



HAL
open science

L'écoulement de von Kármán comme paradigme de la physique statistique hors de l'équilibre

Brice Saint-Michel

► **To cite this version:**

Brice Saint-Michel. L'écoulement de von Kármán comme paradigme de la physique statistique hors de l'équilibre. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT: . tel-00911544

HAL Id: tel-00911544

<https://theses.hal.science/tel-00911544>

Submitted on 29 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT,
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, SORBONNE UNIVERSITÉS

Spécialité : *Physique*

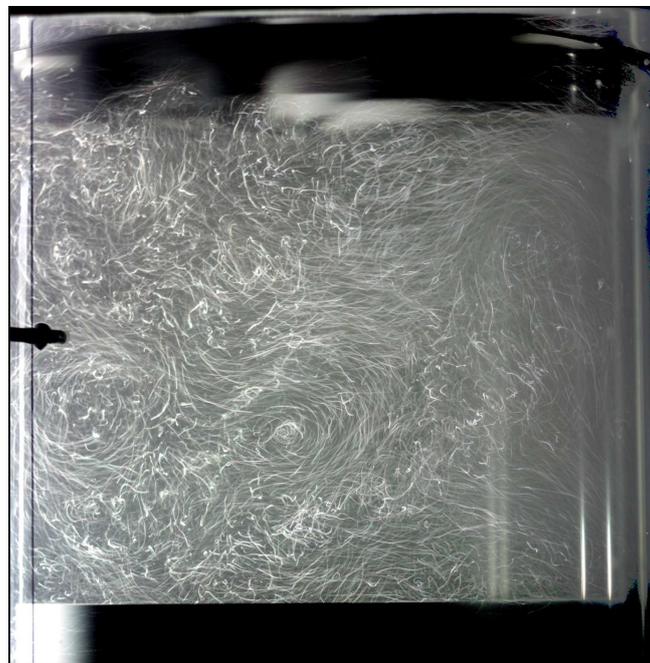
École doctorale 389, « *La physique de la particule à la matière condensée* »

présentée par

Brice SAINT-MICHEL

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE



L'écoulement de von Kármán comme paradigme de la physique statistique hors de l'équilibre



Thèse soutenue publiquement le **4 octobre 2013** devant le jury composé de :

M.	Éric	BERTIN	Ch. Rech. CNRS	(Rapporteur)
M.	François	DAVIAUD	Dir. Rech. CEA	(Directeur de thèse)
Mme	Bérengère	DUBRULLE	Dir. Rech. CNRS	(Invitée)
M.	Patrice	LE GAL	Dir. Rech. CNRS	(Rapporteur)
M.	Paul	MANNEVILLE	Dir. Rech. CNRS	(Examinateur)
M.	Jean-François	PINTON	Dir. Rech. CNRS	(Examinateur)
M.	Dominique	SALIN	Prof. UPMC	(Président du Jury)

Remerciements

Trois années se sont écoulées depuis le début de cette thèse, où j’ai eu la chance de pouvoir effectuer des travaux de recherche au sein du SPEC, un sympathique laboratoire situé à l’Orme des Merisiers. Outre le cadre de travail particulièrement agréable du lieu, je tiens à remercier ceux qui, de près ou de loin, ont fait vivre le laboratoire et ont permis à cette thèse de se dérouler dans des conditions idéales.

Je tiens tout d’abord à remercier les examinateurs et les rapporteurs du jury de thèse : Éric Bertin, Patrice le Gal, Paul Manneville, Jean-François Pinton et Dominique Salin. Un petit miracle, réalisé *a priori* sans le concours de Sainte-Rita, a permis à tous ces membres de trouver une date commune de disponible dans leurs emplois du temps respectifs. Je les remercie de ne pas avoir tenu rigueur de mes ennuis intempestifs d’ordinateur durant la soutenance et d’avoir posé des questions pointues sans toutefois être trop piquantes.

Je tiens ensuite à remercier Éric Vincent, pour m’avoir (à l’époque) accueilli au SPEC, le secrétariat — composé de Corinne Kopec-Coelho et Nathalie Royer — pour avoir supporté mes multiples intrusions dans leurs activités quotidiennes à des horaires aléatoires dans la semaine, et Olivier Dauchot, chef (également à l’époque) du GIT, pour m’avoir accueilli chez les GITans, un groupe particulièrement instable et turbulent. La turbulence a, bien sûr, du bon, et mon intégration auprès des chercheurs permanents, non permanents et des techniciens a été rapide et efficace. Je tiens également à remercier les chercheurs du groupe, désormais SPHYNX, sous la direction de François Ladieu. Je remercie ce groupe pour les multiples, trépidantes et parfois interminables discussions sur les Inconnus, l’actualité, et le reste du monde. Cela s’applique à toute heure au bureau avec Davide Faranda ; le midi, avec Sébastien Aumaître, Hervé Bercegol, Jean Boisson, Marco Bonetti, Corentin Herbert, François Ladieu, Fabio Leoni, et Gilbert Zalczer ; dans le RER (que je ne remercierai certainement pas dans ce paragraphe), avec Pablo Gutiérrez, Sandrine Ngo et Sébastien Léonard ; ou enfin en voiture (notamment dans les bouchons) avec Corentin Coulais et Simon Thalabard. Ces remerciements s’adressent également aux collaborateurs grenoblois de l’expérience SHREK, notamment ceux du SBT, les infatigables Bernard Rousset, Michel Bon-Mardion et Pantxo Diribarne, qui ont accepté de m’accueillir pour une campagne d’expériences, et qui m’ont fourni une bonne partie des figures du chapitre 7. Dans tous les cas, les débats furent vifs et les calembours indigestes.

Sans les connaissances LabVIEW[®] de Cécile Wiertel, nous en serions probablement réduits à faire tourner les expériences à la manivelle et à effectuer les acquisitions au voltmètre : elle a su naturellement faire évoluer son programme grâce à de nombreux entraînements et à une hausse de niveau assez régulière. Sans Vincent Padilla, l’expérience ne tournerait tout simplement pas : chargé *de facto* de la conception mécanique et des passages périlleux du nombre ahurissant de démontages que nous avons effectués en trois ans, il a accepté cette tâche sans (trop de) mauvaise volonté, et sa capacité à diagnostiquer les problèmes mécaniques, ou, à défaut, à appliquer une généreuse dose de joint silicone, font du montage expérimental ce qu’il est aujourd’hui.

Je tiens également à remercier mes prédécesseurs sur l’expérience de von Kármán : Romain Monchaux, Florent Ravelet, et Louis Marié, dont la qualité des ouvrages pousse à toujours plus d’exigence. Une pensée pour Louis dont l’enthousiasme sur l’expérience, dix ans après, est aussi précieux que stimulant. Une petite pensée également pour Guillaume Mancel que j’ai encadré, et qui a effectué un bon nombre de mesures de ce manuscrit de thèse. Son passage a été fortement corrélé à une période riche en résultats : sa présence a probablement démaraboutisé l’expérience. Également, je remercie Pierre-Philippe Cortet (que je n’ai pas du tout encadré) pour les mesures de PIV que j’ai reprises dans ce manuscrit.

Je tiens, bien sûr, à remercier mes co-encadrants. Tout d’abord, Éric Herbert — qui m’a

familiarisé avec l'expérience — pour son franc-parler, sa disponibilité, son sens de l'observation et sa ténacité (voire son obstination) lors du début de cette thèse. Cette obstination m'a permis de conserver une motivation presque intacte, notamment après huit mois de modifications et de signaux expérimentaux incompréhensibles. Bérengère Dubrulle pour sa franchise, son enthousiasme communicatif et sa foultitude d'idées théoriques qui ont été autant de pistes pour explorer et tenter de comprendre les résultats de l'expérience. Enfin, François Daviaud, chef officiel, pour son optimisme et son exigence, me poussant à aller plus loin quand cela s'avérait nécessaire, et à faire confiance aux données, même lorsque celles-ci avaient « une tête bizarre, mais si, regarde ». Sa disponibilité s'est faite plus irrégulière vers la fin de la thèse du fait de ses désormais importantes responsabilités, mais il a toujours su trouver du temps (quoique je ne sache pas vraiment quand) pour relire et commenter mes gribouillis.

Dernièrement, je tiens à remercier plus personnellement ma famille, mes amis, mes ex-colocataires, et enfin Virginie pour leur aide dans cette aventure de trois ans (plus quelques arrêts de jeux), qui ont tout simplement rendu possible la genèse du manuscrit et la bonne tenue de la soutenance.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	iii
1 Introduction	1
1.1 Qu'est-ce que la turbulence ?	1
1.1.1 Historique	1
1.1.2 Définition	4
1.1.3 Problèmes ouverts liés à la turbulence	8
1.1.4 L'écoulement de von Kármán : un écoulement « classique »	14
1.1.5 Conclusion	17
1.2 La physique statistique	17
1.2.1 Pourquoi la physique statistique ?	17
1.2.2 Les transitions de phase	18
1.2.3 Turbulence et physique statistique hors-équilibre	20
1.3 Conclusion	21
2 L'expérience VK2	23
2.1 Le montage mécanique	23
2.1.1 Les cuves	24
2.1.2 Les turbines	25
2.1.3 Les moteurs, les variateurs, les commandes	26
2.1.4 La transmission	27
2.1.5 Les châssis	28
2.1.6 Étanchéité en rotation, boîtes à roulement	28
2.1.7 Les radiateurs	29
2.1.8 L'expérience VKÉnergie	29
2.2 Mesures	30
2.2.1 Mesures analogiques et régulations	30
2.2.2 Les mesures de vitesse du fluide	32
2.3 Quelles grandeurs pour décrire l'écoulement ?	38
2.3.1 Nombre de Reynolds	38
2.3.2 Symétries	39
2.3.3 Calibrations	41
2.4 Conclusion	44
3 Transitions de phase	45
3.1 Introduction aux ensembles statistiques	45
3.1.1 L'exemple des sphères dures	45
3.1.2 Première hypothèse et ensemble microcanonique	46
3.1.3 La température	47
3.1.4 L'ensemble canonique	47
3.2 L'inéquivalence d'ensemble	49

3.2.1	L'équivalence d'ensemble	49
3.2.2	Systèmes non additifs et inéquivalence d'ensemble	52
3.2.3	D'autres inéquivalences d'ensemble	55
3.2.4	Conclusion	57
3.3	Les transitions de phase par l'exemple : le modèle d'Ising	57
3.3.1	Introduction : Hamiltonien d'Ising	57
3.3.2	Grandeurs d'intérêt	59
3.3.3	Le problème des dimensions	60
3.3.4	Exposants critiques	64
3.3.5	Lois d'échelle en taille finie	65
3.3.6	Modèle de champ moyen pour $d = 4$	67
3.3.7	Conclusion	69
4	Physique statistique hors-équilibre	71
4.1	Processus stochastiques	71
4.1.1	Systèmes définis par une équation maîtresse	71
4.1.2	L'équation de Fokker-Planck	73
4.1.3	Une formulation équivalente : l'équation de Langevin	73
4.1.4	L'équation de Langevin	75
4.2	Application : Modélisation numérique du modèle d'Ising	76
4.3	Application : temps de sortie de Kramers d'un puits de potentiel	77
4.3.1	Modèle	77
4.3.2	Approximation de puits profond	78
4.4	Relations de fluctuations-dissipation	79
4.4.1	Réponse linéaire	79
4.4.2	Réponse à un créneau inversé	80
5	Caractérisation de l'écoulement stationnaire : commande en vitesse	83
5.1	La transition à la turbulence	83
5.1.1	Écoulement initial	83
5.1.2	Premières instabilités	85
5.1.3	La transition vers la turbulence	86
5.1.4	Restauration statistique des symétries	86
5.2	Le cycle d'hystérésis du sens $(-)$	90
5.2.1	La brisure statistique des symétries	92
5.2.2	Transitions entre états turbulents : le rôle de θ	94
5.2.3	Caractéristiques du cycle d'hystérésis à haut nombre de Reynolds	97
5.2.4	Une transition sous-critique ou supercritique ?	98
5.3	La transition continue du sens $(+)$	100
5.3.1	Introduction	100
5.3.2	L'écoulement du sens $(+)$ à haut nombre de Reynolds : étude en θ	101
5.3.3	Lien avec le moment cinétique I	103
5.3.4	Une transition de phase ?	104
5.3.5	Fluctuations, multistabilité, et modes de Goldstone	110
5.4	Turbulence non conventionnelle : turbines fractales	117
5.4.1	Présentation	117
5.4.2	Comparaison des résultats	119
5.5	Conclusion	122

6	La commande en couple	125
6.1	Commande en couple : un cycle sans hystérésis	126
6.1.1	Spécificités de la commande en couple	126
6.1.2	Comportement sur les branches (b_1) , (b_2) et (s)	127
6.1.3	Au-delà des branches stationnaires	128
6.1.4	Conclusion	142
6.2	Étude de quelques grandeurs globales et leur évolution avec γ	144
6.2.1	Fraction de temps total passé dans les états	144
6.2.2	Vitesse moyenne des turbines	144
6.2.3	Étude des corrélations des signaux des vitesses	145
6.2.4	Fréquences naturelles du système, oscillations	147
6.3	Étude de la dynamique entre états	148
6.3.1	Introduction	148
6.3.2	Transitions vers (\tilde{b}) et depuis (\tilde{b})	149
6.3.3	Étude des temps de résidence	152
6.4	Discussion	154
6.4.1	Des sensibilités moyennes négatives	154
6.4.2	Un cas d'inéquivalence d'ensemble ?	160
6.5	Conclusion	162
7	L'expérience SHREK	165
7.1	Quelques éléments de physique des superfluides	165
7.1.1	Un fluide inviscide	165
7.1.2	Modèle à deux fluides	166
7.1.3	Superfluides en rotation, vorticité et dissipation	167
7.2	Spécificités du montage SHREK	168
7.2.1	Réfrigération et isolation thermique	168
7.2.2	Construction de l'expérience	169
7.2.3	Les mesures de l'expérience SHREK	171
7.3	Analyse des couples et de la dissipation	173
7.3.1	La campagne de mesures	173
7.3.2	Présence d'�tats bifurqués	173
7.3.3	Calibrations et couples adimensionnés K_p	174
7.3.4	Analyse des couples en fonction du nombre de Reynolds	175
7.3.5	Cycles effectués à $\theta \neq 0$	176
7.4	Conclusion	181
	Conclusion, Perspectives	183
	Conclusion	183
	Perspectives	185
A	éléments de probabilité	187
A.1	Mesure de probabilité	187
A.1.1	Introduction aux probabilités	187
A.1.2	Indépendance	187
A.2	Variables aléatoires	188
A.2.1	Généralités	188
A.2.2	Variables aléatoires continues	188
A.2.3	Corrélation de variables aléatoires	189
A.3	Les histogrammes	190
A.3.1	Les �chantillons	190
A.3.2	Définition des histogrammes	190

A.3.3	Intérêt des noyaux	190
B	La théorie ergodique	193
B.1	L'espace des phases	193
B.2	Moyennes et ergodicité	194
B.2.1	Les moyennes	194
B.2.2	L'ergodicité	195
B.3	Turbulence et ergodicité	197
C	Hystérésis du modèle d'Ising	199
D	Éléments de mécanique statistique	203
D.1	Réécriture des équations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques	203
D.1.1	Relations initiales, notations	203
D.1.2	Réécriture des grandeurs E_c, H, I, \mathcal{F} et \mathcal{D}	204
D.2	Modes du noyau de l'écoulement de von Kármán	206
D.2.1	Expression du potentiel A^{VK} de l'écoulement	206
D.2.2	Projection sur les modes de l'écoulement	207
D.2.3	Mode du noyau pour un forçage en volume	207
D.2.4	Brisure de symétrie spontanée	208
D.2.5	Émergence des modes de Goldstone	209
	Bibliographie	210

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Avant-propos

Ce manuscrit de thèse va tenter de décrire le comportement physique d'un écoulement turbulent appelé *écoulement tourbillonnaire de von Kármán*. Bien que possédant un grand nombre de traits communs avec d'autres écoulements turbulents, le parti pris ici consiste à étudier l'écoulement produit sous l'angle — et avec les outils — de la physique statistique. L'introduction de ce manuscrit de thèse a donc la double fonction de présenter les problèmes liés à la turbulence et de brosser un tableau rapide des principales découvertes de la physique statistique à l'équilibre et hors de l'équilibre (ces résultats feront ensuite l'objet d'un chapitre plus détaillé) que nous pourrons appliquer à notre écoulement. Nous essaierons de plus de justifier la pertinence d'une telle approche en mettant en lumière certains traits communs que peuvent posséder ces deux branches de la physique. Le reste de ce manuscrit de thèse va décrire et tâcher d'expliquer les principaux résultats obtenus par cette approche nouvelle.

1.1 Qu'est-ce que la turbulence ?

1.1.1 Historique

La notion de turbulence est essentiellement liée à une forme de désordre : le grec ancien rapporte déjà l'usage de $\tauύρβη$ (túrbé), désignant le désordre, la confusion et le tumulte [1]. Cette notion s'étend d'ailleurs en latin, empruntant au grec le mot *turba* désignant cette fois-ci à la fois le tumulte, le désordre, mais aussi la foule, la multitude d'individus qui crée un tel tumulte [2]. La littérature classique atteste de même l'existence du nom commun *turbo* qui désigne le tourbillonnement, les toupies et plus généralement les mouvements circulaires. Le mot *turbulentia* remonte quant à lui au II^e siècle chez Tertullien, un des pères de l'église chrétienne, et désigne alors des troubles et des perturbations. La première utilisation du mot *turbulence* dans un contexte d'étude des fluides date du XV^e siècle, dans les travaux de Léonard de Vinci. Dans ses études pionnières sur le mouvement des fluides, ses observations, bien que qualitatives, saisissaient pourtant une grande partie des concepts fondamentaux de ce qui deviendra une des branches principales de l'étude des fluides. L'utilisation du mot *turbolenza* est donc particulièrement bien choisie pour insister sur la *multitude* des structures *tourbillonnaires* qui sont caractéristiques des écoulements que ce dernier a observés, et ses dessins (voir la figure 1.1) semblent bien montrer à quel point les interactions entre les échelles ont un rôle fondamental dans leur existence.

Il faut ensuite attendre quelques siècles afin de préciser plus finement le concept de fluide, notamment grâce à Newton, qui a laissé son nom à la définition des fluides les plus simples. Ces fluides sont décrits par une grandeur essentielle en turbulence qui est la *viscosité*. Pour des fluides *newtoniens*, imposer un gradient de vitesse selon une coordonnée z au sein d'un écou-

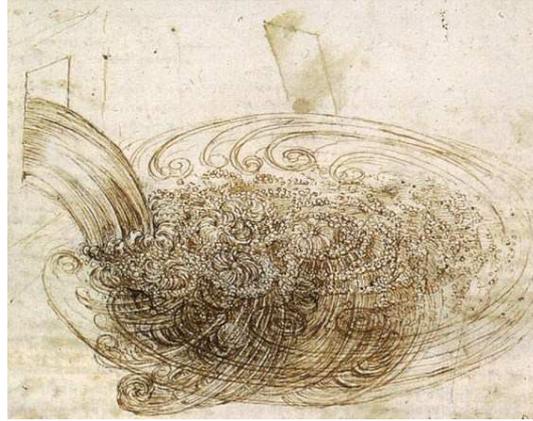


FIGURE 1.1 – Illustration des études de Léonard de Vinci sur la turbulence. On y voit clairement des grands tourbillons dans toutes les directions qui s’enroulent sur eux-mêmes pour former des plus petits tourbillons, en même temps qu’un grand nombre de petits tourbillons formant de l’écume. L’image provient de Wikimedia Commons.

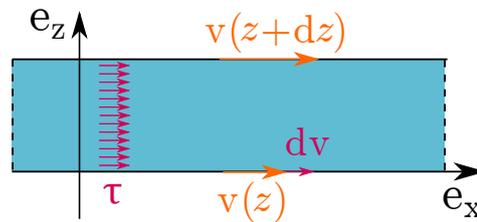


FIGURE 1.2 – Comportement newtonien d’un fluide : une contrainte de cisaillement τ (ici, dirigée selon \mathbf{e}_x et appliquée sur des surfaces de normale \mathbf{e}_z), imposée entre des altitudes z et $z + dz$, va induire une différence de vitesse dv , proportionnelle à τ , entre z et $z + dz$. Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs définit la viscosité du fluide.

lement dirigé selon une autre direction x ne peut pas s’effectuer sans l’application d’une force \mathbf{F} . Cette force, dirigée selon x , agit sur le fluide sous la forme de contraintes de *cisaillement* $\tau = \|\mathbf{F}\|/S$, où S est l’élément de surface sur lequel s’applique la force \mathbf{F} (cette configuration est rappelée sur le schéma de la figure 1.2). Pour un fluide newtonien, τ et le gradient de vitesse sont proportionnels :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dz} \quad (1.1)$$

Le coefficient μ , qui définit la *viscosité dynamique*, représente donc la résistance du fluide à un tel gradient de vitesse. Notre thèse s’inscrit principalement dans le cadre de tels fluides pour des raisons de simplicité : la physique des fluides non-newtoniens est devenue une discipline en soi avec des problèmes bien spécifiques : nous verrons par la suite que certains comportements de ces derniers possèdent bien des similarités avec notre écoulement.

Tout n’est cependant pas simple pour les fluides newtoniens : dès le XIX^e siècle, les problèmes de similarité d’écoulements viennent s’immiscer dans l’étude des fluides, notamment sous l’impulsion de Georges Stokes [3]. Ce dernier pose la question suivante : étant donné le mouvement d’un pendule soumis à des frottements fluides, comment construire un pendule deux (ou trois, ou plusieurs) fois plus grand tout en conservant une *similarité dynamique* ? Sa réponse préfigure alors l’utilisation du *nombre de Reynolds* qui va définir le rapport entre l’inertie du fluide et sa viscosité :

$$\text{Re} = \frac{\rho Lv}{\mu} = \frac{Lv}{\nu} \quad (1.2)$$

$\rho v^2/L$ représente l’inertie (ou densité d’énergie cinétique) du fluide, qui est en fait comparée

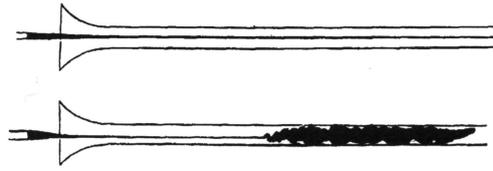


FIGURE 1.3 – L’expérience d’Osborne Reynolds dans son article de 1883 : un filet de colorant est injecté au sein d’un écoulement dans une conduite circulaire. En haut, l’expérience à basse vitesse laisse le filet presque invariant le long de l’écoulement. En bas, l’expérience à plus haute vitesse voit le filet de colorant se mélanger brusquement au reste du fluide, en un point assez éloigné de la zone d’injection, phénomène caractéristique de la turbulence. L’illustration provient de Wikimedia Commons.

à $\mu v/L$ qui représente la contrainte τ caractéristique nécessaire pour mettre en mouvement le fluide à la vitesse v sur une couche d’épaisseur L à cause de la viscosité. Le nombre de Reynolds fait apparaître une nouvelle quantité ν , la *viscosité cinématique* d’un fluide qui traduit la manière dont le champ de vitesse est diffusé dans l’écoulement. C’est toutefois Osborne Reynolds, alors professeur d’ingénierie à l’université Victoria de Manchester, qui introduit en 1883 ce nombre sans dimension comme paramètre de contrôle de la transition vers un écoulement qu’il appelle *sinueux* (voir figure 1.3) : en injectant un peu de colorant dans son écoulement, ce dernier est capable de voir la trajectoire prise par les particules fluides colorées entraînées par l’écoulement. Dans le premier cas, en régime *laminaire*, c’est à dire quand le fluide s’écoule en couches parallèles, le jet de colorant conserve sa forme et forme une belle ligne droite caractéristique. Pour des vitesses plus élevées, Reynolds constate que le jet dévie brusquement en un point en aval de la zone d’injection, pour ensuite se mélanger très rapidement au reste de l’écoulement, formant une « brume » caractéristique. Ce dernier détermine expérimentalement la valeur du nombre — qui porte désormais son nom — où la transition se produit. Cette transition est aujourd’hui identifiée à une transition vers la turbulence.

Enfin, l’image d’Épinal à laquelle tout ouvrage se doit de faire référence pour décrire la structure des écoulements turbulents est la *cascade de Richardson* en référence à un poème de ce dernier, datant de 1922, et figurant sur un de ses multiples ouvrages consacrés à la turbulence atmosphérique [4] :

“
 Big whirls have little whirls that feed on their velocity,
 and little whirls have lesser whirls and so on to viscosity.”

Ces vers nous indiquent l’image suivante : un écoulement turbulent possède des grands tourbillons, qui sont généralement liés au forçage qui a mis l’écoulement en mouvement. À cause du gradient de vitesse causé par ces tourbillons, une instabilité survient, qui génère de nouveaux tourbillons plus petits. Ces plus petits tourbillons, à leur tour, vont devenir instables et créer des tourbillons encore plus petits. À toute petite échelle, les tourbillons vont créer des gradients de vitesse très importants. L’équation 1.1 vient alors limiter ces gradients grâce à la viscosité, en indiquant que pour exister, de tels gradients de vitesse devraient s’accompagner de très fortes contraintes à l’intérieur du fluide. La viscosité intervient donc à une échelle très petite par rapport aux plus grands tourbillons de l’écoulement. C’est cette apparition de tourbillons en *cascade* que décrit le poème de Richardson (voir figure 1.4). Cette image est très semblable à celle que semblait fournir Léonard de Vinci dans ses dessins. Néanmoins, celle-ci est aujourd’hui considérée par les spécialistes comme incomplète : la turbulence n’est en effet pas constituée uniquement de tourbillons, mais comporte une plus grande diversité

de *structures* reliés par une hiérarchie d'échelles.

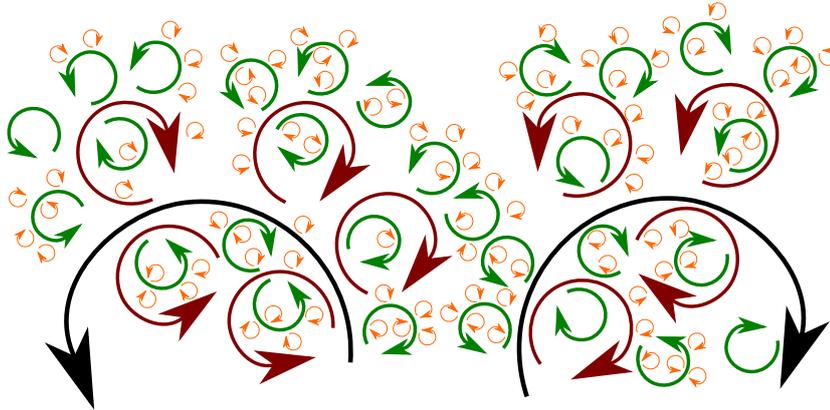


FIGURE 1.4 – Illustration du concept de cascade de Richardson : les grands tourbillons (noirs) de l'écoulement génèrent par une instabilité quelconque des plus petits tourbillons (rouges) qui à leur tour vont générer des plus petits tourbillons (verts et oranges). Les plus petits tourbillons sont freinés à cause de la viscosité.

1.1.2 Définition

1.1.2.1 Les équations de Navier-Stokes

Expression de l'équation Quittons désormais le pur rappel historique, et intéressons-nous aux équations de *Navier-Stokes* qui gouvernent le comportement des fluides usuels (newtoniens). Ces équations exactes, formulées dans la limite des milieux *continus*, quantifient l'évolution à la fois du champ des vitesses \mathbf{v} , et de pression p d'un fluide newtonien de viscosité cinématique ν et de masse volumique ρ mis en mouvement par un champ de forces \mathbf{f} agissant dans le volume de l'écoulement :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

Que signifient ces équations ? La première de celles-ci (1.3) effectue le bilan de quantité de mouvement d'une particule fluide d'un point de vue *eulérien*, le champ des vitesses du fluide, $\mathbf{v}(x, y, z)$, ne suivant pas les particules fluides dans leur mouvement. Ce champ de vitesse peut être alors transporté par l'écoulement lui-même, c'est le terme d'*advection* (ce qui correspond au second terme du membre de gauche), subir l'effet des forces de pression (premier terme du membre de droite), des forces de viscosité (second terme à droite) ou des forces supplémentaires agissant en volume (dernier terme du membre de droite). La deuxième équation (1.4) traduit quant à elle l'incompressibilité des fluides newtoniens. Elle exprime le fait qu'une particule de fluide dont nous suivons le mouvement conserve une masse volumique ρ constante.

Les petites échelles Le nombre de Reynolds intervient dans l'équation 1.3 comme le rapport de l'amplitude du terme de transport — aussi appelé terme d'*advection* — et de l'amplitude du terme lié à la dissipation. Pour un champ de vitesses possédant une vitesse caractéristique v , s'écoulant autour (ou à l'intérieur) d'un objet de taille caractéristique L , nous avons bien :

$$\frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\nu \Delta \mathbf{v}} \sim \frac{v^2 L^{-1}}{\nu L^{-2}} = \frac{vL}{\nu} = \text{Re}. \quad (1.5)$$

La question essentielle alors posée par les physiciens est la suivante : si nous considérons un écoulement quelconque possédant un nombre de Reynolds caractéristique donné, à quelle échelle minimale faut-il examiner le fluide afin d'en saisir toutes les propriétés ? Intuitivement, cette longueur va décroître quand le nombre de Reynolds augmente. Nous allons préciser ce résultat en nous inspirant un peu de l'excellente introduction fournie par la thèse de Louis Marié [5]. Repartons de l'équation 1.3, et tentons de définir une échelle δ sur laquelle l'accélération liée aux efforts visqueux permet d'homogénéiser le champ de vitesses \mathbf{v} . Il faut donc comparer cette accélération à celle que subit la particule fluide lorsqu'elle suit l'écoulement. Supposons un écoulement à une vitesse \mathbf{v} qui consiste à contourner un obstacle quelconque de taille caractéristique L . L'accélération typique subie par une particule du fluide sera donc v/T , où $T = L/v$ est le temps dont dispose la particule pour changer sa vitesse. Quand les deux accélérations sont du même ordre, nous obtenons :

$$\nu \frac{v}{\delta^2} \sim \frac{v^2}{L} \quad (1.6)$$

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (1.7)$$

Pour des écoulements pleinement turbulents, le nombre de Reynolds peut atteindre facilement 10^6 . L'écoulement aura donc la possibilité de générer des structures plus de 1000 fois plus petites que l'échelle L de la « géométrie » de l'écoulement. Ces petites échelles ne font probablement pas peur aux purs théoriciens de la mécanique des fluides, mais nous verrons par la suite que cela pose des gros problèmes à la communauté des numériciens qui se doivent de décrire chacune des structures de taille δ lors de leurs simulations.

La vortacité Nous pouvons également tenter de décrire l'évolution des structures tourbillonnaires de l'écoulement : à cette fin, il est possible de définir la *vortacité* \mathbf{w} définie comme le rotationnel du champ de vitesses :

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (1.8)$$

Les variations temporelles du champ \mathbf{w} sont alors obtenues en prenant le rotationnel de l'équation 1.3 :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{w} + \nabla \times \mathbf{f} \quad (1.9)$$

L'équation obtenue ressemble à l'équation de Navier-Stokes, à une différence près, le terme dit d'*étirement de la vortacité* :

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.10)$$

Ce terme indique que le champ de vortacité peut être déformé à cause des gradients de vitesse \mathbf{v} qui existent au sein du fluide. En particulier, pour une coordonnée i , les termes du type

$$w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (1.11)$$

expriment la contraction ou l'étirement de la vortacité, qui est une des composantes essentielles de la turbulence dans les écoulements à trois dimensions.

1.1.2.2 Définition générale

Avant d'explicitier les principaux résultats théoriques concernant la turbulence, nous allons en donner une définition moderne et relativement compacte. Celle-ci n'est bien évidemment pas unique, mais les traits principaux des écoulements turbulents que nous allons esquisser font aujourd'hui consensus dans la plupart des ouvrages de référence [6, 7]. Les écoulements turbulents possèdent donc les propriétés suivantes :

1. la première d'entre elles est l'existence d'un grand nombre de *structures spatiales* (des feuillets, et des tourbillons) désorganisés dans l'espace. Il existe toutefois une certaine *organisation*, une structure dans la distribution de taille de ces structures.
2. la seconde concerne le *mélange* : comme il est possible de le voir dans l'expérience de Reynolds (figure 1.3), un colorant (ou tout autre traceur) est mélangé de manière très efficace dans un écoulement turbulent, bien plus que par simple diffusion moléculaire, qui effectue un tel mélange en régime laminaire.
3. la dernière est l'*imprévisibilité* : à l'instar des systèmes chaotiques [8, 9], que nous décrirons dans la suite de cette introduction, les écoulements turbulents sont extrêmement sensibles aux conditions initiales. Quelle que soit la différence ϵ si petite soit-elle entre deux conditions initiales d'un même problème de turbulence, les écoulements instantanés produits deviendront rapidement très différents.

Le premier point fait l'objet de la prochaine section : notre étude s'est pour l'instant penchée sur δ , qui donne une limite sur la petitesse des structures tourbillonnaires observées, mais ne renseigne pas sur la manière dont les tourbillons de tailles supérieures interagissent dans l'écoulement.

1.1.2.3 La turbulence selon la théorie K41

L'un des résultats majeurs concernant la turbulence donne justement des informations sur le transfert des structures entre les échelles. Nous le devons à A.N. Kolmogorov, qui s'est intéressé (entre autres) aux problèmes liés à la turbulence [10]. Ce résultat s'appuie sur plusieurs hypothèses :

1. la première hypothèse concerne l'homogénéité et l'isotropie des écoulements turbulents. La formulation de Kolmogorov postule de fait que de tels écoulements peuvent être décomposés selon leur valeur moyenne \mathbf{V} déterministe et des fluctuations liées à la turbulence $\mathbf{v}'(t)$.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{r})}_{\text{déterministe}} + \underbrace{\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)}_{\text{fluctuations}} \quad (1.12)$$

L'hypothèse d'homogénéité s'écrit de la manière suivante : si nous examinons la différence de vitesse entre un point situé à $\mathbf{r} + \mathbf{l}$ et un autre point situé à \mathbf{r} , nous pouvons postuler que celle-ci ne dépend statistiquement que de \mathbf{l} . En d'autres termes, cet *incrément de vitesse* s'écrit :

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \underset{\text{stat.}}{=} \delta\mathbf{v}(\mathbf{l}) \quad (1.13)$$

Nous utiliserons par la suite les chevrons $\langle \cdot \rangle$ pour exprimer la valeur moyenne statistique d'une grandeur quelconque (voir l'annexe A pour plus de détails).

2. La deuxième hypothèse suppose que pour une certaine gamme d'échelles où le forçage \mathbf{f} et le terme dissipatif $\nu\Delta\mathbf{v}$ sont négligés, l'écoulement est autosimilaire par une transformation de paramètres λ et a définie par :

$$t, \mathbf{r}, \mathbf{v} \mapsto \lambda^{1-a}t, \lambda\mathbf{r}, \lambda^a\mathbf{v} \quad (1.14)$$

Dans un tel cas, l'incrément de vitesse $\delta\mathbf{v}(\mathbf{l})$ possède une propriété supplémentaire de similarité :

$$\delta\mathbf{v}(\lambda\mathbf{l}) = \lambda^a\delta\mathbf{v}(\mathbf{l}) \quad (1.15)$$

3. La dernière hypothèse indique l'existence d'une grandeur notée ϵ définissant un taux de dissipation massique, qui tend vers une limite *finie* lorsque la viscosité de l'écoulement ν tend vers 0. Dans la gamme d'échelles (dite *inertielle*) où ni le forçage ni la dissipation ne jouent un rôle, toute la physique de l'écoulement est déterminée par \mathbf{l} et ϵ .

Pour des raisons évidentes de symétrie, il est difficile d'étudier simplement l'incrément $\delta\mathbf{v}$ de la vitesse : celui-ci est nulle en moyenne. C'est pourquoi les études privilégient l'usage des *fonctions de structure* notées $S_p(\mathbf{l})$ et définies de la manière suivante :

$$S_p(\mathbf{l}) = \langle (v_{\parallel}(\mathbf{l}) - v_{\parallel}(\mathbf{0}))^p \rangle \quad (1.16)$$

Le symbole \parallel indique ici que la composante de la vitesse considérée est parallèle au vecteur \mathbf{l} choisi. Nous supposons par la suite que l'orientation de \mathbf{l} n'influe pas sur la valeur de S_p : c'est ici l'expression de l'hypothèse d'*isotropie*. Si nous supposons l'hypothèse 3 et que nous utilisons l'analyse dimensionnelle pour exprimer une telle fonction de structure, nous voyons immédiatement qu'à tous les ordres p , nous devons avoir :

$$S_p(l) \propto l^{p/3} \epsilon^{p/3} \quad (1.17)$$

Une dérivation exacte de cette relation a été effectuée à l'ordre $p = 3$, explicitant la constante C_3 de proportionnalité entre les deux termes. Il est toutefois intéressant de considérer le cas de l'ordre $p = 2$. La transformée de Fourier de $S_2(l)$ n'est autre que la densité spectrale de puissance de la vitesse longitudinale :

$$\mathcal{TF}[S_2(l)] = E(k) = \int_0^{\infty} S_2(l) \cos(kl) dl \quad (1.18)$$

$$\propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.19)$$

La deuxième équation (1.19), obtenue par analyse dimensionnelle, a été vérifiée expérimentalement dans un canal côtier [11] et dans la soufflerie de Modane [12], donnant une preuve expérimentale éclatante de l'intuition de Kolmogorov.

Nous pouvons enfin voir que toutes ces hypothèses permettent l'introduction de nouvelles grandeurs pertinentes microscopiques de l'écoulement turbulent, nommées d'après Kolmogorov, et uniquement déterminées par les valeurs de ν et ϵ : Ces grandeurs sont des *bornes* de la

Grandeur	Symbole	Définition	Ordre de grandeur
Longueur	η	$(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$ m
Temps	τ_{η}	$(\nu/\epsilon)^{1/2}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$ s
Vitesse	u_{η}	$(\nu\epsilon)^{1/4}$	$5.56 \cdot 10^{-2}$ m · s ⁻¹

TABLE 1.1 – Les différentes échelles microscopiques dites de Kolmogorov décrivant un écoulement turbulent. Ces grandeurs permettent de « résoudre » parfaitement les petites échelles de l'écoulement. Les ordres de grandeur sont donnés pour un écoulement turbulent dans un cylindre fermé entraîné par deux turbines, pour une fréquence de rotation de 20 Hz [13].

caractérisation de l'écoulement : en effet, si nous arrivons à décrire celui-ci avec une résolution spatiale plus fine que η tout en explicitant la dynamique des fluctuations de vitesse jusqu'à la fréquence τ_{η}^{-1} , nous aurons *a priori* une image *complète* (autrement dit en détail), de l'écoulement turbulent. Nous pouvons donc voir l'écoulement comme une collection de boîtes de taille η , chacune d'entre elles étant libre de fluctuer avec une certaine liberté, où les écarts typiques de vitesses entre deux boîtes voisines sont données par la valeur de u_{η} . Pour un écoulement à taux de dissipation η et à volume \mathcal{V} fixé, nous voyons que le nombre N de ces boîtes évolue comme :

$$N \propto \frac{\mathcal{V}}{\eta^3} \propto \nu^{-9/4} \propto \text{Re}^{9/4} \quad (1.20)$$

Ce grand nombre de boîtes pose un sérieux problème pour les numériciens qui étudient la turbulence, notamment dans le domaine de la *DNS*, simulation numérique directe : le temps

de calcul nécessaire aux simulations, proportionnel au nombre de boîtes N , devient très vite déraisonnable lorsque le nombre de Reynolds est élevé. Nous verrons dans la suite de cette introduction qu'il est possible, et avantageux, de mettre à profit ce très grand nombre de degrés de liberté par l'intermédiaire d'outils statistiques.

1.1.2.4 Les écarts à la théorie : l'intermittence

Il est tentant de généraliser les résultats obtenus par Kolmogorov à l'ordre deux et trois en l'appliquant à tous les ordres p , en postulant les lois de la turbulence universelles. Cela permet de définir les exposants ζ_p de la dépendance en l des fonctions de structure S_p :

$$S_p(l) = C_p \epsilon^{p/3} l^{\zeta_p}. \quad (1.21)$$

Ce résultat provient essentiellement de la relation d'auto-similarité fournie par la deuxième hypothèse de la section 1.1.2.3. Pour des raisons pratiques de quantité de données à échantillonner, les mesures des moments d'ordre supérieur à quatre de l'incrément de vitesse n'ont pu être effectuées qu'à partir des années 1970-1980 [14, 12]. Ceux-ci tendent à infirmer l'image purement « fractale » de la turbulence : en effet, les ζ_p obtenus sont, pour les ordres supérieurs à 3, significativement inférieurs à ceux prédits par la loi de Kolmogorov.

Il est possible d'effectuer le lien entre cette déviation des exposants ζ_p et l'*intermittence* des fluctuations d'un écoulement turbulent. Dès 1949, Batchelor et Townsend se sont intéressés à la répartition spatiale de la densité d'énergie cinétique [15], pour s'apercevoir que les contributions correspondant à la gamme inertielle (aux petites longueurs, et aux hautes fréquences) étaient réparties de manière très inhomogène entre des zones *actives* et des zones *tranquilles*, avec une tendance à l'accentuation lorsque l'étude se portait sur des fréquences de plus en plus élevées, et des longueurs de plus en plus faibles.

Cette observation est contradictoire avec l'hypothèse de similarité de Kolmogorov : en effectuant un « zoom » défini par la transformation de l'hypothèse 2 de la section 1.1.2.3, nous effectuerons à l'instar de Batchelor et Townsend une étude à plus petite échelle et à plus haute fréquence de l'écoulement, qui montrera un caractère soit calme (correspondant à une zone tranquille), soit très agité (correspondant à une zone active), la séparation entre les états calmes et agités étant d'autant plus forte que le « zoom » est important. Bien entendu, aux toutes petites échelles, les processus dissipatifs vont prendre le pas sur ces comportements intermittents, lissant l'intermittence.

Un des modèles les plus simples pour décrire cette intermittence consiste à reprendre la cascade de Richardson et de lui ajouter des « lacunes » : au lieu de remplir tout l'espace physique, les petits tourbillons créés par les plus grands ne sont pas présents partout dans l'écoulement et laissent des vides correspondant aux zones tranquilles. L'aspect de l'écoulement aux petites échelles sera alors soit très agité, soit tranquille, en fonction de tels *vides* laissés par tous les tourbillons de taille supérieure. Ce modèle, appelé modèle β , semble du fait de sa simplicité ne pas correspondre tout à fait aux données expérimentales les plus précises [7]. D'autres modèles plus complexes semblent aujourd'hui mieux « coller » aux données expérimentales.

1.1.3 Problèmes ouverts liés à la turbulence

Bien que la communauté des scientifiques travaillant sur la turbulence soit active depuis près d'un siècle, et malgré les progrès importants (décrits dans la section précédente) effectués sur la compréhension des écoulements turbulents, certains traits de tels écoulements « résistent » aux investigations des chercheurs. Nous allons décrire deux d'entre eux, auxquels nous nous retrouverons confrontés dans la suite de ce manuscrit.

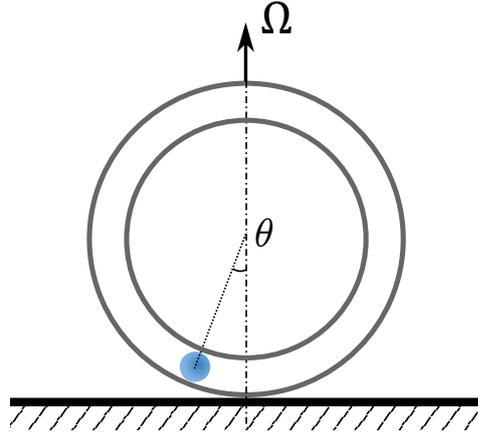


FIGURE 1.5 – Un exemple d'instabilité : une bille est coincée dans un anneau vertical, posé sur un support horizontal mis en rotation à une vitesse Ω . Ce système possède un point d'équilibre pour les faibles vitesses de rotation, défini par son angle par rapport à la verticale, $\theta = 0$. Pour des vitesses de rotation plus élevées, cet état d'équilibre devient instable, au profit de deux nouveaux points $\pm\theta_0 \neq 0$ symétriques par rapport à l'axe vertical. On dit qu'un tel système fait l'objet d'une bifurcation.

1.1.3.1 Chaos et turbulence

Dynamique non-linéaire et bifurcations Dans notre définition, la troisième caractéristique des écoulements turbulents mentionne le caractère imprévisible du champ de vitesses. Cette difficulté à *prédire* à partir de conditions initiales données est bien connue des météorologistes, qui, malgré les progrès considérables des performances des modèles de prévision de la météorologie et de la puissance des ordinateurs permettant de les appliquer, ne peuvent que difficilement prévoir le temps qu'il fera au delà d'un horizon de quatre jours (au grand dam des piétons surpris par une averse impromptue). D'où provient cette difficulté à prévoir comment évoluera un écoulement turbulent donné ? Celle-ci trouve son origine dans le terme non-linéaire d'*advection* de l'équation 1.3 de Navier-Stokes, qui est quadratique en la vitesse du fluide \mathbf{v} :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.22)$$

Il est alors possible de voir notre nombre de Reynolds, Re , comme un paramètre définissant le rapport des termes non-linéaires et linéaires dans un écoulement donné.

Des systèmes bien plus simples possèdent une dynamique gouvernée par des non-linéarités : prenons l'exemple d'une bille confinée dans un anneau vertical posé sur une table horizontale tournante. Un tel système est décrit par un angle θ par rapport à la verticale, et une vitesse de rotation Ω (voir figure 1.5). Pour des faibles angles θ , il est même possible de déterminer exactement l'équation d'évolution du système, qui s'exprime, en unités adimensionnées :

$$\ddot{\theta} = \epsilon\theta - \theta^3 \quad (1.23)$$

Nous pouvons tenter de déterminer les états d'équilibre du système en fonction du rapport entre le terme non-linéaire et le terme linéaire, qui est ici le *paramètre de contrôle* ϵ . Pour des valeurs négatives d' ϵ , il n'existe qu'un point d'équilibre, l'état à $\theta = 0$. Cet état d'équilibre est stable : une petite perturbation autour de celui-ci va décliner progressivement, jusqu'à ramener le système à son point d'équilibre originel. Pour des valeurs de $\epsilon \leq 0$, l'équation 1.23 possède trois solutions : $(0, \sqrt{\epsilon}, -\sqrt{\epsilon})$. Une analyse de stabilité montre toutefois que le premier point d'équilibre est désormais instable. Ce changement de stabilité en fonction d'un paramètre de contrôle est appelé *bifurcation*. Plusieurs types de bifurcations existent : certaines d'entre elles génèrent un nombre discret de nouveaux points d'équilibre (comme celle que nous venons

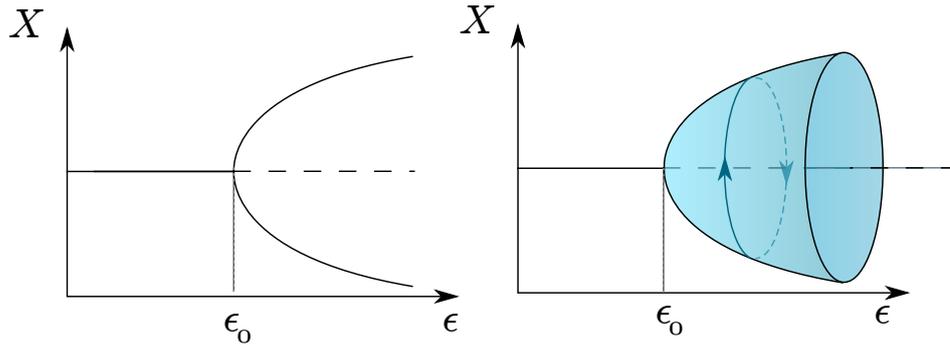


FIGURE 1.6 – Schéma représentatif de bifurcations. En deçà d’une certaine valeur du paramètre de contrôle ϵ , les états d’équilibre stable (traits pleins) restent inchangés. Pour une valeur critique ϵ_0 , l’état d’équilibre se déstabilise (tiretés larges), et de nouveaux équilibres stables — ou des cycles limites — apparaissent. À gauche, bifurcation « fourche », comme celle observée pour l’instabilité de la bille dans l’anneau tournant (figure 1.5). À droite, bifurcation de Hopf, où l’état stable perd sa stabilité au profit d’un cycle (flèches).

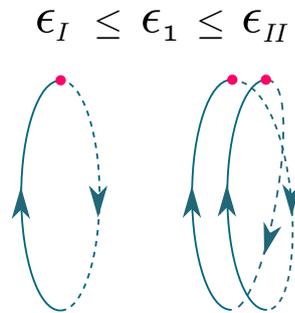


FIGURE 1.7 – Un doublement de période : pour une valeur $\epsilon_I < \epsilon_1$ du paramètre de contrôle ϵ , le cycle limite est stable. Pour une valeur $\epsilon_{II} \geq \epsilon_1$, le cycle initial n’est plus stable et forme un nouveau cycle limite, deux fois plus long à parcourir. Les points d’intersection du cycle avec un plan donné (en magenta) sont des sections de Poincaré.

d’aborder, la *bifurcation fourche*), mais certaines bifurcations poussent les systèmes dans des *cycles* dans lesquels le système, hors de l’équilibre, est confiné. Toutefois, ce cycle ne perd pas son caractère attracteur : le système ramènera naturellement vers le cycle une configuration qui s’en serait un peu éloignée (à cause, par exemple, d’une fluctuation). Ces bifurcations sont récapitulées sur la figure 1.6.

Émergence du chaos : l’exemple du doublement de période Reprenons le cas d’une bifurcation menant à un cycle limite. Ce cycle limite sera lui-même stable jusqu’à une nouvelle valeur ϵ_1 du paramètre de contrôle. Lorsque cette valeur dépasse ϵ_1 , il est courant d’observer un *doublement de période* : le cycle présente alors « deux boucles » (comme illustré figure 1.7). Une manière pratique d’observer ce doublement de période consiste à regarder l’intersection de la trajectoire avec un plan quelconque fixé : l’intersection d’un cycle et du plan (dans un sens donné) est constituée d’un seul point, tandis que le cycle dont la période est double possèdera deux points d’intersection correspondant à chaque boucle effectuée. La notion de stabilité d’une telle trajectoire devient alors plus complexe, mais nous pouvons toujours comprendre qu’un système légèrement perturbé depuis un cycle limite, même de période double, reviendra *grosso modo* vers le cycle en question. Cependant, il est tout à fait envisageable de reproduire un tel processus jusqu’à ce que les cycles requièrent un très grand nombre de « boucles » nécessaires pour effectuer un cycle complet. Certains systèmes possèdent, pour des valeurs de

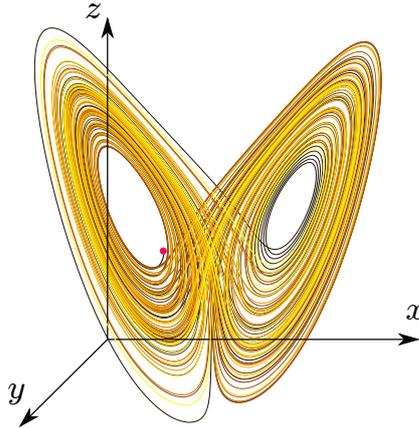


FIGURE 1.8 – Trajectoire d'un système dynamique (dit de Lorenz) affichant une trajectoire chaotique : le cycle limite parcouru est infiniment long, les boucles empruntées étant extrêmement proches les unes des autres. Celles-ci semblent ensuite se séparer de manière imprévisible. L'image provient de Wikimedia Commons.

paramètres de contrôle bien précis, des cycles de longueur infinie. De tels cycles présentent localement des boucles infiniment rapprochées, qui semblent ensuite se séparer de manière erratique (comme sur la figure 1.8). On dit que de tels systèmes présentent des *attracteurs étranges*. D'autres scénarios menant au chaos sont possibles : nous n'en avons évoqué qu'un seul par souci de simplicité. Le lecteur plus intéressé par ces aspects pourra se référer à des ouvrages de référence à ce sujet [9, 16]. Le chaos atteint par ces différentes routes possède néanmoins des propriétés robustes, dont une d'entre elles est la *sensibilité aux conditions initiales*.

Chaos, sensibilité, et turbulence Revenons à notre problème de la stabilité du cycle limite : nous imaginons par la pensée une configuration qui se serait légèrement écartée du cycle limite stable, pour insister particulièrement sur le fait que le système ramenait naturellement une telle configuration vers le cycle limite. Bien que ce soit toujours le cas ici, cela pose désormais un important problème : du fait du rapprochement infini (presque *dense*) des boucles de la trajectoire limite, une infime perturbation va nécessairement pousser le système vers une autre portion de l'attracteur, qui s'écarte significativement de la trajectoire non perturbée au delà d'un *horizon* de prévisibilité. Il est possible de voir cette séparation sur la figure 1.9.

De nombreux écoulements initialement laminaires font l'objet d'une succession de bifurcations (dont certaines d'entre elles sont des bifurcations de Hopf) lorsque le nombre de Reynolds augmente, les plus connus d'entre eux étant l'écoulement de Taylor-Couette [17, 18] et la convection de Rayleigh-Bénard [19], mais il semble que soit également le cas pour l'écoulement de von Kármán [20] (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5 consacré à la commande en vitesse). Pour ces systèmes, l'augmentation du nombre de Reynolds entraîne des bifurcations, les premières étant observées aux alentours de $Re = 100$. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, ces bifurcations se succèdent de plus en plus rapidement jusqu'à ce que l'écoulement devienne pleinement turbulent, qui possède en commun avec les systèmes chaotiques cette sensibilité caractéristique aux petites perturbations : si nous prenons initialement deux écoulements rigoureusement identiques, et que nous modifions, même très légèrement l'un des deux à l'instant initial, les deux écoulements résultants évolueront par la suite de manière « instantanée » très différente.

Un tel résultat a des implications fondamentales dans la modélisation et la prédiction de la turbulence : une simulation numérique d'un écoulement turbulent à condition initiale donnée sera extrêmement différente *a priori* d'un autre écoulement possédant une autre condition ini-

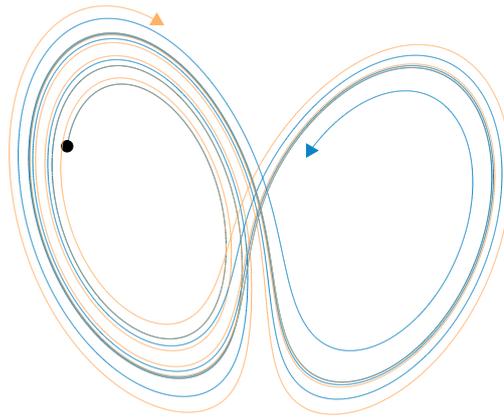


FIGURE 1.9 – *Sensibilité d’un système chaotique (même attracteur de Lorenz que pour la figure 1.8) : deux trajectoires (bleue et orange), initialement très proches, évoluent pour se séparer de manière importante après un temps fini. La petite perturbation a fait « sauter » une des deux trajectoires vers une autre partie du cycle, disjointe de la trajectoire non perturbée.*

tiale. Pire encore, un expérimentateur sera incapable de reproduire exactement tout le détail d’un écoulement turbulent : la précision qu’il peut obtenir sur les conditions expérimentales ne sera jamais suffisante. De même, les mesures de champ des vitesses et de pression fournies par les satellites météorologiques possèdent une petite part d’erreur, qui s’amplifiera dans les prévisions calculées par les ordinateurs. Cette erreur devient importante pour une prédiction au delà de quatre ou cinq jours, ce qui explique certains désagréments (ou bonnes surprises) subis par les promeneurs non-avertis. Le chercheur en turbulence s’efforcera quant à lui de s’affranchir d’une telle variabilité en choisissant soigneusement des observables, quitte à effectuer des moyennes ou des statistiques sur un grand nombre de réalisations, comme nous le verrons dans la suite de cette introduction.

1.1.3.2 Le problème des singularités de la turbulence

Dans toute la partie 1.1.2 précédente, nous avons peu décrit le paramètre ϵ décrivant le taux de dissipation massique des écoulements turbulents. Nous avons d’ailleurs soigneusement évité de lui donner une définition explicite afin de rester très général. Il peut tout de même paraître étonnant qu’une théorie « solide » comme celle de Kolmogorov s’appuie sur l’emploi d’une grandeur si mystérieuse. Les travaux expérimentaux et numériques donnent pourtant raison à la théorie de Kolmogorov, qui montrent assez franchement dès 1940 une limite finie du taux de dissipation ϵ (voir [21, 22] pour des vérifications expérimentales plus récentes). Nous pouvons alors nous demander ce que devient ce taux de dissipation lorsque nous prenons la limite $Re \rightarrow \infty$. Une approche naïve consiste à partir des équations d’Euler, qui sont une approximation à $\nu = 0$ et $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ de l’équation de Navier-Stokes 1.3, et à effectuer le produit scalaire de celle-ci avec \mathbf{v} afin d’exprimer le taux de variation de l’énergie cinétique :

$$\partial_t |\mathbf{v}|^2 + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{-1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{v} \quad (1.24)$$

Nous pouvons mettre à profit une relation d’analyse vectorielle :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.25)$$

afin d’exprimer plus simplement le terme lié à l’advection. L’équation 1.24 se simplifie, notamment grâce à l’utilisation à deux reprises de la condition d’incompressibilité (équation 1.4),

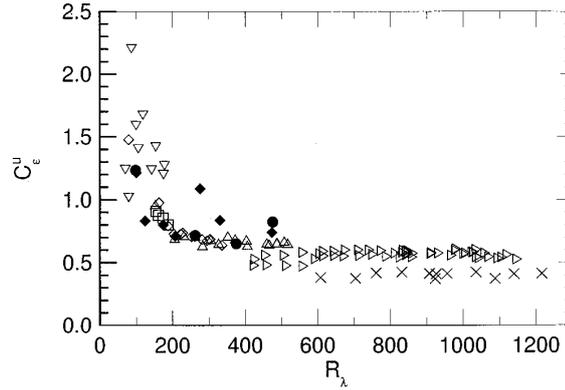


FIGURE 1.10 – Étude de la dissipation normalisée $C_\epsilon = \epsilon L/u^3$ pour différents nombres de Reynolds définis sur l'échelle microscopique de Taylor, $R_\lambda \approx \sqrt{\text{Re}}$. Celle-ci tend vers une asymptote C_ϵ lorsque R_λ excède 400. L'image est extraite de [22].

pour donner :

$$\partial_t |\mathbf{v}|^2 + \nabla \cdot \left[\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p \right) \mathbf{v} \right] = 0 \quad (1.26)$$

Si nous effectuons une intégrale sur l'ensemble du volume \mathcal{V} d'un tel écoulement, satisfaisant aux conditions de non-pénétration aux bords du volume $\partial\mathcal{V}$, nous obtenons par l'application du théorème de *Green-Ostrogradski* :

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_t |\mathbf{v}|^2 \, d\mathcal{V} + \underbrace{\oint_{\partial\mathcal{V}} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}}_{=0} = 0 \quad (1.27)$$

Pour un écoulement parfaitement inviscide, l'énergie cinétique totale de l'écoulement serait donc *conservée*. Cette condition est en totale contradiction avec le caractère asymptotique fini, observé expérimentalement et numériquement (voir figure 1.10), et supposé par Kolmogorov (c'est d'ailleurs sa *troisième hypothèse*), des valeurs de ϵ aux grands nombres de Reynolds. Cette asymptote souligne le caractère symptomatique de la limite $\nu \rightarrow 0$ de l'équation de Navier-Stokes. Comment réconcilier les points de vue d'Euler et de Navier-Stokes ? Un début de réponse a été fourni par Lars Onsager [23]. Ce dernier avait compris qu'un champ de vitesses satisfaisant l'équation d'Euler n'était pas forcément différentiable ! Celui-ci n'est que de classe C^0 , respectant une condition dite de Hölder-Lipschitz :

$$\delta \mathbf{v}(\rho) = |\mathbf{v}(\mathbf{r} + \rho) - \mathbf{v}(\mathbf{r})| = \mathcal{O}(\rho^\alpha) \quad (1.28)$$

Pour $\alpha = 1$, le champ de vitesse serait donc lipschitzien (et donc dérivable), mais la conclusion de l'article d'Onsager insiste justement sur le fait que l'énergie cinétique de l'écoulement est conservée uniquement dans le cas où $\alpha \geq 1/3$. La dissipation d'un écoulement dans une limite de viscosité nulle provient donc nécessairement des « irrégularités » du champ de vitesse. Afin de déterminer quantitativement le taux de dissipation de l'écoulement, il faut alors envisager les *solutions faibles* de l'équation de Navier-Stokes. Dans un tel cas, \mathbf{v} ne respecte pas toutes les conditions de dérivabilité requises par l'équation et il devient nécessaire de voir la vitesse et ses dérivées comme des *distributions* \mathbf{v} appliquées à des fonctions-test (par définition, de classe C^∞) qui viennent rétablir la régularité dans les équations. Pour une famille de fonctions test ϕ_l de paramètre l , la dissipation *anormale* $D_*(\mathbf{v})$ s'écrit [24] :

$$D_*(\mathbf{v}) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{4l} \int_{\mathcal{V}} \nabla \phi_l \cdot (|\delta \mathbf{v}|^2 \delta \mathbf{v}) \, d\mathcal{V} \quad (1.29)$$

Dans ce contexte, il est alors délicat de voir les rôles respectifs que jouent la dissipation liée à la viscosité $\nu \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}$ et celle liée aux singularités $D_*(\mathbf{v})$ dans les équations réelles de Navier-Stokes. La présence de viscosité va-t-elle *assurer* la différentiabilité des champs de vitesse et de pression, ce qui implique $D_* = 0$, ou y a-t-il une possibilité de voir « survenir » des singularités non différentiables dans un écoulement turbulent réel, dont le terme dissipatif anormal D_* pourrait jouer un rôle prédominant dans le taux de dissipation ϵ que propose Kolmogorov lorsque l'écoulement est pleinement turbulent ? Quelle serait la forme de telles structures dissipatives ? La résolution de cette question encore ouverte fait l'objet d'un des sept prix « du millénaire » proposés par la fondation Clay pour les mathématiques.

Dans ce contexte, l'étude des *superfluides* est particulièrement intéressante : ces fluides, qui peuvent sous certaines conditions s'écouler sans viscosité apparente, présentent aussi une forme de turbulence appelée turbulence quantique ou turbulence superfluide [25]. Le mécanisme élémentaire permettant la dissipation de l'énergie cinétique d'un superfluide, très différent de celui des fluides classiques, pourrait apporter un éclairage nouveau sur les anomalies de dissipation de l'équation de Navier-Stokes. Nous tenterons d'examiner l'influence du changement des processus élémentaires sur l'écoulement dans notre écoulement de *von Kármán* dans le chapitre 7 consacré aux résultats préliminaires de l'expérience SHREK.

1.1.4 L'écoulement de von Kármán : un écoulement « classique »

Quoique l'écoulement de von Kármán ne possède pas la même notoriété que les *grands classiques* de la mécanique des fluides que sont l'écoulement de Taylor-Couette ou l'écoulement de Poiseuille dans un cylindre, la littérature sur le sujet reste foisonnante. Certains argueront que l'écoulement actuel ne possède plus grand-chose en commun avec le problème initial posé par Theodore von Kármán [26], et que l'étendue des problèmes où il a servi de modèle a allègrement dépassé le cadre initial de l'étude de ce dernier. Nous n'effectuerons donc qu'un bref rappel de ce problème initial « historique » pour mieux détailler les développements récents de l'expérience qui correspondent bien plus à l'écoulement étudié au laboratoire de Saclay.

1.1.4.1 Le problème initial

L'énoncé du problème formulé par von Kármán en 1921 est relativement simple : il s'interroge sur la forme que prend un écoulement régi par les équations de Navier-Stokes sous l'action de la rotation d'un disque lisse, de rayon $R \rightarrow \infty$, à une vitesse angulaire Ω . T. von Kármán avait compris l'intérêt d'une telle géométrie, qui simplifie suffisamment les équations de Navier-Stokes pour en offrir des solutions exactes. Ce résultat suscite l'intérêt de la communauté scientifique, qui s'efforce sur le plan théorique et numérique de déterminer l'aspect des solutions d'un tel problème, et de généraliser ce résultat, tandis que les expériences, disposant alors de peu de moyens de mesure, semblent s'attacher à trouver un lien entre l'écoulement produit par le disque de von Kármán et les frottements fluides produits par la rotation de disques lisses dans des turbomachines à la géométrie confinée [27]. Ce n'est qu'en 1951 que G.K. Batchelor propose une généralisation théorique de l'écoulement à deux disques contra-rotatifs [28], toujours dans la limite des disques infinis (voir figure 1.11). Chacune des turbines entraîne alors en rotation quasi-solide une moitié du fluide, et une *couche de cisaillement* au centre permet alors d'assurer la continuité du champ des vitesses. Cette configuration permet alors de donner une définition du nombre de Reynolds de l'écoulement, où la longueur caractéristique est choisie comme la distance entre les disques.

Ce résultat fait assez rapidement controverse, Stewartson proposant dès 1953 [29] une phénoménologie totalement différente de l'écoulement où les disques n'entraîneraient qu'une couche limite à leur voisinage, la plus grande partie du fluide étant alors au repos. Toutefois,

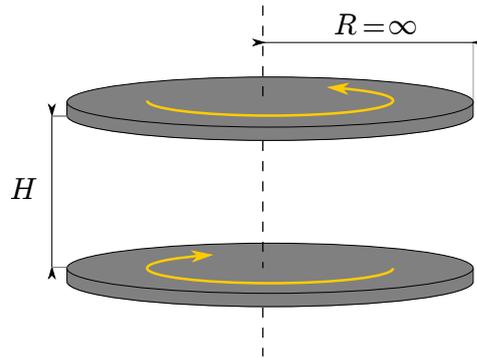


FIGURE 1.11 – La configuration proposée par Batchelor en 1951. Deux disques lisses infinis, séparés par une distance H , se font face pour entraîner le fluide en rotation.

des doutes sur les résultats existent, au vu du manque de rigueur de l'expérience (voir [5] pour plus de détails). La controverse sera résolue plus tard, soulignant l'importance du rapport d'aspect, du différentiel de vitesse de rotation des turbines et du nombre de Reynolds sur les solutions stationnaires [30, 31]. Ces études soulignent enfin la multiplicité des solutions obtenues lorsque le nombre de Reynolds dépasse la valeur de ... 55 !

1.1.4.2 L'introduction du forçage inertiel

Intermittence et explosion de l'activité dans les années 1990 Dans un contexte tout à fait différent, un groupe d'expérimentateurs et de numériciens menés par Y. Couder a construit au début des années 1990 un montage constitué de deux disques munis de pales en contra-rotation, pour un rapport d'aspect de l'ordre de l'unité [32]¹. Cette expérience effectuée dans l'eau, à un nombre de Reynolds très élevé — de l'ordre de 80 000 — était en fait calquée sur des simulations du vortex de Taylor-Green dont les études numériques étaient bien connues du groupe [33]. Les simulations avaient en effet montré l'existence dans l'écoulement turbulent de Taylor-Green de structures intermittentes de haute vorticité sous la forme de filaments, ainsi que de structures dissipatives sous la forme de feuillets, prévues en tant que structures « agitées » de la théorie de l'intermittence. Afin d'apporter une preuve expérimentale de l'existence de ces filaments de vorticité, l'équipe a exploité le phénomène de cavitation, qui fait apparaître ces derniers sous la forme de lignes concentrant des bulles de gaz. Cette étude s'est alors prolongée [34, 35, 36, 37] pour s'intéresser ensuite aux fluctuations de la puissance injectée sous l'effet du changement de forçage des turbines ou du changement du rapport d'aspect de l'expérience [38, 39, 40, 41], ainsi qu'à l'effet de l'ajout de polymères ou de surfactants [38, 42, 43]. Ce travail s'accompagne au sein du même laboratoire, mais par une autre équipe, d'études sur un écoulement similaire dans l'hélium liquide puis superfluide afin de préciser l'intermittence observée dans l'écoulement et afin de tester la validité des lois de Kolmogorov dans la géométrie bien particulière de l'écoulement [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50].

Pendant ce temps, un autre laboratoire se passionne pour l'expérience aux deux turbines contra-rotatives, et étudient les fluctuations de pression au sein de l'écoulement [51], puis les éventuelles corrections à l'hypothèse de Taylor qu'il convient d'appliquer dans les écoulements très turbulents [52]. Les chercheurs du laboratoire de l'ENS de Lyon ont ensuite étudié, comme leurs confrères parisiens, la statistique de puissance injectée dans l'expérience, pour diverses configurations [53, 54, 55, 56], leur lien avec la théorie des grandes déviations [57] ainsi que les structures liées à l'intermittence [58, 59, 60]. Ces études finissent par insister sur l'influence des structures de grande taille dans l'écoulement ainsi que sur l'intérêt d'effectuer des mesures « globales » permettant de bien rendre compte du comportement de l'écoulement aux grandes

1. L'article ne fait pas mention des pales sur les turbines, pourtant présentes selon les dires de MM. Douady et Brachet.

échelles [61, 62].

Années 2000 : de nouvelles applications Sous l’impulsion d’une collaboration entre trois laboratoires (le LPS de l’ENS Paris, le LP de l’ENS Lyon et le SPEC du CEA, tous trois associés au CNRS) est envisagée la réalisation d’une expérience de type von Kármán contenant du sodium liquide, afin de reproduire l’effet dynamo qui est à l’origine du champ magnétique terrestre. Cette collaboration a requis la construction à l’Orme des Merisiers d’une réplique au format 1 : 2 de l’expérience contenant de l’eau, afin d’étudier les aspects purement hydrodynamiques de l’expérience, qui a servi de base à ce manuscrit de thèse. Se trouve également à l’ENS de Lyon une expérience de von Kármán de même taille que celle de Saclay, cette fois-ci dans le gallium, qui a précédé l’expérience VKS dans l’étude de l’induction magnétique dans un écoulement turbulent — et non nocif — (voir par exemple les thèses de Mickael Bourgoïn et de Romain Volk liées à cette expérience [63, 64]). L’étude de l’écoulement dans le sodium a notamment fait partie intégrante de la thèse de mes prédécesseurs, dans l’ordre Louis Marié [5], Florent Ravelet [65] et Romain Monchaux [66], mais aussi celles de François Pétrélis [67], de Mickael Bourgoïn [63], de Romain Volk [64], de Michael Berhanu [68], de Christophe Gissinger [69], de Gautier Verhille [70], de Basile Gallet [71] et enfin celle de Sophie Miralles (qui n’est pas encore figée au moment de l’écriture de ces lignes) ! C’est dire l’effort considérable de recherche qui est fourni par la collaboration, qui a fort heureusement été récompensé en 2006, après plusieurs années de travail, lorsque l’effet dynamo stationnaire [72] puis des renversements et une dynamo chaotique [73, 74] ont pu être mis en évidence.

Les expériences actuelles de l’ENS de Lyon, qui s’accompagnent d’expériences similaires à Grenoble et Göttingen portent sur le point de vue Lagrangien de la turbulence dans l’écoulement de von Kármán, initialement par des méthodes de vélocimétrie Laser Doppler [75], puis en mettant à profit la puissance de calcul désormais disponible pour effectuer du suivi de particule (PTV) dans le volume de l’écoulement [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82]. Ces expériences se sont d’abord penchées sur l’évolution de la séparation de deux particules proches au sein de l’écoulement, afin de vérifier expérimentalement les lois de puissance suggérées par Richardson, Obukhov puis Batchelor [83] pour ensuite raffiner le problème en considérant des particules inertielles [84], en changeant de géométrie pour tenter d’obtenir une turbulence plus homogène [85, 86], ou encore d’étudier l’évolution des formes géométriques (plans, tétraèdres, lignes) dans l’écoulement turbulent, qui a mis en évidence un processus d’alignement entre les directions principales du champ de cisaillement et de la vorticité, aussi connu sous le doux nom d’« effet pirouette » [87, 88]. D’autres expériences, numériques et analytiques, se sont rapprochées du travail expérimental effectué dans notre groupe, en s’intéressant à la nature même de la transition à la turbulence dans l’écoulement de von Kármán, [89, 90, 91]. Cette transition possède des traits fort similaires à ceux observés dans l’expérience de Saclay [65], qui seront repris dans le chapitre 5 consacré à la commande en vitesse. Enfin, nous ne pouvons pas manquer de mentionner le travail d’Alberto de la Torre et de Javier Burguete, à l’université de Navarre, qui ont reproduit l’expérience VKE de Saclay avec beaucoup de soin, avec des turbines très légèrement différentes de celles utilisées à Saclay, et qui ont mis à jour au sein de leur écoulement une bistabilité associée à une dynamique lente [92, 93].

L’expérience de Saclay, nous le verrons, a quant à elle beaucoup travaillé sur la caractérisation de la turbulence au sein de l’écoulement de von Kármán. Un important travail a été fourni par mes prédécesseurs, Louis Marié [5], Florent Ravelet [65] et Romain Monchaux [66], qui se sont efforcés de décrire l’écoulement turbulent dans le cylindre. À l’instar de l’équipe de J. Burguete, leurs résultats indiquent qu’il est possible de décrire une telle turbulence en termes d’états stationnaires — ou presque stationnaires — caractérisés par des grandeurs globales moyennes dont le comportement rappelle celui de systèmes bien plus simples, l’écoulement turbulent faisant par exemple l’objet d’une instabilité classique d’Eckhaus [94]. C’est principalement cet axe d’étude que nous emprunterons dans ce manuscrit : par l’utilisation de

concepts et d'outils *statistiques*, nous tenterons de décrire le comportement à grande échelle de l'écoulement de von Kármán.

1.1.5 Conclusion

La turbulence apparaît dans de nombreux écoulements naturels, dans l'atmosphère, les océans ou même dans les milieux interstellaires, qui fait intervenir un fort mélange des grandeurs physiques associées à de tels écoulements. Ce fort mélange peut être exploité, à des fins d'homogénéisation de pâtes ou de liquides, notamment dans l'industrie agro-alimentaire ou dans les moteurs à explosion, mais celui-ci est aussi souvent vu comme problématique dans les branches de l'industrie confrontées aux problèmes de frottements et de couches limites associées au mélange turbulent, comme le secteur du bâtiment, de l'automobile ou de l'aéronautique.

L'imprévisibilité des écoulements turbulents rend leur étude délicate : à la manière des systèmes chaotiques, ces écoulements sont si sensibles aux petites perturbations (où au détail des conditions initiales) qu'il est vain de vouloir reproduire expérimentalement l'évolution temporelle d'une expérience (une *réalisation*) d'un écoulement turbulent. Il en va de même pour les prévisions météorologiques, qui se heurtent à un « horizon » au delà duquel les prévisions calculées sont nécessairement imprécises. L'étude de la turbulence se doit alors de s'affranchir d'une telle variabilité en décrivant la turbulence par des grandeurs ignorant une telle variabilité. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que les théories décrivant la turbulence usent et abusent des grandeurs moyennes, *statistiques* de l'écoulement.

Le nombre important de degrés de liberté mis en jeu rend difficile l'étude complète et détaillée des écoulements turbulents. Les mesures sur les écoulements turbulents seront au mieux incomplètes, et les simulations numériques ne peuvent modéliser toutes les échelles des écoulements turbulents sous peine de voir le temps de calcul diverger.

À cet égard, l'écoulement de von Kármán semble être un parfait candidat d'écoulement turbulent : ce dernier possède un très grand nombre de Reynolds dans un écoulement compact et confiné, et l'intensité des fluctuations turbulentes générée est importante. Cet écoulement a déjà prouvé son utilité à de multiples reprises, permettant par exemple l'observation expérimentale de structures intermittentes, ainsi que la génération spontanée d'un effet dynamo dans le cas d'un écoulement de métal liquide.

1.2 La physique statistique

1.2.1 Pourquoi la physique statistique ?

Est-il possible d'ignorer le très grand nombre de degrés de liberté microscopiques N d'un système physique afin d'en extraire des grandeurs pertinentes accessibles à l'expérimentateur ? Ce problème, volontairement formulé pour ressembler à celui de la turbulence, a été posé aux physiciens du XIX^e siècle lorsqu'ils se sont attachés à décrire le comportement des gaz à l'équilibre. La description exacte du problème était alors simple, supposant un nombre N immense de particules microscopiques réparties aléatoirement dans une boîte cubique, comme celle de la figure 1.12. Ces particules, se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} , n'interagissent pas entre elles et rebondissent de manière parfaitement élastique sur les bords de la boîte : cela se traduit simplement par la conservation de la vitesse tangentielle à la paroi et de l'énergie cinétique de la particule lors de la collision. Pour une boîte macroscopique contenant un gaz à pression atmosphérique, nous savons aujourd'hui que le nombre de particules est de l'ordre de $\mathcal{N}_A = 6.02 \cdot 10^{23}$. Cela implique donc que pour déterminer, par exemple, la force exercée $\mathbf{F}(t)$ sur chacune des parois, il faille intégrer exactement les \mathcal{N}_A équations (certes simples) du

mouvement depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t !

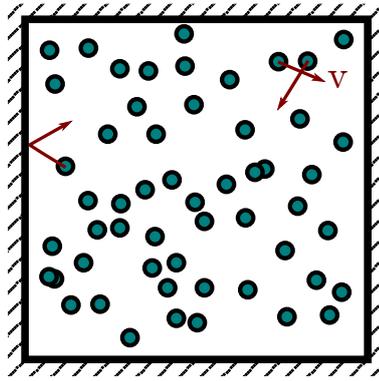


FIGURE 1.12 – Description du problème posé par la théorie cinétique des gaz : des particules, supposées quasi-ponctuelles, se déplacent à une vitesse \mathbf{v} dans une boîte carrée (ou cubique, ou rectangulaire au besoin). Les collisions entre les particules et les bords de la boîte sont parfaitement élastiques.

Il est alors bien plus astucieux de mettre à profit cette immense quantité de particules pour effectuer des considérations *statistiques* sur leur vitesse \mathbf{v} , notamment sur l'orientation et la norme de celle-ci. En effet, même pour une sous-boîte très petite, éventuellement de volume mésoscopique $d\tau$ de la physique des milieux continus, le nombre de particules est très important, dépassant 10^{10} . Les physiciens de l'époque, A. Krönig, R. Clausius, L. Boltzmann et J. C. Maxwell, ont alors postulé que toutes les sous-boîtes auront des propriétés statistiques *identiques*, bien que les particules de la sous-boîte aient des vitesses individuellement très différentes. Cette hypothèse suppose que les disparités entre boîtes sur les grandeurs physiques moyennes — qui peuvent évoluer dans le temps et varier dans l'espace — sont presque nulles, à cause du très grand nombre de particules dans lequel ces disparités sont « noyées ». La généralisation d'une telle hypothèse à tous les systèmes physiques est à la base de l'ergodicité, qui est développée dans l'annexe B. Ce sont donc les grandeurs statistiques des sous-boîtes de notre système, pertinentes à l'échelle humaine, qui permettent de décrire les grandeurs thermodynamiques statistiques comme la pression P d'un gaz, sa température T ou son énergie interne U décrivant le comportement des liquides et des gaz. Ce modèle de la théorie des gaz permet alors de retrouver la loi des *gaz parfaits* :

$$PV = \frac{3}{2}N_A k_B T \quad (1.30)$$

où V est le volume du gaz et k_B est la constante de Boltzmann. Cette théorie cinétique — simpliste — peut être raffinée en considérant des chocs entre particules, ou bien même des interactions entre particules, comme le modèle de van der Waals. Dans ces deux derniers cas, les systèmes présentés sont chaotiques dans le sens où ils sont extrêmement sensibles aux conditions initiales : pourtant, il est possible d'en extraire des grandeurs macroscopiques moyennes pertinentes, le modèle de van der Waals se payant le luxe d'une description unifiée des liquides et des gaz, prévoyant une transition de phase du premier ordre avec un équilibre des phases liquide et vapeur pour une gamme de volumes spécifiques donnée. J. D. van der Waals obtiendra d'ailleurs le prix Nobel pour cette équation.

1.2.2 Les transitions de phase

De son côté, Pierre Curie [95] étudie le comportement magnétique de divers composés comme le verre, le fer doux, le mercure et le quartz. Ce dernier remarque alors que certains

matériaux comme le fer doux présentent une aimantation spontanée en deçà d'une température T_c , qui disparaît lorsque le matériau est chauffé au delà de T_c . La disparition d'un tel magnétisme est généralement associée à une *transition* entre une phase où les moments magnétiques atomiques du fer sont alignés, appelée phase ferromagnétique, et une phase où les moments magnétiques ne s'alignent plus et sont désordonnés, qui est appelée paramagnétique. Cette transition est d'une nature foncièrement différente de celle entre le liquide et la vapeur : Pierre Curie n'observe aucun équilibre entre les deux différentes phases magnétiques, comme coexisteraient une phase liquide et une phase vapeur pour une température égale à T_{lv} . Cette nouvelle transition, à l'époque considérée simplement comme une transition de phase du « second ordre » est aujourd'hui vue comme un des points de départ de la théorie des *phénomènes critiques*.

À l'époque de Pierre Curie, la théorie cinétique des gaz avait déjà été généralisée à l'ensemble des systèmes thermodynamiques grâce aux travaux de L. Boltzmann, J. C. Maxwell et surtout de J. W. Gibbs, pour devenir la *physique statistique*. Un de ses étudiants, Paul Langevin [96], va alors tenter d'expliquer cette transition en postulant que les atomes composant le fer possèdent des petits moments magnétiques qui peuvent s'aligner selon la direction du champ magnétique imposé, suivant la distribution statistique formulée par L. Boltzmann, elle-même fondée sur la toute jeune physique statistique. Cette approche nouvelle, une fois de plus fondée sur le très grand nombre N de moments magnétiques mis en jeu, permet alors à Paul Langevin de retrouver certains résultats de Pierre Curie, apportant un crédit supplémentaire à la physique statistique. C'est selon une telle approche microscopique que sera introduit le *modèle d'Ising*, proposé par H. Lenz à son étudiant en thèse de l'époque afin de préciser la transition observée à la température T_c [97]. Ce modèle (voir la figure 1.13) propose de décrire simplement des moments magnétiques de normes identiques et dirigés selon une direction préférentielle \mathbf{e}_z , à une température T . Ces moments sont répartis sur une ligne et n'interagissent qu'avec leurs voisins les plus proches, et tendent à s'aligner avec ceux-ci : chaque défaut d'alignement entre deux voisins coûte une énergie $2J$ au système. Ce dernier va devoir alors trouver un compromis entre la maximisation de son entropie (qui tend à désaligner les moments) et la minimisation de son énergie (qui tend à les aligner). Étonnamment, ce modèle montre explicitement que la température critique à laquelle les moments magnétiques s'alignent vaut $T_c = 0$ K lorsque le nombre d'atomes devient infini, interdisant donc les transitions observées par Pierre Curie. Ce n'est que plus tard que ce paradoxe sera levé, grâce aux contributions de Peierls puis aux calculs exacts de Lars Onsager [98], qui démontrent l'existence d'une température de transition T_c non nulle pour un réseau d'atomes à *deux dimensions*.

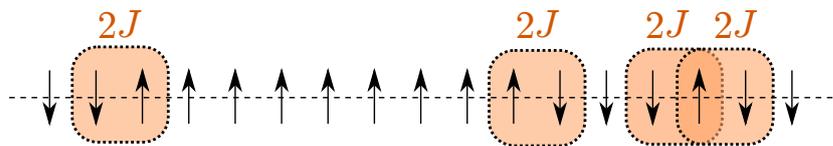


FIGURE 1.13 – Description du modèle d'Ising. Les moments magnétiques des atomes $s_i = \pm 1$ répartis régulièrement sur une ligne interagissent avec leurs voisins, à une température T : chaque non-alignement entre voisins hausse l'énergie totale du système d'une quantité $2J$.

En général, les modèles décrivant les transitions de phase supposent, comme dans le cas du fluide de Van der Waals et du modèle des spins d'Ising, des interactions à courte portée. Cela implique généralement que seuls un petit nombre de « voisins » d'une particule, ou d'un spin donné, ressentent effectivement les changements d'orientation ou de position du spin (ou de la particule) en question. Nous verrons que ces hypothèses permettent d'assurer certaines propriétés intuitives rencontrées en thermodynamique, comme l'*additivité*. Plus récemment, des groupes de chercheurs menés par T. Dauxois, J. Barré, D. Mukamel et S. Ruffo [99, 100, 101] ont levé cette contrainte afin de regarder les comportements physiques des systèmes

possédant des interactions à *longue portée*. Le chapitre 3, consacré aux transitions de phase, va expliciter les différents comportements non-intuitifs que présentent de tels systèmes par rapport aux systèmes plus traditionnels.

1.2.3 Turbulence et physique statistique hors-équilibre

Le succès de la physique statistique à réduire un problème possédant un grand nombre de degrés de libertés à des problèmes simples a donc rapidement intéressé les physiciens de la turbulence. Les ingrédients étant sensiblement identiques, avec un grand nombre de degrés de liberté, des fluctuations microscopiques importantes et une grande sensibilité aux conditions initiales, les systèmes turbulents ressemblent beaucoup aux modèles de la théorie cinétique des gaz. Il serait d'ailleurs avantageux de pouvoir oublier les degrés de liberté microscopiques de l'écoulement pour en déduire des comportements globaux pertinents sur la base d'arguments statistiques. Ce point de vue se heurte toutefois au point de vue « mécanique » de la turbulence, qui aimerait expliquer les différentes structures spatiales instationnaires observées dans les écoulements turbulents, ainsi que leur évolution temporelle : tourbillons, couches limites, bouffées turbulentes [102, 103, 104] paraissent difficiles à décrire d'un point de vue purement thermodynamique.

Au delà de ces considérations mécaniques, il peut paraître délicat de dériver une mécanique statistique d'un système soumis *a priori* à des interactions non locales (dues au terme de pression, p et au terme d'advection) et qui possède une hiérarchie dans les échelles, qui tomberait donc dans la définition des systèmes interagissant à longue portée. De plus, les systèmes turbulents sont, contrairement à un gaz dans une boîte ou à un système de spins, essentiellement hors-équilibre : sans injection d'énergie, les écoulements turbulents (fermés) à viscosité non-nulle déclinent jusqu'à l'état d'équilibre du fluide au repos. Il faut donc *a priori* effectuer une statistique *hors de l'équilibre* pour un système possédant des *interactions à longue portée* pour décrire le cas le plus simple de turbulence, homogène et isotrope, possédant des propriétés statistiques stationnaires. Les écoulements expérimentaux ne respectent cependant qu'exceptionnellement tous ces critères, ceux-ci étant souvent soit inhomogènes (c'est le cas de notre écoulement), soit instationnaires (c'est le cas des expériences en déclin).

La description statistique des écoulements turbulents doit donc passer très certainement par une approche *hors-équilibre*. Celle-ci, qui trouve ses fondements dans les travaux de R. Brown, A. Einstein, M. Smoluchowski, M. Planck et A. Fokker, et notamment sur l'étude du mouvement Brownien, effectue non plus des moyennes temporelles et spatiales pour obtenir des grandeurs statistiques, mais suppose des moyennes d'ensemble permettant de décrire un comportement moyen de tels systèmes pour un très grand nombre de réalisations indépendantes. Un tel formalisme permet alors d'introduire des coordonnées spatiales et temporelles dans la description de systèmes possédant un faible nombre de degrés de liberté, initialement hors de l'équilibre : une telle description en termes de *processus stochastiques*, qui seront détaillées dans le chapitre 4, va donner des règles permettant de déterminer la manière dont le système retourne vers l'équilibre. Dans ce cadre, nous tenterons d'utiliser de tels outils pour décrire l'évolution des grandeurs macroscopiques globales de l'écoulement, afin de voir si ce dernier, qui est continuellement poussé loin de l'équilibre, possède des grandeurs stationnaires qui respectent ou violent les principes fondamentaux de la physique statistique à l'équilibre et hors de l'équilibre thermodynamique.

Il est également possible d'effectuer directement une mécanique statistique hors équilibre du détail « microscopique » des écoulements turbulents. En effet, R. Robert et J. Sommeria [105, 106], puis P.-H. Chavanis [107] ont développé au début des années 1990 une théorie permettant de décrire l'évolution d'un champ continu de vortacité $\mathbf{w}(x, y)$ dans les écoulements à deux dimensions, dans la limite de viscosité et de forçage nuls. L'introduction de la mécanique statistique vient alors de l'introduction d'une *probabilité* de réalisation de la vortacité

locale $p(\mathbf{w}, x, y)$ dans la description de la turbulence, plutôt que de directement regarder la quantité $\mathbf{w}(x, y)$. Leur théorie s'appuie ensuite sur un principe de maximisation de production \dot{S}_m de l'entropie de mélange S_m , suivant à la fois les conventions utilisées par G.W. Paltridge sur la production d'entropie hors de l'équilibre, et celles de Shannon pour la définition même de l'entropie S_m :

$$S_m = \int_{\mathcal{V}} p(x, y, \mathbf{w}) \ln p(x, y, \mathbf{w}) \quad (1.31)$$

Les résultats prédits par de telles théories permettent de prévoir un phénomène bien connu en turbulence à deux dimensions : la formation de grandes structures, que ce soit en météorologie (cyclones, tache rouge de Jupiter), dans des expériences en films minces [108, 109], dans les couches de métaux liquides forcés [110] ou en simulation numérique [111]. Cette théorie permet donc de retrouver des *structures* chères aux mécaniciens de la turbulence sur la base d'arguments statistiques. Elle trouve aujourd'hui un écho dans les activités du laboratoire de Saclay, en collaboration avec l'école Centrale de Lyon, sur le plan théorique [112, 113, 114, 115], et visent à étendre les résultats obtenus pour deux dimensions au cas des écoulements axisymétriques, théorie que nous reverrons par la suite. Cette théorie a notamment permis d'explicitier des états d'équilibre des écoulements turbulents axisymétriques dont la morphologie ressemble à celle des états stationnaires expérimentaux, et permet donc ainsi de déterminer les valeurs statistiques de l'écoulement aux grandes échelles, toujours sur la base d'arguments statistiques.

1.3 Conclusion

Peu de problèmes de la physique classique résistent autant à l'examen des physiciens que celui de la turbulence : malgré une formulation explicite, contrainte par les équations de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens, les chercheurs se retrouvent confrontés à des champs de vitesses imprévisibles et formant des structures à toutes les échelles, sous la forme de nombreux *degrés de liberté*. Les propriétés macroscopiques — accessibles aux expérimentateurs — des écoulements pleinement turbulents sont soigneusement « cachées » dans la simple formulation de ces équations.

La classe des écoulements de von Kármán permet dans ces conditions d'obtenir un écoulement à très haut nombre de Reynolds dans un dispositif expérimental simple et compact. Celle-ci, née des études portant initialement sur des disques lisses, a vu son intérêt grandir assez récemment par l'introduction d'un forçage inertiel, se traduisant par l'apparition de pales sur les disques. La turbulence stationnaire produite dans le cylindre a plusieurs fois montré son intérêt, permettant l'observation de structures intermittentes, l'étude de la séparation entre particules et l'alignement de la vorticité avec les directions principales de cisaillement, aussi appelé « vortex stretching », et dernièrement l'observation d'un effet dynamo lorsque le fluide utilisé est conducteur. C'est cette richesse de l'écoulement qui nous a motivés à poursuivre l'étude de l'écoulement de von Kármán au sein du laboratoire de Saclay.

Les états stationnaires de l'écoulement de von Kármán possèdent à bien des niveaux des points communs avec les systèmes thermodynamiques : derrière l'apparent désordre microscopique, les nombreux degrés de liberté, et la grande sensibilité aux petites perturbations, les grandeurs globales de l'écoulement possèdent des propriétés statistiques robustes permettant d'explicitier des états stationnaires hors équilibre de l'écoulement aux « grandes échelles ». Le comportement des grandeurs globales de l'écoulement peut être caractérisé par l'utilisation d'outils développés dans le domaine des *processus stochastiques* et des *transitions de phase* : l'écoulement dans son ensemble se comporte parfois comme une « boîte noire » possédant un faible nombre de degrés de liberté apparents.

Le chapitre 2 va définir les montages expérimentaux utilisés durant cette thèse, pour insister sur les symétries fondamentales de l'écoulement, les principales grandeurs observées et

le principe physique de la mesure de ces grandeurs. Le chapitre 3 va dans un premier temps effectuer un rappel des hypothèses à la base de la formulation des *ensembles statistiques* pour mettre en lumière les conséquences d'un éventuel non-respect de ces hypothèses, puis, dans un deuxième temps, va détailler le formalisme des transitions de phase *via* l'exemple de la transition de phase du modèle d'Ising en champ moyen, qui permettra une approche théorique d'une transition observée expérimentalement. Le chapitre 4 nous donnera quant à lui un aperçu des diverses formulations de la mécanique statistique hors de l'équilibre, pour expliciter ensuite quelques résultats dont nous pouvons tester la validité dans notre écoulement turbulent hors-équilibre. Le chapitre 5 va ensuite décrire les principaux résultats expérimentaux obtenus en commande en vitesse grâce à l'installation (effectuée conjointement avec Éric Herbert) de nouveaux instruments de mesure, les *couplemètres*. Ces résultats, qui s'appuient sur ceux de Florent Ravelet [65], de Pierre-Philippe Cortet et d'Éric Herbert [116, 117], tentent de fournir un cadre d'interprétation des régimes observés en exploitant le formalisme et les résultats de la théorie des transitions de phase et de la mécanique statistique hors de l'équilibre thermodynamique. Ces derniers s'accompagnent également de résultats préliminaires concernant un entraînement fractal de l'écoulement de von Kármán pour étudier l'influence d'une injection d'énergie à de multiples échelles sur l'écoulement turbulent. Le chapitre 6 viendra quant à lui compléter les résultats de Florent Ravelet et de Louis Marié [5, 65], pour analyser le comportement observé de notre écoulement par l'intermédiaire de la PIV stéréoscopique et des couplemètres, et à la lumière des résultats fondamentaux concernant l'inéquivalence d'ensemble. Le chapitre 7 va quant à lui clore ce mémoire par la description des résultats préliminaires des expériences effectuées dans un écoulement de von Kármán superfluide, SHREK, et leur interprétation, une nouvelle fois dans le cadre des transitions de phase.

*

CHAPITRE 2

L'EXPÉRIENCE VK2

Introduction

Les expériences d'écoulements de von Kármán ne sont pas tout à fait récentes dans le laboratoire. En effet, ces dernières ont été développées dès 1998 afin d'étudier l'écoulement hydrodynamique lié à la future construction de l'expérience *VKS*, pour « von Kármán sodium » (désormais à Cadarache). Cette première version a été étudiée par Javier Burguete, avant d'être confiée à Louis Marié qui s'en est servi pour une grande partie de sa thèse. Ce dernier effectuera un grand nombre d'améliorations sur ce qui deviendra l'expérience *VKE*, pour « von Kármán eau ». Il s'attaqua ensuite, vers la fin de sa thèse, à la construction d'un nouveau dispositif permettant une rotation globale de l'ensemble de l'expérience, qui sera appelé *VKR*, pour « von Kármán en rotation ». Louis participe aussi à la construction de la première expérience contenant du sodium.

Un nouveau thésard, Florent Ravelet, arrive en 2002, travaille également sur l'expérience *VKS*, et planche sur son évolution, *VKS2*. Lorsqu'il soutient sa thèse, en 2005, deux nouveaux arrivants ont déjà fait leur apparition : Pantxo Diribarne, ainsi que Romain Monchaux. C'est ce dernier qui va créer l'expérience aujourd'hui utilisée dans cette thèse, *VK2* : elle est en effet construite à partir de l'expérience en rotation, *VKR*, avec beaucoup de modifications, et certains éléments de l'expérience initiale *VKE*.

Le montage initial, proposé par Louis Marié, a donc bien évolué, afin de permettre une plus grande variété de mesures, ainsi qu'une plus grande rigueur au niveau de la construction mécanique : un système d'imagerie a été mis en place (toujours par Romain Monchaux et Pantxo Diribarne), et des couplemètres ont été installés conjointement avec Éric Herbert durant le début de cette thèse. Enfin, pour rendre à César ce qui lui appartient, nous ne pouvons pas omettre le travail acharné de Vincent Padilla, qui a usiné, démonté, remonté (parfois jusqu'à la nausée), modifié et rafistolé l'expérience sans mauvaise volonté aucune depuis plus de dix ans. Son aide précieuse et son savoir-faire ont fait du montage ce qu'il est aujourd'hui, et qui fait donc l'objet de ce chapitre.

2.1 Le montage mécanique

Bien que la formulation du problème de l'écoulement de von Kármán soit simple à comprendre, le montage expérimental actuel (visible sur la figure 2.1, ainsi que ses plans de conception, visibles sur la figure 2.2) a requis quelques astuces de conception. Nous allons les détailler dans cette section.

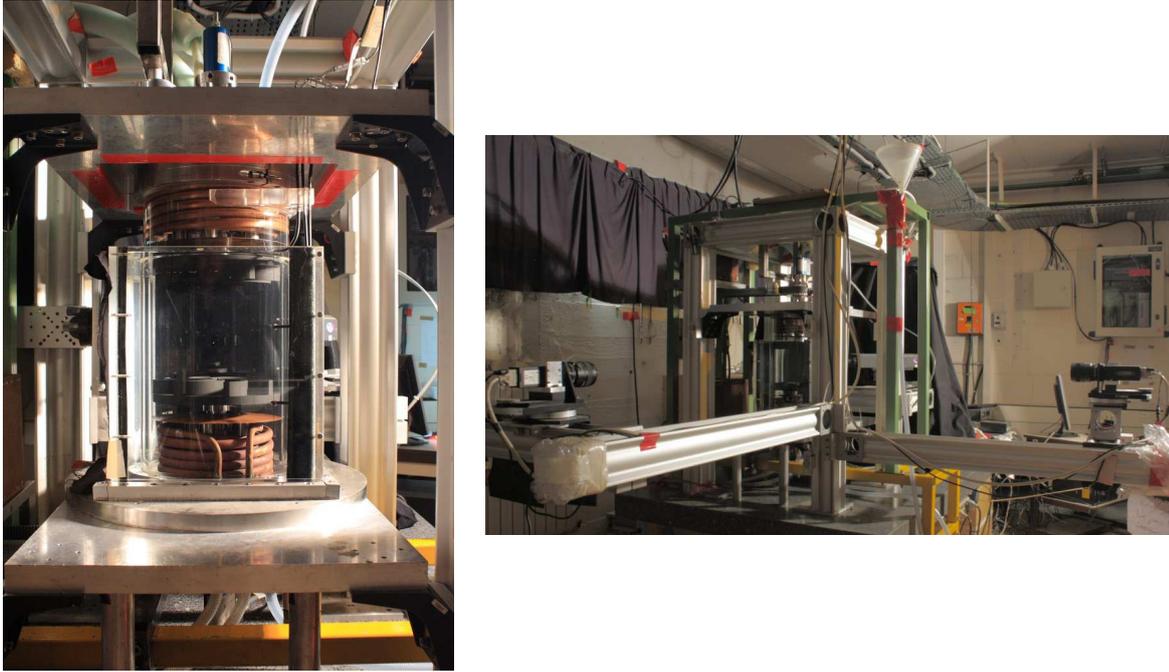


FIGURE 2.1 – Photographies de l'expérience VK2. À gauche, détail des deux cuves contenant l'écoulement : la turbine du bas, les deux boucliers en cuivre et les deux serpentins servant au refroidissement sont bien visibles. Nous apercevons le boîtier électronique du couplemètre du haut (bleu) en haut de l'image. À droite, photographie du montage expérimental complet comprenant le système d'imagerie : les deux caméras (tout à gauche, et tout à droite de l'image), photographient la cuve sous deux angles distincts. Les deux châssis, celui des moteurs (vert et jaune) et celui de l'expérience (microcontrôle gris) sont également bien visibles.

2.1.1 Les cuves

2.1.1.1 La cuve cylindrique

La première cuve dans laquelle l'écoulement de von Kármán est produit était une cuve en Plexiglas[®] datant des travaux de thèse de Romain Monchaux. L'usure liée aux nombreuses expériences a progressivement rayé cette cuve qui a ensuite été remplacée par une nouvelle, de dimensions identiques, toujours en Plexiglas[®]. Toutes deux possèdent un rayon interne $R = 100$ mm, un rayon externe $R_{ext} = 110$ mm et une hauteur $h_{cyl} = 470$ mm.

Il est possible, comme pour l'expérience VKE, de mettre la cuve cylindrique sous pression. Nous avons d'ailleurs récupéré le système de mise en pression (manomètres et robinets) de VKE. Rajouter de la pression a historiquement servi à limiter la cavitation des bulles de gaz dissous ; cependant, nous l'utiliserons pour une autre raison : cela permet de limiter les frottements mécaniques (voir pour cela les problèmes de la section 2.1.6). Ce que nous appellerons « pression » de l'expérience VK2 est alors défini de la manière suivante :

$$P_{VK2} = P_{cuve} - P_{atm} \quad (2.1)$$

Cela correspond à la surpression existant entre l'intérieur de la cuve cylindrique et l'extérieur de l'expérience.

