'équilibre du champ approché implique aussi la continuité de $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} aux interfaces. Les coefficients de ces polynômes sont des champs en x et y reliés simplement aux efforts intérieurs généralisés de couche et d'interface des modèles M4 définis dans le tableau 2 ci-dessous:

Tableau 2 : Définitions des efforts intérieurs généralisés

$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz$	
$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz$	$\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_i^+) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_{i+1}^-)$
$Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz$	$\nu^{i,i+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_i^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{i+1}^-)$
$\begin{cases} N_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}(x, y, z) dz \\ M_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{33}(x, y, z) dz \end{cases}$	

Dans la colonne de gauche sont définis respectivement \tilde{N}^i , \tilde{M}^i , \tilde{Q}^i , N_3^i et M_3^i les deux tenseurs plans d'ordre 2 des efforts normaux et des moments de flexion de la couche i , le vecteur plan d'effort tranchant de la couche i et les deux scalaires N_3^i et M_3^i des moments d'ordre zéro et un de la contrainte normale au plan de la couche i . Dans la colonne de droite, $\tau_\alpha^{i,i+1}$ et $\nu^{i,i+1}$ représentent respectivement le tenseur d'ordre un d'efforts intérieurs de cisaillement et le scalaire d'effort intérieur d'arrachement à l'interface $i, i+1$.

Avec ces efforts généralisés, le champ de contrainte tridimensionnel approché, noté $\bar{\bar{\sigma}}^{a7n}$, s'écrit ainsi (1-4) :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{a7n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{a7n}(x, y, z) &= Q_\alpha^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x, y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z) \\ &+ \left(Q_\alpha^i(x, y) - \frac{e^i}{2} \left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x, y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x, y) \right) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{a7n}(x, y, z) &= N_3^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_3^i(x, y) P_1^i(z) \\ &+ \left(N_3^i(x, y) - \frac{e^i}{2} \left(\nu^{i,i+1}(x, y) + \nu^{i-1,i}(x, y) \right) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \\ &+ \left(\frac{60}{e^{i2}} M_3^i(x, y) - 5 \left(\nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \right) \right) P_3^i(z) \end{aligned} \quad (3)$$

où les polynômes $P_j^i(z)$ de degré croissant en z , orthogonaux entre eux et reliés aux polynômes de Legendre classiques ont pour expression (4):

$$\begin{aligned} P_0^i(z) &= 1; P_1^i(z) = \frac{(z - \bar{h}_i)}{e^i}; \\ P_2^i(z) &= -6 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2}; P_3^i(z) = -2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Les équations généralisées des M4 – Cas du M4-7n et du M4-5n

Ce champ est en équilibre s'il vérifie les 7n équations de l'équilibre (6-11), sachant que (8) et (9) sont liés, quelque soit le couple de point (x, y) de multiparticules $i \in \{i, n\}$ appartenant à la surface ω . C'est le modèle local de Pagano (1978).

$$\tilde{\text{div}} \tilde{N}^i(x, y) + \left(\tau^{i, i+1}(x, y) - \tau^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \quad (5)$$

$$\text{div} \tilde{Q}^i(x, y) + \left(\nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \quad (6)$$

$$\tilde{Q}^i(x, y) = \tilde{\text{div}} \tilde{M}^i(x, y) + \frac{e_i}{2} \left(\tau^{i-1, i}(x, y) + \tau^{i, i+1}(x, y) \right) \quad (7)$$

$$\text{div} \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{60M_3^i(x, y)}{e_i^2} - 5 \left(\nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i}(x, y) \right) \quad (8)$$

$$- \frac{e_i}{2} \left(\text{div} \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) + \text{div} \tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) \right) = 0$$

$$\text{div} \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{20M_3^i(x, y)}{e_i^2} - \left(\nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i}(x, y) \right) \quad (9)$$

$$- \frac{e_i}{6} \left(\text{div} \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) + \text{div} \tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) \right) = 0$$

$$N_3^i(x, y) = \frac{e_i^2}{12} \text{div} \left(\tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) \right) \quad (10)$$

$$+ \frac{e_i}{2} \left(\nu^{i, i+1}(x, y) + \nu^{i-1, i}(x, y) \right)$$

$$M_3^i(x, y) = \frac{e_i^3}{120} \text{div} \left(\tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) \right) \quad (11)$$

$$+ \frac{e_i^2}{12} \left(\nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i}(x, y) \right) - \frac{e_i^2}{60} \text{div} \tilde{Q}^i(x, y)$$

En remarquant que les deux dernières équations d'équilibre (10 et 11) permettent d'exprimer les deux efforts généralisés N_3^i et M_3^i en fonction des autres, on peut alors reporter ces expressions dans le champ de contrainte tridimensionnel approché précédent (1-3). Cette manipulation conduit à simplifier le modèle et à réduire le nombre d'équations d'équilibre de $7n$ à $5n$. Avec cette méthode, on peut à nouveau exprimer certaines contraintes généralisées en fonction des autres et obtenir ainsi de nouveaux modèles dont le nombre d'équations d'équilibre décroît. Le nombre de ces équations d'équilibre nous a servi à nommer les différents Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches (M4). Nous avons ainsi construit plusieurs approximations statiquement admissibles des champs de contraintes 3D. Elles vont du modèle M4- $7n$, équivalent au modèle local de Pagano (1978), qui utilise la totalité des efforts intérieurs généralisés du tableau 2, jusqu'au modèle M4-($2n+1$)M qui semble être le plus simple que l'on puisse construire dans cette famille. Nous synthétisons ces modèles M4 sur le schéma suivant (Fig. 3). On note ainsi que chaque passage d'un modèle à un autre est obtenu en remplaçant, par son expression issue d'une équation d'équilibre du modèle supérieur, l'effort intérieur généralisé que l'on ne souhaite pas expliciter dans le modèle ainsi résultant.

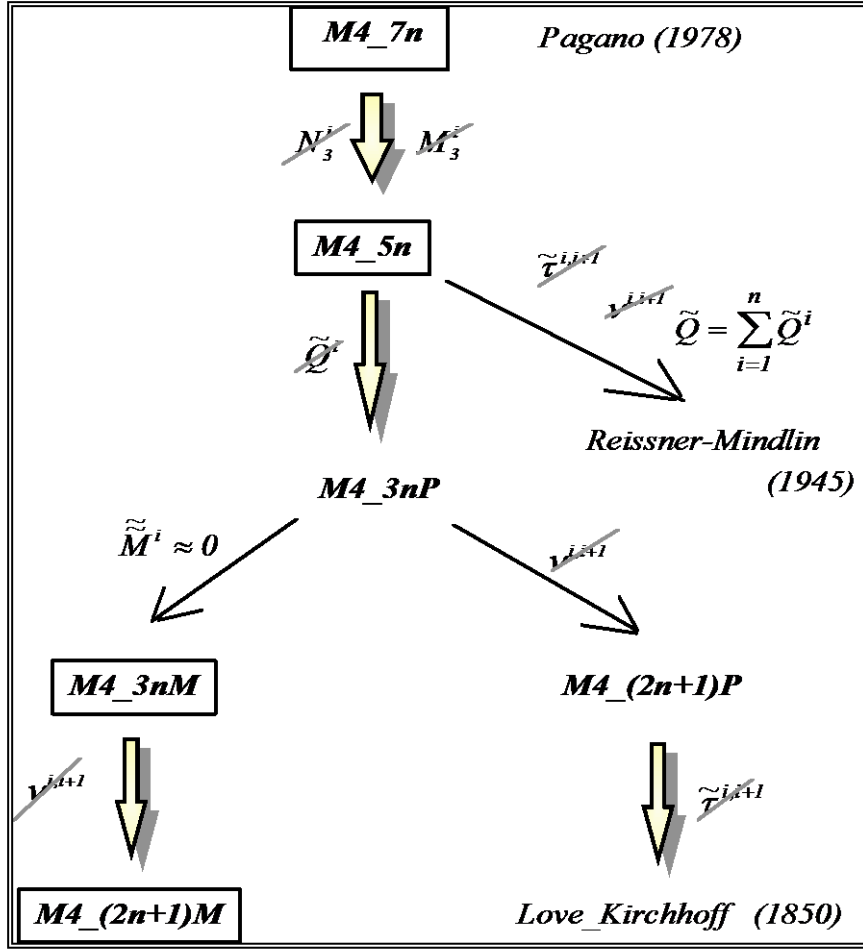


Figure 3 : Déclinaison des modèles multiparticulaires (M4) (Soutenance thèse Chabot, 1997) (Chabot et Ehrlacher, 1998a)

Ainsi, si on ne souhaite pas expliciter les efforts intérieurs généralisés N_3^i et M_3^i de Pagano, qui n'ont pas par ailleurs pas de sens physique, on obtient alors, comme dit précédemment, le champ de contrainte tridimensionnel approché du modèle M4-5n résultant (12-14).

$$\sigma_{\alpha\beta}^{a5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i^2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{a5n}(x, y, z) &= Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z) \\ &+ \left(Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} \left(\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) \right) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{a5n}(x, y, z) = & \\
& \left(\begin{array}{l} \left(\frac{v^{i,i+1}(x, y) + v^{i-1,i}(x, y)}{2} \right) \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \end{array} \right) P_0^i(z) + \left(\begin{array}{l} -\frac{\operatorname{div}\tilde{Q}^i(x, y)}{5} + \frac{e^i}{10} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \\ + (v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y)) \end{array} \right) P_1^i(z) \\
& + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z) + \left(-\operatorname{div}\tilde{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) P_3^i(z)
\end{aligned} \quad (14)$$

On note que la composante σ_{33}^{5n} dépend à la fois directement des deux efforts intérieurs généralisés d'interface $v^{i-1,i}(x, y)$ et $v^{i,i+1}(x, y)$ mais aussi de la divergence des efforts intérieurs généralisés de cisaillement de couche et d'interface du modèle. Pour vérifier l'équilibre, les efforts intérieurs généralisés du M4-5n doivent vérifier les 5n ($i=1, n$) relations d'équilibre correspondant aux cinq premières équations d'équilibre du modèle M4-7n (5-7).

Nous nous appuyons sur ce modèle à 5n équations d'équilibre pour récapituler les trois autres grandes étapes de construction des modèles M4. Ces étapes utilisent la formulation d'Hellinger-Reissner (1950) des problèmes d'élasticité 3D et son théorème rappelés ci-dessous.

$\underline{f}(x)$ est le champ de forces de volume. $\underline{U}^d(x)$ est le déplacement imposé sur la partie $\partial\Omega_U$ de la frontière Ω et $\underline{T}^d(x)$ le vecteur contrainte imposé sur la partie $\partial\Omega_T$ de la frontière Ω . La fonctionnelle de Hellinger-Reissner (H.R.), définie sur les couples de champs $(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$, où \underline{U}^* est un champ de vecteur continu 3D sur Ω , C^1 par morceaux et $\overline{\overline{\sigma}}^*$ est un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique, C^1 par morceaux sur Ω , s'écrit alors (15):

$$\begin{aligned}
H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*) = & \int_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}}^*(x) : \overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{U}^*(x)) - \underline{f}(x) \cdot \underline{U}^*(x) - \frac{1}{2} \overline{\overline{\sigma}}^*(x) : \overline{\overline{S}}(x) : \overline{\overline{\sigma}}^*(x) d\Omega \\
& - \int_{\mathcal{A}\Omega_U} \overline{\overline{\sigma}}^*(x) \cdot \underline{n}(x) (\underline{U}^* - \underline{U}^d)(x) dS - \int_{\mathcal{A}\Omega_T} \underline{T}^d(x) \cdot \underline{U}^*(x) dS
\end{aligned} \quad (15)$$

Le théorème d'Hellinger-Reissner dit que la solution du problème élastique est le couple $(\underline{U}, \overline{\overline{\sigma}})$ qui rend stationnaire la fonctionnelle H. R (15).

Ainsi la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de déplacement tridimensionnel \underline{U}^* donne les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contraintes sur $\mathcal{A}\Omega_T$ (16) ainsi:

$$\begin{aligned}
& \forall \partial \underline{U}^* \\
& \int_{\Omega} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\varepsilon}}(\partial \underline{U}^*) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f}(\underline{x}) \cdot \partial \underline{U}^* d\Omega - \int_{\mathcal{A}\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \partial \underline{U}^* dS - \int_{\mathcal{A}\Omega_U} (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \partial \underline{U}^* dS = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} + \underline{f} = 0 \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ on } \mathcal{A}\Omega_T \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ continu sur les surfaces de discontinuités de } \bar{\bar{\sigma}} \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

De même, la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de contraintes tridimensionnel $\bar{\bar{\sigma}}^*$ donne le comportement élastique linéaire et les conditions aux limites en déplacement sur $\mathcal{A}\Omega_U$ (17):

$$\begin{aligned}
& \forall \partial \bar{\bar{\sigma}}^* \\
& \int_{\Omega} \partial \bar{\bar{\sigma}}^* : \bar{\bar{\varepsilon}}(\underline{U}) d\Omega - \int_{\Omega} \partial \bar{\bar{\sigma}}^* : \bar{\bar{S}} : \bar{\bar{\sigma}} d\Omega - \int_{\mathcal{A}\Omega_U} (\partial \bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) (\underline{U} - \underline{U}^d) dS = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\bar{S}} : \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\varepsilon}}(\underline{U}) \\ \underline{U} = \underline{U}^d |_{\mathcal{A}\Omega_U} \end{cases} \quad (17)
\end{aligned}$$

Étape II

Dans l'étape II de construction des M4, les champs de contraintes 3D approchés précédents sont utilisés dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner afin de mettre en évidence les champs de déplacements généralisés cohérents avec les approximations en contrainte.

Pour simplifier le raisonnement, on suppose que les conditions aux limites sont données de type vecteur contrainte imposée sur tout $\partial\Omega$ ($\mathcal{A}\Omega_T = \mathcal{A}\Omega$; $\mathcal{A}\Omega_U = \emptyset$) et que les forces volumiques sont nulles. $\mathcal{A}\Omega$ est alors la réunion de trois parties $\omega \times \{h_1^-\}$, $\omega \times \{h_n^+\}$ et $\partial\omega \times \{h_1^-; h_n^+\}$. En décomposant le volume du multicouche comme posé dans (18), le déplacement généralisé associé à l'approximation $\bar{\bar{\sigma}}^*$ s'obtient en considérant la partie de la fonctionnelle H. R. $(\underline{U}^*, \bar{\bar{\sigma}}^*)$ (15) qui dépend de \underline{U}^* .

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega = \int_{\omega} \left(\int_{h_1^-}^{h_n^+} \dots dz \right) d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} \dots dz \right) d\omega \quad (18)$$

Le choix du sous-ensemble dans lequel la contrainte tridimensionnelle approchée $\bar{\bar{\sigma}}^*$ varie, implique donc une relation d'équivalence sur les champs de déplacements continus. Deux champs de déplacement ayant le même travail virtuel pour tous les champs $\bar{\bar{\sigma}}^*$ du sous-ensemble sont dits équivalents. Les classes d'équivalence des champs de déplacements sont les champs de déplacements généralisés du modèle. En considérant le travail virtuel $\int_{\Omega} \bar{\bar{\sigma}}^* : \bar{\bar{\varepsilon}} d\Omega$ et en intégrant par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à z ,

nous faisons apparaître des déplacements moyens pondérés dans l'épaisseur des couches. Ce sont des champs en x, y qui représentent valablement les classes d'équivalences des déplacements. Le modèle M4_7n de Pagano fait ainsi apparaître les champs de déplacements généralisés définis dans le Tableau 3 suivant

Tableau 3 : Déplacements généralisés du modèle M4_7n

$U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$	
$\Phi_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{h_i^-} \frac{P_1^i(z)}{e^{i^2}} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$	$\bar{U}_3^{i*}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) U_3^*(x, y, z) dz$
$U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$	$\hat{U}_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$

où pour chaque couche i, \tilde{U}^{i*} , $\tilde{\Phi}^{i*}$, U_3^{i*} , \bar{U}_3^{i*} , et \hat{U}_3^{i*} sont respectivement les champs moyens de déplacement plan, équivalent de rotation, de déplacement normal, du premier moment du déplacement normal et du second moment du déplacement normal.

On note que \bar{U}_3^{i*} et \hat{U}_3^{i*} n'ont pas un sens physique direct. Par élimination des efforts généralisés N_3^i et M_3^i , ces champs de déplacements généralisés ont "disparus" du cœur de la plaque comme attendu. Le modèle M4_5n ne fait apparaître ainsi que les 5n champs scalaires \tilde{U}^{i*} , $\tilde{\Phi}^{i*}$ et U_3^{i*} . Par ailleurs, pour assurer les conditions aux limites des termes de bord de chaque peaux supérieure et inférieure de chaque couche i, il est nécessaire de définir (Tableau 4) des champs de déplacements intermédiaires d'interface supérieur et respectivement inférieur de la couche i d'une part tangents, \tilde{u}_+^{i*} et \tilde{u}_-^{i*} , et d'autre part normaux, u_{+3}^{i*} et u_{-3}^{i*} . Ces champs s'éliminent couche à couche jusqu'au terme de bord des faces extérieures au multicouche $\omega \times \{h_1^-\}$ et $\omega \times \{h_n^+\}$ donnés par les conditions aux limites.

Tableau 4 : Déplacements généralisés intermédiaires de peaux de la couche i

$u_{+\alpha}^{i*}(x, y) = U_{\alpha}^*(x, y, h_i^+)$	$u_{-\alpha}^{i*}(x, y) = U_{\alpha}^*(x, y, h_i^-)$
$u_{+3}^{i*}(x, y) = U_3^*(x, y, h_i^+)$	$u_{-3}^{i*}(x, y) = U_3^*(x, y, h_i^-)$

Ci-dessous, l'expression (19) donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées du modèle M4_5n:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^i \leftrightarrow \tilde{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\approx} & \tilde{\approx}^i & T & \tilde{\approx} & \tilde{\approx}^i \end{pmatrix} \\
\tilde{M}^i \leftrightarrow \tilde{\chi}^i &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\approx} & \tilde{\approx}^i & T & \tilde{\approx} & \tilde{\approx}^i \end{pmatrix} \\
\tilde{Q}^i \leftrightarrow \tilde{d}_Q^i &= \tilde{\Phi}^i + \text{Grad} U_3^i \\
\tilde{\tau}^{i,i+1} \leftrightarrow \tilde{D}^{i,i+1} &= \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i - \frac{e^i}{2} \tilde{\Phi}^i - \frac{e^{i+1}}{2} \tilde{\Phi}^{i+1} \right) \\
v^{i,i+1} \leftrightarrow D_V^{i,i+1} &= \left(U_3^{i+1} - U_3^i \right)
\end{aligned} \tag{19}$$

où $\tilde{\varepsilon}^i$ et $\tilde{\chi}^i$ sont les tenseurs plan d'ordre 2 classiques de déformation membranaire et de courbure de la couche i . \tilde{d}_Q^i est la rotation relative de la particule de la i ème couche ($\tilde{\Phi}^i$)

par rapport à la rotation de la normale à la i ème couche $\left(\text{Grad} U_3^i \right)$. C'est la déformation

classique associée à l'effort tranchant dans une plaque de Reissner-Mindlin. $\tilde{D}^{i,i+1}$ est la déformation généralisée de cisaillement de l'interface $i,i+1$ associée au cisaillement d'interface $\tilde{\tau}^{i,i+1}$. Si les rotations des couches i et $i+1$ sont nulles, on retrouve la déformation généralisée d'interface du modèle Shear Lag Analysis (Cox, 1952) (Garett and Bailey, 1977). Cette déformation semble être la discontinuité des déplacements des particules de cote inférieur de la couche $i+1$ $\left(\tilde{U}^{i+1} - \frac{e^{i+1}}{2} \tilde{\Phi}^{i+1} \right)$ et de cote supérieure de la

couche i $\left(\tilde{U}^i - \frac{e^i}{2} \tilde{\Phi}^i \right)$ dans une cinématique de Reissner-Mindlin par couche. Mais ceci

n'est qu'une illusion, car la cinématique 3D dont nous sommes partis est continue à l'interface. $D_V^{i,i+1}$ est la déformation généralisée associée à l'effort d'arrachement $v^{i,i+1}$ à l'interface $i,i+1$. Elle a aussi l'apparence d'une discontinuité de déplacement normal des couches i et $i+1$, mais ce n'est ici encore qu'une illusion.

Etape III

Dans une troisième étape, l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour une variation de ces champs de déplacements généralisés redonne les équations d'équilibre sur les efforts intérieurs généralisés (5-11) ainsi que les conditions aux limites. Pour ce faire il suffit d'intégrer par parties convenablement la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner et de regrouper des termes en fonction des déplacements généralisés.

En toute rigueur, si le vecteur contrainte \underline{T}^d est imposé sur le bord de la plaque, le modèle approché ne peut satisfaire ces conditions que dans un sens approché.

Aussi la fonctionnelle n'est pas exactement fonction seulement des $7n$ déplacements généralisés à cause du terme de bord $-\int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \cdot \underline{U}^* dz$ (15) et la stationnarité par rapport à \underline{U}^*

est en général impossible.

Dans la littérature, on trouve deux façons de s'accommoder de cette difficulté. La plus courante, consiste à faire l'hypothèse que le vecteur contrainte sur le bord a une forme particulière (20), cohérente avec les hypothèses sur les champs de contraintes.

$$\bar{T}^d(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{T}^d(x, y, z) = \tilde{T}_d^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \tilde{M}_d^i \frac{12P_1^i(z)}{e^{i^2}} \\ T_3^d(x, y, z) = Q_{3d}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \bar{Q}_{3d}^i \frac{P_1^i(z)}{e^i} + \hat{Q}_{3d}^i \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{cases} \quad (20)$$

En posant (21)

$$\left| \begin{array}{l} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d \cdot P_0^i(z) dz \\ M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_\alpha^d \cdot P_1^i(z) dz \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \\ \bar{Q}_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} 12T_3^d \cdot P_1^i(z) dz \\ \hat{Q}_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} 5T_3^d \cdot P_2^i(z) dz \end{array} \right. \quad (21)$$

On obtient alors sur $\partial\omega$, les $7n$ conditions aux limites en contraintes généralisées:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \tilde{M}^i \cdot \underline{n} = \tilde{M}_d^i \\ \left(\tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} = \hat{Q}_{3d}^i \\ \tilde{Q}^i \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \\ e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{n} = \bar{Q}_{3d}^i \end{array} \right. \quad (22)$$

Remarquons que les trois dernières conditions aux limites reviennent à imposer respectivement aux bords de la i ème et $i+1$ ème couche:

$$\tilde{\tau}^{i,i+1} \cdot \underline{n} = \frac{Q_{3d}^i}{e^i} - \frac{\hat{Q}_{3d}^i}{e^i} + \frac{\bar{Q}_{3d}^i}{2e^i} \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}^{i,i+1} \cdot \underline{n} = \frac{Q_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\hat{Q}_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\bar{Q}_{3d}^{i+1}}{2e^{i+1}} \quad (23)$$

Il faut bien sûr que ces deux conditions ne soient pas contradictoires, ce qui est assuré si T_3^d est continu en z sur le bord de la plaque. Les 7n conditions aux limites ne sont compatibles que si on a (24):

$$\frac{Q_{3d}^i}{e^i} - \frac{\hat{Q}_{3d}^i}{e^i} + \frac{\bar{Q}_{3d}^i}{2e^i} = \frac{Q_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\hat{Q}_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\bar{Q}_{3d}^{i+1}}{2e^{i+1}} \quad (24)$$

Une méthode alternative équivalente consiste à décomposer le champ de déplacement $\underline{U}^*(x, y, z)$ sur la base orthogonale de $P_0^i(z), P_1^i(z)$ et $P_2^i(z)$ lorsque $z \in [h_i^-, h_i^+]$, soit l'expression (25):

$$\underline{U}^*(x, y, z) = \begin{cases} U_\alpha^*(x, y, z) = P_0^i(z)U_\alpha^{i*} + e^i P_1^i(z)\Phi_\alpha^{i*} + \Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z) \\ U_3^*(x, y, z) = P_0^i(z)U_3^{i*} + 12P_1^i(z)\bar{U}_3^{i*} + 5P_2^i(z)\hat{U}_3^{i*} + \Delta U_3^{i*}(x, y, z) \end{cases} \quad (25)$$

Dans ce cas, $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$ est par construction une fonction de z orthogonale à P_0^i et P_1^i et $\Delta U_3^{i*}(x, y, z)$ à P_0^i, P_1^i et P_2^i . Si on développe $\underline{U}^*(x, y, z)$ sur la base orthogonale comme

indiqué dans (25), le terme de bord $-\int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \underline{U}^* dz$ peut s'écrire alors (26):

$$-\int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \underline{U}^* dz = -\tilde{T}_d^i \tilde{U}^{i*} - \tilde{M}_d^i \tilde{\Phi}^{i*} - Q_{3d}^i U_3^{i*} - \bar{Q}_{3d}^i \bar{U}_3^{i*} - \hat{Q}_{3d}^i \hat{U}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \Delta \underline{U}^* dz \quad (26)$$

où $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$ est, par construction, une "perturbation" du champ de déplacement 3D qui ne modifie pas la classe d'équivalence du déplacement généralisé. Cette "perturbation" doit être négligée et l'on trouve ainsi les sept conditions aux limites (22). Pour certaines conditions sur le bord, le modèle M4_7n ne peut donc pas avoir de solutions (24).

Le modèle M4_5n n'a pas ce genre de problème. En effet, de façon analogue à ce qui précède, le terme de bord du M4-5n, qui apparaît dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, peut être écrit comme:

$$-\int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \underline{U}^* dz = -\tilde{T}_d^i \tilde{U}^{i*} - \tilde{M}_d^i \tilde{\Phi}^{i*} - Q_{3d}^i U_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \Delta \underline{U}^* dz \quad (27)$$

où $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$ est par construction une "perturbation" du champ de déplacement 3D qui ne modifie pas la classe d'équivalence du déplacement généralisé. Cette "perturbation" doit être négligée et l'on trouve ainsi les cinq conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^i_{,\underline{n}} &= \tilde{T}_d^i \\
\tilde{M}^i_{,\underline{n}} &= \tilde{M}_d^i \\
\tilde{Q}^i_{,\underline{n}} &= Q_{3d}^i
\end{aligned} \tag{28}$$

Ce sont des conditions de type Reissner-Mindlin par couche.

Etape IV

Le comportement généralisé reliant les efforts intérieurs généralisés aux déformations généralisées s'obtient en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés. La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner (15) comprend un terme linéaire en fonction des efforts intérieurs généralisés dont les cofacteurs sont les déformations généralisées et un terme quadratique en fonction des efforts intérieurs généralisés. Ce dernier terme est l'opposé de l'énergie élastique écrite en contrainte pour les champs $\bar{\bar{\sigma}}^*$ approchés écrits à l'aide des efforts intérieurs généralisés. La stationnarité par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés implique donc que chaque déformation généralisée soit égale à la dérivée par rapport à l'effort intérieur généralisé correspondant de l'énergie de l'énergie élastique écrite en contrainte sur les champs $\bar{\bar{\sigma}}^*$ approchés. Nous nous intéressons donc ci-dessous à l'écriture de cette énergie.

Notons $\bar{\bar{S}}^i(z)$ le tenseur d'ordre 4 des souplesses du matériau. $\bar{\bar{S}}^i(z)$ est constant dans chaque couche et est égal à $\bar{\bar{S}}^i$ de composante $S_{mnop}^i, m, n, o, p \in \{1,2,3\}^4$. Pour simplifier, nous supposons que chaque couche est orthotrope et que l'axe \underline{e}_3 est un axe d'orthotropie. Ainsi les composantes de la matrice de souplesse contenant un nombre impair d'indices 3 sont nulles. Nous notons respectivement $\tilde{\tilde{S}}^i$ le tenseur d'ordre quatre plan des souplesses sur les efforts tridimensionnels membranaires, S_V^i le scalaire de souplesse sur les efforts tridimensionnels d'arrachement, \tilde{S}_Q^i le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse sur les efforts tridimensionnels de cisaillement et \tilde{S}_3^i le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse du couplage entre les efforts tridimensionnels membranaires et d'arrachement. Ces tenseurs ont pour composantes⁴⁰ :

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\tilde{S}}^i \right)_{\alpha\beta\gamma\delta} &= S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \quad ; \quad \left(S_V^i \right) = S_{3333}^i \quad ; \\
\left(\tilde{S}_Q^i \right)_{\alpha\beta} &= 4S_{\alpha 3\beta 3}^i \quad ; \quad \left(\tilde{S}_3^i \right)_{\alpha\beta} = 2S_{\alpha\beta 33}^i \quad (\alpha, \beta) \in \{1,2\}^2
\end{aligned} \tag{29}$$

L'énergie en contrainte du champ de contraintes tridimensionnel approché s'exprime sur chacune des couches en fonction de quatre termes ainsi:

$$W_{3D}^{a*} = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[w_c^{a i*} + w_V^{a i*} + w_3^{a i*} + w_Q^{a i*} \right] dS \tag{30}$$

où pour chaque couche i , $w_c^{a i^*}$, $w_v^{a i^*}$, $w_3^{a i^*}$ et $w_Q^{a i^*}$ sont respectivement les énergies élastiques des contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$, des contraintes σ_{33} normales, de couplage entre les contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ et les contraintes normales σ_{33} et du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche i telles qu'elles soient définies dans le tableau ci-dessous (Tableau 5) :

Tableau 5 : Energies surfaciques par couche élastiques écrites en contraintes

$w_c^{a i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{\sigma}^{a*} : \tilde{S}^i : \tilde{\sigma}^{a*} dz$	$w_3^{a i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\tilde{\sigma}^{a*} : \tilde{S}_3^i \right) \sigma_{33}^{a*} dz$
$w_v^{a i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^{a*} S_v^i \sigma_{33}^{a*} dz$	$w_Q^{a i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^{a*} \cdot \left(\tilde{S}_Q^i \right)_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{\beta 3}^{a*} dz$

Pour construire les matrices de souplesse de chacun des modèles multiparticulaires, il suffit de dériver cette énergie par rapport à chacun des efforts généralisés concernés, nous obtenons ainsi les équations de comportement en souplesse généralisée.

Avec les contraintes tridimensionnelles approchées $\bar{\sigma}^{a 5n}(x, y, z)$ du modèle M4_5n l'écriture des énergies est donnée dans (31-34).

$$2w_c^{5n i^*} = \tilde{N}^{i*} : \frac{\tilde{S}^i}{e_i} : \tilde{N}^{i*} + \tilde{M}^{i*} : \left(\frac{12}{e_i^3} \right) \tilde{S}^i : \tilde{M}^{i*} \quad (31)$$

Dans le calcul de $w_v^{5n i^*}$ et $w_3^{5n i^*}$ intervient un terme en $-\text{div} \tilde{Q}^i$ que nous remplaçons par $\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}$ d'après l'équation d'équilibre (6), soit:

$$2w_v^{5n i^*} = S_v^i \left[\begin{aligned} & e^i \left(\frac{\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}}{2} + \frac{e^i}{12} \text{div} \left(\tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i} \right) \right)^2 \\ & + \frac{e^i}{12} \left(\frac{e^i}{10} \text{div} \left(\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i} \right) + \frac{6}{5} \left(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right) \right)^2 \\ & + \frac{e^i}{5} \left(\frac{e^i}{12} \text{div} \left(\tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i} \right) \right)^2 \\ & + \frac{e^i}{700} \left(\left(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right) + \frac{e^i}{2} \text{div} \left(\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i} \right) \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (32)$$

$$2w_3^{5n^i*} = \left[\begin{aligned} & \tilde{N}^{i*} : \tilde{S}_3^i \left(\left(\frac{v^{i,i+1*} + v^{i-1,i*}}{2} \right) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \right) \\ & + \frac{\tilde{M}^{i*}}{e^i} : \tilde{S}_3^i \left(\frac{6}{5} \left(v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*} \right) + \frac{e^i}{10} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (33)$$

$$2w_Q^{5n^i*} = \left[\begin{aligned} & \tilde{Q}^{i*} \cdot \left(\frac{\tilde{S}_Q^i}{e^i} \right) \cdot \tilde{Q}^{i*} + \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \frac{e^i}{12} \tilde{S}_Q^i \cdot \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \\ & + \left(\tilde{Q}^{i*} - \frac{e^i}{2} \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \right) \cdot \frac{\tilde{S}_Q^i}{5e^i} \cdot \left(\tilde{Q}^{i*} - \frac{e^i}{2} \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (34)$$

Cette expression de l'énergie w_{3D}^{5n} permet assez facilement le calcul des variations par rapport aux efforts généralisés $\tilde{N}^i, \tilde{M}^i, \tilde{Q}^i$ et $v^{i,i+1}$. Le calcul des variations par rapport à $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ est un peu plus compliqué puisque sa divergence intervient parfois dans l'expression. De plus, le comportement généralisé déduit des expressions ci-dessus donne des calculs de structure un peu lourd et le modèle perd le caractère opératoire que nous recherchons à l'aide de nos approximations. Nous avons donc simplifié ces expressions d'énergies élastiques approchées en négligeant certaines contributions.

Simplification N°1:

Nous négligeons tout d'abord les énergies couplant les efforts membranaires et les contraintes perpendiculaires aux couches, c'est à dire que nous négligeons $w_3^{5n^i*} \forall i$. Cela revient en quelque sorte à négliger les effets Poisson dus au "pincement" des couches. Cette hypothèse est habituelle dans la plupart des théories de plaque.

Simplification N°2:

Dans l'écriture de $w_v^{5n^i*}$ apparaissent les termes en $e^{i2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$ et des termes en $e^{i3} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})^2$. La présence de ces termes complique beaucoup les calculs alors qu'étant multipliés par e^{i2} ou e^{i3} , leur contribution à l'énergie étant faible nous avons décidé de les négliger (Chabot, 1997).

Après ces simplifications le comportement du modèle M4_5n s'écrit sous la forme (35-39):

- d'une loi de comportement des efforts de membrane de la couche i:

$$\varepsilon^i(x, y) = \frac{\tilde{\tilde{S}}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y) \quad (35)$$

- d'une loi de comportement des moments de flexion dans le plan de la couche i:

$$\tilde{\chi}^i(x, y) = \frac{12}{e^{i3}} \tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{M}^i(x, y) \quad (36)$$

d'une loi de comportement des efforts de cisaillement hors plan de la couche i:

$$\tilde{d}_Q^i(x, y) = \left(\frac{6}{5e^i}\right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \left(\frac{1}{10}\right) \tilde{S}_Q^i \left(\tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{\tau}^{i,i+1}\right) \quad (37)$$

d'une loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) = & -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{Q}^{i+1} + \left(\frac{-e^i}{30}\right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} \\ & + \frac{2}{15} \left(e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1}\right) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{-e^{i+1}}{30}\right) \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (38)$$

d'une loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface i,i+1:

$$D_3^{i,i+1}(x, y) = \frac{9}{70} e^i S_V^i \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(e^i S_V^i + e^{i+1} S_V^{i+1}\right) \nu^{i,i+1} + \frac{9}{70} e^{i+1} S_V^{i+1} \nu^{i+1,i+2} \quad (39)$$

Notons le découplage aussi bien pour les efforts de membranes \tilde{N}^i que pour les efforts de flexion \tilde{M}^i de chaque couche. Notons aussi le découplage global des efforts d'arrachements $\nu^{i,i+1}$ par rapport aux autres efforts, cependant, dans le comportement écrit en souplesse comme ci-dessous, trois interfaces successives sont couplées (39) alors que dans la première version des M4 écrit à l'aide d'approximation en déplacement et utilisation du principe des puissances virtuelles ce n'était pas le cas (Ehrlacher et al., 1993 1994) (Naciri et al., 1998). Enfin, notons le couplage des efforts tranchants et des cisaillements d'interface via les équations (37) et (38). Ce couplage implique que du point de vue du comportement, le modèle M4_5n ne peut être vu comme une simple superposition de plaques de Reissner-Mindlin. Ce comportement est toutefois suffisamment simple pour permettre l'obtention de solutions analytiques à de nombreux problèmes. Indiquons également que Carreira (1998) (Carreira et al., 2002) a entièrement validé le M4-5n par comparaison avec des éléments finis 3D.

La procédure illustrée ci-dessus peut être appliquée à la détermination du comportement de tous les autres modèles M4 (Cf. Fig. 3). Le choix essentiel est toujours celui de la simplification de l'énergie élastique écrite en contrainte lorsque des termes en divergence des efforts intérieurs généralisés apparaissent. Généralement, ces termes sont négligés ou remplacés en utilisant certaines équations d'équilibre. Notons que par cette démarche poussée jusqu'au bout, il est possible de retrouver les modèles classiques de Love-Kirchhoff. Le détail de tous ces modèles est donné dans (Chabot, 1997). Compte tenu de sa grande simplicité, de sa similitude avec le modèle Shear Lag Analysis, de son caractère très opératoire et des solutions analytiques et critères auxquelles il conduit (Chabot et al.,

1998) (Chabot et al., 2000), il est intéressant de présenter ci-dessous brièvement les équations du modèle M4-(2n+1).

1.3 Equations du modèle M4_(2n+1)M

Pour obtenir le modèle M4-(2n+1)M à partir du modèle M4_5n on peut (Cf. Fig. 3):

- éliminer du modèle les efforts tranchants \tilde{Q}^i par couche pour obtenir le modèle M4_3nP
- négliger les moments propres de flexion \tilde{M}^i par couche pour obtenir le modèle M4_3nM.
- éliminer les efforts d'arrachements $v^{i,i+1}$.

L'approximation du champ de contraintes 3D approchés du modèle M4_(2n+1)M est alors :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)M}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y)P_0^i(z) \quad (40)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{a(2n+1)M}(x, y, z) = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y))P_0^i(z) + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y))P_1^i(z) \quad (41)$$

$$\sigma_{33}^{a(2n+1)M}(z) = \left[\begin{array}{l} \frac{T_3^+(x, y) - T_3^-(x, y)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) \right] \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) \right] \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \end{array} \right] P_0^i(z) \quad (42)$$

$$- \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y))P_1^i(z) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y))P_2^i(z)$$

où T_3^- (respectivement T_3^+) est la composante normale du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche.

Les champs de déplacements généralisés qui interviennent alors sont : $\tilde{U}^i(x, y)$ le déplacement dans le plan de chaque couche i et $W_3(x, y) = \frac{U_3(x, y, h_n^+) + U_3(x, y, h_1^-)}{2}$, la moyenne du déplacement normal des surfaces extrêmes du multicouche. Les champs de déformations généralisées du modèle M4_(2n+1)M s'écrivent alors:

$$\tilde{\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \tilde{\operatorname{Grad}} \tilde{U}^i + {}^T \tilde{\operatorname{Grad}} \tilde{U}^i \end{array} \right) \text{ et } \tilde{D}^{i,i+1} = \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} \tilde{\operatorname{Grad}} W_3 \right) \quad (43)$$

Les $2n+1$ équations d'équilibre se mettent sous la forme des $2n$ équations (5) inchangées plus d'une équation globale sur tout le multicouche sous la forme (44) suivante :

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y) + \tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)) \right] + (T_3^-(x,y) + T_3^+(x,y)) = 0 \text{ sur } \omega \quad (44)$$

avec les conditions aux limites (45) données ci-dessous:

$$\tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} = Q_3^d \quad (45)$$

A l'aide des approximations précédentes, les lois de comportement du modèle $M4_{(2n+1)M}$ sous la forme une loi de comportement de couche (46) et d'interface (47):

$$\tilde{\varepsilon}^i(x,y) = \frac{\tilde{\tilde{S}}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x,y) \quad (46)$$

$$\tilde{D}^{i,i+1}(x,y) = \left(\frac{e^i}{6} \right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3} \left(e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{e^{i+1}}{6} \right) \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2} \quad (47)$$

Ce modèle $M4_{(2n+1)}$ paraît très similaire au modèle Shear Lag Analysis avec toutefois deux différences qu'il convient de souligner. La cinématique est définie à l'aide de $2n+1$ champs, c'est à dire que le modèle prend en compte la flèche globale W_3 du multicouche. Il s'en suit que la déformation d'interface donnée dans l'équation (43) n'est pas réduite à la discontinuité des déplacements moyens mais prend en compte le gradient de la flèche. Ceci implique l'existence d'une équation d'équilibre complémentaire (44) sur l'ensemble du multicouche. Le "comportement d'interface" couple trois interfaces consécutives et (Carreira et al., 1977) montrent que ce serait tout à la fois une erreur et inutile de vouloir simplifier d'avantage en "découplant" les interfaces. Ce serait une erreur, car des modélisations du même multicouche avec un découplage plus fin en nombre de couches conduirait en cas de découplage à des modèles incohérents, ce qui n'est pas le cas du modèle couplé. Ce serait inutile, car la "simplification" introduite par le découplage est tout à fait mineure lorsqu'il s'agit de résoudre analytiquement les problèmes. Nous en verrons ci-dessous une illustration sur le célèbre problème de la plaque $(0^\circ, 90^\circ)$ s en traction étudié par Wang et Crossman (1977) et Pagano (1978).

