



HAL
open science

Espace-temps globalement hyperboliques conformément plats

Clara Rossi Salvemini

► **To cite this version:**

Clara Rossi Salvemini. Espace-temps globalement hyperboliques conformément plats. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Avignon, 2012. Français. NNT : 2012AVIG0408 . tel-00934781

HAL Id: tel-00934781

<https://theses.hal.science/tel-00934781>

Submitted on 22 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'AVIGNON ET DES PAYS DU VAUCLUSE
LABORATOIRE D'ANALYSE NON LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université d'Avignon et des pays
du Vaucluse**

Spécialité : Mathématiques

Titre:

ESPACE-TEMPS GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES CONFORMÉMENT PLATS

présentée et soutenue publiquement

par

Clara ROSSI SALVEMINI

le 24/05/2012

Directeur de thèse :

Thierry BARBOT

Thèse soutenue au vu des rapports de

Francesco BONSANTE

Sorin DUMITRESCU

Jury

Marie-Claude ARNAUD-DELABRIÈRE

Thierry BARBOT

Francesco BONSANTE

Virginie CHARETTE

Sorin DUMITRESCU

Charles FRANCES

Examineur

Directeur de thèse

Rapporteur

Examineur

Rapporteur

Examineur

Remerciements

Je remercie avant tout mon directeur de thèse Thierry Barbot, pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de diriger cette thèse.

Pendant ces années c'est avec beaucoup de passion et d'enthousiasme qu'il a encadré mon travail. Les nombreuses et enrichissantes conversations que j'ai eu avec lui m'ont permis d'apprendre de très belles mathématiques. Je le remercie pour le soutien et l'encouragement qu'il m'a donné dans les moments plus difficiles, pour l'amitié qu'il m'a toujours accordé, pour la passion qu'il a su me transmettre et pour la patience avec laquelle il m'a suivie dans la rédaction de cette thèse. Sa rigueur et son sens esthétique m'ont beaucoup apporté et resteront un guide et une référence pour mon travail futur.

Je remercie Sorin Dumitrescu et Francesco Bonsante pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. En particulier c'est grâce à Sorin Dumitrescu, qui avait déjà dirigé mon stage de ma deuxième année de master, que j'ai connu mon directeur de thèse. Je remercie Francesco Bonsante pour l'intérêt et l'attention avec lesquels il a lu mon travail, et pour la gentillesse avec laquelle il a apporté ses remarques. Ma reconnaissance est d'autant plus grande que ses travaux en géométrie lorentzienne ont été pour moi un modèle important.

Je remercie Charles Frances pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et pour les conversations utiles et intéressantes que j'ai pu avoir avec lui au cours de ces années. Ses travaux mathématiques ont souvent été une référence et une source d'inspiration pour mon travail.

Je remercie Marie-Claude Arnaud-Delabrière et Virginie Charette pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. En particulier Marie-Claude a été pour moi une référence dans la vie du laboratoire d'Avignon, je la remercie pour son aide dans la didactique et son encouragement en général.

Je remercie tous les membres du Laboratoire d'Analyse non Linéaire et Géométrie, leur gentillesse et leur disponibilité ont fait d'Avignon un endroit agréable et conviviale où préparer une thèse. En particulier je tiens à remercier Mehdi et Mohammed, mes deux compagnons de chemin, leur amitié et bonne humeur ont

été de la plus grande importance.

Un très très grand merci mes parents et mon frère pour m'avoir toujours encouragé et soutenu pendant ces années. Sans leur affection profonde, leur écoute et leur patience ces années aurait été bien plus difficiles.

Je remercie profondément aussi tous les amis proches et lointains qui ont été à mes côtés et qui ont fait de ces années des années heureuses.

Je dédie les pages qui suivent à ma famille et à tous ces que j'aime.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	1
1 Hyperbolicité globale	3
2 Exemples	5
3 Maximalité	7
4 Espace-temps conformes	10
5 Ombres	12
1 Espace-temps	15
1 Généralités sur les espace-temps	15
2 Espace-temps modèle à courbure constante	17
2.1 Espace de Minkowski	18
2.2 Espace de Sitter	18
2.3 Espace anti-de Sitter	19
3 Courbes causales, futur et passé d'un point	20
3.1 Lemme de Gauss et voisinages convexes	21
3.2 Courbes causales topologiques	24
3.3 Courbes causales inextensibles	26
4 Ensembles achronaux, acausaux, edgeless	27
5 Principe de causalité et causalité forte	31
5.1 La causalité en tant que relation d'ordre	33
5.2 Espaces causaux et topologie d'Alexandrov	34
6 Espace-temps globalement hyperboliques	35
6.1 Développement de Cauchy d'un sous-ensemble achronal	37
6.2 Hypersurfaces de Cauchy et Théorème de Geroch	39
6.3 Exemples	42
7 Espace-temps statiques	44
8 Espace-temps causalement continus et distinguants	46

2	Espace-temps conformément plats	49
1	Causalité et applications conformes	49
1.1	Rigidité des applications conformes et théorème de Liouville	51
2	L'espace d'Einstein	52
2.1	Le modèle projectif de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ et la sphère conforme \mathbb{S}^n	53
2.2	L'espace $Ein_{1,n}$ comme bord conforme de l'espace $Ad\mathbb{S}_{1,n}$	56
2.3	Groupe conforme de $Ein_{1,n}$ et théorème de Liouville lorentzien	57
2.4	Structures causales de $Ein_{1,n}$ et $\widetilde{Ein}_{1,n}$	58
2.5	Sous-ensembles achronaux et acausaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$	66
2.6	Groupe conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}$	66
2.7	Plongements conformes dans l'espace d' Einstein	67
3	Espace-temps conformément plats et (G, X)-structures	75
3.1	(G, X)-structures	75
3.2	Espace-temps conformément plats	77
3	Extensions maximales	81
1	Généralités sur les extensions maximales d'un espace-temps	81
1.1	Problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein	81
1.2	Extension maximale dans une catégorie rigide	83
1.3	Extension maximale conforme et conformément plate	86
2	Cauchy-plongements	88
3	Existence et unicité de l'extension C_0 -maximale	90
3.1	Existence	90
3.2	Unicité	96
4	Ombres	99
1	Ombres	100
2	L'ensemble Ω	101
3	Ombres sur les ensembles achronaux edgeless	107
4	Exemples et premières applications	109
5	Espace-temps de Sitter standards	112
5.1	Dualité entre les points de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ et les boules de la sphère \mathbb{S}^n	113
5.2	Construction des espace-temps de Sitter standards	116
5	Frontière causale et C-maximalité	125
1	Frontière causale	125
2	Frontière causale et maximalité	130
2.1	Frontière causale et maximalité du développement de Cau- chy d'un ensemble achronal edgeless.	131
3	C_0 -Maximalité des espace-temps à courbure constante	132

3.1	Espace-temps CGHM plats	133
3.2	Espace-temps CGHM Anti de Sitter	136
3.3	Espace-temps CGHM localement De Sitter	139
6	Injectivité de l'application développante	145
1	Espace-temps simplement connexes maximaux	146
2	Injectivité de D	147
3	Extension de D à la frontière causale de \widetilde{M}	152
7	C_0-extension maximale : une construction abstraite	161
1	L'espace $\mathcal{B}(S)$	162
2	C_0 -maximalité et C -maximalité	168
	Bibliographie	175

Introduction

Un peu d'histoire : une nouvelle conception de l'espace et du temps

Avec la théorie de la relativité une nouvelle conception de l'espace et du temps a été introduite. Cette conception, ayant besoin d'instruments mathématiques appropriés, a été la motivation pour l'étude des variétés lorentziennes, et même du concept moderne de variété, dont l'idée avait déjà été implicitement introduite par Riemann un demi siècle avant.

Dans la théorie Newtonienne l'espace et le temps sont indépendants, l'espace étant l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et le temps la droite réelle \mathbb{R} . La trajectoire d'une particule dans l'espace est alors une courbe $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . Sa vitesse est donnée par le vecteur dc/dt : chaque particule a donc une vitesse définie de façon absolue. De plus les vitesses suivent la règle de la somme vectorielle : si par exemple un observateur voyage à une vitesse \vec{v} et une particule voyage à une vitesse \vec{w} , la vitesse de la particule dans le système de l'observateur est égale à $\vec{w} - \vec{v}$.

L'espace-temps est donc dans ce cas simplement la variété produit $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, et les évènements sont les points de cette variété. La projection $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le temps Newtonien absolu, qui mesure les intervalles de temps entre deux évènements. La trajectoire d'une particule dans l'espace-temps est alors juste une sous-variété plongée γ de dimension 1 telle que $T|_\gamma$ est un difféomorphisme sur un intervalle de \mathbb{R} . Dans ce contexte le passé d'un évènement $p = (x, t)$ est donc l'ensemble des points $p' = (x', t')$ qui ont la coordonnée t' inférieure à t .

Avec la théorie de la relativité cette vision de l'espace-temps change radicalement, Minkowski écrivait :

"Dorénavant les concepts d'espace et de temps séparés sont condamnés à disparaître comme de simples ombres, seulement une sorte d'union des deux pourra préserver une réalité indépendante¹."

1. "From henceforth, space by itself, and time by itself, have vanished into the merest shadows and only a kind of blend of the two exists in its own right." Cité dans J R Newman, The World

En effet dans la théorie de la relativité il n'y a pas de concept de temps et d'espace absolus, mais ils dépendent de l'observateur. De même il est impossible d'établir la vitesse d'une particule de façon absolue, sauf pour la lumière qui dans le vide a une vitesse constante et indépendante de l'observateur. Le fait qu'aucune particule ne puisse dépasser la vitesse de la lumière implique que seulement certaines trajectoires dans l'espace-temps sont admissibles.

C'est à cette nouvelle vision de l'espace-temps que l'on doit la naissance de la théorie de la causalité pour les variétés lorentziennes, en tant qu'instrument mathématique naturel pour les modèles.

L'exemple le plus simple de variété lorentzienne est l'espace de Minkowski, $\mathbb{R}^{1,3}$, qui est l'espace modèle pour la théorie de la relativité restreinte. Dans une variété lorentzienne on peut en fait classifier les vecteurs de l'espace tangent selon le signe de leur "norme" pour la métrique lorentzienne² : de *type temps* si cette quantité est négative, de *type espace* si elle est positive, de *type lumière* si elle est nulle. Les trajectoires admissibles pour une particule sont alors celles dont le vecteur tangent est de type temps ou lumière (autrement dit *causal*) en tout point de la courbe. Comme on suppose que la lumière dans le vide suit des trajectoires géodésiques de vecteur tangent de type lumière, on obtient naturellement que dans un espace-temps la vitesse d'une particule, mesurée par tous les observateurs, ne dépassera pas la vitesse de la lumière.

Dans chaque espace tangent à une variété lorentzienne le cône des vecteurs causaux a deux composantes connexes. Si on peut choisir de façon continue une de ces deux composantes, on dit que la variété lorentzienne est *chronologiquement orientable* et on appelle telle composante la composante des vecteurs causaux futurs. Une variété lorentzienne orientée et chronologiquement orientée est dite un *espace-temps*.

Dans un espace-temps on peut donc parler de courbes causales futures ou passées (celles dont les vecteurs tangents sont dans la composante connexe future ou passée du cône de vecteur causaux). On définit alors le futur (passé) d'un point p_0 comme l'ensemble des points liés à p_0 par des courbes causales futures (passées). Il est clair qu'en général deux points différents ont deux futurs et passés différents. La structure du passé et du futur des points d'un espace-temps M déterminent ce qu'on appelle la *structure causale* de M . Le Chapitre 1 est dédié à l'étude de cette structure, avec une attention particulière au cas où M est globalement hyperbolique.

of Mathematics (New York 1956).

2. c'est-à-dire leur produit scalaire avec eux même.

1 Hyperbolicité globale

L'essentiel de l'étude de la causalité des variétés lorentziennes a été développée pendant les années '70 par Carter, Geroch, Hawking, Kronheimer, Penrose, Sachs, Seifert, Wu et autres et collecté dans les livres fondamentaux de Beem-Ehrlich [35], Hawking [33] et O'Neil [42], principalement pour élaborer des modèles d'espace-temps en accord avec la théorie de la relativité général.

Un des buts de ces travaux a été d'établir une hiérarchie des propriétés causales d'espace-temps. En haut de cette hiérarchie il y a l'hyperbolicité globale. Cette propriété est tellement forte qu'elle conditionne la topologie de l'espace-temps. C'est aussi le cadre habituel où se placent les physiciens, souvent même de manière implicite. En fait, la plupart des modèles cosmologiques sont globalement hyperboliques.

Dans la théorie de la relativité générale l'espace-temps est modélisé par une variété lorentzienne qui vérifie une certaine équation tensorielle : la fameuse *équation d'Einstein*. Cette équation lie les propriétés physiques de l'espace, exprimées par le tenseur d'impulsion-énergie T , avec ses propriétés géométriques et métriques, représentées par une certaine expression de la courbure.

$$Ric_g - 1/2C(g)g = 8\pi T \quad (1)$$

Ici g est la métrique, Ric_g la courbure de Ricci et $C(g)$ la courbure scalaire. Pour arriver à un problème d'équations aux dérivées partielles bien posé il faut introduire des hypothèses supplémentaires. En fait l'équation ne donne aucune information par exemple sur la topologie de la variété solution.

Une des façon de résoudre ce problème est de supposer que l'espace-temps solution est globalement hyperbolique, avec une topologie donnée à priori, et de résoudre un problème de Cauchy associé. Ce point de vue est adopté dans les travaux de Choquet Bruhat et Geroch dans [15] et [14].

Dans la théorie Newtonienne, où l'espace est modélisé par l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et le temps par la droite réelle \mathbb{R} , le futur d'un point $p_0 = (x_0, t_0)$ est l'ensemble des points de l'espace-temps dont la coordonnée temporelle est strictement supérieure à t_0 . Il s'agit donc du demi-espace $\mathbb{R}^3 \times]t_0, \infty[$. Cela veut dire que pour prédire un évènement futur il faut connaître la situation de l'univers entier à l'instant présent.

Dans la théorie de la relativité générale la situation est différente. En fait, comme on a vu, les seuls évènements du présent qui peuvent influencer un évènement dans un point p du futur sont ceux qui sont dans les points du présent liés pas une courbe causale au point p . Cela implique qu'étant donnée une région S de l'univers à l'instant présent (ou plus généralement un sous-ensemble *achronal* de l'espace-temps, i.e. un sous-ensemble dont les points ne sont pas liés par des courbe de temps), on peut définir la région de l'espace-temps dont les évènements sont

complètement déterminés pas les évènements de S : on l'appellera le *développement de Cauchy futur* de S ou, suivant la terminologie originaire de Geroch [27], le *domaine de dépendance futur* de S , noté $\mathcal{D}^+(S)$.

De façon rigoureuse $\mathcal{D}^+(S)$ est défini comme étant l'ensemble des points de l'espace-temps tel que toute courbe causale passée inextensible issue d'un point de $\mathcal{D}^+(S)$ intersecte S . On remarque qu'en particulier $S \subset \mathcal{D}^+(S)$.

De la même façon on peut définir le développement Cauchy passé de S , $\mathcal{D}^-(S)$, comme l'ensemble des points tels que toute courbe causale future inextensible issue d'un de ces points, rencontre S . Encore une fois on a $S \subset \mathcal{D}^-(S)$. On définit alors le *développement de Cauchy* de S ou *domaine de dépendance*, comme $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}^+(S) \cup \mathcal{D}^-(S)$.

Définition 1.1. *Un espace-temps M est globalement hyperbolique s'il existe un sous-ensemble achronal S tel que $M = \mathcal{D}(S)$*

En d'autres termes un espace-temps est globalement hyperbolique si on peut trouver un sous-ensemble achronal de points S dont les évènements déterminent complètement tous les évènements de l'espace-temps. On appelle S *hypersurface de Cauchy* de M . La terminologie vient du fait qu'on peut considérer S comme étant la donnée initiale d'un problème de Cauchy associé à l'équation (1) - on expliquera ce point plus en détail dans la suite de cette introduction.

On a vu que dans l'espace-temps Newtonien on a la projection $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui permet de mesurer les intervalles de temps entre deux évènements. De manière plus générale, si M est un espace-temps quelconque, on appelle *fonction temps* une application $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante le long de toute courbe causale future. Si de plus t est surjective restreinte à toute courbe causale inextensible, alors t est dite *fonction temps de Cauchy*. Il est clair que les hypersurfaces de niveau d'une fonction temps de Cauchy sont des hypersurfaces de Cauchy de M .

De plus une fonction temps de Cauchy donne une fibration localement triviale de M sur \mathbb{R} , ce qui implique :

Proposition 1.2. *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique, alors M est homéomorphe à $S \times \mathbb{R}$.*

Une autre définition de l'hyperbolicité globale est la suivante³ :

Définition 1.3. *Un espace-temps M est globalement hyperbolique si il est fortement causal et si pour tout point x, y de M l'intersection $J^+(x) \cap J^-(y)$, si non vide, est compacte.*

3. Nous avons reproduit ici la version la plus classique. D'après un article récent [8] on peut remplacer l'hypothèse *fortement causal* (Définition 5.4) par l'hypothèse un peu plus faible *causal* : un espace-temps est dit causal s'il n'a pas de courbe causale fermée.

L'équivalence entre la Définition 1.3 la Définition 1.1 est dû au théorème suivant :

Théorème 1.4 (Geroch [27]). *Soit M un espace-temps causal tel que pour tout points x, y l'intersection $J^+(x) \cap J^-(y)$, si non vide, est compacte. Alors il existe une fonction temps de Cauchy.*

L'hyperbolicité globale est l'hypothèse la plus forte qu'on puisse faire sur un espace-temps M . En fait il est assez remarquable que cette hypothèse implique, d'après la Proposition 1.2, que la topologie de M est déterminée par celle de toute hypersurface de Cauchy. La preuve de l'existence d'une fonction temps seulement continue est relativement élémentaire, mais l'existence d'une fonction temps *différentiable* est plus délicate. L'historique de la mise au point de cette preuve est émaillé de diverses erreurs et n'a abouti de manière totalement correcte qu'assez récemment ([22], [10], [7], [9] and [47]). Il est aussi remarquable que le Théorème 1.4 reste vrai dans un certain sens même dans le cas où la métrique lorentzienne est seulement continue, comme montré dans [16].

Le Théorème 1.4 peut être considéré comme étant une généralisation du Théorème de Hopf-Rinow. En effet : soit (S, ds^2) une variété Riemannienne, on considère la variété $M = S \times \mathbb{R}$ munie de la métrique lorentzienne $ds^2 - dt^2$. La projection sur le deuxième facteur est une fonction temps. La compacité dans M des $J^-(y) \cap J^+(x)$ équivaut à la compacité des boules fermées de (S, ds^2) . Le Théorème de Geroch assure alors que la projection sur le deuxième facteur restreinte à toute géodésique lumière de M est surjective. Or, les géodésiques lumières sont les courbes $t \rightarrow (c(t), t)$ où c est une géodésique de S . Ainsi, si les boules fermées de S sont compactes, (S, ds^2) est géodésiquement complète.

2 Exemples

Rappelons qu'une variété lorentzienne (M, g) est dite *conformément plate* si pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage U et un plongement $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ tel que, si $g_{1,n}$ est la métrique de $\mathbb{R}^{1,n}$, son tiré en arrière $\phi^*g_{1,n}$ est conformément équivalent à la métrique $g|_U$. Il s'avère que les quelques exemples d'espace-temps, globalement hyperboliques ou non, fondamentaux pour notre étude, sont tous conformément plats.

Comme en géométrie riemannienne les variétés lorentziennes à courbure constante sont conformément plates. Les trois espaces modèles à courbure constant sont : l'espace de Minkowski pour la courbure nulle, l'espace de Sitter pour la courbure positive et l'espace Anti de Sitter pour celle négative. Il s'agit des analogues lorentziens de l'espace Euclidien \mathbb{E}^n , la sphère \mathbb{S}^n et l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .

Il est simple de voir que l'espace de Minkowski est globalement hyperbolique : en

effet chaque hyperplan de type espace est une hypersurface de Cauchy. De plus, si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées telles que le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$ a norme lorentzienne négative, l'application $x \mapsto x_0$ est une fonction temps de Cauchy.

L'espace de Sitter de dimension $n + 1$, noté $dS_{1,n}$, est défini comme étant le lieu des points x de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ tels que $Q_{1,n+1}(x, x) = 1$, muni de la métrique induite g_{dS} . L'espace-temps de Sitter est difféomorphe à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ via l'application $(u, r) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \mapsto (\sinh(r), \cosh(r)u) \in dS_{1,n}$.

L'application $T : (u, r) \mapsto r \in \mathbb{R}$ est une fonction temps, car en effet il s'agit de la restriction à $dS_{1,n}$ de la fonction temps de Cauchy de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ qu'on a décrite auparavant. Comme les hypersurfaces de niveau de T sont compactes on obtient, d'après la Proposition 6.21, que T est une fonction temps de Cauchy et donc que $dS_{1,n}$ est globalement hyperbolique.

L'espace-temps *anti-de Sitter* de dimension $n + 1$, noté $AdS_{1,n}$, est le lieu des points x de $\mathbb{R}^{2,n}$ tel que $Q_{2,n}(x) = -1$, muni de la métrique induite par la forme quadratique de $\mathbb{R}^{2,n}$. Il est difféomorphe à $\mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1$ où \mathbb{D}^n désigne la boule ouverte de dimension n . Il n'est pas "causal" et donc *a fortiori* il n'est pas globalement hyperbolique. Même son revêtement universel $\widetilde{AdS}_{1,n}$, qui est causal, n'est pas globalement hyperbolique, comme on le montrera à la Section 2.7.

Tout espace-temps à courbure constante est localement modelé sur un de ces trois espaces modèles. Ils ont été très étudiés, notamment parce que ce sont des solutions exactes de l'équation d'Einstein pour $T = 0$. Nous disposons d'une description très satisfaisante de ces espace-temps dans le cas globalement hyperbolique et Cauchy-compact (i.e. les hypersurfaces de Cauchy sont compactes). Disons simplement ici, pour rester à un niveau assez élémentaire que dans le cas de la courbure négative ou nulle ce sont tous des quotients d'ouverts de l'espace modèle $\mathbb{R}^{1,n}$ ou $AdS_{1,n}$ par un groupe d'isométrie (comme nous le verrons plus tard, le cas localement de Sitter est plus subtil).

L'exemple fondamental dans le cas plat est le cône des vecteurs de type temps futurs de $\mathbb{R}^{1,n}$. Ce cône est difféomorphe à $\mathbb{D}^n \times \mathbb{R}^+$ où \mathbb{D}^n est le disque unitaire de dimension n . La métrique induite par l'espace de Minkowski s'écrit dans cette décomposition sous la forme $g := r g_{hyp} - dr^2$, où g_{hyp} est la métrique hyperbolique sur \mathbb{D}^n . En effet les nappes d'hyperboloïde $\{x \in \mathbb{R}^{1,n} / Q_{1,n}(x, x) = -r\}$ sont des copies de l'espace hyperbolique où la métrique a été rééchelonnée par un facteur r .

Si on multiplie la métrique g par r^{-1} et on reparamétrise par t de façon que $dt^2 = r^{-1} dr^2$ on obtient la métrique $g_{hyp} - dt^2$. On voit ainsi que la métrique $g_{hyp} - dt^2$ est conformément équivalente à la métrique plate g .

La décomposition topologique donnée par le Théorème 1.4 n'implique pas de décomposition métrique simple. En fait en général la métrique s'écrit dans le produit $S \times \mathbb{R}$ sous la forme :

$$g_t(x) - f(x, t)dt^2$$

où g_t est une famille de métriques Riemanniennes sur S et dt^2 la métrique standard sur \mathbb{R} , et f une fonction différentiable de $S \times \mathbb{R}$ à valeur dans \mathbb{R}^+ .

Une classe célèbre d'espace-temps pour lesquels la métrique s'écrit de façon simple est celle des espace-temps de Robertson-Walker : dans ces exemples, S est une variété de dimension 3, et les métriques g_t sont de la forme $f^2(t)d\sigma^2$, où $d\sigma^2$ est une métrique (indépendante de t) à courbure constante k , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Le produit $S \times I$ muni de la métrique $g := -dt^2 + f^2(t)d\sigma^2$ (et lorsque f satisfait une certaine équation différentielle que nous ne reproduisons pas ici car elle est inutile à notre propos) est appelé *espace-temps de Robertson-Walker*, et noté $M(k, f)$ (voir [42]). Ce sont des solutions exactes de l'équation d'Einstein dans le cas où on suppose que l'univers se comporte comme un fluide parfait ce qui conditionne la forme du tenseur d'impulsion énergie T . Les points du fluide représentent les galaxies. Les espace-temps de Robertson-Walker sont conformément plats. En effet :

$$g = -dt^2 + f^2(t)d\sigma^2 = f^2(t)\left(-\frac{dt^2}{f^2(t)} + d\sigma^2\right) = f^2(t)(dT^2 - d\sigma^2)$$

où T est une nouvelle coordonnée temporelle. Comme $d\sigma^2$ est une métrique à courbure constante k , $M(k, f)$ est localement conformément isométrique à $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$. Nous avons déjà observé précédemment que $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ est conformément plat ; il est encore plus évident que $\mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ est (conformément) plat, et il en est de même pour $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ comme nous le verrons plus tard.

3 Maximalité

Soient M et N deux espace-temps globalement hyperboliques. Un plongement isométrique $f : M \rightarrow N$ est dit un *Cauchy-plongement* s'il existe une hypersurface de Cauchy $S \subset M$ telle que $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de N . S'il existe un Cauchy-plongement $f : M \rightarrow N$ on dit que N *étend* M . Dans ce cas donc non seulement M peut être vue comme un ouvert de N mais N est une véritable extension de toute la structure causale de M .

On dit qu'un espace-temps globalement hyperbolique M est *maximal* si tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps est surjectif. On peut alors se demander si étant donné un espace-temps globalement hyperbolique on peut toujours trouver un espace-temps globalement hyperbolique maximal qui le contient, et si cette *extension maximale* est unique.

La réponse à cette question a été donnée dans les années '70 par Choquet-Bruhat et Geroch dans [15] pour les espace-temps solutions du problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein. En fait une façon de résoudre l'équation (1) est de supposer que l'espace-temps solution M soit globalement hyperbolique. Dans ce

cas on peut regarder le problème de Cauchy dont la donnée initiale est une variété riemannienne (S, h) de dimension n munie d'un $(2, 0)$ -tenseur symétrique II . On cherche alors une métrique lorentzienne g sur la variété $S \times \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation (1) pour un certain T donné à priori sur $S \times \mathbb{R}$, de sorte que II soit la deuxième forme fondamentale de l'hypersurface $S \times \{0\}$.

Il se trouve que h et II ne peuvent pas être données de façon indépendante. Dans le cas où $T = 0$ une condition nécessaire pour l'existence d'une solution est que h et II vérifient les *équations des contraintes* de la relativité générale (elles sont l'analogue des équations Gauss-Codazzi pour la géométrie riemannienne, pour plus de détails voir par exemple le chapitre 7 de [33]). En fait cette condition est aussi suffisante : dans [14] Geroch et Choquet-Bruhat montrent un théorème d'existence locale qui dit que pour toute donnée initiale (S, h, II) suffisamment régulière, où h et II vérifient les équations des contraintes, le problème de Cauchy pour $T = 0$ admet une solution. De plus tout couple de solutions sont isométriques sur un voisinage de l'hypersurface de Cauchy S . Il reste à comprendre si toute solution locale s'étend de manière unique en une solution maximale du problème de Cauchy. Dans [15] Choquet-Bruhat et Geroch prouvent :

Théorème 3.1. *Étant donnée une solution locale (M, g) du problème de Cauchy, il existe une solution maximale (M', g') du même problème qui étend (M, g) . La solution (M', g') est unique à isométrie près.*

Grâce au concept de Cauchy-plongement il n'est pas difficile d'adapter leurs méthodes pour montrer que ce résultat reste vrai dans d'autres catégories d'espace-temps que celle des solutions de l'équation d'Einstein. On appelle *catégorie* (Définition 1.9) d'espace-temps une classe \mathcal{C} d'espace-temps qui est stable par isométrie, par restriction et qui a la propriété que si M est recouvert par des ouverts U pour lesquels $(U, g|_U)$ appartient à \mathcal{C} alors (M, g) est dans \mathcal{C} .

La propriété clé de la catégorie des espace-temps solutions du problème de Cauchy, qui assure l'unicité dans le théorème 3.1, est la suivante : étant donnés deux espace-temps (M, g) et (N, h) solutions de l'équation d'Einstein, ainsi qu'une isométrie $f : I^\pm(p) \rightarrow I^\pm(q)$, où $p \in M$ et $q \in N$, alors f s'étend en une isométrie $\hat{f} : U \cup I^\pm(p) \rightarrow V \cup I^\pm(q)$, où U et V sont des voisinages de p et q . Une catégorie qui vérifie cette propriété est dite *rigide*. Il s'avère que le théorème 3.1 se généralise à toute catégorie rigide.

Théorème 1.12 : *Tout espace-temps globalement hyperbolique appartenant à une catégorie rigide \mathcal{C} admet une unique extension \mathcal{C} -maximale.*

Ici un espace-temps globalement hyperbolique M appartenant à une catégorie \mathcal{C} est dit *\mathcal{C} -maximal* si tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps appartenant à la catégorie \mathcal{C} est surjectif.

Un exemple typique de catégorie rigide d'espace-temps est la classe analytique :

celle où les espace-temps sont des variétés analytiques munies de métriques lorentziennes analytiques.

Un autre exemple de catégorie rigide est celle des espace-temps qui sont des (G, X) -variétés, où X est un espace-temps fixé et G le groupe des isométries de X qui préservent l'orientation et l'orientation chronologique. Nous parlons alors de (G, X) -catégorie. Ceci inclut les trois catégories d'espace-temps à courbure constante : les espaces-temps localement modelés sur l'espace de Minkowski, sur l'espace Anti de Sitter, sur l'espace de Sitter.

Les espace temps CGHM (Cauchy-Compact Globalement Hyperbolique Maximaux) localement modelés sur $\mathbb{R}^{1,n}$, $dS_{1,n}$, $AdS_{1,n}$ et qui sont maximaux dans leur catégorie respective sont aujourd'hui assez bien compris. Le début de ces travaux a été une prépublication de Mess, datant de 1990, qui n'a été publié que récemment ([41], commenté dans [38]). Dans cet article, parmi d'autres résultats intéressants, il y a une classification complète des espace-temps de dimension $2 + 1$ plats Cauchy-compacts en terme de lamination géodésiques mesurées. De plus Mess a utilisé cette correspondance et l'étude de la dynamique du groupe d'holonomie pour prouver la *Strong Cosmic Censorship Conjecture* de R. Penrose [43] dans le cas particulier des espace-temps plats Cauchy-compacts de dimension 3 : il prouve que tout espace-temps plat Cauchy-compact de dimension 3 dont le groupe d'holonomie a un point fixe dans $\mathbb{R}^{1,2}$, ou tel que la lamination géodésique mesurée associée n'a pas de feuille isolée, est $\mathbb{R}^{1,2}$ -maximal. Ce résultat s'étend sans beaucoup de changements aux cas des espace-temps localement $dS_{1,2}$ et $AdS_{1,2}$. D'autres preuves du fait que le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte ne peut pas agir proprement sur $\mathbb{R}^{1,2}$ tout entier ont été données récemment par Goldman-Margulis [30] et Labourie [39].

Toujours dans le cas plat on a les travaux de F. Bonsante ([11]) et T. Barbot ([3]) qui complètent la classification de Mess à toute dimension. Pour le cas des espace-temps CGHM de Sitter on a une classification complète en toute dimension donnée par Scannell dans [48]. Plus précisément, K. Scannell montre qu'il y a une correspondance biunivoque entre structures globalement hyperboliques localement de Sitter sur $S \times \mathbb{R}$ et structures riemanniennes conformément plates sur S . Cette théorie est en fait en un certain sens la duale de celle des bouts hyperboliques. Elle utilise notamment la métrique de Kulkarni-Pinkall introduite dans [20] pour les variétés riemanniennes conformément plates. Comme nous le verrons, notre thèse est en bien des points un prolongement naturel de celle de K. Scannell.

Le cas Anti de Sitter n'est pas encore totalement bien compris. Dans [41] Mess a prouvé que tout espace CGHM Anti de Sitter est le quotient d'un domaine convexe de $AdS_{1,n}$ par un sous-groupe discret d'isométries. De plus en dimension $2 + 1$ les représentations d'holonomie $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PO(2, 2) \approx PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ de ces espace-temps sont précisément les couples (ρ_L, ρ_R) de représentations fuchsienues, ce qui permet de paramétrer naturellement l'espace de ces espaces-temps

par le produit $Teich(S) \times Teich(S)$ de l'espace de Teichmüller par lui-même. Ce genre de résultats et leurs généralisations en dimension supérieure ont permis de répondre à diverses questions de nature géométriques sur ces espaces ([5], [4], [6], [12].)

4 Espace-temps conformes

La structure causale est un invariant conforme. En effet si on multiplie la métrique en tout espace tangent pour une constante positive le type causal des vecteurs ne change pas, et donc la structure causale est la même : une courbe causale, temps ou espace est encore une courbe causale, temps ou espace, le passé et futur de tout point reste inchangé, une hypersurface de Cauchy reste encore une hypersurface de Cauchy, etc...

Il y a alors du sens à étudier la causalité des *espace-temps conformes*, c'est-à-dire des espace-temps où on considère une classe conforme de métrique lorentzienne au lieu d'une métrique particulière.

Dans ce contexte les difféomorphismes conformes jouent le rôle des isométries : on ne fait pas la distinction, du point de vue causal, entre deux espace-temps qui sont difféomorphes par un difféomorphisme conforme.

Réciproquement dans [34] il est prouvé que si g et g' définissent sur M la même structure d'espace-temps et que cette structure est fortement causale, alors g et g' appartiennent à la même classe conforme.

Une chose qui par contre n'est pas préservée par les changements conformes est la connexion de Levi-Civita : en général les changements conformes ne préservent pas les géodésiques. Cependant l'image des géodésiques lumières est préservée par changement conformes. Il s'agit d'un résultat classique prouvé par exemple dans [35], Lemme 9.17, ou par une autre méthode, basée sur le fait que les géodésiques lumières sont les solutions dans le niveau 0 d'un système hamiltonien, dans [24] page 14.

Cette forme de rigidité des géodésiques lumières s'accompagne à un phénomène bien connu de rigidité des applications conformes entre variétés pseudo-riemanniennes de dimension supérieure ou égale à 3 (voir par exemple [36], [25] et [46]). Les structures conformes sur une variété pseudo-riemannienne sont en fait des structures rigides à l'ordre 2, au sens de Gromov ([31]) et qu'on va rappeler à la Section 1. Cette rigidité des applications conformes est à la base de la preuve de la version lorentzienne du théorème de Liouville (Théorème 2.5). Ceci est à l'origine un théorème de géométrie riemannienne conforme, mais une preuve, dans le cas général des métriques pseudo-riemanniennes conformes, a été donnée par C. Frances dans [24].

De même qu'en géométrie Riemannienne, le Théorème de Liouville permet de

voir les espace-temps conformément plats, de dimension supérieure ou égale à 3, comme des (G, X) -structures. Ici l'espace modèle $X = Ein_{1,n}$ est l'espace d'Einstein et $G = SO^+(2, n + 1)$ est son groupe de difféomorphismes conformes qui préservent l'orientation et l'orientation chronologique.

L'espace $Ein_{1,n}$ est défini comme étant le bord de l'espace $AdS_{1,n+1}$ avec la structure conforme naturellement induite. Il est conformément équivalent à l'espace-temps $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, d\sigma^2 - d\theta^2)$ où $d\sigma^2$ et $d\theta^2$ sont les métriques canoniques respectivement sur \mathbb{S}^n et \mathbb{S}^1 . Comme on le verra à la Section 2.7, l'espace $Ein_{1,n}$ est conformément plat.

En fait les trois espaces modèles d'espace-temps à courbure constante $0, 1, -1$, respectivement $\mathbb{R}^{1,n}, dS_{1,n}, AdS_{1,n}$, se plongent conformément dans l'espace d'Einstein de dimension $n + 1$. C'est bien grâce à ces plongements et à l'action transitive du groupe $O(2, n + 1)$ qu'on peut montrer, sans calculs, que l'espace d'Einstein et les espaces $dS_{1,n}$ et $AdS_{1,n}$ sont conformément plats. En géométrie riemannienne on a la même situation : la sphère conforme possède des ouverts conformément équivalents à l'espace euclidien et à l'espace hyperbolique.

Vue l'expression particulièrement simple de sa métrique, la causalité de l'espace d' $Ein_{1,n}$ est simple à étudier. En tant qu'espace compact (Proposition 5.3) il n'est pas causal et n'est donc pas non plus globalement hyperbolique. Cependant, son revêtement universel, dit *espace d'Einstein universel*, conformément équivalent à l'espace-temps $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, d\sigma^2 - dt^2)$, est globalement hyperbolique. La structure de ses géodésiques lumières ainsi que ses point conjugués est à la base de la preuve d'un de résultat principaux de cette thèse le Théorème 2.3.

On peut maintenant considérer la catégorie des espace-temps conformes où les morphismes ne sont plus les isométries lorentziennes, mais des applications conformes. Dans ce nouveau contexte, on peut continuer à parler de maximalité, il suffit de généraliser la notion de Cauchy-plongement : un *Cauchy-plongement conforme* est un plongement conforme $f : M \rightarrow N$ qui envoie toute hypersurface de Cauchy de M sur une hypersurface de Cauchy de N . On dit alors qu'un espace-temps dont tous les Cauchy-plongements conformes sont surjectifs est *C-maximal*.

L'image d'un espace-temps conformément plat par un Cauchy-plongement est conformément plat. On peut donc parler de la catégorie des espace-temps conformément plats, qu'on appelle \mathcal{C}_0 . On dit alors qu'un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat M est *C_0 -maximal*, si tout Cauchy-plongement conforme de M dans un espace-temps N globalement hyperbolique conformément plat est surjectif.

Maintenant on peut à nouveau se poser le problème, comme dans le cas isométrique, de comprendre si tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat admet une C_0 -extension maximale ou même une C -extension maximale, et si une telle extension est unique à difféomorphisme conforme près.

En d'autres termes, il s'agit de généraliser le Théorème 3.1 au cas conforme et au cas conformément plat. Dans la Section 3 avec le Théorème 3.1 on va prou-

ver l'existence et l'unicité de la C_0 -extension maximale pour un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique donné de dimension supérieure ou égale à 3. La preuve reprend les idées de celle Choquet-Bruhat et Geroch, pour ce qui concerne l'utilisation du lemme de Zorn, mais la rigidité des applications conformes et le théorème de Liouville seront aussi des outils centraux.

Le problème de l'existence et unicité de la C -extension maximale est plus délicat (et on ne le fera pas!) car dans ce cas, beaucoup plus général, les espace-temps ne sont plus localement modelés sur un espace modèle et donc on dispose de beaucoup moins de structure.

En résumé, nous disposons de plusieurs notions de maximalité pour les espace-temps globalement hyperboliques, selon qu'on considère des Cauchy-plongement isométriques ou conformes et suivant la catégorie à laquelle on se restreint. Certaines implications entre ces notions sont évidentes : par exemple si M est un espace-temps localement modelé sur une paire (G, X) , où X est, suivant le cas, l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$, $d\mathbb{S}^{1,n}$ ou $Ad\mathbb{S}^{1,n}$, on a :

$$M \text{ est } C\text{-maximal} \Rightarrow M \text{ est } C_0\text{-maximal} \Rightarrow M \text{ est } X\text{-maximal}$$

Évidemment, les implications réciproques ne sont pas nécessairement vérifiées : un espace-temps C_0 -maximal peut ne pas être C -maximal, un espace-temps plat-maximal peut ne pas être C_0 -maximal, etc..