2.1.1.2 La cuve carrée

Deux cuves carrées ont également existé, de conceptions quasiment identiques. Ces dernières sont de section carrée de côté $a_{int} = 260$ mm et d'épaisseur 10 mm. La première d'entre

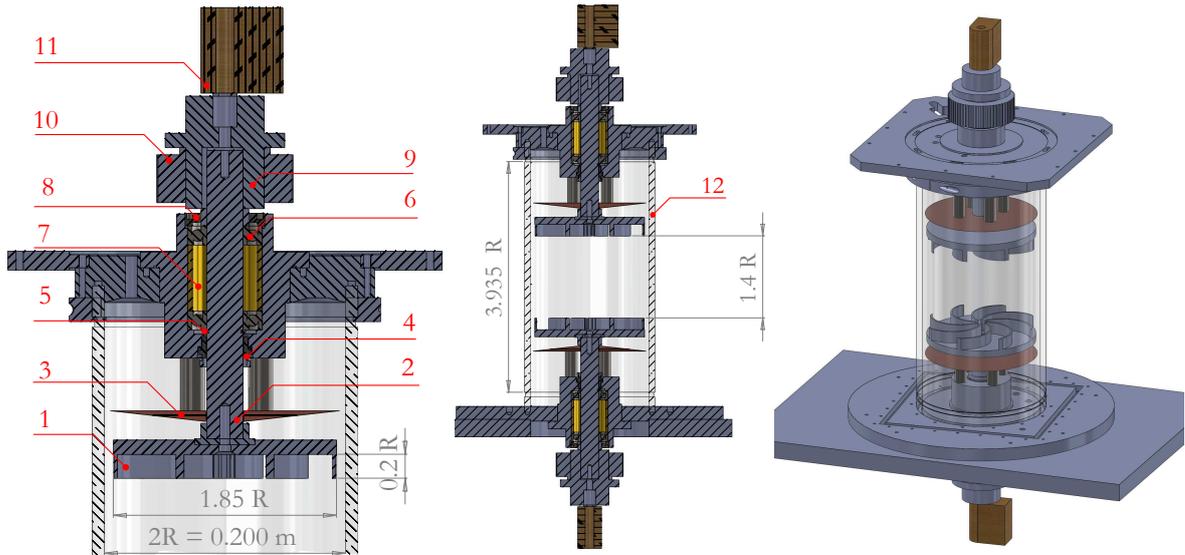


FIGURE 2.2 – Plans de l'expérience réalisés par Vincent Padilla sous *Solidworks*. La vue de gauche est une vue en coupe en détail de la partie haute, avec, de bas en haut, une turbine (1) vissée sur son arbre mécanique (2), un bouclier (3) fixé sur ses piliers, la garniture mécanique (4), un circlips (5) serré sur une gorge de l'arbre, les roulements à contact oblique (6) séparés par une entretoise (7), les bagues de serrage des roulements (8), puis le couplétre (9; 11) vissé à l'autre bout de l'arbre et monté sur une poulie (10). La vue du milieu est une coupe du montage entier, où l'on voit la totalité de la cuve cylindrique (12). La troisième vue représente l'expérience en trois dimensions. Les radiateurs de refroidissement, qui entourent normalement les piliers, ne sont pas visibles sur ces plans.

elles était fabriquée en Plexiglas[®], de hauteur $h_{car} = 420$ mm, la seconde étant en Polycarbonate et de hauteur $h'_{car} = 340$ mm, plus petite pour des raisons pratiques lors du montage et du démontage.

Les cuves carrées encerclent la cuve cylindrique et permettent d'atténuer les distorsions liées au changement d'indice à l'interface air-cuve cylindrique, et un des coins des cuves carrées est taillé en biseau à 45° afin de laisser passer la nappe laser permettant de construire le champ de vitesses (voir section 2.2.2.2).

2.1.2 Les turbines

Il existe un grand nombre de turbines construites pour notre expérience. Le lecteur intéressé trouvera certainement son bonheur dans la thèse de Florent Ravelet [65] qui a étudié en détail l'effet du changement de forme des turbines sur l'écoulement de von Kármán. L'ensemble des expériences de la présente thèse a été effectué — sauf mention contraire — avec des turbines légères en plastique nommées *TP87*. Ces dernières ont peu d'inertie, ce qui permet de pratiquer certaines expériences de commande en couple dans de bonnes conditions [39]. Nous rappelons les caractéristiques de quelques turbines « usuelles » dans le tableau 2.1. Nous remarquons de même que les *TP87*, à l'instar d'autres turbines, possèdent des pales courbes. Cela implique que les deux sens de rotation des turbines ne sont pas équivalents. Nous avons donc suivi les conventions utilisées depuis Louis Marié [5] afin de ne pas perdre le lecteur, en notant (+) le sens de rotation où les turbines « attaquent » l'eau avec la face convexe des pales, et le sens (−) celui où elles l'entraînent avec la face concave. Le sens (−) demande naturellement

Nom	N_{pales}	R_t/R	α	h_{pales}/R	matière
TP87	8	0.925	72	0.2	Polycarbonate
TM87	8	0.925	72	0.2	Acier Inoxydable
TM60	16	0.925	72	0.2	Acier Inoxydable
TF11	3	0.925	0	0.2	PTFE
TF14	120	0.925	0	N.A	Duralumin
TM00	0	0	0	0	N.A

TABLE 2.1 – Tableau récapitulant les quatre turbines susceptibles d'apparaître dans le reste de cette thèse. R_t/R représente le rayon de la turbine par rapport à celui de la cuve cylindrique. α représente la courbure des pales des turbines. Les expériences ont privilégié l'utilisation des turbines en plastique car elles présentent un moment d'inertie bien plus faible que les autres turbines. Les turbines TM60 ont été utilisées comme « étalon » par une grande partie des thésards et post-doctorants précédents. Les turbines TF11 et TF14 sont respectivement la 1^{ère} et 4^{ème} étapes d'une turbine fractale (voir section 5.4). Les TM00 correspondent à l'absence de turbines, utilisé pour certains tests mécaniques.

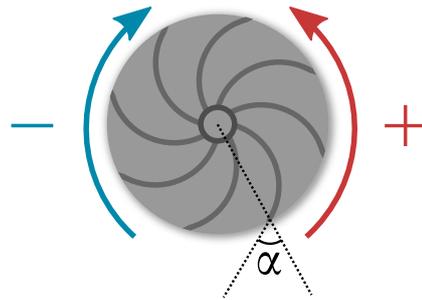


FIGURE 2.3 – Convention utilisée pour nommer le sens de rotation des turbines à pales courbes, avec une TP87 schématisée. Nous pouvons y voir la définition de l'angle α de courbure des pales, mesuré entre la corde reliant le centre du disque au bord de pale et la tangente à la pale en bord de disque.

plus de couple à cause de l'effet *chistera* : dans le référentiel de la turbine, le fluide, qui est entraîné vers l'extérieur des turbines sous l'effet des forces centrifuges, est aussi accéléré dans la direction tangentielle à cause du sens de la courbure. L'entraînement en rotation est alors plus efficace et nécessite plus de couple.

2.1.3 Les moteurs, les variateurs, les commandes

Pour faire tourner les turbines, nous disposons de deux moteurs électriques synchrones sans balais, Yaskawa Servopack SGMGH, d'une puissance unitaire de 1.8 kW et de couple nominal 11.5 Nm. Ces moteurs sont contrôlés par des variateurs électriques Yaskawa Servopack SGDH. Ces derniers fonctionnent par *modulation de largeur d'impulsion* (MLI, PWM pour *Pulse-width modulation* en anglais). Cette technique consiste d'abord à générer des créneaux de tension à haute fréquence, avec une puissance élevée. Une partie électronique de puissance va alors moduler la durée d'impulsion τ (la portion de temps passée à $V \neq 0$ pour chaque période) de manière à ce que notre signal « haché » à haute fréquence ressemble au signal désiré une fois filtré aux basses fréquences. Cette modulation possède l'avantage indéniable de ne pas dissiper l'énergie dans un éventuel pont diviseur de tension tout en permettant une commande

assez souple (il est possible d'envoyer pratiquement n'importe quel signal en utilisant la MLI). Ces moteurs, généralement utilisés dans l'industrie, remplissent ici efficacement leur rôle, à l'exception notable d'une quantité astronomique de bruit électromagnétique qui a autrefois perturbé jusqu'aux relations avec les chercheurs voisins de notre expérience ... Une plus ample description du fonctionnement des moteurs électriques est présentée dans l'annexe A de la thèse de Louis Marié [5]. Pour remédier à ce problème, nous avons installé des filtres LC **Schaffner FN5010-8-99** entre le réseau EDF et les variateurs, ce qui a permis d'éviter de réinjecter une partie du bruit dans le réseau. L'utilisation systématique de câbles blindés et de cages de Faraday (notamment l'armoire électrique et les cages en cuivre autour des moteurs) a permis de réduire significativement le bruit de mesure.

Les variateurs disposent d'un impressionnant nombre de réglages, via des *broches* dénommées **PnXXX**. Elles permettent ainsi d'inverser le sens de rotation des moteurs ou même de changer de type de commande. En effet, il est possible d'imposer la *vitesse* des moteurs, le *couple* qu'ils transmettent aux turbines ou même la *position* de ces derniers, en laissant la possibilité d'effectuer certaines de ces commandes via une tension analogique (c'est ce que nous faisons pour les couples) ou par des messages transmis par port série (c'est le cas de la commande en vitesse). De même, elles permettent de réguler diverses constantes de temps des boucles de rétroaction afin d'ajuster la régulation des moteurs.

Le passage de la commande en couple à la commande en vitesse s'effectue par exemple par la broche **Pn000** des moteurs. Pour les expériences de commande en couple, nous avons de plus modifié le gain G_{var} , réglable via la broche **Pn400**, entre la tension continue en entrée des variateurs et le couple imposé aux turbines C . Sa valeur a été fixée de telle sorte que 1 V corresponde à 10% du couple nominal. Pour la première partie de nos expériences de commande en couple, le couple moyen exercé par les deux moteurs valait $0.122C_{max} = 1.40$ Nm ; ce dernier est ensuite passé à $0.146C_{max} = 1.68$ Nm. La fréquence maximale de rotation des turbines en commande en couple a de même été modifiée : le réglage d'usine de cette valeur — accessible via la broche **Pn407** — été relevé de 1000 rpm à 1200 rpm pour la première série de mesures, puis à 1440 rpm pour la seconde, ce qui a permis aux turbines de tourner à une fréquence maximale de 10 puis 12 Hz.

2.1.4 La transmission

Nous ne nous sommes pas trompés dans le calcul de fréquence de rotation des turbines ! Les moteurs sont en effet reliés à des poulies **Binder AT5** possédant 36 dents du côté du moteur et 72 dents du côté des turbines. Ce rapport de poulie ne permet pas de tourner aussi vite qu'avec deux poulies identiques, mais la précision de la régulation en vitesse est alors deux fois meilleure. De plus, il est possible d'exercer un couple plus grand sur les turbines, ce qui est indispensable, nous le verrons par la suite, lorsque l'écoulement se trouve dans les états bifurqués. La position des moteurs étant sensiblement différente en haut et en bas, la transmission entre les poulies est assurée par des courroies dentées **Brecoflex AT5** de 1100 mm en bas **Synchroflex AT5** de 1230 mm en haut. Ces courroies ont une âme en acier, ce qui permet une excellente rigidité en fonctionnement. Des galets tendeurs ont été installés avec l'aide d'Éric Herbert afin d'assurer une tension constante sur toute la longueur des poulies. Un tensiomètre de courroie **Binder SM4** a permis de mesurer la tension que nous imposions à la courroie. Nous avons tenté de garder cette tension de courroie une fois l'appareil rendu à ses propriétaires.

Les turbines sont quant à elles reliées à leur poulie par un arbre mécanique, initialement de diamètre $\varnothing 50$ mm. Pour des raisons mécaniques (voir section 2.1.6), nous avons ensuite réduit le diamètre des arbres à $\varnothing 30$ mm, et nous avons utilisé des moyeux adaptateurs permettant de réutiliser certaines pièces fabriquées pour le plus grand arbre mécanique.

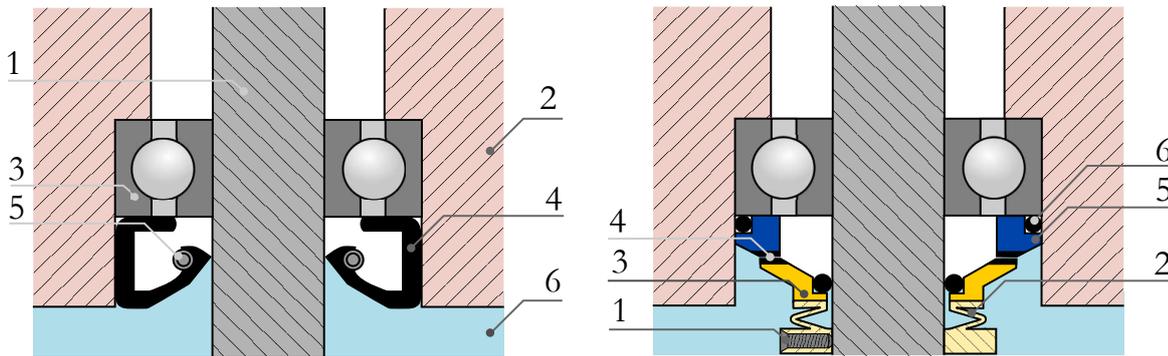


FIGURE 2.4 – Exemples de joints assurant une étanchéité dynamique. A g., joint à lèvres. (1), arbre mécanique (tournant); (2), carter (fixe); (3), roulement : la bille au centre permet la rotation de la partie intérieure, la partie extérieure étant fixe. (4), joint à lèvres en polymère (fixe, frotte sur l'arbre). (5), ressort qui comprime la lèvres. (6), fluide confiné. A dr., garniture mécanique simple : la partie fixe (1, 2, 3) est constituée d'un manchon vissé (1) à l'arbre mécanique, qui va comprimer un ressort (2) solidaire d'un anneau (3) dont une des faces, le grain mobile est très précisément usinée (4 en bas). Cette face vient s'approcher très près du grain fixe (4 en haut) solidaire de la partie fixe (5) de la garniture, elle-même solidaire du carter immobile. Des joints toriques (6) viennent assurer les étanchéités statiques pour la partie mobile comme pour la partie fixe. Les autres éléments mécaniques sont inchangés.

2.1.5 Les châssis

La transmission de puissance mécanique via les courroies peut provoquer le tangage du châssis sur lequel les poulies sont installées. C'est pourquoi l'expérience VK2 utilise deux « bâtis » découplés. Le premier supporte les deux moteurs et leurs poulies. Le second châssis, posé sur une lourde table en marbre, supporte l'expérience et permet de limiter toutes les vibrations liées à la transmission mécanique. Les deux bâtis sont entrelacés, mais le manque de rigidité du premier empêchait une tension constante des courroies. Par conséquent, nous les avons reliés, de manière rudimentaire, en utilisant des éponges. Cela a également permis de notablement diminuer certaines vibrations.

2.1.6 Étanchéité en rotation, boîtes à roulement

Les tests effectués sur l'expérience de von Kármán nécessitent à la fois de permettre la rotation des turbines (et donc des arbres mécanique qui les entraînent) et d'empêcher le fluide de s'échapper de la cuve cylindrique, qui est fixe, dans laquelle il est confiné. Plusieurs systèmes permettent d'assurer une telle *étanchéité en rotation* [118] : le plus simple d'entre eux est le *joint à lèvres*, ou *joint SPI*. Ce joint, généralement fabriqué en polymère, est fixé sur la partie statique de l'expérience. Une lèvres (quelquefois plusieurs) de ce joint va venir frotter contre l'arbre, éventuellement comprimée par un ressort (cf. fig. 2.4). On parle alors d'étanchéité *radiale*. Des joints SPI en Viton[®] ont été utilisés jusqu'au début 2011. Les frottements engendrés par ces derniers, notamment sur les arbres de diamètre $\varnothing 50$ mm nous ont convaincu d'opter dans un premier temps pour des joints à lèvres en Téflon[®] fournis par Sephat, bien plus résistants et frottant moins sur les arbres.

Le remplacement des joints à lèvres n'étant pas concluant (les frottements persistaient), il a été décidé de les abandonner en septembre 2011 au profit de garnitures mécaniques EagleBurgmann HJ977-GN, tout en réduisant le diamètre des arbres mécaniques à $\varnothing 30$ mm. Les



FIGURE 2.5 – Radiateur de l'expérience VK2, collé sur le couvercle métallique du haut.

garnitures mécaniques comportent deux surfaces, le *grain mobile* lié à l'arbre en rotation, et le *grain fixe* lié au carter (et donc à la cuve). Ces deux surfaces sont rodées pour réduire leurs éventuelles aspérités ($\leq 2 \mu\text{m}$) et atteindre une surface de contact réel importante. Le grain mobile va alors être plaqué par un ressort contre le grain fixe, généralement encastré dans le carter. Les surfaces sont alors très proches l'une de l'autre, aux alentours de $5 \mu\text{m}$. Quand l'arbre tourne, un mince film de liquide va venir lubrifier l'interstice entre les deux grains : c'est ce qui va limiter les frottements. Un schéma général de garniture est présenté en figure 2.4. En outre, notre garniture est dite *équilibrée* : cela signifie que l'influence de la pression dans la cuve sur la force de fermeture — qui va plaquer les deux grains l'un contre l'autre — de la garniture est réduite. C'est donc à notre grande surprise que nous avons constaté que les garnitures frottaient moins sous une pression de 1,8 bar (recommandée par le constructeur) qu'à pression atmosphérique (0 bar) (voir section 2.3.3). Les lecteurs avertis peuvent se référer à la documentation fournie par les techniques de l'ingénieur, ou la thèse de Christophe Minet [118, 119] pour plus de détails sur l'équilibrage des garnitures, et nous ne décrirons pas les mois de déboires qui ont suivi leur installation. Le carter va ensuite servir à garder l'arbre mécanique bien aligné sur son axe de rotation. Pour cela, deux roulements à contact oblique, serrés au minimum, assurent une bonne rotation tout en éliminant la quasi-totalité du jeu mécanique.

2.1.7 Les radiateurs

Afin d'assurer une température la plus constante possible, des refroidisseurs ont été installés, sous la forme de serpentins de cuivre dans lesquels circulent de l'eau froide. Les refroidisseurs sont connectés à un bain de régulation en température, qui a été remplacé en juillet 2012 puis en février 2013 car les résistances chauffantes ne fonctionnaient plus.

2.1.8 L'expérience VKÉnergie

Dans le cadre du programme Énergie du CEA, le montage initial de VKE a été remis à neuf par Éric Herbert avec l'aide toujours précieuse de Vincent Padilla. Ce montage possède un grand nombre de caractéristiques communes avec le montage VK2 : les cuves carrées et cylindriques possèdent les mêmes sections, le même rapport de poulies, et les expériences possèdent toutes deux des systèmes de refroidissement et sont entraînées par des moteurs Yaskawa.

Il existe toutefois quelques différences de conception. Les arbres d'entraînement possèdent un diamètre $\varnothing 20$ mm, et nous n'avons pas installé de couplemètres sur ces derniers. L'étanchéité est assurée par des joints SPI en Viton. Le refroidissement est effectué avec de l'eau du robinet qui passe dans un refroidisseur plan où ont été usinées deux spirales contra-rotatives,

et ce refroidisseur est d'ailleurs plus proche des turbines : il est placé à la même cote que les boucliers en cuivre de VK2. Les moteurs Yaskawa ne fournissent chacun que 400 W de puissance à 1500 tr/mn. Ce système ne possède dernièrement qu'un seul châssis, qui est toutefois solidaire de la table en marbre contre lequel il est fixé.

2.2 Mesures

Notre expérience comporte deux grands types de mesures : le premier concerne généralement des grandeurs ponctuelles ou globales représentées par des signaux (tensions) analogiques : cela concerne les signaux de température et les autres grandeurs globales comme les vitesses et les couples des turbines. Ce sont ces mesures qui ont été effectuées principalement lors des deux premières thèses de Louis Marié et de Florent Ravelet [5, 65], et que nous compléterons par les mesures fournies par les couplemètres. Le second type recouvre les mesures de vitesse de fluide dans l'écoulement grâce au système de vélocimétrie par images de particules (*PIV* en anglais), utilisé par Romain Monchaux et ses successeurs [66], et par le système de vélocimétrie laser doppler (*LDV* ou *LDA* en anglais), qui a une fois de plus été utilisé par Louis Marié et Florent Ravelet.

Notre but a été de coupler ces différentes mesures et de les améliorer, afin d'exploiter au mieux leurs complémentarités. Cela va bien entendu nous donner des informations précieuses sur les interactions entre fluctuations du champ des vitesses et fluctuations des grandeurs globales, mais cela apporte aussi son lot de contraintes : il faut en effet que tous les systèmes fonctionnent en même temps !

2.2.1 Mesures analogiques et régulations

2.2.1.1 Acquisition des données

Carte d'acquisition Les mesures de température ainsi que celles des couples sont des tensions électriques. Pour acquérir ces signaux, nous avons utilisé jusque mars 2013 une carte d'acquisition National Instruments NI-6259 capable d'acquérir $1.25 \cdot 10^6$ échantillons par seconde sur une seule voie analogique ou $1.0 \cdot 10^6$ échantillons par seconde en effectuant un balayage sur plusieurs (jusqu'à 32) voies. Cette carte dispose également d'entrées numériques pour d'éventuels compteurs, mais elles n'ont pas été utilisées. Cette carte comporte enfin deux sorties permettant la commande des moteurs par une tension analogique.

2.2.1.2 Température

Pour mesurer d'éventuelles variations de température au sein de la cuve cylindrique, trois sondes platine PT100 sont utilisées, la première en haut de l'écoulement (proche de la turbine du haut), la seconde au centre, et la troisième en bas de l'écoulement. Ces dernières sont de simples résistances de platine, dont la résistivité a le bon goût de varier linéairement avec la température sur une large gamme, de 0 °C à 100 °C. Cependant, ces dernières sont relativement fragiles, et donc bien souvent l'une d'entre elles tombait en panne. De plus, le premier câblage de ces sondes, utilisant *quatre fils* par sonde, ne semblait pas fournir des mesures extrêmement précises.

2.2.1.3 Mesures des grandeurs globales : couple et vitesse

Mesures du variateur Les variateurs Yaskawa disposent de diverses sorties nous permettant de mesurer le couple et la vitesse des moteurs. Nous les rappelons rapidement, des informations plus complètes à ce sujet étant disponibles dans les ouvrages de Florent et de



FIGURE 2.6 – Photographie des deux couplemètres : la partie mécanique (au centre) est vissée sur sa poulie (en bas). Le boîtier électrique (au-dessus, en bleu) ne tourne pas avec le reste du dispositif et permet de connecter des sorties électriques.

Louis [5, 65]. La première consiste à afficher directement sur les variateurs la valeur des vitesses (en rpm) et des couples (en pourcentage du couple nominal) grâce aux broches Un000 et Un001, mais elle ne permet aucun enregistrement. La deuxième, utilisée par Louis, passe par un mode appelé *Data-Trace* qui permet de transférer 1000 échantillons de couple ou de vitesse ... toutes les 15 secondes, via un port série. Cela n'est pas vraiment compatible avec les expériences que nous voulons mener. La troisième, utilisée par Florent et ses successeurs, se sert d'une sortie de diagnostic — extrêmement bruitée — qui fournit elle aussi une estimation des couples, notés G_1 et G_2 et de la vitesse des moteurs, notée v_m^1 et v_m^2 . Ces mesures seront nommées *mesures variateur* pour la suite de ce manuscrit.

Mesures couplemètres Afin d'obtenir des mesures plus fiables du couple au plus près des turbines, il a été décidé d'installer des couplemètres en rotation Scaimé MR12 (cf. fig. 2.6). Ces capteurs comportent une jauge de contrainte qui n'est autre qu'une piste électrique collée sur un cylindre solidaire de l'arbre. Sous l'effet du couple moteur, les contraintes mécaniques vont déformer la piste électrique et ainsi modifier sa résistance, ce qui permet de remonter aux couples de torsion exercés sur notre arbre, notés C_1 et C_2 .

Ces couplemètres possèdent en outre un dispositif optique couplé à un réflecteur tournant permettant de mesurer l'angle de rotation des arbres mécaniques. Ce dernier nous fournit une tension TTL qui génère une période d'un signal créneau de 5 V d'amplitude à chaque fois que l'arbre tourne de 1° . En comptant à la fois les fronts montants et descendants des créneaux, il est possible de mesurer des rotations de $30'$ d'angle. Il est alors possible de calculer la vitesse de rotation des turbines en mesurant le temps mis par le couplemètre pour tourner de $30'$ d'arc. Ces vitesses seront nommées f_1 et f_2 , et sont par définition nécessairement positives. Cette mesure est plutôt précise mais souffre de deux limitations majeures : l'une provient du fait que l'échantillonnage des vitesses n'est pas régulier (ce qui nécessite une interpolation) et l'autre vient du fait que les signaux TTL ne sont pas toujours propres, ce qui crée des faux fronts positifs et négatifs qui viennent polluer le signal de vitesse avec des valeurs aberrantes.

Ce sont ces deux mesures de vitesse et de couple qui seront appelées *mesures couplemètre* dans le restant de l'ouvrage.

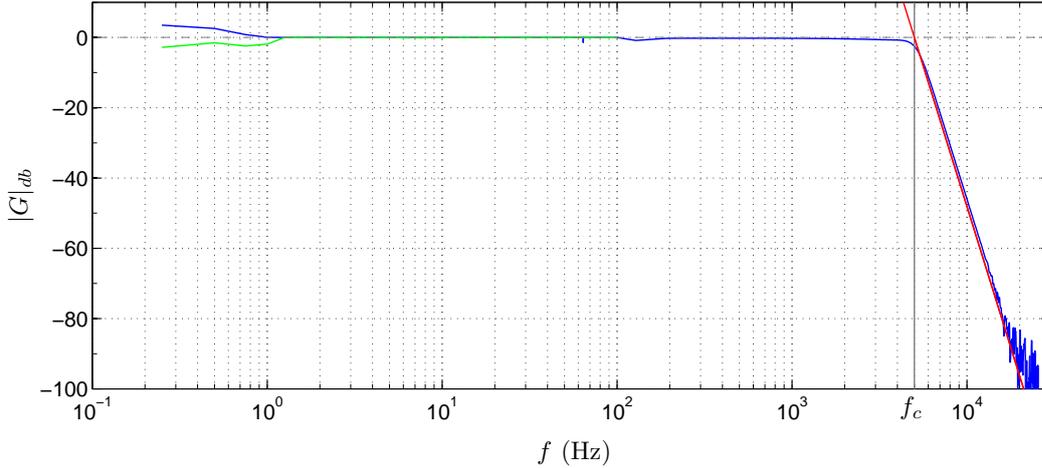


FIGURE 2.7 – Diagramme de Bode du gain $|G|$ du filtre passe-bas Krohn-Hite testé avec l'analyseur de spectre du laboratoire : (—), analyse par wobulation, (---), analyse avec bruit en entrée. Le gain à -3 dB est effectivement observé à $f_c = 5$ kHz. (---), asymptote à -160 dB/décade caractéristique des filtres d'ordre 8.

2.2.1.4 Filtrage

Nous avons vu dans la section 2.1.3 que les variateurs nous fournissaient une source non négligeable de bruit électromagnétique qui va bien sûr se traduire par un bruit important sur nos signaux analogiques, notamment aux hautes fréquences (≥ 4 kHz). Les premières mesures de couple, effectuées à 1024 Hz sur des entrées non blindées, se sont rapidement avérées polluées par du bruit subissant un repliement de spectre aux basses fréquences. Par conséquent, nous avons par la suite effectué nos acquisitions à la plus haute fréquence accessible à la carte d'acquisition NI 6259 compte tenu du nombre de voies en entrée, soit 90 kHz. Toutes les voies en entrée, à l'exception des signaux TTL, ont ensuite été filtrées numériquement par un filtre passe-bas d'ordre 6. Nous avons ensuite rajouté en amont de la carte d'acquisition deux filtres analogiques actifs Krohn-Hite FMB 3002 à l'architecture Butterworth d'ordre 8, c'est à dire de gain :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{16}}} \quad (2.2)$$

avec $f_c = \omega_c/2\pi = 5$ kHz. Ces derniers nous ont permis de filtrer les deux voies du signal de couple issu des couplemètres. Nous avons vérifié à l'analyseur de spectre (voir figure 2.7) que la fonction de transfert réelle de ces filtres correspondait aux spécifications fournies par le fabricant.

2.2.2 Les mesures de vitesse du fluide

2.2.2.1 Introduction et grandeurs utilisées

Il serait plutôt étonnant de construire une expérience de turbulence sans effectuer de mesure de vitesse de fluide ! En effet, la définition même de l'écoulement de von Kármán se reporte à la description du champ des vitesses dans le repère cylindrique ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$),

$$\mathbf{v}(r, \phi, z, t) = \begin{pmatrix} v_r(r, \phi, z, t) \\ v_z(r, \phi, z, t) \\ v_\phi(r, \phi, z, t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

pour toutes les coordonnées r (rayon), ϕ (azimut) et z (hauteur) à l'intérieur du cylindre et pour tous les instants t . Nous rappelons de plus la définition de la vorticité \mathbf{w} :

$$\mathbf{w}(r, \phi, z, t) = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} w_r(r, \phi, z, t) \\ w_\phi(r, \phi, z, t) \\ w_z(r, \phi, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Ces grandeurs *locales* permettent en outre la construction de grandeurs *globales* de l'écoulement, à savoir le moment cinétique I , la circulation Γ et l'hélicité \mathbf{H} . Nous utiliserons les conventions suivantes :

$$I(t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \times \mathbf{v} \, r dr dz d\phi \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} r v_\phi \, r dr dz d\phi \quad (2.6)$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} w_\phi \, dr dz d\phi \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \, dr dz d\phi \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, r dr dz d\phi \quad (2.9)$$

Il n'existe bien évidemment pas d'expression analytique de \mathbf{v} , \mathbf{w} , I , Γ et \mathbf{H} lorsque l'écoulement devient turbulent.

Approche naïve De même, il n'est pas envisageable d'enregistrer à des instants t suffisamment rapprochés la donnée de \mathbf{v} pour des r, ϕ, z suffisamment résolus. Tentons par exemple de décrire intégralement l'écoulement sur une minute. Nous avons vu dans l'introduction (chapitre 1) la définition de ϵ , le taux de dissipation massique de l'écoulement, ainsi que les longueurs et les temps de Kolmogorov associés. Pour une expérience typique dans l'eau, les moteurs fournissent à eux deux une puissance de 100 W. Par conséquent, si nous supposons que l'intégralité de cette puissance est dissipée dans l'écoulement turbulent,

$$\epsilon = \frac{P_{mot}}{M_{fluide}} \approx \frac{P_{mot}}{\pi R^2 h \rho} \approx 20 \, \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \quad (2.10)$$

Par conséquent, les échelles de temps et de longueur de Kolmogorov valent respectivement :

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} = 2.3 \cdot 10^{-4} \, \text{s} \quad (2.11)$$

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} = 1.5 \cdot 10^{-5} \, \text{m} \quad (2.12)$$

Ces valeurs sont comparables à celles que nous avons déterminées dans l'introduction, pour un écoulement à géométrie similaire. Nous devons donc enregistrer le champ de vitesses au moins tous les τ_η pendant une minute et pour tous les petits éléments de volume η^3 sur l'intégralité de \mathcal{V} afin de caractériser *totalemment* l'écoulement. Cela représente $3 \cdot 10^5$ instantanés contenant chacun $1.5 \cdot 10^{12}$ vecteurs à trois composantes, ce qui occuperait un exaoctet de données. Pour ordre de grandeur, cela représente cinq fois la quantité de données amassée par le CERN pour la détection du boson de Higgs, ou un vingtième du trafic internet total durant l'année 2010, ou, de manière plus pragmatique, un million de disques durs externes actuels.

L'acquisition en elle-même serait un défi technologique. Il existe en effet plusieurs méthodes de visualisation de l'écoulement dans son ensemble, comme la *vélocimétrie par image*

de particules (PIV), que nous utilisons, et la *fluorescence induite par laser* (LIF). Cependant, ces techniques de visualisation sont difficilement résolues en temps — cela demande une grande intensité lumineuse — et en espace — les caméras doivent alors avoir une excellente résolution, ou un zoom important sur une petite portion de fluide —. Les techniques de visualisation locales, comme la *vélocimétrie laser Doppler* (LDV) ou les mesures dites de *fil chaud*, sont généralement résolues en temps, mais ne permettent pas, comme leur nom l'indique, de mesurer le champ de vitesses à plusieurs endroits en même temps. Il faut de plus décrire l'écoulement à trois dimensions, c'est à dire d'examiner les trois composantes de \mathbf{v} selon les trois coordonnées. De telles PIV *volumétriques* permettant de mesurer l'intégralité de $\mathbf{v}(r, \phi, z)$ ont été développées très récemment, mais rajoutent des contraintes sur l'homogénéité de l'éclairage. Enfin, l'ensemencement se devra d'être effectué par des particules diffusantes de taille inférieure à l_η et de préférence iso-denses afin de suivre correctement le mouvement du fluide, sans le « filtrer » du fait de leur inertie, et sans aller se concentrer préférentiellement à cause des effets de pression [84].

Choix des dispositifs Il nous a donc fallu faire un choix. L'expérience VK2 possède donc une PIV stéréoscopique *non résolue en temps* et *non résolue en espace* qui cartographie les trois composantes de l'écoulement dans un plan : le champ de vitesses est dit $3C, 2D$. L'expérience VKÉnergie est quant à elle équipée d'une vélocimétrie laser Doppler (LDV) permettant de décrire de manière *résolue en temps* une composante du champ de vitesse (au choix) en un point donné. Nous allons, dans le reste de cette section, décrire plus précisément ces systèmes d'acquisition.

2.2.2.2 PIV

Généralités Le principe de la vélocimétrie par image de particules (PIV) est simple. Il consiste àensemencer l'écoulement avec des particules, puis à l'éclairer de telle manière à obtenir un plan lumineux qui passe à travers le fluide. Ce plan lumineux va être alors photographié par une caméra à deux instants très rapprochés. Les particules ensemencées vont alors apparaître en tant que pixels lumineux sur un fond sombre sur les deux photos. En comparant les deux images rapprochées, nous remarquons que l'on peut alors « suivre » le déplacement des particules. Les particules que nous utilisons mesurent entre 10 et 30 μm et sont de densité 1.4 : par conséquent, elles ne rendent pas compte de manière tout à fait fidèle du déplacement des particules fluides. Leur intérêt réside dans leur grand coefficient de diffusion, qui permet d'avoir des particules très brillantes une fois éclairées par le laser.

Pour quantifier le déplacement des particules, la première image va être divisée en petites fenêtres régulières contenant en moyenne une dizaine de particules. Ensuite, l'algorithme va tenter de retrouver dans la deuxième image le motif de chaque fenêtre de l'image initiale. Lorsque la superposition est bonne, il suffit de comparer la position du motif dans la deuxième image avec sa position dans l'image initiale pour obtenir la vitesse locale — de la boîte — de notre écoulement dans le plan lumineux. Cette boîte effectue donc une moyenne locale sur une taille supérieure à celle de nos particules : le problème de la taille des particules est alors oublié. Plus la boîte utilisée sera petite, plus l'écoulement sera finement résolu, sans toutefois (bien entendu) résoudre l'échelle de Kolmogorov η , ou même la taille des particules. L'utilisation de boîtes plus petites implique néanmoins de rajouter beaucoup de ces dernières, et l'écoulement alors très diffusif perturbera la détection des particules individuelles.

Il est possible d'obtenir la troisième composante de la vitesse locale du fluide. Pour cela, il faut filmer le plan lumineux sous deux angles distincts puis examiner les différences entre les deux champs de vitesses obtenus. Cette *stéréoscopie* permet alors de retrouver la composante normale du champ de vitesses. Des informations supplémentaires à ce sujet sont disponibles dans la thèse de Romain Monchaux [66].

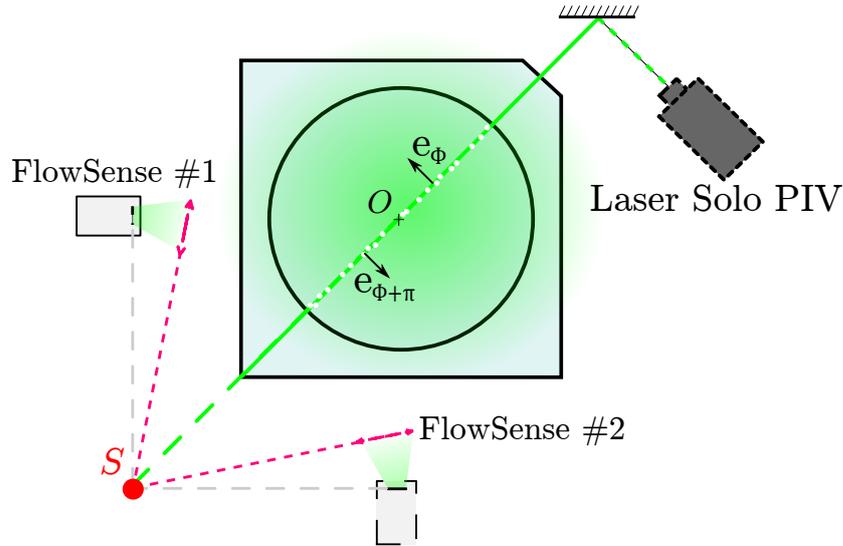


FIGURE 2.8 – Montage optique effectué pour l'expérience VK2 (vue du dessus). La nappe laser va traverser les deux cuves pour illuminer sélectivement les particules se trouvant au centre du cylindre. Ce sont ces particules qui seront visibles à la caméra. Pour obtenir une image nette sur toute la nappe laser, il faut respecter la condition de Scheimpflug (voir figure 2.9). Remarquons dernièrement le changement de signe de \mathbf{e}_ϕ lorsque la nappe traverse le centre O de l'écoulement.

Laser et caméras Notre système de PIV se compose premièrement d'un boîtier laser New Wave Research Solo PIV II. Ce dernier contient en fait deux cavités laser néodyme-YAG (Yttrium-Aluminium-Grenat), chacune étant capable d'atteindre une fréquence de répétition de 30 Hz pour une puissance nominale de 30 mJ à la longueur d'onde de 532 nm. Des tests effectués fin 2012 nous ont toutefois indiqué que le laser n'émettait plus que 75% de sa puissance nominale. Cette limitation en puissance n'est pas vraiment gênante pour nos expériences qui fonctionnent à moins de 33% de la puissance nominale.

Une lentille cylindrique va ensuite transformer ce faisceau en une nappe laser, qui va être réfléchiée par un miroir avant de traverser la cuve carrée par la petite fenêtre à 45° . La nappe laser passe ensuite par le centre du cylindre (voir figure 2.8) pour illuminer les particules qui la traversent. La nappe traversant le cylindre de part en part, nous disposons *in fine* de la mesure du champ de vitesses à deux azimuts ϕ_0 et $\phi_0 + \pi$. Cela nous procure un avantage certain en matière de statistiques, mais nécessite de faire attention au changement de signe de \mathbf{e}_ϕ lorsque nous tournons de π radians. La composante normale de la vitesse v_{azim} , calculée par les caméras, ne prend pas en compte ce changement pour le calcul de v_ϕ . Par conséquent, nous avons convenu d'utiliser un rayon r signé (allant de $-R$ à R) et de montrer v_{azim} plutôt que v_ϕ lorsque nous montrerons des champs de vitesses issus de la PIV.

Deux caméras FlowSense 2M fournies par DANTEC filment l'écoulement avec un angle de 90° l'une par rapport à l'autre, et par symétrie filment la nappe laser avec un angle de 45° chacune et enregistrent les images. Il ne sera donc pas possible, surtout à grande ouverture, d'obtenir une nappe laser entièrement nette, à cause de la profondeur de champ limitée. Pour obtenir une nappe laser parfaitement nette, il convient alors de pivoter les axes des optiques des caméras afin de respecter la condition de Scheimpflug (voir fig. 2.9). Les images ainsi obtenues possèdent une définition de 1600×1200 pixels qui sont découpées en fenêtres de 32×32 pixels en général, ou 16×16 pixels quand nous voulons obtenir une meilleure résolution du champ de vitesses.

Acquisition, post-traitement Le traitement des données est imposé par notre fournisseur de système PIV : nous utilisons donc Dynamic Studio qui permet d'effectuer des

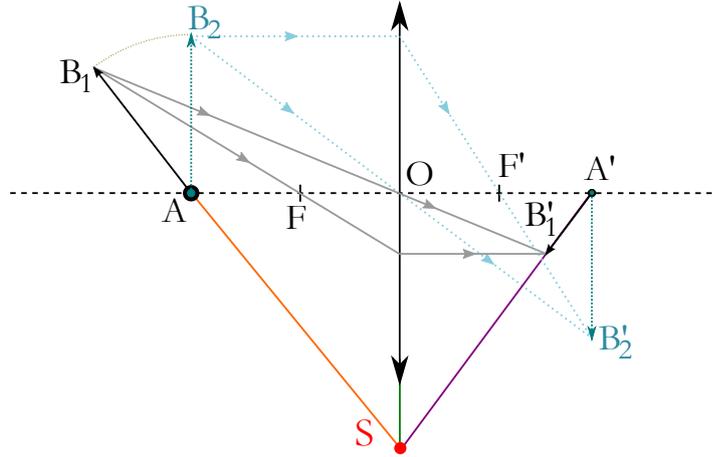


FIGURE 2.9 – Illustration de la condition de Scheimpflug. Lorsque le plan-objet (AB_1) (chez nous, la nappe laser) n'est pas parallèle à l'axe optique (SO), il faut veiller à ce que le plan-image ($A'B'_1$), l'axe optique et le plan-objet soient concourants (ici, au point S) pour que toute l'image soit nette.

calibrations pour la PIV stéréoscopique (se référer une fois de plus à la thèse de Romain Monchaux à ce sujet [66]), mais aussi d'automatiser en partie ce dernier : il est donc possible de traiter à la volée plusieurs expériences afin de récupérer les champs de vitesses à trois composantes. Ce logiciel souffre toutefois d'une lenteur excessive et plante parfois, faute d'avoir anticipé un manque d'espace disque...

C'est principalement la vitesse de l'ordinateur (et des logiciels) qui va limiter la fréquence d'acquisition des images permettant la PIV. Le système actuel permet d'acquérir jusqu'à 60 000 images sans trop grogner, mais nous avons rarement dépassé les 10 000 instantanés pour limiter le temps de dépouillement. La fréquence d'acquisition des champs de vitesses, fixée à 15 Hz, est bien trop faible pour résoudre correctement l'évolution temporelle du champ de vitesses du fluide. Ces « instantanés » ne pourront a priori pas suivre la totalité de la dynamique de l'écoulement. Une fois les disques durs remplis, il n'est plus possible d'effectuer de traitement, et il devient nécessaire d'utiliser des disques durs externes. Ces derniers ralentissent fortement le traitement déjà long (parfois plus d'une journée) des séries d'images. Les fichiers issus du dépouillement sont ensuite soumis à un post-traitement effectué sous MATLAB afin d'en extraire certaines grandeurs caractéristiques.

2.2.2.3 Vélométrie laser Doppler

Le montage expérimental construit en 2012 par Éric Herbert utilise comme sur VKE un système de LDV. Cette technique autorise des fréquences d'échantillonnage de la vitesse bien plus élevées que la PIV. Nous allons en effectuer un bref rappel dans cette section. Il est intéressant de noter que la vélocimétrie laser Doppler est une technique plus ancienne que la PIV, qui finalement n'est devenue prépondérante qu'à l'arrivée des caméras numériques !

Principe de fonctionnement Cette mesure repose sur les *interférences* (voir figure 2.10) : deux faisceaux laser de longueur d'onde λ et cohérents sont générés. Ces derniers se croisent selon un angle δ pour former des franges (ici horizontales) d'interférence de pas :

$$p = \frac{\lambda}{2 \sin(\delta/2)} \quad (2.13)$$

Les particules qui franchissent alors les franges d'interférence vont diffuser la lumière avec une intensité lumineuse modulée à la fréquence :

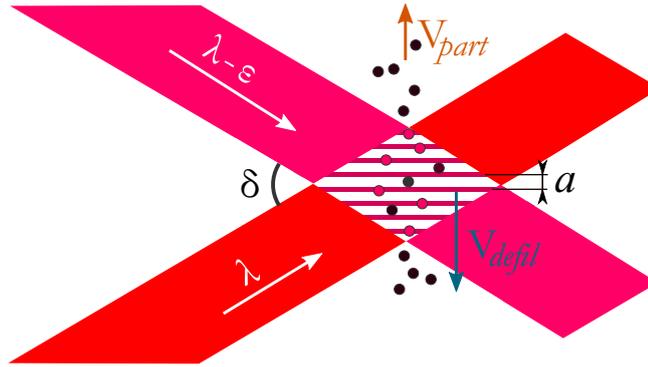


FIGURE 2.10 – Principe de fonctionnement de la vélocimétrie laser Doppler (LDV) : deux faisceaux cohérents très légèrement décalés en fréquence se coupent dans une zone d'interrogation, formant un motif d'interférences. Les particules qui se déplacent dans ce motif à une vitesse V_{part} diffusent alors de la lumière avec une modulation de fréquence bien particulière, qui permet de remonter à la vitesse des particules V_{part} .

$$f = \frac{|V_{\text{part}}|}{p} \quad (2.14)$$

Cela nous permet de remonter à la valeur absolue de la composante normale aux franges de la vitesse des particules, V_{part} . Si maintenant, nous utilisons des lasers possédant des longueurs d'onde λ et $\lambda - \varepsilon$ très proches, les franges elles-mêmes vont défiler à la vitesse $V_{\text{defil}} = 2p\varepsilon$. La fréquence de modulation de la diffusion de lumière sera alors :

$$f = \frac{|V_{\text{defil}} + V_{\text{part}}|}{p}. \quad (2.15)$$

En prenant V_{defil} suffisant, nous pouvons nous assurer de lever l'ambiguïté sur le signe de V_{part} . Pour un nombre de particules suffisant, il est possible d'obtenir des fréquences d'échantillonnage élevées, dépassant $1/\tau_\eta$, ce qui permet en théorie de reconstruire le spectre des fluctuations de vitesses en fonction du temps. Toutefois, ce système ne fournit pas d'échantillons à des instants *réguliers* : il faut donc l'interpoler avant d'en regarder le spectre. L'interpolation la plus courante, le « sample and hold » [120], consiste à transformer le signal en une fonction constante par parties qui sera elle-même ré-échantillonnée de manière régulière.

Dispositif Le dispositif de LDV dont nous disposons au sous-sol du laboratoire n'est pas le système utilisé dans les précédentes thèses effectuées au sein du laboratoire. Ce dernier, neuf, est constitué d'un boîtier laser FlowExplorer fourni par Dantec[®], émettant deux faisceaux espacés de 6 cm qui se croisent à une distance de 300 mm (focale de la LDV). Ce boîtier contient également le photomultiplicateur indispensable pour mesurer l'intensité lumineuse diffusée. Il est possible de tourner le laser afin d'étudier la composante verticale (v_z) ou azimutale (v_ϕ) de la vitesse grâce à une platine construite par Vincent Padilla. Cette platine est reliée à une traverse, qui a pour fonction de translater le laser dans deux directions, ce qui va nous permettre de cartographier l'écoulement. Deux boîtiers supplémentaires effectuent le lien avec l'ordinateur qui commande l'expérience : le premier, le BSA (pour Burst Signal Analyser), commande directement le laser, tandis que le second, le contrôleur de traverse, gère le déplacement du laser. Un logiciel, encore fourni par Dantec[®], permet d'effectuer les acquisitions et de régler un bon nombre de paramètres (notamment le mode d'acquisition).

En ensemencant suffisamment l'écoulement, il est possible d'atteindre des fréquences d'échantillonnage de 5 kHz. Par conséquent, cette technique permet de suivre correctement les fluctuations rapides de l'écoulement turbulent instantané. Cependant, les fichiers générés deviennent alors fastidieux à traiter sous MATLAB.

Fluide	He _{liq} , 4K	Hg	SF ₆ (15 bar)	Eau, 50°C	Na, 100°C	Eau, 30°C
ν (mm ² .s ⁻¹)	0.026	0.092	0.15	0.55	0.73	0.80
Re (1 Hz)	$2.4 \cdot 10^6$	$6.8 \cdot 10^5$	$4.17 \cdot 10^5$	$1.14 \cdot 10^5$	$8.6 \cdot 10^4$	$7.8 \cdot 10^4$

Fluide	Eau	Eau, 10°C	He _{gaz}	Eau, 0°C	Air	Glycérol
ν (mm ² .s ⁻¹)	1.00	1.31	1.49	1.79	16.0	951
Re (1 Hz)	$6.6 \cdot 10^4$	$4.8 \cdot 10^4$	$4.2 \cdot 10^4$	$3.5 \cdot 10^4$	$3.9 \cdot 10^3$	$6.6 \cdot 10^1$

TABLE 2.2 – Tableau décrivant la viscosité cinématique de certains fluides, à 20°C sauf mention contraire. Les nombres de Reynolds atteints dans l'expérience pour une fréquence de rotation des turbines de 1 Hz sont aussi consignés. Pour un extrait plus complet sur la viscosité des mélanges eau-glycérol, se reporter à la thèse de Florent Ravelet [65].

2.3 Quelles grandeurs pour décrire l'écoulement ?

2.3.1 Nombre de Reynolds

Nous avons vu dans l'introduction générale de cette thèse la définition du nombre de Reynolds. Afin de l'appliquer à l'écoulement de von Kármán, il nous faut déterminer une longueur caractéristique de l'écoulement : c'est une longueur suivant laquelle la vitesse du fluide va varier significativement, généralement prise comme une longueur « intégrale » de l'écoulement. De même, il nous faut une vitesse caractéristique d'écoulement. Nous avons donc choisi d'utiliser comme définition du Re dans notre écoulement :

$$Re = \frac{l_c v_c}{\nu} = \frac{R \times 2\pi R f}{\nu}, \quad (2.16)$$

où nous avons défini ici la fréquence de rotation caractéristique $f = 0.5(f_1 + f_2)$ des turbines. Nous voyons que la viscosité cinématique ν joue ici un rôle crucial si nous voulons atteindre des Re élevés et effectuer des expériences dans le régime de turbulence *pleinement développée*. La table 2.2 indique la viscosité cinématique ν de plusieurs fluides et les nombres de Reynolds qui seraient atteints dans notre expérience avec de tels fluides. Nous voyons ici que l'eau permet d'atteindre sans trop de difficultés expérimentales un Re très élevé, jusqu'à $1.0 \cdot 10^6$. Seuls quelques fluides permettent d'atteindre des valeurs plus élevées de cette grandeur :

- l'hélium liquide (voire superfluide) autorise des Re extrêmement élevés, mais nécessite une réfrigération gigantesque pour absorber la chaleur produite. Il est utilisé dans SHREK.
- le mercure permet également d'atteindre des Re plus élevés, mais il est toxique et très dense. Cela provoquerait en outre des problèmes de pression dans la cuve.
- l'hexafluorure de soufre SF₆ n'est pas toxique autorise des nombres de Reynolds très élevés ... mais sous une pression également très élevée. Il est utilisé notamment dans les expériences au Max Planck Institute de Göttingen [121].
- le sodium liquide est utilisé dans VKS mais requiert d'importantes précautions à cause de sa réactivité.

Il est également possible, pour des écoulements turbulents, de définir un nombre de Reynolds *microscopique*, basé sur l'échelle microscopique de Taylor ℓ selon une direction \mathbf{e}_j de l'écoulement (généralement, la direction où v_j est la plus importante) :

$$\ell^2 = \frac{v_{\text{rms}}^2}{\langle (\partial_j v_j)^2 \rangle} \quad (2.17)$$

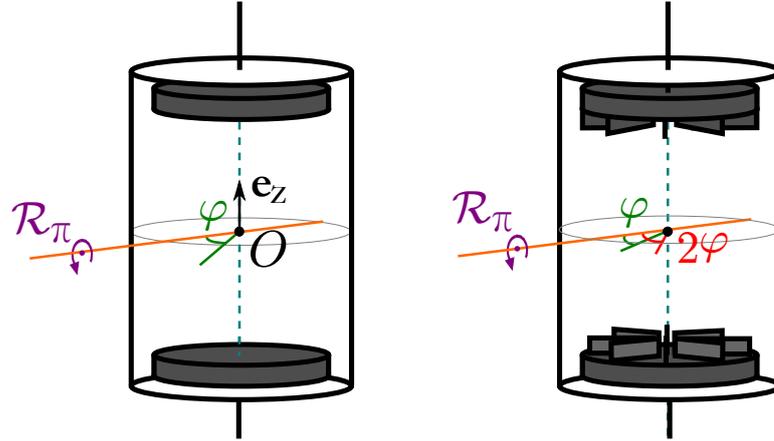


FIGURE 2.11 – Symétries de l'écoulement de von Kármán. À gauche, l'expérience « initiale » munie de disques lisses. Rien ne nous permet de distinguer l'expérience tournée d'un angle φ de l'originale, pour tout angle φ de rotation. Cela n'est plus rigoureusement vrai dans le cas où les turbines sont munies de pales (à droite) : dans ce cas, seul un ensemble fini d'angles $\{\varphi, 2\varphi, \dots\}$ laissent l'expérience inchangée.

(nous n'avons pas sommé sur les indices répétés j). La valeur de v_{rms} est tout simplement l'écart-type de $|\mathbf{v}|$. L'expression du nombre de Reynolds microscopique R_λ est alors :

$$R_\lambda = \frac{v_{\text{rms}} \ell}{\nu} \quad (2.18)$$

Ce nouveau nombre de Reynolds permet de mieux saisir l'intensité des fluctuations du champ de vitesse, qui est plus intimement liée à la turbulence que la simple donnée de la vitesse typique et de l'échelle intégrale. Toutefois, à haut nombre de Reynolds, les valeurs de Re et de R_λ sont généralement liées par la relation $R_\lambda \sim Re^{1/2}$.

2.3.2 Symétries

L'expérience de von Kármán possède un avantage indéniable sur d'autres expériences de turbulence : ses *symétries*. Les symétries permettent en général de simplifier grandement les équations physiques en annulant certaines contributions dont nous voulons éventuellement nous débarrasser.

2.3.2.1 Axisymétrie

Définition et validité Nous pouvons voir que l'expérience « initiale » de von Kármán — munie de disques lisses — est dite *axisymétrique*. Il n'est en effet pas possible de distinguer deux expériences construites identiques, mais dont l'une d'entre elles aurait été pivotée d'un angle φ par rapport à l'axe porté par \mathbf{e}_z (voir figure 2.11). On dit que la rotation d'angle φ *laisse l'expérience invariante*. Les grandeurs statistiques de l'écoulement ne peuvent alors pas dépendre de cet azimut φ . Il est alors possible de décrire l'ensemble des grandeurs statistiques de l'écoulement (3D) uniquement en l'observant pour un φ particulier.

Nos turbines sont toutefois munies de pales : par conséquent, seules des rotations d'angles bien précis — correspondant à l'angle entre les pales : $\varphi, 2\varphi, \dots$ — vont laisser l'expérience invariante. L'expérience n'est donc plus rigoureusement axisymétrique. Nous supposons cependant que les fluctuations azimutales des grandeurs statistiques sont très faibles une fois les turbines en rotation.

Répercussions sur les grandeurs de PIV Nous avons déjà vu que le champ de vitesses fourni par la PIV ne nous donne les informations que sur un seul plan méridien, ce qui

correspond à un champ de vitesses \mathbf{v} à un azimut ϕ_0 fixé. L'hypothèse d'axisymétrie va nous permettre d'oublier cette limitation : puisque l'écoulement produit par les turbines en rotation ne dépend plus de ϕ , notre description à un seul $\phi = \phi_0$ suffit à décrire tout l'écoulement. Les grandeurs comme I et Γ s'en trouveront simplifiées, et nous simplifierons volontairement celle de \mathbf{H} :

$$I = \frac{2\pi}{\mathcal{V}} \int_{r,z} r v_\phi r dr dz \quad (2.19)$$

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\mathcal{V}} \int_{r,z} w_\phi dr dz \quad (2.20)$$

$$H = \frac{2\pi}{\mathcal{V}} \int_{r,z} v_\phi w_\phi r dr dz \quad (2.21)$$

2.3.2.2 \mathcal{R}_π symétrie

Définition Comme nous l'avons vu dans la section 2.1, le montage est constitué de deux turbines identiques se faisant face dans une enceinte cylindrique fermée. Lorsque les turbines sont à l'arrêt, il est possible de trouver un axe horizontal, passant par le centre de l'expérience, tel qu'une rotation de π radians autour de celui-ci (un retournement) laisse l'expérience invariante. C'est ce qu'on appelle la \mathcal{R}_π symétrie (voir illustration 2.11). Lorsque les turbines tournent, l'opération revient à échanger les fréquences de rotation f_1 et f_2 : par conséquent, si les turbines tournent à la même vitesse, l'expérience reste \mathcal{R}_π symétrique. Nous pouvons voir d'ailleurs que les grandeurs globales de PIV possèdent des propriétés remarquables par rapport à la \mathcal{R}_π symétrie :

$$\mathcal{R}_\pi(I) = -I \quad (2.22)$$

$$\mathcal{R}_\pi(\Gamma) = -\Gamma \quad (2.23)$$

$$\mathcal{R}_\pi(H) = H \quad (2.24)$$

Pour des expériences \mathcal{R}_π symétriques, on a donc $I = \Gamma = 0$, mais une hélicité non nulle peut exister.

Distance à la \mathcal{R}_π symétrie Il est intéressant de caractériser précisément la distance à la \mathcal{R}_π symétrie : selon nos définitions, une expérience de commande en vitesse à $(f_1, f_2) = (3 \text{ Hz}, 5 \text{ Hz})$ possède le même nombre de Reynolds qu'une expérience à $(2 \text{ Hz}, 6 \text{ Hz})$. La deuxième expérience est toutefois plus asymétrique que la première. La littérature s'est bien entendu attaquée à caractériser cette *distance* à l'écoulement parfaitement symétrique $f_1 = f_2$, plusieurs définitions étant utilisées :

1. La plus simple est fournie par C. Nore *et al.* [89]. Elle utilise f et le rapport $s = f_1/f_2$. Ce paramètre s a le désavantage de posséder une symétrie $s \rightarrow 1/s$, peu commode, lorsqu'on échange f_1 et f_2 . De plus, il tend vers l'infini quand $f_2 \rightarrow 0$.
2. R. Labbé et J.-F. Pinton [53], comme L. Marié dans sa thèse, transforment (f_1, f_2) en coordonnées polaires : (\tilde{f}, ϑ) avec

$$\tilde{f} = \sqrt{0.5(f_1^2 + f_2^2)} \quad (2.25)$$

$$\tan(\vartheta) = \frac{f_1}{f_2}. \quad (2.26)$$

Ce système de coordonnées se transforme de manière particulière par \mathcal{R}_π symétrie : ϑ devient $\frac{\pi}{4} - \vartheta$ et f reste identique. Pour une expérience parfaitement symétrique, on a donc $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, ce qui, en plus d'être lourd à utiliser au quotidien, semble relativement contre-intuitif.

3. Plus récemment, le groupe de Saclay a décidé d'utiliser deux paramètres simples : f déjà défini précédemment, et θ , défini par :

$$\theta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} \quad (2.27)$$

L'application de la \mathcal{R}_π symétrie à (f, θ) nous donne très simplement $(f, -\theta)$. Cette notation est particulièrement intéressante dans notre cas où nous n'étudions jamais le cas co-rotatif. En effet, pour ces derniers, θ peut alors tendre vers l'infini.

Le paramètre θ vient décrire avantagement la distance à la \mathcal{R}_π symétrie dans notre expérience, lorsque nous imposons la fréquence de rotation des turbines. Il est relativement trivial de définir un paramètre identique dans le cadre de la commande en couple, où le couple (C_1, C_2) est pertinent : nous définirons alors les deux grandeurs suivantes :

$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \quad (2.28)$$

$$\gamma = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}, \quad (2.29)$$

afin de caractériser la distance à la symétrie. Nous verrons cependant que la mesure et l'imposition de ces paramètres C et γ est moins évidente à mettre en place à cause des *frottements parasites* de l'expérience.

2.3.3 Calibrations

Le but de notre expérience est double : pour la commande en vitesse, il nous faut connaître le couple exercé par le fluide sur les turbines, mesuré par les couplemètres et les moteurs. Pour la commande en couple, il faut nous assurer que le couple commandé par la consigne est effectivement transmis au système. Si ce n'est pas le cas, il faut alors savoir quel est l'écart entre la consigne et la valeur réellement imposée, ce qui revient au final à la même chose qu'en commande en vitesse. Or, nous avons vu dans la section 2.1.6 que les montages assurant l'étanchéité de l'expérience apportaient malheureusement leur lot de frottements. La mesure de couples est donc nécessairement entachée d'erreurs. Il est alors nécessaire de retirer la contribution de ces frottements avant d'aller plus loin dans l'examen des couples. Deux méthodes existent pour déterminer la contribution des frottements dans le couple total mesuré. La première implique d'effectuer des expériences sans turbine. Le couple exercé par le fluide sur l'arbre tournant est alors négligeable devant les frottements. Cette technique permet en outre de vérifier facilement le bon fonctionnement mécanique de l'expérience : pour toute fréquence de rotation, les frottements sont *a priori* similaires. Cela est bien vérifié dans la figure 2.12, mais uniquement pour la garniture du bas, qui était la seule bien réglée à l'époque de la mesure.

La deuxième technique, plus souvent employée, consiste à faire tourner les turbines à un θ fixé pour différentes fréquences de rotation. Ces fréquences s'échelonnent généralement de 1 Hz à 12 Hz, les couples des expériences à plus basse fréquence de rotation étant notoirement peu fiables. Nous pouvons alors voir que les couples s'alignent plutôt bien selon une courbe quadratique du type $C = a_1 f^2 + a_2$. Le paramètre a_2 représente alors le prolongement en $f = 0$ de notre ajustement, qui n'est autre que le *frottement parasite* qui vient entacher notre mesure.

Le problème ne s'arrête pas là. En effet, il est tout à fait illusoire de croire que ces frottements sont reproductibles : une très large dispersion est en effet observée au niveau des frottements statiques. Nous n'avons pas tenté de déterminer trop précisément les causes d'un tel frottement, le domaine relevant ici d'un certain masochisme... comme le montre la figure 2.13, où des tests ont révélé que la pression avait une influence considérable sur la valeur

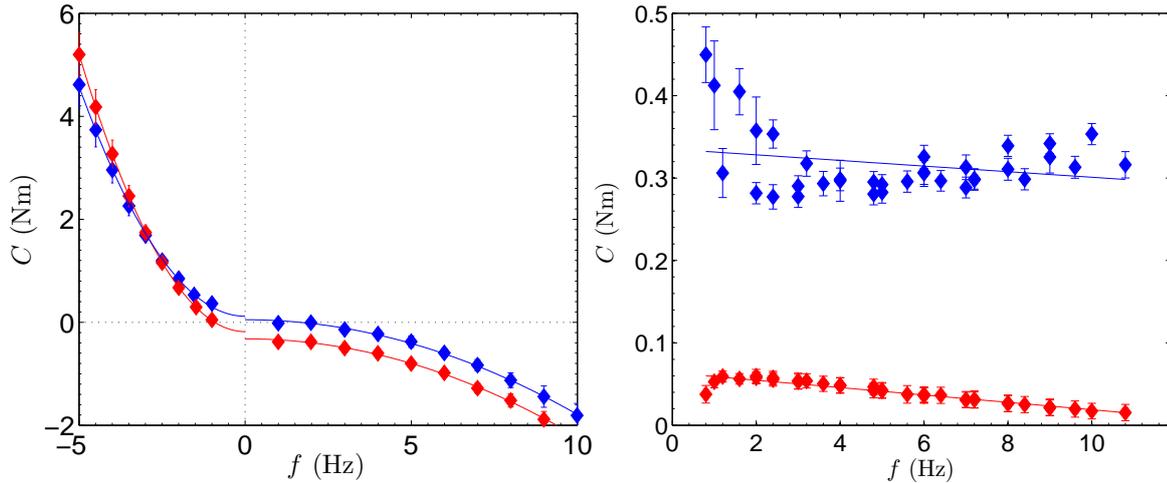


FIGURE 2.12 – Les deux méthodes utilisées pour calibrer l'expérience afin de déterminer les frottements statiques. Les couples de la turbine basse (\blacklozenge) et de la turbine haute (\blacklozenge) sont représentés, les barres d'erreur représentant les écarts-types des couples en question. À gauche, calibration avec turbines : les fréquences du sens (+) sont notées positives et celles du sens (-) sont notées négatives. Pour chaque sens de rotation, nous effectuons des expériences à une valeur de θ fixée, pour plusieurs fréquences f de rotation des turbines. Nous ajustons ensuite les valeurs du couple selon une loi quadratique en f . Le prolongement à $f = 0$ de cet ajustement donne la valeur des frottements statiques. À droite, calibration effectuée sans turbine. Dans ces conditions, la rotation des arbres devrait avoir une influence quasi-nulle sur les couples. Nous vérifions alors que le couple est quasi-constant au niveau de la turbine du haut (garniture bien réglée).

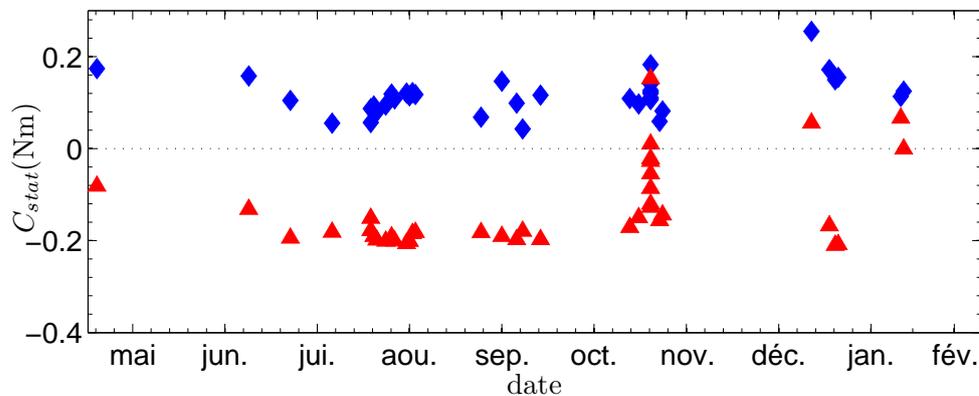


FIGURE 2.13 – Évolution des couples statiques bas (\blacklozenge) et haut (\blacktriangle) durant l'année 2012 et le début de l'année 2013. La décision d'effectuer des calibrations journalières a été prise durant le mois de juin 2012.

des frottements statiques (voir la série verticale de points de la figure 2.13 pour des expériences effectuées le même jour à des pressions différentes!). Nous considérerons cependant qu'une calibration par jour — effectuées depuis juin 2012 — suffit à éliminer correctement les frottements statiques de l'expérience quand les autres conditions expérimentales restaient constantes.

Notre parti pris pour les calibrations est d'effectuer ces dernières dans les conditions qui requièrent le plus de couple, afin de minimiser l'effet lié aux frottements. Comme nous le verrons dans le chapitre 5 consacré à la commande en vitesse, cela implique d'effectuer les

Grandeur	R	ρ	f	C	ν
Décomposition	L	$M.L^{-3}$	T^{-1}	$M.L^2.T^{-2}$	$L^2.T^{-1}$

TABLE 2.3 – Les différentes grandeurs à notre disposition, et leur décomposition sur les grandeurs physiques de base du système international : ici, L représente les longueurs, M la masse et T le temps.

calibrations avec un écoulement bifurqué, qui sont alors essentiellement non-symétriques. Il est possible que cela induise une légère asymétrie dans les divers tracés de la suite de ce manuscrit.

2.3.3.1 Couples adimensionnés K_p

Maintenant que nous nous sommes chargés d'éliminer les couples parasites venant perturber la mesure de la contribution de la turbulence au couple total, il va être possible de définir de nouvelles grandeurs sans dimension. En effet, il nous est difficile de comparer, par exemple, les valeurs de couple pour deux fluides aux masses volumiques différentes $\rho_1 \neq \rho_2$. L'analyse dimensionnelle va alors nous guider pour définir des vitesses et des couples sans dimension qui nous permettront de comparer les résultats d'expériences pratiquées avec des fluides différents. La table 2.3 recense la liste des grandeurs à notre disposition pour cet exercice.

Commande en vitesse En commande en vitesse, il s'agit donc de créer, à partir de f , R , ν et ρ , un couple caractéristique de l'écoulement :

$$C_{\text{carac}} = R^{p_1} (2\pi f)^{p_2} \rho^{p_3} \nu^{p_4} \quad (2.30)$$

$$M.L^2.T^{-2} = L^{p_1-3p_3+2p_4} M^{p_3} T^{-p_2-p_4}, \quad (2.31)$$

Il faut donc résoudre trois équations à quatre inconnues. Cependant, nous avons *déjà* construit une grandeur sans dimension qui relie ν à R et f , le nombre de Reynolds, pour caractériser les écoulements de von Kármán. Pour tout couple caractéristique C_{carac} , $C_{\text{carac}}/\text{Re}^3$ est donc un autre couple caractéristique tout aussi justifié du point de vue de l'analyse dimensionnelle. Des arguments plus physiques nous conforteront dans notre décision de supposer $p_4 = 0$ afin d'éliminer ν de la définition de C_{carac} , ce qui nous donne :

$$C_{\text{carac}} = \rho R^5 (2\pi f)^2, \quad (2.32)$$

ce qui nous permet de définir un couple sans dimension, K_p , défini comme le rapport du couple mesuré C et du couple caractéristique C_{carac} . Il nous permet en outre de définir deux nouvelles quantités, que nous rappelons à titre d'exhaustivité, étant largement utilisés dans les thèses précédentes [5, 65] : ΔK_p , liée à la distance à la symétrie, et ΣK_p , la version symétrique des couples adimensionnés :

$$\Delta K_p = K_{p,1} - K_{p,2} \quad (2.33)$$

$$\Sigma K_p = K_{p,1} + K_{p,2} \quad (2.34)$$

Commande en couple En commande en couple, nous pouvons de même définir une fréquence caractéristique à partir de C , ρ et R , en éliminant à nouveau ν :

$$f_{\text{carac}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{\rho R^5}} \quad (2.35)$$

Cette fréquence nous permet de définir les fréquences adimensionnées f_p . En outre, il faut en toute rigueur utiliser f_{carac} pour définir le nombre de Reynolds en commande en couple, noté

\tilde{Re} :

$$\tilde{Re} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{C}{\rho R}} \quad (2.36)$$

Ce nombre vaut $1.3 \cdot 10^5$ lorsqu'on demande 10% du couple nominal dans l'eau. Cette valeur correspond plutôt à des écoulements bifurqués qu'à des écoulements symétriques, où la fréquence de rotation des turbines est bien plus élevée que f_{carac} .

2.4 Conclusion

Nous avons décrit, au cours de ce chapitre, le montage expérimental VK2 — principal montage utilisé —, ainsi que le montage VK-Énergie. Ces deux expériences similaires, ont pour base commune :

- Un écoulement qui est produit par la rotation de deux turbines munies de pales dans un cylindre rempli d'eau.
- Des mesures de couple et de vitesse, fournies par les moteurs (et éventuellement les couplemètres) entraînant les turbines.
- Des moteurs permettant indépendamment d'imposer le couple transmis aux turbines ou la fréquence de rotation des turbines.
- Un écoulement toujours considéré *en moyenne* axisymétrique, et, à vitesses des turbines identiques, \mathcal{R}_π symétrique.
- Une distance à la \mathcal{R}_π symétrie, notée θ en commande en vitesse et γ en commande en couple.
- Une caractérisation non ambiguë des écoulements grâce à ce paramètre d'asymétrie et à plusieurs nombres sans dimension, Re , le nombre de Reynolds et les couples ou les vitesses adimensionnés K_p et f_p selon le type de commande choisi.

La principale différence entre les deux expériences provient des techniques optiques qu'elles emploient pour étudier plus précisément l'écoulement.

- L'expérience VK-Énergie dispose d'une vélocimétrie Laser Doppler, permettant d'aller explorer de manière *résolue en temps* la vitesse en un point de l'écoulement. L'échantillonnage effectué est néanmoins irrégulier.
- L'expérience VK2 possède une PIV stéréoscopique, permettant de cartographier les trois composantes de l'écoulement instantané sur un plan, sans pouvoir examiner les fluctuations instantanées de la vitesse. Elle possède en outre des couplemètres qui permettent une étude plus précise du couple exercé par le fluide sur les turbines.

*

CHAPITRE 3

TRANSITIONS DE PHASE

Avant-propos

Nous allons ici illustrer ici quelques résultats de la thermodynamique liés aux transitions de phase. Nous avons montré, dans l'introduction (chapitre 1), qu'il existait certaines similitudes intéressantes entre les systèmes à l'équilibre thermodynamique et les écoulements turbulents, comme les concepts de *degrés de liberté* ou l'émergence de *propriétés statistiques*. Nous allons donc expliciter dans ce chapitre la dérivation des ensembles statistiques, ainsi que les hypothèses sous-jacentes d'une telle dérivation, ce qui nous permettra de discuter les effets de leur éventuelle violation. Nous décrirons ensuite en détail une transition critique, celle du *modèle d'Ising*, afin de nous familiariser avec les notations employées dans le domaine des transitions de phase. Les principaux résultats de ce chapitre seront ensuite confrontés aux données expérimentales dans les chapitres 5 et 6 consacrés aux commandes en couple et en vitesse.

3.1 Introduction aux ensembles statistiques

3.1.1 L'exemple des sphères dures

Considérons une boîte remplie d'un très grand nombre $N \approx N_A \approx 10^{23}$ de particules sphériques de rayon $d/2$ non nul et de masse m qui interagissent entre elles uniquement via un potentiel de *sphères dures* : les particules ne peuvent pas s'interpénétrer : elles vont s'entrechoquer selon un processus élastique, sans perte d'énergie. Les particules peuvent de même percuter les parois — parfaitement réfléchissantes — de la boîte sans perdre d'énergie cinétique. Cette boîte est *isolée* du monde extérieur : aucun transfert d'énergie ou de particules n'est permis.

Le système est décrit par un Hamiltonien noté \mathcal{H} , invariant par translation dans le temps, et qui va nous permettre de calculer l'énergie du système, qui est la somme de deux contributions, l'une *cinétique*, l'autre *potentielle* :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i V(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (3.1)$$

le potentiel V est considéré comme infini pour $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| < d$, qui vient rappeler la condition de non pénétration des sphères.

Que veut-on savoir sur ce genre de système ? Une approche naïve voudrait que l'on résolve toutes les équations du mouvement pour chaque particule. Cela n'est pas envisageable compte tenu de leur nombre N très important. Nous pouvons nous convaincre que cette résolution n'aurait d'ailleurs que peu d'intérêt : ce système est chaotique, et comme nous l'avons vu dans

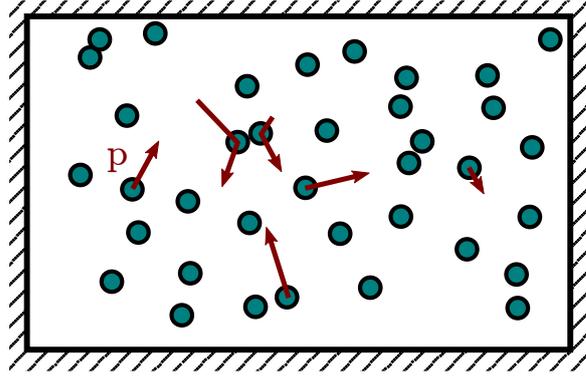


FIGURE 3.1 – Illustration du problème des sphères dures.

dans l'introduction de ce mémoire, l'imprécision que nous aurions sur les observables d'un tel système grèverait rapidement la précision de nos prédictions. Ce point de vue *microscopique* échappe donc naturellement à notre compréhension.

Ce n'est d'ailleurs généralement pas ce genre d'information qui nous intéresse : les grandeurs physiques qui nous sont généralement accessibles font intervenir un nombre n élevé lui aussi de particules, que celles-ci soient intensives comme la température T ou la pression P , ou extensives comme le volume V . Ces grandeurs sont donc la somme d'un grand nombre de contributions, chacune très difficile à prévoir et très fluctuante. Pourtant, nous allons voir qu'un traitement statistique peut nous permettre d'oublier ces fluctuations afin d'extraire des valeurs utiles, macroscopiques de notre système.

3.1.2 Première hypothèse et ensemble microcanonique

Étudions le problème de notre boîte sous un angle différent : au lieu de vouloir déterminer toutes les configurations atteintes au cours du temps dans notre boîte à partir de conditions initiales, nous pouvons oublier les conditions initiales et nous demander quelle est la probabilité que le système se trouve dans un *micro-état* donné qui possède une énergie U . Ces micro-états sont tout simplement la donnée des vitesses et des positions de toutes les particules :

$$\mathcal{C}(U) = \{(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i), \dots, (\mathbf{p}_N, \mathbf{x}_N)\} \quad (3.2)$$

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \quad (3.3)$$

Connaissant cette probabilité pour l'ensemble des micro-états, nous pourrions alors effectuer des statistiques sur notre boîte. L'ensemble statistique des micro-états sur lesquels nous allons dériver toutes nos grandeurs macroscopiques est appelé *ensemble microcanonique*.

Le second principe de la thermodynamique va venir préciser la probabilité de chacun des micro-états : ce dernier indique très simplement que *notre système à l'équilibre se trouve avec une probabilité identique dans chacun des micro-états qui lui sont accessibles*. Cette hypothèse, formulée par Ludwig Boltzmann dans les années 1870 [122], indique donc que *tous* les Ω micro-états d'énergie U sont considérés comme équivalents, et le système se trouve donc avec une probabilité :

$$p(\mathcal{C}(U)) = p(U) = \frac{1}{\Omega(U)} \quad (3.4)$$

dans chacun d'entre eux. Il est alors possible de définir une *entropie* statistique notée :

$$S = k_B \ln \Omega \quad (3.5)$$

avec k_B la *constante de Boltzmann*. L'entropie S peut être vue comme une estimation de la taille de Ω : le système étant avec une probabilité identique dans chacun des micro-états, la taille de Ω vient donc nous dire à quel point nous connaissons « mal » notre système en fixant uniquement son énergie U . Nous pouvons en outre remarquer que cette définition ne dépend absolument pas du type de système considéré. Par conséquent, nous considérerons dans la suite un système thermodynamique très général, dans l'ensemble microcanonique, dont les configurations \mathcal{C} ne dépendent que de l'énergie interne U de celui-ci.

3.1.3 La température

Nous pouvons nous étonner qu'aucune température n'intervienne directement dans nos équations lors de l'étude de notre système isolé : en effet, l'ensemble microcanonique ne les spécifie pas directement. Nous pouvons toutefois définir une température pour un tel ensemble :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \quad (3.6)$$

Par conséquent, si nous créons beaucoup d'entropie S (donc, un grand nombre de micro-états supplémentaires) en augmentant faiblement U , alors la température T est faible.

3.1.4 L'ensemble canonique

Divisons maintenant notre système à l'équilibre thermodynamique en deux sous-parties A et B séparées par une paroi qui empêche les transferts de particules et d'énergie. Nous avons ainsi divisé notre système en deux sous-systèmes indépendants, vérifiant :

$$U = U_A + U_B \quad (3.7)$$

$$\Omega(U) = \Omega_A(U_A) \times \Omega_B(U_B) \quad (3.8)$$

avec $U_A, U_B, \Omega_A, \Omega_B$ fixés. Nous pouvons alors voir que l'entropie S d'un tel système est la somme de l'entropie des deux sous-parties S_A et S_B . L'entropie est donc bien extensive. Si maintenant nous autorisons à travers notre paroi des éventuels transferts d'énergie, mais pas de particules, il paraît normal que les équations 3.7 et 3.8 restent vraies. Cette supposition est appelée *hypothèse d'additivité*. Maintenant que les transferts d'énergie sont possibles, les quantités individuelles $U_A, U_B, \Omega_A, \Omega_B$ peuvent fluctuer individuellement. Tentons d'examiner

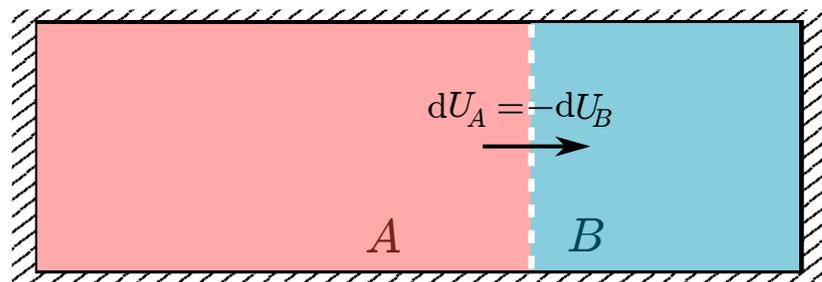


FIGURE 3.2 – Le système initial divisé en deux parties A et B à l'équilibre. Les transferts d'énergie sont autorisés à travers la paroi, mais pas les transferts de matière. A et B sont dits fermés.

la probabilité que le système global se trouve dans un état où la sous-partie B se trouve elle-même dans une des diverses configurations \mathcal{C}_B à énergie U_B fixée :

$$p_B(\mathcal{C}_B) = \frac{\Omega(U/B \in \mathcal{C}_B)}{\Omega(U)} \quad (3.9)$$

Il est cependant possible d'exprimer cette probabilité autrement en remarquant que le nombre de configurations du système complet qui autorisent B à se trouver dans le micro-état \mathcal{C}_B n'est autre que le nombre de micro-états de A d'énergie $U - U_B$.

$$p_B(U_B) = \frac{\Omega_A(U - U_B)}{\Omega(U)} \quad (3.10)$$

En constatant qu'il est possible de réécrire de la même manière la quantité $\Omega(U)$ comme la somme pour tous les micro-états \mathcal{C}_B du numérateur de l'équation 3.9, nous pouvons écrire :

$$\Omega(U) = \sum_{\mathcal{C}_B} \Omega(U/B \in \mathcal{C}_B) = \sum_{\mathcal{C}_B} \Omega_A(U - U_B) \quad (3.11)$$

Cette condition est en fait la condition de normalisation de la probabilité $p_B(U_B)$:

$$\sum_{\mathcal{C}_B} p_B(U_B) = 1 = \frac{1}{\Omega(U)} \sum_{\mathcal{C}_B} \Omega_A(U - U_B) \quad (3.12)$$

Nous concluons alors que :

$$p_B(U_B) = \frac{\Omega_A(U - U_B)}{\sum_{\mathcal{C}_B} \Omega_A(U - U_B)} \quad (3.13)$$

Si nous considérons maintenant que le sous-système A est *très grand* par rapport au système B , A va jouer le rôle de « réservoir » d'énergie et d'entropie. Nous avons dans ce cas, très généralement,

$$U_A \gg U_B \quad (3.14)$$

$$S_A \gg S_B \quad (3.15)$$

Nous considérerons donc que l'énergie interne $U - U_B$ reste proche de U . En définissant la température T de notre réservoir par l'équation 3.6, nous pouvons en déduire :

$$\Omega_A(U - U_B) = \exp \left[\frac{1}{k_B} \left(S_A(U) - \frac{\partial S_A}{\partial U} U_B \right) \right] \quad (3.16)$$

$$= \exp \left(\frac{S_A(U)}{k_B} - \frac{U_B}{k_B T} \right) \quad (3.17)$$

Définissant la quantité $\beta = 1/(k_B T)$, l'expression de la probabilité p_B de l'équation 3.13 devient alors tout simplement :

$$p_B = \frac{\exp(-\beta U_B)}{\sum_{\mathcal{C}_B} \exp(-\beta U_B)} \quad (3.18)$$

De manière très avantageuse, nous avons exprimé la probabilité que le sous-système B se trouve dans une configuration particulière uniquement en fonction de l'énergie d'une telle configuration, et d'un paramètre lié à la température. Celle-ci est définie uniquement par les propriétés du thermostat A (à l'équation 3.16). Si nous nous concentrons exclusivement sur la physique du sous-système B , la température T de celui-ci est fixée, mais plus son énergie. C'est l'ensemble *canonique*.

Une grandeur centrale de l'ensemble canonique est le dénominateur de l'équation 3.18, généralement noté \mathcal{Z} et appelé *fonction de partition*, qui sert de fait à normaliser la probabilité p_B :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{C}_B} \exp(-\beta U_B) \quad (3.19)$$

Nous pouvons alors remarquer que l'énergie moyenne du sous-système B , nommée $\langle U_B \rangle$ se définit simplement comme :

$$\langle U \rangle = \sum_{c_B} p_B U_B = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \quad (3.20)$$

Il est finalement possible de montrer qu'à l'équilibre entre le thermostat et notre sous-système B , l'énergie libre de Helmholtz $F = U_B - TS_B$ de notre sous-système B est minimale, et qu'il est possible de l'exprimer sous la forme :

$$F = -k_B T \ln \mathcal{Z} \quad (3.21)$$

3.2 L'inéquivalence d'ensemble

3.2.1 L'équivalence d'ensemble

3.2.1.1 Ensemble microcanonique

La principale question que nous pouvons nous poser désormais est la suivante : un système isolé, à U et V fixé, aura-t-il le même comportement que le même système connecté à un thermostat, ou un barostat, imposant une température T ou une pression p ? Nous pouvons partir d'un système thermodynamique isolé quelconque possédant une entropie $S(U, V)$ pour vérifier que nos ensembles thermodynamiques donnent des comportements physiques identiques, ce qu'on appelle communément *l'équivalence d'ensemble*. Appliquons l'hypothèse d'extensivité de U, S et V pour définir les densités d'énergie u , de volume (ici, une forme de volume molaire) v et d'entropie s du système. La dérivée totale de la densité d'énergie du système s'écrit alors :

$$T ds = du - pdv \quad (3.22)$$

La température et la pression microcanoniques sont données par les dérivées partielles de s :

$$\left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_v = \frac{1}{T} \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_u = -\frac{p}{T} \quad (3.24)$$

Il est généralement admis que $s(u, v)$ est une fonction concave de ses variables u et v . Par conséquent,

$$\left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_v \leq 0 \quad (3.25)$$

Nous pouvons montrer que cela implique que les chaleurs spécifiques de notre système sont positives : en effet, si nous supposons la température T positive, ce qui implique que l'entropie s , et donc le nombre d'états accessibles croît avec u , nous pouvons remarquer que :

$$\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right)_v = \left(\frac{\partial (1/T)}{\partial u} \right)_v = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_v = -\frac{1}{T^2 c_v} \leq 0 \quad (3.26)$$

Supposons maintenant que l'entropie $s(u, v)$ possède une anomalie de convexité, par conséquent, pour une plage $u \in [u_1, u_2]$,

$$\left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_v \geq 0 \quad (3.27)$$

Pour une plage d'énergie $u \in [u_-; u_+]$ avec $u_- \leq u_1 \leq u_2 \leq u_+$, le système peut maximiser son entropie en se séparant en deux phases (voir figure 3.3) de fractions respectives a pour u_-

et $1 - a$ pour u_+ . L'hypothèse d'additivité nous indique que :

$$u = a(u_- - u_+) + u_+ \quad (3.28)$$

$$s = as(u_+) + (1 - a)s(u_-) \geq s(u) \quad (3.29)$$

La deuxième équation ne fait que retranscrire les propriétés des fonctions (ici localement)

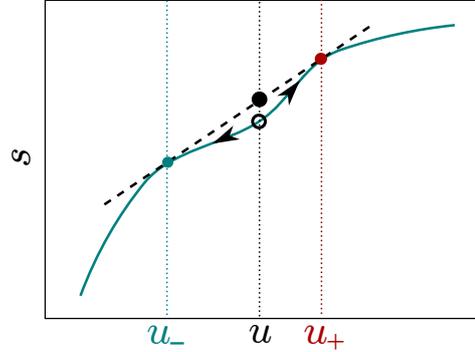


FIGURE 3.3 – Anomalie de convexité de l'entropie $s(u)$. Partant d'une situation à u dans la zone convexe (\circ), le système préfère se séparer en deux phases (\bullet) et (\bullet) afin de maximiser son entropie. Le système reste alors globalement à l'énergie u mais a augmenté son entropie (\bullet).

convexes. Pour de tels systèmes, l'ensemble microcanonique va donc se « débrouiller » pour se retrouver sur la corde définie dans l'équation 3.29, qui maximise de fait l'entropie s pour la plage d'énergie $[u_-; u_+]$ tout en gardant une température à la transition qui sera *constante* : $T = T_0$. Par conséquent, pour de tels systèmes, les anomalies de convexité sont gommées par des transitions de phase du premier ordre qui garantissent la bonne concavité de la densité d'entropie s . Par conséquent, pour des systèmes micro-canoniques additifs, il n'est pas possible d'obtenir des chaleurs spécifiques c_v négatives.

3.2.1.2 Correspondance avec l'ensemble canonique

Plaçons-nous dans l'ensemble canonique : notre système isolé est désormais connecté à un thermostat, très grand devant notre système d'étude, comme nous l'avons déjà fait dans la section 3.1.4. Nous pouvons calculer l'énergie interne du sous-système B , que nous noterons u , à partir de son entropie s . La relation $s(u)$ définie pour l'ensemble micro-canonique reste en effet valide quand notre système isolé est connecté à un thermostat, et cette relation étant strictement monotone, il est possible de l'inverser. Nous savons donc que dans un tel cas, l'énergie interne $u(s)$ possède une anomalie de concavité, donc une « bosse », du fait de l'anomalie de convexité de la fonction inverse $s(u)$. Ayant défini la densité d'énergie libre $u(s)$, il est possible de déterminer la densité d'énergie libre qui n'est autre que l'opposée de la transformée de Legendre de cette énergie en fonction de la variable thermodynamique s . Cette transformée ne s'applique *a priori* qu'aux fonctions convexes, mais nous omettons ce point pour l'instant.

$$f(q) = \inf_s (u(s) - qs) = u(s^*) - qs^* \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{s^*} = q = T \quad (3.31)$$

$$f(T) = u - Ts^* \quad (3.32)$$

où la première ligne est la définition de la transformée de Legendre, et la seconde découle directement de la minimisation de f . Traçons, pour les cas limites $T < T_0, T = T_0$ et $T > T_0$

les énergies internes u et $u - Ts^*$ en fonction de s (visibles sur la figure 3.4). Les minima de cette fonction de s nous fourniront donc à la fois les solutions s^* qui minimisent la fonction $u - Ts$ et la valeur de l'énergie libre $f = u - Ts^*$ au minimum. Pour $T < T_0$, les solutions s^* , notées s_1 , sont à gauche de la bosse de u . Pour $T = T_0$, il existe deux minima s_1 et s_2 . Et, pour $T > T_0$, seules subsistent les solutions s_2 , à droite de la bosse de u . Il existe donc une discontinuité de s à la température T_0 . Il y a donc bien eu une *transition de phase*. Que

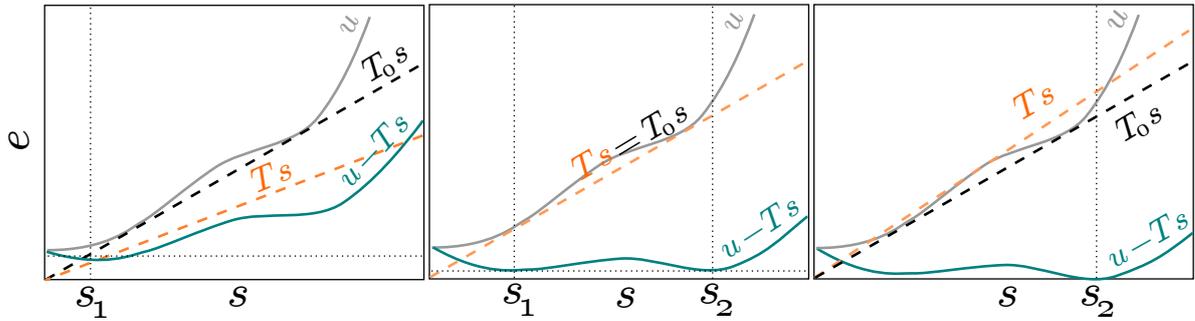


FIGURE 3.4 – Tracé de l'énergie interne $u(s)$ et du potentiel thermodynamique $f = u - Ts$ pour trois valeurs de T . À gauche, $T < T_0$, le potentiel f ne possède qu'un minimum. Au centre, $T = T_0$: le potentiel thermodynamique possède alors deux minima. À droite, $T > T_0$, le potentiel retrouve à nouveau un seul minimum.

s'est-il passé ? La transformée de Legendre n'est pas possible sur la partie concave de l'énergie interne u : dans un tel cas, la transformée agit de fait sur l'*enveloppe convexe* de u , où la bosse a été aplatie. Le système, à $T = T_0$, a au final le choix et peut se trouver en totalité ou partie dans chacune des deux phases concernées par la transition. Tentons maintenant de calculer l'énergie moyenne statistique $\langle u \rangle$ de l'ensemble canonique : sa définition a été donnée par l'équation 3.20 et n'est autre que :

$$\langle u \rangle = -\frac{1}{N} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\partial(\beta f)}{\partial \beta} \quad (3.34)$$

$$= f + \frac{\partial f}{\partial \beta} \beta \quad (3.35)$$

$$= f + \frac{\partial f}{\partial T} \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right)^{-1} \beta \quad (3.36)$$

$$= f - T \frac{\partial f}{\partial T} \quad (3.37)$$

Pour définir $\langle u \rangle$, nous avons une fois de plus supposé une hypothèse d'extensivité sur $\langle U \rangle$. Il est donc possible de voir $\langle u \rangle$ comme la transformée de Legendre de la transformée de Legendre de l'énergie microcanonique u . Cette transformation étant involutive, $\langle u \rangle$ n'est autre que u à part pour les zones où u n'est plus convexe : dans un tel cas, $\langle u \rangle$ est l'enveloppe convexe de u . Cette énergie nous permet en outre de définir les chaleurs spécifiques de l'ensemble canonique :

en effet,

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T} = C_v = N c_v \quad (3.38)$$

$$= -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial T} \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\mathcal{Z}} \left(\sum_{c_i} E_i \exp(-\beta E_i) \right) \right) \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{k_B T^2 \mathcal{Z}^2} \left(\sum_{c_i, c_j} E_i^2 \exp(-\beta(E_i + E_j)) - \sum_{c_i, c_j} E_i E_j \exp(-\beta(E_i + E_j)) \right) \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{k_B T^2} (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2) \quad (3.42)$$

$$\geq 0 \quad (3.43)$$

Comme pour l'ensemble microcanonique, il n'est pas possible d'avoir des chaleurs spécifiques négatives. Cela peut se comprendre plus facilement si nous considérons un système possédant une chaleur spécifique négative connecté à un thermostat : si le petit système subit une fluctuation d'énergie δu autour de la valeur canonique $\langle u \rangle$ et de la température T , sa température évoluera jusqu'à atteindre $T' = T + \delta u / c_v = T - dT$ dans le cas $c_v \leq 0$. Dans un tel cas, le thermostat va fournir au système un flux de chaleur Q dont le signe est donné par le second principe de la thermodynamique :

$$\delta Q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T - dT} \right) = -dT \delta Q \geq 0 \quad (3.44)$$

La convention en thermodynamique impose que les $\delta Q \leq 0$ impliquent des flux de chaleur *sortant* du thermostat. Par conséquent, notre système va *recevoir* de l'énergie supplémentaire lorsqu'il se refroidit. Cette énergie supplémentaire va contribuer à diminuer encore la température de ce dernier. Par conséquent, des chaleurs spécifiques négatives précipitent le système vers une catastrophe dans l'ensemble canonique. En pratique, cette chaleur spécifique n'est pas négative pour toutes les températures : comme dans l'ensemble microcanonique, les chaleurs spécifiques négatives correspondent à des états instables de la thermodynamique.

3.2.2 Systèmes non additifs et inéquivalence d'ensemble

La communauté de l'astrophysique a travaillé durant la fin des années 1960 sur un problème similaire dit d'*Antonov* : certains systèmes auto-gravitants (stellaires) inclus dans une sphère rigide non conductrice (donc, dans l'ensemble microcanonique) devenaient instables lorsqu'on les confinait dans un rayon trop grand. Un des points fondamentaux de ce problème impliquait que la chaleur spécifique de tels systèmes était (tout du moins en partie) négative [123], et le système devenait instable lorsque la résultante globale de celui-ci possédait une chaleur spécifique négative. D'autre part, ces dernières ont rapidement été identifiées comme responsables de transitions de phase uniquement visibles dans l'ensemble canonique [124]. Pourquoi, dans de tels systèmes, est-il possible d'obtenir des chaleurs spécifiques négatives ?

3.2.2.1 Conditions d'application de l'équivalence d'ensemble

Il a été possible de dériver les résultats de l'ensemble canonique en partant de l'ensemble micro-canonique que nous avons séparé en deux sous-systèmes A et B , puis en effectuant l'hypothèse formulée par l'équation 3.7. Nous pouvons nous demander quelle est la pertinence

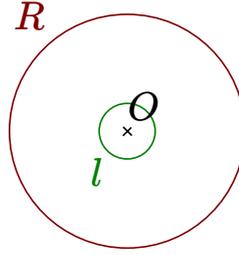


FIGURE 3.5 – Interactions à longue portée : une particule i localisée en O possède une énergie d'interaction u_i avec les autres particules. La plus grande partie de cette interaction est comprise entre les rayons l et $R \rightarrow \infty$.

d'une telle hypothèse d'*additivité*. Prenons l'exemple d'une boîte en dimension d , de taille R , et remplie de particules comme celle de la section 3.1.1. Cette fois-ci, prenons un potentiel d'interaction à support infini :

$$V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{K}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^a} \quad (3.45)$$

Le Hamiltonien \mathcal{H} de notre système vaut donc :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \frac{K}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^a} \quad (3.46)$$

L'énergie totale d'interaction entre une particule et les (nombreuses) autres, u_i , situées à $r < 2R$ pourra alors s'écrire de la manière suivante :

$$u_i = \int_{r=0}^R \mathcal{N}(r) \frac{K}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^a} dr \quad (3.47)$$

Pour des valeurs suffisantes de r , nous nous attendons à obtenir grossièrement :

$$\mathcal{N}(r) \propto \rho r^{d-1} \quad (3.48)$$

Nous pouvons alors comparer l'énergie d'interaction contenue entre 0 et une distance finie l à celle contenue entre l et $2R \rightarrow \infty$ (voir figure 3.5), pour $d \neq a$:

$$u_i^l \propto \int_{r=\epsilon}^l r^{d-1} \frac{K}{r^a} dr \propto l^{d-a} - \epsilon^{d-a} \quad (3.49)$$

$$u_i^R \propto \int_{r=l}^{2R} r^{d-1} \frac{K}{r^a} dr \propto R^{d-a} - l^{d-a} \quad (3.50)$$

Par conséquent, pour $\epsilon \ll l \ll R$, nous avons :

$$a > d : u_i^l \gg u_i^R \quad (3.51)$$

$$a < d : u_i^l \ll u_i^R \quad (3.52)$$

Pour $a < d$, la majeure partie de l'énergie d'interaction est contenue à longue portée. Pour $a = d$, c'est encore (marginale) le cas. Par conséquent, pour $a \leq d$, il est difficilement concevable de pouvoir séparer deux sous-systèmes en négligeant les interactions inter-systèmes du même ordre de grandeur (voire plus importantes) que les interactions intra-système. Pour $a > d$, les résultats de la thermodynamique classique sont corrects, et les ensembles statistiques sont équivalents.

3.2.2.2 Comportement des systèmes non additifs

Le problème de l'additivité et de l'extensivité Considérons maintenant le cas $a \leq d$. Nous voyons d'emblée que, dans la limite des grands systèmes, l'énergie totale ne va plus être extensive, c'est à dire que l'énergie totale ne sera plus proportionnelle au nombre d'éléments du système, à cause du terme lié aux interactions. Une méthode traditionnelle permettant de restaurer cette extensivité dans les simulations repose sur une renormalisation des interactions (comme cela est fait pour les modèles de spins et de verres de spin en champ moyen). C'est la *prescription de Kac* [125, 126] :

$$V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{K}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^a} = \frac{1}{N^{1-a/d}} \frac{K_0}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^a} \quad (3.53)$$

Cette prescription nous permet de conserver les conditions d'extensivité de l'énergie et de l'entropie des systèmes possédant des interactions à longue portée. Nous pouvons toutefois questionner la pertinence d'un tel choix pour des systèmes réels, notamment auto-gravitants.