2 Cas de la traction : solutions analytiques M4 pour l'étude du délaminage des matériaux composites

Cette section présente sur des cas d'école de stratifiés non troués et troués d'orientation quelconque en traction, des comparaisons avec la littérature des solutions analytiques M4 obtenues finalement via le logiciel de calcul formel MATHEMATICA lors de la fin de ma thèse et de mon poste d'ATER puis de Post-doc. Pour le modèle $M4_{(2n+1)M}$, la proposition d'un concept, généralisable d'effort linéique de type Dirac dont l'intensité relié au maximum des cisaillements au

bord a été faite dans le cas de la plaque $(0^\circ, 90^\circ)_s$ en traction. Cette approche avait pour but de servir de base à un critère de délaminage (Partie II de ma thèse) (Chabot et Ehrlacher, 1998a). A travers le stage de DEA de Cantournet (1999) (Chabot et al., 2000), il a été montré que le taux de relaxation d'énergie G du M4-(2n+1) sur des empilements généralisés s'exprime sous une forme linéaire quadratique du cisaillement en pointe de fissure. Par conséquent, pour cette modélisation, un critère d'initiation de délaminage de type $G < G_c$ reviendrait à poser un critère de délaminage en contrainte maximum directement sur les efforts de cisaillement d'interface. Ultérieurement, la thèse de DiazDiaz (2001) (Caron et al., 2006) (DiazDiaz et al., 2007) a permis de généraliser le concept pour le M4-5n.

2.1 Evaluation des différents M4 dans le cas de la plaque $(0^\circ, 90^\circ)_s$

Pour pouvoir comparer les prévisions des M4 avec celles données dans la littérature (Chabot, 1997) (Chabot et Ehrlacher, 1998), nous avons repris les mêmes données d'empilement $(0^\circ, 90^\circ)_s$ que celles retenues par Wang et Crossman (1977) et Pagano (1978), c'est à dire :

$$\begin{aligned} E_{11} &= 20 \times 10^6 \text{ psi} \\ E_{22} = E_{33} &= 2,1 \times 10^6 \text{ psi} & 1 \text{ psi} &= 6894,76 \text{ Pa} \\ G_{12} = G_{13} = G_{23} &= 0,85 \times 10^6 \text{ psi} & 1 \text{ inch} &= 0,0254 \text{ m} \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} &= 0,21 \end{aligned}$$

Les couches 1 et 4 sont des couches à 0° (par rapport à Ox) et les couches 2 et 3 à 90° . Le domaine occupé par le multicouche est $x \in [-l, l]$ $y \in [-b, b]$ et $z \in [-2e, 2e]$ où e est l'épaisseur de chaque couche. Dans ce problème étudié par Wang et Crossman et Pagano $b=8e$, l est très grande. A noter que ces dimensions sont analogues à celles rencontrées dans les problèmes de chaussées. Ici, l'objet est sollicité en traction, effectuée suivant la direction des fibres à 0° .

Wang et Crossman ont étudié ce problème à l'aide d'éléments finis, Pagano à l'aide de son modèle " local " nommé ici M4_7n. Ce problème admet une solution analytique simple pour tous les modèles M4. Nous résumons ci-dessous succinctement la démarche de résolution commune à tous ces modèles (Chabot, 1997). Tout d'abord, nous nous plaçons dans une hypothèse d'invariance par translation suivant x du problème.

Le déplacement $u^i(x, y)$ dans la direction x est de $-d$ en $x=-l$ et $+d$ en $x=l$. Donc, l'invariance par translation et les symétries du problème permettent de déduire que :

$$u^i(x, y) = \mathcal{E}x \text{ où } \mathcal{E} = \frac{d}{l} \quad \forall i \in 1,4 \quad \forall \text{ modèles} \quad (48)$$

Tous les autres champs sont indépendants de x et ne sont donc fonction que de la variable $y \in [-b, b]$. La symétrie de l'empilement et du chargement par rapport au plan $z=0$ conduit à s'intéresser seulement aux champs des couches 1 et 2 et à ceux des interfaces 1/2 et 2/3, ce qui diminue sensiblement la taille du problème. D'autres considérations de symétrie par rapport au plan $y=0$ permettent de montrer que les champs cherchés sont pairs ou impairs ce qui permet de restreindre l'étude au domaine $y \in [0, b]$. Si l'on retient comme inconnues

principales les déplacements généralisés et les efforts intérieurs généralisés, l'ensemble des équations d'équilibre et de comportement prend une forme simple. Cet ensemble d'équations est composé de deux sous-ensembles:

- Le premier sous-ensemble est constitué d'équations algébriques linéaires (ce qui permet de diminuer le nombre de champs principaux inconnus).
- Le second sous-ensemble est constitué d'équations différentielles linéaires du premier degré particulièrement simples permettant d'écrire les équations du problème sous la forme:

$$\underline{f}'(y) = \overline{\overline{M}} \cdot \underline{f}(y) + \underline{A} \quad (49)$$

où $\underline{f}(y)$ est le vecteur dont les composantes sont les champs inconnus principaux (après élimination de certains champs à l'aide des équations algébriques).

On constate dans chaque cas que la taille du problème peut être facilement divisée par deux par condensation et le problème prend finalement la forme suivante:

$$\underline{g}''(y) = \overline{\overline{P}} \cdot \underline{g}(y) \quad (50)$$

où les composantes de \underline{g} sont des champs inconnus en nombre bien plus restreint que dans la forme initiale du problème. Par exemple, respectivement les modèles M4_7n, M4_5n et M4_(2n+1) font intervenir 18, 13 et 3 champs inconnus qui se ramènent après la procédure ci-dessus à 6, 5 et 1 champs inconnus.

Les conditions aux limites (en $y=0$ et $y=b$) s'expriment à l'aide des champs composantes de \underline{g} et de leur dérivée. Pour résoudre ces équations, on a cherché les valeurs propres λ_p et les vecteurs propres \underline{g}_p de la matrice $\overline{\overline{P}}$, puis nous avons écrit $\underline{g}(y)$ sous la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles (50):

$$\underline{g}(y) = \sum_p \left(a_p \underline{g}_p \exp(\sqrt{\lambda_p} y) + b_p \underline{g}_p \exp(-\sqrt{\lambda_p} y) \right) \quad (50)$$

où $\sqrt{\lambda_p}$ est la racine carrée éventuellement complexe de λ_p dont la partie réelle est positive. L'inverse de la partie réelle de $\sqrt{\lambda_p}$ apparaît comme une distance caractéristique de l'effet de bord. Les coefficients a_p et b_p sont donnés par les conditions aux limites et donc par inversion d'un système linéaire. Le calcul quasi-analytique des solutions s'est fait à l'époque de ma thèse de doctorat à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA (version 2.2 pour Solaris de Wolfram Research - Copyright 1988-93) (Wolfram, 1999).

A titre d'exemple, est donnée ci-dessous, la forme du champ de cisaillement pour le modèle M4_(2n+1)M à l'interface 1-2 (51).

$$\tau(y) = \frac{3}{e} \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{sh \lambda y}{\lambda ch \lambda b} \quad (51)$$

avec $\lambda^2 = 3 \left(\frac{1 - v_{LT} v_{TL}}{e^2} \right) \left(\frac{G_{TN} G_{LN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left(\frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right)$

Notons que dans ce modèle une seule distance caractéristique de l'effet de bord apparaît $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Lorsque les modules d'Young E_L et E_T sont très différents et les modules de cisaillement sont proches (notés G) la distance caractéristique est proche de $e\sqrt{\frac{2E_T}{3G}}$, ce qui pour les matériaux composites courants reste de l'ordre de grandeur de e . Notons par ailleurs, la similitude formelle de ces résultats avec ceux prévus par un modèle de type Shear Lag Analysis (52).

$$\lambda_{SL}^2 = \frac{3}{e^2} \left(\frac{G_{TN}G_{LN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left(\frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) \quad (52)$$

Bien sûr la nature du chargement en traction et les grandeurs du problème sont à l'origine de cette similitude. Rappelons toutefois que dans notre modèle les interfaces sont couplées. Le découplage apparent n'est lié qu'au faible nombre de champ, qu'à la symétrie du problème et les équations semblent être découplées. Le M4-(2n+1) conduit à une "pseudo raideur d'interface" (Carreira et al., 2003).

Dans la suite, nous reportons les résultats de ma thèse sur les prévisions des modèles M4_5n et M4_(2n+1)M avec celles du modèle M4_7n, modèle local de Pagano (1978), et celles par éléments finis de Wang et Crossman (1977). Lorsque cela est utile nous ajoutons une comparaison avec les prévisions du modèle M4_3nM présenté en détail dans (Chabot, 1997). Nous donnons tout d'abord quelques courbes présentant une partition de l'énergie permettant une comparaison synthétique globale des différents modèles M4_7n, M4_5n et M4_(2n+1)M. Puis nous présentons une comparaison des principaux champs d'efforts intérieurs.

Pour les distributions des énergies élémentaires, cela n'aurait pas de sens de les comparer directement puisque beaucoup d'entre elles ne sont pas définies pour certains modèles. Pour une comparaison utile, nous devons procéder à certains regroupements. Ainsi, nous avons proposé de scinder la distribution surfacique de l'énergie de la plaque en trois parties. Les deux premières parties représentent la somme pour chacune des couches des énergies membranaires $w_c^{a_i}$ et des énergies de couplage $w_3^{a_i}$ contraintes membranaires contrainte d'effort normal (les dernières énergies ne sont non nulles que pour le modèle M4_7n). Nous avons nommé ces sommes, "énergie de couche", par un abus de langage assez légitime. La dernière énergie somme les énergies de cisaillements $w_Q^{a_i}$ et les énergies d'effort normal $w_V^{a_i}$ sur les couches à 0° et 90° . Par abus de langage, cette énergie est appelée "énergie d'interface", par exemple, nous avons pour la couche à 0° (Fig. 4):

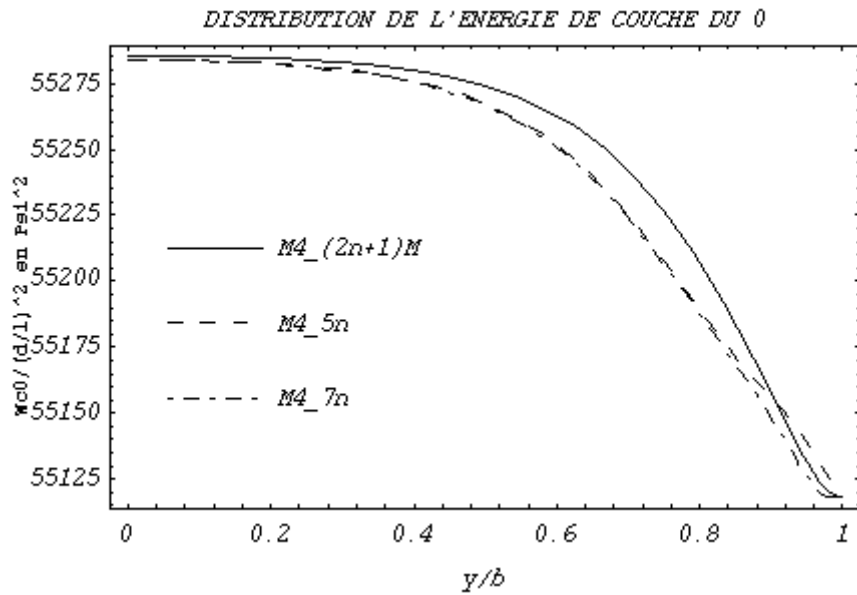


Figure 4 : Distribution de " l'énergie de couche " du 0° (Chabot, 1997)

Pour l'interface 0°/90° :

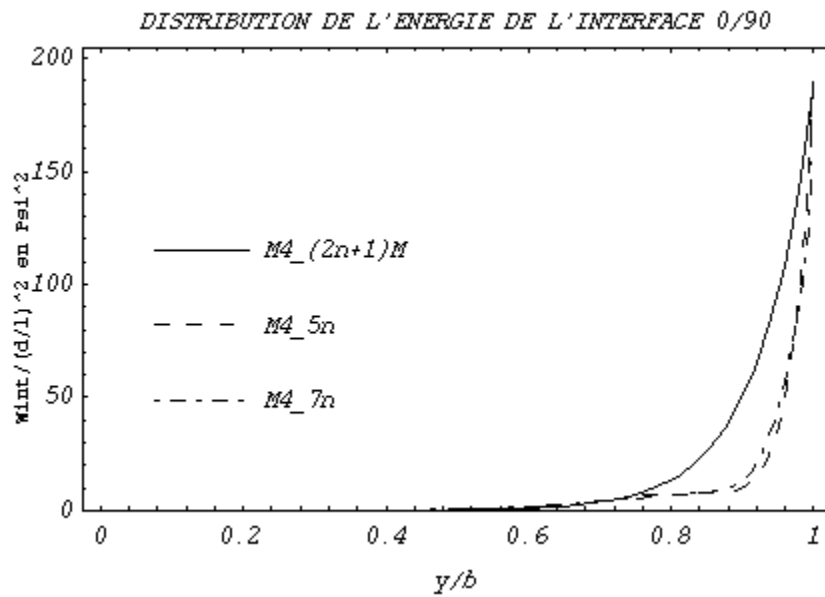


Figure 5: Distribution de " l'énergie d'interface " (Chabot, 1997)

Nous constatons tout d'abord que "loin des bords" la densité surfacique d'énergie d'interface est nulle (Fig. 4) (Fig. 5) et que la densité surfacique d'énergie de chacune des couches est celle que prévoit le modèle de Love-Kirchhoff. Au voisinage des bords, les densités surfaciques des énergies de couche décroissent alors que l'énergie d'interface augmente. On peut noter le résultat important suivant: quelque soit la modélisation retenue, la longueur d'action de l'effet de bord est sensiblement la même soit environ 4 fois l'épaisseur d'une couche, c'est à dire l'épaisseur du quadricouche. Pour le modèle $M4_{(2n+1)M}$ (53), est une information essentielle sur le phénomène d'effet de bord. Pour que l'effet de bord ne soit plus sensible il faut s'éloigner du bord de 3 à 4 fois d_c .

$$d_c = e \sqrt{\frac{G_{LN} + G_{TN}}{G_{LN}G_{TN}} \cdot \frac{E_L E_T}{E_L + E_T} \cdot \frac{1}{3(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}} \quad (53)$$

Le détail de la distribution surfacique de ces énergies est différent suivant les modèles, cependant qualitativement on ne constate pas de différences importantes. Ce ne serait pas le cas si au lieu de considérer ces "regroupements" d'énergies on analysait séparément chaque énergie élémentaire (Cf. Annexes de (Chabot, 1997)). On peut donc penser que le fait de négliger une énergie dans la fonctionnelle, donnant l'expression de celle-ci en contrainte, conduit à un "transfert" de cette énergie, au niveau des solutions des problèmes élastiques, vers celle correspondant à d'autres efforts. Ce point qui mériterait d'être approfondi dans un cadre plus général est important. Il implique qu'il n'est pas nécessaire de prouver qu'une énergie élastique non prise en compte dans la fonctionnelle donnant le comportement est négligeable dans la solution d'un problème élastique. On peut sans doute se contenter de prouver que, dans le passage d'un modèle à un modèle plus simple, les énergies qui disparaissent sont convenablement " transférées " sur d'autres composantes.

Ainsi sur cette problématique de comparaison de modèles, nous avons espéré apporter quelques arguments supplémentaires de nature à convaincre le lecteur dans l'étude suivante sur les champs de contraintes solutions aux interfaces.

Par exemple si l'on s'intéresse tout d'abord au cisaillement d'interface à l'interface 0°/90°.

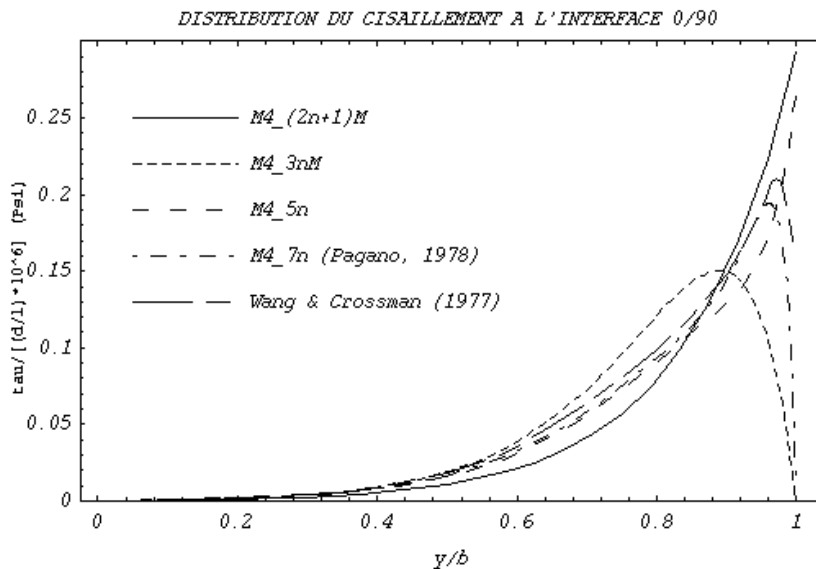


Figure 6 : Distribution du cisaillement à l'interface 0°/90° (Chabot, 1997) (Chabot et Ehrlacher, 1998)

Vue de loin, on remarque une grande similitude entre ces courbes (Fig. 6), cependant une différence importante apparaît au bord. En effet pour les modèles M4_3nM et M4_7n (23) nous avons une condition aux limites qui impose à $\tilde{\tau}_{.n}$ d'être nul au bord. Ce n'est pas le cas dans les modèles M4_5n et M4_(2n+1)M. Pour une interprétation correcte de ces courbes, dans la perspective d'une comparaison entre les modèles, nous pouvons avancer l'hypothèse que les courbes de cisaillement du M4_5n et M4_(2n+1)M sont en fait discontinues à l'extrémité, la discontinuité étant telle que l'on ait finalement $\tilde{\tau}_{.n}=0$ au bord. Ce point de vue peut paraître a priori étrange mais il permet une interprétation physique beaucoup plus riche des modélisations les plus simples.

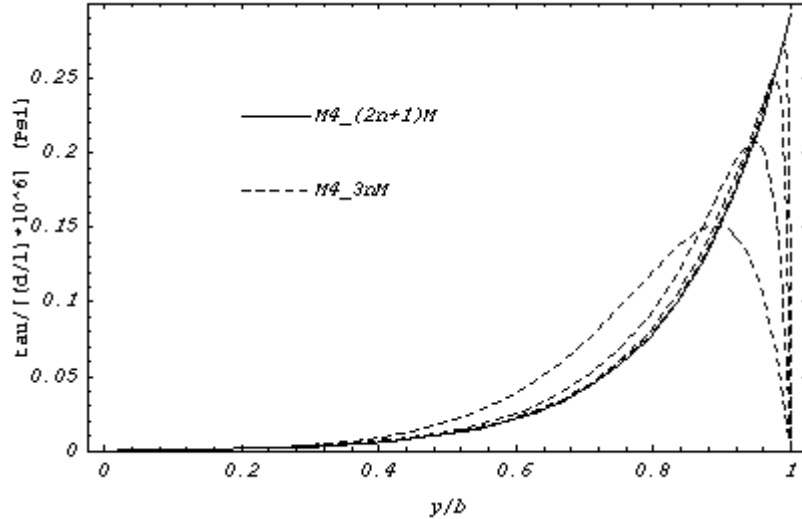


Figure 7: Convergence du cisaillement du modèle M4_3nM vers le modèle M4_(2n+1)M à l'interface 0°-90° (Chabot, 1997)

Pour nous en convaincre si on utilise le modèle M4_(2n+1)M, on note (Fig., 7) ue ce modèle est le cas limite du modèle M4_3nM lorsque E_N tend vers l'infini (la souplesse $\frac{1}{E_N}$ tend vers zéro). Cette figure est obtenue en traçant les différentes solutions en cisaillement d'interface et en effort d'arrachement des modèles M4_3nM avec les raideurs normales E_N , $10 E_N$, $100 E_N$ et $1000 E_N$. n constate que progressivement les courbes du modèle M4_3nM épousent la courbe du M4_(2n+1)M avec un retour de cisaillement à zéro au bord de plus en plus raide. C'est un argument important en faveur de l'interprétation de la courbe de cisaillement du M4_(2n+1)M faisant intervenir une discontinuité à l'extrémité $y=b$.

En ce qui concerne les efforts d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M à l'interface 0°/90° et 90°/90°, qui n'apparaissent pas explicitement dans ce modèle, nous les avons définis à partir des équations d'équilibre du modèle M4_3nM (54) (Chabot, 1997).

$$\begin{cases} v^{1,2}(y) = -\frac{e}{2} \tau'(y) \\ v^{2,3}(y) = 2v^{1,2}(y) \end{cases} \quad (54)$$

Ces contraintes d'arrachement peuvent aussi être calculées à partir de l'écriture de la contrainte tridimensionnelle approchée $\sigma_{33}^{a(2n+1)M}$ (42) à la côte de l'interface concernée.

Sur la Fig. 8 suivante, on constate que la densité de l'effort d'arrachement est très similaire dans la plupart des modèles à l'exception du modèle M4_(2n+1)M. La constatation est similaire³⁸ pour l'arrachement entre les couches à 90° avec, pour ce modèle, un effort d'arrachement environ double de celui du l'interface 0°/90°.

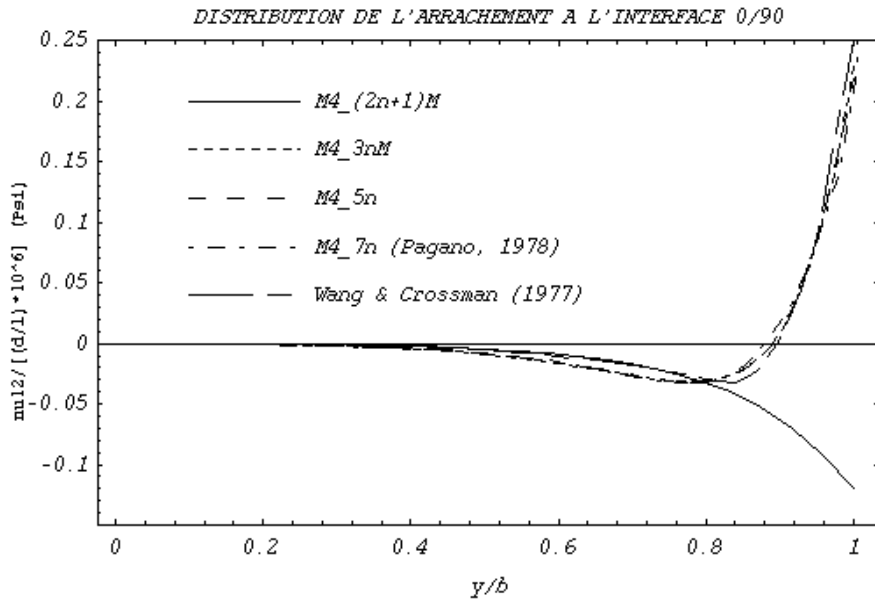


Figure 8: Distribution de l'arrachement à l'interface $0^\circ/90^\circ$ (Chabot, 1997) (Chabot et Ehrlicher, 1998)

Pour comprendre cette différence, nous reprenons sur la Fig. 9, l'analyse du $M4_{(2n+1)M}$ comme le cas limite du $M4_{3nM}$ lorsque E_n tend vers l'infini. L'effort d'arrachement épouse de plus en plus la courbe du modèle $M4_{(2n+1)M}$ à l'exception de l'extrémité où sur une distance de plus en plus étroite se produit un effort d'arrachement de plus en plus intense. En fait l'équilibre global entre les deux moitiés de l'empilement séparées par une interface permet d'affirmer sans calcul que dans ce cas l'intégrale sur l'interface de l'effort d'arrachement de chaque modèle $M4$ est nulle (Résultante verticale sur la couche à 0° par exemple).

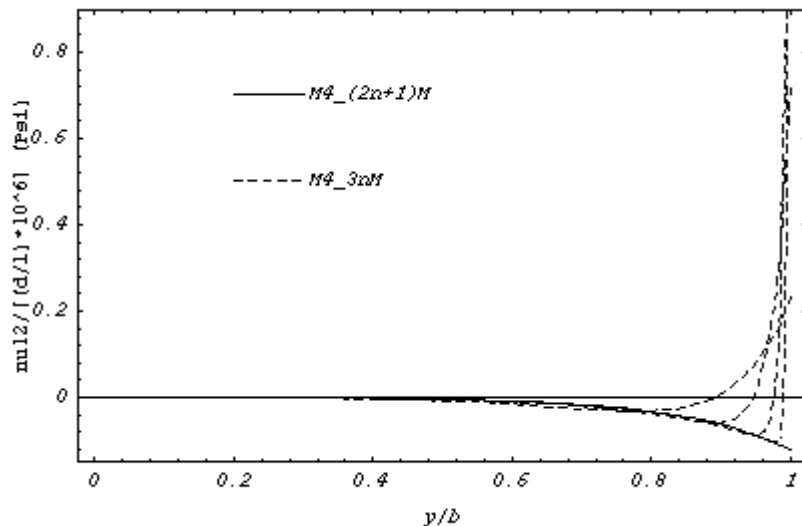


Figure 9: Convergence de l'arrachement du modèle $M4_{3nM}$ vers le $M4_{(2n+1)M}$ à l'interface $0^\circ-90^\circ$ (Chabot, 1997)

Ainsi même si le support de la partie positive de l'effort d'arrachement devient très petit, l'intégrale de l'effort sur cette partie garde une valeur significative (et même croissante) pour compenser l'intégration sur la partie complémentaire. Lorsque E_n tend vers l'infini, on trouve la courbe donnant l'effort d'arrachement du modèle $M4_{(2n+1)M}$ avec un Dirac

d'arrachement à l'extrémité. Ainsi l'effort d'arrachement qui apparaît négatif dans le modèle $M4_{(2n+1)M}$ est en fait complété par un effort concentré positif de type Dirac à l'extrémité $y=b$. Ce point peut être vu plus simplement en adoptant les équations (54), définissant les efforts d'arrachement, au sens des distributions. L'effort d'arrachement est relié à la divergence du cisaillement. Or le cisaillement est discontinu en b ainsi que nous l'avons vu plus haut donc l'effort d'arrachement du modèle $M4_{(2n+1)M}$ admet une distribution de type Dirac concentré en b . En fait des commentaires équivalents à ceux développés ci-dessus dans le cas du passage du modèle $M4_{3nM}$ au modèle $M4_{(2n+1)M}$ auraient pu être explicités à chacune des simplifications des modèles précédents (cf. Fig. 3). Par exemple, le passage du modèle $M4_{7n}$ au modèle $M4_{5n}$ s'effectue en faisant disparaître de la modélisation initiale les efforts N_3^i et M_3^i . Cela entraîne: la disparition des déplacements généralisés \bar{U}_3^i et \hat{U}_3^i ; la disparition des deux équations d'équilibre (10) et (11); la disparition des conditions aux limites qui sont associées à ces déplacements généralisés (Cf. 22). C'est ainsi que $\tilde{\tau}_{,n}$ n'apparaît plus nul au bord. Pour interpréter ceci, on peut dire que:

- $\tilde{\tau}_{,n}$ est nul au bord mais peut être discontinu;
- N_3^i et M_3^i peuvent être définis dans le modèle $M4_{5n}$ à l'aide des équations d'équilibre (10) et (11) du modèle $M4_{7n}$ comprises au sens des distributions;
- d'après la définition de N_3^i et M_3^i ces efforts admettent une distribution de type Dirac au bord.

On comprend ainsi mieux que chaque simplification consiste à décider de voir un peu plus flou au bord de la plaque en faisant tendre vers 0 certaines souplesses. Ainsi faire tendre une souplesse vers zéro revient à regarder les champs de "manière floue" au voisinage du bord et à considérer qu'une concentration d'effort intérieur peut être schématisée par un effort concentré. Bien sûr ce point de vue peut être étendu au passage ultime au modèle de Love-Kirchhoff. Donnons ci-dessous la distribution des efforts membranaires transverses en fonction des différents modèles.

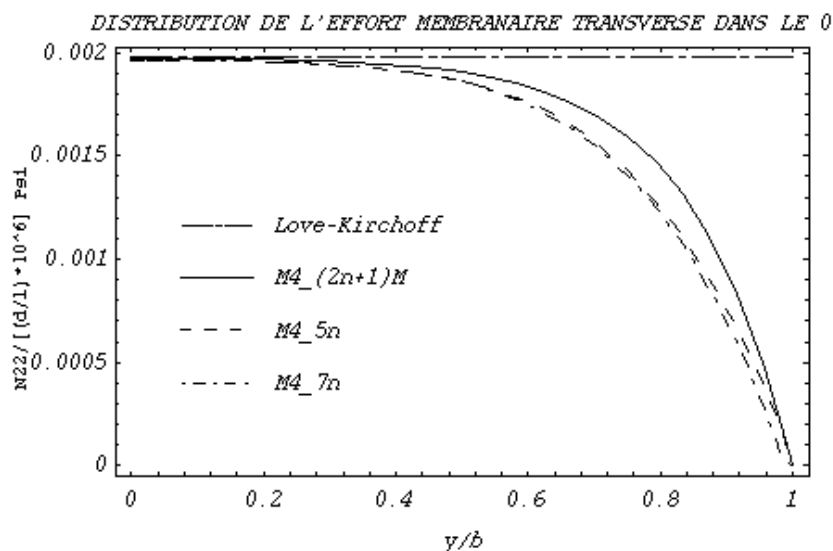


Figure 10: Distribution de l'effort membranaire transverse dans le 0° (Chabot, 1997)

Le modèle de Love-Kirchhoff, contrairement aux autres, ne comprend pas la condition aux limites $\tilde{N}_{,n}^i = 0$ au bord de chaque couche. On peut interpréter ceci en disant que le

vecteur contrainte membranaire est nul au bord mais discontinu. On peut définir le cisaillement d'interface à l'aide de l'équation d'équilibre (5) du modèle M4_(2n+1)M qui donne, au sens des distributions, un effort concentré de type Dirac des efforts de cisaillement d'interface. L'intensité de ces efforts concentrés se calcule facilement à l'aide des valeurs des discontinuités des vecteurs contraintes membranaires. Ainsi l'intensité du Dirac de cisaillement à l'interface entre la couche à 0° et celle à 90° vaut:

$$\tilde{\tau}(y) = - \left(\tilde{N}^1(b, n) \right) \delta_b(y) \quad (55)$$

où $\delta_b(y)$ est la distribution de Dirac en $y=b$.

En résumé les modèles M4_7n et M4_5n donnent sur ce problème une bonne prévision des champs de contraintes 3D. Le modèle M4_(2n+1)M ne permet pas une prévision fidèle des champs de contraintes 3D, cependant très souvent l'ingénieur n'est pas intéressé par la valeur précise de ces champs mais seulement par une information synthétique comme par exemple la résultante des efforts d'arrachement à l'interface sur une distance " caractéristique " du matériau. Dans cette perspective, le modèle M4_(2n+1)M présente un avantage décisif puisqu'il fait apparaître un effort concentré au bord sans avoir besoin de faire intervenir de manière plus ou moins artificielle une longueur caractéristique.

Pour ce cas d'école $(0^\circ, 90^\circ)_s$, en utilisant la méthode de refermeture de fissure (Bui, 78) pour le calcul de G à partir des champs au voisinage de l'extrémité de fissure et en notant τ_{yz} la valeur du cisaillement à l'interface 0°/90° du coté partie centrale non délaminée, on a pu montrer analytiquement (Chabot, 1997) (support de TD - Chabot, 2000) (Chabot et al., 2000, qu'un critère de délaminage entre les couches à 90° du type $G = G_c$ revenait à écrire un critère en cisaillement maximal entre les couches à 0° et 90° (56) (Fig. 11).

$$G^{2fis} = \frac{e}{3} \left(\frac{G_{LN} + G_{TN}}{G_{LN}G_{TN}} \right) \tau_{yz}^2 \quad (56)$$

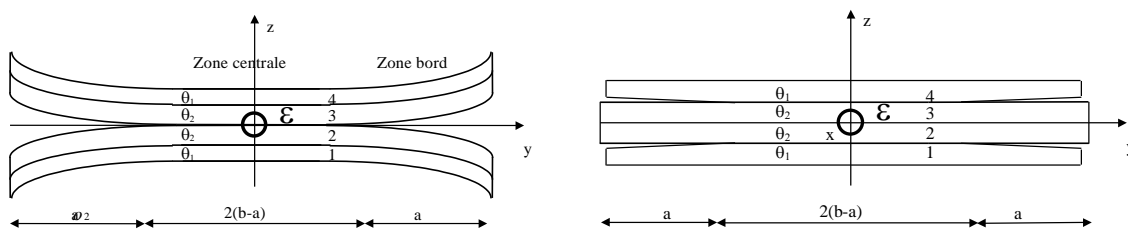


Figure 11: Plaques $(\theta_1, \theta_2)_s$ en traction délaminées (Chabot et al., 2000)

à l'interface θ_2 / θ_2 (Fig 11a: 2 fissures) et à l'interface θ_1 / θ_2 (cas Fig 11b: 4 fissures)

Ce résultat qui relie la rupture entre les couches à 90° à l'état de contrainte entre les couches à 0° et 90° n'est qu'apparemment paradoxal. En effet, nous avons montré dans (Chabot, 97) que l'effort d'arrachement entre les couches à 90° au niveau de l'extrémité de la fissure est singulier et correspond à une force linéique de type dirac d'arrachement d'intensité $\nu_s^{2,3}$ dont la valeur est liée, par l'équilibre, à la discontinuité de cisaillement aux interfaces voisines tel que l'on ait:

$$v_{\delta}^{2,3} = e \tau_{yz} \quad (57)$$

Le sens physique du critère porte donc plutôt sur l'intensité de l'effort linéique d'arrachement $v_{\delta}^{2,3}$ entre les couches à 90° . Notons ainsi le lien entre un critère portant sur $v_{\delta}^{2,3}$ et le critère de délaminage le plus couramment utilisé dans la littérature qui porte sur l'intégrale de l'effort d'arrachement à l'interface calculé dans des modèles plus fins de type modélisation 3D (Whitney et Nuismer, 74) (Kim et Soni, 84).

2.2 Généralisation des solutions $M4_{-5n}$ and $M4_{-(2n+1)}$ aux plaques $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$ non trouées

La généralisation des solutions analytiques au cas du multicouche non troué $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$ en traction à la fois à l'aide du $M4_{-5n}$ et du $M4_{-(2n+1)}$ et ses validations par rapport aux résultats de la littérature sont entièrement contenues dans le chapitre VI de ma thèse (Chabot, 1997) disponible dans la bibliothèque en ligne HAL. Le cas particulier de la plaque $(\theta - 90^\circ, \theta)_s$ non trouée en traction étudiée in fine dans ma thèse est intéressant car il permet de traiter à posteriori des études sur plaques trouées. Seul le cas $(0^\circ, 90^\circ)_s$ a pu être étudié dans mes travaux de thèse et publié (Chabot et Ehrlacher, 1998). Au cours de mon post-doc et ma période de transition au LCPC j'ai pu approfondir et généraliser la méthode de calcul. Elle est essentiellement reportée dans (Chabot et *al.*, 2001) écrit en anglais. Par soucis de concision, j'en donne ici les principaux résultats.

Dans le cas de la plaque $(\theta - 90^\circ, \theta)_s$ non trouée en traction analysée par éléments finis par (Raju et Crew, 1981), la Fig. 12 ci-dessous illustre la valeur des cisaillements normalisés (car singulier par éléments finis) au bord de la plaque entre les couches $\theta - 90^\circ$ et θ . Hormis le cas particulier de la plaque à $(0^\circ, 90^\circ)_s$ examinée précédemment, ces efforts sont prépondérants sur l'effort normal d'interface. Les caractéristiques matériaux sont données dans le tableau 5.

Table 5: Données matériaux de (Raju et Crews, 1981)

E_L	$E_T = E_N$	$\nu_{LT} = \nu_{TN} = \nu_{LN}$	$G_{LT} = G_{LN} = G_{TN}$
137,895.2 MPa (20×10^6 Psi)	14,478.996 MPa (2.1×10^6 Psi)	0.21	5,860.546 MPa (0.85×10^6 Psi)

D'autres comparaisons on pu être effectuées dans les travaux de thèse de Carreira (1998). Ici la normalisation a été faite sur les valeurs maximales du cisaillement (pour θ égal à 75° dans ce cas). On obtient une bonne concordance des résultats. Ces courbes permettent également de trouver l'angle le plus défavorable en termes d'effets de bord pour ce type d'empilement.

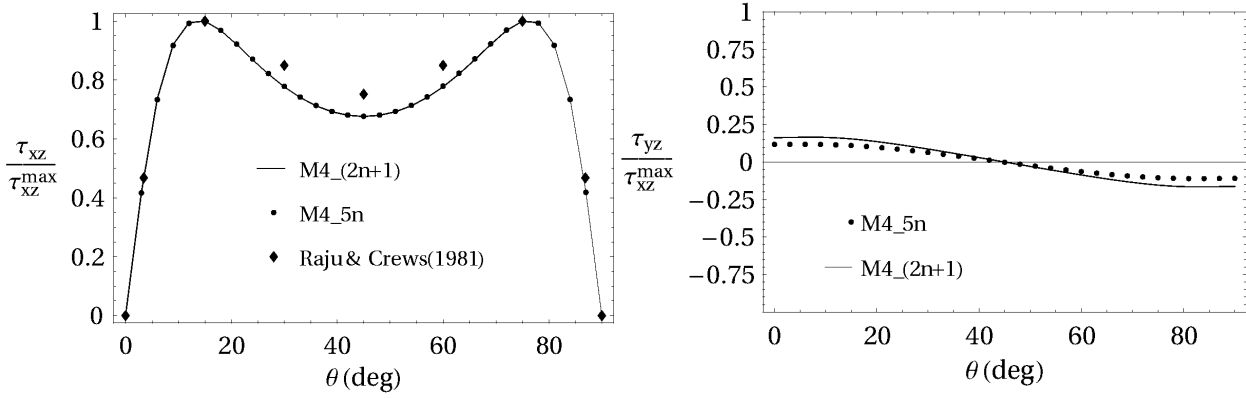


Figure 12: Comparaison des résultats M4_(2n+1), M4_5n et de Raju-Crews sur les cisaillements d'interface 1,2 normalisés pour une plaque $(\theta - 90^\circ, \theta)_s$ en traction (Chabot et Ehrlacher, 2001)

Hormis la petite portion de courbe près des angles à 0° et 90° , où $\tau_{xz}^{1,2}$ est presque nul, la valeur de $\tau_{yz}^{1,2}$ est très petite comparée à $\tau_{xz}^{1,2}$. Pour ces empilements particuliers, alors que nul pour les cas $(\theta, -\theta)_s$, le cisaillement prédominant est $\tau_{xz}^{1,2}$ (Chabot, 1997).

Suite au stage de DEA de Cantournet en 1999, dans le cas d'un empilement $(\theta, -\theta)_s$ (Fig. 13a), il a semblé par ailleurs possible de conjecturer, pour le M4-(2n+1), une relation analytique de proportionnalité entre le taux de restitution d'énergie et le carré du cisaillement d'interface τ_{xz} . Ces résultats sont normalisés par leur valeur maximum, du taux de restitution obtenu quasi-analytiquement par MATHEMATICA® et du carré du cisaillement prépondérant pour un multicouche en traction fissuré à l'interface 1,2. L'étude de l'empilement $(\theta - 90, \theta)_s$ (Fig. 13b) a été un peu plus complexe et les courbes comparatives obtenues nous ont cependant permis d'envisager une relation empirique reliant le taux de restitution d'énergie principalement en carré de τ_{xz} (Chabot et al., 2000).

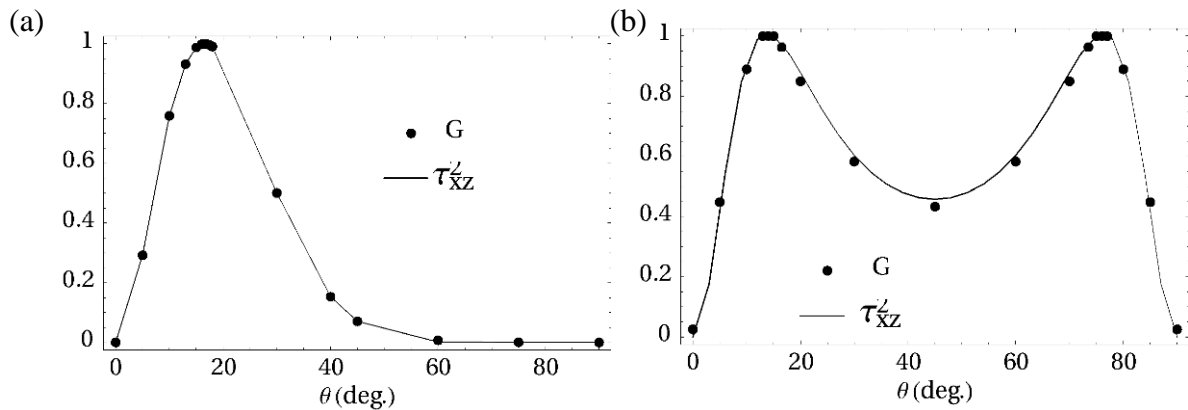


Figure 13: Comparaison entre le taux de restitution d'énergie G et le carré de la valeur au bord de la contrainte $\tau_{xz} = \tau_1^{1,2}(b - a)$ d'une plaque en traction de largeur $2(b - a)$ (Chabot et al., 2000)

- (a) Cas $(\theta, -\theta)_s$ en traction délaminée à l'interface $\theta/-\theta$
- (b) Cas $(\theta - 90, \theta)_s$ en traction délaminée à l'interface $\theta - 90^\circ/\theta$

Pour le prouver et trouver les coefficients de proportionnalité comme dans le cas $(0^\circ, 90^\circ)_s$, un calcul classique de la mécanique de la rupture pour calculer le travail de refermeture de fissure est utile (Bui, 1978). Ces travaux ont été repris puis élargis au M4-5n dans les travaux de thèse de DiazDiaz (2001). Aussi, parmi les nombreux papiers publiés par le laboratoire Navier sur le sujet, citons principalement ici le papier suivant que je co-signe (Caron et al., 2006) et le papier de la thèse de DiazDiaz (DiazDiaz et al., 2007). A l'Ifsttar, j'ai pu finalement utiliser et appliquer ces résultats à un bicouche de matériaux de chaussée en flexion dans le cadre de la thèse de Hun (2012) (Cf §4 de cette partie I). Une solution M4-5n quasi-analytique des champs de contraintes et du taux de restitution d'énergie a peu être développée (Chabot et al., 2012) et validée avec succès par comparaison avec des résultats de Dundurs (1969) (Hun, 2012). Ces travaux récents font l'objet d'un deuxième papier qui devrait être soumis très prochainement (Hun et al., to submit).