Néanmoins, on prouvera le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Les espace-temps globalement hyperboliques Cauchy-compacts qui sont $\mathbb{R}^{1,n}$ et $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ -maximaux sont aussi C -maximaux. Tout espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-compact $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximal admet une extension conformément plate non triviale, et il n'est donc jamais C_0 -maximal.*

Ce résultat correspond au contenu des Propositions 3.12, 3.21 et du Corollaire 3.32 de cete thèse.

5 Ombres

Une des contributions originales de cette thèse est l'introduction de l'idée d'ombre, développée au Chapitre 4. Cette idée est liée à la notion d'espace-temps distinguant. Un espace-temps est dit *distinguant* (Définition 8.7) si les deux applications $p \in M \mapsto J^+(p)$ et $p \in M \mapsto J^-(p)$ sont injectives. Chaque point est alors caractérisé par son futur et son passé. Tout espace-temps n'est pas distinguant : par exemple dans $Ein_{1,n}$ le futur et le passé de tout point est l'espace tout entier. Par contre tout espace-temps globalement hyperbolique est distinguant ([35], chapitre 2).

Or dans un espace-temps globalement hyperbolique M d'hypersurface de Cauchy S toute courbe causale inextensible doit rencontrer S donc $J^+(p) \cap S$ ou $J^-(p) \cap S$

est non vide. On appelle ces ensembles *ombres* (future ou passée) du point p sur S et, d'après le Lemme 40 dans [42], pag. 423, ce sont des compacts de S .

La Proposition 2.7 montre qu'il existe un certain voisinage de l'hypersurface de Cauchy, l'ouvert Ω_S (Définition 2.1), dont les points sont entièrement caractérisés par leur ombre sur S . De plus si S est non compacte Ω_S est la variété M toute entière. Dans ce cas l'espace-temps M s'identifie alors à un sous-ensemble des compacts de S . Autrement dit, dans un certain sens, toute l'information sur l'espace-temps est contenue dans S .

Cette idée n'est pas tout à fait nouvelle : déjà Kulkarni et Pinkall dans [20] avaient remarqué que les ombres des points de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ sur son bord causal, identifié à \mathbb{S}^n , sont les boules fermées (c'est en fait le seul passage dans leur article où ils mentionnent le caractère Lorentzien de certains aspects de leur étude). Dans [21] l'idée est reprise pour décrire de façon assez élégante et intuitive la classification des espace-temps CGHM de Sitter de K. Scannell ([48]). Dans la Section 5 on ré-interprète encore une fois cette construction à la lumière des résultats du Chapitre 4.

Les ombres se révèlent très utiles pour mieux comprendre la notion d'extension maximale d'un espace-temps. En fait elles permettent de donner une autre preuve, constructive cette fois, de l'existence et unicité de l'extension maximale d'une variété conformément plate (Théorème 3.1). Tel est le contenu du Chapitre 7, et en particulier du Théorème 1.12 qui associe à toute variété riemannienne S , munie d'une immersion conforme $i : S \hookrightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$, un unique espace-temps conformément plat C_0 -maximal.

Lorsque S est l'hypersurface de Cauchy d'un espace-temps de Sitter CGHM on trouve une extension C_0 -maximale qui contient strictement l'espace du départ. Cela prouve donc la partie de Sitter du Théorème 4.1.

Pour prouver le reste du Théorème 4.1, c'est-à-dire le fait que tout espace-temps CGHM localement modelé sur $\mathbb{R}^{1,n}$ et $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ est C -maximal, on aura besoin d'étudier la *frontière causale* ou *frontière de Penrose* ([33] pag. 217) de leurs revêtements universels. En fait, en se basant sur le fait que l'ombre de tout point d'un espace-temps est toujours compacte, on prouve : un espace-temps conformément plat M (qui n'est pas un quotient de $\widetilde{Ein}_{1,n}$) d'hypersurface de Cauchy S est C -maximal si et seulement si l'ombre de tout TIP ou TIF sur S est non compacte. Or les résultats dans la littérature sur les espace-temps CGHM à courbure constante permettent une bonne compréhension de leurs frontière causale. De plus l'étude de la frontière causale permet de montrer :

Corollaire 2.7 : *Le revêtement universel de tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal est C_0 -maximal.*

Corollaire 2.8 : *Tout espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal est C -maximal.*

L'idée d'ombre, surtout sa version pour les sous-ensemble achronaux (Section 3), est aussi un ingrédient de la preuve du résultat principal du Chapitre 6, dont une formulation est la suivante :

Théorème 2.5 : *Soit M un espace-temps conformément plat C_0 -maximal qui contient deux géodésiques lumières distinctes, librement homotopes et ayant les mêmes extrémités. Alors M est un quotient fini de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Chapitre 1

Espace-temps

Nous allons introduire les notions d'espace-temps, de causalité et d'hyperbolicité globale. Pour plus de détails sur ces sujets consulter [44], [35], [42] et [5]. Dans la suite les variétés considérées seront supposées connexes.

1 Généralités sur les espace-temps

Définition 1.1. Soit M une variété différentiable de dimension $n + 1$ et soit TM son fibré tangent. Une *métrique lorentzienne* sur M est une application $g : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (C^∞) dont la restriction à chaque fibre $T_x M$ est une forme quadratique g_x de signature $(1, n)$.

Une *variété lorentzienne* est une variété munie d'une métrique lorentzienne.

L'exemple le plus élémentaire de variété lorentzienne est l'espace de Minkowski : il joue le rôle de l'espace euclidien en géométrie riemannienne.

Définition 1.2. L'*espace de Minkowski*, noté $\mathbb{R}^{1,n}$ est l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} muni de la forme quadratique $Q_{1,n}(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, où $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. La forme bilinéaire qui induit cette forme quadratique est notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

En adoptant la terminologie physique, issue du contexte de la relativité générale, on donne la définition suivante :

Définition 1.3. Soit M une variété lorentzienne, et v un vecteur tangent en un point x de M . On dit que :

- v est de *type espace* si $g_x(v, v) > 0$
- v est de *type causal* si $v \neq 0$ et $g_x(v, v) \leq 0$
- v est de *type temps* si $g_x(v, v) < 0$
- v est de *type lumière* si $v \neq 0$ et $g_x(v, v) = 0$

On dira que v est un vecteur *isotrope* si $g_x(v, v) = 0$, y compris le cas $v = 0$.

On supposera toujours que les variétés considérées sont orientées, car on peut se ramener à cette situation par un revêtement double, ce qui ne gêne pas le travail ici exposé. Ceci dit, il y a sur toute variété lorentzienne une autre notion d'orientabilité.

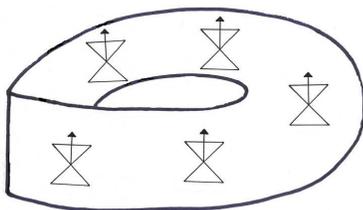
Définition 1.4. Une *orientation chronologique* d'une variété lorentzienne est un champ de vecteurs partout continu de type temps. Une fois choisi un tel champ de vecteurs V (si possible), on dira que la variété lorentzienne est *chronologiquement orientée* par V .

Un champ de vecteurs continu de type temps n'existe pas toujours.

Exemple 1.5. On considère $\mathbb{R}^{1,n}$ quotienté par le groupe engendré par l'isométrie qui à (x_0, x) associe $(-x_0, x) + e_n$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $e_n = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La métrique induite au quotient n'est pas chronologiquement orientable.

Les notions d'orientation et d'orientation chronologique ne sont pas liées. En fait l'une ne dépend pas de la métrique et l'autre si.

Exemple 1.6. Considérons à nouveau le quotient de \mathbb{R}^{n+1} par l'isométrie qui à (x_0, x) associe $(-x_0, x) + e_n$. Il est bien connu que cette variété (le ruban de Möbius) n'est pas orientable. Par contre il est possible de la munir d'une métrique lorentzienne chronologiquement orientable comme on le voit sur la figure suivante pour $n = 1$.



Pour montrer que l'orientabilité n'implique pas l'orientabilité chronologique on quotiente $\mathbb{R}^{1,2}$ par le groupe engendré par l'application qui à (x_0, x_1, x_2) associe $(-x_0, -x_1, x_2 + 1)$. La métrique induite au quotient n'est pas chronologiquement orientable mais la variété quotient est orientable.

Il est possible de montrer que toute variété lorentzienne est chronologiquement orientable à revêtement fini (même double) près, ce qui n'a pas d'incidence sur les énoncés des résultats que nous allons démontrer. On se mettra donc toujours dans cette situation.

Définition 1.7. Un *espace-temps* est une variété lorentzienne orientée et chronologiquement orientée.

Soit V le champ de vecteur continu de type temps qui donne l'orientation chronologique de M .

Définition 1.8. Un vecteur causal $v \in T_x M$ est dit *futur* (ou *orienté vers le futur*) si $g_x(v, V(x)) < 0$. Si $g_x(v, V(x)) > 0$, v est dit *passé* (ou *orienté vers le passé*).

Exemple 1.9. L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est orienté chronologiquement par le champ de vecteurs vertical ∂_{x_0} . Avec cette orientation il est donc un espace-temps. Dans la suite on considère toujours cette orientation sur $\mathbb{R}^{1,n}$.

Remarque 1.10. Remarquons que si V, W sont deux champs de vecteurs de type temps sur M , le produit scalaire $g(V, W)$ est partout non-nul. Ce produit scalaire est partout négatif si et seulement si, pour tout x dans M , $V(x)$ et $W(x)$ sont dans la même composante connexe du cône des vecteurs temporels $\{v / g_x(v, v) < 0\} \subset T_x M \simeq \mathbb{R}^{1,n}$, V et W définissent alors la même orientation chronologique. En chaque espace tangent, ce cône n'a que deux composantes connexes. On obtient qu' une variété lorentzienne (connexe) admet au plus deux orientations chronologiques.

2 Espace-temps modèle à courbure constante

De même que dans le cas riemannien, on peut, à partir d'une métrique lorentzienne sur une variété M , définir une connexion de Levi Civita ∇ , comme étant l'unique connexion sans torsion compatible avec la métrique lorentzienne. On définit alors les géodésiques comme étant les courbes solutions de l'équation différentielle $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$. Pour tout point x de la variété et tout vecteur $v \in T_x M$, il existe une unique géodésique passant par x et tangente à v . Comme le transport parallèle préserve la métrique, si v est un vecteur de type temps (respectivement espace ou lumière), les vecteurs tangents à cette géodésique sont tous de type temps (respectivement espace ou lumière). Comme dans le cas riemannien on peut définir en chaque point x de M , sur un voisinage U de 0 dans $T_x M$ l'application $\exp_x : U \rightarrow M$ qui à un vecteur v associe $\gamma(1)$, où γ est l'unique géodésique telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Voir [35] ou [42] pour les détails de ces constructions.

Proposition 2.1. *Soit M une variété lorentzienne connexe et soit $f : M \rightarrow M$ une isométrie qui fixe un point $x \in M$ et telle que sa différentielle en x est l'identité sur $T_x M$. Alors f est l'identité sur M .*

Démonstration. Montrons d'abord que si $f \in Isom(M)$ est telle que $f(x) = x$ et $d_x f = id$ alors $f = id$ au voisinage de x . Soit U une carte exponentielle centrée en x , $\exp_x : U \rightarrow M$ et soit $V = \exp_x(U)$. Alors si $y \in V$ il existe

$v \in U$ tel que $f(y) = f(\exp_x(v))$, mais, comme f est une isométrie et envoie géodésiques sur géodésiques, elle commute avec l'application exponentielle : $f(\exp_x(v)) = \exp_x(d_x f(v)) = \exp_x(v) = y$. On a donc prouvé que l'ensemble des points fixes de f est ouvert. Comme il est par ailleurs clairement fermé dans M le résultat découle de la connexité de M . \square

On va donner trois exemples d'espace-temps à courbure constante, dont les revêtements universels correspondent à la trichotomie plan euclidien, espace hyperbolique et sphère du cas riemannien.

2.1 Espace de Minkowski

Rappelons la Définition 1.2 : l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} muni de la forme quadratique $Q_{1,n}(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, où $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. L'espace de Minkowski est l'espace modèle simplement connexe à courbure nulle. Il est chronologiquement orientable (et orientable tout court) et ses géodésiques sont les droites affines.

Un corollaire de la Proposition 2.1 est que son groupe d'isométrie est le groupe des transformations affines de partie linéaire préservant $Q_{1,n}$:

$$O(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$$

Le sous-groupe des isométries linéaires de $\mathbb{R}^{1,n}$ qui préservent à la fois son orientation et son orientation chronologique est la composante connexe de l'identité de $O(1, n)$, le sous-groupe $O_0(1, n)$. Les isométrie de $\mathbb{R}^{1,n}$ en tant qu'espace-temps sont donc les application affines appartenant au groupe

$$Isom^+(\mathbb{R}^{1,n}) := O_0(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$$

2.2 Espace de Sitter

Définition 2.2. On appelle *espace de Sitter* de dimension $n + 1$, noté $dS_{1,n}$, le lieu des points x de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ tels que $Q_{1,n+1}(x, x) = 1$, muni de la métrique induite.

Proposition 2.3. *La restriction de la forme quadratique de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ aux espaces tangents de $dS_{1,n}$ est une métrique de signature $(1, n)$. Cela fait de $dS_{1,n}$ une variété lorentzienne, de dimension n .*

Démonstration. L'espace tangent $T_x dS_{1,n}$ en un point x de $dS_{1,n}$ s'identifie naturellement à l'orthogonal de x dans $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Comme x est de type espace, sur son orthogonal la forme quadratique $Q_{1,n+1}$ est de signature $(1, n)$. \square

On remarque que le lieu $\{Q_{1,n+1} = +1\}$ est connexe et difféomorphe à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ via l'application :

$$F : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow dS_{1,n}$$

$$(u, r) \rightarrow (\sinh(r), \cosh(r)u)$$

Appelons g_{dS} la métrique induite sur $dS_{1,n}$ par la forme quadratique de $\mathbb{R}^{1,n+1}$, et $d\sigma^2$ la métrique ronde sur \mathbb{S}^n . On a :

$$F^*g_{dS} = -dr^2 + \cosh(r)^2 d\sigma^2$$

L'orientation chronologique de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ induit une orientation chronologique sur $dS_{1,n}$, qui est celle définie par le champ de vecteurs $\partial_r : dS_{1,n}$ est donc un espace-temps.

Comme $O(1, n+1)$ agit transitivement sur $dS_{1,n}$ et sur son fibré des repères, la Proposition 2.1 implique que les isométries de $dS_{1,n}$ sont les éléments de $O(1, n+1)$. Les isométries de $dS_{1,n}$ qui préservent son orientation et son orientation chronologique sont les éléments du sous groupe de $O(1, n+1)$ qui préservent l'orientation et l'orientation chronologique de $\mathbb{R}^{1,n}$. Il s'agit de la composante connexe de l'identité, le groupe $O_0(1, n)$. On a donc

$$Isom^+(dS_{1,n}) = O_0(1, n).$$

En dimension $n \geq 2$, qui est le cas qui nous intéresse, l'espace $dS_{1,n}$ est simplement connexe.

2.3 Espace anti-de Sitter

Soit $\mathbb{R}^{2,n}$ l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+2} muni de la forme quadratique $Q_{2,n}(x) = -u^2 - v^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, où $x = (u, v, x_1, \dots, x_n)$ et $(e_u, e_v, e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ est une base associée à ces coordonnées. Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^{2,n}$ est $O(2, n) = \{g \in GL(n+2)/Q_{2,n} \circ g = Q_{2,n}\}$.

Définition 2.4. On appelle espace *anti-de Sitter* de dimension $n+1$, noté $AdS_{1,n}$, le lieu des points x de $\mathbb{R}^{2,n}$ tel que $Q_{2,n}(x) = -1$, muni de la métrique induite par la forme quadratique de $\mathbb{R}^{2,n}$.

Proposition 2.5. *La restriction de la forme quadratique de $\mathbb{R}^{2,n}$ au fibré tangent de $AdS_{1,n}$ est une métrique de signature $(1, n)$. Cela fait de $AdS_{1,n}$ une variété lorentzienne.*

Démonstration. Comme pour $dS_{1,n}$, en tout point x de $AdS_{1,n}$ l'espace tangent $T_x AdS_{1,n}$ s'identifie à l'orthogonal de x dans $\mathbb{R}^{2,n}$. Comme x est de type temps la forme quadratique $Q_{2,n}$ restreinte à l'orthogonal de x est de signature $(1, n)$. \square

L'espace $AdS_{1,n}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$. Un difféomorphisme explicite est :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow AdS_{1,n} \\ (x_1, \dots, x_n, \theta) &\rightarrow (q \cos(\theta), q \sin(\theta), x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

avec $q = \sqrt{1 + \sum x_i^2}$.

Le difféomorphisme qu'on vient de décrire montre que l'orientation du plan $P_{u,v}$ engendré par (e_u, e_v) induit une orientation de $AdS_{1,n}$ par le champ de vecteurs ∂_θ (au lieu de $P_{u,v}$ on aurait pu prendre n'importe quel 2-plan où $Q_{2,n}$ est définie négative). $AdS_{1,n}$ est donc un espace-temps.

L'action de $O(2, n)$ est transitive sur $AdS_{1,n}$ et sur son fibré des repères, donc toute isométrie de $AdS_{1,n}$ est un élément de $O(2, n)$:

$$Isom(\widetilde{AdS}_{1,n}) = O(2, n).$$

La composante connexe de l'identité, $O_0(2, n)$, est constituée des isométries qui préservent à la fois l'orientation de $\mathbb{R}^{2,n}$ et l'orientation du plan $P_{u,v}$. Donc les éléments de $O_0(2, n)$ sont les isométries de $AdS_{1,n}$ qui préservent à la fois son orientation et son orientation chronologique.

L'espace-temps $AdS_{1,n}$ n'est pas simplement connexe, on considèrera donc souvent son revêtement universel $\widetilde{AdS}_{1,n}$ qui est naturellement difféomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. L'espace $\widetilde{AdS}_{1,n}$ est l'espace-temps modèle à courbure constante négative.

3 Courbes causales, futur et passé d'un point

Soit M un espace-temps.

Définition 3.1. Une *courbe causale* (respectivement *temporelle*, *spatiale*, *lumière*) C^1 par morceaux est une courbe $c :]a, b[\rightarrow M$ qui est C^1 par morceaux telle que :

- 1) tous ses vecteurs tangents, éventuellement définis seulement à gauche ou à droite, sont de type causal (respectivement temps, espace, lumière). En particulier, vu la définition 1.3, ils sont toujours non nuls.
- 2) Aux points $t \in]a, b[$ où la courbe n'est pas dérivable, on demande que le vecteur tangent droit $c'_D(t)$ et le vecteur tangent gauche $c'_G(t)$ soient dans la même composante connexe du cône des vecteurs causaux en $c(t)$.

On remarque qu'une courbe causale de classe C^1 est une immersion. La condition 2) implique que, pour les points $t \in]a, b[$ où le vecteur tangent n'est pas bien défini, les deux vecteurs tangents à la courbe en t , à droite et à gauche, soient dans la même composante connexe du cône des vecteurs causaux de l'espace tangent en $c(t)$.

En particulier, tous les vecteurs tangents à une courbe causale ont la même orientation chronologique, future ou passée : on peut parler de courbes causales futures et passées, définies comme suit :

Définition 3.2. Une courbe causale $c :]a, b[\rightarrow M$ est dite *future* (resp. *passée*) si tous ses vecteurs tangents sont orientés vers le futur (resp. vers le passé).

Définition 3.3. Le *futur strict* $I^+(A)$ d'une partie A d'un espace-temps M est l'ensemble de M formé des extrémités de courbes temporelles futures issues de A .

Définition 3.4. Le *futur causal* $J^+(A)$ d'une partie A de M est l'ensemble des extrémités de courbes causales futures issues de A (y compris les courbes triviales réduites à un seul point).

Comme une courbe temporelle est en particulier une courbe causale on a pour tout sous-ensemble A de M

$$I^+(A) \subset J^+(A).$$

On définit de manière similaire les passés $I^-(A)$, $J^-(A)$: ce sont les futurs de A pour l'orientation chronologique opposée.

Remarque 3.5. Soient x, y, z trois points de M , tels qu'il existe une courbe causale future α de x à y et une courbe causale future de y à z . La composition de α avec β est alors une courbe causale future qui relie x à z . Comme un discours analogue est vrai pour les courbes causales passées, on obtient que si $x \in J^\pm(y)$ alors $J^\pm(x) \subset J^\pm(y)$, et de même si $x \in I^\pm(y)$ alors $I^\pm(x) \subset I^\pm(y)$.

On peut aussi restreindre les relations de causalité à un ouvert de M .

Définition 3.6. Le *futur causal* (resp. *strict*) d'un sous-ensemble A de M relatif à un ouvert U de M est l'ensemble, noté $J_U^+(A)$ (resp. $I_U^+(A)$), des extrémités de courbes causales (resp. temporelles) futures issues de A et contenues dans U . On définit de manière analogue le passé causal et le passé strict relatifs à l'ouvert U , notés respectivement $J_U^-(p)$ et $I_U^-(p)$.

3.1 Lemme de Gauss et voisinages convexes

Dans cette section on va parler de la structure locale d'une variété lorentzienne et des conséquences que ces résultats locaux classiques ont sur la structure causale locale et globale d'un espace-temps.

En géométrie riemannienne il est souvent utile de considérer un voisinage U d'un point p géodésiquement convexe, c'est-à-dire, un voisinage tel qu'entre tout couple de points q et q' de U il existe une unique géodésique contenue dans U qui va de q à q' . En géométrie riemannienne la géodésique en question est de plus minimisante. En fait la construction de voisinages géodésiquement convexes d'un point donné peut se faire de façon semblable dans toute variété pseudo-riemannienne, la seule différence étant qu'en général on ne pourra plus parler de géodésiques minimisant la longueur. En géométrie lorentzienne, comme ce qui nous intéresse est la causalité, il y a encore une autre notion de convexité qui est intéressante :

Définition 3.7. Un domaine U de M est dit *causalement convexe* si toute courbe causale reliant deux points de U est contenue dans U .

Définition 3.8. *On appelle carte exponentielle centrée en un point p d'un espace-temps M , un ouvert V de T_pM où la restriction de l'application exponentielle est injective. L'image par \exp_p d'une carte exponentielle V est appelée voisinage normal du point p .*

Définition 3.9. *Un voisinage géodésiquement convexe d'un point p est un voisinage U de p qui est un voisinage normal de tous ses points.*

Si U est un voisinage de p géodésiquement convexe, pour tout couple de points q et q' dans U il existe donc une unique géodésique contenue dans U qui les connecte. Comme en géométrie riemannienne on peut montrer que tout point d'une variété lorentzienne admet un voisinage géodésiquement convexe (voir par exemple la Proposition 7 de [42] chapitre 5).

Les notions de convexité causale et de convexité géodésique n'ont aucun lien entre elles, la première étant une notion globale, la deuxième une notion locale.

Lemme 3.10. *Soit p un point d'une variété lorentzienne M , et soit x un élément de T_pM différent de 0. Si v et w sont deux vecteurs de $T_x(T_pM) \simeq T_pM$ et si v est colinéaire à x , alors*

$$g_p(v, w) = g_{\exp(x)}(d_x \exp_p . v, d_x \exp_p . w)$$

La preuve de ce lemme ne diffère pas de celle du Lemme de Gauss dans une variété riemannienne. En fait elle marche de la même façon dans toute variété pseudo-riemannienne, elle peut être trouvée par exemple dans [42] chapitre 5, Lemme 1. Une conséquence du Lemme de Gauss, essentielle pour la suite, est :

Proposition 3.11. *Soit U une carte exponentielle centrée en p , $U = \exp_p(V)$, où V est un voisinage de 0 dans T_pM . Alors, le futur causal (resp. strict) de p relatif à l'ouvert U est constitué des points qui sont images par \exp_p d'un vecteur causal (resp. temps) de V . La frontière de $I_U^+(p)$ est constituée des images par \exp_p des vecteurs isotropes de V . Elle est donc l'union des segments géodésiques lumières issus de p et contenus dans U .*

Démonstration. Une preuve peut être trouvée dans [42] pag. 127-128. □

Une application de cette Proposition est le résultat suivant (voir [42, Lemme 2, page 403]).

Proposition 3.12. *Le passé (et le futur) strict de tout point d'une variété lorentzienne M est un ouvert.*

Par contre le passé (futur) causal d'un point n'est *a priori* ni ouvert ni fermé ; pensez par exemple à l'espace de Minkowski privé d'un point p , comme montré dans la figure suivante :

Lemme 3.13. *Pour tout point p d'un espace-temps M on a $J^+(p) \subset \overline{I^+(p)}$.*

Démonstration. Soit $q \in J^+(p)$. Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans $I^+(q)$ qui converge vers q . Cette suite existe car si $\alpha : [0, 1[\rightarrow M$ est une courbe de type temps future issue de q , par définition $\alpha(t)$ appartient à $I^+(q)$ pour tout t dans $[0, 1[$; donc, comme α est une application continue, si t_n est une suite qui converge vers 0 dans $[0, 1[$, alors $q_n := \alpha(t_n)$ converge vers q .

D'après la Proposition 5.9, qu'on montrera plus tard, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I^+(p)$, donc q est dans l'adhérence de $I^+(p)$. \square

En fait il y a une description très simple du passé et du futur d'un point dans l'espace de Minkowski. Soit $C := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} / Q_{1,n}(x) \leq 0\}$ le cône des vecteurs causaux issus de 0 dans $\mathbb{R}^{1,n}$. Soit C^+ la composante connexe de C des vecteurs futurs et C^- celle des vecteurs passés.

Lemme 3.14. *Le futur (resp. passé) causal d'un point $p \in \mathbb{R}^{1,n}$ est le lieu des points q tels que $q - p$ est dans C^+ (resp. C^-).*

Le futur (resp. passé) strict de p est le lieu des points q tels que $q - p$ est dans l'intérieur de C^+ (resp. C^-).

Démonstration. L'inclusion $\{q / q - p \in C^+\} \subset J^+(p)$ est évidente, on va montrer la réciproque. Soit $q \in J^+(p)$; alors il y a une courbe causale future $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ telle que $c(0) = p$ et $c(1) = q$. On suppose d'abord que c est de classe C^1 .

Soit v_0 un vecteur de type temps futur tel que $Q(v_0) = -1$. On complète v_0 en une base orthonormé (v_0, v_1, \dots, v_n) de $\mathbb{R}^{1,n}$. Dans cette base la courbe c s'écrit $c(t) = (x_0(t), x(t))$ où $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Comme c est une courbe causale sa dérivée en tout point $t \in [0, 1]$ vérifie

$$Q_{1,n}(c'(t)) = -|x'_0(t)|^2 + \|x'(t)\|^2 \leq 0.$$

On doit avoir $|x'_0(t)| \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ car sinon $c'(t)$ serait nul, ce qui contredirait notre définition des courbes causales. Alors l'application

$$t \in [0, 1] \longmapsto x_0(t) = \langle c(t), v_0 \rangle$$

est décroissante. Cela implique $\langle q, v_0 \rangle < \langle p, v_0 \rangle$ et donc $\langle q - p, v_0 \rangle < 0$. Comme le raisonnement ne dépend pas du choix de v_0 , on obtient $\langle q - p, v \rangle < 0$ pour tout vecteur v de type temps futur. Comme le cône des vecteurs causaux futur est autodual on obtient que $q - p$ est causal futur.

Maintenant si c est C^1 par morceaux soient t_i les points de $[0, 1]$ où c n'admet pas de vecteur tangent. D'après ce qu'on vient de montrer on a $c(t_i) - c(t_{i-1}) \in C^+$ pour tout i , donc

$$q - p = \sum_i c(t_i) - c(t_{i-1}) \in C^+.$$

En renversant l'orientation chronologique on montre le résultat pour le passé de p .

On a montré le lemme pour le futur (passé) causal, maintenant pour prouver la caractérisation du futur (passé) strict il suffit de répéter le même raisonnement en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. \square

Ainsi, dans l'espace de Minkowski le futur (passé) causal de tout point est exactement l'adhérence du futur (passé) strict, et est donc en particulier fermé. On verra que cette propriété est vérifiée dans toute variété lorentzienne M vérifiant certaines hypothèses sur M , notamment l'hyperbolicité globale (voir Corollaire 6.4).

3.2 Courbes causales topologiques

On peut élargir la famille des courbes causales sans modifier la notion de futur et passé d'un point, en acceptant aussi des courbes causales qui sont juste continues.

Définition 3.15. Une application continue $c :]a; b[\rightarrow M$ est une *courbe causale (topologique) future* (resp. *passée*) si pour tout temps t_0 et tout voisinage ouvert U de $c(t_0)$, il existe un voisinage $I =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ tel que pour tout t dans I on a :

- si $t \leq t_0$: $c(t)$ est dans le passé (resp. futur) causal de $c(t_0)$ relatif à U ,
- si $t \geq t_0$: $c(t)$ est dans le futur (resp. passé) causal de $c(t_0)$ relatif à U .

On définit de manière analogue les courbes temporelles topologiques futures et passées. Le fait que le futur et le passé d'un point, tant strict que causal, ne soient pas modifiés par cette nouvelle notion de courbe causale découle directement de la définition.

On va voir que le fait qu'une courbe, à priori juste continue, soit une courbe causale topologique implique une certaine régularité. En fait toute courbe causale topologique est localement Lipschitz, donc différentiable presque partout.

Proposition 3.16. *Toute courbe causale topologique est localement le graphe d'une application Lipschitz d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où M est l'espace de Minkowski. Soit $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ une courbe causale topologique future (si elle est passée le raisonnement est analogue). On considère sur $\mathbb{R}^{1,n}$ les coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n) et la forme quadratique $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. La courbe c s'écrit alors sous la forme $c(t) = (c_0(t), c_1(t))$ où c_0 est sa projection sur l'axe de coordonnée x_0 et c_1 celle sur l'hyperplan $\{x_0 = 0\}$. Comme la courbe est causale future si $s < t$ alors

$c(t) \in J^+(c(s))$, donc d'après le Lemme 3.14 $c(t) - c(s)$ est un vecteur causal, c'est-à-dire

$$c_0(t) - c_0(s) \geq |c_1(t) - c_1(s)| \geq 0.$$

Donc si $c_0(t) - c_0(s) = 0$, alors $c_1(t) - c_1(s) = 0$ et la courbe est alors constante sur l'intervalle $[s, t]$. Comme c est une courbe causale elle ne peut pas être constante sur un intervalle. On obtient donc que c_0 est une application strictement croissante. Or si c_0 est strictement croissante, il existe un reparamétrage tel que c s'écrit sous la forme $t \mapsto (t, y(t))$, et comme avant si $s < t$ alors

$$t - s \geq |y(t) - y(s)|.$$

Ceci montre le lemme pour l'espace de Minkowski.

Pour le cas général, Il suffit d'utiliser le lemme 3.17 suivant, qui permet de généraliser localement, à une variété lorentzienne quelconque, le résultat obtenu. En fait, le lemme suivant implique que, localement, la courbe causale ou temporelle c est aussi une courbe causale ou temporelle pour une métrique de Minkowski de référence, ce qui permet de conclure. \square

Lemme 3.17. *Soit (M, g) une variété lorentzienne de dimension n . On définit sur $\mathbb{R}^{1,n}$ muni des coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n) la quantité $\|x\|_n^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Soit $C_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^{1,n} / \|x - y\|_n^2 \leq \varepsilon(x_0 - y_0)^2\}$, et soit $C_g(q) := \{v \in T_q M / g_q(v, v) \leq 0\}$ pour tout q dans M .*

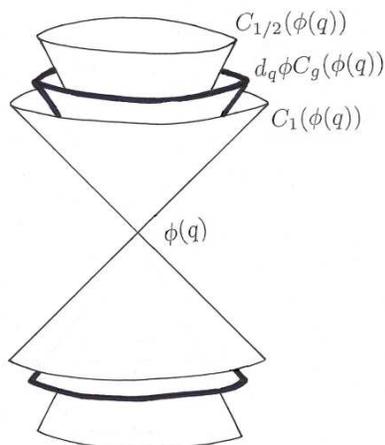
Alors, pour tout point p de M il existe un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow U_0$, où U est un voisinage de p , tel que :

- U_0 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{1,n}$,
- $\phi(p) = (0, 0, \dots, 0)$,
- pour tout q dans U on :

$$C_{1/2}(\phi(q)) \subset \text{int}(d_q\phi(C_g(q))) \quad \text{et} \quad d_q\phi(C_g(q)) \subset \text{int}(C_1(\phi(q))).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la continuité de la métrique sur la variété M . \square

En d'autres termes, même si la métrique g sur la variété de départ M n'est pas plate, on peut contrôler au voisinage de chaque point la largeur des cônes induits par g sur les espaces tangents à M par deux métrique plates.



Remarque 3.18. Dans la suite, sauf avis contraire, on va toujours considérer des courbes causales topologiques, qui seront appelées simplement courbes causales. Elles n'ont donc à priori qu'une régularité localement Lipschitz.

Remarque 3.19. Dans le cas particulier où (M, g) est l'espace de Minkowski, on a montré lors de la preuve du Lemme 3.17 que toute courbe causale est le graphe d'une application 1-Lipschitz. Il est facile de voir que lorsque la courbe est de type temps les inégalités sont strictes, et donc que l'application est 1-contractante.

Dans l'étude de la causalité d'un espace-temps il est utile de définir une bonne notion de convergence des suites de courbes causales.

Définition 3.20. γ est une *courbe limite* pour une suite de courbes $\{\gamma_n\}$ si pour tout point u de γ et pour tout voisinage U_u de u toutes les γ_n sauf un nombre fini intersectent U_u .

En fait, c'est cette notion qui justifie l'introduction de la notion de courbe causale topologique au lieu de se restreindre à celle de courbe causale C^1 par morceaux. En effet, une courbe limite de courbe causale est toujours une courbe causale topologique, mais n'a aucune raison d'être C^1 par morceaux. Cette notion prendra sa pleine mesure dans le cadre des espaces-temps globalement hyperboliques (voir Lemme 6.2).

3.3 Courbes causales inextensibles

Définition 3.21. Un *point limite futur* (resp. *passé*) d'une courbe causale $c :]a, b[\rightarrow M$ est un point x de M tel que pour tout voisinage U de x il existe un temps t_0 dans $]a, b[$ tel que pour tout $t > t_0$ (resp. $t < t_0$) l'image $c(t)$ appartient à U .

Définition 3.22. Une courbe causale c est *inextensible* si elle n'admet ni point limite futur, ni point limite passé.

Exemple 3.23. Dans $\mathbb{R}^{1,n}$ les droites verticales sont des exemples de courbes causales inextensibles. De plus dans la démonstration de la Proposition 3.16 on a prouvé que toute courbe causale topologique c de l'espace de Minkowski admet un paramétrage $c(t) = (t, f(t))$, où t varie dans un interval I de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application 1-Lipschitz. La courbe c admet des points limites si et seulement si I n'est pas \mathbb{R} tout entier.

Si $I = \mathbb{R}$, le graphe de f est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^{1,n}$. La courbe c n'admet alors pas de points limites. Inversement, si $I \neq \mathbb{R}$ par exemple $I =]a, b[$ avec $a \neq -\infty$, alors, comme f est 1-Lipschitz, elle admet une limite finie l_a en a , donc (a, l_a) est un point limite pour c . Plus précisément, si c est une courbe causale passée, alors (a, l_a) est un point limite passé, et si c est une courbe causale future, (a, l_a) est un point limite futur. Toute courbe causale de $\mathbb{R}^{1,n}$ est contenue dans une courbe causale inextensible. En effet, en reprenant les notations ci-dessus, on peut prolonger la courbe causale c en posant $f(t) = l_a$ si $t \leq a$ et $f(t) = l_b$ si $t \geq b$. Ceci définit une courbe causale inextensible future qui contient c .

En général :

Proposition 3.24. Soit (M, g) un espace-temps. Toute courbe causale est contenue dans une courbe causale inextensible.

Démonstration. Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe causale passant par un point p , et (C, \preceq) la collection des courbes causales contenant c , partiellement ordonnée par l'inclusion. On paramètre les éléments de C par leur longueur d'arc (relative à une métrique riemannienne auxiliaire), en prenant comme valeur de l'origine le point p . Montrons que tout sous-ensemble A de C totalement ordonné pour l'inclusion admet un majorant : chaque élément de A est une courbe $\alpha :]a_\alpha, b_\alpha[\rightarrow M$, et si $\alpha \preceq \beta$ alors $\beta(t) = \alpha(t)$ pour tout élément de $]a_\alpha, b_\alpha[\cap]a_\beta, b_\beta[$. Soit I l'union de tous les intervalles $]a_\alpha, b_\alpha[$ pour $\alpha \in A$, et $\tilde{c} : I \rightarrow M$ l'application définie par $\tilde{c}(t) = \alpha(t)$ si $t \in]a_\alpha, b_\alpha[$. C'est manifestement un élément de C qui de plus majore tous les éléments de A . D'après le lemme de Zorn C admet un élément maximal. On voit facilement qu'un tel élément maximal ne peut admettre de point limite futur ou passé. \square

4 Ensembles achronaux, acausaux, edgeless

Définition 4.1. Une *sous-variété* plongée dans une variété lorentzienne est dite de *type espace* ou *spatiale* (respectivement *temporelle*, *lumière*, *causale*) si tous ses vecteurs tangents sont de type espace (respectivement temps, lumière ou causal).

On remarque qu'il n'y a pas de courbe causale contenue dans une hypersurface spatiale. De même que la notion de courbe causale s'étend dans le cadre Lipschitz, on peut généraliser le concept d'hypersurface spatiale :

Définition 4.2. Soit U un ouvert d'un espace-temps M . Un sous-ensemble A de U est *achronal* (resp. *acausal*) relativement à U si pour tout couple de points p et q dans A il n'existe pas de courbe de type temps (causale) entre p et q contenue dans U . Quand $U = M$ on dira simplement que A est achronal (resp. acausal).

Définition 4.3. Un sous-ensemble A de M est *localement acausal* (resp. *localement achronal*) si tout point x de A admet un voisinage U tel que $U \cap A$ est acausal (resp. achronal) relativement à U .

Remarque 4.4. On remarque que si A est un sous-ensemble de M

$$A \text{ acausal} \Rightarrow A \text{ achronal} \text{ et}$$

$$A \text{ acausal (resp. achronal)} \Rightarrow A \text{ localement acausal (resp. localement achronal)}$$

Exemple 4.5. Une hypersurface plongée est localement acausale si et seulement si elle est spatiale ; elle est localement achronale si tous ses vecteurs tangents sont spatiaux ou lumières.

Lemme 4.6. Les sous-ensembles achronaux (resp. acausaux) de $\mathbb{R}^{1,n}$ sont les graphes d'application 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Démonstration. Soit A un sous-ensemble achronal de $\mathbb{R}^{1,n}$. Dans $\mathbb{R}^{1,n}$ les droites verticales sont des courbes de type temps. Elles intersectent donc A une seule fois. En particulier elles intersectent une seule fois l'hyperplan $\{t = 0\}$. On peut donc projeter A sur un ensemble $\Omega \subset \{t = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$. On définit l'application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ comme celle qui à $x \in \Omega$ associe l'unique intersection $f(x)$ entre la droite verticale $t \mapsto (t, x)$ et A .

L'achronalité de A implique que f soit 1-Lipschitz. En effet pour tout $x_0, x_1 \in \Omega$ comme A est achronal il résulte de la Remarque 3.14 que $(f(x_0), x_0) - (f(x_1), x_1)$ est un vecteur de type espace, et donc

$$\|x_0 - x_1\|^2 \geq |f(x_0) - f(x_1)|^2$$

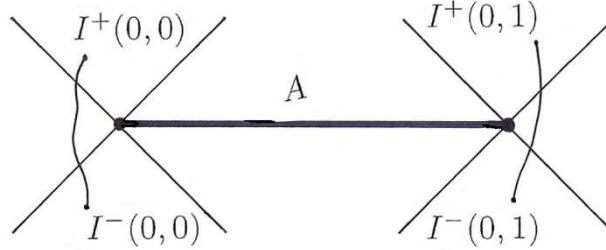
c'est-à-dire f est 1-Lipschitz. Si A est acausal l'inégalité dans l'équation précédente est stricte, *i.e.* f est 1-contractante. \square

Définition 4.7. Un sous-ensemble A de M localement achronal est *edgeless* si pour tout point x de A il existe un voisinage U de x tel que :

- $U \cap A$ est achronal relativement à U ,

- toute courbe causale contenue dans U reliant un point de $I_U^-(x)$ à un point de $I_U^+(x)$ rencontre $U \cap A$.