L'extensivité que nous venons de décrire n'implique pas l'additivité : si nous séparons notre système en deux parties A et B , la majeure partie de l'énergie interne sera (probablement) contenue dans le terme d'interaction inter-ensembles. La somme des sous-systèmes ne donne donc pas le système entier. Ces systèmes sont donc *extensifs* mais pas *additifs*. De nombreux systèmes physiques sont concernés par ces problèmes d'additivité : comme nous l'avons déjà vu, c'est le cas des systèmes soumis à la gravité ($a = 1$ et $d = 3$). Il en va de même pour les systèmes possédant des interactions coulombiennes (où $d = 3$ et $a = 1$), certains modèles de turbulence à $d = 2$ (interprétable comme un champ de vortex en interaction logarithmique : $a = 0$), ou même des champs de contrainte à proximité des fractures ($a = 1$ et $d = 2$) (voir [101]).

Deux ensembles statistiques distincts Revenons à notre anomalie de convexité de la densité d'entropie $s(e)$, et supposons que le système ne soit plus additif : nous ne sommes plus sûrs que dans l'ensemble microcanonique, les plages d'énergie u à l'intérieur de la zone convexe 3.3 provoquent spontanément une séparation de phases. La contribution principale de la densité d'énergie, u , étant liée aux interactions entre les sous-parties du système, il est possible que la séparation de phases observée pour les anomalies de convexité des systèmes aux interactions à courte portée soit ici empêchée par une barrière de potentiel, ou même que l'état à deux phases séparées ne soit plus un équilibre stable. Par conséquent, notre système non-additif peut posséder un état d'*équilibre stable* dans l'anomalie convexe de $s(u)$. Par contre, les constructions de Maxwell restent valides dans l'ensemble canonique pour tous les systèmes : si nous considérons la famille des tangentes à s de pente T^{-1} , la discontinuité observée précédemment pour $T = T_0$ est conservée (voir figure 3.6). Il n'y aura donc transition de phase du premier ordre que dans un seul ensemble statistique, et donc il y a *inéquivalence* entre les ensembles.

Des transitions dans l'ensemble microcanonique ? Il peut paraître étrange que les transitions de phase du premier ordre n'interviennent que dans l'ensemble canonique, ce qui laisserait penser qu'il n'existe *aucune* transition de phase de la sorte dans l'ensemble microcanonique (où, en fait, nous imposons les grandeurs extensives). Comme l'ont rapporté certains auteurs [100, 101, 127], cela reste vrai tant que l'entropie microcanonique $s(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Le modèle proposé par J. Barré *et al.* [100] montre d'ailleurs des exemples de transitions de phase microcanoniques : l'entropie s possède alors un point anguleux qui définit un saut de température caractéristique des transitions de phase microcanoniques (au sens d'Ehrenfest).

Si nous nous intéressons au diagramme de phases d'une telle transition, un phénomène surprenant apparaît : les lignes de transition de phase existent dans les deux ensembles, mais pas au même endroit ! Cela s'explique aussi en examinant la figure 3.7 : dans l'ensemble microcanonique, la transition s'effectue pour une température T_1 ou T_2 à une énergie U_0 tandis que

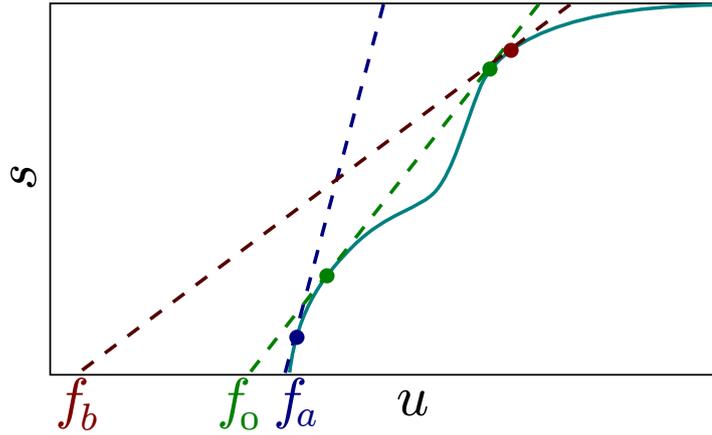


FIGURE 3.6 – Entropie $s(u)$ d'un système possédant des interactions à longue portée. Les tangentes définissent les transformées de Legendre de u : leur intersection avec l'axe des abscisses définit la valeur de f dans l'ensemble canonique, comme dans la section 3.2.1.2. Cet ensemble montre une discontinuité de s et de u à $T = T_0$ et $f = f_0$. Les états de l'ensemble microcanonique sont simplement définis par $s(u)$, qui reste continue. La zone hachurée représente la plage des énergies internes u interdites dans l'ensemble canonique.

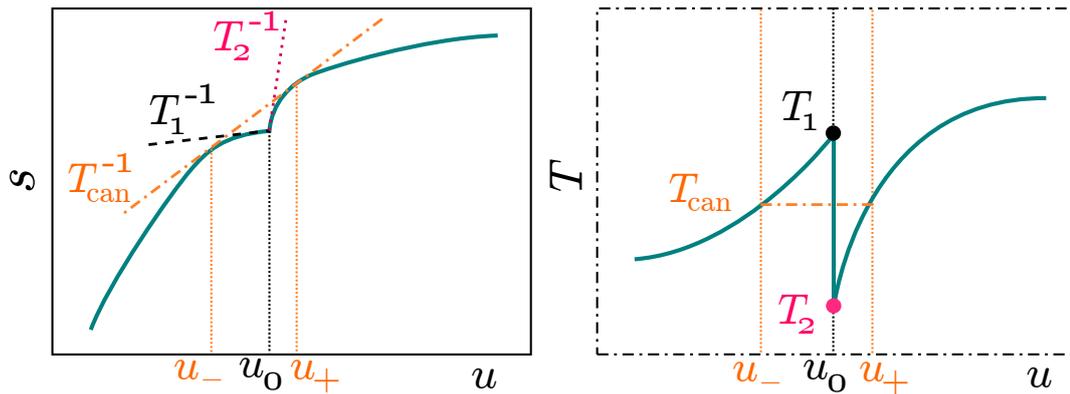


FIGURE 3.7 – Scénario possible de transition de phase microcanonique. À gauche, l'entropie microcanonique $s(u)$ qui présente un point anguleux en $u = u_0$. À droite, les températures microcanoniques et canoniques dérivées à partir de la courbe de gauche. Une discontinuité de T est observée dans l'ensemble microcanonique, qui est « invisible » dans l'ensemble canonique.

la transition canonique s'effectue pour une température $T_2 \leq T_{can} \leq T_1$ et sur une plage d'énergies $[U_-; U_+]$. Cette disparité de la localisation des lignes de transition est une autre composante essentielle de l'inéquivalence d'ensemble.

3.2.3 D'autres inéquivalences d'ensemble

3.2.3.1 Pour d'autres variables conjuguées

Nous avons pour le moment considéré dans notre système l'inéquivalence d'ensemble entre un système à *énergie* et *volume* fixés et un système à *température* et *volume* fixés (décrits par la densité d'énergie libre f). Il est possible d'obtenir d'autres types d'inéquivalence d'ensemble : en effet, si nous considérons cette fois-ci la différence entre un ensemble à T et v constants où nous devons minimiser f ,

$$df(T, v) = -sdT - pdv \quad (3.54)$$

et un ensemble où cette fois-ci T et p sont constants (ce qui représente approximativement le cas des transformations à l'air libre), où l'enthalpie libre g est minimale,

$$dg(T, p) = -sdT + vdp \quad (3.55)$$

nous pouvons alors tenter de calculer la compressibilité isotherme, notée χ_T , dans l'ensemble à T et v fixés,

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} \quad (3.56)$$

$$= \frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)^{-1} \quad (3.57)$$

et dans l'ensemble à T et p fixés :

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} \quad (3.58)$$

$$= -\left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \quad (3.59)$$

De la même manière que la chaleur spécifique c_v ne peut être négative dans l'ensemble canonique à T fixé, la compressibilité χ_T ne peut pas être définie négative pour une pression fixée. Celle-ci impliquerait en effet qu'une petite fluctuation de volume positive s'accompagnerait d'une augmentation de la pression du système qui viendrait diminuer le volume du barostat, ce qui provoquerait une nouvelle catastrophe. Par conséquent, pour des systèmes *non-additifs*, imposer la pression ou le volume pourrait donner des résultats différents. Pour des états classiques de la matière, cela semble impossible (ce qui est lié à la bonne qualité de la description des transitions de phase par le modèle de van der Waals) mais des exemples de métamatériaux à compressibilité négative ont déjà été répertoriés [128].

Nous pouvons enfin appliquer le même raisonnement pour les systèmes magnétiques à T fixée : de tels systèmes possèdent une énergie interne qui ne contient pas de termes en volume v et en pression p , mais contient une aimantation m en interaction avec un champ magnétique externe h . Si nous considérons que l'aimantation m est conservée, l'expression du potentiel thermodynamique f s'exprime sous la forme :

$$df = -sdT - hdm \quad (3.60)$$

Il est alors possible de définir, à l'instar des chaleurs spécifiques et des compressibilités, des *susceptibilités magnétiques* χ :

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_T = \left(\frac{\partial h}{\partial m} \right)_T^{-1} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} \right)_T^{-1} \quad (3.61)$$

Les systèmes à h fixé vérifient pour leur part :

$$\chi \propto \frac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2} \quad (3.62)$$

où $\zeta(h, T)$ est la transformée de Legendre de $f(m, T)$. Comme pour les situations précédentes, les propriétés de la transformée de Legendre empêchent l'existence de susceptibilités négatives.

3.2.3.2 Inéquivalence sur une grandeur externe

Un autre type d'inéquivalence d'ensemble a été récemment mis à jour par une équipe menée par G. de Ninno [129] : ces derniers étudient un système magnétique à T ou à e fixés, qui sont donc liés par une transformée de Legendre. Cependant, pour étudier l'inéquivalence d'ensemble, ils n'examinent pas le signe de c_v (liée à u et à T) : ils s'intéressent plutôt à une grandeur « indépendante », la susceptibilité χ . Leurs résultats montrent qu'il est une fois de plus possible d'obtenir des susceptibilités négatives, cette fois-ci dans l'ensemble microcanonique (où de fait, e et h sont fixés). Le fait d'examiner cette grandeur « indépendante » des transformées de Legendre permet aux auteurs de préciser les conditions pour lesquelles l'inéquivalence d'ensemble se produit, suggérant que les anomalies de convexité ne sont pas suffisantes pour leur apparition.

3.2.4 Conclusion

Nous avons vu dans cette section comment la mécanique statistique définissait ses ensembles microcanoniques et canoniques, et nous avons examiné les conditions d'*additivité* pour lesquelles ces interprétations étaient considérées équivalentes, qui impliquent donc des interactions à courte portée décroissant *au moins* avec un exposant a plus grand que la dimension d de l'espace contenant le système. Lorsque ces conditions ne sont plus vérifiées, il faut prendre des précautions pour que l'*extensivité* des grandeurs thermodynamiques soit conservée, qui ne garantissent pas pour autant l'additivité du système. Dans de tels cas, les deux ensembles statistiques peuvent devenir non équivalents : certaines transitions de phase du premier ordre sont uniquement visibles dans l'ensemble canonique, et d'autres transitions visibles dans les deux ensembles ne se produisent pas aux mêmes températures et aux mêmes énergies internes u . Ces propriétés sont intimement liées à la présence d'anomalies de convexité de l'entropie microcanonique s , qui implique la présence d'intrus sous la forme de chaleurs spécifiques négatives du système.

3.3 Les transitions de phase par l'exemple : le modèle d'Ising

3.3.1 Introduction : Hamiltonien d'Ising

Le modèle d'Ising, précédemment décrit dans l'introduction (chapitre 1), décrit le comportement d'un ensemble de *spins* (à l'époque, des *moments magnétiques*) notés $s_i = \pm 1$ répartis sur un réseau régulier en dimension d . Ces spins représentent de manière très simplifiée l'aimantation des atomes d'un matériau ferromagnétique, qui a donc tendance à s'aimanter à champ magnétique nul lorsque la température du matériau tombe en dessous d'une température critique T_c . La physique du modèle est donc retranscrite dans le Hamiltonien d'Ising :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i \quad (3.63)$$

Le premier terme de cette somme indique une interaction entre les spins s_i et s_j d'amplitude J : si les spins s_i et s_j sont alignés, l'énergie de notre configuration diminuera. La notation $\langle i, j \rangle$ vient préciser que cette interaction s'effectue sur les *premiers voisins* du réseau, comme sur la figure 3.8 pour le cas $d = 2$: Ces interactions sont donc à support fini : par conséquent, nous pouvons étudier ce système de manière indifférente dans l'ensemble micro-canonique ou canonique. Nous choisissons de l'étudier dans l'ensemble canonique, tout d'abord pour un champ h nul. Pour une température nulle, il est trivial d'identifier U à F : par conséquent, les configurations sélectionnées seront donc celles où tous les spins sont alignés. Nous remarquons d'emblée qu'il n'existe que deux configurations d'énergie interne minimale, et qu'il n'est pas

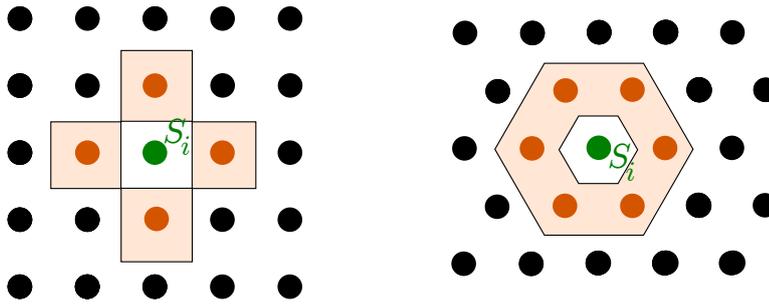


FIGURE 3.8 – Les premiers voisins de deux types de réseaux en dimension 2. À gauche, réseau carré : il y a 4 voisins. À droite, réseau hexagonal : chaque spin s_i possède 6 voisins.

possible de changer de l'une à l'autre sans passer par des configurations intermédiaires de plus haute énergie U . Par conséquent, si nous simulons un unique système à température nulle, il aura tendance à présenter spontanément une aimantation globale, notée m , non nulle :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N s_i \neq 0 \quad (3.64)$$

Le problème posé étant symétrique par retournement, nous pouvons voir que l'aimantation *statistique*, notée $\langle m \rangle$, sera nulle : il suffit en effet d'apparier une configuration $C_i = \{s_i\}$ avec la configuration $\tilde{C}_i = \{-s_i\}$, dans lesquelles le système se trouve avec la même probabilité p_i :

$$\langle m \rangle = \sum_{C_i, \tilde{C}_i} p_i \sum_{j=0}^N s_j = \sum_{C_i} p_i \sum_{j=0}^N (s_j - s_j) = 0 \quad (3.65)$$

Que se passe-t-il lorsque nous augmentons la température T ? Nous pouvons voir son effet, pour un réseau carré en dimension $d = 2$, sur la figure 3.9 : pour les températures faibles (à droite) nous voyons que le système tend bien à minimiser son énergie U , en formant des grands domaines homogènes. Pour des températures intermédiaires (au centre), la situation semble plus complexe, possédant de multiples échelles entremêlées. Pour une température plus élevée (à gauche), nous voyons que le système ne possède plus aucun domaine et que les spins n'ont plus particulièrement tendance à s'aligner avec leurs voisins. Pourquoi le système choisit-il de

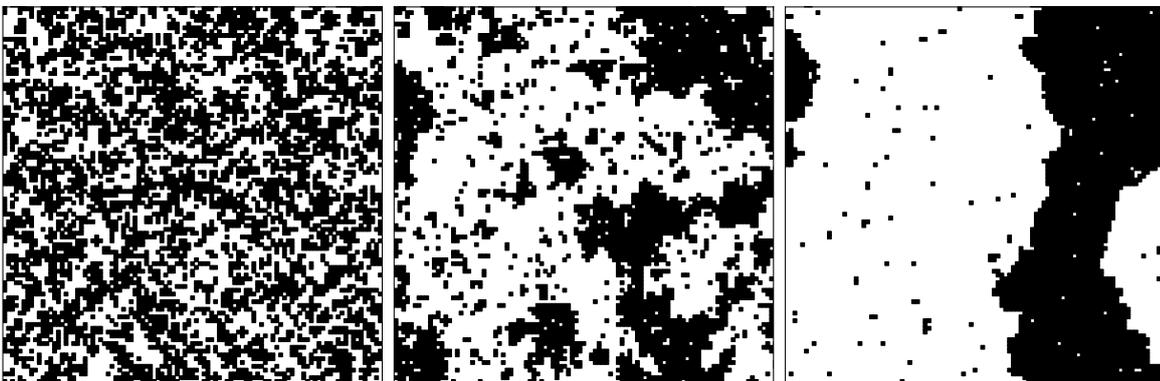


FIGURE 3.9 – Illustration des résultats d'un modèle d'Ising simulé par un algorithme de Monte-Carlo. À gauche, situation à l'équilibre pour $\beta J = J/(k_B T) = 0.25$. Au centre, situation pour $\beta J = 0.4407$. À droite, $\beta J = 0.75$.

telles configurations pour minimiser le potentiel F ? L'interprétation généralement fournie

consiste à dire que pour les grandes températures, le système de spins se trouve dans chaque configuration C_i avec la même probabilité. Il n'y a alors aucune raison pour justifier des éventuels domaines : il existe en effet *beaucoup plus* de configurations où aucun ordre local n'existe pour une énergie interne U (ou une aimantation m) donnée. Cela revient à dire que $\Omega(U)$ est très important pour des configurations où aucun ordre n'existe. Par conséquent, en tirant une configuration au hasard dans l'ensemble canonique, nous avons toutes les chances de tomber sur une des très nombreuses configurations désordonnées. C'est aussi ce qu'indique le potentiel thermodynamique $F = U - TS$: pour une même valeur de U , le terme $S(U) = k_b \ln \Omega(U)$ domine la contribution énergétique.

Cette conclusion nous amène à de nouvelles questions : comment se traduit l'équilibre entre ces différentes limites ordonnées et désordonnées lorsque la température n'est ni très élevée, ni très faible ? Passe-t-on de manière continue des configurations désordonnées à une configuration ordonnée, ou non ? Quel est l'effet du retournement d'un spin particulier sur ses voisins ? Comment caractériser de manière non équivoque cette transition ?

3.3.2 Grandeurs d'intérêt

3.3.2.1 Dérivées de l'énergie libre, F

Les transitions de phase ont été initialement divisées en deux grandes classes par Paul Ehrenfest, selon que les dérivées *premières* ou *secondes* de l'énergie libre F présentaient des discontinuités au point de la transition. Ces conditions définissent donc les transitions de phase du *premier* ordre (par exemple, la transition liquide-solide) et celles du *deuxième* ordre (par exemple, la transition ferro/paramagnétique). Dans le cas d'un modèle d'Ising, une transition de phase du premier ordre impliquerait une divergence de :

$$\frac{\partial F}{\partial h} = m(h) \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S \quad (3.67)$$

Pour des transitions de phase du deuxième ordre, il faut considérer les discontinuités, ou les éventuelles divergences des dérivées partielles d'ordre 2, soit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \chi \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = C_v \quad (3.69)$$

où χ et C_v sont respectivement la susceptibilité du système et la chaleur spécifique du système.

3.3.2.2 Fonction de corrélation G

A $T \neq 0$, des fluctuations d'aimantation apparaissent dans notre système, car les spins peuvent se retourner ; il est possible d'avoir $m_{\text{local}} \neq \langle m \rangle$ où $\langle m \rangle$ est l'aimantation « thermodynamique » du système. Cependant, cette petite variation de m_{local} peut influencer à son tour d'autres spins voisins via les *corrélations* du système. On peut regarder l'effet de fluctuation locales d'aimantation (en particulier les fluctuations d'un spin) sur des spins situés à une distance ρ de ce dernier : prenant pour origine le spin i , nous définissons la fonction de corrélation G comme suit :

$$G(i, j) = \langle (s_i - \langle m \rangle)(s_j - \langle m \rangle) \rangle \quad (3.70)$$

qui va regarder si les fluctuations de l'aimantation autour de la moyenne en i , $s(i) - \langle m \rangle$, « ressemblent » aux fluctuations au niveau du spin j autour de la même moyenne. Pour des

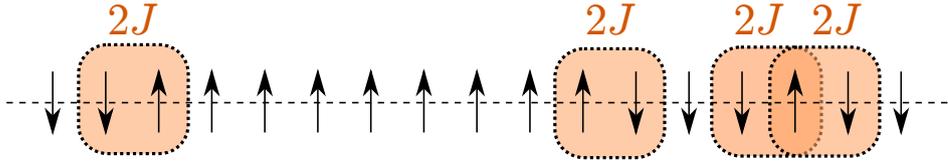


FIGURE 3.10 – Description du modèle d’Ising à une dimension. Chaque frontière $\uparrow\downarrow$ ou $\downarrow\uparrow$ coûte $2J$ à être créée.

systèmes isotropes et homogènes, l’expression de $G(i, j)$ ne dépend plus que de la distance $\rho = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ séparant les deux spins. Pour des grandes valeurs de ρ , cette fonction tend rapidement vers 0, ce qui laisse supposer qu’une échelle caractéristique ξ de corrélation intervient dans l’expression de G :

$$G(\rho) \approx \exp\left(-\frac{\rho}{\xi}\right) \quad (3.71)$$

Cette longueur de corrélation ξ , qui dépend de la température, peut aussi représenter une estimation de la taille des différents amas cohérents de spins que nous pouvons observer. Nous ne savons pas *a priori* si cette grandeur diverge à la température de transition T_c .

3.3.3 Le problème des dimensions

Il convient, pour résoudre le problème d’Ising, de le séparer différents cas, en fonction de la dimension d du système (cela revient à examiner le modèle pour différentes *coordinances*, ou nombre de voisins, $z = 2d$ dans la suite).

3.3.3.1 Dimension $d = 1$

La solution du modèle d’Ising pour $d = 1$ a été donnée par Ising lui-même [97] : en effectuant un changement de variables consistant à grouper les spins deux par deux (voir figure 3.10) et à compter le nombre de couples formant une frontière (coûtant chacune $2J$), il est possible de montrer que le système ne subit pas de transition de phase : en effet, la fonction de partition \mathcal{Z} , ainsi que la densité d’énergie libre $f = F/N$ restent analytiques, hormis pour $T = 0$. Nous avons vu que cela indique une évolution continue du système de $T = \infty$ jusqu’à $T > 0$.

3.3.3.2 Dimension $d = 2$

Le problème devient tout de suite plus complexe : en effet, il n’est plus possible d’utiliser notre heureux changement de variable, et il faut traiter le problème différemment. Lars Onsager a résolu ce problème dans un article réputé pour sa complexité [98]. Dans un tel cas, il obtient de manière surprenante que le système subit une transition de phase : en effet, la chaleur spécifique C_v diverge pour une température T_c donnée par :

$$T_c = \frac{2J}{k_B \ln(1 + \sqrt{2})} = 2.269 \frac{J}{k_B} \quad (3.72)$$

Cette transition de phase confirme par ailleurs que la longueur de corrélation ξ du système diverge à la même température T_c : il est possible de le voir en constatant sur la figure 3.9, à $T = T_c$, que les plus gros amas de spins ont une taille — égale à ξ — de l’ordre de la taille de la boîte. Cette taille divergerait pour un système lui-même infini.

3.3.3.3 Dimension 3

Il n’existe à ce jour aucune solution exacte du modèle en dimension 3. Les théories qui permettent de prédire les exposants critiques de ce modèle font généralement appel au groupe

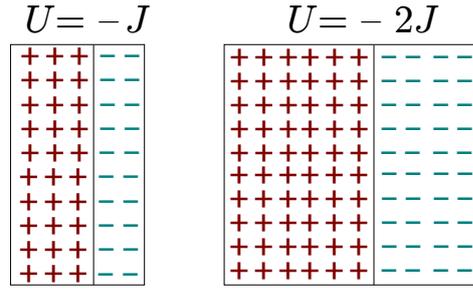


FIGURE 3.11 – Non-additivité, mais extensivité de l'énergie interne U pour un modèle de spins $+$ ou $-$ en interaction de champ moyen. Le système de droite, deux fois plus gros, possède bien une énergie totale deux fois plus importante.

de renormalisation. Ce dernier consiste à transformer le problème d'Ising en un problème de théorie statistique des champs, puis à examiner l'influence de l'échelle à laquelle on observe ces champs sur le Hamiltonien. Les points fixes des opérations de transformation d'échelle nous renseignent alors sur la nature de la transition qui a lieu. Le modèle en dimension $d = 3$ présente ainsi une transition à la température critique $(k_B T)/J = 4.51$ [130].

3.3.3.4 Dimensions ≥ 4

Modèle d'Ising en champ moyen : un système non additif Pour comprendre la physique du modèle à quatre dimensions (ou plus), il convient de se pencher d'abord sur le modèle d'Ising en champ moyen. Pour cela, nous allons considérer désormais que les interactions ne se font plus sur les premiers voisins mais de manière identique sur l'ensemble des spins. Suivant la prescription de Kac, nous avons alors un nouvel Hamiltonien $\mathcal{H}_{\text{mf}}^i$ par spin :

$$\mathcal{H}_{\text{mf}}^i = -\frac{J}{N} \sum_j \sigma_i \sigma_j - h \sigma_i \quad (3.73)$$

$$= -(Jm + h) \sigma_i \quad (3.74)$$

Nous pouvons vérifier qu'un tel système est bien extensif, mais qu'il ne vérifie pas l'additivité. Comparons l'énergie interne U_{petit} d'un système de N spins avec celle d'un système formé par la réunion de deux de ces systèmes initiaux, que nous appellerons *grand* système (voir figure 3.11). Ce système, composé de $2N$ spins, doit donc vérifier, pour une constante numérique C donnée :

$$U_{\text{petit}} = CN_{\text{petit}} \quad (3.75)$$

$$U_{\text{grand}} = CN_{\text{grand}} = 2CN_{\text{petit}} = 2U_{\text{petit}} \quad (3.76)$$

La deuxième relation exprime l'hypothèse d'additivité. Pour notre modèle d'Ising en champ moyen, cela revient de fait à compter le nombre N_+ de spins positifs et le nombre N_- de spins négatifs de chaque système :

$$U_{\text{petit}} = -\frac{J}{2N} \sum_i^N \sum_j^N \sigma_i \sigma_j = -J \frac{(N_+ - N_-)^2}{N} = -J \quad (3.77)$$

$$U_{\text{grand}} = -\frac{J}{4N} \sum_i^{2N} \sum_j^{2N} \sigma_i \sigma_j = -J \frac{(2N_+ - 2N_-)^2}{2N} = -2J \quad (3.78)$$

La réunion de deux systèmes identiques donne bien une énergie $U_{\text{grand}} = 2U_{\text{petit}}$, et vérifie donc l'hypothèse d'additivité. Toutefois, nous pouvons tenter de diviser notre système autrement, en séparant les spins positifs des spins négatifs de la figure 3.11. Il est alors possible de calculer

l'énergie de ces parties, nommées U^+ et U^- :

$$U_{\text{petit}}^+ = -\frac{J}{2N_+} \sum_i^{N_+} \sum_j^{N_+} \sigma_i \sigma_j = -\frac{JN_+}{2} = 30J \quad (3.79)$$

$$U_{\text{petit}}^- = -\frac{J}{2N_-} \sum_i^{N_-} \sum_j^{N_-} \sigma_i \sigma_j = -\frac{JN_-}{2} = 20J \quad (3.80)$$

$$U_{\text{grand}}^+ = -\frac{J}{4N_+} \sum_i^{2N_+} \sum_j^{2N_+} \sigma_i \sigma_j = -\frac{4JN_+}{4} = 60J \quad (3.81)$$

$$U_{\text{grand}}^- = -\frac{J}{4N_-} \sum_i^{2N_-} \sum_j^{2N_-} \sigma_i \sigma_j = -\frac{4JN_-}{4} = 40J \quad (3.82)$$

Notre système ne vérifie donc pas $U = U^+ + U^-$. La réunion de deux sous-parties non identiques *ne donne pas* $U_{\text{total}} = \sum U_{\text{parties}}$, et notre système n'est donc pas additif. Il est donc possible que le modèle d'Ising en champ moyen ne donne pas les mêmes transitions dans l'ensemble canonique et dans l'ensemble micro-canonique.

Calcul des grandeurs caractéristiques du modèle de champ moyen Nous pouvons alors regarder la valeur statistique des spins, $\langle s_i \rangle$. Comme tous les spins ont ici le même rôle, nous pouvons identifier $\langle s_i \rangle$ à l'aimantation thermodynamique $\langle m \rangle$: par conséquent,

$$\langle m \rangle = \langle s_i \rangle = p(s_i = \uparrow) - p(s_i = \downarrow) \quad (3.83)$$

$$= 2p(s_i = \uparrow) - 1 \quad (3.84)$$

Connaissant de plus le rapport entre $p(s_i = \uparrow)$ et $p(s_i = \downarrow)$, grâce à l'équation 3.9 :

$$\frac{p(s_i = \uparrow)}{p(s_i = \downarrow)} = \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}} \exp\left(2\frac{Jm + h}{k_B T}\right) \quad (3.85)$$

Nous pouvons en déduire l'équation implicite :

$$\langle m \rangle = \tanh\left(\frac{Jm + h}{k_B T}\right) \quad (3.86)$$

Si nous identifions de plus m à $\langle m \rangle$, nous pouvons tenter de tracer sur une même figure (la figure 3.12) le terme de gauche et le terme de droite de cette équation. La fonction \tanh possède plusieurs propriétés intéressantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\tanh(x)| \leq |x| \quad (3.87)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\tanh(x)| \leq 1 \quad (3.88)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{x} = 1 \quad (3.89)$$

Par conséquent, notre équation 3.86 ne possède qu'une unique solution pour les températures dites élevées — $J/(k_B T) \leq 1$ —, qui est donc stable. Pour les températures plus faibles, $J/(k_B T) > 1$: les propriétés de la fonction \tanh nous indiquent qu'il existe alors trois solutions (voir figure 3.12) dont deux solutions brisent spontanément la symétrie du Hamiltonien. Cette brisure de symétrie est une nouvelle fois une signature d'une transition de phase. La solution $m = 0$ est de plus instable : en effet, si nous considérons la suite :

$$m_{i+1} = f(m_i) = \tanh\left(\frac{Jm_i}{k_B T}\right) \quad (3.90)$$

nous voyons alors que les points fixes de cette dernière sont les solutions de notre équation implicite. Nous savons cependant que les solutions x^* où $|f'(x^*)| > 1$ sont instables. C'est bien le cas de notre solution $m = 0$ dans le cas des basses températures. Des fluctuations infinitésimales autour de cette solution entraîneront, à cause de l'équation implicite, une croissance de celles-ci jusqu'à atteindre une des solutions $\pm m_+$. Le système brise donc spontanément la symétrie. Remarquons qu'au voisinage de la température $T_c = J/k_B$, il est possible de calculer

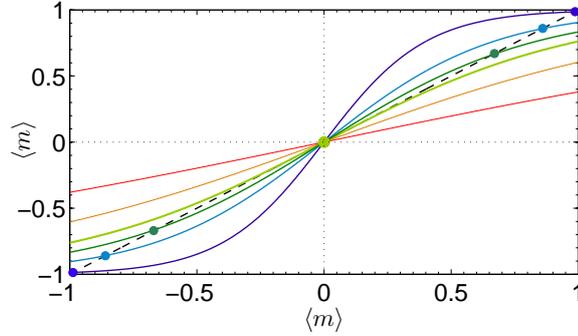


FIGURE 3.12 – Membre de gauche et membre de droite de l'équation 3.86. Leur intersection donne les valeurs de $\langle m \rangle$ à l'équilibre pour le cas du champ moyen, pour $h = 0$. Selon la valeur de J/kT , il existe une solution $\langle m \rangle = 0$ ou trois solutions $m_+, 0, -m_+$. Du bleu vers le rouge, $J/(kT) = 0, 4; 0, 7; 0,85; 1; 1,5; 2,5$.

explicitement ces solutions, en effectuant un développement limité : posant $J/(k_B T) = (1 + \epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$, et en supposant $m \ll 1$,

$$\tanh((1 + \epsilon)m) = (1 + \epsilon)m - \frac{(1 + \epsilon)^3}{3}m^3 + O(m^5) \quad (3.91)$$

$$0 = \epsilon m - \frac{(1 + \epsilon)^3}{3}m^3 \quad (3.92)$$

$$0 = m\left(3\frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^3} - m^2\right) + O(m^5) \quad (3.93)$$

$$m_+ = \sqrt{3\frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^3}} \quad (3.94)$$

Il est possible de donner une expression plus explicite de ϵ : $\epsilon = (T - T_c)/T_c$. Par conséquent, la magnétisation spontanée du système va évoluer au voisinage de la transition comme :

$$m_+ = \sqrt{3\frac{T - T_c}{T_c}} \propto \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad (3.95)$$

En effectuant le même type de développement limité, cette fois-ci à l'ordre 1, pour $h \neq 0$, nous pouvons voir que :

$$\chi \approx \frac{1}{k_B(T - T_c)} \propto \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{-\gamma}, \quad \gamma = 1 \quad (3.96)$$

Cette divergence est une autre signature de notre transition de phase.

Pourquoi le champ moyen pour les dimensions ≥ 4 ? De manière étonnante, il a été vérifié que pour toutes les dimensions $d \geq 4$, les exposants β et γ ne variaient plus. Par conséquent, la description du modèle en tant que champ moyen s'applique pour tous ces cas. Cette dimension critique apparaît naturellement lors des transformations du groupe de renormalisation du modèle : pour $d \geq 4$, il n'existe plus qu'un seul point fixe correspondant à un modèle gaussien, qui permet de retrouver les exposants du champ moyen.

Nom	α	β	γ	ν
Grandeur associée	Chaleur spécifique	Paramètre d'ordre	Susceptibilité	Corrélations
Divergence de	C_v	m	χ	ξ

TABLE 3.1 – Quelques exposants critiques permettant de caractériser sans ambiguïté une transition de phase à l'équilibre thermodynamique.

Paramètre	α	β	γ	ν
$d = 2$	0	1/8	7/4	1
$d = 3$	0.11	0.32	1.23	0.62
$d = 4$	0	1/2	1	1/2

TABLE 3.2 – Valeurs numériques des exposants critiques pour quelques valeurs de d . Les valeurs pour $d = 3$ proviennent des résultats théoriques (mais non exacts) du groupe de renormalisation [131].

3.3.4 Exposants critiques

3.3.4.1 Intérêt

Nous avons réussi à caractériser en champ moyen des exposants liés à la divergence, où à des singularités de certaines grandeurs thermodynamiques. La dernière question à soulever est celle de la description non-équivoque des transitions de phase : soit, dit autrement, que doit-on examiner au minimum pour dire que deux transitions de phases se déroulent de manière identique ?

La réponse est une fois de plus fournie par le groupe de renormalisation. Les résultats de ce dernier nous indiquent qu'il est possible de décrire les transitions de phase uniquement avec un petit nombre de paramètres : les *exposants critiques*. Ces derniers ne sont rien de plus que les exposants de la divergence des principales grandeurs thermodynamiques (voir table 3.1). Ceux-ci ne dépendent pas du détail du modèle considéré, mais uniquement de la dimension du paramètre d'ordre (scalaire, vecteur à deux ou n composantes, tenseur), et de la dimension du système d . Nous pouvons alors comparer nos résultats pour le modèle d'Ising pour les différentes valeurs de la dimension d : ceux-ci sont bien différents lorsque nous faisons varier la température (voir table 3.2).

3.3.4.2 Interprétation

Si nous nous plaçons exactement au point critique, nous voyons que la longueur de corrélation diverge pour tous les cas où l'on observe une transition. Le système ne possède donc plus aucune échelle caractéristique de longueur, sachant que de plus, nous avons indiqué que ξ représentait la taille caractéristique des domaines, qui sont alors infinis. Quelles formes vont donc émerger d'un système ne possédant aucune longueur caractéristique ?

Encore une fois, le groupe de renormalisation vient apporter des précisions à ce sujet : en effet, les transformations du groupe, qui laissent le système invariant lorsque nous sommes au point critique, sont des transformations d'échelle que l'on peut grossièrement voir sous la forme de « zooms ». Le système au point critique possède donc statistiquement les mêmes structures à toutes les échelles : il est *autosimilaire*. Nous pouvons voir légèrement ce phénomène sur la figure 3.9 au centre : les gros domaines ont globalement la même forme que les petits domaines.

3.3.5 Lois d'échelle en taille finie

3.3.5.1 Détermination pratique des exposants critiques

Pour un modèle d'Ising parfait, dont le réseau est de taille infinie, les lois d'échelle de la transition critique sont intimement liées au fait que la longueur de corrélation des fluctuations diverge, comme diverge la taille des plus grands amas de spins à cette température. Cela pose nécessairement des problèmes pratiques lorsque nous voulons simuler le comportement du modèle d'Ising à l'équilibre, qui seront pour des raisons évidentes de taille finie. Par conséquent, il n'est plus possible d'observer la divergence de la longueur de corrélation ξ , car $\xi < L$, la taille caractéristique de notre système. La littérature s'est assez rapidement attaquée au problème [132, 133, 134], et fournit une théorie plutôt simple à comprendre : notre ensemble de spins voit sa longueur de corrélation limitée à $\xi = L$ pour $T = T_c$, et se comporte comme un ensemble infini de spins à température *effective* $T_{\text{eff}} \neq T_c$, pour lequel nous avons :

$$\xi = L \quad (3.97)$$

$$\propto |T_{\text{eff}} - T_c|^{-\nu} \quad (3.98)$$

$$T_{\text{eff}} - T_c = L^{-1/\nu} \quad (3.99)$$

Nous pouvons ensuite examiner les autres grandeurs thermodynamiques en fonction de $|T_{\text{eff}} - T_c|$, dont les exposants critiques ont été définis précédemment :

$$m \propto |T_{\text{eff}} - T_c|^\beta \quad \text{si } T_{\text{eff}} < T_c \quad (3.100)$$

$$c_p \propto |T_{\text{eff}} - T_c|^{-\alpha} \quad (3.101)$$

$$u = \int_{T_c}^{T_{\text{eff}}} c_p dT \propto |T_{\text{eff}} - T_c|^{1-\alpha} + u_0 \quad (3.102)$$

La constante u_0 est facilement déterminée en prenant la limite $T_{\text{eff}} \rightarrow T_c$ de l'équation 3.102. Nous obtenons alors $u_0 = u(T_c)$. Il suffit ensuite de remplacer $(T_{\text{eff}} - T_c)$ par son expression en fonction de ξ puis de L afin d'obtenir les lois d'échelle suivantes :

$$m \propto L^{-\frac{\beta}{\nu}} \quad (3.103)$$

$$u - u_{T_c} \propto L^{-\frac{1-\alpha}{\nu}} \quad (3.104)$$

La loi d'échelle 3.104 a été déduite naïvement, et ne suit pas vraiment les canons de l'étude du modèle d'Ising en taille finie, en particulier pour le cas $d = 2$ [132, 133]. Cependant, nous verrons que l'ajustement obtenu est de bonne qualité (même si ce dernier s'effectue avec deux paramètres libres) et qu'il fournit des valeurs de α proches des valeurs théoriques.

3.3.5.2 Détail des simulations numériques

Au cours de cette thèse, nous souhaiterions déterminer les coefficients J et $k_B T$ d'un système quelconque dont nous disposerions du tracé $m(h)$. Afin de vérifier la pertinence de notre méthode, qui sera décrite dans la section 3.3.6, nous avons besoin de données issues d'un vrai modèle (numérique) d'Ising en champ moyen. Pour vérifier tout d'abord le bon fonctionnement de l'algorithme utilisé, écrit par Sébastien Léonard, nous avons tenté de déterminer les exposants critiques liés à u et à m . Nous avons donc simulé, pour différentes tailles de boîtes en $d = 2, 3$ et 4 (voir la table 3.3), le comportement des spins du modèle d'Ising en nous plaçant à la température critique, répétant un grand nombre de fois ces expériences lorsque le temps de calcul demandé était suffisamment petit. Nous avons mesuré au cours de ces simulations l'aimantation au carré, $m^2(t)$ ainsi que l'énergie par spin, $u(t)$ (cf. fig. 3.13).

Pour la plupart de nos simulations, l'aimantation $m^2(t)$ semble bien converger vers une valeur d'équilibre facile à mesurer. Toutefois, la précision de ces mesures diminue rapidement

<i>dim.</i>	<i>L</i>
$d = 2$	{4; 8; 12; 16; 20; 24; 32; 48; 64; 128}
$d = 3$	{6; 10; 16; 28; 40; 54; 70}
$d = 4$	{4; 6; 8; 12; 16; 20; 24}

TABLE 3.3 – Taille des grilles L utilisées en fonction de la dimension d de l'espace considéré. Les simulations pour les plus grandes valeurs de L (en rouge) n'ont pas été suffisamment longues pour converger vers une valeur statistique et ont donc été ignorées.

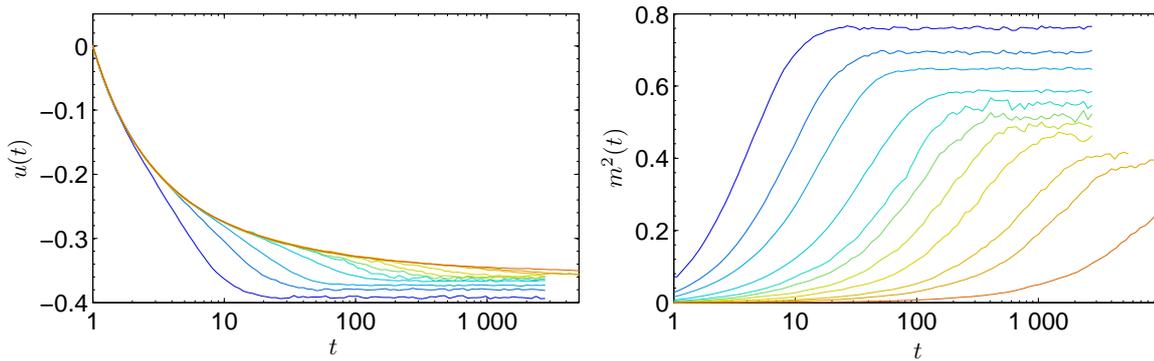


FIGURE 3.13 – À gauche, détail de l'évolution de l'énergie par spin u en fonction du temps, et à droite, détail de l'évolution de l'aimantation au carré par spin, $m^2(t)$ en fonction du temps ; pour $L = 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 32, 48, 64$ et 128 (échelle de couleurs) en dimension $d = 2$. Le temps de la simulation est fractionnaire : $t = 1$ équivaut à L^d tentatives de retournement de spins.

lorsque la taille de la grille L augmente : T se rapproche alors de T_c , et les fluctuations deviennent considérables. Ces systèmes nécessitent d'ailleurs plus d'opérations de retournement pour relaxer vers l'équilibre, ce qui donne des simulations plus longues et limite fortement notre statistique. Nous avons pour la suite de cette étude systématiquement exclu la valeur de L la plus grande pour chaque dimension.

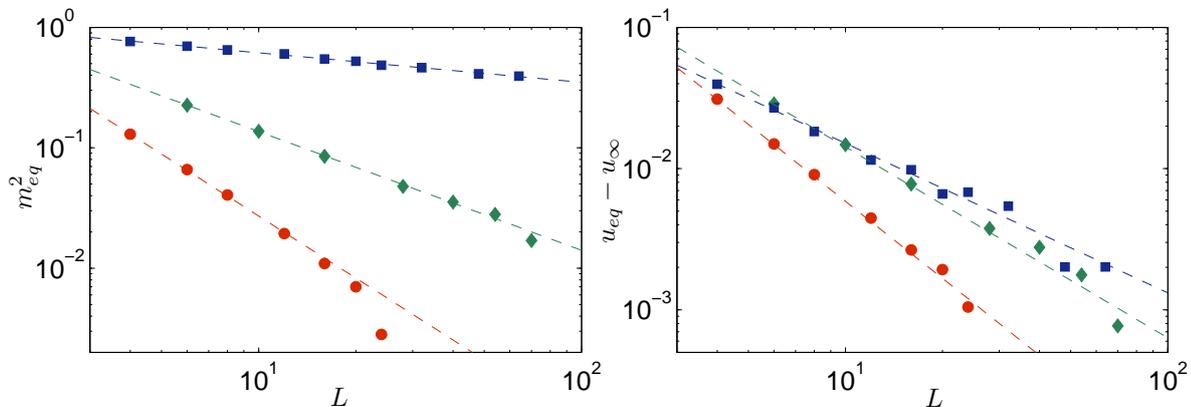


FIGURE 3.14 – Lois d'échelle de taille finie : tracé de $\langle m^2(L) \rangle$ et de $\langle u(L) - u(L = \infty) \rangle$ à l'équilibre thermodynamique en dimension $d = 2$ (■), $d = 3$ (◆) et $d = 4$ (●). La pente des ajustements nous permettent d'extraire les rapports d'exposants critiques $\nu^{-1}(\alpha - 1)$ et $2\nu^{-1}\beta$.

d	T_c	α			β			ν			$\nu^{-1}(\alpha - 1)$			$-2\nu^{-1}\beta$		
		theor.	simu.	ref.	theor.	simu.	ref.	theor.	simu.	ref.	theor.	simu.	ref.			
2	2.2691	0	0.13	1	-1	-1.06		-0.25	-0.25	-0.25						
3	4.5115	0.10	0.22	0.63	-1.42	-1.35	-1.37	-1.03	-0.99	-0.98						
4	6.7315	0	0.5	0.5	-2	-1.81		-2	-1.71							

TABLE 3.4 – Valeurs des exposants α , β et γ et température critique T_c en dimensions $d = 2, 3$ et 4, prédites par la théorie (theor.), et issues des lois d'échelle de taille finie, que ce soit pour nos simulations (simu.), ou pour celles de la littérature (ref.) [133, 134].

3.3.5.3 Vérification des exposants

Il est maintenant possible de tracer, pour les différentes valeurs de L , les différentes valeurs de m et de u obtenues à l'équilibre. Les points de la figure 3.14 nous montrent un excellent alignement en échelle logarithmique : l'aimantation m et $u - u(T_c)$ s'expriment donc bien comme des lois de puissance de la taille du système, L . La pente de ces droites permet d'ailleurs d'extraire les rapports d'exposants critiques définis par les équations 3.103 et 3.104. Ces exposants, ainsi que leurs valeurs théoriques — prédites par les calculs exacts d'Onsager pour $d = 2$, données par le groupe de renormalisation pour $d = 3$ et déterminées en champ moyen pour $d = 4$ — sont consignés dans la table 3.4. L'accord entre théorie et simulation est bon pour $d = 2$ et $d = 3$, avec une erreur sur les exposants d'environ 6% mais semble nettement moins bon pour $d = 4$ où cette erreur devient de l'ordre de 15%. Nous attribuerons ce manque de précision à une trop faible statistique et à des simulations trop courtes (notamment à grand L) et non à une éventuelle erreur de programmation.

3.3.6 Modèle de champ moyen pour $d = 4$

L'étape suivante consiste à effectuer, pour notre grand système à $d = 4$ et $L = 20$, des expériences incluant un champ magnétique, pour diverses températures, afin d'en tirer une courbe $m(h)$ à différentes températures :

$$\frac{T}{T_c} = \left\{ \begin{array}{l} 0.70; 0.75; 0.80; 0.85; 0.87; 0.90; 0.92; 0.95 \\ 0.99; 1.00; 1.01; 1.02; 1.05; 1.1; 1.5 \end{array} \right\} \quad (3.105)$$

$$h = \{0; 0.0003; 0.001; 0.003; 0.01; 0.03; 0.1\} \quad (3.106)$$

Le traitement que nous allons ensuite effectuer se base sur une réécriture simple de l'équation transcendante 3.86 pour tenter d'en extraire les quantités $k_B T$ et J . Nous pouvons en effet prendre l'arc-tangente hyperbolique d'une telle équation afin d'obtenir une expression, cette fois-ci explicite, de $h(m)$:

$$m = \tanh\left(\frac{J}{k_B T}m + \frac{h}{k_B T}\right) \quad (3.107)$$

$$\tanh^{-1}(m) = \frac{Jm + h}{k_B T} \quad (3.108)$$

$$h = k_B T \tanh^{-1}(m) - Jm \quad (3.109)$$

Il est alors possible d'effectuer un ajustement à deux paramètres afin d'en déduire, pour une courbe $m(h)$, ou d'ailleurs pour toute courbe de réponse à une brisure de symétrie, une valeur de $k_B T$ et de J déduites du modèle d'Ising en champ moyen. Nous pouvons voir

les estimations de ces grandeurs pour notre modèle d'Ising « vrai » sur la figure 3.15. Les ajustements semblent de loin être plutôt efficaces, mais un examen plus minutieux de ceux-ci indique que ces derniers sont assez imprécis pour les températures $T \geq T_c$. D'un autre côté, les susceptibilités χ définies comme la pente des données brutes $m(h)$ proches de $h = 0$ montrent bien une tendance à la divergence avec un exposant de champ moyen : $\chi \propto |T - T_c|^{-1}$. Les deux diagrammes suivants présentent les coefficients de l'ajustement de l'équation 3.109 : le diagramme en bas à gauche présente le rapport des deux coefficients qui fournit une estimation de $k_B T/J$ qui semble assez bien coller aux valeurs imposées pour $T \leq T_c$. Pour les températures supérieures, nous constatons qu'il est plus difficile de donner une interprétation des valeurs obtenues. Le dernier graphe donne une estimation de J , qui semble augmenter de manière très importante pour $T \lesssim T_c$ et semble ensuite devenir très faible. Nous pouvons interpréter cela comme une indépendance relative des spins pour les températures dépassant la température critique, tandis que ceux-ci se corrélaient de manière très intense pour les températures juste en dessous du point critique. Toutefois, nous tenons à rappeler au lecteur que les ajustements sont imprécis dans cette gamme de températures : il faut donc considérer ces valeurs avec (beaucoup de) précaution.

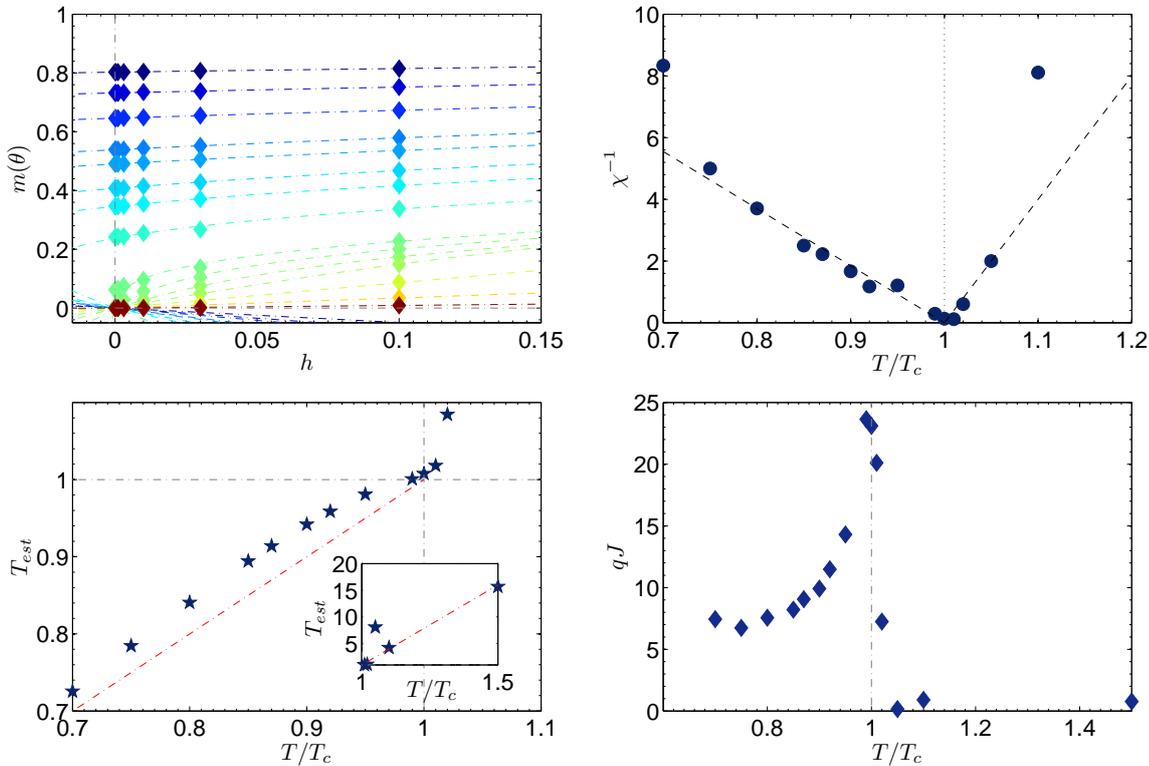


FIGURE 3.15 – Résultat des simulations numériques effectuées à $d = 4$ pour $L = 20$, à différentes températures et différents champs h . En haut à gauche, ajustements à deux paramètres (traits mixtes) effectués sur les données de $m(h)$ (\blacklozenge) à partir de l'équation 3.109. L'échelle de couleurs va du bleu ($T/T_c = 0.7$) au rouge ($T/T_c = 1.5$). En haut à droite, tracé de l'inverse de la susceptibilité du système, χ^{-1} (\bullet) en fonction de la température. En bas à gauche, estimation de la température $k_B T/J$ (\star) déduite des ajustements en fonction de la température imposée. En bas à droite, estimation de l'interaction J issue des ajustements (\blacklozenge).

Nous pouvons rappeler que ce traitement est très général, et permet d'extraire les valeurs du paramètre d'interaction J et une estimation de la température $k_B T/J$ pour toute transition possédant un paramètre d'ordre, que nous soupçonnerions d'effectuer une transition de phase de la même classe d'universalité que le modèle d'Ising. Nous verrons dans le chapitre 5 à quel

point il est possible d'employer ce simple outil afin de décrire le comportement des grandeurs stationnaires de l'écoulement de von Kármán.

3.3.7 Conclusion

Nous avons étudié par l'exemple une transition de phase supercritique basée sur le modèle d'Ising. Pour bien comprendre cette transition, nous avons fait appel à une partie du formalisme des *transitions de phase* qui permet de décrire sans équivoque de telles transitions, afin de pouvoir comparer, pour des systèmes *a priori* très différents, le passage d'une phase ordonnée à une phase désordonnée. Nous avons explicité les solutions issues de l'approximation de champ moyen et nous avons déterminé pour cela l'expression implicite de l'aimantation m en fonction du champ h imposé. Nous avons ensuite tenté de retrouver les divers exposants critiques de la transition pour trois dimensions différentes, 2, 3 et 4 pour finalement s'intéresser à la pertinence des relations $m(h)$ du champ moyen pour une simulation en $d = 4$ et pour un grand nombre de spins. Ces outils semblent utiles et permettent d'extraire des informations intéressantes sur la température et l'amplitude des interactions pour n'importe quel système décrit par l'approximation de champ moyen. Nous pourrions donc tester la validité d'une telle approximation pour décrire l'écoulement de von Kármán : nous verrons dans les chapitres suivants qu'il sera possible de décrire certains de nos résultats expérimentaux en termes de ferro-turbulence.

*

CHAPITRE 4

PHYSIQUE STATISTIQUE HORS-ÉQUILIBRE

Introduction

Nous avons décrit dans le chapitre précédent un grand nombre de caractéristiques des systèmes à l'équilibre thermodynamique. Notre écoulement de von Kármán étant (tout du moins dans l'eau) turbulent, c'est à dire fortement hors-équilibre, il semble plus logique d'essayer de le décrire comme un système loin de l'équilibre thermodynamique. Dans de telles conditions, une grande partie des équations que nous connaissons habituellement ne sont plus valides, et il est donc nécessaire de se forger de nouveaux outils spécifiques à l'étude de cette discipline. Ce chapitre vient donc fournir au lecteur quelques éléments permettant la compréhension des résultats de la physique statistique hors-équilibre qui seront employés à l'étude de l'écoulement de von Kármán.

4.1 Processus stochastiques

Les processus stochastiques sont une manière de décrire les évolutions des systèmes hors de l'équilibre en présence de fluctuations. L'évolution des systèmes physiques est alors décrite par une famille de variables aléatoires $\{x_t\}$ où t est interprété comme le temps, et dont les propriétés statistiques $\langle x_t \rangle$ nous intéressent. Ces variables aléatoires peuvent former une famille discrète, pour un nombre d'états accessibles fini ou tout du moins dénombrable. Il est de même possible de considérer, en faisant tendre les intervalles de temps δt vers zéro convenablement, des processus stochastiques à temps continu. Nous allons voir dans cette section que cette acception des processus stochastiques où le système transite aléatoirement entre plusieurs états peut être vue de manière équivalente comme l'évolution temporelle d'un système soumis à un *bruit* qui va perturber le système autour de ses éventuels points d'équilibre.

4.1.1 Systèmes définis par une équation maîtresse

4.1.1.1 Définition

Choisissons un processus stochastique à temps discret et possédant un nombre d'états accessibles N fini. Toutes les informations intéressantes sur le système sont alors contenues dans la grandeur \mathbf{p}_t qui nous donne l'ensemble des probabilités p_t^i que le système se trouve dans l'état i à l'instant t . Pour décrire la physique de tels systèmes, nous pouvons considérer une *équation maîtresse* qui va venir relier $\mathbf{p}_{t+\delta t}$ à \mathbf{p}_t :

$$\frac{\mathbf{p}_{t+\delta t} - \mathbf{p}_t}{\delta t} = Q\mathbf{p}_t \quad (4.1)$$

La matrice $Q = [q^{ij}]$ définit les taux de transition entre l'état j à t et l'état i à $t + \delta t$, et contient de fait toute la physique de notre problème. Nous avons ici formulé *deux hypothèses importantes* implicitement :

1. La matrice Q ne dépend pas du temps t : par conséquent, notre processus est *stationnaire*.
2. La définition de $\mathbf{p}_{t+\delta t}$ ne fait intervenir que la donnée de \mathbf{p}_t : le processus est dit *Markovien*.

Nous voyons immédiatement que la conservation de la probabilité globale : $\sum_i p_t^i = 1$ s'écrit :

$$0 = \sum_i \sum_j q^{ij} p_t^j = \sum_j p_t^j \sum_i q^{ij} \quad (4.2)$$

Cette équation est vraie quelle que soient les probabilités p_t^j : nous pouvons donc les choisir arbitrairement à un t donnée telles que \mathbf{p}_t soit telle que $p_j^t = 1$: il est alors possible d'en déduire :

$$\sum_i q^{ij} = 0 \quad (4.3)$$

$$q^{jj} = - \sum_{i \neq j} q^{ij} \quad (4.4)$$

Cela nous permet d'exprimer plus simplement la variation de probabilité de l'état i , en effectuant un changement sur les indices i et j :

$$\frac{p_{t+\delta t}^i - p_t^i}{\delta t} = \sum_{j \neq i} q^{ij} p_j - \sum_{j \neq i} q^{ji} p_i \quad (4.5)$$

Nous pouvons voir alors l'évolution de la probabilité p_t^i comme la différence entre les transitions qui entrent dans l'état i (la première somme) et celles qui sortent de l'état i (seconde somme).

4.1.1.2 Bilans et équilibre

Supposons maintenant qu'il existe des états d'équilibre de notre système, même si, à $t = 0$, ce dernier est hors de l'équilibre. Cet équilibre est alors donné par la stationnarité du vecteur des probabilités \mathbf{p} à l'équilibre, qui sera alors noté π . L'équation maîtresse 4.1 devient alors :

$$0 = Q\mathbf{p} = Q\pi \quad (4.6)$$

$$= \sum_{j \neq i} q^{ij} \pi^j - \sum_{j \neq i} q^{ji} \pi^i \quad (4.7)$$

Cette règle est appelée *bilan global*. Elle définit les taux de transition en fonction de l'équilibre que nous cherchons à atteindre. Ce bilan global s'accompagne généralement d'hypothèses de micro-réversibilité du processus Markovien, qui implique des contraintes plus fortes sur les q^{ij} sous la forme du *bilan détaillé*. La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$q^{ij} \pi^j = q^{ji} \pi^i \quad (4.8)$$

Cette équation est très importante : elle nous donne la dynamique des transitions *hors de l'équilibre* en se basant sur les probabilités de présence du système *à l'équilibre*. Il est d'ailleurs possible de considérer un équilibre déterminé par un thermostat, où les π^i sont liées aux énergies E^i , selon les résultats obtenus à l'équilibre dans l'ensemble canonique 3.1.4. Nous pouvons alors expliciter le rapport des taux de transition de j vers i sur celui de i vers j :

$$\frac{q^{ij}}{q^{ji}} = \exp(\beta(E^j - E^i)) \quad (4.9)$$

Cette équation est fondamentale pour la modélisation numérique de systèmes en contact avec un thermostat : de nombreux algorithmes comme celui de Metropolis, de Glauber, etc. sont directement issus de cette considération et permettent un retour effectif vers l'état d'équilibre du système à la température $k_B T$ (voir section 4.2).

4.1.2 L'équation de Fokker-Planck

Nous pouvons considérer désormais le cas limite où la probabilité p_t^i est continue en temps et où les états forment un continuum : nous allons alors nous intéresser à la description de $p(x, t)$. La matrice des transitions Q devient alors un noyau $Q(x, x')$ dont nous allons immédiatement changer la deuxième variable en le considérant égal à $Q(x, x - x') = Q(x, r)$. L'équation maîtresse devient alors :

$$\partial_t p(x, t) = \int p(x - r, t) W(x - r, r) dr - p(x, t) \int W(x, r) dr \quad (4.10)$$

En développant les termes en $x - r$ en une série de Taylor et en se limitant à l'ordre deux (c'est le développement de Kramers-Moyal), nous obtenons alors une nouvelle équation de *Fokker-Planck* qui nous donne l'évolution de la distribution de probabilité $p(x, t)$ en fonction de deux coefficients $A(x)$ et $B(x)$.

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(A(x)p(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(B(x)^2 p(x, t)) \quad (4.11)$$

Intéressons-nous maintenant à la statistique des sauts $\Delta x = x - x_0$ lorsque nous nous trouvons à un temps $t = t_0$ à l'abscisse $x = x_0$, afin de mieux comprendre la physique d'une telle équation. Examinons pour cela les moments de Δx :

$$\langle \Delta x^n \rangle = \int (x - x_0)^n p(x, t + \varepsilon) dx \quad (4.12)$$

$$= \int (x - x_0)^n (\delta(x - x_0) + \varepsilon \partial_t p(x, t)) dx \quad (4.13)$$

$$= \varepsilon \int (x - x_0)^n \left[\partial_x(-A(x)p(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(B(x)^2 p(x, t)) \right] dx \quad (4.14)$$

En effectuant une intégration par parties, il est possible de voir que

$$\frac{\langle \Delta x \rangle}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} A(x_0) \quad (4.15)$$

$$\frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} B^2(x_0) \quad (4.16)$$

Par conséquent, chaque « saut » élémentaire Δx est choisi aléatoirement avec une moyenne A et une variance B^2 . L'équation de Fokker-Planck est particulièrement intéressante car elle se trouve simplifiée lorsque le processus stochastique devient stationnaire. Dans un tel cas, la distribution de probabilité $p(x, t) = \pi(x)$ stationnaire satisfait simplement à une équation différentielle soluble.

4.1.3 Une formulation équivalente : l'équation de Langevin

Le formalisme employé dans la description des processus Markoviens par les équations maîtresses et les équations de Fokker-Planck font intervenir les densités de probabilité \mathbf{p}_t et $p(x, t)$ de présence dans un état quelconque à l'instant t en vue d'en extraire des propriétés

statistiques. Nous pourrions toutefois prendre le contrepied de cette interprétation en partant d'une équation déterministe du mouvement :

$$\frac{dX}{dt} = A(X) \quad (4.17)$$

Pour que cette équation décrive un processus stochastique (qui est fondamentalement aléatoire), nous allons rajouter un terme qui va venir introduire de l'incertitude sur la valeur même de X . Ce terme, qui sera appelé le *bruit* du système, « transforme » la fonction $X(t)$ en une famille de variables aléatoires X indicées par le temps t .

4.1.3.1 Le bruit

Le bruit est un phénomène omniprésent dans la nature : en effet, toute mesure analogique est bruitée, toute grandeur à l'équilibre est soumise à des fluctuations (qui peuvent être infimes ou non) et tout téléviseur déconnecté d'une antenne affiche une « neige » caractéristique. Afin de décrire physiquement le bruit, nous devons avoir recours aux statistiques : en effet, nous pouvons considérer le bruit d'une télévision comme le tirage, pour une famille d'instantants t , d'une variable aléatoire quelconque qui va nous fournir le signal désordonné que nous considérons caractéristique du bruit. Nous définissons de fait donc une famille de M variables aléatoires réelles, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) = \boldsymbol{\xi}$. Ces variables aléatoires réelles ξ_i sont gaussiennes :

$$\xi_i : \begin{cases} \Omega & \mapsto \mathbb{R}^+ \\ \omega & \mapsto \xi(\omega) \\ \mathcal{P}(\xi = x) & \propto \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases} \quad (4.18)$$

Nous définissons de même une mesure de probabilité de réalisation de $\boldsymbol{\xi}$, notée \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-\boldsymbol{\xi}^t \Upsilon \boldsymbol{\xi}) \quad (4.19)$$

Ici, \mathcal{Z} est notre fonction de partition, et Υ est une matrice de taille $M \times M$ symétrique et définie positive, qui va traduire la manière dont sont corrélées nos M variables aléatoires. Le théorème de Wick (non démontré ici) va faire apparaître explicitement ces corrélations, en indiquant que :

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = (\Upsilon^{-1})_{ij} \quad (4.20)$$

Nous pouvons aussi réfléchir à une version continue d'un tel théorème : en considérant des instants $t_j = \varepsilon j$ et prenant la limite $M \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, (et en oubliant un peu la limite $M\varepsilon$), nous définissons alors une version *continue* de notre mesure \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}[\boldsymbol{\xi}] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int dt dt' \xi(t) \Upsilon(t, t') \xi(t')\right) \quad (4.21)$$

Le cas que nous allons étudier est plus simple, il correspond au cas *δ -corrélé*, où l'opérateur $\Upsilon(t, t')$ est proportionnel à la distribution de Dirac δ (ce qui revient considérer les variables gaussiennes ξ_i indépendantes). Pour des temps discrets, nous avons donc :

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = K \frac{\delta_{i,j}}{\varepsilon} \quad (4.22)$$

Ce qui se traduit de fait dans la limite continue en

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = K \delta(t - t') \quad (4.23)$$

Qui nous donne effectivement une probabilité gaussienne pour une réalisation du bruit ξ :

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = (\Upsilon^{-1})_{t/\varepsilon, t'/\varepsilon} = K\delta(t-t') \quad (4.24)$$

$$\mathcal{P}[\xi] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{dt}{K} \xi^2(t)\right) \quad (4.25)$$

Ici, K représente la variance de ξ . C'est l'amplitude du bruit, qui va pousser plus ou moins notre système hors de l'équilibre. Nous considérerons dans toute la suite que $\xi(t)$ est un bruit blanc δ -corrélé, avec $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = K\delta(t-t')$.

4.1.4 L'équation de Langevin

X est désormais un processus soumis à un bruit ξ : par conséquent, pour chaque pas de temps, nous rajoutons explicitement ce dernier dans l'équation déterministe équivalente. Nous obtenons alors une *équation de Langevin* :

$$\frac{X_t - X_{t+\delta t}}{\delta t} = A(X_t) + B(X_t)\xi_t \quad (4.26)$$

Nous pouvons formuler à nouveau cette équation pour des processus en temps continus : il faut alors bien spécifier l'instant t auquel les grandeurs A et $B\xi$ sont considérés. Le choix effectué généralement est appelé la règle d'Ito, et consiste à prendre A et $B\xi$ à l'instant t (et non $t + \delta t$).

$$\frac{dX}{dt} = A(X) + B(X)\xi(t) \quad (4.27)$$

Cette équation semble une formulation naturelle du problème : elle contient toute la physique et est plutôt simple à comprendre. Pourtant, le caractère aléatoire de X rend parfois l'utilisation des équations de Fokker-Planck plus efficace. Nous allons toutefois montrer rapidement que ces deux formulations donnent des résultats équivalents. Comparons les moments des sauts dX à ceux obtenus dans la section 4.1.2, en discrétisant temporairement l'équation de Langevin :

$$X_{t+\varepsilon} - X_t = \Delta X \quad (4.28)$$

$$= \varepsilon (A(X_t) + B(X_t)\xi_t) \quad (4.29)$$

$$\langle \Delta X \rangle = \varepsilon (A(X_t) + B(X_t)\langle \xi_t \rangle) \quad (4.30)$$

$$= \varepsilon A(X_t) \quad (4.31)$$

$$\langle \Delta X^2 \rangle = \varepsilon^2 A^2(X_t) + 2\varepsilon^2 A(X_t)B(X_t)\langle \xi_t \rangle + B(X_t)^2 \varepsilon^2 \langle \xi_t^2 \rangle \quad (4.32)$$

Il ne faut alors pas oublier que notre bruit continu ξ , δ -corrélé pour les temps continus, est en fait la limite discrète de :

$$\langle \xi_t \xi_{t'} \rangle = \frac{\delta_{t,t'}}{\varepsilon} \quad (4.33)$$

Le terme dominant pour $\delta \rightarrow 0$ de l'équation 4.32 devient alors :

$$\langle \Delta X^2 \rangle = K\varepsilon B(X_t)^2 \quad (4.34)$$

Pour $K = 1$, la description en termes d'équation de Langevin et d'équation de Fokker-Planck sont donc identiques. Nous pouvons montrer par ailleurs que l'amplitude du bruit, dans le cadre d'un processus stationnaire, est liée à la température $k_B T$ du thermostat relié au système.

4.2 Application : Modélisation numérique du modèle d'Ising

Les bases de la méthode de Monte-Carlo pour simuler des problèmes physiques ont été jetées à la fin des années 1940 au laboratoire de Los Alamos par Stanislaw Ulam et Nicholas Metropolis [135]. Très rapidement, les physiciens pensent à utiliser cette méthode afin de déterminer la physique du modèle d'Ising, principalement en dimensions $d = 2$ et $d = 3$ [136], plutôt que de tirer directement l'ensemble des spins d'Ising $\{s_i\}$ pour en calculer l'énergie. Les méthodes de Monte-Carlo sont basées sur un échantillonnage aléatoire direct ou indirect de l'espace d'arrivée : pour notre modèle d'Ising, un échantillonnage direct reviendrait à tirer au hasard les configurations $\{s_i\}$, avec une probabilité pour chaque configuration qui serait donnée par les résultats de l'ensemble canonique. Cela implique de connaître la fonction de partition du système :

$$p_{c_i} = \frac{\exp(-\beta E_i)}{\mathcal{Z}} \quad (4.35)$$

L'échantillonnage direct est assez peu intéressant pour l'étude du modèle d'Ising car nous avons déjà vu que la connaissance de \mathcal{Z} permettait d'obtenir toutes les informations intéressantes sur la physique du modèle. Par conséquent, les travaux numériques ont principalement utilisé un échantillonnage indirect, qui part d'une configuration quelconque à un temps t_0 et la laisse évoluer selon les règles définies par le bilan détaillé (équation 4.8). Pour le modèle d'Ising, cela revient à choisir un spin j au hasard à chaque instant t , puis à le retourner avec une probabilité donnée, liée à la différence d'énergie entre la configuration avec le spin j retourné et celle avec le spin j non retourné, qui est très facile à calculer. Ces processus sont de fait des chaînes de Markov. Notre algorithme, écrit en Fortran 90 pour des raisons de rapidité, est une version modifiée par Sébastien Léonard d'un algorithme simulant le modèle d'Ising hors équilibre. Une grille de L^d spins désordonnés est initialement choisie, et la simulation va ensuite effectuer une boucle consistant à :

- sélectionner un spin j au hasard
- calculer l'énergie d'une configuration où le spin j a été retourné, et la comparer à l'énergie initiale
- calculer la probabilité \mathcal{P} d'acceptation de cette nouvelle configuration
- tirer un nombre au hasard afin de le comparer à \mathcal{P} pour accepter (ou non) le retournement

Par petits sauts élémentaires, le système va alors naturellement converger vers la distribution de probabilités d'équilibre, π . Il existe différentes variantes de l'algorithme qui vérifient le bilan détaillé en fonction de la différence d'énergie $\Delta E = E_{\text{new}} - E_{\text{old}}$, comme nous pouvons le voir sur la table 4.1.

Modèle	Cas $\Delta E < 0$	Cas $\Delta E \geq 0$
Metropolis	1	$\exp(-\beta\Delta E)$
Glauber	$1/(1 + \exp(\beta\Delta E))$	$1/(1 + \exp(\beta\Delta E))$

TABLE 4.1 – Calcul des probabilités d'acceptation \mathcal{P} d'un retournement de spin d'Ising en fonction de la différence d'énergie ΔE entre la configuration retournée et la configuration initiale, pour l'algorithme de Metropolis et la dynamique de Glauber.

4.3 Application : temps de sortie de Kramers d'un puits de potentiel

Un des plus vieux résultats de la physique statistique des systèmes hors de l'équilibre a été résolu dans le domaine de la chimie théorique : en effet, Arrhenius en 1889 postule que la constante k de la cinétique des réactions chimiques dépend essentiellement d'une barrière d'énergie, appelée *énergie d'activation*, qui limite la vitesse de la réaction. Plus tard, Eyring et Polanyi [137] décrivent plus précisément cette dépendance en explicitant les préfacteurs d'Arrhénius dans le cadre de la théorie de l'état de transition. Ils explicitent alors, pour une quelconque coordonnée réactionnelle X , la dépendance de la cinétique de la réaction chimique en fonction de la barrière d'enthalpie libre ΔG^\ddagger à franchir pour atteindre l'état de transition. Presque au même moment, H. Kramers [138] obtient un résultat très similaire : en considérant un processus stochastique X d'une bille au fond d'un puits de potentiel de taille finie ΔV et soumise à un bruit (voir figure 4.1), il trouve que le temps caractéristique d'échappement d'un tel puits possède exactement la même dépendance en hauteur de barrière que pour la cinétique chimique. C'est donc la même physique qui va gouverner de tels processus : c'est en effet lors de réalisations bien particulières du bruit ξ que les réactions élémentaires vont se produire, et que la bille va sortir de son puits. Nous allons décrire le résultat de H. Kramers dans la suite de cette partie :

4.3.1 Modèle

Considérons une particule de masse négligeable, soumise à un bruit blanc gaussien δ -corrélé $\xi(t)$, confinée dans un puits de potentiel $U(x)$. Elle doit alors franchir une barrière de taille $\Delta V \gg k_B T$ afin de s'en échapper.

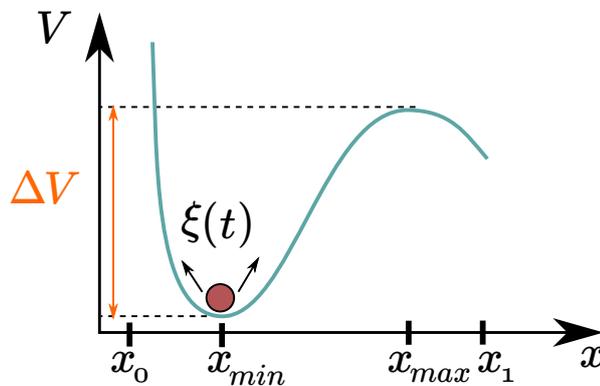


FIGURE 4.1 – Modélisation de notre problème : une bille, initialement confinée dans un puits de potentiel, franchit une barrière $\Delta V \gg k_B T$ grâce aux fluctuations $\xi(t)$ afin de s'« échapper » du puits.

Nous devons faire quelques approximations supplémentaires afin de rendre notre problème soluble : nous partirons du principe que la particule est absorbée une fois le puits de potentiel franchi : nous avons alors $p(x_1, t) = 0$. De plus, nous modéliserons ce système physique par un processus stochastique via une équation de Langevin :

$$\dot{x} = -\gamma \frac{\partial U}{\partial x} + \sqrt{2k_B T \gamma} \xi(t) \quad (4.36)$$

le bruit $\xi(t)$ est caractérisé par $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$. Nous avons vu qu'il était possible de formuler le problème de manière équivalente à partir d'une équation de Fokker-Planck, qui

décrit l'évolution de $p(x, t)$:

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x (\gamma U'(x) p(x, t)) + \frac{1}{2} \partial_x^2 (2k_B T \gamma p(x, t)) \quad (4.37)$$

Remarquons que nous pouvons construire un flux de probabilité $J(x, t)$ en effectuant des bilans locaux de la densité de probabilité $p(x, t)$:

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) \quad (4.38)$$

Dans notre cas, nous considérerons que notre particule n'est pas réinjectée dans le puits de potentiel lorsque celle-ci s'échappe. Par conséquent, l'intégrale de la densité de probabilité locale ne vaut plus 1. Nous pouvons alors définir la probabilité $P(t)$ de sortie du puits comme l'écart à 1 de cette intégrale :

$$\int_x p(x, t) dx = 1 - P(t) \neq 1 \quad (4.39)$$

Nous supposons que le potentiel est infini en $x = x_0$ ce qui implique que la particule ne peut s'échapper que en x_{\max} . Cela vient donc préciser les bornes de l'intégrale de l'équation 4.39. Le flux de sortie en x_{\max} à l'instant t va, lui, définir la probabilité de sortir du puits entre t et $t + \delta t$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int_{x_0}^{x_{\max}} \frac{\partial p}{\partial t} dx = J(x_{\max}, t) \quad (4.40)$$

Ce qui implique alors que :

$$\frac{J(x, t)}{\gamma} = - (U'(x) p(x, t)) + k_B T \partial_x (p(x, t)) \quad (4.41)$$

$$= - k_B T \exp\left(-\frac{U(x)}{k_B T}\right) \partial_x \exp\left(\frac{U(x)}{k_B T}\right) p(x, t) \quad (4.42)$$

Le passage de 4.41 à 4.42 n'est qu'une astuce de calcul. Elle nous permet cependant d'exprimer la probabilité $p(x_{\min}, t)$ en intégrant l'équation 4.42 :

$$\int_{x_{\min}}^{x_1} J(x, t) \exp\left(\frac{U(x)}{k_B T}\right) dx = -\gamma k_B T \exp\left(\frac{U(x_{\min})}{k_B T}\right) p(x_{\min}, t) \quad (4.43)$$

Dans notre étude, nous considérerons en effet des conditions aux limites « absorbantes » en $x = x_1$, où nous imposons $p(x_1) = 0$.

4.3.2 Approximation de puits profond

Nous allons ensuite considérer que le puits dans lequel sont confinées les particules est profond : cela implique donc que les particules sont *localement* à l'équilibre thermique dans le puits, et que la probabilité totale p de présence est *grosso modo* concentrée dans un voisinage de ce puits, \mathcal{V} :

$$p(x \approx x_{\min}, t) \approx p(x_{\min}, t) \exp\left(-\frac{U(x) - U(x_{\min})}{k_B T}\right) \quad (4.44)$$

$$P(t) \approx \int_{\mathcal{V}} p(x, t) dx = p(x_{\min}, t) \int_{\mathcal{V}} \exp\left(-\frac{U(x) - U(x_{\min})}{k_B T}\right) dx \quad (4.45)$$

Nous allons maintenant considérer notre puits quadratique : par conséquent, on a $U(x) - U(x_{\min}) \approx |U''(x_{\min})|(x - x_{\min})^2$. On en déduit la valeur de notre intégrale désormais gaussienne, ce qui nous donne :

$$P(t) \approx p(x_{\min}, t) \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{|U''(x_{\min})|}} \quad (4.46)$$

Il est alors possible de faire le lien entre nos diverses grandeurs. En appliquant la méthode de Laplace (aussi appelée *méthode du col* pour les fonctions à variables complexes) à notre intégrale issue de 4.43, on obtient :

$$\int_{x_{\min}}^{x_1} J(x, t) \exp\left(\frac{U(x)}{k_B T}\right) dx \approx \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{|U''(x_{\max})|}} \exp\left(\frac{U(x_{\max})}{k_B T}\right) J(x_{\max}, t) \quad (4.47)$$

Nous avons donc, en rassemblant les pièces 4.40, 4.43 et 4.47,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma \frac{\sqrt{|U''(x_{\min})U''(x_{\max})|}}{2\pi k_B T} \exp\left(-\frac{U(x_{\max}) - U(x_{\min})}{k_B T}\right) P(t) \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -rP(t) \quad (4.49)$$

La particule s'échappe donc selon une loi exponentielle avec un taux caractéristique r . En effectuant des hypothèses légèrement différentes de celles de H. Kramers, nous sommes arrivés aux mêmes conclusions et nous avons de plus extrait la forme de la distribution du temps de survie de la particule en question.

4.4 Relations de fluctuations-dissipation

4.4.1 Réponse linéaire

Les relations de fluctuation-dissipation sont des relations très générales qui relient les fluctuations d'un système à proximité de l'équilibre thermodynamique à la réponse d'un tel système lorsque nous le soumettons à un champ h . Il est alors possible de calculer, pour toute observable A du système, la valeur statistique de $\langle A \rangle_{h=0}$ à partir de la fonction de partition \mathcal{Z} du système à l'équilibre :

$$\langle A \rangle_0 = \sum_{C_i} A_i \frac{\exp(-\beta E_i)}{\mathcal{Z}} \quad (4.50)$$

Appliquons un champ $h(t)$ à notre système. Notre Hamiltonien initial, \mathcal{H}_0 , devient alors :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_0 - Sh \quad (4.51)$$

S est le terme de *couplage* au champ h . Nous souhaiterions déterminer la valeur de $\langle A(t) \rangle_h$ de notre observable sous champ. Pour cela, nous allons *supposer* que le champ interagit faiblement avec le système, et qu'il est alors possible d'exprimer $\langle A(t) \rangle_h$ comme un développement limité du champ h . Il faut *a priori* considérer que pour tous les temps $t' \leq t$, le champ h peut avoir eu un effet sur l'observable $\langle A(t) \rangle_h$, mais que pour tous les temps $t' > t$, ce n'est pas le cas : notre système est causal. Nous en déduisons l'expression :

$$\langle A(t) \rangle_h = \langle A \rangle_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') h(t') dt' \quad (4.52)$$

La fonction de réponse χ ne dépend que de l'argument $t - t'$ car la définition de l'origine des temps n'influe pas sur la physique du problème, et s'annule pour toutes les valeurs de $t - t' < 0$. Nous supposons de plus que l'effet du champ $h(t')$ à des temps très éloignés de

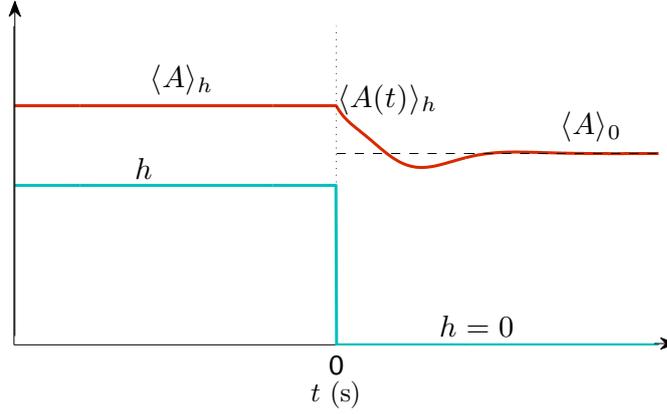


FIGURE 4.2 – Réponse de notre système à un créneau inversé : en débranchant h à $t = 0$, le système initialement à l'équilibre $\langle A \rangle_h$ va relaxer vers le nouvel équilibre défini par $\langle A \rangle_0$.

t s'estompe : $\chi(t - t' \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$. Si nous examinons la réponse de notre observable A à la dérivée temporelle $\dot{h}(t')$ du champ $h(t')$, nous voyons que :

$$\langle A(t) \rangle_{\dot{h}} - \langle A \rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') \frac{\partial h}{\partial t'} dt' \quad (4.53)$$

Il est possible d'exprimer cette somme à partir de la réponse au champ h , en effectuant une intégrale par parties (dont les termes de bord s'annulent) :

$$\langle A(t) \rangle_{\dot{h}} - \langle A \rangle_0 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \chi(t - t')}{\partial t'} h(t') dt' \quad (4.54)$$

$$= + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \chi(t - t')}{\partial t} h(t') dt' \quad (4.55)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') h(t') dt' \quad (4.56)$$

La réponse de l'observable A à un δ de Dirac nous donne par définition la valeur de $\chi(t)$. Par conséquent, la réponse à un créneau de Heaviside (qui s'interprète comme un champ branché ou débranché à $t = 0^+$) nous donnera par cette relation des informations directes sur la réponse de notre système.

4.4.2 Réponse à un créneau inversé

Intéressons-nous donc à la réponse de notre système lorsque nous débranchons un champ à $t = 0$ (cf. fig. 4.2). Le système est initialement à l'équilibre soumis à un champ h . La distribution d'équilibre des probabilités que le système se trouve dans l'état i , π_h^i , est alors donnée par :

$$\pi_h^i = \frac{\exp(-\beta(E_i - S_i h))}{\sum_j \exp(-\beta(E_j - S_j h))} \quad (4.57)$$

$$= \frac{\exp(-\beta E_i)}{\mathcal{Z}_0} \frac{1 + \beta S_i h}{1 + \beta h \langle S \rangle_0} \quad (4.58)$$

$$= \pi_0^i (1 - \beta h \langle S \rangle_0 + \beta S_i h) \quad (4.59)$$

Pour les temps $t \geq 0$, la perturbation h est débranchée. Par conséquent, la dynamique de relaxation vers l'équilibre est donnée par la distribution des probabilités π_0^i sous la forme du bilan détaillé. Sa version continue est donnée par la fonction $G(i, t|j, t')$ qui est la probabilité

que le système se trouve dans l'état i au temps t sachant que ce dernier était dans l'état j au temps t' :

$$\pi_h^j G(i, t|j, t') = \pi_h^i G(j, t|i, t') \quad (4.60)$$

De manière triviale, le système initialement dans l'état i à t' se retrouve forcément dans un des états à l'instant t . Nous avons donc $\sum_j G(j, t|i, t') = 1$. Nous pouvons alors expliciter $\langle A(t) \rangle$ en fonction des probabilités $p_i(t)$ que le système se trouve dans l'état i à $t \geq 0$. Ces dernières, initialement régies par les probabilités d'équilibre π_h^i , vont relaxer vers les π_0^i avec une dynamique connue, donnée par le bilan détaillé :

$$\langle A(t) \rangle = \sum_i A_i p_i(t) \quad (4.61)$$

$$= \sum_i A_i \sum_j \pi_h^j G(i, t|j, 0) \quad (4.62)$$

$$= \sum_i A_i \sum_j \pi_0^j (1 - \beta h \langle S \rangle_0 + \beta S_j h) G(i, t|j, 0) \quad (4.63)$$

$$= 1 - \beta h \langle S \rangle_0 \sum_i A_i \pi_0^i + \beta h \sum_{i,j} A_i S_j \pi_0^j G(i, t|j, 0) \quad (4.64)$$

$$= (1 - \beta h \langle S \rangle_0 \langle A \rangle_0) + \beta h \langle A(t) S(0) \rangle_0 \quad (4.65)$$

Le théorème fluctuation-dissipation s'exprime sous différentes formes : celle qui nous intéresse ici concerne la limite pour $t \rightarrow 0$ puis $h \rightarrow 0$:

$$\frac{d\langle A \rangle_h}{dh} = \beta (\langle AS \rangle_0 - \langle A \rangle_0 \langle S \rangle_0) \quad (4.66)$$

Il est tout à fait possible de prendre $A = S$: par conséquent, il est possible d'obtenir la relation simplifiée :

$$\left. \frac{d\langle S \rangle_h}{dh} \right|_{h=0} = \beta \text{var}(S) \quad (4.67)$$

Dans le cadre de la diffusion, cette formule définit la relation d'Einstein, qui lie le déplacement moyen $\langle x \rangle$ d'une particule soumise à une force f à la variance d'un tel déplacement quand la force appliquée est nulle :

$$\left. \frac{d\langle x \rangle_f}{df} \right|_{f=0} = \beta \text{var}(x)_0 \quad (4.68)$$

$$\frac{1}{K\eta} = \beta D \quad (4.69)$$

La relation d'Einstein exprime donc la viscosité du fluide η uniquement en fonction de D , β et d'une constante géométrique K . Pour un système magnétique, il devrait de même être possible de déterminer la susceptibilité χ en fonction des fluctuations de l'aimantation m à l'équilibre :

$$\chi = \beta \text{var}(m)_0 \quad (4.70)$$

C'est cette relation que nous allons examiner pour l'expérience de von Kármán.

Conclusion

Le théorème fluctuation dissipation dans la forme présentée repose sur l'hypothèse importante que le système est à l'équilibre sous champ extérieur, et relie la susceptibilité d'un système soumis à un champ aux fluctuations à l'équilibre de cette grandeur et de la grandeur associée au champ. Cette relation est très générale, et ne fait intervenir que la théorie de la

réponse linéaire des systèmes proches de l'équilibre thermodynamique qui respectent le bilan détaillé. Des généralisations d'un tel théorème sont possibles, mais plus complexes : nous ne nous attarderons pas dessus dans ce manuscrit de thèse.

Il sera possible de vérifier, dans une prochaine section, la validité d'une telle équation lors de notre étude des régimes stationnaires (et instationnaires) de l'écoulement de von Kármán— bien que celui-ci soit par définition loin de l'équilibre — lorsqu'une asymétrie (qui sera jouée par θ) est appliquée.

*

CHAPITRE 5

CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT STATIONNAIRE : COMMANDE EN VITESSE

Introduction

Nous avons décrit dans la section précédente le montage mécanique ainsi que les différentes grandeurs utilisées pour décrire l'écoulement de von Kármán. Cela ne suffit bien évidemment pas à comprendre l'écoulement et ses diverses caractéristiques. Ce chapitre a vocation à nous familiariser avec l'écoulement de von Kármán : la commande en vitesse est en effet historiquement bien connue et ses résultats, robustes, offrent en partie un exemple « éducatif » du comportement de l'écoulement, depuis le régime laminaire jusqu'à la turbulence pleinement développée. Ce chapitre va donc rappeler en premier lieu les principaux traits de la transition de l'écoulement de von Kármán vers la turbulence, pour s'attacher ensuite aux nouveaux résultats liés au comportement du système dans les deux sens de rotation des turbines.

5.1 La transition à la turbulence

Dans cette section, nous allons étudier l'écoulement de von Kármán en partant de sa description pour $f_1 = f_2$, avec des turbines à pales courbes, en augmentant progressivement le nombre de Reynolds depuis les fluides les plus visqueux jusqu'aux fluides très inertiels. Cette transition à la turbulence a été en fait étudiée deux fois : une première fois par Florent Ravelet qui a principalement basé son étude sur des considérations mécaniques et de LDV, et une deuxième fois par Pierre Cortet qui n'a utilisé que des mesures de PIV. Nous allons donc synthétiser leurs interprétations de la transition à la turbulence dans cette section. Pour ces raisons de pédagogie, nous allons utiliser à la fois des résultats fournis par des turbines *TM60* (utilisées par Florent Ravelet et Pierre Cortet) et *TP87* (que nous avons utilisées). Nous postulerons que, pour ces deux jeux de turbines très similaires, le scénario de la transition à la turbulence est identique.

5.1.1 Écoulement initial

5.1.1.1 Aspect global de l'écoulement aux faibles Re

Il est possible d'utiliser du glycérol à 99% dans notre expérience. Il permet en effet de descendre à des nombres de Reynolds valant approximativement 60. Dans ces conditions, et pour $f_1 = f_2$, l'écoulement généré a une forme bien connue (visible sur la figure 5.1). Chacune

des turbines « aspire » le fluide au niveau de son centre pour le réinjecter à ses extrémités. À l'altitude moyenne $z = 0$, le fluide expulsé de la turbine du haut vient rejoindre celui de la turbine du bas. Il n'a alors d'autre choix que de se diriger vers le centre de l'écoulement pour être aspiré à nouveau par les deux turbines. C'est ce qu'on appelle une *cellule de recirculation poloïdale*. De plus, chacune des turbines vient naturellement entraîner dans son sens de rotation le fluide situé à sa proximité immédiate. Le fluide va donc s'enrouler selon deux tores superposés tournant dans des sens contraires, leur séparation définissant une *couche de cisaillement* en $z = 0$ qui concentre les gradients de vitesse azimutale (hors du plan) et verticale : la position de cette couche de cisaillement permet de respecter les symétries expérimentales du montage, qui sont la \mathcal{R}_π symétrie et l'axisymétrie. Enfin, les grandeurs mesurables globales et les grandeurs eulériennes locales sont constantes et ne dépendent pas du temps : l'écoulement est *stationnaire*, et possède donc une invariance supplémentaire selon toute translation dans le temps.

Toutefois, nous pouvons déjà voir sur la figure 5.1 que les écoulements dans les deux sens ne sont pas tout à fait équivalents : dans le sens (+) (à droite), le fluide est pompé de manière plus importante vers les deux turbines, tandis que dans le sens (-) (à gauche), le fluide est entraîné de manière plus efficace à proximité des turbines. Réécrivons alors l'équation de Navier-Stokes dans le cas purement visqueux (soit, pour $Re \ll 1$) et stationnaire :

$$\nu \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5.1)$$

Nous ne considérons pas de terme de forçage \mathbf{f} ici : nous allons supposer que dans les écoulements purement visqueux, les turbines effectuent un forçage *via* des conditions aux limites sur \mathbf{v} au bord des pales (ce qui a été confirmé dans [65]). Nous pouvons alors imposer des conditions aux limites, par exemple en effectuant des expériences dans le sens (+) : la solution du problème sera donnée par les champs \mathbf{v} et p . Toutefois, nous pouvons également effectuer des expériences dans le sens (-), avec des conditions aux limites opposées. Le champ de vitesses donné par $-\mathbf{v}$ respectera alors ces nouvelles conditions aux limites, pour un champ de pressions $p' = c^{te} - p$. De même, le champ de vitesses $\tilde{\mathbf{v}}$, donné par :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_r \\ -v_\phi \\ v_z \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

respectera également ces nouvelles conditions aux limites, pour un champ de pressions p identique à celui du sens (+) si les champs \mathbf{v} et \mathbf{v}' sont axisymétriques. Le processus qui vient sélectionner la solution parmi $-\mathbf{v}$ et $\tilde{\mathbf{v}}$ n'est pas clair, mais nous pouvons savoir lequel est choisi à partir des symétries présentes entre les champs de vitesses du sens (+) et du sens (-). La figure 5.1 nous montre que les écoulements poloïdaux des sens (-) et (+) vont dans le même sens, ce qui signifie que $\tilde{\mathbf{v}}$ serait naturellement sélectionné, et présentent un écoulement toroïdal d'intensité similaire lorsque le sens de rotation change. L'écoulement observé (pourtant produit à $Re \geq 100$) peut donc bien être considéré comme laminaire. Des écoulements ensemencés de bulles, photographiés par Florent Ravelet, ont d'ailleurs confirmé la nature axisymétrique de l'écoulement à très bas nombre de Reynolds. Des mesure additionnelles ont montré que cette similarité cesse dès $Re = 160$, l'écoulement du sens (+) présentant alors un pompage poloïdal plus important.

5.1.1.2 Couples visqueux

Dans de telles conditions, la viscosité domine également les autres contributions dans les équations du mouvement du fluide. En effet, si nous considérons que la force F_{visq} exercée par

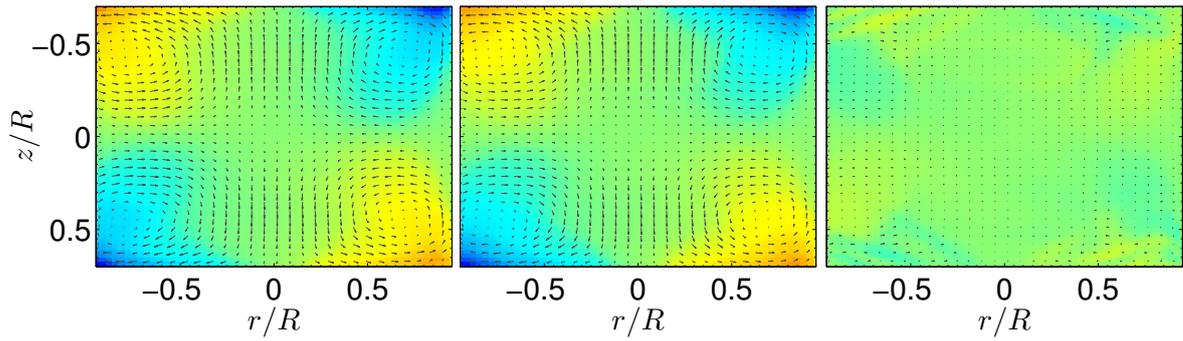


FIGURE 5.1 – Champs de vitesses de PIV de l'écoulement instantané : à gauche, $\text{Re} \approx 150$, sens (+) ; au centre, sens (-), $\text{Re} \approx 120$; à droite, différence entre les deux écoulements. Les deux écoulements sont produits à $\theta = 0$, soit $f_1 = f_2 = 1$ Hz, et acquis durant le post-doctorat de Pierre Cortet [117] avec des turbines TM60. Les flèches représentent l'écoulement poloidal dans le plan de la nappe laser, tandis que les couleurs représentent la vitesse toroïdale (ou azimutale) v_ϕ perpendiculaire à la nappe. Les deux écoulements respectent bien la \mathcal{R}_π symétrie.

le fluide sur chacune des pales est dominée par les termes visqueux, nous obtenons dimensionnellement :

$$F_{\text{visq}} = -K_1 \rho \nu (2\pi f) R^2, \quad (5.3)$$

K_1 étant ici une constante liée à la forme de la turbine. Le couple exercé par le fluide C_{visq} aura par conséquent une expression du type :

$$C_{\text{visq}} = -K_2 \rho \nu (2\pi f) R^3, \quad (5.4)$$

K_2 étant un nouveau facteur de forme. Si nous calculons le couple adimensionné K_p pour un tel écoulement, nous aurons donc :

$$K_p = \frac{C}{\rho R^5 (2\pi f)^2} \quad (5.5)$$

$$= K_2 \frac{\nu}{R^2 (2\pi f)} \quad (5.6)$$

$$K_p \propto \text{Re}^{-1} \quad (5.7)$$

Pour un rayon de cuve donné, nous aurons donc un couple inversement proportionnel au rayon de la cuve. Cette loi est très bien vérifiée sur la figure 5.4, en tout cas pour les nombres de Reynolds inférieurs à 300. Malgré des écoulements sensiblement différents, les couples exercés par les turbines dans les deux sens de rotation sont très similaires : l'écoulement est bien dominé par des effets visqueux.

5.1.2 Premières instabilités

Dans le sens (-), le système subit une première bifurcation supercritique lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur seuil $\text{Re}_1 = 175 \pm 5$: la couche de cisaillement n'est alors plus horizontale mais présente des oscillations spatiales de nombre d'onde $m = 2$ [91, 65], en accord avec les prédictions théoriques [89, 90]. L'écoulement n'est alors plus axisymétrique, mais reste toujours *stationnaire*, comme il est possible de le voir sur les signaux de LDV (cf. 5.2).

La deuxième symétrie perdue est l'invariance par translation dans le temps : en effet, pour un nombre de Reynolds $\text{Re}_2 = 250$, des modulations commencent à être observées (cf. fig 5.2)

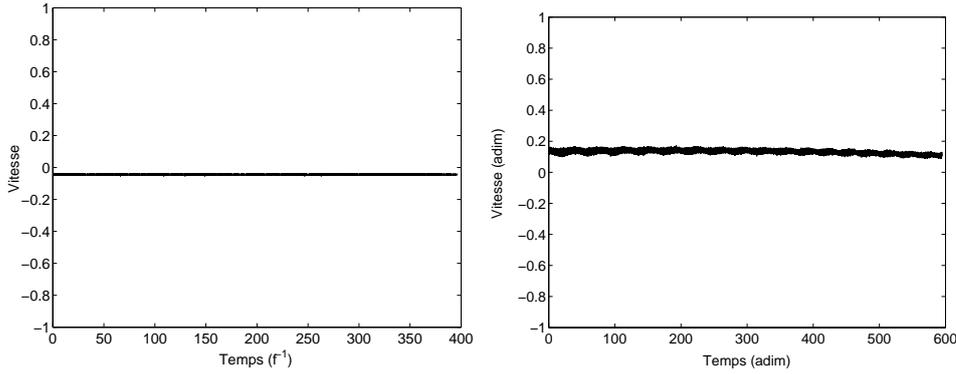


FIGURE 5.2 – Signaux temporels de vitesse azimutale v_ϕ de LDV de l'expérience de von Kármán, pour $\theta = 0$, en $z = 0$, fournis par Florent Ravelet [65] avec des turbines TM60. À gauche, régime stationnaire à $Re < 250$ brisant l'axisymétrie : la vitesse moyenne est non nulle. À droite, régime modulé observé pour $Re = 330$: le signal présente des faibles oscillations.

sur les grandeurs auparavant stationnaires de l'écoulement. Cela correspond probablement à l'apparition d'ondes progressives (*travelling waves* ou TW en anglais) dans l'écoulement, prévue numériquement et observée chez d'autres équipes [89, 91] avec des disques lisses, quoique pour des nombres de Reynolds légèrement différents.

