



HAL
open science

Méthodes effectives en théorie de Galois différentielle et applications à l'intégrabilité de systèmes dynamiques

Jacques-Arthur Weil

► **To cite this version:**

Jacques-Arthur Weil. Méthodes effectives en théorie de Galois différentielle et applications à l'intégrabilité de systèmes dynamiques. Analyse classique [math.CA]. Université de Limoges, 2013. tel-00933064

HAL Id: tel-00933064

<https://theses.hal.science/tel-00933064>

Submitted on 22 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École Doctorale Sciences et Ingénierie pour l'Information,
Mathématiques****HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Discipline : Mathématiques et Applications

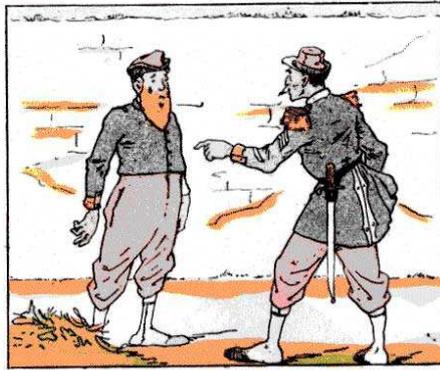
présentée par

Jacques-Arthur Weil

**Méthodes effectives en théorie de Galois différentielle et
applications à l'intégrabilité de systèmes dynamiques**

Soutenue le lundi 9 décembre 2013 devant le jury composé de :

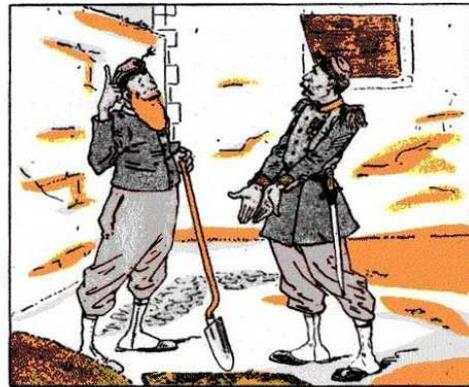
M. Marc GIUSTI	CNRS, École Polytechnique	Président
M. Jean-Pierre RAMIS	Université Paul Sabatier, Toulouse	Rapporteur
M. Carles SIMÓ	Universitat de Barcelona	Rapporteur
M. Michael F. SINGER	North Carolina State University	Rapporteur
M. Moulay A. BARKATOU	Université de Limoges	Chargé de Suivi
M. Sergei ABRAMOV	Russian Academy of Sciences	Examineur
M. Samir ADLY	Université de Limoges	Examineur
M ^{me} Lucia DI VIZIO	CNRS, Université de Versailles	Examinatrice
M ^{me} Claude MITSCHI	Université de Strasbourg	Examinatrice
M. Pol VANHAECKE	Université de Poitiers	Examineur



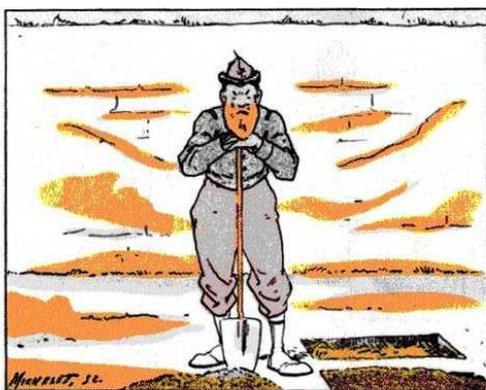
Bitur fait venir Camember : « Sapeur, lui dit-il, je vous imprime l'ordre de creuser un trou pour à seule fin d'y mettre ces ordures et autres, si non je vous ferai-z-un peu voir comment j's'appelle! »



Camember qui ne tient pas à savoir comment s'appelle le sergent Bitur, a creusé un trou et y a délicatement déposé les ordures. Puis il demeure perplexe : « Oui, se dit-il, mais, maintenant, la terre du trou... ousque j'vas la fourrer? »



« Sergent! interroge Camember, et la terre du trou? — Que vous êtes donc plus hermétiquement bouché qu'une bouteille de limonade, sapeur! Creusez un autre trou!... — C'est vrai! » approuve Camember.



Camember creuse donc un deuxième trou et y dépose la terre du premier, puis il redevient perplexe : « Oui, mais la terre de ce deuxième trou, se redit-il... qu'est-ce que j'en vas faire? »



« Sergent! réitère Camember, ... ousque j'vas la mettre celle-ci? — S'pèce de double mulet cornu! m'ferez quatre jours pour n'avoir pas creusé le deuxième trou assez grand pour pouvoir y mettre sa terre avec celle du premier trou. »

Remerciements

Préambule

Mes recherches portent essentiellement sur l'élaboration de méthodes de *calcul formel pour l'étude constructive des équations différentielles linéaires*, plus particulièrement autour de la théorie de Galois différentielle. Celles-ci vont du développement de la théorie sous-jacente aux algorithmes, en incluant leur implantation en MAPLE. Ces travaux ont en commun une approche expérimentale des mathématiques où l'on met l'accent sur l'examen d'exemples les plus pertinents possibles. L'étude détaillée de cas provenant de la mécanique rationnelle ou de la physique théorique nourrit en retour le développement de théories mathématiques idoines.

Mes travaux s'articulent suivant trois grands thèmes interdépendants : la théorie de Galois différentielle effective, ses applications à l'intégrabilité de systèmes hamiltoniens et des applications en physique théorique. Ces articles sont pour la plupart des collaborations. Le panorama que j'en donne ci-dessous est très partial puisque centré essentiellement sur mes travaux. Il s'organise selon quatre parties (et ne suit pas toujours l'ordre chronologique) : théorie de Galois différentielle effective, applications à la physique théorique, intégrabilité de systèmes hamiltoniens et théorie de formes réduites. Cette dernière partie, issue de la première et de la troisième, est l'axe principal de mes recherches actuelles et comporte à la fois des résultats et des travaux en cours complétés d'un programme de recherche.

J'ai encadré ou co-encadré six thèses. Les deux premières visaient à élargir le champs des équations traitables : la thèse de Delphine Boucher concernait l'algorithmique des équations différentielles à paramètres et a culminé avec ses applications à l'intégrabilité ; celle d'Anne Fredet (co-encadrée avec Jean Moulin Ollagnier) concernait les équations à coefficients dans des extensions liouvilliennes de $C(x)$. La thèse de Thomas Cluzeau (co-encadrée avec Moulay Barkatou) explorait des méthodes modulaires pour les algorithmes sur les systèmes différentiels linéaires. Deux thèses ont ensuite traité de méthodes effectives pour l'intégrabilité : la thèse d'Ainhoa Aparicio-Monforte (co-encadrée avec Moulay Barkatou) concerne des formes réduites de systèmes différentiels pour rendre effectifs les critères d'intégrabilité de Morales-Ramis et Simo ; Thierry Combet (co-encadré avec Alain Albouy) a élaboré des classifications de potentiels intégrables en développant le caractère algorithmique des objets D -finis qui apparaissent dans les méthodes de Morales-Ramis-Simo. Enfin, la thèse de Primitivo Acosta-Humanez (co-encadrée avec Juan Morales-Ruiz) traitait de transformations de Darboux et de la production d'équations de Schrödinger intégrables pour la physique quantique par des critères galoisiens effectifs.

J'ai également encadré deux postdoctorants sur des questions d'intégrabilité : Maria Przybylska et Sergi Simon.

Sur les huit doctorants et postdoctorants que j'ai encadrés, sept ont obtenu un poste dans l'enseignement supérieur (quatre en France, trois à l'étranger) et la dernière est actuellement candidate.

Table des matières

I	Théorie de Galois différentielle effective	9
1	Équations différentielles linéaires du second ordre	11
1.1	Solutions liouvilliennes	11
1.2	Solutions algébriques	11
2	Invariants des groupes de Galois différentiels et résolution d'équations	12
2.1	Invariants des groupes de Galois différentiels	13
2.2	Solutions liouvilliennes	14
2.3	Factorisation absolue et descente	15
3	Méthodes modulaires	16
3.1	Factorisation de systèmes $Y' = AY$ modulo p	17
3.2	EDP D -finies (<i>modulo</i> p puis en caractéristique zéro)	17
II	Équations différentielles de la physique théorique	19
4	Transformation de Darboux et cas intégrables d'équations de Schrödinger	19
5	Structures D-finies dans le modèle d'Ising	20
5.1	Corrélations à deux points et équation de Painlevé	20
5.2	Structures algébrique et arithmétique des opérateurs d'Ising	21
III	Intégrabilité (ou pas) des systèmes hamiltoniens	25
6	Équation Variationnelle : Ziglin-Morales-Ramis	27
6.1	Un critère logarithmique de non-intégrabilité	27
6.2	Forme réduite et relèvement de l'équation normale variationnelle	28

7	Équations variationnelles supérieures : Morales-Ramis-Simó	29
8	Applications	30
8.1	Le problème des trois corps	30
8.2	Le pendule à ressort	32
8.3	Le modèle cosmologique de Friedman-Robertson-Walker	32
8.4	La machine d'Atwood oscillante	33
8.5	Le problème de Hill (problème de la lune)	34
8.6	Le système de Hénon-Heiles	35
9	Calculs effectifs d'intégrales premières pour des systèmes différentiels non linéaires	36
9.1	Germes d'intégrales premières le long d'une solution	36
9.2	Intégrales premières rationnelles et polynômes de Darboux de champs de vecteurs polynomiaux plans	37
IV	Galois différentiel et intégrabilité : formes réduites	39
10	Formes réduites de systèmes réductifs	40
10.1	Une caractérisation des formes réduites	40
10.2	Perspectives	41
11	Intégrabilité et formes réduites	43
11.1	Vers une version effective du théorème de Morales-Ramis-Simó	43
11.2	Perspectives	44
	Références	47

*“Well, I’m not going to tell you,” said Moody gruffly.
“I’m just going to give you some good, general advice.
And the first bit is – play to your strengths.” [Row01]*

Première partie

Théorie de Galois différentielle effective

La théorie de Galois différentielle mesure « ce que l’algèbre peut voir de la dynamique » (Malgrange) et permet de donner un sens global à des objets connus localement. Elle consiste principalement en l’étude des équations différentielles linéaires par des méthodes algébriques. Une spécificité de nos travaux est de les aborder sous un angle systématiquement constructif et algorithmique.

La lecture de ce qui suit suppose un peu de familiarité avec les bases de la théorie de Galois différentielle, que nous rappelons brièvement ci-dessous. Pour des références générales, on peut mentionner chronologiquement le livre de Kaplansky [Kap57], le livre référence Kolchin [Kol73], celui de Magid [Mag94] (axé sur le point de vue des anneaux différentiels, développé notamment par van der Put, Levelt, Bertrand, Katz et d’autres), de van der Put et Singer [vdPS03] (la référence à ce jour) et le récent, très pédagogique, de Crespo et Hajto [CH11]. Parmi les panoramas : celui de Beukers [Beu92], le séminaire Bourbaki de Bertrand [Ber92] et son cours de Master [Ber86], ceux de van der Put ([vdP99], prélude au livre avec Singer, son exposé Bourbaki [Put98] puis [Put02] et [Put05]) et enfin ceux de Singer [Sin90, Sin99] (et son excellent cours plus récent [Sin09]).

Je mentionne bien sûr quelques cours et panoramas par l’auteur de ces lignes. L’article [WGPOJA95] décrit des méthodes effectives en algèbre différentielle pour un large public ; le cours [Wei97], à destination des professeurs de Classes Préparatoires, décrit des méthodes algorithmiques d’intégration d’équations différentielles ; le cours [Wei01], donné dans le cadre d’une école CIMPA au Vietnam, décrit des méthodes constructives en théorie de Galois différentielle ; le cours [BW07b] (avec Delphine Boucher) reprend ces points en le complétant par un cours sur les applications à l’intégrabilité de systèmes hamiltoniens ; enfin, l’article [UW09] avec Félix Ulmer propose un guide pratique pour la résolution d’équations différentielles linéaires en forme finie en développant quelques exemples « fil rouge ».

Fixons quelques notations. Dans tout ce qui suit, (k, ∂) désigne un corps différentiel (souvent, $k = \mathbb{C}(x)$ et $\partial = \frac{d}{dx}$) et C désigne son corps des constantes. Considérons un système différentiel linéaire $[A] : Y' = AY$ où $A \in \text{Mat}(n, k)$ (ou un opérateur différentiel $L \in k[\partial]$). On note V son espace vectoriel de solutions dans une extension de Picard-Vessiot K de k . L’action du groupe de Galois différentiel $G := \text{Gal}_\partial(K/k)$ sur V lui confère une structure de groupe algébrique linéaire ; on note \mathfrak{g} son algèbre de Lie. L’approche « à la Chevalley » consiste à caractériser le groupe par les représentations qu’il fixe dans des constructions tensorielles sur V , c’est-à-dire celles que l’on obtient par itération finie de \otimes, \oplus, \star (dual), Sym et Ext . L’approche tannakienne consiste à associer à chaque construction Const un système différentiel $Y' = \mathbf{const}(A)Y$ tel que $\text{Const}(V)$ soit l’espace des solutions du système $[\mathbf{const}(A)]$. Un invariant dans $\text{Const}(V)$ correspondra à une solution rationnelle de $[\mathbf{const}(A)]$; un semi-invariant correspondra à une solution hyperexponentielle (parfois appelée exponentielle) de $[\mathbf{const}(A)]$. On « mesure » l’action du groupe de Galois en détectant ses

(semi)-invariants *via* des solutions rationnelles (ou exponentielles) de constructions sur $[A]$.

Le module différentiel associé à $[A]$ est noté $\mathcal{M} = (k^n, \nabla_A)$. La connection ∇_A admet A pour matrice dans une base $(e_j)_{j=1\dots n}$ de k^n , son action étant définie par $\nabla_A(Y) = \partial Y - AY$ pour $Y \in k^n$.

On dit que deux systèmes $Y' = AY$ et $Z' = BZ$, où $A, B \in \text{Mat}(n, k)$ sont équivalents (sur k) s'il existe un changement de variable linéaire (une transformation de jauge) $Y = PZ$, où $P \in \text{GL}_n(k)$, qui envoie $[A]$ sur $[B]$, c'est-à-dire $B = P[A] := P^{-1} \cdot (A \cdot P - \partial(P))$. Transformer un système $[A]$ en un système équivalent revient à changer de base dans le module différentiel \mathcal{M} .

Le choix d'une base de V induit une représentation fidèle de G dans $\text{GL}(n, C)$. Il existe alors un idéal polynomial $I \subset C[X_{1,1}, \dots, X_{i,j}, \dots, X_{n,n}, \frac{1}{\text{Det}}]$ (où $\text{Det} = \det(X_{i,j})$) telle que $G \simeq \{M = (m_{i,j}) \in \text{GL}(n, C) : \forall P \in I, P(m_{i,j}) = 0\}$. L'idéal I est l'idéal des relations de G . On obtient de même une représentation de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ comme $\text{Lie}(G) := \{N \in \text{Mat}(n, C) : \text{Id} + \varepsilon N \in G(C[\varepsilon]) \text{ avec } \varepsilon \neq 0 \text{ et } \varepsilon^2 = 0\}$ où Id est la matrice identité et les $C[\varepsilon]$ -points de G sont les matrices M_ε à coefficients dans $C[\varepsilon]$ qui satisfont les équations de l'idéal I .

Dans ce qui suit, plusieurs principes ont guidé nos contributions.

- Privilégier une approche constructive et des algorithmes les plus efficaces possibles.
- Prendre ce point de vue constructif comme base pour aller plus loin, traiter beaucoup d'exemples et d'applications pour voir de nouveaux phénomènes.
- Tenter de se ramener quand c'est possible à des invariants (solutions rationnelles).
- Exploiter le fait que les constructions sont simples sur des systèmes (et compliquées sur des opérateurs) donc développer des méthodes traitant ces systèmes directement en exploitant leur structure.
- Donner des réponses globales en combinant des informations locales.
- Utiliser la multiplicité des points de vue : le point de vue des opérateurs (commode pour la résolution), le point de vue des systèmes (commode pour les constructions), le point de vue des modules différentiels (pour son caractère intrinsèque), le point de vue de l'analyse complexe (pour passer du local au global) et parfois le point de vue modulaire (réduire *modulo* p et y lire certaines informations globales).

La majorité des résultats qui suivent est implantée en Maple. Certaines implantations sont prototypes, d'autres sont distribuées (ou ont été mieux implantées par d'autres depuis). Nos contributions récentes (sur les formes réduites) sont traitées séparément dans la partie [IV](#) de ce mémoire.

1 Équations différentielles linéaires du second ordre

1.1 Solutions liouvilliennes

→ Travail avec Ulmer¹ [UW96], avec Bronstein² et Mulders [BMW97]

Kovacic a proposé en 1977 (et publié en 1986 [Kov86]) l'algorithme de calcul de solutions liouvilliennes d'équations de la forme $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$; écrit de façon très explicite (on peut l'utiliser et le programmer même quand on ne comprend pas vraiment pourquoi il fonctionne), cet algorithme a rencontré un succès considérable. Kovacic utilise la structure des sous-groupes algébriques de $SL(2, \mathbb{C})$ pour classifier les solutions possibles et montre comment les obtenir à partir de solutions radicales (semi-invariants du groupe de Galois différentiel) d'équations auxiliaires, les puissances symétriques de l'opérateur de départ. Concrètement, les solutions s'écriront $\exp(\int u(x)dx)$ où u est algébrique de degré 1 (cas exponentiel), 2 (cas imprimitif), 4, 6 ou 12 (cas de solutions algébriques); le premier coefficient du polynôme minimal de u s'obtient comme dérivée logarithmique d'une solution exponentielle (souvent radicale) d'une puissance symétrique de l'opérateur de départ puis une récurrence simple donne les autres coefficients.

Cet algorithme a été mieux compris suite aux travaux beaucoup plus généraux de Singer sur les solutions liouvilliennes ([Sin81]) et à sa collaboration avec Ulmer (notamment [SU93b, SU93a]). Dans [UW95], nous avons élaboré avec Ulmer une version « rationnelle » de cet algorithme. Nous ramonnons presque tous les cas à des calculs d'invariants, c'est-à-dire de solutions rationnelles de puissances symétriques (sauf le cas du groupe triangulaire, où un semi-invariant est inévitable); le résultat est une version rationnelle, plutôt plus robuste (et, à l'époque, beaucoup plus facile à implanter) d'un algorithme de solutions liouvilliennes de type Kovacic. Elle a été accélérée avec notre formule BMW [BMW97] de calcul rapide des puissances symétriques d'équations d'ordre 2.

1.2 Solutions algébriques

→ Travaux avec Berkenbosch et van Hoeij : thèse de Berkenbosch, [BvHW03]³ et [vHW05]⁴

Pour les opérateurs admettant une base de solutions algébriques (donc un groupe de Galois fini), Singer et Ulmer ont proposé dans [SU93b] une méthode pour déterminer ces solutions à partir des invariants (vus comme solutions rationnelles de puissances symétriques). En combinant leurs idées, notre algorithme [UW96] et un peu de théorie classique des invariants, Fakler a donné dans [Fak97] un algorithme élégant donnant les solutions algébriques par leur polynôme minimal (là où les algorithmes de type Kovacic donnent sa dérivée logarithmique, plus rapide à obtenir).

Une approche alternative et puissante, remontant à Klein, a été développée par Baldassari et Dwork [BD79]. Le cœur en est un théorème de Klein montrant que toute équation d'ordre 2 (irréductible) admettant des solutions algébriques s'obtient (projectivement) *via* un changement de variable rationnel, à partir d'une équation hypergéométrique standard. Beukers et van der Waal ont développé une version effective dans [BvdW04] avec une nouvelle preuve constructive du théorème de Klein. Une autre preuve constructive du théorème de Klein a été proposée par Berkenbosch [Ber04]. Dans la foulée, dans un travail commun avec Berkenbosch et van Hoeij (thèse de Berkenbosch et [BvHW03]),

-
1. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/ulmer_weil_JSC95.PDF
 2. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/BronsteinMuldersWeil_issac97.pdf
 3. <http://algo.inria.fr/seminars/sem01-02/weil.pdf>
 4. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/hoeij_weil_pullback_issac12.pdf

nous avons montré comment trouver très simplement le changement de variable rationnel à partir de valeurs d'invariants (solutions de puissances symétriques) et en inférer un algorithme rapide de calcul de solutions algébriques d'équations du second ordre. Nous construisons une liste d'équations hypergéométriques standard (une pour chaque groupe) dont un invariant a pour valeur 1 et un autre a pour valeur x ; à partir d'un invariant de l'opérateur L à résoudre, on normalise L pour que cet invariant ait pour valeur 1 (ce qui fait qu'il devient l'image d'une équation standard par un changement de variable rationnel) et le deuxième invariant produit le changement de variable. L'algorithme initial apparaît dans la thèse de Berkenbosch (il est résumé dans [BvHW03]); une version généralisée à tout corps (basée sur des invariants, dans l'esprit de [UW96], et évitant le calcul du second invariant) est construite dans [vHW05] et donne une belle représentation compacte des solutions.

C'est l'implantation de cet algorithme⁵ par van Hoeij (accélérée en utilisant notre travail sur les invariants [vHW97] et des astuces comme [BMW97]) qui est utilisée par MAPLE pour la résolution d'équations du second ordre. Son efficacité fait que c'est une des premières méthodes testées par MAPLE face à une équation différentielle linéaire du second ordre.

2 Invariants des groupes de Galois différentiels et résolution d'équations

Avant de décrire ce qui suit, je rappelle quelques principes, plus ou moins bien connus des spécialistes, sur les constructions tensorielles⁶ (repris de notre article [AMCW13]) appliquées aux systèmes différentiels linéaires. Ces résultats classiques seront notamment utilisés dans la partie IV. Commençons par l'action de G sur des puissances symétriques de V .

Soit (Y_i) une base de V . Soit $\sigma \in G$ un automorphisme de V et $M = (m_{i,j}) \in GL(n, C)$ sa matrice dans la base (Y_i) . L'action (translation à droite) de σ sur $C[X_1, \dots, X_n]$ est donnée par $\sigma(X_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} X_i$. L'action de σ sur un polynôme homogène $P \in C[X_1, \dots, X_n]_m$ de degré m est définie par $\sigma(P)(X_1, \dots, X_n) := P(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n))$.

Identifions P avec son vecteur (colonne) v_P de coefficients dans la puissance symétrique $\text{Sym}^m(V)$. Naturellement, il existe une matrice $\text{Sym}^m(M)$ telle que $v_{\sigma(P)} = \text{Sym}^m(M) \cdot v_P$. Ainsi, le constructeur Sym^m produit un morphisme de groupes (de $GL(V)$ vers $GL(\text{Sym}^m(V))$), appelé la *m -ième puissance symétrique au sens des groupes*. Voyons maintenant l'analogie pour les algèbres de Lie.