2.3 Solutions $M4_{-5n}$ and $M4_{-(2n+1)}$ pour les plaques $(\theta_1, \theta_2)_s$ trouées

Le cas d'école de la plaque composite trouée en traction a été étudié par de très nombreux auteurs. Ce cas peut être encore utile pour la comparaison des M4 avec en particulier de nouveaux modèles de propagation de fissuration par éléments finis potentiellement très intéressants dans les cas où les géométries sont plus complexes que de simples multicouches, tel que le modèle « level set » développé au laboratoire GÉM de Nantes (van der Meers et al., 2012). Dans ce paragraphe afin de ne pas dénaturer la démarche de calcul M4 finalisée dans le rapport (Chabot et Ehrlacher, 2001), j'ai choisi ici de publier l'extrait du texte original écrit en anglais concernant cette étude. On note par ailleurs que ces calculs M4 quasi-analytiques ont essentiellement utilisé la méthode de calcul proposée par (Raju et Crews, 1982) et les solutions analytiques de (Lekhnitski, 1968).

« We have applied a quasi-3D analytical method in the vicinity of the hole. This method, proposed by Raju and Crews (1982), assumes that the radius of the hole is large enough in relation to the width of the plate. Local fields near an edge point can therefore be analyzed with the help of a semi-infinite plate model in which the elongation strain is parallel to the free side direction (see Figure 15 in Raju and Crews (1982)). Raju and Crews did not recognize the utility of taking into account the gradient of this elongation with respect to plate depth.

According to convention, the positive direction of an angle is from the \mathbf{e}_1 to the \mathbf{e}_2 axis. As dictated by the classical convention for stacking sequence notation, θ_i is the angle from the fibers of layer i to the \mathbf{e}_1 axis. At an edge point of the hole located at an angle θ , the stacking sequence in relation to the free side is: $(\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)_s$, with $\theta'_i = \theta - 90^\circ + \theta_i$ $i \in \{1, m\}$. To illustrate this point, we have presented the case of a $(\theta_1, \theta_2)_s$ stacking sequence in Fig.14 (for $\theta_1 > 0$ and $\theta_2 < 0$, and for $\theta'_1 < 0$ and $\theta'_2 > 0$).

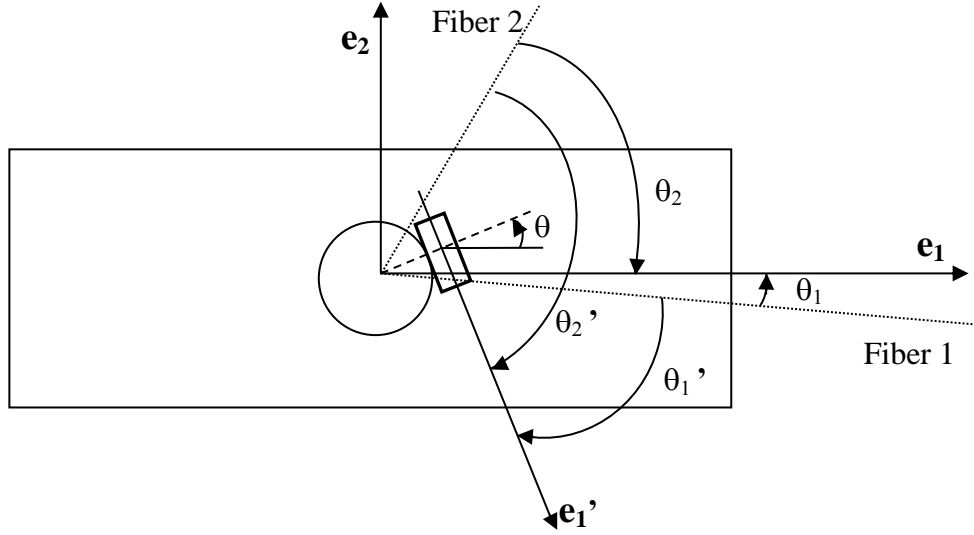


Figure 14: Edge hole analysis of the $(\theta_1, \theta_2)_s$ notched laminate (Chabot et Ehrlicher, 2001)

In order to conduct a simplified edge analysis of hole stresses for a $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)_s$ stacking plate, the previous multiparticle models involving $(\theta + \theta_1 - 90^\circ, \theta + \theta_2 - 90^\circ, \dots, \theta + \theta_m - 90^\circ)_s$ plates can thus be used, by replacing the elongation strain by $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$. This elongation strain $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ is given in Lekhnitskii's analytical solution for an infinite homogeneous orthotropic plate with a hole (Lekhnitskii, 1968); this problem will be discussed in detail below.

Let's now consider an infinite plate with a hole of radius R composed of a homogeneous orthotropic material. The angle from the \mathbf{e}_1 axis to the first orthotropic axis \mathbf{a}_1 is given by φ (see Fig. 15).

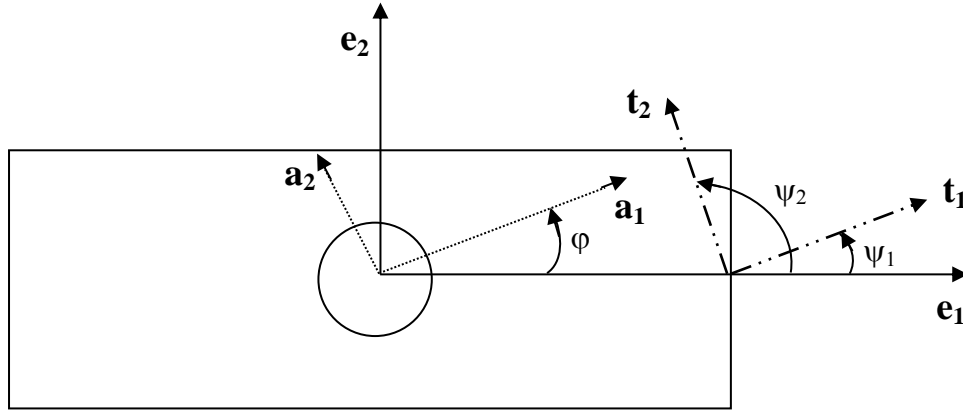


Figure 15: Orthotropic axes of the $(\theta_1, \theta_2)_s$ notched laminate (Chabot et Ehrlicher, 2001)

The elastic moduli are: E_1^h , E_2^h , ν_{12}^h and G_{12}^h . The plate is subjected to stress at infinity $\bar{\sigma}^d = p_1 \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + p_2 \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2$. The angle from \mathbf{e}_1 to \mathbf{t}_1 is ψ_1 , and the angle from \mathbf{e}_1 to \mathbf{t}_2 is: $\psi_2 = \psi_1 + \frac{\pi}{2}$. This problem has an analytical solution (see pages 171-177 of (Lekhnitskii, 1968)). In particular, it is possible to determine the elongation strain on the edge of the hole ($x = R \cos \theta$, $y = \pm R \sin \theta$), as follows:

$$\varepsilon_{\theta\theta}(\theta) = \frac{p_1}{E_1^h} \begin{pmatrix} \left(-\cos^2(\varphi - \psi_1) + (k+n)\sin^2(\varphi - \psi_1) \right) k \cos^2(\theta - \psi_1) \\ + \left((1+n)\cos^2(\varphi - \psi_1) - k\sin^2(\varphi - \psi_1) \right) \sin^2(\theta - \psi_1) \\ - n(1+k+n)\sin(\varphi - \psi_1)\cos(\varphi - \psi_1)\sin(\theta - \psi_1)\cos(\theta - \psi_1) \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$+ \frac{p_2}{E_1^h} \begin{pmatrix} \left(-\cos^2(\varphi - \psi_2) + (k+n)\sin^2(\varphi - \psi_2) \right) k \cos^2(\theta - \psi_2) \\ + \left((1+n)\cos^2(\varphi - \psi_2) - k\sin^2(\varphi - \psi_2) \right) \sin^2(\theta - \psi_2) \\ - n(1+k+n)\sin(\varphi - \psi_2)\cos(\varphi - \psi_2)\sin(\theta - \psi_2)\cos(\theta - \psi_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{where: } \begin{cases} k = \sqrt{\frac{E_1^h}{E_2^h}} \\ n = \sqrt{2 \left(\frac{E_1^h}{E_2^h} - \nu_{12}^h \right)} + \frac{E_1^h}{G_{12}^h} \end{cases} \quad (59)$$

This analysis may, for example, be used as an initial approximation of the tension problem of a $(\theta_1, \theta_2)_s$ holed plate where: $p_1 = p$, $p_2 = 0$, $\psi_1 = 0$, as shown in Fig. 16 .

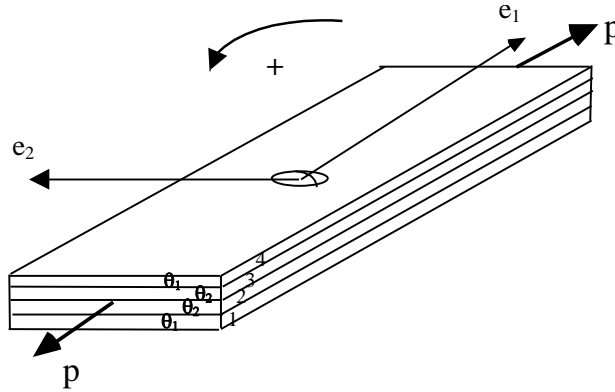


Figure 16: Example of a $(\theta_1, \theta_2)_s$ holed plate (Chabot et Ehrlacher, 2001)

We can set $\varphi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ and determine the equivalent homogeneous elastic modulus of the plate. We will focus herein on a $(0^\circ, 90^\circ)_s$ holed plate. In this particular case, $\varphi = 45^\circ$.

Thanks to symmetry considerations, we can verify that: $\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}$ and $\frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1}{\sqrt{2}}$ are orthotropic directions of the equivalent homogeneous elastic material of the plate. Yet, we also know that \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 are two other orthotropic directions of the same equivalent material. We are thus faced with two equivalent choices for determining the traction strain $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ at the edge of the hole. The simpler choice would be to use \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 directions.

Traction in the direction of the 0° fibers corresponds to: $\psi_1 = 45^\circ$. If E_L, E_T, ν_{LT} and G_{LT} were to denote the elastic moduli of the 0° layer, the equivalent material would classically exhibit the following features (Berthelot, 1992):

$$E_1^h = E_2^h = \frac{1}{2(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})} \left(E_L + E_T - \frac{4\nu_{LT}^2 E_T^2}{(E_L + E_T)} \right) \quad (60)$$

$$\nu_{12}^h = \frac{2\nu_{LT}E_T}{(E_L + E_T)}$$

$$G_{12}^h = G_{LT}$$

The elongation strain curve of a homogeneous orthotropic plate with the effective moduli of a $(0^\circ, 90^\circ)_s$ holed laminate is given in Figure 7 for the edge of the hole, as calculated by applying

Lekhnitskii's solution in Eq. (58). The mechanical characteristics are the same as those previously displayed in Table 5.

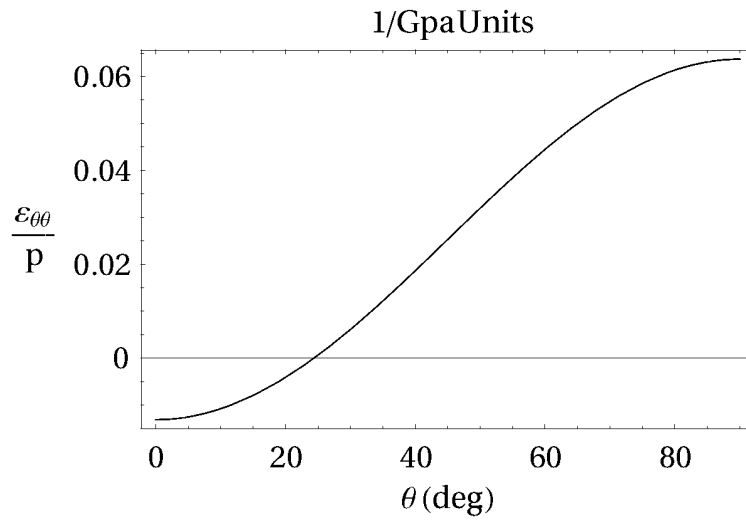


Figure 17: Edge elongation strain on the hole of a $(0^\circ, 90^\circ)_s$ notched plate (Chabot et Ehrlicher, 2001)

Fig. 18 presents the comparison of multiparticle model results with Raju-Crews' results for a $(0^\circ, 90^\circ)_s$ holed plate. From the Raju-Crews quasi-3D approximation, we can calculate

$\tau_{\theta z}$ as the "product" of the $\frac{\tau_{xz}}{\varepsilon}$ curve for the tension of the $(\theta - 90^\circ, \theta)_s$ plate, with strain ε and elongation $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ at the edge of the hole for the equivalent homogeneous plate.

As previously pointed out, the most important component of the interfacial stress in a $(\theta - 90^\circ, \theta)_s$ plate in tension would appear to be τ_{xz} at the $\theta - 90^\circ / \theta$ interface. This component is singular in 3D stress fields and generally reaches a maximum at the edge in multiparticle models (except for values of θ close to either 0° or 90°). It is quite natural therefore to expect that at the edge of a hole in a $(0^\circ, 90^\circ)_s$ plate in tension, delamination will occur at the angle where $\tau_{\theta z}$ is maximized. Since the focus here lies exclusively in localizing the maximum $\tau_{\theta z}$ value, Fig. 18 shows the normalized stress field $\tau_{\theta z}$ at the $0^\circ/90^\circ$ interface. For purposes of comparison, these findings are displayed on the same curve as Raju-Crews' results (see Figure 13, page 122 of the reference from 1982). The curves shown are quite similar for these models: a peak stress is observed at an angle of about 75° to 80° from e_1 .

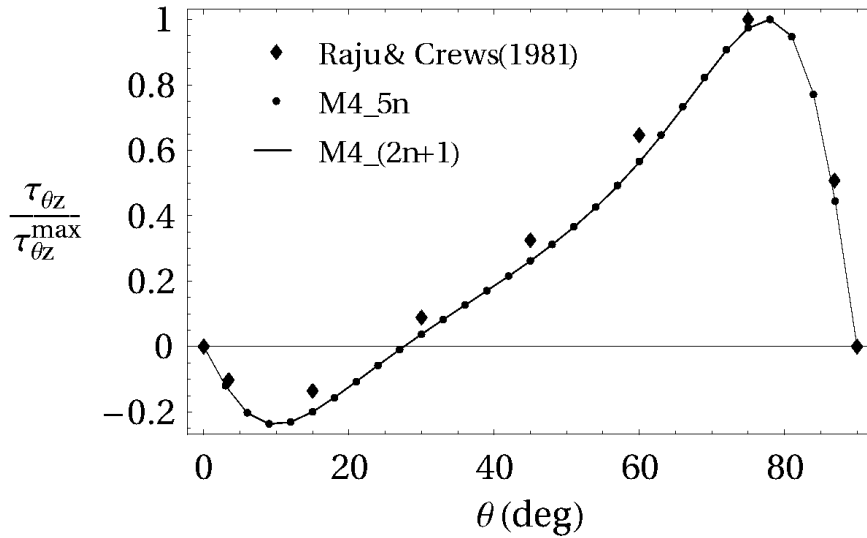


Figure 18: Comparison of the normalized stress field $\tau_{\theta z}$ at the $0^\circ/90^\circ$ interface between M4_(2n+1), M4_5n and Raju-Crews' predictions (Chabot et Ehlacher, 2001)

In addition, the simplified method presented above is now be used to forecast the edge effects of a $(45^\circ, -45^\circ)_s$ holed plate. In this case ($\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$), M4_5n yields the stress τ_{xz} of a $(\theta - 45^\circ, \theta + 45^\circ)_s$ semi-infinite plate.

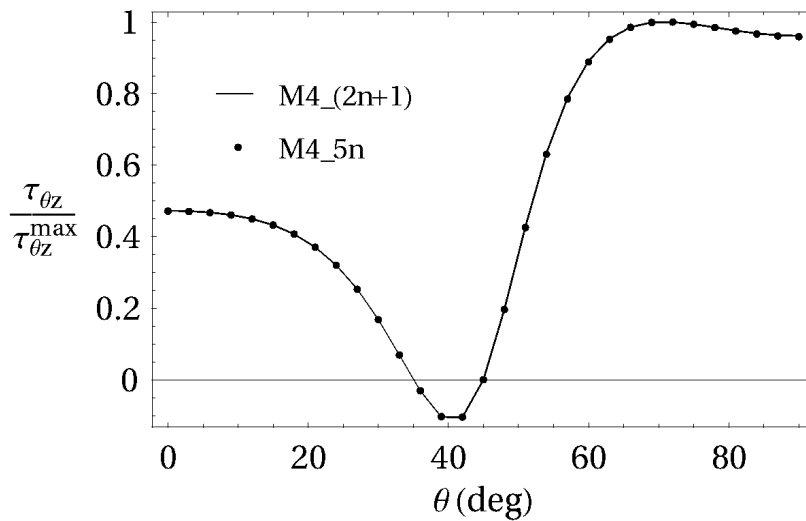


Figure 19: Normalized stress field $\tau_{\theta z}$ of M4_(2n+1) and M4_5n at the $45^\circ/-45^\circ$ interface for a composite $(45^\circ, -45^\circ)_s$ laminate with a circular hole (Chabot et Ehlacher, 2001)

Lekhnitskii's solution is applied for $\varphi = 0^\circ$ in Eq. (58). The normalized stress field $\tau_{\theta z}$ of a $(45, -45)_s$ holed plate at the $45^\circ/-45^\circ$ interface is given in Fig. 19. In this case, the maximum stress is obtained at approximately 72° , with however little difference for angles between 65° and 90° from \mathbf{e}_1 ."

Les deux sections suivantes indiquent comment en poste de CR au LCPC (puis IFSTTAR), associé à des essais accélérés en vraie grandeur, j'ai tenté d'appliquer le modèle M4-5n à la

modélisation des problèmes de fissuration dans la flexion des chaussées « composites » principalement dans le cadre des trois travaux de trois thèses de (Tran, 2004) (Pouteau, 2004) et (Hun, 2012) dont une Cifre et six stages de Master2. Ces travaux à finalité très appliquée se sont insérés naturellement dans les activités internationales de la Rilem. Ils font l'objet majoritairement de quatre articles de revue dont une dans le WOS, 13 communications à des congrès avec actes et comité de lecture (dont 8 internationaux), six rapports et de nombreuses présentations orales dont trois présentations en tant qu'invitée (Rilem TC193-RLS Paris 2004, AFD40 – TRB Washington2005, St Gobain Boston 2010)

3. Cas de la flexion : adaptation des M4 à la modélisation des chaussées (projet FissuRoute)

La méthode de dimensionnement actuelle des chaussées françaises (guide technique LCPC- SETRA de 1994), repose encore sur le modèle analytique de Burmister (1943) contenu dans le logiciel ALIZE du LCPC (Autret et *al.*, 1982). Ce modèle calcule les contraintes et déformations sous charge à pression supposée uniforme dans un multicouche élastique reposant sur un massif élastique infini. Si ce modèle ainsi que la méthode ont prouvé une bonne applicabilité dans le cas des chaussées neuves, les résultats sont plutôt contrastés pour les chaussées bétons ou nécessitant des solutions d'entretien et/ou de renforcement. En effet le modèle axisymétrique de Burmister, par ses hypothèses ainsi simplificatrices, ne peut pas prendre en compte la présence de discontinuités (types fissures/joints ou décollements imparfaits). Afin d'analyser des pathologies des structures, de proposer des solutions de renforcement appropriées et plus durables des chaussées anciennes et concevoir des chaussées nouvelles adaptables au cahier des charges de l'urbain, le besoin est donc de pouvoir disposer d'outils d'analyse mécanique du fonctionnement en 3D de ces ouvrages. Pour l'analyse des pathologies par fatigue des chaussées bitumineuses (c'est à dire a priori initialement continues), une approche par la mécanique de l'endommagement peut être tentée (Bodin et *al.*, 2004) mais ce type d'approche peut être limité lorsqu'il s'agit de calculer la structure de chaussée complète. De plus, elle ne répond pas simplement au problème de chaussées dotées de macro-fissures initiales. Pour être largement utilisés par la profession, ces outils doivent in fine être simples et rapides à mettre en œuvre d'autant plus que ces solutions présentent un marché économique non négligeable qu'il est nécessaire de bien conseiller. Pour ce problème général de flexion, j'ai donc établi dans mon dossier de candidature au poste de chargée de recherche un projet de recherche pour la modélisation des chaussées sur la « modélisation simplifiée des contraintes dans les chaussées fissurées ». En effet, mes travaux de thèse, synthétisés précédemment, permettent une analyse très simple des sur-contraintes aux éventuels bords et la prise en compte de la fissuration verticale des couches et du décollement. Aussi en vue d'utiliser la mécanique de la rupture, j'ai proposé, dès juin 2000, dans le cadre du projet de thèse de Tran (2004) en partenariat avec A. Ehrlicher, d'adapter et de développer à partir du M4-5n une méthode d'analyse simplifiée de l'état de contrainte dans une chaussée dont certaines couches sont fissurées verticalement et certaines interfaces éventuellement décollées partiellement ou totalement provoquant ainsi du glissement. Ces travaux ont été notamment appliqués à l'étude de chaussées alternatives aux chaussées classiques.

En effet, la technique de chaussée en béton de ciment mince collé (BCMC) principalement développé depuis la fin des années 1990 aux Etats-Unis présente une alternative séduisante aux chaussées classiques lorsque le prix du pétrole augmente. Pour ma part, c'est un cas spécifique assez « simple » de chaussée, que je nomme « composite », pour lequel l'hypothèse restrictive de l'élasticité du M4-5n peut être retenue dans un premier temps. Cette technique est intéressante pour résoudre les problèmes d'orniérage des chaussées sous charges statiques ou lentes (Bonnet et *al.*, 1998). La ville de Nantes s'est équipée dernièrement de ces structures de chaussées pour les aires d'arrêt de son nouveau réseau de chronobus mis en service en octobre 2012. Cette technique consiste à couler des dalles minces de béton (6 à 10 cm) directement sur la couche bitumineuse sous-jacente (Cimbéton, 2004), d'où ma nomination personnelle de chaussée « composite ». Le bon collage supposé offre ainsi la possibilité de réduire les épaisseurs des couches usuelles de béton de ciment proposant ainsi une alternative économiquement viable aux chaussées bitumineuses dans un contexte de prix du pétrole en pleine expansion (Pouteau, 2004). Mais de façon récurrente une fissuration en coin de dalles impacte négativement l'esthétisme du revêtement (Cf. Fig. 20).



Figure 20: Endommagements types « en coin de dalle » de chaussées BMCB testées in situ (Rasmussen et Rozycki, TRB2004)

Le développement de ces techniques à l'urbain est freiné alors qu'il devrait a contrario trouver son domaine d'emploi optimal en France (De Larrard et *al.*, 2001). Les effets du retrait et du gradient de séchage au jeune âge du béton de ciment combinés à la flexion que la structure composite subit lors du passage de trafic lourd semblent être responsables de ce phénomène. Mais combinés à ces effets, les sur-contraintes existantes près des bords au coin peuvent également justifier par décollement ultime ces endommagements. L'expérimentation Fabac réalisée au cours de la thèse de Pouteau (2004) (Pouteau et *al.*, 2005) confirme, que la présence de joint conduit in fine à la possibilité de générer du décollement (Cf. Fig. 2). Celle-ci est générée différemment en fonction de la valeur du rapport de modules entre les deux couches de matériaux (béton et enrobés à comportement thermo-susceptible) et de la position de la charge (Pouteau, 2004).

L'occasion qui m'a ainsi été donné de pouvoir participé à l'encadrement cette thèse Cifre (Pouteau, 2004) sur la durabilité du collage entre matériaux « blanc » (béton de ciment) et « noir » (bitumineux) a permis de retenir toute mon attention pour une application et un développement direct de mes travaux de thèse notamment dans un travail de mise au point d'essai de fatigue en laboratoire (Pouteau et *al.*, 2002). Pour cette application nous avons considéré que la structure est composée de deux couches (béton sur enrobés) reposant sur

un sol. Les matériaux sont supposés élastiques, homogènes et isotropes dans le modèle. En effet, durant les expérimentations accélérées in-situ type Fabac sur chaussées BCMC réalisées au cours de ce travail de thèse (Pouteau, 2004), les résultats de jauges de déformations non détruites durant l'essai (à la base de la première couche en béton de ciment) sur différents joints (notés T2, T3, T6, T7) montrent que l'hypothèse de glissement parfait entre les deux premières couches (noté par « U » comme unbond par rapport à « B », bond - Cf. Fig. 21) (Chabot et al., 2008) ainsi que la prise en compte de la thermo-susceptibilité du matériau enrobé par rapport à la non prise en compte sa viscoélasticité, soient les hypothèses à privilégier dans un premier temps afin de mettre au point un modèle simplifié adapté à l'étude initiale des champs mécaniques de la chaussée telle que proposée dans mes travaux de recherche. A noter que le cas du glissement parfait dans un calcul viscoélastique a pu être évaluée a posteriori à ces travaux grâce aux développements de la version recherche du logiciel ViscoRoute© (Chupin et al., 2010) présentée dans la seconde partie de ce mémoire.

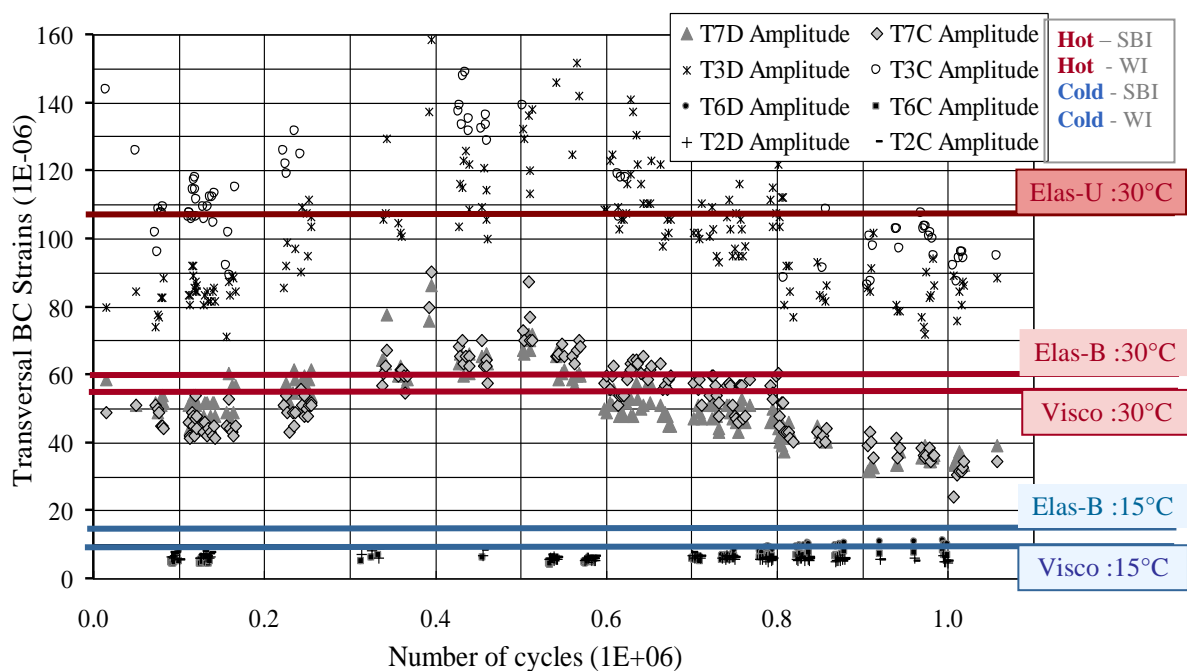


Figure 21: Comparaison des déformations en base de la couche de béton de ciment de chaussées BCMC simulées sous différentes hypothèses ViscoRoute© et leur évolution durant les tests accélérés Fabac de Pouteau (2004) (d'après la présentation orale de Chabot et al., 2008)

Aussi la première étape de ces développements a consisté, au travers du travail de DEA de Tran (2001) a permis de comparer avec succès le M4-5n en axisymétrique au modèle de Burmister sur des cas de chaussées. Ce travail nous a convaincu du bien-fondé de l'idée d'un M4 transposable aux structures de chaussées. En découpant le sol en plusieurs sous-couches M4-5n, les champs de contraintes dimensionnant M4-5n obtenus sous Matlab en 2D axi-symétrie, sont similaires sur les interfaces du haut de la chaussée à ceux issus d'un calcul élastique réalisé sous le logiciel Alizé. Par contre, sur les exemples traités, pour avoir une bonne description des efforts dimensionnant à l'interface sol - couches de chaussée, il est nécessaire de modéliser le sol par un empilement de couches de même matériau dont le rapport d'épaisseur entre couches ne peut dépasser le nombre 4.

Ce nombre de couches de sol supplémentaire au nombre de couches de chaussées modélisées par leM4-5n, augmente considérablement le nombre d'inconnues M4-5n à résoudre. Aussi afin d'obtenir une modélisation plus efficace et un outil rapide, les

développements ultérieurs ont conduit à proposer de combiner les équations du M4-5n à celles d'un modèle de sol existant dans la littérature.

3.1. Combinaison du M4-5n avec un massif de Boussinesq

Pour ce faire le modèle de Boussinesq (1885), créé et utilisé initialement en mécanique des sols ainsi que décrit par exemple dans (Johnson, 1992) et (Salaska, 1998), présente l'avantage de donner de façon analytique sous forme d'équations intégrales, les champs de déplacements à la surface d'un massif élastique semi-infini en fonction de l'action d'une charge statique ponctuelle ou non s'exerçant sur celui-ci. C'est pourquoi, outre le modèle de Burmister de 1943, utilisé dans le logiciel de dimensionnement des chaussées françaises pour n couches de chaussées reposant sur un massif de Boussinesq, on trouve dans la littérature le modèle dit « bicouche de Hogg (1938) » pour la modélisation des contraintes et déformations d'une plaque mince reposant sur un massif élastique semi-infini de type Boussinesq et le modèle de modèle de Jeuffroy (1955). Ce dernier auteur a notamment proposé des abaques pour le cas d'une plaque mince reposant sans frottement sur une couche de Burmister elle-même reposant sur un massif sol de Boussinesq.

Il a ainsi été proposé dans la thèse de Tran (2004) de remplacer les couches M4-5n du sol par le massif élastique semi-infini de Boussinesq (1985). Le modèle peut ainsi être schématisé sur la Fig. 22. Dans ce cas l'ordre d'empilement et l'axe des z est dirigé vers le bas pour des raisons de commodités dans le développement.

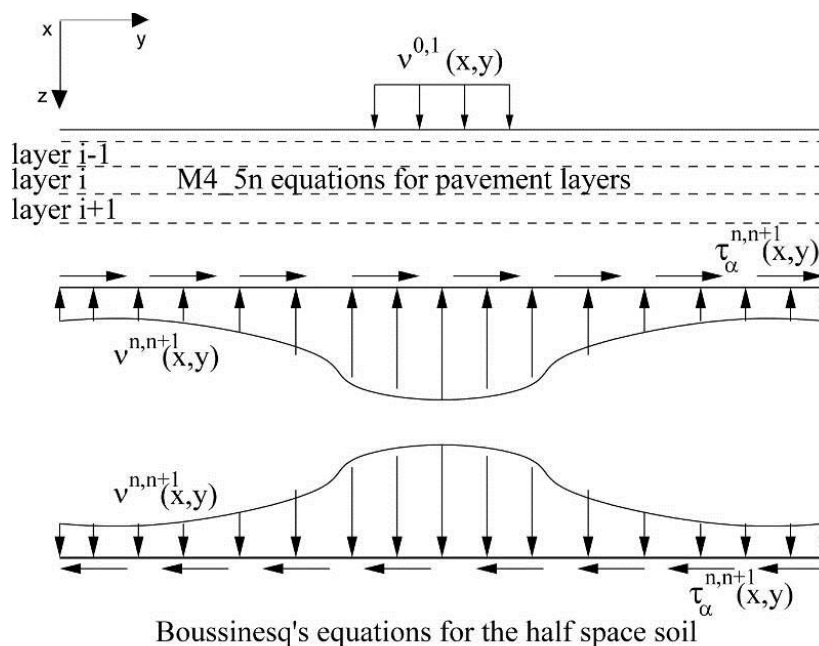


Figure 22. Schéma du M4-5nB développé par (Tran et al., 2004)

Les efforts s'exerçant sur le massif de Boussinesq sont les efforts d'interface M4-5n de conditions aux limites entre la chaussée multicouche constituée de n couches et sa surface extérieure s'appuyant de façon collée sur le sol, soit à l'interface $n, n + 1$. Ainsi pour ces trois nouvelles inconnues d'interface supplémentaires, $\tau_{\alpha}^{n,n+1}(x, y)$ et $v^{n,n+1}(x, y)$, le massif

de sol de Boussinesq fournit à l'aide de ses déplacements de surface notés $u_j^{surface}(x, y)$ ($j \in \{1,2,3\}$), les trois équations intégrales supplémentaires suivantes (60-63). Ce nouveau modèle ainsi bâti a été nommé le M4-5nB, il est publié notamment dans (Tran et al., 2003) (Tran et al., 2004) et l'article (Chabot et al., 2005). Ce modèle décrivant le problème 3D des structures de chaussées conduit à la résolution du problème 2D de surface (x,y).

$$\begin{aligned}
u_1^{surface}(x, y) &= U_1^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_1^n(x, y) \\
&= \frac{(1 + \nu_s)}{\pi E_s} \times \left(\begin{aligned} & - \frac{1 - 2\nu_s}{2} \int_S \nu^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x - \xi)^2 + (1 - \nu_s)(y - \eta)^2}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \\ & + \nu_s \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \right) \quad (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{surface}(x, y) &= U_2^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_2^n(x, y) \\
&= \frac{(1 + \nu_s)}{\pi E_s} \times \left(\begin{aligned} & - \frac{1 - 2\nu_s}{2} \int_S \nu^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \nu_s \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \\ & + \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(1 - \nu_s)(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \right) \quad (61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3^{surface}(x, y) &= U_3^n(x, y) \\
&= \frac{(1 + \nu_s)}{\pi E_s} \times \left(\begin{aligned} & (1 - \nu_s) \int_S \nu^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{1/2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{(1 - 2\nu_s)}{2} \left(\begin{aligned} & \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (62)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, Tran a enrichi le modèle M4-5n de l'introduction du comportement anélastique des interfaces comme donnée dans le travail de thèse de l'ENPC de DiazDiaz, (2001) et de la prise en compte des forces de volume. La possibilité a été ainsi faite de simuler les effets de gradient thermique différentiels des couches de chaussées pour faire des études de validation.

A titre d'exemple, les résultats d'un cas de chargement de retrait thermique et de gradient validé par rapport à des calculs éléments finis 3D César LCPC sont donnés sur la Fig. 23 (Tran, 2004) (Chabot, JTR2006). On note une bonne concordance des résultats pour un gain de calcul intéressant.

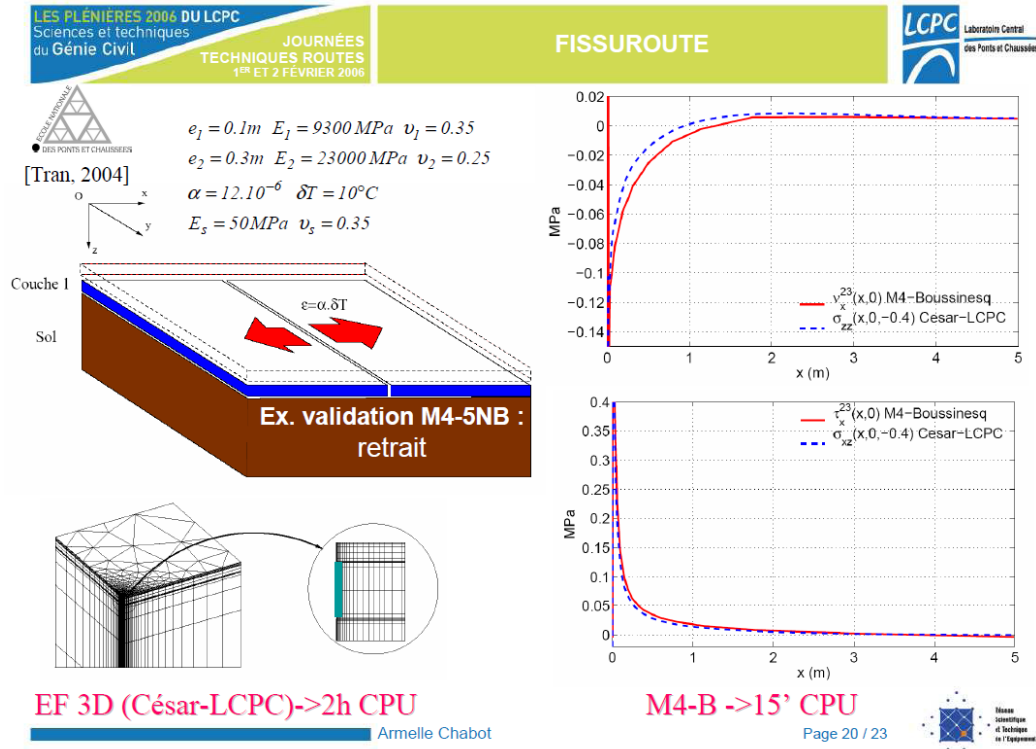


Figure 23. Etude des effets du retrait du béton sur les contraintes d'interface au droit du joint d'une chaussée composite Noir sur Blanc (Extrait de Chabot, 2006)

Sous hypothèses de forces volumiques nulles, le jeu d'équations M4-5n à résoudre finalement est ainsi résumé dans les expressions suivantes (63-70) de (Tran, 2004) (Chabot et al., 2007).