5.1.3 La transition vers la turbulence

Si nous augmentons encore le nombre de Reynolds, les bifurcations se succèdent alors rapidement : des ondes stationnaires apparaissent vers $Re = 390$, qui deviennent ensuite irrégulières, le système parcourant des orbites quasi-hétéroclines. Pour des Re plus élevés encore, il est possible d'observer un enroulement de la couche de cisaillement sur elle-même. Le spectre de la vitesse commence alors à présenter un comportement en f^{-1} aux très petites fréquences, caractéristique d'un régime chaotique (fig. 5.3). Le système devient ensuite progressivement turbulent, les fluctuations de la vitesse azimutale saturant vers $Re \approx 4000$. Les spectres temporels des signaux de LDV présentent alors un début de zone inertielle avec une pente caractéristique $-5/3$. Pour toute cette gamme de nombres de Reynolds, la taille des fluctuations de vitesse $(v_\phi - \bar{v}_\phi)^2$ varie comme $Re - Re_c$, avec $Re_c = 330$. Cela semble confirmer la nature globalement supercritique de la transition à la turbulence.

Dans le régime désormais dit *inertiel*, les deux sens de rotation produisent des écoulements très différents, pour lesquels la valeur des couples adimensionnés K_p est différente dans les deux sens de rotation. Le fluide, plus accéléré dans le sens $(-)$, exercera un couple plus important sur les turbines que dans le sens $(+)$. De même, la relation linéaire $K_p \propto Re^{-1}$ est perdue, comme il est possible de le voir sur la figure 5.4. Tandis que le K_p de l'écoulement du sens $(-)$ semble atteindre un plateau, celui du sens $(+)$ continue de diminuer lorsque Re augmente.

5.1.4 Restauration statistique des symétries

5.1.4.1 Du désordre instantané à l'ordre statistique

Le champ de vitesses de PIV instantané nous fournit de plus amples informations sur la nature du désordre régnant au sein de l'écoulement de von Kármán dans le régime turbulent. En effet, nous savons que désormais l'écoulement instantané varie très rapidement en fonction du temps, et ne respecte plus les symétries du montage (voir figure 5.5).

Il est possible de montrer (pour cela, voir l'annexe B consacrée à l'ergodicité) que le *poor*

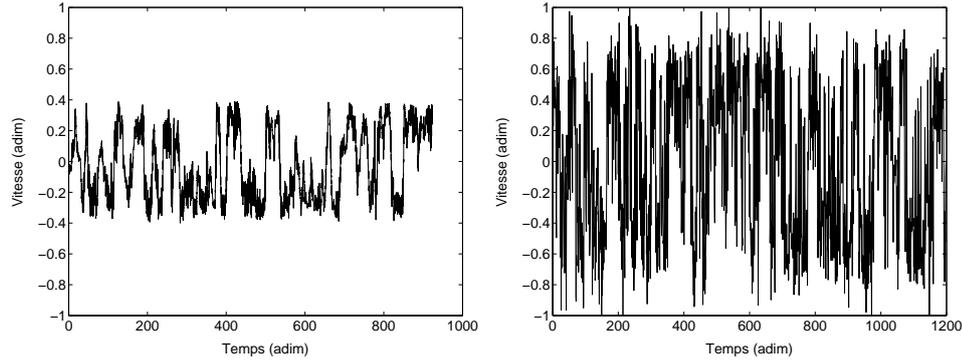


FIGURE 5.3 – Signaux temporels de vitesse azimutale v_ϕ de LDV, pour $\theta = 0$, en $z = 0$, toujours extraits de la thèse de Florent Ravelet [65] pour des turbines TM60. À gauche, régime chaotique à $\text{Re} = 450$: la vitesse, bruitée, semble transiter entre deux valeurs ± 0.3 . À droite, écoulement turbulent pour $\text{Re} = 4000$. Les vitesses sont très élevées et ne semblent plus suivre une tendance particulière.

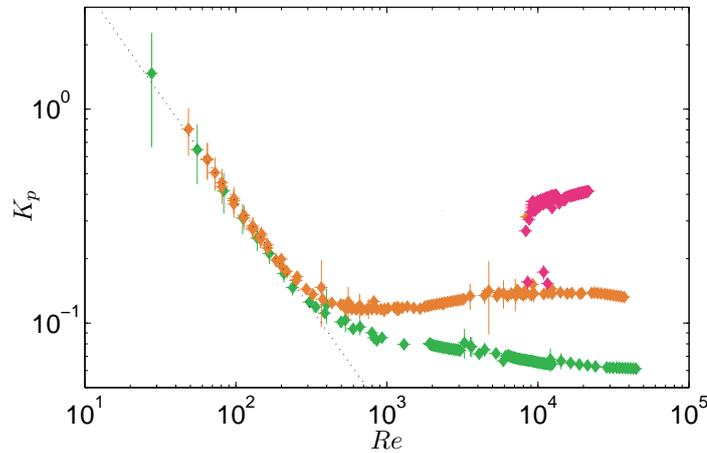


FIGURE 5.4 – Comparaison des couples adimensionnés K_p pour les deux sens de rotation : (\diamond), sens ($-$), et (\blacklozenge), sens ($+$), pour des TM60. Les données sont extraites de la thèse de Florent Ravelet [65]. Les barres d'erreur sont représentées. Une troisième branche stationnaire (\blacklozenge), produite à partir du sens ($-$), apparaît vers $\text{Re} \approx 10000$. La ligne en pointillés représente la dépendance théorique du couple en fonction du Re en régime laminaire : $K_p \propto \text{Re}^{-1}$, bien respectée jusqu'à $\text{Re} \approx 300$, qui correspond à la troisième bifurcation par rapport à l'écoulement laminaire de la figure 5.1.

man's Navier Stokes, système dynamique utilisé pour modéliser très simplement la turbulence, préservait la mesure [7]. L'interprétation généralement acceptée de cette propriété consiste à dire que les symétries du système sont statistiquement restaurées dans l'écoulement turbulent. Notre système de PIV nous permet de mesurer des champs de vitesses qui ne suivent pas la totalité de la dynamique de l'écoulement à cause de sa faible fréquence d'acquisition. Toutefois, il peut exister une forme de corrélation temporelle entre deux champs de vitesse successifs non résolus temporellement. Afin de quantifier cette possible corrélation, nous pouvons examiner la grandeur suivante :

$$C(r, z, \tau) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2 - |\bar{\mathbf{v}}|^2} \int_t (\mathbf{v}(r, z, t + \tau) - \bar{\mathbf{v}}) \cdot (\mathbf{v}(r, z, t) - \bar{\mathbf{v}}) dt \quad (5.8)$$

Cette grandeur va donc mesurer la ressemblance « typique » qui existe entre deux champs

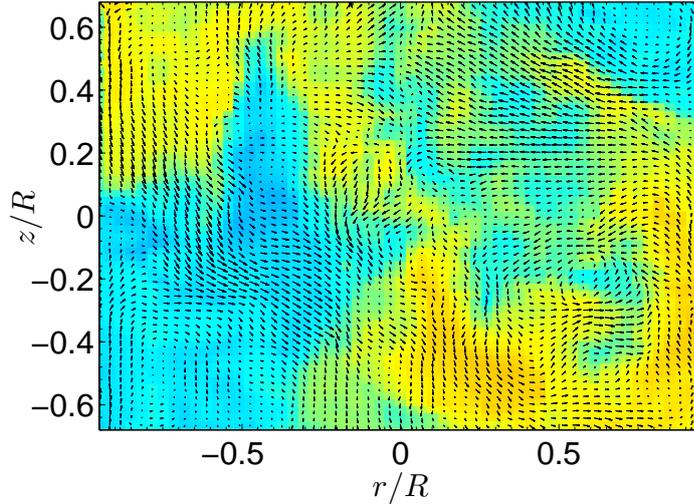


FIGURE 5.5 – Écoulement instantané turbulent pour un nombre de Reynolds élevé ($\geq 10^4$), pour des turbines en plastique TP87. Plus aucune symétrie n'est constatée, et le fluide s'écoule de manière désordonnée.

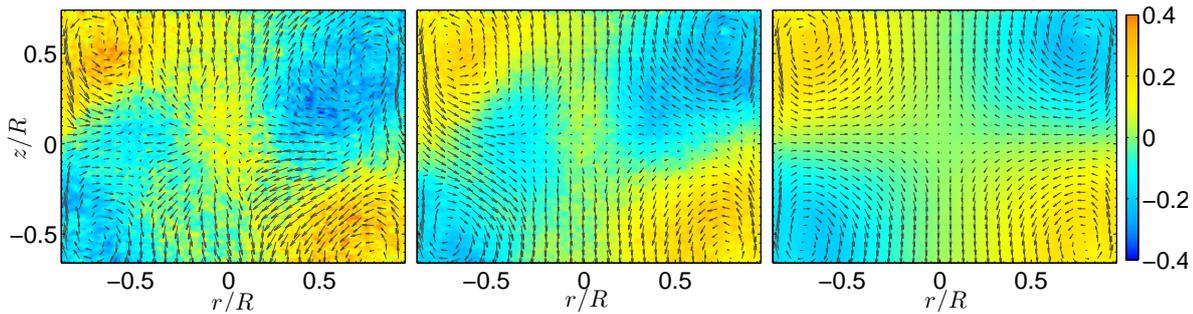


FIGURE 5.6 – Écoulements turbulents moyennés sur N instantanés décorrélés en temps, pour des turbines en plastique TP87. À gauche, $N = 20$: l'écoulement ne semble ni axisymétrique (divergence non nulle au centre) ni \mathcal{R}_π symétrique. Au milieu, $N = 100$: l'écoulement semble déjà mieux respecter les symétries même si des parties non symétriques sont toujours présentes, comme au centre de l'écoulement où $v_\phi \neq 0$ et à gauche, où le fluide semble directement être entraîné depuis le tore du bas jusqu'au tore du haut. À droite, $N = 10000$, l'écoulement est parfaitement axisymétrique et \mathcal{R}_π symétrique. La symétrie du système est restaurée.

de vitesses lorsque ceux-ci ont été acquis à un intervalle de taille τ . Ces corrélations sont donc distinctes de celles qui seront décrites dans la partie 5.3.4.4. Le tracé d'une telle grandeur nous montre qu'il existe encore des corrélations significatives entre les champs de vitesses pour des valeurs de $\tau_c = 3$ s, soit sur environ 45 champs de vitesse.

Par conséquent, il est possible d'effectuer une moyenne temporelle des champs de vitesse $\bar{\mathbf{v}}$, qui nous fournira une excellente mesure de la moyenne *statistique* du champ de vitesses $\langle \mathbf{v} \rangle$ si la durée sur laquelle celle-ci s'effectue est grande devant le temps de corrélation de l'écoulement (nos moyennes s'effectueront alors sur des durées excédant 40 s). Cette moyenne statistique nous permettra ainsi de vérifier la restauration de l'axisymétrie et de la \mathcal{R}_π symétrie.

Les champs de vitesse de la figure 5.6 montrent bien cette restauration statistique : plus le nombre d'échantillons sur lequel la moyenne est effectuée est grand, plus l'écoulement respecte les symétries originelles de notre montage. Cependant, le nombre d'échantillons pour

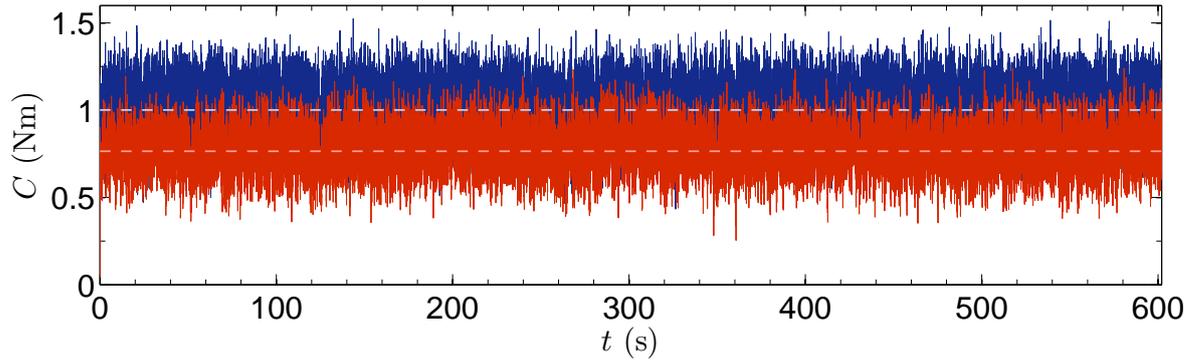


FIGURE 5.7 – Signaux de couples turbulents stationnaires (non calibrés) enregistrés pour le sens (+) avec des TP87. En bleu : (—), le couple de la turbine du bas. En rouge : (—), le couple de la turbine du haut. Les moyennes des signaux sont représentées par un tireté.

recouvrer *rigoureusement* ces symétries est très élevé : pour un champ de vitesse moyenné sur $N = 100$ instants, il est toujours possible de voir à l’œil nu des écarts à la \mathcal{R}_π symétrie. À titre de comparaison, des champs de vitesse parfaitement décorrélés moyennés sur une dizaine d’instants ($N \approx 10$) donneraient une excellente estimation de l’écoulement moyen statistique : cela est principalement lié à la possibilité, dans ce cas, d’appliquer le théorème central limite. Nous considérerons dans la suite qu’il faut effectuer nos moyennes sur au moins $N = 600$ échantillons pour obtenir un écoulement « moyen » qui restaure parfaitement — au sens statistique — toutes les symétries du montage expérimental. Ce sont principalement ces écoulements « moyens » stationnaires, qui seront appelés dans la suite de ce manuscrit les états *symétriques* (s) du système, que nous cherchons à caractériser dans nos expériences.

5.1.4.2 Caractéristiques de l’état symétrique (s)

Stationnarité Si nous regardons le signal de couple fourni par les couplemètres à haut nombre de Reynolds dans l’état symétrique en fonction du temps, nous voyons que celui-ci est *stationnaire*. Cela peut sembler contradictoire avec le caractère turbulent et hors-équilibre de notre écoulement, qui possède des corrélations temporelles sur une durée non négligeable. Une fois de plus, la question des échelles de temps est cruciale, comme il est possible de le voir sur la figure 5.7 : bien que très fluctuants de manière instantanée, les signaux sont globalement stationnaires lorsque nous considérons leur valeur moyenne sur des tranches temporelles d’une taille typique $10\tau_c$.

Corrélation des couples L’écoulement turbulent dans l’état (s) possède statistiquement deux cellules de recirculation séparées par une couche de cisaillement située en $z = 0$. L’écoulement instantané semble alors être la superposition de l’écoulement statistique et d’un bruit turbulent important qui pousse le système suffisamment loin de cet état pour le rendre « méconnaissable ».

Pour mieux comprendre cet écoulement instantané, nous avons besoin d’effectuer d’autres mesures. Les mesures de couple sont plutôt rapides et permettent d’avoir un aperçu de ce que ressent le système aux grandes échelles de manière instantanée. La figure 5.8 nous montre l’auto-corrélation des couples bas et haut pour deux écoulements dans l’état (s), l’un dans le sens (+), l’autre dans le sens (–). Ceux-ci nous indiquent qu’en général, le couple d’une turbine « oublie » ses variations passées en 1 ou 2 révolutions.

Quelque chose au sein du fluide permet donc aux turbines d’oublier rapidement leurs fluctuations passées, qui devraient normalement être retrouvées plus tard sur les turbines si le cycle de pompage et d’expulsion du fluide par les turbines venait simplement les transporter. Une interprétation de ce phénomène implique que la couche de cisaillement joue un tel rôle :

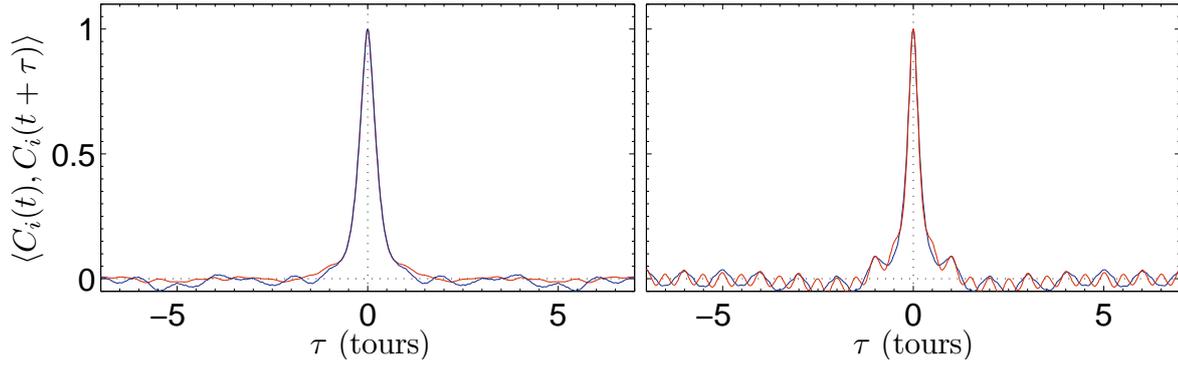


FIGURE 5.8 – Auto-corrélation des couples des couplemètres pour deux expériences effectuées avec des TP87 en régime pleinement turbulent. À gauche, expériences effectuées dans le sens (–) dans l’état stationnaire (s) à $f = 4$ Hz. À droite, expériences dans le sens (+) à $f = 7$ Hz. Le couple du couplemètre du bas est représenté par un trait bleu (—) et celui du haut par un trait rouge (—). Dans les deux sens de rotation, les couples se décorrèlent en deux tours de turbines, malgré quelques oscillations à la fréquence de rotation des turbines.

bien qu’*invisible* sur l’écoulement instantané de PIV, elle joue toujours globalement son rôle de séparation des $z \geq 0$ et $z \leq 0$ avec d’importantes fluctuations. Ce sont ces fluctuations d’écoulement à l’intérieur de la couche de cisaillement qui vont empêcher les auto-corrélations de se construire à τ élevé.

Une preuve accréditant cette interprétation vient des *inter-corrélations* : si la couche de cisaillement exerce bien son rôle de séparation et de fluctuations autour de $z = 0$, alors il est impossible que le couple du couplemètre du haut et de celui du bas soient fortement corrélés dans l’état (s). Cela est effectivement visible lorsque nous traçons ces inter-corrélations : dans le sens (–), les inter-corrélations possèdent un maximum assez faible, 0.25 pour $\tau = 0$ ainsi que deux maxima secondaires encore plus petits pour $\tau \approx \pm 1$ tour : quelques fluctuations subies par une des turbines sont ressenties un peu plus tard sur l’autre turbine. Dans le sens (+), aucune corrélation significative n’est observée même si celles-ci apparaissent périodiques.

Grandeurs globales de PIV Nous avons vu que les champs de PIV instantanés sont *a priori* non résolus en temps, malgré une fréquence d’acquisition pouvant aller jusqu’à 15 Hz. Ces derniers présentent de plus un certain désordre spatial. Il est cependant possible de tracer, par curiosité, l’évolution temporelle des grandeurs globales de PIV afin de voir si la moyenne sur le désordre spatial observé ne viendrait pas restaurer d’une certaine manière la \mathcal{R}_π symétrie. Nous rappelons qu’en toute logique, l’état (s) est invariant par \mathcal{R}_π symétrie, ce qui implique que $\langle I \rangle = \langle \Gamma \rangle = 0$. Cette condition est plutôt bien respectée en général (voir figure 5.10) : les moyennes de \tilde{I} et $\tilde{\Gamma}$ sont bien proches de 0. Nous voyons de plus que les fluctuations de ces grandeurs sont relativement faibles et peu corrélées dans le sens (+), tandis que les signaux du sens (–) semblent s’écarter de la moyenne sur des temps plus longs. Ces derniers n’excèdent toutefois pas $40 \text{ s} = 600/f_{\text{acq}}$, confirmant la pertinence de notre écoulement « moyen » calculé sur 600 instants.

5.2 Le cycle d’hystérésis du sens (–)

Introduction

La section précédente nous a montré qu’à haut nombre de Re, dans le sens (+) comme dans le sens (–), les symétries originelles du montage étaient restaurées dans un sens statistique lorsque le nombre de Reynolds était suffisant pour que l’écoulement soit pleinement turbulent.

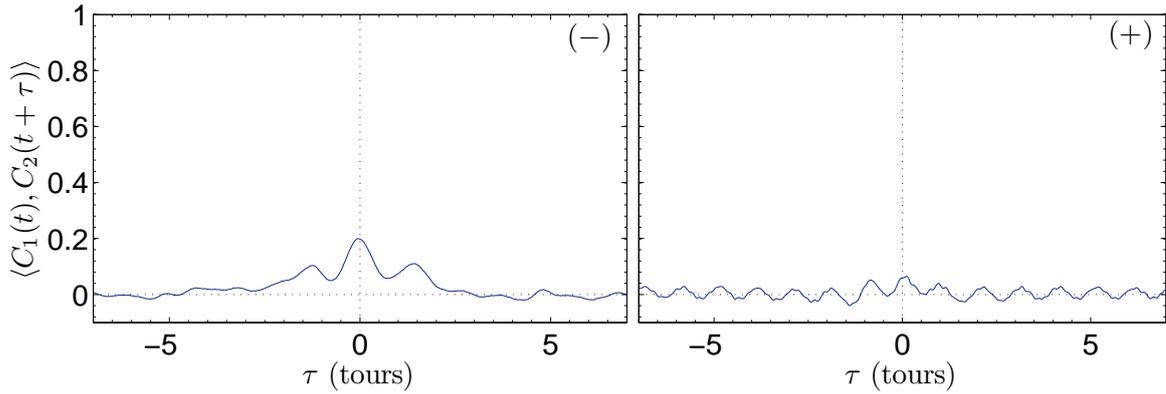


FIGURE 5.9 – Inter-corrélation des couples des couplemètres pour deux expériences effectuées avec des TP87 dans l'état stationnaire (s) en régime pleinement turbulent. La première expérience (à gauche) est effectuée dans le sens (-) à $f = 5$ Hz, l'autre (à droite) dans le sens (+) à $f = 7$ Hz. La corrélation est calculée pour divers décalages temporels τ (exprimés en tours de turbine). Le sens (-) voit apparaître trois petits pics de corrélation à $\tau = -1.4, \tau = 0, \tau = 1.2$ tours pour ensuite rapidement tendre vers 0. Le sens (+) présente quant à lui une corrélation marginale qui semble périodique. Le pic à $\tau = 0$ sépare en fait deux séries périodiques pour $\tau < 0$: $\tau = \{-10.88; -9.88; -8.88; \dots\}$ et pour $\tau > 0$: $\tau = \{1.17; 2.17; 3.17; \dots\}$.

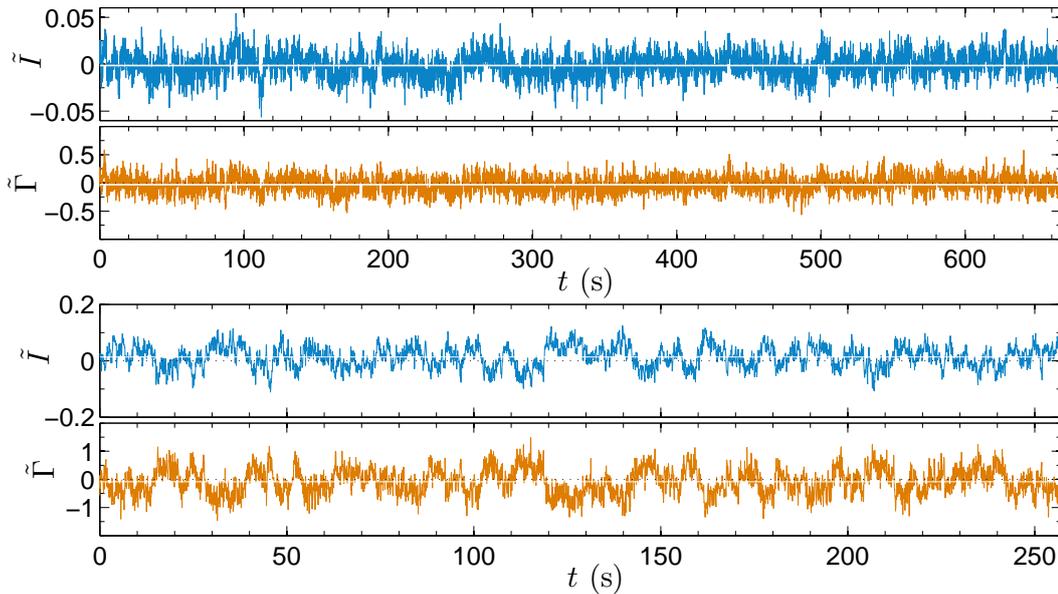


FIGURE 5.10 – Grandeurs globales de PIV pour une expérience effectuée à haut $Re \approx 3.0 \cdot 10^5$ avec des TP87 : $\tilde{I} = I/(2\pi f R^2 \rho \mathcal{V})$, moment cinétique adimensionné, et $\tilde{\Gamma} = \Gamma/(2\pi f R \rho \mathcal{V})$, circulation adimensionnée. Les signaux du haut correspondent à une expérience dans le sens (+), ceux du bas dans le sens (-). Les lignes blanches représentent les moyennes temporelles de ces grandeurs, qui sont effectivement proches de 0.

Nous allons voir dans cette section que ce scénario n'est pas si simple dans le sens (-) : comme nous pouvons déjà le constater, les deux sens de rotation ne sont plus équivalents, et le très fort entraînement toroïdal des turbines va entraîner une nouvelle brisure de symétrie, cette fois-ci au sens *statistique*.

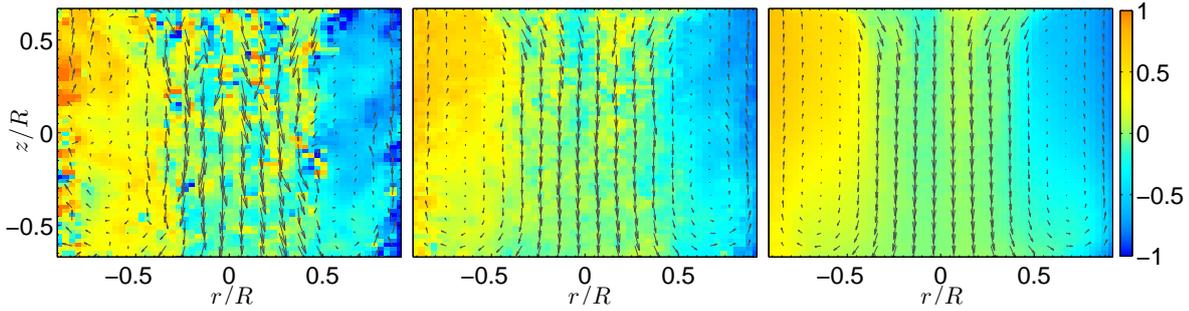


FIGURE 5.11 – Écoulements issus de la branche supérieure de la figure 5.4, pour $\text{Re} \approx 10^5$, obtenus avec des TP87. À gauche, $N = 1$: l'écoulement semble déjà posséder une structure bien définie, avec une cellule unique de recirculation, qui brise la \mathcal{R}_π symétrie. Au milieu, $N = 10$: l'écoulement semble « lisse », presque axisymétrique mais brise toujours fortement la \mathcal{R}_π symétrie. À droite, $N = 500$, l'écoulement semble avoir parfaitement convergé mais brise encore la \mathcal{R}_π symétrie.

5.2.1 La brisure statistique des symétries

Il est possible de voir sur la figure 5.4 une nouvelle branche apparaissant aux environs de $\text{Re} = 10000$, et uniquement dans le sens (-). Cette nouvelle branche a pour première caractéristique un K_p bien plus élevé que celle de l'état (s). Nous allons dans un premier temps examiner les caractéristiques de cette nouvelle branche pour les $\text{Re} \geq 10^5$ pour ensuite nous intéresser à l'apparition d'une telle branche à partir de l'état (s) du sens (-).

5.2.1.1 Un nouvel état statistique

Examen PIV Procédant de la même manière que dans la section précédente, nous avons tracé sur la figure 5.11 les moyennes sur N échantillons des champs issus de cet état statistique. L'écoulement moyen observé, qui est *stationnaire*, est alors extrêmement différent de celui précédemment décrit : il ne possède qu'une seule cellule de recirculation poléoïdale, le fluide étant aspiré exclusivement par la turbine du haut, qui de même fait tourner pratiquement tout le fluide dans son sens de rotation. La couche de cisaillement de la section précédente a en fait été éjectée puis piégée derrière une des deux turbines, ce qui ne laisse subsister qu'un seul tore de recirculation dans le cylindre.

Cet état brise naturellement la \mathcal{R}_π symétrie, cette fois-ci de manière *statistique* : il sera donc appelé état *bifurqué* du système et nous nous y référerons souvent comme à l'état (b_2), la turbine du haut (notée 2 selon nos conventions) ayant pris le pas sur la turbine du bas dans l'écoulement. Il existe bien entendu un *deuxième* état bifurqué, noté (b_1), et qui a été observé expérimentalement. Dans ce cas, c'est la turbine du bas qui domine l'écoulement. Nous avons bien vérifié que les états (b_1) et (b_2) sont bien images l'un de l'autre par application de la \mathcal{R}_π symétrie. Le principe de Curie reste donc bien valide même si chacun des états (b_1) ou (b_2) brise individuellement la \mathcal{R}_π symétrie.

Nous pouvons visualiser la brisure de symétrie des états (b_1) et (b_2) en regardant le moment cinétique I de telles expériences. En effet, nous pouvons voir que l'écoulement moyen bifurqué possède un sens de rotation global, la vitesse toroïdale étant en moyenne très négative aux $r \geq 0$ sur la figure 5.11. Les états bifurqués possèdent donc un moment cinétique important, comme nous pouvons le constater sur la figure 5.12.

Il est intéressant de noter que les moyennes des écoulements instantanés de l'état bifurqué semblent plus rapidement converger vers l'écoulement moyen que les écoulements de l'état symétrique (voir figure 5.11). En effet, pour une moyenne sur 100 échantillons, les fluctuations observées autour de l'état symétrique sont bien plus fortes que leurs contreparties bifurquées

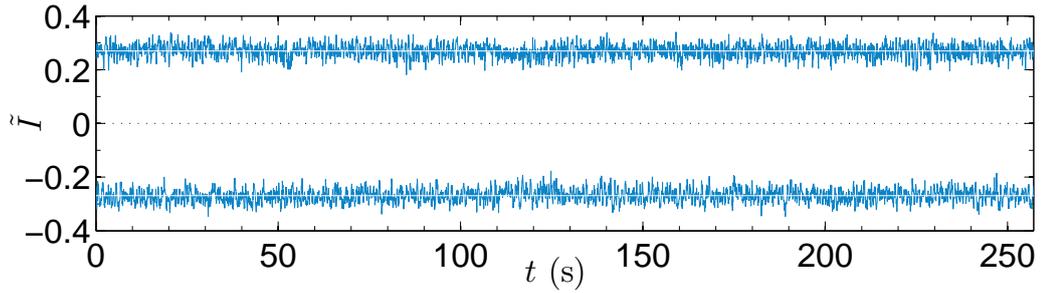


FIGURE 5.12 – Moments cinétiques réduits $\tilde{I}(t)$ pour un écoulement produit par des TP87 pour des $Re \approx 3 \cdot 10^5$, bifurqué bas (b_1) (en bas), et bifurqué haut (b_2) (en haut). Les valeurs moyennes de \tilde{I} , en traits blancs, sont extrêmement proches en valeur absolue : $\bar{I}_1 = -0.2691$ et $\bar{I}_2 = 0.2699$.

pour 50 échantillons. De même, le moment cinétique \tilde{I} possède des fluctuations qui semblent plus faibles (≈ 0.05) dans que dans l'état symétrique (≈ 0.1).

Corrélations L'état statistique (b) ne possède qu'une seule cellule de recirculation : la couche de cisaillement, si elle existe, est rejetée soit dans les turbines, soit derrière. En toute logique, les états (b_1) et (b_2) devraient donc montrer d'importantes corrélations. C'est bien ce que nous observons en examinant les auto-corrélations et inter-corrélations de l'état (b_1) pour $\theta = 0$ (figure 5.13). Le maximum d'intercorrélacion vaut en effet quatre fois plus que celui observé dans l'état (s), et possède l'intéressante propriété de ne pas être situé en $\tau = 0$. En effet, nous observons que les deux pics principaux d'inter-corrélacion se situent respectivement à $\tau = +0.5$ tour et à $\tau = -0.25$ tour, ce qui nous indique que la turbine du haut est à la fois en « retard » et en « avance » sur sa congénère. La position des autres extrema, tous décalés de 0.5 tours par rapport à $\tau = 0$, confirme que le retard est prépondérant. L'autocorrélacion nous indique quant à elle que les fluctuations de la turbine du bas, qui ont été « envoyées » à la turbine du haut en 0.5 tour, mettent beaucoup de temps à revenir vers la turbine du bas, avec un second maximum pour $\tau = \pm 4.25$ tour. Ce maximum étant faible, nous pouvons penser que la corrélacion, qu'elle soit calculée entre la turbine 1 et elle-même, ou la turbine 1 et la turbine 2, se perd en environ 5 tours de turbines. Ces résultats diffèrent des longues corrélacions observées par Florent Ravelet avec les TM60 et pour $\theta = 0$, mais sont très proches des expériences en régime anti-naturel de ce dernier [65]. Ces corrélacions sont d'ailleurs restaurées si nous effectuons les expériences à des θ positifs pour la branche (b_1) et pour les θ négatifs pour la branche (b_2). Cela indique une moins grande robustesse de l'état bifurqué à $\theta = 0$.

5.2.1.2 Conditions d'existence de la solution bifurquée

Nous n'avons pas observé d'état bifurqué (b) dans le sens de rotation (+), qui impose une rotation du fluide moins importante au bord du cylindre, comme il est possible de le voir sur la figure 5.14. La courbure des pales a , comme nous l'avons déjà dit, a une grande influence sur l'entraînement en rotation du fluide, qui semble bien plus efficace à vitesse identique dans le sens (-) que dans le sens (+).

Une partie du travail de thèse de Florent Ravelet s'attaque à ce problème, en examinant l'existence d'un état stationnaire bifurqué selon la courbure des pales des turbines ainsi que selon d'autres paramètres, comme la présence d'ailettes et d'anneau central (qui ont pour effet de stabiliser l'état symétrique) [65]. Nous rappelons dans le tableau 5.1 les résultats obtenus par ce dernier, qui indiquent qu'une courbure importante des turbines favorise la présence de l'état (b) dans le sens (-).

L'influence des ailettes, ainsi que l'anneau central, permettent de mieux comprendre les

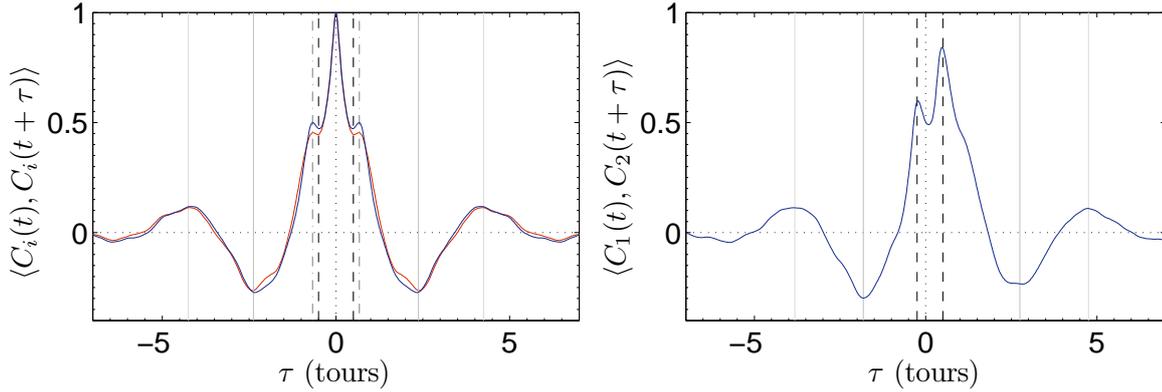


FIGURE 5.13 – Corrélations existantes dans l'état (b_1) à $\theta = 0$ avec des TP87 à haut nombre de Reynolds. À gauche, auto-corrélations de C_1 (bleu) et C_2 (rouge) : les deux courbes, très similaires, présentent des minima locaux en $\tau = \pm 0.5$ tour (tirets) et en $\tau = \pm 2.5$ tour (ligne pleine grise), ainsi que des maxima locaux en $\tau = \pm 0.675$ et $\tau = \pm 4.25$ tours. À droite, inter-corrélations : un maximum élevé est visible pour $\tau = +0.5$ tour, mais aussi pour $\tau = -0.25$ tour. D'autres extrema locaux sont visibles, pour $\tau = 0.5 \pm 2.25$ tours (lignes pleines grises) et $\tau = 0.5 \pm 4.25$ tour (lignes gris clair). Les corrélations sont notables jusque $\tau = \pm 5$ tours.

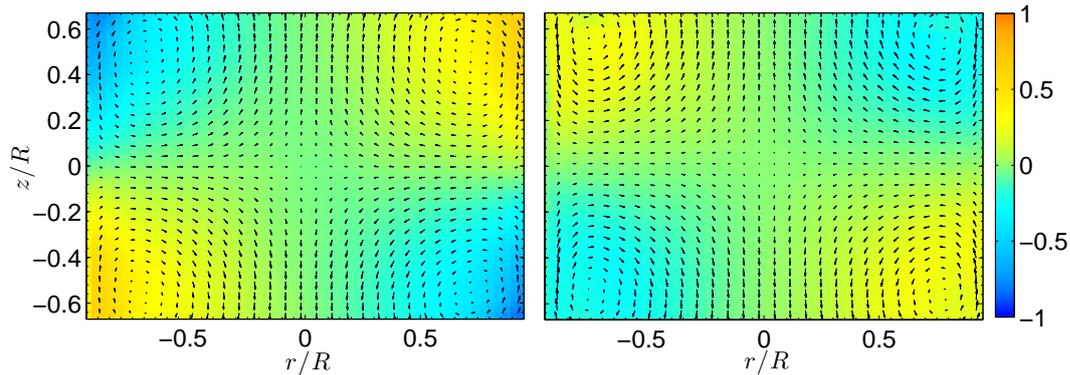


FIGURE 5.14 – Écoulements turbulents à vitesses des turbines identiques pour $\theta = 0$, dans le régime symétrique, pour des TP87. À gauche, sens $(-)$: les vitesses toroïdales atteintes sont élevées. À droite, sens $(+)$: les vitesses toroïdales sont plus faibles.

mécanismes favorisant la présence des états bifurqués (b) . En effet, les ailettes viennent freiner le moment cinétique I , et, comme la courbure des pales, inhibent la présence de (b) . C'est donc dans les situations de fort moment cinétique que les états (b) peuvent exister. La présence d'un anneau central limite la présence des états bifurqués en empêchant le *transfert* du moment cinétique entre parties de l'écoulement à $z \geq 0$ et $z \leq 0$. Ce dernier vient donc stabiliser la couche de cisaillement.

5.2.2 Transitions entre états turbulents : le rôle de θ

L'étude que nous avons effectuée de l'écoulement de von Kármán aux très grands nombres de Reynolds $Re \geq 10^5$ s'est pour l'instant concentrée sur le cas $\theta = 0$. Pourtant, nous pouvons nous dire que nous pouvons *favoriser* un des deux états bifurqués en décidant d'imposer une vitesse plus élevée pour l'une des deux turbines dans un écoulement : cela revient à imposer un $\theta \neq 0$. Nous pouvons alors penser que la turbine la plus rapide va avoir tendance à imposer son sens de rotation et son pompage à tout l'écoulement, ce qui ressemble fortement à ce que

Turbine	Sens	$\alpha(^{\circ})$	Anneau	Ailettes (mm)	Présence de (b)
TM80	(-)	0	X	X	Non
TM83	(-)	30	X	X	Non
TM86	(-)	57	X	X	Oui
TM87	(-)	72	X	X	Oui
TM60	(-)	72	X	X	Oui
TM60	(-)	72	X	5	Oui
TM60	(-)	72	X	10	Non
TM60	(-)	72	Oui	X	Oui
TM60	(+)	-72	X	X	Non
TP87	(+)	-72	X	X	Non

TABLE 5.1 – Tableau représentant la présence (ou non) en $\theta = 0$ d'un état bifurqué, dans le sens de rotation (-) et dans le sens (+). Les paramètres examinés incluent la courbure des turbines employées dans l'expérience (signée selon le sens de rotation des turbines), ainsi que la présence de quatre ailettes verticales d'épaisseur variable [5] ou d'un anneau placé en $z = 0$, de rayon extérieur 100 mm et de rayon interne 90 mm. Une courbure élevée et positive des turbines semble favoriser l'apparition de l'état (b), tandis que la présence d'ailettes tend à les faire disparaître. La présence d'un anneau central, censé favoriser l'écoulement symétrique, ne suffit pas à rendre l'état (b) instable avec les turbines employées.

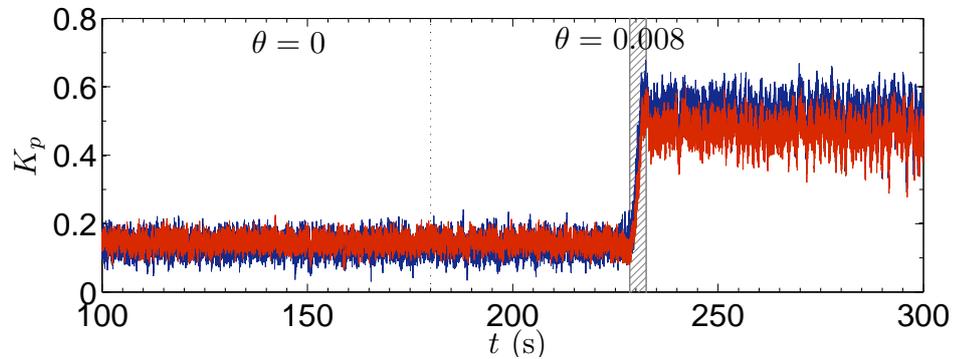


FIGURE 5.15 – Extrait d'un signal de transition entre (s) et (b) pour des TP87 à nombre de Reynolds élevé $Re \approx 3 \cdot 10^5$. Partant d'une situation (s) à $t = 0$ et $\theta = 0$, on impose à $t = 180$ s la condition $\theta = 8,3 \cdot 10^{-3}$. Le couple ne semble pas affecté pendant les quarante premières secondes après ce changement, mais un saut brutal (hachuré) intervient vers $t = 230$ s. Le couple élevé est ensuite observé indéfiniment.

nous observons dans les états (b_1) et (b_2). Nous pouvons donc faire l'expérience, à partir de l'état (s), d'augmenter légèrement $|\theta|$ et d'observer l'évolution des couples sous ce changement. Après un temps plus ou moins long, les couples des moteurs K_p , stables aux alentours de 0,1, transitent brutalement vers $K_p = 0,5$ en quelques tours de turbines, pour se stabiliser ensuite à cette valeur indéfiniment.

Le champ de vitesses obtenu après la transition est identique à celui observé dans l'état (b_1) à $\theta = 0$ (figure 5.11). Nous supposons donc que la transition effectuée est de type (s) \rightarrow (b_1). Aucune autre transition n'est alors observée si nous continuons pour de telles expériences d'augmenter $|\theta|$ jusque $|\theta| = 1$. D'autre part, si nous démarrons directement

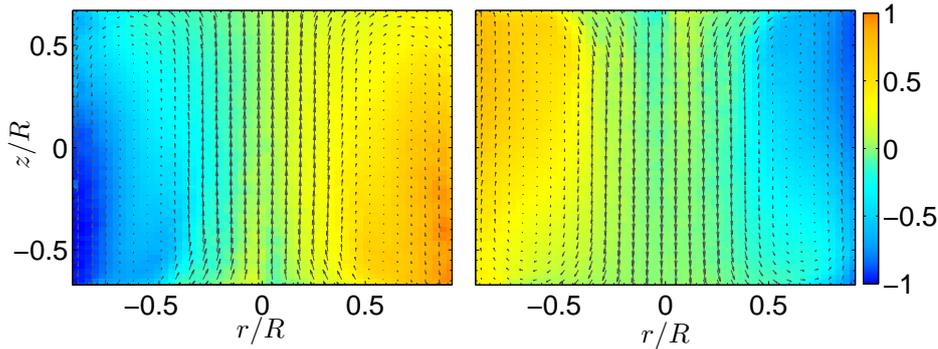


FIGURE 5.16 – Écoulements moyens issus de la PIV à haut nombre de Reynolds, observés pour $\theta = -0.5$ (à gauche) et $\theta = 0.5$ (à droite). Dans ces conditions, un seul état statistique est visité, celui de gauche ressemblant à (b_2) et celui de droite à (b_1) .

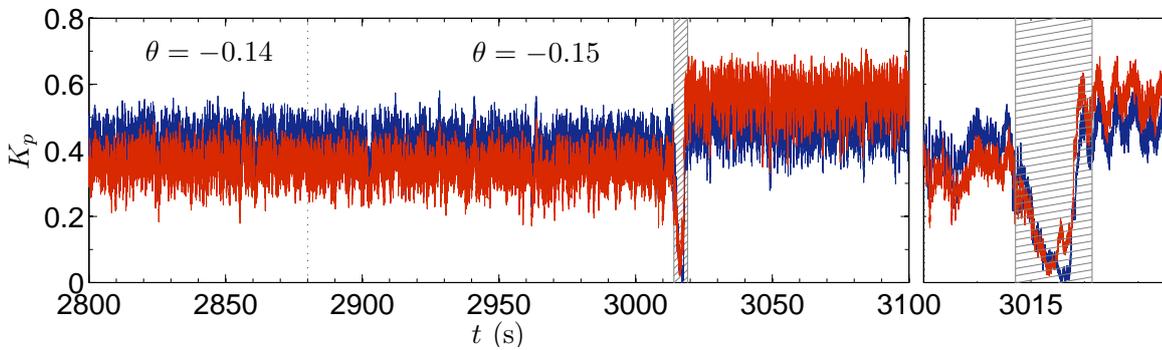


FIGURE 5.17 – Extrait d'un signal de transition entre (b_1) et (b_2) . Partant d'une situation où à $\theta = 1$, θ est diminué continûment jusqu'à $\theta = -0.14$ sans qu'aucun saut brutal ne soit observé. Lorsque nous diminuons encore $\theta = -0.15$, il faut encore attendre 140 s avant qu'une transition soit observée. Les K_p restent élevés : nous avons bien une transition entre les différents états (b) .

les turbines aux plus grandes valeurs de $|\theta|$, nous voyons qu'il n'existe plus qu'un seul état sélectionné. Celui-ci ressemble beaucoup à (b_1) ou (b_2) selon le signe de θ (voir figure 5.16).

Si nous partons d'un tel écoulement à $\theta = \pm 0.5$ comme condition initiale et que nous rapprochons progressivement θ vers $\theta = 0$, nous constatons que tous les états statistiques obtenus ressemblent à (b) , plus précisément (b_1) si $\theta = 0.5$ et (b_2) si $\theta = -0.5$. L'état (b_1) (respectivement (b_2)) subsiste d'ailleurs aux $\theta \leq 0$ (respectivement $\theta \geq 0$) une fois correctement « préparé ». De la même manière que pour la transition depuis (s) , c'est parfois après un certain délai que nous observons des transitions entre états turbulents (voir figure 5.17).

L'état (b_1) semble donc être stable pour des θ strictement négatifs, qui devraient par principe favoriser l'état (b_2) . Par symétrie, l'état (b_2) va de même exister pour des θ positifs favorisant (b_1) . Le système tend à rester dans la même configuration bien que le θ , qui a initialement favorisé son apparition, ne le favorise plus, laissant l'existence de tels états dits *antnaturels* possibles. On dit que l'écoulement de von Kármán est *hystérésique* en θ . L'état (s) , lui, n'est plus jamais accessible lorsque nous préparons l'écoulement de cette manière. Il est donc appelé *marginale*ment stable : une étude plus poussée a d'ailleurs montré que ce dernier possédait un temps caractéristique de vie fini qui diverge pour $\theta \rightarrow 0$ [65]. Le paramètre θ ainsi que l'histoire du système est donc déterminante pour caractériser correctement l'état de notre écoulement à haut nombre de Reynolds.

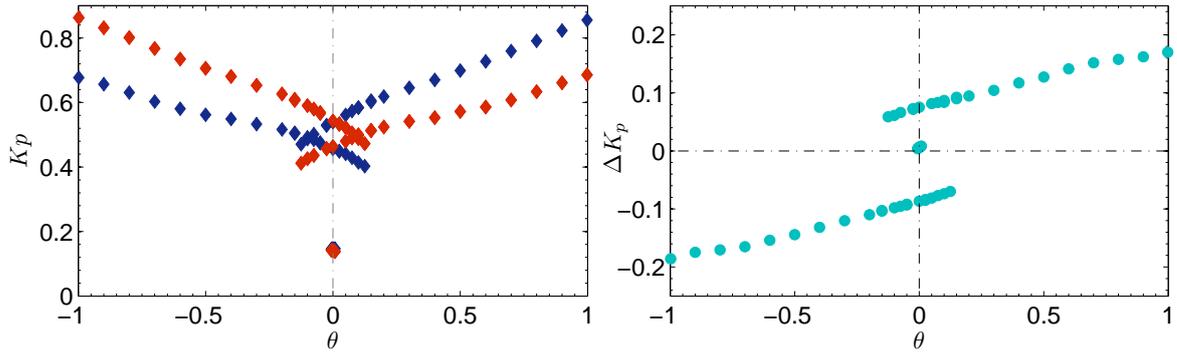


FIGURE 5.18 – Cycle d’hystérésis pour des turbines TP87 dans le sens (-) à $f = 4$ Hz. À gauche, K_p individuels : (■), bas, et (◆), haut. Pour chaque couple, il est possible de voir les trois branches : (s) en bas, (b_2) à gauche et (b_1) à droite. À droite, $\Delta K_p = K_{p,1} - K_{p,2}$ (●) : il est a priori \mathcal{R}_π antisymétrique. Les écarts à l’antisymétrie sont facilement observables et sont probablement liés à la nature non symétrique des calibrations.

5.2.3 Caractéristiques du cycle d’hystérésis à haut nombre de Reynolds

Il est possible de tracer, pour toutes les valeurs de θ , la valeur des couples adimensionnés K_p obtenus pour tous les θ afin de visualiser qualitativement l’hystérésis formé par les états (s), (b_1) et (b_2). La figure 5.18 (à gauche) nous montre trois branches correspondant à ces états : pour les θ principalement négatifs, nous pouvons voir la branche formée par les états (b_2), appelée branche (b_2). Pour les θ majoritairement positifs, nous observons de même la branche (b_1). Le point plus bas, pour $\theta = 0$, correspond à la branche (s) formée par l’état marginalement stable (s). Nous pouvons constater une fois de plus un respect général de la \mathcal{R}_π symétrie lorsque nous passons de θ à $-\theta$, qui échange les couples adimensionnés $K_{p,1}$ et $K_{p,2}$. Nous pouvons, toujours sur cette figure, voir l’extension des branches jusqu’aux états les plus antinaturels, localisés à $\theta = \pm 0.12$. Les couples K_p associés à ces branches antinaturelles sont d’ailleurs plus faibles que leurs contreparties naturelles, ce qui est relativement peu intuitif. Enfin, pour la majeure partie des branches (b), nous constatons que le K_p varie de manière linéaire en θ .

Il est plutôt difficile de quantifier directement, à l’œil, la qualité du respect de la \mathcal{R}_π symétrie : en effet, les écarts à celle-ci sont généralement petits devant les K_p , notamment sur les branches (b). Nous pouvons alors tracer le ΔK_p , antisymétrique en θ , pour voir si notre expérience respecte bien les symétries du montage (figure 5.18, à droite). Le ΔK_p possède l’avantage d’être plus faible que le K_p individuel et fait généralement bien ressortir (parfois à notre grand dam) les problèmes entraînant des brisures de symétrie. Nous voyons ici, sur le cycle effectué à $f = 4$ Hz, que l’antisymétrie est globalement respectée. Néanmoins, l’état (s) semble très légèrement décalé vers le haut, et la branche du bas (b_2) semble légèrement plus écartée de $\Delta K_p = 0$ que celle du haut. Cet effet, plutôt faible, semble à la fois lié à la nature asymétrique de nos calibrations, qui entraîne un décalage global d’une telle courbe, et à une éventuelle asymétrie résiduelle de notre montage.

Pour vérifier si cette asymétrie résiduelle est purement d’ordre mécanique (frottements supplémentaires, points durs) ou si celle-ci résulte de l’action du fluide, nous pouvons regarder le même cycle d’hystérésis, en traçant les grandeurs globales de PIV, notamment I et Γ . Nous allons donc vérifier pour tout θ ce que nous avons regardé dans la figure 5.12 pour $\theta = 0$. L’examen de la figure 5.19 nous révèle qu’effectivement, la \mathcal{R}_π symétrie est très bien respectée du point de vue de l’écoulement, les tracés étant bien antisymétriques en θ . La normalisation de \tilde{I} et $\tilde{\Gamma}$ se révèle d’ailleurs pertinente puisque la superposition des deux séries de points est très bonne. Ces deux cycles ont d’ailleurs globalement le même aspect que la courbe du ΔK_p

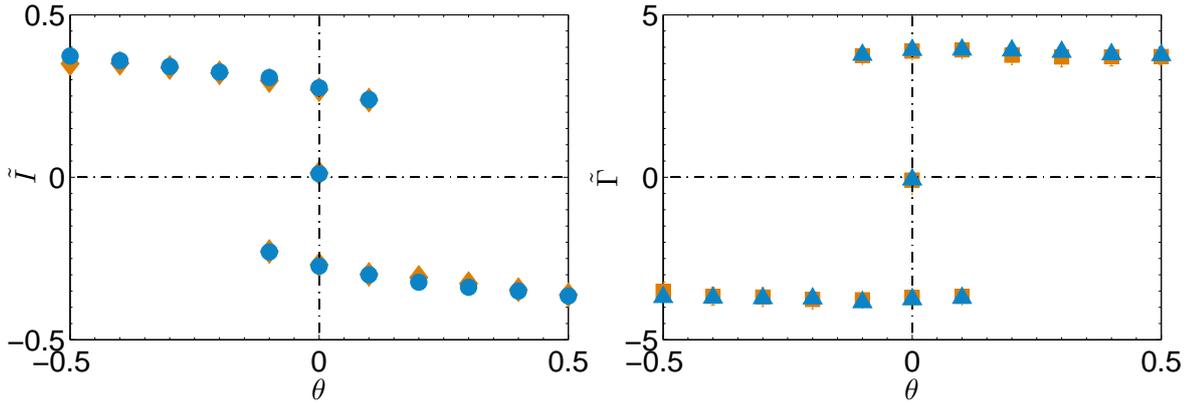


FIGURE 5.19 – Moments cinétiques adimensionnés \tilde{I} (à gauche) et circulations adimensionnées $\tilde{\Gamma}$ (à droite) dans le sens (–) à haut nombre de Reynolds ($\geq 10^5$) avec des TP87. À gauche : (●), cycle effectué à 4 Hz, et (◆), à 5 Hz, avec des barres d'erreur représentant l'écart-type (faible) de I . À droite : (▲), cycle effectué à 4 Hz, et (■), cycle effectué à 5 Hz, avec une fois de plus les barres d'erreur (très faibles) représentant l'écart-type de $\tilde{\Gamma}$. Les courbes, \mathcal{R}_π symétriques, se superposent bien pour les deux vitesses.

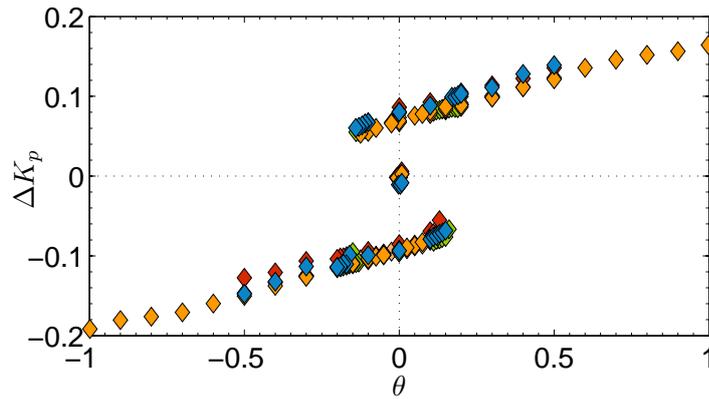


FIGURE 5.20 – Tracé de $\Delta K_p(\theta)$ dans une expérience en eau à différentes fréquences moyennes f de rotation des turbines. Les couples réels C_1 et C_2 ont été décalés indépendamment de toute calibration afin d'obtenir $\Delta K_p(\theta = 0) = 0$ dans l'état symétrique. (◆), cycle effectué à $f = 2.5$ Hz; (◆), cycle effectué à $f = 3$ Hz, (◆), cycles effectués à $f = 4$ Hz, (◆), cycle effectué à $f = 5$ Hz.

(au signe près), ce qui laisse suggérer que nous pouvons définir une bijection entre ces deux grandeurs. Celle-ci sera décrite dans la section 5.3.3. Cette indépendance supposée de la forme des courbes par rapport au nombre de Reynolds est par ailleurs en partie confirmée par le tracé « superposé » des ΔK_p à différentes fréquences moyennes de rotation : la figure 5.20 montre une bonne ressemblance des cycles en fonction de la fréquence moyenne de rotation des turbines, f , une fois les couples artificiellement centrés. Cette bonne superposition, satisfaisante « à l'ordre zéro » pour les écoulements à très hauts nombres de Reynolds, cache une « lente » variation de la largeur et de la hauteur du cycle d'hystérésis, qui fait l'objet de la section suivante.

5.2.4 Une transition sous-critique ou supercritique ?

Comment est-on passé d'un unique état (s) dans un écoulement quasi-turbulent, à une multiplicité d'états avec présence de cycle d'hystérésis, toujours pour un écoulement turbulent ?

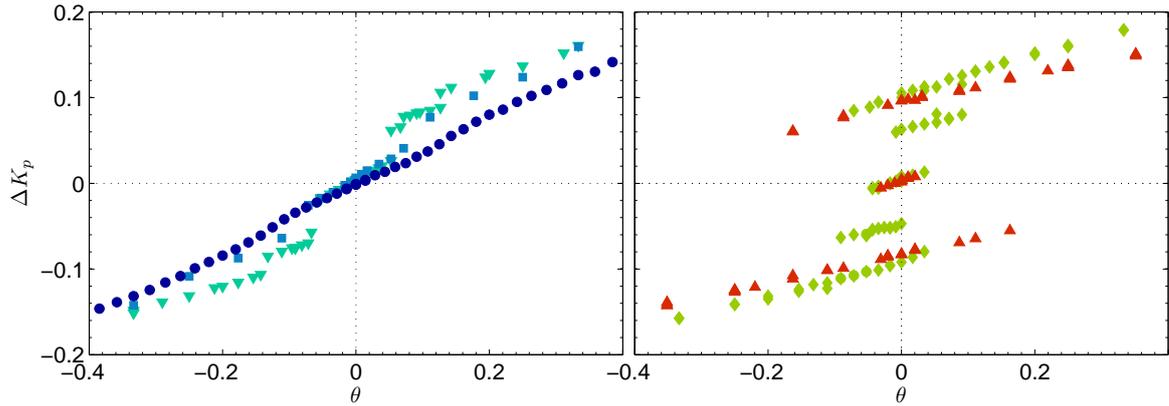


FIGURE 5.21 – Différence normalisée des couples, ΔK_p , tracée en fonction de θ pour des TM60 à divers nombres de Reynolds, d'après la thèse de Florent Ravelet [65]. (●), $Re = 800$; (■), $Re \approx 3000$; (▼), $Re \approx 5800$; (◆), $Re \approx 15300$; (▲), $Re \approx 195000$. Partant d'une situation à une branche centrale continue, divers décrochages sont observés, formant jusqu'à cinq branches distinctes. Seules trois d'entre elles, identifiées à (b_1) , (s) et (b_2) survivent aux plus hauts nombres de Reynolds.

Florent Ravelet a étudié cette ouverture, en parcourant avec des TM60 les cycles d'hystérésis obtenus en variant la fréquence des turbines ainsi que le fluide à l'intérieur du cylindre. Il a ainsi utilisé quatre mélanges eau-glycérol avec plusieurs concentrations massiques de glycérol : le premier à 93%, le second à 85%, le troisième à 80% et le dernier à 74%. Il a ainsi atteint une plage de nombre de Reynolds s'étalant de $Re \approx 800$ à $Re \approx 15300$. Nous allons voir qu'il faut en effet étudier toute cette gamme afin de bien comprendre comment émergent les états bifurqués du cycle d'hystérésis.

Nous pouvons donc voir l'ouverture du cycle en plusieurs étapes sur la figure 5.21. La situation initiale pour $Re \approx 800$, en régime chaotique, nous montre une seule branche du K_p pour tous les θ : définir le ΔK_p dans ce régime semble avoir du sens. Nous appellerons par abus de langage cette branche centrale (s) . À $Re \approx 2900$, la situation n'est plus la même : nous voyons que deux décrochages sont observables sur la branche (s) pour $\theta = \pm 0.1$. La résolution de cette expérience ne nous suffit pas à conclure sur une quelconque discontinuité de la courbe. La situation est plus claire pour $Re \approx 5800$ où une transition a effectivement induit plusieurs discontinuités, générant cinq branches : $\theta \in [-1; -0.13]$; $\theta \in [-0.13; -0.07]$; $\theta \in [-0.06; 0.05]$; $\theta \in [0.07; 0.13]$ et $\theta \in [0.13; 1]$. Ces dernières deviennent fortement hystérétiques pour des Re plus élevés, les branches 2 et 4 précédemment vues étant chacune totalement « entourée » par une des branches extérieures et la branche centrale. Une nouvelle transition rend ensuite les branches du milieu instables, ne laissant subsister que trois branches à $Re \geq 1.0 \cdot 10^5$, très similaires à celles que nous avons précédemment décrites pour les « hauts nombres de Reynolds ».

Quel type de transition ? Il n'est pas vraiment possible de décrire le scénario de l'ouverture du cycle d'hystérésis simplement en utilisant le formalisme des systèmes dynamiques : en effet, partant d'un état de la branche (b_1) (ou (s)), nous savons désormais que la bifurcation vers un état de la branche (b_2) est soumis à un large hystérésis. Notre cycle, à un $Re \geq 10^5$ donné est donc fortement *sous-critique en θ* . L'étude de l'ouverture du cycle d'hystérésis en fonction du nombre de Reynolds permet quant à elle de conclure à une ouverture progressive du cycle via un nombre important de bifurcations. Il semblerait que le scénario d'ouverture soit d'ailleurs globalement supercritique (voir fig. 5.22). Nous pouvons donc analyser ces résultats plus en détail à la lumière de l'analogie avec le ferromagnétisme, que ce soit celui décrit par le modèle d'Ising champ-moyen (exposé au chapitre 3) ou à ce-

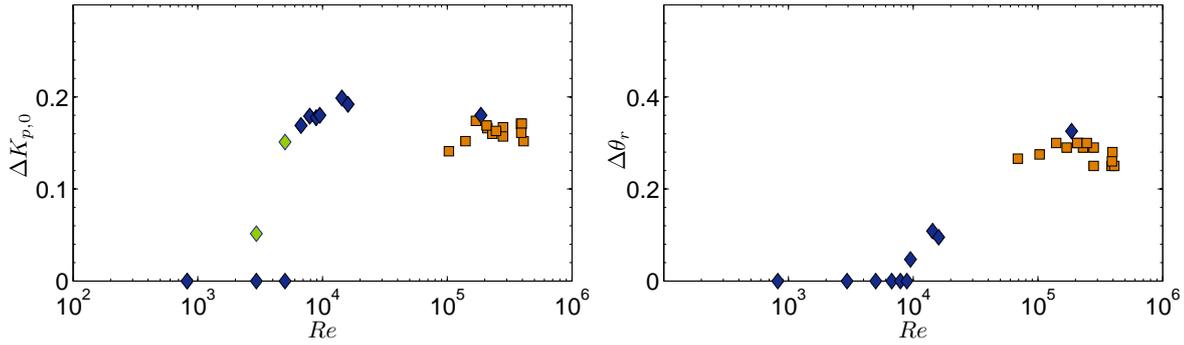


FIGURE 5.22 – Quelques grandeurs liées au cycle d’hystérésis en fonction de Re . À gauche, $\Delta K_{p,0}$, défini comme la hauteur maximale du cycle d’hystérésis en $\theta = 0$. (◆) : TM60, sans prolongation des éventuelles branches en $\theta = 0$. (◆) : TM60 avec prolongation des branches en $\theta = 0$. (■) : TP87. Selon la manière de l’estimer, il est possible (ou non) d’observer une discontinuité de ce paramètre d’ordre possible de l’ouverture du cycle d’hystérésis. À droite, $\Delta\theta_r$, défini comme l’asymétrie coercitive du cycle d’hystérésis : c’est le θ maximal obtenu avant de bifurquer sur une autre branche. Cette grandeur, un autre paramètre d’ordre possible de l’ouverture du cycle, semble continue aux valeurs proches de 0, favorisant une interprétation supercritique de l’ouverture du cycle d’hystérésis.

lui observé dans des matériaux magnétiques réels [139, 140]. Nous pouvons nous intéresser à deux paramètres d’ordre possibles pour décrire la succession de transitions qui mène au cycle d’hystérésis des hauts nombres de Reynolds. Nous pouvons par exemple examiner, pour $\theta = 0$, les valeurs maximale et minimale prises par ΔK_p (voir figure 5.22). Nous appellerons cette grandeur $\Delta K_{p,0}$, l’asymétrie spontanée du couple. Nous voyons cependant que bien qu’il semble exister plusieurs branches de ΔK_p dès $Re \approx 2900$, celles-ci ne s’étendent pas jusque $\theta = 0$. Nous avons donc mesuré le $\Delta K_{p,0}$ à la fois en prolongeant les branches jusque $\theta = 0$ et sans les prolonger, ce qui donne des résultats distincts tant que les branches extérieures n’atteignent pas $\theta = 0$. Il ne semble toutefois pas exister d’hystérésis en Re pour ces grandeurs : le scénario de bifurcation semble donc plutôt supercritique, même en présence du saut élevé à $Re_{K_p} \approx 5000$. Nous pouvons de même nous intéresser à la *largeur* du cycle d’hystérésis. Cela est relativement aisé lorsqu’il n’existe plus que deux branches (b_1) et (b_2) stables, mais il est plus délicat de le calculer dans des cas où cinq branches peuvent se superposer et coexister. Nous ne prendrons en compte dans ce cas que les deux branches continues jusque $\theta = \pm 1$. Si ces branches coexistent pour une plage de valeurs de θ donnée, nous mesurons alors la taille de ce recouvrement, qui sera noté $\Delta\theta_r$. Une fois de plus, la figure 5.22 suggère que $\Delta\theta$ n’est pas discontinue au $Re_\theta \approx 8500$ seuil, privilégiant la piste supercritique. Les expériences pratiquées dans l’eau avec des TP87 montrent que la plage de nombre de Reynolds accessible est trop faible pour observer une réelle variation des grandeurs $\Delta K_{p,0}$ et $\Delta\theta_r$: c’est bien cette faible dépendance en Re qui implique que tous les cycles de la figure 5.20 se ressemblent. Une discussion plus poussée à ce sujet sera effectuée dans le chapitre 7, à la lumière des valeurs de $\Delta K_{p,0}$ et $\Delta\theta_r$ fournies à plus grands nombres de Reynolds par l’expérience SHREK.

5.3 La transition continue du sens (+)

5.3.1 Introduction

Les diverses mesures effectuées par les autres groupes sur l’écoulement de von Kármán, que ce soit celui de l’ENS Paris [32, 34, 45, 38], de l’ENS Lyon [53, 56], de l’université du Havre [39], de l’université Cornell [76] ou de l’université de Navarre [92] ne se sont jamais

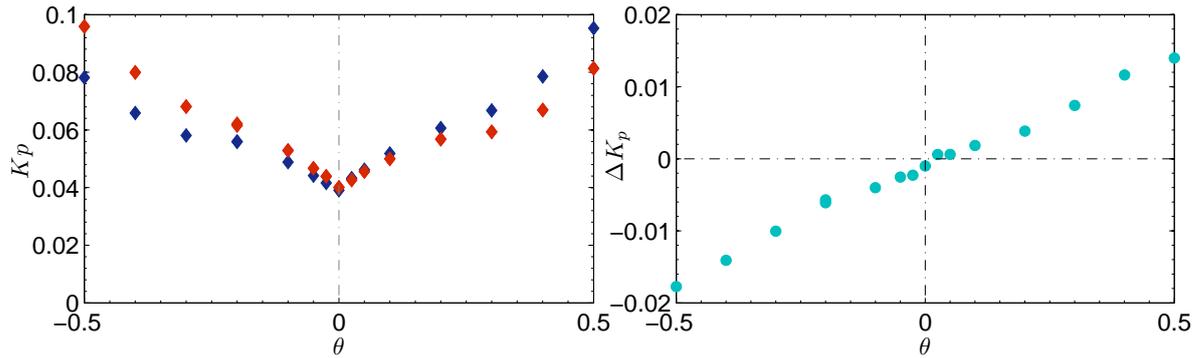


FIGURE 5.23 – Balayage en θ des couples adimensionnés moyens (à gauche) K_p et des ΔK_p dans le sens (+), pour $\text{Re} \approx 5.0 \cdot 10^5$ avec des TP87. La \mathcal{R}_π symétrie est bien respectée, le cycle des ΔK_p passant quasiment par 0 en $\theta = 0$.

intéressés au forçage avec la face concave de pales courbes. Tous ont utilisé des pales droites, à l'exception des derniers, qui ont utilisé des pales courbes ... mais en forçant dans le sens (+), avec la face convexe des pales. Nous avons pourtant déjà vu que les deux sens de rotation ne sont plus équivalents.

La section précédente nous a en effet montré l'influence déterminante de la courbure des pales ainsi que la présence d'éléments favorisant l'état symétrique sur l'existence même d'états bifurqués en $\theta = 0$ ainsi que l'existence d'un cycle d'hystérésis. La physique du problème n'est cependant pas inintéressante : il peut exister des décrochages en θ des couples, ce qui ne serait pas visible en étudiant uniquement le cas à $\theta = 0$. L'étude de ce sens de rotation a été effectuée principalement par Pierre Cortet et Éric Herbert qui ont acquis un grand nombre de champs de vitesses par PIV. Nous allons donc rappeler ces résultats en les complétant par quelques mesures de couples, puis en effectuant une analogie entre ces résultats et le modèle d'Ising champ-moyen.

5.3.2 L'écoulement du sens (+) à haut nombre de Reynolds : étude en θ

Étude des couples Les sections 5.2.1.2 et 5.1.4.2 nous ont déjà indiqué à quoi ressemblaient les écoulements dans l'état (s), pour $\theta = 0$ et à haut nombre de Reynolds. Il n'y a pas de cycle d'hystérésis, mais rien n'exclut qu'il n'y ait pas de décrochage du couple en fonction de θ , comme nous l'avons observé (figure 5.21) pour les $\text{Re} \leq 10\,000$ dans le sens (-). La figure 5.23, réalisée pour un $\text{Re} \approx 5.0 \cdot 10^5$ ne montre aucun décrochage du K_p lorsque θ varie. La courbe traçant les $K_p(\theta)$ reste en effet continue pour tous les nombres de Reynolds qui nous sont accessibles dans l'expérience. La valeur des K_p , que nous savons faible pour $\theta = 0$, reste d'ailleurs faible pour toutes les valeurs de θ , ne dépassant jamais $K_p = 0.1$, en deçà du K_p de la branche symétrique du sens (+).

Validation du scénario par PIV Tout, donc, porte à croire que dans le sens (+), nous n'avons pas de phénomène de brusque aspiration de la couche de cisaillement par une des deux turbines. Le processus, continu, doit transformer continûment l'écoulement moyen quand nous faisons varier θ . Nous pouvons donc tracer les champs moyens des vitesses pour quelques valeurs de θ afin d'espérer voir l'effet de cette transformation, notamment sur la couche de cisaillement. La figure 5.24 nous montre la topologie globale d'écoulements à $\theta \neq 0$: pour un θ suffisamment faible, nous pouvons toujours observer les deux cellules de recirculation, entraînées en rotation par la turbine la plus proche. Celles-ci sont cependant *déformées*, la cellule de la turbine la plus rapide devenant plus importante que celle de la turbine lente. Dans

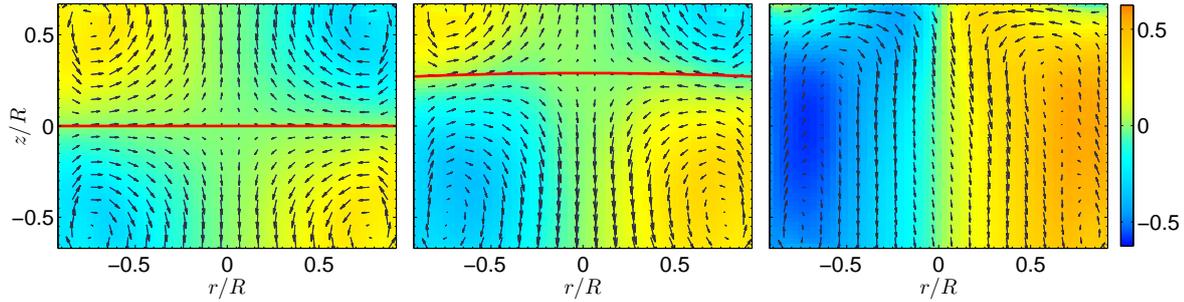


FIGURE 5.24 – Champ moyen des vitesses pour des expériences dans le sens (+) à $\theta = 0$ (gauche), $\theta = 0.05$ (centre) et $\theta = 0.3$ (droite) avec des TP87. La ligne en fort trait pointillé représente l'altitude moyenne z_s de la couche de cisaillement, centrée sur l'image de gauche, positionnée à $z_s = +0.26$ sur l'image du centre et non visible sur l'image de droite car à une altitude z_s trop élevée. La couche de cisaillement de la figure du centre semble très légèrement incurvée.

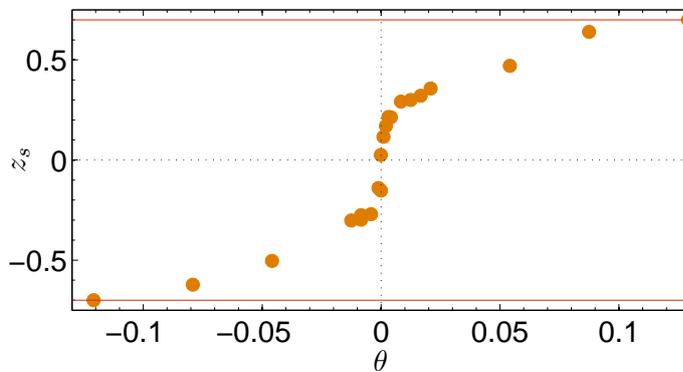


FIGURE 5.25 – Altitude moyenne de la couche de cisaillement z_s en fonction de l'asymétrie des vitesses θ , pour une série d'écoulements à $Re \approx 125000$ avec des TM60, d'après la figure de Pierre Cortet [117]. La condition $z_s = \pm 0.7$ indique que la couche de cisaillement atteint les turbines, et est atteinte pour $\theta = \pm 0.13$.

cet écoulement, la couche de cisaillement est alors *décalée* par rapport à l'altitude $z = 0$. Une observation plus minutieuse nous montrera qu'elle s'incurve très légèrement en même temps qu'elle se décale.

Cette légère incurvation ne nous empêche pas de définir une altitude moyenne de la couche de cisaillement z_s . Cette grandeur nous permet donc de mesurer l'écart à la \mathcal{R}_π symétrie avec la PIV. Sur la figure 5.25, nous pouvons voir que pour les écoulements pleinement turbulents, z_s varie de manière très importante aux alentours de $\theta = 0$: l'altitude de la couche de cisaillement est très sensible aux variations de $\theta \in [-0.005; 0.005]$. Il est alors possible de quantifier cette sensibilité en définissant, comme pour un simple modèle d'Ising, une *susceptibilité* χ_z :

$$\chi_z = \left. \frac{\partial z_s}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \approx 98 \quad (5.9)$$

Hors de cette zone, le z_s varie quasi-linéairement en fonction de θ . Toutefois, pour des valeurs de θ dépassant un seuil $\theta = \pm 0.13$, il n'est plus possible de mesurer l'altitude de la couche de cisaillement, qui à nouveau est rejetée au niveau des turbines. La plage d'utilisation de z_s est donc relativement limitée.

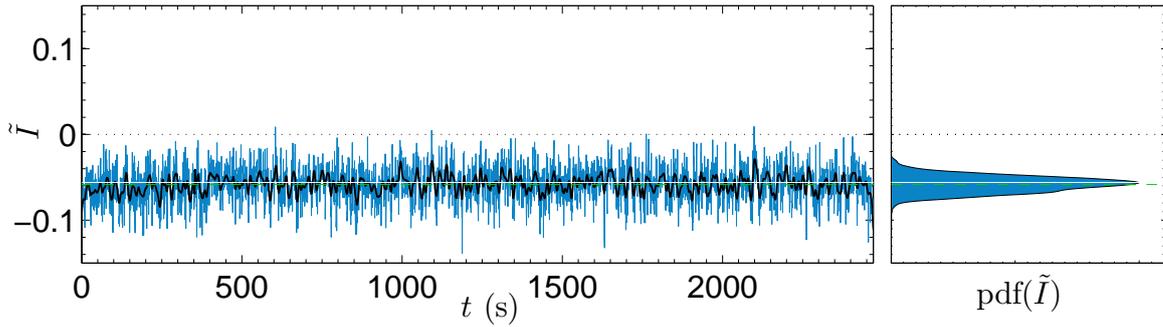


FIGURE 5.26 – Évolution temporelle de \tilde{I} du signal original acquis à $f_{\text{piv}} = 1.70$ Hz (ligne bleue) et du signal filtré à 0.15 Hz (ligne noire) et densité de probabilité du signal \tilde{I} filtré, pour une expérience effectuée à $\text{Re} \approx 125000$ et $\theta \approx -8.4 \cdot 10^{-3}$ avec des TM60. Les données ont été acquises par Pierre Cortet. Il est possible d’y voir la valeur moyenne $\bar{I} = -0.058$ et l’abscisse du mode de la distribution, $I^* = -0.056$, très proches l’une de l’autre.

5.3.3 Lien avec le moment cinétique I

De même que z_s , le moment cinétique I permet de mesurer l’écart à la \mathcal{R}_π symétrie. Le moment cinétique possède l’avantage indéniable d’être utilisable pour tous les θ . Dans toute cette section, nous allons nous intéresser à diverses grandeurs liées à I , qui sont :

- \bar{I} , la *moyenne temporelle* de \tilde{I} .
- I^* , la valeur la plus probable de la distribution de I (voir annexe A). C’est autrement dit le *mode* de \tilde{I} .
- σ_I^{est} , estimation de la déviation standard de \tilde{I} . Elle est définie comme la racine carrée de l’estimation de la variance de \tilde{I} , elle-même définie comme la moyenne temporelle de $(\tilde{I} - \bar{I})^2$.

Nous avons déjà vu que les champs de PIV n’étaient pas corrélés entre eux, et, par conséquent, il était possible de les considérer comme des réalisations indépendantes. Une fois de plus, nous identifions la grandeur \bar{I} à $\langle \tilde{I} \rangle$, et de même nous considérerons que notre estimation de l’écart-type de \tilde{I} est égale à sa valeur statistique σ_I . Toutes ces grandeurs sont représentées sur la figure 5.26 pour une expérience à haut nombre de Reynolds. Nous pouvons y voir que la distribution de \tilde{I} est — très grossièrement — gaussienne, ne possédant qu’un seul mode \bar{I} difficile à distinguer de la valeur moyenne $\langle \tilde{I} \rangle$. Cette forme gaussienne semble robuste une fois le signal \tilde{I} filtré à suffisamment basse fréquence $f = 0.15$ Hz. Nous voyons par ailleurs que ces valeurs sont plutôt élevées compte tenu des valeurs de \tilde{I} en régime bifurqué dans le sens (–) (se reporter à la figure 5.19). Les valeurs de \tilde{I} se comportent ne présentent également qu’un seul mode : leur évolution est qualitativement la même que celle de \tilde{I} , en tout cas pour $z_s \leq 0.7R$.

La ressemblance entre \bar{I} et z_s est en effet frappante : pour pratiquement toute la plage des z_s , ces deux valeurs sont proportionnelles, comme le montre la figure 5.27. Nous pouvons donc utiliser de manière totalement indifférente les grandeurs z_s et \tilde{I} . L’utilisation de \tilde{I} s’avère néanmoins bien plus souple : premièrement, z_s est une grandeur purement statistique qui nécessite un très grand nombre d’échantillons pour être clairement visible, contrairement à I dont on peut extraire une « moyenne » sur une vingtaine de champs PIV. Deuxièmement, la légère incurvation de la couche de cisaillement rend sa détermination légèrement imprécise, ce qui n’est pas le cas de I . Troisièmement, I peut être calculé pour tous les θ , alors que z_s semble saturer dès $\theta = \pm 0.13$.

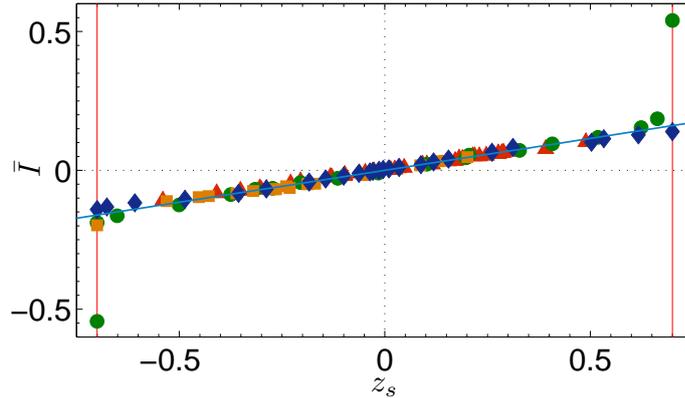


FIGURE 5.27 – Tracé de \bar{I} , fonction de z_s pour plusieurs séries d'expériences. (\blacklozenge), $\text{Re} \approx 120$; (\blacksquare), $\text{Re} \approx 4400$; (\bullet), $\text{Re} \approx 66\,000$; (\blacktriangle), $\text{Re} \approx 890\,000$ effectuées avec des TM60, d'après la figure d'Éric Herbert publiée dans *J. Stat. Mech.* [117]. La relation linéaire entre les deux grandeurs (—) donne $I = 0.230 z_s$. Les lignes rouges représentent le bord des pales : $z_s = \pm 0.7$.

Il est alors possible de définir des *susceptibilités* en utilisant I de la même manière que nous l'avons déjà fait pour la hauteur de la couche de cisaillement :

$$\chi_m = \left. \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \quad (5.10)$$

$$\chi^* = \left. \frac{\partial I^*}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \quad (5.11)$$

Ces grandeurs déduites par imagerie possèdent de plus un lien avec les grandeurs d'asymétrie *mécaniques* : il est en effet possible de tracer I en fonction, par exemple, de γ , une *troisième* mesure de la réponse du système à une asymétrie des vitesses. Il est d'ailleurs possible de mesurer cette corrélation dans les deux sens de rotation : exceptionnellement, dans cette partie, nous présenterons des résultats (la figure 5.28) pour les deux sens de rotation. La courbe montre premièrement un accord assez correct entre les résultats issus des deux sens (et ce, malgré la diversité des traitements appliqués pour chacune des séries de données). Une seule expérience, effectuée dans l'état symétrique à $\theta = 0$ et à $f = 4$ Hz, s'écarte significativement du reste des points : cela peut s'expliquer par un plus faible couple moyen, et donc une très grande sensibilité au décalage en couple que nous avons artificiellement rajouté à cette série de données. Deuxièmement, nous pouvons constater que la relation linéaire :

$$I = b\gamma \quad (5.12)$$

semble assez bien respectée, pour une valeur de $b = 3.7 \pm 0.2$. Nous pourrions raffiner une telle relation en considérant une relation affine $I = b\gamma + k$, mais nous préférons ici insister sur le fait que les évolutions de I , γ et z_s sont *les mêmes*, tout du moins très proches, lorsque l'on modifie l'asymétrie des vitesses θ . Il n'est donc pas nécessaire d'examiner toutes ces grandeurs en même temps.

5.3.4 Une transition de phase ?

5.3.4.1 Un maximum de χ ... pour un Re fini

Traçons, pour tous les nombres de Reynolds disponibles, les relations $\bar{I}(\theta)$ afin de déterminer la valeur de $\chi(\text{Re})$. Naïvement, nous sommes amenés à penser que plus le système sera turbulent, plus ses degrés de liberté le rendront sensible à une perturbation qui vient briser

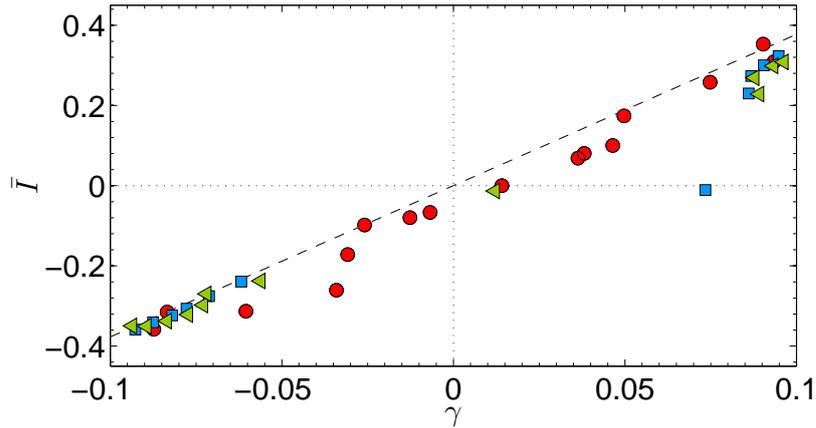


FIGURE 5.28 – Tracé du moment cinétique moyen \bar{I} en fonction de l'asymétrie des couples γ , pour des expériences dans le sens (+) et dans le sens (-). Les expériences du sens (+) (●) ont été effectuées à 8 Hz, sans calibration pour γ . Les expériences du sens (-) ont été effectuées à 4 Hz (■), pour lesquelles aucune calibration n'existait : un décalage (identique à toute cette série d'expériences) a donc été rajouté aux couples afin de « symétriser » les valeurs de γ . D'autres expériences du sens (-) ont été effectuées à 5 Hz (◀), pour lesquelles une calibration existante a permis de réduire les biais sur γ .

la \mathcal{R}_π symétrie, comme par exemple l'application d'un $\theta \neq 0$. Pourtant, nous pouvons voir sur la figure 5.29 que cela n'est pas le cas. Pour le cas laminaire à $Re = 120$, $\tilde{I}(\theta)$ est pratiquement linéaire, mais la courbe semble s'incurver pour les Re plus élevés (27 000 et 40 000) pour atteindre une pente importante en $\theta = 0$, et donc une susceptibilité χ très élevée. Pour des nombres de Reynolds dépassant ces valeurs, nous voyons que cette incurvation tend à diminuer, la pente en $\theta = 0$ devenant notablement plus faible pour $Re = 890\,000$.

5.3.4.2 Divergence de χ

Nous pouvons maintenant regarder l'évolution de la susceptibilité en fonction de Re , pour les deux possibilités offertes par χ_m et χ^* . Nous constatons alors que le maximum observé de susceptibilité χ est très élevé dans les deux cas compte tenu des valeurs obtenues en régime laminaire : il y a plus d'un facteur 100 entre le minimum et le maximum de susceptibilité. Nous pouvons alors nous demander si ce maximum n'est pas tout simplement la trace d'une divergence de susceptibilité qui existerait pour un système infini parfait. Ce type de divergence est caractéristique des transitions critiques (voir chapitre 3) au voisinage des températures critiques T_c . Pour effectuer notre analogie, nous devons donc définir un équivalent de la température en turbulence. Une analogie possible a été formulée par Bernard Castaing [141] et permet de définir simplement une forme de température T de la turbulence directement à partir du nombre de Reynolds microscopique R_λ :

$$\frac{1}{T} = \ln \left(\frac{R_\lambda}{R^*} \right) \quad (5.13)$$

où R^* est une constante numérique à préciser. Connaissant les liens entre R_λ et le nombre de Reynolds global de l'expérience (rappelés dans le chapitre 2), nous pouvons alors regarder la forme de la divergence de notre courbe. Nous voyons alors sur la figure 5.30 (à gauche) que la divergence s'effectue pour un Re_c compris dans l'intervalle [41 000; 55 000] avec un léger décalage vers les Re plus élevés pour χ_m . Si nous traçons $\chi^{-1}(Re)$ avec les mêmes conventions, nous voyons un alignement remarquable des données selon des droites définies par :

$$\chi = K_i \left| \frac{1}{\ln(Re)} - \frac{1}{\ln(Re_c)} \right|^{-1} \quad (5.14)$$

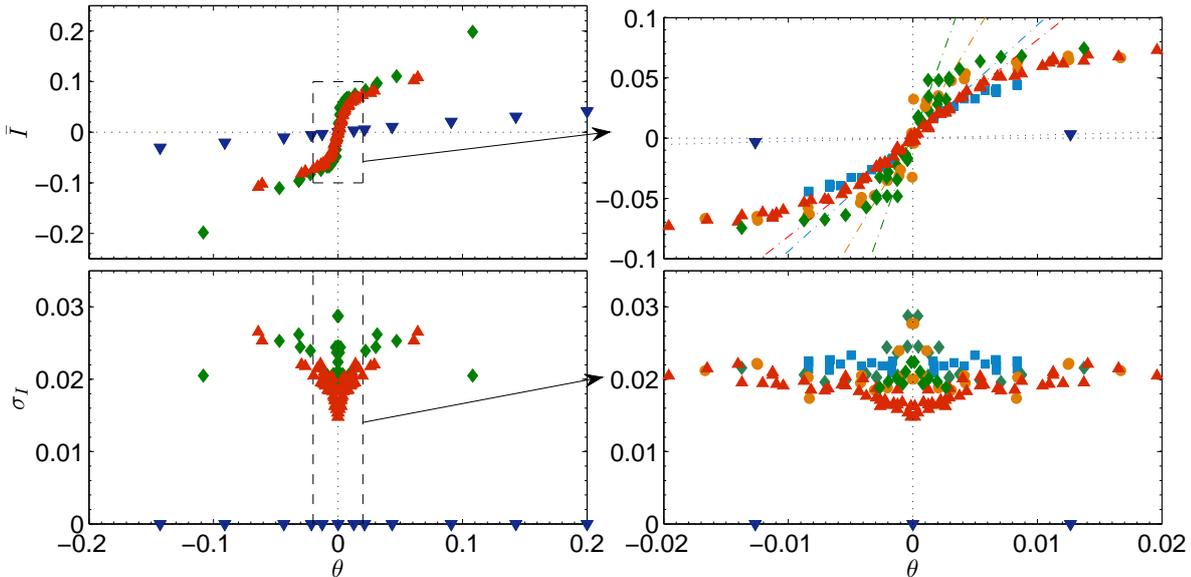


FIGURE 5.29 – Tracés de \bar{I} et σ_I en fonction de θ pour diverses valeurs de Re , pour des TM60, d'après [117]. Les figures à droites sont un agrandissement de celles de gauche. Les séries de données incluent : (\blacktriangledown), $Re = 120 \pm 25$; (\blacksquare), $Re = 17300 \pm 500$; (\blacklozenge), $Re = 26100 \pm 2350$, (\bullet), $Re = 125000 \pm 3000$, (\blacktriangle), $Re = 890000 \pm 130000$. Les traits mixtes en haut à droite représentent des ajustements grossiers de la pente de $\bar{I}(\theta)$ aux alentours de $\theta = 0$, dont les pentes valent respectivement : 0.24, 10.3, 29.0, 17.0 et 8.1.

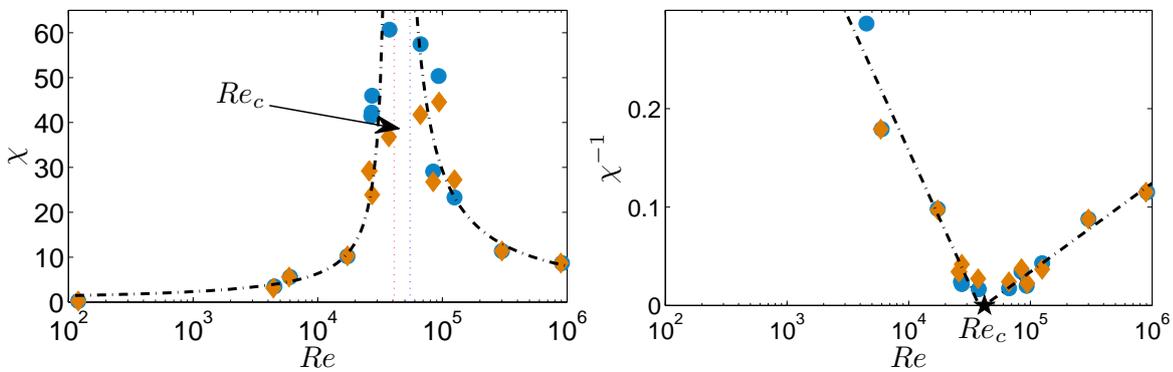


FIGURE 5.30 – Divergence de la susceptibilité χ en fonction du nombre de Reynolds pour des expériences utilisant des TM60, d'après [117]. À gauche : (\blacklozenge), χ_m ; (\bullet), χ^* . Un ajustement est fourni à titre indicatif. Le Re critique, situé entre les deux lignes verticales, semble compris entre 41 000 et 55 000. À droite, tracé de $\chi^{-1}(Re)$. L'ajustement est effectué en $|1/\log(Re) - 1/\log(Re_c)|$ avec $Re_c = 41\,000$. Les pentes valent respectivement 10 à gauche et 5 à droite.

La constante K_i étant choisie égale $K_1 = 0.1$ pour les $Re \leq Re_c$ et $K_2 = 0.2$ pour $Re \geq Re_c$. Cette rupture de pente, s'effectue donc avec un rapport $K_2/K_1 = 2$. L'exposant $-\gamma = -1$ de la divergence est caractéristique de la classe d'universalité d'*Ising champ moyen*, dont nous avons parlé dans le chapitre 3 consacré aux transitions de phase. Ce modèle présente une rupture de pente des susceptibilités, mais avec un rapport 0.5 [142], très différent de celui que nous observons. Toutefois, contrairement à l'exposant γ , ce coefficient n'est pas une grandeur *universelle*, et d'autres modèles possédant des exposants critiques identiques à celui du modèle d'Ising en champ moyen pourraient voir des rapports de pente plus proches des nôtres.

Grandeur	Paramètre d'ordre	Champ	Susceptibilité	Température	Interaction
Ising CM	m	h	χ	T	J
von Kármán	\bar{I}, I^*	θ	χ_m, χ^*	Q	\mathcal{J}

TABLE 5.2 – *Détail de l'analogie entre le modèle d'Ising en champ moyen et l'écoulement de von Kármán. Les coefficients Q et \mathcal{J} ne sont pas connus dans notre écoulement.*

5.3.4.3 Comparaison avec le modèle d'Ising en champ moyen

La classe d'universalité du modèle d'Ising en champ moyen nous donne, comme nous l'avons vu, une méthode de détermination des valeurs de $k_B T$ et de J à partir d'une courbe quelconque de réponse à une asymétrie, par exemple, $m(h)$. Nous pouvons bien évidemment appliquer cette méthode pour nos courbes de réponse $I(\theta)$, ce qui nous donnera deux grandeurs, nommées Q et \mathcal{J} dans le cadre de notre analogie avec le modèle d'Ising en champ moyen, détaillée dans le tableau 5.2. Pour $Re = 120$, l'ajustement obtenu est bon pour tous les θ . Pour des valeurs de Re correspondant à un écoulement turbulent, soit $Re \geq 4000$, il est possible d'obtenir soit un ajustement de bonne qualité pour les valeurs de θ proches de 0, soit un ajustement qui va « ignorer » le détail de la réponse proche de l'asymétrie nulle pour mieux s'ajuster pour les grandes valeurs de θ . L'ajustement montré sur la figure 5.31 (en haut) est celui obtenu pour les petits θ : nous sommes en effet intéressés par les réponses à des petits champs. Nous pouvons alors procéder de la même manière pour évaluer les coefficients Q et \mathcal{J} à partir des modes du moment cinétique, I^* . Les ajustements correspondants (également visibles sur la figure 5.31, cette fois-ci en bas) ont un aspect très similaire à ceux obtenus à partir de \bar{I} , quoique les valeurs de I^* semblent sensiblement plus bruitées.

Nous pouvons alors calculer l'équivalent de $k_B T/J$ pour notre écoulement de von Kármán en effectuant le rapport des quantités Q et \mathcal{J} . Ces valeurs sont visibles sur la figure 5.32. L'analogie de la température réduite, Q/\mathcal{J} , nous indique que l'écoulement garde une température extrêmement proche de la température critique pour toutes les valeurs du nombre de Reynolds. Ces valeurs tendent toutefois à se rapprocher de la température critique à l'approche du maximum de susceptibilité, pour atteindre des valeurs réduites légèrement inférieures à 1 pour les séries de données correspondant à $Re = 37\,000$; $66\,000$ et $94\,000$: de telles valeurs sont généralement obtenues lorsqu'une discontinuité de I est présente en $\theta = 0$. La température réduite semble ensuite remonter à des valeurs très légèrement supérieures à 1 pour les deux dernières séries de données à $Re \geq 1.0 \cdot 10^5$. L'interprétation de la courbe $\mathcal{J}(Re)$ est quant à elle plus difficile : l'examen des deux séries de données à droite de la figure 5.32 révèle un point à \mathcal{J} très élevé pour l'écoulement laminaire, suivi par un minimum de \mathcal{J} à un nombre de Reynolds situé vers $Re = 5000$, distinct du maximum de susceptibilité, sur un fond de valeurs assez bruitées et n'affichant pas de claire tendance. Cette interprétation est rendue d'autant plus délicate que le rôle joué par le paramètre \mathcal{J} (l'équivalent de J), décrit au chapitre 3, n'est pas clair lorsqu'il n'est pas comparé à celui de $k_B T$. Comme dans le chapitre 3, nous ne tirerons pas de conclusion claire de l'étude de $\mathcal{J}(Re)$.

5.3.4.4 Comportement de la longueur de corrélation ξ à la transition

L'expérience de von Kármán possède un maximum de susceptibilité pour un nombre de Reynolds fini. L'analogie de la section précédente avec le modèle d'Ising en champ moyen nous indique de plus que le système semble bien se rapprocher de la température critique pour une plage $Re = [37\,000; 90\,000]$, mais finalement nous renseigne peu sur le caractère réellement « critique » du phénomène associé au maximum de susceptibilité. Afin de préciser cette image, nous pouvons essayer de déterminer les corrélations spatiales de notre écoulement de von Kármán : en effet, si nous supposons notre écoulement axisymétrique, la vitesse azimutale

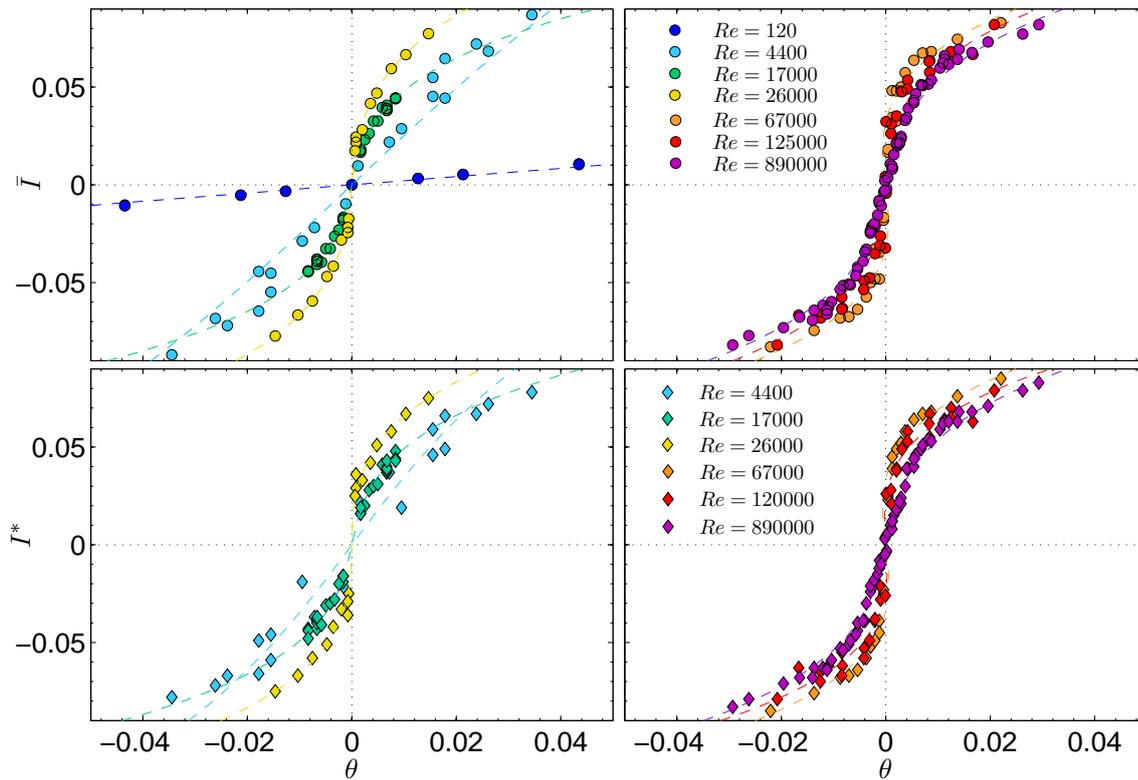


FIGURE 5.31 – En haut : ajustement des courbes $\bar{I}(\theta)$ (\bullet) par l'expression de l'équation 3.109 (tireté), décrite dans le chapitre 3, pour plusieurs nombres de Reynolds. La qualité de l'ajustement est plutôt bonne pour les faibles θ , mais s'écarte parfois significativement de celui-ci pour les θ plus élevés ($|\theta| \geq 0.1$, non visibles sur la figure) et les nombres de Reynolds proches de la transition. En bas : ajustement des courbes $I^*(\theta)$ (\blacklozenge) par la même expression. Pour $Re = 120$, la valeur de \bar{I} est confondue avec celle de I^* , celle-ci n'apparaît donc pas dans le tracé $I^*(\theta)$.