À une matrice $N := (n_{i,j}) \in \mathfrak{g} \subset \text{Mat}(n, C)$, associons la dérivation $D_N := \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n n_{i,j} X_i) \frac{\partial}{\partial X_j}$. L'action de $N \in \mathfrak{g}$ sur $C[X_1, \dots, X_n]$ se définit alors comme l'action de la dérivation D_N sur les polynômes $P \in C[X_1, \dots, X_n]$. On peut comprendre cette définition en utilisant l' ε -formalisme. Soit ε une variable telle que $\varepsilon^2 = 0$; nous savons ([vdPS03], chap. 1, ou [MS02], part 5) que $N \in \mathfrak{g}$ si et seulement si $\text{Id} + \varepsilon N$ satisfait les équations du groupe (*modulo* ε^2). Si l'on pose $\sigma_\varepsilon := \text{Id} + \varepsilon N$, l'action ci-dessus (et la formule de Taylor) induit $\sigma_\varepsilon(P) = P + \varepsilon D_N(P)$. L'action de cette dérivation définit une matrice $\mathfrak{sym}^m(N)$ telle que $v_{D_N(P)} = \mathfrak{sym}^m(N) \cdot v_P$. On dit que $\mathfrak{sym}^m(N)$ est la *m -ième puissance symétrique* de N au sens des algèbres de Lie. Le constructeur \mathfrak{sym}^m est naturellement un morphisme d'espaces vectoriels (et même un morphisme d'algèbres de Lie). Pour $B \in \text{Mat}(n, k)$, une

5. Commande `kovacicsols` du package DETOOLS de MAPLE.

6. Implantation Maple : http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/TensorConstructions.html.

caractérisation alternative de $\mathfrak{sym}^m(B)$ est $\mathrm{Sym}^m(\mathrm{Id} + \varepsilon B) = \mathrm{Id}_N + \varepsilon \mathfrak{sym}^m(B)$.

Pour le système différentiel linéaire $[A] : Y' = A \cdot Y$, où $A \in \mathrm{Mat}(n, k)$, et une matrice fondamentale de solutions U , on a l'identité attendue : $\mathrm{Sym}^m(U)' = \mathfrak{sym}^m(A) \cdot \mathrm{Sym}^m(U)$.

Les règles sur la transformation de jauge s'en déduisent. Effectuons un changement de variable $Y = P Z$ où $P \in \mathrm{GL}(n, k)$. Posons $B = P[A] := P^{-1} \cdot (A \cdot P - P')$. Alors on a $\mathfrak{sym}^m(P[A]) = \mathfrak{sym}^m(B) = \mathrm{Sym}^m(P)[\mathfrak{sym}^m(A)]$. En effet, le morphisme de groupes Sym^m agissant sur $U = P \cdot V$ donne $\mathrm{Sym}^m(U) = \mathrm{Sym}^m(P) \cdot \mathrm{Sym}^m(V)$ et $\mathrm{Sym}^m(V)$ est une matrice fondamentale pour $[\mathfrak{sym}^m(B)]$.

Les formules sont les mêmes pour les constructions tensorielles générales. Une *construction tensorielle* sur le G -module V est un espace vectoriel obtenu par itération finie de \otimes, \oplus, \star (dual), puissances symétriques Sym^m et puissances extérieures Λ^r (nous n'aurons pas besoin de sous-espaces et de quotients dans ce qui suit car le théorème de Chevalley s'applique à ces constructions « directes »).

L'action de G sur ces constructions tensorielles se trouve, par exemple dans les livres [Hum75, FH91] ou le chapitre 2 de [vdPS03]; en particulier, étant donné une base $Y = (Y_j)_{j=1 \dots n}$ de V et une construction tensorielle $\mathrm{Const}(V)$, on peut construire une base canonique $\mathrm{Const}(Y)$ de $\mathrm{Const}(V)$ (comme nous l'avons fait ci-dessus pour le cas de Sym). Pour un $g \in G$ représenté par sa matrice M , la matrice $\mathrm{Const}(M)$ est, comme ci-dessus, la matrice de l'action de g sur $\mathrm{Const}(V)$ relativement à cette base. Le constructeur Const est alors clairement un morphisme de groupe de G vers $\mathrm{GL}_N(C)$ (où $N = \dim(\mathrm{Const}(V))$). Le constructeur **const** associé (au sens des algèbres de Lie) peut se définir par l'identité $\mathrm{Const}(\mathrm{Id} + \varepsilon N) = \mathrm{Id}_N + \varepsilon \mathbf{const}(N)$, c'est-à-dire par l'action de la dérivation D_N (la même que pour \mathfrak{sym}) sur la construction; on obtient donc que **const** est un morphisme d'algèbres de Lie.

Enfin, pour un module différentiel $\mathcal{M} := (k^n, \nabla_A = \partial - A)$, la matrice de l'action de ∇_A sur $\mathrm{Const}(\mathcal{M})$ est **const**(A). Pour une matrice fondamentale de solutions $U \in \mathrm{GL}(n, K)$, nous avons $\mathrm{Const}(U)' = \mathbf{const}(A) \cdot \mathrm{Const}(U)$ (voir [vdPS03], chapitre 2).

2.1 Invariants des groupes de Galois différentiels

→ Travail avec van Hoeij⁷ [vHW97]

Dans ce travail, nous donnons un algorithme de calcul des invariants du groupe de Galois différentiel d'un opérateur $L \in \mathbb{C}(x)[\frac{d}{dx}]$. La méthode existant avant nous consistait ([Sin81, SU93b, SU97]) à construire un opérateur $L^{\otimes m}$ dont les solutions sont les polynômes homogènes de degré m en les solutions de L , puis à déterminer ses solutions rationnelles (par exemple *via* [Bro92]); l'invariant est alors représenté soit comme polynôme en une base de solutions locales [SU97] soit *via* sa valeur (solution rationnelle de $L^{\otimes m}$). Cette approche souffre d'un problème de complexité : l'opérateur $L^{\otimes m}$ est long à calculer, produit des coefficients artificiellement gros et devient de ce fait difficile à construire et à résoudre (dès que l'ordre de L vaut 3 ou plus).

L'approche consiste à deviner des candidats pour les valeurs des invariants (par des calculs locaux) puis à les valider comme solutions du système $[\mathfrak{sym}^m(A)]$, où A désigne la matrice compagnon de L . Dans un premier temps, nous donnons une heuristique efficace qui calcule des « candidats invariants » sans calculer $L^{\otimes m}$. En utilisant les exposants généralisés étudiés par van Hoeij dans sa thèse, nous montrons comment calculer les exposants (généralisés) minimaux de $L^{\otimes m}$ comme com-

7. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/hoeij_weil_invariants_jpaa.pdf

binaisons linéaires de ceux de L : la borne que nous obtenons (Propositions 3.11, Corollaire 3.12 et Théorème 3.19) est plus fine que d'autres bornes déjà connues ([Sin93]) et est toujours atteinte. La nouveauté, là, est que nous donnons des bornes fines pour les singularités irrégulières (les bornes pour les singularités régulières avaient été proposées par Singer et Ulmer dans [SU95]); nous obtenons ainsi, pour chaque entrée d'une éventuelle solution rationnelle de $[\mathfrak{sym}^m(A)]$, une fraction rationnelle Q et un entier N tels que la solution rationnelle cherchée soit de la forme $Q.P_N$ où P_N est un polynôme de degré au plus N (procédure `global-bounds`⁸).

Nous utilisons ensuite la vision tannakienne. Soit \hat{U} une matrice fondamentale de solutions locales ; un invariant pourra soit être représenté par son vecteur C de coefficients dans $\mathrm{Sym}^m(V)$ soit par son expression comme vecteur F de fractions rationnelles dans $\mathrm{Sym}^m(\mathcal{M})$, avec la relation $F = \mathrm{Sym}^m(\hat{U}).C$. Si l'on travaille en une singularité, nous montrons que seules certaines colonnes de $\mathrm{Sym}^m(\hat{U})$ sont à considérer (Lemme 4.1) ce qui permet d'obtenir un vecteur C le plus creux possible (c'est important pour l'efficacité) : ce sont les colonnes ayant un exposant généralisé dans $\frac{1}{r}\mathbb{Z}$ (Lemme 4.1) et celles pour lesquelles les solutions locales n'ont pas de logarithme. L'évaluation des monômes en les solutions locales donne une heuristique (rapide) fournissant rapidement P_N et la représentation polynomiale de [SU97].

Pour prouver que nos candidats sont bien des invariants, nous généralisons cette construction à toutes les lignes de $F := \mathrm{Sym}^m(\hat{U}).C$ (notons que C est maintenant connu - éventuellement avec quelques paramètres - et seules certaines lignes sont à calculer, les autres étant données par une récurrence simple utilisant la structure de $[\mathfrak{sym}^m(A)]$, qui généralise la récurrence utilisée dans l'algorithme de Kovacic). Le certificat (et le calcul des paramètres restants) vient du système linéaire induit par la relation $F' = \mathfrak{sym}^m(A).F$. Comme la construction du système $\mathfrak{sym}^m(A)$ ne coûte rien (c'est un simple morphisme d'espace vectoriel), cette partie est rapide et rend l'algorithme très efficace.

Cette approche où l'on insiste sur le traitement direct des systèmes était aussi développée à Grenoble autour de Barkatou et Della Dora. Notre algorithme a été suivi d'un algorithme efficace de Barkatou et Pfluegel [BP98] de calcul de morphismes entre systèmes (notamment pour l'*eigenring*, les matrices P telles que $P[A] = A$, pour décomposer des systèmes réductibles, voir [Sin96]). L'algorithme [Bar99] de Barkatou calcule les solutions rationnelles de systèmes différentiels linéaires par traitement direct, sans les convertir en équations. Nous avons repris (avec Barkatou et collaborateurs) ces idées dans des travaux récents : dans [AMBSW11], nous généralisons [vHW97] au cas de systèmes (symplectiques, des équations variationnelles supérieures) pour calculer des germes d'intégrales premières de systèmes hamiltoniens ; dans [BCEBW12], nous généralisons l'algorithme au cas d'EDP D -finies (je reviens plus loin sur ces articles).

Une micro-astuce de ce travail a connu un beau développement aussi. Notre utilisation des logarithmes dans les solutions locales pour filtrer les colonnes admissibles dans $\mathrm{Sym}^m(\hat{U})$ a été reprise par van der Put et Ulmer dans [vdPU00] pour la construction, dans la pratique, de familles d'équations à groupe fini donné ; elle nous a conduits, avec Delphine Boucher, à développer un nouveau critère de non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, j'y reviens plus loin.

2.2 Solutions liouvilliennes

→ Travail avec van Hoeij, Ragot et Ulmer⁹ [vHRUW99]

Singer a donné en 1981 [Sin81] le premier algorithme général de calcul de solutions liouvilliennes

8. Une version récente, due à van Hoeij, de la procédure `global-bounds` est disponible auprès de l'auteur. Le reste de notre implantation ne fonctionne plus sur les versions récentes de Maple.

9. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/HoeijRagotUlmerWeil.pdf

d'équations d'ordre quelconque. Malgré son importance novatrice, il ne pouvait pas être utilisé en pratique. Il a été notablement amélioré dans les collaborations de Singer avec Ulmer [SU93b, SU93a]. C'est surtout [SU97] qui ouvre la voie à des méthodes concrètes. La clé de leur travail est de montrer qu'une équation différentielle linéaire irréductible admet des solutions liouvilliennes si et seulement si son groupe de Galois admet un (semi-)invariant factorisable comme produit de facteurs linéaires ; Singer et Ulmer montrent ensuite comment tester cette propriété (équations de Brill) et reconstruire les coefficients du polynôme minimal d'une dérivée logarithmique par une technique d'approximants de Padé à partir de solutions en série en un point ordinaire (trouvées grâce à la factorisation du semi-invariant décomposable).

Dans notre travail avec van Hoeij, Ragot et Ulmer [vHRUW99], nous reprenons cette idée en la combinant avec notre algorithme [vHW97] de calcul d'invariants pour proposer un algorithme de calcul de solutions liouvilliennes.

Nous montrons comment étendre notre algorithme [vHW97] pour calculer des invariants. Nous proposons des algorithmes pour détecter, dans un espace de semi-invariants, ceux qui se factorisent comme produits de formes linéaires. Puis, pour un semi-invariant (écrit comme solution exponentielle $Y = \exp(\int e(x)dx) \cdot F$ où $F \in k^n$) se factorisant comme produit de facteurs linéaires, nous donnons une formule très simple (Théorème 2.1) pour obtenir « gratuitement » le polynôme minimal d'une solution algébrique de l'équation de Riccati à partir de F .

Pour des opérateurs d'ordre 3, nous utilisons les techniques de décomposition de caractères d'Ulmer (développées notamment dans [SU93a, SU93b]) pour proposer un algorithme « à la Kovacic » (semblable à celui que nous avons établi dans [UW96]) pour n'utiliser que des calculs d'invariants (ou semi-invariants) de degré le plus petit possible (et retrouver des invariants de degré plus élevé par les constructeurs classiques de la théorie des invariants : hessien, hessien bordé, jacobien). On voit ainsi que, pour un opérateur d'ordre 3 unimodulaire et irréductible, on peut trouver les solutions liouvilliennes en calculant des invariants de degrés 2, 4, 6 et 9.

Notre implantation ancienne existe¹⁰ mais ne fonctionne plus sur les versions récentes de MAPLE.

2.3 Factorisation absolue et descente

→ Travaux avec Compoint¹¹ [CW04], avec Compoint et van der Put¹² [CvdPW10]

On dit qu'un système est réductible ou qu'il se *factorise* (resp. se *décompose*) s'il existe une transformation de jauge qui le met sous forme triangulaire par blocs (resp. diagonale par blocs) ; les blocs sont alors les *facteurs* du système. Le point de départ des algorithmes (théoriques) de calcul de groupes de Galois différentiels d'un opérateur $L \in \mathbb{C}(x)[\frac{d}{dx}]$ ou d'un système $Y' = AY$ est de supposer que le système est absolument irréductible (ne peut pas se factoriser sur une extension algébrique du corps des coefficients k), ou encore Lie-irréductible (l'algèbre de Lie \mathfrak{g} agit de façon irréductible). Beukers, Brownawell et Heckman donnent dans [BBH88] des critères de détection de cette situation (avec des références à d'autres critères semblables de Katz et Gabber) pour des opérateurs à deux ou trois singularités.

Dans l'article [CW04], nous proposons un algorithme de factorisation absolue d'un opérateur différentiel. En partant de la décomposition isotopique (théorème de Clifford), nous redémontrons (et affinons) un théorème (de descente) de Katz (Lemme 3 et Théorème 2) montrant que, soit l'opérateur est

10. <http://www.math.fsu.edu/~hoeij/lib/beta/Liouvilliansols/>

11. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/compoint_weil_absolute_reducibility.pdf

12. <http://arxiv.org/abs/1001.0153>

imprimitif (son groupe de Galois permute transitivement des sous-espaces invariants de V), soit on a une descente $L \simeq M \otimes N$ où M est absolument irréductible et N est à solutions algébriques (c'est-à-dire, les facteurs absolus de L admettent une descente : ils sont tous équivalents à M sur le corps de Picard-Vessiot de N). On voit, en particulier, qu'interviennent trois extensions algébriques successives : celle où les facteurs absolus de L sont définis, celle (extension) où sont définis les morphismes entre ces facteurs et celle (encore une extension) où se trouvent les conditions de descente (le corps de Picard-Vessiot de N). Nous donnons une description explicite de la descente pour des opérateurs d'ordre 1.

On construit ensuite des listes de degrés (sur le modèles des listes établies par Singer et Ulmer dans [SU93a, SU93b]) et des constructions « minimales » dans lesquelles chercher des facteurs (un produit tensoriel d'une puissance symétrique et d'une puissance extérieure, Lemmes 7 à 9) en généralisant ainsi l'algorithme « classique » de factorisation au cas de la factorisation absolue¹³.

Ce travail sur la descente « géométrique » (c'est-à-dire pour un opérateur L_1 à coefficients dans une extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$) a été suivi d'un article de van Hoeij et van der Put [vHvdP06] sur la descente arithmétique (c'est-à-dire pour un opérateur à coefficients dans $C(x)$, où C est une extension algébrique de \mathbb{Q} , décider quand il descend à un opérateur à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$). Dans le cas géométrique, dès que L_1 est isomorphe à ses conjugués, L_1 admet une descente ; le point réellement difficile est de trouver le corps de descente (c'est une extension cyclique du corps des isomorphismes). Dans le cas arithmétique, le fait que l'opérateur soit isomorphe à ses conjugués ne suffit pas à garantir la descente. Dans les deux cas, pour trouver les conditions de descente, il faut trivialisier une algèbre centrale simple, c'est-à-dire en donner une représentation explicite comme algèbre de matrices (voir par exemple [GS06] ou [Rón90] pour des aspects effectifs de cette question). Ce problème est finement lié à la question de résoudre une équation différentielle linéaire en terme d'équations d'ordre moindre, voir par exemple [Sin88] et surtout les travaux récents de Nguyen et van der Put [Ngu09, NvdP10] (et références incluses).

Dans l'article [CvdPW10] avec Compoint et van der Put, nous traitons la descente géométrique. Étant donné un opérateur L_1 à coefficients dans une extension algébrique K_1 de $\mathbb{C}(x)$ isomorphe à ses conjugués sur une extension algébrique K de K_1 , nous construisons un 2-cocycle qui matérialise l'obstruction à la descente. Nous construisons un module de dimension 1 ayant le même 2-cocycle pour obstruction à la descente et obtenons ainsi une extension K^+ de K sur laquelle les conditions de descente sont réalisées ; la descente s'en déduit aisément. Comme ces constructions sont très techniques, nous proposons plusieurs exemples et simplifications, notamment pour des opérateurs de petits ordres (en les comparant avec les méthodes de notre article [CW04], de Hoeij et van der Put [vHvdP06] et de Nguyen et van der Put [Ngu09, NvdP10]).

3 Méthodes modulaires

Une démarche algorithmique courante en calcul formel consiste, pour un problème donné, à le résoudre *modulo* des nombres premiers et à relever les solutions obtenues à des solutions définies

13. À la surprise des auteurs, la partie la plus citée de cet article est son appendice où nous décrivons, suite à des conversations avec van der Put, un algorithme classique de factorisation de Beke en terme de systèmes différentiels et en clarifiant quelques points, notamment la sélection d'un tenseur pur parmi les semi-invariants dans des puissances extérieures.

sur \mathbb{Q} . Considérons un système différentiel $\nabla(Y) = 0$, où $\nabla = \frac{d}{dx} - A$ est à coefficients dans $\mathbb{F}_p(x)$ et p premier. Bien sûr, x^p est constant (sa dérivée est nulle); le corps des constantes est $C := \mathbb{F}_p(x^p)$, et $\mathbb{F}_p(x) = C[x]$. L'itération ∇^p vérifie $\nabla^p = (\frac{d}{dx})^p - A_p$ et agit linéairement sur $\mathbb{F}_p(x)^n$. La matrice A_p est la p -courbure de ∇ . La classification de van der Put sur les équations différentielles *modulo* p ([Put95, Put96], voir aussi [Put01]) montre que la structure de ∇ est induite par la structure de A_p . On pourra consulter l'excellent exposé au séminaire Bourbaki de Chambert-Loir [CL02] pour plus d'éléments et de références.

3.1 Factorisation de systèmes $Y' = A Y$ *modulo* p

→ Thèse de Cluzeau

L'objet de la thèse de Thomas Cluzeau (co-encadrée avec Barkatou) était d'explorer l'apport de méthodes modulaires pour les opérateurs différentiels. Dans [Clu03], Cluzeau a proposé un algorithme¹⁴ de factorisation de systèmes différentiels linéaires *modulo* p , qui utilise d'une part les méthodes suggérées par van der Put et d'autre part les méthodes de décomposition par *eigenring* de Singer et Barkatou.

Ce travail a mené Cluzeau à une collaboration avec van Hoeij ([CvH04] et ses prolongements [CvH06] pour les équations aux différences) pour le calcul de solutions exponentielles. L'algorithme naïf consiste à calculer des parties exponentielles en chaque singularité puis, pour chaque combinaison $e(x)$ de ces parties exponentielles, à tester si l'on peut obtenir une solution de la forme $\exp(e(x)).P(x)$ où P est un polynôme; l'utilisation de réductions *modulo* p permet de mieux filtrer d'éventuelles « bonnes » combinaisons $e(x)$ (s'il y a une solution exponentielle, sa partie exponentielle doit « se lire » dans la p -courbure) et, surtout, d'éviter des combinaisons menant à trop d'extensions algébriques des constantes. Cette idée de combiner une information « locale arithmétique » (réduction *mod* p et décomposition suivant la p -courbure) et une information « locale géométrique » (réduction locale, parties exponentielles) est encore pleine d'autres potentialités à explorer. Elle est utilisée par exemple dans l'algorithme [BCS05] de Bostan, Cluzeau et Salvy de solutions rationnelles d'opérateurs.

Le calcul des p -courbures a, depuis, été amélioré par Bostan et Schost dans [BS09]. Il a été utilisé comme filtre dans des travaux de physique théorique (par exemple notre article [BBH⁺09] sur le caractère globalement nilpotent des opérateurs de la physique, c'est-à-dire que presque toutes leurs p -courbures sont nilpotentes) ou encore dans le travail combinatoire de Bostan et Kauers sur le caractère algébrique des marches de Gessel et de classification d'autres marches sur des réseaux [BK09, BK10]. L'idée sous-jacente est de deviner ce que devrait être l'opérateur minimal d'une série D -finie (donnée par ailleurs) et de filtrer la correction de l'opérateur en testant des propriétés algébriques ou arithmétiques rares et spécifiques à ces opérateurs (être fuchsien à coefficients rationnels, être globalement nilpotent, etc.).

3.2 EDP D -finies (*modulo* p puis en caractéristique zéro)

→ Travaux avec Barkatou et Cluzeau¹⁵ [BCW05] puis¹⁶ [BCEBW12] avec El Bacha

14. Une implantation Maple est disponible sur <http://perso.ensil.unilim.fr/~cluzeau/CluzeauModularFactorization>

15. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/BarkatouCluzeauWeil_DESC.pdf

16. <http://perso.ensil.unilim.fr/~cluzeau/BCEW.pdf>

Nous avons, avec Cluzeau et Barkatou, étendu l'algorithme de [Clu03] aux systèmes d'EDP linéaires D -finies *modulo* p dans [BCW05] où nous donnons un algorithme de factorisation de tels systèmes *modulo* p . Ce travail généralise partiellement au cas D -fini la classification de van der Put des modules différentiels en caractéristique positive; en appendice de notre article, van der Put construit une classification complète pour ce cas D -fini. Généralisant la notion d'*eigenring* au cas d'EDP D -finies, nous notons que celui-ci contient les p -courbures partielles. Une première réduction (généralisant [Clu03]) consiste à réduire simultanément les p -courbures et en déduire une décomposition isotypique du système. Par ailleurs, nous montrons que la recherche de solutions rationnelles peut être réalisée par un algorithme récursif : après résolution du premier système (et réduction par une matrice de jauge dont les premières colonnes sont les solutions rationnelles trouvées), le problème est ramené à la recherche des solutions rationnelles d'un système plus petit en une variable de moins : le nouveau système ne contient plus la première variable.