Exemple 4.8. Soit A le sous ensemble de $\mathbb{R}^{1,1}$ donné par $A := \{(0, x) / x \in [0, 1]\}$. On voit que A n'est pas edgeless, car la deuxième condition de la définition précédente n'est pas vérifiée aux points $(0, 0)$ et $(0, 1)$, comme le montre la figure suivante



Par contre on voit facilement que l'ensemble $A \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$ est edgeless.

Dans l'espace de Minkowski il y a la caractérisation suivante.

Proposition 4.9. Les ensembles achronaux (resp. acausaux) edgeless de $\mathbb{R}^{1,n}$ sont les graphes d'applications 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Démonstration. En reprenant la preuve du Lemme 4.6 on voit facilement que A est edgeless si et seulement si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . \square

Si l'ensemble achronal (resp. acausal) edgeless A est de plus fermé, on voit que Ω est fermé aussi. Par connexité de \mathbb{R}^n on obtient bien $\Omega = \mathbb{R}^n$, d'où le corollaire suivant :

Corollaire 4.10. Les fermés achronaux (resp. acausaux) edgeless de $\mathbb{R}^{1,n}$ sont les graphes d'applications 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme les courbes causales topologiques, les sous-ensembles achronaux d'un espace-temps quelconque gardent localement la propriété de régularité Lipschitz originaire de l'espace de Minkowski.

Proposition 4.11. Soit S un ensemble localement achronal edgeless dans un espace-temps M . Pour tout point x de S il existe une carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$, avec x dans U , telle que $\phi(S \cap U)$ est le graphe d'une application localement Lipschitz.

Démonstration. La proposition découle de la Proposition 4.9 et du Lemme 3.17. \square

Remarque 4.12. Une conséquence de la Proposition 4.11 est que dans tout espace-temps, tout point d'un ensemble achronal edgeless A admet une carte (U, ϕ) telle que $\phi(A \cap U)$ est le graphe d'une application Lipschitz f d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Quitte à diminuer U , on peut de plus supposer que $\phi(U \setminus A)$ soit l'union disjointe des ouverts $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} / t < f(x)\} \cap \phi(U)$ et $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} / t > f(x)\} \cap \phi(U)$, l'un étant le futur de $U \cap A$ dans U , l'autre le passé.

Il existe une classe particulière d'ensembles fermés achronaux edgeless :

Définition 4.13. Soit M un espace-temps. Un sous-ensemble passé (futur) de M est un sous-ensemble U tel que $I^-(U) \subset U$ ($I^+(U) \subset U$).

Remarque 4.14. Soit P un sous-ensemble passé de M , alors $M \setminus P$ est un sous-ensemble futur. En effet soit p un point dans $M \setminus P$ et soit q un point de $I^+(p)$. Par l'absurde on suppose que q appartient à P , alors par hypothèse $I^-(q) \subset P$: on obtient alors que p appartient à P , contrairement à ce qu'avait été supposé. Réciproquement si F est un sous-ensemble futur de M , alors $M \setminus F$ est un sous-ensemble passé.

Lemme 4.15. La frontière d'un sous-ensemble passé (futur) P d'un espace-temps M est un fermé achronal edgeless de M .

Démonstration. Soit p un point de ∂P et soit q un point de $I^-(p)$. L'ensemble $I^+(q)$ est un voisinage ouvert de p , donc il contient un point q' de P . Comme P est un ensemble passé $I^-(q') \subset P$ donc q appartient à P . On vient de prouver que $I^-(p) \subset P$.

Par la Remarque 4.14 l'ensemble $M \setminus P$ est un sous-ensemble futur de M . Par un raisonnement similaire on prouve alors que $I^+(p) \subset (M \setminus P)$. On vient de prouver que $I^+(\partial P)$ et $I^-(\partial P)$ ont intersection vide, donc ∂P est un sous-ensemble achronal de M .

Pour tout p dans ∂P l'ensemble $I^-(p)$ est un ouvert contenu dans P , donc $I^-(p) \subset \text{int}(P)$ et de même $I^+(p) \subset \text{int}(M \setminus P)$. Il s'en suit que ∂P est edgeless. \square

Corollaire 4.16. Soit p un point d'un espace-temps M . La frontière de $I^-(p)$ est un fermé achronal sans bord. Les seules courbes causales qu'il contient sont les géodésiques lumière issues de p .

Démonstration. Le fait que $\partial I^-(p)$ soit fermé achronal sans bord découle du lemme précédent, car $I^-(p)$ est évidemment un sous-ensemble passé de M .

D'après le Corollaire 5.11 tout point q de $\partial I^-(p)$ est lié à p par une géodésique lumière passée. On suppose par l'absurde qu'il existe deux éléments q et q' de $\partial I^-(p)$, $q, q' \neq p$, et liés l'un à l'autre par une courbe causale, par exemple $q' \leq q$. Alors, d'après la Proposition 5.10 on aurait $q' < p$ ce qui est impossible car $\partial I^-(p)$ est achronal. \square

Lemme 4.17. *Soit M un espace-temps. Soit A un sous-ensemble fermé achronal edgeless de M . Alors M est égal à l'union disjointe $I^+(A) \sqcup A \sqcup I^-(A)$.*

Démonstration. L'ensemble $I^+(A)$ est un ensemble futur (cf. Définition 4.13) donc d'après le Lemme 4.15 sa frontière $\partial I^+(A)$ est un sous-ensemble fermé achronal edgeless de M . Comme A est achronal et comme d'après les définitions A est dans l'adhérence de son futur strict, on a $A \subset \partial I^+(A)$, donc A est un fermé de $\partial I^+(A)$. On suppose par l'absurde que $A \neq \partial I^+(A)$.

Soit p un point de la frontière de A dans $\partial I^+(A)$. Soit U un voisinage qui vérifie les propriétés exposées dans le Remarque 4.12, alors U est union disjointe de $I_U^-(\partial I^+(A) \cap U)$, $I_U^+(\partial I^+(A) \cap U)$ et $\partial I^+(A) \cap U$.

Soit p_1 un point dans $I_U^+(p)$ et p_2 un point dans $I_U^-(p)$. Alors $V := I_U^+(p_2) \cap I_U^-(p_1)$ est un voisinage de p dans M contenu dans U . Comme p appartient à $\partial I^+(A)$ on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap (\partial I^+(A) \setminus A) \neq \emptyset$. Soit z un point de $V \cap (\partial I^+(A) \setminus A)$. Soit c_1 une courbe causale passé entre p_1 et z contenue dans V et soit c_2 une courbe causale passée entre z et p_2 contenue aussi dans V . La courbe $c_2 \cup c_1$ est une courbe causale passé entre p_1 et p_2 contenue dans V , et donc dans U , qui ne rencontre pas A : cela contredit le fait que A est edgeless. On obtient alors que $A = \partial I^+(A)$.

D'une façon similaire on prouve que $A = \partial I^-(A)$, ce qui prouve le résultat. \square

5 Principe de causalité et causalité forte

Une propriété naturelle à demander si on veut qu'un espace-temps ait un sens physique est qu'une particule ou un photon ne puisse revenir dans son passé. Comme les trajectoires des particules sont des courbes de type temps et celles des photons sont des géodésiques lumière, cette propriété revient à demander qu'il n'y a pas de courbe de type temps ou lumière périodique.

Définition 5.1. *Un espace-temps M est dit chronologique si il n'y a pas de courbes de type temps périodiques.*

On dit qu'un espace-temps M vérifie le principe de causalité ou qu'il est causal si il n'y a pas de courbe causale périodique.

On remarque qu'un espace-temps qui vérifie le principe de causalité est forcément chronologique.

Exemple 5.2. En ce qui concerne les espace-temps introduits jusqu'à maintenant :

- L'espace de Minkowski et $dS_{1,n}$ vérifient le principe de causalité.
- $AdS_{1,n}$ n'est pas chronologique : l'intersection entre $AdS_{1,n}$ et les sous-espaces de dimension 2 de $\mathbb{R}^{2,n}$, où la forme quadratique est définie négative, produit des courbes de type temps périodiques.

Proposition 5.3. *Tout espace-temps compact a une courbe périodique de type temps.*

Démonstration. Soit M un espace-temps compact. On va montrer qu'il existe un point p dans M tel que $p \in I^+(p)$: par définition du futur d'un point on aura alors une courbe périodique de type temps. La famille $\{I^+(q)\}_{q \in M}$ est un recouvrement ouvert de M , donc par compacité on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{I^+(q_i)\}_{i=1, \dots, n}$. Par définition de recouvrement il existe $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $q_1 \in I^+(q_{k_1})$, si $k_1 = 1$ on a fini, sinon il existe k_2 tel que $q_{k_1} \in I^+(q_{k_2})$. Par la Remarque 3.5 on a $q_1 \in I^+(q_{k_2})$, donc soit $k_2 = 1$, soit $k_2 = k_1$. Dans le premier cas on a fini, sinon on continue.

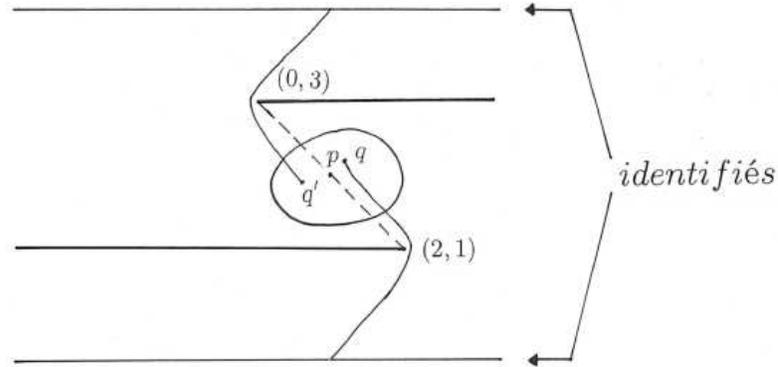
Comme le recouvrement est fini on doit à un moment tomber sur un q_k déjà utilisé. Grâce à la Remarque 3.5 on obtient ainsi $q_k \in I^+(q_k)$ et donc une courbe périodique de type temps. \square

Le principe de causalité à lui seul ne suffit pas à rendre un espace-temps admissible en physique. Il faut aussi être sûr qu'une particule ne puisse pas revenir arbitrairement proche de son passé.

Définition 5.4. *Un espace-temps M vérifie le principe de causalité forte si tout voisinage U d'un point x de M contient un voisinage ouvert V de x causalement convexe.*

Autrement dit M vérifie le principe de causalité forte si, pour tout point x de M et pour tout voisinage U , il existe un voisinage V de x , contenu dans U , tel que toute courbe causale qui sort de V n'y rentre plus.

Exemple 5.5. Un exemple d'espace-temps vérifiant le principe de causalité mais pas celui de causalité forte est le quotient $\mathbb{R}^{1,1}/(x, t) \mapsto (x, t) + (4, 0)$ auquel on enlève les demi-droites $\{t = 1, x \leq 2\}$ et $\{t = 3, x \geq 0\}$. En effet on voit qu'il n'y a pas de courbes causales périodiques, donc l'espace vérifie le principe de causalité, mais sur les points du segment entre $(1, 2)$ et $(3, 0)$ le principe de causalité forte n'est pas vérifié.



Remarque 5.6. On considère un ouvert A d'un espace-temps. Le fait que A vérifie le principe de causalité ou causalité forte et le fait que A soit causalement convexe ne sont pas liés entre eux. Par exemple l'ouvert $A := \{(\theta, x) / \theta \in [0, 2\pi[, x \in]-1, 1[\}$ de l'espace-temps $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ avec la métrique $-d\theta^2 + dx^2$ est causalement convexe mais il ne vérifie pas le principe de causalité. Par contre l'ouvert $B := \{(\theta, x) / \theta \in]0, \pi[, f(\theta) > x > -1 \text{ où } f(\theta) = |\theta - \pi/2|\}$ vérifie le principe de causalité (même forte) mais il n'est pas causalement convexe. Par contre le Lemme de Gauss, Lemme 3.10, implique que toute carte exponentielle d'un espace-temps vérifie localement le principe de causalité forte.

5.1 La causalité en tant que relation d'ordre

Dans un espace-temps on peut toujours définir les relations suivantes :

Définition 5.7. Soit M un espace-temps et x, y deux points de M . Alors :

$$\begin{aligned} x \leq y & \text{ si } y \in J^+(x) \\ x < y & \text{ si } y \in I^+(x) \end{aligned}$$

La proposition suivante est évidente d'après les définitions.

Proposition 5.8. *Sur un espace-temps qui vérifie le principe de causalité la relation \leq est une relation d'ordre. La relation $<$ est transitive et antisymétrique (mais bien sûr pas réflexive).*

Mais en fait on a mieux :

Proposition 5.9. *Soit $x, y, z \in M$, alors*

$$x \leq y \text{ et } y < z \Rightarrow x < z$$

$$x < y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x < z$$

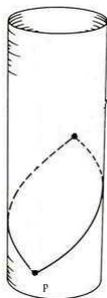
Pour une démonstration de ce résultat voir [44] ou [42]. En fait dans [42] (page 294) la Proposition 5.9 est démontrée en prouvant un résultat plus fort :

Proposition 5.10. *Tout couple de point, reliés par une courbe causale α (différentiable par morceaux) qui n'est pas une géodésique lumière ou une géodésique lumière reparamétrée, peut être relié par une courbe de type temps arbitrairement proche de α .*

Le corollaire suivant nous donne alors une propriété des points qui appartiennent au futur (passé) causal d'un point p mais pas à son futur (passé) strict.

Corollaire 5.11. *Pour tout point p de l'espace-temps et pour tout point q de $J^-(p) \setminus I^-(p)$ (resp. de $J^+(p) \setminus I^+(p)$), il existe un rayon géodésique lumière passé (resp. futur) issu de p qui passe par q .*

Remarque 5.12. Soit $\mathcal{L}^+(p)$ l'union des images des géodésiques lumières passées issues d'un point p de l'espace-temps M . D'après le Corollaire précédent on a l'inclusion $(J^+(p) \setminus I^+(p)) \subset \mathcal{L}^+(p)$ mais l'inclusion réciproque n'est pas toujours vérifiée. Par exemple si $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ avec la métrique $d\theta^2 - dt^2$ on voit que pour tout point p de M l'ensemble $J^+(p) \setminus I^+(p)$ est compact alors que $\mathcal{L}^+(p)$ ne l'est pas.



5.2 Espaces causaux et topologie d'Alexandrov

Les relations $<$ et \leq définis dans la section précédente permettent de généraliser à tout ensemble, qui ne soit même pas une variété, le concept de causalité. Dans [37] Penrose et Kronheimer ont donné une définition axiomatique d'espace causal :

Définition 5.13. Un ensemble N muni de trois relations \prec, \ll et \rightarrow est un *espace causal* si les relations vérifient les conditions suivantes :

1. $x \prec x$,
2. $x \prec y$ et $y \prec z$ implique $x \prec z$,
3. $x \prec y$ et $y \prec x$ implique $x = y$,
4. On ne peut pas avoir $x \ll x$,
5. $x \prec y$ et $y \ll z$ implique $x \ll z$,
6. $x \ll y$ et $y \prec z$ implique $x \ll z$,
7. $x \rightarrow y$ si et seulement si $x \prec y$ et on n'a pas $x \ll y$.

Ces trois relations sont les *relations de causalité* sur N : \prec est la relation *causale* , \ll est la relation de *chronologie* et \rightarrow est la relation d'*horismos* . Dans un espace causal, deux des relations suffisent pour retrouver la troisième. Évidemment tout espace-temps qui vérifie le principe de causalité est un espace causal dans le sens de la définition précédente : en fait les relations \leq et $<$ définies précédemment sont des relations de causalités (voir les Propositions 5.8 et 5.9).

Sur tout espace causal il y a une topologie naturellement définie par les relations de causalité :

Définition 5.14. Soit N un espace causal muni des relations \prec, \ll . La *topologie d'Alexandrov* sur N est la topologie dont une base est constituée par les ensembles

$$W(x, y) := \{z \in N / x \ll z \ll y\}$$

Proposition 5.15. Soit M un espace-temps. La topologie d'Alexandrov définie par les relations de causalité de M , \geq et $<$, coïncide avec la topologie de M si et seulement si M vérifie le principe de causalité forte.

Cette proposition est un résultat classique dû à Kronheimer et Penrose et une preuve peut être trouvée dans [35], Proposition 3.11, chapitre 3.

6 Espace-temps globalement hyperboliques

Définition 6.1. Un espace-temps M est globalement hyperbolique s'il vérifie le principe de causalité forte et que pour tout point x et y de M tels que $y \in J^-(x)$, l'intersection $J^+(y) \cap J^-(x)$ est compacte.

Ceci est la définition classique de l'hyperbolicité globale, voir par exemple [33], [35], [42],[44]. Signalons cependant, comme complément d'information, que dans un article récent, [8], Sanchez a prouvé que si, au lieu de demander que l'espace-temps M vérifie le principe de causalité forte, on demande juste qu'il vérifie le principe de causalité, la définition qu'on obtient est équivalente à celle qu'on vient de donner. Comme dans notre travail cette observation ne joue aucun

rôle, on se contente de donner la définition classique.

Une propriété fondamentale des espaces-temps globalement hyperboliques, et qui nous sera utile par la suite, est le résultat suivant¹ :

Lemme 6.2 ([35] pag. 78 (corollaire 3.32) et [42] pag. 405 (Proposition 8)).
Soit M un espace-temps globalement hyperbolique. Soient $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $p_n \rightarrow p$ et $q_n \leq p_n$ et soient γ_n des courbes causales passées de p_n à q_n . Alors :

–S’il existe $q \neq p$ tel que $q_n \rightarrow q$ et $q \leq p$, il existe une courbe limite causale passée pour les γ_n , qui relie p à q .

–Si la suite $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n’admet pas de valeur d’adhérence, il existe alors une courbe limite pour les γ_n qui est causale passée inextensible.

Une autre propriété fondamentale des espace-temps globalement hyperboliques est :

Proposition 6.3 ([42] à pag. 412). *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique. Alors pour tout point p de M , $J^+(p)$ et $J^-(p)$ sont fermés.*

Corollaire 6.4. *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique. Alors pour tout point p de M , $J^+(p)$ est l’adhérence de $I^+(p)$, de même $J^-(p)$ est l’adhérence de $I^-(p)$.*

Démonstration. D’après le Corollaire 3.13 $J^-(p)$ est toujours contenu dans l’adhérence de $I^-(p)$, et comme d’après la Proposition précédente, il est fermé on a le résultat. \square

Remarque 6.5. D’après le Lemme 3.17 tout point d’un espace-temps admet une base de voisinages ouverts globalement hyperboliques. Soit en effet $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ la carte donné par le Lemme 3.17 et soient $p^+ \in I_U^+(p)$ et $p^- \in I_U^-(p)$. On a $\phi(J_U^\mp(p^\pm))$ est contenu dans $J^\pm(\phi(p^\mp))$, où J^+ et J^- sont le futur et passé causale par rapport à la métrique de $\mathbb{R}^{1,n}$.

L’espace $\mathbb{R}^{1,n}$ est un espace-temps globalement hyperbolique donc quitte à prendre p^+ et p^- plus proches de p on obtient que $J^-(\phi(p^+)) \cap J^+(\phi(p^-))$ est compact et contenu dans $\phi(U)$. Alors $\phi(J_U^-(p^+) \cap J_U^+(p^-))$ est un fermé du compact $J^-(\phi(p^+)) \cap J^+(\phi(p^-))$, il est donc compact. Comme pour tout point $p' \leq q'$ de $J_U^-(p^+) \cap J_U^+(p^-)$ l’ensemble $J_U^-(q') \cap J_U^+(p')$ est contenu dans $J_U^-(p^+) \cap J_U^+(p^-)$, on obtient que $J_U^-(p^+) \cap J_U^+(p^-)$ est un voisinage globalement hyperbolique de p dans M . Les ouverts $I_U^-(p_0) \cap I_U^+(q_0)$ avec $p^- < q_0 < p < p_0 < p^+$ sont alors une base de voisinages ouverts globalement hyperboliques de p .

1. En fait, comme expliqué dans [44], la définition de courbe limite a été conçue de façon à pouvoir disposer cette propriété pour les espace-temps globalement hyperbolique

6.1 Développement de Cauchy d'un sous-ensemble achronal

Définition 6.6. Soit A un sous-ensemble achronal de M . Le *développement de Cauchy futur* (resp. *passé*) de A , noté $\mathcal{D}^+(A)$ (resp. $\mathcal{D}^-(A)$), est l'ensemble des points x de M dans le futur (resp. passé) strict de A tel que toute courbe causale inextensible issue de x et orientée vers le passé (resp. futur) rencontre A . L'union de A , de $\mathcal{D}^+(A)$ et de $\mathcal{D}^-(A)$, est appelé *développement de Cauchy* de A , il est noté $\mathcal{D}(A)$.

Proposition 6.7 ([42] (page 421).). *Soit A un sous-ensemble achronal de M . Alors si $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ est non vide, il est globalement hyperbolique.*

Proposition 6.8 ([42], pag. 423). *Soit A un sous-ensemble achronal d'un espace-temps M . Si $p \in \text{int}(\mathcal{D}(A) \setminus I^-(A))$, alors $J^-(p) \cap \mathcal{D}^+(A)$ est compact.*

Lemme 6.9. *Soit A une sous-ensemble achronale edgeless d'un espace-temps M . Alors si $\mathcal{D}^+(A) = \emptyset$ ($\mathcal{D}^-(A) = \emptyset$), pour tout point $p \in A$ il existe une géodésique lumière passée (future) $c : [0, \infty[\rightarrow M$ issue de p inextensible dans M telle que $c \cap A$ est une géodésique lumière passé (future) contenue A qui n'a pas de point limite passé (futur) dans A .*

Démonstration. On montre que si $\mathcal{D}^+(A) = \emptyset$ alors pour tout point $p \in A$ il existe un rayon géodésique lumière passé issu de p contenu dans A .

Soit p un point de A et soit $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans $I^+(p)$ qui converge vers p . Comme $\mathcal{D}^+(A) = \emptyset$, pour tout n dans \mathbb{N} il existe une courbe causale passée inextensible c_n issue de p_n qui ne rencontre pas A . Soit V un voisinage ouvert globalement hyperbolique de p (cf. Remarque 6.5). Quitte à restreindre V on peut supposer que $V \setminus A$ est l'union disjointe de deux ouverts $V^+ = I_V^+(A \cap V)$ et $V^- = I_V^-(A \cap V)$ (voir Remarque 4.12). Soit U un voisinage relativement compact de p contenu dans V .

Comme les courbes c_n sont inextensibles elles sortent de \overline{U} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit q_n un point dans $\partial U \cap c_n$. Comme ∂U est compact, quitte à remplacer $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ par une sous-suite on peut supposer que $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point q de ∂U , et, comme $p \in \text{int}(U)$, on a $q \neq p$.

Comme U est globalement hyperbolique d'après le Lemme 6.2 il existe une courbe causale passée entre p et q contenue dans V . Comme les c_n sont contenues dans V^+ , car elles ne rencontrent pas A , on obtient que q appartient à $V^+ \cup (A \cap V)$. Par ailleurs, $J_V^-(p)$ est contenu dans $V^- \cup (A \cap V)$, on obtient donc que q appartient à $A \cap V$. D'après la Proposition 5.10, comme A est achronale, la courbe c est une géodésique lumière contenue dans A .

On prolonge c en une géodésique lumière passé inextensible de M , $c : [0, \infty[\rightarrow M$. D'après le Proposition 5.10 et comme A est achronal (et connexe) l'intersection $c \cap A$ est connexe. Soit $T = \sup\{t \in]0, \infty[: c([0, t]) \subset A\}$. On suppose par l'absurde

qu'il existe un point limite passé q' pour $c \cap A$ contenu dans A , alors $q' = c(T)$. Par le même raisonnement qu'avant il existe une géodésique lumière c' , contenue dans A , entre q' et un point q'' de A . D'après la Proposition 5.10 et comme A est achronal, c' est contenue dans c . Donc il existe un $t > T$ tel que $c([0, t]) \in A$, cela contredit la définition de T . \square

Dans [42] page 420 il est montré le lemme suivant :

Lemme 6.10. *Soit A un sous-ensemble achronal et $p \in \text{int}\mathcal{D}(A)$. Alors toute courbe causale inextensible qui passe par p rencontre les deux ouverts $I^+(A)$ et $I^-(A)$.* \square

D'après ce résultat on peut montrer la réciproque du Lemme 6.9 quand A est fermé :

Lemme 6.11. *Soit A un fermé achronal edgeless d'un espace-temps M . On suppose que pour tout point $p \in A$ il existe une géodésique lumière passée (future) $c : [0, \infty[\rightarrow M$ issue de p inextensible dans M telle que $c \cap A$ est une géodésique lumière passé (future) contenue A qui n'a pas de point limite passé (futur) dans A . Alors $\mathcal{D}^+(A) = \emptyset$ ($\mathcal{D}^-(A) = \emptyset$).*

Démonstration. Soit q un point dans $I^+(p)$ et soit γ une courbe causale passée entre q et p . Comme A est fermé, la courbe causale c est inextensible dans M , donc la courbe $\gamma \cup c$ est une courbe causale inextensible issue de q qui ne rencontre pas $I^-(A)$. D'après le Lemme 6.10 le point q ne peut pas appartenir à $\mathcal{D}^+(A)$. Comme le raisonnement peut être répété pour tout p dans A et q dans $I^+(p)$ on obtient $\mathcal{D}^+(A) = \emptyset$. \square

Définition 6.12. *Soit A une partie achronale edgeless d'un espace-temps M . On note*

$$\begin{aligned}\partial^+ \mathcal{D}(A) &:= \partial \text{int}(\mathcal{D}(A)) \cap I^+(A) \\ \partial^- \mathcal{D}(A) &:= \partial \text{int}(\mathcal{D}(A)) \cap I^-(A)\end{aligned}$$

Lemme 6.13. *Soit A une partie achronale edgeless d'un espace-temps M . L'ensemble $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ ($\partial^- \mathcal{D}(A)$) est un sous-ensemble achronal edgeless de M tel que son développement de Cauchy futur (passé) est vide.*

Démonstration. Soit p un point de $\mathcal{D}^+(A) \cup I^-(A) \cup A$ et soit c une courbe causale passé inextensible issue de p . Comme c doit rencontrer A , on obtient que tout point de c appartient à $\mathcal{D}^+(A) \cup I^-(A) \cup A$, donc $I^-(p) \subset \mathcal{D}^+(A) \cup I^-(A) \cup A$ pour tout p , ce qui prouve que $\mathcal{D}^+(A) \cup I^-(A) \cup A$ est un ensemble passé.

L'ensemble $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ est un ouvert de la frontière $\partial(\mathcal{D}^+(A) \cup I^-(A) \cup A)$ car il est égal à $\partial(\mathcal{D}^+(A) \cup I^-(A) \cup A) \cap I^+(A)$. D'après le Lemme 4.15 $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ est un sous-ensemble achronal edgeless de M .

Prouvons que le développement de Cauchy futur de $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ est vide.

Soit par l'absurde un point q du développement de Cauchy futur de $\partial^+ \mathcal{D}(A)$. Alors tout point p dans $I^-(q) \cap I^+(\partial^+ \mathcal{D}(A))$ appartient à l'intérieur du développement de Cauchy futur de $\partial^+ \mathcal{D}(A)$. En particulier toute courbe causale passé inextensible c issue de p rencontre $\partial^+ \mathcal{D}(A)$.

Si c rentre dans $\mathcal{D}(A)$ par définition elle rencontre A . Comme par hypothèse p n'appartient pas à $\mathcal{D}(A)$, car $p \in I^+(\partial^+ \mathcal{D}(A))$, il existe au moins une courbe causale inextensible passée $\gamma : [0, \infty[\rightarrow M$ qui ne rencontre pas $\mathcal{D}(A)$.

Si $\partial^+ \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ on a fini, car γ ne peut pas rencontrer $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ ce qui contredit l'hypothèse du départ. On suppose alors $\partial^+ \mathcal{D}(A) \not\subset \mathcal{D}(A)$. Alors par hypothèse γ rencontre $\partial^+ \mathcal{D}(A)$.

Soit $T > 0$ tel que $\gamma(T) \in \partial^+ \mathcal{D}(A)$. Soit $T_1 := \sup\{t \geq T : \gamma([T, t]) \subset \partial^+ \mathcal{D}(A)\}$. On suppose $T_1 \neq \infty$ et qu'il est un maximum, donc $\gamma(T_1)$ appartient à $\partial^+ \mathcal{D}(A)$. Comme $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ est un sous-ensemble achronal edgeless d'après la Remarque 6.5 il existe un voisinage ouvert U de $\gamma(T_1)$ tel que $U \setminus \partial^+ \mathcal{D}(A)$ est union disjointe de deux ouvert U^+ et U^- l'un contenu dans $I^+(\partial^+ \mathcal{D}(A))$ et l'autre contenu dans $I^-(\partial^+ \mathcal{D}(A))$. Quitte à prendre un voisinage U plus petit on peut supposer que U^- contenu dans $\mathcal{D}(A)$, car $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ est un ouvert de $\partial \mathcal{D}(A)$. Pour $t > T_1$, $t - T_1$ suffisamment petit, $\gamma(t)$ appartient à U^- , et cela est absurde car on avait supposé que γ ne rencontre pas $\mathcal{D}(A)$.

Donc ou $T_1 = \infty$ ou $\gamma(T_1)$ n'appartient pas à $\partial^+ \mathcal{D}(A)$. Comme $p \in \text{int}(\partial^+ \mathcal{D}(A))$, dans les deux cas on contredit la Proposition 6.8 car $\gamma([T, T_1])$ est un fermé non compact contenu dans $J^-(p) \cap \partial^+ \mathcal{D}(A)$. Donc le lemme est prouvé. \square

Corollaire 6.14. *Si A est fermé dans M le rayon α est une géodésique lumière passée inextensible issue de p contenue dans $\partial^+ \mathcal{D}(A)$.*

Démonstration. Le corollaire est une conséquence directe du Lemme 6.9 et du Lemme 6.13. \square

Remarque 6.15. On regarde le cas des fermés achronaux de l'espace de Minkowski. D'après le Lemme 6.11 le développement de Cauchy des hyperplans lumières de $\mathbb{R}^{1,n}$ est vide. Soit A un fermé achronal edgeless de l'espace de Minkowski. D'après le Lemme 6.9 le développement de Cauchy de A est vide il est feuilleté par des géodésiques lumières. En fait d'après la Proposition 1.5.8 et le Lemme 1.5.9 de [5], où les fermés achronal edgeless de $\mathbb{R}^{1,n}$ sont étudiés en détail, on obtient que $\mathcal{D}(A)$ est vide si et seulement si A est un hyperplan lumière de $\mathbb{R}^{1,n}$.

6.2 Hypersurfaces de Cauchy et Théorème de Geroch

Définition 6.16. Une *hypersurface de Cauchy* de M est un fermé achronal edgeless $\Sigma \subset M$ tel que $\mathcal{D}(\Sigma) = M$.

Définition 6.17. Une *fonction temps* sur un espace-temps M est une application continue $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui croît strictement le long de toute courbe causale future. Une *fonction-temps de Cauchy* est une fonction-temps telle que sa restriction à toute courbe causale inextensible est surjective.

Théorème 6.18. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) M est globalement hyperbolique
- 2) M admet une hypersurface de Cauchy
- 3) M admet une fonction-temps de Cauchy.

Démonstration. (Idée) L'implication 2) \Rightarrow 1) est conséquence de la Proposition 6.7. Comme l'existence d'une fonction temps de Cauchy implique que l'espace-temps vérifie le principe de causalité forte et comme on voit facilement que les hypersurfaces de niveau de la fonction-temps de Cauchy sont des hypersurfaces de Cauchy, on a 3) \Rightarrow 2).

La partie difficile du théorème est l'implication 1) \Rightarrow 3). Ce résultat, communément connu comme théorème de Geroch, est montré en détail dans [26] ou aussi [19, pag. 1155]. On se limite ici à donner un schéma de la preuve. Sur M on considère une mesure μ tel que $\mu(M) = 1$, μ charge les ouverts, $\mu(\partial I^\pm(p)) = 0$ pour tout point p de M plus une autre hypothèse technique sur la régularité de μ impliquant que l'image d'un plongement localement Lipschitz est de mesure nulle. Une telle mesure existe toujours sur une variété lorentzienne : il suffit de prendre une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On définit alors des applications $t^+ : M \rightarrow \mathbb{R}$ et $t^- : M \rightarrow \mathbb{R}$ par $t^\pm(p) := \mp \mu(I^\pm(p))$. Il est intuitivement assez clair que t^+ et t^- croissent le long de toute courbe causale future : en effet soient p et q deux points dans M tels que $p \leq q$ et $p \neq q$, alors $I^-(p) \subset I^-(q)$ et, d'après la Proposition 8.9, qu'on verra dans la section suivante, l'hyperbolicité globale de M implique que cette inclusion est stricte. Comme μ charge les ouverts, il suffit de montrer que $I^-(q) \setminus I^-(p)$ est d'intérieur non vide pour avoir que t^- est croissant le long de toute courbe causale. On admet ce fait, tout comme le fait que t^+ et t^- soient continues. Les fonctions t^+ et t^- sont alors des fonctions temps. C'est à partir de ces fonctions temps qu'on pourra construire deux fonctions temps de Cauchy T^+ et T^- et donc prouver le théorème. \square

Remarque 6.19. Les fonctions temps de Cauchy T^+ et T^- , obtenues dans la preuve du Théorème 6.18, sont seulement continues. Il s'avère qu'on peut montrer mieux : tout espace-temps globalement hyperbolique admet une fonction temps de Cauchy lisse (voir [10])

Soit $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction-temps de Cauchy lisse, alors son gradient ∇t est un champ de vecteurs partout causaux. Soit $\phi_{\nabla t}^x$ le flot associé, ses orbites sont des courbes causales inextensibles. Maintenant si on fixe un niveau de t , $\{t = a\} =: S \subset M$, on peut définir l'application $s : M \rightarrow S$ qui à un point

$x \in M$ associe l'unique intersection $s(x)$ de la courbe $\phi_{\nabla_t}^r(x)$ avec l'hypersurface de Cauchy S . Le point x est alors de la forme $\phi^{t(x)}(s(x))$, et l'application

$$\begin{aligned} M &\rightarrow S \times \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (s(x), t(x)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Comme d'après le Théorème 6.18 et la Remarque 6.19 tout espace-temps globalement hyperbolique admet une fonction-temps de Cauchy différentiable on obtient :

Corollaire 6.20. *Tout espace-temps globalement hyperbolique M est difféomorphe à un produit $S \times \mathbb{R}$ de sorte que chaque $S \times \{t\}$ est une hypersurface de Cauchy, et que la projection sur le facteur \mathbb{R} est un temps de Cauchy.*

Il n'est pas vrai en général qu'un fermé achronal edgeless d'un espace-temps globalement hyperbolique est une hypersurface de Cauchy. Par exemple le lieu $\{x \in \mathbb{R}^{1,n} / \|x\|_{1,n} = -1\}$, est un fermé achronal edgeless qui n'est pas intersecté par les droites lumières passant par l'origine de $\mathbb{R}^{1,n}$. Les deux résultats suivants montrent que cela est vrai quand on rajoute certaines hypothèses.

Proposition 6.21. *Soit S un fermé achronal edgeless compact d'un espace-temps globalement hyperbolique M , alors S est une hypersurface de Cauchy de M .*

Démonstration. Par hypothèse S est un fermé achronal edgeless. Pour vérifier qu'il s'agit d'une hypersurface de Cauchy de M nous devons juste montrer que S est intersecté par toute courbe causale de M .

On commence par montrer les égalités $\partial I^-(S) = \partial I^+(S) = S$. On suppose par l'absurde qu'il existe un point $p \in \partial I^-(S)$ qui n'appartient pas à S . Soit $\{p_n\}$ une suite dans $I^-(S)$ qui converge vers p . Par définition pour chaque n il existe un point z_n dans S tel que $p_n \in I^-(z_n)$. Comme S est compacte les z_n ont une valeur d'adhérence qu'on appelle z . En passant éventuellement à une sous-suite on est alors sous les hypothèses du Lemme 6.2 : il existe une courbe causale passée γ entre z et p . Comme $p \in \partial I^-(S) \setminus S$ la courbe γ doit être forcément un morceau de géodésique lumière (voir Corollaire 5.11). Dans ce cas tout point $p' \neq p$ appartenant à γ est dans $\partial I^-(S) \setminus S$.

Soit maintenant une courbe de type temps c entre un point p' de γ et un point $z' \in I^+(z)$. Comme S est edgeless, par définition, si p' et z' sont suffisamment proches de z , la courbe c doit rencontrer S en un point q . D'après la Proposition 5.10 on a alors $p \in I^-(q)$, donc $p \in I^-(S)$, qui est absurde.

Le même raisonnement permet de montrer que $\partial I^+(S) = S$, donc on obtient $M = I^+(S) \sqcup S \sqcup I^-(S)$.

Maintenant soit Σ une hypersurface de Cauchy entièrement contenue dans $I^+(S)$. Une hypersurface de Cauchy de cette sorte existe car S est compacte : en fait si $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction temps de Cauchy, on a que τ restreinte à S admet

un maximum A , on pose alors $\Sigma := \tau^{-1}(b)$ avec $b > A$.

Soit alors p un point dans $I^-(S)$ et soit α une courbe causale future inextensible issue de p . La courbe α doit rencontrer Σ , donc, comme Σ est strictement contenue dans $I^+(S)$, α doit sortir de l'ouvert $I^-(S)$ avant de rencontrer Σ et donc α doit rencontrer la frontière de $I^+(S)$. On a montré que la frontière de $I^+(S)$ est exactement S donc α rencontre S .

On vient de prouver que $I^-(S)$ est égal au développement de Cauchy passé de S , l'ouvert $\mathcal{D}^-(S)$. Un raisonnement analogue (en choisissant cette fois Σ dans $I^-(S)$) permet de prouver aussi que $I^+(S) = \mathcal{D}^+(S)$, ce qui achève la preuve de la proposition. \square

Proposition 6.22. *Un fermé acausal edgeless Σ de M est une hypersurface de Cauchy si et seulement si il rencontre toute géodésique lumière inextensible de M .*

Démonstration. Le résultat est prouvée dans [42], Corollaire 54, pag. 431. \square

6.3 Exemples

Développements de Cauchy de fermés achronaux

D'après la Proposition 6.7 un moyen rapide de produire des espace-temps globalement hyperboliques est tout simplement de considérer le développement de Cauchy d'un fermé achronal. Encore faut-il que ce développement ait la bonne topologie!

Lemme 6.23. *Le développement de Cauchy d'un ensemble acausal edgeless est un ouvert.* \square

Ce lemme est prouvé dans [42] page 425 dans le cas où le fermé acausal edgeless est une hypersurface de l'espace-temps, ce qui *in fine* est le cas général d'après le Lemme 4.11. D'après [42] page 423 l'hypothèse "acausal" ne peut pas être remplacée par l'hypothèse plus faible "achronal".

Le lemme suivante découle directement d'après la Définition 6.1 :

Lemme 6.24. *Tout ouvert causalement convexe d'un espace-temps globalement hyperbolique est globalement hyperbolique.*

Espaces de Sitter et de Anti de Sitter

L'intersection de $dS_{1,n}$ avec les hyperplans spatiaux de $\mathbb{R}^{1,n}$ sont des hypersurfaces de Cauchy. L'espace de Sitter est lui aussi globalement hyperbolique.