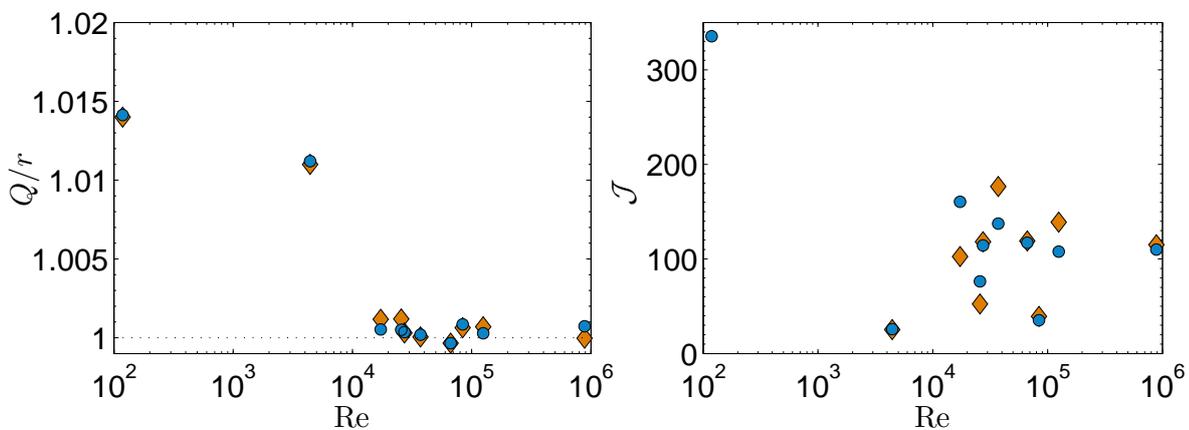


FIGURE 5.32 – À gauche : ajustement du paramètre Q/\mathcal{J} de l'analogie Ising-champ moyen et von Kármán décrite dans la section 5.3.4.3. À droite, ajustement du paramètre \mathcal{J} dans le cadre de la même analogie. (\blacklozenge), ajustements obtenus à partir de $I^*(\theta)$, et (\bullet), à partir de $\bar{I}(\theta)$.

v_ϕ n'est pas soumise à une condition d'incompressibilité et peut alors fluctuer « librement » autour d'une valeur moyenne, comme les spins d'un modèle d'Ising. Nos spins sont particuliers : ces derniers sont des grandeurs continues (mais bornées), et dont les valeurs moyennes ne sont pas homogènes dans l'écoulement, la vitesse de rotation étant bien évidemment plus élevée aux R élevés qu'au centre du cylindre. Toutefois, cette hétérogénéité spatiale importe peu dans le calcul du coefficient de corrélation $G(r, r', z, z')$ basé sur les fluctuations temporelles de v_ϕ :

$$G(r, r', z, z') = \int_t \frac{(v_\phi(r, z) - \overline{v_\phi(r, z)}) \cdot (v_\phi(r', z') - \overline{v_\phi(r', z')})}{\sigma_v(r, z)\sigma_v(r', z')} dt \quad (5.15)$$

Dans cette expression, les hétérogénéités spatiales de vitesse moyenne $\overline{v_\phi(r, z)}$ sont gommées par la différence à la moyenne, normalisée sur la taille des fluctuations typiques de vitesse σ_v :

$$\sigma_v(r, z) = \left(\int_t (v_\phi(r, z) - \overline{v_\phi(r, z)})^2 dt \right)^{1/2} \quad (5.16)$$

Nous supposons par la suite que la corrélation entre les points $M = (r, z)$ et $M' = (r', z')$ ne dépend que des positions relatives de M et M' : l'expression de G est alors simplifiée :

$$G(r, r', z, z') = G(r - r', z - z') \quad (5.17)$$

Dans le cadre des analogies avec le modèle d'Ising, nous devrions en toute rigueur considérer la fonction G comme isotrope : $G(r - r', z - z') = G(|\rho|)$. Néanmoins, notre expérience possède une direction privilégiée, z , et il est assez difficile de postuler *a priori* que cela n'a aucune influence sur G . Nous pouvons également nous rappeler que l'expression de G ressemble à celle d'une fonction de structure d'ordre deux, comme celle que nous avons définie dans le chapitre d'introduction (à l'équation 1.16), mais où cette fois-ci nous supposons un écart entre les points, \mathbf{r} , normal à la composante de la vitesse, ϕ :

$$S_2^\perp(\mathbf{r}) = \left\langle \left(v_\phi(\mathbf{r}) - v_\phi(\mathbf{0}) \right) \cdot \left(v_\phi(\mathbf{r}) - v_\phi(\mathbf{0}) \right) \right\rangle \quad (5.18)$$

$$G(\mathbf{r}) \propto \left\langle \left(v_\phi(\mathbf{r}) - \overline{v_\phi(\mathbf{r})} \right) \cdot \left(v_\phi(\mathbf{0}) - \overline{v_\phi(\mathbf{0})} \right) \right\rangle \quad (5.19)$$

Ces expressions, bien que similaires, ne reflètent au final pas les mêmes quantités : S_2^\perp va en effet mesurer l'écart typique moyen entre deux spins séparés par \mathbf{r} (qui est donc nécessairement positif), tandis que G va plutôt regarder à quel point deux spins fluctuent de la même manière autour de leurs moyennes respectives (ce qui peut se traduire par des valeurs de G négatives). La longueur de corrélation que nous pourrions extraire du calcul de G n'est donc pas *tout à fait* identique à celle issue des fonctions de structure, qui est en fait une estimation de l'échelle microscopique de Taylor, ℓ (qui a été définie au chapitre 2, notamment à l'équation 2.17).

Deux cartes de corrélations $G(r - r', z - z')$ pour $\delta r = r - r' \geq 0$ et $\delta z = z - z' \geq 0$ sont visibles sur la figure 5.33. Les figures étant à la même échelle en r et en z , nous pouvons y voir une certaine anisotropie de la fonction G , qui décroît plus vite en z qu'en r . Pour les nombres de Reynolds correspondant à l'écoulement laminaire, les corrélations s'effectuent à très courte portée et la fonction G tend rapidement vers zéro. Sur la figure de droite, le nombre de Reynolds, bien plus proche du maximum de susceptibilité, montre des corrélations à bien plus grande échelle, ce qui semble cohérent avec une transition critique où les longueurs de corrélation du système divergent. Nous pouvons alors définir deux de ces longueurs, que nous nommerons ξ_r et ξ_z selon la définition suivante :

$$\xi_r = \left\{ r / G(r, 0) = \frac{1}{2} \right\} \quad (5.20)$$

$$\xi_z = \left\{ z / G(0, z) = \frac{1}{2} \right\} \quad (5.21)$$

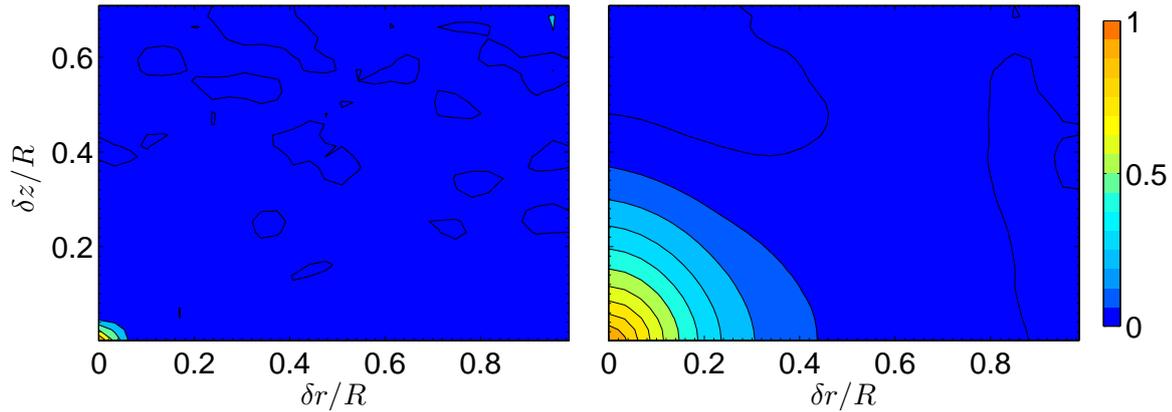


FIGURE 5.33 – Cartes de corrélation de $G(\delta r, \delta z)$ des vitesses azimutales v_ϕ . À gauche, corrélations à $\text{Re} = 120$, loin du maximum de susceptibilité. À droite, corrélations pour $\text{Re} \approx 9.4 \cdot 10^4$, proche du maximum de susceptibilité. La fonction de corrélation conserve globalement cet aspect pour les nombres de Reynolds plus élevés.

Ayant défini ces valeurs, nous pourrions en premier lieu vérifier que les fonctions G sont toutes identiques à un facteur d'échelle près, donné par ξ . En effet, les *hypothèses de scaling* formulées durant les années 1960 [143], indiquent une universalité de la forme prise par l'énergie libre des systèmes au voisinage du point critique, de laquelle peut être dérivée la fonction de corrélation G :

$$G(r, z | \text{Re}) = \tilde{G}\left(\frac{r}{\xi_r(\text{Re})}, \frac{z}{\xi_z(\text{Re})}\right) \quad (5.22)$$

La figure 5.34 (à gauche) nous montre la qualité de cette hypothèse : la plupart des courbes à nombre de Reynolds au delà de 6000 suivent bien la même courbe maîtresse, à l'exception de trois d'entre elles (signalées par une flèche), qui sont issues d'une série d'expériences distinctes des autres tracés. Cette différence se retrouve sur la longueur de corrélation de v_ϕ : nous pouvons voir sur la partie droite de la figure trois points expérimentaux (entourés) très différents du reste des autres, correspondant aux trois courbes « anormales ». Une autre méthode de détermination de ξ basée sur l'aire sous la courbe G (qui n'a pas été choisie car elle ne permet pas de vérifier les hypothèses de scaling) a montré des résultats similaires, attribués à une « granularité » spécifique des champs de vitesse v_ϕ de ces séries de données.

Pour le reste des points, nous observons que la longueur de corrélation semble augmenter au voisinage du nombre de Reynolds critique, mais le maximum atteint, très faible, confirme difficilement une divergence de la longueur de corrélation associée à un phénomène critique. Par conséquent, soit notre transition n'est pas de la même classe d'universalité que le modèle d'Ising en champ moyen (voire n'est pas un phénomène critique), soit il existe une contrainte qui empêche la longueur de corrélation de diverger. Cette dernière hypothèse peut être justifiée par le fait que notre écoulement est confiné, ainsi que par le fait que ce dernier est très loin de l'équilibre thermodynamique.

5.3.5 Fluctuations, multistabilité, et modes de Goldstone

5.3.5.1 Aspect des fluctuations autour de la divergence

Revenons à la figure 5.29. Les courbes décrivant les fluctuations de $\tilde{I}(t)$ nous montrent qu'un maximum de fluctuations est atteint, de manière assez piquée, lorsque le nombre de Reynolds s'approche de la transition critique. Celles-ci peuvent être associées à des divergences de susceptibilité si nous nous appuyons sur les résultats de la mécanique statistique hors de l'équilibre (soit le chapitre 4). Toutefois, le détail des fluctuations temporelles de la figure 5.35

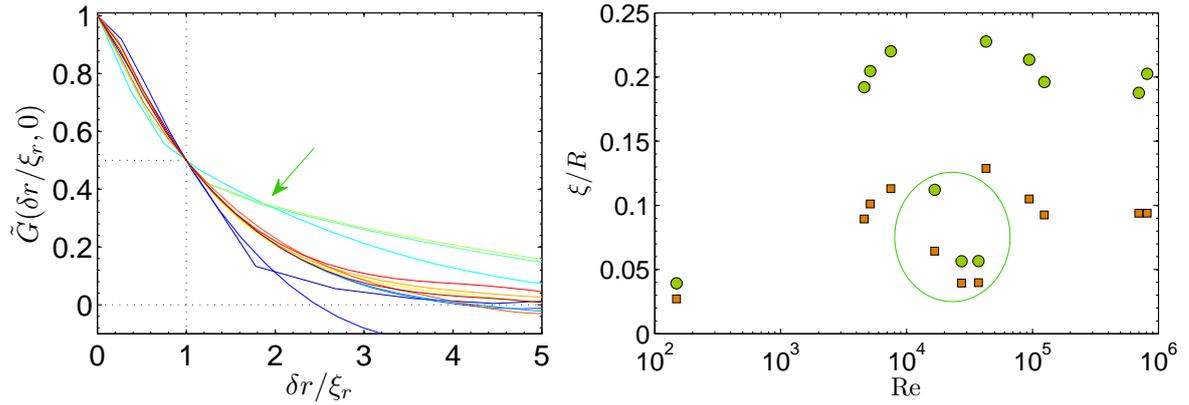


FIGURE 5.34 – À gauche, regroupement des fonctions de corrélation G sous une forme universelle, en fonction de $\delta r/\xi_r$. Trois courbes singulières (indiquées par la flèche) possèdent un comportement très différent du reste du faisceau pour $Re \geq 6000$. À droite, variation de la longueur de corrélation selon r (\bullet) et selon z (\blacksquare) en fonction du nombre de Reynolds. Les longueurs de corrélation des trois courbes singulières de la partie gauche de la figure ont été entourées.

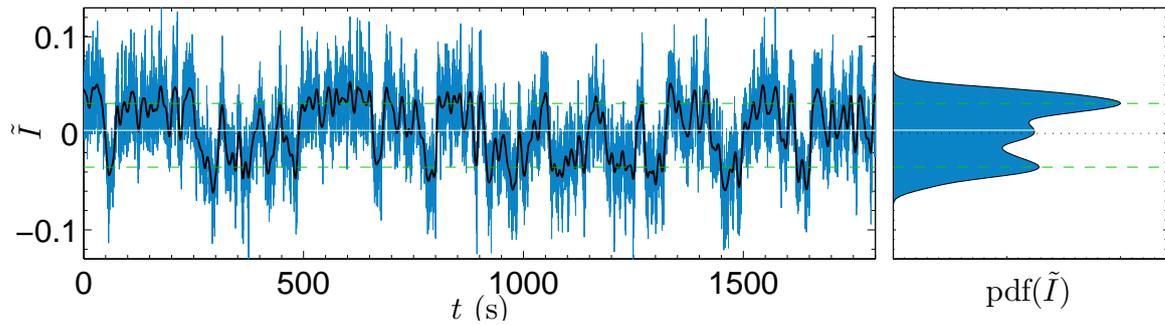


FIGURE 5.35 – Évolution du moment cinétique adimensionné \tilde{I} en fonction du temps, et densité de probabilité de \tilde{I} associée pour une expérience effectuée à $Re = 39000$. Ligne bleue, signal original acquis à $f_{piv} = 15$ Hz. Ligne noire, signal filtré à 0.15 Hz. La ligne blanche pleine représente la moyenne temporelle $\bar{I} = 0.0031$ tandis que les tirets verts représentent le mode de I , $I^* = 0.031$ et le second maximum de la distribution de I (situé à $\tilde{I} = -0.035 \approx -I^*$).

met en évidence un comportement, à asymétrie nulle et à la transition critique, où le moment cinétique saute alternativement entre deux états attracteurs pour lesquels le moment cinétique vaut $I^* \neq 0$ et $-I^* \neq 0$. Le moment cinétique moyen \bar{I} cache ce comportement : sa valeur vaut approximativement 0, ce qui indique que le temps passé au voisinage de I^* et $-I^*$ est sensiblement le même. Cette concentration préférentielle, visible à l'œil, est également visible lorsque nous traçons la distribution de \tilde{I} filtré à basse fréquence. Nous pouvons en outre vérifier que ces sauts ne sont aucunement liés à des fluctuations instantanées de θ : le coefficient de corrélation de $\tilde{I}(t)$ et de $\theta(t)$ est de 0.02.

C'est cette divergence des définitions du moment cinétique caractéristique qui explique les si grandes différences observées sur la figure 5.30. Nous pouvons nous en convaincre en examinant la figure 5.36 : pour les valeurs de θ proches de 0, moyenne et mode de \tilde{I} semblent s'écartier : le mode I^* semble en effet s'« accrocher » à des valeurs non nulles tandis que la moyenne \bar{I} , qui traduit aussi le rapport d'amplitude de tous les pics de la distribution de \tilde{I} , se rapproche de 0. Cela est d'autant plus vrai que les expériences durent longtemps et sont effectuées à une fréquence d'acquisition f_{piv} élevée.

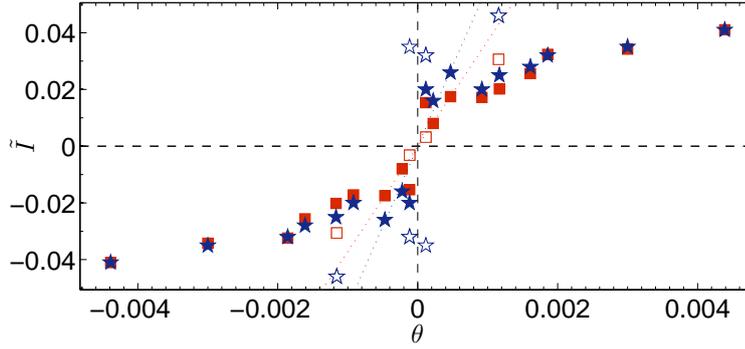


FIGURE 5.36 – Tracé du moment cinétique moyen \bar{I} (■) et du mode du moment cinétique I^* (★) en fonction de θ pour une série d'expériences à $Re = 40\,000$. Les symboles ouverts correspondent aux expériences effectuées avec une plus grande précision ($f_{piv} = 15$ Hz et 3600 images minimum). La courbe a été \mathcal{R}_π symétrisée.

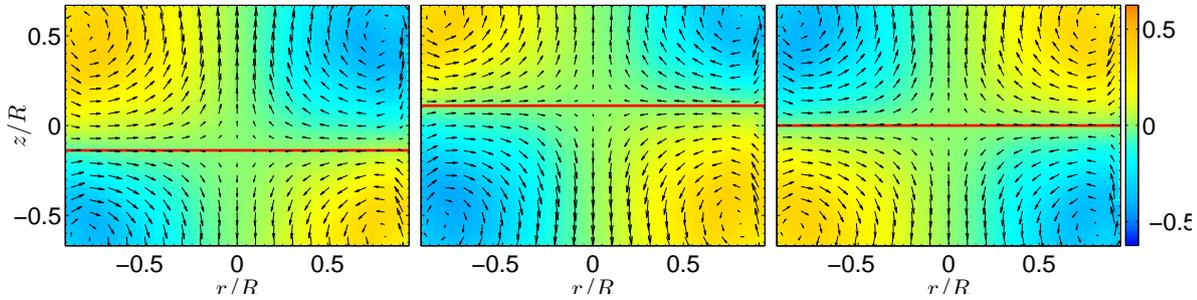


FIGURE 5.37 – Moyennes conditionnelles du champ de PIV de l'expérience de la figure 5.35. À gauche, moyenne du champ de vitesses de la PIV pour tous les instants où $\tilde{I} \in [-I^* - 0.025; -I^* + 0.025]$. Au centre, moyenne pour $\tilde{I} \in [I^* - 0.025; I^* + 0.025]$. À droite, champ moyen (qui est de fait une moyenne conditionnelle pour toutes les valeurs de \tilde{I}). Les lignes rouges représentent l'altitude estimée de la couche de cisaillement $z_s = -0.138$ à gauche, $z_s = 0.11$ au centre et $z_s = 0$ au centre.

Afin de mieux comprendre la forme de l'écoulement lorsqu'il se retrouve bloqué dans un des deux états attracteurs, nous allons effectuer des moyennes des champs de vitesses en sélectionnant les champs correspondant à $\tilde{I}(t) \approx I^*$ et $\tilde{I}(t) \approx -I^*$. Ce critère de sélection nous fournit donc des moyennes *conditionnelles* du champ de vitesses \mathbf{v} . Les champs conditionnels obtenus sont visibles sur la figure 5.37, et montrent, pour les états proches de $-I^*$, un écoulement à deux cellules dont la couche de cisaillement est décalée vers le bas, et pour I^* , une couche de cisaillement décalée vers le haut. Notre multi-stabilité est donc également celle de la hauteur de la couche de cisaillement, z_s . La relation entre les z_s intermittents et ces valeurs de \tilde{I} donnent des coefficients de proportionnalité égaux à 0.253, compatibles avec le coefficient de la figure 5.27 (0.280), mais pas exactement identiques. Le champ moyen (non conditionnel) des vitesses, quant à lui, respecte en moyenne la \mathcal{R}_π symétrie imposée par le forçage : nous observons bien $z_s = 0$.

5.3.5.2 Lien avec la physique statistique hors-équilibre

Si nous supposons notre grandeur I comme un processus stochastique hors-équilibre de moyenne I_m et possédant un bruit δ -corrélé, nous pouvons relier la susceptibilité χ à l'écart-

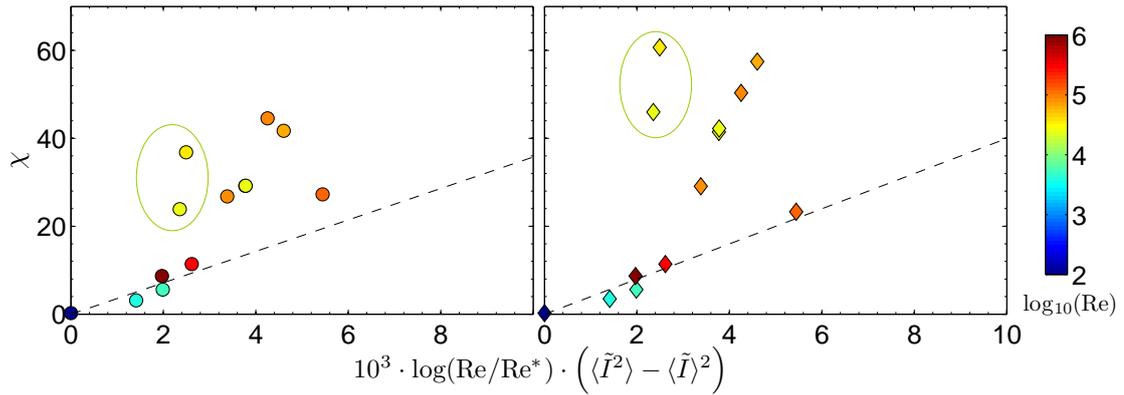


FIGURE 5.38 – Tracé de la relation de fluctuation-dissipation de notre expérience. À gauche, vérification utilisant χ_m en fonction des fluctuations typiques de \tilde{I} . À droite, vérification en utilisant χ^* . Re^* vaut ici 250. Un respect de la relation implique un alignement des points sur une droite (selon 5.23). Nous avons tenté de tracer une telle droite pour les Re faibles et élevés (pointillés). Les susceptibilités pour $Re \approx Re_c$ sont supérieures à ces droites. Les cercles verts contiennent deux des trois expériences où la longueur de corrélation, ξ , semblait différente du reste des autres expériences (voir figure 5.34). La troisième d’entre elles est située dans l’alignement des autres points.

type de ces fluctuations, σ_I , suivant les relations de fluctuation-dissipation du chapitre 4 :

$$\chi = \beta \sigma_I^2 \quad (5.23)$$

$$= \beta \left(\langle \tilde{I}^2 \rangle - \bar{I}^2 \right) \quad (5.24)$$

Il nous est possible de vérifier ce type de relation : il faut toutefois se poser quelques questions sur le rôle de β dans notre cas : nous avons en effet considéré que la température de notre système pouvait être interprétée par $\log(Re)$ suivant la convention de Castaing [141] (nous pourrions d’ailleurs prendre, à la place, la température Q/\mathcal{J} définie précédemment). Le système pourrait donc vérifier :

$$\chi_m \propto \sigma_I^2 \left(\log(Re) - \log(Re^*) \right) \quad (5.25)$$

Re^* étant une référence permettant à la « température » de rester positive, que nous avons prise égale à 250 sur la figure 5.38, qui correspond à l’apparition de modulations dans l’écoulement de von Kármán, et donc de la perte de stationnarité de l’écoulement laminaire. Nous avons également tenté de prendre $Re^* = 10, 100, 1000$ et $10\,000$: aucune valeur de Re^* ne permet d’alignement correct de tous les points. Bien que la taille des fluctuations augmente sensiblement avec la susceptibilité, il n’est pas possible de considérer la relation $\chi/\log Re = f(\sigma_I^2)$ comme linéaire, principalement lorsque nous nous approchons de la transition, comme le montre la figure 5.38. Si nous ignorons trois expériences, dont deux ont montré des résultats singuliers lors de l’étude de $\xi(Re)$, la sous-figure représentant χ^* (à droite) présente une tendance intéressante avec une rupture de pente. Notre écoulement turbulent n’est donc pas analogue à un système à l’équilibre thermodynamique, et possède des propriétés foncièrement *hors-équilibre* qui violent le théorème fluctuation-dissipation.

Quelles propriétés des systèmes hors de l’équilibre permettent de violer un tel théorème ? Il existe principalement deux classes de systèmes satisfaisant cette condition. La première est la classe des systèmes *vieillissants*, pour lesquels, en deçà d’une certaine température de transition vitreuse T_g , le temps de relaxation vers l’équilibre est extrêmement élevé, inaccessible à l’expérimentateur. Pour cette gamme de températures, l’ergodicité est brisée, et ces systèmes

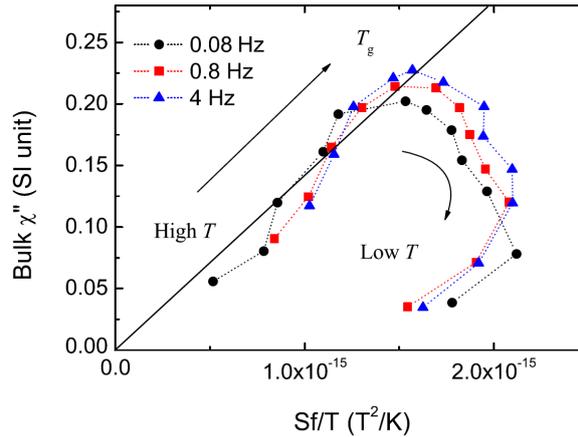


FIGURE 5.39 – Examen de la validité du théorème fluctuation-dissipation pour un verre de superspin effectué dans l'article de K. Komatsu et al. [145] (tous droits réservés). La figure est extraite du même article. Pour respecter le théorème, les deux quantités tracées doivent être proportionnelles (comme pour la figure 5.38). La réponse du verre à une perturbation de fréquence variable (\bullet), (\blacksquare) et (\blacktriangle) dévie significativement de celle de l'équilibre thermodynamique pour les températures inférieures à T_g .

vitreux se retrouvent piégés dans des états métastables [144]. Ce caractère hors-équilibre se manifeste expérimentalement, notamment dans des échantillons de matériaux qui ont subi une trempe à une température inférieure à T_g tout sous l'influence d'un champ externe. Lorsque le champ externe est coupé après un temps t_w , ces matériaux présentent un comportement singulier, qui dépend de t_w [145], ce qui indique que l'état d'équilibre thermodynamique, invariant par translation dans le temps, n'a pas été atteint. La violation du théorème fluctuation dissipation, pour ces systèmes, se manifeste donc essentiellement en deçà de T_g (cf. fig. 5.39), et peut d'ailleurs constituer un critère de passage à la transition vitreuse [144]. Notre expérience de von Kármán ne semble pas vraiment correspondre à cette classe de systèmes, ses propriétés physiques (notamment ses réponses à un champ externe) ne dépendant pas d'un éventuel temps d'attente t_w .

Une autre classe de systèmes montre un écart au théorème fluctuation-dissipation : elle se compose de processus dissipatifs régis par une équation de Langevin [146], atteignant des états stationnaires hors de l'équilibre qui présentent un écart au théorème fluctuation dissipation proportionnel au taux de dissipation de l'énergie. L'idée d'un processus dissipatif stationnaire et hors de l'équilibre est séduisante pour notre expérience turbulente, mais il est difficilement concevable qu'un modèle stochastique « simple » soit applicable à la turbulence, où le respect des principes de micro-réversibilité (le bilan détaillé) sont discutables. Dans les deux classes de systèmes, il semble toutefois que l'écart au théorème fluctuation-dissipation s'effectue pour des fluctuations à l'équilibre $\langle \tilde{I}^2 \rangle - \bar{I}^2$ supérieures à la susceptibilité χ/T (voir pour cela la figure 5.39), en assez mauvais accord avec nos expériences de la figure 5.38, qui montrent plutôt une « anomalie » de susceptibilité élevée aux abords de Re_c par rapport aux nombres de Reynolds très faibles (ou très élevés). Une telle anomalie de susceptibilité élevée aurait cependant été observée pour des transitions vitreuses dans des systèmes en interaction où le bruit n'est pas d'origine thermique [147].

Enfin, le mécanisme à l'œuvre dans notre anomalie de susceptibilité s'accompagne d'une multi-stabilité de la couche de cisaillement aux alentours de la transition critique, et décrite dans la sous-section 5.3.5.1, qui a été « ignorée » dans notre approche hors-équilibre des grandes échelles de l'écoulement.

5.3.5.3 Multistabilité et modes de Goldstone

Une manière de prendre un tel problème à revers est de dériver des comportements statistiques hors de l'équilibre de l'écoulement axisymétrique à partir des équations de Navier-Stokes, dans la veine de ce qui a été effectué pour la turbulence à deux dimensions [105] puis étendu au cas à trois dimensions avec axisymétrie [114, 115]. Nous renvoyons le lecteur intéressé par le détail d'une telle mécanique statistique à l'annexe D, que nous rappellerons ici très brièvement.

Modes du noyau pour un système à l'équilibre Considérons un système à l'équilibre possédant un opérateur d'évolution \mathcal{O}_ϵ linéaire, dépendant d'un petit paramètre ϵ de contrôle. Ce système possède une symétrie quelconque, qu'il est possible de briser en imposant un champ externe. Nous pouvons modéliser cette brisure par l'équation :

$$\mathcal{O}_\epsilon \phi = h \quad (5.26)$$

h représente le champ externe, et ϕ l'observable physique qui nous intéresse. Pour un opérateur d'évolution où le noyau de \mathcal{O}_ϵ , $\text{Ker}(\mathcal{O}_\epsilon)$, est réduit à l'ensemble vide, la détermination de ϕ se réduit à un problème d'inversion de matrice, en l'occurrence \mathcal{O}_ϵ :

$$\phi = \mathcal{O}_\epsilon^{-1} h \quad (5.27)$$

Au contraire, si $\text{Ker}(\mathcal{O}_\epsilon) \neq \{\emptyset\}$, il est possible d'ajouter à toute solution ϕ un élément ϕ_0 tel que $\mathcal{O}_\epsilon \phi_0 = 0$, également appelé *élément du noyau*. Dans un tel cas, pour $h \rightarrow 0$, nous observons une brisure spontanée de symétrie :

$$\mathcal{O}_\epsilon(\phi_0) = h = 0 \quad (5.28)$$

Sans forçage, il est effectivement possible d'obtenir $\phi = \phi_0 \neq 0$.

Modes du noyau de l'écoulement hors-équilibre Pour notre expérience stationnaire et hors de l'équilibre, il est possible de projeter les équations de Navier-Stokes sur les modes du cylindre. Ces modes sont essentiellement des fonctions de Bessel-Fourier :

$$\phi_{mn}(r, z) = \mathcal{N}_m J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{2h} \right) \quad (5.29)$$

où la fonction J_i est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre i , λ_m est le $m^{\text{ème}}$ zéro de la fonction J_1 , \mathcal{N}_m est une constante de normalisation, et, pour des raisons pratiques, z est compris dans cette section entre 0 et $2h$. En projetant les équations de Navier-Stokes axisymétriques sur ces fonctions, il est possible de construire une fonctionnelle quadratique en s_{mn} et x_{mn} — les projections de $\sigma = rv_\phi$ et $\xi = w_\phi/r$ sur les modes du cylindre — dont les points critiques (au sens où le gradient de la fonctionnelle s'annule) sont des solutions stationnaires de l'écoulement de von Kármán. Ces points critiques vérifient une équation du type :

$$\mathcal{M}_{mn} \begin{pmatrix} s_{mn} \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

et peuvent donc, pour des matrices \mathcal{M}_{mn} bien précises (soit, des nombres de Reynolds, ou des paramètres de forçage bien précis), voir apparaître des modes du noyau de \mathcal{M}_{mn} , d'intensité non fixée *a priori*. Il existe donc $m \times n$ modes du noyau, correspondant chacun à la condition $\text{Det}(\mathcal{M}_{mn}) = 0$, que nous pouvons regrouper en deux familles. La première famille est antisymétrique, pour lesquels la vitesse azimutale s'annule en $z = h$ (soit au milieu du cylindre) : elle ne va donc pas spontanément briser la symétrie de l'écoulement. La deuxième famille, quant

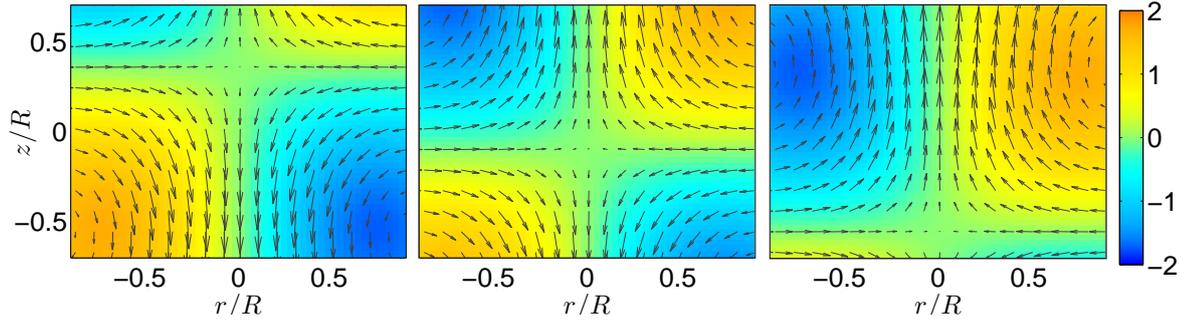


FIGURE 5.40 – Allure du mode du noyau du mode $m = 1, n = 1$, pour différentes valeurs du paramètre φ_M : à gauche, $\varphi_M \approx -\pi/4$; au centre, $\varphi_M \approx 0$; à droite, $\varphi_M \approx \pi/4$.

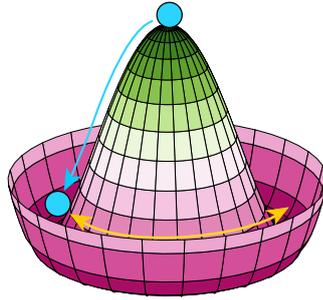


FIGURE 5.41 – Interprétation classique des modes de Goldstone : une particule dans un potentiel en forme de sombrero brise de manière « instantanée » la symétrie du puits de potentiel, mais peut parcourir le fond du puits sans apport d'énergie. Cette exploration est un mode de Goldstone.

à elle, possède un ventre de vitesse (azimutale) pour $z = h$ et peut donc spontanément venir briser la symétrie de notre écoulement. Dans un tel cas, l'intensité de la brisure de symétrie observée peut être vue comme un déphasage d'angle φ_M par rapport à un écoulement qui respecte la \mathcal{R}_π symétrie (pour lequel, donc, $\varphi_M = 0$). Un exemple de mode brisant la symétrie pour $m = 1$ et $n = 1$ a été tracé sur la figure 5.40.

Les modes de Goldstone L'apparition d'un mode de Goldstone dans un système physique est un processus très général impliquant une brisure de symétrie continue. Supposons un système physique quelconque, par exemple un ensemble de rotors en interaction. Pour les températures élevées, les rotors seront aléatoirement orientés et il n'existe pas d'ordre global. Pour les températures très faibles, au contraire, nous pouvons supposer que tous les rotors seront alignés, ou presque alignés. Si nous considérons que les rotors en question sont des spins d'Ising qui prennent des valeurs discrètes, les spins seront tous $+1$ ou -1 . Ces rotors peuvent être au contraire libres de tourner selon un (ou plusieurs) axe de rotation, et sont alors décrits par un (ou plusieurs) paramètre continu θ . Dans un tel cas, il est possible, à partir d'une configuration alignée (donc, d'énergie minimale) selon θ , de tourner chaque spin d'un infime angle $\delta\theta$ pour obtenir une *autre* autre configuration alignée, et d'énergie minimale. Cette opération s'effectue sans franchir aucune barrière d'énergie : un *continuum* de configurations d'énergie minimale a été créé, lié à la forme caractéristique de *sombrero* (voir figure 5.41) du potentiel associé à nos configurations : la solution respectant l'invariance par rotation (au centre) est une position d'équilibre instable, et il existe un continuum de solutions brisant *individuellement* la symétrie mais qui respecte de manière globale la symétrie brisée. Le passage d'une configuration brisant la symétrie à une autre s'effectue bien sans aucune barrière d'énergie. C'est l'exploration des configurations équivalentes qui est nommée *mode de Goldstone*.

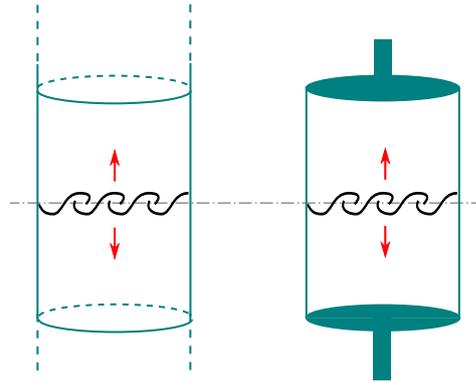


FIGURE 5.42 – *Interprétation du mode de Goldstone observé dans le cadre de l'expérience von Kármán 2. Le mode réellement observé dans l'écoulement fermé (à droite) est une trace du mode existant théoriquement dans un écoulement idéal, infini et sans forçage (à gauche). Les vaguelettes schématisent ici la couche de cisaillement, dont l'altitude est sujette à des modes de Goldstone.*

Quelles symétries continues dans l'écoulement de von Kármán ? La multistabilité observée de la couche de cisaillement ne vient pas à notre connaissance briser l'axisymétrie de l'écoulement. C'est donc la \mathcal{R}_π symétrie qui est brisée : ce résultat peut sembler contre-intuitif du fait de la nature discrète d'une telle symétrie. L'interprétation d'un tel résultat s'effectue en considérant une expérience de pensée, analogue à notre écoulement, mais dans un cylindre infini, sans forçage (voir figure 5.42). C'est en fait la trace d'une brisure de symétrie continue, l'*invariance par translation*, que nous observons dans l'écoulement.

Modes de Goldstone, modes du noyau Notre expérience est décrite par un opérateur d'évolution, qui, sous certaines conditions, n'est pas inversible. Pour de telles conditions, l'amplitude des modes correspondant à $\text{Ker}(\mathcal{M}_{mn})$ n'est pas fixée : leur amplitude vient fixer la hauteur de la couche de cisaillement, par une relation qui lie l'amplitude à un déphasage φ_M compris entre $-\pi$ et π ¹. Nous pouvons alors modéliser nos modes de Goldstone comme un processus stochastique où cette phase va être soumise à un bruit sans être confinée dans un puits de potentiel, comme pour un mouvement Brownien. Une telle modélisation fournit des résultats qualitativement similaires aux valeurs de la phase φ réellement observée (sur la figure 5.43) qui semble bien fluctuer de manière « libre » dans l'écoulement. Le caractère bi-stable observé sur la figure 5.37 n'est toutefois pas reproduit.

5.4 Turbulence non conventionnelle : turbines fractales

5.4.1 Présentation

Dans le cadre de l'étude des turbulences « non conventionnelles » — dans le sens non-Kolmogorov — au sein du laboratoire, nous avons tenté d'examiner la validité de la cascade de Richardson-Kolmogorov : celle-ci, décrite dans l'introduction de ce manuscrit (par l'équation 1.19), suggère que l'énergie est injectée aux grandes échelles (intégrales) pour être ensuite transmises aux petites échelles pour être dissipées vers les échelles η de Kolmogorov. Des expériences menées en soufflerie par l'équipe de J.C. Vassilicos, à l'Imperial College à Londres, ont récemment montré que l'introduction d'obstacles (des grilles) fractals pouvait générer une turbulence singulière, différente de celle observée pour les grilles régulières. En particulier,

1. Une bijection entre ces deux ensembles est par exemple la fonction $2 \cdot \arctan$

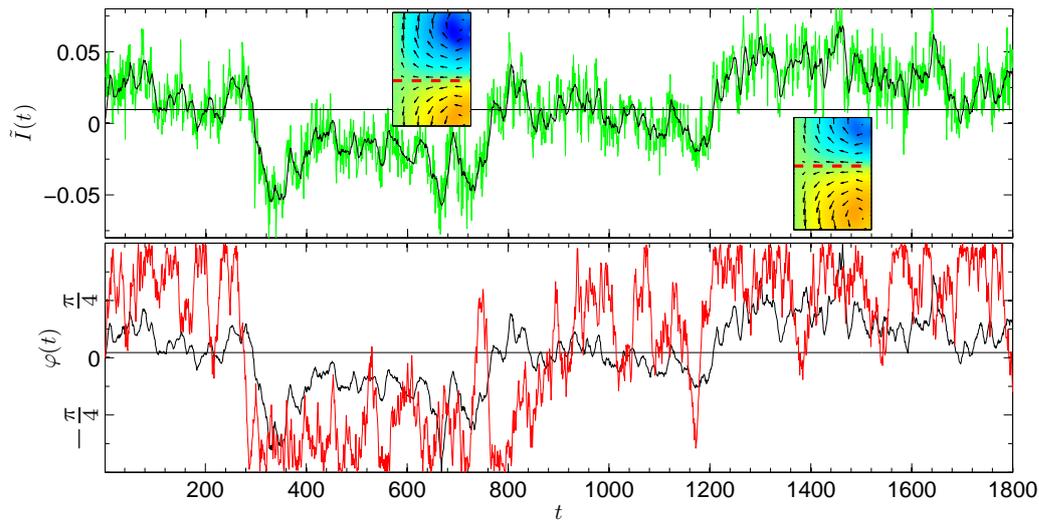


FIGURE 5.43 – En haut, tracé de $\tilde{I}(t)$, pour une expérience à $Re = 43\,000$: (—), moment cinétique non filtré, et (—), filtré à 1 Hz. Nous avons tracé en encart les champs de vitesses typiques correspondant aux valeurs de \tilde{I} au niveau des dits encarts. En bas, phase correspondante φ_M des modes de Goldstone correspondant au mode $m = 1, n = 1$ du noyau. En noir, valeurs réelles obtenues. En rouge, valeurs obtenues en modélisant la phase par un processus stochastique avec dérive et bruit.

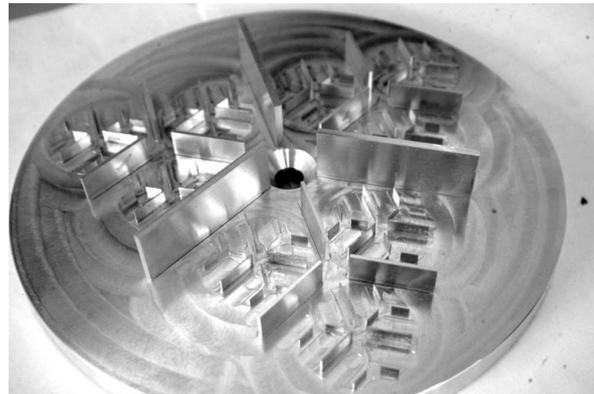
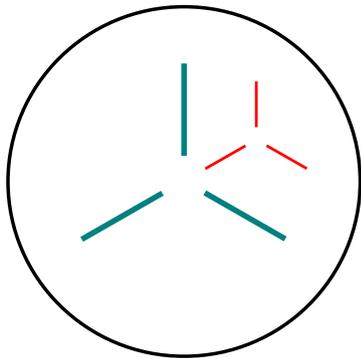


FIGURE 5.44 – À gauche, motif initial de turbine fractale à trois branches (en bleu) de nos turbines fractales. Une partie du deuxième motif (en rouge) a été dessinée pour comparaison. À droite, turbine fractale TF14, possédant quatre itérations du motif initial, construites en Duralumin par Vincent Padilla.

le déclin de la turbulence s'y effectue de manière exponentielle [148], contrairement à ce que prévoit à la fois la théorie et l'expérience sur des grilles conventionnelles [149].

Nous avons donc effectué des recherches exploratoires, afin de voir l'effet de l'introduction d'un entraînement fractal dans l'écoulement stationnaire de von Kármán. Nous avons donc (par l'intermédiaire de Vincent Padilla) construit des *turbines fractales*. Celles-ci se composent en fait d'un jeu de deux paires de turbines, la première, appelée *préfractale* (ou TF11), possède la première itération d'un motif fractal (visible sur la gauche de la figure 5.44) et est construite en Téflon. La deuxième (visible à droite de la figure 5.44) est construite en Duralumin et possède quatre itérations du motif fractal. Les deux jeux de turbines ont été utilisés dans l'expérience VK-Énergie, qui dispose, nous le rappelons, d'une vélocimétrie laser Doppler et de mesures de couples et de vitesses fournies exclusivement par les variateurs.

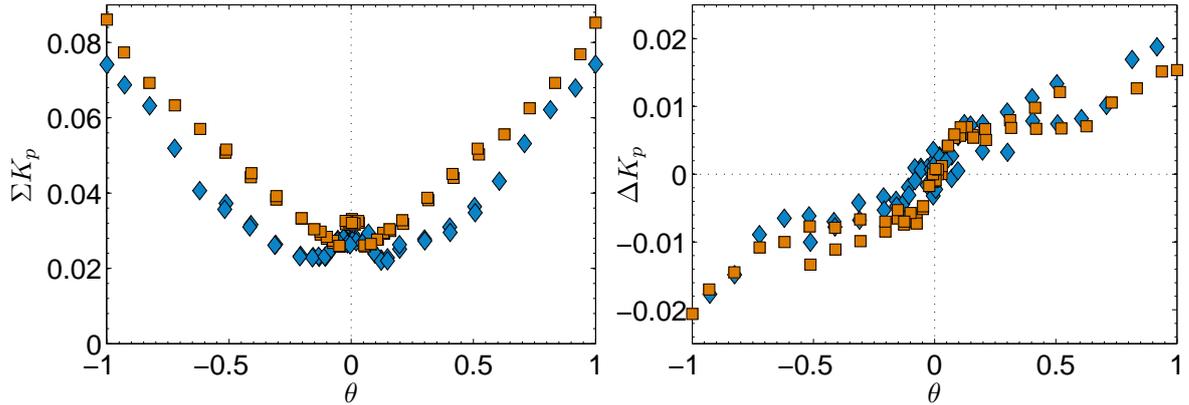


FIGURE 5.45 – À gauche, comparaison de la somme des couples adimensionnée, ΣK_p pour les turbines fractales $TF14$ (■) et les turbines pré-fractales $TF11$ (◆). À droite, différence ΔK_p entre les couples adimensionnés. Les conventions sur les symboles sont identiques à celles de l’encart de gauche. Deux cycles ont été effectués pour chaque jeu de turbines, à des fréquences moyennes de $f = 6$ Hz et $f = 8$ Hz (où θ est compris entre -0.5 et 0.5).

5.4.2 Comparaison des résultats

5.4.2.1 Mesures de couples : cycles en θ

Les turbines fractales, comme les turbines pré-fractales, ont pour « base » trois pales droites, moins longues que chacune des huit pales courbes des turbines $TP87$, ou même que les huit pales droites des $TM80$. Par conséquent, nous pouvons nous attendre à ce que le couple exercé sur de telles turbines soit faible. Nous avons donc optimisé nos mesures du couple $K_p(\theta)$ en effectuant des balayages pour les plus grandes fréquences de rotation des turbines (qui est limitée à 12.5 Hz). Le choix s’est alors porté, pour chaque jeu de turbines, sur un double cycle : le premier s’effectue à 8 Hz aux petites valeurs de θ , et le second s’effectue à 6 Hz pour toutes les valeurs de θ . Les valeurs de couple adimensionnées de la figure 5.45 confirment notre intuition : les turbines fractales $TF14$, qui possèdent plus de pales que ses consœurs $TF11$, réclament également plus de couple (jusqu’à 50% de couple supplémentaire). De plus, de manière assez surprenante, nous pouvons observer pour la turbine fractale un faible saut de K_p , pour $\theta = \pm 0.05$. Il est possible d’attribuer ce comportement au fait que les petites pales (voir figure 5.44) viennent attaquer le fluide avec un angle aigu, comme les turbines à pales courbes dans le sens $(-)$. La courbure des pales tend dans un tel cas à créer des discontinuités de K_p aux alentours de $\theta = 0$, où l’état (s) devenait marginalement stable. En dehors de ces quelques particularités, l’aspect général des deux cycles est assez similaire : aucun indice du caractère fractal des turbines ne transparait à cette échelle.

5.4.2.2 Mesures de vélocimétrie laser

Intéressons-nous désormais aux mesures de champs de vitesses fournies par la vélocimétrie laser Doppler (LDV) : celle-ci peut, dans un premier temps, calculer les vitesses moyennes de l’écoulement pour une grille donnée qui balaye les axes r et z de la cuve. Cela permet donc de reconstruire une forme de champ des vitesses moyennes, qui n’est pas exactement celui fourni par la PIV (voir pour cela la thèse de Romain Monchaux [66]), mais dont l’aspect général est très proche. La figure 5.46 nous montre alors que les champs de vitesse obtenus à $\theta = 0$ présentent très peu de différences entre les turbines pré-fractales $TF11$ et les turbines fractales $TF14$. En moyenne, à grande échelle, et aux aberrations au niveau du champ de vitesses près (visibles notamment aux grands r dans la sous-figure 5.46b), les deux écoulements possèdent des vitesses du même ordre de grandeur et respectent tous deux la \mathcal{R}_π symétrie. Ici encore,

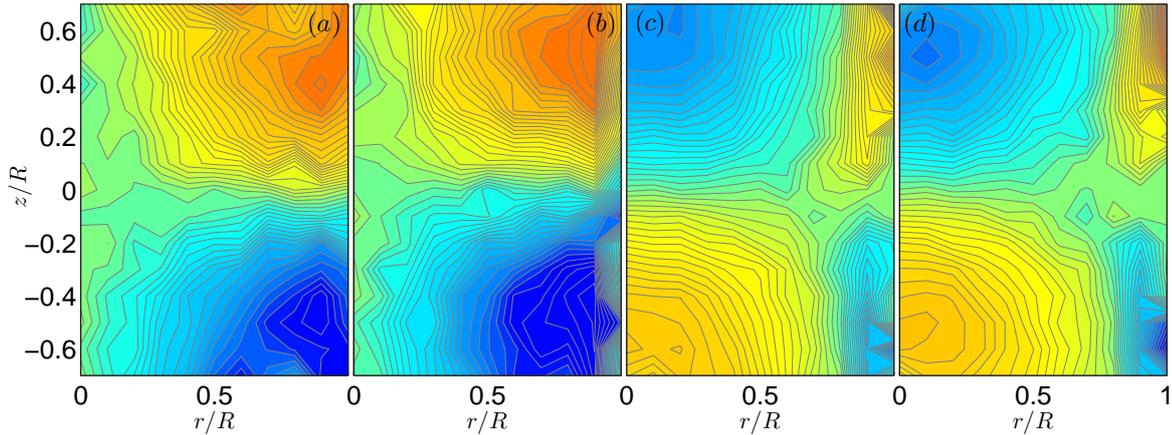


FIGURE 5.46 – Champs moyens des vitesses obtenus par LDV pour un écoulement à $\theta = 0$, effectué à 7 Hz. (a), champ moyen de vitesses azimutales v_ϕ pour des turbines TF11. (b), même champ de vitesses pour des turbines TF14. (c), champ moyen des vitesses verticales v_z pour des turbines TF11. (d), même champ pour des turbines TF14. Les échelles de couleurs sont les mêmes pour les quatre sous-figures.

nous ne discernons pas vraiment de traces du caractère fractal des turbines aux grandes échelles de l'écoulement.

Les mesures de LDV nous permettent enfin d'étudier la densité spectrale de puissance des fluctuations de la vitesse du fluide (que nous appellerons « spectre » dans la suite du paragraphe) pour tous les points de la grille où nous avons effectué des mesures. Montrer ici l'ensemble des 176 spectres pour deux valeurs de θ (0 et 0.2), deux composantes de la vitesse (v_ϕ et v_z), et deux jeux de turbines (TF11 et TF14) semble toutefois relativement impraticable. Nous avons donc sélectionné deux points de mesure pour l'étude des spectres, suivant le choix effectué par Florent Ravelet [65], en espérant que ceux-ci soient suffisamment représentatifs de l'écoulement. Le premier, situé à $r = 0.9$ et $z = 0.5$ correspond au bord de la cuve, à proximité de la turbine du haut. Le second point de mesure sélectionné se trouve à $r = 0.6$ et $z = 0.4$, situé au niveau du centre d'une cellule de recirculation. Le troisième et le quatrième point sont situés dans la couche de cisaillement, respectivement à $r = 0.5$ et $r = 0$. Le quatrième point de mesure correspond donc au point de stagnation de l'écoulement pour $\theta = 0$. Les spectres obtenus pour ces quatre points de mesure sont visibles sur la figure 5.47. Ces derniers montrent une fois de plus assez peu de différences entre les turbines pré-fractales TF11 et les turbines fractales TF14 : pour les deux jeux de turbines, les pentes des spectres correspondant à la zone inertielle sont identiques, et semblent suivre la loi de Kolmogorov (ici, en $f^{-5/3}$). De même, l'aspect du spectre aux hautes fréquences, bien qu'assez bruité, semble conserver sa forme lors du changement de jeu de turbines. Tout juste pouvons-nous constater que les spectres des turbines TF11 possèdent une densité spectrale de puissance plus importante aux plus basses fréquences lorsque $\theta = 0.2$.

Les résultats forts obtenus dans le groupe de J.C. Vassilicos [148, 150] concernant les grilles fractales sont essentiellement liés à la manière dont la turbulence décline, qui diffère notablement des déclinés en loi de puissance généralement observés en turbulence de grille classique, où, notamment, l'hypothèse de Taylor est valide. Ces résultats sont donc essentiellement *non-stationnaires*. Notre expérience de von Kármán est quant à elle très inhomogène, stationnaire, et son taux de turbulence rend l'application de l'hypothèse de Taylor délicate. Il est donc peu étonnant de ne pas retrouver les résultats importants des grilles fractales dans notre expérience, en particulier sur des grandeurs aussi « simples » que les spectres des fluctuations, les champs moyens de vitesses et les couples adimensionnés moyens. Il est probable que l'étude des incréments de vitesse, en particulier la distribution de ces derniers, révèle des différences

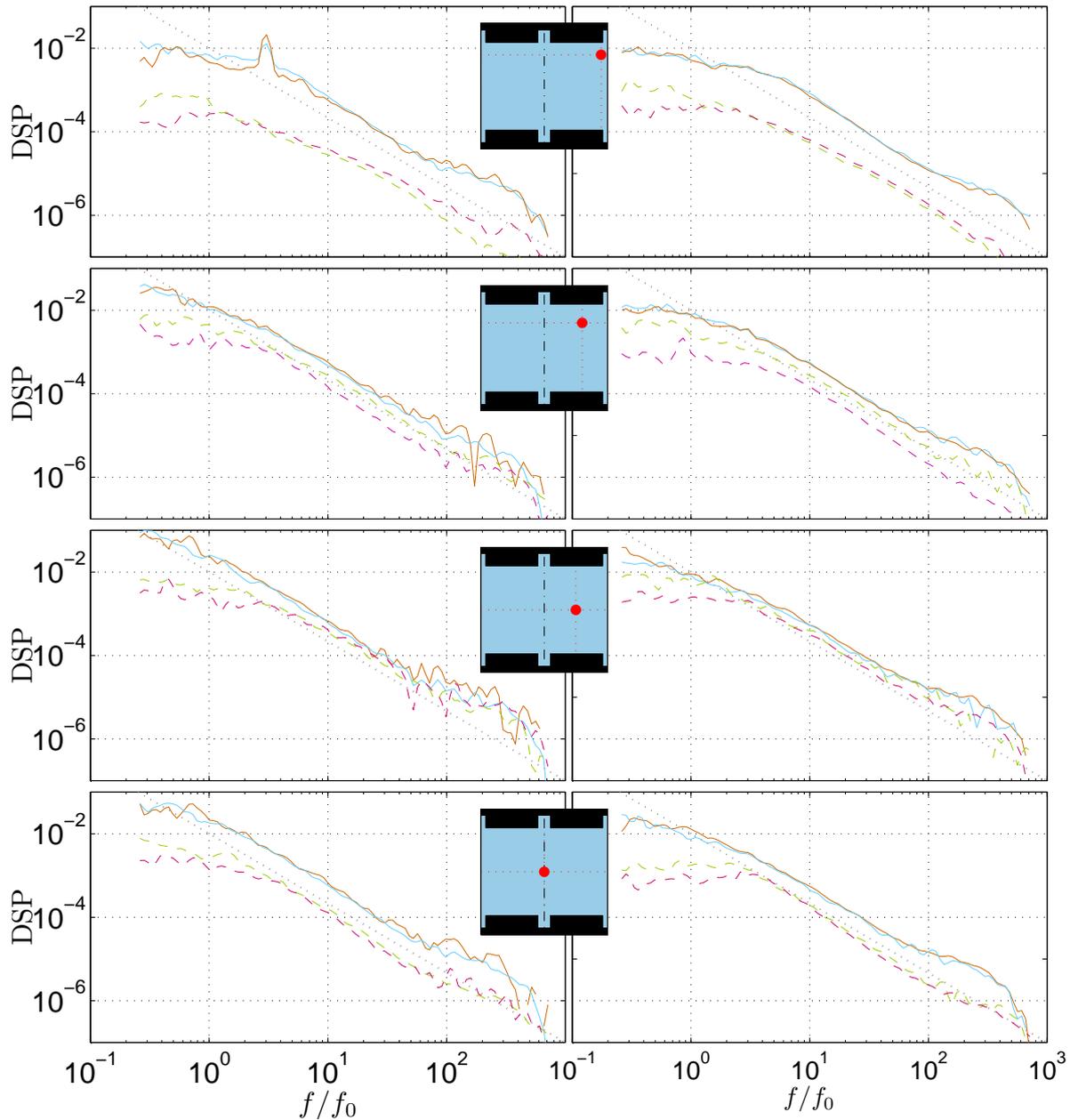


FIGURE 5.47 – Spectres des fluctuations de vitesses azimuthale v_ϕ (à gauche) et de vitesse verticale v_z (à droite) en divers points de l'écoulement (signalés sur les encarts) pour $\theta = 0$ (trait plein) et $\theta = 0.2$ (tireté). Les traits bleu ciel et verts représentent les spectres des turbines fractales, et les traits orange et fuchsia foncés correspondent à ceux des turbines normales. Les encarts montrent (par un point rouge) la position du point de mesure dans la cuve. Le trait pointillé noir présent sur chaque sous-figure représente quant à lui une loi de puissance en $f^{-5/3}$. Les spectres n'ont pas été décalés : ils présentent une différence d'amplitude importante entre $\theta = 0$ et $\theta = 0.2$.

entre les turbines normales et fractales.

5.5 Conclusion

Les expériences que nous avons effectuées en commande en vitesse sont nombreuses et variées. Nous avons tout d'abord revisité la transition à la turbulence observée dans l'écoulement : cela nous a permis de préciser les différentes symétries successivement brisées, statistiquement restaurées, puis statistiquement brisées dans l'écoulement lorsque nous augmentons le nombre de Reynolds. Dans le sens (–) de rotation des turbines, les états stationnaires de l'écoulement turbulent présentent un fort hystérésis dont la construction, lorsque le nombre de Reynolds augmente, semble suivre un scénario complexe, mais néanmoins globalement supercritique, possédant des points communs avec celui mentionné par [65]. Ce caractère super-critique nous a poussés à définir un équivalent de l'aimantation spontanée et du champ coercitif à partir des caractéristiques du cycle d'hystérésis dans le cadre d'une analogie avec les transitions de phase ferro/paramagnétique. Les résultats que nous avons obtenus dans cette section seront repris, complétés, puis analysés plus en détail dans le chapitre 7.

Les expériences effectuées dans le sens (+) à haut nombre de Reynolds ont révélé des propriétés intéressantes : en premier lieu, les états stationnaires (statistiques) atteints par l'écoulement semblent ici indépendants de la préparation, et donc de l'histoire de l'écoulement. Deuxièmement, nous observons une relation linéaire entre la hauteur de la couche de cisaillement z_s et le moment cinétique I de nos écoulements pour les valeurs de z_s en dehors des turbines (soit $|z_s| \leq 0.7R$). Troisièmement, le moment cinétique est lui-même proportionnel à la différence γ entre le couple (réduit) exercé par la turbine du bas et celui exercé par la turbine du haut. Ces trois propriétés simplifient grandement l'étude de la sensibilité de l'écoulement à une brisure de \mathcal{R}_π symétrie à hauts nombres de Reynolds.

Les expériences effectuées à $\theta \neq 0$ présentent une divergence de la susceptibilité χ de l'écoulement avec θ , dont il est possible d'extraire un exposant critique -1 en identifiant le nombre de Reynolds à une température (voir pour cela l'article de B. Castaing [141]). Cette valeur de l'exposant, typique de la transition de phase du modèle d'Ising en champ moyen, permet une fois de plus de tester des outils statistiques dans notre écoulement. Une approche simple, effectuée dans la partie 5.3.4.3, permet d'extraire une température $k_B T/J$ directement à partir du tracé $I(\theta)$, qui se rapproche de $T_c = 1$ pour les nombres de Reynolds à proximité de Re_c , sans toutefois évoluer de manière monotone avec le nombre de Reynolds. L'étude des fluctuations du champ de vitesses $v_\phi(r, z)$ montre quant à elle une absence de divergence de la longueur de corrélation ξ que nous pouvons définir dans l'écoulement, en désaccord avec les exposants de la classe d'universalité Ising-champ moyen. De même, les fluctuations du moment cinétique au voisinage du nombre de Reynolds critique semblent violer les relations de fluctuation-dissipation que nous pouvons dériver pour les systèmes hors de l'équilibre thermodynamique lorsqu'ils retournent vers un tel équilibre. Cette violation s'effectue ici par un « excès de susceptibilité », ce qui le distingue des systèmes vitreux et dissipatifs stationnaires où la violation s'effectue plutôt par « excès de fluctuation ». En outre, ces fluctuations peuvent être vues comme des brisures spontanées de symétries associées à des *modes de Goldstone*, qui permettent à la couche de cisaillement d'évoluer librement, à la manière d'un mouvement Brownien.

Nous avons enfin étudié l'influence que pouvait avoir l'introduction d'un forçage fractal sur l'écoulement turbulent de von Kármán. Les résultats exposés dans cette section, qui regroupent des mesures globales de couple, des mesures de champ de vitesses moyennes, et des spectres de fluctuation des vitesses, ne montrent pour l'instant guère de différence de nature entre l'écoulement forcé « normalement » et l'écoulement forcé de manière fractale. Ces observations ne viennent toutefois pas contredire les résultats fondamentaux obtenus dans la turbulence de grilles fractales [148], nos expériences *stationnaires* et *anisotropes* tranchant avec la turbulence *isotrope, quasi-homogène* et *en déclin* de grille. Il est donc probable que des différences se cachent dans des grandeurs plus complexes de l'écoulement, comme les incréments de vitesse

d'ordre supérieur à 2, ou des grandeurs reflétant le mélange effectué par la turbulence.

*

CHAPITRE 6

LA COMMANDE EN COUPLE

Introduction

Les expériences de von Kármán fonctionnent généralement sur le même régime : la fréquence de rotation des turbines, qui entraînent le fluide, est imposée. Pour observer la réponse du fluide à un tel entraînement, le couple exercé sur les turbines est mesuré. Nous pouvons alors nous poser la question inverse suivante : si nous imposons désormais un *couple* sur nos turbines, et si la régulation est suffisamment bonne pour que la dynamique de notre système — au moins à grande échelle — soit préservée, verra-t-on des différences avec un système où la fréquence est imposée ? Cette question peut sembler anodine au premier abord. L'intuition voudrait qu'il existe une certaine symétrie entre les causes et les conséquences dans les systèmes physiques : lorsqu'on impose X pour obtenir Y , on s'attend *naturellement* à obtenir Y lorsqu'on impose X , par exemple. Le système possède alors des couples (X, Y) de « points de fonctionnement » et la relation $X(Y)$ ne dépend pas du mode de forçage mais juste des caractéristiques du système étudié. Pourtant une modélisation du comportement aux grandes échelles de l'écoulement comme un processus stochastique a par exemple fourni des résultats différents sur la taille des fluctuations de puissance entre les commandes en couple et en vitesse [112], qui avaient été mesurées expérimentalement [39]. De même, nous pouvons nous demander la pertinence de couples de points de fonctionnement dans le cas d'un système possédant un hystérésis, qui par définition possède plusieurs points de fonctionnement (X, Y_i) pour un X donné. Peu d'expériences de commande en couple ont été historiquement effectuées sur l'écoulement de von Kármán : seuls Jean-Hugues Titon, Olivier Cadot, et Raúl Labbé (qui n'a pas publié de résultats à ce sujet) ont effectué des expériences de commande en couple en dehors de Saclay. Cette absence est probablement liée à deux raisons :

- La première raison provient de la conception même des moteurs : les applications industrielles requérant plus souvent de tourner à une fréquence imposée (pour un ventilateur, ou une pompe) qu'à couple imposé. Par conséquent, même pour des moteurs où la commande en vitesse n'est pas triviale (c'est notamment le cas des moteurs asynchrones), celle-ci est majoritaire. Nos moteurs synchrones tournent *a priori* à la fréquence du champ magnétique des bobines du stator. Malgré le train de vie modeste du laboratoire, nos deux variateurs nous permettent d'effectuer une commande en couple.
- La deuxième raison provient probablement des turbines qui ont généralement été utilisées par les différents groupes qui ont étudié l'écoulement [34, 32, 51, 53, 47, 56, 92] : toutes possédaient des pales droites ou des pales courbes utilisées dans le sens (+), qui, les unes comme les autres, ne génèrent pas de cycle d'hystérésis.

Les expériences de commande en couple ont été historiquement initiées par Louis Marié, et apparaissent assez brièvement dans son manuscrit de thèse. Elles ont ensuite été continuées par Florent Ravelet, dont j'ai repris certaines notations et méthodes de seuillage. Nous allons donc tenter de mieux comprendre les états observés en commande en couple, grâce notamment

à l'aide précieuse de la PIV.

6.1 Commande en couple : un cycle sans hystérésis

6.1.1 Spécificités de la commande en couple

Erreurs sur γ Nous avons déjà vu dans le chapitre 2, traitant du montage expérimental, que la transmission du couple des moteurs n'était pas parfaite à cause des frottements mécaniques principalement liés à la présence de nos garnitures mécaniques et d'erreurs statiques dans l'estimation du couple au niveau des moteurs. En imposant une tension V_{AO0} aux bornes du variateur, le moteur imposera en fait un couple $C_{\text{mot}} = G - C_{\text{err}}$ au reste du montage, G traduisant le couple exercé par les moteurs, et C_{err} la somme des frottements mécaniques tout au long de la chaîne de transmission. Ces erreurs statiques ne sont pas totalement compensées par les couplemètres, placés en aval des garnitures mécaniques et qui mesurent donc aussi une partie des frottements mécaniques. C'est ce qui nous a motivés pour effectuer des calibrations.

Cette situation est toutefois plus gênante qu'en commande en vitesse. En effet, la fréquence de rotation de tous les éléments de notre système est identique (aux rapports de poulies près) tant qu'aucun glissement mécanique n'est observé. Par conséquent, si la mesure de fréquence au niveau des moteurs est bonne, il est possible de savoir exactement ce qui est imposé au niveau des turbines. Cela nous permet de faire confiance à la valeur de fréquence (et donc de θ) que nous avons imposée. À cause des frottements mécaniques, la mesure des couples au niveau des moteurs, et au niveau des couplemètres, ne correspond pas à ce qui est effectivement transmis au système : il est donc *impossible* de savoir *a priori* quelle valeur de γ est imposée au niveau des turbines lorsque nous imposons une tension aux bornes du variateur. Il nous est d'ailleurs impossible d'affirmer que nous avons travaillé à couple moyen (réel appliqué au niveau des turbines) égal au couple moyen estimé $C_{\text{est}} = \frac{1}{2}G(V_{AO0} + V_{AO1}) = 1.40 \text{ Nm}$ quand la tension moyenne est imposée à 1.215 V.

Toutefois, nous avons déjà vu qu'en commande en vitesse, les notations employées (notamment, les couples adimensionnés K_p et réduits γ) font apparaître des graphes $\gamma(\theta)$ et $\Delta K_p(\theta)$ similaires pour les fréquences f_0 accessibles expérimentalement (voir, par exemple, la figure 5.20), qui ne reflètent pas la variation faible de la forme du cycle avec le nombre de Reynolds (vue sur la figure 5.22). Il est donc *a priori* possible d'effectuer une partie du cycle d'hystérésis à une fréquence moyenne de rotation donnée pour effectuer le reste des expériences à une autre fréquence moyenne. Les deux moitiés de cycle seront alors considérées identiques tant que les deux fréquences moyennes de rotation ne sont pas trop différentes. Nous avons vu précédemment en commande en vitesse qu'à f constant, les écoulements bifurqués requéraient beaucoup plus de couple que leurs pendants symétriques : $K_p^s \approx K_p^b/4$. Par conséquent, à somme des *couples* constante, les turbines doivent fortement *ralentir* pour supporter l'effort requis permettant d'obtenir un écoulement bifurqué. L'argument précédemment cité nous indique que cette condition n'influe pas sur la forme du cycle, tant que la précision sur γ reste bonne. Par le même argument, nous pourrions effectuer une partie du cycle à un couple moyen C_0 donné, et une autre partie à un nouveau couple moyen C'_0 : l'imprécision sur le couple moyen réellement transmis ne vient donc pas grever nos mesures, encore une fois lorsque la précision sur γ est bonne. Cela se traduit en pratique par une quantité de calibrations très importante.

Recherche des régimes par tâtonnement Les couples liés aux frottements statiques sont relativement peu élevés ($C_{\text{stat}} < 0.2 \text{ Nm}$), inférieurs au couple moyen estimé de notre série d'expérience. Par conséquent, nous savons que l'état parfaitement symétrique $(s)|_{\theta=0}$ — s'il existe — ne se situe pas loin de l'état où deux tensions identiques $V_{AO0} = V_{AO1}$ sont imposées

en sortie de la carte d'acquisition. Il suffit alors d'effectuer une expérience avec ces réglages, constater une éventuelle asymétrie des fréquences, puis tenter de la corriger en modifiant les réglages pour atteindre enfin le régime souhaité. Généralement, il est possible de trouver le régime voulu au bout de quatre ou cinq « tâtonnements ». Une fois les tensions aux bornes du variateur fixées, et les couples moyens (éventuellement stationnaires) C_1 et C_2 mesurés, il est enfin possible de calculer γ .

$$\gamma = \frac{C_1 - C_{\text{stat1}} - C_2 + C_{\text{stat2}}}{C_1 - C_{\text{stat1}} + C_2 - C_{\text{stat2}}} = \frac{C_1^* - C_2^*}{C_1^* + C_2^*} \quad (6.1)$$

C'est cette valeur corrigée (et non la mesure brute) qui est tracée dans les figures de cette section.

6.1.2 Comportement sur les branches (b_1), (b_2) et (s)

Nous allons nous placer dans des conditions similaires à celles que nous avons observées en commande en vitesse, et tenter de parcourir les branches (s) et (b) afin de vérifier l'intuition que nous avons eue dans l'introduction de ce chapitre. Nous allons de plus examiner les champs moyens de PIV issus de la commande en couple pour quelques expériences, notamment en essayant d'obtenir de tels champs pour $\theta = 0$ (s), $\theta = 0$ (b_2) et $\theta = -0.4$ (b_2).

6.1.2.1 Variations de la fréquence moyenne f

Les expériences effectuées en imposant les couples confirment notre intuition : il est possible d'imposer des γ tels que les régimes observés soient stationnaires, et ressemblent à (s), (b_1) et (b_2). Une deuxième intuition est aussi confirmée : la fréquence moyenne de rotation des turbines varie à C_0 constant lorsque nous faisons varier γ , la fréquence de rotation des turbines étant plus lente dans les états (b_1) et (b_2) que dans (s). Il est d'ailleurs possible de prévoir le ralentissement obtenu à partir de la différence de K_p mesurée en commande en vitesse :

$$K_p^s \approx \frac{1}{4} K_p^b \quad (6.2)$$

$$\text{Comm. vitesse} \quad \frac{C_0^s}{C_0^b} \approx 0.25 \quad (6.3)$$

$$\text{Comm. couple} \quad \frac{f^b}{f^s} \approx \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5 \quad (6.4)$$

Les fréquences moyennes obtenues lors des expériences de commande en couple sont compatibles avec ce rapport de fréquence 1/2 :

$$\frac{f^b}{f^s} = \frac{3.6}{6.7} \approx 0.54 \quad (6.5)$$

Lorsque le système est dans un état stationnaire, il est donc particulièrement aisé, à l'œil comme à l'oreille, de déterminer s'il est dans un état bifurqué ou symétrique, contrairement à la commande en vitesse où seule l'écoute de l'expérience nous guidait sur l'état stationnaire de l'écoulement. Pour la première série d'expériences, la vitesse moyenne des turbines en régime symétrique f^s était approximativement constante et valait environ 6.7 Hz. Pour les régimes bifurqués, il semble que les vitesses des turbines étaient comprises entre 3 Hz (pour les écoulements à très forts θ) et 3.8 Hz (pour des expériences en bord de zone antinaturelle). Cette diminution de la vitesse moyenne pour les $|\theta|$ élevés de la branche bifurquée se retrouve une fois de plus en commande en vitesse, où le couple moyen augmente sur les branches (b_1) et (b_2) lorsque $|\theta|$ augmente.

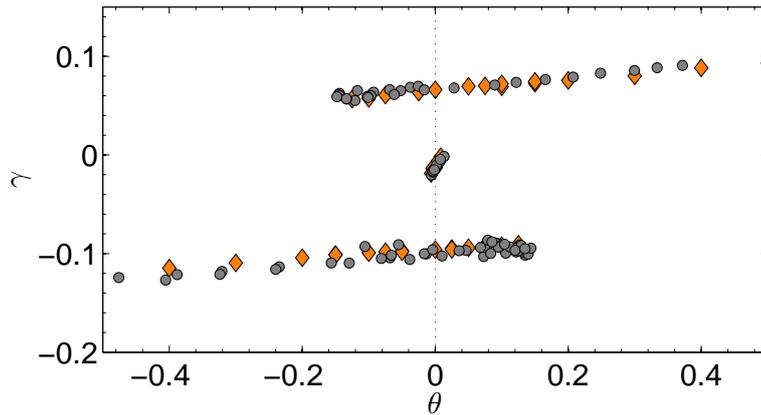


FIGURE 6.1 – Comparaison des expériences stationnaires en commande en couple (\bullet) et en commande en vitesse (\blacklozenge). La superposition des points est bonne sur toutes les branches (aucune expérience n'a été effectuée en couple à $|\theta| > 0.5$).

6.1.2.2 Impact sur le cycle en (θ, γ)

Les valeurs de (θ, γ) pour les expériences en commande en couple sur les branches (s) , (b_1) et (b_2) sont très proches des valeurs obtenues en commande en vitesse, sur toute la longueur des branches (s) et sur les branches (b) depuis le bord antinaturel jusqu'à des θ élevés. La superposition des résultats était d'ailleurs suffisamment bonne pour ne pas sentir le besoin d'effectuer des expériences à $|\theta| \geq 0.5$. Ce résultat vient conforter d'autres hypothèses effectuées plus haut : le cycle $\gamma(\theta)$ est peu dépendant de la fréquence moyenne de rotation des turbines, et les frottements mécaniques ont bien été pris en compte par les multiples calibrations.

6.1.2.3 Des structures similaires

La ressemblance des champs de PIV de commande en couple ou en vitesse confirme l'impression donnée par les mesures mécaniques : une fois adimensionnés par une vitesse typique Rf , les écoulements sont difficiles à distinguer que ce soit dans le cas symétrique (s) , avec deux cellules de recirculation bien centrées sur l'axe $z = 0$, ou sur les branches bifurquées (b_1) et (b_2) , pour $\theta = 0$ et $\theta = 0.4$ (cf. fig. 6.2). Il est aussi possible d'établir en commande en couple les régimes antinaturels des branches bifurquées (b_1) et (b_2) , où les grandeurs globales de l'écoulement restent stationnaires. Les champs de PIV associés (non montrés) restent, de la même manière, similaires aux champs issus d'expériences en commande en vitesse.

6.1.3 Au-delà des branches stationnaires

6.1.3.1 Introduction

Pour la suite de l'étude, nous allons nous placer à des régimes correspondant à des θ très proches des seuils de bifurcation, et nous allons progressivement augmenter γ de sorte à pousser le système au delà des régimes de fonctionnement connus. Nous avons rappelé sur la figure 6.3 la différence entre la commande en vitesse et en couple. En commande en couple, le système au bord de la branche (s) ne peut pas bifurquer vers un nouveau régime stationnaire car cela implique un saut, une discontinuité de la valeur de γ qui est désormais imposé. Cependant, il se situe désormais à l'intérieur du cycle d'hystérésis observé en commande en vitesse, et le système doit donc « trouver une solution » pour fonctionner. Deux options s'offrent alors à nous : soit le système va trouver un nouvel état stationnaire qui était métastable, ou instable en commande en vitesse, soit le système n'atteindra aucun état stationnaire, et nous pouvons

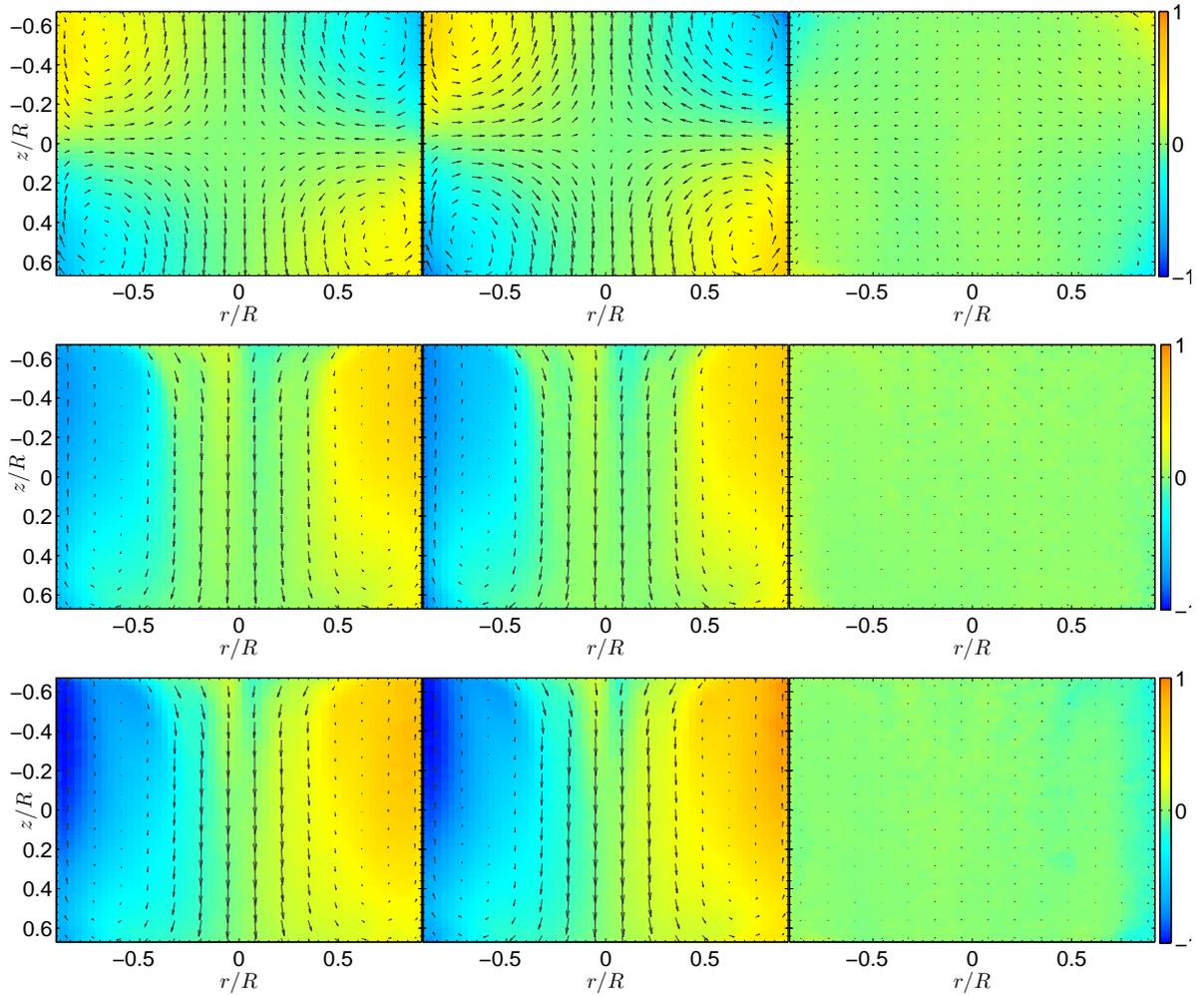


FIGURE 6.2 – En haut : écoulements moyens de von Kármán, issus de la PIV stéréoscopique, dans la branche symétrique, pour $\theta = 0$. De gauche à droite, écoulement moyen de la commande en couple, puis celui de la commande en vitesse, et la différence entre les deux. Au centre, écoulements moyens dans la branche bifurquée pour un $\theta \approx 0$. De gauche à droite, écoulement moyen en commande en couple ($\theta = 3.8 \cdot 10^{-3}$), puis en commande en vitesse ($\theta \approx 2.9 \cdot 10^{-6}$), et différence entre les écoulements. En bas, écoulements moyens de von Kármán dans la branche bifurquée (b_2) à $\theta \approx -0.4$. De gauche à droite, commande en couple ($\theta = -0.38$), commande en vitesse ($\theta = -0.40$) et différence entre les champs moyens. Tous les champs de vitesses ont été normalisés par la vitesse de rotation moyenne en bord de pale, fR . Les échelles d’affichage des flèches de l’état symétrique sont distinctes de celles utilisées pour les états bifurqués pour des raisons de lisibilité.

supposer le cas échéant que des régimes *instationnaires* vont émerger à l’extérieur de la branche (s), avec de possibles fortes variations de f_1 et f_2 .

6.1.3.2 Sortie de la branche symétrique (s)

Au voisinage du bord de la zone (s) (pour $\gamma \leq -0.019$ ou $\gamma \geq -0.001$), les signaux de vitesse semblent très similaires à ceux observés dans la branche symétrique (s). Presque tout le temps, le comportement du système ressemble à celui de (s) (cf. fig. 6.5) : la turbine la plus fortement entraînée tourne sensiblement plus vite (7.25 Hz) que celle qui est moins fortement entraînée (6.75Hz). Nous appellerons par conséquent ce régime (\tilde{s}) en dehors de ladite branche (s). Très proche de la branche stationnaire (s), ce nouveau régime est lui-même stationnaire.

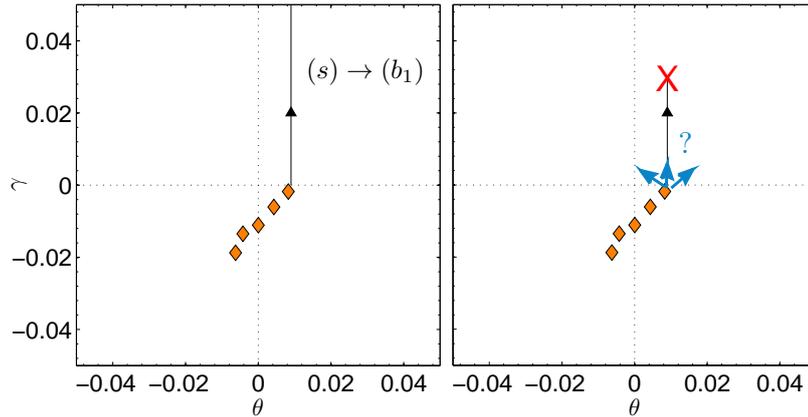


FIGURE 6.3 – Différence entre les commandes en vitesse (à gauche) et en couple (à droite). Au delà du θ_{lim} , le système bifurque de (s) vers un nouveau régime stationnaire (b) , avec un saut de γ . Ce saut n'est pas possible quand γ est fixé : le système doit donc trouver une « alternative », hors de la branche stationnaire. Des régimes instationnaires risquent donc d'apparaître.

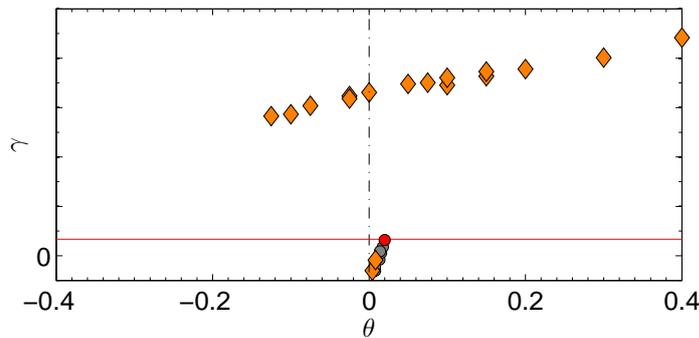


FIGURE 6.4 – Zoom sur la partie supérieure du cycle d'hystérésis : états moyens en commande en couple (\bullet) et en commande en vitesse (\blacklozenge). Le système peut fonctionner en dehors de (s) , mais commence à perdre sa stationnarité, faisant apparaître en de rares occasions des sauts anticorrélés. Nous nous plaçons aux alentours de l'expérience (\bullet) à $\gamma = 0.014$.

Toutefois, dès que nous nous éloignons de la branche (s) , soit, pour $\gamma \leq -0.034$ et $\gamma \geq 0.0035$ (comme tel est le cas sur la figure 6.4), cette stationnarité est mise à mal. En effet, pour un petit nombre d'instantanés, nous observons une fluctuation positive importante de la turbine la plus lente en moyenne, dont la vitesse atteint typiquement 8.5 Hz. À cette fluctuation positive correspond une fluctuation négative, (anti-)corrélée, et d'amplitude presque identique, de la turbine la plus rapide, qui ralentit pour atteindre 6 Hz. Ces événements, visibles sur la figure 6.5 *en bas*, correspondent à des sauts vers un état intermédiaire, nommé (\tilde{i}) . (\tilde{i}_1) correspond à un état intermédiaire entre (\tilde{s}) et (b_1) , tandis que (\tilde{i}_2) se situe entre (\tilde{s}) et (b_2) . Pour l'instant, ces événements, que nous nommerons *excursions* (en lien avec les excursions effectuées par le champ magnétique dans la dynamo terrestre [151] et celle de VKS [73]), sont fugaces, et le système revient très rapidement (en moins de 3 s) vers l'état (\tilde{s}) .

6.1.3.3 Moyennes conditionnelles

Comme nous disposons d'un système de PIV qui nous permet d'acquérir des instantanés du champ de vitesse à $f_{\text{PIV}} = 15$ Hz, nous avons tenté de caractériser les états (\tilde{i}) atteints lors des excursions. Nous avons donc effectué une moyenne des champs de vitesses issus de

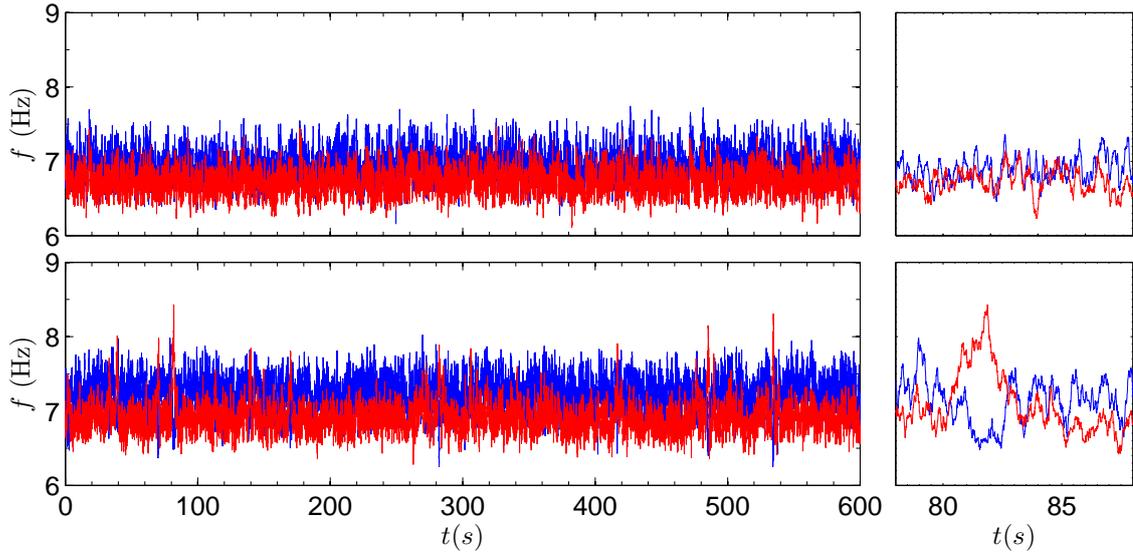


FIGURE 6.5 – Comparaison des vitesses de la turbine du haut (—) et de la turbine du bas (—) d'expériences à $\gamma = 1.0 \cdot 10^{-3}$ (bord de (s) , en haut) et $\gamma = 1.2 \cdot 10^{-2}$ (hors de s , mais avec une importante fraction de (\tilde{s}) , en bas). À gauche, l'intégralité des 600s de l'expérience. À droite, zoom sur une fluctuation anticorrélée.

la PIV en ne considérant que les instants où nous observons nos fluctuations anticorrélées. Pour extraire de tels instants, nous avons filtré $\theta(t)$ numériquement à $f_c = 1$ Hz afin d'en extraire les tendances. Nous avons vérifié qu'un tel filtrage ne nous empêchait pas de suivre les variations de θ avec une fidélité suffisante. Nous avons ensuite effectué une estimation de la densité de probabilité (en anglais, *pdf*, *probability density function*) de θ filtré, en utilisant une fonction MATLAB d'estimation par noyau (cf. Annexe A). Nous observons d'abord un net élargissement du pic correspondant à l'état (\tilde{s}) pour les γ proches des expériences de commande en vitesse, pour ensuite voir émerger un nouveau pic, correspondant aux états (\tilde{i}) , pour $\gamma \leq -0.041$ et $\gamma \geq 0.0082$. Cette bi-modalité de la distribution des valeurs de θ suppose un minimum de probabilité entre les deux maxima : ce dernier va alors définir la « frontière » entre les valeurs de θ correspondant un état quelconque (par exemple (\tilde{i})) et les valeurs voisines, qui correspondent à un autre état. Il faut enfin attribuer les pics en question à des états de la commande en couple : nous supposons (dans nos algorithmes) que le pic le plus rapproché de $\theta = 0$ correspond au pic (\tilde{s}) , et que (pour l'instant), l'éventuel pic secondaire correspond à (\tilde{i}) .

Il est possible de vérifier la qualité de notre critère de détection des excursions : il est en effet possible de retrouver, pour tout instant t , le domaine en θ dans lequel le système se trouve. Il est alors possible d'afficher ces domaines en surimpression, sur un signal de fréquence de rotation des turbines (f_1, f_2) . Nous pouvons voir sur la figure 6.7 que notre critère de séparation est plutôt efficace : les divers événements anti-corrélés sont bien détectés. Plus précisément, l'algorithme ne détecte que la zone autour du maximum d'anti-corrélation, ce qui peut être vu comme un manque de précision de l'algorithme. Cet effet a été recherché, pour tenter de mieux séparer (\tilde{s}) et (\tilde{i}) sur des futures grandeurs conditionnelles.

Comme leur nom l'indique, ces grandeurs vont être calculées sur la base des instants où le système se trouve dans le domaine correspondant à (\tilde{s}) ou dans le domaine correspondant à (\tilde{i}) . Bien entendu, toute grandeur disposant d'une échelle de temps commune à l'acquisition analogique peut également faire l'objet de moyennes conditionnelles : nous avons par exemple effectué des moyennes conditionnelles sur le champ de vitesse \mathbf{v} , mais aussi sur le moment cinétique I , sur la circulation Γ , sur la fréquence moyenne de rotation des turbines f , ... Ces moyennes conditionnelles seront indicées par l'état sur lequel elles s'effectuent : $f_{1,s}$ correspond

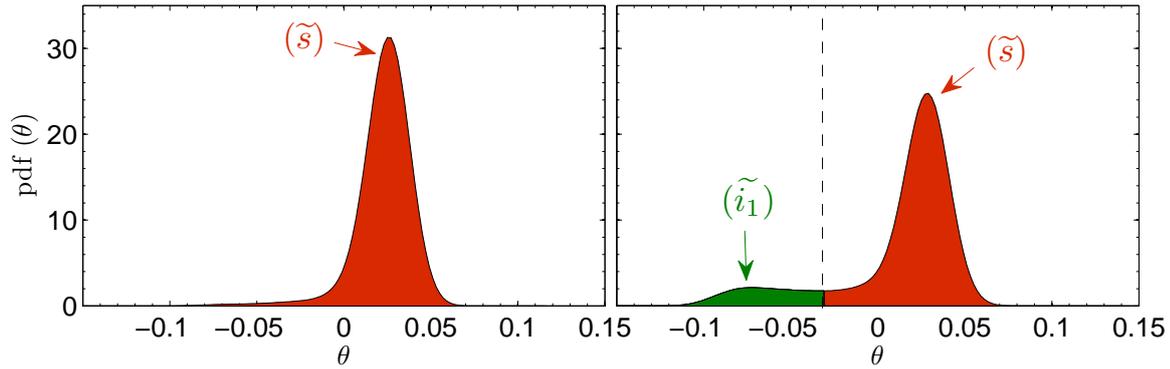


FIGURE 6.6 – Densités de probabilité (—) de θ pour deux expériences au delà de la branche (s). La première, à $\gamma = 1.2 \cdot 10^{-2}$ à g., est celle de la fig.6.5 en bas. Un pic asymétrique est bien observé, mais il est difficile de voir le deuxième maximum de la distribution : nous avons alors choisi de ne pas séparer la courbe en deux pour des raisons de présentation. À dr., expérience à $\gamma = 2.0 \cdot 10^{-2}$, avec suffisamment d'excursions vers (\tilde{i}_1) pour observer clairement un deuxième maximum sur la densité de probabilité. La position du minimum local de probabilité (tiretés) définit la frontière entre les zones « plutôt (\tilde{i}) » (vertes) et les zones « plutôt (\tilde{s}) » (rouges).

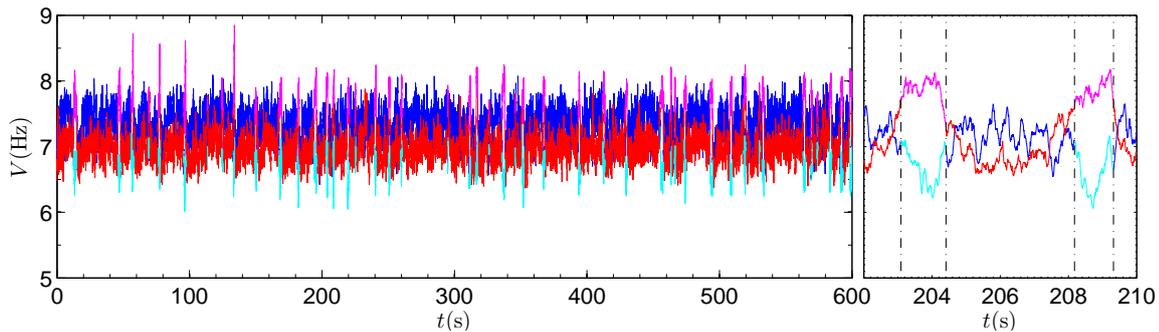


FIGURE 6.7 – Vérification de notre méthode d'extraction des états intermittents, pour une expérience à $\gamma = 0.0147$: (—) et (—) représentent les vitesses dans l'état symétrique (\tilde{s}) tandis que (—) et (—) correspondent aux vitesses pendant les excursions vers (\tilde{i}_1). À g., nous vérifions que ces excursions sont toutes bien détectées. À dr., zoom sur deux excursions. Ces dernières sont relativement bien délimitées, hormis un léger retard à la détection. Les traits mixtes noirs permettent de mieux visualiser les instants où le système change d'état.

donc à la moyenne de f_1 uniquement pour l'état (\tilde{s}).

Les données de PIV requièrent toutefois une synchronisation avec les acquisitions analogiques pour effectuer des moyennes conditionnelles (qui s'effectuent sur la base des θ) : l'horloge utilisée pour la chaîne d'acquisition analogique et celle utilisée pour les images sont en effet différentes. Nous avons donc effectué une telle post-synchronisation, d'abord manuellement, en notant la durée qui s'était écoulée dans l'acquisition analogique avant le déclenchement du laser dans le cahier d'expérience : cela implique une précision relativement faible de celle-ci, à ± 1 s lorsque l'expérimentateur n'est pas distrait. La synchronisation s'est ensuite faite directement dans le programme, en utilisant le signal TTL du flash du laser de la PIV comme déclencheur le début de l'acquisition analogique. Nous considérerons par la suite que la synchronisation obtenue par ces deux techniques sont suffisantes par rapport à la durée caractéristique des événements observés.

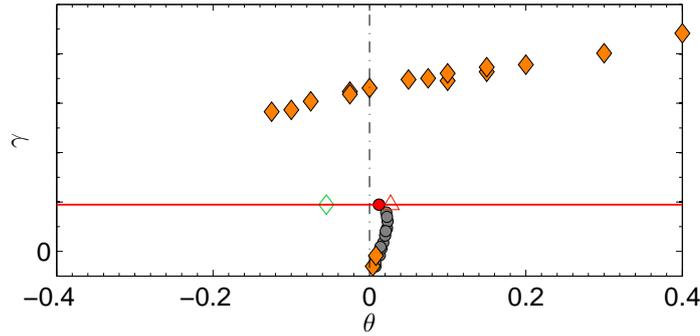


FIGURE 6.8 – Zoom sur la partie supérieure du cycle d’hystérésis. Nous avons encore augmenté $\gamma = 0.019$: les états intermittents (\tilde{i}_1) rapides (\diamond) et (\tilde{s}) (\triangle) peuvent désormais être séparés. Nous pouvons observer que l’état (\tilde{i}_1), très à gauche, modifie le θ moyen suffisamment pour que ce dernier décroisse quand γ augmente.