Cette manière d'envisager la réduction récursivement a été développée dans la thèse de Min Wu (dirigée par Bronstein) puis dans le travail de Li, Singer, Wu et Zheng [LSWZ06] pour leur algorithme de détermination récursive des facteurs d'ordre 1 de systèmes de Laurent-Ore (une généralisation, dans le cadre d'algèbres de Ore, des systèmes d'EDP D -finies étudiés par Wu dans sa thèse).

Dans notre article avec Barkatou, Cluzeau et El Bacha [BCEBW12], nous reprenons ces idées pour montrer comment étendre au cas d'EDP D -finies l'algorithme de Barkatou [Bar99] de solutions rationnelles de systèmes différentiels linéaires. En utilisant les résultats de la thèse de Carole El Bacha (dirigée par Barkatou et Cluzeau) sur les formes simples locales et leur complexité [BCEB09, BCEB11, BEB13], nous donnons la première analyse de complexité de cet algorithme (jusque-là très apprécié pour ses qualités expérimentales). Enfin, nous montrons comment cette approche récursive permet aussi de déterminer les facteurs d'ordre 1 (les solutions hyperexponentielles). Une implantation Maple de ce travail est disponible¹⁷. Les algorithmes de factorisation ou de décomposition (*eigenring*) utilisant ces résultats en découlent naturellement (comme dans le cas ordinaire).

17. Implantation Maple : <http://perso.ensil.unilim.fr/~cluzeau/PDS.html>

In the days of Kepler and Galileo, it was fashionable to announce a new scientific result through the circulation of a cryptogram which gave the author priority and his colleagues headaches. Onsager is one of the few moderns who operates in this tradition.

– Montroll, Potts, and Ward [MPW63]

Deuxième partie

Équations différentielles de la physique théorique

Je présente ici des travaux relevant de la physique théorique. D'une part, le travail mené avec Acosta et Morales (dans la thèse d'Acosta) sur une approche galoisienne des équations de la mécanique quantique supersymétrique. D'autre part, un long programme de recherche autour des opérateurs différentiels de la mécanique statistique avec des collègues physiciens autour de Jean-Marie Maillard. Ces articles ne sont pas écrits sous la forme mathématique usuelle (définition, théorème, démonstration). Publiés dans des journaux de physique théorique, ils sont marqués par une démarche « botaniste » de mise en évidence de phénomènes par l'étude d'une multitude d'exemples. Certains des « résultats » de nature mathématiques ainsi observés sont démontrés, d'autres sont conjecturés sur la base d'une foule d'exemples ; en contrepartie, cette approche nous permet d'aborder de manière originale des phénomènes ardues et mathématiquement encore mal compris. Je les décris ci-dessous de manière plus rapide que les résultats mathématiques élaborés dans les autres parties, leur côté « botanique » les rendant difficiles à synthétiser.

4 Transformation de Darboux et cas intégrables d'équations de Schrödinger

→ Thèse d'Acosta, travail avec Acosta et Morales¹⁸ [AHMRW11]

Ce travail est une collaboration avec Primitivo Acosta-Humanez et Juan Morales (dans le cadre de la thèse d'Acosta) et a donné lieu à l'article [AHMRW11]. Nous étudions les propriétés galoisiennes et algébriques d'outils de la mécanique quantique supersymétrique associés à l'équation de Schrödinger stationnaire unidimensionnelle : transformation de Darboux, itération de Crum, potentiels « shape-invariants ». Pour caractériser des cas d'intégrabilité de l'équation de Schrödinger, nous introduisons une notion de spectre algébrique (par analogie avec le spectre d'un opérateur différentiel dans un espace de Hilbert). Nous montrons le caractère iso-galoisien des transformations de Darboux et de Crum sous de bonnes hypothèses. En utilisant la technique dite d'algébrisation hamiltonienne de Primitivo Acosta et David Blazquez [AHBS08, AHBSVC09] (qui permet de ramener certains potentiels à coefficients non-rationnels à des potentiels à coefficients rationnels) et une variante mineure de l'algorithme de Kovacic, nous retrouvons de nombreux cas classiques de potentiels « intégrables » pour l'équation de Schrödinger et en produisons quelques autres. Acosta et Pantazi ont étendu ces idées à

18. <http://arxiv.org/abs/1008.3445>

l'étude de champs de vecteurs polynomiaux venant de la mécanique quantique supersymétrique dans [AHP12].

5 Structures D -finies dans le modèle d'Ising

Nous présentons ici des applications des méthodes de théorie de Galois différentielle algorithmique à la mécanique statistique (avec J-M. Maillard et nombreux co-auteurs : Bostan et van Hoeij du côté calcul formel ; Boukraa, Hassani, McCoy et Zenine du côté physique) dans la suite d'articles¹⁹ [BHM+06, BHM+07b, BBH+09, BBH+10, BBH+11, BHMW13] depuis 2005.

De nombreux modèles de mécanique statistique sur réseaux s'expriment comme intégrales multiples à un paramètre et sont rationnellement holonomes en ce paramètre, c'est-à-dire sont solutions d'opérateurs différentiels linéaires (« opérateurs d'Ising »). Il s'agit, en décortiquant ces opérateurs par des méthodes algébriques et galoisiennes, de faire ressortir les structures algébriques et arithmétiques sous-jacentes aux modèles de la mécanique statistique.

Outre son intérêt scientifique, cette collaboration a servi de stimulant algorithmique par son aspect « calcul de l'extrême » ; les opérateurs que nous manipulons ont de grands ordres et de très grands coefficients et nous ont poussés à développer des méthodes particulièrement efficaces (car ces opérateurs n'étaient souvent pas abordables par les méthodes standard).

Pour une introduction aux modèles d'Ising, nous renvoyons par exemple aux livres de Baxter [Bax82] et de McCoy [McC10] (notamment les chapitres 10 et 12, qui reprennent nos travaux décrits ci-dessous), ou aux *surveys* [MM12, MAB+11] (et références incluses).

5.1 Corrélations à deux points et équation de Painlevé

→ Travaux avec Maillard, Boukraa, Hassani, Mc Coy et Zenine^{20 21} [BHM+07b, BHM+06]

Dans [BHM+06, BHM+07b], nous étudions les fonctions de corrélation à deux points du modèle d'Ising et leurs liens avec les solutions d'une σ -forme de l'équation de Painlevé VI.

Onsager a proposé en 1944 une fonction de partition pour le modèle d'Ising bidimensionnel d'un matériau ferromagnétique [Ons44, Ons96]. Une expression claire de l'aimantation spontanée (dérivée d'Onsager) est donnée dans le papier de Yang [Yan52]. La fonction de corrélation *spin-spin* (dans un cristal) apparaît dans l'article de Kaufman et Onsager [Ons96] de 1949 ainsi que son lien avec les fonctions elliptiques E et K . Ces résultats sont repris et clarifiés par Montroll, Potts et Ward [MPW63] qui systématisent l'expression des fonctions de corrélation diagonales comme déterminants de Toeplitz. Les propriétés de ces déterminants, leurs singularités, leur asymptotique et leur lien avec les équations de Painlevé sont explorés par Wu, Mc Coy, Tracy, Barouch entre 1964 et 1976, voir [WMTB76]. Leur expression en terme de fonctions elliptiques est donnée par Ghosh et Shrock [GS84] en 1984.

En parallèle, les travaux d'Okamoto puis de Jimbo et Miwa ([JM80]) établissent, dans le cadre

19. Je ne cite que ceux où j'apparais, le groupe en a produit une bonne dizaine d'autres.

20. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0602010>

21. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0701014>

de travaux sur les déformations isomonodromiques et les équations de Painlevé, le lien entre les fonctions de corrélation diagonales du modèle d'Ising $C_N := C(N, N)$ et les solutions d'une σ -forme de l'équation de Painlevé VI :

$$\left(t(t-1)\sigma''\right)^2 = N^2 \cdot \left((t-1)\sigma' - \sigma\right)^2 - 4\sigma' \left((t-1)\sigma' - \sigma - \frac{1}{4}\right) \left(t\sigma' - \sigma\right)$$

Les corrélations diagonales C_N sont liées à σ par $\sigma(t) = t(t-1)\frac{C'_N}{C_N} - \frac{1}{4}$.

On a $C_N = \det\left(a_{i-j}\right)_{i,j=1\dots n}$, où les a_n s'expriment à l'aide de fonctions hypergéométriques : chaque a_n annule un opérateur hypergéométrique de Gauss $H_n := \partial^2 - \frac{1}{x}\partial - \frac{1}{4}\frac{xn^2-(n+1)^2}{x^2(x-1)}$. Il en découle que les $C(N, N)$ satisfont un opérateur différentiel (linéaire) L_N d'ordre $N+1$.

Rappelons que les fonctions elliptiques E et K (intégrales elliptiques de seconde et première espèce) sont hypergéométriques : $E = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1], x^2\right)$ et $K = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1], x^2\right)$. On a $E' = \frac{1}{2x}(E - K)$, $K' = \frac{1}{2x}\left(\frac{E}{x-1} + K\right)$. L'opérateur minimal de E est $L_E := \partial^2 + \frac{1}{x}\partial - \frac{1}{4}\frac{1}{x(x-1)}$. Son groupe de Galois différentiel est SL_2 . Ces fonctions sont omniprésentes dans le modèle d'Ising. Nous montrons qu'il existe un opérateur différentiel R_N d'ordre N tel que $C(N, N) = R_N(E)$. Il s'ensuit que le groupe de Galois de L_N est $SL(2)$; en fait $L_N \simeq \text{Sym}^N(L_E)$ – et tout ceci se calcule explicitement. Les opérateurs H_n sont tous isomorphes (*via* une formule $a_n(t) = p_n(t)a_{n-1}(t) + q_n(t)a_{n-1}(t)'$), d'où l'on déduit l'isomorphisme ϕ_n tel que $a_n = \phi_n(E) : a_n = p_n(x)E + q_n(x)E'$. De cette façon, nous obtenons algorithmiquement les opérateurs R_N d'ordre N tel que $C(N, N) = R_N(E)$ et L_N d'ordre $N+1$ tel que $L_N(C(N, N)) = 0$ et en donnons des expressions explicites.

Ceci permet une étude d'une classe nouvelle de solutions D-finies de la σ -forme de Painlevé VI. L'interprétation physique (représentation des fonctions de corrélation et facteurs de forme comme déterminants de Toeplitz) en permet une représentation algorithmique comme polynômes en des fonctions elliptiques et d'obtenir plusieurs généralisations (à des déformations des $C(N, N)$ et à des corrélations non-diagonales). Ce travail est décrit dans le chapitre 10 du livre de McCoy [McC10]; il a été suivi de développements (par le même groupe), par exemple [BHMZ07b, BHM⁺07a, BHMZ07a] qui sont un prélude à ce qui suit.

5.2 Structures algébrique et arithmétique des opérateurs d'Ising

→ Travaux avec Maillard, Bostan, Boukraa, Hassani, van Hoeij et al. ^{22 23 24 25} [BBH⁺09],[BBH⁺11],[BBH⁺10],[BHMW13]

La susceptibilité magnétique du modèle d'Ising sur réseau carré admet un développement de la forme $\chi(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi^{(n)}(T)$, où T désigne la température et où les contributions à n particules $\chi^{(n)}$ s'expriment comme intégrales $(n-1)$ -dimensionnelles de fonctions algébriques de n variables, voir [WMTB76] ou le livre de McCoy [McC10]. Ces intégrales $\chi^{(n)}$ sont donc naturellement D -finies. Leur développement en série sera appelé une série d'Ising et l'opérateur différentiel minimal qui les annule (que nous noterons encore, abusivement, $\chi^{(n)}$ dans ce qui suit) est maintenant appelé un opérateur d'Ising.

22. <http://arxiv.org/abs/0812.4931>

23. <http://arxiv.org/abs/0911.5466>

24. <http://arxiv.org/abs/0911.5466>

25. Soumis, <http://arxiv.org/abs/1311.2470>

Dans les premiers papiers de cette longue étude sur les opérateurs d’Ising, j’ai joué un rôle de consultant et montré à Maillard et coauteurs comment utiliser les routines dans DEtools (et des astuces pratiques) pour factoriser et décomposer ; par exemple [ZBHM05a, ZBHM05c, ZBHM04] pour l’obtention et les factorisations de ces opérateurs puis [ZBHM06, ZBHM05b] pour l’étude de leurs groupes de Galois différentiels (en utilisant des groupes de Galois locaux et des matrices de connection devinées numériquement). Cette exploration des décompositions et factorisations des opérateurs d’Ising a mis en évidence une structure en « poupées russes » (décrite depuis dans le chapitre 12, notamment la partie 12.5.2, du livre de McCoy [McC10]). On observe d’autre part que ces opérateurs sont fuchsien et à exposants rationnels.

Dans [BBH⁺09], nous faisons d’abord apparaître le caractère globalement nilpotent des opérateurs d’Ising. Ce n’est, a posteriori, pas surprenant. Les séries d’Ising sont à coefficients entiers, sont D -finies et annulent un opérateur fuchsien ; on en infère que ce sont des G -séries et que les opérateurs d’Ising sont globalement nilpotents (leur p -courbure est nilpotente pour presque tout p). Pour certains des facteurs irréductibles des opérateurs $\chi^{(n)}$, nous démontrons la globale nilpotence en montrant qu’ils se voient comme constructions à partir d’opérateurs d’ordre 2 pour lesquelles on construit une solution hypergéométrique (et une structure modulaire, comme pour les corrélations ci-dessus) qui permettent d’établir leurs propriétés arithmétiques. Des investigations semblables sur d’autres modèles de mécanique statistique sur réseau font apparaître les mêmes structures géométriques et permettent de conjecturer des représentations intégrales pour ces modèles.

Dans [BBH⁺10], le but est de comprendre ce que les physiciens appellent des représentations rationnelles du groupe de renormalisation. Nous explorons pour ce faire des équations hypergéométriques présentant des symétries rationnelles, c’est-à-dire des équations covariantes sous un changement de variables $x \mapsto R(x)$ rationnel. Ceci permet de voir les générateurs du groupe de renormalisation comme des isogénies de courbes elliptiques et montre, de nouveau, le rôle central des courbes elliptiques dans le modèle d’Ising. Par exemple, l’opérateur $(\frac{d}{dz})^2 + \frac{(z^2+56z+1024)}{(z+16)(z+64)z} \frac{d}{dz} - \frac{240}{(z+16)^2z(z+64)}$ admet comme solution

$${}_2F_1\left([1/12, 5/12], [1]; 1728 \frac{z}{(z+16)^3}\right) = \left(\frac{z+256}{16z+256}\right)^{-1/4} \cdot {}_2F_1\left([1/12, 5/12], [1]; 1728 \frac{z^2}{(z+256)^3}\right).$$

Notons que l’on a la même ${}_2F_1$ de chaque côté de l’égalité ; la différence est dans les arguments $u = 1728 \frac{z}{(z+16)^3}$ et $v = 1728 \frac{z^2}{(z+256)^3}$, qui sont liés par une courbe modulaire (relations (5) et (6) dans [BBH⁺10], voir [Mai07] pour une étude des fonctions hypergéométriques d’origine modulaire). Ces résultats sont préparatoires à l’article suivant [BBH⁺11]. La recherche de ces symétries mène à une équation de type Rota-Baxter, dont nous donnons certaines solutions. Ces résultats sont en cohérence avec (et illustrent) la classification trouvée par Casale dans [CR08, Cas06a] par des méthodes galoisiennes.

En détaillant les factorisations des opérateurs $\chi^{(n)}$ de la susceptibilité magnétique du modèle d’Ising, on voit apparaître des formes modulaires associées aux courbes elliptiques apparaissant dans le modèle. L’exploration systématique de cette propriété est l’objet de [BBH⁺11]. Nous étudions la structure différentielle de certaines formes modulaires pour exprimer des solutions de facteurs des $\chi^{(n)}$; l’interprétation modulaire vient de leur écriture comme composée d’hypergéométriques et de fonctions rationnelles (ou algébriques) ayant des symétries (semblables à celles observées dans [BBH⁺10]). Enfin, en sixième partie, nous étudions un facteur (d’ordre 4) où l’on ne retrouve plus le phénomène

attendu de modularité mais plutôt sa généralisation naturelle : c'est un opérateur de Calabi-Yau (avec des symétries-miroir, voir par exemple [CK99]), ce qui confirme les observations de Guttman [Gut09, Gut10] sur les opérateurs de Calabi-Yau en mécanique statistique ; nous produisons pour cet opérateur une solution de la forme ${}_4F_3\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1, 1, 1]; z\right)$, où $z = \left(\frac{1+(1-16\cdot w^2)^{1/2}}{1-(1-16\cdot w^2)^{1/2}}\right)^4$. On notera que l'expression de z admet deux déterminations, provenant de la symétrie. L'opérateur minimal de cette ${}_4F_3$ est le modèle des opérateurs de Calabi-Yau (c'est celui qui est étudié dans le travail fondateur de Candelas et al [CdIOGP91] cité dans tous les articles sur le sujet) ; il peut aussi se voir comme produit de Hadamard des fonctions elliptiques K déjà vues :

$${}_4F_3\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1, 1, 1]; t^2\right) = {}_2F_1\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1]; t^2\right) \star {}_2F_1\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1]; t^2\right) = \frac{2}{\pi} \cdot K(t) \star \frac{2}{\pi} \cdot K(t)$$

Cette même ${}_4F_3$ apparaît dans l'étude de fonctions de Green sur réseau (*hyper body-centered cubic lattice Green function*, dans [Gut09]). Une approche mathématique plus approfondie des opérateurs hypergéométriques admettant un phénomène de symétrie-miroir et une interprétation modulaire a depuis été proposée par Delaygue, Rivoal et Roques, voir [Roq13] et références incluses.

Les facteurs irréductibles des $\chi^{(n)}$ ont une autre propriété spectaculaire : ils sont équivalents à leurs adjoints, ce qui implique que leur groupe de Galois différentiel est symplectique ou orthogonal, selon que l'invariant donnant cette équivalence se trouve dans un carré symétrique ou un carré extérieur. Cette propriété se retrouve dans les opérateurs irréductibles annulant des fonctions de Green sur réseau (voir [Gut09, Gut10] ou l'article de Koutschan [Kou13]) et les opérateurs de Calabi-Yau. Cette étude, et ses conséquences sur la structure de ces opérateurs, est détaillée dans notre article [BHMW13] à paraître.

The underlying physical laws necessary for the mathematical theory of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty is only that the exact application of these laws leads to equations much too complicated to be soluble.

– Paul Dirac, [Dir29]

Troisième partie

Intégrabilité (ou pas) des systèmes hamiltoniens

Il s'agit d'étudier des questions d'intégrabilité et de dynamique de systèmes hamiltoniens par des méthodes variationnelles le long d'une trajectoire particulière. Soit (M, ω) une variété symplectique analytique complexe de dimension $2n$. Comme M est localement isomorphe à un ouvert $U \subset \mathbb{C}^{2n}$, le théorème de Darboux donne un jeu de coordonnées locales $(q, p) = (q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$ dans lesquelles la forme ω s'écrit $J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Dans ces coordonnées, nous nous donnons une fonction $H \in C^2(U) : U \rightarrow \mathbb{C}$ (le hamiltonien). Le système hamiltonien associé sur $U \in \mathbb{C}^{2n}$ est le système différentiel donné par le champ de vecteurs $X_H := J\nabla H$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \quad \text{pour } i = 1 \dots n \quad (1)$$

Le hamiltonien H est constant sur les courbes intégrales de (1) car $X_H \cdot H := \langle \nabla H, J\nabla H \rangle = 0$, donc ces courbes intégrales sont sur des niveaux d'énergie de H . Une fonction $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ méromorphe sur U est une *intégrale première méromorphe* de (1) si elle est constante sur les courbes intégrales de (1) (c'est-à-dire $X_H \cdot F = 0$). Le crochet de Poisson $\{, \}$ de deux fonctions méromorphes f et g est défini par $\{f, g\} := \langle \nabla f, J\nabla g \rangle$; dans les coordonnées symplectiques q, p , son expression est $\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$. Le crochet de Poisson induit une structure d'algèbre de Lie sur l'ensemble des intégrales premières. Notons qu'une fonction F est une intégrale première de (1) si et seulement si $\{F, H\} = 0$ (F et H sont *en involution*).

Un tel système hamiltonien est dit *méromorphiquement Liouville-intégrable* s'il possède n intégrales premières (dont H) méromorphes qui sont fonctionnellement indépendantes et deux-à-deux en involution. Le théorème d'Arnold-Liouville montre que la dynamique est alors régulière (coordonnées action-angle). L'objet de cette partie est de tester la non-intégrabilité méromorphe en étudiant les équations variationnelles obtenues en linéarisant le système le long d'une solution particulière.

Notons $\phi(z, t)$ le flot défini par l'équation (1). Soit Γ une courbe intégrale (non réduite à un point) et $z_0 \in \Gamma$. Notons $\phi_0(t) := \phi(z_0, t)$ une paramétrisation temporelle de Γ . On définit la *m-ième équation variationnelle le long de Γ* , notée $(VE_{\phi_0}^m)$, comme étant l'équation différentielle satisfaite par les $\xi_j := \frac{\partial^j \phi(z, t)}{\partial z^j}$ pour $j \leq m$. Par exemple, $(VE_{\phi_0}^3)$ est donnée par (voir [MR99] et [MRRS07],

paragraphe 3.4) :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= d_{\phi_0} X_H \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= d_{\phi_0}^2 X_H(\xi_1, \xi_1) + d_{\phi_0} X_H \xi_2 \\ \dot{\xi}_3 &= d_{\phi_0}^3 X_H(\xi_1, \xi_1, \xi_1) + 2d_{\phi_0}^2 X_H(\xi_1, \xi_2) + d_{\phi_0} X_H \xi_3.\end{aligned}$$

Une expression générale est donnée dans [MRRS07], (section 3.4, équation (14) page 860).

Pour $m = 1$, l'équation variationnelle ($\text{VE}_{\phi_0}^1$) est un système différentiel linéaire.

$$\dot{\xi}_1 = A_1 \xi_1 \text{ où } A_1 := d_{\phi_0} X_H = J \cdot \text{Hess}_{\phi_0}(H) \in \mathfrak{sp}(n, k) \text{ et } k := \mathbb{C}\langle \phi_0(t) \rangle.$$

Les équations variationnelles d'ordre supérieur ne sont pas linéaires. Néanmoins, ($\text{VE}_{\phi_0}^m$) est linéaire en ξ_m et polynomiale en les ξ_i pour $i < m$; comme ceux-ci sont solutions de systèmes différentiels linéaires, on voit que l'on peut donner, pour chaque ($\text{VE}_{\phi_0}^m$), un système différentiel linéaire équivalent ($\text{LVE}_{\phi_0}^m$) souvent appelé *la m-ième équation variationnelle linéarisée*. Par exemple, ($\text{VE}_{\phi_0}^2$) est linéaire en ξ_2 et en les monômes de degré 2 en les ξ_1 , c'est-à-dire en les solutions de $\mathfrak{sym}^2(A_1)$: le système ($\text{LVE}_{\phi_0}^2$) est donc triangulaire inférieur par blocs, avec pour blocs diagonaux $\mathfrak{sym}^2(A_1)$ et A_1 . Dans [Sim13b] (section 4.1), Simon donne des formules explicites pour ces équations variationnelles linéarisées. Dans ce qui suit, nous identifierons souvent ($\text{VE}_{\phi_0}^m$) à ($\text{LVE}_{\phi_0}^m$) et parlerons simplement d'équation variationnelle d'ordre m .