Par contre l'espace $AdS_{1,n}$ n'est pas causal donc n'a aucun espoir d'être globalement hyperbolique. Même son revêtement universel $\widetilde{AdS}_{1,n}$, qui est fortement causal, n'est pas globalement hyperbolique.

L'hyperbolicité globale de l'espace de Sitter et la non globale hyperbolicité de l'espace anti-de Sitter est plus facile à étudier si on considère leurs modèles conformes, c'est-à-dire si on les plonge dans l'espace d'Einstein comme décrit dans la section 2.7. On repousse donc cette étude à ce moment là.

Espace de Minkowski

On voit facilement, en utilisant la Définition 6.1 que l'espace de Minkowski est globalement hyperbolique. Un exemple d'hypersurface de Cauchy pour $\mathbb{R}^{1,n}$ est l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^{1,n} / x_0 = 0\}$, et une fonction-temps de Cauchy est juste $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto x_0$.

Lemme 6.25. *Toute hypersurface de Cauchy de $\mathbb{R}^{1,n}$ est le graphe d'une application 1-Lipschitz de \mathbb{R}^n à \mathbb{R} .*

La réciproque, à savoir que le graphe d'une application 1-Lipschitz de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} soit une hypersurface de Cauchy pour $\mathbb{R}^{1,n}$, n'est pas toujours vrai. Par exemple le développement de Cauchy du fermé achronal edgeless $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{1,n} / -t^2 + \|x\|^2 = -1\}$ est le futur du point $(0, 0)$ et non l'espace de Minkowski tout entier. D'après le Lemme 6.23 le développement de Cauchy d'un fermé acausal edgeless est un ouvert globalement hyperbolique de l'espace de Minkowski. Ces ouverts ont été étudiés et classifiés dans [5] (pages 2-20). On expose ici brièvement ces résultats de classification.

Définition 6.26. *Un domaine de dépendance régulier futur (passé) est un ouvert de $\mathbb{R}^{1,n}$ qui peut être écrit comme l'intérieur de l'intersection du futur (passé) strict d'au moins deux hyperplans lumières non parallèles.*

On arrive facilement à visualiser certains domaines de dépendance : par exemple, l'intersection du futur de deux hyperplans lumières ; un autre exemple est l'intersection du futur de tous les hyperplans lumières passant par un point donné, *i.e.* le futur de ce point. On voit que les domaines de dépendance réguliers sont toujours globalement hyperboliques : en effet il est évident que le futur de tout point dans un domaine de dépendance est contenu dans le domaine même et donc aussi l'intersection de ce futur avec le passé de n'importe quel point ; de plus cette intersection est compacte (car elle l'est déjà dans Minkowski) et donc tout domaine de dépendance régulier est globalement hyperbolique.

Proposition 6.27. *Soit M un ouvert globalement hyperbolique de l'espace de Minkowski, développement de Cauchy d'un fermé achronal edgeless. On est alors dans une des situations suivantes :*

1) M est un domaine de dépendance régulier

- 2) M est le futur d'un hyperplan lumière
 3) M est l'intersection entre le futur d'un hyperplan lumière et le passé d'un autre hyperplan lumière parallèle au premier.

D'après le Corollaire 6.20, tout espace globalement hyperbolique a une hypersurface de Cauchy, et donc tout ouvert globalement hyperbolique de Minkowski est un développement de Cauchy d'un ensemble achronal edgeless. Cependant, l'ensemble achronal peut ne pas être fermé, et par suite il existe des ouverts globalement hyperboliques de l'espace de Minkowski qui ne rentrent pas dans les cas traité par la Proposition précédente.

L'exemple le plus simple d'ouvert globalement hyperbolique de l'espace de Minkowski sans hypersurface de Cauchy fermée dans l'espace de Minkowski est l'intersection $I^-(p) \cap I^+(q)$ (quand elle est non vide) entre deux points p et q de l'espace de Minkowski.

7 Espace-temps statiques

Définition 7.1. On dit qu'un espace-temps globalement hyperbolique (M, g) est statique lorsqu'il existe un champ de Killing partout de type temps X et une hypersurface plongée complète Σ partout orthogonale à X .

On note ϕ_X^t le flot du champ de vecteurs X . Chaque orbite de ϕ_X^t est une courbe temporelle inextensible et doit donc rencontrer Σ . On peut identifier l'espace des orbites de ϕ_X^t à l'hypersurface de Cauchy Σ . L'application $(x, t) \mapsto \phi_X^t(x)$ est alors un difféomorphisme entre $\Sigma \times \mathbb{R}$ et M . Comme X est un champ de vecteurs Killing la métrique Lorentzienne se décompose alors sous la forme :

$$g_0(x) - a(x)dt^2$$

où g_0 est la métrique induite sur Σ et où l'application $x \in \Sigma \mapsto a(x) \in]0, +\infty[$ est définie par $a(x) = -g_x(X_x, X_x)$.

L'espace de Minkowski est un exemple d'espace-temps statique où Σ est un espace Euclidien et a la fonction constante égale à 1 partout.

On va voir que les propriétés démontrées pour les ensembles achronaux et acausaux de l'espace de Minkowski, en particulier la Proposition 4.6 et le Corollaire 4.9, se généralisent à tout espace-temps statique.

Remarque 7.2. Les métriques $g_0(x) - a(x)dt^2$ et $g_0(x)/a(x) - dt^2$ sont obtenues l'une de l'autre en multipliant par une fonction positive. On verra dans le chapitre 2 que cela implique que les deux espace-temps qu'on obtient ont la même structure causale. En particulier les mêmes sous-ensembles achronaux et causaux, et les courbes causales sont les mêmes en tant que lieu géométrique. On ne perd donc aucune généralité en se restreignant au cas particulier où métrique s'écrit sous la forme $g - dt^2$, où g est une métrique riemannienne sur Σ .

Proposition 7.3. *Soit M un espace-temps statique s'identifiant à $\Sigma \times \mathbb{R}$ avec la métrique $g - dt^2$. Alors toute partie achronale A de M est le graphe d'une application $f : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 1-Lipschitz pour la métrique g sur Σ . L'ensemble U est un ouvert si et seulement si A est edgeless. De plus A est un fermé achronal edgeless si et seulement si $U = \Sigma$.*

Démonstration. Tout d'abord, on observe que pour tout point (x, t) et (x', t') de $\Sigma \times \mathbb{R}$, on a $(x, t) \leq (x', t')$ si et seulement si $t' - t$ majore la distance $d_0(x, x')$ pour la métrique g (la preuve est similaire à celle faite pour l'espace de Minkowski, cf Lemma 3.14)

Les courbes $t \mapsto (x, t)$, avec x fixé sur Σ , sont des courbes de type temps de M . Elles rencontrent donc chacune une seule fois le sous-ensemble A et l'hypersurface de Cauchy $\Sigma \times \{0\}$. Ceci revient à dire que la restriction à A de la projection $s : M \rightarrow \Sigma$ qui à (x, t) associe x est injective. On note U son image dans Σ . L'application $f := (s|_A)^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est alors bien définie et il est clair que son graphe est le sous-ensemble A .

Soient x_1 et x_2 deux points de U . Comme A est achronal $(x_2, f(x_2))$ n'appartient ni à $I^+(x_1, f(x_1))$ ni à $I^-(x_1, f(x_1))$: il découle alors de notre remarque préliminaire que f est 1-Lipschitz.

Le fait que A est edgeless si et seulement si U est ouvert provient directement de la définition de f . Comme s est 1-Lipschitz, A est fermé si et seulement si son image U est fermée elle aussi. Donc, par connexité de Σ , si A est un fermé achronal edgeless alors $U = \Sigma$. Inversement, si $U = \Sigma$, comme f est continue, le graphe de f est fermé, et il est aussi edgeless car U est aussi ouvert. On obtient alors bien que A est un fermé achronal edgeless si et seulement si $U = \Sigma$, et la proposition est prouvée. \square

Corollaire 7.4. *Soit M un espace-temps statique s'identifiant à $\Sigma \times \mathbb{R}$ et tel que S est compacte. Alors les hypersurfaces de Cauchy de M sont exactement les graphes d'applications 1-Lipschitz $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.*

Démonstration. Toute hypersurface de Cauchy est un fermé achronal edgeless, la proposition précédente implique alors qu'il est le graphe d'une application 1-Lipschitz de S dans \mathbb{R} . Réciproquement si on se donne une application 1-Lipschitz $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, toujours d'après la Proposition précédente on a que son graphe G est un fermé achronal edgeless. De plus G est compact, car f est continue et S est compact. Donc d'après la Proposition 6.21 on a le résultat. \square

Une autre propriété intéressante des espace-temps statiques est la suivante :

Lemme 7.5. *Soit M un espace-temps statique et A une hypersurface spatiale complète immergée dans M . Alors A est le graphe d'une application 1-contractante $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. En particulier A est acausale.*

On remarque qu'à priori une hypersurface spatiale complète immergée dans M est achronale seulement localement et non globalement.

8 Espace-temps causalement continu et distinguants

Le concept d'espace-temps causalement continu a été introduit par Hawking et Sachs dans [32].

Définition 8.1. Soit une F application qui à chaque point p d'un espace-temps M associe un ouvert $F(p)$.

On dit que F est *continue intérieurement* en p si pour tout ensemble compact $K \subset F(p)$ il existe un voisinage U de p tel que $K \subset F(q)$ pour tout q dans U .

On dit que F est *continue extérieurement* en p si pour tout ensemble compact $K \subset M \setminus \overline{F(p)}$ il existe un voisinage U de p tel que $K \subset M \setminus \overline{F(q)}$ pour tout q dans U .

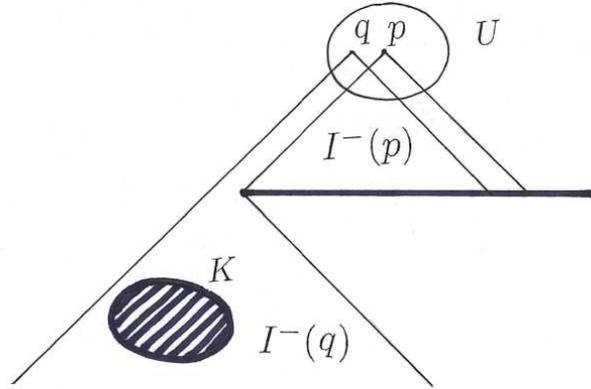
Lemme 8.2. Soit M un espace-temps, alors l'application $p \in M \mapsto I^-(p)$ est continue intérieurement.

Démonstration. Soit $K \subset I^-(p)$. La famille d'ouverts $\{I^-(q) / q \in I^-(p)\}$ est un recouvrement ouvert de $I^-(p)$ et donc de K . On extrait un sous-recouvrement fini $\{I^-(q_i) / i = 1, \dots, m\}$, alors l'ensemble $U := \bigcap_{i=1}^m I^+(q_i)$ est un ouvert tel que le passé strict de chacun de ses points contient K . \square

De la même façon on prouve que dans tout espace-temps M l'application $p \in M \mapsto I^+(p)$ est aussi continue intérieurement.

Définition 8.3. Un espace-temps est *causalement continu* si les applications $p \in M \mapsto I^-(p)$ et $p \in M \mapsto I^+(p)$ sont continues extérieurement.

Grâce au Lemme 3.14 il est facile de voir que l'espace de Minkowski est causalement continu. La figure qui suit montre que $\mathbb{R}^{1,1} \setminus \{(x, 0) / x \geq 0\}$ n'est pas causalement continu : en effet $x \in M \mapsto I^-(x)$ n'est pas extérieurement continue en p .



Proposition 8.4 ([32]). *Un espace-temps causalement continu vérifie le principe de causalité forte.*

Théorème 8.5 ([32], page 292). *Un espace-temps M est causalement continu si et seulement si les deux applications t^+ et t^- (définies dans la preuve du théorème 6.18) sont des fonctions temps pour M .*

Comme dans la preuve du Théorème 6.18 on montre que si M est globalement hyperbolique alors t^+ et t^- sont des fonctions temps de Cauchy, on a le corollaire suivant :

Corollaire 8.6. *Un espace-temps globalement hyperbolique est causalement continu.*

La propriété qui jouera un rôle central au chapitre 4 est la suivante :

Définition 8.7. *Un espace-temps M est dit distinguant si les deux applications $p \in M \mapsto J^+(p)$ et $p \in M \mapsto J^-(p)$ sont injectives.*

Proposition 8.8. *Tout espace-temps causalement continu est distinguant.*

La proposition suivante est donc un corollaire immédiat du Corollaire 8.6 :

Proposition 8.9. *Tout espace-temps globalement hyperbolique est distinguant.*

Chapitre 2

Espace-temps conformément plats

1 Causalité et applications conformes

Dans le premier chapitre on a défini la structure causale d'un espace-temps comme étant une structure déterminée par la métrique lorentzienne de l'espace-temps en question. Maintenant on se pose la question suivante : est-il possible que deux métriques lorentziennes différentes, définies sur une même variété, définissent la même structure causale ?

Définition 1.1. *Soit g et h deux métriques sur une variété M . On dit que g et h sont dans la même classe conforme s'il existe une application $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout x in M , $g_x = e^{\lambda(x)}h_x$.*

Changer la métrique en une autre métrique dans la même classe conforme revient donc à multiplier, en chaque espace tangent, la métrique d'origine par une constante positive. Le type causal des vecteurs n'est alors pas modifié. La structure causale de l'espace-temps n'est donc pas modifiée si on change de métrique dans la même classe conforme : une courbe causale, temps ou espace est encore une courbe causale, temps ou espace, le passé et futur de tout point reste inchangé, une hypersurface de Cauchy reste encore une hypersurface de Cauchy, etc...

"Appartenir à la même classe conforme" est une relation d'équivalence sur l'espace des métriques, de même signature, définies sur M . C'est pour cette raison qu'on utilise la terminologie "classe" conforme.

On appellera *espace-temps conforme* ou simplement espace-temps, quand il n'y pas d'ambiguïté, un espace-temps muni d'une classe conforme de métrique lorentziennes. Dans ce contexte les difféomorphismes conformes jouent le rôle des isométries : on ne fait pas la distinction, du point de vue causal, entre deux espace-temps qui sont difféomorphes par un difféomorphisme conforme.

Définition 1.2. Soient M et N variétés muni respectivement des métriques g et g' . Un difféomorphisme local $f : M \rightarrow N$ est dit *conforme* si la métrique f^*g' est dans la même classe conforme de g .

On a vu que deux métriques dans la même classe conforme définissent la même structure causale. Par contre les géodésiques définies par ces deux métriques n'ont en général aucune raison d'être les mêmes. cela dérive du fait que la connexion de Levi-Civita n'est pas préservée par les changements conformes. Donc l'équation qui définit les géodésiques n'est pas la même. La formule qui donne l'expression explicite de la modification de la connexion de Levi-Civita lorsqu' on change de métrique dans la même classe conforme, peut être trouvé dans [35], chapitre 9. Dans le même chapitre, Lemme 9.17, est montré le résultat suivant :

Lemme 1.3. *Soit (M, g) un espace-temps et $f : (M, g) \rightarrow (M, g)$ une application conforme, alors f envoie géodésiques lumières sur géodésiques lumières (ici on considère les géodésiques comme non paramétrées)*

Ce résultat n'est pas si étonnant qu'il peut paraître au premier abord si on considère les remarques suivantes : tout d'abord, cette propriété est locale , on peut donc se ramener au cas où la variété est globalement hyperbolique et f un difféomorphisme. Supposons pour simplifier que M soit un ouvert de l'espace de Minkowski. Soit p un point de M , on note $q = f(p)$. Soit α une géodésique lumière qui passe par p , on veut prouver que $f \circ \alpha$ est une pré-géodésique lumière pour la métrique g . On sait que les vecteurs tangents à la courbe $f \circ \alpha$ sont tous de type lumière. De plus, f préserve la structure causale de M , donc $f(\partial I^\pm(p)) = \partial I^\pm(q)$. Alors $f \circ \alpha$ est une courbe C^1 de type lumière entièrement contenue dans $\partial I^\pm(q)$. Or dans l'espace de Minkowski, on voit facilement que toute courbe causale contenue dans le cône des vecteurs lumières est une pré-géodésique lumière, ce qui est donc la nature, comme voulu, de $f \circ \alpha$.

Ce qui précède n'est bien sûr qu'une esquisse de preuve dans un cas très particulier, mais elle donne une idée intuitive de la raison pour laquelle le résultat est vrai. Pour une autre preuve du Lemme 1.3 , basée sur le fait que les géodésiques lumières sont les solutions dans le niveau 0 d'un système hamiltonien, voir le chapitre 1, page 14, de [24].

Remarque 1.4. Le fait que la structure causale d'un espace-temps est un invariant conforme implique que toute propriété n'impliquant que la structure causale, telle l'achronalité, la forte causalité, l'hyperbolicité globale, etc..., reste vraie si on modifie la métrique en restant dans la même classe conforme.

Remarque 1.5. On a vu que si deux métriques lorentziennes g et g' , définies sur une variété M , appartiennent à la même classe conforme alors elles définissent sur M la même structure causale. Dans [34] S.W. Hawking, A.R. King et P.J.W.

McCarthy montrent que si g et g' définissent sur M la même structure d'espace-temps et que cette structure est fortement causal, alors g et g' appartiennent à la même classe conforme.

D'après les résultats de la Section 3.1 le cœur de cette preuve est de montrer que, étant donné un espace-temps M fortement causal, tout homéomorphisme F de M qui préserve la structure causale est différentiable. Cela est le contenu du Corollaire au Théorème 5 page 180 de [34]. La preuve du Théorème 6 de [34] en découle alors facilement. On obtient donc que l'application identité de M , qui est bien sûr un homéomorphisme de la structure causale, est une application conforme : donc g et g' sont conformément équivalentes.

1.1 Rigidité des applications conformes et théorème de Liouville

Le théorème de Liouville est à l'origine un théorème de géométrie riemannienne conforme, dont une preuve, dans le cas général des métriques pseudo-riemanniennes conformes, a été donnée par C. Frances dans [24]. Ce théorème est centrale dans l'étude des espace-temps conformément plats de dimension supérieure ou égal à 3.

À la base du théorème de Liouville il y a un phénomène général : la rigidité des applications conformes entre variétés pseudo-riemanniennes de dimension supérieure ou égale à 3. Ce phénomène de rigidité est bien connu, voir par exemple [36], [25] et [46].

Définition 1.6. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, U ouvert, on appelle r -jet de f en un point $x \in U$ noté, $j_x^r f$, la troncature à l'ordre r de son développement de Taylor.

On veut généraliser la définition de r -jet aux difféomorphismes entre variétés. Étant donné un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés M et N , on pourrait définir le r -jet de f en un point $x \in M$ comme le développement de Taylor jusqu'à l'ordre r dans une carte, mais cette définition dépendrait pas de la carte choisie. Par contre on observe que le fait que deux applications $f, h : M \rightarrow N$ aient le même r -jet dans une carte en un point x de M ne dépend pas de la carte où on se place. On peut donc définir une relation sur groupe des difféomorphismes de M vers N : deux applications f et h sont en relation si et seulement si elles ont le même r -jet en x . Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Définition 1.7. Soient $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme entre deux variété M et N . Le r -jet de f en un point x de M est la classe d'équivalence de f par rapport à la relation "avoir le même r -jet dans une carte". On le note $j_x^r f$.

On peut maintenant énoncer le résultat de rigidité locale des applications conformes. Une preuve de ce résultat peut être trouvée dans [24], chapitre 2.

Théorème 1.8. *Soient M et N deux variétés pseudo-riemanniennes connexes de dimension supérieure ou égal à 3. Soient f et g deux applications conformes de M dans N . Si f et g ont le même 2-jet en un point x de M alors coïncident sur M .*

Le théorème de Liouville est une application de ce résultat dans les cas conformément plat. Quand la métrique est définie positive, le Théorème de Liouville s'énonce comme suit

Théorème 1.9. *(Liouville) Pour $n \geq 3$, toute application conforme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n est la restriction d'un unique élément de $O^+(1, n)$.*

Le groupe $O^+(1, n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^{1, n}$ qui préservent l'orientation chronologique, mais les éléments de $O^+(1, n)$ sont aussi des difféomorphismes conformes de \mathbb{S}^n . Le Théorème 1.9 implique que $O^+(1, n)$ est exactement le groupe des difféomorphismes conformes de \mathbb{S}^n , autrement dit le groupe des transformations de Möbius.

La preuve du Théorème 1.9 est basée sur le Théorème 1.8 dans le cas où la métrique est définie positive. Il s'en suit que le Théorème de Liouville peut être reformulé dans le contexte plus général de la signature (k, h) avec $K \neq 0$. Les détails et la démonstration du Théorème de Liouville dans le cas général des quadriques standards pseudo-riemanniennes peuvent être trouvés dans [24], chapitre 2.

Le cas qui nous intéresse est celui de signature $(1, n)$. On énoncera donc que la version lorentzienne du théorème de Liouville, Théorème 2.5, où le rôle de la sphère riemannienne \mathbb{S}^n est pris par son correspondant lorentzien : l'espace d'Einstein. On va donc d'abord définir l'espace d'Einstein.

2 L'espace d'Einstein

Dans cette section on va étudier la géométrie et la causalité de l'espace-temps d'Einstein ainsi que celles de son revêtement universel. L'étude de cet espace-temps est central pour comprendre les espace-temps conformément plats : il joue le rôle de la sphère conforme pour la géométrie riemannienne. La version lorentzienne du théorème de Liouville implique en fait que tout espace-temps conformément plat de dimension supérieur ou égale à trois est localement modelé sur l'espace d'Einstein, exactement de la même façon que le fait que toute variété conformément plate riemannienne de dimension au moins 3 est localement modelée sur la sphère conforme.

Continuons les analogies entre géométrie riemannienne et lorentzienne. Rappelons que la sphère conforme \mathbb{S}^n s'identifie au bord conforme de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} , qui est l'espace modèle riemannien à courbure constante -1 . De plus toute

isométrie de \mathbb{H}^{n+1} se prolonge en un difféomorphisme conforme de \mathbb{S}^n et, réciproquement, tout difféomorphisme conforme de \mathbb{S}^n est le prolongement au bord d'un unique isométrie de \mathbb{H}^{n+1} . La situation en géométrie lorentzienne est tout à fait similaire. On verra en fait que l'espace d'Einstein de dimension $n+1$, $Ein_{1,n}$, peut être défini comme étant le bord conforme de l'espace-temps modèle à courbure constante négative de dimension $n+2$, à savoir l'espace-temps $AdS_{1,n+1}$. Encore une fois toute isométrie de $AdS_{1,n+1}$ se prolonge en un unique difféomorphisme conforme de son bord, $Ein_{1,n}$, et de même tout difféomorphisme conforme de $Ein_{1,n}$ provient d'une unique isométrie de $AdS_{1,n+1}$.

Les projections stéréographiques permettent de voir que l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n est conformétement équivalent à une hémisphère de la sphère \mathbb{S}^n , et que la sphère \mathbb{S}^n privée d'un point est conformétement équivalente à l'espace euclidien \mathbb{E}^n . Donc les trois espaces riemanniens à courbure constante s'identifient conformétement à des ouverts de \mathbb{S}^n . Cette situation admet une version lorentzienne : on verra que les trois espace-temps modèles à courbure constante, $\mathbb{R}^{1,n}$, $dS_{1,n}$ et $AdS_{1,n}$, s'identifient conformétement à des ouverts de l'espace $Ein_{1,n}$.

2.1 Le modèle projectif de l'espace $dS_{1,n}$ et la sphère conforme \mathbb{S}^n

Il est bien connue que le bord à l'infini de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} s'identifie à la sphère riemannienne conforme \mathbb{S}^n . Une façon du voir est de considerer le modèle de Klein de l'espace hyperbolique, noté \mathbb{D}^{n+1} , qui est défini en projetant sur $P\mathbb{R}^{n+2}$ le cône des vecteurs de type temps de $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Le bord de l'ouvert \mathbb{D}^{n+1} ainsi obtenu est la projection du cône des vecteurs lumières. Ce bord est naturellement muni d'une structure conforme qui permet de l'identifier à la sphère conforme \mathbb{S}^n .

On va décrire ici une construction similaire qui fait rentrer en jeu, à la place du modèle projectif de l'espace hyperbolique, le modèle projectif de l'espace de Sitter. Contrairement à ce qu'on fait pour définir \mathbb{D}^{n+1} , dans la définition du modèle projectif de l'espace de Sitter est plus utile de considérer un revêtement double de $P\mathbb{R}^{1,n}$, la sphère des directions. La sphère des directions de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+2} est définie comme suit :

$$S(\mathbb{R}^{n+2}) := (\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\})/x \sim e^\lambda x, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\} \rightarrow S(\mathbb{R}^{n+2})$ la projection canonique au quotient. On rappelle (voir section 2.2) que l'espace $dS_{1,n}$ est défini comme le lieu des des vecteurs de \mathbb{R}^{n+2} où la forme quadratique $Q_{1,n+1}$ vaut 1, muni de la métrique induite. Il est alors clair que π rétreinte à $dS_{1,n}$ est injective, et que son image est un ouvert.

Définition 2.1. L'image de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ par π est le *modèle projectif de l'espace de Sitter* de dimension $n + 1$, on le note $\mathbb{DS}_{1,n}$.

La frontière de l'ouvert $\mathbb{DS}_{1,n}$ est composée de deux composantes connexes, qui sont les images par π des deux composantes connexes de C , les fermés $\pi(C^+)$ et $\pi(C^-)$. Ces fermés sont aussi les bords dans $S(\mathbb{R}^{n+2})$ des deux copie du modèle projectif de l'espace hyperbolique, respectivement \mathbb{D}_+^{n+1} et $\mathbb{D}_-^{1,n+1}$, qui sont les images par π des deux composantes connexes du cône des vecteurs de type temps de $\mathbb{R}^{1,n+1}$.

Suivant un procédé similaire à celui utilisé pour le bord du modèle projectif de l'espace hyperbolique, on peut voir que la forme quadratique ambiante de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ définit naturellement une structure conforme riemannienne sur les fermés $p(C^+)$ et $\pi(C^-)$. Avec cette structure $\pi(C^+)$ et $\pi(C^-)$ s'identifient naturellement à deux copies de la sphère conforme : on les note respectivement \mathbb{S}_+^n et \mathbb{S}_-^n .

L'action du groupe $O_0(1, n + 1)$ sur $\mathbb{R}^{1,n+1}$ passe au quotient en une action sur $S(\mathbb{R}^{n+2})$. Cette action préserve $\mathbb{DS}_{1,n}$ ainsi que sa sa frontière. Sur $\mathbb{DS}_{1,n}$ et sur les deux copies de \mathbb{D}^{n+1} , c'est une action par isométries, et sur les deux sphères \mathbb{S}_+^n et \mathbb{S}_-^n c'est une action conforme. Comme on sait par ailleurs que $Conf^+(\mathbb{S}^n) = O_0(1, n + 1) = Isom(\mathbb{DS}_{1,n})$, la situation est la suivante : toute isométrie de $\mathbb{DS}_{1,n}$ se prolonge en un difféomorphisme conforme de son bord et réciproquement tout difféomorphisme conforme du bord provient d'une isométrie de $\mathbb{DS}_{1,n}$. Donc on obtient

$$O_0(1, n + 1) = Isom(d\mathbb{S}_{1,n+1}) = Isom(\mathbb{H}^{n+1}) = Conf^+(\mathbb{S}^n).$$

Pour certains aspects, par exemple pour l'étude des géodésiques, la structure causale de $d\mathbb{S}_{1,n}$ est plus facile à décrire dans le modèle projectif.

Structure causale de $\mathbb{DS}_{1,n}$

L'intérêt de considérer le modèle de Klein est, entre autre, lié au fait qu'on a une très simple description de ses géodésiques : elles sont les composantes connexes des intersections de $\mathbb{DS}_{1,n}$ avec les droites projectives de $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$. Les droites projectives sont les images par π des sous espaces de dimension 2 de $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Le type causal d'une géodésique de $\mathbb{DS}_{1,n}$ est alors déterminé par la signature de $Q_{1,n+1}$ sur le plan dont l'image par π détermine la géodésique.

Soit r une droite projective de $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$, $r = \pi(P)$, où P est un plan par l'origine de $\mathbb{R}^{1,n+1}$, alors on a les trois cas :

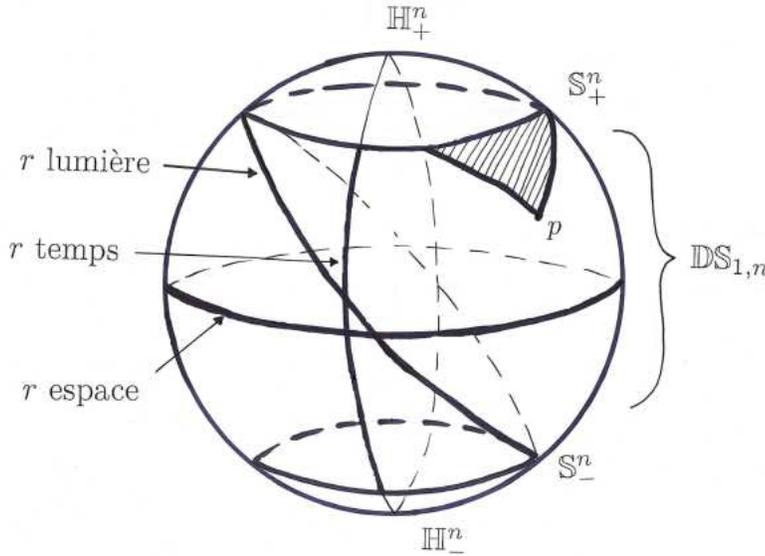
- $Q_{1,n+1}$ est définie positive sur P si et seulement si la droite r ne rencontre pas les sphères \mathbb{S}_\pm^n : dans ce cas r est de type espace et elle est entièrement contenue dans $\mathbb{DS}_{1,n}$.
- P est tangent au cône C , donc $Q_{1,n+1}$ est dégénérée sur P , si et seulement si la droite r est tangente aux sphère \mathbb{S}_\pm^n : dans ce cas r intersecte $\mathbb{DS}_{1,n}$ en deux composantes connexes qui sont deux géodésiques lumières de $\mathbb{DS}_{1,n}$.

- La signature de $Q_{1,n+1}$ restreinte à P est lorentzienne si et seulement si la droite r intersecte transversalement les sphères S_{\pm}^n : dans ce cas $r \cap \mathbb{DS}_{1,n}$ a deux composantes connexes qui sont deux géodésiques de type temps.

On remarque que dans le troisième cas la partie de r hors de $\mathbb{DS}_{1,n}$ est l'union de deux géodésiques dans les espaces hyperboliques \mathbb{H}_-^{n+1} et \mathbb{H}_-^{n+1} .

Le *futur causal* d'un point p de $\mathbb{DS}_{1,n}$ est l'union de tous les segments de droite projective contenus dans $\mathbb{DS}_{1,n}$ qui vont de p à un point de S_+^n . Le futur strict $I^+(p)$ est l'intérieur de ce domaine, en d'autres termes il est l'union des morceaux de droites projectives qui passent pas p et qui intersectent S_+^n transversalement.

Si on regarde l'ensemble $B^+(p)$ des points de S_+^n connectés à p par une droite projective, on se rend compte qu'il s'agit d'une boule fermée de S_+^n . Deux points de $dS_{1,n}$ distincts définissent deux boules $B(p)$ et $B(p')$ distinctes. De plus si on se donne une boule B dans S_+^n et considère les droites projectives tangentes à S_+^n en les points du bord de B , on voit que ces droites s'intersectent toutes en deux points p et q de $\mathbb{DS}_{1,n}$. Ces deux points sont tels que, si v_p et v_q sont les points de $dS_{1,n}$ qui se projettent sur p et q par π , alors $v_p = -v_q$. On alors qu' un de ces deux points, par exemple p , est tel que $B(p) = B$ et l'autre est tel que $B(q)$ est l'adhérence du complémentaire de B dans S_+^n .



De tout cet raisonnement on en déduit que l'espace $\mathbb{DS}_{1,n}$ est en bijection avec l'espace des boules de S_+^n , et, par un raisonnement analogue (en utilisant $J^-(p)$ en lieu de $J^+(p)$), avec les boules de S_-^n . On verra au chapitre 3.2 l'importance de cette observation quand on étudiera la maximalité des espace-temps localement modelée sur $dS_{1,n}$.

2.2 L'espace $Ein_{1,n}$ comme bord conforme de l'espace $AdS_{1,n}$

Dans le but de définir l'espace d'Einstein et d'en étudier les propriétés, on va étudier en détail l'analogie lorentzienne de la construction évoquée dans la section précédente pour la sphère conforme. Cette fois le rôle de \mathbb{H}^{n+1} est pris par l'espace $AdS_{1,n}$.

On considère l'espace $\mathbb{R}^{2,n+1}$: c'est-à-dire l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+3} muni de la forme quadratique $Q_{2,n}(x, x) = -v^2 - w^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, où $x = (v, w, x_1, \dots, x_n)$. On définit la sphère des directions comme

$$S(\mathbb{R}^{2,n+1}) := (\mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\})/x \sim e^\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$$

avec la projection canonique au quotient $\pi : \mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S(\mathbb{R}^{2,n+1})$. Rappelons que $AdS_{1,n}$ est l'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ où la forme quadratique vaut -1 . La restriction de π à $AdS_{1,n}$ est injective. Son image est un ouvert de $S(\mathbb{R}^{2,n+1})$, noté $\mathbb{A}DS_{1,n}$.

La frontière de $\mathbb{A}DS_{1,n}$ dans $S(\mathbb{R}^{2,n+1})$ est l'image par π du cône C des vecteurs où la forme quadratique $Q_{2,n}$ s'annule. Le fait que maintenant la signature de la forme quadratique est $(2, n)$ implique que le cône C est connexe dans $\mathbb{R}^{2,n+1}$ et son image $\pi(C)$ est donc elle aussi connexe. Comme dans le cas riemannien, il n'y a pas de métrique lorentzienne sur $\pi(C) = \partial\mathbb{A}DS_{1,n}$ naturellement induite par la métrique ambiante. Ce qui s'avère être bien défini est une classe conforme de métriques lorentziennes.

Lemme 2.2. *La forme quadratique $Q_{2,n}$ induit naturellement une structure lorentzienne conforme sur $\partial\mathbb{A}DS_{1,n}$.*

Démonstration. On introduit la notation $[x] = \pi(x)$ pour les points de $S(\mathbb{R}^{2,n})$. Soit ϕ une section locale (différentiable) de π définie sur un voisinage $U \subset \pi(C)$ d'un point $[x]$ de $\pi(C)$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\}$. Pour tout vecteur $\zeta \in T_{[x]}\pi(C)$ on définit

$$g_{[x]}^\phi(\zeta, \zeta) = Q_{2,n}(d_{[x]}\phi(\zeta), d_{[x]}\phi(\zeta)).$$

Comme ϕ est une section $d_{[x]}\phi(T_{[x]}\pi(C))$ est un sous-espace vectoriel de $T_{\phi([x])}C$ de codimension 1 transverse au sous-espace engendré par le rayon x . La forme $Q_{2,n+1}$ restreinte à $d_{[x]}\phi(T_{[x]}\pi(C))$ est de signature $(1, n)$. Donc la métrique g^ϕ qu'on vient de définir sur l'ouvert U est une métrique lorentzienne.

Considérons maintenant une autre section $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\}$. Il existe une fonction $\lambda : \pi(C) \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\psi([x]) = \lambda([x])\phi([x])$ pour tout $[x]$ dans $\pi(C)$. Comme $d_{[x]}\psi = \lambda([x])d_{[x]}\phi + (d_{[x]}\lambda)\phi([x])$ et que $\phi([x])$ est un vecteur lumière on obtient : $g^\psi = \lambda^2 g^\phi$.

Les métriques g^ϕ ainsi définies dépendent bien du choix de la section ϕ , mais pas leur classe conforme : le lemme est démontré. \square

Définition 2.3. *Le fermé $\partial\text{ADS}_{1,n}$ de $S(\mathbb{R}^{2,n+1})$ muni de la structure conforme lorentzienne induite par la métrique ambiante est l'espace d'Einstein de dimension $1+n$, noté $\text{Ein}_{1,n}$.*

Proposition 2.4. *L'espace $\text{Ein}_{1,n}$ est conformément équivalent à l'espace-temps $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, d\sigma^2 - d\theta^2)$ où $d\sigma^2$ et $d\theta^2$ sont les métriques canoniques respectivement sur \mathbb{S}^n et \mathbb{S}^1 .*

Démonstration. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} / v^2 + w^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 2\}$ la sphère de rayon 2 pour la métrique euclidienne. Comme chaque demi-droite de \mathbb{R}^{n+2} intersecte S en un unique point, la restriction de π à S est un homéomorphisme entre S et $S(\mathbb{R}^{n+2})$. Donc l'application π , restreinte à $C \cap S$, où C est le cône des vecteurs où $Q_{2,n+1}$ s'annule, est un homéomorphisme sur l'image. Son inverse ϕ_0 est une section globale de $\pi|_C$. Un calcul élémentaire montre que $C \cap S$ est le lieu des points où $v^2 + w^2 = 1 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, et donc difféomorphe à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. De plus, la métrique induite sur cette intersection par la métrique ambiante correspond à la métrique $d\sigma^2 - d\theta^2$. La métrique $\phi_0^*(d\sigma^2 - d\theta^2)$ est par définition la métrique g^{ϕ_0} telle que définie dans la preuve du Lemme 2.2. La proposition est démontrée. \square

Grâce à l'identification donnée D'après la Proposition précédente, il est facile de voir que $\text{Ein}_{1,n}$ est orientable et temporellement orientable, car ces propriétés sont évidentes sur $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, d\sigma^2 - d\theta^2)$. On choisit l'orientation chronologique donnée par le champs de vecteurs de type temps ∂_θ . L'espace $\text{Ein}_{1,n}$ est alors bien un espace-temps conforme. Il n'est pas simplement connexe : sont revêtement universel s'identifiant à $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, [d\sigma^2 - dt^2])$.

2.3 Groupe conforme de $\text{Ein}_{1,n}$ et théorème de Liouville lorentzien

On va donner une description du groupe $\text{Conf}(\text{Ein}_{1,n})$. Pour faire cela la version lorentzienne du théorème de Liouville est central

Théorème 2.5. *(Liouville) Pour $n \geq 2$, toute application conforme entre deux ouverts de $\text{Ein}_{1,n}$ est la restriction d'un unique élément de $O(2, n+1)$.*

Le théorème de Liouville dans sa version lorentzienne implique donc qu'on a l'inclusion $\text{Conf}(\text{Ein}_{1,n}) \subset O(2, n+1)$. Or à partir de la définition de l'espace $\text{Ein}_{1,n}$ est simple de voir qu'on a aussi l'inclusion réciproque, c'est-à-dire que les éléments de $O(2, n+1)$ induisent des difféomorphismes conformes de l'espace $\text{Ein}_{1,n}$.

Lemme 2.6. *Le groupe $O(2, n+1)$ agit conformément sur $\text{Ein}_{1,n}$ et cette action est fidèle.*

Démonstration. Pour tout élément $\gamma \in O(2, n + 1)$ et $[x]$ dans $Ein_{1,n}$, on peut définir naturellement son action sur $Ein_{1,n}$ par $\gamma.[x] = [\gamma.x]$. Dans la démonstration du Lemme 2.2, on a vu que chaque section locale $\phi : U \subset Ein_{1,n} \rightarrow \mathbb{R}^{2,n+1}$ induit une métrique lorentzienne g^ϕ appartenant à la classe conforme définie sur $Ein_{1,n}$.