Pour chacune des couches i ($i = 1, \dots, n$), on a ainsi :

$$e_i E_i \left(\frac{1}{1-\nu_i^2} U_{1,11}^i + \frac{1}{2(1+\nu_i)} U_{1,22}^i + \frac{1}{2(1-\nu_i)} U_{2,12}^i \right) = \tau_1^{i-1,i} - \tau_1^{i,i+1} + \frac{e^i E^i}{(1-\nu_i^2)} \left(\varepsilon_{11}^{i, in} + \nu_i \varepsilon_{22}^{i, in} \right)_{,1} + \frac{e^i E^i}{(1+\nu_i)} \varepsilon_{12}^{i, in} \quad (63)$$

$$e_i E_i \left(\frac{1}{2(1+\nu_i)} U_{2,11}^i + \frac{1}{1-\nu_i^2} U_{2,22}^i + \frac{1}{2(1-\nu_i)} U_{1,12}^i \right) = \tau_2^{i-1,i} - \tau_2^{i,i+1} + \frac{e^i E^i}{(1-\nu_i^2)} \left(\nu_i \varepsilon_{11}^{i, in} + \varepsilon_{22}^{i, in} \right)_{,2} + \frac{e^i E^i}{(1+\nu_i)} \varepsilon_{12}^{i, in} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{2e_i^2 E_i}{1-\nu_i^2} \Phi_{1,11}^i + \frac{e_i^2 E_i}{1+\nu_i} \Phi_{1,22}^i + \frac{e_i^2 E_i}{1-\nu_i} \Phi_{2,12}^i - \frac{10E_i}{1+\nu_i} (U_{3,1}^i + \Phi_1^i) = -10(\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) \\ + \left(\frac{e^{i3} E^i}{(1-\nu_i^2)} (\chi_{11}^{i \text{ in}} + \nu_i \chi_{22}^{i \text{ in}}) \right)_{,1} + \left(\frac{e^{i3} E^i}{(1+\nu_i)} \chi_{12,2}^{i \text{ in}} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_i^2 E_i}{1+\nu_i} \Phi_{2,11}^i + \frac{2e_i^2 E_i}{1-\nu_i^2} \Phi_{2,22}^i + \frac{e_i^2 E_i}{1-\nu_i} \Phi_{1,12}^i - \frac{10E_i}{1+\nu_i} (U_{3,2}^i + \Phi_2^i) = -10(\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) \\ + \left(\frac{e^{i3} E^i}{(1-\nu_i^2)} (\nu_i \chi_{11}^{i \text{ in}} + \chi_{22}^{i \text{ in}}) \right)_{,2} + \left(\frac{e^{i3} E^i}{(1+\nu_i)} \chi_{12,1}^{i \text{ in}} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} U_{3,11}^i + U_{3,22}^i + \Phi_{1,1}^i + \Phi_{2,2}^i = \frac{12(1+\nu_i)}{5e_i G_i} (\nu^{i-1,i} - \nu^{i,i+1}) - \frac{(1+\nu_i)}{5E_i} (\tau_{1,1}^{i,i+1} + \tau_{2,2}^{i,i+1} + \tau_{1,1}^{i-1,i} + \tau_{2,2}^{i-1,i}) \\ + d_{\Phi_{1,1}}^{i \text{ in}} + d_{\Phi_{2,2}}^{i \text{ in}} \end{aligned} \quad (67)$$

Où $\varepsilon_{\alpha\beta}^{i \text{ in}}(x, y)$, $\chi_{\alpha\beta}^{i \text{ in}}(x, y)$, $d_{\Phi\alpha}^{i \text{ in}}(x, y)$, $D_{\alpha}^{i,i+1 \text{ in}}(x, y)$ et $D_3^{i,i+1 \text{ in}}(x, y)$ sont respectivement les champs de déformations anélastiques associées aux différentes déformations élastiques M4 de la couche I et de l'interface $i, i+1$. Ces champs sont supposés être connus. De façon similaire pour chacune des interfaces $i, i+1$ ($i=1, \dots, n-1$) on obtient:

$$\begin{aligned} U_1^{i+1} - U_1^i - \frac{5e_i}{12} \Phi_1^i - \frac{5e_{i+1}}{12} \Phi_1^{i+1} - \frac{e_i}{12} U_{3,1}^i - \frac{e_{i+1}}{12} U_{3,1}^{i+1} - D_1^{i,i+1 \text{ in}} = -\frac{e_i(1+\nu_i)}{12E_i} \tau_1^{i-1,i} \\ + \frac{1}{8} \left(\frac{2e_i(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{12E_{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} U_2^{i+1} - U_2^i - \frac{5e_i}{12} \Phi_2^i - \frac{5e_{i+1}}{12} \Phi_2^{i+1} - \frac{e_i}{12} U_{3,2}^i - \frac{e_{i+1}}{12} U_{3,2}^{i+1} - D_2^{i,i+1 \text{ in}} = -\frac{e_i(1+\nu_i)}{12E_i} \tau_2^{i-1,i} \\ + \frac{1}{8} \left(\frac{2e_i(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{12E_{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (69)$$

$$U_3^{i+1} - U_3^i - D_3^{i,i+1 \text{ in}} = -\frac{9e_i}{70E_i} \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e_i}{E_i} + \frac{e_{i+1}}{E_{i+1}} \right) \nu^{i,i+1} - \frac{9e_{i+1}}{70E_{i+1}} \nu^{i+1,i+2} \quad (70)$$

Comme dit précédemment les forces à l'interface $n, n+1$ interface entre la chaussée et le sol sont des inconnues à trouver. Elles dépendent des conditions de collage entre ces deux éléments (Cf. Fig. 22). A noter que seul, jusqu'à présent, le cas de collage parfait entre les couches de chaussée et le sol a été examiné dans les applications que j'ai faites.

L'ensemble de la méthode de résolution des équations est donné dans la thèse de Tran (2004) et l'article de (Chabot et al., 2005).

Après écriture des conditions aux limites soient libres ou bloqués sur les quatre côtés de la surface et utilisation des conditions aux limites en chargement, connus à la surface du multicouche de chaussée, la généralisation du système M4-5n se synthétise donc sous la forme d'un système global différentiel d'ordre 2 de dimension 5n suivant :

$$AA.X_{,11} + BB.X_{,22} + CC.X_{,12} + DD.X_{,1} + EE.X_{,2} + FF.X = GG.\Sigma_{,1} + HH.\Sigma_{,2} + II.\Sigma + JJ \quad (71)$$

Si on note (Tran, 2004) (Chabot et al., 2005):

- $X = T \left[U_1^1, U_2^1, \Phi_1^1, \Phi_2^1, U_3^1, \dots, U_1^i, U_2^i, \Phi_1^i, \Phi_2^i, U_3^i, \dots, U_1^n, U_2^n, \Phi_1^n, \Phi_2^n, U_3^n \right]_{(x,y)}$, le vecteur de dimension 5n des inconnues cinématiques

- $\Sigma = T \left[\tau_1^{n,n+1}, \tau_2^{n,n+1}, \nu^{n,n+1} \right]_{(x,y)}$, le vecteur d'inconnues statiques de dimension 3 des points (x, y) de ce plan.

- AA, BB, CC, DD, EE, FF les matrices matériaux correspondantes, de dimension 5n x 5n, GG, HH, II les matrices matériaux de dimension 5n x 3 et JJ le vecteur de dimension 5n intégrant les conditions aux limites de chargement en haut du multicouche de chaussée dont les expressions détaillées sont données dans la thèse de Tran (Tran, 2004).

Le système des 3 équations linéaires complémentaire de Boussinesq est lui exprimé sous la forme suivante (Tran, 2004):

$$M.X(x, y) = \int_S f(x, y, \xi, \eta) \Sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & e^{n/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & e^{n/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matrice de dimension } 3 \times 5n \quad (72)$$

et f la matrice 3x3 des expressions de (60) (61) et (62)

Généralisée pour n couches, l'écriture discrétisée des 5 conditions aux limites par couche i (Tran, 2004) est ramenée, comme précédemment, à l'interface chaussée-sol par l'intermédiaire des équations (68) (69) (70). Elles s'écrivent sur chacun des bords du plan (x, y) sous la forme de systèmes d'équations différentielles du premier ordre suivant :

Pour $x \rightarrow \infty, \forall y$

$$\begin{cases} CL_{x1}.X'_{,1} + CL_{x2}.X'_{,2} + CL_{x3}.X = CL_{x4}.\Sigma^{0,1} + CL_{x5}.\Sigma \text{ bords bloqués} \\ CL_{x6}.X'_{,1} + CL_{x7}.X'_{,2} + CL_{x8}.X = CL_{x9}.\Sigma^{0,1} + CL_{x10}.\Sigma \text{ bords libres} \end{cases} \quad (73)$$

Pour $\forall x, y \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} CL_{y1}.X'_{,1} + CL_{y2}.X'_{,2} + CL_{y3}.X = CL_{y4}.\Sigma^{0,1} + CL_{y5}.\Sigma \text{ bords bloqués} \\ CL_{y6}.X'_{,1} + CL_{y7}.X'_{,2} + CL_{y8}.X = CL_{y9}.\Sigma^{0,1} + CL_{y10}.\Sigma \text{ bords libres} \end{cases} \quad (74)$$

avec $\Sigma^{0,l} = \begin{bmatrix} \tau_1^{0,1}, \tau_2^{0,1}, \nu^{0,1} \end{bmatrix}$ le vecteur des conditions aux limites de chargement et CL_{xj}, CL_{yj} $j \in [1,10]$ les matrices coefficients (Tran, 2004).

Pour résoudre numériquement les équations du modèle M4-5nB, le plan de calcul, de largeur l et de longueur L , a été discrétisé en N intervalles selon l'axe des x et N intervalles selon l'axe des y (Tran, 2004) (Chabot et al, 2005). A noter que (Lavigne P., 2006) a généralisé depuis ces calculs pour une discrétisation quelconque en N_1 fois N_2 intervalles. (Tran, 2004) utilise la méthode des différences finies de Newmark (avec $\alpha = 0.5$) (Newmark, 1959) pour l'ensemble du jeu d'équation M4-5n y compris ces conditions aux limites sur quatre bords du plan discrétisé. Le système linéaire résultant est alors un système de $5n(N-1)^2$ équations plus $4 \times 5nN$ équations de plus dont le détail est donné dans le mémoire de thèse (Tran, 2004).

Pour faciliter les intégrations numériques des équations de Boussinesq, qui peuvent s'effectuer analytiquement, on suppose, dans une première approximation, que les efforts d'interface écrits dans le vecteur Σ restent constants sur les surfaces élémentaires S_e . On obtient ainsi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, \xi, \eta) \Sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \sum_1^{(N+1)^2} \int_{S_e} f(x, y, \xi, \eta) \Sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\approx \sum_1^{(N+1)^2} \Sigma(\xi_s, \eta_t) \left(\int_{S_e} f(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right) \end{aligned} \quad (75)$$

Par changement de variables, l'intégrale des fonctions contenues dans $f(x, y, \xi, \eta)$ se calcule aisément analytiquement sur S_e et conduit ainsi à la forme discrétisée de (72) au point (x_k, y_l) :

$$M \cdot X_{k,l} = \sum_1^{(N+1)^2} N_{k,l,s,t} \cdot \Sigma_{s,t} \quad \forall k = 1, N+1, \forall l = 1, N+1 \quad (76)$$

Si N représente la matrice (3×3) des expressions de f intégrées.

Le M4-5nB se résume finalement au système linéaire à $(5n+3)(N+1)^2$ équations à résoudre de la forme :

$$\begin{cases} X = [K_1 - K_2 K_5^{-1} K_4]^{-1} \cdot K_3 \\ \Sigma = K_5^{-1} K_4 \cdot X \end{cases} \quad (77)$$

où X et Σ sont respectivement les vecteurs d'inconnues cinématiques de dimension $5n(N+1)^2$ et d'inconnues statiques de dimension $3(N+1)^2$ écrits précédemment, K_1, K_2, K_4 et K_5 les matrices matériaux respectivement de dimension

$5n(N+1)^2 \times 5n(N+1)^2$, $5n(N+1)^2 \times 3(N+1)^2$, $3(N+1)^2 \times 5n(N+1)^2$ et $3(N+1)^2 \times 3(N+1)^2$ et K_3 le vecteur des chargements de dimension $5n(N+1)^2$.

Pour introduire des fissures longitudinales ou transversales par rapport au sens de roulement de la charge, verticales sur l'épaisseur d'une ou plusieurs couches de chaussée, on considère que les lèvres de la fissure constituent deux bords libres. Ces deux bords sont supposés distants d'un intervalle non nul mais étroit, de l'ordre d'un à plusieurs millimètres selon le type de chaussée à examiner. Dans le schéma discrétisé, la fissure est ainsi numériquement représentée par une discontinuité entre deux lignes de points représentant les bords de la fissure. Pour ces lignes de points des lèvres de la fissure, l'introduction de fissure dans le système d'équations précédent (77) consiste alors à supprimer les équations correspondantes et à les remplacer par des lignes de points de conditions aux limites de type bord libre données dans les systèmes précédents (73) et (74) alors discrétisés.

Pour la validation de ce modèle, la résolution a été par la suite programmée initialement par Tran (2004) sous Matlab. Dans le cas de bicouches de chaussées fissurées verticalement, ce modèle a permis d'obtenir d'excellents résultats par comparaison avec des calculs éléments finis 3D (Tran et al., 2003) (Tran et al., 2004) pour un gain de temps important.

Ainsi, en complément des essais Fabac sur chaussée BCMC menés dans la thèse de Pouteau (2004), l'analyse des champs de contraintes par les calculs M4-Boussinesq, dans le cas d'une 1^{ère} couche fissurée, a pu ainsi apporter des éléments d'interprétation des différents résultats obtenus. On reporte ci-après, à titre indicatif, une première approximation élastique de ces résultats à l'aide du modèle M4-5nB programmé, dans sa version recherche, sous l'outil Matlab (Tran, 2004) (Guillo, 2004), dans le cas où les bords sont bloqués (Chabot et al., 2004). Dans ce cadre, dans le plan $y=0$, à l'interface « Blanc/Noir » de la chaussée composite en BCMC (béton de ciment mince collé), lorsque la charge est placée au bord de la fissure, on illustre les contraintes d'arrachement et de cisaillement du calcul M4-5n-B (Fig. 24). La charge est considérée rectangulaire ($a=0,14m$ et $b=0,09m$) de pression $q=0,645MPa$. La chaussée est constituée de 2 couches élastiques de largeur $1,95m$ (béton de ciment de classe 5: $e_1=0,08m$, $E_1=36500MPa$, $\nu_1=0,25$; enrobé bitumineux de type GB3: $e_2=0,095m$, $E_2=8485MPa$ et $\nu_2=0,35$) reposant sur le massif de sol (infini dans le plan) de type PF3: $E_s=120MPa$ et $\nu_s=0,35$. La fissure suivant l'épaisseur totale de la couche de béton de ciment a une ouverture de $0,005m$ qui correspond au sciage du joint dans le sens transversal. Le maillage plan du M4-5nB contient 30×20 mailles.

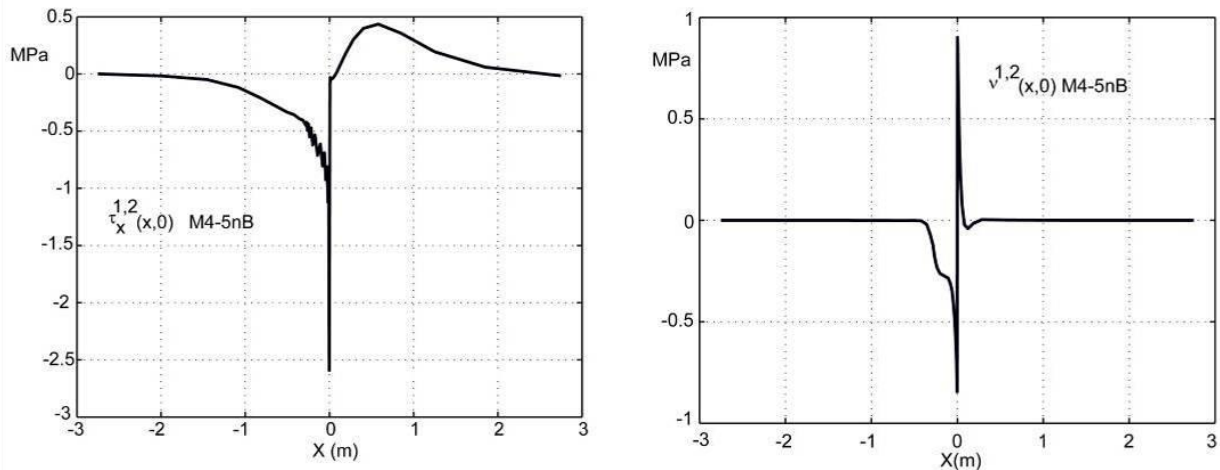


Figure 24. M4- 5nB stress fields between the cracked concrete layer and the asphalt layer (Chabot et al., 2004))

Dans cette position de charge, au bord de la fissure (fissure centrée en zéro sur les Fig. 24a et Fig. 24b), on note que la chaussée est sollicitée en mode mixte. Ce résultat justifie l'essai de laboratoire de rupture en flexion alternée sur éprouvette bimatériaux tenté dans les travaux de Pouteau (2004) puis mis au point en statique dans les travaux de (Hun, 2012) comme décrit par la prochaine section. On note ainsi un cisaillement d'interface important sur les bords de la charge accentué par la présence de la fissure. De plus, l'effort d'arrachement d'interface, fortement négatif sous la charge, est non négligeable en traction du côté non chargé. Bien entendu, ces résultats méritent d'être encore approfondis dans le cas des conditions réelles de l'expérimentation (bords libres suivant l'axe des y ; prise en compte des effets de gradient thermique dans la couche en béton de ciment mince collé, de la répartition réelle du contact pneu chaussée ; comparaison avec des mesures issues de l'instrumentation ; analyse des effets viscoélastiques de la grave bitume , de décollement à l'interface entre couches...). C'est un des objectifs du nouveau sujet de thèse proposé en 2012 (cf partie 3).

A noter que pour accélérer par ailleurs encore plus l'obtention des solutions dans le cadre de calculs multi- cycles sur chaussée 3D fissurée transversalement, une méthode d'extrapolation des résultats du 2D a été proposée (Chabot et al., 2005). L'objet BCMC ne pouvant pas être alors simulé, puisqu'il s'agit de traiter en conditions aux limites de la problématique de dalles et non pas du cas simplifié des fissures transversales, cette méthode n'a pas pu être reprise depuis.

Les développements de modélisation de la thèse de Tran ont ainsi été utiles à la fois pour la thèse de Pouteau (2004), Florence (2005) (Florence et al., 2004) au LAMI sur le renforcement de couche de chaussée par grille en métal déployé et la thèse de Pérez (2008) (Pérez et al., 2007) (Pérez et al., 2008) sur l'analyse de problème de fissuration réfléctive et la tentative de mise au point d'un essai simulant ce processus. Le stage de Master 2 de l'Université de Nantes de Guillo (2004) testant la convergence numérique des solutions programmées par Tran, ainsi que les quelques travaux sur le sujet de la thèse de Pérez (2008) et début de thèse Cifre de (Lavigne, 2006) (Chabot, Août 2007) ont cependant confirmé la difficulté de progresser sur le sujet sans erreur potentielle dans la programmation et la nécessité de posséder malgré tout d'un ordinateur de calcul performant. En effet, bien que le gain de temps de calcul M4-5nB soit important par rapport à un calcul éléments finis 3D (Cf. Fig.23), les équations de Boussinesq rendent

finalement assez pleines les matrices du système discrétisé finales à résoudre. De plus, il est par ailleurs assez compliqué de trouver dans le cadre d'une programmation à n couches, soit le signe, soit l'indice manquant dans les équations du fait de leur nombre important et combiné. C'est pourquoi, finalement j'ai souhaité repartir à la base de ces travaux et simplifier encore le modèle avant de construire un outil général 3D à n couches de chaussées. Afin de tenter de pousser les calculs analytiques plus à fond pour obtenir des matrices avec un motif analytique, j'ai bénéficié par la suite des stages de Master 2 de l'Université de Nantes de (Bürkli, 2010) et (Berthemet, 2012) sur les cas simples de bicouche puis de tricouche sur massif de sol en déformations planes.

3.2. Combinaison du M4-5n avec un massif de Winkler

Pour simplifier l'outil, en lien avec ma participation au workshop d'Istanbul 2004 sur les chaussées bétons (Chabot et al., 2004), j'ai souhaité m'inspirer finalement des travaux de modélisation quasi analytique de ce type de chaussées. Pour ce faire j'ai proposé d'évaluer le massif de Winkler couplé avec un faible nombre de couches M4-5n comme alternative très simplifiée au massif de Boussinesq et outil de contrôle des nombreuses formules de la thèse de Tran. Ainsi utilisé pour les chaussées béton, le modèle bicouche de Westergaard (1926) permet d'exprimer très simplement les contraintes et déformations d'un système constitué d'une plaque reposant sur un sol assimilé à un ensemble de ressorts verticaux sans connexions horizontales communément appelé fondation de Winkler (Cf. Fig. 25).

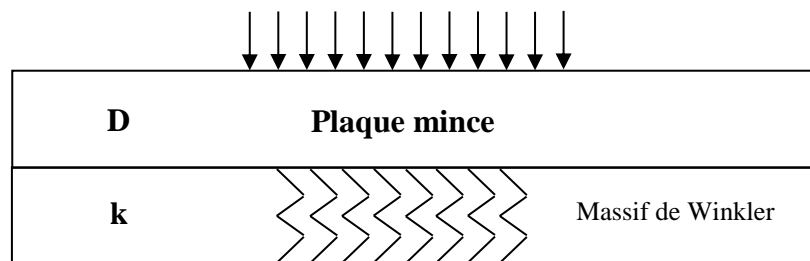


Figure 25. Schéma du modèle de Westergaard (d'après Salasca, 1998)

Dans ce modèle, le sol réagit de manière élastique et uniquement dans le sens vertical (Cf., Fig. 26). Le déplacement vertical en un point est proportionnel à la pression verticale en ce point comme suit (78) :

$$q = kU_3^0 \quad (78)$$

La grande simplicité du modèle de Westergaard conduit à l'obtention aisée de solutions analytiques. Ainsi pour les chaussées constituées de dalles béton, Westergaard a proposé une solution explicite du problème en terme de déflexions et de contraintes maximales pour 3 différents types de chargements (au centre, en coin, au bord).

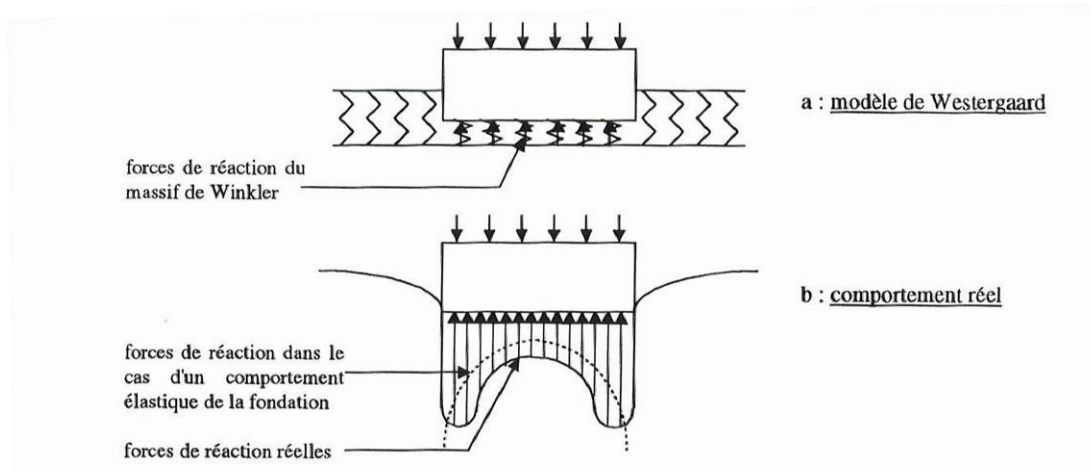


Figure 26. Représentation de la fondation d'un massif de Winkler et de son comportement réel (d'après Salasca, 1998)

A noter que les formules de Westergaard furent par la suite revues par Eisenmann et améliorées (Salasca, 1998). Cependant, la réaction du sol n'est pas strictement verticale, les contraintes se dispersent en profondeur et des contraintes de cisaillements ne sont pas à exclure. Aussi tous les spécialistes reconnaissent aujourd'hui que le modèle de Westergaard surestime les contraintes. L'hypothèse d'avoir une seule plaque mince sur un massif de Winkler est certainement trop restrictive si l'on souhaite modéliser convenablement les endommagements des chaussées. C'est pourquoi, Pasternak (1954), dans son modèle de fondation a introduit une couche de cisaillement entre le massif de Winkler et la chaussée. Puis Kerr en 1964 a continué le développement en glissant pour la fondation une couche de cisaillement entre 2 massifs de Winkler. En comparant les déflexions, les pressions et moments obtenus pour les trois types de chargements (charge uniformément répartie, forces concentrées aux bords d'une bande infinie, moments sur ces bords) au moyen de plusieurs modèles de fondation (Winkler, Kerr, Pasternak et fondation Boussinesq), Kneifati a montré que le modèle de Kerr permet d'obtenir des résultats proches de ceux déterminés par le massif de Boussinesq (Salasca, 1998). Ce dernier résultat nous conforte dans l'idée que pour modéliser convenablement la chaussée et le sol, il faille utiliser plusieurs couches M4-5n sur un massif de Winkler

Tout d'abord lors du stage de (Bürkli, 2010), les bases du nouveau modèle, ainsi désigné M4-5nW, et l'outil numérique sous environnement scilab pour aborder l'analyse mécanique simplifiée en déformations planes des contraintes dans une structure réelle BCMC sur massif sol type massif de Winkler a pu être mener à bien dans le cas des déformations planes pour un bicouche de chaussée sur un massif sol de Winkler. Dans ce cadre, les résultats ont montré de bonnes similitudes entre le M4-5nW nouvellement désigné, comparés à ceux obtenus dans les travaux de thèse de Tran (2004) sur massif de Boussinesq par le M4-5nB. En particulier, les efforts d'interface responsables à terme des dégradations d'interface au droit des fissures verticales de couche sont comparables pour un gain de temps important (Fig. 27).

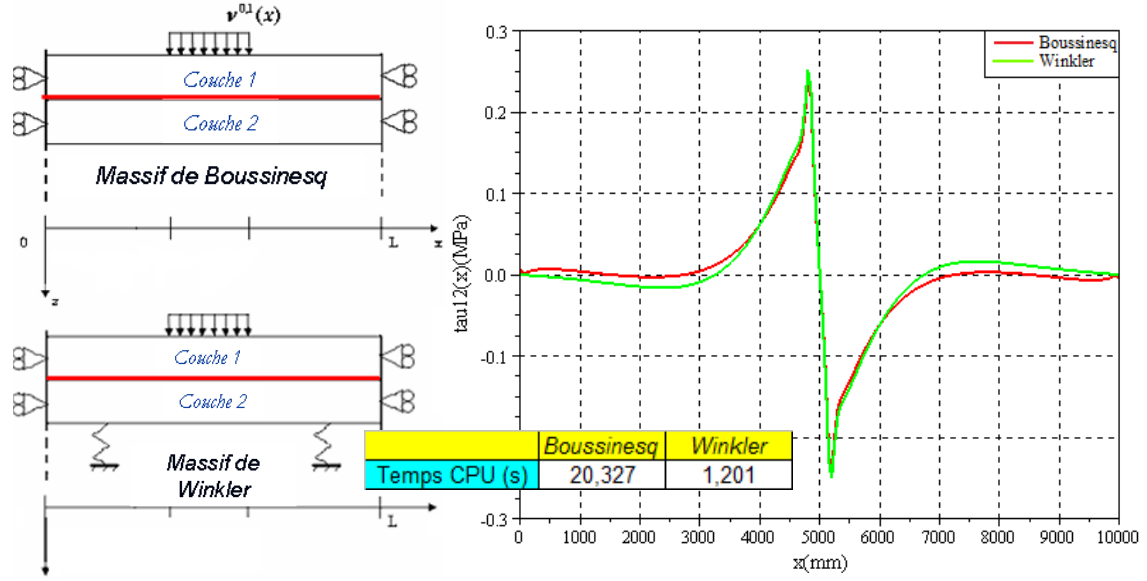


Figure 27. Comparaison des efforts de cisaillement à l'interface entre couche du modèle M4-5nB et M4-5nW Cas 2D élastique non fissuré déformation plane (Bürkli, 2010)

A ce titre, le modèle sur massif de Winkler (M4-5nW) est intéressant car il pourrait permettre de construire à terme l'outil d'analyse rapide souhaité par la profession cimentière. Par contre le cas bicouche est trop restrictif car l'interface chaussée sol est assez mal représentée étant donné que les cisaillements sont nuls dans le modèle de Winkler. Aussi afin de simplifier au maximum le problème, les travaux se sont poursuivis par l'écriture complètement analytique de la structure multicouche de chaussée assimilée, dans le stage de Berthemet (2012), à un système tricouche possédant une ou des fissures verticales le long de leur épaisseur et reposant sur un massif de sol-infini.

Comme pour la thèse de Tran (2004), le système final à résoudre peut s'écrire sous la forme suivante (Berthemet, 2012) (Berthemet et Chabot, 2013):

$$[A]X_{,11} + [B]X_{,1} + [C]X = [D]Y_{,1}^{0,1} + [E]Y_{,1}^{n,n+1} + [F]Y^{0,1} + [G]Y^{n,n+1}$$

$$X = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{bmatrix}_{3n \times 1} ; [X^i] = \begin{bmatrix} U_1^i \\ \Phi_1^i \\ U_3^i \end{bmatrix} ; Y^{0,1} = \begin{bmatrix} \tau_1^{0,1} \\ v^{0,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} ; Y^{n,n+1} = \begin{bmatrix} \tau_1^{n,n+1} \\ v^{n,n+1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} ; Y^{1,n} = \begin{bmatrix} Y^{1,2} \\ \vdots \\ Y^{n-1,n} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1} \quad (78)$$

Avec les matrices [A], [B],[C],[D],[E] et [F] de la forme (n=3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A] = ([M_1] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{10}]) \\ [B] = ([M_2] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{11}] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{10}]) \\ [C] = ([M_3] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{11}]) \\ [D] = ([M_4] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{12}]) \\ [E] = ([M_6] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{14}]) \\ [F] = ([M_7] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{12}]) \\ [G] = ([M_9] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{14}]) \end{array} \right.$$

Outre un choix de sol différent, en vue in fine de minimiser le nombre de calculs, le travail du stage de Berthemet (2012) par rapport aux travaux de Tran (2004) a été de pouvoir exprimer analytiquement ces matrices et de pouvoir finalement (par arrangement astucieux) de connaître leur forme explicite en fonction des paramètres géométriques et des caractéristiques des couches. Ci-dessous, nous donnons comme exemple la forme de l'expression explicite (contrairement à Tran) assez simple de la matrice A pour 3 couches en déformations planes obtenue après plusieurs manipulations analytiques aidées du logiciel Mathematica.

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{e^1 E^1}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2 E^1}{5(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5E^1}{(1+\nu)} - \frac{12E^1 E^2}{e^2 den} \left(\frac{e^2(1+\nu^2)}{4E^2} + \frac{e^3(1+\nu^3)}{4E^3} \right) & 0 & 0 & -\frac{12E^1 E^2}{e^1 den} \left(\frac{e^2(1+\nu^2)}{3E^2} + \frac{e^3(1+\nu^3)}{4E^3} \right) & 0 & 0 & -\frac{e^3 E^1}{e^1 den} (1+\nu^2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^2 E^2}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^2 E^2}{5(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12E^1 E^2}{e^2 den} \left(\frac{e^2(1+\nu^2)}{3E^2} + \frac{e^3(1+\nu^3)}{4E^3} \right) & 0 & 0 & \frac{5E^2}{(1+\nu)} - \frac{12E^1 E^2}{e^1 den} \left(\frac{e^1(1+\nu)}{4E^1} + \frac{2e^2(1+\nu^2)}{3E^2} + \frac{e^3(1+\nu^3)}{4E^3} \right) & 0 & 0 & -\frac{12e^3 E^1 E^2}{e^1 e^2 den} \left(\frac{e^1(1+\nu)}{4E^1} + \frac{e^2(1+\nu^2)}{3E^2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^3 E^3}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^3 E^3}{5(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E^1(1+\nu^2)}{den} & 0 & 0 & -\frac{12E^1 E^2}{e^1 den} \left(\frac{e^1(1+\nu)}{4E^1} + \frac{e^2(1+\nu^2)}{3E^2} \right) & 0 & 0 & \frac{5E^3}{(1+\nu)} - \frac{12e^3 E^1 E^2}{e^1 e^2 den} \left(\frac{e^1(1+\nu)}{4E^1} + \frac{e^2(1+\nu^2)}{4E^2} \right) \end{bmatrix}$$

De même que pour Tran (2004), les équations de Newmark ont été utilisées pour réduire l'ordre du système d'équations différentielles. Pour connecter les couches M4-5n au massif de Winkler, l'étudiant a proposé d'extrapoler à trois couches (Salaska, 1998) pour l'expression de la raideur du ressort comme donné ci-dessous (E_s représentant le module d'Young du sol):

$$\left\{ k = \frac{E^s}{h^*} \text{ avec } h^* = 0.83e^1 \sqrt{\frac{E^1}{E^s}} + 0.90e^2 \sqrt{\frac{E^2}{E^s}} + 0.90e^3 \sqrt{\frac{E^3}{E^s}} \right. \quad (79)$$

Il est possible par ailleurs de mener ultérieurement une étude paramétrique sur les coefficients de cette formule afin d'en tester la validité. Même si Odemark préconise pour 3 couches un coefficient de 0.83, a priori, les valeurs 0.83 ou 0.90 ne semble pas perturber les solutions. Ci-dessous, sur les figures 28, nous illustrons quelques-uns des premiers résultats obtenus en comparaison avec des simulations 2D réalisées à l'aide des éléments finis du logiciel Castem.

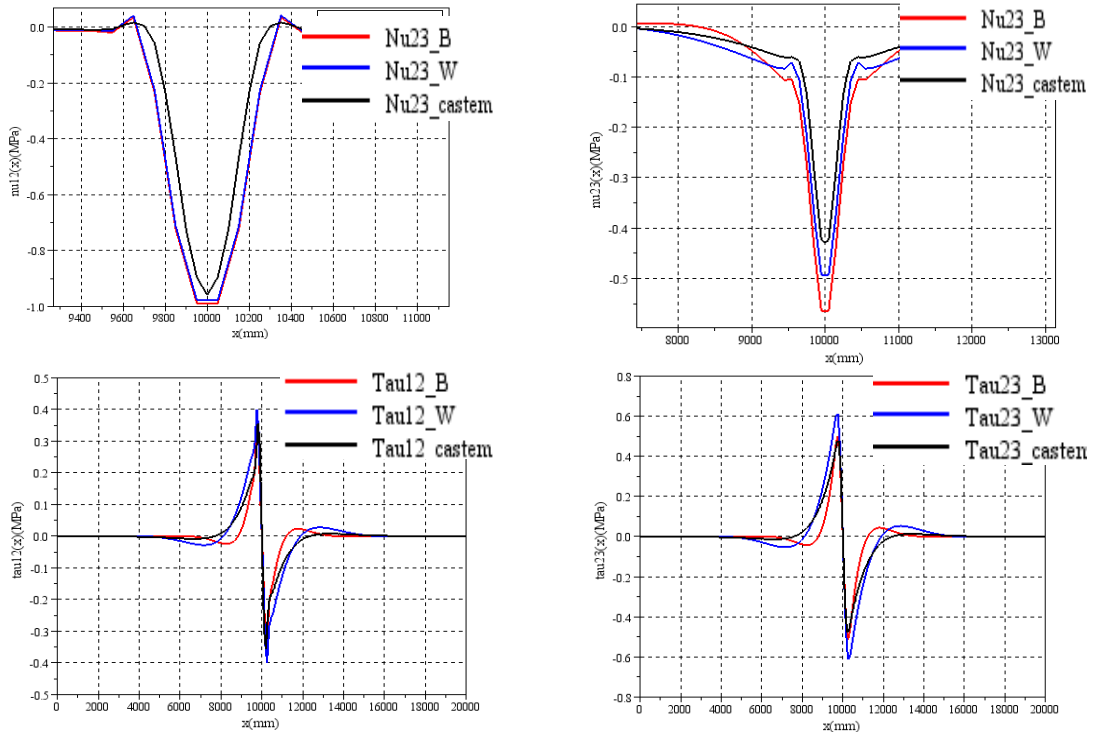


Figure 28. Comparaison des efforts normaux et de cisaillement aux interfaces entre couches du modèle M4-5nB, M4-5nW et de simulation EF Castem - Cas 2D déformations planes élastique du tricouche non fissuré (Berthemet, 2012)

Puis suivant la méthode proposée par Tran (2004) une fissure, a pu être introduite dans les équations numérisées. La Fig. 30 illustre une première comparaison de résultats de calcul entre le M4-5nW, le M4-5nB de Tran et les éléments finis Castem pour le cas du tricouche fissuré dans la seconde couche comme indiqué dans la Fig. 29. A noter que cette comparaison pourrait être faite sur des champs normalisés comme indiqué dans la section 2.

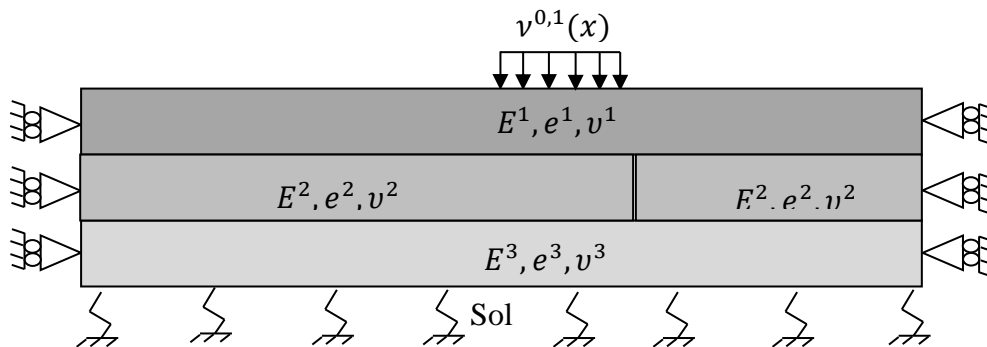


Figure 29. Modèle chaussée tricouches avec fissure au milieu de la couche 2 (Berthemet, 2012)

Qualitativement, ces résultats sont très prometteurs et nécessitent d'être poursuivis tels que proposés dans la thèse d'Hanan Nasser en démarrage pour octobre 2013. Par la mise en place d'une fissure au sein d'une couche, l'outil demandé pour l'analyse des champs de contrainte de bicouche et tricouche fissuré sur massif de Winkler est quasi prêt en 2D.

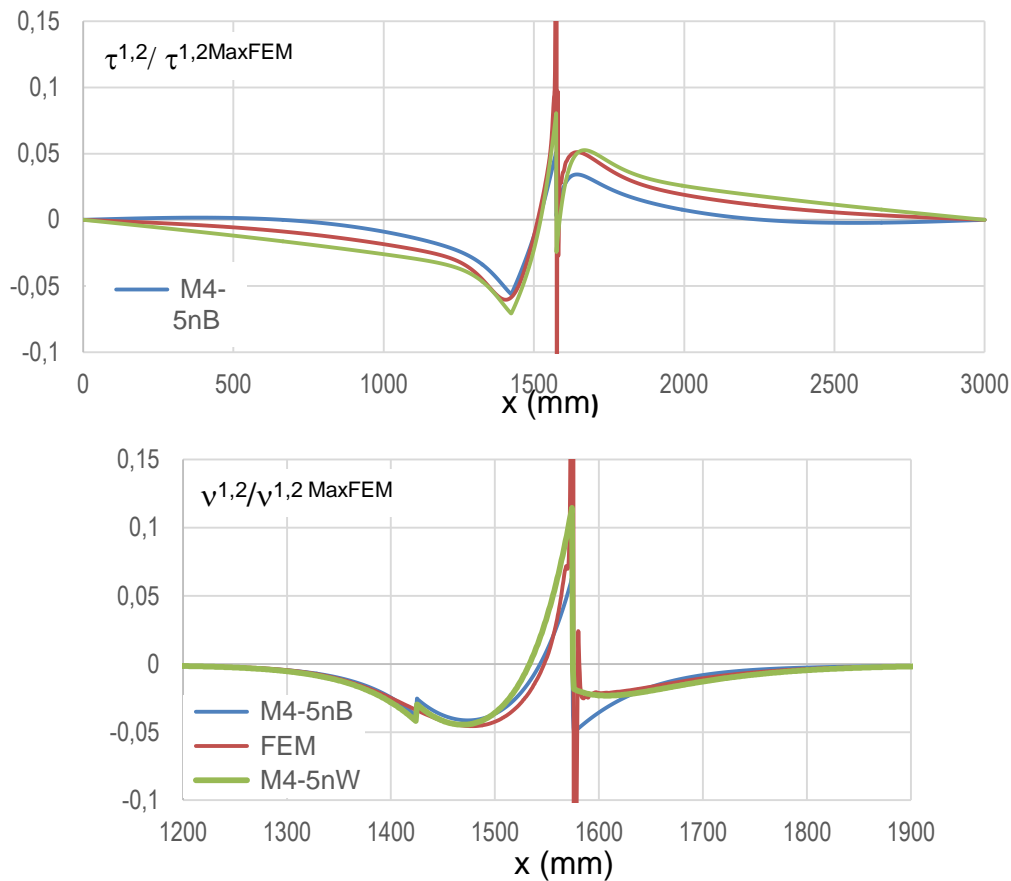


Figure 30. Comparaison des efforts d'interface entre couches normalisés et zoomés sur la fissure du M4-5nW, du M4-5nB et de simulations EF Castem - Cas 2D déformations planes élastique du tricouche fissuré (Berthemet et Chabot, 2013)

4. Développement d'un essai de décollement pour les chaussées BCMC

Fort d'un outil de calcul de structure, il est nécessaire de pouvoir caractériser en laboratoire les paramètres matériaux. A mon arrivée au labo en 1999, il n'existait pas, pour les entreprises, d'essais normalisés validant le collage des structures de chaussées sur sites réels. Pour la plupart des entreprises et même encore aujourd'hui, la tenue d'une interface d'une éprouvette lors de son carottage suffit souvent à le justifier ou non. Depuis, plusieurs travaux de recherche engagés depuis de nombreuses années par différents équipes de recherche au niveau mondial ont conduit à proposer différents essais dont la plupart concernent des essais de cisaillement pour l'étude du collage entre couches de matériaux bitumineux (Cf. chapitre 6 de l'état de l'art du TC-ATB Rilem nouvellement publié (Partl et *al.*, 2013). Ces travaux méritent d'être encore investigués plus en amont, c'est ce que nous proposons dans le cadre du comité technique 243-MCD que je co-pilote actuellement avec l'université de l'Illinois, de Minnesota-Duluth, de Limoges et de Parme. En particulier les avancées dans les techniques d'auscultations non destructives doivent pouvoir éclairer l'étude et la compréhension des mécanismes telles que utilisées pour ma part dans les travaux de Pouteau (2004) (Pouteau et *al.*, 2006) (Chabot et *al.*, 2008) et de Hun (2012) (Hun et *al.*, 2012) et dans l'équipe par (Simonin et *al.*, 2012) en particulier.