En prenant comme corps de base le corps différentiel $k = \mathbb{C}\langle \phi_0 \rangle$ engendré par les coefficients de ϕ_0 , on peut définir le groupe de Galois différentiel G_m de la m -ième équation variationnelle (linéarisée) et son algèbre de Lie \mathfrak{g}_m . Notons que ($\text{LVE}_{\phi_0}^m$) est un système différentiel linéaire d'ordre un à $d_m = \sum_{i=1}^m \binom{n+i-1}{n-1}$ équations : cette taille croît très vite et impose, pour tout calcul relatif à ($\text{LVE}_{\phi_0}^m$), d'en utiliser finement la structure.

Le théorème de Morales-Ramis (pour $m = 1$) et celui de Morales-Ramis-Simó (pour $m \geq 1$) nous disent que le système (1) est méromorphiquement Liouville-intégrable seulement si les algèbres de Lie \mathfrak{g}_m sont abéliennes.

Ce critère, d'apparence abstraite, est un critère algébrique donc éventuellement algorithmisable. Les travaux dans cette partie décrivent nos efforts dans cette direction. Je présente d'abord nos contributions dans le cadre Ziglin-Morales-Ramis (première variationnelle) puis dans le cadre Morales-Ramis-Simó (variationnelles supérieures). Les applications sont traitées dans la partie suivante mais on notera qu'il y a un aller-retour important entre les méthodes développées et les applications auxquelles elles conduisent. Certaines des méthodes ont d'abord été élaborées pour des applications avant d'être généralisées ; par exemple notre critère logarithmique d'intégrabilité a été élaboré pour prouver la non-intégrabilité du problème des trois corps et généralisé ensuite.

Un bref historique : Les méthodes consistant à linéariser une équation différentielle le long d'une solution particulière remontent au 19e siècle (Poincaré, Kovaleska, Liapunov). En 1982, Ziglin donne dans [Zig82, Zig83] son critère de non-intégrabilité utilisant la monodromie de l'équation variationnelle. Dans [Ito85], Ito applique avec succès cette méthode au système de Hénon-Heiles ; dans [Yos87, Yos88], Yoshida introduit la notion de solutions homothétiques pour les hamiltoniens à potentiel homogène ce qui permet d'appliquer la méthode de Ziglin. Le lien avec le groupe de Galois différentiel (en utilisant le théorème de densité de Schlesinger) apparaît indépendamment dans les travaux de Morales (dans sa thèse avec Simó), notamment dans [MS94] et [MS93, MRS96, MRS98]

(critères pour les équations de Lamé, repris plus loin) et dans les travaux de Baider, Churchill, Rod et Singer [CRS95, BCRS96], suite au travail des trois premiers de ces auteurs [BCR90, CR91].

On trouve quelques excellents exposés de synthèse sur ces méthodes. Bien sûr, le livre de Morales [MR99]. Churchill a donné plusieurs panoramas, simplifiant certaines preuves dans un esprit algèbre différentielle, notamment [Chu02]. Le livre de Michèle Audin ([Aud01] et sa version anglaise [Aud08]) est une excellente introduction (voir aussi son exposé [Aud02] au séminaire Bourbaki, qui contient certains des exemples repris plus loin). Le lien avec l'analyse de Kovaleska et l'analyse de Painlevé est évoqué dans le *survey* [MR00] de Morales et, surtout, dans les deux articles de Yoshida [Yos00a, Yos00b] sur l'analyse de Painlevé (voir aussi le livre de Goriely [Gor01]). On note que ces panoramas se situent tous au tournant du siècle, dans la foulée du théorème de Morales et Ramis. La décennie suivante a été marquée par une foule d'applications, environ une cinquantaine d'articles suivant souvent le schéma suivant : par des réductions, se ramener à deux degrés de liberté, trouver un plan invariant et une famille de solutions particulières dessus et se ramener à l'application de l'algorithme de Kovacic sur l'équation normale variationnelle. Morales et Ramis ont proposé un guide pratique [MRR10] en 2010 qui recense une partie de ces travaux ; par ailleurs, cette décennie a vu le développement de méthodes pour traiter concrètement les équations variationnelles supérieures.

6 Équation Variationnelle : Ziglin-Morales-Ramis

→ Thèses de Boucher et Aparicio

L'équation variationnelle admet la solution particulière $\xi_1 = \phi'_0(t)$. En construisant une matrice P de changement de jauge symplectique et admettant $\phi'_0(t)$ pour première colonne, on obtient un système équivalent $[P[A_1]]$ dont la première colonne et la $n+1$ -ième ligne sont nulles : on en extrait un sous-système $Y' = N Y$ de dimension $2(n-1)$, *l'équation normale variationnelle* (NVE), voir Proposition 4.2 page 76 du livre de Morales [MR99] ou les thèses de Boucher ou d'Aparicio.

Un schéma très populaire a consisté à étudier un système à deux degrés de liberté puis à construire l'équation normale variationnelle (qui est d'ordre 2) ; on applique alors l'algorithme de Kovacic (si l'équation est à coefficients rationnels) ou des classifications, par exemple des équations de Lamé dans les cas où la solution particulière a une paramétrisation dépendant de fonctions \wp de Weierstrass. Nous donnons ici deux contributions semi-algorithmiques à ces méthodes d'étude de l'équation variationnelle : un critère « logarithmique » de non-intégrabilité (élaboré avec D. Boucher) et un critère par formes réduites (élaboré avec A. Aparicio).

6.1 Un critère logarithmique de non-intégrabilité

→ Travail avec Boucher²⁶ [BW03]

Notre critère logarithmique de non-intégrabilité est le suivant ([BW03], Criterion 1, une version plus détaillée est donnée dans notre prépublication²⁷ non publiée et dans la thèse de Boucher, voir aussi [MRR10] theorem 25 p. 78).

Supposons que l'équation variationnelle ait un facteur irréductible (condition globale) qui admette des solutions formelles, au voisinage d'un point, contenant des logarithmes (condition locale). Alors l'algèbre de Lie du groupe de Galois n'est pas abélienne.

26. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/boucher_weil_3b_thomann.pdf

27. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/BoucherWeil_3corps_2002.pdf

La preuve est simple : si G agit de façon irréductible, G° agit de façon complètement réductible ; dans ce cas, on montre qu'il est abélien (et même résoluble) si et seulement si toutes ses matrices sont diagonalisables simultanément. L'existence d'un logarithme donne un élément unipotent dans le groupe de Galois local ce qui, au vu de ce qui précède, empêche l'abélianité. Dans le critère ci-dessus, le groupe de Galois du facteur irréductible est un sous-groupe d'un sous-quotient de G , sa non-abélianité implique celle de G° .

Une variante (illustrée par Morales et Ramis dans [MRR10]) est que le logarithme local (sous les mêmes hypothèses) peut être remplacé par une matrice de Stokes non triviale (avec la même preuve : apparition d'un élément unipotent dans un groupe que l'on voudrait diagonalisable).

Des applications de ce critère sont données dans les parties 8.1, 8.2, 8.3 et 8.4 ci-dessous. Ces méthodes rentrent dans la catégorie (selon Hietarinta) des algorithmes « carte postale »²⁸ : écrivez votre famille de systèmes et sa description sur une carte postale et envoyez-la à un praticien. Son traitement sera un mélange d'artisanat (trouver des solutions particulières, des plans invariants en exploitant la physique ou des symétries ou un peu de chance) et de calculs informatiques (linéariser, chercher les solutions locales, en trouver qui ont génériquement des logarithmes) avec des variantes de savoir-faire : utiliser deux solutions particulières ou plus pour trouver des conditions qui se contredisent (donc des conditions plus fines), utiliser des conditions physiques (du type : une masse a une valeur réelle positive), etc. La partie informatique est importante car les calculs deviennent vite trop lourds pour être effectués à la main et, surtout, elle permet une phase exploratoire pour deviner la bonne stratégie.

Ce traitement ne peut être qu'artisanal puisque nous avons montré que les questions de solutions rationnelles de systèmes différentiels paramétrés sont indécidables ([Bou99], Théorème 1). Néanmoins, la structure symplectique des systèmes impose des contraintes sur les exposants locaux et nous avons observé, dans la plupart des exemples symplectiques traités, l'existence de solutions locales avec logarithmes dans leurs équations variationnelles ; l'existence de logarithmes est une propriété générique des familles d'équations avec exposants locaux fixes qui diffèrent d'un entier (si une famille paramétrée admet des logarithmes locaux, les valeurs de paramètres pour lesquelles ces logarithmes disparaissent forment un fermé de Zariski : elles sont données par des conditions polynomiales). Ceci, combiné avec la faible complexité des calculs de logarithmes locaux, explique en partie l'efficacité de notre critère logarithmique de non-intégrabilité.

6.2 Forme réduite et relèvement de l'équation normale variationnelle

→ Thèse d'Aparicio et travail avec Aparicio²⁹ [AMW12]

Notre point de départ était de chercher à formaliser des méthodes pour transformer la première variationnelle en une forme la plus simple possible. L'outil naturel pour ce faire est la notion de forme réduite. On dit qu'un système $Y' = B Y$, où $B \in \text{Mat}(n, \bar{k})$ est *sous forme réduite* si $B \in \mathfrak{g}(\bar{k})$; la partie IV de ce mémoire est consacrée à nos travaux sur cette notion, qui remonte (au moins) à Kovacic et Kolchin mais n'avait, à ma connaissance, pas été étudiée du point de vue constructif. Dans l'article [AMW12] avec Aparicio, nous montrons comment obtenir une forme réduite pour des équations d'ordre un et deux puis pour des équations variationnelles à deux degrés de liberté : l'équation normale variationnelle est d'ordre 2 et nous montrons comment « relever » sa forme

28. C'est-à-dire : méthode bien utile en pratique mais ne pouvant pas fonctionner sans intelligence humaine.

29. <http://arxiv.org/abs/0912.3538>

réduite en une forme réduite de l'équation variationnelle en se ramenant à décider si des intégrales (ou des exponentielles d'intégrales) appartiennent au corps de base. Notre application au problème de Hill, voir partie 8.5, est un cas où l'équation normale variationnelle a une algèbre de Lie abélienne mais où le relèvement à l'équation variationnelle complète contient l'obstruction à l'abélianité.

Cette méthode se généralise assez facilement au cas d'ordres supérieurs : si l'on sait réduire l'équation normale variationnelle, on peut en déduire une forme réduite de l'équation variationnelle complète. Nous décrivons en appendice un procédé général de réduction symplectique : si l'on sait que le groupe de Galois est symplectique, comment transformer la matrice du système en une matrice $B \in \mathfrak{sp}(n, k)$. Une application de cette technique au problème de Hill est proposée dans la partie 8.5.

7 Équations variationnelles supérieures : Morales-Ramis-Simó

→ Thèses de Aparicio et Combot

La décennie passée a vu le développement de cinq grandes familles de méthodes pour étudier les équations variationnelles supérieures dans le but d'appliquer le théorème de Morales-Ramis-Simó.

Critère de Morales. Considérons un hamiltonien de la forme $H = \sum \frac{1}{2} p_i^2 + V(q)$, où $V(q)$ est un potentiel polynomial. Si l'on trouve une trajectoire dans un plan invariant, sa restriction à un niveau d'énergie du hamiltonien mène naturellement à des équations du type $(y')^2 = f(t, y)$; il est donc naturel qu'apparaissent des fonctions \wp dans la paramétrisation des trajectoires. On a ainsi, dans de nombreuses applications, une équation variationnelle qui est une somme directe d'équations de Lamé de la forme $y'' - (n(n+1)\wp(t) + B)y = 0$.

Pour ce cas d'équations de Lamé, Morales a élaboré le critère suivant (Lemmes 11 et 12 [MRR01a] page 79, Proposition 7 page 81). Le groupe de Galois de la k -ième variationnelle VE_k est abélien si et seulement si les solutions de VE_k sont méromorphes en t ; si le groupe de Galois de la première variationnelle VE_1 n'est pas fini alors l'existence d'un logarithme local dans les solutions de VE_k est une obstruction à l'intégrabilité. C'est la première méthode algébrique qui ait permis de traiter des variationnelles supérieures. Nous l'avons utilisée dans les applications décrites en 8.2 et 8.3.

Approches numériques. Cette approche consiste (essentiellement) à déterminer des trajectoires numériques, des variationnelles autour de cette trajectoire et à calculer des monodromies numériques. S'il est difficile d'obtenir des preuves rigoureuses par cette méthode, elles donnent des informations étonnamment précises. Parmi les promoteurs de ces approches, citons Martinez et Simó [MS09], Simon et Simó [PPR⁺10], Simon [Sim13a, Sim13b] et Salnikov [Sal12a, Sal13, Sal12b].

Caractère D-fini des coefficients de monodromie. Cette technique est née de deux nécessités. D'une part, les méthodes numériques indiquent en général « où » se trouve l'obstruction à l'intégrabilité. La prouver revient alors à montrer qu'une certaine intégrale est non triviale et donne un commutateur de monodromie non trivial, donc une obstruction à l'intégrabilité ; c'est par exemple la stratégie suivie par Martinez et Simó dans [MS09, MS11] et par Simon dans [Sim13a]. D'autre part, Combot ramène (dans sa thèse et dans [Com13a]) des questions de commutation de monodromie à des calculs explicites de résidus, et montre comment le caractère D -fini de ces objets

permet de décider effectivement leur nullité ou non ; cette technique, naturelle mais nouvelle, est abondamment utilisée dans sa thèse.

Systèmes à potentiels homogènes. Pour un hamiltonien de la forme $H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + V(q)$ avec un potentiel V homogène, Yoshida a montré dans [Yos87] que l'on pouvait (en utilisant des points de Darboux) obtenir des solutions simples (les solutions homothétiques). Linéariser le long de ces solutions a mené à des classifications remarquables. Morales et Ramis donnent une table dans [MRR01b] (étendue par Combot aux potentiels algébriques dans [Com13b]). Dans sa thèse, Combot raffine (dans son chapitre 2) la table de Morales-Ramis en donnant un critère sur la seconde variationnelle, long à énoncer mais facile à tester ; il utilise pour ce faire sa technique de résidus effectifs sus-citée. Un critère sur la troisième variationnelle est proposé dans son article avec Koutschan [CK12].

Maciejewski et Przybylska ont énormément exploré les potentiels homogènes, voir par exemple [MP05, MP06] et [MP11, MP10] pour établir des classes de potentiels intégrables. Des conditions utilisant les variationnelles supérieures sont développées dans la collaboration de Maciejewski avec Duval et al [CDMP10, DM09, DM11].

Dans [Com13a] et dans sa thèse, Combot classe les potentiels homogènes de degré -1 du plan et obtient (presque) tous les potentiels intégrables à une conjecture près. Il établit notamment un astucieux lemme de rigidité montrant que, sous certaines conditions de non-dégénérescence, un potentiel intégrable est entièrement déterminé par son jet d'un ordre donné.

Formes réduites. C'est la technique que j'ai développée, notamment avec Aparicio et Simon, en nous inspirant de vieux travaux de Kovacic, Kolchin et, plus récemment, de Mitschi et Singer. Elle permet de simplifier la première variationnelle et rend l'étude des variationnelles supérieures possible en pratique. Elle sera développée dans la partie IV de ce mémoire.

8 Applications

Nous présentons ici quelques applications dans lesquelles nous avons donné des preuves d'intégrabilité sur la première variationnelle en utilisant notre critère de logarithmes locaux [BW03, MPW04, BW07a, PPR⁺10] et parfois complété cette étude algébrique par une étude dynamique illustrant les cas intégrables [MPW04, PPR⁺10], en vue d'une étude plus profonde des liens entre ce que l'on lit dans les variationnelles et la dynamique du système. Les variationnelles supérieures sont utilisées (*via* le critère de Morales) dans [MPW04, BW07a] ; elles sont appliquées au problème de Hénon-Heiles (*via* nos formes réduites) dans [AMW11]

8.1 Le problème des trois corps

→ Travail avec Boucher³⁰ [BW03]

Pour le problème plan des trois corps, Tsygintsev a proposé de travailler le long de la solution parabolique de Lagrange et a montré, en utilisant l'approche de Ziglin, la non-intégrabilité méromorphe du problème ([Tsy00] et [Tsy01a]) ; il a ensuite approfondi la méthode pour prouver (résultat un peu plus

30. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/boucher_weil_3b_thomann.pdf

fort) la non-existence d'une intégrale première méromorphe additionnelle [Tsy01b]. Parallèlement³¹, nous avons utilisé notre critère logarithmique pour obtenir la non-intégrabilité : Delphine Boucher l'a obtenue dans [Bou00] pour le cas de masses égales, et nous avons traité (avec Boucher) le cas général dans [BW03]. Le hamiltonien à trois degrés de liberté considéré est

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + 1 \right) (p_1^2 + \frac{(p_3 q_2 - p_2 q_3 - 1)^2}{q_1^2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2} + 1 \right) (p_2^2 + p_3^2) + p_1 p_2 - \frac{p_3 (p_3 q_2 - p_2 q_3 - 1)}{q_1} - \frac{m_2}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}} - \frac{m_1}{q_1} - \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(q_1 - q_2)^2 + q_3^2}}$$

Nous montrons que l'équation normale variationnelle (un système 4×4) est réductible et que deux cas peuvent se produire.

Premier cas : le système est décomposable, c'est-à-dire réductible en deux blocs 2×2 ; c'est la situation générique en fonction des paramètres. Nous montrons que ces deux blocs ne peuvent pas être simultanément réductibles. Nous montrons ensuite que chacun de ces facteurs admet des solutions locales (au point $x = i$) contenant un logarithme.

Second cas : le système n'est que factorisable, c'est-à-dire triangulaire par blocs. Nous montrons qu'un bloc diagonal est irréductible et a des solutions locales (encore au point $x = i$) contenant un logarithme. Notre critère logarithmique de non-intégrabilité montre alors que le problème n'est pas intégrable (sauf pour une configuration).

On peut retenir deux ingrédients de cette preuve. D'une part, pour une équation paramétrée contenant localement des logarithmes, la présence de logarithmes est « générique » (l'absence de logarithmes est donnée par des équations polynomiales en les paramètres) et cette technique permet alors de démontrer que « presque tous les cas » sont intégrables; d'autre part, nous utilisons dans la preuve des contraintes issues de la physique (les masses doivent être des réels positifs).

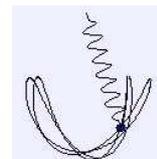
Du fait du caractère exemplaire de ce problème, ces travaux ont été décrits dans plusieurs *surveys*, par exemple [Aud02, Aud01, Aud08, MRR10]. Le fait que l'on trouve « très souvent » des logarithmes dans les solutions locales d'équations variationnelles est une observation expérimentale pour laquelle nous n'avons pas de démonstration. L'utilisation additionnelle de critères physiques a été développée, notamment par Boucher dans son travail [Bou05, Bou06] sur les satellites en orbite circulaire. Depuis ces travaux, Morales et Simon [MRS09] ont donné des versions plus fortes (et plus simples) de l'intégrabilité pour les problèmes à N corps en utilisant la méthode des points de Darboux et des solutions homothétiques. Combot donne dans [Com12] des critères d'intégrabilité pour des potentiels de degré -1 invariants par rotation et les applique à d'autres problèmes à N corps.

31. C'est le produit de discussions actives et amicales avec Tsygvinsev en échangeant nos approches et informations; le résultat a été deux beaux papiers complémentaires - et le dépôt commun d'un projet ANR sur l'intégrabilité entre 2004 et 2008, voir http://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/ANR/ANR_html/main.html.

8.2 Le pendule à ressort

→ Travail avec Maciejewski et Przybylska³² [MPW04]

Dans ce travail avec Maciejewski et Przybylska [MPW04], nous étudions l'intégrabilité d'un pendule à ressort (ou pendule élastique); le mouvement est donc une interaction entre le mouvement du à l'oscillation du pendule et l'oscillation axiale due au ressort.



L'intégrabilité d'un tel pendule a été étudiée par Churchill, Delgado et Rod [CDR96] par la méthode de Ziglin; ce travail a été approfondi par Morales et Ramis (le papier d'applications II de [MRR01a]) qui restreignent (grâce à leurs tables de potentiels) les valeurs d'éventuelle intégrabilité. Notre travail concerne une généralisation obtenue en ajoutant un terme d'amortissement cubique. Notre pendule à ressort est décrit par le hamiltonien

$$H = T + mgz + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - \frac{1}{3}a(r - l_0)^3, \quad (2)$$

où $a \in \mathbb{R}$, k est la raideur du ressort et T est l'énergie cinétique. Notre résultat principal (Théorème 3) est que ce système n'est pas méromorphiquement Liouville-intégrable pour $k \in \mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$. La preuve utilise notre critère logarithmique d'intégrabilité. Les cas $a = 0$ et $a \neq 0$ sont traités différemment en utilisant les équations variationnelles le long de solutions différentes, paramétrées par des fonctions φ , sur des plans invariants. Notons que des critères physiques interviennent : pour $k = \frac{1}{(m+2)^2} - 1$, on obtient une équation variationnelle à algèbre de Lie abélienne mais cette valeur donne une raideur négative, ce qui n'est pas une valeur admissible. Par ailleurs, la première variationnelle étant paramétrée par des fonctions φ , nous utilisons le critère local de Morales ([MR99], Lemme 8.2) pour montrer que les variationnelles jusqu'à l'ordre 7 ont toutes une algèbre de Lie abélienne (ce fait a été depuis confirmé numériquement par Martinez et Simó³³) et nous conjecturons (*via* une expérience numérique) la non-intégrabilité dans ce cas.

Notre conjecture a été démontrée par Martinez et Simó dans leur important article [MS09] où ils ont montré (section 6) la non-intégrabilité en combinant une approche numérique et une preuve rigoureuse de non-intégrabilité (en démontrant la non-trivialité d'un commutateur de monodromie dans la troisième variationnelle le long d'une séparatrice).

Un type similaire de pendule (« wilbeorce ») a été étudié depuis par Acosta et Blazquez dans [AHARBSD13] en utilisant leur technique dite « d'algébrisation hamiltonienne » pour deviner un changement de variable transformant les équations variationnelles en équations à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ et appliquer alors des algorithmes classiques.