Soit $\phi_0 : Ein_{1,n} \rightarrow \mathbb{R}^{2,n}$ la section globale définie dans la démonstration de la Proposition 2.4 et soit γ un élément de $O(2, n + 1)$. Il est clair que $\gamma \circ \phi_0$ est une autre section globale de $Ein_{1,n}$. D'après ce qu'on a vu dans la preuve du Lemme 2.2, ces deux sections vont définir deux métriques conformément équivalentes sur $\pi(C)$. Or le tiré en arrière par l'action de γ de la métrique définie par la section ϕ_0 coïncide, par définition, avec la métrique définie par la section $\gamma \circ \phi_0$. Donc on a prouvé que $O(2, n + 1)$ agit conformément sur $Ein_{1,n}$. \square

Il se trouve que la composante neutre, $O_0(2, n + 1)$, du groupe d'isométries de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ est formée des isométries qui préservent à la fois l'orientation de $\mathbb{R}^{2,n}$ et celle des plans où $Q_{2,n}$ est définie négative. Si on regarde la caractérisation de Ein donné d'après la Proposition 2.4 et sa preuve, on voit que l'orientation chronologique de $Ein_{1,n}$ choisie est celle donnée par l'orientation du plan engendré par les premiers deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{2,n+1}$, les vecteurs $(1, 0, \dots, 0)$ et $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Or $\gamma \in O(2, n + 1)$ préserve l'orientation d'un plan de type temps si et seulement si γ préserve l'orientation de tout plan de type temps de $\mathbb{R}^{2,n+1}$. On obtient alors que la condition nécessaire et suffisante à que γ préserve l'orientation et l'orientation chronologique de $Ein_{1,n}$ est son appartenance à la composante neutre $O_0(2n, n + 1)$.

En résumé on a la proposition suivante :

Proposition 2.7. *Conf($Ein_{1,n}$) s'identifie au groupe $O(2, n + 1)$. Sa composante neutre $O_0(2, n + 1)$ est formée des éléments de $Conf(Ein_{1,n})$ qui préservent l'orientation et l'orientation chronologique de $Ein_{1,n}$.*

2.4 Structures causales de $Ein_{1,n}$ et $\widetilde{Ein}_{1,n}$

Puisque $Ein_{1,n}$ est compact (voir Proposition 5.3), il n'est pas chronologique. En fait on va voir que le futur et le passé de tout point est l'espace d'Einstein entier. Par contre son revêtement universel, $\widetilde{Ein}_{1,n}$, vérifie le principe de causalité forte et il est même globalement hyperbolique. C'est pour cette raison que, dans la suite, on utilisera plus souvent le revêtement universel de $Ein_{1,n}$, appelé aussi espace d'Einstein universel, que l'espace d'Einstein lui-même.

D'après la Proposition 2.4, l'espace $Ein_{1,n}$ s'identifie à $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, [d\sigma^2 - d\theta^2])$, son revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}$, muni du relevé de la structure conforme de $Ein_{1,n}$, s'identifie donc à l'espace-temps $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, [d\sigma^2 - dt^2])$, où dt^2 est la métrique canonique sur \mathbb{R} . On note $pr : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow Ein_{1,n}$ l'application de revêtement.

Le groupe fondamental de $Ein_{1,n}$ est isomorphe à \mathbb{Z} : il s'agit du groupe engendré

par l'application $\delta : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ qui à (x, t) associe $(x, t + 2\pi)$. L'application δ est une isométrie de la métrique $d\sigma^2 - dt^2$, donc en particulier elle préserve la structure conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. L'espace $Ein_{1,n}$ est donc le quotient de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ par le sous-groupe de $Conf(\widetilde{Ein}_{1,n})$ engendré par cette application.

L'application d'antipodie de $\mathbb{R}^{2,n+1}$, $x \in \mathbb{R}^{2,n+1} \mapsto -x$, passe au quotient en une application $\bar{\sigma} : Ein_{1,n} \rightarrow Ein_{1,n}$, donnée par $\bar{\sigma}([x]) = [-x]$. Dans la décomposition $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$, $\bar{\sigma}$ s'écrit comme le produit des deux applications d'antipodie sur \mathbb{S}^n et \mathbb{S}^1 . Il s'en suit que son relevé au revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'application $\sigma : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ qui envoie $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ sur le point $(-x, t + \pi)$. On remarque que $\sigma^2 = \delta$.

Définition 2.8. Si deux points de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont l'image l'un de l'autre par l'application σ on dit qu'ils sont *conjugués*.

Les courbes causales de l'espace d'Einstein admettent une description similaire à celles de l'espace de Minkowski :

Proposition 2.9. *Toute courbe causale c de $Ein_{1,n}$ admet un paramétrage de la forme $c(t) = (x(t), e^{it})$, où $x(t)$ est une application 1-Lipschitz d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{S}^n . L'application $x(t)$ est 1-contractante si et seulement si c est de type temps.*

Démonstration. Soit $s \in I \mapsto c(s) = (w(s), p(s))$ une courbe causale dans $Ein_{1,n}$, ou I est un intervalle dans \mathbb{R} . La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.16. On suppose au départ c est C^1 par morceaux. Le fait que c est une courbe causale implique que le vecteur tangent en chaque point à c n'est jamais nul (et aussi qu'aux points où le vecteur tangent à gauche et à droite ne coïncident pas, les deux ne sont jamais nuls) il vérifie :

$$\|w'(s)\|^2 \leq |p'(s)|^2 \quad (2.2)$$

On obtient que le vecteur $p'(s)$, tangent à \mathbb{S}^1 , ne s'annule jamais, donc $s \mapsto p(s)$ est une application à valeurs dans \mathbb{S}^1 du type $p(s) = e^{i\phi(s)}$ où $s \mapsto \phi(s)$ est une application monotone de l'intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Sans perte de généralité on la suppose croissante, ce qui revient à supposer que la courbe est une courbe causale future. On peut alors modifier le paramètre s en un paramètre t dans lequel la courbe s'écrit sous la forme $c(t) = (x(t), e^{it})$, pour t dans un intervalle J de \mathbb{R} . On a donc l'inégalité $\|x'(t)\|^2 \leq 1$, et en intégrant cette inégalité entre deux points t et t' de J , on obtient :

$$d_0(x(t), x(t')) \leq |t - t'| \quad (2.3)$$

où d_0 est la distance sur \mathbb{S}^n pour la métrique canonique. Donc l'application $t \in I \mapsto x(t)$ est 1-Lipschitz.

Maintenant soit $s \in I \mapsto c(s) = (w(s), p(s))$ une courbe causale topologique. La définition 3.15 implique que pour tout s et s' assez proches, il existe une courbe causale C^1 par morceaux entre $c(s)$ et $c(s')$. Vu ce qu'on vient de prouver à propos des courbes C^1 par morceaux, on obtient encore une fois que l'application $s \mapsto p(s)$ est du type $p(s) = e^{i\phi(s)}$ où $s \mapsto \phi(s)$ est une application monotone. Donc on peut modifier le paramètre de la courbe c de façon que $c(t) = (x(t), e^{it})$, pour t dans un intervalle J de \mathbb{R} . Comme entre tout point $c(t)$ et $c(t')$ de c il y a une courbe causale C^1 par morceaux, par ce qu'on a prouvé avant on obtient que l'application $t \mapsto x(t)$ est 1-Lipschitz : le résultat est alors prouvé pour les courbes causales topologiques.

Maintenant on remarque que c est de type temps si et seulement si l'inégalité (2.2) est stricte. De plus l'inégalité (2.2) est stricte si et seulement si l'inégalité (2.3) est stricte. Donc la proposition est prouvée. \square

Corollaire 2.10. *L'espace $Ein_{1,n}$ est totalement vicieux, c'est-à-dire le passé et le futur strict de tout point est l'espace tout entier.*

Démonstration. Soient $p_1 = (x_1, \theta_1)$ et $p_2 = (x_2, \theta_2)$ deux points de $Ein_{1,n}$. On choisit t_1 et t_2 de façon que $e^{it_1} = \theta_1$, $e^{it_2} = \theta_2$ et $|t_1 - t_2| > d(x_1, x_2)$. On définit la courbe $t \in [t_1, t_2] \mapsto (x(At), e^{it})$, où $t \mapsto x(t)$ est la géodésique de \mathbb{S}^n entre x_1 et x_2 paramétrée par sa longueur d'arc et telle que $x(t_1) = x_1$ et $x(t_2) = x_2$, et $A := d(x_1, x_2)/|t_1 - t_2|$. Cette courbe est une courbe de type temps entre p_1 et p_2 . \square

Ce corollaire montre que la causalité dans $Ein_{1,n}$ n'est pas très intéressante, mais on peut quand même dire quelque chose sur ses géodésiques lumières. En fait d'après le Lemme 1.3 les images des géodésiques lumières sont préservées par les changements conformes de métrique, donc, au paramétrage près, on peut parler à juste titre de géodésiques lumières de Ein et de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Leur étude est déterminante pour comprendre la causalité dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Corollaire 2.11. *Toute géodésique lumière c de l'espace-temps $Ein_{1,n}$ admet un paramétrage $c(t) = (\gamma(t), e^{2\pi it})$ où $\gamma(t)$ est une géodésique de \mathbb{S}^n paramétrée par sa longueur d'arc.*

Démonstration. Pour fixer les idées on suppose que c est une géodésique future. Si on regarde la preuve de la Proposition 2.9 on voit que le fait que c est une courbe lumière implique que l'inégalité (2.2) est en fait une égalité. On obtient que c admet un paramétrage $t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = (\gamma(t), e^{it})$, où $\gamma(t)$ est paramétrée par sa longueur d'arc.

On fixe un point p de c , sans perte de généralité on peut supposer $p = c(0)$. Soit U une carte exponentielle (pour la métrique $d\sigma^2 - dt^2$ sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$) centrée en p . On choisit U de façon à s'identifier à l'ouvert $V \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, où V est un ouvert géodésiquement convexe de \mathbb{S}^n et $\varepsilon \leq \pi$; dans ce choix le point p est identifié

à $(\gamma(0), 0) \in V \times] - \varepsilon, \varepsilon[$. Ce choix de U est possible car les ouverts de la forme $V \times] - \varepsilon, \varepsilon[$ pour ε assez petit, forment une base de voisinages en p .

De plus la Proposition 2.9 implique que le futur strict de p relatif à U est l'ouvert

$$I_U^+(p) = \{(x, t) \in V \times] - \varepsilon, \varepsilon[\mid d(x, \gamma(0)) < t\}.$$

La frontière de $I_U^+(p)$ est composée des points (x, t) de $V \times] - \varepsilon, \varepsilon[$ tels que $d(x, \gamma(0)) = t$.

Soit maintenant q un point de c dans le futur causal de p et assez proche de p , c'est-à-dire $q \in U$. On obtient $q = (\gamma(t), t)$ pour un certain t dans $]0, \varepsilon[$. Comme c est une géodésique lumière, le Lemme de Gauss lorentzien (Lemme 3.10) implique que q appartient au bord de $I_U^+(p)$ et donc que $d(\gamma(t), \gamma(0)) = t$.

Le raisonnement qu'on vient d'exposer ne dépend pas du point q de $\gamma \cap U$ choisi, de plus on peut répéter le procédé au voisinage de tout point p de γ , donc γ est une géodésique de \mathbb{S}^n et le Corollaire est prouvé. \square

Le corollaire précédent donne une description des géodésiques lumière de $Ein_{1,n}$ lorsqu'on l'identifie au produit $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, [d\sigma^2 - dt^2])$. Il y a aussi une façon plus intrinsèque de voir les géodésiques lumières, en les reliant directement à la définition de $Ein_{1,n}$ en tant que projection dans la sphère des rayons $S(\mathbb{R}^{2,n+1})$ du cône des vecteurs isotropes de $\mathbb{R}^{2,n+1}$.

Lemme 2.12. *Les géodésiques lumières de $Ein_{1,n}$ sont l'image par π des plans isotropes de $\mathbb{R}^{2,n}$.*

Démonstration. Soit c une géodésique lumière de Ein . Soit $(e_u, e_v, e_1, \dots, e_{n+1})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2,n+1}$. On considère la décomposition $Ein_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$, donnée par l'intersection de la sphère $S := \{u^2 + v^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 2\}$ avec le cône des vecteurs isotropes C de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ (voir preuve de la Proposition 2.4). L'espace $Ein_{1,n}$ est donc identifié au lieu des points de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ qui vérifient $u^2 + v^2 = 1 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$, muni de la classe conforme de la métrique induite. Si on décompose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2,n+1}$ en la somme directe $\mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbb{R}^2$, suivant la base $\{e_i\}$, la sphère \mathbb{S}^n s'identifie à la sphère unitaire de \mathbb{R}^{n+1} et \mathbb{S}^1 à la sphère unitaire de \mathbb{R}^2 .

D'après le Corollaire 2.11 la courbe c s'écrit comme $c(t) = (x(t), e^{it})$ dans cette décomposition. La courbe $x(t)$ est une géodésique de la sphère \mathbb{S}^n , elle est donc la paramétrisation par longueur d'arc de l'intersection entre \mathbb{S}^n et un plan P_0 du sous-espace vectoriel isomorphe \mathbb{R}^{n+1} engendré par e_1, \dots, e_{n+1} . En faisant agir un élément de $O(n+1) \subset O(2, n+1)$ on peut supposer que P_0 est le plan engendré par e_1 et e_2 . Dans ce cas $x(t) = \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$.

Soit P le plan isotrope engendré par les vecteurs $v_1 := e_u + e_1$ et $v_2 := e_v + e_2$. Son intersection avec la sphère riemannienne S est donnée par une sous variété plongée de dimension 1 qui peut être paramétrée par la courbe $t \mapsto \cos(t)e_u + \sin(t)e_v + \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$, avec $t \in \mathbb{R}$: il s'agit en fait de la courbe $c(t) = (x(t), e^{it})$.

Le groupe $O(2, n + 1)$ agit transitivement sur l'ensemble des plans isotropes de $\mathbb{R}^{2, n+1}$ et, cette même action, projetée par π sur le quotient $Ein_{1, n}$, envoie géodésiques lumières sur géodésiques lumières. Cela achève la preuve. \square

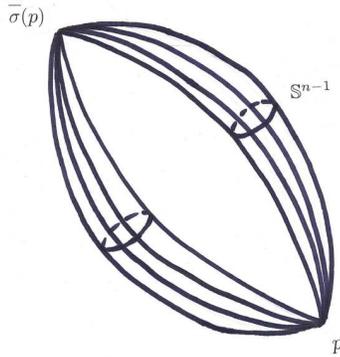
Remarque 2.13. *Le Lemme 2.12 implique en particulier que les géodésiques de $Ein_{1, n}$ sont exactement les courbes qu'on peut paramétrer sous la forme $c(t) = (x(t), e^{it})$ où $x(t)$ est une géodésique de \mathbb{S}^n paramétrée par sa longueur d'arc.*

Deux plans isotropes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^{2, n+1}$ qui ne sont pas confondus et qui ont une intersection non vide, se coupent transversalement en une droite isotrope, engendrée par un vecteur isotrope x de $\mathbb{R}^{2, n+1}$. Donc, quand on projette dans $Ein_{1, n}$, les deux géodésiques lumières associées à P_1 et P_2 se recourent transversalement en deux points de $Ein_{1, n} : [x]$ et $[-x]$. Par ailleurs, si $P_1 \cap P_2$ est réduit à $\{0\}$, les deux géodésiques associées sont disjointes dans $Ein_{1, n}$.

Définition 2.14. On appelle *cône lumière issu d'un point p de $Ein_{1, n}$* l'union des géodésiques lumières qui passent par ce point, et on le note $C(p)$.

Si $n = 1$ le cône $C(p)$ est simplement l'union de deux géodésiques lumières qui se coupent en p et $\bar{\sigma}(p)$. Quand $n \geq 2$, $C(p) \setminus \{p, \bar{\sigma}(p)\}$ est l'union disjointe de deux cylindres, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, feuilletés par des géodésiques lumières. Sur ces hypersurfaces la classe conforme des métriques est dégénérée.

Le complémentaire de $C(p)$ dans $Ein_{1, n}$ a deux composantes connexes qui sont difféomorphes l'une à l'autre par l'application $\bar{\sigma}$.



Remarque 2.15. Dans la définition de l'espace d'Einstein on a projeté le cône des vecteurs isotropes sur la sphère des rayons $S(\mathbb{R}^{2, n+1})$, mais on aurait pu aussi bien le projeter sur l'espace projectif $P\mathbb{R}^{1, n+1}$. Dans ce cas on obtient ce qu'on appelle le *modèle projectif* de l'espace d'Einstein, noté $\overline{Ein}_{1, n}$. Il s'agit du quotient de l'espace $Ein_{1, n}$ par le sous-groupe de $O(2, n + 1)$ engendré par l'application d'antipodie $\bar{\sigma}$. La projection canonique au quotient $\pi_0 : Ein_{1, n} \rightarrow \overline{Ein}_{1, n}$ est un revêtement double. Le groupe des difféomorphismes conformes de $\overline{Ein}_{1, n}$ est le groupe $PO(2, n + 1)$.

Si on se donne un point p dans $Ein_{1,n}$ et on considère son cône lumière associé $C(p)$, l'image de celui-ci est le cône lumière associé à $\pi_0(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Ce cône lumière privé du point $\pi_0(p)$ est une hypersurface différentiable difféomorphe au cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et feuilletée par des géodésiques lumières.

Maintenant on va voir comment ces observations sur les courbes causales de $Ein_{1,n}$ aident à comprendre la causalité dans le revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}$. La Proposition 2.9 permet de montrer :

Proposition 2.16. *Toute courbe causale c de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ admet un paramétrage de la forme $c(t) = (x(t), t)$, où $x(t)$ est une application 1-Lipschitz d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{S}^n .*

Démonstration. Soit c une courbe causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, sa projection $pr \circ c$ est une courbe causale de $Ein_{1,n}$. D'après la Proposition 2.9 elle admet un paramétrage $pr \circ c(t) = (x(t), e^{i2\pi t})$, donc son relevé au revêtement universel est la courbe $(x(t), t)$. \square

Les courbes causales inextensibles de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont donc celles qui, lorsqu'on les paramètre de la façon décrite d'après la Proposition précédent, sont définies sur \mathbb{R} tout entier.

Corollaire 2.17. *L'espace-temps $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est globalement hyperbolique. La projection $t : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x, t) \in \widetilde{Ein}_{1,n}$ est un temps de Cauchy.*

Démonstration. Vu le paramétrage des courbes causales donnée par la Proposition 2.16, il est évident que la fonction t croît strictement le long de toute courbe causale. De plus, comme toute courbe causale inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ s'écrit sous la forme $t \mapsto (x(t), t)$, avec t variant dans \mathbb{R} tout entier, la restriction à une telle courbe de l'application $t : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective. \square

À partir de la Proposition 2.16 on déduit facilement une description du futur et du passé de tout point de $\widetilde{Ein}_{1,n}$:

Lemme 2.18. *Soit $p = (x, t) \in \widetilde{Ein}_{1,n}$. Alors*

$$\begin{aligned} I^-(p) &= \{(x', t') \in \widetilde{Ein}_{1,n} / d_0(x, x') < t' - t\} \\ I^+(p) &= \{(x', t') \in \widetilde{Ein}_{1,n} / d_0(x, x') < t - t'\} \end{aligned}$$

où d_0 est la distance sur \mathbb{S}^n .

Démonstration. Si on a une courbe temporelle c entre un point $p = (x, t)$ et un point $q = (x', t')$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, d'après la Proposition 2.16, elle s'écrit $c(s) = (x(s), s)$, où $s \mapsto x(s)$ est une application 1-Lipschitz, $s \in [t, t']$. Donc on a $d(x, x') = d(x(t), x(t')) < |t - t'|$.

Inversement, soit $q = (x', t')$ un point qui vérifie l'inégalité $d(x, x') < |t - t'|$. La courbe $s \in [t, t'] \mapsto (x(As), s)$, où $s \mapsto x(s)$ est la géodésique de \mathbb{S}^n entre x et x' paramétrée par sa longueur d'arc, telle que $x(t) = x$ et $x(t') = x'$, et $A := d(x, x')/|t - t'|$, est une courbe temporelle entre p et q . \square

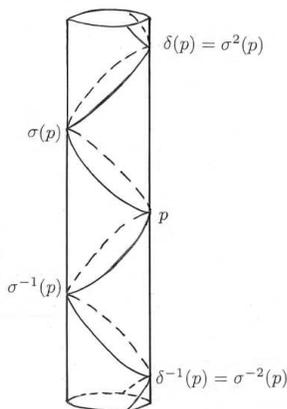
Si on prend les inégalités larges dans le lemme précédent on obtient le futur et le passé causal du point p .

Par définition de la structure conforme sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$, les géodésiques lumières de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont les relevés des géodésiques lumières de $Ein_{1,n}$, donc de la Remarque 2.13 on déduit :

Lemme 2.19. *Les géodésiques lumières c de Ein sont les courbes qui admettent un paramétrage de la forme $c(t) = (x(t), t)$, où $x(t)$ est une géodésique de \mathbb{S}^n paramétrée par sa longueur d'arc.*

La structure des géodésiques lumières dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est fondamental pour ce qui suit, notamment :

Remarque 2.20. *Toutes les géodésiques lumières inextensibles issues d'un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ s'intersectent aux points $\sigma^k(p)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, et nul part ailleurs.*



Il est clair que l'union des géodésiques lumières futures issues d'un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contient la frontière de $I^+(p)$, mais il ne coïncide pas avec elle. Le Lemme 2.18 implique que la frontière $\partial I^+(p)$ (et de même pour la frontière $\partial I^-(p)$) est l'union des géodésiques lumières qui relient p à $\sigma(p)$. En particulier $\partial I^+(p)$ et $\partial I^-(\sigma(p))$ coïncident.

L'ensemble des points qui ne sont pas causalement reliés à un point $p = (x, t)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'ensemble

$$M(p) := \{(x', t') \in \widetilde{Ein}_{1,n} / d_{\mathbb{S}^n}^n(x, x') > |t - t'|\}$$

Cet ensemble se projette par pr sur une des composantes connexes de $Ein_{1,n} \setminus C(pr(p))$. Cette composante peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme 2.21. *L'ouvert $pr(M(p))$ coïncide avec l'image par π de l'ensemble*

$$X_{<} := \{x \in C / Q_{2,n+1}(x, v_p) < 0\}$$

où v_p est tel que $\pi(v_p) = pr(p)$.

Démonstration. D'après le Lemme 2.12 le cône lumière issu de $\pi(v_p)$ est l'image par π de $v_p^\perp \cap C$ c'est à dire du fermé $X_0 := \{v \in C / Q_{2,n+1}(v, v_p) = 0\}$. Le cône C est l'union disjointe des trois ensembles :

$$X_0, X_{<} \text{ et } X_{>} := \{v \in C / Q_{2,n+1}(v, v_p) > 0\}.$$

On remarque que ces trois ensembles sont connexes par arcs en C : en effet si $v \in X_{<}$ alors pour tout $s > 0$ et $r \in \mathbb{R}$, $sv + rv_p \in X_{<}$, il est donc toujours possible de construire une courbe entre v et v_p qui soit contenue dans $X_{<}$. Ces arguments s'appliquent aussi à $X_{<}$ et X_0 .

Quitte à faire agir un élément de $O(2, n + 1)$, on suppose $v_p = (1, 0, 1, 0, \dots, 0)$, donc dans l'identification de $Ein_{1,n}$ avec $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ habituelle on a $pr(p) = (O, 0)$.

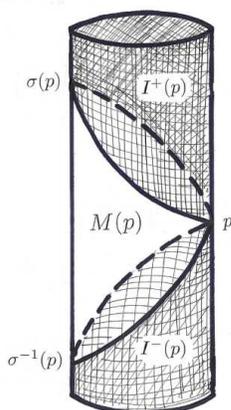
Quitte à faire agir δ , on peut aussi supposer $p = (O, 0)$.

L'ouvert $M(p)$, dans cette situation s'identifie à l'ouvert

$$M(p) = \{(x, t) \in \widetilde{Ein}_{1,n} / d_0(x, O) > |t|\}.$$

Un domaine fondamental pour δ est l'ensemble de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, $D := \mathbb{S}^n \times]-\pi, +\pi]$. On voit que $M(p)$ est contenu dans D , donc l'application pr restreinte à $M(p)$ est injective. De plus la frontière $\partial M(p)$ est l'union de $\partial I^+(p)$ et $\partial I^-(p)$ qui se projette surjectivement sur l'ensemble $\pi(X_0)$, qui, en fait, est le cône lumière issu de $pr(p)$.

Le fait que l'ensemble $M(p)$ est connexe est évident, et cela, ajouté au fait que pr sur $M(p)$ est injective et que l'image de la frontière $\partial M(p)$ est $\pi(X_0)$, implique que l'image de $M(p)$ par pr est une des deux composantes connexes de $Ein_{1,n} \setminus \pi(X_0)$. Le point $p' = (O, \pi/2) \in D$ est causalement lié à $(O, 0)$ par une courbe temporelle entièrement contenue dans D : la courbe $c(t) = (O, t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$. Par l'identification $Ein_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ choisie, on voit que $pr(p')$ est l'image du vecteur $v_{p'} := (0, 1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2,n+1}$ par π et que la courbe $pr \circ c$ coïncide avec la projection par π de la courbe $c'(t) = (\cos(t), \sin(t), 1, 0 \dots, 0)$, $t \in [0, \pi/2]$. Il est clair que $Q_{2,n}(v_p, v_{p'}) = 1$, donc $v_{p'}$ appartient à $X_{>}$, et le lemme est prouvé. \square



2.5 Sous-ensembles achronaux et acausaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$

D'après la Proposition 2.4 l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ s'identifie à l'espace $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^1, d\sigma^2 - dt^2)$. Or, l'espace $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^1$ muni de la métrique $d\sigma^2 - dt^2$ est un espace temps statique (Définition 7.1). Donc $\widetilde{Ein}_{1,n}$ admet dans sa classe conforme un métrique statique. La Proposition 7.3 et son Corollaire 7.4 s'appliquent donc à $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et on obtient :

Proposition 2.22. *Toute partie achronale A de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est le graphe d'une application $f : U \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 1-Lipschitz. L'ensemble U est ouvert si et seulement si A est edgeless. De plus A est un fermé achronal edgeless si et seulement si $U = \mathbb{S}^n$.*

Corollaire 2.23. *Les hypersurfaces de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont les graphes d'applications 1-Lipschitz $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$.*

Remarque 2.24. Pour tout point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, $\partial I^+(p)$ est une hypersurface de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. En fait par le Corollaire 4.16 $\partial I^+(p)$ est un fermé achronal edgeless, et d'après la Proposition 6.21 il s'agit d'une hypersurface de Cauchy.

2.6 Groupe conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}$

Par la théorie des revêtements tout difféomorphisme conforme de $Ein_{1,n}$ se relève en un difféomorphisme conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. La réciproque est vraie elle aussi si $n \geq 2$ (voir [24]) :

Proposition 2.25. *Tout difféomorphisme conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, $n \geq 2$, passe au quotient en un difféomorphisme conforme de $Ein_{1,n}$.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de la rigidité des applications conformes. Soit \tilde{h} un élément de $Conf(\widetilde{Ein}_{1,n})$ et soit U un ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ tel

que pr est un difféomorphisme sur son image. Soit U' l'image de U par \tilde{h} . On note V et V' les images de U et U' par pr . L'application $\bar{h} := pr \circ \tilde{h} \circ (pr|_U)^{-1}$ est alors un difféomorphisme conforme entre les ouverts V et V' de $Ein_{1,n}$.

Par le théorème de Liouville, l'application \bar{h} se prolonge en un unique élément h de $O(2, n + 1)$. Les applications $h \circ pr$ et $pr \circ \tilde{h}$ sont définies sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ à valeurs dans $Ein_{1,n}$ et elles coïncident sur l'ouvert U . Par le Théorème 1.8 elles coïncident partout. \square

On obtient ainsi un morphisme de groupes surjectif $j : Conf(\widetilde{Ein}_{1,n}) \rightarrow Conf(Ein_{1,n})$. Le noyau de j est le sous-groupe engendré par δ , il est contenu dans le centre de $Conf(\widetilde{Ein}_{1,n})$.

2.7 Plongements conformes dans l'espace d' Einstein

Dans cette section on va voir que les trois espaces modèles d'espace-temps à courbure constante $0, 1, -1$, respectivement $\mathbb{R}^{1,n}, d\mathbb{S}_{1,n}, Ad\mathbb{S}_{1,n}$, se plongent conformétement dans l'espace d'Einstein de dimension $n + 1$. Cette situation est tout à fait analogue à celle de la sphère conforme riemannienne qui possède des ouverts conformétement équivalents à l'espace euclidien et à l'espace hyperbolique.

C'est bien grâce à ces plongements et à l'action transitive du groupe $O(2, n + 1)$ qu'on peut montrer, sans calculs, que l'espace d'Einstein et les espaces $d\mathbb{S}_{1,n}$ et $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ sont conformétement plats.

Soit C le cône des vecteur lumières de $\mathbb{R}^{2,n}$ et $\pi : \mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S(\mathbb{R}^{2,n+1})$ la projection sur la sphère des directions.

Définition 2.26. Soit $v \in \mathbb{R}^{2,n+1}$. On définit la *carte affine associée à v* le sous-ensemble de $Ein_{1,n}$ donné par

$$U(v) := \pi(P_v \cap C)$$

où P_v est l'hyperplan affine $\{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / Q_{2,n+1}(x, v) = 1\}$.

Comme $\pi(P_v \cap C) = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / Q_{2,n+1}(x, v) > 0\} \cap C)$ et que $\{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / Q_{2,n+1}(x, v) > 0\}$ est un ouvert, $U(v)$ est un ouvert de $Ein_{1,n}$.

L'application π restreinte à $P_v \cap C$ est injective. Soit ϕ^v son inverse. Il s'agit d'une section locale définie sur $U(v)$ et d'image $P_v \cap C$. Soit g^v la métrique lorentzienne définie sur $U(v)$ par la section ϕ^v , c'est-à-dire g^v est le tiré en arrière de la métrique de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ par ϕ^v . Par définition la métrique g^v appartient à la classe conforme de $U(v)$, qui est la restriction de la classe conforme de $Ein_{1,n}$.

On appelle q la métrique induite par $Q_{2,n}$ sur $P_v \cap C$. Naturellement $(P_v \cap C, q)$ et $(U(v), g^v)$ sont isométriques.

On va voir que suivant le type causal de v , temps, espace ou lumière, que $(P_v \cap C, q)$ est isométrique à un des trois espaces : de Sitter, anti-de Sitter, Minkowski.

Proposition 2.27. *On a les trois cas :*

- v est de type temps : $U(v) \subset Ein_{1,n}$ est conformément équivalent à $d\mathbb{S}_{1,n}$
- v est de type espace : $U(v) \subset Ein_{1,n}$ est conformément équivalent à $Ad\mathbb{S}_n$
- v est de type lumière : $U(v) \subset Ein_{1,n}$ est conformément équivalent à $\mathbb{R}^{1,n}$

Démonstration. *Cas où v est de type temps.* On va prouver que le fermé de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ donné par $P_v \cap C$ muni par la métrique induite q est isométrique à $d\mathbb{S}_{1,n}$.

On peut considérer, sans perte de généralité (car il suffit de faire agir un élément de $O(2, n + 1)$) que $v = (1, 0, \dots, 0)$.

Soit $x = (u, w, x_0, \dots, x_n)$ les coordonnées par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^{2,n+1}$. Le plan affine P_v est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / u = -1\}$ donc $P_v \cap C = \{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / -w^2 + \dots + x_n^2 = 1 = -u\}$.

Or l'application

$$\begin{aligned} f : d\mathbb{S}_{1,n} \subset \mathbb{R}^{1,n+1} &\rightarrow (P_v \cap C, q) \\ (w, x_0, \dots, x_n) &\mapsto (-1, w, x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est une isométrie. L'application π restreinte à $P_v \cap C \cong d\mathbb{S}_{1,n}$ est donc un plongement conforme dans $Ein_{1,n}$. Son image est par définition l'ouvert $U(v)$ qui est donc conformément équivalent à l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$.

Cas où v est de type espace. On va prouver que le fermé $P_v \cap C$ muni de la métrique induite est isométrique à $Ad\mathbb{S}_n$.

Encore une fois on peut considérer, sans perte de généralité que $v = (0, \dots, 0, 1)$. Dans ce cas l'hyperplan affine P_v est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^{2,n} / x_n = 1\}$. Donc

$$P_v \cap C = \{x \in \mathbb{R}^{2,n} / -u^2 - w^2 + \dots + x_{n-1}^2 = -1, x_n = 1\}.$$

Or l'application

$$\begin{aligned} f : Ad\mathbb{S}_{1,n} \subset \mathbb{R}^{2,n-1} &\rightarrow (P_v \cap C, q) \\ (u, w, x_1, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (u, w, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \end{aligned}$$

est une isométrie. L'application π restreinte à $P_v \cap C \cong Ad\mathbb{S}_{1,n}$ est donc un plongement conforme dans $Ein_{1,n}$ d'image l'ouvert $U(v)$.

Cas où v est de type lumière. On va prouver que le fermé $P_v \cap C$ muni de la métrique induite est isométrique à $\mathbb{R}^{1,n}$.

Le plus simple dans ce cas est de faire le changement de coordonnées $a = u + x_0$ et $b = u - x_0$. Dans le système de coordonnées $(a, b, w, x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ la forme quadratique s'écrit $Q_{2,n} = ab - w^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Sans perte de généralité on suppose $v = (1, 0, \dots, 0)$, alors

$$\begin{aligned} P_v &= \{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / b = 1\} \\ P_v \cap C &= \{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} / b = 1 \text{ et } -w^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = a\} \end{aligned}$$

Par un calcul direct on montre que l'application

$$\begin{aligned} f &: (P_v \cap C, q) \rightarrow \mathbb{R}^{1,n} \\ (a, 1, w, x_1, \dots, x_n) &\mapsto (w, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est une isométrie. L'application π restreinte à $P_v \cap C \cong \mathbb{R}^{1,n}$ est donc un plongement conforme dans $Ein_{1,n}$ d'image l'ouvert $U(v)$. \square

Définition 2.28. On note les trois plongements décrits dans la proposition précédente comme

$$\begin{aligned} i_0 &: \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow Ein_{1,n} \\ i_1 &: d\mathbb{S}_{1,n} \rightarrow Ein_{1,n} \\ i_{-1} &: Ad\mathbb{S}_{1,n} \rightarrow Ein_{1,n} \end{aligned}$$

On va voir maintenant comment sont faites les images des trois plongements conformes qu'on vient de définir. Et comment ces plongement conformes se relèvent au revêtement universel de $Ein_{1,n}$.

On considère l'identification $Ein_{1,n} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$ décrite dans Proposition 2.4.

Modèle conforme de l'espace de Sitter

Proposition 2.29. *L'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ est conformément équivalent à l'ouvert de $Ein_{1,n}$ défini par $(\mathbb{S}^n \times] - \pi/2, \pi/2[, d\sigma^2 - dt^2)$, où dt^2 et $d\sigma^2$ sont respectivement les métriques canoniques sur \mathbb{R} et sur \mathbb{S}^n .*

Démonstration. D'après la Proposition 2.7 l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ est conformément équivalent à une carte affine $U(v)$ de $Ein_{1,n}$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ de type temps. La carte affine $U(v)$ coïncide avec l'image par π de l'intersection de $C \cap X_{>}(v)$, où $X_{>}(v)$ est le demi-espace affine de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ où la forme linéaire $Q_{2,n+1}(\cdot, v)$ est définie positive. Sans perte de généralité on suppose $v = (-1, 0, \dots, 0)$. Les vecteurs de $C \cap X_{>}(v)$ sont alors les vecteurs isotropes de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ qui ont la première coordonnée positive. Si on intersecte C avec S pour obtenir la décomposition $C \cap S \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$, on voit que les vecteurs de $C \cap S$ qui ont la première coordonnée positive sont ceux dont les premières deux coordonnées appartiennent à l'hémisphère de \mathbb{S}^1 paramétré par $\theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$, pour $\theta \in] - \pi/2, \pi/2[$. On obtient alors que la carte affine $U(v)$ dans la décomposition $Ein_{1,n} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$ s'identifie à l'ouvert $\mathbb{S}^n \times] - \pi/2, \pi/2[$ avec la restriction de la classe conforme $[d\sigma^2 - dt^2]$. Le résultat est prouvé. \square

Il peut souvent être utile de relever les plongements de la Définition 2.28 dans l'espace d'Einstein universel, cela pour prendre avantage des propriétés causales de ce dernier, en particulier de l'hyperbolicité globale.

L'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ est simplement connexe pour $n \geq 2$, il y a donc aucun obstacle à

relever le plongement i_1 en un plongement de $d\mathbb{S}_{1,n}$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Suivant le relevé qu'on choisit, l'image de ce plongement est un ouvert de la forme $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2 + k2\pi, \pi/2 + k2\pi[$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On voit que pour tout k ces ouverts sont contenus dans un domaine d'injectivité de l'application de revêtement δ . Cela est en accord avec le fait que les images de $d\mathbb{S}_{1,n}$ par i_1 et par \tilde{i}_1 sont conformément équivalentes. Pour la suite on fixe le relevé \tilde{i}_1 de i_1 d'image $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$.

Définition 2.30. *Le modèle conforme de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ est l'ouvert $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ muni de la classe conforme de métriques induite. Il est l'image de $d\mathbb{S}_{1,n}$ par le plongement \tilde{i}_1 et on le note $dS_{1,n}$.*

On aurait pu définir comme modèle conforme de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ l'image de i_1 , en lieu de celle de \tilde{i}_1 , car les deux images sont conformément équivalentes, mais on veut mettre l'accent sur le fait qu'on considère le modèle conforme de l'espace de Sitter comme un ouvert de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Comme \tilde{i}_1 est un plongement conforme la structure causale qu'il définit sur $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ est simplement la restriction à cet ouvert de la structure causale de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. En particulier, \tilde{i}_1 est en fait un Cauchy-plongement.

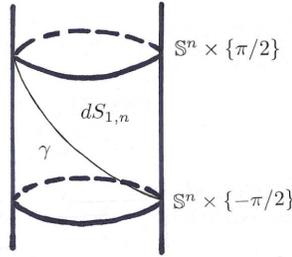
La frontière de $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'union des deux sphères $\mathbb{S}^n \times \{\pi/2\}$ et $\mathbb{S}^n \times \{-\pi/2\}$, qui sont deux hypersurfaces de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il s'en suit que toute courbe causale inextensible c de $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ admet un point limite futur sur $\mathbb{S}^n \times \{\pi/2\}$ et un point limite passé sur $\mathbb{S}^n \times \{-\pi/2\}$. En particulier si c est une géodésique lumière, son point limite futur est l'image par σ de son point limite passé.

Définition 2.31. *Les deux hypersurfaces $\mathbb{S}^n_- := \mathbb{S}^n \times \{-\pi/2\}$ et $\mathbb{S}^n_+ := \mathbb{S}^n \times \{\pi/2\}$ constituent la frontière conforme de l'espace de Sitter.*

Le modèle conforme de l'espace de Sitter et le modèle de Klein sont conformément équivalents. Si on identifie $d\mathbb{S}_{1,n}$ à $\mathbb{D}\mathbb{S}_{1,n}$ on obtient un plongement $\tilde{j}_1 : \mathbb{D}\mathbb{S}_{1,n} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ d'image $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$. Il est possible de prolonger \tilde{j}_1 de façon continue à la frontière de $\mathbb{D}\mathbb{S}_{1,n}$ dans $S(\mathbb{R}^{n+2})$. Cette frontière, comme expliqué à la section 2.1, est formée de deux copies de la sphère \mathbb{S}^n sur les quelles $O_0(1, n+1)$ agit conformément. Comme le plongement \tilde{j}_1 est un plongement conforme il permet de définir une action conforme du groupe $O_0(1, n+1)$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Plus précisément, comme l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ est $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximal (voir section 1.2), le groupe $O_0(1, n+1)$ stabilise l'ouvert $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\overline{O}_0(2, n+1)$, et il préserve donc les deux sphères \mathbb{S}^n_- et \mathbb{S}^n_+ . Si on munit ces deux sphères de la structure conforme induite par celle de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, l'action de $O_0(1, n+1)$ est une action conforme. La frontière conforme de l'espace de Sitter s'identifie donc à deux copies de la sphère conforme \mathbb{S}^n .