Pour arriver à mieux coopérer entre équipes de la Rilem, ces approches font actuellement l'objet de souhaits d'échanges d'étudiants. Un projet est cours avec l'Université de Limoges qui bénéficie actuellement d'un nouveau post-doc. Je propose actuellement un sujet de stage niveau Master2 pour des points de modélisation particuliers. Ce projet fait suite au cours du séjour de mon étudiant Hun en 2011 dans cette équipe (M. Hun, O. Pop, A. Chabot, C. Petit, 2011. Preliminary results (GEMH&GCD, Ifsttar), présentation de synthèse Rilem TC243-MCD sur le lien TG2-TG3, Annual meeting, Liverpool). De nombreux essais sont possibles dans cette équipe dont celui à double cisaillement (Diakaté et al., 2006). L'intérêt ici est de pouvoir bénéficier de leur expertise dans l'utilisation des techniques d'analyse d'images (Pop et al., 2011) pour l'étude des décollements.

Pour l'étude des décollements entre couche de matériaux de ciment et bitumineux, d'après certains résultats d'essais in situ (Pouteau et al., 2005) et calculs sur chaussées à couche fissurée (Chabot et al., 2004), les champs près de la fissure de retrait sont plus complexes. Ils nécessitent, accompagnées d'essais en mode I plus faciles à développer que le mode II de cisaillement, de développer des essais en mode mixte (Cf Fig. 24). En effet outre les singularités des champs de contraintes existant à l'interface près de ces fissures, les champs évoluent non seulement en fonction de la position de la charge mais aussi en fonction des épaisseurs des couches et du rapport de module des matériaux adjacents dépendant de la vitesse des charges et de la température de la chaussée rendant possible différents scénarii de décollements (Cf. Fig. 2). Un premier bilan sur essais accélérés du manège de fatigue des structures routières de l'IFSTTAR que j'ai souhaité faire avec mes collègues (Hornych et al., 2008) confirme également ces résultats. La présence d'eau ajoute de plus une certaine complexité au système qu'il serait bon de ne pas ignorer dans la construction d'un nouvel essai (Vulcano-Grellet et al., 2010). On voit donc, que ces observations in situ sont incontournables pour tenter de poser le problème à modéliser et je souhaite continuer à bénéficier des apports de ces expérimentations telles que produites par mes collègues de l'Ifsttar et mes collègues de la Rilem pour alimenter ma réflexion. Là encore, l'utilisation de méthodes d'essais non destructives associées aux essais en vraie grandeur sont sources d'enseignements à condition qu'on sache relier leurs indicateurs aux paramètres mécaniques, c'est là un des défis de recherche de l'unité dans laquelle j'exerce.

4.1 Démarche pour la mise au point d'un essai

C'est donc en partenariat avec l'industrie cimentière, en vue d'obtenir un meilleur dimensionnement des structures composites (béton de ciment sur grave-bitume) substituables aux chaussées classiques, que j'ai pu participer à l'encadrement dès 2000 de la thèse de Pouteau que mes collègues avaient négociée sur la durabilité du collage « Blanc/Noir » (de Larrard et al., 2001) (Pouteau et al., 2004). Un essai en laboratoire, un essai sur chaussée réelle et un essai de type FABAC ont été élaborés et analysés (Pouteau et al., 2005). Parmi ces différents essais mis au point, l'essai de fatigue accéléré linéaire FABAC sur plate-forme réelle a été mené jusqu'en fin 2003 sur le site de Nantes du LCPC. Pour cette maquette de structure réelle, à couches amincies et ne présentant pas d'engrènements mécaniques dans les fissures, on a observé, après 1 million de cycles de sollicitations des simulateurs de trafic accéléré FABAC, le mode de ruine attendu, soit un délaminage s'initiant au niveau des fissures de retrait. Une méthodologie de suivi « in situ » de la qualité du collage par technique de contrôle non destructif (CND) a été mise au point. Elle est basée sur l'utilisation d'un système d'auscultation mécanique dynamique. Finalement, l'analyse des essais à l'échelle 1:1 a montré deux évolutions du collage. Le

détail de l'instrumentation et des résultats d'auscultation non destructive COLIBRI obtenus sur les différentes planches d'essais est donné dans (Pouteau et *al.*, 2005) (Chabot et *al.*, 2008). Pour la chaussée expérimentale de la RN4, chaussée épaisse présentant un engrenement mécanique au niveau des fissures, aucune évolution du décollement initial après 2 ans de mise en circulation de la structure avait été notée (Pouteau et *al.*, 2005). Associé à ces expérimentations en vrai grandeur, pour la détermination de la loi de comportement en fatigue du collage, nous avons proposé d'adapter un premier essai de collage sur le banc de fatigue des matériaux cimentaires. L'application du modèle simplifié M4-5n a permis de dimensionner, de façon optimisée du point de vue de la rupture, les éprouvettes de laboratoire bimatériaux en vue d'en favoriser initialement le délaminage en mode mixte (Pouteau et *al.*, 2002). Grâce aux travaux de stage de Master2 (Guillo, 2004), une analyse mécanique de l'essai a été proposée afin d'optimiser les géométries. Avec des conditions aux limites plus simples que dans le cas de la chaussée dont on doit conserver pour inconnues principales les déplacements verticaux (Cf. equation 67), la mise en équations de ce problème a conduit à ne résoudre par Newmark pour le bi-couche ainsi testé qu'un système de quatre équations différentielles d'ordre deux posées ainsi analytiquement. Les stages de Master2 de (Spilman, 2007) (Le Corvec, 2008) et (Bürkli, 2010) ont par ailleurs, pour d'autres exemples d'études, montré l'équivalence des deux différentes méthodes de mise en équations du problème M4-5n ainsi utilisé. Cependant pour l'analyse des essais de fatigue, l'utilisation de la loi de Paris (Paris et Erdogan, 1963) a été tentée sans succès notamment dû aux effets parasites des hétérogénéités de l'échantillon, de la vicoélasticité du matériau bitumineux, des fissures parasites autres que le décollement et des problèmes de mauvais encastrement de l'éprouvette. La Fig. 31 illustre cet essai mis au point et schématisé par l'étudiant.

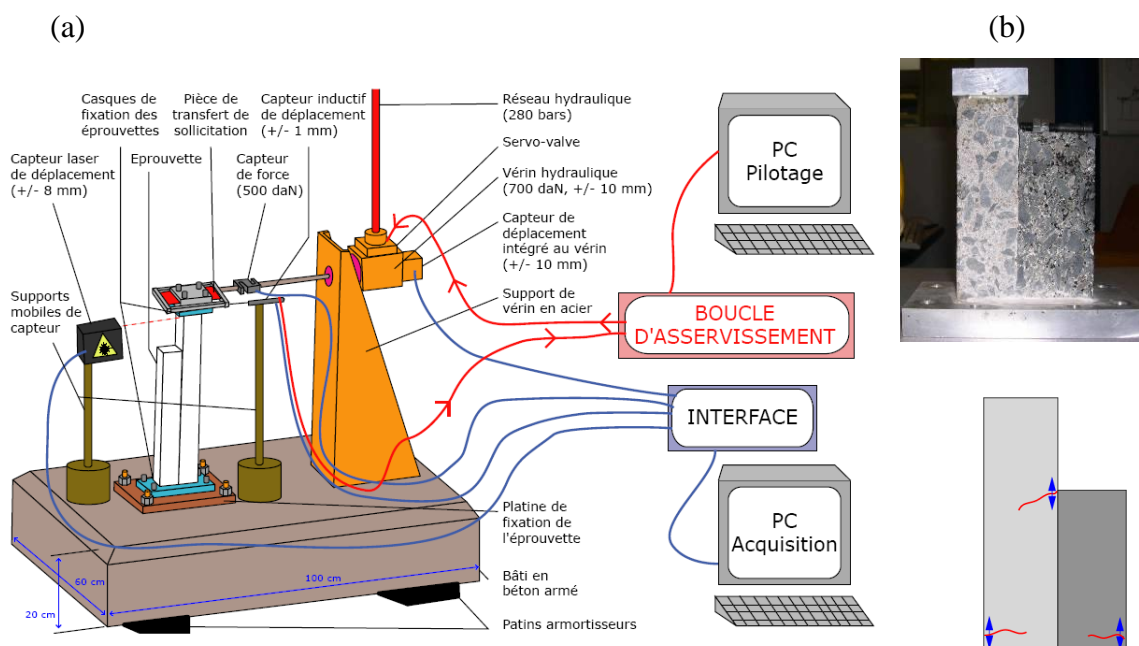


Figure 31. Essais de décollement mis au point dans (Pouteau, 2004) (a) test EPCF (b) Différentes ruptures

Ces premiers essais en laboratoire ont montré cependant que le grenailage de l'interface, comparé au non grenailage, apporte un collage plus durable. Ces résultats ont été modulés finalement à l'aide de l'analyse des essais in situ (Chabot et *al.*, 2008), d'où l'intérêt de pouvoir disposer à la fois d'essais de laboratoire, d'outils de mesures et de calculs adaptés et d'essais en vrai grandeur pour ses matériaux de chaussée même si parfois le passage de l'un à l'autre dans l'analyse peut être questionnable. Aussi sur ces essais type Fabac, s'il

semble certain que le grenailage retarde le décollement, il n'en reste pas moins qu'un fort rapport de modules entre les deux matériaux (par exemple lors de température élevée) ainsi que la position de la charge par rapport aux joints sont les facteurs essentielles favorisant les décollements ainsi que présentés dans Pouteau (2004) et (Chabot et *al.*, 2008). Pour retarder les décollements de ce type de chaussée, l'idéal serait que les chaussées puissent être conçues avec de faible variation de gradients de modules entre couches. Des solutions d'accrochage intermédiaires sont également à inventer.

A noter que suite à la soutenance de thèse de Pouteau (2004), j'ai été par ailleurs, sollicitée par le professeur Granju, rapporteur alors de la thèse de Bertrand Pouteau. En effet, intéressé par nos modélisations, il m'a invité à venir participer à son TC193-RLS de la Rilem sur le « Bonded cement-based material overlays for the repair, the lining or the strengthening of slabs or pavements » en lien avec ses travaux de recherche (Granju, 2001). Après une première présentation invitée en octobre 2004 (Chabot, 2004), j'ai seulement accepté d'être membre correspondant n'ayant malheureusement pas le temps nécessaire à l'époque de m'engager plus dans le secteur des matériaux béton étant donné les autres engagements pris par ailleurs. J'ai eu la chance d'être sollicitée pour un des chapitres de l'ouvrage publié à la Rilem (Trevino et *al.*, 2011).

A la suite des travaux de Tran (2004) et des différents Master2 de (Spilman, 2007) et (Le Corvec, 2008), chargés entre autres de mener des analyses M4-5n sur les essais « Méfisto » de la thèse de (Pérez, 2008), j'ai décidé en 2008 puis à nouveau en 2009 d'engager un nouveau travail de thèse. En effet, outre les travaux de Pouteau (2004), conformément aux prévisions 2007, le stage Gaël Le Corvec (2008), sur les "Simulations des effets de retrait du béton de ciment sur la flexion de bicouches de chaussées fissurées" a permis de résoudre quelques points de blocage concernant la numérisation du modèle. Appliqué à l'analyse des contraintes d'un multicouche bifissuré en flexion tel qu'il pouvait être testé en laboratoire à l'aide d'une machine d'essai de flexion-retrait historique du réseau des Ponts et Chaussées et étudié dans la thèse de Pérez (2008), ce stage a conforté l'idée qu'il était nécessaire de proposer un essai alternatif pour améliorer l'étude en laboratoire des décollements. De plus, initiée aux problématiques récurrentes des effets de l'eau dans les chaussées du groupe eau/gel de mon opération de recherche (Mauduit et *al.*, 2013), sachant que sur ce couple de matériaux, seul les essais disponibles de la Fig. 32 limitaient l'analyse désirée, j'ai souhaité la mise au point d'un nouvel essai en mode mixte permettant l'observation des effets de l'eau supposés néfastes dans le processus de décollement des couches de chaussées.

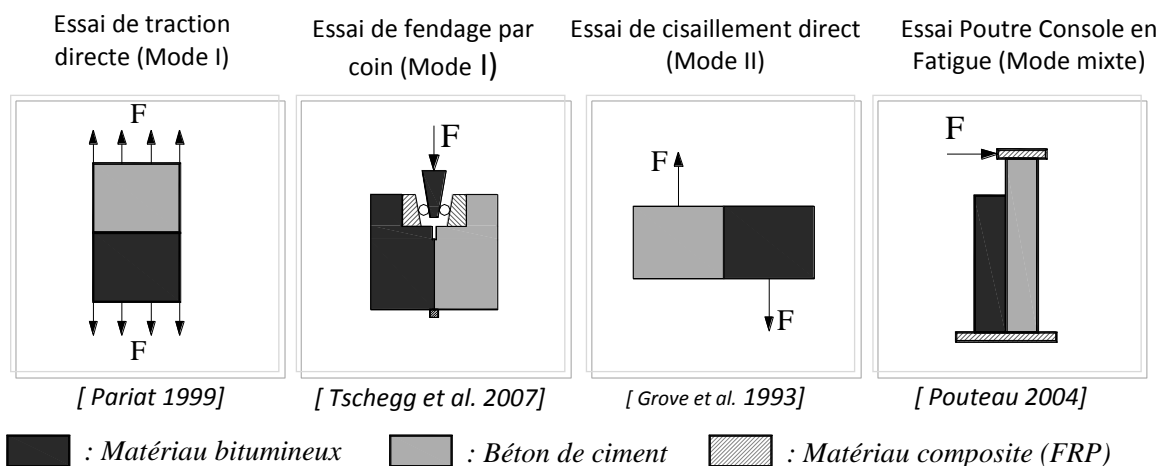


Figure 32. Différents essais de décollement sur éprouvettes bicouches type BCMC (Hun, 2012)

Pour ce sujet, constatant que l'interface entre couches était un lieu privilégié où l'eau dans certains cas est piégée, j'ai demandé en 2008 et finalement obtenu en 2009 un financement de thèse LCPC. S'inspirant des travaux de thèse de Pouteau (2004), de Pérez (2008) et de la bibliographie, nous avons commencé à développer un essai de flexion 4 points sous eau dans la thèse de (Hun, 2012). Une partie du développement de l'essai est contenue dans l'article de (Chabot et al., 2013). S'inspirant également des travaux de la littérature (Granju, 2001) (Charalambides et al., 1990) (Pérez, 2005) (Bissonnette et al., 2011), ces travaux ont consisté à adapter aux bicouches de matériaux béton de ciment sur enrobés bitumineux, l'essai de poutre béton réparé par emploi de matériaux composite. Les effets parasites des effets de bord contenus naturellement dans cet essai (Tenga et al., 2003) servent dans notre cas à pouvoir tenter de caractériser en mode mixte les décollements sans appuis aucun sur le matériau bitumineux à caractère viscoélastique thermo-susceptible. Des solutions quasi-analytiques ont été développées à et validées sur bi-couche Alu/PVC (Hun et al., 2011). Ces calculs ont bénéficié de l'apport en amont du Master 2 de (Le Corvec, 2008) et consiste à poser analytiquement à l'aide du M4-5n, comme dans les travaux de Pouteau (2004), un système d'équations différentielles d'ordre 2 à 5 équations principales dans le cadre des déformations planes. Ce problème est ainsi uni-dimensionnel dans une analyse M4. Il est résolu en rendant a-dimensionnelles les équations et en utilisant le schéma de Newmark comme dans les travaux de (Tran, 2004). Dans la suite nous illustrons succinctement les principaux résultats qui ont servis aux études paramétriques de la géométrie des éprouvettes favorisant les décollements. La Fig. 33 pose les notations utilisées dans les calculs analytiques effectués.

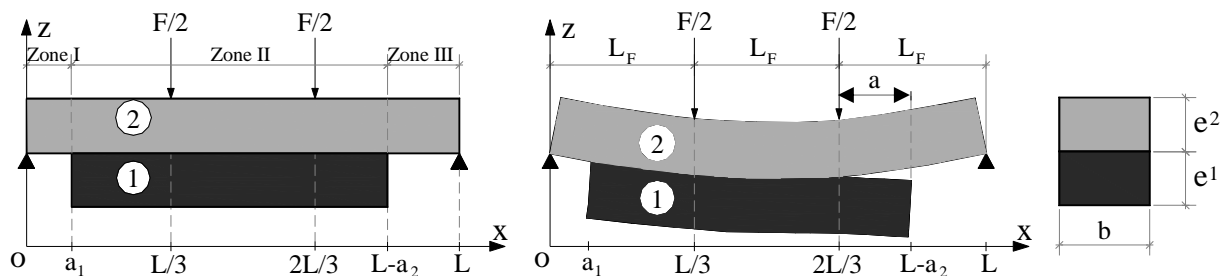


Figure 33. Notations de l'essai de flexion 4pt sur bicouche utilisées par (Hun, 2012)

Du fait de la faible valeur de module de la couche d'enrobé bitumineux, cet essai conduit à dimensionner les éprouvettes par rapport aux états de contrainte de traction en base de la couche de béton de ciment $\sigma_{xx}(x, e^1)$ (couche 2 – Fig. 33) et les intensités finies aux bords dans le cas du M4-5n, des contraintes d'interface $\tau^{1,2}(x)$ et $\nu^{1,2}(x)$ qui sont en compétition pour les points $x = a_1$ et $x = L - a_2$.

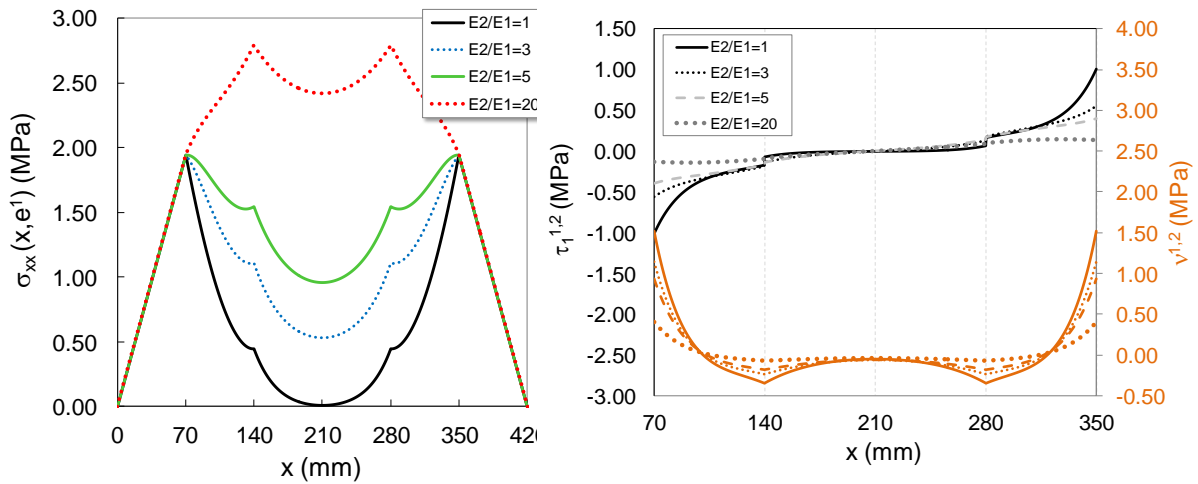


Figure 34. Etude paramétriques des contraintes M4-5n dans l'essai de flexion 4 pt sur bicouche - cas $b=120\text{mm}$, $a_1=a_2=70\text{mm}$, $E_2=35000\text{MPa}$, $F = 4\text{kN}$ – (d'après la soutenance de thèse Hun, 2012)

Les Fig. 34 et 35 présentent les différents champs de contraintes obtenus lors de ces études paramétriques.

Tout d'abord, nous avons fait évoluer le module d'Young de la couche d'enrobé (placée en couche 1 Fig. 33) car celui-ci dépend des conditions d'essai (Cf., Fig. 34). D'autres résultats sont disponibles dans (Chabot et al., 2013).

Puis, suite à de premiers résultats d'essais, nous avons souhaité di-symétriser la géométrie initiale des éprouvettes afin de favoriser les décollements sur un des bords choisis (Cf. 35). L'objectif visé était de pouvoir utiliser des techniques d'analyses d'images pour mesurer finement les champs de déplacements utiles aux analyses uniquement sur un côté.

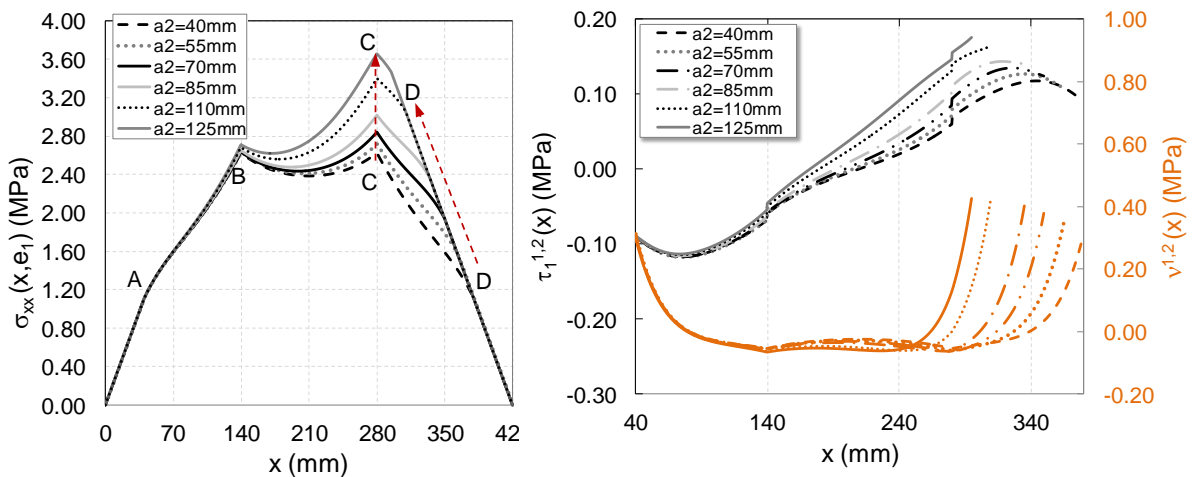


Figure 35. Etude paramétriques des contraintes M4-5n dans l'essai de flexion 4 pt sur bicouche - cas $b=120\text{mm}$, $a_1=a_2=70\text{mm}$, $E_2=35000\text{MPa}$, $F = 4\text{kN}$ – (d'après la soutenance de thèse Hun, 2012)
Cas $a_1 \neq a_2$ - $b=120\text{mm}$, $a_1=40\text{mm}$, $E_2/E_1 \approx 17,4$, $F=4\text{kN}$ - (Hun, 2012)

4.2 Application et validation des critères M4 aux essais mixtes de décollements

Comme mentionné dans les deux premières sections de la partie 1, la détermination, par les M4, du taux de restitution d'énergie associée à la propagation d'une fissure d'interface a

été abordée dans ma thèse (1997), le stage de DEA de Cantournet (1999) et les travaux de thèse de Diazdiaz (2001). Ces travaux sont publiés dans (Chabot et *al.*, 2000) pour le M4-(2n+1) et dans le papier (Caron et *al.*, 2006) pour le M4-5n. Ils montrent qu'il est possible de relier analytiquement les intensités des contraintes d'interface obtenues aux bords aux valeurs du taux de restitution d'énergie. Il est ainsi possible d'écrire un critère en contraintes d'interface obtenues directement dans la résolution des problèmes. Sur ce point, dans le cadre sommaire de la thèse de Pouteau (2004) et plus approfondi de Hun (2012), j'ai pu appliquer ces concepts.

Ainsi pour une petite variation de longueur de fissure, notée δa sur la Fig. 33, le taux de restitution d'énergie s'écrit à l'aide des expressions classiques ci-dessous (80).

$$G^{M4-5n}(a) = \frac{\partial W_{ext}(a)}{b\partial a} - \frac{\partial W_e(a)}{b\partial a} ; \quad W_{ext}(a) = \frac{F}{2b} U_3^2 \left(\frac{LF}{3} \right) + \frac{F}{2b} U_3^2 \left(\frac{2L_{FF}}{3} \right) \quad (80)$$

Pour interpréter les résultats d'essais et pouvoir si possible les comparer soit avec ceux de la littérature et/ou ceux d'autres essais en mode I ou II de la Rilem, nous avons développé les expressions de G à l'aide de la méthode de refermeture des fissures (Bui, 1978). Les calculs ont ainsi conduit aux expressions notées dans (81) (Chabot et *al.*, 2013).

$$G_T(a) = G_I(a) + G_{II}(a)$$

$$\text{with } \begin{cases} G_I(a) = \frac{1}{2b} \cdot \frac{13(e^1 E^2 + e^2 E^1)}{35E^1 E^2} (v^{1,2}(a))^2 \\ G_{II}(a) = \frac{1}{2b} \cdot \frac{4(e^1(1+v^1)E^2 + e^2(1+v^2)E^1)}{15E^1 E^2} (\tau^{1,2}(a))^2 \\ \quad - \frac{1}{2b} \cdot \left(\frac{(1+v^1)}{5E^1} Q_1^1(a) + \frac{(1+v^2)}{5E^2} Q_1^2(a) \right) \cdot \tau^{1,2}(a) \end{cases} \quad (81)$$

On constate, comme souhaité, que cette technique permet de bien séparer les modes I et II de cet essai. Le mode I est quadratique en effort normal d'interface $v^{1,2}(a)$. Le mode II l'est à la fois en fonction des cisaillements d'interface $\tau^{1,2}(a)$ et d'un couplage entre ce cisaillement d'interface et les efforts de cisaillement généralisé $Q^1(a)$ et $Q^2(a)$ des couches adjacentes à cette interface.

La Fig. 36 illustre les résultats de calcul obtenus pour des variations de fissure pouvant atteindre l'abscisse de l'une des deux forces extérieures (Cf. Fig. 33). On note une bonne concordance des résultats par les deux techniques de calculs validant ainsi la formule analytique (81). Par ailleurs le mode I semble prépondérant pour les paramètres de calcul choisis similaires aux essais effectués en labo.

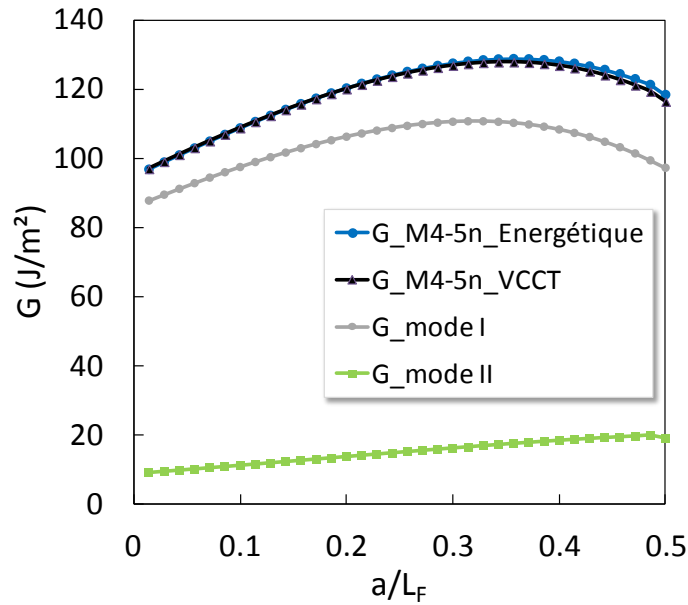


Figure 36. Comparaison des deux méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de fissure normalisée et évolution des deux modes

a/L_F ($F=12\text{kN}$, $E_1/E_2=17,4$, $L=420\text{mm}$, $b=120\text{mm}$, $a_1=a_2=70\text{mm}$, $e^1=e^2=60\text{mm}$) (Hun, 2012)

L'essai a été développé sous une presse MTS (Fig. 37) Les tout premiers résultats d'essais sur matériaux de chaussées sont publiés dans (Hun et al., 2011). Ces essais ont été faits en statique à des vitesses de déplacement imposées similaires aux autres essais de rupture par fissuration de mes collègues de l'Illinois (Wagoner et al., 2005) en vue de pouvoir effectuer de possibles comparaisons.

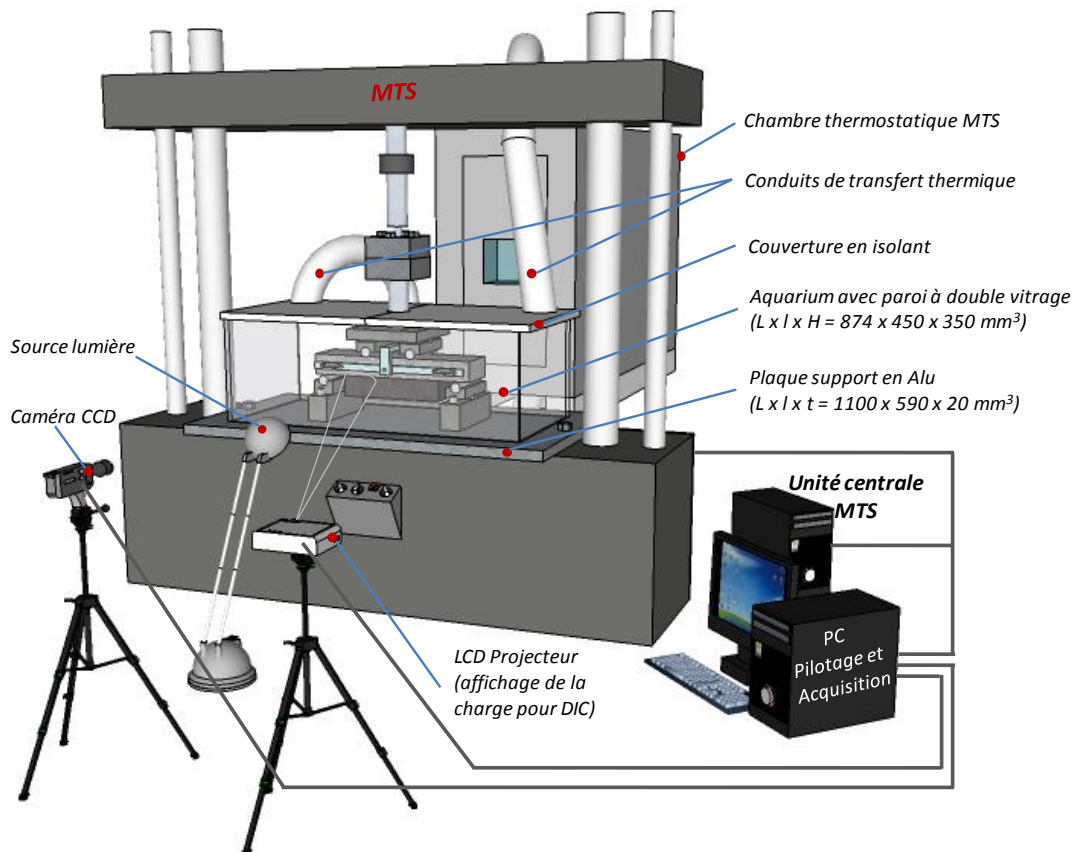


Figure 37. Montage de l'essai de caractérisation du décollement par flexion 4 point (Hun, 2012)

Les matériaux Alu et PVC ont été choisis comme matériaux homogènes de référence pour leur caractéristique de module d'Young et de rapport de module proche de ceux des matériaux en béton de ciment et bitumineux. Dans la perspective de continuation de ces essais, il serait également très intéressant de tester un autre couple de matériau type bois sur du verre. La Fig. 38 illustre le point par lequel l'essai est piloté en déplacement par un capteur LVDT et la zone d'étude analysée par les techniques d'imageries.

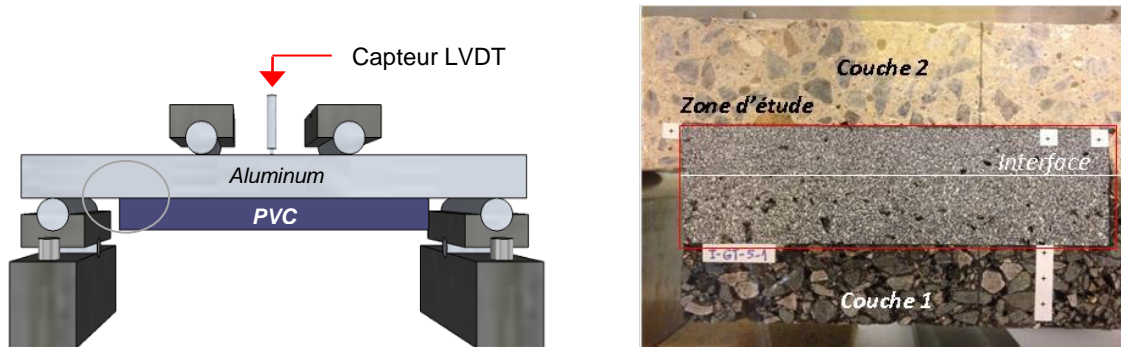


Figure 38. Zone d'étude et position du capteur de pilotage de l'essai (Hun, 2012)

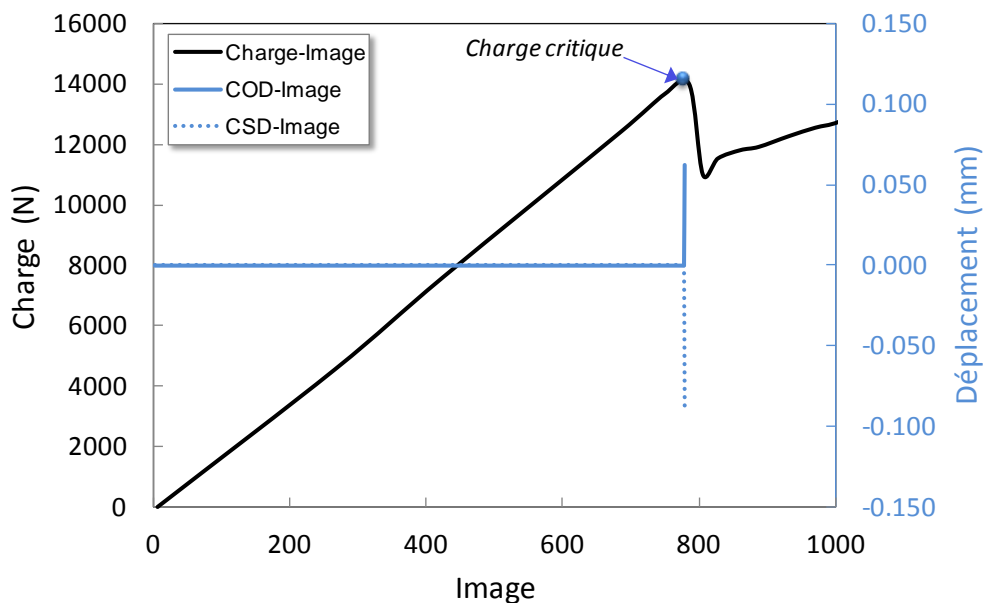


Figure 39. Résultats d'essai d'analyse d'image sur éprouvette Alu/PVC (Hun, 2012)

La méthode d'analyse d'images développée par (Sutton et *al.*, 1983) a été utilisée pour mesurer les champs de déplacements de part et d'autre de l'interface afin de détecter le niveau de force de l'essai à partir duquel la fissure se propage. La Fig. 39 illustre un résultat d'essai sur éprouvette Alu/PVC. Les simulations M4-5n de la Fig.36 indiquent que cet essai est susceptible de produire une certaine instabilité de propagation de fissure qui finalement rend la vitesse de propagation de celle-ci trop rapide par rapport à la caméra du labo utilisé à 63 images/s. Aussi avec ces mesures, nous avons obtenus des résultats pour d'assez grandes longueurs de fissure. L'obtention des G critiques ou contraintes critiques seraient à faire à l'aide d'outils plus sophistiqués. Néanmoins avec ces moyens, nous avons pu comparer les valeurs du taux de restitution d'énergie du modèle M4 -5n avec celui

proposé dans les formules de Dundurs (1969). Dans ces premiers tests et analyses, la comparaison est très concluante.

Table 6: Résultats comparatifs des paramètres de rupture entre le M4-5n et Dundurs pour éprouvette bicouche Alu/Pvc testé en statique à déplacement imposé à 0.7mm/s (Hun, 2012)

Méthode	Longueur de fissure (mm)	Facteur d'intensité de contraintes		Taux de restitution d'énergie (J/m ²)		
		K_I (MPa \sqrt{m})	K_{II} (MPa \sqrt{m})	G_I	G_{II}	G_{Total}
Dundurs		0,79	0,49	93	35	128
Énergétique	70 ± 1	-	-	-	-	129
VCCT		-	-	106	21	127

Les essais sur matériaux de chaussées ont pu être faits hors eau et sous eau en statique principalement à température ambiante d'environ 20°C et à vitesse de déplacement imposée à 0.7mm/s. Les Fig. 40 montrent que cet essai ainsi développé était bien capable de générer hors eau des décollements au droit de l'interface (même avec un béton de ciment percolant les porosités d'un matériau bitumineux) de bicouche type matériaux BCMC. Par ailleurs, différents essais sur un autre type d'interface et à des températures plus basses ont également indiqué que la viscoélasticité ne jouait pas un rôle prépondérant pour ce type de bicouche (Hun, 2012) (Chabot et *al.*, 2013).



Figure 40. Rupture par décollement et faciès de rupture d'éprouvettes type BCMC testées hors eau à déplacement à vitesse de déplacement contrôlée de 0.7mm/s et à T°C ambiante (Hun, 2012)

4.3 Premiers résultats d'essais sous eau

Suivant les observations de terrain sur chaussée réelles (Vulcano-Grellet et *al.*, 2010) pour d'autres types de structures (Cf. projet1 partie3), nous avons souhaité, dans ce travail pouvoir observer, par cet essai, si l'eau pouvait accélérer le processus de décollement. Pour procéder à des analyses par imagerie, nous avons construit un aquarium (Fig. 41). Cet aquarium nous a permis également de thermo réguler l'eau ou l'air selon le mode d'essai choisi. Pour ce faire nous avons détourné par tuyauteries et systèmes de ventilation, l'air de l'enceinte thermique de la MTS. Les éprouvettes ont été saturées en eau selon la procédure utilisée lors des essais de caractérisation du comportement des enrobés soumis à des cycles de gel/dégel par (Mauduit et *al.*, 2010).

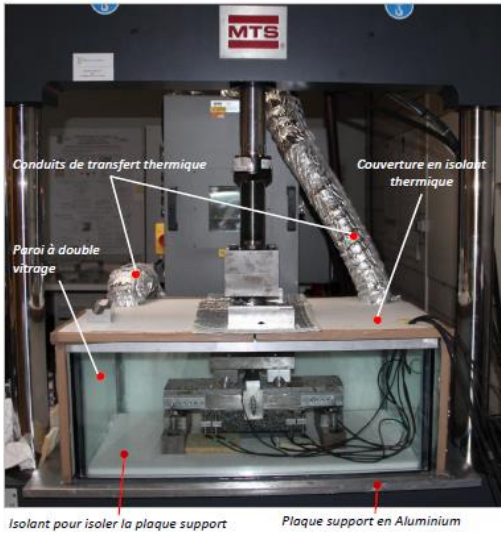


Figure 41. Illustration du dispositif construit (Hun, 2012)

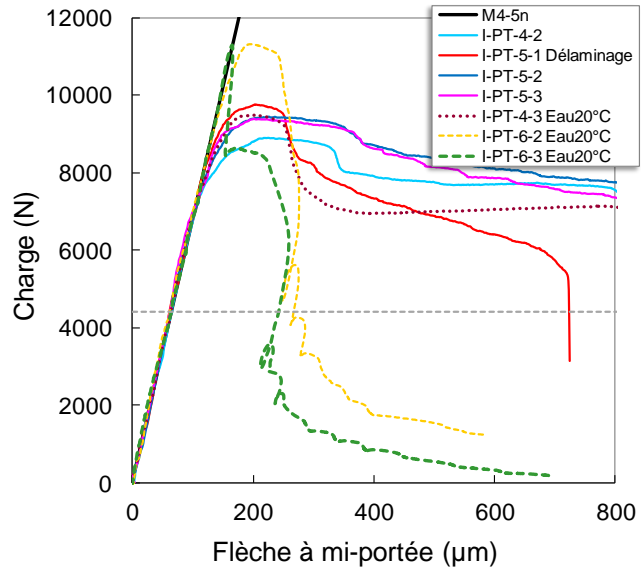


Figure 42. Résultats des courbes d'essais d'éprouvette type BCMC testé hors eau et sous eau à température ambiante et déplacement imposé à 0.7mm/s (Hun, 2012)

La Fig. 42 illustre les résultats obtenus pour les deux modes d'essai hors eau et sous eau. On note des différences de profil confirmées par les observations (Fig. 40 et 43). En effet, les éprouvettes sous eau présentent toutes des fissurations par décollement. On remarque ces longueurs de décollement finales obtenues sont plus grandes que pour les essais hors eau. Elles semblent dépendre de la valeur du temps d'immersion. Par ailleurs, on note que contrairement aux éprouvettes testées hors eau, le béton de ciment se situe de part et d'autre de l'éprouvette. La rupture d'interface est cohésive, alors que hors eau, elle est adhésive.