8.3 Le modèle cosmologique de Friedman-Robertson-Walker

→ Travail avec Boucher³⁴ [BW07a]

Les théories de Ziglin-Morales-Ramis ont trouvé de nombreuses applications dans les modèles cosmologiques. Par exemple, divers modèles de Bianchi sont traités par Maciejewski et Szydowski dans [MPS02] (avec Strelcyn), dans [MPS02] (avec Przybylska) et par Morales et Ramis dans [MRR01a] (II).

32. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0308011>

33. <http://www.maia.ub.es/dsg/wsims08/slides/Simo.pdf>

34. http://www.sbfisica.org.br/bjp/files/v37_398.pdf

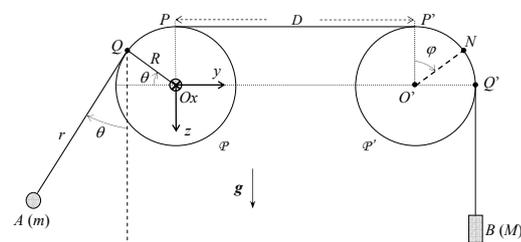
Dans [CSS05], la non-intégrabilité de systèmes issus des modèles cosmologiques de Friedman-Robertson-Walker est établie. Nous avons repris, avec D. Boucher, ces hamiltoniens ; nous retrouvons les valeurs de non-intégrabilité en utilisant notre critère logarithmique sur la première variationnelle ; nous affinons ensuite en utilisant le critère de Morales sur les variationnelles supérieures et conjecturons la non-intégrabilité pour une famille à un paramètre entier n (nous le démontrons pour n de 1 à 10). Cette conjecture a été prouvée par Coehlo, Stuchi et Skea dans [CSS08] (en utilisant une autre solution particulière).

Dans [SSM06], Maciejewski, Przybylska, Stachowiak et Szydlowski étudient l'intégrabilité du modèle de Friedman-Robertson-Walker dans un cadre plus large et avec des techniques différentes. Enfin, nos résultats ont été repris, approfondis et étendus dans l'article récent de Simon [Sim13a] où il applique à ce problème ses techniques numériques certifiées et ses résultats de structure sur les variationnelles supérieures [Sim13b].

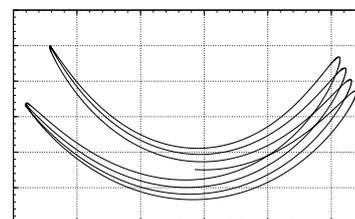
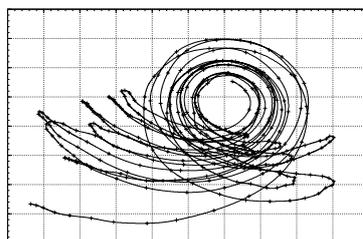
8.4 La machine d'Atwood oscillante

→ Travail avec Perez, Pujol, Ramis, Simó et Simon³⁵ [PPR+10]

La machine d'Atwood est un dispositif pour mesurer la gravité. Dans la variante étudiée ici (la machine d'Atwood oscillante, ou dansante), on fixe une petite masse m à gauche et une grosse masse M à droite. On lance la masse m dans un mouvement de pendule : ça produit des oscillations « montantes » dans le mouvement de M et des oscillations « montantes » dans le mouvement de m (ceci dépend bien sûr du rapport entre m et M , de la vitesse initiale de m , etc.).



Cette machine a été étudiée en détail par Tuffillaro dans sa thèse [Tuf82] (et de nombreux articles, notamment [Tuf86, Tuf85, NCT95, TAG84, CNT90, Tuf94, TNC88]). Dans notre article [PPR+10], nous avons étudié les mouvements de la machine d'Atwood oscillante de plusieurs points de vue. Nous avons construit une machine d'Atwood et réalisé (et filmé) des expériences de mouvements en fonction des configurations. Nous avons comparé les relevés expérimentaux et les simulations numériques (ci-dessous : mouvement de m) pour valider le modèle.



Dans l'étude de l'intégrabilité, nous présentons trois approches : une approche numérique (suggérant

35. <http://arxiv.org/abs/0912.5168>

des valeurs de non-intégrabilité et des cas de doute), une approche dynamique (analyse de sections de Poincaré) et une approche algébrique. Nous démontrons (Théorème 7.5) que le modèle d'Atwood oscillant avec poulies massives n'est pas méromorphiquement intégrable ; la preuve repose sur notre critère logarithmique appliqué à deux solutions particulières (les solutions sans oscillation, dont une non physique correspondant à un angle de départ de π) et combiné avec des conditions physiques (masses positives).

Nous montrons ensuite que le modèle d'Atwood oscillant avec poulies massives n'est pas intégrable méromorphiquement sauf peut-être lorsque $\frac{M}{m} = \frac{p(p+1)}{p(p+1)-4}$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. La preuve utilise encore notre critère logarithmique. Pour $p = 2$, c'est-à-dire $\frac{M}{m} = 3$, le système est connu pour être intégrable (Tuffillaro) ; pour $p > 2$, nous donnons des indications numériques conjecturant la non-intégrabilité sur les variationnelles supérieures. Celle-ci a depuis été prouvée par Martinez et Simó dans [MS09, MS11]. Enfin, pour $M = m$ (cas limite), l'équation variationnelle est irrégulière et notre technique montre donc seulement la non-intégrabilité rationnelle.

8.5 Le problème de Hill (problème de la lune)

→ Travail avec Aparicio³⁶ [AMW12]

Le problème de Hill ([Hil78a, Hil78b, Hil78c]) traite du mouvement de la lune sous l'influence du soleil et de la terre ; il est souvent présenté comme un cas de problème à trois corps où la masse de la terre est négligeable et la distance au soleil tend vers l'infini. Sa non-intégrabilité par des intégrales algébriques a été prouvée par Sadetov [Sad05] ; sa non-intégrabilité méromorphe a été prouvée par Morales, Simó et Simon [MRSS05] (voir cet article pour les références aux travaux précédents réduisant le problème). C'est Simon qui nous a conseillé d'appliquer nos premières techniques de formes réduites à ce problème.

En effet, c'est un cas où l'équation normale variationnelle a une algèbre de Lie abélienne mais où l'équation variationnelle complète a une algèbre de Lie qui ne l'est pas ; il semble, d'ailleurs, que ce soit un des rares cas où la méthode de Morales-Ramis s'applique alors que celle de Ziglin ne permet pas de conclure.

Dans [AMW12] (section 5.2), nous étudions le hamiltonien du problème de Hill :

$$H := \mathbf{i}(q_1q_2 - p_1p_2) - 4q_1q_2(q_1p_1 - q_2p_2) - 4\mathbf{i}(3q_1^4 - 2q_1^2q_2^2 + 3q_2^4)q_1q_2.$$

Le champ X_H associé a deux plans invariants $\Pi_1 := \{q_2 = 0, p_1 = 0\}$ et $\Pi_2 := \{q_1 = 0, p_2 = 0\}$. On trouve une famille de solutions particulières dans Π_1 donnée par $\gamma(x) = (f(x), 0, 0, \mathbf{i}f'(x))$ où $(f'(x))^2 = -f(x)^2 + 4f(x)^6 + 2h$ (pour une constante h arbitraire) ; on peut donc poser $f(x)^2 = \frac{6h}{3\wp(x)+1}$, où $\wp(x) = \wp(x; \frac{4}{3}, \frac{8}{27}(1 - 216h^2))$ est une fonction \wp de Weierstrass. Notre technique de réduction transforme l'équation variationnelle en le système $Y' = AY$, où

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 4G(x) & 0 & -\frac{\mathbf{i}}{f'(x)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{i}}{f'(x)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4G(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

où $G(x) = \frac{f(x)^2(-2f(x)^6 - 4h + f(x)^2)}{4f(x)^6 - f(x)^2 + 2h} \in k$. Il reste à montrer que c'est bien une forme réduite. Pour cela, on regarde si l'on peut faire « disparaître » le terme en G ; cela conduit à la recherche de solutions

36. <http://arxiv.org/abs/0912.3538>

rationnelles de l'opérateur

$$L := \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \frac{(44t^6 - 3t^2 - 2)}{(-t^2 + 4t^6 + 2)t} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 3 \frac{t^2(48t^8 - 24t^4 + 96t^2 - 1)}{(-t^2 + 4t^6 + 2)^2} \frac{d}{dt}$$

et l'on vérifie aisément qu'il n'en a pas. La matrice obtenue est donc une forme réduite. L'algèbre de Lie associée est engendrée par

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et $[M_1, M_2]$ n'est pas nul. L'algèbre de Lie de l'équation variationnelle est de dimension 3 (celle de l'équation normale variationnelle était engendrée par M_1 et de dimension 1) et n'est pas abélienne : le problème de Hill n'est pas intégrable.

8.6 Le système de Hénon-Heiles

→ Travail avec Aparicio³⁷ [AMW11]

Dans [AMW11], nous avons appliqué notre technique de formes réduites au hamiltonien

$$H := \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{3}q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2^2 \quad (3)$$

Ce système fait partie de la famille (à un paramètre) des hamiltoniens de Hénon-Heiles traités par Ito dans [Ito85] ; Ito montre que cette famille n'est pas intégrable, sauf pour 4 valeurs des paramètres (voir aussi [MRS96] ou le livre de Morales [MR99]). Le système que nous étudions ici a servi de cas modèle dans [MRR01a] et surtout dans [MRRS07] pour illustrer la méthode des variationnelles supérieures de Morales-Ramis-Simó : la troisième variationnelle n'est pas intégrable. Dans l'article [AMW11] avec Aparicio, nous avons calculé les formes réduites des variationnelles successives pour obtenir la même conclusion³⁸. Plus précisément, nous avons obtenu (paragraphe 5.3) une forme réduite « partielle » pour la troisième variationnelle, sans savoir prouver directement, à l'époque, que c'était bien une forme réduite ; pour prouver que c'était bien une forme réduite, nous avons utilisé (paragraphe 5.4) cette forme (simplifiée) pour construire une extension de Picard-Vessiot pour la troisième variationnelle. Le caractère nilpotent de l'algèbre de Lie associée fait naturellement apparaître, dans les solutions, des dilogarithmes itérés : une action adjointe nilpotente correspond au fait que, pour résoudre, il faut procéder à des intégrations itérées - qui se lisent dans les blocs de Jordan. Il reste simplement à prouver qu'une extension de corps contenant ces dilogarithmes a le degré de transcendance suffisant, ce que l'on vérifie en inspectant l'algèbre de Lie du groupe de Galois associé.

Le fait que l'apparition de polylogarithmes dans les solutions de variationnelles supérieures permette de conclure à la non-intégrabilité a été utilisé indépendamment par d'autres auteurs, notamment par

37. <http://arxiv.org/abs/1206.6345>

38. Le lecteur peut reproduire les calculs en utilisant les lignes Maple à l'URL http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/charris/.

Horozov et Stoyanova [HS07] pour prouver la non-intégrabilité de certaines équations de Painlevé. On peut voir ce critère comme une extension de notre critère sur les logarithmes locaux dans la première variationnelle. Il serait intéressant, d'ailleurs, de systématiser cette observation (une suggestion similaire est proposée par Morales et Ramis dans [MRR10]) : dans le cas d'équations à singularités régulières avec une première variationnelle à algèbre de Lie abélienne, on voit souvent apparaître des polylogarithmes dans les solutions des variationnelles supérieures et ils donnent naturellement des obstructions à l'intégrabilité.

9 Calculs effectifs d'intégrales premières pour des systèmes différentiels non linéaires

Le titre de cette partie est légèrement trompeur et volontairement mal posé. Le terme « calcul effectif » suppose que l'on a fixé la représentation que l'on se donne pour l'objet à déterminer. Je présente ici deux contributions : l'une concerne le calcul de développements de Taylor d'intégrales premières de systèmes différentiels non linéaires le long d'une trajectoire particulière connue ; l'autre concerne le calcul efficace d'intégrales premières rationnelles de degré donné pour un champ de vecteurs polynomial plan.

9.1 Germes d'intégrales premières le long d'une solution

→ Articles [Wei94, Wei95], Travail avec Aparicio, Barkatou et Simon³⁹ [AMBSW11]

Dans [Wei94, Wei95], j'avais montré que les intégrales premières polynomiales (resp. rationnelles) d'un système différentiel linéaire $Y' = A(x)Y$ correspondent à des invariants (resp. semi-invariants) dans des puissances symétriques du système de départ. Ce fait a été observé indépendamment par Morales dans la genèse de son travail avec Ramis [MRR01a] : la forme initiale d'une intégrale première (le terme de plus bas degré dans un développement en série) le long d'une solution est une intégrale première polynomiale du système linéarisé. Cette observation est généralisée aux variationnelles supérieures dans [MRRS07].

Dans le travail avec Aparicio, Barkatou et Simon [AMBSW11], nous reprenons cette observation et l'appliquons au calcul de développement de Taylor d'intégrales premières le long d'une solution connue d'un système hamiltonien. Nous montrons que seules certaines des solutions rationnelles éventuelles des équations variationnelles peuvent provenir de la linéarisation d'une intégrale première. Nous proposons un filtre pour les caractériser : elles forment un sous-système de l'équation variationnelle explicitement constructible (les solutions admissibles, Théorème 12 et Définition 14). Ceci vient essentiellement des conditions de prolongement dans les espaces de jets. Nous montrons dans la cinquième partie de l'article comment combiner notre algorithme de calcul d'invariants [vHW97] et l'algorithme de solutions rationnelles de Barkatou [Bar99] en les adaptant à ces systèmes pour obtenir un algorithme de calcul efficace de ces germes d'intégrales premières.

Ce travail a motivé la collaboration [MK12] entre Aparicio et Kauers sur les séries à plusieurs variables ; il a été repris par Simon dans [Sim13a] où la structure des variationnelles est approfondie ; il est couplé, dans [Sim13b], avec une technique numérique pour obtenir des informations numériques certifiées sur l'intégrabilité.

39. http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/Papers/issac1174-aparicio.pdf

9.2 Intégrales premières rationnelles et polynômes de Darboux de champs de vecteurs polynomiaux plans

→ Travail avec Bostan, Chèze et Cluzeau⁴⁰ [BCCW13]

Ce travail récent propose le premier algorithme de calcul d'intégrales premières rationnelles de champs de vecteurs polynomiaux planaires par de l'algèbre linéaire ; jusque-là, cette recherche menait essentiellement à des équations quadratiques compliquées. L'observation-clé (classique, mais utilisée dans [FG10] pour simplifier les équations quadratiques) est qu'un champ de vecteurs polynomial plan admet une intégrale première rationnelle si et seulement si toutes ses solutions sont algébriques. En se donnant une borne, on construit des polynômes minimaux à partir d'une interpolation semblable à celle de Padé-Hermite. La difficulté ici consiste à transformer cette idée simple en un algorithme déterministe propre. Nous donnons plusieurs variantes, dont une variante probabiliste Las Vegas en $\tilde{O}(N^{2\omega})$ et une heuristique en $\tilde{O}(N^{\omega+2})$ opérations arithmétiques, où N est le degré de l'intégrale première et ω est l'exposant du coût de la résolution d'un système linéaire.

Ces algorithmes sont implantés en Maple⁴¹. Leur complexité est soigneusement étudiée ; elle est essentiellement cubique en la taille de la sortie (à peu près tous les algorithmes précédents avaient une complexité exponentielle, ou polynomiale avec exposant très élevé). Leurs excellentes performances expérimentales sont sans comparaison avec ce qui les précédait.

40. <http://arxiv.org/abs/1310.2778>

41. Implantation Maple : <http://perso.ensil.unilim.fr/~cluzeau/RationalFirstIntegrals.html>.

Quatrième partie

Galois différentiel et intégrabilité : formes réduites

Je présente dans cette partie les méthodes de *formes réduites* que nous avons élaborées en vue des applications à l'intégrabilité. La portée de nos résultats dépasse le cadre des applications envisagées au départ. Le dernier paragraphe de cette partie présente des recherches en cours et un programme de travail autour de cette notion de formes réduites de systèmes différentiels linéaires.

Nous étudions un système différentiel linéaire $[A] : Y' = AY$ où $A \in \text{Mat}(n, k)$. On note G son groupe de Galois différentiel, \mathfrak{g} son algèbre de Lie et V son espace vectoriel de solutions dans une extension de Picard-Vessiot K . On dit que $[A]$ est *sous forme réduite* si $A \in \mathfrak{g}(\bar{k})$. Si ce n'est pas le cas, nous dirons qu'une matrice $B \in \text{Mat}(n, \bar{k})$ est une *forme réduite* de A s'il existe $P \in GL(n, \bar{k})$ telle que $B = P[A]$ et $B \in \mathfrak{g}(\bar{k})$.

Notons $a_1(x), \dots, a_r(x) \in k$ une base du C -espace vectoriel engendré par les coefficients de A . On peut décomposer A sous la forme $A = \sum_{i=1}^s a_i(x)M_i$, où les M_i sont des matrices constantes. Dans [WN63, WN64], Wei et Norman nomment *algèbre de Lie engendrée par A* l'algèbre de Lie \mathfrak{a} engendrée par les M_i , c'est-à-dire le C -espace vectoriel engendré par les M_i et leurs crochets itérés; nous appellerons *algèbre de Lie associée à A* , notée $Lie(A)$, l'enveloppe algébrique⁴² de \mathfrak{a} , c'est-à-dire la plus petite algèbre de Lie qui contienne A et qui soit l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique linéaire (connexe) H .

Un théorème de Kolchin et Kovacic ([vdPS03], Proposition 1.31) montre alors que $\mathfrak{g} \subset Lie(A)$ (et que $G \subset H$). Une forme réduite correspond à un cas d'égalité dans cette inclusion; on peut la comprendre comme étant une « plus petite forme » à laquelle on puisse réduire le système. Le théorème de réduction de Kolchin et Kovacic ([vdPS03], Corollaire 1.32) dit que, quitte se placer sur une extension algébrique k_0 de k , tout système différentiel linéaire admet une forme réduite⁴³. Les preuves classiques de ce résultat ne sont pas constructives. L'objet de cette partie est de mieux caractériser les formes réduites et d'élaborer des algorithmes pour les déterminer. La fin de cette partie esquisse un programme de recherche (en cours) sur ce thème.

Un peu d'histoire. L'utilisation de $Lie(A)$ pour écrire des formules de résolution de $Y' = AY$ apparaît dans des travaux de Magnus et de Feynman, qui utilisent la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour écrire les solutions comme produit (infini) d'exponentielles; Wei et Norman donnent dans [WN63] une formule (finie) pour résoudre le système quand $Lie(A)$ est résoluble. Cette formule est bien connue en physique et en automatique, un peu moins chez les mathématiciens.

Les théorèmes de réduction apparaissent dans le programme de Kovacic pour le problème inverse ([Kov69, Kov71]), c'est-à-dire la réalisation d'un système ayant un groupe de Galois différentiel prescrit; Kovacic y

42. Une fois les M_i connus, Fieker et de Graaf montrent ([FdG07], paragraphe 3) comment calculer cette enveloppe algébrique.

43. L'énoncé classique suppose que le groupe de Galois différentiel est connexe et que le corps de base est un corps C_1 ; nous montrons dans [AMCW13], Corollaire 4 et Remarque 31 que l'on peut s'affranchir de ces hypothèses mais que cela impose une extension algébrique pour obtenir une forme réduite.

introduit les propriétés de la dérivée logarithmique dans un groupe algébrique (voir partie 5 de [MS02]). Par exemple, si $A \in \mathfrak{h}(k)$, où \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe H , alors le système $Y' = AY$ admet une solution dans $H(K)$; ce résultat algébrique est classique en géométrie différentielle, dans le contexte des connections (par exemple le Lemme en fin du paragraphe 25.1 dans le livre de Dubrovin, Novikov et Fomenko [DNF85], p. 238 dans la version française - nous le redémontrons dans [AMCW13], Remarque 28). Cette approche des problèmes inverses a été développée par Mitschi et Singer [MS96] pour le cas connexe et dans [MS02, CMS05], puis par Hartman dans [Har05b], par Ledet et Juan [JL07], etc. Pour le problème direct, les contributions sont plus rares. La remarque 1.33.2 de [vdPS03] suggère que l'on pourrait peut-être utiliser les résultats de réduction de Kolchin et Kovacic pour déterminer les groupes de Galois différentiels. La réduction de Kolchin-Kovacic est un ingrédient important dans l'étude par Blazquez et Morales [BSMR10] des systèmes de Lie-Vessiot (systèmes différentiels admettant un principe de superposition).

Nos explorations sur ces formes réduites ont démarré dans le cadre de la thèse d'Aparicio et du post-doc de Simon dans notre équipe. Elles ont été motivées par des questions en apparence différentes.

D'une part, essayer de trouver un moyen de caractériser (ou calculer) l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel sans préalablement calculer le groupe. Le principe en serait que si l'on montre que l'on ne peut pas trouver de système $[B]$ équivalent à $[A]$ (sur une extension algébrique) tel que $Lie(B) \subsetneq Lie(A)$, alors $\mathfrak{g} = Lie(A)$ (c'est aussi l'esprit de la remarque 1.33.2 de [vdPS03]); c'est ce que nous utiliserons dans la partie 11.1.

D'autre part, pour mettre en oeuvre le théorème de Morales-Ramis-Simó, chercher à « simplifier au maximum » la première variationnelle (pour simplifier le traitement des variationnelles suivantes); cette idée, formulée naïvement, s'incarne naturellement dans la notion de forme réduite – au sens où les premières variationnelles que nous avons simplifiées se sont trouvées être naturellement sous forme réduite.

10 Formes réduites de systèmes réductifs

10.1 Une caractérisation des formes réduites

→ Travail avec Aparicio et Compoint⁴⁴ [AMCW13]

Nous avons vu plus haut que si l'on sait dire quand un système est sous forme réduite, on peut espérer utiliser cette notion pour déterminer le groupe de Galois différentiel. Dans l'article avec Aparicio et Compoint [AMCW13], nous donnons une telle caractérisation pour tout système puis l'utilisons, dans le cas d'un groupe réductif, pour donner une procédure de réduction.

Un élément e d'une extension de k est dit *hyperexponentiel* sur k si $e'/e \in k$. Une solution Y d'un système différentiel $Y' = BY$, où $B \in Mat(m, k)$, est dite *rationnelle* si $Y = F \in k^m$; elle est dite *hyperexponentielle* si $Y = e F$ où $e'/e \in k$ et $F \in k^m$. Dans les deux cas, nous dirons qu'elle est à *coefficients constants* si $F \in C^m$. À un semi-invariant dans une construction tensorielle $\text{Const}(V)$ on associe une solution hyperexponentielle de $[\text{const}(A)]$. Par convention, nous considérons ici les solutions rationnelles comme des cas particuliers de solutions hyperexponentielles (pour $e = 1$), tout comme les invariants sont des cas particuliers de semi-invariants.

Notre théorème principal (Théorème 1 page 1509) dit que $[A]$ est sous forme réduite si et seulement si toute solution hyperexponentielle de toute construction tensorielle $[\text{const}(A)]$ est à coefficients constants.

44. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2012.11.007>, <http://arxiv.org/abs/1206.6661>

On en déduit deux corollaires utiles. D'une part, un système est sous forme réduite si et seulement s'il existe un semi-invariant de Chevalley dans une construction tensorielle $\text{Const}(V)$ tel que la solution hyperexponentielle correspondante de $\text{const}(A)$ soit à coefficients constants. D'autre part, pour un groupe algébrique H d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , on a $\text{Lie}(A) \subset \mathfrak{h}$ si et seulement si toute solution hyperexponentielle d'une construction $\text{const}(A)$ associée à un semi-invariant de H est à coefficients constants.

Quand le groupe de Galois est réductif, on peut aller plus loin. Un groupe réductif admet un invariant de Chevalley, c'est-à-dire un invariant dans une construction tensorielle $\text{Const}(V)$ tel que G soit exactement l'ensemble des automorphismes de V admettant cet invariant. Dans ce contexte, nous montrons (Proposition 27 page 1511) que $[A]$ est sous forme réduite si et seulement si toute solution rationnelle de toute construction tensorielle $\text{const}(A)$ est à coefficients constants. Si le groupe est de plus unimodulaire, nous montrons (dans l'esprit de [Com96] et des travaux qui l'ont suivi [CS99, Beau00]) le même résultat (Théorème 2 page 1511) en restreignant les constructions aux puissances symétriques de n copies de A .

Pour un système à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ et à groupe de Galois réductif et unimodulaire, nous en déduisons (en adaptant l'algorithme de Compoint et Singer [CS99] de calcul des groupes de Galois différentiels) la procédure de réduction suivante :

1. En un point ordinaire $z_0 \in \mathbb{C}$, calculer une matrice locale de solutions $\hat{U} \in GL_n(\mathbb{C}[[z - z_0]])$ telle que $\hat{U}(z_0) = \text{Id}$.
2. En utilisant les bornes de Compoint-Singer et notre algorithme [vHW97] de calculs d'invariants, calculer des solutions rationnelles ϕ_1, \dots, ϕ_r de $\mathfrak{sym}^{m_i}(A \oplus \dots \oplus A)$ et les invariants correspondants $I_i := \phi_i(z_0)$ de G dans $\text{Sym}^{m_i}(A \oplus \dots \oplus A)$ tels que $G = \{g \in GL(V) \mid \forall i, g(I_i) = I_i\}$.
3. Pour une matrice P à coefficients indéterminés, construire le système (S) d'équations polynomiales

$$(S) : \forall i = 1 \dots, r, \quad \text{Sym}^{m_i}(P \oplus \dots \oplus P) \cdot I_i - \phi_i = 0, \quad \det(P) \neq 0.$$

4. Avec une méthode de résolution de systèmes polynomiaux (bases de Groebner, ensembles triangulaires, etc.), trouver une solution de (S) ; cela donnera une matrice de réduction $P \in GL_n(\bar{k})$.

Le système équivalent $P[A]$ qui en résulte est sous forme réduite. Cela se voit facilement : la matrice P ainsi construite envoie les ϕ_i (à coefficients rationnels) sur les I_i (à coefficients constants). L'existence d'une solution à (S) vient de ce que \hat{U} est solution (transcendante) du système (S) donc, par le Nullstellensatz, (S) a une solution, à coefficients dans \bar{k} .

10.2 Perspectives

Je sors maintenant de [AMCW13] pour discuter de prolongements et améliorations qui font l'objet d'un programme de recherche en cours. Remarquons d'abord que si l'on connaît seulement quelques invariants du groupe de Galois mais pas tous, cette technique donne une réduction partielle (en utilisant les corollaires du théorème 1). Ensuite, le système (S) induit des équations polynomiales de grand degré et artificiellement compliquées. On les simplifie en déterminant les algèbres de Lie \mathfrak{h}_0 (resp. \mathfrak{h}_1) admettant les I_i (resp. ϕ_i) comme invariants. L'existence d'une solution de (S) montre que ces algèbres sont conjuguées; déterminer concrètement une telle conjugaison résout (S) . Le problème de conjugaison est important; une solution algorithmique est proposée par de Graaf dans son livre [dG00]. Cette idée ramène notre gros système polynomial (S) à un système d'équations quadratiques. On les simplifie encore en utilisant une base de Cartan-Weyl des algèbres de Lie \mathfrak{h}_i . Ce travail est en cours.

Même avec les améliorations ci-dessus, notre procédure de réduction resterait ravissante mais irréaliste (car elle utilise l'algorithme de Compoint-Singer, très important mais pas encore adapté à une utilisation en pratique) ; de plus, elle ne remplit pas encore non plus notre objectif initial de déterminer l'algèbre de Lie du groupe de Galois sans passer par le groupe. Une direction pour ce faire est d'employer le point de vue des groupes de Galois génériques de Katz ([Kat82, Kat87], voir l'exposé Bourbaki de Bertrand [Ber92]), notamment *via* le travail récent de Di Vizio et Hardouin [DVH10] - écrit dans le cas aux q -différences mais dont on peut adapter des idées au cas différentiel.

Cela nous a amenés à élaborer la stratégie suivante. Nous nous plaçons (pour l'instant) dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple et d'un groupe de Galois connexe et irréductible. Comme plus haut, le module différentiel associé à $[A]$ est noté $\mathcal{M} = (k^n, \nabla_A)$. À la représentation adjointe de \mathfrak{g} dans $\text{End}(V) \simeq V \otimes V^*$ correspond un sous-module⁴⁵ de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^*$; on peut « deviner » lequel en utilisant la p -courbure (partie 3.1) *via* le côté facile de la conjecture de Grothendieck-Katz. En adaptant la méthode d'*eigenring* ([Sin96], [BP98]) pour la décomposition de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^*$ (utilisant des solutions rationnelles de constructions) et en utilisant notre caractérisation des formes réduites (le Théorème 1 de [AMCW13]), nous pensons pouvoir ramener le problème de réduction à (encore) un problème de conjugaison d'algèbres de Lie (entre un sous-module de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^*$ et une sous-algèbre de Lie « cible » de $V \otimes V^*$). Ceci ouvrirait une voie vers des méthodes raisonnables pour déterminer l'algèbre de Lie de G sans connaître G préalablement, au moins dans le cas d'un groupe connexe. C'est l'objet d'un travail en cours avec Cluzeau et Di Vizio.

Ce problème de conjugaison d'algèbres de Lie n'est pas nouveau et a d'autres applications, bien au-delà de la théorie de Galois différentielle. On remarque qu'il ramène une question de système polynomiaux à une question sur des équations quadratiques ; on avait déjà observé un phénomène similaire dans les questions de descente⁴⁶ (partie 2.3). Les algorithmes connus pour ce problème (voir par exemple le livre de de Graaf [dG00]) utilisent fortement un bon choix de représentation de l'algèbre de Lie (une base de Cartan-Weyl).

Ceci nous entraîne vers une autre direction de travail : parmi toutes les formes réduites, en déterminer qui soient « plus simples » ou « plus naturelles » que d'autres. Dans le cas où l'algèbre de Lie est semi-simple, une base de Cartan-Weyl semble être indiquée et donner un début de « normalisation ». Reste à articuler cette tentative de normalisation « globale » avec les formes normales locales. Un point de départ serait la question, traitée par Babbitt et Varadarajan dans [BV83] mais encore (me semble-t-il) mal comprise et dont je ne connais pas de version algorithmique implantée : étant donné un système $Y' = AY$ où $\text{Lie}(A) \subset \mathfrak{h}$ et où A est à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$, trouver une réduction locale de A telle que la matrice de réduction soit dans H (et le résultat dans une sous-algèbre de \mathfrak{h}). Une bonne compréhension de cette question établirait un pont entre méthodes de réduction locales et méthodes de réduction globales telles que nous les envisageons dans cette partie ; c'est une perspective à plus long terme.

Ces techniques devraient se généraliser aux systèmes d'EDP linéaires D -finis, comme ceux qui apparaissent naturellement dans des connections de Gauss-Manin ou dans des questions d'intégrabilité d'EDP. Disposer d'outils algorithmiques efficaces serait pertinent ici. Enfin, ces mêmes questions se posent mutatis mutandis dans le contexte des équations aux différences et aux q -différences. Une partie de nos résultats s'y traduit bien ; une traduction plus approfondie reste une piste à explorer.

45. Dans [NvdP10], Nguyen et van der Put étudient ce même module et le nomment *module adjoint* ; ils montrent que le problème de résolution en terme d'équations d'ordre moindre se ramène aussi à un problème de conjugaison de deux algèbres de Lie et esquissent une stratégie pour y parvenir.

46. Je ne sais pas si c'est juste une coïncidence.

11 Intégrabilité et formes réduites

11.1 Vers une version effective du théorème de Morales-Ramis-Simó

→ Travaux avec Aparicio^{47 48} [AMW12, AMW11] et [AMW13]

En vue d'une version algorithmique du théorème de Morales-Ramis-Simó, nous considérons la situation suivante. Nous supposons que la matrice d'un système $Y' = AY$ est triangulaire inférieure par blocs comme suit :

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix} = A_{diag} + A_{sub} \text{ où } A_{diag} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ et } A_{sub} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous supposons que les blocs diagonaux $[A_i]$ sont sous forme réduite et que $Lie(A_i)$ est abélienne. Notre but est, sous ces hypothèses, de trouver une forme réduite de $[A]$. Si l'on sait faire cela, alors on peut appliquer de façon itérative le théorème de Morales-Ramis-Simó.

Pour la première variationnelle, il suffit de se ramener au cas où les $[A_i]$ sont irréductibles (si un facteur diagonal a une algèbre de Lie non abélienne, alors l'algèbre de Lie \mathfrak{g} n'est pas abélienne et l'on peut s'arrêter) ; pour les blocs diagonaux irréductibles, on peut (par exemple) utiliser le procédé de réduction de la partie précédente. Le procédé ci-dessus généralisera donc celui que nous avons élaboré dans [AMW12] (voir partie 6.2).

Pour la $(m + 1)$ -ième variationnelle, A_2 serait la matrice de la m -ième variationnelle (LVE_m) et $A_1 = \mathfrak{sym}^{m+1}(VE_1)$; avec les formules rappelées dans la partie 2, on voit que si P_1 est une matrice de réduction pour (VE_1) , alors $\text{Sym}^{m+1}(P_1)$ réduit $\mathfrak{sym}^{m+1}(VE_1)$; le fait que $[\text{Sym}^{m+1}(P_1)[\mathfrak{sym}^{m+1}(VE_1)]]$ soit réduite est une conséquence simple de notre caractérisation des formes réduites de la partie précédente. La réduction des blocs diagonaux est donc immédiate une fois que l'on a réduit (VE_1) ; en ce sens, (VE_1) contient une bonne part de la complexité de (LVE_m) .

Nous avons élaboré, avec Aparicio dans [AMW11], une stratégie de réduction (partielle) du bloc sous-diagonal B . Elle est transformée en algorithme dans notre article [AMW13] en préparation.

Les blocs diagonaux étant réduits, on montre qu'il existe (en adaptant le théorème de réduction de Kolchin et Kovacic) une matrice de réduction de la forme $P = Id + Q$ où $Q \in Lie(A_{sub}) \otimes_C k$.

Le produit de matrices sous-diagonales (par blocs) de la forme $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est toujours nul : $N_i \cdot N_j = 0$.

On a donc $N_i^2 = 0$ et $\exp(f(x)N_i) = Id + f(x)N_i$. De plus, si l'on note $\mathfrak{h} = Lie(A)$ et \mathfrak{h}_{sub} les matrices sous-diagonales (par blocs) dans \mathfrak{h} , on voit que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{sub}] \subset \mathfrak{h}_{sub}$, autrement dit \mathfrak{h}_{sub} est un idéal de \mathfrak{h} .

Avec l'écriture $P = Id + Q$, on a $P[A] = A + [A_{diag}, Q] - Q'$. On voit que la clé de la réduction réside dans l'action adjointe $\Psi := [A_{diag}, \bullet]$ de la partie diagonale sur la partie sous-diagonale \mathfrak{h}_{sub} . La stratégie consiste à chercher la « plus petite sous-algèbre » de \mathfrak{h}_{sub} que l'on puisse atteindre ; si l'on en trouve une (et que l'on sait prouver qu'elle est minimale), on a trouvé une forme réduite.

Notons M_1, \dots, M_s des générateurs de $Lie(A_{diag})$. Comme $Lie(A_{diag})$ est abélienne, les M_i commutent et l'identité de Jacobi montre que les actions adjointes $\Psi_i := [M_i, \bullet]$ commutent aussi ; il existe donc une base N_1, \dots, N_d de \mathfrak{h}_{sub} relativement à laquelle les Ψ_i sont simultanément triangulaires. Dans cette base, la matrice Ψ de l'action adjointe $[A_{diag}, \bullet]$ est triangulaire.

Maintenant un troisième ingrédient. Notons $A_{sub} = \sum \beta_i(x)N_i$ et supposons que $\Psi(N_1) = \sum \gamma_i(x)N_i$. Si l'équation $y' = \gamma_1(x)y + \beta_1(x)$ admet une solution $g_1(x) \in k$ alors $P := \exp(g_1 N_1) = Id + g_1(x)N_1$ vérifie $P[A] = A_{diag} + \tilde{\beta}_2(x)N_2 + \dots + \tilde{\beta}_d(x)N_d$ et $P[A]$ n'a plus de termes en N_1 . Comme Ψ est triangulaire, on peut itérer ces réductions partielles. C'est la stratégie que nous avons proposée dans [AMW11]. Cette stratégie est incomplète mais a l'avantage d'être particulièrement efficace (on ramène le problème à une triangularisation

47. <http://arxiv.org/abs/0912.3538>

48. <http://arxiv.org/abs/1206.6345>

simultanée et à des équations différentielles d'ordre 1 très simples); nous l'avons appliquée avec succès au problème de Hénon-Heiles dans la partie 8.6.

Dans [AMW13] (en cours de rédaction), nous transformons cette stratégie en algorithme. La méthode est une sorte de réduction de Jordan (différentielle) de l'action adjointe de A_{diag} sur \mathfrak{h}_{sub} . J'en donne l'esquisse en conservant les notations du paragraphe précédent.

Décomposons \mathfrak{h}_{sub} comme somme directe (décomposition isotypique) de sous-espaces V_j qui sont invariants sous tous les Ψ_i (c'est-à-dire que $\mathfrak{h}_{diag} \oplus V_j$ sera une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{h}). La restriction de Ψ_i à chaque V_j a un polynôme minimal de la forme $\Pi_{\Psi_i}(X) = (X - \lambda_{i,j})^{r_{i,j}}$. Le polynôme minimal de Ψ restreint à V_1 sera donc de la forme $\Pi_{\Psi}(X) = (X - \lambda(x))^r$, où $\lambda(x) = \sum_i \lambda_{i,1} a_i(x)$.

Soit N_1, \dots, N_t une base de $\ker \left(\left(\Psi|_{V_1} - \lambda(x) Id \right)^r / \left(\Psi|_{V_1} - \lambda(x) Id \right)^{r-1} \right)$. La partie sous-diagonale s'écrit $A_{sub} = \beta_1(x)N_1 + \dots + \beta_t(x)N_t + \dots$, où $\beta_i(x) \in k$. Dans l'esprit de [AMW11], on détermine la plus petite sous-algèbre de V_1 que l'on puisse atteindre par réduction en décrivant tous les $c_j \in C$ pour lesquels il existe $\gamma_l \in k$ tel que $\gamma'_l = \lambda \gamma_l + \sum_{j=1}^t c_j \beta_j$. C'est un problème facilement décidable (les paramètres apparaissent linéairement dans le second membre, voir [Sin91] ou [Bar99]); on voit par exemple que les γ_l sont les solutions rationnelles⁴⁹ de $L := LCLM((\partial - \beta'_j/\beta_j)_{j=1..t}) \cdot \partial$. On en déduit, comme dans notre procédé de [AMW11], une matrice de réduction de la forme $P^{(1)} := Id + \sum_l \gamma_l N_{\gamma_l}$ où les N_{γ_l} se déduisent des N_i par de l'algèbre linéaire.

On itère ensuite la méthode au sous-espace de niveau inférieur (comme dans la forme de Jordan). Par construction, le procédé donne la plus petite sous-algèbre de Lie de V_1 pouvant être obtenue par des réductions. En appliquant ce procédé à tous les V_j , on obtient la plus petite sous-algèbre que l'on puisse atteindre par des réductions. C'est naturellement une forme réduite.

En reprenant le début de cette partie, on voit que cette méthode donne donc un test effectif (et probablement assez efficace) du critère de non-intégrabilité de Morales-Ramis-Simó sur les variationnelles supérieures.

11.2 Perspectives

Le calcul de groupes de Galois de systèmes réductibles a longtemps semblé être un problème difficile. On trouve les avancées les plus profondes dans les travaux de Bertrand (par exemple [Ber90], [Ber01]). Ces résultats ont été utilisés par Berman et Singer pour proposer un bel algorithme de calcul du groupe de Galois d'un opérateur produit de deux opérateurs complètement réductibles ([BS99], amélioré par Berman dans [Ber02]). Le cas d'un produit de trois opérateurs complètement réductibles est traité par Hardouin dans [Har05a]; ce tour de force donnait l'impression qu'une solution générale serait hors de portée.

Néanmoins, il semble que l'approche par réduction suivie précédemment puisse se généraliser à tous les cas, c'est-à-dire (dans les notations ci-dessus) au cas d'un système $A := \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$ où les A_i sont sous forme réduite (mais sans hypothèse sur $Lie(A_i)$). C'est un travail en préparation, issu du travail avec Casale décrit dans le paragraphe suivant.

L'observation qui remplace l'hypothèse d'abélianité est que si $\tilde{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de \mathfrak{h} contenant \mathfrak{h}_{diag} , alors $\tilde{\mathfrak{h}} \otimes k$ est un espace invariant sous l'action adjointe $\Psi = [A_{diag}, \bullet]$. On détermine une décomposition isotypique de \mathfrak{h}_{sub} (pour l'action adjointe Ψ) via la factorisation du polynôme caractéristique. La détermination des réductions possibles passera maintenant par des solutions rationnelles de systèmes du type $Q' = A_1 Q - Q A_2 + \tilde{B}$ avec un second membre \tilde{B} linéairement paramétré (c'est encore décidable algorithmiquement, voir [Bar99]) et suivra, pour le reste, le même schéma que dans [AMW13].

En combinant cette technique avec nos projets en cours pour les cas semi-simples, il semble qu'à relativement court terme nous puissions espérer disposer d'une technique raisonnable de détermination de formes réduites

49. C'est la même équation que celle utilisée dans la partie 8.5 sur le problème de Hill, issu de notre article [AMW12].

de systèmes différentiels linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$, au moins de ceux dont le groupe de Galois est connexe. Nous aurions ainsi enfin une méthode pour déterminer l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Galois différentiel G sans calculer préalablement G (et on retrouverait le groupe *via* [dG09]).

Dans le travail avec Casale [CW13] (en cours de rédaction), nous utilisons les méthodes variationnelles pour tester l'irréductibilité (au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura, voir [Cas06b, Cas08, Cas09]) d'équations différentielles non-linéaires de la forme $y'' = f(x, y)$. En utilisant ses méthodes de groupoïdes de Galois-Malgrange et des classifications de Cartan, Casale a donné une caractérisation des champs de vecteurs correspondant à des équations réductibles. Il a de plus montré que le groupe de Galois des équations variationnelles s'interprète comme un sous-groupe du groupoïde de Malgrange ; sa dimension donne donc une borne inférieure pour celle du groupoïde. Nous en déduisons le critère d'irréductibilité suivant. Considérons les équations variationnelles (VE_m) le long d'une solution de $y'' = f(x, y)$; si le groupe de Galois de (VE_1) n'est pas résoluble et si le groupe de Galois d'une (VE_m) est de dimension au moins 7 alors l'équation est irréductible. Considérons la deuxième équation de Painlevé : $y'' = x y + 2y^3$. Le long de la solution $y = 0$, la première variationnelle est une équation d'Airy et nous trouvons une forme réduite de la troisième variationnelle. La dimension se lit aisément sur l'algèbre de Lie et vaut 8 ; il en découle que Painlevé II est irréductible.

Passons maintenant à des perspectives à plus long terme. Une approche que l'on retrouve dans les conversations de quelques spécialistes (dont l'auteur de ces lignes) est de considérer le point de vue « symétries » là où l'approche Morales-Ramis-Simó regarde des intégrales premières (il y a une correspondance naturelle entre les deux dans le cas hamiltonien) ; la linéarisation des intégrales premières non dégénérées donne des solutions rationnelles de (VE_1) , la linéarisation des symétries donne des éléments de l'*eigenring*. Cette observation simple est à développer ; elle s'étend naturellement aux cas non-hamiltoniens et probablement à des systèmes d'EDP (avec des formes réduites d'EDP D -finies). C'est un axe de travail à l'état embryonnaire.

La façon de déterminer des formes réduites d'équations variationnelles le long d'une courbe présente des analogies (encore imparfaites) avec les procédés de formes normales autour d'un point singulier (beaucoup plus développées). Nous avons vu que la réduction de (VE_1) induit des réductions sur les blocs diagonaux de (LVE_m) ; ceci s'interprète facilement si l'on pense la matrice P_1 de réduction de (VE_1) comme un changement de variable linéaire dans le hamiltonien (ce qui le transforme en hamiltonien non-autonome) ; la réduction du bloc sous-diagonal dans (VE_2) s'interprète alors comme changement de variable quadratique dans ce hamiltonien non-autonome et l'analogie avec les procédés de calcul de formes normales (de Poincaré-Dulac) émerge. Cette ligne de recherche est l'objet d'un projet qui démarre et qui s'inscrit dans un projet plus large (aux contours encore flous) : mieux comprendre ce que l'on peut lire de la dynamique avec ces méthodes variationnelles.

En passant à la limite où toutes les variationnelles sont réduites, cette suite de changements de variables donne un hamiltonien non-autonome, écrit sous forme de série mais dont les germes d'intégrales premières le long de la solution particulière sont à coefficients constants (en utilisant [AMBSW11] et la caractérisation des formes réduites dans [AMCW13]).

Une autre direction est de comparer les méthodes variationnelles - par exemple sous l'angle des formes réduites - avec les méthodes développées dans le cas de la complète intégrabilité algébrique (a.c.i) par Adler, Moerbeke et Vanhaecke ([Van10] pour une introduction, [Van01],[AvMV04]). Il s'agirait de comprendre l'apport éventuel des méthodes variationnelles dans le cadre de l'intégrabilité algébrique et de les comparer notamment avec les techniques par séries de Laurent proposées dans [AvMV04] pour tester ces propriétés.