Cependant le plongement \tilde{j}_1 ne se prolonge pas de façon différentiable à la frontière : pour le voir il suffit de remarquer que toute géodésique lumière de $\mathbb{D}\mathbb{S}_{1,n}$ est tangente aux deux sphère du bord, alors que son image par \tilde{j}_1 est transverse aux deux sphère de la frontière conforme.

Remarque 2.32. Comme les relations de causalité de $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ sont les restrictions de celles de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on obtient des relations de causalité bien définies entre ses points et les points de sa frontière conforme.



Modèle conforme de l'espace anti-de Sitter

Proposition 2.33. *L'espace $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ est conformément équivalent à l'ouvert de $Ein_{1,n}$ défini par $(\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{S}^1, d\sigma^2 - d\theta^2)$, où $d\theta^2$ et $d\sigma^2$ sont respectivement les métriques canoniques sur \mathbb{S}^1 et sur l'hémisphère \mathcal{H}_+^n .*

Démonstration. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ tel que $Q_{2,n+1}(v, v) > 0$. Alors la Proposition 2.7 implique que la carte affine $U(v)$ est conformément équivalente à l'espace $Ad\mathbb{S}_{1,n}$. D'ailleurs $U(v)$ coïncide avec l'image par π de l'intersection de $C \cap X_{>}(v)$, où $X_{>}(v)$ est le demi-espace affine de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ où la forme linéaire $Q_{2,n+1}(\cdot, v)$ est positive. Sans perte de généralité on suppose $v = (0, \dots, 0, 1)$. Dans ce cas les vecteurs de $C \cap X_{>}(v)$ sont les vecteurs isotropes qui ont la dernière coordonnée positive. Il est alors clair que l'intersection $C \cap X_{>}(v) \cap S$ s'identifie avec l'espace produit $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{H}_+^n$, où \mathcal{H}_+^n est exactement l'hémisphère de \mathbb{S}^n telle que $x_{n+1} > 0$. La métrique induite sur $C \cap X_{>}(v) \cap S$ est la restriction de la métrique canonique $d\sigma^2 - d\theta^2$. Dans ce cas aussi on a bien l'équivalence conforme entre $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ et $(\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{S}^1, [d\sigma^2 - d\theta^2])$ \square

L'espace $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ n'est pas simplement connexe, contrairement à l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$, et le plongement i_{-1} induit un isomorphisme des groupes fondamentaux de $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ et de $Ein_{1,n}$. Il s'en suit qu'il n'est pas possible de relever i_{-1} en une application de $Ad\mathbb{S}_{1,n}$ en $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Mais il est toujours possible de définir une application \tilde{i}_{-1} de $\widetilde{Ad\mathbb{S}_{1,n}}$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ telle que $\tilde{i}_{-1} \circ p = pr \circ i_{-1}$, où $p : \widetilde{Ad\mathbb{S}_{1,n}} \rightarrow Ad\mathbb{S}_{1,n}$ est la projection de revêtement de $Ad\mathbb{S}_{1,n}$. Par construction \tilde{i}_{-1} est un plongement

conforme, donc la structure causale induite sur son image est la restriction de la structure causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

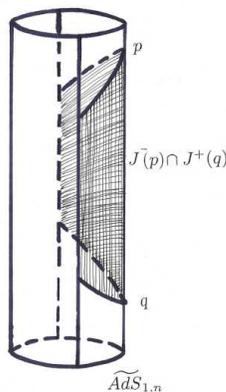
La Proposition 2.33 implique que l'image de \tilde{i}_{-1} est l'ouvert $\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$.

Définition 2.34. L'ouvert $\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$ est le *modèle conforme* de $\widetilde{AdS}_{1,n}$. Sa frontière dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est appelée *frontière conforme*. Cette frontière s'identifie à l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n-1}$, et elle est notée $\partial AdS_{1,n}$.

Le modèle conforme est particulièrement adapté pour étudier la causalité de $\widetilde{AdS}_{1,n}$, car on connaît bien la causalité dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. En particulier :

Lemme 2.35. *L'espace-temps $\widetilde{AdS}_{1,n}$ n'est pas globalement hyperbolique.*

Démonstration. Soient $p = (t_p, x_p)$ et $q = (t_q, x_q)$ deux points de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ tels que $t_p > t_q$ et $|t_p - t_q| > \pi$. Alors, d'après la Proposition 2.18, l'intersection $J^-(p) \cap J^+(q)$ n'est pas compacte. \square



Les relations de causalité de $AdS_{1,n}$ se prolongent à sa frontière conforme, car elles sont la restriction de celles de $Ein_{1,n}$. Comme la frontière conforme de l'espace anti-de Sitter s'identifie à l'espace d'Einstein universel d'une dimension inférieure, on obtient que sur $\partial AdS_{1,n}$ il y a des points causalement et même temporellement reliés entre eux. Comme on verra à la section 1, Proposition 1.6, cette situation montre une fois de plus que $AdS_{1,n}$ n'est pas globalement hyperbolique.

Modèle conforme de l'espace de Minkowski

Proposition 2.36. *Pour tout point $[x] \in Ein_{1,n}$, chaque composante connexe de $Ein_{1,n} \setminus C([x])$ est conformément équivalent à l'espace de Minkowski.*

Plus précisément, la carte affine $U(x)$, image du plongement i_0 , coïncide avec l'image par pr de l'ouvert $M(\sigma(\tilde{x}))$ des points de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui ne sont pas causalement reliés à $\sigma(\tilde{x})$, où $pr(\tilde{x}) = [x]$.

Démonstration. L'image du plongement i_0 est par définition l'ouvert $U(x)$. Cet ouvert est l'image par la projection π de l'ensemble $X_{>}(x) \cap C$, où $X_{>}(x)$ l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ où la forme linéaire $Q_{2,n+1}(\cdot, v)$ est définie positive. Or l'espace $\mathbb{R}^{2,n+1}$ est l'union disjointe des deux ouverts $X_{>}(x)$, $X_{<}(x)$ et du fermé $X_0 = x^\perp$, alors, comme d'après le Lemme 2.12 $\pi(X_0 \cap C) = C([x])$, on obtient que $U(x) = \pi(X_{>}(x) \cap C)$ est une des deux composantes connexes de $Ein_{1,n} \setminus C([x])$. Le Lemme 2.21 implique alors que $U(x)$ est l'image par pr de l'ensemble $M(\sigma(\tilde{x}))$. On peut passer de l'ouvert $X_{>}(x)$ à l'ouvert $X_{<}(x)$ par l'application de $O(2, n+1)$ qui envoie chaque vecteurs sur son opposé, on obtient alors que les deux composantes connexes de $Ein_{1,n} \setminus C([x])$ sont conformément équivalentes. \square

Comme l'espace de Minkowski est simplement connexe on peut relever le plongement i_0 en un plongement \tilde{i}_0 . Suivant le relevé qu'on choisit, si $i_0(\mathbb{R}^{1,n}) = U(x)$ par conséquence du Lemme 2.36 l'image de \tilde{i}_0 est un ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ de la forme $M(p)$, où $\sigma(p)$ est un relevé de $[x]$.

Définition 2.37. *Le modèle conforme de l'espace de Minkowski associé à un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(p) := M(\sigma(p)) = I^-(p) \cap I^+(\delta^{-1}(p))$.*

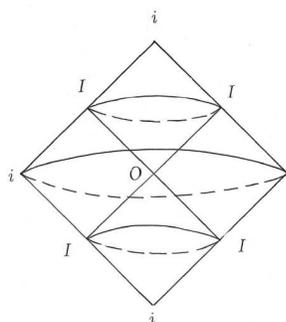
Remarque 2.38. Considérons le modèle de l'espace d'Einstein projectif décrit à la Remarque 2.15, c'est-à-dire l'espace $\overline{Ein}_{1,n}$. On note toujours $\pi_0 : Ein_{1,n} \rightarrow \overline{Ein}_{1,n}$ la projection au quotient. Si on fixe un point p de $Ein_{1,n}$, on remarque que sur chaque composante connexe de $Ein_{1,n} \setminus C(p)$ l'application π_0 est injective et son image est le complémentaire de $\pi_0(C(p))$ dans $\overline{Ein}_{1,n}$.

Alors, d'après la Proposition précédente, l'image du plongement $\pi_0 \circ i_0$ de l'espace de Minkowski dans $\overline{Ein}_{1,n}$ est le complémentaire du cône lumière $\pi_0(C([x]))$.

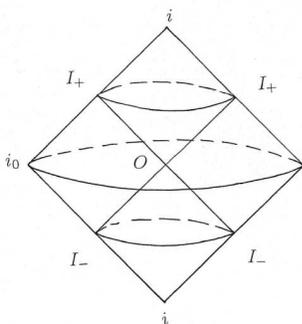
La restriction de l'application δ à l'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ est injective, mais la restriction de δ au bord de $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ ne l'est pas car les points p et $\delta^{-1}(p)$ sont identifiés dans $Ein_{1,n}$.

Définition 2.39. *La frontière conforme de l'espace de Minkowski est la frontière de l'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Elle est l'union des deux cônes lumière $\partial I^-(p)$ et $\partial I^+(\delta^{-1}(p))$.*

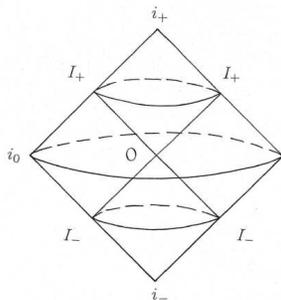
On va reproduire ici le célèbre diagramme de Penrose pour l'espace de Minkowski, dans les trois cas où on plonge Minkowski dans $\overline{Ein}_{1,n}$, $Ein_{1,n}$ or $\widetilde{Ein}_{1,n}$. La figure ci-de-sous représente la compactification de l'espace de Minkowski dans $\overline{Ein}_{1,n}$. Le cercle horizontale représente un unique point i à l'infini, identifié avec les deux sommets des deux cônes. Les deux cônes lumière à l'infini, nommés I , en haut et en bas dans la figure sont identifiés.



La figure ci-de-sous représente la compactification de l'espace de Minkowski dans $Ein_{1,n}$. Le cercle horizontale représente un unique point i_0 à l'infini. Les les deux sommets des deux cônes sont identifiés en un unique point à l'infini i . Les deux cônes lumière à l'infini, en haut et en bas dans la figure, I_+ et I_- ne sont pas identifiés.



La figure ci-de-sous représente la compactification de l'espace de Minkowski dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Le cercle horizontale représente un unique point i_0 à l'infini spatial. Le sommet i_+ est le point limite futur de toute géodésique temporelle inextensible future de $\mathbb{R}^{1,n}$, pendant que le sommet i_- est le point limite passé de toute géodésique temporelle inextensible passée de $\mathbb{R}^{1,n}$. Les deux cônes lumière, en haut et en bas dans la figure, I_+ et I_- , contiennent tous les limites respectivement futur et passé des géodésiques lumière inextensibles de $\mathbb{R}^{1,n}$.



3 Espace-temps conformément plats et (G, X) -structures

3.1 (G, X) -structures

Dans cette section G est un groupe qui agit fidèlement et transitivement sur une variété X simplement connexe. On suppose que cette action est *analytique* au sens où le seul élément pouvant agir trivialement sur un ouvert de X est l'élément neutre de X^1 .

Définition 3.1. Soit M une variété connexe. Une (G, X) -structure sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M et d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ tels que :

- les V_i sont des ouverts de X
- pour tout i, j et pour chaque composante connexe U de $U_i \cap U_j$ il existe un élément g de G tel que $\phi_j(p) = g \circ \phi_i(p)$ pour tout p dans U .

On dit que $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ est un (G, X) -atlas . Une variété munie d'une (G, X) -structure est dite (G, X) -variété.

Comme l'action de G sur X est analytique, il est clair que l'élément g dans la Définition 3.1 est unique.

L'exemple le plus simple de (G, X) -variété est la variété X même. Soit M une variété topologique. Lorsqu' il existe un difféomorphisme local $f : M \rightarrow X$, celui-ci définit une (G, X) -structure sur M . En fait il suffit de prendre comme recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ les ouverts où f est injective et comme applications ϕ_i la restriction de f à U_i . Dans ce cas les applications de transitions $\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}$ sont toutes égales à l'identité.

Étant donnée une (G, X) -variété M il n'existe pas toujours un difféomorphisme

1. Un exemple de cette situation est quand X est une variété pseudo-riemannienne et G un sous-groupe d'isométries agissant transitivement et fidèlement sur X

local $M \rightarrow X$. Cependant, à partir d'une (G, X) -structure sur M on peut lui associer naturellement un difféomorphisme local $D : \widetilde{M} \rightarrow X$.

Lemme 3.2. *Une (G, X) -structure sur une variété M définit naturellement une (G, X) -structure sur son revêtement universel \widetilde{M} .*

Démonstration. Soit $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ la projection de revêtement et soit $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de \widetilde{M} tel que $\pi|_{V_\alpha}$ est injective pour tout $\alpha \in A$. Alors $\{(V_\alpha \cap \pi^{-1}(U_i), \phi_i \circ \pi|_{V_\alpha \cap \pi^{-1}(U_i)})\}$ est un (G, X) -atlas pour \widetilde{M} . \square

Définition 3.3. Soient (U_0, ϕ_0) une carte du (G, X) -atlas de \widetilde{M} , un *chemin de cartes issu de (U_0, ϕ_0)* est une suite $\{(U_i, \phi_i), g_i\}_{i=1, \dots, r}$ telle que :

- $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1, \dots, r}$ est une suite de cartes du (G, X) -atlas de \widetilde{M}
- $U_k \cap U_{k-1} \neq \emptyset$ est connexe, pour tout $k = 1, \dots, r$
- g_k est l'unique élément de G tel que $\phi_{k-1} = g_k \circ \phi_k$ sur $U_k \cap U_{k-1}$, pour tout $k = 1, \dots, r$.

Étant donné un chemin de cartes $\{(U_i, \phi_i), g_i\}_{i=0, \dots, r}$ il est possible d'étendre le difféomorphisme ϕ_0 en un difféomorphisme $D_1 : U_0 \cup U_1 \rightarrow X$ de la façon suivante : $D_1(x) := g_1 \phi_1(x)$ pour $x \in U_1$ et $D_1(x) := \phi_0(x)$ pour $x \in U_0$. On peut répéter ce processus pour étendre D_1 à $U_0 \cup U_1 \cup U_2$ avec $D_2(x) := g_1 g_2 \phi_2(x)$ pour tout $x \in U_2$ et $D_2(x) := D_1(x)$ pour $x \in U_0 \cup U_1$. Ce raisonnement est à la base de la définition suivante.

Définition 3.4. Soit M une (G, X) -variété, et soit x_0 un point dans \widetilde{M} et (U_0, ϕ_0) une carte du (G, X) -atlas de \widetilde{M} telle que $x_0 \in U_0$.

- On définit une application $D : \widetilde{M} \rightarrow X$, dite application développante de M de la façon suivante : pour tout x dans \widetilde{M}

$$D(x) := g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_r \circ \phi_r(x)$$

où $\{(U_i, \phi_i), g_i\}_{i=1, \dots, r}$ est un chemin de cartes issu de (U_0, ϕ_0) tel que x appartient à U_r .

- On définit le morphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$, dit morphisme d'holonomie, comme : pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$

$$\rho(\gamma) := g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_r$$

où $\{(U_i, \phi_i), g_i\}_{i=1, \dots, r}$ est un chemin de cartes issu de (U_0, ϕ_0) tel que $\gamma(x_0)$ appartient à U_r .

Le fait que cette définition ne dépend pas de la suite $\{U_i, \phi_i\}_{i=1, \dots, r}$ choisie n'est pas difficile à vérifier et est une conséquence du fait que \widetilde{M} est simplement connexe (pour plus de détails on pourra consulter [45] ou [29]).

Le lemme suivant est une conséquence directe de la Définition 3.4.

Lemme 3.5. *L'application D est un difféomorphisme local et ρ est un morphisme. De plus ils vérifient la propriété suivante :*

$$D(\gamma(x)) = \rho(\gamma)(D(x)) \quad \forall x \in \widetilde{M} \quad (2.4)$$

Définition 3.6. Soient deux couples (D, ρ) et (D', ρ') , où D, D' sont des difféomorphismes locaux de \widetilde{M} dans X et ρ, ρ' des morphismes de $\pi_1(M)$ dans G qui vérifient la propriété (2.4). Alors on dit que (D, ρ) et (D', ρ') sont *équivalents* s'il existe g dans G tel que

$$D' = gD \quad \text{et} \quad \rho' = g\rho g^{-1}$$

Proposition 3.7. *Il y a une bijection entre les (G, X) -structures sur une variété M et les classes d'équivalence des couples (D, ρ) vérifiant la propriété (2.4).*

Démonstration. On a montré qu'à toute (G, X) -structure sur M on peut associer un couple (D, ρ) qui vérifie la propriété (2.4). Cependant le couple (D, ρ) ainsi obtenu dépend du choix de la carte initiale (U_0, ϕ_0) dans la Définition 3.4. Soit (D', ρ') le couple obtenu à partir d'une carte initiale (U'_0, ϕ'_0) différente de (U_0, ϕ_0) . On considère le chemin de cartes $\{(U_i, \phi_i), g_i\}_{i=1, \dots, r}$ tel que $(U_r, \phi_r) = (U'_0, \phi'_0)$. Soit $g = g_1 g_2 \dots g_r$. Il découle directement de la Définition 3.4 que :

$$D' = gD \quad \text{et} \quad \rho' = g\rho g^{-1}.$$

On obtient ainsi une application bien définie entre les (G, X) -structures sur M et les classes d'équivalence de couples (D, ρ) . On va montrer que cette application admet une inverse.

On se donne un difféomorphisme local $D : \widetilde{M} \rightarrow X$ et un morphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ qui vérifient la propriété (2.4). Soit $\{U_i\}$ un recouvrement d'ouverts de \widetilde{M} tel que l'application de revêtement $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ restreinte à chaque U_i est injective. Alors $\{(\phi(U_i), D \circ (\pi|_{\phi(U_i)})^{-1})\}$ est un (G, X) -atlas pour M et donc une (G, X) -structure sur M . On remarque que pour obtenir que les changements de cartes sont effectivement des éléments de G la propriété (2.4) est essentielle. Il n'est pas difficile de vérifier que le couple associé par la Définition 3.4 à cette nouvelle (G, X) -structure sur M est exactement le couple (D, ρ) de départ. La proposition est donc prouvée. \square

3.2 Espace-temps conformément plats

Définition 3.8. Une variété lorentzienne (M, g) est dite *conformément plate* si pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage U et un plongement $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ tel que, si $g_{1,n}$ est la métrique de $\mathbb{R}^{1,n}$, son tiré en arrière $\phi^* g_{1,n}$ est conformément équivalent à la métrique $g|_U$.

On commence par observer que comme corollaire de la Proposition 2.27 on obtient que l'espace $Ein_{1,n}$ est un espace-temps conformément plat.

Corollaire 3.9. *L'espace $Ein_{1,n}$ est conformément plat. De même les espaces $AdS_{1,n}$ et $dS_{1,n}$ sont conformément plats.*

Démonstration. Le fait que que l'espace $Ein_{1,n}$ est conformément plat découle de la transitivité de l'action de $SO_0(2, n+1)$ sur $Ein_{1,n}$ et du plongement conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ dans $Ein_{1,n}$. Comme $AdS_{1,n}$ et $dS_{1,n}$ se plongent conformément dans $Ein_{1,n}$ on obtient qu'eux aussi sont conformément plats. \square

La raison pour laquelle le théorème de Liouville est tellement important pour l'étude des espace-temps conformément plats est que , quand la dimension est supérieure ou égale à 3, il permet de voir ces espaces comme des (G, X) -structures, où $G = SO_0(2, n)$ et $X = Ein_{1,n}$.

Encore une fois la situation dans le cas riemannien est tout à fait similaire (voir par exemple [40]) : quand le dimension est majeure ou égal à 3, les concepts de $(\mathbb{S}^n, SO(n+1))$ -variété et variété riemannienne conformément plate sont les mêmes. En fait on a :

Proposition 3.10. *Étant donné une $(Ein_{1,n}, SO_0(2, n))$ -structure sur une variété on peut lui associer une classe d'équivalence de métriques lorentziennes conformément plates. Cette correspondance est bijective quand $n \geq 2$.*

Démonstration. Soit M une variété munie d'une $(Ein_{1,n}, SO_0(2, n))$ -structure et soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ un $(Ein_{1,n}, SO_0(2, n))$ -atlas pour M . Si g_0 est la métrique $d\sigma^2 - dt^2$ sur $Ein_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$, le tiré en arrière $\phi_\alpha^* g_0$ est une métrique lorentzienne sur chaque U_α . Soit f_α une partition de l'unité associée à $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, alors

$$g := \sum_{\alpha} f_{\alpha} \phi_{\alpha}^* g_0$$

est une métrique lorentzienne sur M . Comme $Ein_{1,n}$ est conformément plat au sens de la Définition 3.8, la métrique g l'est aussi.

Inversement soit (M, g) variété lorentzienne conformément plate de dimension $n+1$, et on suppose $n \geq 2$. Soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ un atlas pour M tel que pour tout α , $g|_{U_\alpha}$ est conformément équivalent à $\phi_\alpha^* g_{1,n}$. Donc pour chaque composante connexe V de $U_\alpha \cap U_\beta$ on a que

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{f_\alpha(V)} : \phi_\alpha(V) \longrightarrow \phi_\beta(V)$$

est une application conforme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^{1,n}$. Comme $\mathbb{R}^{1,n}$ se plonge conformément dans $Ein_{1,n}$, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{f_\alpha(V)}$ est en fait une application conforme entre deux ouverts de $Ein_{1,n}$. D'après le Théorème de Liouville, Théorème 2.5, l'application $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{f_\alpha(V)}$ se prolonge en un unique élément de $SO_0(2, n)$. On obtient ainsi une $(Ein_{1,n}, SO_0(2, n))$ -structure sur M . \square

Dans la suite quand on parlera d'espace-temps conformément plat on supposera toujours $n \geq 2$: on pourra ainsi voir un tel espace comme une variété localement modélée sur $(Ein_{1,n}, SO_0(2, n))$. Suivant le cas, il peut être plus avantageux, notamment pour pouvoir utiliser la notion de causalité, de se placer dans l'espace d'Einstein universel, c'est à dire, de voir l'espace-temps conformément plat comme une $(\widetilde{Ein}_{1,n}, \widetilde{SO}_0(2, n))$ -variété.

Chapitre 3

Extensions maximales

1 Généralités sur les extensions maximales d'un espace-temps

Le problème d'existence et unicité de l'extension maximale d'un espace-temps globalement hyperbolique donné doit son origine à la résolution d'un problème d'équations différentielles issu de la physique : le problème d'existence et unicité des solutions maximales pour l'équation d'Einstein.

1.1 Problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein

L'équation d'Einstein est une équation qui met en relation une quantité physique comme le tenseur d'impulsion-énergie avec des quantités purement géométriques comme la courbure de Ricci et la métrique de l'univers. On l'écrit comme suit :

$$Ric(g) - 1/2scal(g)g + \Lambda g = 8\pi T \quad (3.1)$$

où g est une métrique lorentzienne, $Ric(g)$ est le tenseur de courbure de Ricci, $scal(g)$ la courbure scalaire de la métrique g , Λ la constante cosmologique et T un tenseur symétrique de type $(2, 0)$, appelé tenseur d'impulsion-énergie. En absence de matière, donc si on est dans le vide, le tenseur T est nul et si on suppose $\Lambda = 0$ les équations d'Einstein deviennent :

$$Ric(g) = 0 \quad (3.2)$$

Une solution de ces équations est un espace-temps M dont la métrique est à courbure de Ricci nulle. Dans le cas où T n'est pas nul, une possibilité est de partir

d'une variété M sur laquelle T est défini, et de chercher une métrique lorentzienne g sur M qui vérifie les équations (3.1). Mais, dans le problème général, T n'est pas prescrit à l'avance, même si on peut supposer qu'il vérifie certaines hypothèses, et il faut étudier l'évolution de la métrique et du tenseur T simultanément de façon à satisfaire (3.1). Dans les modèles cosmologiques standards on suppose que l'univers évolue comme un fluide parfait, voir par exemple [42] Chapitre 12 ou [33] pag 134-138. Le tenseur d'impulsion énergie prend alors une forme assez simple mais dont l'étude reste un sujet d'actualité. Si on impose des conditions supplémentaires de symétrie, on peut classifier les espaces-temps solutions, obtenant de la sorte les *modèles cosmologiques de Robertson-Walker*.

Si on impose à l'espace-temps solution M d'être globalement hyperbolique on peut considérer le problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein. L'idée est la suivante : on se donne une variété riemannienne (S, h) de dimension n munie d'un $(2, 0)$ -tenseur symétrique II , et on cherche une métrique lorentzienne g sur la variété produit $S \times \mathbb{R}$. La métrique g doit vérifier les équations (3.1) pour un certain T donné a priori sur $S \times \mathbb{R}$, de sorte que II soit la deuxième forme fondamentale de l'hypersurface $S \times \{0\}$.

Il se trouve que h et II ne peuvent pas être données de façon complètement indépendante. Dans le cas où $T = 0$ une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy ait une solution est que h et II vérifient certaines équations, connues sous le nom d' *équations des contraintes* de la relativité générale (voir chapitre 7 de [33]).

Définition 1.1. Une *donnée initiale* pour le problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein est un triplet (S, h, II) , où :

- S est une variété munie de la métrique riemannienne h ,
- II est un $(2, 0)$ -tenseur symétrique sur S ,
- II et h vérifient les équations des contraintes.

Définition 1.2. Étant donné une donnée initiale (S, h, II) , une *solution* du problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein pour $T = 0$ est un espace-temps (M, g) globalement hyperbolique tel que la métrique lorentzienne g vérifie les équations 3.2 et tel qu'il existe un plongement $i : S \hookrightarrow M$ qui vérifie :

- $i^*g = h$
- $i(S)$ est une hypersurface de Cauchy de M
- $i^*(II)$ est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $i(S)$.

Le problème de l'existence locale de solution pour le problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein a été résolu par Geroch et Choquet-Bruhat dans les années '80 pour une large classe de tenseurs T , voir [14] et [15]. Dans [14] ils démontrent le résultat suivant, dans le cas où $T = 0$:

Théorème 1.3. *Pour toute donnée initiale (S, h, II) , le problème de Cauchy associé aux équations (3.2) admet une solution. Pour tout couple de solutions (M, g)*

et (M', g') , il existe des voisinages des hypersurfaces de Cauchy $i(S)$ et $i'(S')$ isométriques l'un à l'autre.

Il est alors naturel de se poser la question suivante : comment deux solutions (M, g) et (M', g') données, qui, comme le théorème affirme, coïncident au voisinage de l'hypersurface de Cauchy $i(S) \cong i'(S')$, se comportent-elles loin de la donnée initiale ? En d'autres termes le problème est de comprendre si toute solution locale s'étend de manière unique en une solution maximale du problème de Cauchy.

Définition 1.4. Soient (M, g) et (M', g') deux solutions du problème de Cauchy relatives à une donnée initiale (S, h, II) . On dit que (M, g) *étend* (M', g') ou que (M, g) est *une extension* de (M', g') , s'il existe un plongement isométrique de (M', g') en (M, g) qui envoie l'hypersurface $i'(S')$ sur $i(S)$.

Si (M, g) est une extension de (M', g') , on peut voir (M', g') comme un voisinage ouvert de $i(S)$ dans (M, g) . On peut maintenant définir ce qu'est une solution maximale du problème de Cauchy :

Définition 1.5. Une *solution maximale* du problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein est une solution (M, g) telle que l'unique extension de (M, g) est l'extension triviale $(M, g) \subset (M, g)$.

On est alors amenés à se demander si on peut toujours étendre une solution locale donnée en une solution maximale et si une telle *extension maximale* est unique. Dans [15] Choquet-Bruhat et Geroch ont prouvé :

Théorème 1.6. *Étant donné une solution locale (M, g) du problème de Cauchy, de données initiales (S, h, II) , il existe une solution maximale (M', g') du même problème qui étend (M, g) . La solution (M', g') est unique à isométrie près.*

1.2 Extension maximale dans une catégorie rigide

Dans la section précédente on a défini l'extension maximale d'un espace-temps solution du problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein. Le but de cette section est de montrer comment cette notion peut être généralisée, de façon assez naturelle, à d'autres classes d'espace-temps globalement hyperboliques qui ne sont pas solution des équations d'Einstein.

Définition 1.7. Soient M et N deux espace-temps GH. Un plongement isométrique $f : M \rightarrow N$ est dit un *Cauchy-plongement* s'il existe une hypersurface de Cauchy $S \subset M$ telle que $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de N . S'il existe un Cauchy-plongement $f : M \rightarrow N$ on dit que N *étend* M .

On remarque que si M et N sont deux solutions des équations d'Einstein, le fait que M se plonge dans N par un Cauchy-plongement équivaut à ce que M et N sont solutions du même problème de Cauchy et que N étend M au sens de la Définition 1.4. La Définition 1.4 est alors un cas particulier de la Définition 1.7 ci-dessus.

À partir de la définition de Cauchy-plongement on peut parler à nouveau d'extension maximale d'un espace-temps globalement hyperbolique donné :

Définition 1.8. *Un espace-temps globalement hyperbolique M est maximal si tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps est surjectif.*

La notion de maximalité est alors naturellement associée à celle d'hyperbolicité globale. Étant donné un espace-temps globalement hyperbolique M on peut à nouveau chercher à savoir s'il admet une extension maximale et si cette extension est unique.

En adaptant les arguments de la preuve du Théorème 1.6 on montre que tout espace-temps donné admet une extension maximale, au sens de la définition 1.8, mais en général on ne peut pas s'attendre à ce que elle soit unique. Cependant, si on se restreint à certaines catégories d'espace-temps la preuve du Théorème 1.6 peut encore s'appliquer.

Définition 1.9. *Une catégorie d'espace-temps est une classe \mathcal{C} d'espace-temps telle que :*

- \mathcal{C} est stable par isométrie : si (M, g) appartient à \mathcal{C} et (N, h) est isométrique à (M, g) alors (N, h) appartient à \mathcal{C} .
- \mathcal{C} est stable par restriction : si (M, g) appartient à \mathcal{C} alors pour tout ouvert U de M , $(U, g|_U)$ appartient à \mathcal{C} .
- \mathcal{C} est stable par recollement : s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de (M, g) tel que pour tout élément i de I la restriction $(U_i, g|_{U_i})$ appartient à \mathcal{C} alors (M, g) est dans \mathcal{C} .

On remarque que dans le premier axiome, on ne demande pas que l'isométrie préserve l'orientation chronologique. Ainsi, \mathcal{C} est stable par inversion du temps : si (M, g) appartient à \mathcal{C} , l'espace-temps obtenu en inversant l'orientation chronologique est lui aussi dans \mathcal{C} .

Un exemple typique de catégorie d'espace-temps est la classe des espace-temps dont la métrique lorentzienne est de classe C^r pour r fixé. En particulier, nous pouvons définir la catégorie analytique : celle où les espace-temps sont des variétés analytiques munies de métriques lorentziennes analytiques. Un autre exemple de catégorie est celle des espace-temps qui sont des (G, X) -variétés, où X est un espace-temps fixé et G le groupe des isométries de X qui préservent l'orientation et l'orientation chronologique. Nous parlons alors de la (G, X) -catégorie. Cet

exemple de catégories contient trois catégories dont on a déjà parlé : celle des espaces-temps plats (i.e. localement modelés sur l'espace de Minkowski), celle des espaces-temps localement modelés sur l'espace anti-de Sitter, et celle des espaces-temps localement modelés sur l'espace de Sitter.

Les espace-temps qui sont solutions des équations d'Einstein sont alors seulement une des catégories possibles où on peut étudier la maximalité.

Définition 1.10. *Un espace-temps globalement hyperbolique M appartenant à une catégorie \mathcal{C} est \mathcal{C} -maximal si tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps appartenant à la catégorie \mathcal{C} est surjectif.*

Par exemple, si un espace-temps globalement hyperbolique M est maximal parmi les espace-temps localement modelés sur l'espace de Minkowski, de Sitter ou anti-de Sitter, on écrit que M est respectivement $\mathbb{R}^{1,n}$ -maximal, $d\mathbb{S}^{1,n}$ -maximal ou $Ad\mathbb{S}^{1,n}$ -maximal.

Si un espace-temps globalement hyperbolique appartenant à une catégorie \mathcal{C} est maximal au sens de la Définition 1.8 il est alors \mathcal{C} -maximal. Par contre un espace-temps globalement hyperbolique \mathcal{C} -maximal peut admettre une extension en dehors de la catégorie \mathcal{C} , il n'est donc pas forcément maximal.

Définition 1.11. On dit qu'une catégorie \mathcal{C} d'espace-temps est *rigide* si étant donnés deux espace-temps M et N globalement hyperboliques dans \mathcal{C} et une isométrie $f : I^\pm(p) \rightarrow I^\pm(q)$, où $p \in M$ et $q \in N$, alors f s'étend en une isométrie $\hat{f} : U \cup I^\pm(p) \rightarrow V \cup I^\pm(q)$, où U et V sont des voisinages de p et q .

Il s'agit là de l'hypothèse centrale dans la preuve du théorème de Choquet-Bruhat et Geroch (Théorème 1.6), qui, *mutatis mutandis*, se généralise directement de la manière suivante :

Théorème 1.12. *Tout espace-temps globalement hyperbolique appartenant à une catégorie rigide \mathcal{C} admet une unique extension \mathcal{C} -maximale.*

Les principaux exemples de catégories rigides d'espace-temps sont :

– *Les espace-temps solutions du même problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein.* Pour prouver que cette catégorie est une catégorie rigide il faudrait rentrer dans la théorie des EDP relative à l'équation d'Einstein. Ici on va juste donner une idée très rapide des arguments utilisés.

Soient M et N deux solutions du problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein de donnée initiale (S, h, II) et soit $f : I^-(p) \rightarrow I^-(q)$ une isométrie, où $p \in M$ et $q \in N$. Comme la l'EDP sous-jacente est à propagation finie, la solution en x (plus précisément, le 1-jet de la métrique de M en x) pour tout élément x au voisinage de p est entièrement déterminée par la valeur de la donnée initiale (h, II) restreinte à un voisinage de $J^-(p) \cap S$ dans S . Le même argument est vrai

pour les points appartenant à un voisinage de q dans N .

D'après le Théorème 1.3 M et N sont isométriques au voisinage de S donc l'isométrie f se prolonge en une isométrie entre un voisinage de $J^-(p) \cap S$ et un voisinage de $J^-(q) \cap S$. Il s'en suit que M et N sont isométriques aux voisinages de p et de q .

– *Les espace-temps analytiques.* Étant donné deux espace-temps analytiques (M, g) et (N, h) , tout isométrie analytique $f : I^-(p) \rightarrow I^-(q)$, où $p \in M$ et $q \in N$, se prolonge par analyticité à une application \hat{f} entre deux voisinages respectivement de p et de q . Soient $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ deux suites de points de $I^-(p)$ et $I^-(q)$ qui convergent respectivement à p et q . Comme la métrique sur M est aussi analytique on peut passer en passant à la limite dans $h_{q_n}(d_{p_n}\hat{f}\cdot, d_{p_n}\hat{f}\cdot) = g_{p_n}(\cdot, \cdot)$ on obtient $h_q(d_p\hat{f}\cdot, d_p\hat{f}\cdot) = g_p(\cdot, \cdot)$. Soient U et V deux voisinages normaux de p et q , on définit l'application $\exp_q \circ d_p\hat{f} \circ (\exp_p)^{-1} : U \rightarrow V$. Il s'agit d'une isométrie qui coïncide avec f sur $I^-(p)$, et qui est analytique. L'unicité de l'extension analytique implique alors $\hat{f} = \exp_q \circ d_p\hat{f} \circ (\exp_p)^{-1}$ sur U , donc \hat{f} est une isométrie.

– *Les espace-temps modelés sur un couple (G, X) .* Soient M et N deux espace-temps localement modelés sur (G, X) et soit $f : I^-(p) \rightarrow I^-(q)$ une isométrie, où $p \in M$ et $q \in N$. Soient $\phi : U \rightarrow X$ et $\psi : V \rightarrow X$ deux cartes au voisinage de p et de q . Par définition de (G, X) -structure l'isométrie $\psi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap I^-(q)) \rightarrow \psi(U \cap I^-(p))$ se prolonge en un unique élément $g \in G$. Donc l'application $\hat{f} := \psi \circ g \circ \phi$ est une isométrie entre U et V .

La dernière catégorie contient en particulier celle des espace-temps à courbure constante. Ces derniers sont aussi solutions de l'équation d'Einstein, et sont donc déjà implicitement considérés dans la formulation du Théorème 1.6.

Il est évident que si un espace-temps globalement hyperbolique est maximal parmi tous les espace-temps globalement hyperbolique, au sens de la définition 1.8, il sera aussi \mathcal{C} -maximal pour toutes les catégories \mathcal{C} auxquelles il appartient. Par exemple, si M est un espace-temps globalement hyperbolique localement modelé sur l'espace de Minkowski, maximal en tant qu'espace-temps globalement hyperbolique, il le sera d'autant plus en tant qu'espace-temps plat. Tel est le cas par exemple des espace-temps plats CGHM (Cauchy-Compact Globalement Hyperbolique Maximal) comme on le verra à la section 3.

1.3 Extension maximale conforme et conformément plate

Dans la section 3 on a donné une formulation du problème de l'extension d'un espace-temps globalement hyperbolique par les Cauchy-plongements : cette formulation se généralise facilement au cas conforme.

On peut en fait parler de Cauchy-plongement conformes :

Définition 1.13. Soient M et N deux espace-temps globalement hyperbolique. Un *Cauchy-plongement conforme* (où simplement Cauchy-plongement si le contexte le permet) est un plongement conforme $f : M \rightarrow N$ tel qu' il existe une hypersurface de Cauchy $S \subset M$ telle que $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de N .

Comme dans le contexte isométrique on dira qu' un espace-temps N globalement hyperbolique *étend conformément* un autre espace-temps globalement hyperbolique M s'il existe un Cauchy-plongement conforme $f : M \rightarrow N$. Un espace-temps qui n'admet pas d'extensions conformes non triviales sera appelé *C -maximal* (ne pas confondre C -maximal et \mathcal{C} -maximal! Ici, le C signifie Conforme).

Même si ici on sort du contexte isométrique on peut encore parler de catégorie d'espace-temps en remplaçant simplement les isométries par des difféomorphismes conformes dans la Définition 1.9. L'image d'un espace-temps conformément plat par un Cauchy-plongement est conformément plat. On peut donc parler de la catégorie des espace-temps conformément plats, qu'on appelle \mathcal{C}_0 . On dit alors qu'un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat M est *C_0 -maximal*, si tout Cauchy-plongement conforme de M dans un espace-temps N globalement hyperbolique conformément plat est surjectif.

En résumé on a donc plusieurs notions de maximalité pour les espace-temps globalement hyperbolique, suivant qu'on considère des Cauchy-plongement isométriques ou conformes et suivant la catégorie à laquelle on se restreint.

Certaines implications sont évidentes : par exemple si M est un espace-temps localement modelé sur une paire (G, X) , où X est, suivant le cas, l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$, $dS^{1,n}$ ou $AdS^{1,n}$, on a :

$$M \text{ est } C\text{-maximal} \Rightarrow M \text{ est } C_0\text{-maximal} \Rightarrow M \text{ est } X\text{-maximal} \quad (3.3)$$

Évidemment, les implications réciproques ne sont pas nécessairement vérifiées : un espace-temps C_0 -maximal peut ne pas être C -maximal, un espace-temps plat-maximal peut ne pas être C_0 -maximal, etc.. Dans la section 3 et surtout à la section 2 on verra des situations dans lesquelles les implications inverses sont néanmoins vérifiées.

Maintenant que nous avons défini la C -maximalité et la C_0 -maximalité, on peut à nouveau se poser le problème, comme dans le cas isométrique, de comprendre si tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat admet une C_0 -extension maximale ou même une C -extension maximale, et si une telle extension est unique à difféomorphisme conforme près.