6.1.3.4 Des événements de plus en plus nombreux

Notre système est maintenant suffisamment éloigné de la zone symétrique stable, (s), pour qu’un pic secondaire apparaisse clairement sur la distribution de θ filtré (comme sur la figure 6.6, à droite). Il est alors possible d’indiquer, sur notre graphe $\gamma(\theta)$, l’abscisse des modes de la distribution. La figure 6.8 montre la position de tels maxima par rapport à la valeur moyenne de θ . De manière assez surprenante, la réponse moyenne de notre système à une augmentation de γ dans cette zone est une réponse négative : lorsqu’on force plus sur la turbine du bas, celle-ci *ralentit* en moyenne. Les maxima secondaires nous apportent alors une information secondaire à ce sujet : l’abscisse du mode de θ correspondant à (\tilde{s}) continue d’augmenter avec γ , mais le pic secondaire, correspondant à (\tilde{i}), vient *diminuer* la valeur moyenne de θ . Forts de ce résultat, nous pouvons tenter de tracer les champs moyens conditionnels \mathbf{v}_s et \mathbf{v}_i afin d’examiner la structure de l’écoulement lors des excursions vers (\tilde{i}). Une tel tracé, effectué pour une expérience à $\gamma = 0.015$ est visible sur la figure 6.9. Cette figure montre des états (\tilde{s}) et de (\tilde{i}) très similaires : tous deux possèdent deux cellules de recirculation déformées, celle du bas étant prépondérante. Toutefois, un examen plus attentionné révèle une allure de la couche de cisaillement légèrement différente : la couche de cisaillement définie ici comme l’iso-vitesse horizontale $v_\phi = 0$ semble plus courbée, plus modulée dans l’état (\tilde{i}) que dans l’état (\tilde{s}). De même, la taille de la cellule de pompage supérieure semble plus importante dans l’état (\tilde{i}). Ce résultat est toutefois à prendre avec précaution : nous disposons de peu (une centaine) de champs de vitesse de PIV correspondant à l’état (\tilde{i}), et sa convergence est discutable.

Cette moyenne conditionnelle peut être complétée par un tracé synchronisé des grandeurs globales de la PIV et de la fréquence de rotation des turbines. La figure 6.10 nous montre plusieurs choses à ce sujet : la première d’entre elles est, de manière assez surprenante, l’excellente superposition de Γ et de $-5I$, que ce soit au niveau de la valeur moyenne et au niveau des fluctuations à basse fréquence. Cette relation, purement empirique, ne semble pas tout à fait correspondre à une quelconque Beltramisation de l’écoulement [152], où nous aurions une relation de proportionnalité $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$. En effet, Γ est l’intégrale de w_ϕ/r et I l’intégrale de $v_\phi r$, et le coefficient de proportionnalité obtenu est sensiblement différent du coefficient Beltrami des turbines dans le sens ($-$), $\lambda = -3.95$. D’autre part, nous pouvons qualitativement examiner la qualité de la synchronisation effectuée à la main, qui est ici bonne. Enfin, nous pouvons voir l’effet sur les grandeurs de PIV d’un passage vers l’état (\tilde{i}) : ce dernier montre un assez net minimum de Γ et de I au maximum de l’excursion anti-corrélé. Malheureusement, tous les minima de Γ et de I ne correspondent pas à un tel événement : il existe également de nombreux maxima parasites des grandeurs de PIV.

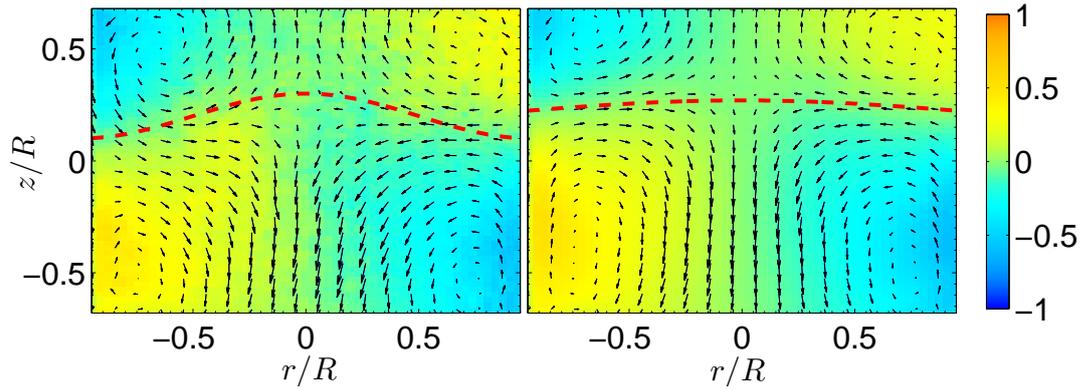


FIGURE 6.9 – Moyennes conditionnelles synchronisées à la main des champs de vitesse de la PIV, pour $\gamma = 0.02$. Des légères différences sont observables entre \mathbf{v}_i (à gauche) et \mathbf{v}_s (à droite), notamment au niveau de la couche de cisaillement (tirets épais rouges).

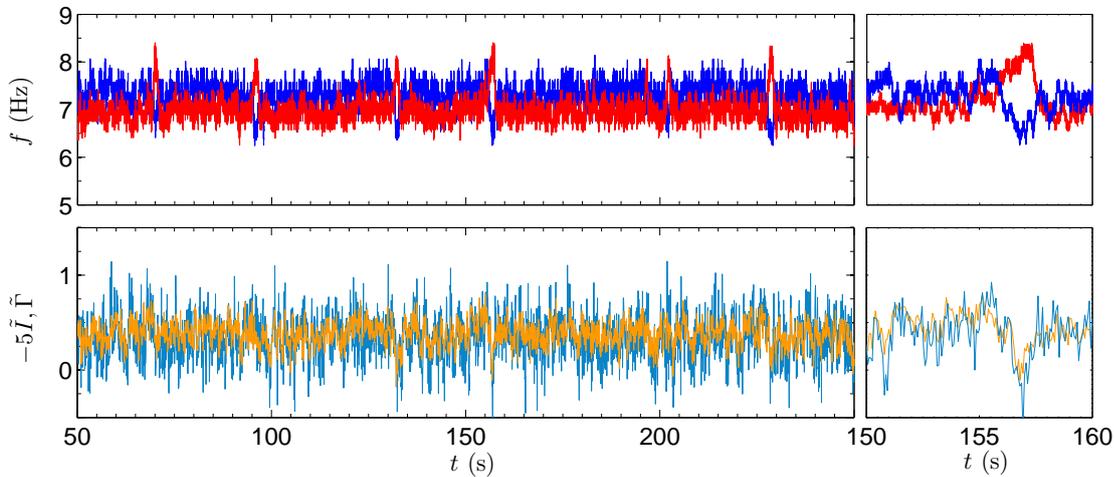


FIGURE 6.10 – Tracé post-synchronisé de la fréquence de rotation des turbines et des grandeurs de PIV, pour une expérience effectuée à $\gamma = 0.027$. En haut, fréquence de rotation de la turbine du bas et du haut (mêmes conventions que précédemment). En bas, circulation réduite $\tilde{\Gamma}$ (trait plein turquoise) et multiple du moment cinétique réduit (trait plein orange). Les grandeurs globales de PIV ont été normalisées par la fréquence de rotation moyenne des turbines de l'expérience, et le coefficient -5 a été choisi pour bien superposer les variations de \tilde{I} et $\tilde{\Gamma}$.

Il est enfin possible de regarder l'évolution du champ de vitesses instantané en fonction du temps. Pour cela, nous avons créé sous MATLAB un algorithme permettant d'afficher sous forme de vidéo l'évolution de \mathbf{v} à l'intérieur de la boîte, traçant simultanément la fréquence de rotation des turbines, ainsi que la circulation $\tilde{\Gamma}$. Il est également possible de faire fonctionner le programme pour effectuer des moyennes glissantes sur plusieurs échantillons afin d'avoir une meilleure convergence du champ des vitesses par rapport au champ \mathbf{v} instantané très turbulent (et donc très bruité). Pour toutes les tailles de moyennes glissantes examinées, soit 2,5,10,15,20 et 30 échantillons, il n'a pas été possible de voir de changement sur le champ de vitesses lors des excursions vers (\tilde{i}). Ces sauts sont donc trop discrets pour être détectés à une telle fréquence d'acquisition de la PIV.

6.1.3.5 Un troisième état possible

Continuons d'augmenter la valeur de γ . Nous atteignons des nouvelles valeurs seuils, $\gamma \lesssim -0.056$ et $\gamma \gtrsim 0.026$, pour lesquelles la dynamique du système est encore modifiée.

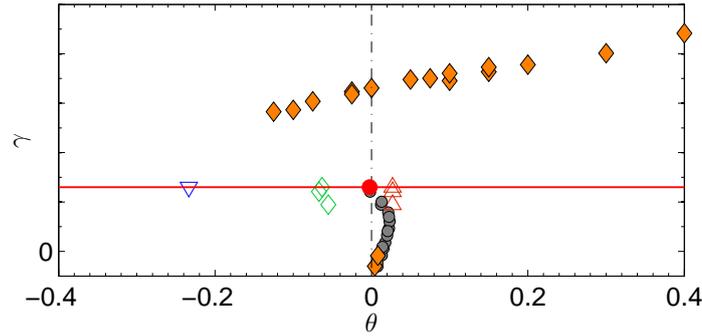


FIGURE 6.11 – Situation à $\gamma = 0.026$. Un troisième état, (\tilde{b}_1) marqué par (∇) , apparaît dans la pdf de θ filtré.

Les excursions vers (\tilde{i}) deviennent de plus en plus nombreuses, jusqu'à « paver » l'intégralité de la série temporelle de la fréquence de rotation des vitesses (voir la figure 6.15 à ce sujet). La durée de tels événements étant fixe, nous pouvons pressentir que notre système se comportera de manière presque périodique, avec un pic à la fréquence inverse de la durée typique entre deux événements. Nous pouvons alors étudier la densité spectrale de puissance de $f(t)$, définie comme :

$$\hat{f} = \mathcal{TF}(f) \cdot (\mathcal{TF}(f))^* \quad (6.6)$$

Cette densité spectrale \hat{f} fait bien apparaître un pic à basse fréquence, aux alentours de $f_{\text{nat}} = f/50$, qui n'est pas observé pour les expériences à plus faible asymétrie (voir figure 6.12). Le temps caractéristique f_{nat}^{-1} de ce pic correspond grossièrement au double de la durée d'un événement anti-corrélé. Deux autres pics sont observables, et correspondent au fondamental de la fréquence de rotation moyenne des turbines, f et sa première harmonique $2f$. Par mesure de précaution, nous avons vérifié que les spectres obtenus ne dépendaient pas de la séquence observée au sein d'une même expérience. Lorsque nous augmentons la valeur de γ , les événements se succèdent de manière de plus en plus rapprochée. Il est donc naturel de voir le pic correspondant du spectre se décaler vers les plus hautes fréquences, jusqu'à atteindre 0.16 Hz pour $\gamma \approx 0.028$ et $\gamma \approx -0.064$. Pour ces valeurs de γ , s'est construite une zone de pente f^{-2} , large d'une décade et demie, démarrant à f_{nat} , et s'arrêtant aux alentours de f_0 . L'émergence d'une telle zone est peu claire : l'exposant -2 pourrait être rapproché du même exposant -2 observé dans les signaux de LDV de l'équipe de J. Burguete [153]. Cependant, cet exposant est associé dans un tel cas à une dynamique très lente, et à des événements rares (qui feront l'objet de la section 6.3.3), alors que nos excursions deviennent particulièrement fréquentes.

En augmentant $|\gamma|$ ($\gamma \leq -0.073$ et $\gamma \geq 0.035$), nous observons l'apparition d'un nouveau pic, correspondant au premier harmonique de la fréquence naturelle f_{nat} . Pour la turbine la plus forcée, ce pic est généralement caché dans la partie du spectre en f^{-2} qui se construit aux fréquences $f \geq f_{\text{nat}}$. Ce pic est plus visible pour la turbine la moins forcée : sa détection est facilitée lorsqu'on constate que la zone associée en f^{-2} a effectivement été déplacée vers les $f > 2f_{\text{nat}}$. Cela est visible sur la figure 6.13, où, pour l'exemple, un pic assez prononcé est montré.

Que s'est-il passé? Nous pouvons à nouveau examiner les différentes séries temporelles à notre disposition lorsque nous augmentons la valeur de l'asymétrie des couples γ . Nous remarquons alors que les sauts vers (\tilde{i}) , initialement exclusivement anti-corrélés, commencent à se corrélérer partiellement. Les sauts vers (\tilde{i}) ont changé de structure : avant d'atteindre son maximum au delà de 8 Hz, la turbine la moins forcée ralentit dorénavant *en même temps* que la turbine la plus forcée. Un tel changement de forme est bien visible sur la figure 6.14, où trois sauts partiellement corrélés sont visibles à droite. C'est cette corrélation partielle initiale de

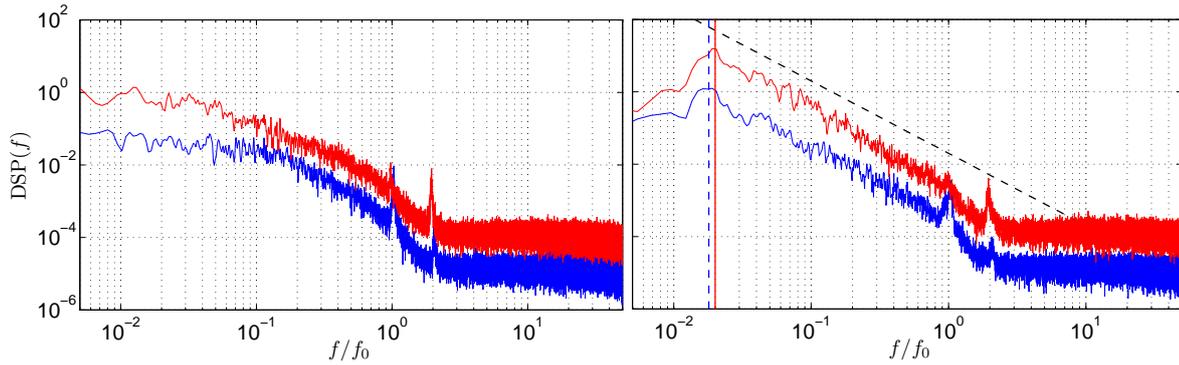


FIGURE 6.12 – Densités spectrales de puissance de la fréquence de rotation des turbines du bas (trait bleu) et haut (trait plein rouge). Les fréquences ont été normalisées par la fréquence moyenne de rotation des turbines. À gauche, expérience à $\gamma = 0.012$: au delà du pic à la fréquence de rotation moyenne des turbines (et sa première harmonique), le spectre ne présente pas de pente particulière. À droite, expérience à $\gamma = 0.026$: les événements sont suffisamment nombreux pour devenir quasi-périodiques : un pic apparaît sur le spectre de la turbine du bas (trait vertical pointillé bleu) et du haut (trait vertical rouge), pour une fréquence $f = f_0/50$. Ce pic délimite le début d'une zone de pente caractéristique -2 , qui s'arrête à la fréquence de rotation des turbines. Le tireté est un guide pour l'œil, et possède une pente -2 . Les spectres ont été décalés (d'une décade) pour plus de lisibilité.

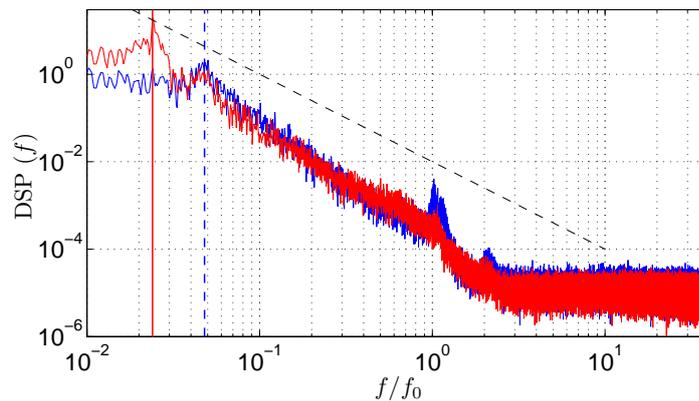


FIGURE 6.13 – Densité spectrale de puissance de la fréquence de rotation des turbines basse (trait bleu plein) et haute (trait rouge plein), pour une expérience effectuée à $\gamma = -7.49 \cdot 10^{-2}$. Un pic à basse fréquence, $f_{nat} = 0.024f_0$ correspondant à la période des événements anticorrélés est observé sur la turbine du haut (traits pleins verticaux), ainsi qu'un pic plus faible correspondant à une première harmonique de la fréquence naturelle, $2f_{nat} = 0.048f_0$. Le spectre de la turbine du bas présente quant à lui un pic plus important sur la première harmonique.

l'événement qui apparaît sous la forme d'un pic secondaire à $2f_{nat}$ dans les densités spectrales de puissance. En outre, le maximum de vitesse de la turbine la moins forcée ne correspond plus au minimum de vitesse de la turbine la plus forcée : le premier est désormais en avance d'1 s sur le second.

Ces événements peuvent alors dégénérer : parfois, la turbine la plus forcée ralentit jusque 2.75 Hz, jointe par la turbine la moins forcée, qui ralentit jusque 5 Hz. Après avoir atteint son minimum, la vitesse de la turbine la moins forcée accélère de nouveau, suivie de l'autre turbine, pour atteindre un régime proche de (\tilde{i}) où la première atteint un maximum vers 8.5 Hz tandis que la seconde continue d'accélérer, atteignant 6 Hz. Cet événement finit par revenir vers

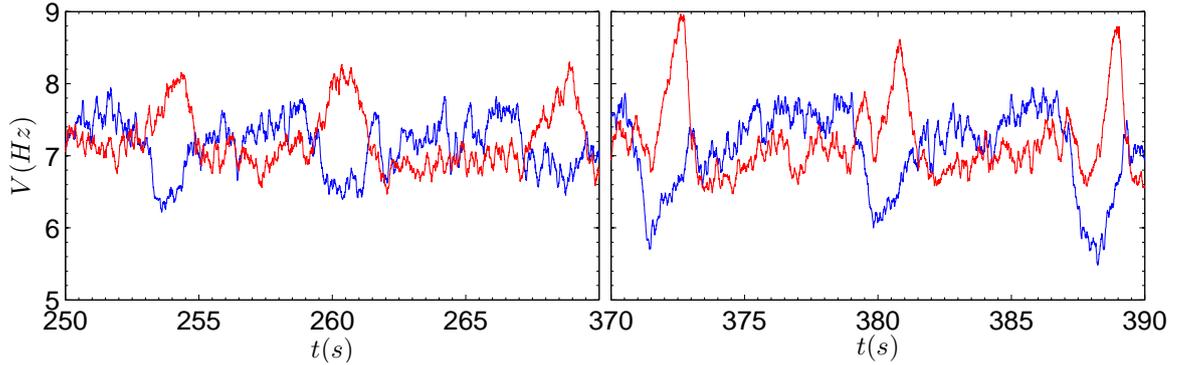


FIGURE 6.14 – Changement dans les événements (\tilde{i}_1) : aux plus faibles $\gamma = 0.02$ (à g.), ces événements sont parfaitement anticorrélés. Pour des $\gamma = 0.026$ plus élevés (à dr.), les deux turbines ralentissent en même temps avant de se décorrélérer, puis de revenir dans l'état (\tilde{s}). De plus, un décalage temporel est visible : le minimum de vitesse de f_1 est atteint une seconde avant le maximum de vitesse de f_2 .

l'état (\tilde{s}). Ces ralentissements sont similaires aux événements (\tilde{i}) partiellement corrélés, mais diffèrent par leur intensité, bien plus importante. Les valeurs des minima de vitesses atteints nous font penser aux états stationnaires bifurqués (b) (où les vitesses étaient en moyenne à 3.7 Hz dans la zone antinaturelle). Nous nommerons par conséquent ces états (\tilde{b}). Un exemple de tel événement, d'une durée totale d'environ 5 s pour notre expérience à $\gamma = 0.0283$, est présenté sur la figure 6.15. Cette figure montre, par ailleurs, un comportement du moment cinétique assez surprenant : lors des événements corrélés, et de manière assez flagrante sur les événements (\tilde{b}), le moment cinétique varie de manière très différente de $-\tilde{\Gamma}/5$, pour revenir, une fois ces événements terminés, grossièrement vers cette valeur. Ce comportement est très différent de celui observé sur la figure 6.10, où le moment cinétique \tilde{I} était tout le temps proportionnel à $-\tilde{\Gamma}/5$. Nous pouvons voir un tel écart comme une signature : celui-ci traduit en effet le fait que la couche de cisaillement sort de notre fenêtre de PIV, et est donc entraînée dans (ou derrière) une des deux turbines.

La distribution de probabilité de θ traduit bien ces changements : le pic de probabilité correspondant à (\tilde{i}) est d'un ordre de grandeur comparable à celui de (\tilde{s}). À partir de $\gamma = 0.026$ et $\gamma = -0.056$, les événements (\tilde{b}) deviennent visibles sur la densité de probabilité de θ : un troisième pic (\tilde{b}_1) (respectivement (\tilde{b}_2)), situé à des θ encore plus faibles (respectivement encore plus élevés) que (\tilde{i}_1) (respectivement (\tilde{i}_2)), fait son apparition. Ces effets sont suffisamment importants pour modifier le sens de variation de θ : pour des γ positifs, les pics (\tilde{b}_1) et (\tilde{i}_1), situés très à gauche (pour des θ bien plus faibles) du pic (\tilde{s}), prennent une importance suffisante pour diminuer significativement le θ moyen observé quand γ augmente, le θ moyen observé étant alors négatif. Il en va de même pour les γ négatifs où nous observons une augmentation inattendue du θ moyen observé lorsque γ diminue : celui-ci devient alors positif.

Les pics (\tilde{i}) et (\tilde{b}) ayant une intensité suffisante, nous pouvons tenter à nouveau d'effectuer des moyennes conditionnelles des champs de vitesses de nos écoulements. Contrairement aux résultats précédents (fig.6.9), nos champs moyens sont ici très différents, même lorsque la synchronisation est effectuée à la main (cf. fig.6.16) :

- La moyenne conditionnelle (\tilde{s}) donne un écoulement à deux cellules verticales, de type (s), mais très asymétrique : la couche de cisaillement est très décalée vers le haut. Cet écoulement ressemble beaucoup aux champs moyens conditionnels effectués dans le sens ($-$) en commande en vitesse : la couche de cisaillement, bien que décalée, reste globalement droite.
- La moyenne conditionnelle (\tilde{b}) nous donne un champ de vitesse toroïdal complexe, avec une partie centrale qui tourne dans le sens contraire de la partie extérieure (deux

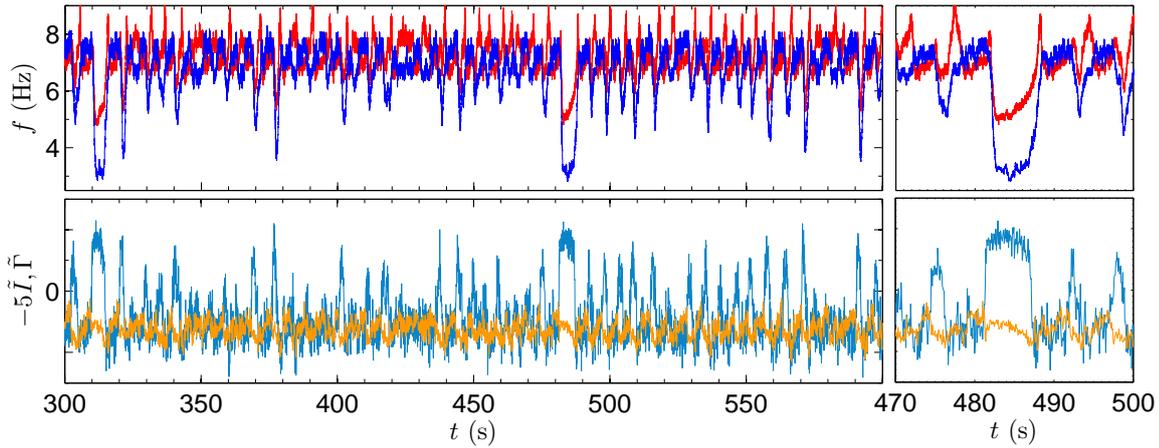


FIGURE 6.15 – En haut : Enregistrement des vitesses des turbines haut f_1 (—) et f_2 (—) pour $\gamma = 0.0283$. Il est possible de voir plusieurs épisodes de fort ralentissement (cf. à dr.) corrélé des deux turbines, nommés événements (\tilde{b}_1), au milieu des événements (\tilde{i}_1) dont le début est désormais partiellement corrélé. Nous observons de plus une quasi-périodicité des événements (\tilde{i}_1). En bas : tracé post-synchronisé de l'opposé du quintuple du moment cinétique adimensionné $-5\tilde{I}$ (trait plein orange) et de la circulation Γ (trait plein bleu). Contrairement à la situation de la figure 6.10, ces deux grandeurs ne varient plus nécessairement de concert, alternant plutôt entre zones où les deux grandeurs « se suivent » et zones où elles s'écartent significativement l'une de l'autre.

cellules en r), notamment en haut où au moins la moitié du fluide tourne dans le sens inverse de la turbine. En bas, nous observons une trace un peu moins nette de ces deux cellules. L'écoulement poloïdal est quant à lui bien plus important que pour (\tilde{s}) et (\tilde{i}_1) (ce qui a nécessité de changer l'échelle des flèches), et ne présente qu'une seule cellule de pompage. Nous pouvons voir cet écoulement comme une forme « dégénérée » des états bifurqués anti-naturels (b_1), où la turbine qui ne pompe pas le fluide arrive tout de même à le faire tourner partiellement dans son sens de rotation.

- La moyenne conditionnelle (\tilde{i}) donne quant à elle un écoulement peu familier : l'écoulement poloïdal montre une seule cellule de recirculation, la turbine du bas réussissant à pomper le fluide de toute la cellule. Cependant, le champ de vitesse toroïdal semble conserver un « vestige » des cellules toroïdales de (s) : la cellule du haut est déplacée vers le centre (aux faibles r) tandis que celle du bas semble s'être partiellement excentrée (vers les r les plus élevés). La couche de cisaillement basée sur la vitesse toroïdale est alors oblique et trace une forme en V assez caractéristique. Cette forme en V est à rapprocher de la « couche de cisaillement verticale », observée dans l'état (\tilde{b}_1), qui sépare le centre de l'écoulement de l'extérieur (en rotation dans le sens opposé du centre). Assez étrangement, cet écoulement est peu ressemblant aux prémices de l'état (\tilde{i}) que nous avons obtenu pour une expérience à plus faible γ : ici, c'est la « petite » cellule de recirculation qui est poussée vers le centre de l'écoulement, contrairement au résultat de la figure 6.9. Nous pouvons par ailleurs nous demander si l'écoulement (\tilde{i}) obtenu n'est pas une simple combinaison linéaire des états (\tilde{s}) et (\tilde{b}). Nous avons alors tenté de créer un écoulement synthétique ressemblant à l'état (\tilde{i}), à partir de (\tilde{b}) et (\tilde{s}), et qui minimise l'écart entre les deux champs de vitesse. Les champs synthétiques peuvent alors ressembler à l'état (\tilde{i}) mais un écart minimal entre ces deux champs semble irréductible et non-négligeable, comme il est possible de le constater sur la figure 6.17.

Ces différents états sont maintenant bien visibles sur les films utilisant les moyennes glis-

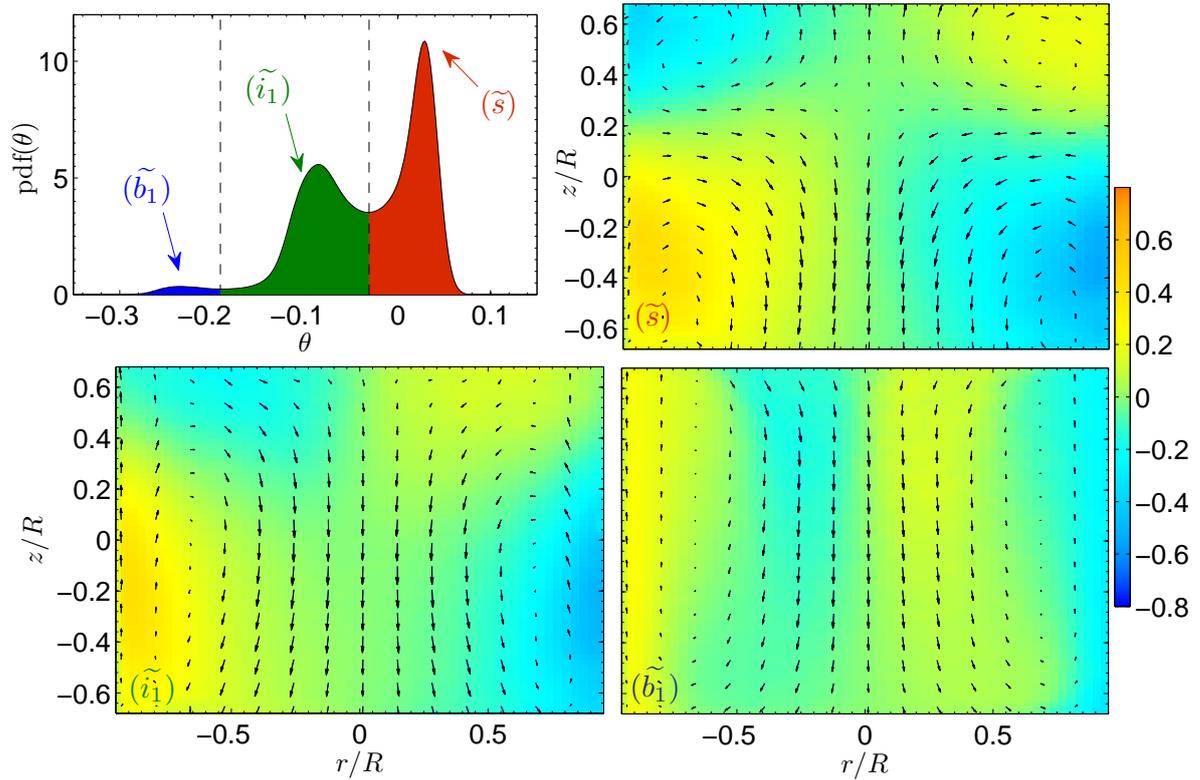


FIGURE 6.16 – Densité de probabilité de θ filtré (en h. à g.), et moyennes conditionnelles issues de la zone (\tilde{s}) (en h à dr.), (\tilde{i}_1) (en b à g.) et (\tilde{b}_1) pour une expérience effectuée à $\gamma = 0.0283$. La normalisation est identique à tous les tracés exceptée celle du champ poloïdal des vitesses issues de (\tilde{b}_1) dont les flèches sont trois fois plus petites pour des raisons de lisibilité. Les moyennes conditionnelles sont très différentes, avec un écoulement à deux cellules verticales asymétrique pour (\tilde{s}) , un écoulement à deux cellules horizontales pour (\tilde{b}_1) et un état mal défini, qui semble mélangé, pour (\tilde{i}_1) .

santes de champs de vitesse de la PIV : suivant la quantité d'échantillons sur laquelle la moyenne est effectuée, nous observons les états moyens avec plus ou moins de bruit. Pour la plus grande taille de moyenne glissante (30 échantillons), il semblerait que la dynamique des transitions soit perdue : par conséquent, nous nous limiterons à 15 échantillons de PIV (soit une moyenne glissante sur 1 s) afin de ne pas trop lisser la dynamique de notre système, et ne pas rater le passage d'états à faible durée de vie.

6.1.3.6 Nouveaux états « presque stationnaires »

Malgré des écoulements moyens associés complexes, les événements (\tilde{i}) et (\tilde{b}) deviennent de plus en plus nombreux et de plus en plus longs lorsque nous nous écartons encore un peu plus de la branche (s) . Jusqu'à $\gamma \leq 0.033$ et $\gamma \geq -0.076$, ceux-ci n'excédaient guère 4 s. Au delà de ces valeurs, des régimes quasi-stationnaires s'établissent pour (\tilde{b}) , excédant 5 s à vitesse faible, soit environ 20 tours des turbines dans les régimes les plus lents. De même, des régimes presque stationnaires (\tilde{i}) s'établissent, ces derniers survivant parfois plus de dix secondes (soit 60 tours de turbine). Ces événements quasi-stationnaires ont été observés sur la même plage $\gamma \leq -0.076$ et $\gamma \geq 0.036$. Nous pouvons voir ces comportements sur la figure 6.18, pour deux expériences proches de $\gamma \approx -0.076$. Les épisodes (\tilde{s}) n'excèdent pour leur part plus jamais 5 s et sont désormais *instationnaires*. Sur la distribution de probabilité de θ , nous voyons nettement que le pic lié à (\tilde{s}) tend à disparaître, tandis que les pics (\tilde{i}) et (\tilde{b}) font presque jeu

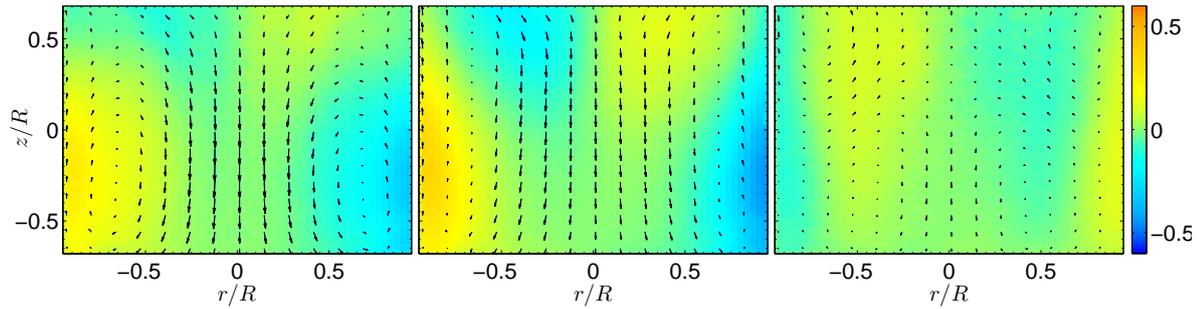


FIGURE 6.17 – Comparaison d'un état (\tilde{i}) synthétique (à gauche), réalisé à partir d'une combinaison linéaire des états (\tilde{s}) et de (\tilde{b}_1) observés $(0.42\mathbf{v}_s + 0.35\mathbf{v}_{b_1})$ et de l'état (\tilde{i}_1) réellement observé (au centre), pour une expérience effectuée à $\gamma = 0.0283$. L'écart entre le champ synthétique et le champ réel, tracé à droite, laisse transparaître des différences « irréductibles » entre les deux écoulements.

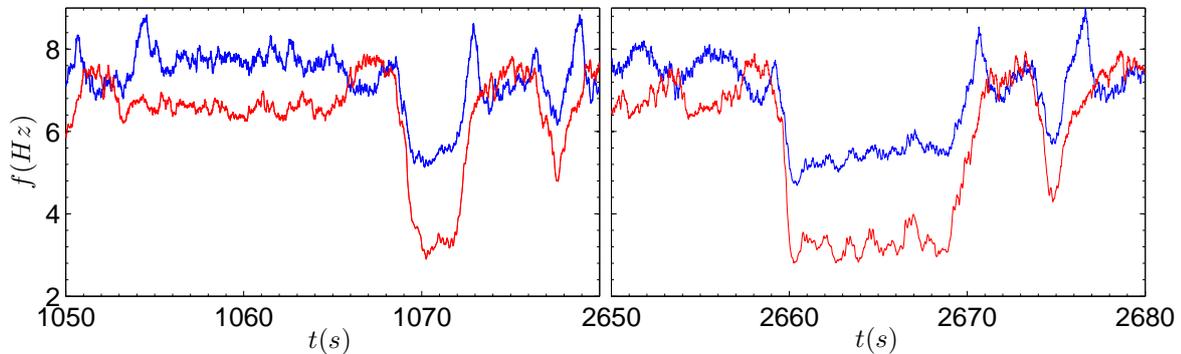


FIGURE 6.18 – Extraits de signaux temporels à $\gamma = -0.076$ (à g.) et à $\gamma = -0.079$ (à dr.). À gauche, un intervalle de 9 s où (\tilde{i}_2) semble stationnaire, et à droite un intervalle de 9 s où (\tilde{b}_2) semble également stationnaire. Les événements symétriques où $f_2 \geq f_1$ semblent instationnaires et rapidement revenir vers (\tilde{i}_2) ou (\tilde{b}_2) .

égal. La « stabilité » des états stationnaires a donc été modifiée.

6.1.3.7 Expériences proches de (b) , événements rares

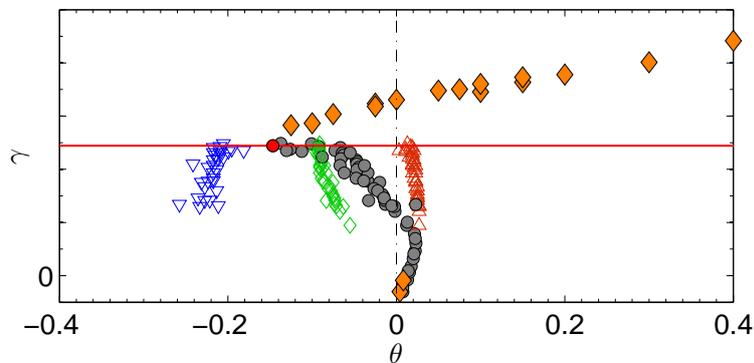


FIGURE 6.19 – Expériences désormais proches du bord antinaturel de la branche (b_1) . Le système reste désormais longtemps dans l'état (\tilde{b}_1) avant de sauter dans les états plus rapides.

Nous nous sommes beaucoup éloignés de la branche (s) et dorénavant, nos expériences

montrent une dynamique très complexe : notre système possède plusieurs états presque stationnaires, et subit de nombreuses transitions. Lorsque nous nous rapprochons des branches (b) (comme par exemple, sur la figure 6.19), nous observons que nous favorisons l'état quasi-stationnaire (\tilde{b}) : le temps pendant lequel le système reste dans cet état tend à diverger, avec des épisodes lents pouvant excéder 3600 s. Ces temps d'« attente » avant une transition vers (\tilde{s}) ou (\tilde{i}) ne correspondent à aucun temps caractéristique de notre système : en effet, le temps caractéristique maximal que nous pouvons construire pour le fluide dans l'état (\tilde{b}) est le temps de retournement d'un tourbillon lié au pompage, pour une vitesse typique v_* dans l'état (\tilde{b}) égale à $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (vérifié expérimentalement) :

$$\tau_r = \oint_{1\text{tour}} \frac{ds}{d\mathbf{v}(s)} \equiv \oint_{1\text{tour}} \frac{ds}{|\mathbf{v}(s)|} \mathbf{v}(s) = \oint_{1\text{tour}} \frac{ds}{v(s)} \approx \frac{2R+4h}{v_*} \approx 0.5 \text{ s} \quad (6.7)$$

Une telle durée d'attente pose divers problèmes expérimentaux : en effet, la régulation en température n'est pas parfaite, et des dérives significatives interviennent au delà d'une demi-heure. Théoriquement, ces changements importent peu car la viscosité de l'eau ne varie pas beaucoup dans la plage de température de ces expériences, la chaîne d'acquisition et les éléments mécaniques n'étant pas non plus sensibles en température. Pourtant, nous avons observé dans un grand nombre de longues expériences des dérives des vitesses des turbines quand la température n'était pas bien régulée. De plus, le détendeur qui nous permet d'ajuster la pression d'air comprimé a montré ses limites en termes de fiabilité, des différences de pression entre le début et la fin de nos expériences s'élevant parfois jusqu'à 0.1 bar. Nous avons vu que ce paramètre avait une influence non négligeable sur les frottements statiques et pouvait induire une erreur sur γ assez importante, même pour un $\Delta P = 0.1$ bar.

Ces problèmes sont d'autant plus sensibles que ces dérives interviennent là où le système possède une sensibilité très élevée : en effet, c'est dans cette partie de l'axe des γ que les proportions de (\tilde{b}) et (\tilde{i}) s'échangent, la fraction de (\tilde{b}) , relativement éloignée en θ de (\tilde{i}) , devient très importante, tandis que (\tilde{i}) se vide progressivement. Le θ moyen observé varie alors de manière très importante, ce qui crée malheureusement une forte dispersion dans nos résultats. Plusieurs phénomènes ont néanmoins été observés. Tout d'abord, la tendance décroissante de θ moyen quand γ augmente (ou de la même manière, la tendance croissante de θ moyen quand γ diminue observée de l'autre côté de la branche (s)) finit par s'inverser : en effet, les transitions vers les états plus rapides, (\tilde{i}) sont de plus en plus rares. La densité de probabilité de θ se trouve alors de plus en plus concentrée sur le pic (\tilde{b}) . Malgré sa position aux $|\theta|$ élevés (qui a permis justement une variation non triviale de θ en fonction de γ), le maximum de (\tilde{b}) semble se recentrer vers les petits θ quand $|\gamma|$ augmente, ce qui implique que le θ moyen augmente à nouveau quand γ augmente. Par conséquent, le θ moyen atteint deux extrema locaux, un minimum pour $\gamma = 0.057 \pm 0.005$ et un maximum pour $\gamma = -0.095 \pm 0.005$.

Nous voyons ensuite qu'au delà de ces extrema locaux, les θ moyens intermittents viennent rapidement rejoindre les branches bifurquées stationnaires des expériences de commande en vitesse (b) . Cela vient confirmer le choix de notation effectué pour nos états intermittents lents, (\tilde{b}) , qui deviennent en pratique stationnaires (cf. section 6.1.2). Il est difficile de voir si les courbes de commande en vitesse et de commande en couple se rejoignent à l'extremum de θ moyen à cause notamment des dérives susmentionnées. Nous avons regroupé dans le tableau 6.1 des observations (ou non) de transitions rares vers les états rapides pour quelques valeurs de γ proches des branches (b) . Cela nous laisse penser que la disparition des événements rares arrive environ vers $\gamma = -0.099 \pm 0.003$ et $\gamma = 0.059 \pm 0.003$. Ces valeurs sont compatibles avec l'extremum de θ , mais ne permettent pas vraiment de dire si, proche des branches bifurquées stationnaires, et pour $\partial\theta/\partial\gamma > 0$, il est toujours possible d'observer des événements rares. Un exemple de telle expérience, effectuée pour $\gamma = -0.0984$, est visible sur la figure 6.20. Contrairement à la situation « proche de (s) », où les événements (\tilde{i}) étaient fugaces, la situation « proche de (b) » montre des événements qui peuvent excéder 10 s, de l'ordre de

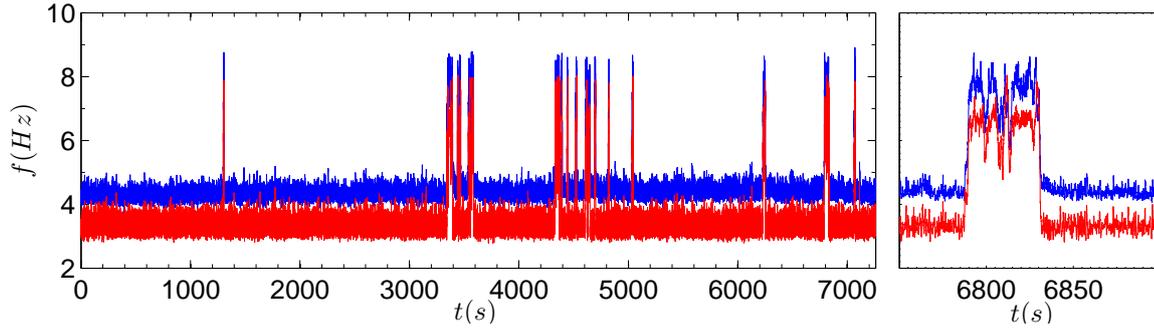


FIGURE 6.20 – Signaux temporels de vitesse pour une expérience à « événements rares » à $\gamma = -0.984$: le système passe la plupart du temps dans l'état (\tilde{b}_2) mais peut effectuer des transitions vers les états plus rapides (\tilde{i}_2) ou (\tilde{s}) après un temps d'« attente » qui peut être très long ($> 3600s$), bien au-delà de tous les autres temps caractéristiques du système.

(b_1)												
100 γ	5,21	5,33	5,37	5,39	5,51	5,52	5,67	5,67	5,7	5,83	5,84	5,90
int.	oui	oui	oui	non	non	oui	oui	non	oui	non	non	oui
100 γ	5,93	5,93	6,01	6,02	6,10	6,13	6,24	6,35	6,51	6,59	6,62	6,79
int.	non	non	oui	oui	oui	non	oui	non	non	non	non	non

(b_2)										
-100 γ	9.12	9.19	9.20	9.28	9.32	9.33	9.36	9.36	9.43	9.45
int.	oui	oui	oui	non	oui	oui	oui	non	oui	oui
-100 γ	9.51	9.61	9.66	9.67	9.67	9.70	9.73	9.83	9.84	9.96
int.	oui	non	oui	oui	non	non	oui	oui	oui	non
-100 γ	9.99	10.02	10.03	10.06	10.16	10.17	10.25	10.29		
int.	non	non	non	oui	oui	non	non	non		

TABLE 6.1 – Tableau des observations (ou non) d'événements rapides (\tilde{i}) et (\tilde{s}) pour des expériences proches des branches (b_1), qui commence à $\gamma = 0.0565$ et de (b_2), qui commence à $\gamma = -0.0905$. La présence d'événements rapides est signalée par un **oui** quand ils sont fréquents, ou par un **oui** quand ils sont rares. Les **non** correspondent à des expériences où seul l'état (b) est observé. La valeur des seuils en γ est peu claire à cause du bruit de mesure et des dérives liées aux expériences longues.

60 tours de nos turbines, et bien visibles sur les distributions de θ . Ces événements rapides mélangent généralement du (\tilde{i}) et du (\tilde{s}) (le passage vers (\tilde{s}) closant généralement l'événement rapide).

6.1.4 Conclusion

Nous avons reconnecté nos branches stationnaires avec les branches intermittentes. Le cycle complet possède une forme caractéristique en double « s », le premier pour les $\gamma \leq 0$, et le second pour les $\gamma \geq 0$ (cf. fig. 6.21), formant une figure globalement \mathcal{R}_π symétrique. Nous pouvons remarquer que les états intermittents (\tilde{b}) et (\tilde{s}) se prolongent naturellement, et

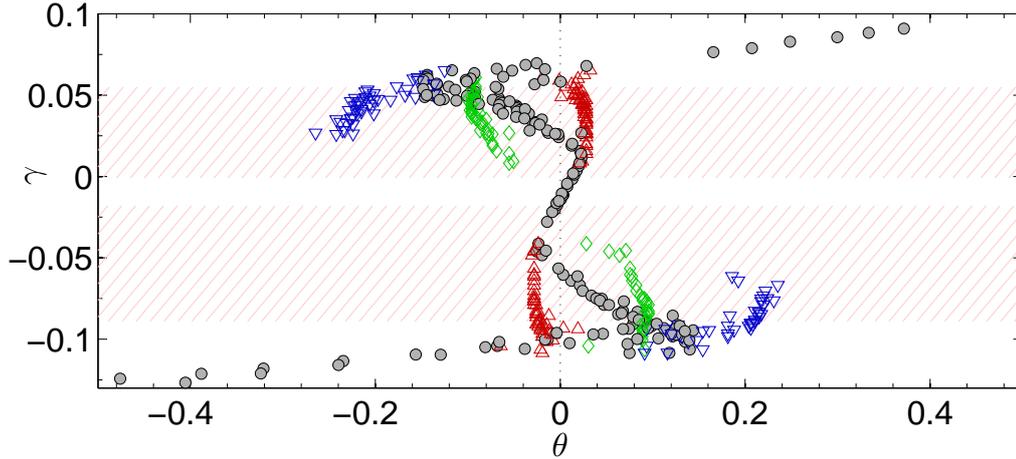


FIGURE 6.21 – États moyens observés (calibrés) en commande en couple (●). Le cycle d’hystérésis bien disparu, laissant place à divers états intermittents, bifurqués et lents — (\tilde{b}) — (▽), intermédiaires rapides — (\tilde{i}) — (◇), et symétriques rapides (\tilde{s}) (△). Les branches instationnaires (\tilde{s}) et (\tilde{b}) prolongent naturellement leurs contreparties stationnaires, (s) et (b), tandis que les branches intermittentes surgissent loin de l’état moyen lorsqu’on s’écarte de (s) pour terminer à proximité des branches instationnaires bifurquées. Nous avons rappelé sur la figure la zone interdite du cycle d’hystérésis de la commande en couple (partie hachurée).

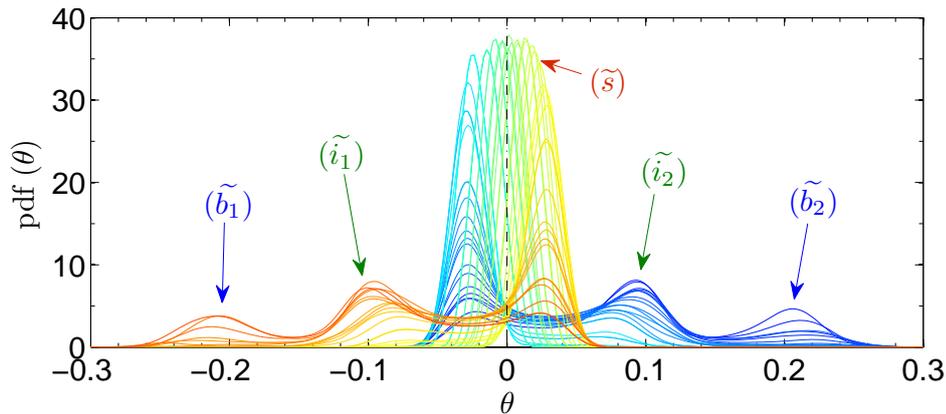


FIGURE 6.22 – Évolution des densités de probabilité de θ filtré en fonction de $\gamma \in [-0.090; 0.052]$ (lignes bleues à rouges), soit depuis le bord de la branche (b_2) vers le bord de la branche (b_1). Des expériences ont été retirées afin d’améliorer la lisibilité de l’ensemble. Nous pouvons voir l’évolution des divers maxima correspondant à (\tilde{b}), (\tilde{i}) et (\tilde{s}). Nous avons omis les branches où (b) est stationnaire pour des raisons de lisibilité.

de manière continue, dans leurs variantes stationnaires (s) et (b). Ces derniers perdent donc leur stationnarité aux différents seuils de transition. Cette perte s’accompagne de l’apparition d’un, puis de deux nouveaux états instationnaires dont l’importance croît à mesure que nous nous éloignons de la branche initiale. Les branches (\tilde{i}) ne sont jamais stationnaires, et partent curieusement de « nulle part » du côté (s), pour finalement rejoindre les branches (b) au moment où ces les états (b) deviennent presque stationnaires. Il est possible de superposer les différentes densités de probabilité obtenues pour un grand nombre de valeurs de γ , pour mieux voir encore la continuité de la transition de (b_2) à (b_1) : nous remarquons sur la figure 6.22 que les maxima s’aplatissent continûment quand ils disparaissent. Le cycle d’hystérésis, présent en commande en vitesse, a totalement disparu.

6.2 Étude de quelques grandeurs globales et leur évolution avec γ

Après avoir décrit au cas par cas, l'évolution de la dynamique de notre système lorsque l'asymétrie imposée variait, nous allons tenter de donner quelques éléments explicatifs permettant de mieux comprendre comment fonctionne le système en commande en couple. Nous allons nous appuyer sur diverses grandeurs quantitatives qui nous permettent de décrire l'intermittence que nous avons observée dans la section précédente.

6.2.1 Fraction de temps total passé dans les états

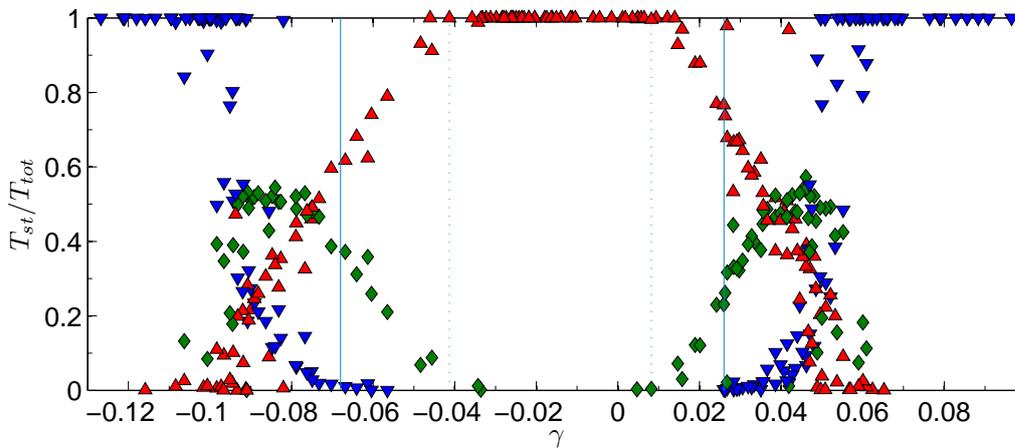


FIGURE 6.23 – Fraction du temps total passé dans chacun des états intermittents (ou stationnaires) « plutôt (\tilde{s}) » (\blacktriangle), « plutôt (\tilde{i}) » (\blacklozenge) et « plutôt (\tilde{b}) » (\blacktriangledown). Les lignes bleues pointillées et pleines correspondent respectivement à l'apparition d'un maximum (\tilde{i}) et (\tilde{b}) sur la densité de probabilité de θ . Quand $|\gamma|$ augmente, la fraction de (\tilde{s}) décroît de manière linéaire au profit des états (\tilde{i}) qui atteignent un pic asymétrique, et des états (\tilde{b}) qui se remplissent ensuite très rapidement, de manière exponentielle, jusqu'à saturation.

La première idée qui nous vient à l'esprit pour décrire le système lorsqu'il transite entre nos différents états consiste à tracer tout simplement la fraction de temps passé dans chaque état (intermittent ou non). Nous avons par conséquent mesuré la durée totale pendant laquelle le système présente des événements (\tilde{s}), (\tilde{i}) et (\tilde{b}), qui est visible sur la figure 6.23. Cette courbe retranscrit bien ce que nous avons observé dans la partie précédente : en effet, les états intermittents (\tilde{i}) apparaissent bien en de petites proportions pour les γ de la section 6.1.3.2 et les états (\tilde{b}) pour les γ de la section 6.1.3.5. La forme des courbes est par contre relativement complexe : celle de (\tilde{s}) semble être constituée de portions de droites, avec une décroissance linéaire de $T_{\tilde{s}}/T_{tot}$, ce qui n'est pas le cas de (\tilde{i}), qui possède un pic asymétrique « lisse » avec une longue queue aux faibles $|\gamma|$, et (\tilde{b}) qui croît de manière exponentielle jusqu'à saturer à $T_{\tilde{b}}/T_{tot} = 1$.

6.2.2 Vitesse moyenne des turbines

Nous pouvons de même regarder l'évolution de la fréquence moyenne de rotation des turbines, f , quand γ varie. Nous savons que cette fréquence moyenne dépend de la proportion d'états lents (qui ne font que traduire les corrélations du système), par conséquent, nous pou-

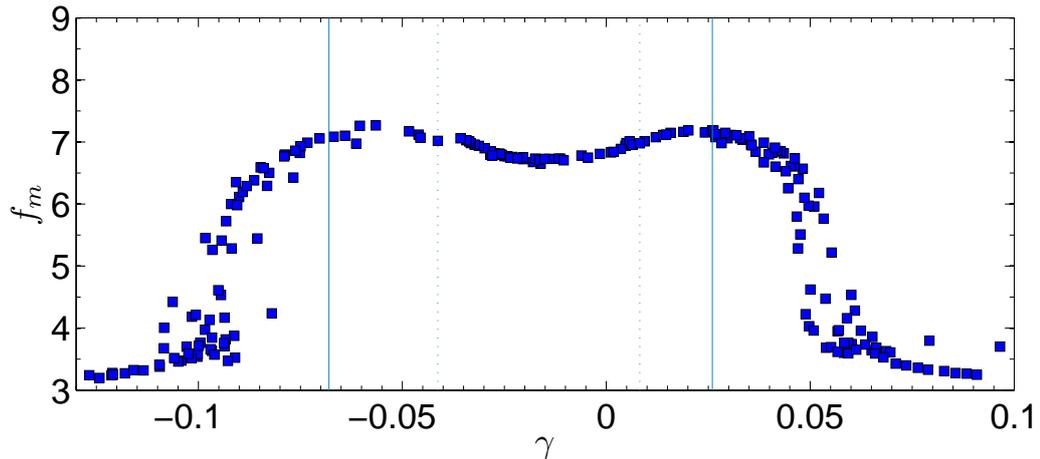


FIGURE 6.24 – Vitesse moyenne des turbines $f = 0.5(f_1 + f_2)$ observée dans les expériences de commande en couple, ainsi que les lignes indicatrices. Nous pouvons voir un décrochement important de f un peu après l'apparition d'un pic de probabilité correspondant à (\tilde{b}) : les états bifurqués viennent bien ralentir notre système.

vons supputer la forme de cette courbe : un fort ralentissement va être observé pour $\gamma \leq -0.068$ et $\gamma \geq 0.026$. Cette tendance est bien confirmée sur la figure 6.24 : un ralentissement d'un facteur 2 est observé entre les états symétriques et bifurqués, que nous avons déjà mentionné précédemment. De manière plus étonnante, la fréquence de rotation n'est pas maximale pour un écoulement parfaitement symétrique : ce sont les écoulements légèrement asymétriques qui permettent aux turbines de tourner le plus vite en moyenne.

De même, il est possible de regarder l'évolution des vitesses moyennes dans chacun des états intermittents : de la même manière que nous avons tracé les champs PIV moyens conditionnels \mathbf{v}_s , \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_b , il est possible de déterminer les vitesses moyennes issues de ces trois zones. Cela est d'ailleurs plus aisé à réaliser que pour la PIV car les signaux sur lesquels nous effectuons les moyennes conditionnelles sont ici les signaux analogiques : aucune synchronisation supplémentaire n'est requise. À l'issue de ce traitement, nous pouvons observer sur la figure 6.25 que les états (\tilde{s}) , (\tilde{i}) et (\tilde{b}) sont bien distincts (quand les trois existent simultanément) et sont relativement peu modifiés par les variations en γ . Cela nous indique qu'aucun état ne vient « déborder » dans un autre, ce qui aurait pour effet de polluer deux moyennes conditionnelles qui viendraient « s'attirer » dans notre diagramme. Cela nous rassure quant à la pertinence de la méthode que nous avons utilisée (l'exploitation de la distribution des θ) afin d'extraire ces états intermittents. Ce tracé nous permet d'ailleurs de préciser l'accélération moyenne observée pour les faibles asymétries : c'est bien la fréquence moyenne dans l'état (\tilde{s}) qui augmente, et non l'apparition de (\tilde{i}) qui vient augmenter en moyenne la fréquence de rotation des turbines.

6.2.3 Étude des corrélations des signaux des vitesses

Nous avons défini dans l'annexe A la notion de corrélation pour des variables aléatoires. Nous avons de plus remarqué qu'il pouvait exister une certaine corrélation négative entre nos deux signaux de vitesse, les sauts vers (\tilde{i}) se caractérisant principalement par une augmentation brutale de f_1 (ou f_2) et une diminution de f_2 (ou f_1). Nous aimerions savoir si, de la même manière, les fluctuations instantanées observées sur les signaux de vitesse f_1 et f_2 vont plutôt « dans le même sens » ou « dans des sens opposés ». Nous pouvons de même comparer de telles valeurs de corrélation des vitesses à la valeur de l'inter-corrélation des couples C_1 et C_2 , pour les valeurs de γ correspondant à un écoulement symétrique à $\theta = 0$ et un écoulement

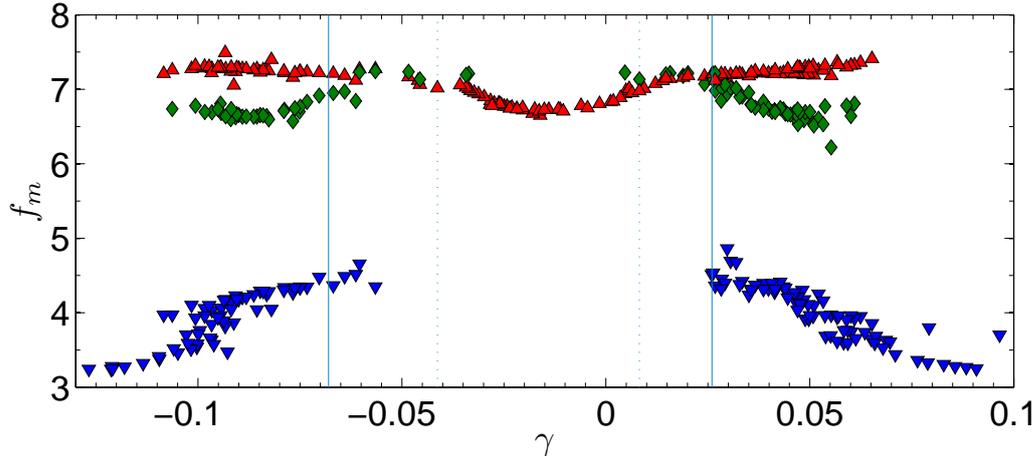


FIGURE 6.25 – Vitesses moyennes des turbines $f_m = 0.5(f_1 + f_2)$ observée dans les expériences de commande en couple, pour chacun des états des expériences intermittentes : « plutôt (\tilde{s}) » (\blacktriangle), « plutôt (\tilde{i}) » (\blacklozenge) et « plutôt (\tilde{b}) » (\blacktriangledown). Les états « symétriques déformés » semblent plus rapides que ceux parfaitement symétriques, ce qui semble cohérent avec les résultats de thèse de Florent Ravelet, où un minimum de couple était observé pour $\theta \neq 0$ dans le cas des pales droites. Les états bifurqués, eux, « ralentissent » quand $|\gamma|$ augmente, ce qui est cohérent avec l’augmentation de couple des branches (b_1) et (b_2) dans les expériences de commande en vitesse.

bifurqué à $\theta = 0$. Nous considérerons que pour tout γ , nos expériences sont suffisamment longues pour échantillonner de manière équitable l’ensemble des configurations accessibles. Par conséquent, nous identifierons la corrélation « statistique » avec son homologue effectuée sur les séries temporelles :

$$r_{XY} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sqrt{(\overline{X^2} - \overline{X}^2)(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)}} \quad (6.8)$$

Le coefficient de corrélation moyen pour chaque expérience est montré sur la figure 6.26. Nous pouvons alors voir que les vitesses sont corrélées positivement pour la branche (s), et même au-delà, jusqu’à l’apparition des états intermédiaires (\tilde{i}), où les événements deviennent très anticorrélés. Les corrélations atteignent un minimum, pour ensuite augmenter avec l’apparition des états intermittents lents (\tilde{b}). Les vitesses sont extrêmement corrélées pour des γ correspondant aux raccordements avec (b), mais la courbe des corrélations semble alors discontinue, avec plusieurs corrélations possibles pour une valeur de γ . Cette discontinuité est peut-être liée à du bruit expérimental entre plusieurs séries d’expériences successives. La valeur de la corrélation des fluctuations de vitesse pour un écoulement symétrique, pour $\gamma = -0.01$, vaut 0.42, soit une valeur légèrement supérieure au coefficient 0.25 de corrélation des couples en commande en vitesse pour un même écoulement. La valeur d’environ 0.5, obtenue à $\gamma = -0.10$ et $\gamma = 0.07$ pour un écoulement bifurqué à $\theta \approx 0$, correspond plutôt bien à sa contrepartie en commande en vitesse, qui vaut 0.54. Les maxima de corrélation, respectivement obtenus pour $\gamma = -0.10$ et $\gamma = 0.055$, correspondent bien au raccordement avec les branches stationnaires (b_1) et (b_2) (respectivement observés pour $\gamma = -0.099$ et $\gamma = 0.059$). Les minima de corrélation, observés pour $\gamma \approx -0.052$ et $\gamma = 0.020$, se situent entre les extrema de θ de la zone interdite ($\gamma = -0.048$ et $\gamma = 0.015$) et le passage par la valeur $\theta = 0$ avoisinante ($\gamma = -0.061$ et $\gamma = 0.025$).

Cependant, nous pouvons penser que ces corrélations globales ne sont pas forcément représentatives des corrélations « instantanées » observées à l’intérieur de chacun des états intermittents. Supposons qu’un système physique puisse transiter entre plusieurs états en nombre fini

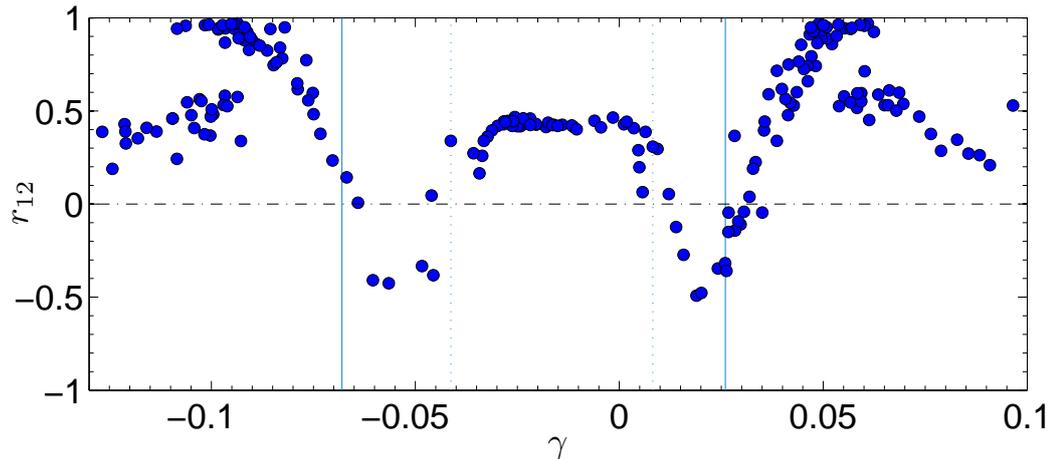


FIGURE 6.26 – Corrélation r_{12} calculée à partir des vitesses issues du couplemètre, f_1 et f_2 . Les lignes bleues pleines (pointillées) représentent l'apparition des états (\tilde{b}) ((\tilde{i})).

(par exemple, 2), chacun de ces états j étant caractérisé par un couple (f_1^j, f_2^j) d'observables « moyennes » stationnaires dans j . Supposons, toujours par exemple, que $(f_1^2, f_2^2) = (f_2^1, f_1^1)$. Nous pouvons cependant supposer que les fluctuations de f_1 et de f_2 sont *corrélées* dans l'état $j = 1$ et *anticorrélées* dans l'état $j = 2$. Par conséquent, la corrélation globale r_{12} nous donnera (à raison) une anticorrélation *en moyenne* de notre système, tandis que les corrélations locales r_{12}^c permettront d'examiner la corrélation des *fluctuations instantanées* dans chacun des états que nous avons définis. Ces informations peuvent donc être très différentes. Nous voyons ainsi dans la figure 6.27 que les fluctuations au sein de l'état (\tilde{i}) se corrént progressivement quand $|\gamma|$ augmente, tandis que celles de (\tilde{s}) (initialement corrélées, $r_{12}^c \approx 0.5$) et (\tilde{b}) (initialement très corrélées, $r_{12}^3 \approx 1$) se décorrèlent progressivement. La corrélation des vitesses dans (\tilde{b}) n'est pas sans rappeler les corrélations des couples observées dans les états bifurqués de la commande en vitesse : le fait de n'avoir qu'une seule cellule de recirculation poloïdale oblige les deux turbines à agir de concert.

6.2.4 Fréquences naturelles du système, oscillations

Nous avons indiqué dans la section 6.1.3.5 qu'un pic à basse fréquence, f_{nat} , apparaît dans la densité spectrale de puissance de la fréquence de rotation des turbines lorsque la quantité de sauts vers (\tilde{i}) est suffisante pour remplir les séries temporelles $f_1(t), f_2(t)$. Nous allons dans cette courte section tracer la fréquence caractéristique du pic principal du spectre de la fréquence de rotation des turbines. La figure 6.28 nous indique bien que c'est la turbine la moins forcée qui effectue ce doublement de fréquence. Cependant, la valeur de γ où s'effectue le doublement de période ne semble pas être compatible avec l'apparition de (\tilde{i}) , ou même de (\tilde{b}) . Au delà d'un certain seuil pour les valeurs de γ (+0.04 et -0.08), les passages vers les états (\tilde{b}) deviennent trop nombreux pour caractériser correctement les oscillations : les portions exploitables entre deux ralentissements importants deviennent alors trop courtes pour qu'un pic à f_{nat} puisse correctement émerger du bruit du spectre de la fréquence des turbines.

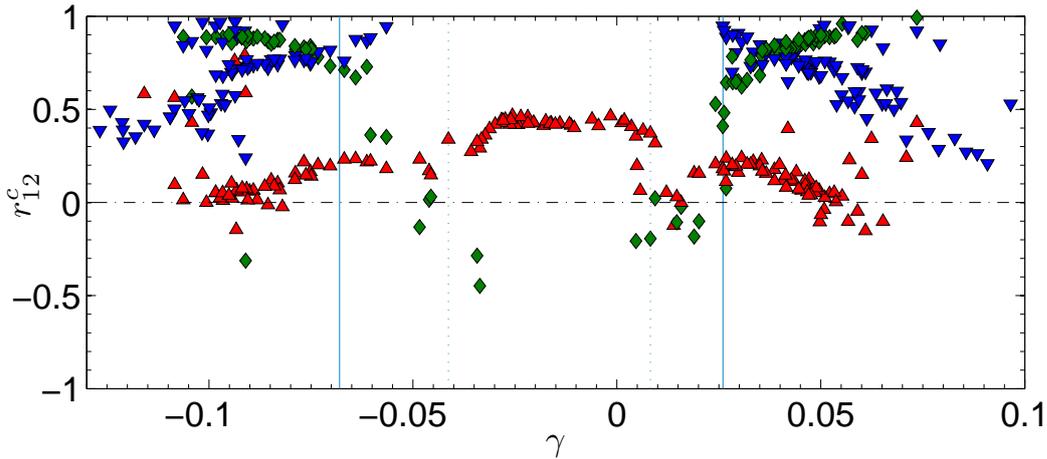


FIGURE 6.27 – Corrélations conditionnelles r_{12}^c calculées pour chacune des portions de temps où le système est « plutôt (\tilde{s}) » (\blacktriangle), « plutôt (\tilde{i}) » (\blacklozenge) et « plutôt (\tilde{b}) » (\blacktriangledown). Les lignes vertes en pointillés (resp. ligne pleine) représentent les γ seuils d'apparition des états (\tilde{i}) et (\tilde{b}). Les états intermittents symétriques, corrélés à γ proche de 0, se décorrèlent légèrement quand l'asymétrie augmente. Les états intermédiaires, initialement anticorrélés, semblent se corrélérer aux abords des branches bifurquées stationnaires. Les états bifurqués restent très corrélés.

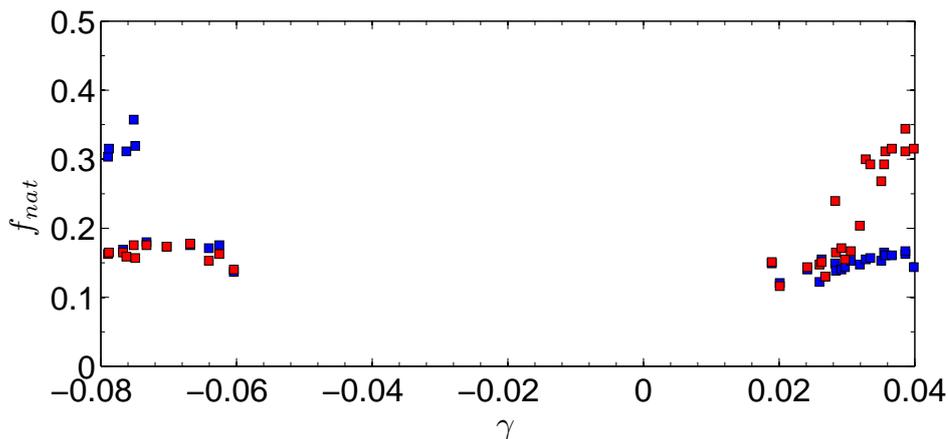


FIGURE 6.28 – Fréquences du pic principal de la densité spectrale $TF(f) \cdot TF^*(f)$ de la vitesse des turbines basse (\blacksquare) et haute (\blacksquare). La turbine la plus forcée présente un pic situé aux alentours de la fréquence naturelle, f_{nat} , tandis que celui de la turbine moins forcée passe de f_{nat} à $2f_{nat}$.

6.3 Étude de la dynamique entre états

6.3.1 Introduction

Dans toute la partie précédente, nous avons séparé les états intermittents en utilisant la version filtrée de θ , l'asymétrie réduite des vitesses des turbines. Ce choix, qui a principalement été effectué par Florent Ravelet, peut aussi être interprété comme une version à une dimension du critère utilisé par Louis Marié pour séparer les états dans ses tracés $f_1 = F(f_2)$. Ces diagrammes à deux dimensions ont permis de définir des chemins privilégiés empruntés par le système lors des transitions. Nous avons plus récemment pu définir de la même manière des chemins privilégiés lors des excursions, qu'elles soient corrélées, ou anticorrélées. Nous nous sommes donc demandé si l'étude temporelle des transitions permettait, comme pour le travail effectué par l'équipe VKS [73, 154], de retrouver des informations pertinentes sur

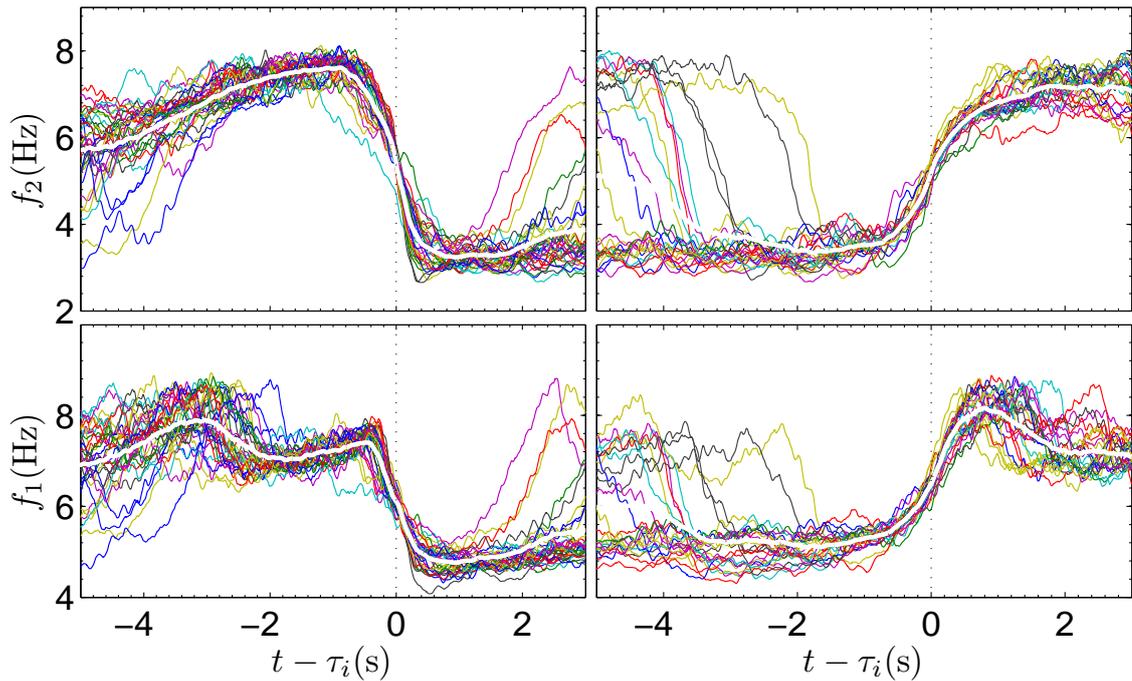


FIGURE 6.29 – Profil de transitions \downarrow (à g.) et \uparrow (à dr.) pour une expérience à $\gamma = -0.0891$, recalées en utilisant le point d’inflexion de la vitesse de la turbine f_2 (la plus lente) filtrée à 1Hz. La ligne blanche correspond à la moyenne de l’ensemble des 195 transitions observées, dont une quarantaine est visible sur le graphique. Toutes les transitions \downarrow semblent avoir une même tendance globale, où la vitesse f_1 passe par deux maxima locaux avant de diminuer brusquement, en même temps que la vitesse du haut f_2 . Les transitions \uparrow ne semblent pas montrer d’événement précurseur, cependant, elles sont suivies d’un maximum local de f_1 , correspondant à un passage dans l’état (\tilde{i}_2) .

la dynamique de notre système. En effet, l’article de M. Berhanu *et al.*, consacré à l’étude des régimes dynamiques de l’effet dynamo, souligne la présence de *transitions* entre états de la dynamo ainsi que d’*excursions*, qui sont des transitions avortées. Celles-ci rappellent respectivement les transitions vers notre état lent (\tilde{b}) ainsi que les sauts observés vers l’état (\tilde{i}). En superposant les profils individuels de transition, l’article de M. Berhanu *et al.* arrive à dégager un scénario général des renversements entre états quasi-stationnaires de la dynamo. Ce profil moyen a d’ailleurs aidé à construire un modèle d’évolution de champ magnétique comme un processus stochastique à petit nombre de degrés de liberté, qui reproduit avec succès les différents événements (excursions et renversements) observés dans l’expérience VKS.

6.3.2 Transitions vers (\tilde{b}) et depuis (\tilde{b})

Les *transitions* observées dans notre système sont de deux types : soit nous partons d’un état rapide — généralement (\tilde{s}) — vers un état lent (\tilde{b}), ce qui nous donne une transition \downarrow , soit nous faisons le contraire : partant d’une situation (\tilde{b}), nous tendons vers un état rapide (\tilde{i}) ou (\tilde{s}), ce qui nous donne logiquement une transition \uparrow .

Pour observer la meilleure courbe « moyenne » de transition possible, il est préférable d’avoir un maximum d’événements à détecter. Nous avons donc effectué des expériences où plus de 200 transitions sont dénombrées, ce qui a permis une bonne convergence de la trajectoire moyenne. Pour synchroniser les événements individuels, nous détectons d’abord les temps pour lesquels la fréquence moyenne $f = 0.5(f_1 + f_2)$ passe au-dessous ou au-dessus d’un seuil donné

(ici, 5.5 Hz en montée, et 4.5 Hz en descente), ce qui nous définit grossièrement l’instant de la transition. Ensuite, nous filtrons à 1 Hz le signal de la turbine la plus forcée (la turbine la plus lente en moyenne) au voisinage de cette transition en utilisant un filtre à décalage de phase nul, `filtfilt`, afin de trouver un point d’inflexion de la fréquence de rotation. L’abscisse de ce point d’inflexion, notée τ_i , va alors nous servir à superposer toutes les transitions des signaux de vitesse filtrés à 45 Hz. L’algorithme sélectionne enfin les transitions observées afin de ne conserver que celles qui maintiennent une vitesse lente (pour \downarrow) ou rapide (pour \uparrow) pendant plus de trois secondes. Ces transitions, visibles sur la figure 6.29, montrent un profil global assez bien défini à la fois pour les transitions \uparrow et \downarrow . Les transitions \downarrow surviennent pendant que la turbine lente accélère lentement. Au même moment, la turbine rapide passe par plusieurs maxima de vitesse. Quand la vitesse de la turbine lente est suffisante, le maximum local de vitesse de la turbine rapide est immédiatement suivi d’une forte baisse de la vitesse des deux turbines. Il est donc possible de savoir quand ces transitions vont survenir, même si quelques faux positifs sont à déplorer. Les transitions \uparrow semblent quant à elles relativement imprévisibles car elles ne présentent aucun indice précurseur : pendant un événement (\tilde{b}), les vitesses des turbines — initialement stationnaires — augmentent soudainement en même temps. Ensuite, la vitesse de la turbine la moins forcée passe par un maximum vers 8 Hz avant de ralentir aux alentours de 7 Hz, tandis que la vitesse de la turbine plus forcée continue d’augmenter progressivement jusqu’à atteindre 7 Hz. Nous voyons donc bien le système passer de manière transitoire dans un état qui ressemble à l’état (\tilde{i}), avant de rejoindre (\tilde{s}).

6.3.2.1 Petites et grandes excursions : de l’état (\tilde{s}) vers ... l’état (\tilde{s})

Les sauts observés dans le système aux petits γ montraient un bref passage de (\tilde{s}) vers l’état (\tilde{i}), pour revenir ensuite rapidement dans l’état (\tilde{s}). La section 6.1.3.5 nous a renseigné sur le caractère anti-corrélé initial de tels événements, qui se corrélaient ensuite partiellement aux γ plus élevés. De la même manière que pour les transitions \uparrow et \downarrow , il est possible de dégager un scénario général pour les petites excursions anti-corrélées et les grandes excursions partiellement corrélées. Nous avons donc effectué le même traitement que dans la section précédente pour nos petits événements.

Les excursions Υ correspondent aux petits sauts fugaces vers (\tilde{i}) qui sont très anti-corrélés. Pour les détecter, nous n’avons pas cherché à déterminer le point d’inflexion de nos signaux de vitesse, mais plutôt les maxima locaux de la turbine en moyenne la plus lente. Une fois de plus, nous constatons sur la figure 6.30 un profil moyen assez représentatif des différentes excursions observées, la superposition des courbes étant plutôt bonne. Le maximum observé de la fréquence de rotation la plus lente en moyenne est en moyenne en retard de 0.3 s (soit, à cette fréquence de rotation, environ deux tours de turbines) par rapport au minimum de la fréquence en moyenne la plus rapide. Il semblerait donc que les excursions Υ proviennent d’une fluctuation qui viendrait gêner la rotation de la turbine la plus rapide en moyenne. Cette fluctuation, *a priori* visible sur la figure 6.9, reste toutefois discrète : la turbine du bas (plus rapide en moyenne) semble pomper dans l’écoulement une partie du fluide proche de la turbine du haut, au delà de la couche de cisaillement, ce qui pourrait expliquer le ralentissement observé de cette turbine pour les excursions Υ .

Les événements \cup , qualifiés de *grosses excursions*, se détectent presque de la même manière : néanmoins, les expériences où l’on cherche à détecter les \cup sont généralement remplies d’excursions Υ . Nous avons vu de plus dans la figure 6.14 que le maximum de fréquence de rotation de la turbine lente n’était plus du tout synchronisé avec le minimum associé de la turbine rapide quand les excursions Υ deviennent des \cup . C’est en effet le *minimum* local de la vitesse « lente » qui arrive presque en même temps que celui de la vitesse « rapide ». Nous nous intéresserons donc désormais aux *minima* de fréquence de la turbine la plus lente en moyenne. Lorsque ceux-ci sont bien synchronisés avec un minimum de fréquence de la turbine

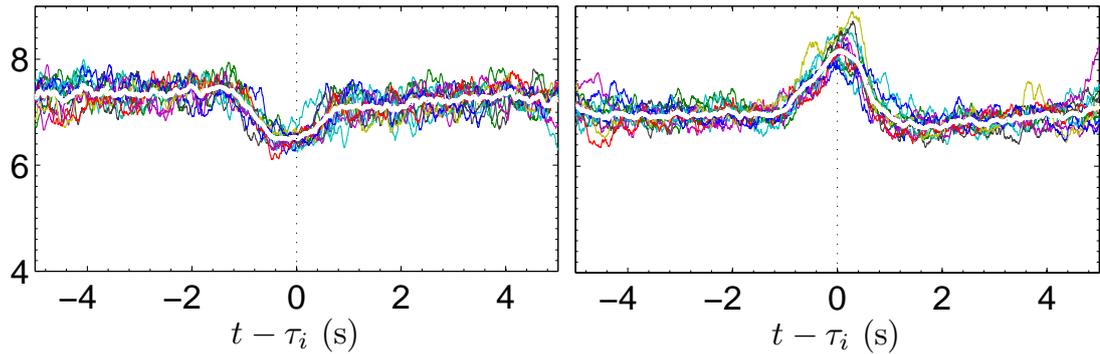


FIGURE 6.30 – Excursions Υ vers l'état (\tilde{i}) pour une expérience à $\gamma = 0.019$: vitesse instantanée de la turbine du bas (à g.), plus forcée et de la turbine du haut (à dr.), moins forcée, et tracé d'une excursion moyenne (ligne blanche). La turbine qui accélère semble être légèrement en retard (de 0.3 s environ) sur celle qui ralentit.

rapide (le critère étant donné par une synchronisation à ± 0.15 s près, soit environ un tour de turbine), alors l'événement observé est supposé un \cup . Cela nous permet de définir un nouveau profil moyen de transition, visible sur la figure 6.31. La superposition des courbes de la figure 6.31 est légèrement moins bonne que pour les figures 6.29 et 6.30. Il est possible que cette moins bonne superposition soit liée à l'assez grande variabilité des événements \cup observés. La forme moyenne observée confirme nos descriptions de la section 6.1.3.5 : la turbine en moyenne la plus rapide ralentit progressivement pour atteindre un minimum de vitesse, peut-être une fois de plus à cause du pompage important qu'elle effectue, mais cette fois-ci, ce minimum est corrélé à un minimum de fréquence de l'autre turbine. Cette dernière accélère ensuite pour atteindre un maximum de vitesse avant de revenir vers l'état (\tilde{s}) .

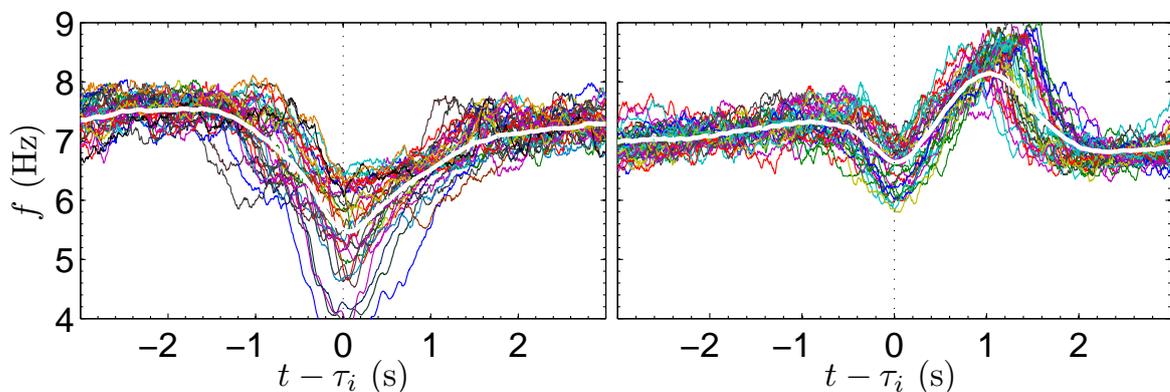


FIGURE 6.31 – Sauts partiellement corrélés \cup vers l'état (\tilde{i}) pour une expérience à $\gamma = -0.067$: vitesse instantanée de la turbine du haut (à g.), plus forcée que la turbine du bas (à dr.) et tracé d'un saut moyen (ligne blanche). Cette fois-ci, les deux minima de vitesse des turbines sont atteints en même temps tandis que la turbine la moins forcée passe ensuite par un maximum local de vitesse.

6.3.2.2 Observation des trajectoires dans le plan (f_1, f_2)

Afin de mieux visualiser ces trajectoires moyennes par rapport aux trajectoires instantanées, nous pouvons superposer ces moyennes à des histogrammes à deux dimensions de la distribution jointe de (f_1, f_2) , pour une version filtrée à 30 Hz des signaux temporels de la fréquence de rotation des turbines. Ce filtrage est requis à cause d'une fâcheuse tendance de

nos signaux de vitesse à la discrétisation, liée à notre méthode de mesure par capteur optique (voir pour cela le chapitre 2 sur le montage expérimental). De tels histogrammes, visibles sur la figure 6.32, ont une forme caractéristique de « virgule » quand les trois états intermittents (\tilde{s}), (\tilde{i}) et (\tilde{b}) sont atteints. Sur ces diagrammes, il est assez facile de trouver deux des états intermittents : (\tilde{s}), situé généralement à vitesse élevée sur la diagonale ($f_1 = f_2$), et (\tilde{b}), situé aux faibles valeurs de f_1 et f_2 à l'autre extrémité de la « virgule ». L'état intermédiaire est plus délicat à trouver car il ne correspond pas tout à fait à la troisième extrémité (ici, tout à droite) de la virgule. Il est plutôt situé à gauche de celle-ci, en bas à droite du pic de probabilité de l'état (\tilde{s}) : il est presque visible sur la figure 6.32c. Une meilleure méthode de visualisation, que nous avons employée, superpose dans une vidéo la distribution jointe de la figure 6.32 et la position instantanée du système, révélant les états stationnaires de l'écoulement (où la position instantanée ($f_1(t)$, $f_2(t)$) du système fluctue peu autour d'une moyenne). En mettant à profit les profils de f_1 et de f_2 moyens issus de la figure 6.29, nous pouvons de plus estimer les trajectoires ($f_1(t)$, $f_2(t)$) prises par notre système lors des transitions \uparrow et \downarrow (cf. fig. 6.32d). Les transitions \uparrow effectuent une « boucle » caractéristique à partir du haut de la virgule (\tilde{s}) avant de rejoindre l'état (\tilde{b}) en bas, tandis que les transitions \downarrow issues de (\tilde{b}) passent par la troisième extrémité de la virgule avant de revenir vers (\tilde{s}).

6.3.3 Étude des temps de résidence

6.3.3.1 Introduction

L'article d'A. de la Torre et de J. Burguete [93] présente une singulière bistabilité de la hauteur de la couche de cisaillement, z_s , dans une expérience de von Kármán tout à fait similaire à la nôtre. Leur expérience est réalisée dans le sens (+), pour des turbines très lourdes, possédant dix pales courbes (par rapport à nos huit pales courbes, nos turbines légères, et notre sens (-) de rotation), et effectuée en commande en vitesse, contrairement à notre commande en couple. Les moteurs dont ils disposent possèdent en outre une régulation de meilleure qualité que les nôtres, avec une précision de l'ordre de 0.1% sur la vitesse de rotation des turbines. Leurs résultats sur le champ de vitesses indiquent une surprenante bistabilité de la couche de cisaillement, qui se maintient dans chacun des états sur une durée dépassant largement les divers temps caractéristiques du système. Ces derniers tentent alors d'expliquer la bistabilité observée en considérant que cette bistabilité peut s'expliquer en décrivant l'écoulement comme un processus stochastique à une variable, la hauteur de la couche de cisaillement z_s :

$$\dot{z}_s = \epsilon z_s + z_s^3 - z_s^5 + \kappa\theta + \sqrt{2B}\xi(t) \quad (6.9)$$

Les fluctuations turbulentes du système sont modélisées par un bruit $\xi(t)$ d'intensité $\sqrt{2B}$. Cette équation admet pour les faibles asymétries de vitesse θ , cinq positions d'équilibre à bruit nul : deux d'entre elles sont des maxima d'énergie potentielle et sont donc instables, les trois positions restantes, stables, étant nommées z_N , z_S , et $z_0 \approx 0$. Sous l'effet du bruit, la grandeur z_s peut alors quitter un des minima d'énergie potentielle dans lequel elle était confinée afin de s'échapper vers un des autres minima. Le paramètre $\kappa\theta$ va alors introduire un biais en favorisant soit l'état z_S , soit l'état z_N selon le signe de θ . L'article se focalise essentiellement sur les transitions entre z_N et z_S , qui définissent des états presque stationnaires N et S de l'écoulement turbulent. Le petit paramètre ϵ nous indique en effet que le minimum d'énergie potentielle pour $z_s = z_0$ est relativement peu profond : le système n'y reste jamais très longtemps.

Pour justifier un tel modèle, l'article s'appuie sur les résultats de H. Kramers [138] que nous avons décrit précédemment dans le chapitre 4 : en effet, si le modèle décrit ci-dessus est bien représentatif de la dynamique observée, la distribution des temps de résidence dans les états N et S doit suivre une loi exponentielle, dont le temps caractéristique τ va dépendre

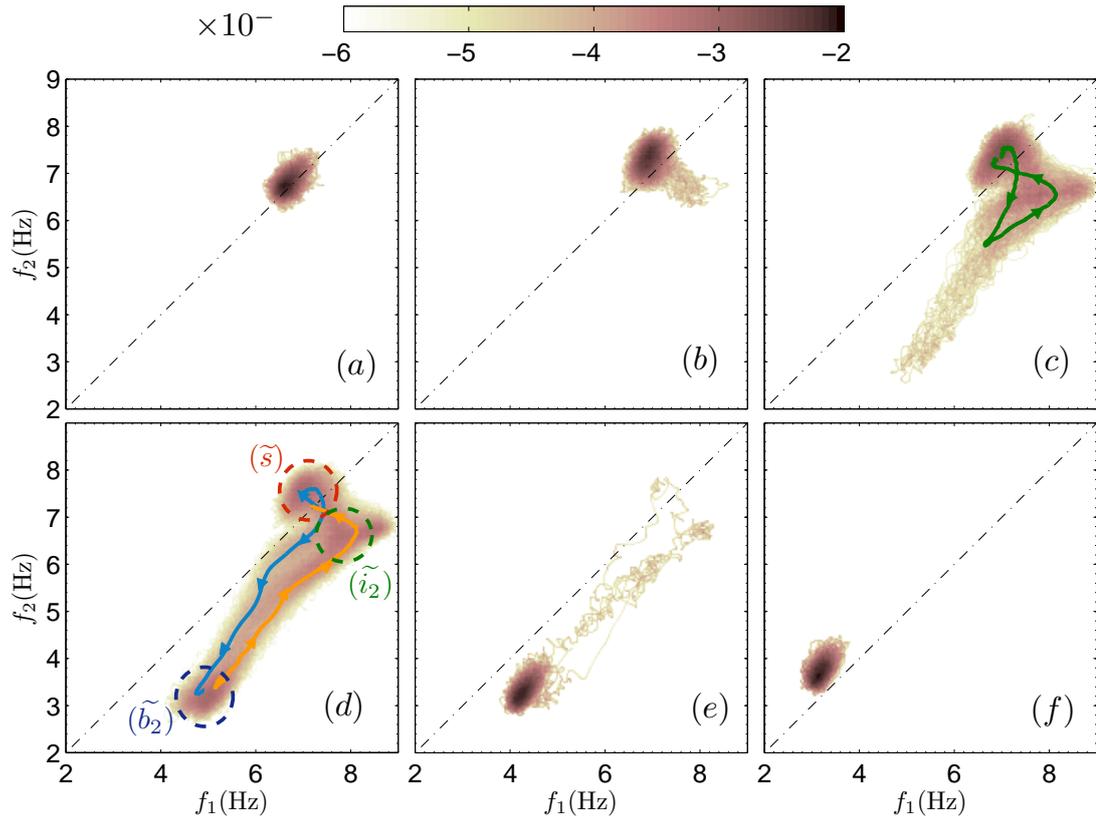


FIGURE 6.32 – Densités de probabilité jointes de (f_1, f_2) en échelle logarithmique : (a), régime stationnaire : $\gamma = -0.0164$; (b), début des transitions vers l'état intermédiaire, $\gamma = -0.0460$; (c), oscillations irrégulières avec de fortes diminutions de vitesse : $\gamma = -0.0668$: (—) représente le saut moyen corrélé \cup , calculé sur la figure 6.31 ; (d), multistabilité avec plusieurs états visités régulièrement : $\gamma = -0.0891$, (—) et (—) représentent les chemins moyens empruntés lors des transitions \downarrow et \uparrow fig.6.29. Les cercles en traits discontinus représentent les positions approximatives de (\tilde{s}) , (\tilde{i}_2) et (\tilde{b}_2) pour cette valeur de γ ; (e), événements rares pour $\gamma = -0.0912$; (f), état stationnaire lent (\tilde{b}_2) : $\gamma = -0.1042$. La ligne en traits pointillés indique la condition $\theta = 0$. Nous n'avons pas indiqué le saut moyen pour Υ car il est trop peu lisible.

du paramètre κ et de B , l'amplitude du bruit. Les distributions expérimentales, dont l'une est visible sur la figure 6.33, montrent effectivement une tendance exponentielle. Le temps caractéristique de cette exponentielle τ , tracé dans l'article en fonction de θ , montre une rapide variation des temps de survie caractéristiques avec θ : le temps caractéristique de l'état favorisé, d'une valeur de 1000 s environ pour $\theta = 0$, dépasse facilement 8000 s pour $|\theta| \geq 4 \cdot 10^{-3}$ (ce qui rend une telle étude très longue), tandis que l'état défavorisé ne « résiste » plus que pour un temps caractéristique τ d'une centaine de secondes.

6.3.3.2 Temps de survie des états intermittents

À l'instar d'A. de la Torre et de J. Burguete, nous pouvons appliquer directement les résultats du problème de sortie d'un puits de potentiel de Kramers (décrit sur la figure 4.1) pour décrire notre problème de multi-stabilité. Nous allons donc nous intéresser à la sortie de l'état (\tilde{b}) vers (\tilde{i}) et (\tilde{s}) , aux valeurs de γ élevées, dans la zone où interviennent les événements rares. Puisque le système retourne rapidement vers (\tilde{b}) une fois (\tilde{s}) atteint, nous pouvons étudier dans une seule expérience plusieurs temps de transition \uparrow . Aussi, pour un nombre

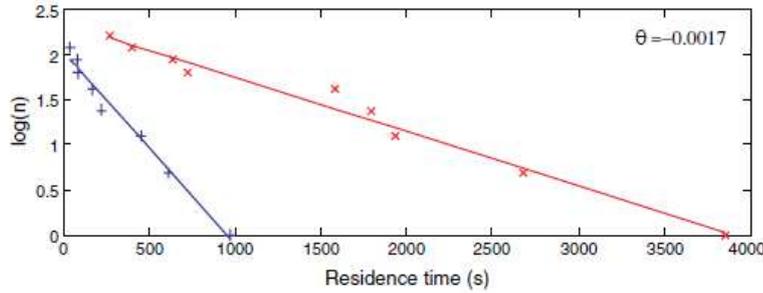


FIGURE 6.33 – Histogramme (en échelle logarithmique pour y) des temps de résidence dans l'état N (en rouge, \times) et dans l'état S (en bleu, $+$) pour une asymétrie θ favorisant l'état N . La figure est tirée de l'article d'A. de la Torre et de J. Burguete [93] (tous droits réservés).

suffisant d'événements, il est possible de reconstruire la distribution des temps de survie pour en extraire le taux d'échappement caractéristique $r = \tau^{-1}$.

Pour un certain nombre d'expériences, nous avons effectivement observé de telles distributions exponentielles (fig. 6.34), qui collent bien avec la description « stochastique » que nous avons effectuée. Cependant, nous pouvons constater que parfois, le système n'est pas encore stabilisé dans l'état lent qu'il « repart » dans un état rapide. Cela se traduit dans les distributions de temps d'attente par une forte prépondérance d'événements courts, possédant un temps caractéristique faible, inférieur à 5 s (soit tout de même une vingtaine de tours de turbines). Cela suppose une dynamique plus complexe, où le système effectue plusieurs transitions \downarrow , certaines étant « vouées à l'échec » et d'autres ayant la possibilité de survivre plus longtemps. Cette image est légèrement contradictoire avec celle que nous avons dégagée du profil moyen des transitions \downarrow , où le profil des transitions était identique pour tous les événements (voués à l'échec ou non). Le bas de la figure 6.34 nous indique quant à lui qu'il ne semble pas y avoir de réelle « mémoire » entre deux événements : le temps t_n de survie dans le $n^{\text{ème}}$ état lent est indépendant du temps précédent t_{n-1} , ce qui fait apparaître un nuage de points sans forme caractéristique.

Nous pouvons extraire les deux temps caractéristiques des distributions exponentielles des temps de résidence et calculer la qualité de l'ajustement obtenu. Les temps caractéristiques courts et longs obtenus sont visibles sur la figure 6.35 : nous observons sur cette courbe une tendance nette à l'allongement du temps de résidence dans l'état lent lorsque les valeurs de γ s'approchent des valeurs des branches stationnaires de la commande en vitesse. Toutefois, nous nous heurtons au même problème que dans l'article d'A. de la Torre et de J. Burguete : proche du seuil d'apparition des événements rares, le temps caractéristique dépasse le temps acceptable pour une expérience et il est difficile, avec le bruit expérimental de nos mesures, de conclure sur une éventuelle divergence du temps τ (qui, sur notre graphique, devrait alors tendre vers une asymptote verticale).