Un axe de travail intrigant est d'inspecter ce que nous disent les formes réduites sur la forme des solutions, par exemple d'étudier dans quel cas on peut obtenir des formules de type Wei-Norman à partir des formes réduites. Procédons par analogie avec le cas local. Supposons que le système $Y' = AY$ soit singulier régulier en $x = 0$; on a alors une matrice fondamentale de solutions locale de la forme $\hat{y} = \hat{\phi}x^\Lambda$ où $\hat{\phi}$ est une matrice de séries formelles et Λ est sous forme de Jordan; la forme normale locale correspondante est $Z' = \frac{1}{x}\Lambda Z$. La diagonale de Λ donne des x^α dans les solutions, la partie nilpotente donne des logarithmes. On lit donc les ingrédients des solutions locales dans la forme normale locale du système. De façon analogue, notre preuve de réduction dans [AMW11] (parties 5.4 et 5.5) montre que, une fois que l'on a une forme réduite (dans le cas réductible à diagonale abélienne), les blocs de Jordan de l'action adjointe induisent des intégrales itérées dans les solutions, ce sont des dilogarithmes dans [AMW11]. Généraliser ces observations pour obtenir des procédés de résolution (généralisant les formules de Wei-Norman) guidés par la forme réduite devrait donner une meilleure compréhension des solutions de systèmes différentiels linéaires - et donner des idées pour caractériser les « bonnes » formes réduites. Il semble que cela systématiserait la technique de preuve employée par Simó et Martínez dans [MS09, MS11]. C'est un programme à long terme.

Le traitement direct des systèmes différentiels linéaires, sans les transformer en équations mais en utilisant activement leur structure, est maintenant une spécificité de notre équipe et les travaux, présents et futurs, décrits ici ont pour ambition d'y contribuer, du triple point de vue de la théorie, du logiciel et des applications. Ces trois aspects se nourrissent mutuellement et donnent de belles applications qui, en retour, éclairent les mathématiques à travers d'utiles observations et conjectures, dans une fructueuse harmonie.

Références

- [AHARBSD13] Primitivo B. Acosta-Humánez, Martha Alvarez-Ramírez, David Blázquez-Sanz, and Joaquín Delgado. Non-integrability criterium for normal variational equations around an integrable subsystem and an example : the Wilberforce spring-pendulum. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(3) :965–986, 2013. [32](#)
- [AHBS08] Primitivo Acosta-Humánez and David Blázquez-Sanz. Non-integrability of some Hamiltonians with rational potentials. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10(2-3) :265–293, 2008. [19](#)
- [AHBSVC09] Primitivo B. Acosta-Humánez, David Blázquez-Sanz, and Camilo A. Vargas-Contreras. On Hamiltonian potentials with quartic polynomial normal variational equations. *Nonlinear Stud.*, 16(3) :299–313, 2009. [19](#)
- [AHMRW11] Primitivo B. Acosta-Humaney, Juan J. Morales-Ruiz, and Jacques-Arthur Weil. Galoisian approach to integrability of schrödinger equation. *Reports on Mathematical Physics*, 67(3) :305 – 374, 2011. [19](#)
- [AHP12] Primitivo B. Acosta-Humánez and Chara Pantazi. Darboux integrals for Schrödinger planar vector fields via Darboux transformations. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 8 :Paper 043, 26, 2012. [20](#)
- [AMBSW11] Ainhoa Aparicio-Monforte, Moulay A. Barkatou, Sergi Simon, and Jacques-Arthur Weil. Formal first integrals along solutions of differential systems i. In *Proceedings of the 36th international symposium on Symbolic and algebraic computation*, ISSAC '11, pages 19–26, New York, NY, USA, 2011. ACM. [14](#), [36](#), [45](#)
- [AMCW13] Ainhoa Aparicio Monforte, Élie Compoint, and Jacques-Arthur Weil. A characterization of reduced forms of linear differential systems. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 217(8) :1504–1516, March 2013. [12](#), [39](#), [40](#), [41](#), [42](#), [45](#)
- [AMW11] Ainhoa Aparicio-Monforte and Jacques-Arthur Weil. A reduction method for higher order variational equations of hamiltonian systems. In *Symmetries and Related Topics in Differential and Difference Equations*, volume 549 of *Contemporary Mathematics*, pages 1–15, Providence, RI, September 2011. Amer. Math. Soc. [30](#), [35](#), [43](#), [44](#), [46](#)
- [AMW12] Ainhoa Aparicio-Monforte and Jacques-Arthur Weil. A reduced form for linear differential systems and its application to integrability of hamiltonian systems. *Journal of Symbolic Computation*, 47(2) :192 – 213, 2012. [28](#), [34](#), [43](#), [44](#)
- [AMW13] Ainhoa Aparicio-Monforte and Jacques-Arthur Weil. Liouville integrability : an effective morales-ramis-simo theorem. In preparation, 2013. [43](#), [44](#)
- [Aud01] Michèle Audin. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, volume 8 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2001. [27](#), [31](#)
- [Aud02] Michèle Audin. Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens (d’après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis, . . .). *Astérisque*, (282) :Exp. No. 884, viii, 113–135, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. [27](#), [31](#)
- [Aud08] Michèle Audin. *Hamiltonian systems and their integrability*, volume 15 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. Translated from the 2001 French original by Anna Pierrehumbert, Translation edited by Donald Babbitt. [27](#), [31](#)

- [AvMV04] Mark Adler, Pierre van Moerbeke, and Pol Vanhaecke. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, volume 47 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. [45](#)
- [Bar99] Moulay A. Barkatou. On rational solutions of systems of linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :547–567, 1999. [14](#), [18](#), [36](#), [44](#)
- [Bax82] Rodney J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1982. [20](#)
- [BBH88] Frits Beukers, W. Dale Brownawell, and Gert Heckman. Siegel normality. *Ann. of Math. (2)*, 127(2) :279–308, 1988. [15](#)
- [BBH⁺09] A. Bostan, S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, J.-A. Weil, and N. Zenine. Globally nilpotent differential operators and the square Ising model. *J. Phys. A*, 42(12) :125206, 50, 2009. [17](#), [20](#), [21](#), [22](#)
- [BBH⁺10] A. Bostan, S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, J.-A. Weil, N. Zenine, and N. Abarenkova. Renormalization, isogenies, and rational symmetries of differential equations. *Adv. Math. Phys.*, page 44p, 2010. [20](#), [21](#), [22](#)
- [BBH⁺11] A. Bostan, S. Boukraa, S. Hassani, M. van Hoeij, J.-M. Maillard, J.-A. Weil, and N. Zenine. The Ising model : from elliptic curves to modular forms and Calabi-Yau equations. *J. Phys. A*, 44(4) :045204, 44, 2011. [20](#), [21](#), [22](#)
- [BCCW13] Alin Bostan, Guillaume Chèze, Thomas Cluzeau, and Jacques-Arthur Weil. Efficient algorithms for computing rational first integrals and darboux polynomials of planar polynomial vector fields. October 2013. [37](#)
- [BCEB09] Moulay A. Barkatou, Thomas Cluzeau, and Carole El Bacha. Algorithms for regular solutions of higher-order linear differential systems. In *ISSAC 2009—Proceedings of the 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 7–14. ACM, New York, 2009. [18](#)
- [BCEB11] Moulay A. Barkatou, Thomas Cluzeau, and Carole El Bacha. Simple forms of higher-order linear differential systems and their applications in computing regular solutions. *J. Symbolic Comput.*, 46(6) :633–658, 2011. [18](#)
- [BCEBW12] Moulay A. Barkatou, Thomas Cluzeau, Carole El Bacha, and Jacques-Arthur Weil. Computing closed form solutions of integrable connections. In *Proceedings of the 36th international symposium on Symbolic and algebraic computation, ISSAC '12*, New York, NY, USA, 2012. ACM. [14](#), [17](#), [18](#)
- [BCR90] Alberto Baider, Richard C. Churchill, and David L. Rod. Monodromy and nonintegrability in complex hamiltonian systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2 :451–481, 1990. 10.1007/BF01054043. [27](#)
- [BCRS96] A. Baider, R. C. Churchill, D. L. Rod, and M. F. Singer. On the infinitesimal geometry of integrable systems. In *Mechanics day (Waterloo, ON, 1992)*, volume 7 of *Fields Inst. Commun.*, pages 5–56. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. [27](#)
- [BCS05] Alin Bostan, Thomas Cluzeau, and Bruno Salvy. Fast algorithms for polynomial solutions of linear differential equations. In *ISSAC'05*, pages 45–52 (electronic). ACM, New York, 2005. [17](#)
- [BCW05] Moulay A. Barkatou, Thomas Cluzeau, and Jacques-Arthur Weil. Factoring partial differential systems in positive characteristic. In *Differential equations with symbolic computation*, Trends Math., pages 213–238, Basel, 2005. Birkhäuser. With an appendix by Marius van der Put. [17](#), [18](#)

- [BD79] F. Baldassarri and B. Dwork. On second order linear differential equations with algebraic solutions. *Amer. J. Math.*, 101(1) :42–76, 1979. [11](#)
- [BEB13] Moulay A. Barkatou and Carole El Bacha. On k -simple forms of first-order linear differential systems and their computation. *J. Symbolic Comput.*, 54 :36–58, 2013. [18](#)
- [Ber86] Daniel Bertrand. Théorie de galois différentielle. (cours de dea, notes de r. lardon), Université de Paris VI, 1986. [9](#)
- [Ber90] D. Bertrand. Extensions de D -modules et groupes de Galois différentiels. In *p -adic analysis (Trento, 1989)*, volume 1454 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–141. Springer, Berlin, 1990. [44](#)
- [Ber92] Daniel Bertrand. Groupes algébriques et équations différentielles linéaires. *Astérisque*, (206) :Exp. No. 750, 4, 183–204, 1992. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92. [9](#), [42](#)
- [Ber01] D. Bertrand. Unipotent radicals of differential Galois group and integrals of solutions of inhomogeneous equations. *Math. Ann.*, 321(3) :645–666, 2001. [44](#)
- [Ber02] Peter Berman. Calculating the Galois group of $Y' = AY + B$, $Y' = AY$ completely reducible. *J. Symbolic Comput.*, 33(6) :887–898, 2002. [44](#)
- [Ber04] Maint Berkenbosch. *Algorithms and Moduli Spaces for Differential Equations*. PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 2004. [11](#)
- [Beu92] Frits Beukers. Differential Galois theory. In *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, pages 413–439. Springer, Berlin, 1992. [9](#)
- [Beu00] Frits Beukers. The maximal differential ideal is generated by its invariants. *Indag. Math. (N.S.)*, 11(1) :13–18, 2000. [41](#)
- [BHM⁺06] S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, B. M. McCoy, J.-A. Weil, and N. Zenine. Painlevé versus Fuchs. *J. Phys. A*, 39(39) :12245–12263, 2006. [20](#)
- [BHM⁺07a] S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, B. M. McCoy, W. P. Orrick, and N. Zenine. Holonomy of the Ising model form factors. *J. Phys. A*, 40(1) :75–111, 2007. [21](#)
- [BHM⁺07b] S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, B. M. McCoy, J.-A. Weil, and N. Zenine. Fuchs versus Painlevé. *J. Phys. A*, 40(42) :12589–12605, 2007. [20](#)
- [BHMW13] S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, and J.-A. Weil. Differential algebra on lattice green and calabi-yau operators. 2013. [20](#), [21](#), [23](#)
- [BHMZ07a] S. Boukraa, S. Hassani, J.-M. Maillard, and N. Zenine. Landau singularities and singularities of holonomic integrals of the Ising class. *J. Phys. A*, 40(11) :2583–2614, 2007. [21](#)
- [BHMZ07b] Salah Boukraa, Saoud Hassani, Jean-Marie Maillard, and Nadjah Zenine. From holonomy of the Ising model form factors to n -fold integrals and the theory of elliptic curves. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 3 :Paper 099, 43, 2007. [21](#)
- [BK09] Alin Bostan and Manuel Kauers. Automatic classification of restricted lattice walks. In *21st International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2009)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AK, pages 201–215. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2009. [17](#)
- [BK10] Alin Bostan and Manuel Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9) :3063–3078, 2010. With an appendix by Mark van Hoeij. [17](#)
- [BMW97] Manuel Bronstein, Thom Mulders, and Jacques-Arthur Weil. On symmetric powers of differential operators. In *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Kihei, HI)*, pages 156–163 (electronic), New York, 1997. ACM. [11](#), [12](#)

- [Bou99] Delphine Boucher. About the polynomial solutions of homogeneous linear differential equations depending on parameters. In *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Vancouver, BC)*, pages 261–268 (electronic), New York, 1999. ACM. [28](#)
- [Bou00] Delphine Boucher. Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(5) :391–394, 2000. [31](#)
- [Bou05] Delphine Boucher. Non complete integrability of a magnetic satellite in circular orbit. In *ISSAC'05*, pages 53–60 (electronic). ACM, New York, 2005. [31](#)
- [Bou06] Delphine Boucher. Non complete integrability of a satellite in circular orbit. *Port. Math. (N.S.)*, 63(1) :69–89, 2006. [31](#)
- [BP98] M. A. Barkatou and E. Pflügel. On the equivalence problem of linear differential systems and its application for factoring completely reducible systems. In *Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Rostock)*, pages 268–275 (electronic), New York, 1998. ACM. [14](#), [42](#)
- [Bro92] Manuel Bronstein. On solutions of linear ordinary differential equations in their coefficient field. *J. Symbolic Comput.*, 13(4) :413–439, 1992. [13](#)
- [BS99] P. H. Berman and M. F. Singer. Calculating the Galois group of $L_1(L_2(y)) = 0$, L_1, L_2 completely reducible operators. *J. Pure Appl. Algebra*, 139(1-3) :3–23, 1999. Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998). [44](#)
- [BS09] Alin Bostan and Éric Schost. Fast algorithms for differential equations in positive characteristic. In *ISSAC 2009—Proceedings of the 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 47–54. ACM, New York, 2009. [17](#)
- [BSMR10] David Blázquez-Sanz and Juan José Morales-Ruiz. Differential Galois theory of algebraic Lie-Vessiot systems. In *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials*, volume 509 of *Contemp. Math.*, pages 1–58. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [40](#)
- [BV83] Donald G. Babbitt and V. S. Varadarajan. Formal reduction theory of meromorphic differential equations : a group theoretic view. *Pacific J. Math.*, 109(1) :1–80, 1983. [42](#)
- [BvdW04] Frits Beukers and Alexa van der Waall. Lamé equations with algebraic solutions. *J. Differential Equations*, 197(1) :1–25, 2004. [11](#)
- [BvHW03] Maint Berkenbosch, Mark van Hoeij, and Jacques-Arthur Weil. Recent algorithms for solving second-order differential equations. In F. Chyzak, editor, *Algorithms Seminar 2001–2002*, pages 43–46. INRIA, 2003. [11](#), [12](#)
- [BW03] Delphine Boucher and Jacques-Arthur Weil. Application of J.-J. Morales and J.-P. Ramis’ theorem to test the non-complete integrability of the planar three-body problem. In *From combinatorics to dynamical systems*, volume 3 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 163–177, Berlin, 2003. de Gruyter. [27](#), [30](#), [31](#)
- [BW07a] Delphine Boucher and Jacques-Arthur Weil. About the non-integrability in the friedmann-robertson-walker cosmological model. *Braz. J. Phys.*, 37(2a) :398–405, 2007. [30](#), [32](#)
- [BW07b] Delphine Boucher and Jacques-Arthur Weil. Cours ”linear differential equations, differential galois groups, first integrals of differential systems.”. In *JNCF 2007 (Journées Nationales de Calcul Formel)*, page 50, Novembre 2007. [9](#)
- [Cas06a] Guy Casale. Enveloppe galoisienne d’une application rationnelle de \mathbb{P}^1 . *Publ. Mat.*, 50(1) :191–202, 2006. [22](#)
- [Cas06b] Guy Casale. Irréductibilité de la première équation de Painlevé. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(2) :95–98, 2006. [45](#)

- [Cas08] Guy Casale. Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité. *Comment. Math. Helv.*, 83(3) :471–519, 2008. [45](#)
- [Cas09] Guy Casale. Une preuve galoisienne de l’irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé. *Astérisque*, (323) :83–100, 2009. [45](#)
- [CdIOGP91] Philip Candelas, Xenia C. de la Ossa, Paul S. Green, and Linda Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nuclear Phys. B*, 359(1) :21–74, 1991. [23](#)
- [CDMP10] Guy Casale, Guillaume Duval, Andrzej J. Maciejewski, and Maria Przybylska. Integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potentials of degree zero. *Phys. Lett. A*, 374(3) :448–452, 2010. [30](#)
- [CDR96] Richard C. Churchill, Joaquin Delgado, and David L. Rod. The spring-pendulum system and the Riemann equation. In *New trends for Hamiltonian systems and celestial mechanics (Cocoyoc, 1994)*, volume 8 of *Adv. Ser. Nonlinear Dynam.*, pages 97–103. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996. [32](#)
- [CH11] Teresa Crespo and Zbigniew Hajto. *Algebraic groups and differential Galois theory*, volume 122 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. [9](#)
- [Chu02] Richard C. Churchill. Differential algebraic techniques in Hamiltonian dynamics. In *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, pages 219–255. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002. [27](#)
- [CK99] David A. Cox and Sheldon Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry*, volume 68 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. [23](#)
- [CK12] Thierry Combot and Christoph Koutschan. Third order integrability conditions for homogeneous potentials of degree -1 . *J. Math. Phys.*, 53(8) :082704, 26, 2012. [30](#)
- [CL02] Antoine Chambert-Loir. Théorèmes d’algébricité en géométrie diophantienne (d’après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky). *Astérisque*, (282) :Exp. No. 886, viii, 175–209, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. [17](#)
- [Clu03] Thomas Cluzeau. Factorization of differential systems in characteristic p . In *Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 58–65 (electronic), New York, 2003. ACM. [17](#), [18](#)
- [CMS05] William J. Cook, Claude Mitschi, and Michael F. Singer. On the constructive inverse problem in differential Galois theory. *Comm. Algebra*, 33(10) :3639–3665, 2005. [40](#)
- [CNT90] J Casasayas, A Nunes, and N B Tuffillaro. Swinging Atwood’s machine : integrability and dynamics. *J. Phys.*, 51 :1693–1702, 1990. [33](#)
- [Com96] Élie Compoint. *Equations différentielles, relations algébriques et invariants*. PhD thesis, Paris VI, 1996. [41](#)
- [Com12] Thierry Combot. Non-integrability of the equal mass n -body problem with non-zero angular momentum. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 114(4) :319–340, 2012. [31](#)
- [Com13a] Thierry Combot. Integrability conditions at order 2 for homogeneous potentials of degree -1 . *Nonlinearity*, 26(1) :95–120, 2013. [29](#), [30](#)
- [Com13b] Thierry Combot. A note on algebraic potentials and Morales-Ramis theory. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 115(4) :397–404, 2013. [30](#)
- [CR91] Richard C. Churchill and David L. Rod. On the determination of Ziglin monodromy groups. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(6) :1790–1802, 1991. [27](#)

- [CR08] Guy Casale and Julien Roques. Dynamics of rational symplectic mappings and difference Galois theory. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, pages Art. ID rnn 103, 23, 2008. [22](#)
- [CRS95] R. C. Churchill, D. L. Rod, and M. F. Singer. Group-theoretic obstructions to integrability. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(1) :15–48, 1995. [27](#)
- [CS99] Elie Compoint and Michael F. Singer. Computing Galois groups of completely reducible differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :473–494, 1999. Differential algebra and differential equations. [41](#)
- [CSS05] L. A. A. Coelho, J. E. F. Skea, and T. J. Stuchi. On the non-integrability of a class of hamiltonian cosmological models. *Brazilian Journal of Physics*, 35 :1048 – 1049, 12 2005. [33](#)
- [CSS08] L. A. A. Coelho, J. E. F. Skea, and T. J. Stuchi. On the integrability of Friedmann-Robertson-Walker models with conformally coupled massive scalar fields. *J. Phys. A*, 41(7) :075401, 15, 2008. [33](#)
- [CvdPW10] Elie Compoint, Marius van der Put, and Jacques-Arthur Weil. Effective descent for differential operators. *J. Algebra*, 324(1) :146–158, 2010. [15](#), [16](#)
- [CvH04] Thomas Cluzeau and Mark van Hoeij. A modular algorithm for computing the exponential solutions of a linear differential operator. *J. Symbolic Comput.*, 38(3) :1043–1076, 2004. [17](#)
- [CvH06] Thomas Cluzeau and Mark van Hoeij. Computing hypergeometric solutions of linear recurrence equations. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 17(2) :83–115, 2006. [17](#)
- [CW04] Elie Compoint and Jacques-Arthur Weil. Absolute reducibility of differential operators and Galois groups. *J. Algebra*, 275(1) :77–105, 2004. [15](#), [16](#)
- [CW13] G. Casale and J.-A. Weil. Irreducibility of order two nonlinear differential equations. Décembre 2013. [45](#)
- [dG00] Willem A. de Graaf. *Lie algebras : theory and algorithms*, volume 56 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000. [41](#), [42](#)
- [dG09] Willem A. de Graaf. Constructing algebraic groups from their Lie algebras. *J. Symbolic Comput.*, 44(9) :1223–1233, 2009. [45](#)
- [Dir29] Paul Dirac. Quantum mechanics of many-electron systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 123 :714–733, 1929. [25](#)
- [DM09] Guillaume Duval and Andrzej J. Maciejewski. Jordan obstruction to the integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potentials. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(7) :2839–2890, 2009. [30](#)
- [DM11] Guillaume Duval and Andrzej J. Maciejewski. Taylor obstruction to the integrability of homogeneous potentials of degree two. An application of higher order variational equations. In *Algebraic methods in dynamical systems*, volume 94 of *Banach Center Publ.*, pages 173–185. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011. [30](#)
- [DNF85] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. 2^e partie*. Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics]. “Mir”, Moscow, 1985. Géométrie et topologie des variétés. [Geometry and topology of manifolds], Translated from the Russian by Vladimir Kotliar, Reprint of the 1982 translation. [40](#)
- [DVH10] Lucia Di Vizio and Charlotte Hardouin. Courbures, groupes de Galois génériques et D -groupe de Galois d’un système aux q -différences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(17-18) :951–954, 2010. [42](#)
- [Fak97] Winfried Fakler. On second order homogeneous linear differential equations with Liouvillian solutions. *Theoret. Comput. Sci.*, 187(1-2) :27–48, 1997. Computer algebra (Saint-Louis, 1996). [11](#)