En d'autres termes, il s'agit de généraliser le Théorème 1.6 au cas conforme et au cas conformément plat. Dans la section 3 on va prouver l'existence et l'unicité de la C_0 -extension maximale pour un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique donné de dimension supérieure ou égale à 3. Le problème de l'existence et unicité de la C -extension maximale est plus délicat (et on ne le fera pas!)

car dans ce cas, beaucoup plus général, les espace-temps ne sont plus localement modélés sur un espace modèle, comme l'espace d'Einstein pour les espace-temps conformément plats de dimension supérieure ou égale à 3, et on dispose de beaucoup moins de structure.

2 Cauchy-plongements

Dans cette section on va étudier certaines propriétés des Cauchy-plongements. Comme il s'agit bien de propriétés causales elles s'appliquent aussi bien à des Cauchy-plongements isométriques qu'à des Cauchy-plongements conformes. On parlera donc simplement de Cauchy-plongement sans spécifier s'il est isométrique ou conforme.

Dans la suite M et N seront deux espace-temps globalement hyperboliques et S, S' deux hypersurfaces de Cauchy respectivement de M et N .

Lemme 2.1. *L'image d'un Cauchy-plongement $f : (M, S) \rightarrow (N, S')$ est un ouvert causalement convexe de N .*

Démonstration. Soient $f(x)$ et $f(y)$ deux points de $f(M)$ causalement reliés par une courbe future $c : [0, 1] \rightarrow N$, $c(0) = f(x)$ et $c(1) = f(y)$. On prolonge c en une courbe inextensible $c : \mathbb{R} \rightarrow N$. Comme N est globalement hyperbolique $c : \mathbb{R} \rightarrow N$ est un plongement et comme $f(M)$ est un ouvert de N , l'intersection $c^{-1}(f(M) \cap c(\mathbb{R}))$ est une union d'intervalles. Soit I un de ces intervalles. La courbe $(f|_{f(M)})^{-1} \circ c : I \rightarrow M$ est causale et inextensible dans M et rencontre donc l'hypersurface de Cauchy S de M en un point $z \in M$. Mais ceci implique $f(z) \in f(S) \cap c(I) \neq \emptyset$. Comme $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy elle ne rencontre pas deux fois une courbe causale : on en déduit que $c^{-1}(f(M) \cap c(\mathbb{R}))$ a une seule composante connexe qui est donc $[0, 1]$ tout entier. \square

Corollaire 2.2. *Un Cauchy-plongement $f : (M, S) \rightarrow (N, S')$ envoie tout sous-ensemble achronal A de M en un sous-ensemble achronal de N .*

Démonstration. Soit par l'absurde γ une courbe de type temps entre deux points de $f(A)$. Comme l'image $f(M)$ est causalement convexe dans N , la courbe γ est entièrement contenue dans $f(M)$. Alors la courbe $(f|_{f(M)})^{-1} \circ \gamma$ est une courbe de type temps entre deux points de A , cela contredit l'achronalité de A . \square

Corollaire 2.3. *Un Cauchy-plongement $f : (M, S) \rightarrow (N, S')$ envoie toute hypersurface de Cauchy de M en une hypersurface de Cauchy de N .*

Démonstration. Soit $\Sigma \subset M$ une hypersurface de Cauchy. D'après le Corollaire 2.2 $f(\Sigma)$ est une hypersurface achronale. Le fait qu'elle est edgeless découle du fait que $f(M)$ est un voisinage ouvert de $f(\Sigma)$ et du fait que Σ est edgeless. Il reste à montrer que $f(\Sigma)$ rencontre toute courbe causale inextensible. Soit $c :$

$\mathbb{R} \rightarrow N$ une courbe inextensible de N . On sait que c intersecte S' ce qui implique $f(M) \cap c(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et par la démonstration précédente $(f|_{f(M)})^{-1} \circ c : \mathbb{R} \rightarrow M$ est une courbe causale inextensible de M . Comme Σ est une hypersurface de Cauchy elle rencontre cette courbe, donc c rencontre $f(\Sigma)$, donc $f(\Sigma)$ est une hypersurface de Cauchy de M' . \square

Une propriété remarquable des Cauchy-plongements est qu'ils sont déterminés par leur restriction à une hypersurface de Cauchy donnée dans la variété de départ. On énonce alors le lemme suivant dont on ne donnera la preuve qu'au chapitre 4, Proposition 4.1, quand on aura mis en place les outils nécessaires.

Lemme 2.4. *Soient $f, g : M \rightarrow N$ deux Cauchy-plongements tels que $f|_{\Sigma} = g|_{\Sigma}$, alors $f = g$.*

On va maintenant voir comment est faite la frontière de l'image d'un Cauchy-plongement.

Lemme 2.5. *Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement. La frontière $\partial f(M)$ est l'union disjointe de deux fermés achronaux edgeless (éventuellement vides) $\partial^+ f(M)$ et $\partial^- f(M)$ de N tels que*

$$I^-(\partial^+ f(M)) \cap I^+(\partial^- f(M)) \subset f(M).$$

Démonstration. Soit S une hypersurface de Cauchy acausale de M . On identifie M à son image dans N , S est alors aussi une hypersurface de Cauchy acausale de N . Soit $M^{\pm} := I^{\pm}(S) \cap M$ et de manière analogue soit $N^{\pm} := I^{\pm}(S) \cap N$. Le bord ∂M est alors l'union disjointe de $\partial^+ M := \partial M \cap N^+$ et $\partial^- M := \partial M \cap N^-$.

1) *Pour tout point $p \in \partial^+ M$ on a $I^-(p) \cap N^+ \subset M^+$.*

Soit $q \in I^-(p) \cap N^+$, il existe une courbe causale passée c qui le relie à un point $z \in S$. Pour tout x proche de p on a $q \in I^-(x)$, mais comme p est dans la frontière de M^+ il y a des points de M^+ qui sont arbitrairement proches de p . Soit w un tel point, il existe une courbe causale passée qui va de w à z et qui passe par q . Or M est causalement convexe dans N d'après le Lemme 2.1 donc $q \in M^+$.

En renversant l'orientation on obtient aussi :

1') *Pour tout point $p \in \partial^- M$ on a $I^+(p) \cap N^- \subset M^-$. En particulier,*

$$I^-(\partial^+ f(M)) \cap I^+(\partial^- f(M)) \subset f(M).$$

2) *$I^+(\partial^+ M) \cap M$ est vide.*

Soit par l'absurde x un point de $I^+(\partial^+ M) \cap M$, alors il existe une courbe causale passée c qui connecte x avec un point $y \in \partial^+ M$. On prolonge cette courbe en une courbe c' causale inextensible dans le passé. Alors c' doit rencontrer S en un point z . Comme M est causalement convexe dans N on obtient $y \in M$, contradiction.

3) *$\partial^+ M$ est achronale.*

Soit c une courbe temporelle future reliant deux point $x < y$ de $\partial^+ M$ alors $I^+(x)$ est un voisinage ouvert de y , et par le point 2) il est disjoint de M , mais ceci est absurde car y est dans l'adhérence de M .

4) $\partial^+ M$ est *edgeless*.

Ceci découle du point 2) et du fait qu'une courbe causale qui relie un point dans $N^+ \setminus M^+$ à un un point dans M^+ doit traverser $\partial^+ M$.

En renversant l'orientation chronologique on obtient les mêmes résultats pour $\partial^- M$. \square

3 Existence et unicité de l'extension C_0 -maximale

Dans cette section on prouve le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique conformément plate, alors il existe une unique extension C_0 -maximale. Cette extension est unique à difféomorphisme conforme près.*

3.1 Existence

Dans la suite un *espace temps conforme* est une variété munie d'une classe conforme de métriques lorentziennes orientées et temporellement orientées.

Soit M un espace-temps conforme de dimension $n + 1 \geq 3$, et soit $\phi : \Sigma \rightarrow M$ un plongement conforme d'une variété riemannienne Σ dans M tel que $\phi(\Sigma)$ est une hypersurface de Cauchy de M . Soit \mathcal{F} l'ensemble des triplets (N, ψ, f) constitué d'un espace-temps conforme N , d'un plongement conforme $\psi : \Sigma \rightarrow N$ tel que $\psi(\Sigma)$ est une hypersurface de Cauchy de N et d'un Cauchy-plongement $f : M \rightarrow N$ tel que $f \circ \phi = \psi$.

On définit sur \mathcal{F} la relation suivante :

$$(N, \psi, f) \preceq (N', \psi', f') \iff \exists h : N \rightarrow N'$$

$$h \text{ plongement conforme tel que } h \circ \psi = \psi'.$$

On remarque que $h \circ \psi = \psi'$ implique $h \circ f = f'$. En plus d'après le Lemme 2.4 si $(N, \psi, f) \preceq (N', \psi', f')$, le Cauchy-plongement $h : N \rightarrow N'$, tel que $h \circ \psi = \psi'$, est unique.

La relation qu'on vient de définir est clairement réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique. Cependant, si $(N, \psi, f) \preceq (N', \psi', f')$ et $(N', \psi', f') \preceq (N, \psi, f)$ il existe deux Cauchy-plongements $h : N \rightarrow N'$ et $h' : N' \rightarrow N$ tels que $h \circ \psi = \psi'$ et $h' \circ \psi' = \psi$. Alors $h \circ h'$ restreint à l'hypersurface de Cauchy $\psi(\Sigma)$ est l'identité, et d'après le Lemme 2.4, $h \circ h'$ est l'identité sur N . De manière symétrique, $h' \circ h$ est l'application identité sur N' . Il s'en suit que N et N' sont

conformément difféomorphes.

La relation :

$$(N, \psi, f) \simeq (N', \psi', f') \iff [(N, \psi, f) \preceq (N', \psi', f') \text{ et } (N, \psi', f') \preceq (N, \psi, f)]$$

est une relation d'équivalence : elle identifie en quelque sorte les extensions qui ne diffèrent que par une composition au but par un difféomorphisme conforme. On note $[N, \psi, f]$ la classe d'équivalence de (N, ψ, f) et par $\overline{\mathcal{F}}$ l'ensemble des classes d'équivalence. La relation \preceq induit sur $\overline{\mathcal{F}}$ une relation, qu'on désigne encore par \preceq , et qui est cette fois une relation d'ordre partiel.

On va montrer que tout sous-ensemble totalement ordonné de $(\overline{\mathcal{F}}, \preceq)$ a un majorant. D'après le Lemme de Zorn on aura alors l'existence d'un élément maximal. Cet élément sera l'*extension maximale conformement plate* de M recherchée.

Soit donc $\{[M_i, \psi_i, f_i]\}_{i \in I}$ une sous-ensemble totalement ordonné de $\overline{\mathcal{F}}$, avec $M_0 = M$, $S_0 = S$ et $\psi_0 = \phi$. Si $i < j$, on note $f_{i,j} : M_i \rightarrow M_j$ l'unique Cauchy-plongement tel que $f_{i,j} \circ \psi_i = \psi_j$. D'après le Lemme 2.4 $f_{i,k} \circ f_{k,j} = f_{i,j}$ et $f_{i,i} = id$ pour tout $i \leq j \leq k$.

Soit $\mathcal{M} := \sqcup_{i \in I} M_i$ l'union disjointe des M_i . Sur \mathcal{M} on définit la relation suivante :

$$(x, i) \sim (y, j) \iff \begin{cases} i \leq j & f_{i,j}(x) = y \\ \text{ou} \\ j < i & f_{j,i}(y) = x \end{cases}$$

Ce qui précède montre que \sim est une relation d'équivalence. Soit $\overline{\mathcal{M}}$ l'ensemble quotient \mathcal{M}/\sim avec la topologie induite. Si on arrive à montrer que $\overline{\mathcal{M}}$ est dans \mathcal{F} , elle est le candidat naturel à représenter un majorant de la chaîne $\{[M_i, \psi_i, f_i]\}_{i \in I}$. On note $p_i : M_i \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$ la composition de l'inclusion $M_i \subset \mathcal{M}$ avec la projection au quotient $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$. Pour $i < j$ on a donc $p_i(M_i) \subset p_j(M_j)$.

Lemme 3.2. *Chaque p_i est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. Par définition de la topologie quotient p_i est continue. Il faut montrer qu'elle est ouverte. Soit $U \subset M_i$ un ouvert, on a que $p_i(U)$ est un ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(p_i(U))$ est un ouvert de \mathcal{M} . Or

$$\pi^{-1}(p_i(M_i)) = \bigsqcup_{j \in I: i < j} f_{i,j}(M_i) \sqcup \bigsqcup_{j \in I: j \leq i} M_j$$

et chaque $f_{i,j}(M_i)$ est ouvert dans M_j car $f_{i,j}$ est un difféomorphisme sur son image. Donc $\pi^{-1}(p_i(U))$ est un ouvert de \mathcal{M} . \square

Pour montrer que \overline{M} est dans \mathcal{F} , c'est-à-dire que \overline{M} un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique, il faut avant tout montrer qu'elle est une variété et en particulier qu'elle est à base dénombrable d'ouverts, ce qui est loin d'être garanti puisque I n'a aucune raison d'être dénombrable !

Proposition 3.3. *\overline{M} est un espace-temps conformément plat .*

Démonstration. D'après le Lemme 3.2 chaque point p de \overline{M} est contenu dans un voisinage homéomorphe à un des M_i , donc p admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n . De plus, tout couple de points de \overline{M} est contenu dans un même $p_i(M_i)$ pour un certain $i \in I$, et donc, toujours d'après le Lemme 3.2, il existe deux voisinages disjoints de chacun des points. L'espace \overline{M} est donc séparé au sens de Hausdorff. Pour conclure la preuve il faut encore montrer que \overline{M} admet une base dénombrable d'ouverts et qu'il est naturellement muni d'une classe conforme de métriques lorentziennes conformément plates. Les deux choses sont liées.

Cas M simplement connexe. Pour commencer on suppose que M est simplement connexe. Comme d'après le Théorème 6.18 la topologie d'une variété globalement hyperbolique est déterminée par celle de son hypersurface de Cauchy, tout élément de \mathcal{F} est simplement connexe. Or, en tant qu'espace-temps conformément plat simplement connexe, chaque élément M_i de \mathcal{F} admet une application développante $d_i : M_i \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ qui est un difféomorphisme local.

On va construire une application développante pour \overline{M} .

Soient $i < j$, alors l'application $d_j \circ f_{i,j} : M_i \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est une autre application développante pour M_i . Il s'en suit qu'il existe un unique élément $g_{i,j}$ dans $O(2, n)$ tel que $d_j \circ f_{i,j} = g_{i,j} \circ d_i$. On peut alors définir une application $\overline{d} : \overline{M} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ par :

$$\overline{d}(x) = \begin{cases} d_0 \circ p_0^{-1}(x) & \text{si } x \in p_0(M) \\ (g_{0,i})^{-1} \circ d_i \circ p_i^{-1}(x) & \text{si } x \in p_i(M_i) \end{cases}$$

Montrons que cette application est bien définie : soit x un élément de \overline{M} qui soit dans $p_i(M_i)$ et soit $i < j$, donc $p_i(M_i) \subset p_j(M_j)$. Comme $f_{0,j} = f_{i,j} \circ f_{0,i}$ on obtient $g_{0,j} = g_{i,j} \circ g_{0,i}$. Alors

$$\begin{aligned} (g_{0,j})^{-1} \circ d_j \circ p_j^{-1}(x) &= (g_{i,j} \circ g_{0,i})^{-1} \circ d_j \circ p_j^{-1}(x) \\ &= (g_{0,i})^{-1} \circ (g_{i,j})^{-1} \circ d_j \circ p_j^{-1}(x) \\ &= (g_{0,i})^{-1} \circ (g_{i,j})^{-1} \circ d_j \circ f_{i,j} \circ (p_i)^{-1}(x) \\ &= (g_{0,i})^{-1} \circ d_i \circ p_i^{-1}(x) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est vérifiée car $p_j = (f_{i,j})^{-1} \circ p_i$ et $(g_{i,j})^{-1} \circ d_j \circ f_{i,j} = d_i$. L'application \overline{d} est donc bien définie, et, par construction elle est un difféomorphisme local.

L'existence d'une telle application \bar{d} nous permet de montrer que \overline{M} est à base dénombrable d'ouverts. En effet, le tiré en arrière par \bar{d} d'une métrique riemannienne sur $Ein_{1,n}$ fournit une métrique riemannienne sur \overline{M} , et il est bien connu que toute variété riemannienne admet une base dénombrable d'ouverts.

De plus l'application \bar{d} définit une structure lorentzienne conformément plate sur \overline{M} . Comme les $f_{i,j}$ préservent l'orientation et l'orientation chronologique, les $g_{j,i}$ sont dans $O_0(2, n)$. Ceci implique que \overline{M} est chronologiquement orientée. Donc \overline{M} est un espace-temps conformément plat.

Cas M non simplement connexe.

Si M n'est pas simplement connexe on considère son revêtement universel \tilde{M} . On munit \tilde{M} de la structure causale obtenue en tirant en arrière par l'application de revêtement $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la structure causale de M .

Lemme 3.4. *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique et soit S une hypersurface de Cauchy de M . Soit \tilde{M} son revêtement universel muni du relevé de la structure causale de M . Alors le relevé \tilde{S} est une hypersurface de Cauchy de \tilde{M} .*

Démonstration. L'application de revêtement $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ est un difféomorphisme local qui préserve la structure causale de \tilde{M} et M . Il s'en suit que \tilde{S} est une hypersurface plongée localement achronale de \tilde{M} . De plus \tilde{S} est edgeless car celle-ci est une propriété locale. On va montrer que \tilde{S} est achronale et qu'elle rencontre toute courbe causale inextensible de \tilde{M} .

Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ une courbe causale inextensible de \tilde{M} . L'application $\pi \circ \alpha$ est une immersion telle que l'image de tout vecteurs tangents à α est un vecteur causale de M . Comme, d'après la Définition 6.1, M est fortement causale la courbe $\pi \circ \alpha$ ne peut pas se recouper ni s'accumuler sur elle-même, donc $\pi \circ \alpha$ est un plongement. Comme on a supposé que α est inextensible, on obtient que $\pi \circ \alpha$ est une courbe causale inextensible de M . Elle doit donc rencontrer l'hypersurface de Cauchy S ce qui implique que α rencontre \tilde{S} .

Soit c une courbe temporelle de \tilde{M} . D'après ce qu'on viens de dire $\pi \circ c$ est un plongement dont l'image est une courbe temporelle de M . Comme S est achronale $\pi \circ c$ rencontre S au plus une seule fois. Comme $\pi \circ c$ est injective on obtient que c rencontre \tilde{S} au plus une fois. \square

On peut relever toutes les $f_{i,j}$ en des plongements conformes $\tilde{f}_{i,j} : \tilde{M}_i \rightarrow \tilde{M}_j$ entre les revêtements universels des éléments de \mathcal{F} . D'après le Lemme 3.4 le relevé de toute hypersurface de Cauchy S_i est une hypersurface de Cauchy \tilde{S}_i de \tilde{M}_i , donc les plongements $f_{i,j}$ sont en fait des Cauchy-plongements conformes. On peut alors écrire le diagramme suivant :

$$\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\tilde{\psi}_0} \tilde{M}_0 \xrightarrow{\tilde{f}_{0,i}} \tilde{M}_i \xrightarrow{\tilde{f}_{i,j}} \tilde{M}_j \xrightarrow{\dots}$$

$$\begin{array}{ccccccc} q_0 \downarrow & & q_i \downarrow & & q_j \downarrow & & \\ \Sigma & \xrightarrow{\psi_0} & M_0 & \xrightarrow{f_{0,i}} & M_i & \xrightarrow{f_{i,j}} & M_j \longrightarrow \dots \end{array}$$

où les q_k sont les projections de revêtement. On peut appliquer le même procédé utilisé pour définir \overline{M} pour obtenir un \widetilde{M} . Comme les \widetilde{M}_i sont simplement connexes d'après la première partie de la preuve on obtient que \widetilde{M} est une variété et elle est naturellement munie d'une structure d'espace-temps conformément plat, donnée par une application développante \overline{d} . On note $\tilde{p}_i : \widetilde{M}_i \rightarrow \widetilde{M}$ les homéomorphismes sur l'image, donnés par le Lemme 3.2, relatifs à cette construction. On définit l'application naturelle $p : \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ comme

$$p(x) = p_i \circ q_i \circ \tilde{p}_i^{-1}(x) \text{ pour } x \in \tilde{p}_i(\widetilde{M}_i)$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la carte $\tilde{p}_i(\widetilde{M}_i)$ car, si $i < j$, pour x dans $\tilde{p}_i(\widetilde{M}_i)$ les égalités $\tilde{p}_i = \tilde{p}_j \circ \tilde{f}_{i,j}$ et $p_i \circ q_i = p_j \circ q_j \circ \tilde{f}_{i,j}$ impliquent

$$p_i \circ q_i \circ \tilde{p}_i^{-1}(x) = p_j \circ q_j \circ \tilde{p}_j^{-1}(x).$$

L'application p est un difféomorphisme local car elle est la composition des difféomorphismes locaux. On va montrer que p est une application de revêtement. Soit $\Gamma := \pi_1(\Sigma)$. Le groupe Γ agit sur chaque \widetilde{M}_i de sorte que pour tout γ dans Γ , $q_i \circ \gamma = q_i$ et pour tout i, j dans I $\tilde{f}_{i,j} \circ \gamma = \gamma \circ \tilde{f}_{i,j}$. On peut alors définir une action de Γ sur \widetilde{M} par :

$$\forall x \in \tilde{p}_i(\widetilde{M}_i), \quad \gamma(x) := \tilde{p}_i \circ \gamma \circ \tilde{p}_i^{-1}(x)$$

Cette action est bien définie : si $i < j$ alors

$$\tilde{p}_i \circ \gamma \circ \tilde{p}_i^{-1}(x) = \tilde{p}_j \circ \tilde{f}_{i,j} \circ \gamma \circ \tilde{f}_{i,j}^{-1} \circ \tilde{p}_j^{-1}(x) = \tilde{p}_j \circ \gamma \circ \tilde{p}_j^{-1}(x)$$

Par construction : $p \circ \gamma = p$. Plus précisément, pour tout x, y dans \widetilde{M} on a $p(x) = p(y)$ si et seulement il existe un élément γ de Γ tel que $x = \gamma(y)$. Cette action est propre et discontinue car Γ agit proprement et discontinuement sur chaque $\tilde{p}_i(\widetilde{M}_i)$. Il s'en suit que \overline{M} est le quotient de \widetilde{M} par Γ et p est la projection au quotient.

Comme \overline{M} est le quotient d'une variété à base dénombrable, elle même est à base dénombrable. En plus l'application développante \overline{d} , qui donne la structure conformément plate de \overline{M} , est équivariant par rapport à l'action de Γ , car les applications d_i sont équivariantes par rapport à l'action de Γ sur \widetilde{M}_i . Il s'en suit qu'on peut définir une structure conformément plate sur \overline{M} . \square

Maintenant qu'on sait que \overline{M} est un espace-temps on peut commencer à en étudier la causalité. En particulier on voudrait prouver qu'elle est globalement hyperbolique, d'hypersurface de Cauchy $p_0(S_0)$.

Lemme 3.5. *Chaque $p_i(M_i)$ est causalement convexe dans \overline{M} .*

Démonstration. Soit $c : [0, 1] \rightarrow \overline{M}$ une courbe causale reliant deux points de $p_i(M_i)$. L'ensemble $c([0, 1])$ est un compact de \overline{M} . Comme \overline{M} est l'union croissante des $p_k(M_k)$ et que I est totalement ordonné, il existe $j \in I$ tel que $c([0, 1]) \subset p_j(M_j)$. Quitte à remplacer j par i si on a $j < i$, on peut supposer $i \leq j$. Or $p_i(M_i)$ est causalement convexe dans $p_j(M_j)$ car $f_{i,j}(M_i)$ est causalement convexe dans M_j d'après le Lemme 2.1 car p_j est une plongement conforme. Donc l'image de c est bien contenue dans $p_i(M_i)$. \square

On remarque que les $p_i(S_i)$ quelque soit i définissent la même hypersurface spatiale de \overline{M} , on l'appelle donc \overline{S} .

Lemme 3.6. *\overline{S} est une hypersurface de Cauchy pour \overline{M} . En particulier, ce dernier est globalement hyperbolique.*

Démonstration. On prouve que \overline{S} est achronale. Supposons qu'il existe une courbe causale c connectant deux points de \overline{S} . Par compacité c est contenue dans un $p_i(M_i)$ ce qui est absurde car $\overline{S} = p_i(S_i)$ est une hypersurface de Cauchy de chaque $p_i(M_i)$. L'hypersurface \overline{S} est edgeless car elle l'est dans chaque $p_i(M_i)$ et être edgeless est une propriété locale. Enfin, tout point de \overline{M} appartient à un $p_i(M_i)$ et donc au développement de Cauchy de \overline{S} dans \overline{M} . \square

On vient de prouver que \overline{M} est un élément de \mathcal{F} . De plus, pour tout i dans I , l'application p_i induit un Cauchy-plongement de M_i dans \overline{M} . On en déduit que $[\overline{M}, \overline{\psi}, \overline{f}]$, où \overline{f} est le plongement induit par p_0 et $\overline{\psi}$ est la composée entre ϕ et la restriction de \overline{f} à S , majore dans $\overline{\mathcal{F}}$ la chaîne $\{[M_i, \psi_i, f_i]\}_{i \in I}$. D'après le lemme de Zorn, $\overline{\mathcal{F}}$ contient un élément maximal. Cet élément vérifie tous les critères pour être une extension maximale conformement plate de M .

Remarque 3.7. Dans tout ce qui précède on a toujours supposé que les éléments de \mathcal{F} sont conformement plats. Or si on modifie la définition de \mathcal{F} comme étant l'ensemble des triplets (N, ψ, f) , où ψ et f sont comme avant, et N est un espace-temps globalement hyperbolique conforme, sans ne plus demander qu'il soit conformement plat, une bonne partie du raisonnement reste valable. En essayant encore d'utiliser le lemme de Zorn on peut considérer une chaîne $\{(M_i, S_i)\}_{i \in I}$ et définir un espace \overline{M} , candidat au titre d'*extension maximale conforme* ou *C-extension* de M .

Malheureusement il y a un problème déjà pour prouver que \mathcal{M} est une variété. En effet la preuve ci-dessus de la Proposition 3.3 utilise fortement le fait que les M_i sont toutes conformement plates. La difficulté principale réside dans la preuve que \overline{M} est à base dénombrable.

Même en admettant qu'on arrive à prouver l'existence de cette extension maximale conforme, d'autres problèmes apparaissent lorsqu'il s'agit d'étudier l'unicité.

La preuve de l'unicité dans le cas conformément plat, qu'on verra dans la prochaine section, repose de manière essentielle sur le théorème de Liouville, qui ne s'applique qu'à des variétés localement modelées sur Ein . Notons cependant qu'on ne connaît aucun contre-exemple à l'unicité dans le cas conforme.

Même si nous ne savons pas prouver l'existence et l'unicité de l'extension maximale conforme dans le contexte non conformément plat, nous verrons dans le chapitre 5 de nombreux exemples (espace de Minkowski, ouverts réguliers de l'espace de Minkowski, espace d'Einstein) pour lesquels on sait que l'extension conforme existe et qu'elle coïncide avec l'extension maximale conformément plate.

3.2 Unicité

Dans la section précédente nous avons montré que pour tout espace-temps M_0 conformément plat il est possible de construire des espace-temps conformément plats globalement hyperboliques dans lesquels M admet des Cauchy-plongements et qui sont maximales pour cette propriété. Maintenant on va voir que ces extensions maximales sont toutes conformément difféomorphes entre elles.

Soient $F_1 : M_0 \rightarrow M_1^{max}$ et $F_2 : M_0 \rightarrow M_1^{max}$ deux Cauchy-plongements de M_0 dans deux extensions maximales. On considère l'ensemble \mathcal{I} des quadruplets (M, f, g_1, g_2) tels que $f : M_0 \rightarrow M$, $g_1 : M \rightarrow M_1^{max}$ et $g_2 : M \rightarrow M_2^{max}$ sont des Cauchy-plongements tels que $F_i = g_i \circ f$ pour $i = 1, 2$. Sur \mathcal{I} on peut définir la relation $(M, f, g_1, g_2) \preceq (M', f', g'_1, g'_2)$ signifiant l'existence d'un Cauchy-plongement $\Phi : M \rightarrow M'$ tel que $f' = \Phi \circ f$ et $g_i = g'_i \circ \Phi$, induisant une relation d'ordre sur l'espace quotient $\overline{\mathcal{I}}$ de la relation identifiant deux quadruplets (M, f, g_1, g_2) et (M', f', g'_1, g'_2) lorsque le Cauchy-plongement Φ est surjectif.

Comme dans la section précédente on peut montrer que $(\overline{\mathcal{I}}, \preceq)$ est inductif : étant donné un sous-ensemble $\{[M^k, f^k, g_1^k, g_2^k]\}_{k \in I}$ totalement ordonné de $\overline{\mathcal{I}}$, on considère l'union disjointe de tous les M^k , quotienté par la relation qui identifie chaque $\Phi_{k,l}(x)$ à x si $k < l$. Les g_1^k et g_2^k sont alors compatibles et donc passent au quotient en des Cauchy-plongements $\overline{g}_i : \overline{M} \rightarrow M_i^{max}$ avec $i = 1, 2$. On montre comme à la section précédente que ce quotient est un espace-temps conformément plat, qui induit un majorant de $\{[M^k, f^k, g_1^k, g_2^k]\}_{k \in I}$.

D'après le lemme de Zorn il existe un élément $(\overline{M}, \overline{f}, \overline{g}_1, \overline{g}_2)$ maximal de $\overline{\mathcal{I}}$. Soit \mathcal{M} le quotient de l'union disjointe $M_1^{max} \sqcup M_2^{max}$ par la relation qui identifie $\overline{g}_1(x)$ avec $\overline{g}_2(x)$ pour tout $x \in \overline{M}$. Les projections $\pi_i : M_i^{max} \rightarrow \mathcal{M}$ sont des plongements conformes, et chaque point de \mathcal{M} admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n . Le point clé à vérifier est :

Lemme 3.8. *\mathcal{M} est séparé au sens de Hausdorff.*

Démonstration. Soit \mathcal{E} l'ensemble des couples $x, y \in M_1^{max} \times M_2^{max}$ tels que tout voisinage de $\pi_1(x)$ rencontre tout voisinage de $\pi_2(y)$. Ceci ne peut se produire que si x et y appartiennent respectivement à $\partial \overline{g}_1(\overline{M})$ et $\partial \overline{g}_2(\overline{M})$. De plus, si $x \in$

$\partial^+ \bar{g}_1(\bar{M}) =: S_1^+$ (respectivement $x \in \partial^- \bar{g}_1(\bar{M}) =: S_1^-$), alors $y \in \partial^+ \bar{g}_2(\bar{M}) =: S_2^+$ (respectivement $y \in \partial^- \bar{g}_2(\bar{M}) =: S_2^-$). Notons \mathcal{E}^\pm le sous ensemble de \mathcal{E} formé des (x, y) avec $x \in S_1^\pm, y \in S_2^\pm$. On suppose que \mathcal{E}^+ est non vide et contient un élément (x, y) (le raisonnement pour le cas $\mathcal{E}^- \neq \emptyset$ est similaire).

D'après le Lemme 2.5 S_1^+ et S_2^+ sont deux parties fermées achronales edgeless de $M_i^{max}, i = 1, 2$. Il existe donc deux voisinages $U_1 \subset M_1^{max}$ et $U_2 \subset M_2^{max}$ de x et y tels que $S_1^+ \cap U_1$ (et resp. $S_2^+ \cap U_2$) déconnectent U_1 (resp. U_2) en deux ouverts disjoints : $U_1 \cap I^-(S_1^+)$ et $U_1 \cap I^+(S_1^+)$ (resp. $U_2 \cap I^-(S_2^+)$ et $U_2 \cap I^+(S_2^+)$). On remarque aussi que $U_1 \cap I^-(S_1^+) \subset \bar{g}_1(\bar{M})$ et $U_2 \cap I^-(S_2^+) \subset \bar{g}_2(\bar{M})$. Comme $\pi_1(x)$ et $\pi_2(y)$ sont non séparés on peut choisir U_1 et U_2 de sorte que le difféomorphisme conforme $\bar{g}_2 \circ \bar{g}_1^{-1}$ envoie $U_1 \cap I^-(S_1^+)$ sur $U_2 \cap I^-(S_2^+)$.

Point-clé : d'après le théorème de Liouville 2.5 il existe une isométrie conforme $f : U_1 \rightarrow U_2$ qui étend $\bar{g}_2 \circ \bar{g}_1^{-1}$.

Comme l'application f envoie $S_1^+ \cap U_1$ sur $S_2^+ \cap U_2$, on peut définir une application k qui à chaque point x' de $S_1^+ \cap U_1$ associe un point $k(x) := f(x)$ de $S_2^+ \cap U_2$. On remarque qu'alors les deux projections $\pi_1(x')$ et $\pi_2(k(x'))$ ne sont pas séparées. Par construction k est bijective et il s'agit en fait d'un homéomorphisme. On en déduit que \mathcal{E}^+ est un ouvert de $S_1^+ \times S_2^+$ et plus exactement le graphe d'un homéomorphisme K d'un ouvert de S_1^+ vers un ouvert de S_2^+ .

Cas 1) : Il existe un élément (x, y) de \mathcal{E}^+ tel que le développement de Cauchy futur de $S_1^+ \cap U_1$ dans M_1^{max} est non vide. Comme les deux ouverts U_1 et U_2 sont conformément équivalents par F ils ont la même structure causale. Le développement de Cauchy futur de $D_1^+ := S_1^+ \cap U_1$ est donc non vide si et seulement si celui de $D_2^+ := S_2^+ \cap U_2$ est non vide. Mais alors $\bar{g}_1(\bar{M}) \cup D_1^+$ et $\bar{g}_2(\bar{M}) \cup D_2^+$ sont deux espace-temps appartenant à l'ensemble \mathcal{I} et qui contiennent \bar{M} strictement : cela contredit la maximalité de \bar{M} .

Cas 2). Le développement de Cauchy futur de $S_1^+ \cap U_1$ dans M_1^{max} est vide. D'après le Lemme 6.9 il existe donc un rayon géodésique lumière passé (non paramétré) issu de x qui au voisinage de x est contenu dans S_1^+ . D'après le Lemme 1.3, les géodésiques lumières, en tant que lieu géométrique, sont préservées par les transformations conformes .

Considérons l'extension maximale $r_1 : [0, a[\rightarrow M_1^{max}$ de ce rayon paramétrée (avec un paramétrage quelconque). Comme r_1 doit rencontrer l'hypersurface de Cauchy $F_1(S_0)$ de M_1^{max} , qui est contenue dans $\bar{g}_1(\bar{M})$, son intersection avec S_1^+ est fermée : il existe un temps T maximal tel que $r_1(T)$ appartient à S_1^+ . Par ailleurs, $T < a$ car r_1 doit rencontrer $F_1(S_0)$ en un point $r(T_0)$ avec $T < T_0 < a$. En outre, la portion $c([T, T_0])$ est contenue dans $\bar{g}_1(\bar{M})$. Rappelons que \mathcal{E}^+ est ouvert : il existe un temps T_1 maximal tel que $r_1([0, T_1])$ est contenu dans \mathcal{E}^+ . Considérons

maintenant le rayon géodésique lumière $r_2 : [0, b[\rightarrow M_2^{max}$ issu de y qui coïncide avec $f(r_1(t))$ pour les petits temps t . Mais les isométries f_i définies au voisinage de chaque $r_1(t)$, pour $t \in [0, T_0[$, sont nécessairement compatibles le long de r_1 : elles se recollent en une application F qui vérifie $F(r_1(t)) = r_2(t)$. Donc, $r_1(T_1)$ est non-séparé de $r_2(T_1)$, par la maximalité de T_1 on en déduit $T_1 = T$. On applique alors à nouveau le Lemme 6.9, pour trouver un autre rayon géodésique lumière passé c issu de $r_1(T)$ qui reste dans S_1^+ au voisinage de $r_1(T)$. D'après la Proposition 5.10 si c n'est pas le prolongement de r_1 alors tous les points de r_1 sont temporellement reliés à ceux de c , mais cela est impossible car S_1^+ est achronale. Par ailleurs, si c est le prolongement de r_1 on a $r_1(T + \varepsilon) \in S_1^+$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit mais cela contredit la définition de T . \square

Lemme 3.9. \mathcal{M} est globalement hyperbolique, d'hypersurface de Cauchy $\pi_1 \circ \bar{g}_1 \circ \bar{f}(S) = \pi_2 \circ \bar{g}_2 \circ \bar{f}(S)$.

Démonstration. Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ une courbe causale inextensible. Supposons qu'elle ne rencontre pas $\pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M}) = \pi_2 \circ \bar{g}_2(\bar{M})$. On voit que $\pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M}) (= \pi_2 \circ \bar{g}_2(\bar{M}))$ déconnecte \mathcal{M} en deux parties (pas forcément connexes, et peut être vides!) $\pi_1(M_1^{max}) \setminus \pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$ et $\pi_2(M_2^{max}) \setminus \pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$. Donc, puisque \mathbb{R} est connexe, c est contenue soit dans $\pi_1(M_1^{max}) \setminus \pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$, soit dans $\pi_2(M_2^{max}) \setminus \pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$. Quitte à échanger les indices on peut supposer c contenue dans $\pi_1(M_1^{max}) \setminus \pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$. Alors il existe une courbe causale $c' : \mathbb{R} \rightarrow M_1^{max}$ telle que $c = \pi_1 \circ c'$. Comme c est inextensible, il en est de même pour c' , qui doit donc rencontrer $\bar{g}_1(\bar{M})$. Contradiction.

Donc toute courbe causale inextensible c rencontre $\pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$. Chaque composante connexe de son intersection avec $\pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M}) \simeq \bar{M}$ est inextensible (dans $\pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$) et doit donc rencontrer $\pi_1 \circ \bar{g}_1 \circ f_1(S)$. De plus, comme $\pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$ est causalement convexe dans M_1^{max} et donc dans \mathcal{M} , $c \cap \pi_1 \circ \bar{g}_1(\bar{M})$ a en fait une seule composante connexe. \square

On vient de prouver que les π_i sont des Cauchy-plongements. Or, \mathcal{M} est conformément plate puisqu'elle est recouverte par deux ouverts conformément plats. Comme les M_i^{max} sont par hypothèse maximaux, les Cauchy-plongements π_i sont surjectifs, ce qui montre que M_1^{max} et M_2^{max} sont conformément isométriques. Ceci achève la preuve du Théorème 3.1. \square

Chapitre 4

Ombres

Rappelons (Définition 8.7) qu'un espace-temps est dit *distinguant* si les deux applications $p \in M \mapsto J^+(p)$ et $p \in M \mapsto J^-(p)$ sont injectives. Chaque point est alors caractérisé par son futur et son passé. Tout espace-temps n'est pas distinguant : par exemple dans $Ein_{1,n}$ le futur et le passé de tout point est l'espace tout entier. Par contre tout espace-temps globalement hyperbolique est distinguant (voir [35], chapitre 2).

Dans un espace-temps globalement hyperbolique M d'hypersurface de Cauchy Σ toute courbe causale inextensible issue d'un point p de M doit rencontrer Σ . Il s'en suit que soit $J^+(p) \cap \Sigma$, soit $J^-(p) \cap \Sigma$ est non vide. Nous appelons ces intersections *ombres* (future ou passée) du point p sur l'hypersurface de Cauchy. On verra que l'ombre de tout point est un compact de Σ . Il est alors intéressant de voir que, sous certaines conditions, une fois fixée une hypersurface de Cauchy Σ , chaque point p de M est caractérisé par son ombre (passée ou future) ; l'espace-temps M s'identifie alors à un sous-ensemble des compacts de Σ . Autrement dit, dans un certain sens, toute l'information sur l'espace-temps est contenue dans Σ . Ce point de vue se révèle utile en particulier pour mieux comprendre la notion d'extension maximale d'un espace-temps.