6.4 Discussion

6.4.1 Des sensibilités moyennes négatives

6.4.1.1 Introduction

Un des résultats principaux obtenus dans ce chapitre est la *disparition* du cycle d'hystérésis observée lorsque nous commandons le couple des moteurs de nos turbines. Cette disparition est à la fois prévisible, car, comme nous l'avons déjà précisé, nous pouvons imposer n'importe quel γ dans ce mode de fonctionnement, et imprévisible, car les principaux résultats théoriques

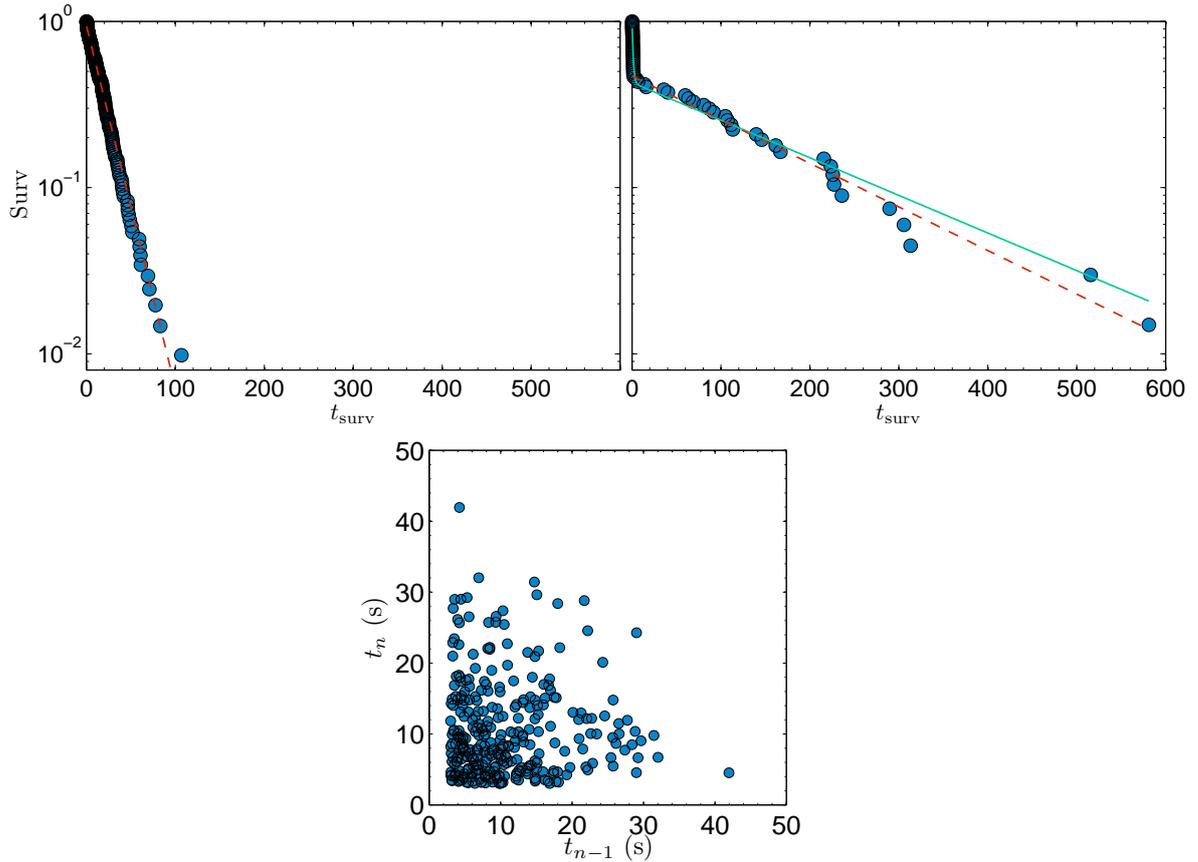


FIGURE 6.34 – En haut : distribution des temps de survie (en échelle logarithmique sur l'axe y) : $\text{Surv}(t) = 1 - \int_0^t p_{\text{sortie}}(t) dt$ dans l'état lent (b) pour deux expériences, $\gamma = -0.094$ (à g.) et $\gamma = 0.049$ (à dr.), ainsi que des ajustements exponentiels à un temps caractéristique (tiretés rouges) et des ajustements bi-exponentiels (trait plein turquoise). La première expérience montre un bel accord avec une loi exponentielle, ce qui accrédite le modèle de sortie de Kramers, tandis que l'autre montre clairement une distribution à deux temps de relaxation, qui suggère que toutes les transitions vers l'état (b) ne sont pas équivalentes. En bas : $n^{\text{ème}}$ temps de survie tracé en fonction du $n - 1^{\text{ème}}$ temps de survie. Le système semble bien ne pas posséder de mémoire : aucune concentration préférentielle de points n'est réellement observée.

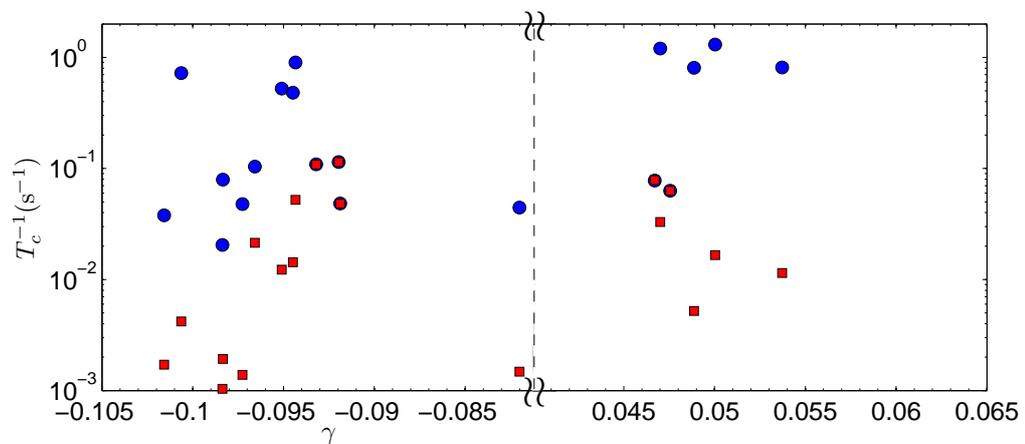


FIGURE 6.35 – Inverse des temps caractéristiques de survie courts τ_1^{-1} (●) et longs τ_2^{-1} (■) de l'ajustement bi-exponentiel. Ces temps, initialement corrélés, semblent rapidement s'écarter l'un de l'autre, avec une divergence de t_2 .

sur la turbulence ignorent généralement le mode de forçage du système dans leur description microscopique de la turbulence. La turbulence est toutefois un ingrédient essentiel de cette sensibilité à la commande : comme nous l'avons vu, il n'existe pas de cycle d'hystérésis pour les nombres de Reynolds les plus faibles correspondant à un régime laminaire. De manière similaire, les résultats de R. Labbé, J.-H. Titon et O. Cadot ont été obtenus en utilisant des turbines à pales droites, où la courbe $\gamma(\theta)$ ne présente qu'une seule branche continue. Il n'est donc pas étonnant que nous soyons les seuls à observer de tels régimes.

Nous pouvons remarquer que le lieu des états moyens raccordant les branches stationnaires de la commande en vitesse possèdent une réponse différentielle négative : en effet, comme nous l'avons déjà indiqué, pour une grande partie de la zone interdite, nous avons :

$$\aleph = \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \leq 0 \quad (6.10)$$

Cette valeur négative de la réponse différentielle n'est pas anodine : en effet, γ et θ sont respectivement les grandeurs que nous imposons dans une commande et dans l'autre, l'autre grandeur représentant la réponse à une telle asymétrie. Nous avons vu dans le chapitre 3, d'autres exemples de réponses différentielles, sous la forme par exemple de la chaleur spécifique :

$$c_v = \frac{\partial u}{\partial T} \quad (6.11)$$

c_v possède, comme notre sensibilité \aleph , la propriété de lier dans une différentielle la grandeur imposée (ici, T) et la réponse du système (ici, u).

6.4.1.2 Lien avec les transitions en bandes de cisaillement ...

Des points communs avec notre expérience Dans un cadre plus général, il est aussi possible de trouver des systèmes possédant des réponses négatives, ou tout du moins une trace de telles réponses, en « dehors » de grandeurs conjuguées par une transformée de Legendre : certains fluides complexes possèdent par exemple une propriété très intéressante de transition en bandes de cisaillement, qui résulte en fait d'une réponse négative à une sollicitation en cisaillement. Nous avons vu au début de l'introduction que la viscosité dynamique d'un fluide pouvait être introduite assez simplement via la définition :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dz} \quad (6.12)$$

Les grandeurs usuelles en rhéologie sont τ , la valeur de la contrainte de cisaillement, et le taux de cisaillement $\dot{\epsilon}$, qui est en fait homogène et proportionnel à dv/dz . Il est alors possible de définir une viscosité différentielle pour les fluides, nommée $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} = \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\epsilon}} \quad (6.13)$$

De manière assez remarquable, certains fluides complexes [155, 156] possèdent également, tout du moins en théorie, des viscosités différentielles négatives, représentées schématiquement sur la figure 6.36. Ces viscosités différentielles négatives sont généralement associées à des hétérogénéités au sein du fluide sollicité : ces derniers présentent généralement des *bandes de cisaillement* où se concentrent les déformations du fluide, séparées par des zones où le fluide est "au repos" (où le gradient de vitesse est bien moindre). Il existe, dans la grande variété des fluides complexes, plusieurs types de rhéologies menant aux bandes de cisaillement : un premier type (fig. 6.36 à gauche) génère une série de bandes qui s'espacent selon la direction du gradient de vitesse, tandis que le second type (fig. 6.36 à droite) forme des bandes qui s'espacent selon une direction normale au gradient (qui est en fait parallèle à la vorticité).

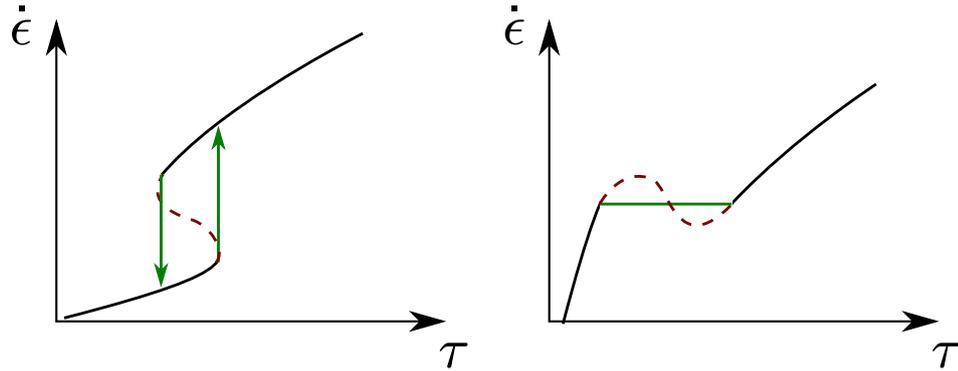


FIGURE 6.36 – Exemples de comportements rhéologiques idéaux pour certains fluides complexes. Le trait plein noir représente la partie de la courbe où les écoulements obtenus sont homogènes et stationnaires. Lorsque la viscosité différentielle $\tilde{\mu} = \partial\tau/\partial\dot{\epsilon}$ devient négative, la courbe rhéologique n'est plus stable (tireté rouge) et le fluide forme des bandes de cisaillement concentrant les gradients de vitesse. Le comportement global du fluide (trait plein vert) — alors hétérogène — forme un plateau caractéristique. À gauche, un exemple de transition en bandes de cisaillement expérimentalement observé dans des suspensions colloïdales organisées en lamelles [155], qui présentent un hystérésis lorsque la contrainte de cisaillement est imposée. À droite, un autre exemple observé dans le même type de phase colloïdale [156].

L'article de D. Bonn *et al.* [155] décrit le comportement du fluide pour des expériences à τ imposé, où la déformation (ici, la réponse du système) saute de manière discontinue d'un état stationnaire à faible $\dot{\epsilon}$ vers un nouvel état à fort $\dot{\epsilon}$, avec un comportement hystérétique : le saut discontinu s'effectue à cisaillement τ différent, que l'on *augmente* progressivement τ ou qu'on le *diminue*. À proximité des sauts de $\dot{\epsilon}$, il a en outre été montré que les états stationnaires possèdent une durée de vie finie, ce qui ressemble à ce que nous avons observé sur la figure 5.17. Cet hystérésis disparaît lorsque le taux de déformation $\dot{\epsilon}$ est imposé, qui fait alors apparaître à la place du cycle d'hystérésis une zone à réponse $\tilde{\mu}$ négative associée à une apparition de bandes de cisaillement (ici, des bandes espacées selon la direction de la vorticité). Ces états à réponse négative sont décrits dans l'article comme *stationnaires*, tout du moins pendant la durée d'une expérience.

L'article de Wilkins et Olmsted [156] effectue les mêmes tests, mais pour un fluide pour lequel la contrainte τ effectue un saut à un taux de déformation $\dot{\epsilon}$ donné. Les expériences effectuées en imposant la contrainte τ montre un comportement assez complexe où le système atteint difficilement des états stationnaires en moyenne, qui dépendent de la lenteur avec laquelle les expérimentateurs effectuent le balayage en cisaillement τ . L'apparition des bandes de cisaillement intervient alors au niveau du saut de la contrainte τ . L'article semble par ailleurs ne pas montrer d'expérience où le taux de déformation est imposé.

6.4.1.3 ... et avec les résistances différentielles négatives

Ce type de réponse négative est par ailleurs également observé pour des composants électriques bien particuliers, notamment au niveau de jonctions $p-n$ [157]. En effet, un tel dipôle présente une *résistance différentielle* r , définie comme :

$$r = \frac{\partial U}{\partial i} \quad (6.14)$$

qui peut devenir négative pour une certaine gamme de températures. Dans le reste de ce manuscrit de thèse, nous appellerons de manière impropre *résistance* la quantité r définie précédemment. Les résistances négatives sont également observées pour des dipôles « en volume » [158, 159] et présentent une intéressante distinction entre les résistances négatives en

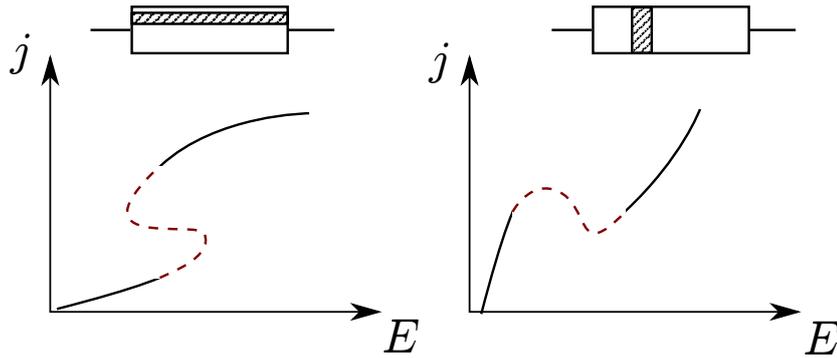


FIGURE 6.37 – Tracé de j , densité de courant local, en fonction de E , le champ électrique local, et hétérogénéités associées (sous la forme d'un petit dipôle). À gauche, résistances différentielles négatives en courant, où naissent des hétérogénéités sous la forme de filaments de fort courant. À droite, résistances différentielles négatives en tension, où les hétérogénéités apparaissent sous la forme de zones de fort champ E au sein du dipôle. La figure est inspirée de l'article théorique de B.K. Ridley [158].

tension et les résistances négatives en *intensité*, qui génèrent chacune un type d'hétérogénéité spatiale. Ces hétérogénéités spatiales possèdent, comme les bandes de cisaillement, des directions privilégiées de développement : les résistances négatives en courant voient apparaître des filaments de forte intensité le long du dipôle, tandis que les résistances négatives en *tension* génèrent des zones où le champ E est localement plus important que dans le reste de l'échantillon.

L'article théorique de B. K. Ridley postule que le cas de gauche de la figure 6.37 présente un hystérésis lorsque le champ E est imposé, sous la forme d'une *tension* imposée aux bornes du dipôle. Cet hystérésis disparaît dans le cas idéal où l'intensité dans le dipôle est imposée, au profit des filaments de courant que nous avons précédemment cités. De manière intéressante, ces filaments de courant semblent instables sous l'effet de petites perturbations. L'hystérésis observé est plutôt confirmé par les expériences, qui soulignent une « bistabilité » (ici, au sens où plusieurs états *stationnaires* coexistent pour les mêmes paramètres) du dipôle lorsque sa tension est imposée [160]. Les articles expérimentaux à ce sujet indiquent qu'il n'est pas vraiment possible d'effectuer de telles expériences en imposant le courant, la résistance du dipôle à fort champ, devenant quasiment nulle, s'effaçant alors devant celle en série du générateur utilisé.

L'article théorique de B. K. Ridley parle également des résistances négatives en tension, la majeure partie de celui-ci explicitant la thermodynamique hors-équilibre de tels dipôles en volume. Ceux-ci peuvent alors présenter un hystérésis lorsque le courant j est imposé, excluant la formation de domaines. Ces domaines apparaissent en imposant la tension V , où des états stationnaires (ou *presque* stationnaires) comprenant des domaines de fort champ E se déplaceraient à vitesse fixe dans le dipôle. Cependant, les résultats expérimentaux associés laissent transparaître une faible reproductibilité [158], la caractéristique du dipôle $I(V)$ n'étant pas la même lorsque la tension est progressivement augmentée et lorsqu'elle est progressivement diminuée.

6.4.1.4 Une analogie plus formelle

Notre écoulement de von Kármán semble bien posséder un certain nombre de points communs avec les fluides possédant une transition en bandes de cisaillement et les résistances différentielles négatives, dans ce sens où des réponses négatives existent dans tous ces systèmes et montrent un comportement assez différent lorsque une grandeur est imposée plutôt qu'une autre. Toutefois, nous n'observons qu'une seule forme de réponse négative, et il faut

donc déterminer à quelle situation notre écoulement correspond. Nous rappelons donc une équation particulièrement utile de la thèse de Louis Marié à ce sujet [5], qui vient traduire la conservation du moment cinétique I de notre écoulement :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = C_1 - C_2 + C_\Sigma \quad (6.15)$$

Ici, C_Σ représente le couple exercé par les parois (lisses) de la cuve sur le fluide. Si nous négligeons un tel frottement, nous pouvons alors voir que la commande en *couple* consiste à imposer la dérivée d'une grandeur autrement *conservée* au travers de l'écoulement. Lorsque nous imposons le courant dans un dipôle, nous pouvons traduire d'une manière extrêmement similaire (lorsque nous supposons qu'il n'y a pas de résistance de fuite) la conservation de la quantité de charges q au sein du dipôle :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = I_{\text{in}} + I_{\text{out}} \quad (6.16)$$

D'une manière encore similaire, nous pouvons exprimer le taux de déformation $\dot{\epsilon}$ d'un viscosimètre de Couette (où ont été effectuées les expériences de rhéologie sur les fluides complexes précédemment cités) en fonction de la différence de fréquence de rotation entre le cylindre intérieur et extérieur (et de la distance d entre les cylindres) :

$$\int_{r=r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dr = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}} \quad (6.17)$$

Nous pouvons donc voir que les grandeurs I , q et ϵ jouent le même rôle pour les différents types d'expériences, et représentent chacun une intégrale temporelle issue d'une relation de bilan impliquant un des deux paramètres de contrôle « conjugués » (les expériences à $\dot{\epsilon}$ imposé dans la géométrie de Couette imposent en effet la vitesse des cylindres). Nous pouvons toutefois constater que contrairement au cas électrique ou à l'écoulement de von Kármán, la grandeur ϵ peut diverger au cours du temps. En effet, la quantité de charges q au sein du dipôle, et le moment cinétique I de l'écoulement de von Kármán ne peuvent diverger, ce qui se traduirait par un couple C_Σ ou un courant de fuite). Dans un régime stationnaire, la quantité de I et q injectées à une extrémité du système est donc nécessairement évacuée à l'autre extrémité, contrairement au cisaillement qui est « absorbé » au sein du fluide. Il semblerait donc que l'analogie électrique soit la plus pertinente.

Nous pouvons alors regrouper nos réponses négatives en deux catégories : celle dont fait partie l'écoulement de von Kármán serait donc une résistance négative en courant, ou une transition en bandes de cisaillement en *gradient*. Comme pour ces derniers, le cycle d'hystérésis observé à θ imposé (ou τ imposé pour les fluides complexes) laisse place à une zone à réponse négative lorsque γ (ou $\dot{\epsilon}$) est imposé. L'hystérésis semble aussi exister dans le cas des résistances négatives, mais la difficulté d'effectuer les expériences en imposant le courant nous empêche ici de conclure. Nous pouvons donc récapituler, comme effectué dans le tableau 6.2 les différentes grandeurs de notre analogie. Nous pouvons alors voir θ , τ et V comme des champs « externes » venant perturber la symétrie initiale de nos expériences au repos (à $\gamma = 0$, $\dot{\epsilon} = 0$ et $i = 0$).

Nous pouvons par ailleurs exprimer l'énergie injectée par unité de temps (et donc dissipée) dans chacun des trois systèmes. Pour un écoulement de Couette où seul un des cylindres tourne, l'expression de la puissance est simplement donnée par :

$$\mathcal{P} = 2\pi C_{\text{ext}} f_{\text{ext}} \quad (6.18)$$

$$\propto \tau \int_{r=r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \dot{\epsilon} dr \quad (6.19)$$

	von Kármán	Fluides complexes	Résistances négatives
Grandeur conservée	I (mom. cinétique)	ϵ (déformation)	q (charges)
Contrôle associé	γ	$\dot{\epsilon}$	i (intensité)
Champ conjugué	θ	τ (contrainte)	V (tension)

TABLE 6.2 – Résumé de l’analogie entre les trois types d’expériences où des réponses négatives sont observées hors de l’équilibre thermodynamique. ϵ , le taux de déformation, est la seule grandeur issue d’un bilan qui puisse diverger avec le temps, et n’est donc pas une grandeur conservée.

Pour un écoulement de von Kármán, l’expression est presque identique, mais nous allons la formuler de manière différente, en fonction de γ et θ :

$$\mathcal{P} = 2\pi(C_1 f_1 + C_2 f_2) \quad (6.20)$$

$$= 2\pi C_0 f ((1 + \gamma)(1 + \theta) + (1 - \gamma)(1 - \theta)) \quad (6.21)$$

$$= 4\pi C_0 f (1 + \gamma\theta) \quad (6.22)$$

Il faut toutefois faire attention au fait que nos grandeurs θ et γ ne sont pas tout à fait conjuguées, celles-ci faisant en effet intervenir C_0 et f_0 : la commande en couple fixe le premier et laisse le second varier avec γ , tandis que la commande en vitesse fixe le second et laisse le premier varier avec θ . Nous avons donc en toute généralité :

$$\mathcal{P} = 4\pi C_0(\theta) f(\gamma)(1 + \gamma\theta) \quad (6.23)$$

Nous avons toutefois rappelé au début de ce chapitre que la forme de la courbe $\gamma(\theta)$ définissant la dynamique de notre écoulement dépendait « lentement » du nombre de Reynolds, et donc dépendait faiblement de la fréquence de rotation (et donc du couple moyen) à laquelle la courbe est parcourue (voir fig. 5.20 à ce sujet), notamment pour la plage de fréquences accessibles en commande en couple. Nous avons souligné qu’il était *a priori* possible de parcourir une moitié de cycle à f moitié, ou à C_0 moitié. Par conséquent, rien ne nous empêche de parcourir le cycle en imposant $C_0 f$ et θ , ou en imposant $C_0 f$ et γ . Les états stationnaires (ou non) atteints dans le cadre de ces nouvelles commandes seront les mêmes qu’en commande en vitesse et en couple. Par conséquent, malgré la dépendance en θ et γ de C_0 et f , nous pouvons considérer que γ et θ sont des grandeurs conjuguées par rapport à l’injection de puissance dans l’expérience.

Enfin, nous pouvons exprimer la puissance dissipée au sein d’une résistance :

$$\mathcal{P} = iV \quad (6.24)$$

Ces équations montrent donc qu’il existe une certaine conjugaison de nos deux familles de paramètres de contrôle par rapport à la puissance injectée \mathcal{P} injectée.

6.4.2 Un cas d’inéquivalence d’ensemble ?

Nous avons vu dans le chapitre 3 l’effet du passage d’un ensemble à un autre au voisinage d’une transition de phase du premier ordre. Nous pouvons alors rappeler que ces transitions surviennent aux endroits où des *anomalies de convexité* de l’entropie sont présentes, ce qui induit la présence de *chaleurs spécifiques négatives* dans l’ensemble micro-canonique :

$$\frac{\partial u}{\partial T} \leq 0 \quad (6.25)$$

Une chose saute aux yeux : pour un système thermodynamique, changer d'ensemble revient à imposer soit u , soit T , et la chaleur spécifique est donc un exemple de réponse différentielle (comme le sont \aleph , r ou $\tilde{\mu}$), qui pose problème lorsqu'elle devient négative. Les systèmes thermodynamiques possédant des interactions à courte portée interdisent toutefois ces réponses négatives dans l'ensemble micro-canonique, ceux-ci préférant alors se séparer en plusieurs phases. Cela permet de s'assurer que les chaleurs spécifiques restent positives et implique d'ailleurs l'équivalence entre les ensembles statistiques dans un tel cas. Ces systèmes ne montrent d'ailleurs pas d'hystérésis, si nous oublions une éventuelle présence d'états métastables (ici, surchauffés) pour lesquels les chaleurs spécifiques restent toutefois positives, ces derniers vérifiant tout de même $\partial^2 s / \partial^2 u \leq 0$ (voir chapitre 3).

La présence de réponses négatives est donc soit une pure signature de la sortie de l'équilibre thermodynamique, soit une signature de la violation d'une telle équivalence d'ensemble. Nous pouvons qualitativement justifier pourquoi notre écoulement de von Kármán possède des interactions à longue portée : en effet, le champ de vitesses possède une propriété de *divergence nulle*,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.26)$$

que nous pouvons interpréter comme une possibilité d'interactions à longue portée. Des modèles théoriques de la turbulence à deux dimensions fournissent également une justification d'une telle acception : ces modèles sont généralement basés sur des ensembles de vortex ponctuels en interaction *logarithmique*, par essence à longue portée [161]. Cette justification est bien évidemment moins claire dans le cadre des résistances et des fluides complexes.

Si nous relaxons la condition d'équivalence d'ensemble, nous pouvons alors observer des réponses négatives dans une zone correspondant à l'anomalie de convexité de l'entropie, ce qui est bien le cas. Toutefois, il n'est pas fait pas mention d'hystérésis dans les quelques articles présentant des résultats numériques sur l'inéquivalence d'ensemble. Nous pouvons toutefois considérer que celle-ci est liée à la possibilité de se trouver dans des états métastables lorsque la température T est imposée (ou, pour l'écoulement de von Kármán, θ). Les états atteints dans la zone interdite révèlent des régimes dynamiques particuliers dans le cas d'un ensemble de rotors en interaction de champ moyen [99] : un agrégat de rotors antiparallèles en rotation globale « balistique » se forme sur un fond de rotors désordonnés. Un autre modèle, cette fois-ci hors de l'approximation de champ moyen, révèle des hétérogénéités spatiales naissant dans l'ensemble micro-canonique (voir figure 6.38) lorsque certaines conditions bien précises, plus restrictives que la présence d'une chaleur spécifique négative, sont respectées [162]. Ces hétérogénéités possèdent des frontières floues, qui ne traduisent pas une séparation de phase quand le système considéré devient grand.

Les trois systèmes que nous avons considérés dans notre analogie ne semblent pas tout à fait se comporter de la même manière dans la zone interdite : deux d'entre eux semblent effectuer une séparation de phases, que ce soit entre les zones à faibles et à fort courant, ou entre les zones de fort et de faible cisaillement. L'article expérimental de D. Bonn *et al.* indique que la région de réponse négative est au moins stationnaire sur une durée correspondant à celle de l'expérience. L'article expérimental de Ridley [158] semble pencher en faveur d'une même stationnarité du système une fois séparé. Notre écoulement de von Kármán, quant à lui, transite de manière dynamique entre plusieurs états quasi-stationnaires où il semble de prime abord difficile de détecter des hétérogénéités spatiales, les champs de vitesses conditionnels étant par essence non-uniformes en espace. Nous pouvons toutefois considérer les deux tores de rotation de l'état (\tilde{b}) comme une forme d'hétérogénéité axisymétrique, un peu comme un filament de fort courant auquel on aurait imposé une invariance selon l'angle ϕ . En dernier lieu, nous pouvons voir notre multi-stabilité et nos régimes instationnaires comme un équivalent d'hétérogénéités spatiale dans un écoulement turbulent hors-équilibre où la condition de divergence nulle impose une forme d'homogénéité spatiale.

Nous pouvons enfin nous demander quels sont les potentiels pertinents extrémaux dans nos

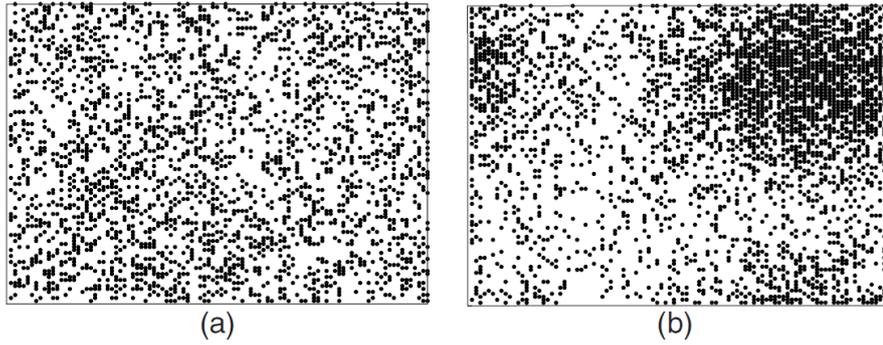


FIGURE 6.38 – Simulations d’un modèle d’Ising à deux dimensions et aux interactions à longue portée, dans l’ensemble microcanonique (appelé système conservatif), effectuées par T. Mori [162]. À gauche, simulation pour une température où l’approximation de champ moyen est valide, et où les solutions micro-canoniques et canonique coïncident. À droite, simulation pour une température en dehors de la zone de coïncidence.

trois systèmes physiques : hors de l’équilibre thermodynamique, il n’existe pas de consensus sur les grandeurs à maximiser (ou minimiser). Les potentiels extrémaux dans le cas thermodynamique sont :

$$ds = Tdu - \frac{p}{T}dv \quad \text{dans l’ensemble microcanonique} \quad (6.27)$$

$$df = -udT - \frac{p}{T}dv \quad \text{dans l’ensemble canonique} \quad (6.28)$$

Ces potentiels font intervenir soit Tdu ou udT , une forme différentielle du produit de nos deux paramètres de contrôle. Nous pourrions alors penser à considérer la puissance \mathcal{P} comme l’un de ces potentiels. Toutefois, sa différentielle représente plutôt le paramètre de Lagrange de la transformée de Legendre entre s et f et ne semble pas tout à fait convenir. Une piste envisageable serait alors d’utiliser la production d’entropie \dot{s} comme quantité extrémaux, comme cela a été effectué pour décrire la mécanique statistique de l’écoulement de von Kármán [114].

6.5 Conclusion

La commande en couple nous a permis de mettre à jour un nouveau comportement de notre système dans le régime turbulent : les états *stationnaires* des signaux de couple et de vitesse, observés en commande en vitesse, ne sont pas l’unique mode de fonctionnement autorisé. Des régimes instationnaires apparaissent naturellement dans les plages de couples qui formaient la « zone interdite » du cycle d’hystérésis de la commande en vitesse. De ces régimes instationnaires naît un nouvel état intermédiaire (\tilde{i}), où la fréquence des turbines est rapide et asymétrique : cela ne correspond à aucun état stationnaire connu en commande en vitesse avec nos turbines *TP87*. Cet état vient s’échanger avec le prolongement des branches (*s*) et (*b*) de la commande en vitesse, dont les transitions sont gouvernées par la valeur du paramètre de contrôle γ .

L’examen par PIV de ces états nous permet d’examiner les champs moyens correspondant à nos états intermittents. Ces derniers présentent des caractéristiques inattendues : l’état (\tilde{b}) possède deux tores imbriqués tournant en sens opposé, tandis que l’état (\tilde{i}), au premier abord vu comme un simple mélange de (\tilde{s}) et (\tilde{b}), est finalement assez différent de ces derniers. Les autres états presque stationnaires, (\tilde{s}) et (\tilde{b}), sont toutefois des cousins de leurs pendants stationnaires : (\tilde{s}) présente une couche de cisaillement très décalée vers une des deux turbines, et une partie du tore central de l’état (\tilde{b}) était déjà visible, de manière discrète, en bord de branche anti-naturelle.

Une étude détaillée des signaux temporels instationnaires révèle que les transitions et les excursions s'effectuent toujours selon le même scénario, le système semblant parcourir à chaque fois la même portion de l'espace des phases. Nous pouvons alors pressentir que le système franchit un « col » du paysage de potentiel lors de telles transitions sous l'effet d'une fluctuation importante, à la manière du modèle développé par F. Pétrélis et S. Fauve pour le champ magnétique [154]. Les temps de résidence dans l'état lent associés présentent une distribution exponentielle aux temps longs, tout comme une simple particule Brownienne piégée dans un puits de potentiel. Ce résultat accrédite le point de vue stochastique à basse dimension de la multi-stabilité de notre écoulement.

La forme caractéristique de la courbe de réponse $\gamma(\theta)$ n'est pas sans rappeler ce qui est observé pour certains fluides complexes cisailés, et pour certains dipôles électriques, qui présentent également un cycle d'hystérésis disparaissant lorsque la nature de la commande est changée, au profit de zones à réponse différentielle négative (chez nous, $\aleph < 0$). Pour cette zone, les fluides cisailés présentent une transition en *bandes de cisaillement* qui semble stationnaire [155] et les résistances négatives voient apparaître des filaments de fort courant (prédits stationnaires), contrairement à notre écoulement de von Kármán qui perd alors sa stationnarité. Ces événements peuvent être la signature d'une forme d'*inéquivalence d'ensemble* où le changement de commande reviendrait à changer d'ensemble statistique, et où la présence de réponses négatives (stationnaires ou non) serait caractéristique d'interactions à longue portée au sein du champ de vitesses.

*

CHAPITRE 7

L'EXPÉRIENCE SHREK

Introduction

L'introduction de cette thèse nous a renseignés sur l'importance des anomalies de dissipation des écoulements turbulents réels [21] et leur lien possible avec la présence de singularités de l'équation d'Euler, cas limite à viscosité cinématique $\nu \rightarrow 0$ de l'équation de Navier-Stokes, dont la présence et l'importance relative dans les écoulements réels visqueux est encore une question ouverte. Nous pouvons alors nous poser la question de la pertinence de l'équation d'Euler pour décrire le comportement des fluides.

À ce titre, il est intéressant de considérer le cas des superfluides. En effet, ceux-ci possèdent l'étonnante caractéristique de pouvoir s'écouler sans viscosité. Ces écoulements apporteront donc un éclairage intéressant sur la manière dont la nature s'accommode de telles propriétés : le champ des vitesses sera-t-il continu, ou dérivable ? Possèdera-t-il les anomalies de dissipation prévues par Onsager [23] ? La transition à la viscosité nulle a-t-elle un impact sur ces anomalies de dissipation, ainsi que sur le spectre de Kolmogorov de la turbulence ?

Le couple K_p d'un écoulement de von Kármán est directement lié à la dissipation volumique ϵ . Par conséquent, si nous mesurons les couples dans une expérience de von Kármán superfluide, nous pourrions rapidement quantifier et comparer le mécanisme de dissipation classique avec son éventuel pendant aux basses températures. C'est une des raisons qui a incité les chercheurs du SPEC, du laboratoire de physique de l'ENS de Lyon, de l'institut Néel, du LEGI et du Service des Basses Températures (SBT), situés à Grenoble, à construire un écoulement de von Kármán superfluide, appelé SHREK. L'expérience a été mise en place au sein du SBT, pour être utilisée, bichonnée et réparée par Michel Bon-Mardion, Pantxo Diribarne et Bernard Rousset.

7.1 Quelques éléments de physique des superfluides

7.1.1 Un fluide inviscide

L'hélium est un composé chimique bien particulier. En effet, outre le fait que celui-ci reste liquide à pression ambiante pour toute température, celui-ci présente une singulière transition de phase (toujours à pression ambiante) vers 2.17 K. Celle-ci, découverte par P. Kapitza et John Allen en 1938 [163], est appelée *transition* λ en rapport avec la forme caractéristique prise par la courbe de chaleur spécifique c_p du fluide à une telle température.

Pour les températures plus faibles, de nombreuses propriétés surprenantes de l'hélium apparaissent : lorsqu'on diminue sa pression, le nouvel état fluide s'évapore sans bouillir. Plus surprenant, il semble s'écouler dans les capillaires de tous diamètres à la même vitesse, en contradiction avec le résultat classique de Poiseuille, et suggérant que le fluide obtenu ne possède *aucune viscosité*. Toutefois, d'autres mesures, effectuées en étudiant le frottement

exercé sur des disques en rotation dans une telle phase liquide indiquent que celle-ci exerce bien une force de traînée, et possède donc une viscosité non nulle. Plus étonnant encore, ces fluides forment un mince film le long de toute paroi, si bien qu'il s'échappent des récipients ouverts ... mais aussi de bien des récipients supposés fermés mais qui laissent des petites ouvertures dans lesquelles peut s'écouler le superfluide. Cet effet est parfois appelé *effet Onnes*. Enfin, la conductivité thermique d'un tel fluide est extrêmement élevée, si bien qu'il n'existe aucun gradient stationnaire de température au sein d'un superfluide.

7.1.2 Modèle à deux fluides

La théorie réconciliant ces deux aspects a été formulée par L. Landau, trois ans plus tard : le *superfluide* observé peut être vu comme la superposition de deux fluides. Le premier est un fluide normal, de champ de vitesses \mathbf{v}_n et de masse volumique ρ_n . Ce fluide est *a priori* visqueux et peut transporter un flux d'entropie s . Le second fluide est purement superfluide. Il possède un champ de vitesses \mathbf{v}_s irrotationnel et sans viscosité et une masse volumique ρ_s . Il correspond à une *condensation* d'une fraction non négligeable d'atomes d'hélium (en pratique d'hélium 4) dans l'état quantique fondamental, et ne transporte donc aucune entropie. À ce titre, la transition λ possède bien des caractéristiques communes avec les condensations de Bose. Lorsque la température décroît en dessous de $T_\lambda = 2.17$ K, la masse volumique effective du superfluide, ρ_s , augmente jusqu'à atteindre ρ pour les valeurs de T les plus faibles (voir figure 7.1).

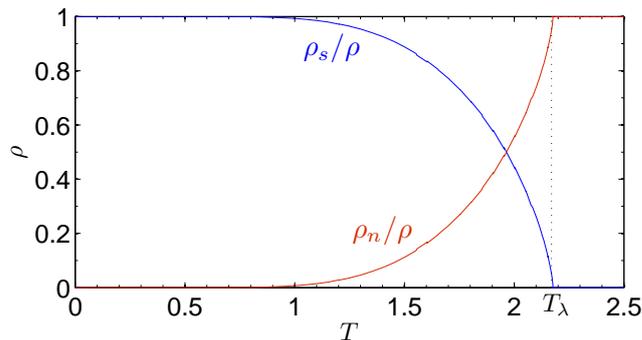


FIGURE 7.1 – Masses volumiques relatives ρ_s/ρ et ρ_n/ρ du superfluide idéal et du fluide normal dans l'hélium liquide au voisinage de la transition λ , dans le cadre du modèle à deux fluides. La température de transition, $T_\lambda = 2.17$ K, est obtenue à une pression de 0.05 bar, correspondant à un point triple de l'hélium.

Il reste possible d'écrire quelques équations simples pour décrire l'hydrodynamique des superfluides : l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (7.1)$$

est toujours valide, et relie la masse volumique du fluide réel,

$$\rho = \rho_s + \rho_n \quad (7.2)$$

à l'impulsion totale du fluide \mathbf{j} ,

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s. \quad (7.3)$$

Il est également possible de traduire en équation le fait que l'entropie est exclusivement transportée par le fluide normal, ce qui nous fournit une deuxième équation. Deux autres équations

transcrivent le caractère parfait de la composante superfluide et la conservation de l'impulsion. À partir de ces équations, il est possible d'en déduire deux vitesses de propagation de perturbations dans le superfluide. La première, appelée *premier son*, représente celle d'une perturbation en pression, comme pour un fluide normal. Le *second son* décrit quant à lui la propagation d'*ondes de température*, en opposition au caractère diffusif de la température des fluides normaux. Ce résultat explique bien les valeurs observées, extrêmement élevées, de l'apparente conductivité thermique du superfluide. Cette théorie permet en outre de résoudre l'apparent paradoxe de la viscosité de la phase superfluide : en effet, le fluide qui s'écoule à travers des petits capillaires est essentiellement composé de superfluide parfait, le fluide normal ne pouvant s'y écouler. Par contre, un cylindre tournant (et *a fortiori* une turbine) verra s'opposer à son mouvement une force de traînée, qui résultera *a priori* de la somme de la traînée fluide et de l'éventuelle traînée superfluide.

7.1.3 Superfluides en rotation, vorticité et dissipation

7.1.3.1 Une vorticité quantifiée

La théorie quantique de la superfluidité nous indique de plus que la vitesse d'un superfluide \mathbf{v} — qui est désormais la vitesse de la *totalité* du fluide — est très simplement liée à la phase φ de la fonction d'onde associée à ce dernier. Nous avons donc :

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \quad (7.4)$$

où \hbar est la constante de Planck réduite, et m la masse des atomes de superfluide. Si l'on suit cette phase sur un contour fermé, celle-ci doit rester continue, modulo 2π : en suivant un tel contour \mathcal{C} sur un tour, la phase peut alors varier de $2n\pi$. Si le contour \mathcal{C} encercle une surface \mathcal{S} qui ne contient que du superfluide, ce qui revient à considérer un domaine \mathcal{S} simplement connexe, l'analyse complexe nous indique que $n = 0$. Cette condition n'est pas toujours vraie

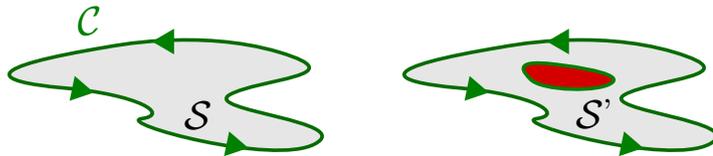


FIGURE 7.2 – Contours \mathcal{C} encerclant des domaines \mathcal{S} simplement connexe (à gauche) contenant uniquement du superfluide irrotationnel, et \mathcal{S}' , non simplement connexe (à droite) qui peut contenir dans certaines de ses parties (en rouge) des singularités ou du fluide non irrotationnel.

pour des domaines non simplement connexes (voir figure 7.2), même si n reste un entier. Cela implique une quantification de la circulation de la vitesse dans tous les cas :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2n\pi\hbar}{m} \quad (7.5)$$

Mais cette équation peut aussi être réécrite grâce au théorème de Stokes pour faire apparaître la vorticité \mathbf{w} :

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2n\pi\hbar}{m} \quad (7.6)$$

C'est cette relation qui exprime l'idée générale de quantification du champ de vorticité dans les superfluides.

7.1.3.2 Fluide et superfluide en rotation

Un écoulement fluide dans un référentiel en rotation d'axe $\boldsymbol{\Omega}$ possède en général un champ de vorticité \mathbf{w} non nul dans le référentiel du laboratoire. Pour un fluide au repos dans le référentiel tournant, celui-ci n'est toutefois pas nul : nous avons en effet

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_z \quad (7.8)$$

Par conséquent, pour un écoulement turbulent dans un référentiel en rotation, la vorticité poss dera deux contributions, la première provenant de la rotation solide, et la seconde de la vorticité de l'écoulement *dans le référentiel tournant* :

$$\mathbf{w} = 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_z + \mathbf{w}' \quad (7.9)$$

Que se passe-t-il si nous mettons un superfluide initialement au repos dans un référentiel tournant ? Il semble impossible d'obtenir un superfluide au repos dans le référentiel tournant, hormis pour des vitesses de rotation Ω_n bien particulières telles que :

$$2\Omega_n = \frac{2n\pi\hbar}{m}, \quad (7.10)$$

Cet équilibre n'est d'ailleurs pas possible dans un superfluide « pur » où la vorticité est nulle (voir équation 7.6). Par conséquent, un écoulement superfluide mis en rotation va contrebalancer la rotation en générant une série de vortex qui apparaissent de manière discontinue lorsque la vitesse de rotation augmente [164, 165]. Ces vortex forment un réseau similaire aux réseaux de vortex de courant observés dans les supraconducteurs de type II [166].

7.1.3.3 Le problème de la dissipation

Il est difficile de concevoir des mécanismes permettant de dissiper l'énergie dans un superfluide, sachant qu'un écoulement superfluide peut subsister *a priori* sans décliner pendant une durée infinie. Les processus selon lesquels l'énergie cinétique du fluide va être dissipée sont aujourd'hui assez bien connus. Pour des températures non nulles, une partie de la dissipation provient d'un frottement existant entre les vortex et la partie « normale » de l'écoulement dans le modèle à deux fluides, qui concentre alors la dissipation de l'énergie cinétique de l'écoulement. Comme le fait remarquer un article de Kobayashi et Tsubota [167], ce processus devient marginal aux très faibles températures. Pour ces températures, un processus de recombinaison de paires de vortex a été prédit, puis observé expérimentalement [168] dans l'hélium liquide. Ce processus dissipe l'énergie par l'intermédiaire d'excitations sonores, et devient prépondérant lorsque la fraction de fluide normal tend vers zéro. Il existe en outre théoriquement un autre processus dissipatif   très basse température, qui verrait les vortex suivre la cascade de Kolmogorov et se transformer en excitations élémentaires lorsque ces derniers deviennent suffisamment petits.

7.2 Spécificités du montage SHREK

7.2.1 Réfrigération et isolation thermique

L'expérience SHREK est conçue pour être remplie d'*hélium liquide*. Ce dernier se liquéfie à pression ambiante aux alentours de 4.2 K. Nous savons d'expérience que le von Kármán dans l'eau au CEA Saclay dissipe dans l'écoulement une puissance mécanique pouvant atteindre 3.6 kW. Cela implique généralement une augmentation importante de la température au sein

de l'écoulement, la température pouvant monter d'une vingtaine de degrés pour les expériences les plus longues. Afin de maintenir l'hélium liquide, il faut donc constamment absorber la chaleur produite par un tel écoulement. Nous rappelons rapidement la formule déterminant dans nos expériences la puissance injectée :

$$\mathcal{P} = 2\pi C f \quad (7.11)$$

$$= K_p \rho R^5 (2\pi f)^3 \quad (7.12)$$

Cet aspect est primordial pour l'expérience SHREK : en effet, à de si basses températures, il devient extrêmement ardu de réfrigérer l'hélium. La station mise en place au sein du Service des Basses Températures au CEA de Grenoble nous permet d'extraire 400 W de puissance de l'écoulement à 1.8 K. Cela peut paraître faible, mais seuls le LHC, avec une puissance de froid de 20 000 W à 1.8 K, et le tokamak ITER, qui fournira 65 000 W à 4.5 K (ce qui donnerait environ 9500 W à 1.8 K si sa conception est identique à celle du LHC) fournissent, ou fourniront en Europe des puissances de froid supérieures.

Cette puissance est redistribuée dans un grand bain d'hélium liquide qui entoure le cylindre dans lequel le von Kármán est plongé. Ce cylindre est en outre muni de « doigts » en cuivre qui viennent augmenter la surface d'échange entre le bain et la cuve cylindrique de l'écoulement. Afin de limiter les pertes thermiques avec l'extérieur, le bain contenant l'hélium liquide est entouré d'un isolant multicouches et placé dans une double enceinte : le liquide est contenu dans une première cuve, elle-même entourée d'une deuxième cuve mise sous vide (à 10^{-7} bar) qui permet une excellente isolation thermique du reste de l'expérience. C'est cette dernière cuve qui est en « contact » avec l'extérieur.

7.2.2 Construction de l'expérience

7.2.2.1 Dimensions

Afin de minimiser la puissance dissipée par l'expérience, la collaboration SHREK a privilégié une grande expérience : en effet, si nous exprimons \mathcal{P} en fonction du nombre de Reynolds, Re , et des propriétés du fluide dans l'expérience, nous avons :

$$\mathcal{P} = \frac{\rho \nu^3}{R} Re^3 K_p \quad (7.13)$$

Pour deux expériences superfluides à la même température, la même pression et le même nombre de Reynolds, une plus grande expérience dissipera moins de puissance (car elle pourra tourner moins vite). Par conséquent, le cylindre possède un rayon extérieur de 40 cm et, par souci de se rapprocher des expériences de Saclay, possède le même rapport d'aspect $h/R = 1.4$ et des turbines de type *TM87* de même forme que nos turbines en plastique. En contrepartie, l'expérience superfluide tourne à une vitesse bien plus faible, l'expérience sera en effet limitée à 2 Hz dans le sens (+) comme dans le sens (-). Par conséquent, un rapport d'engrenage (l'équivalent chez nous du rapport de poulies) utilisé dans l'expérience est *très élevé* : cela permet d'une part de disposer d'une précision sur la vitesse appréciable et d'un couple mécanique important.

7.2.2.2 Transmission et mesure des couples

Transmission et étanchéité Afin de transmettre le couple des moteurs, qui permettra de faire tourner les turbines, deux méthodes sont envisageables. La première consiste à directement installer des moteurs dans la partie froide de l'expérience : cela n'est pas vraiment une bonne idée sachant que le moteur dissipe lui aussi de l'énergie et qu'il prend une place non négligeable dans un environnement plutôt exigü. De plus, il faut trouver des moteurs qui puissent fonctionner à de telles températures. La solution retenue consiste donc à

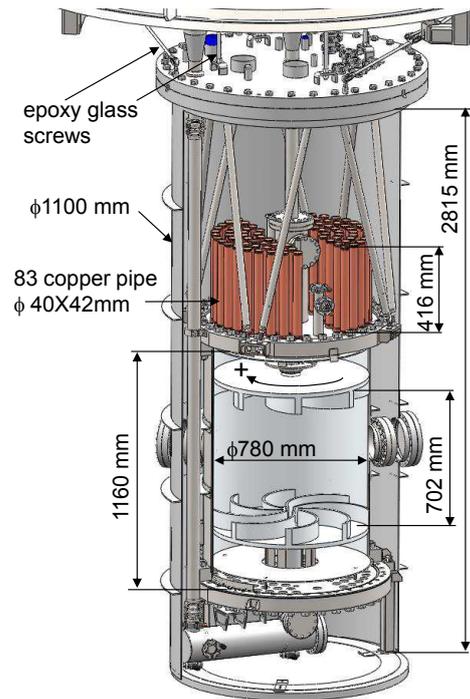


FIGURE 7.3 – Schéma de l'expérience SHREK, avec les deux cylindres contenant de l'hélium liquide (superfluide ou non). Nous pouvons y voir les « doigts » de cuivre qui effectuent un pont thermique entre les deux cuves, ainsi que les barres anti-roulis qui permettent à l'ensemble de la structure de garder une bonne rigidité. Les renvois mécaniques de l'arbre mécanique du bas sont également visibles.

faire traverser des arbres mécaniques jusqu'à l'extérieur, où les moteurs sont placés. Pour des raisons historiques, la cuve sous vide ne possède qu'une seule ouverture, ce qui permet de limiter les pertes thermiques. Il n'est donc pas possible de faire passer des arbres mécaniques de chaque côté de l'expérience, comme à Saclay, et des renvois mécaniques sous la forme d'engrenages permettent donc aux deux arbres de sortir du même côté de la cuve sous vide. Afin de transmettre efficacement le couple fourni par les moteurs aux turbines tout en assurant une étanchéité parfaite de l'expérience, la collaboration a utilisé deux solutions distinctes permettant chacune de traverser une cuve :

1. Entre l'extérieur et la cuve mise sous vide, une jonction ferrofluidique a été utilisée. Le ferrofluide, pris au piège dans un système d'aimants, ne s'évapore pas, ne fuit pas et permet alors d'assurer l'étanchéité en rotation tout en limitant les frottements mécaniques. Il permet également d'éviter toute fuite d'hélium dans l'état superfluide, qui aurait tendance à s'échapper.
2. Une fois de plus, afin de limiter les pertes thermiques (et de fuites, l'Hélium superfluide ayant la fâcheuse tendance à s'écouler dans des très petits interstices), il a été décidé de ne pas laisser d'ouverture entre la cuve sous vide et le bain d'hélium. À la place, l'arbre mécanique a été coupé, et des paliers magnétiques ont été installés. Une partie de ceux-ci se trouvent donc dans la cuve sous vide, et il a été décidé que l'autre partie serait directement incluse dans la cuve du von Kármán superfluide.

Un limiteur de couple a été installé pour éviter tout endommagement au cas où le système se bloquerait à cause d'un problème mécanique. Dans un tel cas, le moteur est débrayé de l'arbre mécanique et celui-ci ralentit jusqu'à s'arrêter au lieu de casser sous l'effort fourni par les moteurs. Ce limiteur de couple est intervenu à plusieurs reprises durant la série d'expé-



FIGURE 7.4 – L’intérieur du cylindre de l’expérience SHREK, avec deux des chercheurs, Bernard Rousset et Michel Bon-Mardion, qui entretiennent l’expérience au sein du SBT (à gauche). Nous pouvons voir la taille importante de l’expérience, ainsi que plusieurs des « curiosités » liées à l’utilisation d’hélium superfluide, notamment les renvois de transmission visibles sous la turbine du bas et les doigts en cuivre visibles au-dessus de la turbine du haut. Le cylindre fermant l’écoulement est visible à l’arrière-plan au centre, tandis que la cuve contenant le bain d’hélium liquide et assurant l’isolation thermique est visible à droite, entourée d’isolant multi-couches. Crédits photographiques : Artechnique Photographie, tous droits réservés.

riences : il faut donc régulièrement veiller à écouter le bruit caractéristique provoqué par le débrayage et l’embrayage de la transmission sous l’action du limiteur de couple afin d’éviter de prolonger inutilement les expériences où des problèmes mécaniques empêchent la bonne rotation des turbines.

Dernièrement, pour atteindre les vitesses de rotation requises sans trop faire intervenir le limiteur de couple, les turbines sont accélérées selon une rampe en vitesse très faible. Cela est lié au moment d’inertie J des turbines de SHREK, J_{SHK} . En effet, leur aspect est identique aux turbines de Saclay, qui possèdent un moment d’inertie J_{VK2} , mais sont quatre fois plus grandes, et fabriquées en métal. L’analyse dimensionnelle nous indique alors que :

$$J_{\text{VK2}} \propto MR^2 \propto \rho_p R^3 \cdot R^2 \quad (7.14)$$

$$J_{\text{SHK}} \propto M'R'^2 \propto 4^5 \rho_m R^3 \cdot R^2 \quad (7.15)$$

$$\geq 2000 J_{\text{VK2}} \quad (7.16)$$

où ρ_p et ρ_m sont respectivement la masse volumique du plastique et du métal des turbines. C’est ce rapport de moments d’inertie qui impose des rampes en vitesse faibles.

7.2.3 Les mesures de l’expérience SHREK

7.2.3.1 Mesure de couples

L’expérience SHREK repose en partie, comme l’expérience VK2, sur la mesure de couples mécaniques. C’est d’ailleurs dans le cadre de la collaboration que les couplemètres SCAIME ont été installés et testés avec Éric Herbert sur l’expérience de Saclay. Nous ne sommes donc

pas étonnés de retrouver ici deux paires de couplemètres SCAIME qui viennent mesurer le couple exercé sur chacun des deux arbres en différents points de l'expérience : le premier couplemètre, appelé couplemètre *froid*, est localisée sur l'arbre mécanique dans la partie superfluide. Ces couplemètres ont été largement modifiés par le SBT afin de fonctionner correctement aux très basses températures. Le second, appelé couplemètre *chaud*, effectue la mesure du couple à l'extérieur de la cuve. Durant la campagne de mesures de 2012, nous avons vu que les couplemètres froids donnaient bien une mesure plus précise du couple des moteurs, mais leur fiabilité n'était en contrepartie pas excellente : l'un d'entre eux a rapidement rendu l'âme dès le deuxième jour de la campagne.

7.2.3.2 Mesure de vitesse

Les variateurs de l'expérience possèdent une sortie mesurant la vitesse des turbines. Nous considérerons ici que cette mesure est fiable, et nous l'utiliserons pour vérifier que les vitesses de rotation de l'expérience sont bien respectées. Nous vérifierons en outre que le limiteur de couple n'est pas en action à la fois sur ces mesures de vitesse, et sur les mesures de couple qui présentent dans un tel cas un signal périodique bien particulier. Enfin, très récemment, des stries ont été imprimées sur les deux turbines de SHREK : celles-ci vont venir défléchir un faisceau laser à des instants réguliers dépendant de la fréquence de rotation des turbines. Cette mesure alternative de la fréquence de rotation des turbines servira pour les prochaines campagnes d'expériences.

7.2.3.3 Mesure de dissipation

En plus des mesures des couples et des mesures de vitesse, le fonctionnement de l'expérience permet des mesures de calorimétrie. En effet, la cuve mise sous vide permet une excellente isolation thermique, et le bain d'hélium comme la cuve cylindrique possèdent des sondes de température. En maintenant ces températures constantes au cours d'une expérience, la puissance dissipée dans l'écoulement est exactement équilibrée par la puissance de froid du groupe cryogénique.

Pour des raisons évidentes d'inertie du groupe froid présent au SBT, il a été décidé que la puissance de froid serait généralement maintenue constante. Des résistances chauffantes ont été alors placées derrière les boucliers des turbines dans la cuve cylindrique de l'écoulement, et permettent de fait de « diminuer » la puissance de froid effective du groupe cryogénique. Le modèle complet permettant de calculer la dissipation tient compte en pratique d'autres paramètres comme la chaleur spécifique de la cuve en cuivre et sa conductivité thermique pour remonter à des mesures plus précises de la dissipation thermique de l'écoulement.

7.2.3.4 Les autres mesures de l'écoulement

Afin de mesurer des propriétés plus locales de l'écoulement dans la cuve, plusieurs systèmes originaux sont en cours de développement. Malheureusement, aucun d'entre eux n'était présent lors de la première campagne de mesures. Le premier d'entre eux est un micro-cantilever placé dans l'écoulement, et muni d'une jauge de déformation. Celle-ci va être défléchie par le fluide environnant, ce qui nous fournira une mesure locale de la vitesse dans une direction. Cet outil a été développé par Philippe Roche et Julien Salort durant la thèse de ce dernier [169]. Le deuxième procédé repose sur des mesure de second son dans l'écoulement. Le détecteur est constitué de deux parties formant un résonateur, dont la première partie va chauffer l'écoulement à une fréquence élevée correspondant à un des modes de la cavité. La deuxième partie du détecteur va mesurer l'atténuation de ce second son par l'écoulement, qui est quantitativement liée à la densité de lignes de vorticité de l'écoulement superfluide. D'autres techniques plus conventionnelles sont également à l'étude : des sondes Pitot (également développées durant

la thèse de Julien Salort [170, 169]), des fils chauds et des transducteurs acoustiques sont également à l'étude pour une intégration dans SHREK.

7.3 Analyse des couples et de la dissipation

7.3.1 La campagne de mesures

La première série d'expériences datant d'octobre 2012 était une campagne de tests pour savoir, tout simplement, si l'expérience SHREK fonctionnait. Les premiers tests, qui ont rapidement montré des résultats au delà de nos espérances, ont poussé la collaboration à comparer les mesures (essentiellement de couple) de l'expérience SHREK dans un fluide normal et dans un superfluide. Cette série de mesures a donc pu s'appuyer sur les nombreux résultats que le groupe de Saclay a obtenus dans l'eau. Il a donc été décidé d'effectuer principalement des mesures dans le sens $(-)$, à diverses asymétries θ , afin de comparer l'aspect du cycle d'hystérésis observé dans l'eau avec le comportement de SHREK dans les mêmes conditions.

7.3.2 Présence d'états bifurqués

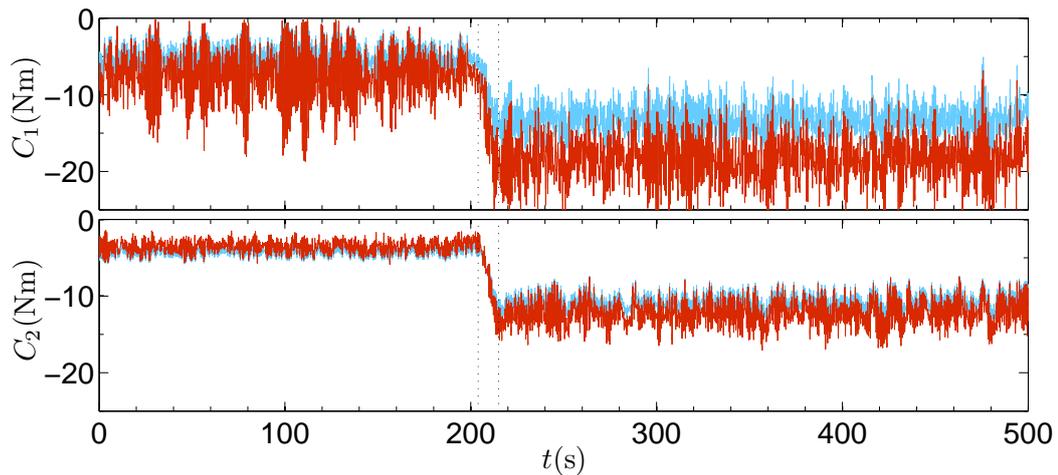


FIGURE 7.5 – Signal de couplemètres cryogéniques froids (—) et des couplemètres ambiants chauds (—), pour une expérience effectuée dans le sens $(-)$ à $\theta = 0$. Un événement associé à une bifurcation statistique spontanée est visible entre les deux lignes en pointillés.

Les mesures les plus simples nous révèlent déjà d'importantes informations quant à la dynamique de l'écoulement : la figure 7.5 nous montre l'exemple d'une expérience effectuée à $\theta = 0$ dans le sens $(-)$, pour une température $T = 1.8$ K et donc dans l'hélium superfluide. Celle-ci montre clairement une augmentation brusque et irréversible du couple entre deux états stationnaires. Nous interprétons un tel événement comme une transition $(s) \rightarrow (b)$, observée à $\theta = 0$. De la même manière que dans l'eau, l'écoulement superfluide possède donc trois états statistiques dans le sens $(-)$, l'un d'entre eux étant \mathcal{R}_π symétrique, et les deux autres, non symétriques, étant images l'un de l'autre par application d'une telle symétrie.

Les mesures dans le sens $(+)$ ont été plus rares, mais celles-ci laissent penser que le couple $C_{1,2}(\theta)$ ne possède qu'une seule branche continue et qu'aucune bifurcation n'est accessible dans ce sens, une fois de plus en accord avec les expériences effectuées dans l'eau. Ces éléments sont des présages intéressants du comportement de l'écoulement superfluide qui possède déjà des similitudes avec l'écoulement turbulent classique.

7.3.3 Calibrations et couples adimensionnés K_p

Nous pouvons alors tenter de comparer les couples adimensionnés K_p correspondant à de tels états statistiques. Bien entendu, il faudra une fois de plus effectuer des calibrations des couples, afin d'en déduire les couples statiques (importants) liés aux renvois éventuels d'arbre mécanique et aux joints d'étanchéité ferrofluidiques. La figure 7.6 nous montre bien la différence entre la transmission du couple en haut et en bas : en effet, plus d'1 Nm de couple est consommé uniquement par la transmission du couple du bas, ce qui n'est pas visible sur le signal du haut. Cela semble cohérent avec la quantité de bruit observée sur le signal du couple du bas de la figure 7.5. L'ajustement en une loi quadratique avec ordonnée à l'origine, du type $C = C_{\text{stat}} + a(2\pi f)^2$ semble une fois de plus judicieux : le tableau 7.1 résume les valeurs obtenues pour de tels paramètres. En utilisant les mêmes conventions que dans les précédentes sections, nous pouvons enfin déterminer une estimation du K_p des expériences, qui n'est autre que $a/(\rho R^5)$. Les valeurs obtenues, pour une masse volumique du superfluide $\rho_{SF} = 147 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et un rayon $R = 0.39 \text{ m}$ semblent tout à fait compatibles avec celles issues des expériences dans l'eau.

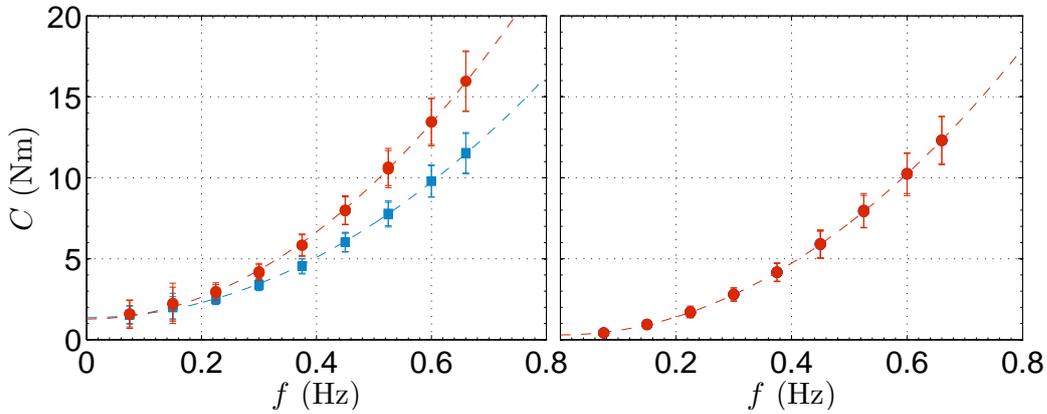


FIGURE 7.6 – Calibration effectuée dans le sens (–), pour différentes expériences réalisées dans l'état (b_2) à $\theta = 0$ dans l'état superfluide. Les symboles (■) représentent les moyennes des couples cryogéniques, et les symboles (●) les couples à température ambiante. Les barres d'erreur caractérisent l'écart-type des couples à la fréquence associée. Les tiretés correspondent à des ajustements quadratiques avec ordonnée à l'origine non nulle. La figure de gauche présente les signaux liés aux couples du bas. Celle de droite, le signal du couple ambiant du haut : le couple cryogénique du bas était en panne.

	SHREK			VK2		
	C_{stat} (Nm)	a ($\text{m}^2 \cdot \text{kg}$)	K_p	C_{stat} (Nm)	a ($\text{m}^2 \cdot \text{kg}$)	K_p
Couple bas cryo.	1.37	0.59	0.44			
Couple bas amb.	1.28	0.85	0.64	0.15	$4.5 \cdot 10^{-3}$	0.45
Couple haut amb.	0.30	0.70	0.53	–0.18	$5.5 \cdot 10^{-3}$	0.55

TABLE 7.1 – Paramètres issus de la calibration de l'expérience SHREK de la figure 7.6. Le couple statique C_{stat} est directement exprimé en unités SI, a est le préfacteur du terme quadratique de l'ajustement parabolique du couple, et le K_p correspond à sa définition usuelle dans le cadre de cette thèse. Les mêmes données, pour VK2, y ont été juxtaposées à titre de comparaison.

7.3.4 Analyse des couples en fonction du nombre de Reynolds

La comparaison des K_p peut être poussée en étudiant sa dépendance en fonction du nombre de Reynolds. Les mesures dans l'hélium normal viennent donc naturellement prolonger à Re très élevé les mesures de la figure 5.4 du chapitre 5. La définition d'un tel nombre de Reynolds pour l'écoulement superfluide n'est pas triviale, et a posé un premier problème. En effet, le modèle à deux fluides vient nous indiquer que l'écoulement superfluide possède une composante parfaite sans aucune viscosité (d'où $Re = \infty$) et une autre composante normale qui possède une viscosité non nulle. Les écoulements réellement observés conservent d'ailleurs cette ambiguïté, déjà décrite dans le début de ce chapitre. Nous avons donc choisi de calculer un nombre de Reynolds superfluide en nous basant sur la viscosité de la composante normale du fluide pour $T \leq T_\lambda$. Ce choix est relativement arbitraire : nous aurions tout aussi bien pu utiliser le nombre de Reynolds quantique, défini par rapport au quantum de moment cinétique, $R_q = mR^2(f_1 + f_2)/\hbar$, dans notre comparaison.

Afin de se rapprocher des expériences effectuées dans le von Kármán de Saclay, des expériences complémentaires ont été effectuées à Grenoble à température ambiante dans l'azote (gazeux, sous pression). Les nombres de Reynolds obtenus sont alors compris entre $4 \cdot 10^5$ et $7 \cdot 10^5$ et ont permis une comparaison directe des résultats de l'expérience, qui montrent un bon alignement entre les deux expériences. Ces mesures indiquent en outre une tendance des K_p à converger vers des valeurs finies pour les nombres de Reynolds les plus élevés. Ces valeurs semblent, aux imprécisions près, identiques dans le cas de l'hélium liquide et dans celui de l'hélium superfluide.

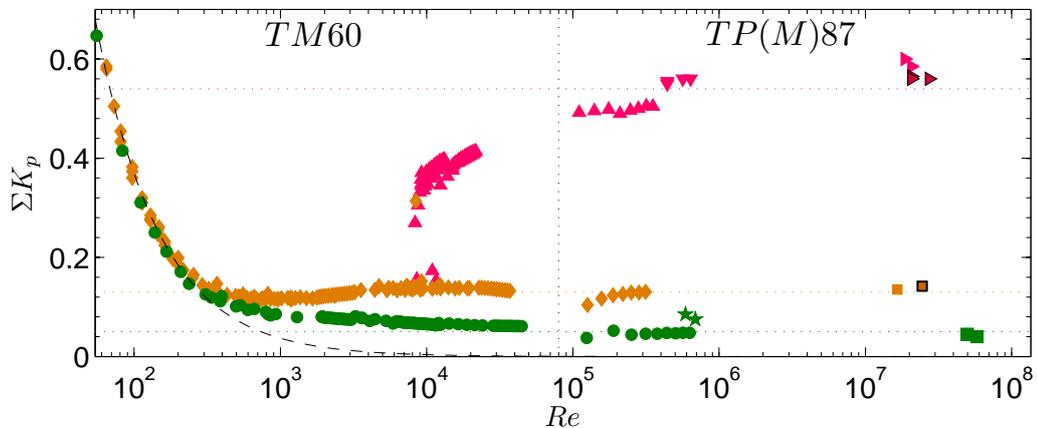


FIGURE 7.7 – Comparaison de $\Sigma K_p = 0.5(K_{p,1} + K_{p,2})$ pour tous les nombres de Reynolds accessibles aux différents von Kármán à $\theta = 0$, pour différents fluides. La partie à gauche est tirée de la figure 5.4 issue de la thèse de Florent Ravelet, et concerne les TM60. La partie à droite est effectuée avec des TP87 pour VK2 ou des TM87 pour SHREK. (\blacktriangle), expériences de VK2 dans le sens (–) dans l'état statistique bifurqué, avec un mélange eau-glycérol (cas TM60) et de l'eau pour la série de Re plus élevée (cas TP87). (\blacktriangledown), même état statistique dans SHREK, avec de l'azote. (\blacktriangleright), même écoulement, mais dans l'hélium liquide. Le symbole à contour noir représente le résultat obtenu dans l'état superfluide. (\blacklozenge), écoulement symétrique dans le sens (–) de VK2 dans un mélange eau-glycérol ou dans l'eau. (\blacksquare), même écoulement mais dans SHREK et dans l'hélium liquide (superfluide lorsque le symbole possède un contour noir). (\bullet), écoulement dans le sens (+) dans VK2. (\star), même conditions, dans SHREK et dans l'azote. (\blacksquare), même écoulement, dans l'hélium liquide. Les pointillés horizontaux sont des guides permettant d'apprécier l'alignement des valeurs de K_p . Le tireté noir représente la condition $K_p \propto Re^{-1}$.

Nous voyons donc que le passage de l'état fluide normal vers l'état superfluide ne semble pas affecter le taux de dissipation observé dès $Re \geq 10^4$. Il semblerait donc que pour un tel écoulement dont le forçage est \mathcal{R}_π symétrique, le mécanisme microscopique de dissipation ne joue aucun rôle.

7.3.5 Cycles effectués à $\theta \neq 0$

7.3.5.1 Aspect qualitatif du cycle à très haut nombre de Reynolds

L'écoulement classique de l'expérience de von Kármán à des asymétries différentes de $\theta = 0$ a montré qu'un écoulement à θ non nul dans le référentiel du laboratoire était équivalent un écoulement effectué en régime symétrique dans un référentiel tournant, lié au cylindre, de vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = f\theta\mathbf{e}_z$. Plus précisément, cette relation est vraie pour des petites valeurs du nombre d'Ekman [5], lorsque les effets de couches limites visqueuses sont faibles par rapport aux termes liés à la force de Coriolis (cela est donc vrai partout sauf à proximité immédiate des parois) :

$$Ek = \frac{\nu}{f\theta R^2} \leq 10^{-4} \quad (7.17)$$

Les écoulements superfluides, bien que possédant un nombre d'Ekman très faible, ne peuvent pas posséder de champ de vitesse en rotation solide à cause de la nature quantique de l'écoulement (voir la section 7.1.3). Par conséquent, il est difficile *a priori* de connaître l'écoulement qui sera produit dans SHREK lorsque le θ imposé est différent de 0. Nous avons mesuré une fois de plus les valeurs de K_p qui caractérisent de manière quantitative les excès de dissipation liés à la turbulence, et ce pour diverses valeurs de θ . La figure 7.8 nous renseigne à ce sujet : malgré des mesures un peu bruitées, nous voyons que les couples adimensionnés K_p issus de l'expérience VK2 dans l'eau, ceux de SHREK dans l'azote, dans l'hélium liquide et dans l'hélium superfluide sont tout à fait comparables. Par conséquent, soit les quelques 15% restants de fluide normal aux plus basses températures concentrent toute la dissipation, « noyant » la dissipation du superfluide, soit le superfluide dissipe (par un processus quelconque) une quantité d'énergie comparable à celle du fluide normal avec lequel il est en équilibre à $T \leq T_\lambda$. Ce résultat est confirmé par l'étude de la figure 7.9, qui montre une différence de couple ΔK_p compatible avec les mesures effectuées en eau.

Nous pouvons directement calculer la puissance normalisée dissipée dans l'expérience P_{norm} en utilisant les mesures de K_p :

$$P_{\text{norm}} = \frac{2\pi f_1 C_1}{\rho R^5 (2\pi f)^3} + \frac{2\pi f_2 C_2}{\rho R^5 (2\pi f)^3} \quad (7.18)$$

$$= (1 + \theta)K_{p,1} + (1 - \theta)K_{p,2} \quad (7.19)$$

$$= 2\Sigma K_p - \theta \Delta K_p \quad (7.20)$$

Cette mesure de la puissance dissipée est alors comparée à la donnée de la puissance de froid réellement retirée par le groupe de froid et décrite précédemment. Nous pouvons voir sur la figure 7.10 que les deux séries de données semblent montrer une même tendance à la croissance de la dissipation lorsque $|\theta|$ augmente, quoique leurs valeurs semblent légèrement différentes (une différence de l'ordre de 33% étant observée). La dissipation fournie par les K_p de SHREK semble par ailleurs sensiblement supérieure à celle de VK2, visible sur la même figure. Cette différence s'explique en partie par les frottements mécaniques liés aux arbres, renvois d'angles et aux autres éléments mécaniques présents dans la cuve interne contenant le superfluide. À ces points viennent s'ajouter bon nombre de points aberrants de l'estimation de la puissance de froid réellement retirée, notamment pour $\theta = 0$: dans un tel cas, la dissipation des expériences effectuées à différentes vitesses va posséder deux contributions, l'une liée aux frottements mécaniques (qui varie, nous le supposons, comme f) et l'autre liée à l'écoulement

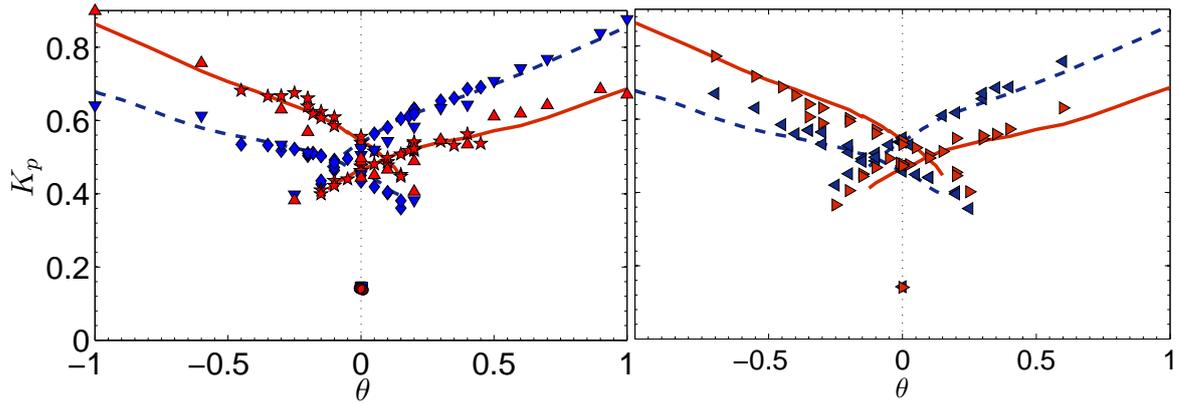


FIGURE 7.8 – Couples adimensionnés K_p corrigés par les valeurs de K_p en $\theta = 0$ afin d'être symétriques $\theta \rightarrow -\theta$. Ces couples symétrisés sont exprimés en fonction de θ pour différents fluides. À gauche, données superposées incluant des expériences dans l'azote ((\diamond), couple du bas, et (\star), couple du haut) et dans l'hélium liquide ((∇), couple du bas, et (\blacktriangle) couple du haut). À droite, expériences dans l'hélium superfluide ((\blacktriangleright), couple du bas et (\blacktriangleleft) celui du haut). Les couples adimensionnés des expériences dans l'eau sont superposés à chacun des graphes (tiretés pour le couple du bas et traits pleins pour le couple du haut).

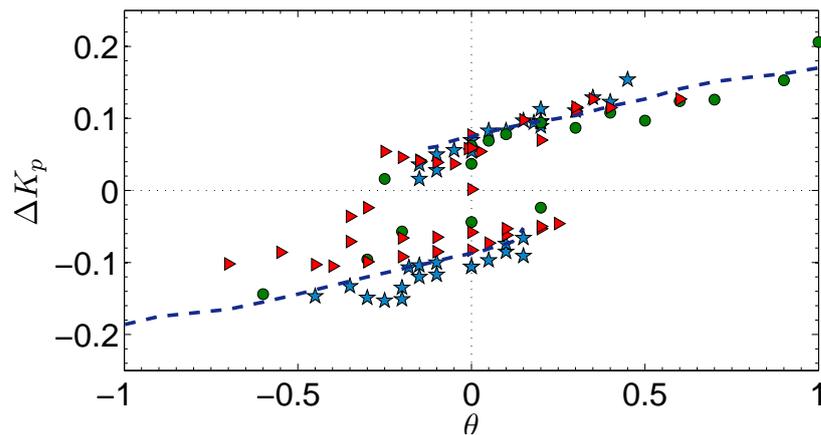


FIGURE 7.9 – Différence des couples normalisés ΔK_p de SHREK, décalés pour centrer les courbes par rapport à $\theta = 0$ (même procédé que pour la figure 7.8). (\star), expérience dans l'azote, (\bullet) expérience dans l'hélium liquide, et (\blacktriangleright), hélium superfluide. Le tireté bleu marine correspond au ΔK_p calibré obtenu par VK2 dans l'eau.

(qui varie comme f^3), qui n'ont donc pas le même poids lorsque f change (les expériences à $\theta = 0$ ayant été effectuées pour diverses valeurs de f). Le calcul de cette puissance est en outre particulièrement sensible à certains paramètres de calibration qui ont visiblement provoqué des erreurs, certaines expériences atteignant une dissipation normalisée de 50 (soit 5000 W consommés dans l'expérience à $f = 0.66$ Hz).

7.3.5.2 Évolution des caractéristiques du cycle avec Re

Le cycle d'hystérésis semble donc avoir une forme très semblable à celle du cycle dans l'eau à haut nombre de Reynolds. Cette observation semble cohérente avec le fait que la forme du cycle ne semblait pas beaucoup évoluer pour les nombres de Reynolds élevés dans l'expérience en eau. Pour caractériser plus précisément les éventuelles différences d'ouverture de cycle à très haut nombre de Reynolds, nous allons examiner la différence de $\Delta K_{p,0}$ entre les branches

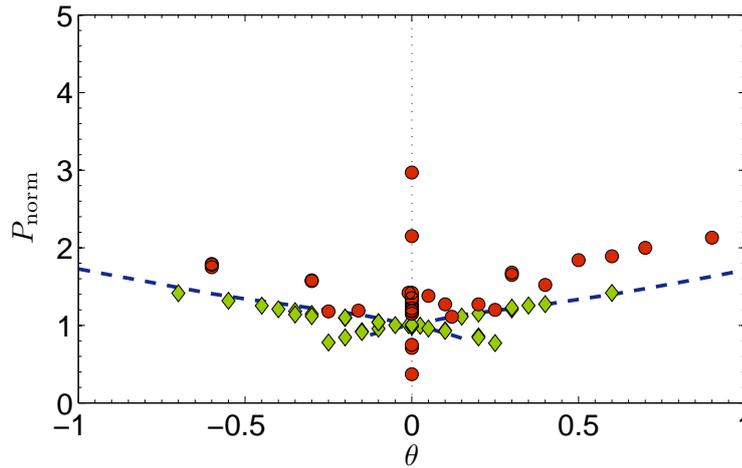


FIGURE 7.10 – Puissance dissipée normalisée P_{norm} dans l'écoulement superfluide. (◆) est la donnée de $2\Sigma K_p - \Delta K_p$ identifié à P_{norm} par la relation 7.20 et (●) représente la puissance de froid réellement retirée afin de maintenir la température du superfluide constante, qui est une approximation (et une borne supérieure) de la dissipation totale au sein de l'écoulement. À titre de comparaison, le tireté correspond à la donnée de $2\Sigma K_p - \Delta K_p$ dans l'expérience de Saclay effectuée dans l'eau.

bifurquées à $\theta = 0$, qui est la *hauteur* du cycle d'hystérésis, ainsi que la taille des branches anti-naturelles $\Delta\theta_r$, qui est la *largeur* dudit cycle.

L'influence du nombre de Reynolds sur la hauteur $\Delta K_{p,0}$ du cycle d'hystérésis à $\theta = 0$ n'est pas évidente. En premier lieu, la figure 7.11 (en haut) montre bien une hauteur de cycle cohérente entre les mesures effectuées dans SHREK et dans celles de l'expérience de Saclay. Sur le graphique, les valeurs de $\Delta K_{p,0}$ à proximité des seuils d'apparition et l'abscisse de celui-ci dépendent fortement de la convention que nous avons prise (de prolonger ou non en $\theta = 0$ les branches qui s'étendent à $\theta = 1$ et $\theta = -1$) pour calculer $\Delta K_{p,0}$ au chapitre 5. Dans tous les cas, nous pouvons constater que la hausse du ΔK_p est très importante près du seuil, à la limite de la discontinuité. Pour le cas où nous avons prolongé les branches en $\theta = 0$, une loi d'échelle semble d'ailleurs se dégager près du seuil $Re_0 \approx 2900$:

$$\Delta K_{p,0} = A_0 \left| \frac{1}{\ln Re} - \frac{1}{\ln Re_0} \right|^{1/3}, \quad (7.21)$$

avec une constante A_0 égale à 0.72. Cet ajustement est montré à titre indicatif sur la figure 7.11, en tireté. La valeur de $\Delta K_{p,0}$ semble ensuite passer par un maximum aux alentours de $Re \approx 2 \cdot 10^4$ avant de diminuer pour les Re plus élevés. La hauteur du cycle d'hystérésis semble ensuite remonter à la transition vers le superfluide.

Il semble plus avantageux de tracer l'évolution de $\Delta\gamma$, qui est la hauteur du cycle d'hystérésis cette fois-ci dans l'espace (γ, θ) . Dans un tel cas, les deux séries de points peuvent s'ajuster selon une même loi de puissance (à une constante additive et multiplicative près), visible au centre de la figure 7.11 :

$$\Delta\gamma = A_1 - A_2 \left| \frac{1}{\ln Re} - \frac{1}{\ln Re_0} \right|^{1/6}, \quad (7.22)$$

Cet ajustement s'effectue avec des constantes $A_1 = 0.76$ et $A_2 = 1$, toujours pour $Re_0 = 2900$. Contrairement à $\Delta K_{p,0}$, $\Delta\gamma$ effectue un saut assez net avant de décroître de manière monotone avec Re . Ce comportement plus cohérent suggère que γ est un meilleur indicateur de l'évolution du cycle en fonction du nombre de Reynolds.

L'évolution de la largeur du cycle $\Delta\theta_r$, enfin, semble assez claire : les valeurs de $\Delta\theta_r$ obtenues pour SHREK et von Kármán 2 sont en effet toujours compatibles, notamment dans les expériences effectuées dans l'azote. Les mesures dans l'hélium liquide, malgré leur assez grande imprécision (de l'ordre de $\delta\theta = 0.05$, la différence minimale entre les valeurs de θ dans le cycle $\Delta K_p(\theta)$) confirment une tendance à l'augmentation de $\Delta\theta_r$ lorsque le nombre de Reynolds augmente. Il est possible de grossièrement modéliser une telle croissance comme une loi de puissance par rapport au seuil, toujours en suivant l'hypothèse émise par B. Castaing [141] concernant l'analogie entre température et nombre de Reynolds :

$$\Delta\theta_r = A_3 \left| \frac{1}{\ln \text{Re}} - \frac{1}{\ln \text{Re}_1} \right|^{2/3} \quad (7.23)$$

Cet ajustement, pour $\text{Re}_1 = 8.9 \cdot 10^3$ et $A_3 = 3.5$, est montré à titre indicatif sur la figure 7.11. L'hystérésis apparaît bien pour les hauts nombres de Reynolds, soit, pour les faibles températures de notre analogie.

Si nous tentons de poursuivre l'analogie entre l'expérience de von Kármán et les systèmes magnétiques, nous constatons que les grandeurs $\Delta\theta_r$ et $\Delta K_{p,0}$ se comportent de manière surprenante. Le modèle d'Ising en champ moyen (que nous avons décrit dans le chapitre 3) permet, en effet, de déterminer le comportement de l'aimantation spontanée m_+ (l'équivalent de notre $\Delta K_{p,0}$) à proximité de la température critique :

$$m_+(T \leq T_c) \propto |T - T_c|^{1/2} \quad (7.24)$$

Les calculs en théorie de Landau, ainsi que des considérations effectuées à partir du modèle d'Ising en champ moyen (voir annexe C) nous fournissent une dépendance du champ coercitif en fonction de la température :

$$h_c \propto |T - T_c|^{3/2} \quad (7.25)$$

Cette exposant 3/2, bien que calculé en champ moyen, traduit une accélération de l'augmentation du champ coercitif lorsque la température diminue, et trouve une certaine validation dans des résultats expérimentaux récents [139, 140], qui montrent des dépendances en $1 - (T/T_c)^{1/2}$ et $1 - (T/T_c)^{3/4}$ où la même accélération de l'augmentation du champ coercitif est observée pour les faibles températures. Toutefois, pour ces modèles, ce champ tend vers zéro à proximité du seuil T_0 avec une pente finie. Notre champ coercitif $\Delta\theta$ semble montrer une relativement bonne tendance en loi de puissance 1/2, et présente donc une pente infinie aux alentours du seuil en nombre de Reynolds de l'apparition du champ coercitif, qui n'est pas vraiment compatible avec les données expérimentales obtenues sur les matériaux magnétiques [139] ni avec les calculs que nous avons menés dans le cadre du champ moyen (ou de la théorie de Landau).

La théorie du champ moyen indique qu'il existe un facteur 3 entre l'exposant de la magnétisation spontanée et celui du champ coercitif. Il est possible, une fois de plus, de tester cette propriété sur notre courbe de $\Delta K_{p,0}$, en essayant de l'ajuster avec une loi en puissance 2/9 :

$$\Delta K_{p,0} = A_4 \left| \frac{1}{\ln \text{Re}} - \frac{1}{\ln \text{Re}_2} \right|^{2/9}, \quad (7.26)$$

Un tel ajustement n'est pas vraiment compatible avec nos données si nous ne prolongeons pas les branches « extérieures » du cycle d'hystérésis en $\theta = 0$. L'ajustement dans un tel cas s'effectue plutôt avec un exposant 1/6 (visible sur la figure 7.11), légèrement inférieur à 2/9, et pour lequel le nombre de Reynolds seuil vaut $\text{Re}_2 = 5000$. Cette propriété du modèle d'Ising en champ moyen n'est donc pas respectée par notre écoulement. Il est d'ailleurs possible de douter du bien-fondé de ce résultat : nous disposons de peu de mesures, et les nombres de Reynolds correspondant aux seuils en $\Delta\theta$ et en $\Delta K_{p,0}$ sont distincts, mais il faut rappeler une fois de plus que ces résultats sont préliminaires et contiennent malgré tout une quantité d'informations significative.

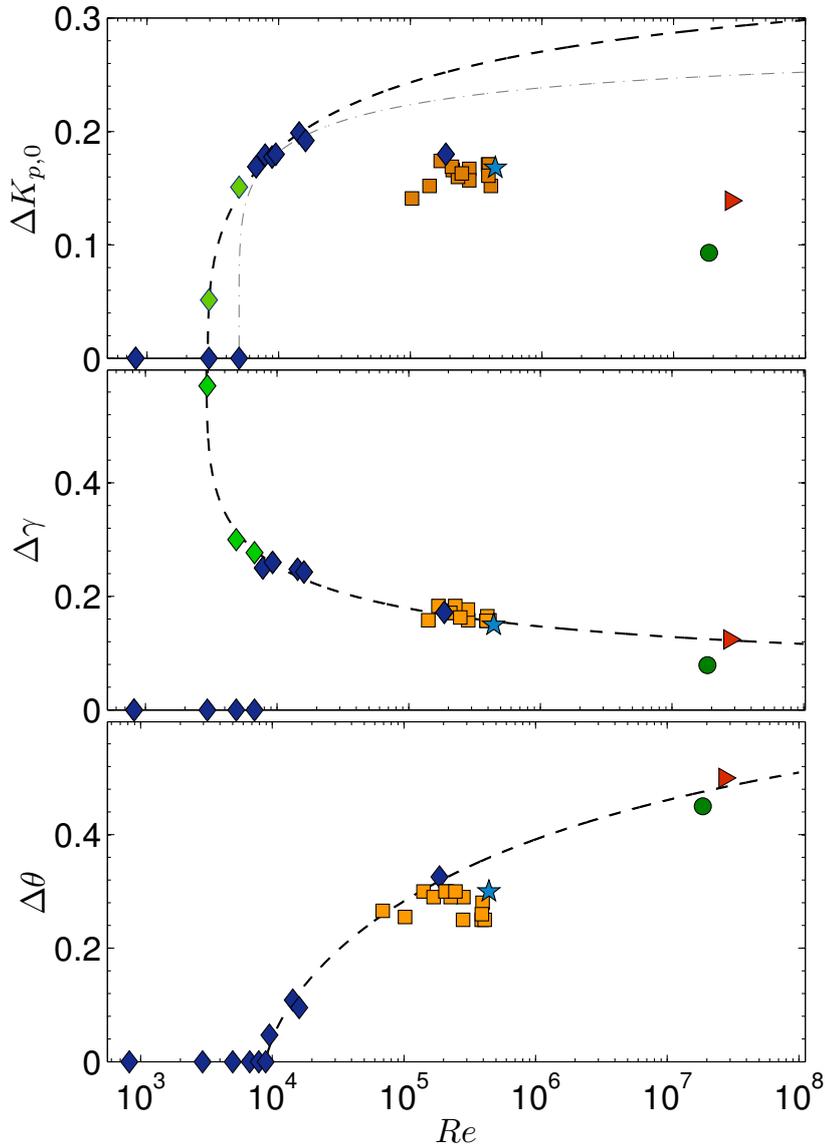


FIGURE 7.11 – En haut : mesure de la différence normalisée de couple $\Delta K_{p,0}$ à $\theta = 0$ dans le cycle d'hystérésis, aussi appelée hauteur du cycle, en fonction du nombre de Reynolds. Au centre : différence de couple réduite $\Delta\gamma$, une autre définition de la hauteur du cycle. En bas : mesure de l'extension $\Delta\theta$, des branches antinaturelles du cycle d'hystérésis, également appelée largeur du cycle d'hystérésis. (★), (●), et (▶) représentent comme pour la figure ci-dessus les grandeurs obtenues dans SHREK respectivement dans l'azote, dans l'hélium liquide et dans l'hélium superfluide. Les losanges (◇) et (◆) viennent rappeler les résultats obtenus (en prolongeant ou non les branches du cycle d'hystérésis) par Florent Ravelet avec des TM60, et les carrés (■) montrent les résultats obtenus dans l'eau avec des TP87 (tous deux déjà présents sur la figure 5.22). Les tiretés soulignent une tendance de la courbe à proximité des seuils, suivant l'hypothèse émise par B. Castaing [141]. En haut, ajustement en loi de puissance 1/6 (trait mixte) et en loi de puissance 1/3 (tireté). Au centre, ajustement en loi de puissance 1/6 avec une constante additive. En bas, ajustement en loi de puissance 2/3.

L'évolution de la largeur de notre cycle d'hystérésis $\Delta\theta$ nous fournit dernièrement une information intéressante : en effet, si la relation empirique formulée par l'équation 7.23 est fondée, il est alors possible d'établir une bijection entre la largeur du cycle d'hystérésis et le nombre de Reynolds au delà du seuil. Cette bijection permettrait de fournir une valeur du nombre de Reynolds unifiée, à la fois pour les fluides visqueux et les superfluides. Une telle définition nous permettrait de fournir un nombre de Reynolds pour un écoulement de von Kármán dont les détails nous seraient inconnus : en particulier, il serait possible d'estimer le nombre de Reynolds d'un écoulement de von Kármán superfluide, quel qu'il soit.

7.4 Conclusion

L'écoulement de von Kármán dans une configuration superfluide a permis de mettre à jour un certain nombre de similitudes entre le comportement d'un superfluide et d'un fluide normal, notamment au niveau de l'influence de ce dernier sur la force de traînée exercée sur les turbines en rotation dans une configuration où le fluide est confiné. Ces résultats semblent présager que cette traînée, qui est liée à la quantité d'énergie dissipée globalement dans l'écoulement, est similaire dans la turbulence fluide et la turbulence superfluide. Ces résultats restent d'ailleurs valides lorsque le superfluide est mis en rotation globale, mimée par l'introduction de déséquilibres entre les vitesses des deux turbines, à $\theta \neq 0$. Nous suggérons donc que le taux de dissipation volumique ϵ , lié à la puissance globale, ne change pas fondamentalement à la transition superfluide. Ces résultats sont en bon accord avec la rare littérature connue à ce sujet, qui se concentrait principalement sur des mesures à asymétrie nulle [46].

L'examen plus minutieux des expériences révèle une augmentation significative de la longueur des branches bifurquées antinaturelles pour les nombres de Reynolds atteints par SHREK, que ce soit pour une configuration superfluide ou de fluide normal. Les résultats obtenus suggèrent en outre une légère augmentation de cette longueur entre les expériences dans l'hélium liquide et dans l'hélium superfluide malgré le manque de précision sur θ , lié au petit nombre d'expériences effectuées dans le second cas. Ces nouvelles valeurs de la *largeur* et la *hauteur* du cycle permettent de dégager des comportements en loi de puissance proche des seuils d'apparition de ces grandeurs. Les exposants de ces lois sont très différents de ceux obtenus par des simples considérations liées au modèle d'Ising en champ moyen (décrites dans le chapitre 3) et également des résultats obtenus pour des matériaux ferromagnétiques, et sont très probablement liés à la complexité de la forme du cycle $\Delta K_p(\theta)$ pour les nombres de Reynolds proches du seuil d'apparition de $\Delta K_{p,0}$ et $\Delta\theta$ — seuils qui sont d'ailleurs distincts l'un de l'autre—.

L'étude de la largeur du cycle d'hystérésis, $\Delta\theta$, pourrait permettre une éventuelle bijection entre celle-ci et le nombre de Reynolds, qui autoriserait une estimation unifiée des nombres de Reynolds pour les écoulements normaux et les écoulements superfluides, et donnerait une définition semi-empirique du nombre de Reynolds effectif des écoulements de von Kármán superfluides.

*

CONCLUSION, PERSPECTIVES

Conclusion

Nous avons décrit, tout au long de ce manuscrit de thèse, les divers ponts que nous pouvons construire afin de concilier l’approche mécanique et l’approche statistique de la turbulence. À cette fin, nous avons, en premier lieu, porté notre attention sur la qualité des mesures physiques effectuées dans la cuve de l’écoulement de von Kármán : l’installation des couplemètres a en effet permis de confirmer la bonne qualité des mesures fournies par les variateurs, précédemment décrites comme « peu fiables », tout en apportant un gain appréciable en termes de bruit de mesure, notamment sur la fréquence de rotation des turbines, et l’utilisation du système de mesure de vitesse du fluide par imagerie de particules dans les expériences de commande en couple a permis de caractériser les écoulements associés à des états presque stationnaires des mesures mécaniques.

L’expérience de von Kármán, dans ses « bons jours », révèle une dynamique extrêmement riche et variée. Les expériences effectuées en commandant la vitesse des turbines soulignent l’importance cruciale d’une caractéristique du forçage des turbines : la courbure des pales joue un rôle critique sur l’aspect et le comportement de l’écoulement en régime de turbulence pleinement développée. Le sens (–) des turbines voit ainsi se construire progressivement un cycle d’hystérésis pour une gamme de nombre de Reynolds au voisinage de la transition à la turbulence. Un tel résultat vient remettre en question l’acception générale en turbulence de *restauration* au sens statistique des symétries du forçage expérimental, qui est ici dépendante de l’*histoire* de l’écoulement [171]. De plus, ce cycle est caractérisé par deux paramètres, que nous pouvons identifier à une *aimantation* spontanée et à un *champ coercitif*. Ces grandeurs montrent une dépendance en loi de puissance en fonction du paramètre de contrôle $\log \text{Re} - \log \text{Re}_c$, qui joue donc le rôle de température de notre écoulement, selon les conventions que nous avons prises dans ce manuscrit [141]. Cette « ferroturbulence » est caractérisée par des singulières lois de puissance de nos analogues de l’aimantation spontanée et du champ coercitif, qui ne sont ni retrouvées dans le modèle d’Ising en champ moyen, ni dans les matériaux ferromagnétiques réels.

Les expériences du sens (+) montrent, pour leur part, une relative indépendance des propriétés statistiques de l’écoulement par rapport à son histoire. La restauration statistique des symétries serait elle-même dépendante des caractéristiques du forçage de notre écoulement. Ces écoulements font de plus l’objet d’une transition supercritique, et présentent une divergence de *susceptibilité* associée à une multi-stabilité de la couche de cisaillement qui peut être interprétée comme une apparition de modes de Goldstone permettant un « libre » déplacement vertical de cette dernière dans la cuve. Les exposants critiques associés à la divergence observée de la susceptibilité de l’écoulement pointent vers une transition de la classe d’universalité *Ising champ-moyen*, qui n’est toutefois pas confirmée par les mesures de longueur de corrélation des fluctuations au sein de l’écoulement. Cette transition viole de plus les relations de fluctuation-dissipation que nous pouvons tenter de construire à partir du moment cinétique I de l’écoulement. Un tel écoulement peut donc bien être décrit en termes de transitions de phase, mais dont les comportements physiques dépassent le cadre de la « simple » physique

statistique à l'équilibre thermodynamique.

Le changement de la *nature* du forçage a quant à lui permis de mettre à jour des comportements nouveaux. Le type de commande des moteurs (en couple, ou en vitesse) permet d'accéder à des ensembles *distincts* d'états statistiques de notre système, qui perd sa stationnarité lorsque nous imposons des couples correspondant à l'intérieur du cycle d'hystérésis présent en commande en vitesse. Cette disparition se fait au profit d'états presque stationnaires, qui, d'une manière très surprenante, sont plus nombreux qu'en commande en vitesse : un nouvel état quasi-stationnaire, (\tilde{i}) , a été mis en évidence. De plus, ces comportements instationnaires présentent en moyenne une *sensibilité* négative, qui rappelle des résultats obtenus à la fois en physique du solide [160, 158], sous la forme de *résistances différentielles négatives*, et dans les fluides complexes [155] lorsque ces derniers effectuent des *transitions en bandes ce cisaillement*. Ces trois phénomènes possèdent beaucoup de points communs qui rappellent les résultats théoriques concernant l'*inéquivalence d'ensemble* : les systèmes présentant des interactions à longue portée présentent en effet des ensembles de solutions différents lorsque nous nous plaçons dans l'ensemble *canonique* ou dans l'ensemble *micro-canonique*. Nous pouvons voir notre changement de commande comme un changement d'ensemble statistique : les sensibilités négatives moyennes sont alors vues comme des chaleurs spécifiques négatives, uniquement observées dans l'ensemble micro-canonique. La non-stationnarité que nous observons est néanmoins « propre » à l'écoulement turbulent de von Kármán : les résistances négatives et les fluides complexes produisent des hétérogénéités spatiales plutôt que temporelles à l'intérieur du cycle d'hystérésis. Dans de telles conditions, notre écoulement « saute » entre trois états quasi-stationnaires, deux d'entre eux étant définis comme des prolongements des états stationnaires observés en commande en vitesse. La physique statistique hors de l'équilibre nous permet en outre de voir certains aspects de cette dynamique comme des processus stochastiques : le temps de sortie de certains états quasi-stationnaires est distribué de manière exponentielle, à l'identique de particules browniennes confinées dans des puits de potentiel [138].