- [FdG07] Claus Fieker and Willem A. de Graaf. Finding integral linear dependencies of algebraic numbers and algebraic Lie algebras. *LMS J. Comput. Math.*, 10 :271–287, 2007. [39](#)
- [FG10] Antoni Ferragut and Hector Giacomini. A new algorithm for finding rational first integrals of polynomial vector fields. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 9(1-2) :89–99, 2010. [37](#)
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics. [13](#)
- [Gor01] Alain Goriely. *Integrability and nonintegrability of dynamical systems*, volume 19 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001. [27](#)
- [GS84] Ranjan K. Ghosh and Robert E. Shrock. Exact expressions for diagonal correlation functions in the $d = 2$ Ising model. *Phys. Rev. B (3)*, 30(7) :3790–3794, 1984. [20](#)
- [GS06] Philippe Gille and Tamás Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology*, volume 101 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006. [16](#)
- [Gut09] Anthony J. Guttmann. Lattice Green functions and Calabi-Yau differential equations. *J. Phys. A*, 42(23) :232001, 6, 2009. [23](#)
- [Gut10] Anthony J. Guttmann. Lattice Green’s functions in all dimensions. *J. Phys. A*, 43(30) :305205, 26, 2010. [23](#)
- [Har05a] Charlotte Hardouin. Calcul du groupe de Galois du produit de trois opérateurs différentiels complètement réductibles. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(6) :349–352, 2005. [44](#)
- [Har05b] Julia Hartmann. On the inverse problem in differential Galois theory. *J. Reine Angew. Math.*, 586 :21–44, 2005. [40](#)
- [Hil78a] G. W. Hill. Researches in the Lunar Theory. *Amer. J. Math.*, 1(1) :5–26, 1878. [34](#)
- [Hil78b] G. W. Hill. Researches in the Lunar Theory. *Amer. J. Math.*, 1(2) :129–147, 1878. [34](#)
- [Hil78c] G. W. Hill. Researches in the Lunar Theory. *Amer. J. Math.*, 1(3) :245–260, 1878. [34](#)
- [HS07] E. Horozov and T. Stoyanova. Non-integrability of some Painlevé VI-equations and dilogarithms. *Regul. Chaotic Dyn.*, 12(6) :622–629, 2007. [36](#)
- [Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. [13](#)
- [Ito85] Hidekazu Ito. Nonintegrability of Hénon-Heiles system and a theorem of Ziglin. *Kodai Math. J.*, 8(1) :120–138, 1985. [26](#), [35](#)
- [JL07] Lourdes Juan and Arne Ledet. Equivariant vector fields on non-trivial SO_n -torsors and differential Galois theory. *J. Algebra*, 316(2) :735–745, 2007. [40](#)
- [JM80] Michio Jimbo and Tetsuji Miwa. Studies on holonomic quantum fields. XVII. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 56(9) :405–410, 1980. [20](#)
- [Kap57] Irving Kaplansky. *An introduction to differential algebra.* Actualités Sci. Ind., No. 1251 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, No. 5. Hermann, Paris, 1957. [9](#)
- [Kat82] Nicholas M. Katz. A conjecture in the arithmetic theory of differential equations. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :203–239, 1982. [42](#)
- [Kat87] Nicholas M. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.*, 87(1) :13–61, 1987. [42](#)
- [Kol73] E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups.* Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. [9](#)
- [Kou13] Christoph Koutschan. Lattice Green functions of the higher-dimensional face-centered cubic lattices. *J. Phys. A*, 46(12) :125005, 14, 2013. [23](#)

- [Kov69] J. Kovacic. The inverse problem in the Galois theory of differential fields. *Ann. of Math.* (2), 89 :583–608, 1969. [39](#)
- [Kov71] J. Kovacic. On the inverse problem in the Galois theory of differential fields. II. *Ann. of Math.* (2), 93 :269–284, 1971. [39](#)
- [Kov86] Jerald J. Kovacic. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 2(1) :3–43, 1986. [11](#)
- [LSWZ06] Ziming Li, Michael F. Singer, Min Wu, and Dabin Zheng. A recursive method for determining the one-dimensional submodules of Laurent-Ore modules. In *ISSAC 2006*, pages 220–227. ACM, New York, 2006. [18](#)
- [MAB⁺11] Barry M. McCoy, Michael Assis, Salah Boukraa, Saoud Hassani, Jean-Marie Maillard, William P. Orrick, and Nadjah Zenine. The saga of the Ising susceptibility. In *New trends in quantum integrable systems*, pages 287–306. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2011. [20](#)
- [Mag94] Andy R. Magid. *Lectures on differential Galois theory*, volume 7 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. [9](#)
- [Mai07] Robert S. Maier. Algebraic hypergeometric transformations of modular origin. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(8) :3859–3885, 2007. [22](#)
- [McC10] Barry M. McCoy. *Advanced statistical mechanics*, volume 146 of *International Series of Monographs on Physics*. Oxford University Press, Oxford, 2010. [20](#), [21](#), [22](#)
- [MK12] Ainhoa Aparicio Monforte and Manuel Kauers. Formal Laurent Series in Several Variables. *Expositiones Mathematicae*, pages ?–?, 2012. to appear. [36](#)
- [MM12] B. M. McCoy and J-M. Maillard. The importance of the ising model. *Prog. Theor. Phys.* 127 (2012), 791-817, 2012. [20](#)
- [MP05] Andrzej J. Maciejewski and Maria Przybylska. Darboux points and integrability of Hamiltonian systems with homogeneous polynomial potential. *J. Math. Phys.*, 46(6) :062901, 33, 2005. [30](#)
- [MP06] Andrzej J. Maciejewski and Maria Przybylska. Integrability of homogeneous systems. Results and problems. In *Global integrability of field theories*, pages 267–288. Univ. Karlsruhe, Karlsruhe, 2006. [30](#)
- [MP10] A. J. Maciejewski and M. Przybylska. Partial integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potential. *Regul. Chaotic Dyn.*, 15(4-5) :551–563, 2010. [30](#)
- [MP11] Andrzej J. Maciejewski and Maria Przybylska. Overview of the differential Galois integrability conditions for non-homogeneous potentials. In *Algebraic methods in dynamical systems*, volume 94 of *Banach Center Publ.*, pages 221–232. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011. [30](#)
- [MPS02] Andrzej J. Maciejewski, Maria Przybylska, and Marek Szydłowski. Living in a non-integrable universe. *Gravit. Cosmol.*, 8(suppl. 2) :93–99, 2002. [32](#)
- [MPW63] Elliott W. Montroll, Renfrey B. Potts, and John C. Ward. Correlations and spontaneous magnetization of the two-dimensional Ising model. *J. Mathematical Phys.*, 4 :308–322, 1963. [19](#), [20](#)
- [MPW04] Andrzej J. Maciejewski, Maria Przybylska, and Jacques-Arthur Weil. Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem. *J. Phys. A*, 37(7) :2579–2597, 2004. [30](#), [32](#)
- [MR99] Juan J. Morales Ruiz. *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, volume 179 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. [25](#), [27](#), [32](#), [35](#)
- [MR00] J. J. Morales-Ruiz. Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the differential Galois theory. *Regul. Chaotic Dyn.*, 5(3) :251–272, 2000. [27](#)

- [MRR01a] Juan J. Morales-Ruiz and Jean Pierre Ramis. Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. I, II. *Methods Appl. Anal.*, 8(1) :33–95, 97–111, 2001. [29](#), [32](#), [35](#), [36](#)
- [MRR01b] Juan J. Morales-Ruiz and Jean Pierre Ramis. A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential. *Methods Appl. Anal.*, 8(1) :113–120, 2001. [30](#)
- [MRR10] Juan J. Morales-Ruiz and Jean-Pierre Ramis. Integrability of dynamical systems through differential Galois theory : a practical guide. In *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials*, volume 509 of *Contemp. Math.*, pages 143–220. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [27](#), [28](#), [31](#), [36](#)
- [MRRS07] Juan J. Morales-Ruiz, Jean-Pierre Ramis, and Carles Simo. Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(6) :845–884, 2007. [25](#), [26](#), [35](#), [36](#)
- [MRS96] Juan J. Morales-Ruiz and Carles Simó. Non-integrability criteria for Hamiltonians in the case of Lamé normal variational equations. *J. Differential Equations*, 129(1) :111–135, 1996. [26](#), [35](#)
- [MRS98] Juan J. Morales-Ruiz and Carles Simó. A correction to the paper : “Non-integrability criteria for Hamiltonians in the case of Lamé normal variational equations” [*J. Differential Equations* **129** (1996), no. 1, 111–135 ; MR1400798 (97e :58091)]. *J. Differential Equations*, 144(2) :477–478, 1998. [26](#)
- [MRS09] Juan J. Morales-Ruiz and Sergi Simon. On the meromorphic non-integrability of some N -body problems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 24(4) :1225–1273, 2009. [31](#)
- [MRSS05] Juan J. Morales-Ruiz, Carles Simó, and Sergi Simon. Algebraic proof of the non-integrability of Hill’s problem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(4) :1237–1256, 2005. [34](#)
- [MS93] J. J. Morales and C. Simó. On the solvability of the Lamé equation. In *International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Barcelona, 1991)*, pages 759–762. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993. [26](#)
- [MS94] J. J. Morales and C. Simó. Picard-Vessiot theory and Ziglin’s theorem. *J. Differential Equations*, 107(1) :140–162, 1994. [26](#)
- [MS96] C. Mitschi and M. F. Singer. Connected linear groups as differential Galois groups. *J. Algebra*, 184(1) :333–361, 1996. [40](#)
- [MS02] Claude Mitschi and Michael F. Singer. Solvable-by-finite groups as differential Galois groups. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 11(3) :403–423, 2002. [12](#), [40](#)
- [MS09] R. Martínez and C. Simó. Non-integrability of Hamiltonian systems through high order variational equations : summary of results and examples. *Regul. Chaotic Dyn.*, 14(3) :323–348, 2009. [29](#), [32](#), [34](#), [46](#)
- [MS11] Regina Martínez and Carles Simó. Non-integrability of the degenerate cases of the swinging Atwood’s machine using higher order variational equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 29(1) :1–24, 2011. [29](#), [34](#), [46](#)
- [NCT95] A Nunes, J Casasayas, and N B Tufillaro. Periodic orbits of the integrable swinging Atwood’s machine. *Amer. J. Phys.*, 63 :121–6, 1995. [33](#)
- [Ngu09] An Khuong Nguyen. On d -solvability for linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 44(5) :421–434, 2009. [16](#)
- [NvdP10] K. A. Nguyen and M. van der Put. Solving linear differential equations. *Pure Appl. Math. Q.*, 6(1, Special Issue : In honor of John Tate. Part 2) :173–208, 2010. [16](#), [42](#)
- [Ons44] Lars Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev. (2)*, 65 :117–149, 1944. [20](#)

- [Ons96] Lars Onsager. *The collected works of Lars Onsager*, volume 17 of *World Scientific Series in 20th Century Physics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996. With commentary, Edited by P. C. Hemmer, H. Holden and S. Kjelstrup Ratkje. [20](#)
- [PPR⁺10] O. Pujol, J. P. Pérez, J. P. Ramis, C. Simó, S. Simon, and J. A. Weil. Swinging atwood machine : experimental and numerical results, and a theoretical study. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 239(12) :1067–1081, 2010. [29](#), [30](#), [33](#)
- [Put95] Marius van der Put. Differential equations in characteristic p . *Compositio Math.*, 97(1-2) :227–251, 1995. Special issue in honour of Frans Oort. [17](#)
- [Put96] Marius van der Put. Reduction modulo p of differential equations. *Indag. Math. (N.S.)*, 7(3) :367–387, 1996. [17](#)
- [Put98] Marius van der Put. Recent work on differential Galois theory. *Astérisque*, (252) :Exp. No. 849, 5, 341–367, 1998. Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98. [9](#)
- [Put01] Marius van der Put. Grothendieck’s conjecture for the Risch equation $y' = ay + b$. *Indag. Math. (N.S.)*, 12(1) :113–124, 2001. [17](#)
- [Put02] Marius van der Put. Differential Galois theory, universal rings and universal groups. In *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, pages 171–189. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002. [9](#)
- [Put05] Marius van der Put. Galois theory and algorithms for linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 39(3-4) :451–463, 2005. [9](#)
- [Rón90] Lajos Rónyai. Computing the structure of finite algebras. *J. Symbolic Comput.*, 9(3) :355–373, 1990. [16](#)
- [Roq13] Julien Roques. Arithmetic properties of mirror maps associated with Gauss hypergeometric equations. *Monatsh. Math.*, 171(2) :241–253, 2013. [23](#)
- [Row01] J.K. Rowling. *Harry Potter and the Goblet of Fire*. Scholastic, 2001. [9](#)
- [Sad05] S. T. Sadetov. On algebraic integrals of the Hill problem and restricted circular planar three-body problem on a level of energy. *Regul. Chaotic Dyn.*, 10(3) :323–332, 2005. [34](#)
- [Sal12a] Vladimir Salnikov. Effective algorithm of analysis of integrability via the ziglin’s method, 2012. [29](#)
- [Sal12b] Vladimir Salnikov. On numerical approaches to the analysis of topology of the phase space for dynamical integrability, 2012. [29](#)
- [Sal13] Vladimir Salnikov. Integrability of the double pendulum – the ramis’ question, 2013. [29](#)
- [Sim13a] Sergi Simon. Evidence and conditions for non-integrability in the friedmann-robertson-walker hamiltonian, 2013. [29](#), [33](#), [36](#)
- [Sim13b] Sergi Simon. Linearised higher variational equations, 2013. [26](#), [29](#), [33](#), [36](#)
- [Sin81] M.F. Singer. Liouvillian solutions of n^{th} order linear differential equations. *Amer. J. Math.*, 103 :661–682, 1981. [11](#), [13](#), [14](#)
- [Sin88] Michael F. Singer. Algebraic relations among solutions of linear differential equations : Fano’s theorem. *Amer. J. Math.*, 110(1) :115–143, 1988. [16](#)
- [Sin90] Michael F. Singer. An outline of differential Galois theory. In *Computer algebra and differential equations*, Comput. Math. Appl., pages 3–57. Academic Press, London, 1990. [9](#)
- [Sin91] Michael F. Singer. Liouvillian solutions of linear differential equations with Liouvillian coefficients. *J. Symbolic Comput.*, 11(3) :251–273, 1991. [44](#)
- [Sin93] Michael F. Singer. Moduli of linear differential equations on the Riemann sphere with fixed Galois groups. *Pacific J. Math.*, 160(2) :343–395, 1993. [14](#)

- [Sin96] Michael F. Singer. Testing reducibility of linear differential operators : a group-theoretic perspective. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7(2) :77–104, 1996. [14](#), [42](#)
- [Sin99] M.F. Singer. *Direct and inverse problems in differential Galois theory*, pages 527–554. Selected Works of Ellis Kolchin with Commentary , Bass, Buium, Cassidy, eds., American Mathematical Society, 1999. [9](#)
- [Sin09] Michael F. Singer. Introduction to the Galois theory of linear differential equations. In *Algebraic theory of differential equations*, volume 357 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–82. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009. [9](#)
- [SSM06] Tomasz Stachowiak, Marek Szydłowski, and Andrzej J. Maciejewski. Nonintegrability of density perturbations in the Friedmann-Robertson-Walker universe. *J. Math. Phys.*, 47(3) :032502, 11, 2006. [33](#)
- [SU93a] Michael F. Singer and Felix Ulmer. Galois groups of second and third order linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 16(1) :9–36, 1993. [11](#), [15](#), [16](#)
- [SU93b] Michael F. Singer and Felix Ulmer. Liouvillian and algebraic solutions of second and third order linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 16(1) :37–73, 1993. [11](#), [13](#), [15](#), [16](#)
- [SU95] Michael F. Singer and Felix Ulmer. Necessary conditions for Liouvillian solutions of (third order) linear differential equations. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 6(1) :1–22, 1995. [14](#)
- [SU97] Michael F. Singer and Felix Ulmer. Linear differential equations and products of linear forms. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118 :549–563, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996). [13](#), [14](#), [15](#)
- [TAG84] N B Tuffillaro, T A Abbott, and D J Griffiths. Swinging Atwood’s Machine. *Amer. J. Phys.*, 52 :895–903, 1984. [33](#)
- [TNC88] N B Tuffillaro, A Nunes, and J Casasayas. Unbounded orbits of a swinging Atwood’s machine. *Amer. J. Phys.*, 56 :1117–20, 1988. [33](#)
- [Tsy00] Alexei Tsygvintsev. La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(3) :241–244, 2000. [30](#)
- [Tsy01a] Alexei Tsygvintsev. The meromorphic non-integrability of the three-body problem. *J. Reine Angew. Math.*, 537 :127–149, 2001. [30](#)
- [Tsy01b] Alexei Tsygvintsev. Sur l’absence d’une intégrale première méromorphe supplémentaire dans le problème plan des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(2) :125–128, 2001. [31](#)
- [Tuf82] N B Tuffillaro. *Smiles and teardrops*. PhD thesis, 1982. a thesis presented to the division of Mathematics and Natural Science, Reed College. [33](#)
- [Tuf85] N B Tuffillaro. Motions of a swinging Atwood’s machine. *J. Physique*, 46 :1495–500, 1985. [33](#)
- [Tuf86] N B Tuffillaro. Integrable motion of a swinging Atwood’s machine. *Amer. J. Phys.*, 54 :142–3, 1986. [33](#)
- [Tuf94] N B Tuffillaro. Teardrop and heart orbits of a swinging Atwood’s machine. *Amer. J. Phys.*, 62 :231–3, 1994. [33](#)
- [UW95] Felix Ulmer and Jacques-Arthur Weil. On kovacic’s algorithm. *Sigsam Bulletin*, 29(2), April 1995. [11](#)
- [UW96] Felix Ulmer and Jacques-Arthur Weil. Note on Kovacic’s algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 22(2) :179–200, 1996. [11](#), [12](#), [15](#)

- [UW09] Felix Ulmer and Jacques-Arthur Weil. Some methods to solve linear differential equations in closed form. In *Algebraic theory of differential equations*, volume 357 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 83–110, Cambridge, 2009. Cambridge Univ. Press. [9](#)
- [Van01] Pol Vanhaecke. *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, volume 1638 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001. [45](#)
- [Van10] Pol Vanhaecke. Intégrabilité algébrique : une introduction. *Afr. Diaspora J. Math. (N.S.)*, 9(2) :1–16, 2010. [45](#)
- [vdP99] Marius van der Put. Galois theory of differential equations, algebraic groups and Lie algebras. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :441–472, 1999. Differential algebra and differential equations. [9](#)
- [vdPS03] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. [9](#), [12](#), [13](#), [39](#), [40](#)
- [vdPU00] Marius van der Put and Felix Ulmer. Differential equations and finite groups. *J. Algebra*, 226(2) :920–966, 2000. [14](#)
- [vHRUW99] Mark van Hoeij, Jean-François Ragot, Felix Ulmer, and Jacques-Arthur Weil. Liouvillian solutions of linear differential equations of order three and higher. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :589–609, 1999. [14](#), [15](#)
- [vHvdP06] Mark van Hoeij and Marius van der Put. Descent for differential modules and skew fields. *J. Algebra*, 296(1) :18–55, 2006. [16](#)
- [vHW97] Mark van Hoeij and Jacques-Arthur Weil. An algorithm for computing invariants of differential Galois groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118 :353–379, 1997. [12](#), [13](#), [14](#), [15](#), [36](#), [41](#)
- [vHW05] Mark van Hoeij and Jacques-Arthur Weil. Solving second order differential equations with klein’s theorem. In *ISSAC 2005 (Beijing)*, New York, 2005. ACM. [11](#), [12](#)
- [Wei94] Jacques-Arthur Weil. The use of the special semi-groups for solving differential equations. In *Proceedings of the international symposium on Symbolic and algebraic computation, ISSAC ’94*, pages 341–347, New York, NY, USA, 1994. ACM. [36](#)
- [Wei95] Jacques-Arthur Weil. *Constantes et polynômes de Darboux en algèbre différentielle : applications aux systèmes différentiels linéaires*. PhD thesis, École polytechnique, 1995. [36](#)
- [Wei97] Jacques-Arthur Weil. Calcul formel pour les équations différentielles linéaires. In C. Sabbah, editor, *Journées X-UPS 97*. École Polytechnique, 1997. [9](#)
- [Wei01] Jacques-Arthur Weil. Cours ”introduction to differential algebra and differential galois theory”. In *École CIMPA ”Théorie du contrôle et systèmes intégrables” (Hanoi)*, 26 Novembre – 7 décembre, 2001 2001. [9](#)
- [WGPOJA95] Jacques-Arthur Weil, Ariane Germa-Péladan, François Ollivier, and Shih Jirung-Albert. Quelques approches algébriques effectives des phénomènes différentiels. In F. Murat & J.L Colliot-Thélène, editor, *Images des Mathématiques 95*. Éditions du CNRS, 1995. [9](#)
- [WMTB76] Tai Tsun Wu, Barry M. McCoy, Craig A. Tracy, and Eytan Barouch. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional ising model : Exact theory in the scaling region. *Phys. Rev. B*, 13 :316–374, Jan 1976. [20](#), [21](#)
- [WN63] James Wei and Edward Norman. Lie algebraic solution of linear differential equations. *J. Mathematical Phys.*, 4 :575–581, 1963. [39](#)
- [WN64] J. Wei and E. Norman. On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 :327–334, 1964. [39](#)

- [Yan52] C. N. Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. *Physical Rev. (2)*, 85 :808–816, 1952. [20](#)
- [Yos87] Haruo Yoshida. A criterion for the nonexistence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential. *Phys. D*, 29(1-2) :128–142, 1987. [26](#), [30](#)
- [Yos88] Haruo Yoshida. Non-integrability of the truncated toda lattice hamiltonian at any order. *Communications in Mathematical Physics*, 116 :529–538, 1988. 10.1007/BF01224900. [26](#)
- [Yos00a] H. Yoshida. Justification of Painlevé analysis for Hamiltonian systems by differential Galois theory. *Phys. A*, 288(1-4) :424–430, 2000. [27](#)
- [Yos00b] H. Yoshida. Painlevé analysis for Hamiltonian systems and its justification by differential Galois theory. In *Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That : Twenty Years after NEEDS '79 (Gallipoli, 1999)*, pages 343–349, River Edge, NJ, 2000. World Sci. Publishing. [27](#)
- [ZBHM04] N. Zenine, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. The Fuchsian differential equation of the square lattice Ising model $\chi^{(3)}$ susceptibility. *J. Phys. A*, 37(41) :9651–9668, 2004. [22](#)
- [ZBHM05a] N. Zenine, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Ising model susceptibility : the Fuchsian differential equation for $\chi^{(4)}$ and its factorization properties. *J. Phys. A*, 38(19) :4149–4173, 2005. [22](#)
- [ZBHM05b] N. Zenine, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Square lattice Ising model susceptibility : connection matrices and singular behaviour of $\chi^{(3)}$ and $\chi^{(4)}$. *J. Phys. A*, 38(43) :9439–9474, 2005. [22](#)
- [ZBHM05c] N. Zenine, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Square lattice Ising model susceptibility : series expansion method and differential equation for $\chi^{(3)}$. *J. Phys. A*, 38(9) :1875–1899, 2005. [22](#)
- [ZBHM06] N. Zenine, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. Differential Galois groups of high order Fuchsian ODE's. In *Differential geometry and physics*, volume 10 of *Nankai Tracts Math.*, pages 490–502. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006. [22](#)
- [Zig82] S. L. Ziglin. Branching of solutions and nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics. i. *Functional Analysis and Its Applications*, 16 :181–189, 1982. 10.1007/BF01081586. [26](#)
- [Zig83] S. L. Ziglin. Branching of solutions and the nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics. ii. *Functional Analysis and Its Applications*, 17 :6–17, 1983. 10.1007/BF01083174. [26](#)