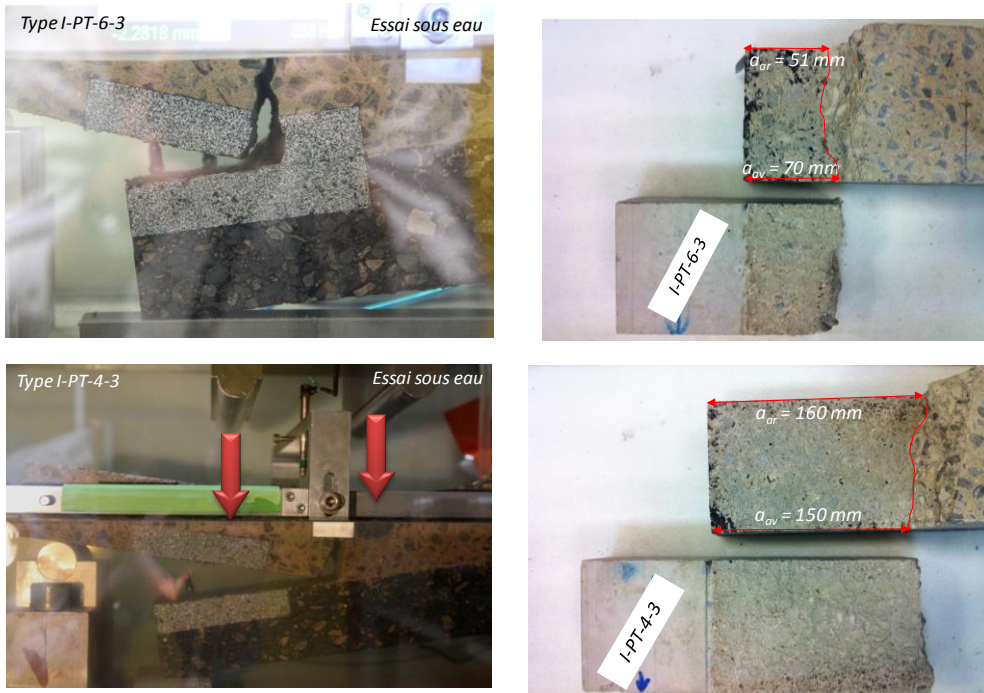


Figure 43. Rupture par décollement et faciès de rupture d'éprouvettes type BCMC testées sous eau à déplacement à vitesse de déplacement contrôlée de 0.7mm/s et à T°C ambiante (Hun, 2012)

Bien que le nombre d'essais effectué soit à consolider et que le nombre d'images pris par la caméra ne soit pas assez grand, les premiers résultats obtenus par analyse d'images montrent des différences sur les paramètres de rupture du tableau 7 (valeurs de G à lire en fonction des longueurs de fissure critique mesurées).

Table 7: Résultats comparatifs des paramètres de rupture entre le M4-5n et Dundurs pour éprouvette bi-couche type BCMC testé en statique à déplacement imposé à 0.7mm/s (Hun, 2012)

Éprouvette	Longueur critique de fissure ($\pm 0,5$ mm)	Facteur d'intensité de contraintes		Taux de restitution d'énergie (J/m^2)					
		Méthode Dundurs		Méthode Dundurs			M4-5n		
		K_I ($MPa\sqrt{m}$)	K_{II} ($MPa\sqrt{m}$)	G_I	G_{II}	$G_{Dundurs}$	G_I	G_{II}	G_{M4-5n}
I-PT-5-1	18,5	0,67	0,27	114	18	132	117	14	131
I-PT-4-3	160	1,26	0,62	404	97	501	-	-	-
I-PT-6-2	19,5	0,78	0,31	156	25	180	159	19	178
I-PT-6-3	13,5	0,76	0,32	145	26	172	152	17	169

Aussi pour tenter de mieux caractériser la rupture, sachant que les essais sous eau ne présentent pas de fissures parasites, dans le béton sous les points de chargement, avant ou pendant le décollement comme parfois observé dans les échantillons testés hors eau, nous avons déterminé expérimentalement, par la méthode de l'aire, l'énergie de rupture. Les valeurs obtenues sont quasi-équivalentes sur deux essais. La longueur finale de décollement observée durant l'essai par analyse d'images correspond à un niveau de force donné sur les courbes résultats de ces essais (Fig. 44). Ces valeurs sont dans la gamme des valeurs de taux de restitution obtenues pour des longueurs de fissure déterminée. Cette méthode nous indique également que les hypothèses de l'élasticité retenues ne sont pas trop grossières dans ce cas de température à 20°C. Tous ces résultats méritent ainsi d'être confortés dans l'avenir et un article est actuellement en cours de rédaction (Hun et *al.*, to submit 2013).

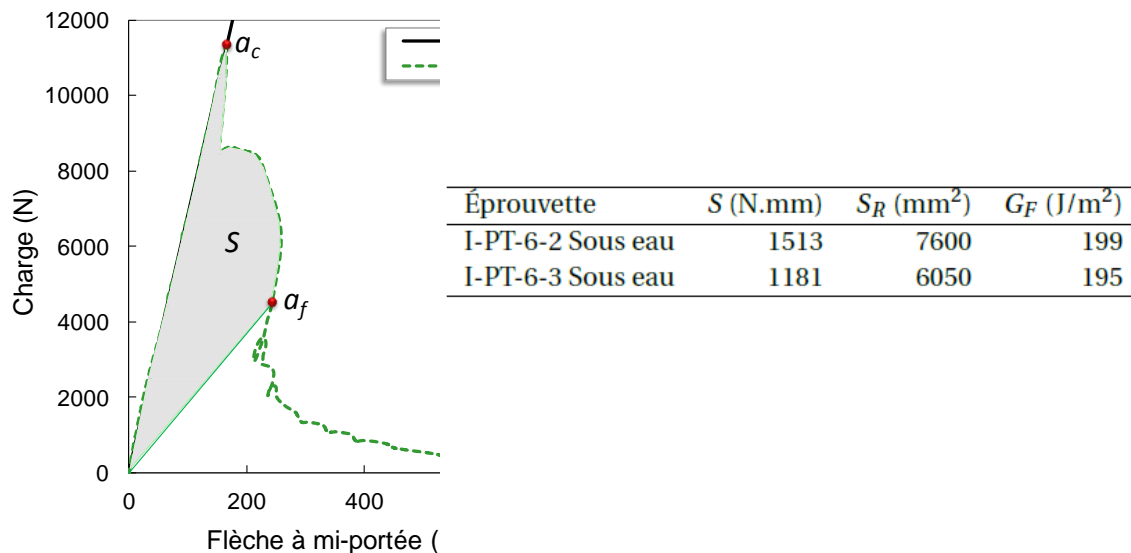


Figure 44. : Energie de rupture par décollement d'éprouvettes type BCMC testées sous eau à déplacement à vitesse de déplacement contrôlée de 0.7mm/s et à T°C ambiante (Hun, 2012)

5. Bilan

Dans le cadre de ma thèse, j'ai développé de nouveaux modèles simplifiés pour l'analyse des champs de contrainte et de déformation dans les structures multicouches. L'objectif principal était de proposer un modèle permettant l'analyse des efforts aux interfaces entre les couches et suffisamment simple pour permettre l'obtention de solutions analytiques dans le cadre d'un problème élastique linéaire. Pour que le modèle soit simple, nous avons choisi d'avoir une représentation des structures à l'aide d'une géométrie surfacique, comme pour les plaques et coques. Pour faire apparaître naturellement les efforts entre les différentes couches, nous avons opté pour un modèle multiparticulaire. Pour déterminer le comportement de notre modèle, nous avons utilisé une formulation d'Hellinger-Reissner du problème élastique 3D et nous avons introduit une approximation polynomiale des champs de contraintes sur l'épaisseur. Par cette méthode, nous avons construit une famille de modélisations approchées à cinématique plus ou moins riche en fonction des choix effectués au niveau de l'approximation de $\bar{\sigma}$. Il ressort, des premières applications que nous avons pu faire pour les matériaux composites, que deux des modèles proposées dans ma thèse sont particulièrement intéressants car facilement utilisables pour un ingénieur de bureau d'études. Le premier de ces deux modèles est le M4_5n, Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches à 5n équations d'équilibre, dont la cinématique est celle de n plaques de Reissner (une par couche). Ce modèle permet de prévoir fidèlement les concentrations de contraintes aux interfaces que l'on peut obtenir dans un modèle 3D près des bords. Ceci a pu être prouvé par une comparaison systématique de calculs éléments finis 3D très fins et de calculs M4_5n (thèse de Carreira, 1998). Le deuxième modèle, le M4-(2n+1)M, à (2n+1) équations d'équilibre (M pour membrane), ne permet pas une prédiction aussi fidèle des champs de contraintes 3D. Cependant très souvent l'ingénieur n'est pas intéressé par la valeur précise de ces champs mais seulement par une information synthétique comme par exemple la résultante des efforts d'arrachement à l'interface sur une distance « caractéristique » du matériau. Par ces approches, le problème à résoudre est donc réduit d'une dimension. Il est ainsi possible d'obtenir des solutions analytiques ou quasi-analytiques. En outre, l'intensité des champs de contraintes d'interface près des bords est finie. L'écriture de critère en contrainte maximum ou en taux de restitution d'énergie est possible.

Lors de mon poste de CR à l'Ifsttar (ex-LCPC), ces modèles ont pu être utilisés et développés pour le domaine des chaussées. L'outil de calcul FissuRoute initialisé dans les travaux de thèse de Tran (2004) est en bonne voie de finalisation grâce aux travaux d'étudiants de Master2 l'Université de Nantes. Le choix d'un massif de Winkler combiné au multicouche modélisé par le M4-5n semble prometteur (Berthemet et Chabot, 2013). En parallèle, la mise au point d'un essai de caractérisation des effets de l'eau sur le décollement des interfaces de chaussée BCMB a pu être mis au point dans le cadre des travaux de thèse de Hun (2012) suite aux travaux de thèse de Pouteau (2004). Sur ce sujet des efforts restent encore à produire pour l'étude de décollement sur échantillons de plus grande taille en vue d'étudier les effets d'échelle et échantillon de différents matériaux renforcés ou non.

Par ailleurs, mon séjour de 5 semaines durant l'été 2010 à l'Université d'Urbana-Champaign dans l'Illinois m'a permis de m'investir un peu plus dans les activités internationales de la Rilem. En effet, ce séjour a favorisé la proposition de piloter conjointement avec le Professeur Bill Buttlar de l'Université de l'Illinois un nouveau comité technique (TC) de la Rilem sur les « Mechanisms of Cracking and Debonding in Asphalt and Composite Pavement » (TC-MCD <http://www.rilem.net/>). Ce projet, ainsi lancé depuis juin 2011 pour 5 ans, a pour but de réunir à l'échelle internationale les experts

de différents domaines, afin d'améliorer nos connaissances, en fonction des problématiques de climat et de trafic de chacun des pays, sur les mécanismes de fissuration dans les matériaux et à l'interface entre couches des structures de chaussées. Pour ce faire, il s'agit non seulement d'utiliser ou mettre au point des résultats d'essais de laboratoire ou in-situ, de modélisation mais aussi de pouvoir tirer profit d'autres outils d'essais, de modélisation et techniques d'auscultations non destructifs dont les autres domaines scientifiques disposent. A terme il est prévu d'organiser une conférence internationale MCD dans la même veine des précédentes (Cf. CP2004 Limoges, 2008 Chicago, 2012 Delft) à Nantes en 2016. Au cours de ce séjour à l'Université de l'Illinois, j'ai pu rencontrer également plusieurs chercheurs qui participent activement au développement d'une relativement récente méthode de calcul par éléments finis de propagation de fissure sans remaillage dans Abaqus (méthode GFEM ou XFEM). De retour en France, j'ai pris contact avec Nicolas Moës à l'Ecole Centrale de Nantes, à l'origine de ces nouvelles modélisations numériques. La thèse d'Hanan Nasser en démarrage en 2013 offrira, dans le cadre de participation au suivi de thèse, l'occasion de pouvoir continuer à échanger sur ces sujets.

Pour cette partie, je co-signe ces travaux dans 6 articles dont 3 de rang A (Naciri et *al.*, 1998) (Caron et *al.*, 2006) (Chabot et *al.*, 2013), de nombreuses conférences nationales avec actes et comité de lecture et conférences orales invitées ou non. Plusieurs rapports internes ont pu également être écrits et j'ai eu l'occasion d'enseigner les modèles M4 dans le cadre de mon poste de Maître de conférences à l'ENPC (années 1998/99 et 2005/09) et du module scientifique pour les écoles doctorales SPIGA (ex MTGC) et STIM (années 2004/11) de l'Université de Nantes.

Bibliographie

- Allix O., Modélisation du comportement des composites stratifiés: application à l'analyse du délaminage. *Thèse de doctorat* de l'Université Pierre et Marie Curie, (février 1989).
- Autret P., Baucheron de Boissoudy A., Marchand J.P., 1982. ALIZE III Practice. Proc. *5th int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements*, Delft, 174-191.
- Berthemet F. 2012. *Contribution au développement d'un outil de calcul rapide de chaussées fissurées*. Rapport de stage de MASTER2 Mécanique Numérique des Structures (MN2S) de l'Université de Nantes.
- Berthemet F., Chabot A., 2013. Apports du massif de Winkler dans la construction d'un outil de calcul d'analyse de structure multicouche fissurée reposant sur un sol. *21^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 26-30Août, Bordeaux.
- Berthelot, J.Y., 1992, *Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures*. Masson, Paris.
- Biot M. A., 1941. General Theory of Three Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*, **12**: 155-164.
- Bissonnette, B.; Courard, L.; Fowler, D.W.; Granju, J.-L. (Eds.), 2011. Bonded Cement-Based Material Overlays for the Repair, the Lining or the Strengthening of Slabs or Pavements. State-of-the-Art Report of the RILEM Technical Committee 193-RLS Series, Vol. 3, ISBN 978-94-007-1238-6 (Print) 978-94-007-1239-3 (Online) Publisher Springer Netherlands.
- Bodin D., Pijaudier-Cabot G., de La Roche C., Piau J. M., Chabot A. 2004. A continuum Damage Approach to Asphalt Concrete Modelling. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **130** (6) : 700-708.
- Bonnet G., Christory J. P., Duchaillet J. F., Grob D., Abdo J., Sainton A., 1998. Le recours au béton de ciment mince collé (BMC) pour remédier à l'orniérage, RGRA, n°768, Décembre.
- Boussinesq J., 1885. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques. Gauthier Villars, Paris.
- Bui H. D., 1978. *Mécanique de la rupture fragile*. Edition Masson, Paris.
- Bürkli L. 2010. *Contribution au développement d'un outil d'analyse mécanique pour chaussées fissurées*. Rapport de stage de MASTER2 PRO Analyse numérique de l'Université de Nantes.
- Burmister D.M., 1943. The theory of the stress and displacements in layered systems and applications of design of airport runway. *Proceeding of the Highway Research Board*, **23**: 126-148.
- Cantournet S. 1999. *Taux de restitution d'énergie dans le délaminage des matériaux composites*". Stage de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- Caron J. F., Diaz Diaz A., Carreira R. P., Chabot A., Ehrlacher A. 2006. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Sciences and Technology*, **66** (6): 755-765.
- Carreira R. P., Caron J. F. C., Ehrlacher A., (décembre 1997). Validation des modèles M4 par une approche aux éléments finis. *Rapport interne du CERAM (ENPC)*.
- Carreira, R.P., 1998. *Validations par éléments finis des modèles multiparticulaires des matériaux multicouches M4*. Thèse de Doctorat de l'ENPC

- Carreira R.P., Caron J.F., Diaz Diaz A., 2002. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials* **34** : 217–230
- Carrera E. and Ciuffreda A., 2004. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*, **69** :271–293.
- Chabot A., 1997. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)*. Thèse de Doctorat de l'ENPC (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00197853/en/>).
- Chabot A., Ehrlacher A. 1998a. *Méthode de construction de Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (modèles M4) pour l'analyse des efforts à l'interface entre les couches de plaques composites*. Rapport de recherche du CERAM (ENPC).
- Chabot A., Ehrlacher A. 1998b. Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4_5n et M4_(2n+1)M pour l'étude des effets de bord. *Comptes-rendus aux 11ème Journées Nationales sur les Composites (JNC11)*, 18-20 nov., Arcachon, **3** :1389-1397, (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00325238/en/>).
- Chabot A., Ehrlacher A., 1999. *New simplified models for interlaminar stress analysis of laminates*". Rapport CERMMO en anglais.
- Chabot A., Cantournet S., Ehrlacher A., 2000, Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches. *Comptes-rendus aux 12ème Journées Nationales sur les Composites (JNC12)*, 15-17 novembre, ENS de Cachan, **2** : 775-784, (ISBN 2-9515965-0-2).
- Chabot A., Ehrlacher A., 2001. *New simplified analysis of interlaminar stresses in a multilayered plate with a hole*" Rapport CERMMO en anglais.
- Chabot A., 2004, Presentation of my research activities on cracking in pavements. RILEM TC 193-RLS and TC-ATB annual meeting, 12 October, CSTB Paris, France (Invitation JL Granju de l'Université de Toulouse).
- Chabot, A. & Tran, Q. D. & Pouteau B. 2004. Simplified modelling of a cracked composite pavement, *First International Elsevier Conference on Failure Analysis*, Lisbonne 12-14 juillet 2004.
- Chabot A., Tamagny P., Tran Q. D., Ehrlacher A, 2004. Modeling of stresses for cracking in pavements. *5th International CROW-workshop*, 31 mars-2 avril, Istanbul, Turkey.
- Chabot A., Tran Q. D., Ehrlacher A., 2005. A simplified modeling for cracked pavements - Modèle simplifié pour le calcul des chaussées. Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées (<http://www.lcpc.fr/en/sources/blpc/index.php>), (258-259), 105-120.
- Chabot A., 2006, Modèle de calcul de structure de chaussées fissurées. *Journées Techniques Routes*, 1-2 février, Palais des Congrès de Nantes, France (Présentation disponible en ligne sur le site du LCPC)
- Chabot, A., Tran Q. D., Ehrlacher A., 2007. A modeling to understand where a vertical crack can propagate in pavements. *International Conference on Advanced Characterization of Pavement and Soil Engineering Materials*, June 20- 22, Athens, Greece. In Taylor & Francis Group Proceedings, **1**: 431- 440 (ISBN 978-0-415-44882-6).
- Chabot A., 2007. *Synthèse des travaux de recherche de Pierre Lavigne*. Rapport de fin de contrat Cimbeton de la thèse Cifre de Lavigne P. (2005-2008) : Analyse de l'évolution des dommages dans les structures de chaussées innovantes
- Chabot A., Pouteau B., Balay J.-M., De Larrard F., 2008. FABAC Accelerated Loading Test of Bond between Cement Overlay and Asphalt layers. *Sixth International*

- RILEM Conference on Cracking in Pavements*, June 16-18, Chicago, US. In Taylor & Francis Group Proceedings, 13-23 (ISBN 978-0-415-47575-4).
- Chabot A., Hun M., Hammoum F. 2013. Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for “composite” pavements. *Construction and Building Materials*, **40**: 1076-1087
- Chupin O., Chabot A., Piau J.-M., Duhamel D 2010. Influence of sliding interfaces on the response of a visco-elastic multilayered medium under a moving load. *International Journal of Solids and Structures*, **47**:3435-3446.
- CIMbéton, 2004. Une solution durable contre l’orniérage – Le Béton de Ciment Mince Collé, Collection Technique.
- Cook T.S., Erdogan F., 1972. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Engrg Sc.*, **10** : 677-697.
- Cox H. L., The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials. *British Journal of Applied Physics*. Vol. **3**, (Aug. 1952), pp. 72-79.
- Charalambides PG, Cao HC, Lund J, Avans AG, 1990. Development of a test method for measuring the mixed mode fracture resistance of bimaterial interfaces. *Mechanics of Materials*, **8** (4): 269-283.
- Comninou M., 1977. The interface crack. *J. Appl. Mech.*, **44**: 631-636.
- De Larrard F., Pouteau B., Chabot A., Clement J. L., Balay J. M., 2001. Chaussées composites et nouvelles applications du ciment dans la route. TPTech, Paris.
- Diakhaté M, Phelipot A, Millien A, Petit C. Shear fatigue behaviour of tack coats in pavements. *Road Materials and Pavement Design International Journal* 2006; **7** (2):201–22.
- Diaz Diaz A., 2001. Délaminage des matériaux multicouches : Phénomènes, modèles et critères. Thèse de doctorat de l’ENPC.
- Diaz Diaz, A. & Caron J. F. & Carreira, R. P. 2002. software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges, *Composites structures* **58**: 195-208.
- Diaz Diaz A., Caron J. F. , Ehrlacher A., 2007. Analytical determination of the modes I, II and III energy release rates in a delaminated laminate and validation of a delamination criterion
- Dundurs J., 1969. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics* 1969; 650-652.
- Ehrlacher A., Caron J. F., Chabot A., Douçot E., Naciri T. (avril) 1993. Modélisation multiphasique des plaques composites en flexion. *1er Congrès National de Mécanique*, Rabat (Maroc), 149-156.
- Ehrlacher A., Naciri T., Chabot A. & Caron J. F., 1994. Analyse des efforts d'interface à l'aide de la modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4). *Comptes rendus des JNC9*.
- England AH, 1965. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*: **32**:400–402.
- Florence C., 2005. Étude expérimentale de la fissuration réfléctive et modélisation de la résistance de structures cellulaires. Thèse de Doctorat de l’ENPC.
- Florence C., Foret, G., Tamagny, P., Sener, J.Y. and Ehrlacher, A. 2004. Design of a new laboratory test simulating the reflective cracking in Pavements with cement treated bases. In *RILEM Proceedings PRO 37, Fifth Internat.l RILEM Conf. Cracking in Pavements*, Limoges May 5-8 2004: 147-154.
- Garett, K.W., and Bailley, J.E., 1977, “Multiple Transverse Fracture in 90° Cross-ply Laminates of a Glass Fibre-Reinforced Polyester,” *J. Mat. Scien.*, **12**, pp. 157-168.
- Granju J.-L., J. 2001. Debonding of thin cement-based overlays. *Materials in Civil Engng*, **13** (2): 114-120.

- Guillo, C. 2004. *Validations par éléments finis d'un modèle simplifié pour l'étude de décollement à l'interface de multicouche de chaussée*. Rapport de stage de DESS de l'Université de Nantes.
- Hun M., 2012. *Influence de l'eau dans le décollement par flexion de bicouches de chaussée urbaine*. Thèse de Doctorat de l'ED SPIGA, ECN.
- Hun M., Chabot A., Hammoum F. 2012. Characterization of interface behaviors of bilayer materials using digital image correlation. Contribution to the Rilem TC-MCD STAR for TG3
- Hun M., Chabot A., Hammoum F. 2012. A four point bending test for the bonding evaluation of composite pavement. Proceedings of the 7th Rilem International Conference on Cracking in Pavements, June 20-22 2012, Delft, The Netherlands. RILEM Bookseries, **4**: 51-60
- Hun M., Chabot A., Hammoum F., 2011. Analyses mécaniques d'une structure bi-couches délaminantes par flexion 4 points. 20^{ème} CFM, 28 Août – 2 septembre, Besançon.
- Hutchinson J.W., Suo Z., 1992. Mixed mode cracking in layered materials. *Adv. Appl. Mech.* **29** 64.
- Johnson K.L. (1992), *Contact Mechanics*, Ed Cambridge University Press 1985.
- Kim, R.Y., and Soni, S.R., 1984, "Experimental and Analytical Studies on the Onset of Delamination in Laminated Composites," *Journal of Composite Materials*, **18**: 70-80.
- Kirchhoff G., 1850. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, **40**:51-88.
- Koiter W.T. , Simonds J.G. , 1972. Foundations of shell theory. In Proc. of 13th Int. Cong. of Theor. and Appl. Mech. , 150-176. Springer-Verlag .
- Le Corvec G. 2008 *Simulation des effets du retrait de béton de ciment sur la flexion de matériaux de chaussée fissurée*, Stage de Master Pro Modélisation Numérique en Mécanique des Structure de l'Université de Nantes.
- Lavigne P., 2006. *Programmation du M4-5nB pour les chaussées BCMC*. Rapport N°2 de contrat CIFRE ATILH.
- Lecuyer F., Engrand D., Dumontet H., 1987. Comparaison de méthodes de couche limite pour l'analyse des effets de bords dans les matériaux composites. *Annales des composites*, "Effets de bords et singularités dans les matériaux composites", **1** : 51-64.
- Leguillon D., Sanchez-Palancia E., 1985. Méthodes numériques appliquées à la mécanique. Une méthode numérique pour l'étude des singularités de bord dans les composites. *C. R. Acad. Sc.*, **301** (Série II, N° 18).
- Lekhnitskii, S.G., 1968. *Anisotropic Plates*. Publishing by Gordon and Breach Science Publishers, Paris.
- Love A. E. H., 1934. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. University Press, 4ème édition, Cambridge.
- van der Meers F.P, Moës N., Sluys L.J., 2012. A level set model for delamination – Modeling crack growth without cohesive zone or stress singularity. *Engineering Fracture Mechanics*, **79**: 191-212
- Mauduit C., Hammoum F., Piau J.M., Mauduit V., Ludwig S., Hamon D., 2010. Quantifying expansion effects induced by Freeze–Thaw cycles in partially water saturated bituminous mix: Laboratory Experiments. *RMPD*, **11**/SI: 443-457.
- Mindlin R. D., 1951. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **18**: 32-38.

- Naciri T., Ehrlacher A., Chabot A. 1998. Interlaminar Stress Analysis with a new Multiparticle Modelisation of Multilayered Materials (M4). *Composites Sciences and Technology*, **58** (3): 337-343.
- Newmark N.M., 1959. A method of computation for structural dynamics. *ASCE J. of the Engineering Mechanics Division*, **85**: 67-94.
- Pagano, N.J., 1978, "Stress fields in Composite Laminates," *Int. J. Solids Structures*, **14**, pp. 385-400.
- Nasser H (2013-2016), *Mise au point d'un outil de calcul rapide de chaussées fissurées*. Thèse de l'ED SPIGA, ECN. Co-financement Région PdL/Ifsttar.
- Paris P.C., Erdogan F., 1963. A critical analysis of crack propagation laws. *J. Basic Eng.. Trans ASME*, **85** (3) : 528-534
- Pasternak P.L., 1954. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants (in Russian). *Gosuedarstvennoe Izdatelstvo Literatim po Stroitelstvu i Arkhitekture*, Moscow.
- Perret L. , Lecuyer F. , Allix O. , Engrand D., 1991. Perforated composite plates effects of the curvature on three dimensional stress distribution around holes - Comparaison between two different techniques. *Proceeding of ICCM7 , Hawaï – 1991*
- Pérez-Roméro, S. (2008). Approche expérimentale et numérique de la fissuration réfléctive de chaussée. Thèse de doctorat de l'Université de Limoges.
- Perez S., Balay JM., Tamagny P., Petit C., Accelerated Pavement Testing and Modelling of Reflective Cracking in Pavements. *Journal Engineering Failure Analysis ScienceDirect*, **14** (8):1526-1537, 2007
- Pérez S. A., Balay J.M., Tamagny P., Chabot A., Petit C., Millien A., Wendling L., 2008. Accelerated Pavement Cracking Testing. *Experimental and Finite Element Analysis Sixth International RILEM Conference Cracking in Pavements*, June 16-18, Chicago, US. In Taylor & Francis Group Proceedings, ISBN 978-0-415-47575-4, 55-65.
- Pipes R. B. , Pagano N. J., 1970. Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension. *J. Composite Materials*. **4**: 538-548.
- Pop O., Millien A., Petit, 2001. Mechanical fields measurement using the optical full fields techniques. Contribution to the Rilem TC-MCD STAR for TG3 to be published to a STAR Rilem book.
- Pouteau B., Chabot A., De Larrard F., 2002, *Etude en laboratoire du collage béton/matériaux bitumineux*. Matériaux 2002, Tours, 2002.
- Pouteau B., 2004. *Durabilité mécanique du collage blanc sur noir dans les chaussées*. Thèse de Doctorat de l'ECN.
- Pouteau B., Chabot A., Balay J. M., De Larrard F., 2005. Essai accéléré de durabilité du collage blanc sur noir dans une chaussée composite. 17ème CFM, Troyes.
- Pouteau B., Chabot A., De Larrard F., Balay J. M. (mars) 2006. Mécanique des chaussées Béton sur grave-bitume, étude de la tenue du collage entre béton et enrobé sur chaussée expérimentale (1re partie). *Revue Générale des Routes et des Aérodromes (RGRA)*, (847): 85- 90.
- Pupo A. H. Eve,nsen H. A., 1970. Interlaminar Shear in Laminated Composites Under Generalized Plane Stress. *J. of Composite Materials*, **4**: 204-220.
- Raju, I.S., and Crews, J.H., 1981. Interlaminar Stress Singularities at a Straight Free Edge in Composite Laminates. *Computer & Structures*, **14**(1-2): 21-28.
- Raju, I.S., and Crews, J.H., 1982. Three-Dimensional Analysis of (0/90)_S and (90/0)_S Laminates with a Central Circular Hole. *Composites Technology Review*, **4**(4): 116-124.

- Rasmussen R.O., Rozycki, D.K., 2004. Thin and Ultra Thin whitetopping – A synthesis of highway practice, NCHRP Synthesis 338, Transportation Research Board.
- Reddy J. N., 1989. On the Generalization of Displacement-based Laminates Theories. *Appl. Mech. Rev.*, **42** (11): S213-S222.
- Reissner E., 1945. The Effect of Transverse Shear Deformation on The bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **12**: A69-A77.
- Reissner, E., 1950, "On a Variational Theorem in Elasticity," *J. Math. Phys.*, **29**, pp. 90-95.
- Partl, M.N.; Bahia, H.U.; Canestrari, F.; de la Roche, C.; Di Benedetto, H.; Piber, H.; Sybilski, D. (Eds.), 2013. Advances in Interlaboratory Testing and Evaluation of Bituminous Materials. Rilem State-of-the-Art Report, *vol.9*, corresponding to the RILEM Technical Committee "206-ATB" , Springer (ISBN 978-94-007-5103-3).
- Rybicki E. F., 1971. Approximate Three-Dimensional Solutions for Symmetric Laminates Under Inplane Loading. *Journal of Composite Materials*, **5**:354-360.
- Salasca S. 1998. Calcul par éléments finis des états de contraintes dans les chaussées rigides : Evaluation des phénomènes de contact associés aux effets de retrait et de température, application à l'interprétation d'expérimentations sur site. Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes.
- SETRA-LCPC, 1994. *Conception et Dimensionnement des Structures de Chaussée*.
- Simonin J-M., Balthazard V., Hornych P., Dérobert X., Kerzrého J-P., Trichet S., Durand O., Alexandre J., Joubert A. Detection of debonding and vertical cracks with non destructive techniques during accelerated pavement testing. 4th International Conference on Accelerated Pavement Testing, September 19-21 2012, Davis, California, USA. CRC Press 2012: 121–131, DOI: 10.1201/b13000-19, Print ISBN: 978-0-415-62138-0.
- Spilmann N. 2007. *Analyse des champs de contraintes de l'essai Méfisto à l'aide du M4-5n*. Stage de Master Pro Modélisation Numérique en Mécanique des Structure de l'Université de Nantes.
- Sutton, M.,Wolters,W., Peters,W., Ranson,W., andMcNeill, S., 1983. Détermination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, **1**(3):133-139.
- Tenga J.G. , Smith S.T., Yaoa J., Chen J.F., 2003. Intermediate crack-induced debonding in RC beams and slabs. *Construction and Building Materials*, **17** :447–462.
- Tschegg E. K., Macht J., Jamek M., Stegenberger J., 2007. Mechanical and Fracture-Mechanical Properties of Asphalt-Concrete Interfaces. *ACI Materials Journal*, **104** (5): 474-480.
- Tran Q. D. 2001. *Utilisation des modèles multiparticulaires pour l'analyse des champs de contraintes dans une chaussée*. Stage de DEA Université Pierre et Marie-Curie, option ENPC.
- Tran Q. D., Chabot A., Ehrlacher A., Tamagny P., 2003. Modèle simplifié pour le calcul de chaussées. 16^{ème} Congrès Français de Mécanique, 1-3 Septembre, Nice
- Tran. Q. D. 2004. *Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches*. Thèse de Doctorat de l'ENPC.
- Tran Q. D., Chabot A., Ehrlacher A., Tamagny P., 2004. A simplified modelling for cracking in pavements". *In proceedings of the Fifth International RILEM Conference Cracking in Pavements*, May 5-8, Limoges, France, 299-306.
- Treviño M., Granju J.-L., Beushausen H., Chabot A., Mihashi H., Silfwerbrand J., 2011. Chapter XII (Design) - Bonded Cement-Based Material Overlays for the Repair, the Lining or the Strengthening of Slabs or Pavements. *State-of-the-Art Report of the RILEM Technical Committee 193-RLS Series*, Vol. 3, Bissonnette, B.; Courard, L.;

- Fowler, D.W.; Granju, J.-L. (Eds.) 1st Edition, XIII, 177 p. 76 illus. ISBN 978-94-007-1238-Publisher Springer Netherlands: 141-156.
- Vulcano-Greullet N., Kerzreho J. P., Mauduit V., Chabot A., 2010. Stripping phenomenon of top layers of thick pavements. Proceedings of the *11th International Conference on Asphalt Pavements*, 1-6 August, Nagoya Aichi, Japan. Curran Associates: **1** :552-561, Print ISBN: 978-1-61839-073-8
- Wagoner, M. P., W. G. Buttlar, and G. H. Paulino, 2005. Development of a single-edge notched beam test for asphalt concrete mixtures. *Journal of Testing and Evaluation*, ASTM, 33 (6) 452-460, 2005.
- Wang, A.S.D., and Crossman, F.C., 1997. Some New Results on Edge Effects in Symmetric Composite Laminates. *Journal of Composite Materials*, **11**: 92-106.
- Westergaad H.M, 1926. Stresses in concrete pavements computed theoretical analysis, *Public Roads*: **7**.
- Whitney, J.M., and Nuismer, R.J., 1974, "Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations," *Journal of Composite Materials*, **8**, pp. 253-265.
- Williams ML., 1959. The stress around a fault or crack in dissimilar media. *Bull Scismol Soc Am*, **49**:199-204.
- Wolfram S. 1999, *THE MATHEMATICA BOOK*.

Partie 2

EVALUATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES MATERIAUX BITUMINEUX DANS LE CALCUL DE STRUCTURES DE CHAUSSEES SOLLICITEES PAR DES CHARGES MOBILES

Comme évoquée précédemment dans la fin de la première partie de ce manuscrit, la chaussée est constituée d'un empilement successif de couches de matériaux. Elle repose sur un massif semi-infini et se décompose elle-même en deux parties fondamentales : le corps de la chaussée et les couches de roulement. Le corps des chaussées (ou assises), permet de répartir les charges induites par les véhicules pour les amener à un niveau compatible avec les caractéristiques du sol support. Les couches de roulement ont pour but de protéger les assises des infiltrations d'eau et de l'agressivité du trafic. Les couches d'assises sont dimensionnées à l'aide du modèle élastique axisymétrique de Burmister (1943) contenu dans la méthode de dimensionnement des chaussées françaises (Corte et Goux, 1996) (SETRA-LCPC, 1997). Par utilisation du principe de superposition, il est possible de considérer plusieurs charges identiques à pression verticale supposées répartie uniformément sur la surface de contact considérée ainsi circulaire. A l'aide de modules élastiques équivalent des matériaux bitumineux obtenus par des essais normalisés de module complexe en laboratoire sur éprouvette trapézoïdale à la température et fréquence équivalente à la vitesse considérée, ce modèle de structure multicouche semi-infinie donne de façon semi-analytique de relativement bons champs de contraintes et de déformations dans le corps des chaussées neuves lorsque celles-ci sont soumises à de forts trafics de poids lourds. Il est introduit dans différents logiciels de calculs dont le logiciel Alizé développé initialement dans l'équipe qui m'a accueilli en poste de CR au LCPC (Autret et *al.*, 1982).

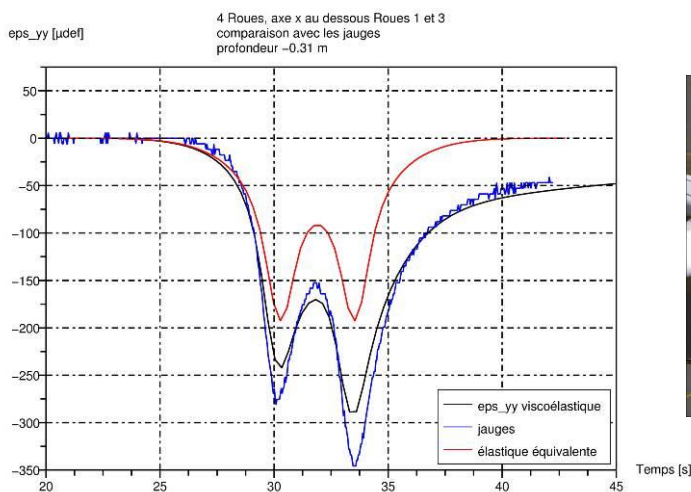


Figure 45. Comparaison des simulations élastiques et viscoélastiques à la réponse d'une jauge de déformation transversale en base des couches bitumineuses d'une chaussée souple épaisse soumise au passage d'un bogie 4 roues d'un gros porteur aérien (Vila, 2001) (Loft, 2005) (Chabot et *al.*, 2010)

Par contre, pour l'étude des chaussées bitumineuses urbaines, des chaussées aéronautiques, des chaussées souples à faible trafic ou soumises à de forts gradients de température, il est nécessaire de prendre en compte le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux. Ceci est d'autant plus vrai lorsque les couches sont trop minces (couches de roulement) ou trop épaisses et/ou lorsque plusieurs charges se succèdent (Cf Fig. 45).

Depuis les premiers travaux de Sneddon (1952), la réponse 3D théorique d'un demi-espace soumis à une charge roulante a été largement investiguée. Dans le domaine des chaussées, des développements prenant en compte le comportement viscoélastique des matériaux bitumineux ont en outre été proposées à l'aide d'éléments finis 3D au LCPC dans le module CVCR de César- LCPC (Heck *et al.*, 1998) ou par exemple aux Etats-Unis à l'aide du logiciel Abaqus (Elseifi *et al.*, 2006). Mais, pour les bureaux d'ingénierie, ces développements peuvent être compliqués à utiliser aussi, pour offrir des outils de calculs alternatifs plus simples d'utilisation et plus rapides, des méthodes semi-analytiques 3D ont été réalisées dans la fin des années 90 dans le logiciel Veroad des Pays-Bas (Hopman, 1996) et 3D-Move de l'Université de Reno aux USA (Siddharthan *et al.*, 1998, 2000).

A mon arrivée au LCPC en 1999, j'ai ainsi été sollicitée par l'équipe d'accueil et son responsable JM Piau pour participer au développement d'un tel outil. Sur ce sujet, j'ai pu bénéficier d'un partenariat avec Denis Duhamel de l'équipe Dynamique du laboratoire Navier de l'école des Ponts Paris Tech, d'un post-doc de plus de 12 mois, plusieurs stagiaires dont trois équivalents Master2 et ainsi pu coproduire le logiciel ViscoRoute© que j'ai souhaité distribuer gratuitement sur le net. J'ai communiqué ces travaux au travers de 5 articles dont 4 dans le WOS ; 5 communications dans des congrès avec actes dont 4 internationaux (au Japon, Québec, Italie, Pays-Bas); de nombreuses conférences principalement en tant qu'invitée (France : Michelin 2012, restitution Fondephy2009, Journées Techniques routes à Nantes en 2006 et 2009, conférence Albert Caquot en 2001 ; USA : University of Illinois and Reno 2010, AAPT à Sacramento 2010, FHWA2007 à Washington; Pays-Bas : TU Delft2009, UK : University of Nottingham2007, Tunisie2006).

Cette présente partie, beaucoup plus courte que la première, tente de synthétiser les différentes étapes de construction du logiciel et d'applications ainsi réalisées par son utilisation. Dans une première section le problème mécanique à traiter est présenté. Puis la deuxième section présente succinctement les validations de la méthode utilisée. Une troisième section présente brièvement le logiciel ViscoRoute© développé et distribué. Enfin, dans une quatrième partie, sont résumées les principales applications publiées.