D'autres modifications par rapport à la configuration « classique » de von Kármán ont été testées afin d'étudier l'effet d'un forçage non plus exclusivement à grande échelle, mais à plusieurs échelles, sur l'écoulement turbulent de von Kármán. L'introduction d'un forçage fractal n'a, outre les légers changements au niveau des grandeurs globales, pas d'impact significatif sur les champs de vitesses moyennes et sur les spectres de leurs fluctuations. Nous avons également tenté de modifier les processus de dissipation s'opérant aux plus petites échelles de l'écoulement en construisant une expérience superfluide, SHREK. Les résultats préliminaires de cette expérience montrent des valeurs de couple normalisés K_p très similaires à ceux obtenus dans l'eau dans l'écoulement turbulent « classique ». Les processus dissipatifs présents aux petites échelles n'ont donc pas d'impact significatif sur la quantité d'énergie dissipée à grande échelle dans cette gamme de températures, comme cela a déjà été suggéré précédemment [46]. Les propriétés des cycles d'hystérésis obtenus, pour des nombres de Reynolds extrêmement élevés, viennent en tout cas étendre les résultats obtenus en commande en vitesse et précisent l'image « ferroturbulente » du cycle d'hystérésis des expériences de commande en vitesse, permettant de décrire par les mêmes grandeurs les écoulements fluides et superfluides (où nous pouvons poser la question de la définition du nombre de Reynolds). Il ne faut pas considérer ces absences d'effet comme des « échecs », mais comme des informations *en soi*, qui précisent la nature de l'écoulement de von Kármán. Ces résultats doivent par ailleurs être confirmés par des mesures locales, plus précises de la turbulence : dans le cas des turbines fractales, il est possible que les distributions des incréments de vitesse, ainsi que les fonctions de structure d'ordre ≥ 2 , renferment des différences fondamentales entre forçage normal et forçage fractal. Dans l'expérience SHREK, il n'est pas possible d'exclure la possibilité de singularités du champ de vitesses qui nous sont pour le moment inaccessibles.

L'utilisation des outils de la physique statistique appliquée à la turbulence donne donc

lieu à de nombreuses similitudes avec des phénomènes physiques bien connus. L'application de tels outils permet de comprendre notre écoulement en termes de *transitions de phase*, de *processus stochastiques* et parfois en termes de *systèmes dynamiques* : nous pouvons aisément *interpréter* nos résultats à la lumière de ces différentes théories, ce qui nous a notamment permis d'effectuer les liens avec le ferromagnétisme (pour les expériences de commande en vitesse dans les deux sens) et l'inéquivalence d'ensemble (pour les expériences de commande en couple). Néanmoins, les caractères fortement hors-équilibre et essentiellement dissipatif de la turbulence produisent quelques comportements qui échappent au cadre de compréhension offert par ces théories. Dans ces cas, il est difficile de savoir si les théories actuelles sont incomplètes, ou tout simplement mal adaptées à l'étude de notre écoulement. Enfin, nous ne pouvons pas oublier que bien d'autres écoulements peuvent être également sensibles à certaines caractéristiques du forçage : nous devons par exemple nous poser la question de l'influence du mode de forçage sur les écoulements turbulents naturels, notamment la circulation nord-atmosphérique [172] et le Kuroshio [173], où des forces motrices en volume viennent s'« opposer » à des conditions aux limites déterminées respectivement par la topographie de l'hémisphère nord et la géographie des zones côtières japonaises.

Perspectives

Plusieurs pistes sont envisageables pour la suite de cette thèse : la première d'entre elles consisterait à s'affranchir des multiples ennuis mécaniques que nous avons subis durant ces années de thèse : il serait envisageable d'installer des paliers magnétiques pour transmettre le couple aux turbines sans frottements, tout en conservant l'étanchéité de l'écoulement. Cette configuration éviterait probablement les diverses dérives de couple (notamment lorsque la température n'était pas bien régulée) que nous avons pu observer avec les garnitures mécaniques. Il serait également possible de déplacer la mesure des couples directement au niveau des turbines, en utilisant par exemple des jauges de déformation collées (ou installées) sur la partie des arbres mécaniques plongée dans le fluide.

Il serait également intéressant de préciser la nature de la ferroturbulence observée dans les expériences en commande en vitesse dans le sens (-). En effet, nous disposons de peu de mesures de $\Delta K_{p,0}$ et $\Delta \theta_r$ aux nombres de Reynolds proches de leurs seuils respectifs de transition : il serait également intéressant d'examiner la morphologie des écoulements des branches intermédiaires des cycles d'hystérésis, présentes par exemple pour $Re = 16\,000$. Ces branches intermédiaires pourraient éventuellement être à l'origine des états intermédiaires quasi-stationnaires observés en commande en couple. Une autre idée de prolongation d'expériences déjà existantes consisterait à étudier l'inéquivalence d'ensemble pour des nouveaux jeux de turbines, ou, pour les *TP87* en présence d'un anneau : dans un tel cas, il est peut-être possible de faire disparaître l'état intermédiaire, ou de faire apparaître de nouveaux états quasi-stationnaires de l'écoulement.

Nous pouvons également tenter d'effectuer des expériences en commandant directement la puissance injectée aux moteurs. En mettant à profit nos mesures de couples en commande en vitesse, il est en effet possible d'estimer la différence entre une puissance consigne P_c et la puissance réellement injectée dans l'expérience, $P(t) = C(t)f(t)$. Cette différence de puissance peut être retranscrite en termes de différence de vitesse consigne, $\varepsilon(t) = (P(t) - P_c)/C(t)$ qui peut servir comme base au correcteur (constitué d'une régulation PID et d'un intégrateur) pour calculer une *consigne de vitesse*. Afin d'obtenir une meilleure précision sur les valeurs de la régulation, nous pouvons utiliser les mesures de vitesses et de couples données par les couplemètres, ce qui suppose la présence d'un compteur d'impulsions pour mesurer les vitesses. Nous avons donc opté pour un asservissement numérique en *temps réel* (soit, de manière parfaitement déterministe avec un pas de temps précis) sous la forme d'un *compactRIO* vendu par

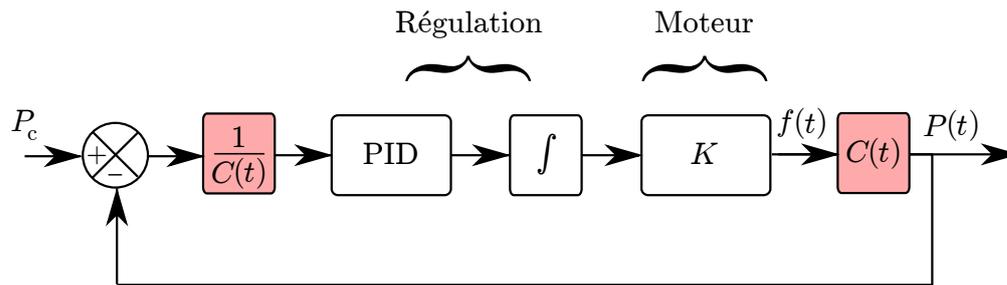


FIGURE 7.12 – Schéma de principe de la commande en puissance, effectuée à partir d'une commande en vitesse. Une telle commande suppose au moins un bloc non-linéaire : la réponse en couple C à une fréquence de rotation f donnée.

National Instruments. Cette boucle de régulation externe doit nécessairement être plus *rapide* que la régulation (interne) du moteur, sur laquelle nous disposons de peu d'informations. De telles expériences ont déjà été effectuées par Raúl Labbé, qui n'a pas publié de résultats à ce sujet. Toutefois, il est probable que ce dernier ait utilisé des turbines à pales droites, dont le cycle en θ ne présente pas d'hystérésis, donc probablement aucune sensibilité à la nature du forçage. Il est possible que ce changement de *nature* dans la commande soit analogue à un changement de *nature* de notre — ou de nos — équivalent du thermostat dans l'écoulement. Les interactions entre thermostats connectés à un système hors de l'équilibre thermodynamique commencent à être étudiés et posent également des problèmes d'équivalence entre ensembles [174]. Nous pourrions enfin tenter d'utiliser les principes de maximisation d'entropie de mélange afin de construire des principes variationnels, s'ils existent, de l'inéquivalence d'ensemble observée dans notre écoulement turbulent. Le passage d'une description microscopique à une description « intégrale » devra nécessairement s'effectuer en prenant en compte le détail des conditions aux limites liées au forçage dans l'écoulement (qui aura le choix entre imposer une vitesse, un couple ou une puissance au champ de vitesses du fluide) qui posera sans doute des difficultés, en particulier pour les états instationnaires.

Nous pouvons enfin nous intéresser aux propriétés locales de l'écoulement : en utilisant des systèmes de PIV à plusieurs échelles couplés à des lasers continus, nous pourrions résoudre l'écoulement à plusieurs échelles jusqu'à la longueur de Kolmogorov. Celles-ci poseraient, bien entendu, des défis expérimentaux, notamment au niveau des particules utilisées, et de la puissance du laser, mais permettraient de voir les structures spatiales à différents niveaux de *granularité*. Les structures concentrant la dissipation lorsque la granularité diminue (c'est à dire en augmentant la résolution), pourraient alors être observées. Ces éventuelles *singularités* pourraient également être vues dans l'expérience SHREK en hélium superfluide grâce aux micro-poutrelles dont l'installation est prévue prochainement [169]. Il est également possible d'effectuer des mesures de PIV dans l'expérience SHREK, qui possède une fenêtre ouvrant vers l'extérieur. L'ensemencement des superfluides est une chose délicate : il nécessite de produire des petits cristaux d'hydrogène dans l'écoulement, plus légers que le fluide environnant, et qui vont donc venir se piéger dans les lignes de vorticités quantifiées du superfluide (voir par exemple [175] pour plus de détails).

*

ANNEXE A

ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉ

A.1 Mesure de probabilité

A.1.1 Introduction aux probabilités

Prenons un ensemble Ω , qu'on appelle l'*univers*, qui va regrouper l'ensemble des résultats A que peut produire une expérience aléatoire. Par exemple, si nous lançons un dé à six faces, l'univers Ω se réduit à

$$\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\} \quad (\text{A.1})$$

qui représente le résultat de notre lancer de dés. Pour chacun de ces événements, il est possible de définir une probabilité \mathcal{P}^1 que cet événement se produise. Pour un dé non pipé, la probabilité est uniformément distribuée : $\mathcal{P}(\square) = \mathcal{P}(\square) = \dots = 1/6$. Il est également possible de mesurer la probabilité d'événements plus complexes, comme par exemple l'événement « le lancer donne une valeur de dé paire », ce qui revient à regarder $\mathcal{P}(\square \cup \square \cup \square)$. On notera bien évidemment que $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.

A.1.2 Indépendance

Considérons le tirage successif (non biaisé) de deux boules dans une urne contenant deux boules blanches et une boule noire : l'univers des événements possibles est

$$\Omega = \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet), (\circ, \circ)\} \quad (\text{A.2})$$

Notons A l'événement « la première boule tirée est noire », et B « la deuxième boule tirée est blanche ». Si le tirage est fait correctement, nous avons donc :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(A) = 1/3 \\ \mathcal{P}(B) = 2/3 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Nous pourrions alors nous dire que la probabilité de l'événement $A \cap B$, qui représente « la première boule tirée est noire, et la seconde blanche » vaut :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \quad (\text{A.4})$$

Sauf qu'en examinant Ω , on remarque qu'il n'existe que trois configurations équiprobables possibles, dont fait partie $A \cap B = (\bullet, \circ)$. Par conséquent, $\mathcal{P}(\bullet, \circ) = 1/3$. L'équation A.4 est fautive. On dit alors que les événements A et B ne sont *pas indépendants*. Cela se remarque assez

1. En toute rigueur, il faut quelques conditions en plus pour que Ω soit dit *mesurable*, ce qui est toujours le cas dans cette thèse.

facilement, car une fois la boule noire tirée en premier, il ne reste plus que des boules blanches ! Les variables indépendantes se définissent justement par la relation de l'équation A.4 :

$$(A, B) \text{ indépendantes} \Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) \quad (\text{A.5})$$

Cela implique que l'événement B ne dépend pas de la réalisation (ou non) de l'événement A (et inversement).

A.2 Variables aléatoires

A.2.1 Généralités

Les variables aléatoires X vont venir faire le lien entre notre univers Ω et un ensemble d'arrivée, souvent \mathbb{R} , en regardant une « observable » liée aux parties de Ω . Si nous tirons lors d'un sondage un individu A au hasard sur un univers Ω (ici, une population), une variable aléatoire X peut renvoyer la masse, le nombre de voitures ou la taille (arrondie au cm près) de l'individu A . Nous pouvons alors nous poser les questions suivantes :

- Quelle est la répartition de la taille de nos individus interrogés ?
- Combien de voitures possèdent en moyenne nos individus ?
- Combien de personnes sont-elles en sur-poids ?

Ces trois questions posent en fait des questions inverses : nous allons devoir, dans le premier exemple, compter toutes les personnes qui mesurent chaque taille x que peut renvoyer X quand nous interrogeons nos sondés Ω . Nous pouvons par exemple nous demander quelle est la probabilité de mesurer 172cm (arrondi à 1cm) : cela revient à chercher $\{A/X(A) = 172\}$.

A.2.2 Variables aléatoires continues

Nous avons pour l'instant considéré uniquement des variables aléatoires discrètes : la taille d'un individu est généralement mesurée par un nombre entier de centimètres, son poids en un nombre entier de kilogrammes et son nombre de voitures par un dernier nombre entier. Il est possible de dénombrer l'ensemble \mathbb{N} . Rien ne nous empêche cependant de définir une loi X qui va nous renvoyer une valeur dans \mathbb{R} tout entier ! Nous pouvons par exemple regarder la durée de vie $X \in \mathbb{R}^+$ d'une ampoule électrique à filament (qui peut être effectivement vue comme une variable aléatoire). Ω ici est plus difficile à appréhender : c'est en effet un ensemble infini d'ampoules ! Cela ne nous empêche cependant pas de regarder en théorie toutes les ampoules A telles que $X(A) \geq x$, soit toutes les ampoules qui ont survécu plus longtemps que x .

Considérons plus généralement une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω . Nous cherchons à déterminer la probabilité \mathcal{P} que $X \geq x$.

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto [0; 1] \\ x & \mapsto \mathcal{F}(x) = \mathcal{P}(\{A/X(A) \in] - \infty, x\}) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Cette fonction \mathcal{F} , croissante, est appelée *fonction de répartition*. Elle n'est pas nécessairement continue ou même dérivable. Il est toutefois possible de définir une deuxième fonction² f , appelée *densité de probabilité*, qui est la dérivée de \mathcal{F} . $f(x)$ représente donc la probabilité que la variable aléatoire X fournisse un résultat compris entre x et $x + dx$. Cette fonction, toujours positive, est généralement la fonction que nous cherchons à reconstruire lorsque nous effectuons une *estimation* d'une loi de probabilité.

². f est en toute rigueur une distribution, ce qui n'est pas la même chose qu'une fonction, hormis pour les physiciens !

A.2.3 Corrélation de variables aléatoires

A.2.3.1 Espérance, variance

Revenons à notre lancer de dé à six faces. Posons X une variable aléatoire qui va nous renvoyer 3 si le score est supérieur ou égal à \boxtimes , 0 si le score est compris entre \boxdot et \boxtimes et -8 si le score est de \boxdot . Nous pouvons nous demander par exemple, si dans le cas où X représente nos gains au jeu, s'il est « rentable » de jouer. Il faut pour cela multiplier la probabilité d'obtenir $X = x$ par le gain x pour tous les x que peut nous renvoyer X . Nous définissons donc l'*espérance* mathématique $\mathbb{E}(X)$ (aussi notée $\langle X \rangle$) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \mathcal{P}(\{A/X(A) = x\}) = \sum_x x \mathcal{P}_X(x) = \frac{-8 + 3 + 3}{6} = -\frac{1}{3} \quad (\text{A.7})$$

Cela revient à dire qu'en « moyenne », nous perdons $-1/3$ en jouant. C'est cette même définition qui permet de calculer le nombre de voitures que possédait notre population interrogée Ω lors de notre sondage plus haut. Nous pouvons aussi nous intéresser à la dispersion de notre variable aléatoire X , autour de l'espérance $\mathbb{E}(X)$. Nous pouvons pour cela calculer la *variance* de X , notée $\text{Var}(X)$:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{23}{3}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \left(\frac{10}{3}\right)^2 \right] = \frac{732}{54} \approx 13,5 \quad (\text{A.8})$$

L'écart-type $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx 3.6$ nous indique alors que nos gains seront généralement compris entre $-1/3 - \sigma_X = -4$ et $-1/3 + \sigma_X = 3.3$. Il est étonnant que cette limite supérieure dépasse la valeur maximale de x : la valeur élevée de σ_X provient en effet essentiellement de la possibilité d'obtenir un résultat négatif, -8 , très différent de la moyenne.

A.2.3.2 Corrélations

Nous avons déjà expliqué ce qu'était l'indépendance de variables aléatoires. Il est aussi possible de définir la *corrélation* entre deux variables aléatoires X et Y : elle va définir la manière dont l'espérance du produit XY , $\langle XY \rangle$, s'écarte du produit $\langle X \rangle \langle Y \rangle$:

$$r_{XY} = \frac{\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{A.9})$$

Le dénominateur de r_{XY} sert ici à contraindre les valeurs de r_{XY} dans $[-1; 1]$. La notion de corrélation n'est pas équivalente à celle d'indépendance. Nous avons toutefois, pour deux variables indépendantes :

$$\langle XY \rangle = \sum_{x,y} xy \mathcal{P}(\{A \cap B/X(A) = x, Y(B) = y\}) \quad (\text{A.10})$$

$$\Leftrightarrow \langle XY \rangle = \sum_x x \mathcal{P}(\{A/X(A) = x\}) \sum_y y \mathcal{P}(\{B/Y(B) = y\}) \quad (\text{A.11})$$

$$\Leftrightarrow \langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle \quad (\text{A.12})$$

Cela implique que $r_{XY} = 0$. Deux variables indépendantes sont donc non corrélées, mais le contraire n'est pas vrai : deux variables dépendantes peuvent parfois posséder un score de corrélation nul.

A.3 Les histogrammes

A.3.1 Les échantillons

Bien souvent, dans des situations de physique, nous ne connaissons pas l'univers Ω , et nous ne connaissons pas \mathcal{P} non plus. Nous ne connaissons qu'un certain nombre p de réalisations de la variable X , $\{x_i\}$, que nous supposons continue. Ne connaissant pas \mathcal{P} , nous allons nous attacher à reconstituer la distribution de X , en calculant \mathcal{F} ou f .

A.3.2 Définition des histogrammes

Pour retrouver la fonction f , la méthode la plus intuitive consiste à découper l'ensemble des réalisations $X(\Omega)$ des événements en N boîtes et de « compter » le nombre de fois que les réalisations de X appartiennent à ces boîtes notées $\{s\}_i$ (cf. fig. A.1 à droite). Nous avons alors effectué une *estimation* de notre densité de probabilité f . Bien entendu, il faut un très grand nombre d'échantillons x_j , et un nombre de boîtes N important pour reconstruire de manière précise notre densité de probabilité f .

Cette méthode utilisant des boîtes est la base des histogrammes. Elle est utilisée principalement pour son côté intuitif. En effet, l'estimation de f ne peut être utilisée sans « lissage » à partir des échantillons x_j : en effet, sans lissage, avec p échantillons, la seule chose que nous pourrions dire serait « la probabilité que X vaut x_j vaut p^{-1} », ce qui revient à dire que f est une somme de distributions de Dirac (ce qui est en pratique parfaitement inutilisable). Avec un histogramme, ce lissage est en fait effectué en utilisant des fonctions indicatrices I_i , avec $I_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [s_i]$. L'estimation de la densité de probabilité f à partir d'une famille de réalisations $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ en utilisant les boîtes $\{s\}_i$, notée \tilde{f}_s , est donc :

$$\tilde{f}_s(x) = \frac{1}{\delta p} \sum_{j=1}^p I_i(x_j) \quad (\text{A.13})$$

avec δ la largeur des boîtes (supposées identiques) et $x_j \in s_i$. Le principal souci de cette technique est que tous les x de la boîte s_i contribuent de manière identique à cette partie de l'histogramme, qu'ils soient près du centre ou du bord de la boîte. De plus, ces histogrammes sont généralement discontinus.

A.3.3 Intérêt des noyaux

Nous avons tenté de résoudre notre problème de « lissage » d'une manière assez curieuse, en utilisant des fonctions discontinues ! Il est probable que d'autres fonctions que nos I_i soient plus adaptées pour la reconstruction de notre fonction f , car le découpage $\{s_i\}$ est tout à fait arbitraire. Nous allons donc définir des fonctions $K_u(x)$ appelées *noyaux*, continues, normées, et définies par un paramètre $u \in \mathbb{R}$ qui vont remplacer les fonctions I_i dans l'estimation de f . Souvent, les noyaux utilisés sont gaussiens, et dans ce cas, $K_u(x)$ est une fonction gaussienne centrée sur $x = u$:

$$K_{\text{Gauss},u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.14})$$

Il est bien évidemment avantageux d'utiliser des noyaux gaussiens centrés sur nos réalisations, $u = x_j$. Cela revient à dire, lorsqu'on observe un tirage x_j de X , que « la densité de probabilité f est concentrée autour de x_j mais avec une petite dispersion » (cf. fig A.1 à g.). Pour un grand nombre de tirages, l'estimation par noyaux gaussiens devient :

$$\tilde{f}_K(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_j(x) = \frac{1}{\sigma N \sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^N \exp\left(-\frac{(x-x_j)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.15})$$

Le paramètre σ est laissé libre : c'est ce dernier qui va définir la « force » du lissage de la densité de probabilité. Il faut donc le choisir avec soin pour ne pas perdre d'informations sur notre fonction f , sans toutefois se retrouver dans la situation avec des pics de Dirac !

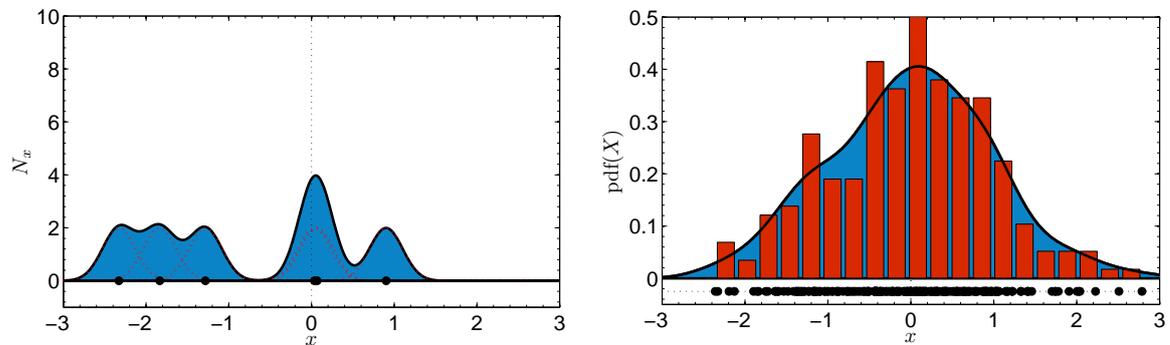


FIGURE A.1 – À g., construction d'une estimation d'une densité de probabilité : noyaux gaussiens (....) centrés sur cinq réalisations (•) de X , variable aléatoire suivant une loi normale et estimation de la densité de probabilité définie comme la somme des noyaux (—). À dr., construction d'un histogramme (barres) simple et équivalent en utilisant `ksdensity` (—), une estimation par noyau de MATLAB, à partir de 225 tirages de X .

*

ANNEXE B

LA THÉORIE ERGODIQUE

Introduction

Cette annexe va essentiellement se concentrer sur les problèmes d'*ergodicité* qui sont un des fondements de la physique statistique. Les résultats principaux de cette théorie sont aujourd'hui largement utilisés afin de confondre certaines définitions distinctes des moyennes d'observables physiques, notamment en turbulence. Nous allons donc dans cette annexe étudier quelques aspects de cette théorie, et voir pourquoi, ou comment il est possible de les appliquer à la turbulence.

B.1 L'espace des phases

Nous avons vu dans l'annexe A consacrée aux probabilités la signification de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X , notée $\langle X \rangle$. Dans cette section, nous allons prendre un point de vue plus physique afin d'exprimer la notion d'*espace des phases* ainsi que de *moyenne d'ensemble* d'un système physique. Revenons, par exemple, au problème des *sphères dures* que nous avons décrit dans le chapitre 3 traitant des ensembles statistiques. Nous rappelons le Hamiltonien \mathcal{H} d'un tel problème :

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j \neq i} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \quad (\text{B.1})$$

Si nous disposons de la donnée des N impulsions \mathbf{p}_i et des N positions \mathbf{r}_i des particules à un instant donné, le problème est parfaitement déterminé. En effet, la mécanique Hamiltonienne nous permettra alors de calculer la position et l'impulsion de nos particules à tout instant futur. La donnée de ces $2N$ vecteurs définit donc sans ambiguïté une *configuration* du problème. L'espace des configurations, aussi appelé *espace des phases* \mathcal{E} , possède alors $2dN - 1$ dimensions, si les vecteurs \mathbf{p}_i et \mathbf{r}_i possèdent chacun d composantes : en effet, la mécanique Hamiltonienne conserve l'énergie cinétique E_c , ce qui implique une contrainte sur les $\{\mathbf{p}_i\}$. Nous pouvons alors regrouper toutes ces coordonnées dans un vecteur de l'espace des phases, noté Ψ :

$$\Psi = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (\text{B.2})$$

Si nous supposons que nous sommes dans une configuration quelconque $\Psi(t_0)$ à l'instant t_0 , il sera alors possible de déterminer les configurations futures $\Psi(t)$, appelée *trajectoire* du système, uniquement grâce à la donnée de $\Psi(t_0)$ et des équations du mouvement. Cela revient à dire qu'il est possible de définir une application continue Φ à un paramètre t , qui permet de

faire évoluer la configuration $\Psi(t_0)$ vers $\Psi(t)$:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2Nd} & \mapsto \mathbb{R}^{2Nd} \\ t, \Psi(t_0) & \mapsto \Psi(t + t_0) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Pour des raisons de notation, nous appellerons cette fonction Φ_t dans la suite de cette annexe.

B.2 Moyennes et ergodicité

B.2.1 Les moyennes

B.2.1.1 La moyenne temporelle

Une définition physicienne de la moyenne temporelle d'une observable $A(\mathbf{r}, t)$, fournie par exemple par un capteur placé à une position fixe \mathbf{r} dans un système physique réel, est tout simplement la donnée de :

$$\bar{A}(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{\infty} A(\mathbf{r}, t) dt \quad (\text{B.4})$$

Il est possible de généraliser cette définition intuitive en mettant à profit l'application Φ et la configuration $\Psi(0)$ de notre système physique à l'instant initial. Il « suffit » donc de trouver une bonne application $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \Psi(t))$ qui va extraire les informations de $\Psi(t)$ qui nous intéressent (ici, la donnée de $A(\mathbf{r}, t)$) :

$$\bar{A}(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \mathcal{A}(\mathbf{r}, \Phi_t(\Psi(0))) dt \quad (\text{B.5})$$

Nous verrons que cette réécriture permet de rapprocher les expressions des trois moyennes que nous définissons dans cette section.

B.2.1.2 Moyenne spatiale

De la même manière, la moyenne spatiale d'une observable $A(\mathbf{r}, t)$, peut être vue comme la moyenne de la mesure de A à un instant donné sur un grand nombre de capteurs répartis dans le volume $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ réel de l'expérience. Cette moyenne, notée $\underline{A}(t)$, est donc donnée par :

$$\underline{A}(t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} A(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (\text{B.6})$$

Cette moyenne n'a que peu d'intérêt si le système n'est pas homogène dans l'espace.

B.2.1.3 Moyenne d'ensemble

La moyenne d'ensemble est une analogue de l'espérance mathématique : la moyenne d'ensemble de $A(\mathbf{r}, t)$ est effectuée cette fois-ci sur l'ensemble des configurations l'espace des phases $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{2Nd-1}$. Il faut pour cela définir une densité de *probabilité* ρ que le système se trouve aux alentours d'une configuration Ψ quelconque à l'instant t :

$$\langle A \rangle(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{E}} \rho(\Psi, t) \mathcal{A}(\mathbf{r}, \Psi) d\Psi \quad (\text{B.7})$$

La densité de probabilité ρ peut dans certains cas dépendre du temps : en effet, un système dissipatif (par conséquent, non Hamiltonien) va par exemple relaxer vers un ou plusieurs états d'équilibre Ψ_e en l'absence d'injection d'énergie, ce qui va se traduire par une concentration de ρ aux alentours des configurations Ψ_e .

Il est possible d'effectuer un bilan local de densité de probabilité. Le théorème de continuité nous indique simplement que :

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^N \frac{\partial(\rho \dot{\mathbf{r}}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial(\rho \dot{\mathbf{p}}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Cela vient localement traduire le fait qu'il n'existe pas de « sources » ni de « puits » de densité de probabilité. Cette relation intégrée sur le volume de l'espace des phases \mathcal{E} n'est autre que la condition de normalisation de ρ .

B.2.2 L'ergodicité

B.2.2.1 Systèmes Hamiltoniens et conservation du volume

Les systèmes Hamiltoniens possèdent par définition une symétrie intéressante entre les coordonnées \mathbf{r}_i et \mathbf{p}_i :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i} = \dot{\mathbf{p}}_i \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i} = -\dot{\mathbf{r}}_i \quad (\text{B.9})$$

Dans un tel cas, l'équation B.8 se simplifie par l'utilisation du théorème de Schwartz :

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^N \rho \left[-\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{p}_i} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i \partial \mathbf{r}_i} \right] + \sum_i^N \left[\dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^N \left[\dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{B.12})$$

Par conséquent, la densité de probabilité ρ est dite *incompressible* : l'équation B.12 est un parfait analogue de l'incompressibilité des fluides — qui se traduit principalement par la conservation de la masse de la particule fluide lorsque l'on suit son déplacement au sein de l'écoulement —. Il est alors possible de montrer par cet argument qu'un ensemble \mathcal{E}' de configurations va conserver son volume \mathcal{V} au cours du temps. Des variations de Ψ normalement aux frontières permettent effectivement de changer localement le volume (voir figure B.1). Si nous intégrons ces variations sur tout le bord de \mathcal{V} , nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \oint_{\partial \mathcal{V}} \dot{\Psi} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \dot{\Psi} \, d\mathcal{V} \quad (\text{B.13})$$

Le terme $\nabla \cdot \dot{\Psi}$ est nul à cause des équations B.2 et B.9, ce qui signifie donc que le volume est bien conservé pour un système Hamiltonien.

B.2.2.2 Ergodicité

Revenons à notre problème des moyennes temporelles et d'ensemble. Quels sont les ingrédients minimaux qui nous permettront de déterminer une quelconque relation entre celles-ci ? La conservation du volume dans l'espace des phases semble intuitivement un ingrédient minimal : dans le cas contraire, par exemple pour un volume qui diminue, la moyenne temporelle « raterait » une partie de l'espace des phases prise en compte par la moyenne d'ensemble. Pourtant, cet ingrédient n'est pas suffisant : comme le montre la figure B.2, il faut que l'application Φ qui va faire évoluer nos configurations permette d'explorer tout l'espace des phases. En termes plus mathématiques, si nous considérons une sous-partie \mathcal{V}_1 de l'espace des phases invariante par l'application de Φ_t , alors \mathcal{V}_1 est de mesure nulle, ou de complémentaire de mesure

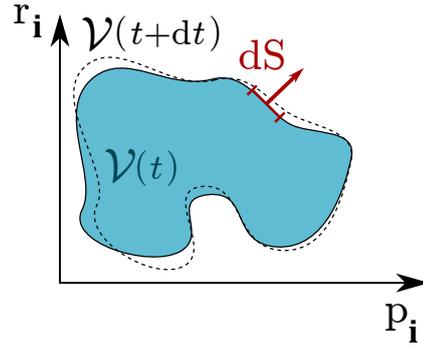


FIGURE B.1 – Variations de volume dans un espace des phases : le bord $\partial\mathcal{V}$ du volume de l'espace des phases correspondant à un ensemble \mathcal{E}' de configurations se déplace au cours du temps par l'intermédiaire de $\dot{\Psi}_n = \dot{\Psi} \cdot d\mathbf{S}$, le déplacement normal aux frontières des configurations au cours du temps.

nulle. Donc \mathcal{V}_1 contient soit presque tout l'espace des phases, soit presque rien (un ensemble de points de mesure nulle). C'est l'hypothèse d'*ergodicité*. Sous cette condition d'*ergodicité*, il est possible de confondre les moyennes d'ensemble et la moyenne temporelle, qui ne dépendent alors plus de t :

$$\langle A \rangle(\mathbf{r}) \underset{\text{erg.}}{=} \bar{A}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.14})$$

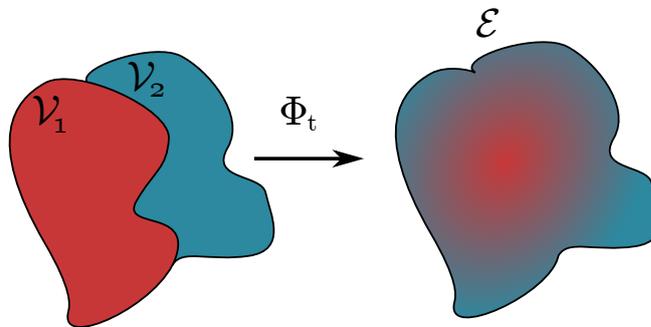


FIGURE B.2 – Description schématique de l'hypothèse d'*ergodicité*. Deux sous-ensembles initiaux \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 , complémentaires dans l'espace \mathcal{E} des phases, ne peuvent rester invariants sous l'action de Φ_t , hormis si l'un d'entre eux contient presque tout \mathcal{E} . Les deux sous-ensembles de l'exemple seront donc nécessairement « mélangés » sous l'action de Φ_t .

B.2.2.3 Quasi-ergodicité

De manière très étonnante, il a été montré que les systèmes Hamiltoniens n'étaient pas parfaitement ergodiques ! Malgré cette probabilité d'*ergodicité* précédemment décrite, les mathématiciens Plancherel et Rosenthal ont pu montrer que tous les points de \mathcal{E} n'étaient pas atteints exactement lors de l'évolution d'une configuration Ψ au cours du temps. Il a cependant été montré qu'une version faible de cette hypothèse, où l'on s'approche aussi près que l'on veut de chaque point de \mathcal{E} , pouvait être vérifiée. Cette *ergodicité faible* n'entache visiblement pas notre égalité entre les moyennes.

B.3 Turbulence et ergodicité

Il est difficile de croire dans ces conditions qu'un écoulement turbulent, essentiellement dissipatif, puisse vérifier l'hypothèse ergodique. C'est pourtant la principale raison pour laquelle les physiciens des fluides parlent d'une *restauration des symétries* dans les quantités moyennes des écoulements turbulents. Nous allons donc tenter de voir ce qui permet de justifier ce postulat. Nous allons pour cela suivre le raisonnement proposé par U. Frisch [7] : nous allons alors considérer une version simplifiée et discrète des équations de Navier-Stokes, dite du *poor man's Navier Stokes* pour en étudier le caractère ergodique :

$$\begin{cases} v_{t+1} - v_t &= & -2v_t^2 & - & v_t & + & 1 \\ \partial_t \mathbf{v} &= & [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p] & - & \nu \Delta \mathbf{v} & + & \mathbf{f} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

En effectuant un changement de variables, il est possible de montrer que cette transformation $v_{t+1} = g(v_t)$ est analogue de l'application tente f définie pour $X \in [0; 1]$ comme suit :

$$X_{t+1} \mapsto f(X_t) = \begin{cases} 2X_t & \forall X_t \in [0; 1/2] \\ 2 - 2X_t & \forall X_t \in [1/2; 1] \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

La figure B.3 montre l'effet de l'application tente sur tout intervalle I_t , qui est transformé en un intervalle $f(I_t)$ différent de celui-ci, hormis pour $I_t = [0; 1]$ ou des I_t réduits à un ou plusieurs points fixes¹ de f . Cette application semble donc respecter une version discrète de l'hypothèse d'ergodicité formulée dans la section précédente. De plus, nous voyons que la longueur totale de l'ensemble $f^{-1}(I_t)$, qui regroupe toutes les valeurs de $x \in [0; 1]$ telles que $f(x) \in I_t$, est identique à la longueur de l'intervalle I_t . En effet, les deux intervalles constituant $f^{-1}(I_t)$ sont chacun de longueur moitié de la longueur de I_t . Cette invariance supplémentaire va alors nous indiquer que la densité de probabilité stationnaire ρ de l'application f , sur laquelle sera effectuée la moyenne d'ensemble, est la distribution uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. L'application tente est donc *ergodique*, et nous pouvons calculer la moyenne d'ensemble $\langle A \rangle$ de toute quantité physique A liée à cette application.

L'application tente étant homologue au modèle du *poor man's Navier Stokes*, ce dernier possèdera aussi un caractère ergodique, avec cependant une densité de probabilité à l'équilibre ρ' différente de celle de l'application tente. C'est principalement cet argument qui plaide en faveur de la restauration statistique des symétries expérimentales : les moyennes temporelles effectuées dans les écoulements turbulents globalement *stationnaires* seront d'après cet argument des moyennes d'ensemble, qui respectent les symétries des montages expérimentaux. C'est la raison pour laquelle notre écoulement moyen stationnaire en commande en vitesse respecte les symétries du montage (voir pour cela le chapitre 5 dédié à cette commande). Cette hypothèse peut néanmoins être remise en question, à la fois du point de vue théorique, le choix du *poor man's Navier Stokes* étant bien évidemment discutable du fait de ses nombreuses limitations, et du point de vue expérimental, certains états moyens stationnaires de notre écoulement ayant la possibilité de briser statistiquement cette symétrie.

Pour des écoulements homogènes, mais pas forcément stationnaires, il est possible d'utiliser d'une manière similaire des moyennes sur le volume (qui possèdent alors statistiquement tous la même moyenne d'ensemble), dont chacun des volumes élémentaires $d\mathbf{r}$ seront autant de configurations Ψ échantillonnées selon la même distribution évoluant selon une même dynamique, fournissant un gain appréciable d'« échantillons » statistiques. Si le nombre de volumes élémentaires est suffisamment grand, il est parfois admis que la moyenne spatiale et

1. ou, en toute rigueur, des points appartenant à des orbites périodiques de f pour toutes les périodes de \mathbb{N} .

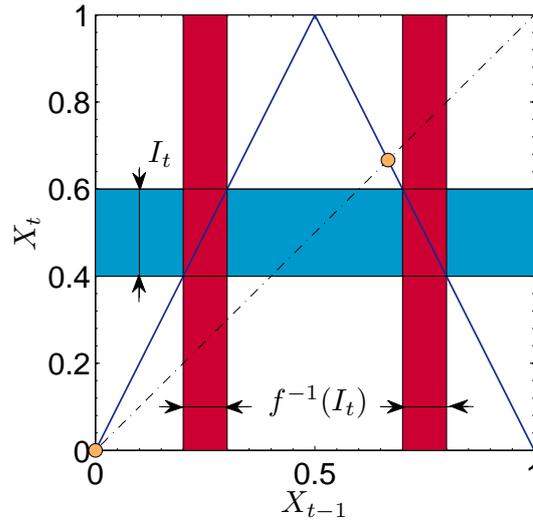


FIGURE B.3 – L’application tente f (ligne bleu foncé) : nous pouvons voir que cette application mélange bien : seuls deux points (cercles oranges), de « mesure » nulle, sont invariants par l’application f , tandis que tout ensemble de mesure non nulle I_t (rectangle bleu) possède une pré-image $f^{-1}(I_t)$ (rectangles rouges) différente de I_t , hormis pour $I_t = [0; 1]$.

la moyenne d’ensemble sont proches :

$$\underline{X}(t) \underset{\text{homog.}}{\approx} \langle X \rangle(t) \quad (\text{B.17})$$

Il est alors possible de combiner les deux arguments afin d’obtenir expérimentalement un très grand nombre d’échantillons possédant la même statistique notamment dans les écoulements homogènes (selon une ou plusieurs directions) et stationnaires, comme par exemple les écoulements turbulents dans des conduits ou des tubes :

$$\overline{X} \underset{\text{homog., ergod.}}{=} \langle X \rangle \quad (\text{B.18})$$

Cette moyenne spatiale suppose un grand nombre de capteurs, ou une technique permettant des mesures globales dans l’écoulement.

*

ANNEXE C

HYSTÉRÉSIS DU MODÈLE D'ISING

Nous allons décrire brièvement dans cette annexe le détail d'un calcul portant sur l'hystérésis du modèle d'Ising. Nous avons en effet vu que ce modèle dérive de l'approximation de champ moyen, qui consiste à dire que la valeur moyenne spatiale de l'aimantation m , vaut à tout instant sa valeur thermodynamique $\langle m \rangle$. Cette simple définition de l'aimantation suggère une multiplicité des valeurs de l'aimantation m en deçà de la température critique T_c . Cette multiplicité est-elle associée à un hystérésis ? Considérons une situation d'équilibre thermodynamique à une température $T \leq T_c$, comme par exemple celle de la figure C.2. Nous rappelons l'expression transcendante de l'aimantation dans une telle approximation, en fonction de la température critique et du champ externe réduit $h' = h/J$:

$$m = \tanh \left[\frac{T_c}{T} (m + h') \right] \quad (\text{C.1})$$

Cette équation admet plusieurs solutions : cela peut paraître plutôt remarquable, sachant que nous examinons $\langle m \rangle$, une valeur thermodynamique moyenne, qui ne devrait donc prendre qu'une seule valeur. Un moyen de s'affranchir de ce paradoxe consiste à considérer notre système comme un modèle de transition « à la Landau », où l'énergie libre F du système peut être exprimée en un développement limité de l'aimantation m (le paramètre d'ordre) :

$$F = hm + r_0(T - T_c)m^2 + sm^4 \quad (\text{C.2})$$

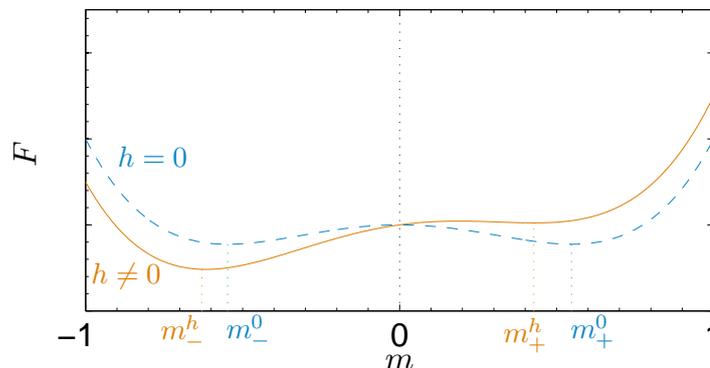


FIGURE C.1 – Profil d'énergie libre F en fonction du paramètre d'ordre m selon la théorie de Landau (analogue à l'approximation de champ moyen), pour un champ $h = 0$ (tireté) et pour un champ non nul (trait plein). Les minima d'énergie libre m_+ et m_- correspondent aux états d'équilibre stable du système. Pour $h \neq 0$, l'un des minima locaux d'énergie libre, m_+^h , est métastable : ce minimum n'est plus un minimum global de F .

Une telle équation admet, pour les champs h suffisamment faibles, deux points d'équilibre stables, mais l'un d'entre eux sera d'énergie libre plus faible (voir figure C.1). Il sera donc métastable : un état initialement préparé (par exemple) dans m_+ à $h = 0$ subsistera dans l'état m_+ lorsque $h < 0$, car notre modèle ignore les fluctuations qui permettraient de « sauter » hors du puits local de potentiel. Puisque nous avons négligé les fluctuations, le système retournera vers l'état thermodynamiquement stable lorsque le point d'équilibre métastable disparaîtra, soit, pour un champ h' suffisant (voir figure C.2).

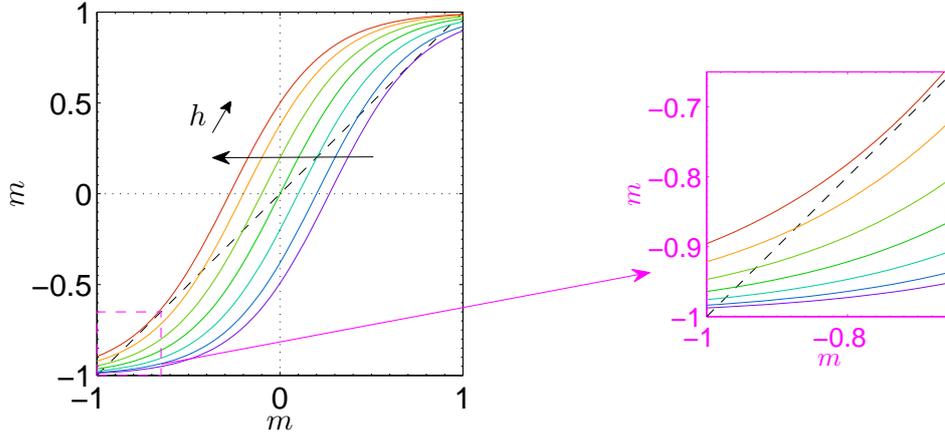


FIGURE C.2 – Tracé de l'équation transcendantale C.1 pour $T \leq T_c$ et diverses valeurs de h' . Lignes pleines, membre de droite de l'équation. Tireté : membre de gauche. Leurs intersections définissent les points d'équilibre du système. Lorsque h' dépasse un certain seuil h'_c , une des intersections disparaît (cf. encadré), entraînant une déstabilisation d'une configuration d'équilibre.

L'intersection entre les deux membres de l'équation C.1 disparaît lorsque ceux-ci forment des courbes tangentes l'une à l'autre, ce qui correspond à la disparition d'un des minima locaux de la figure C.1. Nous pouvons donc en déduire que le champ h'_c est défini par :

$$\begin{cases} m = \tanh(t^{-1}(m + h'_c)) \\ t = t^2 - (m + h'_c)^2 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Il est possible de réécrire ce système afin d'exprimer, comme dans le chapitre 3, le champ h'_c en fonction de m en prenant l'arc-tangente de la première expression de C.1 :

$$\begin{cases} (m + h'_c) = t \cdot \operatorname{atanh} m \\ (m + h'_c)^2 = t - t^2 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Nous obtenons alors très simplement l'aimantation au bord du cycle d'hystérésis :

$$m = \pm \tanh \sqrt{\frac{1-t}{t}} \quad (\text{C.5})$$

De même, nous obtenons le champ critique associé :

$$h'_c = t \cdot \operatorname{atanh} m - m \quad (\text{C.6})$$

$$= \pm \left(\sqrt{t(1-t)} - \tanh \sqrt{\frac{1-t}{t}} \right) \quad (\text{C.7})$$

Nous pouvons alors poser $\varepsilon = 1 - t$ et effectuer un développement limité de notre expression pour $\varepsilon \ll 1$. Nous obtenons alors :

$$h'_c = -\sqrt{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} \right) + \sqrt{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} \right) + \frac{\varepsilon^{3/2}}{3} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{4} \right) + \mathcal{O}\varepsilon^{5/2} \quad (\text{C.8})$$

$$h_c \approx \frac{4J}{3} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{C.9})$$

Par conséquent, le champ coercitif devrait croître comme $|T - T_c|^{3/2}$ au voisinage du point critique. Cette dépendance est tout à fait cohérente avec des calculs (très similaires) effectués en théorie de Landau.

*

ANNEXE D

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE STATISTIQUE

Introduction

Nous avons indiqué dans l'introduction les résultats obtenus dans les années 1990 par R. Robert et J. Sommeria [105, 106], tentant de dégager des comportements globaux des écoulements parfaits (qui suivent l'équation d'Euler) en dimension $d = 2$. Ces résultats ont depuis été étendus aux écoulements axisymétriques, notamment en dimension 3 [176, 113]. Dans cette section, nous allons tenter de fournir une explication à l'existence d'une multistabilité de la couche de cisaillement décrite dans la section 5.3.5.3 à partir d'arguments basés sur cette mécanique statistique. Les calculs de cette section ne sont pas excessivement difficiles mais sont généralement longs et fastidieux. Nous allons donc les présenter assez succinctement.

D.1 Réécriture des équations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques

D.1.1 Relations initiales, notations

Nous allons adapter le formalisme utilisé par Nicolas Leprovost, Bérengère Dubrulle, Aurore Naso *et al.* [113, 114] pour réécrire les équations de Navier-Stokes afin de dériver nos équations gouvernant l'évolution du champ de vitesses. Nous pouvons partir de l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{-1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \quad (\text{D.1})$$

\mathbf{f} est le forçage externe. Connaissant les symétries de notre système (donc, l'axisymétrie et l'invariance par rotation dans le cas où la vitesse des deux turbines est la même), nous pouvons séparer notre écoulement entre les composantes toroïdales (selon \mathbf{e}_ϕ) et poloïdales (normales à \mathbf{e}_ϕ) :

$$\mathbf{v} = v_\phi \mathbf{e}_\phi + \nabla \times (\phi \mathbf{e}_\phi) \quad (\text{D.2})$$

Nous pouvons prendre le rotationnel d'une telle équation, afin d'en extraire la composante selon \mathbf{e}_ϕ . Nous obtenons alors :

$$\mathbf{w} = \nabla \times (v_\phi \mathbf{e}_\phi) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{e}_\phi) \quad (\text{D.3})$$

$$= \underbrace{\nabla \times (v_\phi \mathbf{e}_\phi)}_{\perp \mathbf{e}_\phi} - \underbrace{\Delta(\phi \mathbf{e}_\phi)}_{\parallel \mathbf{e}_\phi} \quad (\text{D.4})$$

Cela implique alors une relation intéressante, qui nous permet de définir un opérateur \mathcal{L} agissant sur les scalaires :

$$\Delta(\phi \mathbf{e}_\phi) = -w_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{L}\phi = -w_\phi \quad (\text{D.6})$$

D.1.2 Réécriture des grandeurs E_c, H, I, \mathcal{F} et \mathcal{D}

Définissons tout d'abord le produit scalaire de deux grandeurs dans notre système :

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}(r, z) \cdot \mathbf{B}(r, z) 2\pi r dr dz \quad (\text{D.7})$$

Ici, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ est le produit scalaire usuel si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des vecteurs et un produit simple si A et B sont des scalaires. \mathcal{V} est quant à lui le volume de notre système, égal *a priori* à $1.8\pi R^3$.

D.1.2.1 L'énergie cinétique, E_c

Définissons l'énergie cinétique dans notre système, en imposant une masse volumique ρ égale à l'unité dans notre écoulement. Nous en déduisons :

$$E_c = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (\text{D.8})$$

Son expression en fonction de v_ϕ et ϕ est alors :

$$2E_c = \int_{\mathcal{V}} v_r^2 + v_z^2 + v_\phi^2 2\pi r dr dz \quad (\text{D.9})$$

$$= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \times \phi \mathbf{e}_\phi) \cdot (\nabla \times \phi \mathbf{e}_\phi) + v_\phi^2 2\pi r dr dz \quad (\text{D.10})$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \nabla \times (\nabla \times \phi \mathbf{e}_\phi) \cdot \phi \mathbf{e}_\phi + v_\phi^2 2\pi r dr dz \quad (\text{D.11})$$

$$= \langle v_\phi \cdot v_\phi \rangle + \langle \phi \cdot w_\phi \rangle \quad (\text{D.12})$$

Les conditions aux limites de \mathcal{V} imposent une non-pénétration et un non-glissement du fluide au niveau des parois. Ces conditions permettent d'effectuer un grand nombre d'intégrations par parties (notamment, ici, sur les dérivées de ϕ , qui représentent les composantes v_r et v_z) en « oubliant » les termes de bord.

D.1.2.2 Le moment cinétique I

Pour tout écoulement fermé, nous pouvons montrer que le moment cinétique défini usuellement par :

$$I = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} 2\pi r dr dz \quad (\text{D.13})$$

est exclusivement dirigé selon \mathbf{e}_z . Nous en déduisons très simplement :

$$I = \int_{\mathcal{V}} r v_\phi r dr dz = \langle r \cdot v_\phi \rangle \quad (\text{D.14})$$

D.1.2.3 L'hélicité H

L'hélicité, quant à elle, correspond au produit scalaire de \mathbf{v} avec \mathbf{w} . En explicitant ces deux grandeurs, et de manière très analogue aux calculs précédents, nous obtenons :

$$H = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.15})$$

$$= \int_{\mathcal{V}} (v_\phi \mathbf{e}_\phi + \nabla \times (\phi \mathbf{e}_\phi)) \cdot \mathbf{w} \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.16})$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \nabla \times (\phi \mathbf{e}_\phi) \cdot \nabla \times (v_\phi \mathbf{e}_\phi) + v_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot w_\phi \mathbf{e}_\phi \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.17})$$

$$= 2 \langle v_\phi \cdot w_\phi \rangle \quad (\text{D.18})$$

D.1.2.4 Forçage et dissipation

Nous pouvons également tenter de déterminer le taux de dissipation \mathcal{D} de l'énergie cinétique dans l'écoulement, ainsi que la contribution \mathcal{F} du forçage dans l'apport de l'énergie cinétique. Pour cela, il nous suffit de calculer $\partial_t E$ grâce aux équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t E = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.19})$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(-\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p + \nu \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \right) \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.20})$$

Il est bien évidemment possible d'exprimer différemment cette somme (lorsque le champ de vitesses est suffisamment régulier) : nous pouvons en effet réécrire le terme d'advection :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (\text{D.21})$$

De même, nous pouvons procéder à une intégrale par partie en ce qui concerne les termes de gradient. En effet, pour toute grandeur scalaire b , nous savons que :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \nabla b \, d\mathcal{V} = \int_{\partial \mathcal{V}} b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{V}} b (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathcal{V} \quad (\text{D.22})$$

$$= 0 \quad (\text{D.23})$$

L'expression de la dissipation de l'énergie se réduit alors à :

$$\partial_t E = \int_{\mathcal{V}} (\nu \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.24})$$

$$= \nu \int_{\mathcal{V}} (v_\phi \Delta v_\phi - \omega_\phi^2) \, 2\pi r dr dz + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.25})$$

$$= \mathcal{D} + \mathcal{F} \quad (\text{D.26})$$

En l'absence de forçage, nous pouvons voir que l'énergie cinétique de l'écoulement décroît nécessairement et retourne vers l'état uniforme de vitesse $\mathbf{v} = 0$. Nous pouvons en effet exprimer différemment le terme $\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}$ pour faire apparaître un terme au carré (en sommation d'Einstein) :

$$\partial_t E = - \int_{\mathcal{V}} \nu (\partial_i v_j)^2 \, 2\pi r dr dz + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, 2\pi r dr dz \quad (\text{D.27})$$

$$(\text{D.28})$$

D.2 Modes du noyau de l'écoulement de von Kármán

D.2.1 Expression du potentiel A^{VK} de l'écoulement

La principale difficulté soulevée par l'équation de Navier-Stokes est que les solutions que nous cherchons sont fortement hors-équilibre. Par conséquent, il n'est pas possible d'effectuer une approche classique de solution stationnaire ou même de solution faiblement écartée d'une solution stationnaire. La mécanique statistique peut cependant nous aider à résoudre ce problème. Supposons que dans notre écoulement turbulent existe une densité de probabilité $\rho(w, \mathbf{x})$ qu'en \mathbf{x} , la vorticité azimutale w_θ vaille w . Nous pouvons alors définir une entropie de notre système : il suffit de définir S comme une fonction convexe de ρ :

$$S = - \int_{\mathcal{V}} \rho \ln \rho d\mathcal{V} \quad (\text{D.29})$$

Nous savons que l'équation d'Euler conserve (en l'absence de singularités) l'énergie cinétique du système, E_c ainsi que l'hélicité H et le moment cinétique I . De manière très générale, nous pouvons déduire l'évolution de notre écoulement turbulent en supposant que ce dernier va tenter de maximiser sa production d'entropie (comme cela a été supposé en climatologie, chez G.W. Paltridge [177]). Cette maximisation s'effectue donc à E_c , H et I constants :

$$\left\{ \max(S) \mid E_c, H, I \right\} \quad (\text{D.30})$$

Nous pouvons également introduire les termes de forçage et de dissipation, afin de regarder les états *stationnaires* où ces termes s'annulent mutuellement :

$$\left\{ \max(S) \mid E_c, H, I, (\mathcal{F} + \mathcal{D} = 0) \right\} \quad (\text{D.31})$$

Il a déjà été montré précédemment [114] que la maximisation de S sous contrainte était équivalente à une *minimisation* de l'énergie cinétique E_c telle que nous l'avons définie ici. Il est donc possible de définir des paramètres de Lagrange, notés α , μ et ζ qui minimisent la fonctionnelle A^{VK} à extrémiser dans notre écoulement :

$$A^{\text{VK}} = E - \alpha I - \mu H - \zeta(\mathcal{F} + \mathcal{D}) \quad (\text{D.32})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \langle v_\phi v_\phi + w_\phi w_\phi \rangle - \alpha \langle r v_\phi \rangle - 2\mu \langle v_\phi w_\phi \rangle \\ &\quad - \zeta \langle v_\phi \Delta v_\phi - w_\phi w_\phi + f_\phi v_\phi + f_\xi w_\phi \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Nous devons donc trouver les v_ϕ et w_ϕ qui vont rendre extrémale cette fonctionnelle. Les conditions $\partial A / \partial v_\phi = 0$ et $\partial A / \partial w_\phi = 0$ aboutissent alors, dans un cadre très général, à

$$\begin{cases} v_\phi = B\phi + D(\nu)w_\phi + F \\ w_\phi = Bv_\phi + Cr - D(\nu)\Delta v_\phi + G \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

Nous avons utilisé les conventions suivantes pour définir B , C , D , F et G :

$$B = \frac{1}{2\mu} \quad C = -\frac{\alpha}{2\mu} \quad (\text{D.35})$$

$$D = \frac{\zeta\nu}{\mu} \quad F = -\frac{Df_\xi}{\nu} \quad (\text{D.36})$$

$$G = -\frac{Df_\sigma}{\nu} \quad (\text{D.37})$$

Le paramètre D va donc nous donner une estimation de la distance à l'équilibre (plus exactement, la distance aux solutions de l'équation d'Euler) dans l'écoulement.

D.2.2 Projection sur les modes de l'écoulement

Notre écoulement est axisymétrique, et s'annule aux bords, en $r = R$, de notre cylindre. Par conséquent, nous pouvons décomposer ce dernier sur des *modes* ϕ_m — de type Bessel-Fourier — du cylindre qui forment une base orthonormée :

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{N}_m J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) (a_m e^{iqz} + a_m^* e^{-iqz}) \quad (\text{D.38})$$

Les λ_m sont ici les $m^{\text{èmes}}$ zéros de la fonction J_1 , \mathcal{N}_m est une constante de normalisation, et a_m est l'amplitude complexe du champ de vitesse selon z . Nous supposons pour l'instant que ce dernier ne s'annule pas en $z = \pm h$. Nous pouvons montrer que ces fonctions sont bien des fonctions propres de l'opérateur \mathcal{L} , défini plus haut (à l'équation D.6) :

$$\mathcal{L}\phi_m = - \left(q^2 + \frac{\lambda_m}{R^2} \right) \phi_m = -K_m^2 \phi_m \quad (\text{D.39})$$

Nous allons décrire par la suite le cas du forçage en volume par souci didactique. Les lecteurs intéressés par l'étude du forçage via les conditions aux limites peuvent se référer à l'article en cours de publication à ce sujet [178].

D.2.3 Mode du noyau pour un forçage en volume

Dans un tel cas, nous considérerons que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $z = 0$ et $z = 2h$ que nous redéfinissons comme les bords de notre écoulement. Par conséquent, nous pouvons donner une expression plus explicite des modes propres ϕ_m de l'écoulement :

$$\phi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_m J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{2h} \right) \quad (\text{D.40})$$

Nous pouvons également donner une expression exacte des facteurs de normalisation et des valeurs propres de l'opérateur \mathcal{L} , K_{mn} , qui dépendent désormais de n :

$$\mathcal{N}_m = \sqrt{\frac{2}{J_2^2(\lambda_m)}} \quad (\text{D.41})$$

$$K_{mn}^2 = \left(\frac{n\pi}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_m}{R} \right)^2 \quad (\text{D.42})$$

Enfin, nous pouvons projeter les équations D.34 sur les modes propres de l'écoulement, et les regrouper sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -(D + BK_{mn}^{-2}) \\ -(B + DK_{mn}^2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{mn} \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{mn} + C \langle r\phi_{mn} \rangle \\ g_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{D.43})$$

Dans cette équation, nous nommons respectivement s_{mn} et x_{mn} les projections de v_ϕ et de w_ϕ sur les modes propres ϕ_{mn} de l'écoulement. Nous savons que les valeurs de v_ϕ et w_ϕ qui vérifient cette équation rendent extrémal le potentiel A^{VK} . Toutefois, nous ne sommes pas certains que ces *extrema* sont bien des minima. Il est possible de voir cela en exprimant A^{VK} comme une forme quadratique en v_ϕ et w_ϕ , que nous projetons sur les modes s_{mn} et x_{mn} :

$$\begin{aligned} 2BA^{\text{VK}} = \sum_{m,n} B(s_{mn}^2 + K_{mn}^{-2}x_{mn}^2) + 2C \langle rv_\phi \phi_{mn} \rangle \phi_{mn} - 2s_{mn}x_{mn} \\ - D(-K_{mn}^2 s_{mn}^2 - x_{mn}^2) + Gs_{mn} + Fx_{mn} \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

Nous pouvons écrire cette forme quadratique de manière matricielle :

$$2BA^{\text{VK}} = \sum_{mn} (s_{mn} \ x_{mn}) \begin{bmatrix} A_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_{mn} \\ x_{mn} \end{pmatrix} + Gs_{mn} + Fx_{mn} + 2C\langle rv_\phi \phi_{mn} \rangle \phi_{mn} \quad (\text{D.45})$$

La matrice A_{mn} vaut alors :

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} B + DK_{mn}^2 & -1 \\ -1 & D + BK_{mn}^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.46})$$

De telles formes quadratiques passent par un minimum local lorsque leur trace et leur déterminant sont tous deux positifs (par exemple, $z = x^2 + y^2$ possède bien un minimum et sa matrice associée possède une trace et un déterminant égaux à 1, et sont donc bien positifs). Nous en déduisons les relations suivantes, sachant $K_{mn}^2 \geq 0$:

$$\begin{cases} (B + DK_{mn}^2) \geq 0 \\ (B + DK_{mn}^2)^2 \geq K_{mn}^2 \end{cases} \quad (\text{D.47})$$

Nous pouvons également calculer les valeurs de D telles que la matrice \mathcal{M}_{mn} n'est plus inversible. Dans un tel cas, nous avons vu dans la section 5.3.5.3 que des modes du noyau pouvaient spontanément émerger dans notre écoulement. L'annulation du déterminant de la matrice donne donc :

$$D^2 K_{mn}^4 + 2DBK_{mn}^2 + (B^2 - K_{mn}^2) = 0 \quad (\text{D.48})$$

Pour exprimer les valeurs de D qui rendent la matrice inversible, nous pouvons calculer le déterminant de l'équation ci-dessus :

$$\Delta = 4B^2 K_{mn}^4 - 4B^2 K_{mn}^4 + 4K_{mn}^6 \geq 0 \quad (\text{D.49})$$

Nous obtenons donc un ensemble de solutions D_{mn}^\pm telles que :

$$D_{mn}^\pm = \frac{-B \pm |K_{mn}|}{K_{mn}^2} \quad (\text{D.50})$$

Le système d'équations D.47 nous indique alors que la seule solution stable est D_{mn}^+ .

D.2.4 Brisure de symétrie spontanée

D.2.4.1 Brisure de symétrie du forçage en volume

Pour toutes les valeurs de D telles que $\forall(n, m), D \neq D_{mn}$, la matrice \mathcal{M}_{mn} est inversible. Cela signifie donc que pour ces valeurs de D , et des termes de forçage F et G antisymétriques (soit, des modes à n pair), le champ de vitesses solution de notre système d'équations sera lui-même antisymétrique par rapport à l'altitude moyenne dans la cuve. Le moment cinétique I , proportionnel à la brisure de symétrie, vaudra alors 0. S'il existe $(m_0, n_0)/D = D_{mn}$, alors l'écoulement produit par un forçage F et G antisymétriques sera la somme des inverses des matrices $\mathcal{M}_{m \neq m_0, n \neq n_0}$, du pseudo-inverse de la matrice \mathcal{M}_{m_0, n_0} multiplié par les termes de forçage (qui peuvent être nuls pour m_0, n_0) et d'une composante ϕ_{m_0, n_0} d'amplitude non fixée. Pour un n pair, le mode en question ne vient pas briser la \mathcal{R}_π symétrie de l'expérience. En revanche, pour n impair, le mode du noyau va *spontanément* briser la symétrie, et nous pourrions observer une valeur de $I \neq 0$. Pour un écoulement de type Euler, nous savons que $D = 0$ et les modes du noyau ne sont observés que pour $B = |K_{mn}|$ [114].

D.2.4.2 Brisure de symétrie pour un forçage *via* les limites

La résolution du système d'équations D.34 s'effectue à F, G et C égaux à zéro. Dans un tel cas, il est possible de montrer que les équations sont très similaires à celles de la section D.2.3. Toutefois, cette fois-ci, nous pouvons spécifier des conditions aux limites, ϕ^\pm : un forçage symétrique impliquera alors $\phi^+ = -\phi^-$. Pour les valeurs de $D = D_{mn}$, il est possible d'observer des modes du noyau, comme précédemment. Le moment cinétique I permet de mesurer une partie de l'amplitude complexe a_m de tels modes

$$I \propto \frac{R}{h} \Re(a_m) \quad (\text{D.51})$$

Il est possible de construire une phase φ_M telle que $\Re(a_m) = |a_m| \sin(\varphi_M)$. L'effet d'un déphasage φ_M sera donc de décaler la couche de cisaillement, comme cela a été exposé, mais sans le préciser, sur la figure 5.40 du chapitre 5.

D.2.5 Émergence des modes de Goldstone

La multi-stabilité que nous observons dans l'écoulement peut paraître surprenante : le principe de restauration statistique des symétries à grande échelle semble imposer que la hauteur de la couche de cisaillement soit fixée à 0. Toutefois, nous pouvons désormais voir qu'à l'instar des fluides ou des solides, il existe des excitations élémentaires, les ϕ_{mn} brisant la symétrie, d'énergie nulle. Dans le cas de solides ou de fluides infinis, des excitations d'énergie aussi *faible* que l'on veut, des *phonons* de très grande longueur d'onde, existent également. Ces phonons viennent également restaurer une perte de symétrie (les translations) : leur *phase* en un point donné est arbitraire, comme le *déphasage* φ_M qui existe entre les divers ϕ_{mn} brisant spontanément la \mathcal{R}_π symétrie. Nous pouvons donc penser que notre écoulement restaure de la même manière une brisure de symétrie translationnelle, comme nous l'avons indiqué sur la figure 5.42.

Nous considérerons qu'il est possible d'identifier l'amplitude de la brisure de symétrie au déphasage φ_M présenté ci-dessus (ils sont liés l'un à l'autre par la définition de I) : ce déphasage peut alors être considéré en tant que processus stochastique, sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_M = v_G + \xi(t) \\ \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = Q \delta(t - t') \end{cases} \quad (\text{D.52})$$

L'évolution d'un tel déphasage pour $Q = 3\pi$ et $v_G = 0.7f$, où f est la fréquence de rotation des turbines, a été présentée sur la figure 5.43, et correspond qualitativement à l'évolution observée de $\varphi_M(t)$ extraite de la valeur de $I(t)$.

Nous pouvons remarquer que cette conception de la multi-stabilité vient s'opposer à l'image que nous avons décrite dans le chapitre 6, qui penchait plutôt pour une image de processus stochastique dans un double puits de potentiel séparé par une barrière d'énergie fixe. Il est possible que la différence de mécanisme observé résulte simplement d'une différence au niveau de la topologie du puits de potentiel (qui possède, ou non, une symétrie continue).

*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BAILLY et É. EGGER. *Dictionnaire grec-français*. Hachette et C^{ie}, 1903.
- [2] F. GAFFIOT. *Dictionnaire Latin-Français*. Paris : Hachette, 1934.
- [3] G. G. STOKES. *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, 9. Pitt Press, 1851.
- [4] L. RICHARDSON. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge : University Press, 1922.
- [5] L. MARIÉ. *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : Influence de la Rotation*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Paris VII, 2003.
- [6] M. LESIEUR. *Turbulence in fluids*, 84. Springer, 2008.
- [7] U. FRISCH. *Turbulence : The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] E. N. LORENZ. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20** (2), p. 130–141, 1963.
- [9] P. MANNEVILLE. *Instabilities, chaos and turbulence*, 1. Imperial College Pr, 2010.
- [10] A. KOLMOGOROV. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, **30**, p. 301–305, 1941.
- [11] H. L. GRANT, R. W. STEWART, et A. MOILLIET. Turbulence spectra from a tidal channel. *Journal of Fluid Mechanics*, **12**, p. 241–268, 1962.
- [12] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. J. HOPFINGER, et R. A. ANTONIA. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **140**, p. 63–89, 1984.
- [13] N. MORDANT, J.-F. PINTON, et F. CHILLÀ. Characterization of Turbulence in a Closed Flow. *J. Phys. II France*, **7** (11), p. 1729–1742, 1997.
- [14] C. VAN ATTA et W. CHEN. Structure functions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean. *Journal of Fluid Mechanics*, **44** (01), p. 145–159, 1970.
- [15] G. K. BATCHELOR et A. A. TOWNSEND. The Nature of Turbulent Motion at Large Wave-Numbers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **199** (1057), p. 238–255, 1949.
- [16] S. STROGATZ. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Perseus Books Group, 2001.
- [17] G. TAYLOR. Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, **223** (605-615), p. 289–343, 1923.
- [18] J. P. GOLLUB et H. L. SWINNEY. Onset of Turbulence in a Rotating Fluid. *Phys. Rev. Lett.*, **35**, p. 927–930, 1975.
- [19] S. CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Dover Publications, 1961.
- [20] F. RAVELET, A. CHIFFAUDEL, et F. DAVIAUD. Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von Kármán closed flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **601**, p. 339–364, 2008.
- [21] K. R. SREENIVASAN. On the scaling of the turbulence energy dissipation rate. *Physics of Fluids*, **27** (5), p. 1048–1051, 1984.
- [22] B. R. PEARSON, P.-A. . KROGSTAD, et W. VAN DE WATER. Measurements of the turbulent energy dissipation rate. *Physics of Fluids*, **14** (3), p. 1288–1290, 2002.
- [23] L. ONSAGER. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento Series 9*, **6** (2), p. 279–287, 1949.

- [24] J. DUCHON et R. ROBERT. Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, **13** (1), p. 249, 2000.
- [25] R. P. FEYNMAN. Application of quantum mechanics to liquid helium. *Progress in low temperature physics*, **1**, p. 17–53, 1955.
- [26] T. VON KÁRMÁN. Über laminare und turbulente Reibung. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **1**, p. 233–252, 1921.
- [27] F. SCHULTZ-GRUNOW. Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **15** (4), p. 191–204, 1935.
- [28] G. K. BATCHELOR. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **4** (1), p. 29–41, 1951.
- [29] K. STEWARTSON. On the flow between two rotating coaxial disks. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **49**, p. 333–341, 1953.
- [30] R. K.-H. SZETO. *The flow between rotating coaxial disk*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology, 1978.
- [31] P. ZANDBERGEN et D. DIJKSTRA. Von Kármán swirling flows. *Annual review of fluid mechanics*, **19** (1), p. 465–491, 1987.
- [32] S. DOUADY, Y. COUDER, et M. E. BRACHET. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p. 983–986, 1991.
- [33] M. E. BRACHET, D. I. MEIRON, S. A. ORSZAG, B. NICKEL, R. H. MORF, et U. FRISCH. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid Mech.*, **130** (41), p. 1452, 1983.
- [34] O. CADOT. *Etude des structures de basse pression dans la turbulence développée*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Paris VII, 1995.
- [35] O. CADOT, S. DOUADY, et Y. COUDER. Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, **7**, p. 630, 1995.
- [36] A. LA PORTA, G. A. VOTH, F. MOISY, et E. BODENSCHATZ. Using cavitation to measure statistics of low-pressure events in large-Reynolds-number turbulence. *Physics of Fluids*, **12**, p. 1485, 2000.
- [37] J. TITON et O. CADOT. Direct measurements of the energy of intense vorticity filaments in turbulence. *Physical Review E*, **67** (2), p. 027301, 2003.
- [38] O. CADOT, D. BONN, et S. DOUADY. Turbulent drag reduction in a closed flow system : Boundary layer versus bulk effects. *Physics of Fluids*, **10** (2), p. 426–436, 1998.
- [39] J. TITON et O. CADOT. The statistics of power injected in a closed turbulent flow : Constant torque forcing versus constant velocity forcing. *Physics of Fluids*, **15**, p. 625, 2003.
- [40] O. CADOT et J. H. TITON. On the relationship of the injected power between constant torque forcing and constant velocity forcing of fully turbulent flow. *Physics of Fluids*, **16**, p. 2140, 2004.
- [41] J.-H. TITON et O. CADOT. Global injected power statistics in a turbulent system : degrees of freedom and aspect ratio effect. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **45** (3), p. 289–292, 2005.
- [42] D. BONN, Y. AMAROUCHÈNE, C. WAGNER, S. DOUADY, et O. CADOT. Turbulent drag reduction by polymers. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **17** (14), p. S1195, 2005.
- [43] J. DRAPPIER, T. DIVOUX, Y. AMAROUCHÈNE, F. BERTRAND, S. RODTS, O. CADOT, J. MEUNIER, et D. BONN. Turbulent drag reduction by surfactants. *EPL (Europhysics Letters)*, **74** (2), p. 362, 2006.
- [44] J. MAURER, P. TABELING, et G. ZOCCHI. Statistics of Turbulence between Two Counterrotating Disks in Low-Temperature Helium Gas. *Europhysics Letters*, **26**, p. 31, 1994.
- [45] G. ZOCCHI, P. TABELING, J. MAURER, et H. WILLAIME. Measurement of the scaling of the dissipation at high Reynolds numbers. *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **50**, p. 3963–3700, 1994.
- [46] M. ABID, M. BRACHET, J. MAURER, C. NORE, et P. TABELING. Experimental and numerical investigations of low-temperature superfluid turbulence. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, **17** (4), p. 665 – 675, 1998. Special Issue Dynamics and Statistics of Concentrated Vortices in Turbulent Flow (Euromech Colloquium 364).

- [47] J. MAURER et P. TABELING. Local investigation of superfluid turbulence. *Europhysics Letters*, **43**, p. 29, 1998.
- [48] F. MOISY, P. TABELING, et H. WILLAIME. Kolmogorov equation in a fully developed turbulence experiment. *Physical review letters*, **82 (20)**, p. 3994–3997, 1999.
- [49] F. MOISY, H. WILLAIME, J. ANDERSEN, et P. TABELING. Passive scalar intermittency in low temperature helium flows. *Physical Review Letters*, **86 (21)**, p. 4827–4830, 2001.
- [50] F. MOISY. *Etude expérimentale des fluctuations de vitesse, de température et de pression en turbulence développée*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2003.
- [51] S. FAUVE, C. LAROCHE, et B. CASTAING. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *J. Phys. II France*, **3 (3)**, p. 271–278, 1993.
- [52] J.-F. PINTON et R. LABBÉ. Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows. *Journal de Physique. II*, **4**, p. 1461–1468, 1994.
- [53] R. LABBE, J.-F. PINTON, et S. FAUVE. Power Fluctuations in Turbulent Swirling Flows. *Journal de Physique II*, **6**, p. 1099–1110, 1996.
- [54] S. T. BRAMWELL, P. C. W. HOLDSWORTH, et J.-F. PINTON. Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena. *Nature*, **396**, p. 552–554, 1998.
- [55] J. PINTON, F. CHILLA, et N. MORDANT. Intermittency in the closed flow between coaxial corotating disks. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, **17 (4)**, p. 535–547, 1998.
- [56] J.-F. PINTON, P. C. W. HOLDSWORTH, et R. LABBÉ. Power fluctuations in a closed turbulent shear flow. *Phys. Rev. E*, **60**, p. R2452–R2455, 1999.
- [57] S. AUMAÎTRE. *Étude des fluctuations de grandeurs globales dans des systèmes dissipatifs hors-équilibre*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 1999.
- [58] B. DERNONCOURT, J.-F. PINTON, et S. FAUVE. Scaling of vorticity filaments in a turbulent swirling flow. In *Advances in Turbulence VI*, p. 437–440. Springer, 1996.
- [59] B. DERNONCOURT, J.-F. PINTON, et S. FAUVE. Experimental study of vorticity filaments in a turbulent swirling flow. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **117 (1)**, p. 181–190, 1998.
- [60] J. PINTON, F. CHILLA, et N. MORDANT. Intermittency in the closed flow between coaxial corotating disks. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, **17 (4)**, p. 535–547, 1998.
- [61] S. FAUVE, S. AUMAITRE, P. ABRY, J.-F. PINTON, et R. LABBE. Large Scale Fluctuations in Swirling Flows. In U. FRISCH (éditeur), *Advances in Turbulence VII*, 46 de *Fluid Mechanics and Its Applications*, p. 3–8. Springer Netherlands, 1998.
- [62] S. AUMAÎTRE, S. FAUVE, et J. PINTON. Large scale correlations for energy injection mechanisms in swirling turbulent flows. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **16 (3)**, p. 563–567, 2000.
- [63] M. BOURGOIN. *Études en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 2003.
- [64] R. VOLK. *Fluctuations d'induction en magnétohydrodynamique, contributions à l'induction à grande échelle, application à l'effet dynamo*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 2005.
- [65] F. RAVELET. *Bifurcation globales hydrodynamiques et magnetohydrodynamiques dans un écoulement de von Karman turbulent*. Thèse de doctorat, École doctorale de l'école Polytechnique, 2005.
- [66] R. MONCHAUX. *Mécanique statistique et effet dynamo dans un écoulement de von Karman turbulent*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII, 2007.
- [67] F. PÉTRÉLIS. *Effet Dynamo : Etudes des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2002.
- [68] M. BERHANU. *Magnétohydrodynamique turbulente dans les métaux liquides*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [69] C. GISSINGER. *Modèles et simulations numériques de l'effet dynamo*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [70] G. VERHILLE. *Études expérimentales en magnétohydrodynamique : effet dynamo, turbulence et induction*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2010.

- [71] B. GALLET. *Dynamique d'un champ à grande échelle engendré sur un fond turbulent*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure, 2011.
- [72] R. MONCHAUX, M. BERHANU, M. BOURGOIN, M. MOULIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, R. VOLK, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, C. GASQUET, L. MARIÉ, et F. RAVELET. Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium. *Physical Review Letters*, **98**, p. 044502, 2007.
- [73] M. BERHANU, R. MONCHAUX, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, L. MARIÉ, F. RAVELET, M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, et R. VOLK. Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *EPL (Europhysics Letters)*, **77 (5)**, p. 59001, 2007.
- [74] F. RAVELET, M. BERHANU, R. MONCHAUX, S. AUMAITRE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, M. BOURGOIN, P. ODIER, N. PLIHON, *et al.*. Chaotic dynamos generated by a turbulent flow of liquid sodium. *Physical review letters*, **101 (7)**, p. 74502, 2008.
- [75] N. MORDANT, P. METZ, O. MICHEL, et J.-F. PINTON. Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, p. 214501, 2001.
- [76] A. LA PORTA, G. A. VOTH, A. M. CRAWFORD, J. ALEXANDER, et E. BODENSCHATZ. Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. *Nature*, **409**, p. 1017–1019, 2001.
- [77] G. A. VOTH, A. LA PORTA, A. M. CRAWFORD, J. ALEXANDER, et E. BODENSCHATZ. Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **469**, p. 121–160, 2002.
- [78] N. MORDANT, A. CRAWFORD, et E. BODENSCHATZ. Experimental Lagrangian acceleration probability density function measurement. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **193 (1–4)**, p. 245 – 251, 2004. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity.
- [79] N. T. OUELLETTE, H. XU, M. BOURGOIN, et E. BODENSCHATZ. Small-scale anisotropy in Lagrangian turbulence. *New Journal of Physics*, **8 (6)**, p. 102, 2006.
- [80] R. VOLK, E. CALZAVARINI, G. VERHILLE, D. LOHSE, N. MORDANT, J.-F. PINTON, et F. TOSCHI. Acceleration of heavy and light particles in turbulence : comparison between experiments and direct numerical simulations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **237 (14)**, p. 2084–2089, 2008.
- [81] R. VOLK, N. MORDANT, G. VERHILLE, et J.-F. PINTON. Laser Doppler measurement of inertial particle and bubble accelerations in turbulence. *EPL (Europhysics Letters)*, **81 (3)**, p. 34002, 2008.
- [82] E. CALZAVARINI, R. VOLK, M. BOURGOIN, E. LÉVÊQUE, J.-F. PINTON, F. TOSCHI, *et al.*. Acceleration statistics of finite-sized particles in turbulent flow : the role of Faxén forces. *Journal of Fluid Mechanics*, **630**, p. 179, 2009.
- [83] M. BOURGOIN, N. T. OUELLETTE, H. XU, J. BERG, et E. BODENSCHATZ. The Role of Pair Dispersion in Turbulent Flow. *Science*, **311 (5762)**, p. 835–838, 2006.
- [84] R. VOLK, E. CALZAVARINI, E. LEVEQUE, J.-F. PINTON, *et al.*. Dynamics of inertial particles in a turbulent von Kármán flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **668**, p. 223–235, 2011.
- [85] R. ZIMMERMANN. *The Lagrangian Exploration Module*. Thèse de doctorat, Georg-August-Universität Göttingen & Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, 2008.
- [86] R. ZIMMERMANN, H. XU, Y. GASTEUIL, M. BOURGOIN, R. VOLK, J.-F. PINTON, et E. BODENSCHATZ. The Lagrangian exploration module : An apparatus for the study of statistically homogeneous and isotropic turbulence. *Review of Scientific Instruments*, **81 (5)**, 055112, 2010.
- [87] H. XU, N. T. OUELLETTE, et E. BODENSCHATZ. Evolution of geometric structures in intense turbulence. *New Journal of Physics*, **10 (1)**, p. 013012, 2008.
- [88] H. XU, A. PUMIR, et E. BODENSCHATZ. The pirouette effect in turbulent flows. *Nat Phys*, **7 (9)**, p. 709–712, 2011.
- [89] C. NORE, L. S. TUCKERMAN, O. DAUBE, et S. XIN. The 1-2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **477**, p. 51–88, 2003.
- [90] C. NORE, M. TARTAR, O. DAUBE, et L. S. TUCKERMAN. Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks. *Journal of Fluid Mechanics*, **511**, p. 45–65, 2004.

- [91] C. NORE, F. MOISY, et L. QUARTIER. Experimental observation of near-heteroclinic cycles in the von Kármán swirling flow. *Physics of Fluids*, **17** (6), 064103, 2005.
- [92] A. DE LA TORRE et J. BURGUETE. Slow Dynamics in a Turbulent von Kármán Swirling Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, p. 054101, 2007.
- [93] J. BURGUETE et A. DE LA TORRE. Hysteresis and vortices dynamics in a turbulent flow. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **19** (08), p. 2695–2703, 2009.
- [94] E. HERBERT, P.-P. CORTET, F. DAVIAUD, et B. DUBRULLE. Eckhaus type instability of a mean turbulent von Kármán flow. *Physics of Fluids*, p. (sous presse), 2013.
- [95] P. CURIE. *Propriétés magnétiques des corps a diverses températures*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Paris, 1895.
- [96] P. LANGEVIN. Sur la théorie du magnétisme. *J. Phys. Theor. Appl.*, **4** (1), p. 678–693, 1905.
- [97] E. ISING. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, **31**, p. 253–258, 1925.
- [98] L. ONSAGER. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, **65** (3-4), p. 117, 1944.
- [99] T. DAUXOIS, P. HOLDSWORTH, et S. RUFFO. Violation of ensemble equivalence in the anti-ferromagnetic mean-field XY model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **16** (4), p. 659–667, 2000.
- [100] J. BARRÉ, D. MUKAMEL, et S. RUFFO. Inequivalence of Ensembles in a System with Long-Range Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, p. 030601, 2001.
- [101] T. DAUXOIS, S. RUFFO, E. ARIMONDO, et M. WILKENS. *Dynamics and thermodynamics of systems with long range interactions*, 602. Springer, 2003.
- [102] F. DAVIAUD, J. HEGSETH, et P. BERGÉ. Subcritical transition to Turbulence in Plane Couette Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **69** (17), p. 2511–2514, 1992.
- [103] O. DAUCHOT et F. DAVIAUD. Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow. *Physics of Fluids*, **7**, p. 335, 1995.
- [104] A. DARBYSHIRE et T. MULLIN. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **289**, p. 83–114, 1995.
- [105] R. ROBERT et J. SOMMERIA. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **229**, p. 291–310, 1991.
- [106] R. ROBERT et J. SOMMERIA. Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, p. 2776–2779, 1992.
- [107] P.-H. CHAVANIS, J. SOMMERIA, et R. ROBERT. Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems. *The Astrophysical Journal*, **471** (1), p. 385, 1996.
- [108] M. GHARIB et P. DERANGO. A liquid film (soap film) tunnel to study two-dimensional laminar and turbulent shear flows. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **37** (1), p. 406–416, 1989.
- [109] M. A. RUTGERS. Forced 2D Turbulence : Experimental Evidence of Simultaneous Inverse Energy and Forward Enstrophy Cascades. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, p. 2244–2247, 1998.
- [110] J. SOMMERIA. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *Journal of fluid mechanics*, **170** (1), p. 139–168, 1986.
- [111] U. FRISCH et P.-L. SULEM. Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, **27** (8), p. 1921–1923, 1984.
- [112] N. LEPROVOST, L. MARIÉ, et B. DUBRULLE. A stochastic model of torques in von Karman swirling flow. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **39**, p. 121–129, 2004. 10.1140/epjb/e2004-00177-x.
- [113] N. LEPROVOST, B. DUBRULLE, et P.-H. CHAVANIS. Dynamics and thermodynamics of axisymmetric flows : Theory. *Physical Review E*, **73** (4), p. 046308, 2006.
- [114] A. NASO, S. THALABARD, G. COLLETTE, P.-H. CHAVANIS, et B. DUBRULLE. Statistical mechanics of Beltrami flows in axisymmetric geometry : equilibria and bifurcations. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, **06**, p. 1742–5468, 2010.

- [115] A. NASO, R. MONCHAUX, P.-H. CHAVANIS, et B. DUBRULLE. Statistical mechanics of Beltrami flows in axisymmetric geometry : Theory reexamined. *Physical Review E*, **81** (6), p. 066318, 2010.
- [116] P.-P. CORTET, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, et B. DUBRULLE. Experimental Evidence of a Phase Transition in a Closed Turbulent Flow. *Physical Review Letters*, **105**, p. 214501, 2010.
- [117] P.-P. CORTET, E. HERBERT, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, et V. PADILLA. Susceptibility divergence, phase transition and multistability of a highly turbulent closed flow. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, **2011** (07), p. P07012, 2011.
- [118] T. DE L'INGÉNIEUR (éditeur). *Guidage mécanique*, base documentaire : 42183210. Editions T.I., 2013. Fre.
- [119] C. MINET. *Lubrification mixte dans les étanchéités dynamiques : application aux garnitures mécaniques d'étanchéité*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2009.
- [120] R. ADRIAN et C. YAO. Power spectra of fluid velocities measured by laser Doppler velocimetry. *Experiments in Fluids*, **5** (1), p. 17–28, 1986.
- [121] H. XU, N. OUELLETTE, H. NOBACH, et E. BODENSCHATZ. Experimental Measurements of Lagrangian Statistics in Intense Turbulence. In J. PALMA et A. LOPES (éditeurs), *Advances in Turbulence XI*, 117 de *Springer Proceedings Physics*, p. 1–10. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [122] L. BOLTZMANN. *Lectures on Gas Theory*. Univ of California Press, 1964.
- [123] D. LYNDEN-BELL et R. WOOD. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **138**, p. 495, 1968.
- [124] W. THIRRING. Systems with negative specific heat. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, **235** (4), p. 339–352, 1970.
- [125] M. KAC. On the Partition Function of a One-Dimensional Gas. *Physics of Fluids*, **2** (1), p. 8–12, 1959.
- [126] M. KAC, G. E. UHLENBECK, et P. C. HEMMER. On the van der Waals Theory of the Vapor-Liquid Equilibrium. I. Discussion of a One-Dimensional Model. *Journal of Mathematical Physics*, **4** (2), p. 216–228, 1963.
- [127] F. BOUCHET et J. BARRÉ. Classification of Phase Transitions and Ensemble Inequivalence, in Systems with Long Range Interactions. *Journal of Statistical Physics*, **118**, p. 1073–1105, 2005. 10.1007/s10955-004-2059-0.
- [128] Z. G. NICOLAOU et A. E. MOTTER. Mechanical metamaterials with negative compressibility transitions. *Nature Materials*, **11** (7), p. 608–613, 2012.
- [129] G. DE NINNO et D. FANELLI. Out-of-equilibrium statistical ensemble inequivalence. *EPL (Europhysics Letters)*, **97** (2), p. 20002, 2012.
- [130] D. S. GAUNT, M. F. SYKES, et S. MCKENZIE. Susceptibility and fourth-field derivative of the spin- 1 / 2 Ising model for $T > T_c$ and $d=4$. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, **12** (6), p. 871, 1979.
- [131] A. PELISSETTO et E. VICARI. Critical phenomena and renormalization-group theory. *Physics Reports*, **368** (6), p. 549 – 727, 2002.
- [132] A. E. FERDINAND et M. E. FISHER. Bounded and Inhomogeneous Ising Models. I. Specific-Heat Anomaly of a Finite Lattice. *Phys. Rev.*, **185**, p. 832–846, 1969.
- [133] D. P. LANDAU. Finite-size behavior of the Ising square lattice. *Phys. Rev. B*, **13**, p. 2997–3011, 1976.
- [134] D. P. LANDAU. Finite-size behavior of the simple-cubic Ising lattice. *Phys. Rev. B*, **14**, p. 255–262, 1976.
- [135] N. METROPOLIS et S. ULAM. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, **44** (247), p. 335–341, 1949.
- [136] J. R. EHRMAN, L. D. FOSDICK, et D. C. HANDSCOMB. Computation of Order Parameters in an Ising Lattice by the Monte Carlo Method. *Journal of Mathematical Physics*, **1** (6), p. 547–558, 1960.
- [137] H. EYRING. The Activated Complex in Chemical Reactions. *The Journal of Chemical Physics*, **3** (2), p. 107–115, 1935.

- [138] H. KRAMERS. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, **7** (4), p. 284–304, 1940.
- [139] J. GARCIA-OTERO, A. GARCIA-BASTIDA, et J. RIVAS. Influence of temperature on the coercive field of non-interacting fine magnetic particles. *Journal of magnetism and magnetic materials*, **189** (3), p. 377–383, 1998.
- [140] D. BISERO, E. ANGELI, F. SPIZZO, P. VAVASSORI, et F. RONCONI. Coercive field vs. temperature in Fe/Ag nanogranular films. *Journal of magnetism and magnetic materials*, **262**, p. 116–119, 2003.
- [141] B. CASTAING. The Temperature of Turbulent Flows. *J. Phys. II France*, **6**, p. 105–114, 1996.
- [142] R. J. BAXTER. *Exactly solvable models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [143] H. E. STANLEY. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press, 1971.
- [144] J. P. BOUCHAUD. Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. *J. Phys. I France*, **2** (9), p. 1705–1713, 1992.
- [145] K. KOMATSU, D. L'HÔTE, S. NAKAMAE, V. MOSSER, M. KONCZYKOWSKI, E. DUBOIS, V. DUPUIS, et R. PERZYNSKI. Experimental Evidence for Violation of the Fluctuation-Dissipation Theorem in a Superspin Glass. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, p. 150603, 2011.
- [146] T. HARADA et S.-I. SASA. Equality Connecting Energy Dissipation with a Violation of the Fluctuation-Response Relation. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, p. 130602, 2005.
- [147] L. BERTHIER et J. KURCHAN. Non-equilibrium glass transitions in driven and active matter. *Nat Phys*, **9** (5), p. 310–314, 2013.
- [148] D. HURST et J. C. VASSILICOS. Scalings and decay of fractal-generated turbulence. *Physics of Fluids*, **19** (3), 035103, 2007.
- [149] G. COMTE-BELLOT et S. CORRSIN. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, p. 657–682, 1966.
- [150] N. MAZELLIER et J. C. VASSILICOS. Turbulence without Richardson–Kolmogorov cascade. *Physics of Fluids*, **22** (7), 075101, 2010.
- [151] J.-P. VALET et L. MEYNADIER. Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million. *Nature*, **366** (6452), p. 234–238, 1993.
- [152] R. MONCHAUX, P.-P. CORTET, P.-H. CHAVANIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, P. DIRIBARNE, et B. DUBRULLE. Fluctuation-Dissipation Relations and Statistical Temperatures in a Turbulent von Kármán Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, p. 174502, 2008.
- [153] M. LÓPEZ-CABALLERO et J. BURGUETE. Inverse Cascades Sustained by the Transfer Rate of Angular Momentum in a 3D Turbulent Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, p. 124501, 2013.
- [154] F. PÉTRÉLIS et S. FAUVE. Chaotic dynamics of the magnetic field generated by dynamo action in a turbulent flow. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **20** (49), p. 494203, 2008.
- [155] D. BONN, J. MEUNIER, O. GREFFIER, A. AL-KAHWAJI, et H. KELLAY. Bistability in non-Newtonian flow : Rheology of lyotropic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, **58**, p. 2115–2118, 1998.
- [156] G. WILKINS et P. OLMSTED. Vorticity banding during the lamellar-to-onion transition in a lyotropic surfactant solution in shear flow. *The European Physical Journal E*, **21** (2), p. 133–143, 2006.
- [157] L. ESAKI. New Phenomenon in Narrow Germanium $p - n$ Junctions. *Phys. Rev.*, **109**, p. 603–604, 1958.
- [158] B. K. RIDLEY. Specific Negative Resistance in Solids. *Proceedings of the Physical Society*, **82** (6), p. 954, 1963.
- [159] B. RIDLEY et R. PRATT. A bulk differential negative resistance due to electron tunnelling through an impurity potential barrier. *Physics Letters*, **4** (5), p. 300 – 302, 1963.
- [160] A. MCWHORTER et R. REDIKER. The Cryosar-A New Low-Temperature Computer Component. *Proceedings of the IRE*, **47** (7), p. 1207–1213, 1959.
- [161] P.-H. CHAVANIS. Statistical Mechanics of Two-Dimensional Vortices and Stellar Systems. In T. DAUXOIS, S. RUFFO, E. ARIMONDO, et M. WILKENS (éditeurs), *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*, 602 de *Lecture Notes in Physics*, p. 208–289. Springer Berlin Heidelberg, 2002.

- [162] T. MORI. Analysis of the exactness of mean-field theory in long-range interacting systems. *Phys. Rev. E*, **82**, p. 060103, 2010.
- [163] P. KAPITZA. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, **141 (3558)**, p. 74, 1938.
- [164] R. E. PACKARD et T. M. SANDERS. Observations on Single Vortex Lines in Rotating Superfluid Helium. *Phys. Rev. A*, **6**, p. 799–807, 1972.
- [165] E. J. YARMCHUK, M. J. V. GORDON, et R. E. PACKARD. Observation of Stationary Vortex Arrays in Rotating Superfluid Helium. *Phys. Rev. Lett.*, **43**, p. 214–217, 1979.
- [166] A. ABRIKOSOV. The magnetic properties of superconducting alloys. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, **2 (3)**, p. 199 – 208, 1957.
- [167] M. KOBAYASHI et M. TSUBOTA. Kolmogorov Spectrum of Superfluid Turbulence : Numerical Analysis of the Gross-Pitaevskii Equation with a Small-Scale Dissipation. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, p. 065302, 2005.
- [168] G. P. BEWLEY, M. S. PAOLETTI, K. R. SREENIVASAN, et D. P. LATHROP. Characterization of reconnecting vortices in superfluid helium. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **105 (37)**, p. 13707–13710, 2008.
- [169] J. SALORT. *Turbulence classique versus turbulence quantique*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier de Grenoble, 2012.
- [170] J. SALORT, C. BAUDET, B. CASTAING, B. CHABAUD, F. DAVIAUD, T. DIDELOT, P. DIRIBARNE, B. DUBRULLE, Y. GAGNE, F. GAUTHIER, A. GIRARD, B. HÉBRAL, B. ROUSSET, P. THIBAUT, et P.-E. ROCHE. Turbulent velocity spectra in superfluid flows. *Physics of Fluids*, **22 (12)**, 125102, 2010.
- [171] F. RAVELET, L. MARIÉ, A. CHIFFAUDEL, et F. DAVIAUD. Multistability and Memory Effect in a Highly Turbulent Flow : Experimental Evidence for a Global Bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 164501, 2004.
- [172] E. R. WEEKS, Y. TIAN, J. URBACH, K. IDE, H. L. SWINNEY, et M. GHIL. Transitions between blocked and zonal flows in a rotating annulus with topography. *Science*, **278 (5343)**, p. 1598–1601, 1997.
- [173] M. KAWABE. Variations of current path, velocity, and volume transport of the Kuroshio in relation with the large meander. *Journal of physical oceanography*, **25 (12)**, p. 3103–3117, 1995.
- [174] G. GALLAVOTTI. Nonequilibrium Statistical Mechanics (Stationary) : Overview. In *Encyclopedia of Mathematical Physics*, p. 530–540. Academic Press, Oxford, 2006.
- [175] G. P. BEWLEY, D. P. LATHROP, et K. R. SREENIVASAN. Superfluid Helium : Visualization of quantized vortices. *Nature*, **441 (7093)**, p. 588–588, 2006.
- [176] K. MOHSENI. Statistical equilibrium theory for axisymmetric flows : Kelvin’s variational principle and an explanation for the vortex ring pinch-off process. *Physics of Fluids*, **13 (7)**, p. 1924–1931, 2001.
- [177] G. W. PALTRIDGE et M. PLATT. *Radiative process in meteorology and climatology*. Elsevier Scientific Pub. Co., 1977.
- [178] B. SAINT-MICHEL, F. DAVIAUD, et B. DUBRULLE. A zero-mode mechanism for spontaneous symmetry breaking in a turbulent von Kármán flow. submitted to : *New J. Phys.*, 2013.

Résumé

Cette thèse tente d'effectuer une approche de physique statistique (à l'équilibre et hors équilibre) d'un écoulement pleinement turbulent de von Kármán produit par la contre-rotation de deux turbines dans un cylindre rempli de fluide.

Dans une première partie, les résultats expérimentaux obtenus en commande en vitesse sont complétés par des observations par PIV, puis étudiés dans le cadre de la mécanique statistique : la divergence de susceptibilité qui est notamment observée est étudiée à la manière d'un modèle d'Ising-Champ moyen, dans lequel les corrélations spatiales de l'écoulement et le théorème fluctuation-dissipation sont examinés.

En second lieu, les résultats de commande en couple sont complétés : l'existence de réponses différentielles négatives dans l'écoulement autorise une analogie avec certains dipôles électriques et fluides complexes. Nous interprétons ces résultats comme une forme d'inéquivalence d'ensemble, typique des systèmes possédant des interactions à longue portée. Les temps d'échappement des régimes multi-stables sont également étudiés comme un simple problème de puits de potentiel de Kramers, révélant une dynamique globale à petit nombre de degrés de liberté.

Finalement, des résultats préliminaires de l'expérience SHREK effectuées dans l'hélium à très basse température sont présentés. Les couples mécaniques exercés sur les turbines sont similaires dans le cas du fluide normal et du superfluide. Les nombres de Reynolds accessibles dans l'expérience permettent en outre une étude plus complète du cycle d'hystérésis en fonction du nombre de Reynolds.

Mots-clés : écoulement de von Kármán ; turbulence ; mécanique statistique hors-équilibre ; transitions de phase ; superfluidité.

Abstract

This dissertation tries a novel approach of statistical mechanics (at and out of equilibrium) to understand the behaviour of a fully turbulent confined flow — von Kármán flow — stirred by two counter-rotating impellers in a cylinder vessel.

First, experimental results from speed control are extended using new PIV observations : the susceptibility divergence of the flow is studied similarly to a mean-field Ising model, for which the spatial correlations and the fluctuation-dissipation theorem are examined.

Second, additional experimental results obtained in torque control are also detailed, revealing negative differential responses allowing an analogy with other out-of-equilibrium experiments such as electrical dipoles or complex fluids. These results are understood in the framework of ensemble inequivalence, typical of long-range interacting systems. In addition, escape times from attracting states in multi-stable experiments display a Kramers-like simple dynamics, as do systems with few degrees of freedom.

Finally, preliminary results from the SHREK experiment are shown : torques measured in normal and superfluid liquid helium exhibit similar results. Moreover, the Reynolds number range achieved in this experiment allows a more thorough study of the evolution of the hysteresis cycle already studied for lower Reynolds numbers.

Keywords : von kármán flow ; turbulence ; out-of-equilibrium statistical mechanics ; phase transitions ; superfluidity.