1. Méthode de calcul

La structure de chaussée est un demi-espace multicouche constitué de couches élastiques ou d'enrobés bitumineux qui ont des comportements considérés en général thermoviscoélastiques. Ces comportements sont particulièrement bien caractérisés par le modèle de Huet (1963, 1999) et Sayegh (1965) utilisé depuis de nombreuses années au LCPC. Ce modèle rhéologique est constitué de deux branches parallèles. La première, qui représente la partie visqueuse du comportement possède un ressort et deux amortisseurs paraboliques (c'est à dire dont la viscosité dépend de la fréquence de sollicitation). La seconde est constituée d'un ressort correspondant au comportement statique ou à long terme de l'enrobé (Fig.46).

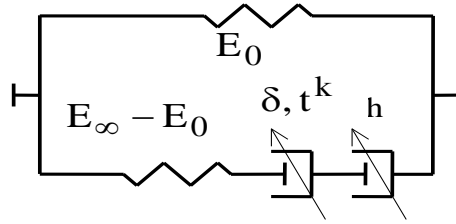


Figure 46. Schéma du modèle rhéologique de Huet-Sayegh (1963).

Le paramètre E_∞ est le module élastique instantané, E_0 le module élastique statique, k et h sont les exposants des amortisseurs paraboliques ($1 > h > k > 0$) et δ est un coefficient sans dimension, positif, pondérant l'apport du premier amortisseur dans le comportement. Il rend compte de la proportionnalité entre les temps caractéristiques des deux amortisseurs. Le comportement thermo-visco-élastique est alors caractérisé, à une fréquence de sollicitation ω (avec une variation temporelle en $e^{-j\omega t}$) et une température θ pour le module complexe :

$$E^*(\omega, \theta) = E_0 + \frac{E_\infty - E_0}{1 + \delta(j\omega\tau(\theta))^{-k} + (j\omega\tau(\theta))^{-h}} \quad (81)$$

où $\tau(\theta) = \exp(A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2)$ est une fonction de la température dépendant des trois paramètres scalaires A_0 , A_1 et A_2 et j est le complexe tel que $j^2 = -1$. Dans les applications, nous considérerons la température comme uniforme et constante par couche et nous omettrons d'indiquer la dépendance en θ des différentes grandeurs. Le coefficient de Poisson ν est supposé réel et indépendant de la fréquence.

Dans l'opération de recherche Fondephy, dont j'ai assuré la responsabilité pendant 4 ans (2006-09) (<http://or.lcpc.fr/fondephy>), une procédure rationnelle de calibration des modèles viscoélastiques a été développée par mes collègues du LCPC. Elle repose d'abord sur la construction de courbes maitresses. Cette étape a été rationalisée en utilisant les équations dérivées des relations de Kramers-Kronings et par l'application du principe de superposition temps température (Chailleux et al., 2006). Cette méthode présente l'avantage d'obtenir les coefficients de translation des isothermes uniquement par le calcul. A partir de ces courbes, les paramètres des modèles rhéologiques sont ensuite obtenus par des processus d'optimisation. Une attention particulière a été portée à la calibration du modèle de Maxwell généralisé qui pose généralement des difficultés. La méthode proposée repose sur deux types d'optimisation contraintes, linéaire, puis non-linéaire (Hammoun et al., 2009). L'ensemble de cette procédure est implanté dans le logiciel VISCOANALYSE. La version 1.0 est disponible sur le site internet du LCPC.

Par ailleurs, en 2007 j'ai réuni les acteurs matériaux et le technicien informatique de l'unité SMIT d'alors du LCPC autour du projet de conception en interne d'une base de donnée matériaux viscoélastiques multi-accès internet (Projet ViscoMatdata). L'idée initiale était de pouvoir disposer et gérer les développements d'une base de données des coefficients des lois de comportement des matériaux viscoélastiques afin d'étudier les corrélations de ces coefficients en fonction des familles de matériaux et leur fonctionnement en statique ou en dynamique dans la structure. Lié au logiciel Prédictra de Fondephy, pour l'étude micro méca du comportement des matériaux bitumineux, le but ultime de cette base est de

conserver un savoir-faire et de contribuer à la formulation de nouveaux matériaux. La base est actuellement en finalisation. Ce projet, long à finaliser, montre à quel point il faudrait développer dans l'établissement des compétences en ingénierie informatique qu'il nous a fallu trouver notamment à l'Université de Nantes (formation MIAGE).

Dans la première version du logiciel ViscoRoute développé conjointement avec Denis Duhamel de l'Ecole des Ponts Paris Tech (Duhamel et al., 2005), le chargement est une charge constante uniformément répartie sur un rectangle $[-a,a] \times [-b,b]$, de résultante $f_0 = 4ab p_0$, se déplaçant à la vitesse constante de gauche à droite. Dans la deuxième version du logiciel distribué librement, la charge se déplace de la droite vers la gauche et les chargements peuvent être à surface de contact ponctuel, elliptique ou rectangulaire. Le logiciel ViscoRoute©2.0 prend en compte directement dans son calcul le cas de multichargements (Chabot et al., 2010).

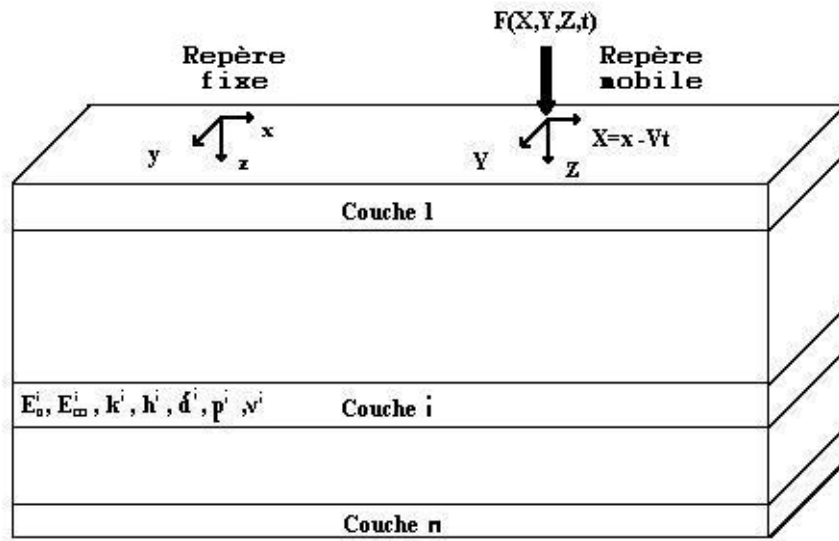


Figure 47. Charge mobile sur un demi-espace stratifié avec le modèle de Huet & Sayegh (ViscoRoute V2)

Dans un repère fixe (Fig. 47), l'équation d'équilibre de champ s'écrit dans chaque couche i :

$$\text{Div}(\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z, t)) = \rho_i \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} \quad (82)$$

où $u(x, y, z, t)$ est le vecteur déplacement, ρ_i a masse volumique du matériaux de la couche i et $\sigma(x, y, z, t)$ le tenseur des contraintes de Cauchy, i variant de 1 à n .

Les conditions aux limites sont :

- pour la surface libre : $\sigma(z=0) \cdot n = p_0$ où n est la normale extérieure
- à l'interface entre la couche i et la couche $i+1$: $\sigma(x, y, z_i^+, t) \cdot n = \sigma(x, y, z_i^-, t) \cdot n$ et $u(x, y, z_i^+, t) = u(x, y, z_i^-, t)$ (collage parfait des couches)
- en $z = +\infty$, on a la condition de Sommerfeld : $\sigma(x, y, +\infty, t) = 0$ et $u(x, y, +\infty, t) = 0$

Le passage dans le repère de la charge mobile se fait par le changement de variables $(x, y, z) \rightarrow (X - Vt, Y, Z)$ qui conduit, en régime stationnaire, à la relation (83) indépendante du temps (régime quasi-stationnaire) :

$$\text{Div}(\sigma(X, Y, Z)) = \rho_i V^2 \frac{\partial^2 u(X, Y, Z)}{\partial X^2} \quad (83)$$

On définit ensuite la transformée de Fourier A^* d'un champ tensoriel A quelconque par la relation (84).

$$a(X, Y, Z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A^*(k_1, k_2, Z) \exp(-jk_1 X) \exp(-jk_2 Y) dk_1 dk_2 \quad (84)$$

Il est alors possible, pour chaque couche i , d'écrire les relations de comportement viscoélastique dans l'espace de la transformée de Fourier sous une forme multiplicative semblable aux relations de l'élasticité dans l'espace euclidien.

$$\sigma^*(k_1, k_2, Z) = 2\mu_i^*(kV) \varepsilon^*(k_1, k_2, Z) + \lambda_i^*(kV) \text{tr}(\varepsilon^*(k_1, k_2, Z)) \quad (85)$$

où $\lambda_i^*(kV)$ et $\mu_i^*(kV)$ dépendent du module complexe $E_i^*(kV)$ de la couche i comme les coefficients de Lamé dans le cas élastique.

En introduisant le comportement (85) dans l'équation de champ (82), Nguyen (2002) donne, dans l'espace de Fourier, l'équation d'équilibre de chaque couche i sous la forme:

$$A_i \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z^2} + jB_i \frac{\partial U^*}{\partial Z} - C_i U^* = 0 \quad (86)$$

avec :

$$A_i = \begin{pmatrix} c_{si}^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{si}^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{pi}^2 \end{pmatrix} \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1(c_{pi}^2 - c_{si}^2) \\ 0 & 0 & k_2(c_{pi}^2 - c_{si}^2) \\ k_1(c_{pi}^2 - c_{si}^2) & k_2(c_{pi}^2 - c_{si}^2) & 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} k_1^2(c_{pi}^2 - V^2) + k_2^2 c_{si}^2 & k_1 k_2 (c_{pi}^2 - c_{si}^2) & 0 \\ k_1 k_2 (c_{pi}^2 - c_{si}^2) & k_1^2 (c_{si}^2 - V^2) + k_2^2 c_{pi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_1^2 (c_{si}^2 - V^2) + k_2^2 c_{si}^2 \end{pmatrix}$$

où c_{pi} et c_{si} sont les vitesses des ondes longitudinales et transverses dans la couche i . La résolution de l'équation (6) donne un champ de déplacement dans la couche i paramétré par 6 constantes complexes $(\beta_{1i}^-, \beta_{1i}^+, \beta_{2i}^-, \beta_{2i}^+, \beta_{3i}^-, \beta_{3i}^+)$, de la forme :

$$\begin{aligned} U_1^* &= k_1 \beta_{1i}^- e^{-\kappa_p Z} + \kappa_s \beta_{3i}^- e^{-\kappa_s Z} + k_1 \beta_{1i}^+ e^{\kappa_p Z} - \kappa_s \beta_{3i}^+ e^{\kappa_s Z} \\ U_2^* &= k_2 \beta_{1i}^- e^{-\kappa_p Z} + \kappa_s \beta_{2i}^- e^{-\kappa_s Z} + k_2 \beta_{1i}^+ e^{\kappa_p Z} - \kappa_s \beta_{2i}^+ e^{\kappa_s Z} \\ U_3^* &= j\kappa_p \beta_{1i}^- e^{-\kappa_p Z} + jk_2 \beta_{2i}^- e^{-\kappa_s Z} + jk_1 \beta_{3i}^- e^{-\kappa_s Z} - j\kappa_p \beta_{1i}^+ e^{\kappa_p Z} \\ &\quad + jk_2 \beta_{2i}^+ e^{\kappa_s Z} + jk_1 \beta_{3i}^+ e^{\kappa_s Z} \end{aligned} \quad (88)$$

avec

$$\kappa_p = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c_p^2}\right)k_1^2 + k_2^2} \quad \text{et} \quad \kappa_s = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c_s^2}\right)k_1^2 + k_2^2} \quad (89)$$

Les relations de continuité des déplacements et des contraintes sont écrites à chaque interface ainsi que les conditions à l'infini et sur la surface libre. On obtient les amplitudes des ondes dans la première couche puis dans chacune des autres couches. Les champs de déplacement et de contrainte dans le domaine des nombres d'onde s'en déduisent. Ensuite une double transformation inverse de Fourier permet de déterminer les champs de déplacement et de contrainte dans le domaine réel. Les détails du calcul sont donnés dans Nguyen (2002).

2. Validations

Cette phase de validation du noyau de calcul a été faite entre 2002 et 2005. Les résultats présentés sont à chaque fois effectués en comparaison avec ceux obtenus par d'autres approches.

Tout d'abord, deux structures différentes ont été étudiées. La charge roulante de 65 kN est répartie sur une surface carrée de côté $a=b=0.22158$ m (essieu de référence de la méthode française de dimensionnement de chaussées), vitesse de la charge suivant l'axe x de 5 ms⁻¹. Les constantes de la fonction $\tau(\theta)$ sont : $A_0 = -0.342$, $A_1 = -0.401$, $A_2 = 0.002954$. La température θ est de 15°C.

La première validation a été menée sur le cas du demi-espace infini avec un matériau visco-élastique de coefficient de poisson 0.35, de modules $E_0 = 70$ Mpa et $E_\infty = 29914$ Mpa et dont la partie amortissement est dégénérée : $\delta = 0$, $h=0$ (81). Le matériau est donc équivalent à un matériau élastique de raideur 14992 MPa (Fig. 48a). La seconde validation est faite sur un matériau de mêmes caractéristiques, sauf le coefficient h qui vaut 0.3 (Fig. 48b). Les courbes de déplacement vertical en fonction de x sont données aux profondeurs $z_1 = -0.0167$ m et $z_2 = -0.2444$ m. On constate que la concordance avec la solution analytique de Boussinesq donnée dans Johnson (1992) dans le cas élastique et la solution semi-analytique, que nous avons développé à l'origine du projet (Chabot et Piau, 2001) pour les cas visco-élastiques, est très bonne. Cette solution analytique avait été obtenue sans prise en compte des forces d'inerties, dans le repère (de Galilée) mobile de la charge, et comme ici par transformation double de Fourier des variables d'espace du plan (comme initialement dans Cole et Huth en 1958). La solution en déplacement, après résolution explicite des systèmes dans le domaine de Fourier, contient 2 racines triples, donc 6 constantes par couches à déterminer en fonction des conditions aux limites. Ce modèle est original car il n'est pas le modèle limite de ceux utilisés pour la propagation d'ondes dans des multicouches qui obtiennent 3 racines doubles en modélisant les effets d'inertie en plus. Pour retrouver les solutions dans l'espace des réels une méthode d'intégration des champs dans le plan complexe est utilisée. Les points singuliers sont traités par la méthode des

résidus. On retrouve la solution de Boussinesq dans le cas d'une charge ponctuelle roulant sur un massif élastique semi-infini (Cf. rapport Chabot, 2000).

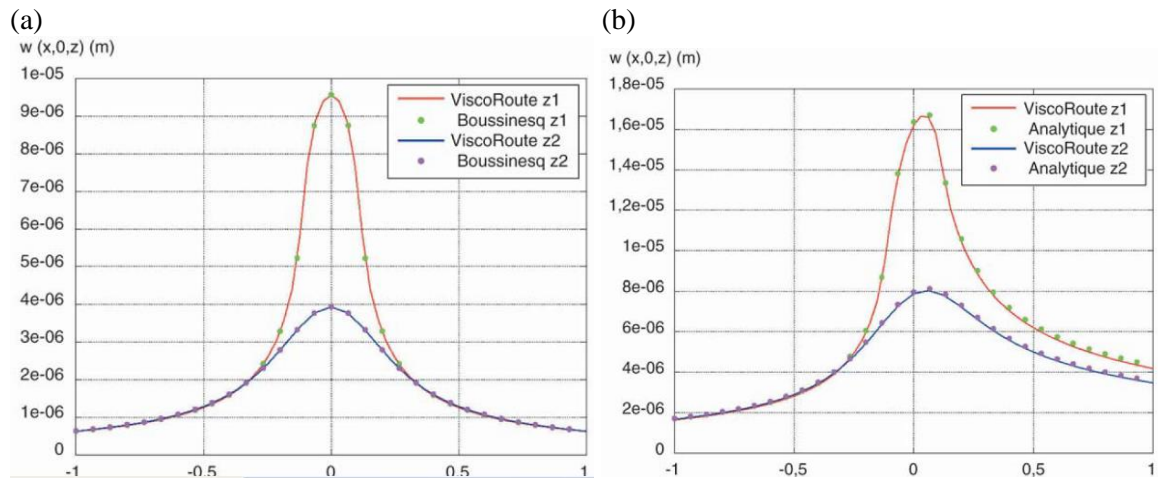


Figure 48. Comparaison des solutions dans le cas du massif (Duhamel et *al.*, 2005)
Demi-espace élastique (a) et visco-élastique (b)

Une troisième validation est présentée en Fig. 49. La structure est constituée d'une couche visco-élastique de 0.08 m collée sur une couche de 0.24 m de grave-bitume élastique ($\nu=0.35$, $E=10000$ Mpa) sur un massif de sol également élastique ($\nu=0.35$, $E=50$ Mpa). On compare les résultats avec ceux d'un calcul aux éléments finis avec le module CVCR du code César-LCPC (Heck et *al.*, 1998). Pour ce faire, une couche de sol de 15 m a été introduite dans ViscoRoute et un massif avec un très grand module d'Young a été placé dessous pour simuler une condition aux limites rigides comme dans le calcul par éléments finis. Les conditions limites en déplacement ont été repoussées à 10 m de part et d'autre de la charge. La symétrie du problème par rapport au plan xOz a été exploitée. Les résultats sont aux côtes $z_3 = -0.0167$ m et $z_4 = -0.37$ m. On note une bonne concordance des résultats.

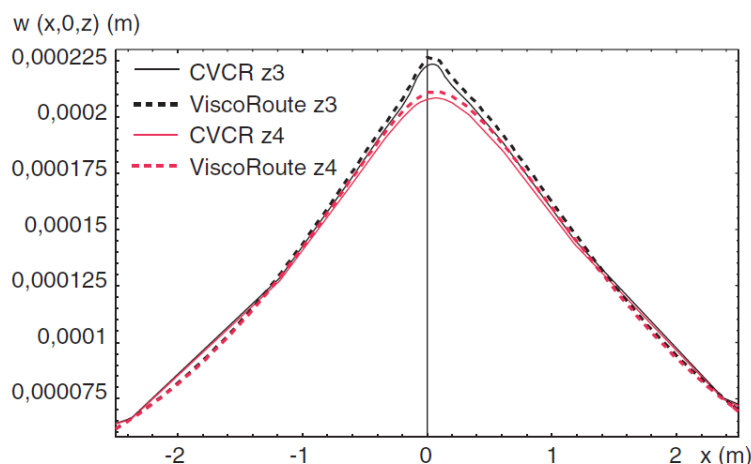


Figure 49. Comparaison des déplacements verticaux pour le tricouche viscoélastique (Duhamel et *al.*, 2005)

Une troisième validation est faite par rapport à des essais accélérés sur le manège de fatigue des structures routières (Duhamel et *al.*, 2005). La structure est constituée de trois couches. Le chargement de pneus jumelés est répartis sur des surfaces rectangulaires de dimensions $a=0.15$ m et $b = 0.09$ m. La charge totale vaut 65kN et la vitesse est de

67.8km/h. La structure est constituée d'une couche viscoélastique d'épaisseur 0.085 m avec les paramètres suivants $\nu = 0.25$, $E_0 = 70\text{Mpa}$, $E_\infty = 34000\text{Mpa}$, $k = 0.22$, $h = 0.65$, $\delta = 2.8$, $A_0 = 1.94$, $A_1 = -0.373$, $A_2 = 0.00191$, $\theta = 11.4^\circ\text{C}$. Cette couche repose sur une couche élastique d'épaisseur 0.43 m et de paramètres $\nu=0.35$, $E=130\text{Mpa}$. En dessous il y a un massif semi-infini élastique de modules $\nu=0.35$, $E=40\text{Mpa}$. Les résultats sont présentés suivant l'axe des x situé au milieu des deux charges. Les résultats sont donnés sur la Fig 50 pour la déformation longitudinale transversale à l'axe x de roulement. Ces déformations sont comparées à des valeurs expérimentales obtenues par des mesures effectuées au LCPC (Hornych et *al.*, 2002). Quelques différences peuvent être observées entre le modèle et les mesures mais globalement l'accord est satisfaisant. Les différences peuvent s'expliquer par des incertitudes sur les épaisseurs et les modules d'Young des différentes couches de sol ainsi que par un comportement du sol qui peut être légèrement différent du modèle élastique utilisé.

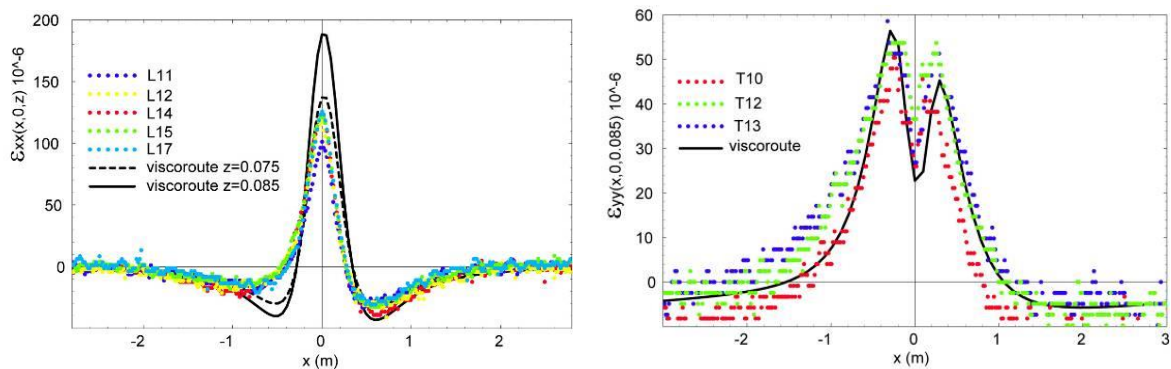


Figure 50. Comparaisons des déformations longitudinales et transversales calculées avec celles mesurées sur expérimentation manège (Duhamel et *al.*, 2005)

Par ailleurs, dans les nombreuses applications qui ont suivies notamment dans le cadre du stage de (Loft, 2005), on note entre le calcul et les mesures expérimentales des différences sur la partie des déformations longitudinales en contraction (à droite de la courbe Fig. 51 suivant les conventions de la mécanique des sols utilisés par les expérimentateurs chaussées). Pour tenter d'expliquer ces différences, j'ai proposé à des étudiants de Master2 de l'Université de Nantes d'analyser les résultats de calculs dans le cadre d'un projet d'étude (Houex et Gervaise, 2012).

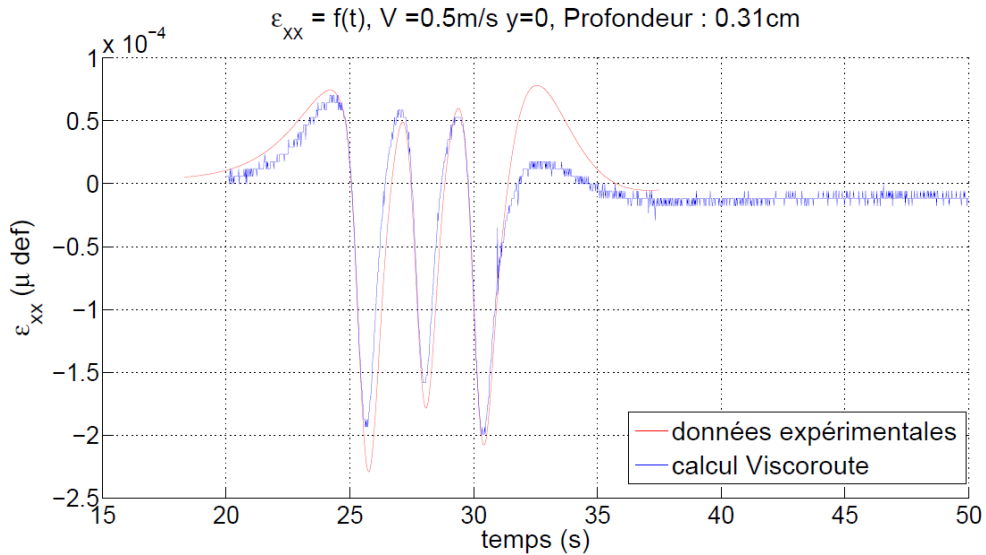


Figure 51. Comparaison des résultats de calculs et de mesure d’essais sur des jauges de déformation dans l’hypothèse de calcul de jauges parfaitement orientées suivant l’axe de roulement (Houex et Gervaise, 2012)

Pour ce faire, nous avons émis l’hypothèse que les jauges, lors de leur mise en place en base des couches bitumineuses, pouvaient bouger quelque peu par rapport à la direction idéale souhaitée et modélisée. En effectuant des changements de repère pour analyser leur résultats de calculs, et en combinant les variations d’angle autour de z et de y, ce petit projet montre qu’il est possible de moduler les différents pics des déformations lors de l’exemple d’un bougie 6 roues sur chaussée bitumineuse épaisse type aéronautique (Fig. 52) et que l’hypothèse émise n’est pas complètement aberrante. Il faudra vérifier précisément sur d’autres expérimentations manège si de tels décalages d’orientation de jauges peuvent être décelés. Cette hypothèse pourrait par ailleurs être complétée des effets Poisson (viscoélastique) non totalement pris en compte dans le modèle.

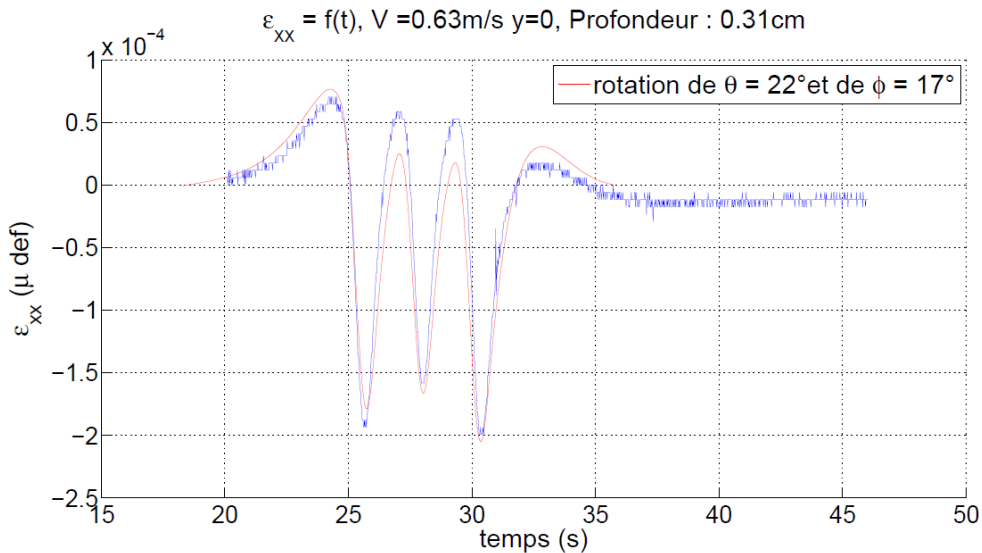


Figure 52. Comparaison des résultats de calculs et de mesure d’essais sur des jauges de déformation dans l’hypothèse de calcul de jauges parfaitement orientées suivant l’axe de roulement (Houex et Gervaise, 2012)

3. L'outil de calcul ViscoRoute©

En résumé de la méthode de calcul utilisée, la résolution du problème est analytique dans le domaine des nombres d'ondes (double transformée de Fourier du problème initial). Ensuite une transformation inverse de Fourier par la FFT permet d'obtenir la solution dans le domaine spatial. Le théorème de Shannon doit être utilisé pour obtenir les champs en tous points de l'espace si nécessaire. Le noyau de ce logiciel a été adapté et mis au point en partenariat avec Denis Duhamel de l'école des Ponts Paris Tech qui avait en parallèle pu bénéficier, pour les problèmes ferroviaires, de l'encadrement de la thèse de VH Nguyen (2002) sur le sujet. Comme mentionné précédemment, deux versions du logiciel ont été réalisées. La différence entre les deux concerne essentiellement la modélisation des charges dans le noyau de calcul programmé en C++ et la version d'interfaçage du noyau de calcul avec l'utilisateur.

Dans la version 1, une charge de forme rectangulaire peut être modélisée uniquement et une interface utilisateur en visual Basic a été développée par Larbi Harfouche (CCGR/MSD), depuis parti à la retraite fin 2004. Le stage de Master2 de (Poché, 2005) a en partie finalisé la validation de l'ensemble des champs mécaniques par comparaison à des calculs éléments finis et a fourni un guide utilisateur pour cette première version du logiciel. Le stage de PFE de (Loft, 2005), d'approfondir les comparaisons des résultats du modèle avec ceux d'essais accélérés type routiers ou aéronautiques. Ces travaux ont fait l'objet d'un article paru dans le Bulletin des Ponts et Chaussées par (Duhamel et *al.*, 2005) ainsi que notamment deux conférences internationales (Duhamel et *al.*, 2003) (Chabot et *al.*, 2006).

Puis, dans une deuxième version le noyau de calcul a été généralisé à la prise en compte de plusieurs charges à diverses formes géométriques. Il a pu être interfacé en langage Python dans une seconde version par Tung le post-doctorant du chef de division de l'époque. A partir de fin 2007, chargée officiellement du projet par ma direction, ce logiciel a pu être finalisé grâce notamment au support d'Olivier Chupin post-doctorant sur le sujet puis chercheur dans l'équipe. Depuis fin 2009, associé à l'article (Chabot et *al.*, 2010), le logiciel ViscoRoute©2.0 est distribué gratuitement répondant ainsi à de multiples demandes des entreprises, des enseignants et des laboratoires de recherche non seulement français mais étrangers.

Nous présentons ci-dessous à titre d'illustration sur la Fig. 53, des résultats de déformations calculées à la base de couches bitumineuses de chaussées épaisses type aéronautique. ($V=20\text{m/s}$ pour 20°C et 30°C). On note que contrairement aux pneus jumelés, la configuration en tandem (et en tridem Cf. Chabot et *al.*, 2010) conduit à de plus grandes intensités des maximums des déformations transversales par rapport aux déformations longitudinales. Une tendance similaire mais amoindrie pourrait être observée avec des calculs élastiques. Ces effets augmentent donc fortement avec la température et devraient être pris en compte dans le dimensionnement des chaussées à nouvelles configurations de poids lourds telles que publiées dans un nouveau décret (N°2012-1359) de l'état français.

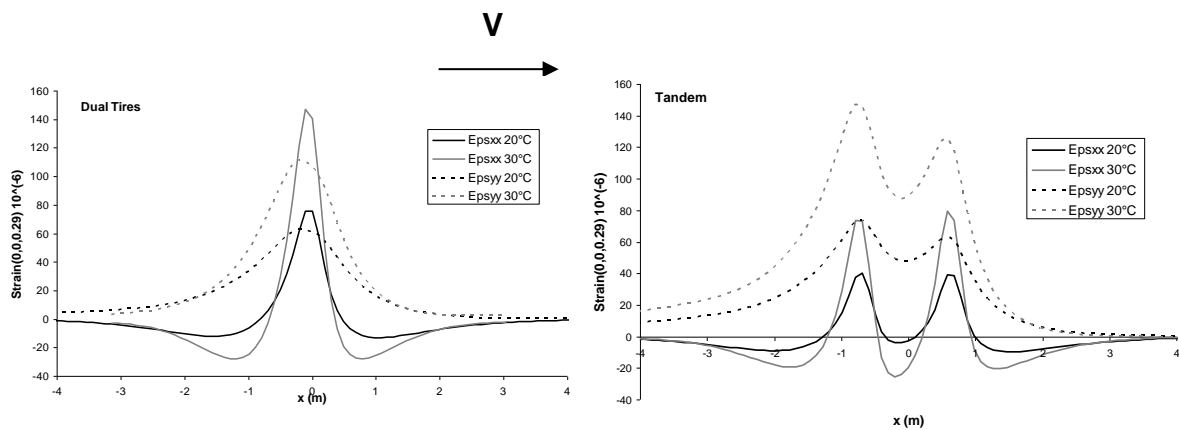


Figure 53. Différences de déformations calculées à la base des couches bitumineuses d'une chaussée aéronautique dans le cas de pneus jumelés et de pneus positionnés en tandem (Chabot et *al.*, 2010)

4. Applications

4.1 Comparaisons ViscoRoute avec deux logiciels existants

Tout d'abord les résultats du logiciel ViscoRoute© ont été comparées (Chabot et *al.*, 2010) avec ceux du logiciel VEROAD développé par Hopman sur l'exemple de sa publication donnée dans (Hopman, 1996). VEROAD permet de prendre en compte une loi de type Huet-Sayegh. Par contre les données d'entrée du problème sont différentes. ViscoRoute© entre le couple module d'Young complexe et un coefficient de Poisson constant, les forces d'inerties sont en partie prises en compte. VEROAD nécessite les modules d'Young et de compressibilité complexe, le calcul ne prend pas en compte les forces d'inertie. Ces différences de données d'entrée pourraient expliquer les différences observées sur la Fig. 54 dans les cas très visqueux (valeur de vitesse faible et température élevée). J'ai pu notamment en discuter directement avec Hopman lors de mon déplacement à la conférence invitée de 2009 à l'Université Technologique de Delft (Chabot, 2009).

D'autre part, au cours de l'invitation que j'ai reçue d'aller présenter la synthèse des résultats de mon opération de recherche à la session internationale du congrès AAPT à Sacramento en 2010, j'ai saisi l'occasion et eu la chance de pouvoir rencontrer directement les chercheurs de l'Université de Reno (Chabot, 2010b) en charge du 2^{ème} autre logiciel équivalent et existant à ma connaissance sur la planète, le logiciel 3D-Move. Le logiciel très similaire à ViscoRoute dans la méthode de calcul utilisé (modèle avec force d'inertie) donne des résultats tout à fait similaires sur l'exemple de la Fig. 54. Comme pour ViscoRoute©2.0, j'ai incité l'équipe américaine de l'Université de Reno à mettre en ligne gratuitement leur logiciel 3D-Move sur le net ayant ainsi l'espoir que certaines avancées de la recherche financées par les différents états, soient ainsi restituées à la collectivité.

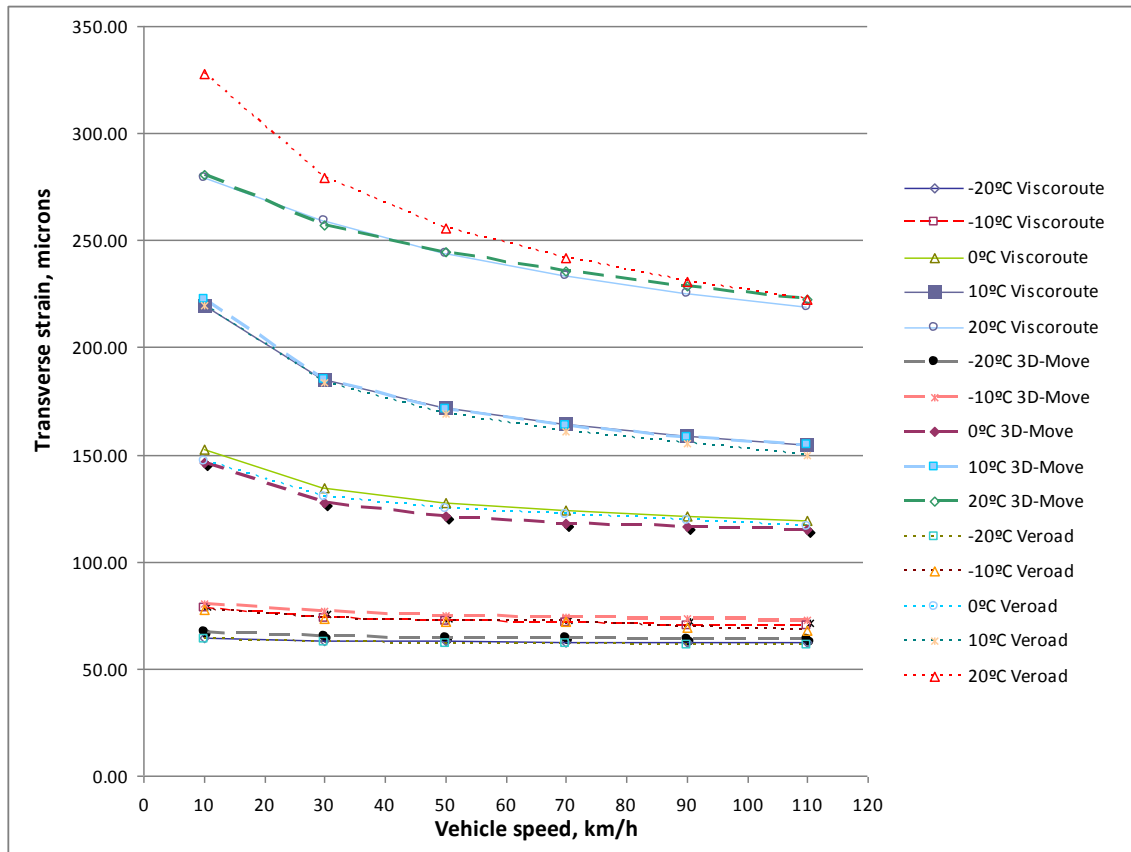


Figure 54. Comparison entre Viscoroute 2.0, 3D-Move et Veroad simulations: transversal strain peak values at the bottom of the bituminous layer ($h_1=0.1\text{mm}$) (Cf. Elie Hadj, TRB2011 on line)

4.2 Limites de l'hypothèse d'équivalence fréquence-vitesse

Dans le cadre des stages de Master2 de (Poché, 2005) et PFE (Loft, 2005) nous avons examiné plusieurs cas d'études pour valider ViscoRoute et justifier son utilité dans le cas d'analyse soit de couches minces (type couches de roulement) soit couches (épaisses type aéronautiques) pour lesquels les calculs élastiques de Burmister trouvent leur limite. Nous avons trouvé que par l'emploi de ce modèle, l'hypothèse qui consiste à considérer qu'une vitesse de charge roulant à 72km/h était équivalent à une fréquence de sollicitation du matériau à 10Hz, la méthode française de dimensionnement surestimait les valeurs des épaisseurs de couches minces et qu'à contrario elle sous dimensionnait les structures à couches épaisses. En effet par exemple, la Fig. 55 illustre que l'hypothèse d'équivalence n'est pas justifiée dans le cas d'une structure de chaussée bitumineuse épaisse. Heureusement la méthode dans son guide (SETRA-LCPC, 1994) mentionne qu'elle ne s'applique qu'aux structures à couches « pas trop épaisses ni trop fines ». Dans le cas examiné, les équivalences ont trouvé leur limite en dessous de 6cm d'épaisseur et au-dessus de 12 cm d'épaisseur.

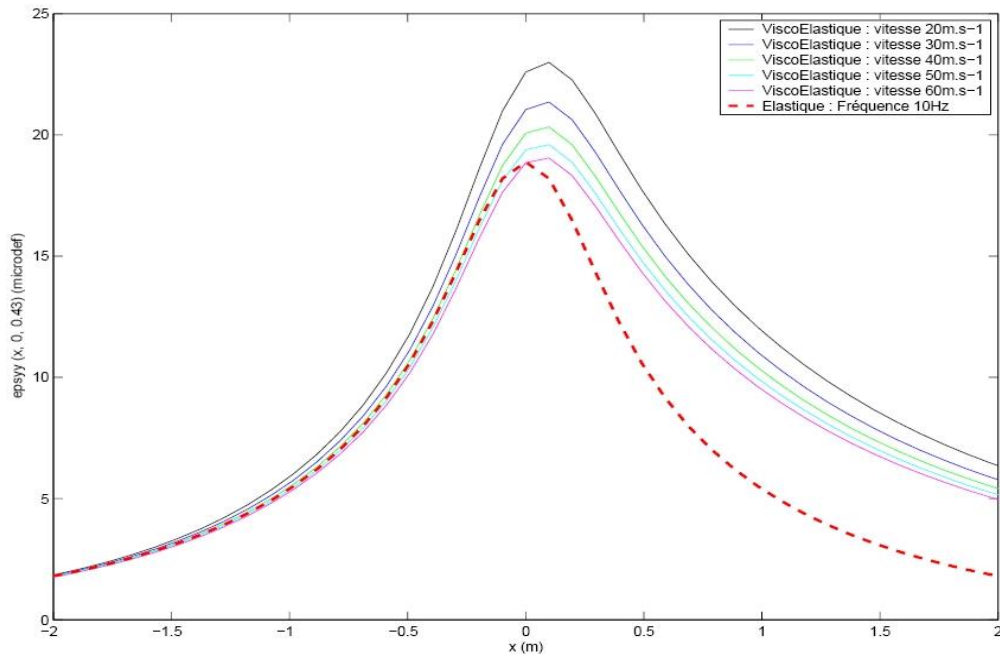


Figure 55 – Transversal strain comparison between ViscoRoute calculus (15°C, 72 to 216km/h) and a classical elastic equivalent calculus (15°C, 10Hz) - structure 5 (Poché, 2005) (Chabot et al., 2006)

4.3 Effet structure sur le calcul de la résistance au roulement

Les enjeux de cette étude concernent la consommation d'énergie du trafic routier. Notamment, une des questions sous-jacentes à cette étude était la suivante : les chaussées en enrobé bitumineux (EB) induisent-elles davantage de consommation d'énergie du trafic routier que les chaussées béton ? Dans ce cadre, l'objectif était de quantifier la puissance dissipée dans une chaussée viscoélastique de type EB lors du passage d'un véhicule ; cette puissance étant supposée nulle pour une chaussée béton dont le comportement serait élastique. Dans cette étude, uniquement l'effet structurel de la chaussée sur la consommation d'énergie (ou résistance au roulement) est analysé. L'énergie d'un véhicule est principalement utilisée pour franchir les pentes, accélérer et pour vaincre la résistance au roulement, la résistance aérodynamique et les frictions internes au véhicule. Le ratio de ces différentes composantes sur la résistance totale dépend de la vitesse. La résistance aérodynamique, par exemple, augmente avec la vitesse contrairement à la résistance au roulement. Cette dernière résulte de multiples contributions liées à des effets de structure de la chaussée, de micro et macro-texture, d'uni et du pneu. Dans la présente étude, uniquement l'effet de structure sur la résistance au roulement est étudié. Pour cela, la résistance au roulement (ou la puissance dissipée) due à la viscoélasticité des EB est quantifiée théoriquement à partir du premier principe de la thermodynamique et des distributions de pressions (supposées uniformes) au contact pneu / chaussée. Dans les premiers calculs effectués lors de ma première présentation du projet ViscoRoute aux Journées Techniques Chaussées du Palais des congrès à Nantes en 2006 [116] et le papier de (Chupin et al., 2012), nous montrons que la force caractérisant la résistance au roulement est proportionnelle à l'intégrale de contour sur l'empreinte du pneu de la dérivée normale de la déflexion à la surface de la chaussée. Le calcul de cette intégrale est effectué numériquement, une fois la déflexion de la chaussée connue. Celle-ci s'obtient à partir

d'un calcul structural de chaussée sollicitée par une charge roulante (ou plusieurs). Le logiciel ViscoRoute© 2.0 est utilisé pour déterminer cette réponse mécanique.

La démarche proposée dans (Chupin et al, 2012) a été appliquée au cas d'une structure de chaussée épaisse dont le comportement des couches d'EB est représenté par le modèle de Huet-Sayegh. Les enrobés étant thermo-susceptibles, l'influence de la température sur la puissance dissipée (\mathcal{P}_{rol}^{str}) et la résistance au roulement (F_{rol}^{str}) est étudiée. Ces résultats, pour un véhicule lourd de 40 tonnes, sont présentés sur la Fig. 56 ci-après. Ils montrent une évolution de type exponentielle de (F_{rol}^{str}) et (\mathcal{P}_{rol}^{str}) en fonction de la température. Néanmoins, même à une température uniforme de 40°C dans la chaussée, la valeur de ces deux quantités reste faible. En effet, en admettant (en accord avec des résultats de la bibliographie) que la résistance au roulement totale (F_{rol}^{str}) est approximativement égale à 1% du poids du véhicule, la force de résistance au roulement due à un effet de structure uniquement représente moins de 4% de (F_{rol}^{str}). De même, (\mathcal{P}_{rol}^{str}) à une température de 40°C équivaut à moins de 1% de la puissance moteur d'un véhicule lourd d'environ 330kW (soit environ 450 chevaux-vapeurs). Ces ordres de grandeur sont corroborés par des simulations réalisées sur d'autres structures, ce qui amène la conclusion suivante : étant données les hypothèses de calcul, il apparaît que le caractère viscoélastique des chaussées bitumineuses n'affecte pas significativement la consommation d'énergie du trafic routier, et ne permet pas d'expliquer la différence, parfois non négligeable, de résistance au roulement entre chaussées béton et bitumineuse relatée dans plusieurs études de la bibliographie.

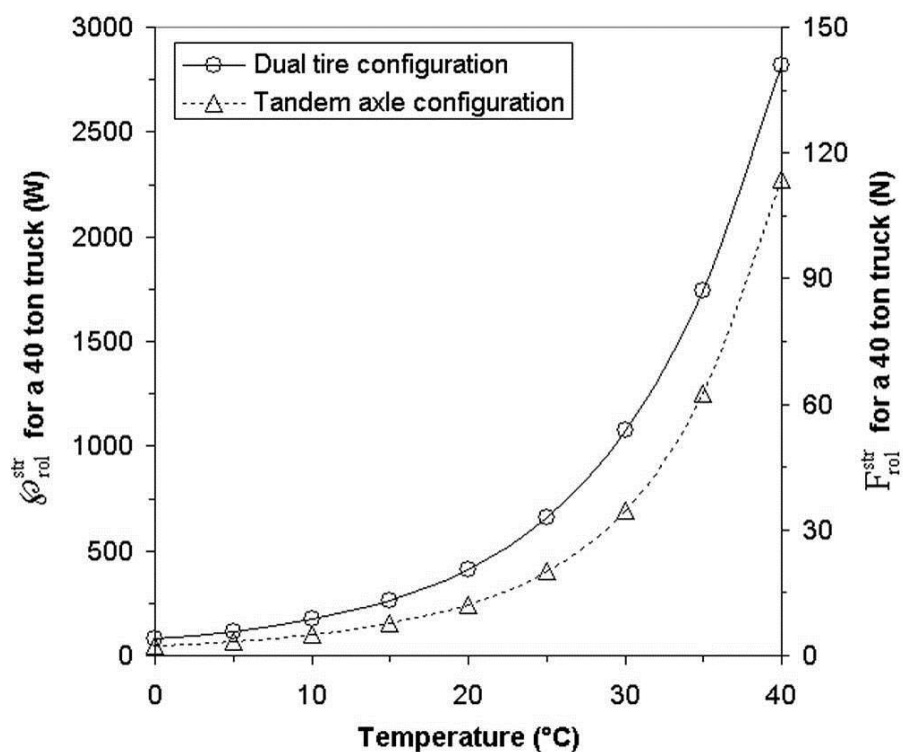


Figure 56. Evolution de la puissance dissipée et de la résistance au roulement (effet de structure) en fonction de la température pour un véhicule lourd de 40t (Chupin et al., 2012)

4.4 Analyse de différents chargements sur le haut des couches de chaussées

Dans le cadre d'un projet Predit, en coopération avec l'INRETS, l'ENS Cachan, le MTQ ministère du transport à Québec, nous avons saisi l'occasion de simuler les effets des chargements latéraux lors des phases de freinage et d'accélération du tramway de Clermont-Ferrand, sur les couches de surface des chaussées bitumineuses. Cette étude fait l'objet du papier publié par (Hammoum et *al.*, 2010). Elle avait pour but d'indiquer si les dégradations observées près des stations d'arrêt pouvaient s'expliquer.

En résumé, nous avons pu montrer et confirmer, qu'avec l'introduction d'efforts latéraux dans le calcul, les états de contraintes de cisaillement sous la charge étaient affectés (Fig. 57). D'une part, ces effets ne sont pas visibles a contrario sur les champs usuels type déformations en base de couche ou déflexions verticales, classiquement examinés dans les calculs de la méthode de dimensionnement. D'autre part le calcul élastique de Burmister contenu dans le logiciel Alizé ne peut examiner ces cas de chargements latéraux. Aussi outre le fait que ViscoRoute© permet le calcul de structures contenant des matériaux viscoélastiques, ces possibilités de calculs de chargement sont intéressantes.

D'autre part, les ingénieurs routiers ne considèrent que la géométrie de l'aire de contact pneu-chaussée comme une zone de forme elliptique ou rectangulaire. La contrainte verticale est uniformément distribuée et l'intensité de cette pression est supposée égale à la pression de gonflage du pneumatique. En réalité, la distribution des pressions sous un pneumatique est plus complexe et elle dépend à la fois de la texture du revêtement routier, de la charge roulante et des caractéristiques du pneumatique (dimensions, type et pression de gonflage).

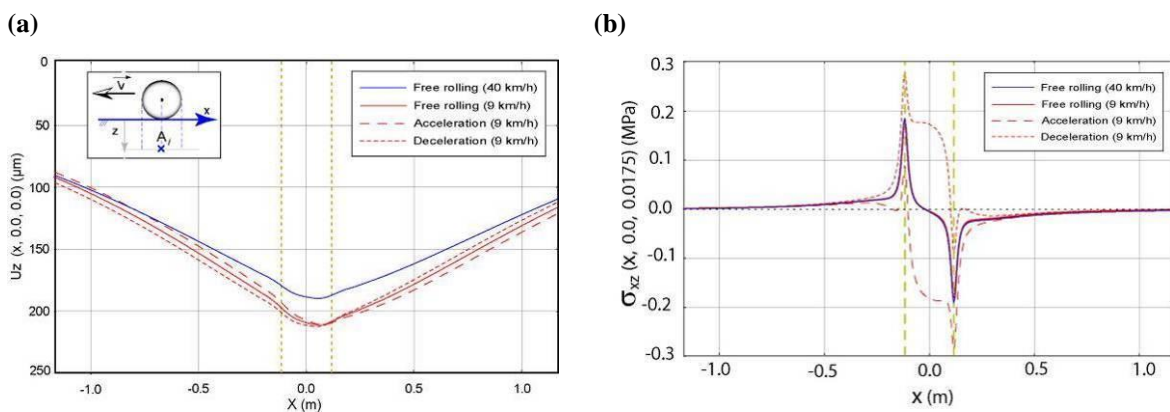


Figure 57. Transversal Evolution de la puissance dissipée et de la résistance au roulement (effet de structure)

En particulier lorsque l'on examine les champs de contraintes et de déformations dans la chaussée, les effets viscoélastiques sont non négligeables sur les champs dans certains cas près de la zone de contact comme le montre la Fig. 58 ci-dessous proche de la surface à l'arrière de la charge:

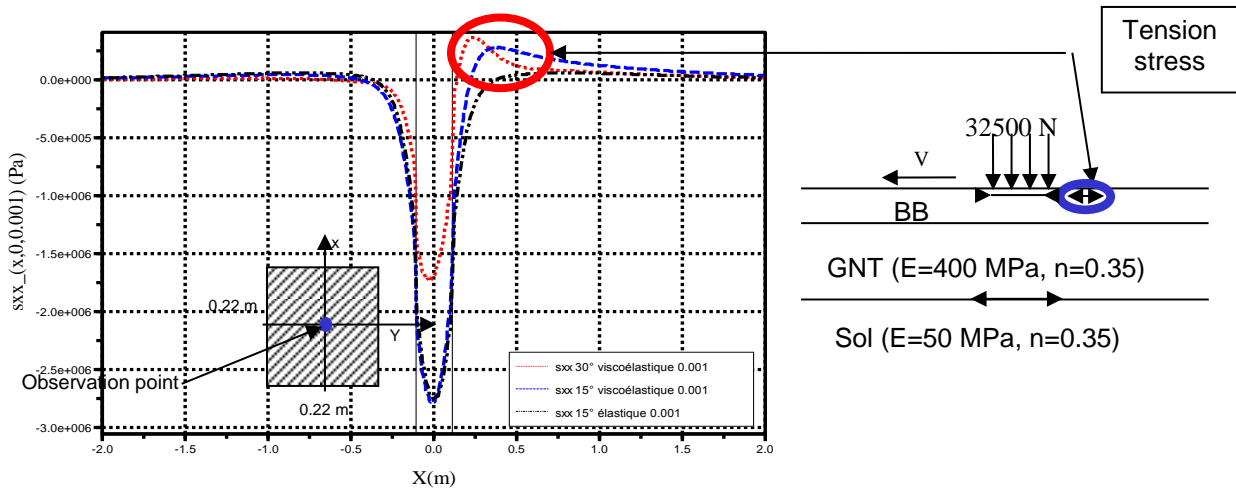


Figure 58. Résultats ViscoRoute (Senti, 2007)

Dans le cadre de l'opération Fondeø, plusieurs campagnes expérimentales de mesure des pressions locales de contact entre un pneumatique et une surface routière ont été réalisées par Smaïl Hamlat du laboratoire régional d'Angers. Une méthodologie de mesure de la distribution des pressions locales et l'aire réelle de contact entre un pneumatique et un revêtement de chaussée a été proposée (Hamlat et *al.*, 2009). Cette méthodologie est fondée sur l'analyse d'images d'une empreinte laissée par le contact statique sur un capteur photométrique nommé Fuji film qui me semble intéressante. A partir de fonction de transfert, cette méthode permet de relier le niveau de gris d'un point de contact à une valeur de pression locale exprimée en MPa (Fig. 59).

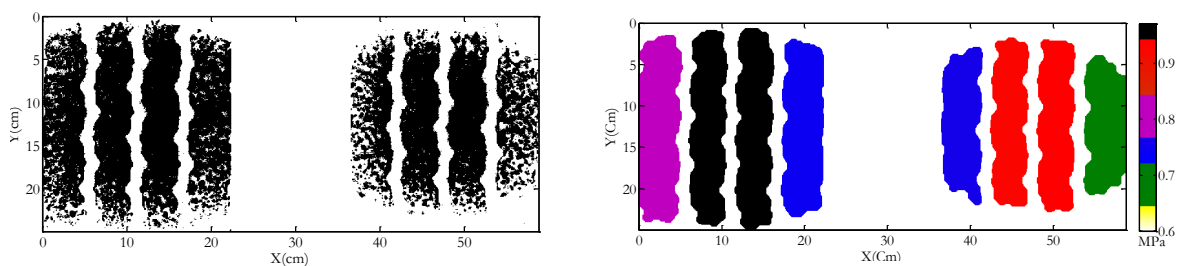


Figure 59. Exemple de caractérisation de l'état de contact pneumatique-chaussée : Evaluation de l'aire réelle de contact en comparaison avec l'approche moyenne de répartition des pressions locales (Hamlat et *al.*, 2009)

Pour une pression moyenne apparente d'un poids lourd de l'ordre de 0.9 MPa, les pressions locales peuvent atteindre 1.8 MPa soit le double. Cette distribution dépend de la nature des matériaux en contact (type du revêtement routier et du pneumatique), de la pression de gonflage et de la charge appliquée. Cette méthode de mesure est relativement simple et peu onéreuse. Elle permet d'obtenir des informations sur l'état de contact en statique avec une bonne précision. L'approche utilisée nécessite néanmoins des précautions lors de la prise d'empreintes concernant les conditions de température et d'humidité du milieu ambiant. Aussi l'emploi de d'autres équipements (type Teskan) seraient à utiliser pour améliorer ces mesures.

De plus, dans le cadre des travaux de thèse de Damien Grellet de l'Université de Laval, l'utilisation de nouvelles jauges de déformation avec fibres optiques (Doré et *al.*, 2007) sur

des essais accélérés du manège ont permis d'obtenir d'autres nombreux résultats très intéressants (Grellet et al., 2012).

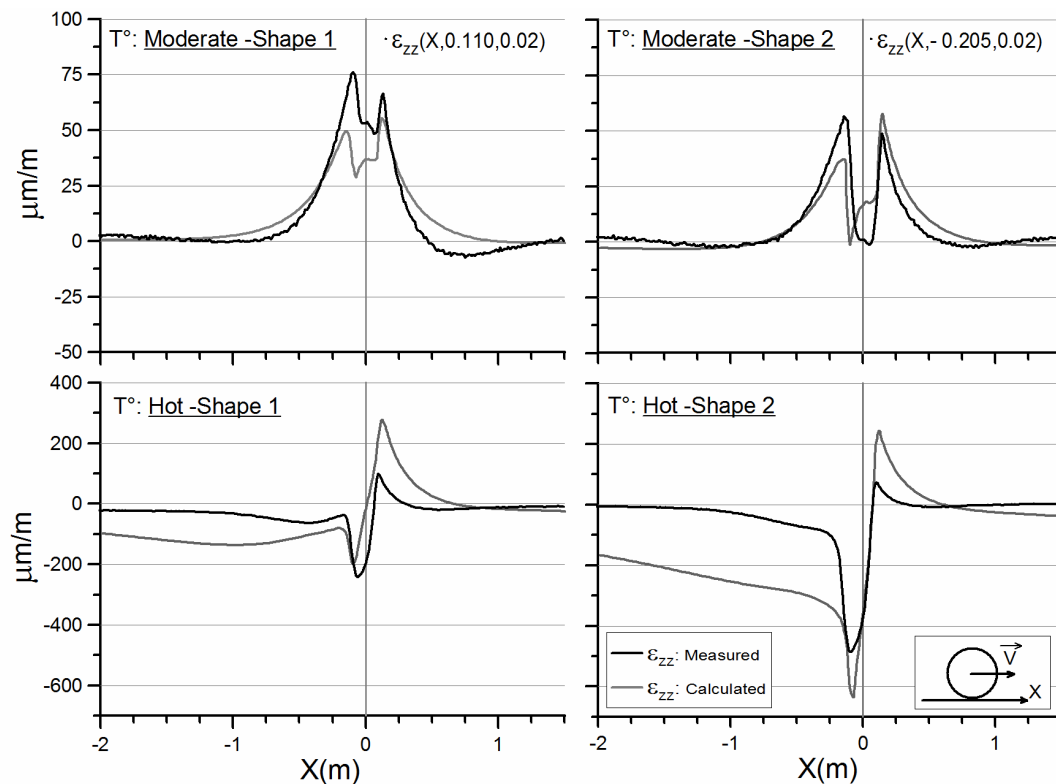


Figure 60. Vertical strain for two temperatures (structure A) at Z= 20 mm (Grellet et al., 2012)

En particulier, à l'aide de ces nouveaux outils de mesure, des informations sur les champs en haut de couche ont pu être enregistrées sans que les jauges ne soient détruites au passage des charges. Une illustration de ces mesures est donnée sur la Fig. 60, on note par ailleurs que les résultats de mesure s'auto valident avec les résultats de calcul utilisés dans ViscoRoute© dans la limites des hypothèses utilisées. Ils permettent de mesurer, en haut de couche d'une structure de chaussée, les champs de déformations verticaux. Ceux-ci mettent ainsi en exergue des effets poisson sous le pneumatique et ses différentes empreintes. Ces résultats sont prometteurs et d'autres types d'informations de part et d'autre des interfaces entre couches devraient également être apportés prochainement.

4.5 Développement de ViscoRoute pour l'étude des décollements

La dernière application concerne un développement du noyau de calcul ViscoRoute© réalisé par Chupin (Chupin et al., 2010). L'objectif de cette action était de développer un outil numérique permettant de simuler le comportement, sous charges roulantes, de structures de chaussée viscoélastiques, avec prise en compte de décollement à l'interface entre couches de matériaux. L'enjeu était de quantifier l'influence de telles interfaces sur les critères de dimensionnement des chaussées incorporant des mélanges bitumineux.

Une loi de contact de type glissement a été implémentée dans le logiciel ViscoRoute©2.0. Celle-ci permet de simuler le comportement d'une structure de chaussée viscoélastique soumise à une ou plusieurs charges roulantes, en présence de décollement à l'interface

entre les couches. A noter que des interfaces collées et décollées peuvent être considérées au sein d'une même structure et qu'une loi de contact plus générale pourrait être introduite à condition d'en connaître les paramètres.

Dans ViscoRoute©2.0, la réponse d'une structure de chaussée soumise à un chargement roulant est calculée à partir d'une solution semi-analytique. La partie analytique est obtenue par résolution du problème mécanique (incluant les effets d'inertie) dans le domaine des nombres d'onde k_1 et k_2 , après application de transformées de Fourier dans les directions longitudinale et transversale, x et y . Cette solution dépend de plusieurs constantes qui sont déterminées à partir des conditions limites du problème, ainsi que des conditions d'interface entre les couches de matériaux. Cette solution a donc été étendue afin d'intégrer du décollement d'interface. De plus, une méthode basée sur la résolution d'un unique système linéaire par couple d'harmonique (k_1 , k_2) a été développée pour la détermination des constantes mentionnées. Cette méthode permet un couplage aisé de conditions d'interface collée et décollée au sein d'une même structure. Elle regroupe dans une unique matrice les propriétés matériaux de la structure, les conditions limites et les relations d'interface. Une fois la solution calculée dans le domaine des nombres d'onde, l'intégration (ou inversion) de celle-ci permet d'obtenir le résultat recherché dans le domaine spatial. L'inversion est réalisée par transformée de Fourier rapide sur la quasi-totalité du domaine d'intégration. Néanmoins, l'existence de singularités dans l'intégrande nécessite l'utilisation d'autres méthodes d'intégration en certains points ou sous-domaines. Ce type de singularité a été analysé et plusieurs méthodes d'intégration testées afin de conserver celle qui converge le mieux vers une solution précise.

La méthode développée ainsi que l'implémentation d'interfaces glissantes dans ViscoRoute 2.0 (programmation C++) ont été validées dans le cadre d'un calcul élastique par comparaison avec le logiciel ALIZE-LCPC (Chupin et *al.*, 2009). Le travail effectué permet effectivement d'obtenir les champs mécaniques dans une structure avec interfaces glissantes avec la même précision que l'outil ALIZE-LCPC, avec en sus la possibilité de prendre en compte le comportement viscoélastique des matériaux bitumineux à travers le modèle de Huet-Sayegh. L'application de la méthode proposée à l'analyse d'une structure de chaussée mixte a également été réalisée. Elle a permis de quantifier l'influence des conditions d'interface sur la réponse globale de la structure.

La Fig. 61 ci-dessous illustre notamment les résultats obtenus en terme déflexion, de contrainte longitudinale et de déformation longitudinale; la structure étant composée de quatre couches : 2 couches viscoélastiques (entre 0 et 0.2m), une couche élastique de matériau traité au liant hydraulique (entre 0.2 et 0.4m) et une couche de fondation.

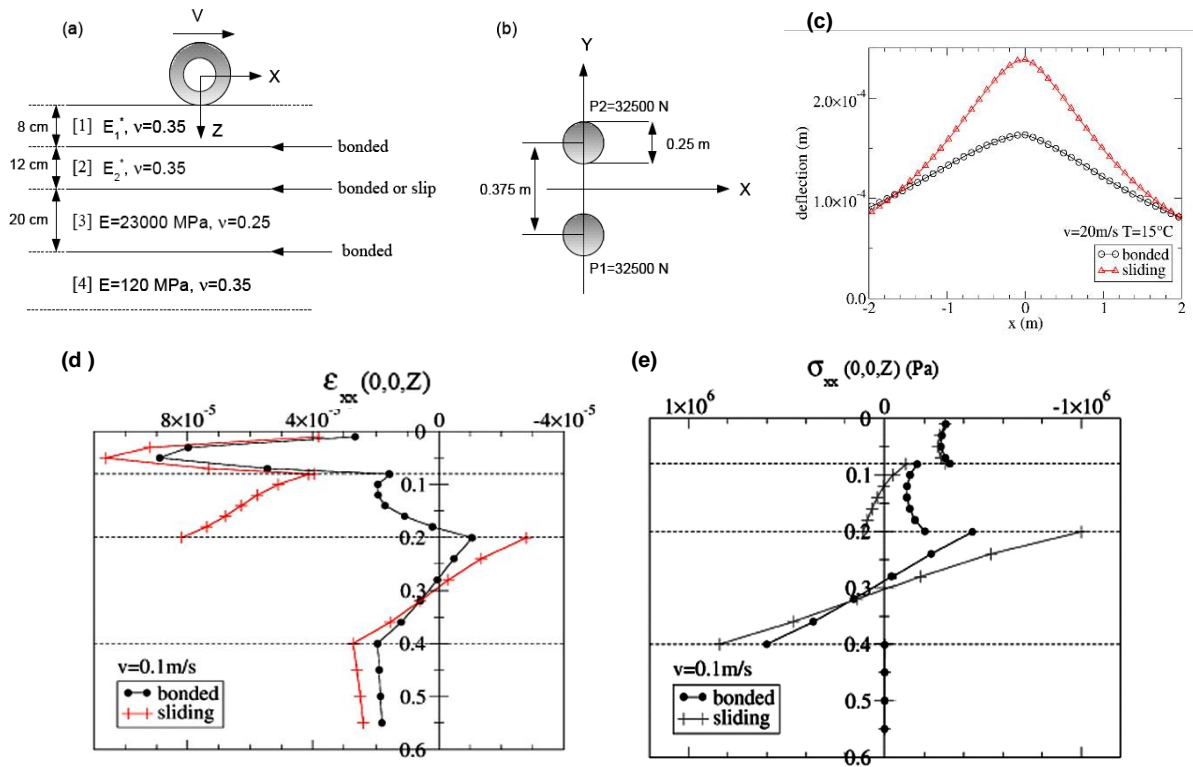


Figure 61. Comparaison des résultats pour une interface collée ou glissante (en $z=0.2\text{m}$) dans (a) une structure de chaussée mixte soumise à (b) une charge roulante: (c) Déflexions, Profils verticaux de (d) la déformation et (e) la contrainte longitudinale (Chupin et *al.*, 2009)

Finalement la Fig. 62 illustre les iso-valeurs de déflexion simulées sur le cas glissant dans deux conditions de températures. Ces valeurs ont des formes circulaires devant la charge comme dans le cas d'un calcul élastique. Par contre, on observe une « trainée » de ces valeurs derrière la charge d'autant plus importante que la température est élevée.

L'ensemble de ces résultats conforte l'idée que l'outil ViscoRoute est nécessaire pour aborder en particulier les effets endommageant (de fissuration « par le haut »?) que peuvent induire des répartitions non uniformes de chargement sur les chaussées et la compréhension des mécanismes de fatigue que peuvent déclencher les multi-chargements complexes de nouvelles silhouettes de poids lourds.

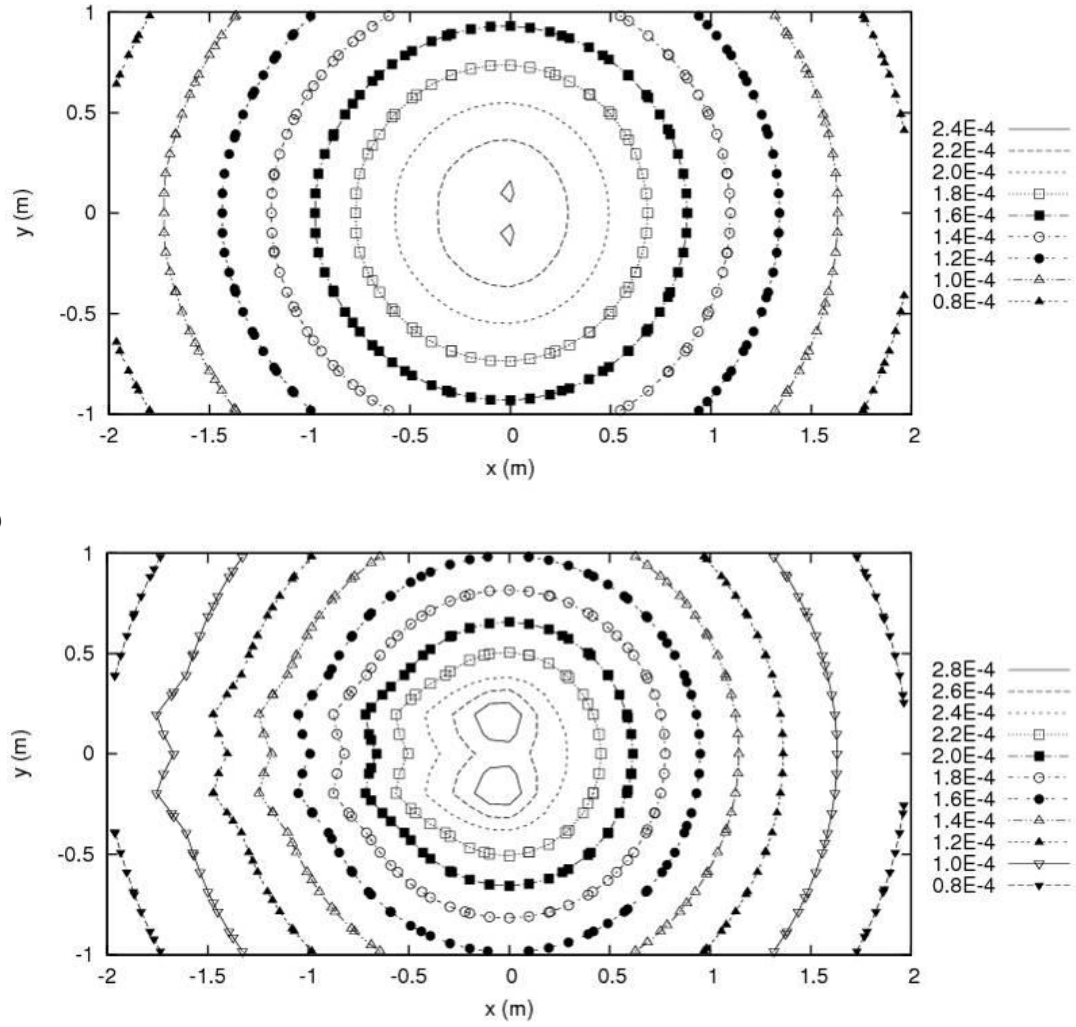


Figure 62. Isovalues of the deflection at 15°C (a) and 35°C (b) obtained in the case of sliding interfaces (Chupin *et al.*, 2009)

5. Bilan

Ainsi afin d'offrir aux ingénieurs un outil simple d'utilisation pour l'étude spécifique et paramétrique du comportement des couches de chaussées non fissurées soumises à des conditions de chargement particulières, un modèle de structure multicouches 3D semi-infinie en z et infini dans le plan a été développé. Ce modèle prend en compte les lois de comportement élastique usuel et thermo-viscoélastique de Huet-Sayegh (1963-65) et les effets des charges roulantes. Les chargements à pression de contact soit ponctuel, soit elliptique, soit rectangulaire, peuvent être à la fois verticaux ou latéraux contrairement au logiciel Alizé utilisé pour la méthode française de dimensionnement des chaussées. Plusieurs charges différentes en simultanée peuvent être introduites rendant ainsi possible en théorie l'étude de chargement à pression non uniforme (Grellet *et al.*, 2012). La méthode de résolution quasi-analytique des équations utilise un changement de variable et des techniques de transformations de Fourier. Pour différents cas de chargement, cette partie a illustré sur plusieurs travaux de recherche actuels l'intérêt de prendre en compte le comportement spécifique des matériaux bitumineux. Dans le but de comprendre les mécanismes de fissuration « par le haut » des chaussées, il ouvrira la question d'étudier plus spécifiquement ou non l'impact des états de pression non uniforme s'exerçant sur la surface de contact. De même dans un contexte d'évolution des silhouettes de poids lourds, l'outil associé à des nouveaux essais en vraie grandeur devrait améliorer la prise en compte des nouveaux chargements (récemment décidés par les politiques et réglementés) afin d'évaluer leur agressivité sur un réseau déjà affecté par le vieillissement et/ou supposé contenir de nouveaux systèmes d'ouvrage routier en réflexion dans le cadre de « route du futur ». Par contre la prise en compte de discontinuités ne peut pas être faite dans le cadre de la méthode de résolution des équations utilisée. Pour ce faire, par exemple l'outil FissuRoute présenté précédemment serait à développer en viscoélasticité

Au bilan, finalement aidée sur ce sujet d'un post-doc et de trois étudiants équivalents Master 2, ce modèle est programmé dans le logiciel de calcul ViscoRoute©2.0 déposé et mis en ligne gratuitement depuis fin 2009. Cette livraison en libre-service répond à une forte demande du milieu chaussée. Plus de trois ans après la mise en ligne de ViscoRoute, on compte aujourd'hui grossièrement plus de 300 téléchargements provenant d'étudiants (lycéens, prépa Ecole d'Ingénieur, stagiaire Master, Docteurs, Post-Doctorants), d'entreprise BTP privé, de laboratoire régionaux du ministère (MEDDE), d'Universités ou d'écoles dans 29 pays du monde. Il est nécessaire d'organiser prochainement un workshop sur le sujet pour tenter de faire un bilan plus précis de ces utilisations et d'autre part communiquer une version 2.1 du logiciel à interfaces glissantes. En parallèle à ce dépôt, outre 5 conférences avec actes, 6 présentations invitées (Albert Caquot conf. 2001, FHWA 2007, TU Delft 2009, AAPT Sacramento 2010, St Gobain Boston 2010, Michelin 2012) et diverses autres notamment dans le cadre des journées techniques routes et la Rilem, j'ai pu co-publier 4 articles de rang A (Chupin *et al.*, 2012) (Chabot *et al.*, 2010) (Chupin *et al.*, 2010) (Hammoum *et al.*, 2010) plus 1 article dans le BLPC (Duhamel *et al.*, 2005) nécessaires à son exploitation notamment dans le cadre du projet national Devin du Prédit sur l'évaluation des chargement de tramway et l'évaluation de l'impact des infrastructures sur la consommation énergétique des véhicules. A noter que cet outil est par ailleurs utilisé dans différents travaux de recherche dont les 2 thèses en cours de Grellet (Grellet *et al.*, 2012) à l'Université de Laval sur l'évaluation de nouvelles jauges de mesures in-situ et de différents profils de pneumatique et Martin (Martin *et al.*, 2013) dans l'équipe sur des problématiques ferroviaires.

Bibliographie

- Autret P., Baucheron de Boissoudy A., Marchand J.P., ALIZE III Practice, 1982. Proc. *5th int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements*, Delft, pp 174-191.
- Burmister D. M., 1943. The theory of stresses and displacements in layered systems and applications of the design of airport run ways, *Proceedings of the Highway Research Board*, **23**: 126-148.
- Chabot A, Piau JM (2001) Calcul semi-analytique d'un massif viscoélastique soumis à une charge roulante rectangulaire, 1ere conférence international Albert Caquot, Paris, France
- Chabot A., 2006, Effets de la viscoélasticité dans les structures de chaussées: projet ViscoRoute. *Journées Techniques Routes*, 1-2 février, Palais des Congrès de Nantes, France (Présentation disponible en ligne sur le site du LCPC).
- Chabot A., Chupin O., Deloffre L. and Duhamel D., (2010) ViscoRoute 2.0: a tool for the simulation of moving load effects on asphalt pavement *RMPD Special Issue on Recent Advances in Num. Simul. of Pavements*, 11 (2): 227-250.
- Chabot A., 2010b, Final Results of Fondephy – A Four years research program lead by LCPC. *International session of the AAPT conference*, March 7-10, Sacramento, US (Invitation)
- Chailleux E., ViscoAnalyse : un logiciel de traitement des données viscoélastiques des matériaux bitumineux et de calibrage du modèle de Huet-Sayegh, distribué gratuitement sur demande , 2005.
- Chailleux E., Ramond G., Such C., de la Roche C., 2006. A mathematical-based master-curve construction method applied to complex modulus of bituminous materials, *RMPD*, 7: 75-92. EATA Special Issue
- Doré G., Duplain G. and Pierre P., (2007) Monitoring mechanical response of in service pavements using retrofitted fiber optic sensors. In: Proc of the Intern. Conf. on the Advanced Charact. of Pavement and Soil Eng. Materials, Athens, Greece, pp 883-891, ISBN 978-0-415-44882-6.
- Chupin O., Chabot A., 2009. Influence of Sliding interfaces on the response of flexible pavement. Proceeding of the 6th International Conference on Maintenance and Rehabilitation of Pavements and Technological control, MAIREPAV6, July 6-10, Politecnico Di Torino, Italie. Edited by Ezio Santagata, 2:675-684, Print ISBN 978-88-8202-0293
- Chupin O., Chabot A., Piau J.-M., Duhamel D. (2010) Influence of sliding interfaces on the response of a layered viscoelastic medium under a moving load, In: *International Journal of Solids and Structures*, 47: 3435-3446.
- Cole, J., Huth, J., 1958. Stresses produced in an half-space by moving loads. *J. Appl. Mech.* 25, 433-436.
- Corte JF, Goux MT (1996) Design of pavement structures: the French technical guide. Transport Research Report, 1539:116-124
- Duhamel D., Nguyen V.H., Chabot A., Tamagny P., 2003. Modelling of multilayer viscoelastic road structures under moving loads, paper 79, *Ninth international conference on civil & structural engineering computing*, Egmond aan Zee, The Netherlands, 2-4 septembre.
- Duhamel D, Chabot A, Tamagny P, Harfouche L (2005) ViscoRoute: visco-elastic modeling for asphalt pavements. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 258-259:89-103 (<http://www.lcpc.fr/en/sources/blpc/index.php>).

- Eason, G., 1965. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force. *International Journal of Engineering Sciences* 2, 581-609.
- Elseifi, M.A., Al-Qadi, I.L. & Yoo, P.J. 2006. Viscoelastic Modeling and Field Validation of Flexible Pavements. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 132 (2): 172-178.
- Hamlat S., Hammoum F., 2009. Evaluation de la distribution des pressions locales de contact entre un pneumatique et un revêtement routier. CFM2009, 24-28 Août, Marseille.
- Hammoum F., Chailleux E., Nguyen H. N., Ehrlacher A., Piau J.M., Bodin D., 2009. Experimental and numerical analysis of crack initiation and growth in thin film of bitumen. *RMPD*, 10 (1), 39-61.
- Hammoum, F., Chabot, A., St-Laurent, D., Chollet, H., Vulturescu, B., (2010). Effects of accelerating and decelerating tramway loads on bituminous pavement. *Materials and Structures*, 43:1257–1269.
- Heck, J.V., Piau, J.M., Gramsammer, J.C., Kerzreho, J.P. & Odeon, H. 1998. Thermo-visco-elastic modelling of pavements behaviour and comparison with experimental data from LCPC test track. *Proc. of the 5th BCRA, Trondheim, Norway 6-8 July 1998*.
- Huet C., (1963) Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés. Ph.D dissertation, Université de Paris.
- Huet C (1999) Coupled size and boundary-condition effects in viscoelastic heterogeneous and composite bodies. *Mechanics of Materials*, 31:787–829.
- Hopman, P.C. 1996. VEROAD: A Viscoelastic Multilayer Computer Program. *Transportation Research Record*. 1539: 72-80.
- Hornych, P., Kerzreho, J.P., Salasca, S., 2002. Prediction of the behaviour of a flexible pavement using finite element analysis with non-linear elastic and visco-elastic models. In Proc. ISAP 2002, Copenhagen.
- Grellet D., Doré G., Kerzrého J.-P., Piau J. M., Chabot A., Hornych P. 2012. Experimental and theoretical investigation of three dimensional strain occurring near the surface in asphalt concrete layers. Proceedings of the *7th Rilem International Conference on Cracking in Pavements*, June 20-22, 2012, Delft, The Netherlands. RILEM Bookseries, 4: 1017-1027, DOI: 10.1007/978-94-007-4566-7_97, Print ISBN: 978-94-007-4565-0.
- Hornych P., Kerzreho J.P., Salasca S., 2002. Prediction of the behaviour of a flexible pavement using finite element analysis with non-linear elastic and viscoelastic models, ISAP, Copenhagen, August.
- Martin A., Chupin O., Piau J.M., Hicher P.Y., 2013. Geometrical disorders in ballasted High Speed Rail: modeling approach and parametric study. *9th International Conference on the Bearing Capacity of Roads, Railways and Airfields*, 25-27 June, Trondheim, Norway.
- Nguyen V.H., 2002. *Comportement dynamique de structures non linéaires soumises à des charges mobiles*, thèse de doctorat ès sciences, ENPC, Champs sur Marne.
- Sayegh G., 1965. Contribution à l'étude des propriétés viscoélastiques des bitumes purs et des bétons bitumineux. Ph.D dissertation, Faculté Sciences de Paris
- Siddharthan, R.V., Yao, J., & Sebaaly, P.E. 1998. Pavement strain from moving dynamic 3D load distribution. *Journal of Transportation Engineering*. 124(6): 557-566.
- Sneddon, I.N. 1952. The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 2: 57-62.
- SETRA-LCPC, (1994 en français) 1997. French Design Manual For Pavement Structures, Ed. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées and Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes
- Tamagny P., Wendling L., Piau J.M., 2004. A new explanation of pavement cracking from top to bottom : the visco-elasticity of asphalt materials. Proceedings of the *Fifth*

- International RILEM Conference Cracking in Pavements*, Limoges, France, May 5-8, 425-432.
- Vila B. , 2001. Modélisation numérique des structures de chaussées souples en viscoélasticité et première modélisation des chaussées rigides - Pavement experimental program Airbus à Toulouse-Blagnac. Rapport de stage de fin de 2ème année d'ingénieur à l'INSA de Toulouse.
- Wang H., Al-Qadi I.L., 2010. Near-Surface Pavement Failure Under Multiaxial Stress State in Thick Asphalt Pavement. *Journal of the Transportation Research Board*, Volume 2154, pp 91-99.
- Nilsson, R.N., Hopman, P.C., Isacsson, U., 2002. Influence of different rheological models on predicted pavement responses in flexible pavements. *Road Materials and Pavement Design* 3 (2), 117-147.
- Nguyen, V.H., 2002. Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles. ENPC (France), Ph.D. thesis.
- Sayegh, G., 1965. Contribution à l'étude des propriétés viscoélastiques des bitumes purs et des bétons bitumineux. Faculté des Sciences de Paris (France), Ph.D. thesis.
- Siddharthan, R.V., Yao, J., Sebaaly, P.E., 1998. Pavement strain from moving dynamic 3D load distribution. *Journal of Transportation Engineering* 124 (6) 557-566.
- Siddharthan, R.V., Krishnamenon, N., Sebaaly, P.E., 2000. Finite-Layer approach to pavement response evaluation. *Transportation Research Record* 1709, 43-49.
- Sneddon, I.N., 1952. The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 2, 57-62.