Dans la section 3 on généralise la notion on étudie les cas des ombres sur les sous-ensembles achronaux edgeless de M qui ne sont pas des hypersurfaces de Cauchy de M . On verra que la majorité des résultats montrés pour les ombres sur les hypersurfaces de Cauchy restent vrais pour les ombres sur les sous-ensembles achronaux edgeless.

Dans la section 5 on décrit et réinterprète la construction de Kulkarni et Pinkall ([20]) des espace-temps de Sitter standards à la lumière des résultats obtenus dans les sections précédentes.

1 Ombres

Dans cette section M est un espace-temps globalement hyperbolique et Σ est une des ses hypersurfaces de Cauchy.

Définition 1.1. Soient $p \in I^+(\Sigma)$ et $q \in I^-(\Sigma)$ les sous-ensembles de Σ définis par

$$\begin{aligned} O_{\Sigma}^{-}(p) &:= I^{-}(p) \cap \Sigma \\ O_{\Sigma}^{+}(p) &:= I^{+}(p) \cap \Sigma \end{aligned}$$

sont appelés respectivement *ombre ouverte passée* de p et *ombre ouverte future* de q . Soient $p \in J^{+}(\Sigma)$ et $q \in J^{-}(\Sigma)$ les sous-ensembles de Σ définis par

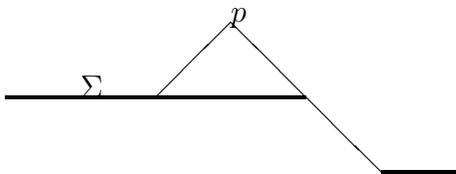
$$\begin{aligned} \overline{O}_{\Sigma}^{-}(p) &:= J^{-}(p) \cap \Sigma \\ \overline{O}_{\Sigma}^{+}(q) &:= J^{+}(q) \cap \Sigma \end{aligned}$$

sont appelés respectivement *ombre fermée passée* de p et *ombre fermée future* de q .

D'après la Proposition 3.12 les ombres $O_{\Sigma}^{+}(p)$ et $O_{\Sigma}^{-}(p)$ sont des ouverts de Σ comme la terminologie suggère. De plus, comme dans un espace globalement hyperbolique les ensembles $J^{+}(p)$ et $J^{-}(p)$ sont fermés (Proposition 6.4) les ombres $\overline{O}_{\Sigma}^{+}(p)$ et $\overline{O}_{\Sigma}^{-}(p)$ sont des fermés de Σ . L'adhérence $\overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)}$ de $O_{\Sigma}^{\pm}(p)$ est donc contenue dans $\overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)}$. D'après la Proposition 6.8 découle :

Lemme 1.2. *Pour tout point p dans $J^{+}(\Sigma)$ et p' dans $J^{-}(\Sigma)$, les ombres $\overline{O}_{\Sigma}^{-}(p)$ et $\overline{O}_{\Sigma}^{+}(p')$ sont compactes.* \square

Si Σ n'est pas acausale l'inclusion $\overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)} \subset \overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)}$ peut être stricte, comme le montre la figure suivante :



Lemme 1.3. *Si Σ est acausale pour tout p dans M on a $\overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)} = \overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)}$.*

Démonstration. On a vu que l'inclusion $\overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)} \subset \overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)}$ est toujours vérifiée, on doit juste montrer l'inclusion $\overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)} \subset \overline{O_{\Sigma}^{\pm}(p)}$. On le prouve pour les ombres

passées $O_{\Sigma}^{-}(p)$, pour les ombres futures la preuve est la même quitte à renverser l'orientation chronologique de M .

Soit q un point de $\overline{O_{\Sigma}^{-}(p)} \setminus O_{\Sigma}^{-}(p)$. Par construction cet ensemble est égal à $\partial I^{-}(p) \cap \Sigma$, donc d'après le Corollaire 5.11, il existe une géodésique lumière passée α qui relie p à q . Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de α telle que $p_n \geq p_{n+1}$ et qui converge vers q , et soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $J^{-}(q) \cap I^{-}(p)$, telle que $q_{n+1} \geq q_n$ et qui converge vers q . D'après la Proposition 5.9 on a $q_k < p_{k'}$, pour tout $k', k \in \mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une courbe de type temps passée γ_n entre p_n et q_n . Soit maintenant $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de voisinages ouverts voisinage géodésiquement convexe (Définition 3.9) de q telle que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{q\}$$

On peut par exemple prendre $U_n := I^{-}(p_n) \cap I^{+}(q_n)$, pour n assez grand, tirant partie du fait que M , étant globalement hyperbolique, est causalement continue (Corollaire 8.6). D'après la Proposition 5.10 les courbes γ_n privées du point p_n sont contenues dans $I^{-}(p)$.

Pour tout entier n , il existe un entier $m_0(n)$ assez grand tel que les points p_m et q_m appartiennent à U_n si $m \geq m_0(n)$. La courbe γ_m est alors contenue dans U_n puisque cet ouvert est causalement convexe.

Comme Σ est acausale, les points p_n appartiennent à $I^{+}(\Sigma)$ et les points q_n appartiennent à $I^{-}(\Sigma)$. Les courbes γ_m , pour $m \geq m_0(n)$, intersectent donc Σ en un unique point x_m dans $U_n \cap \Sigma$. On obtient ainsi une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $I^{-}(p) \cap \Sigma = O_{\Sigma}^{-}(p)$ convergeant vers q , ce qui implique que q appartient à l'adhérence de $O_{\Sigma}^{-}(p)$. Le lemme est prouvé. \square

Remarque 1.4. D'après le Lemme 1.3 on obtient que si Σ est acausale

$$\partial O_{\Sigma}^{-}(p) = \partial \overline{O_{\Sigma}^{-}(p)} = \partial I^{-}(p) \cap \Sigma$$

En général si Σ n'est pas acausale les deux frontières $\partial O_{\Sigma}^{\mp}(p)$ et $\partial \overline{O_{\Sigma}^{\mp}(p)}$ ne coïncident pas forcément.

2 L'ensemble Ω

Dans cette section M est un espace-temps globalement hyperbolique et Σ est une des ses hypersurfaces de Cauchy.

Définition 2.1. On définit les ensembles :

$$\Omega_{\Sigma}^{+} := \{p \in I^{+}(\Sigma) / \overline{O_{\Sigma}^{-}(p)} \neq \Sigma\}$$

$$\Omega_{\Sigma}^{-} := \{p \in I^{-}(\Sigma) / \overline{O_{\Sigma}^{+}(p)} \neq \Sigma\}$$

Soit alors $\Omega_{\Sigma} := \Omega_{\Sigma}^{+} \cup \Sigma \cup \Omega_{\Sigma}^{-}$.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté on notera simplement Ω à la place de Ω_{Σ} .

On va dans cette section essayer de trouver les caractéristiques géométriques de l'ensemble Ω_Σ . Commençons par une remarque préliminaire, conséquence directe de la Proposition 6.8, et qui montre que cette étude ne présente des difficultés que si l'espace-temps admet une hypersurface de Cauchy compacte :

Proposition 2.2. *Si l'hypersurface de Cauchy Σ est non compacte l'ouvert Ω_Σ est l'espace-temps M tout entier. \square*

Lemme 2.3. *Soit p un point de Ω_Σ^+ alors l'ouvert $I^-(p) \cap I^+(\Sigma)$ est contenu dans Ω_Σ^+ . De même si p' un point de Ω_Σ^- alors l'ouvert $I^+(p') \cap I^-(\Sigma)$ est contenu dans Ω_Σ^- .*

Démonstration. On prouve le lemme pour p dans Ω_Σ^+ , l'autre cas on l'obtient en renversant l'orientation chronologique de M .

Soit q dans $I^-(p) \cap I^+(\Sigma)$. La Proposition 5.9 implique que $J^-(q) \subset I^-(p)$. Comme $J^-(q)$ est un fermé et $I^-(p)$ est un ouvert, cette inclusion est stricte donc $\overline{O_\Sigma^-(q)}$ est contenu strictement dans $O_\Sigma^-(p)$. Comme, par hypothèse, p est dans Ω_Σ^+ , on obtient que le point q est aussi dans Ω_Σ^+ . \square

Remarque 2.4. Le Lemme 2.3 et le Lemme 4.17 impliquent que l'ensemble Ω_Σ est causalement convexe.

Une des raisons principales pour lesquelles on s'intéresse à l'ensemble Ω est le fait qu'il vérifie la propriété énoncée dans la Proposition 2.6, dont la preuve utilisera le lemme suivant :

Lemme 2.5. *Soit p dans Ω_Σ^\pm . Alors les frontières $\partial O_\Sigma^\mp(p)$ et $\partial \overline{O_\Sigma^\mp}(p)$ vérifient chacune la propriété suivante : soit elle est vide, soit elle contient au moins deux points non causalement reliés.*

Démonstration. On prouve le lemme pour la frontière $\partial O_\Sigma^-(p)$ d'un point p dans Ω_Σ^+ . La preuve dans les autres cas est tout à fait similaire.

Supposons que $\partial O_\Sigma^-(p)$ soit non vide, et supposons par l'absurde que tous les points de $\partial O_\Sigma^-(p)$ soient causalement reliés entre eux. Comme Σ est achronale, ceci signifie qu'il existe un segment géodésique lumière r contenu dans Σ et qui contient $\partial O_\Sigma^-(p)$. La Proposition 6.8 implique que $J^-(p) \cap \Sigma$ est compact, donc r est un segment compact.

Supposons d'abord que la dimension de M soit supérieure ou égale à 3. Dans ce cas l'hypersurface Σ est de dimension supérieure ou égal à 2. Il existe alors un voisinage ouvert connexe U de r dans Σ tel que l'ouvert $U^* := U \setminus r$ soit connexe. L'intersection $U^* \cap O_\Sigma^-(p)$ est bien sûr ouverte, mais comme sa frontière dans U est contenue dans $\partial O_\Sigma^-(p)$, c' est un ouvert fermé du connexe U^* . Donc U^* est contenu dans $O_\Sigma^-(p)$.

Comme r est entièrement contenu dans l'adhérence de U^* , il s'ensuit que U est contenu dans $\overline{O_\Sigma^-(p)}$. De plus, quitte à restreindre U , on peut supposer que sa

frontière est contenue dans $O_{\Sigma}^{-}(p)$. Alors, $U \cup O_{\Sigma}^{-}(p)$ est un ouvert fermé de Σ , donc Σ tout entier. On obtient ainsi que Σ est l'adhérence de $O_{\Sigma}^{-}(p)$, et donc l'égalité $\Sigma = \overline{O_{\Sigma}^{-}(p)} = \Sigma$, ce qui est impossible puisque p est supposé être dans Ω_{Σ}^{+} .

Supposons maintenant que M soit de dimension 2. Dans ce cas $\partial I^{-}(p)$ est contenue dans deux rayons géodésiques lumières passées inextensibles α et β issus de p . Comme Σ est une hypersurface de Cauchy α et β rencontrent Σ . Soit q un point de $\alpha \cap \Sigma$. Si q appartient aussi à $\beta \cap \Sigma$ cela veut dire que α rencontre β transversalement en q . D'après la Proposition 5.10 $\partial I^{-}(p)$ est alors contenu dans l'union des segments entre p et q de respectivement α et β , et est donc compact. D'après la Proposition 6.21 $\partial I^{-}(p)$ est une hypersurface de Cauchy de M et d'après le Corollaire 5.11 elle est contenue dans $J^{+}(\Sigma)$. Il s'en suit que Σ est contenue dans $J^{-}(\partial I^{-}(p)) = J^{-}(p)$, donc $\overline{O_{\Sigma}^{-}(p)} = \Sigma$, contrairement aux hypothèses.

Donc $\alpha \cap \Sigma$ et $\beta \cap \Sigma$ sont disjoints. Comme par ailleurs ils sont non vides et que leurs intersections avec les frontières $\partial O_{\Sigma}^{\mp}(p)$ sont non vides, le lemme est prouvé dans ce cas aussi. \square

Proposition 2.6. *Pour tout $p, q \in \Omega_{\Sigma}^{+}$ et pour tout $p', q' \in \Omega_{\Sigma}^{-}$*

$$O_{\Sigma}^{-}(p) = O_{\Sigma}^{-}(q) \iff p = q \tag{4.1}$$

$$O_{\Sigma}^{+}(p') = O_{\Sigma}^{+}(q') \iff p' = q' \tag{4.2}$$

Démonstration. Les implications \Leftarrow sont évidentes. On va montrer l'implication \Rightarrow lorsque p et q sont deux points de Ω_{Σ}^{+} , l'autre cas étant tout à fait similaire. Soient donc p et q deux points de Ω_{Σ}^{+} tels que $q \neq p$ et qui ont la même ombre ouverte $O_{\Sigma}^{-}(p) = O_{\Sigma}^{-}(q)$. Dans la suite on note l'ombre fermée par $\overline{O} := \overline{O_{\Sigma}^{-}(p)} = \overline{O_{\Sigma}^{-}(q)}$. Comme p et q appartiennent à Ω_{Σ} , la frontière de \overline{O} dans Σ est non vide. On vas procéder au cas par cas, selon la relation de causalité entre p et q .

Cas 1) : si p et q sont causalement reliés.

On suppose d'abord que p et q sont reliés par une courbe temporelle, par exemple $q < p$. D'après le Lemme 2.3 on obtient que $O_{\Sigma}^{-}(q)$ est contenu strictement dans $O_{\Sigma}^{-}(p)$: cela est absurde car on les a supposés égaux. Dans ce cas le lemme est prouvé.

Maintenant on suppose $q \in J^{-}(p) \setminus I^{-}(p)$. Il existe alors une géodésique lumière α passé inextensible qui passe dans cet ordre par p et q . D'après la Proposition 6.8 l'intersection $\alpha \cap \Sigma$ est un segment de géodésique lumière contenu dans l'ombre fermée \overline{O} .

Par hypothèse l'ombre fermée \overline{O} est différente de Σ , donc, d'après le Lemme 2.5, la frontière $\partial \overline{O}$ doit contenir au moins deux points non causalement reliés.

Il existe donc un point z dans $\partial \overline{O}$ qui n'appartient pas à α . Comme z appartient à $\partial \overline{O}$, il doit appartenir à la fois à $\partial I^{-}(p)$ et à $\partial I^{-}(q)$. Le fait que z appartient à $\partial I^{-}(q)$ implique, d'après la Proposition 5.10, qu'il existe une géodésique lumière

passé β qui va de $q = \beta(0)$ à $z = \beta(1)$.

Puisque deux géodésiques distinctes qui passent par un même point ne peuvent être tangentes, β rencontre α en q transversalement. D'après la Proposition 5.10 les points $\beta([0, 1])$ appartiennent alors au passé strict de p . En particulier $z < p$, ce qui est absurde car z appartient à $\partial\bar{O}$ et donc à $\partial I^-(p)$.

Cas 2) : si p et q ne sont pas causalement reliés.

Comme toute courbe temporelle passée inextensible issue de p ou q intersecte O , on obtient

$$I^-(\bar{O}) = I^-(p) \cap I^-(\Sigma) = I^-(q) \cap I^-(\Sigma)$$

De même :

$$J^-(\bar{O}) = J^-(p) \cap J^-(\Sigma) = J^-(q) \cap J^-(\Sigma).$$

Donc

$$\partial I^-(\bar{O}) \cap I^-(\Sigma) = \partial I^-(p) \cap I^-(\Sigma) = \partial I^-(q) \cap I^-(\Sigma).$$

Nous allons montrer que $\partial I^-(\bar{O}) \cap I^-(\Sigma)$ n'est pas vide, et pour ce faire nous allons montrer que $I^-(\Sigma) \setminus J^-(\bar{O})$ est un ouvert non vide.

Par hypothèse \bar{O} n'est pas Σ toute entier, il existe donc un point p dans Σ qui n'appartient pas à \bar{O} . D'après le Lemme 4.17 $J^-(\Sigma) = \Sigma \cup I^-(\Sigma)$. En particulier $J^-(\bar{O}) \cap \Sigma = \bar{O}$, ce qui montre que p n'appartient pas non plus à $J^-(\bar{O})$. Comme $J^-(\bar{O})$ est un fermé de M (Proposition 6.4), il existe un voisinage ouvert U de p dans M , qui ne rencontre pas $J^-(\bar{O})$. L'intersection $U \cap I^-(\Sigma)$ est un ouvert non vide contenu dans $I^-(\Sigma) \setminus J^-(\bar{O})$. Donc $I^-(\Sigma) \setminus J^-(\bar{O})$ est un ouvert non vide, et, comme son complémentaire, $J^-(\bar{O})$, dans $I^-(\Sigma)$ est non vide aussi, sa frontière dans $I^-(\Sigma)$ est non vide.

Soit maintenant $z \in \partial I^-(\bar{O}) \cap I^-(\Sigma)$. D'après le Corollaire 5.11 et comme z appartient à $\partial I^-(p)$, il existe un rayon géodésique lumière passé $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\alpha([0, 1]) \subset \partial I^-(p)$, avec $\alpha(0) = p$ et $\alpha(1) = z$. Soit $T \in [0, 1]$ tel que $\alpha(T) \in \Sigma$, alors $\alpha([T, 1])$ est contenu dans $\partial I^-(\bar{O}) \cap J^-(\Sigma)$ qui est un sous-ensemble de $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q)$. Donc si $z_1 = \alpha(t_1)$, où $t_1 \in [T, 1[$, il existe un rayon géodésique lumière passé $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ tel que $\beta(0) = q$ et $\alpha(1) = z_1$.

Les deux géodésiques lumières passées α et β ont un point d'intersection en z_1 . On suppose d'abord que cette intersection est transverse : d'après la Proposition 5.10 le point z doit appartenir au passé strict de q , mais par définition $z \in \partial I^-(q)$. L'intersection doit donc être tangente, mais alors α et β sont contenus dans une même géodésique lumière passé inextensible qui passe par p et par q . Cela contredit l'hypothèse que p et q ne sont pas causalement reliés. \square

On peut donner une version similaire de la Proposition 2.6 pour les ombres fermés. La preuve est la même.

Proposition 2.7. *Pour tout $p, q \in \Omega_{\Sigma}^+ \cup \Sigma$ et pour tout $p', q' \in \Omega_{\Sigma}^- \cup \Sigma$*

$$\begin{aligned}\overline{O}_{\Sigma}^-(p) &= \overline{O}_{\Sigma}^-(q) \iff p = q \\ \overline{O}_{\Sigma}^+(p') &= \overline{O}_{\Sigma}^+(q') \iff p' = q'\end{aligned}$$

On va maintenant étudier la nature de l'ensemble Ω , suivant les caractéristiques de l'hypersurface de Cauchy Σ .

Lemme 2.8. *S'il existe un point p de Σ tel que l'intersection entre $I^+(p)$ et Ω_{Σ}^+ est vide alors $\Sigma = \partial I^-(p)$. De même s'il existe un point p' de Σ tel que l'intersection entre $I^-(p')$ et Ω_{Σ}^- est vide alors $\Sigma = \partial I^+(p')$.*

Démonstration. On prouve le résultat dans le cas où il existe un point p de Σ tel que $I^+(p) \cap \Omega_{\Sigma}^+$ est vide, l'autre cas étant similaire.

Soit $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans $I^+(p)$ qui converge vers p . Par hypothèse pour tout $n \in \mathbb{N}$ le point p_n n'appartient pas à Ω_{Σ}^+ , donc $\overline{O}_{\Sigma}^+(p_n) = \Sigma$. En particulier on a $\Sigma \subset J^-(p_n)$.

Comme, d'après le Corollaire 8.6, l'espace-temps M est causalement continu on obtient :

$$\Sigma \subset J^-(p_n) \implies \Sigma \subset J^-(p).$$

De plus $\Sigma \subset J^-(p) \setminus I^-(p)$ car Σ est achronale. On rappelle que d'après le Lemme 3.13 on a $J^-(p) \setminus I^-(p) = \partial I^-(p)$. Prouvons alors l'inclusion $J^-(p) \setminus I^-(p) \subset \Sigma$.

Soit q appartenant à $\partial I^-(p) \setminus \Sigma$, et soit c une courbe de type temps inextensible passant par q . Comme $\partial I^-(p)$ est achronal, son intersection avec c contient seulement le point q . Par hypothèse le point q n'est pas dans Σ , donc c ne rencontre pas Σ , ce qui est absurde car Σ est une hypersurface de Cauchy. Donc $J^-(p) \setminus I^-(p) = \Sigma$. \square

On distingue donc un cas remarquable : celui où l'hypersurface de Cauchy Σ est la frontière du passé (ou du futur) strict d'un point de M . On va alors introduire une terminologie spécifique.

Définition 2.9. *On dit que Σ est purement lumière s'il existe p dans M tel que : soit $\Sigma = \partial I^-(p)$ soit $\Sigma = \partial I^+(p)$.*

Proposition 2.10. *Les ensembles Ω_{Σ}^+ et Ω_{Σ}^- sont des ouverts non vides.*

Démonstration. On prouve que Ω_{Σ}^+ est non vide.

Dans le cas où Σ n'est pas égale à la frontière du passé strict d'un point de M , d'après le Lemme 2.8 on obtient que Ω_{Σ}^+ est non vide. Autrement il existe p dans M tel que $\Sigma = \partial I^-(p)$. On suppose par l'absurde que Ω_{Σ}^+ est vide. Alors pour tout point q de Σ l'intersection $I^+(q) \cap \Omega_{\Sigma}^+$ est vide, donc d'après le Lemme 2.8 $\Sigma = \partial I^-(q)$. On obtient alors $p \leq q$ et $q \leq p$, ce qui implique, comme M est une

espace-temps causal, l'égalité $p = q$: ceci est absurde car Σ est une hypersurface donc elle n'est pas réduite un seul point.

Pour montrer que Ω_{Σ}^- est non-vide, on a encore une fois deux cas. Si $\Sigma = I^+(q)$ pour un certain q dans Σ , alors, comme avant, le Lemme 2.8 et le fait que M est un espace-temps causal, impliquent que pour tout q' dans Σ , $q \neq q'$, $I^-(q') \cap \Omega_{\Sigma}^-$ est non vide. Si Σ n'est pas égale à la frontière du futur strict d'un point de M , d'après le Lemme 2.8 Ω_{Σ}^- est non-vide.

On va prouver que le fait que Ω_{Σ}^+ et Ω_{Σ}^- sont ouverts découle de la causale continuité de M (Corolaire 8.6). Soit p un élément de Ω_{Σ}^+ . Comme $\overline{O_{\Sigma}^+}(p) \neq \Sigma$, il existe un voisinage ouvert U relativement compact de $\overline{O_{\Sigma}^+}(p)$ dans M tel que $\overline{U} \cap \Sigma \neq \Sigma$. On considère le compact $K := \partial U \cap \Sigma$, il déconnecte Σ . Par construction il est disjoint de $J^-(p)$. Comme M est causalement continu il existe un voisinage V de p tel que pour tout $q \in V$ le passé causal $J^-(q)$ ne rencontre pas K . Comme $\overline{O}^-(q)$ est connexe et contient $\overline{O}^-(p)$, on obtient que si $q \in V \cap I^+(\Sigma)$, $\overline{O}^-(q)$ est contenue dans $U \cap \Sigma \neq \Sigma$, donc $V \cap I^+(\Sigma)$ est un voisinage ouvert de p contenu dans Ω_{Σ}^+ . Le résultat est prouvé. \square

Remarque 2.11. Le cas où Σ est purement lumière comprend aussi le cas où il existe deux points p et q de M tels que $\Sigma = \partial I^-(p) = \partial I^+(q)$. En fait s'il existe deux points p, q de M qui vérifient $\partial I^-(p) = \partial I^+(q)$, d'après le Proposition 6.21, $\Sigma := \partial I^-(p) = \partial I^+(q)$ est une hypersurface de Cauchy de M . La Proposition 2.10 s'applique dans ce cas, et on obtient que Ω_{Σ}^+ et Ω_{Σ}^- sont non vides.

Un exemple où on a une hypersurface de Cauchy de cette sorte est l'espace-temps d'Einstein universel. En fait dans la section 2 pour tout point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ on a $\partial I^+(p) = \partial I^-(\sigma(q))$.

Proposition 2.12. Ω_{Σ} est un voisinage ouvert de Σ si et seulement si Σ n'est pas purement lumière.

Si Σ est purement lumière, avec $\Sigma = \partial^{\pm}(p)$ pour p dans M et $\Sigma \neq \partial I^{\mp}(q)$ pour tout q dans M , alors $\Omega_{\Sigma} \setminus \{p\}$ est un voisinage ouvert causalement convexe de $\Sigma \setminus \{p\}$, de plus Ω_{Σ} contient p , mais il n'est pas un voisinage de p .

Si $\Sigma = \partial I^-(p) = \partial I^+(q)$ pour p, q dans M , alors $\Omega_{\Sigma} \setminus \{p, q\}$ est un voisinage ouvert causalement convexe de $\Sigma \setminus \{p, q\}$, de plus Ω_{Σ} contient p, q , mais il n'est pas un voisinage de p ni de q .

Démonstration. On suppose d'abord que Σ n'est pas purement lumière. D'après le Lemme 2.8 pour tout $p \in \Sigma$ il existe $p^+ \in I^+(p) \cap \Omega_{\Sigma}^+$ et $p^- \in I^-(p) \cap \Omega_{\Sigma}^-$. Le Lemme 2.3 implique alors $I^-(p^+) \cap I^+(\Sigma)$ et $I^+(p^-) \cap I^-(\Sigma)$ sont contenus respectivement dans Ω_{Σ}^+ et Ω_{Σ}^- . On en déduit que l'ensemble

$$(I^-(p^+) \cap I^+(\Sigma)) \cup (I^+(p^-) \cap I^-(\Sigma))$$

est un voisinage ouvert de p contenu dans Ω_{Σ} . Comme, d'après la Proposition 2.10 Ω_{Σ}^+ et Ω_{Σ}^- sont ouverts et $\Omega_{\Sigma} = \Omega_{\Sigma}^+ \cup \Sigma \cup \Omega_{\Sigma}^-$, on obtient que Ω_{Σ} est un voisinage

ouvert de Σ .

On suppose maintenant que Σ soit purement lumière tel que $\Sigma = \partial I^-(p)$ pour un certain p dans M et que $\Sigma \neq \partial I^+(q)$ pour tout q dans M . Le raisonnement précédent s'applique alors à tout q dans Σ tel que $q \neq p$: on obtient que $\Omega_\Sigma \setminus \{p\}$ est un voisinage ouvert causalement convexe de $\Sigma \setminus \{p\}$.

D'après le Proposition 5.9, pour tout point p^+ dans $I^+(p)$, $J^-(p) \subset I^-(p^+)$, donc $I^+(p) \cap \Omega_\Sigma^+$ est vide. Il s'en suit que p est dans l'adhérence de Ω_Σ^+ mais Ω_Σ^+ n'est pas un voisinage de p . Par définition Ω_Σ contient p .

Dans le cas où $\Sigma = \partial I^+(p)$ et $\Sigma \neq \partial I^-(q)$ pour tout q dans M un raisonnement similaire porte aux mêmes conclusions.

Soit maintenant $\Sigma = \partial I^-(p) = \partial I^+(q)$, le même raisonnement, s'applique à tout point q' de Σ différents de p et de q . Le résultat est prouvé. \square

Lemme 2.13. *Si M admet une hypersurface de Cauchy purement lumière alors M est Cauchy-compact.*

Démonstration. Soit $\Sigma = \partial I^-(p)$ une hypersurface de Cauchy purement lumière de M . Prouvons que Σ est forcément compacte.

On suppose par l'absurde que Σ n'est pas compact. Il existe alors une suite $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Σ qui s'échappe de tout compact de M . D'après le Corollaire 5.11 pour tout n dans \mathbb{N} il existe un rayon géodésique passé γ_n issu de p qui se termine en p_n . Soit l_n la direction tangente à γ_n en p . Comme l'ensemble des directions lumière issues du point p , avec la topologie naturelle, est compact, les l_n admettent une valeur d'adhérence l . D'après le Lemme 6.2 les courbes γ_n admettent une courbe limite c qui est un courbe causale passé issue de p . De plus comme les γ_n sont passé inextensibles, on obtient que c est passé inextensible. On obtient que c est la géodésique lumière passé inextensible tangente à l en p . En particulier c est un fermé non compact contenu dans Σ . Cela est en contradiction avec le fait que, d'après la Proposition 6.8, pour tout point q de $J^+(\Sigma)$, $J^-(q) \cap J^+(\Sigma)$ est compact : en fait $J^-(p) \cap J^+(\Sigma)$, par exemple, contient c , et donc est non compact. \square

3 Ombres sur les ensembles achronaux edgeless

La construction exposée à la section précédente se généralise à tout sous-ensemble achronal edgeless A d'un espace-temps M .

Une première façon est de se placer dans le développement de Cauchy $\mathcal{D}(A)$. D'après le Lemme 6.23, $\mathcal{D}(A)$ est un ouvert globalement hyperbolique de M et A est une des ses hypersurfaces de Cauchy. On peut alors définir Ω_A par la Définition 2.1 en se restreignant à l'espace-temps $\mathcal{D}(A)$. Mais on se rend compte que pour la plupart des résultats prouvés dans ce chapitre concernant l'ouvert Ω_A , on n'a

pas véritablement besoin que A soit une hypersurface de Cauchy, mais juste qu'il soit achronal edgeless.

On suppose que l'espace-temps M soit de dimension $n+1 \geq 3$. On définit, comme avant, les ombres ouvertes et fermées (futurs et passés) relatives à A : pour p dans $I^\pm(A)$ et q dans $J^\pm(A)$

$$O_A^\mp(p) := I^\mp(p) \cap A \quad \text{et} \quad \overline{O}_A^\mp(q) := J^\mp(q) \cap A.$$

Si A n'est pas un fermé de M , par le Lemme 4.17, l'ensemble $M \setminus (I^+(A) \cup I^-(A) \cup A)$ est non vide. Donc les points de cet ensemble ont toutes leurs ombres (ouvertes et fermées) vides.

Définition 3.1. Pour un sous-ensemble achronal edgeless A d'un espace-temps M , on définit les ensembles Ω_A^+ et Ω_A^- et Ω_A par :

$$\begin{aligned} \Omega_A^- &:= \{p \in I^+(A) / \overline{O}_A^-(p) \neq A\} \\ \Omega_A^+ &:= \{p \in I^-(A) / \overline{O}_A^+(p) \neq A\} \\ \Omega_A &:= \Omega_A^- \cup A \cup \Omega_A^+. \end{aligned}$$

On remarque que pour tout point p de $I^\pm(A)$, on a $\overline{O}_A^\pm(p) \neq \emptyset$, même si p n'appartient pas à $\mathcal{D}(A)$.

La majorité des résultats sur l'ouvert Ω , démontrés précédemment, restent vrais pour cette nouvelle définition : en fait on n'utilise presque jamais le fait que Σ est une hypersurface de Cauchy, mais juste le fait qu'elle soit achronale et edgeless. Cependant il y a des différences :

–Si A n'est pas une hypersurface de Cauchy de M le Lemme 1.2 et la Proposition 2.2 sont faux en général. Supposons par exemple que A soit non compact et $A = \partial I^\pm(p)$ pour un certain p dans M . Tout point q de l'ouvert $I^+(p)$, d'après la Proposition 5.9 vérifie $J^-(p) \subset I^-(p)$. Donc l'ouvert $I^+(p)$ n'est pas contenu dans Ω_A .

–La Remarque 2.4 est vraie pour Ω_A si et seulement si A est fermé. Cela découle du fait qu'un sous-ensemble achronal edgeless A est fermé dans M si et seulement si M est égal à l'union disjointe $I^+(A) \sqcup A \sqcup I^-(A)$ (Lemme 4.17).

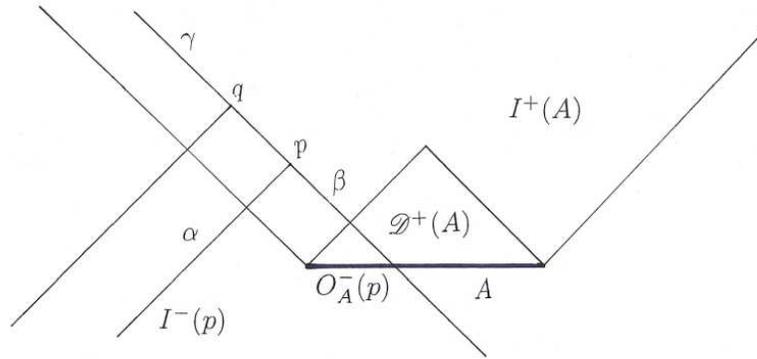
–Le Lemme 2.5 est faux si M est de dimension 2 et A n'est pas une hypersurface de Cauchy de M . Cela est une conséquence de la Proposition 6.22 et du fait que en dimension 2 la frontière du passé strict de tout point est composée seulement par deux géodésiques lumières distinctes.

–Les Propositions 2.6 et 2.7, qui utilisent le Lemme 2.5 dans leur preuve, sont fausses si M est de dimension 2 et A n'est pas une hypersurface de Cauchy de M .

En effet soit p un point de Ω_A^+ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}(A)$. Alors, d'après la Proposition 6.22, il existe une géodésique lumière passée inextensible α passant par p qui ne rencontre pas A . Comme p appartient à Ω_A^+ , l'autre géodésique lumière passée inextensible, β , qui forme la frontière de $I^-(p)$, rencontre A .

Soit q un point de β tel que $p \leq q$ et $q \neq p$. Alors, d'après la Proposition 5.10, $\alpha \setminus \{p\}$ est contenue dans $I^-(q)$. Puisque M vérifie le principe de causalité forte, toute courbe causale inextensible est une sous-variété plongée de M de dimension 1, donc, si la dimension de M est 2, elle partage M en deux composantes connexes. Soit γ la géodésique lumière passée inextensible qui rencontre β transversalement en q . Comme A est supposé connexe, la courbe γ doit alors rencontrer à nouveau α avant de rencontrer A . Il s'en suit que γ ne rencontre pas A en un point de $\partial I^-(q)$.

Par ailleurs, comme M est causalement continu (Corollaire 8.6) si q est suffisamment proche de p l'intersection $\beta \cap A$ est contenue dans $\partial I^-(q)$. Donc $\overline{O^-(p)} = \overline{O^-(q)}$ ce qui contredit la thèse de la Proposition 2.7 car on a supposé $p \neq q$.



Remarque 3.2. De la discussion précédente découle que : si M est un espace-temps de dimension supérieure ou égal à 3 et A est un fermé achronal edgeless de M alors, mis à part le Lemme 1.2 et la Proposition 2.2, tous les résultats des sections 1 et 2 restent vrais si on remplace Σ par l'ensemble A .

4 Exemples et premières applications

Ombres dans l'espace de Minkowski

On considère l'hyperplan horizontal $\{x_0 = 0\}$ dans l'espace de Minkowski, il s'agit d'une hypersurface de Cauchy non compacte. La Proposition 2.2 et la Proposition 2.6 s'appliquent : tout point de $\mathbb{R}^{1,n}$ est caractérisé par son ombre

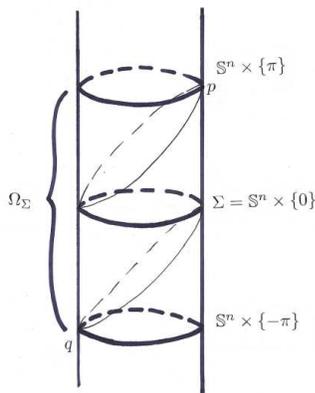
ouverte ou fermée sur $\{x_0 = 0\}$. On remarque qu'il est simple de prouver à partir du Lemme 3.14 que l'ombre ouverte ou fermée sur $\{x_0 = 0\}$ de tout point de $\mathbb{R}^{1,n}$ est une boule ouverte ou fermée.

L'espace de Minkowski n'est pas Cauchy-compact donc par le Lemme 2.13 il n'admet pas d'hypersurface de Cauchy purement lumière. D'après la Proposition 2.2 pour toute hypersurface de Cauchy Σ de $\mathbb{R}^{1,n}$, on a $\Omega_\Sigma = \mathbb{R}^{1,n}$.

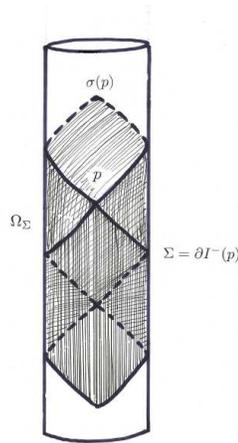
Soit p un point de $\mathbb{R}^{1,n}$. L'ensemble $A := \partial I^-(p)$ est un sous-ensemble achronal edgeless de $\mathbb{R}^{1,n}$. On peut alors définir Ω_A , au sens de la Définition 3.1. D'après le Lemme 3.14 on obtient que dans ce cas Ω_A est égal à $(\mathbb{R}^{1,n} \setminus J^+(p)) \cup \{p\}$.

Ombres dans l'espace d'Einstein universel

Soit $\Sigma := \mathbb{S}^n \times \{0\}$ une hypersurface de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Par la Proposition 2.18 on obtient que les ombre passées et futures sur Σ sont les boules de la sphère \mathbb{S}^n pour le métrique ronde. Dans ce cas Ω est l'ouvert $\mathbb{S}^n \times]-\pi, \pi[$.



Maintenant on considère l'hypersurface de Cauchy $\Sigma := I^-(p)$, pour un certain $p = (x, t)$. Dans ce cas l'ensemble Ω est donné par $\mathbb{R}^{1,n}(p) \cup \mathbb{R}^{1,n}(\sigma(p))$, où $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ est le domaine de Minkowski associé au point p (Définition 2.37).



Applications aux Cauchy-plongements

Grâce à la théorie des ombres on peut maintenant donner la démonstration du Lemme 2.4 énoncé dans le chapitre précédent. On va donner une preuve dans un cas légèrement plus général :

Proposition 4.1. *Soient M et N deux espace-temps et soit A un sous-ensemble achronal edgeless de M . Soient $f, g : M \rightarrow N$ deux plongements conformes tels que $f|_A = g|_A$ et tels que leurs images sont causalement convexes dans N , alors $f = g$.*

Démonstration. On considère l'ensemble $\mathcal{U} := \{x \in M / j_x^2 f = j_x^2 g\}$. Il s'agit d'un sous-ensemble fermé de M . D'après le théorème 1.8, \mathcal{U} est aussi ouvert : montrons qu'il est non vide, le résultat découlera alors de la connexité de M .

Comme f, g préservent la causalité, l'ensemble $S := f(A) = g(A)$ est un sous-ensemble achronal edgeless de N . Soient Ω_A et Ω_S les sous-ensembles de M et de N introduits dans la section 3. D'après le Corollaire 2.10 Ω_A et Ω_S sont non vides. Comme f et g préservent la causalité et comme leurs images sont causalement convexes dans N , pour tout $p \in I^\pm(A)$ on obtient

$$f(O_A^\pm(p)) = O_S^\pm(f(p)) \text{ et } g(O_A^\pm(p)) = O_S^\pm(g(p)).$$

Donc $f(\Omega_A)$ et $g(\Omega_A)$ sont contenus dans Ω_S . D'après la Proposition 2.6 les points de Ω_S sont caractérisés par leur ombre sur S . Comme $f|_A = g|_A$, on obtient pour tout $p \in \Omega_A$ que $f(p) = g(p)$.

D'après la Proposition 2.12 Ω_A est d'intérieur non vide. On a donc montré que f et g coïncident sur un ouvert de M , ce qui implique que \mathcal{U} est non vide. \square

On obtient alors le Lemme 2.4 en corollaire :

Corollaire 4.2. *Soient $f, g : M \rightarrow N$ deux Cauchy-plongements tels que $f|_\Sigma = g|_\Sigma$, alors $f = g$.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.1, les images des Cauchy-plongements f et g sont causalement convexes dans N . On est donc sous les hypothèses de la Proposition 4.1. \square

Le Lemme suivant reviendra très utile dans la preuve des résultat du chapitre 6.

Lemme 4.3. *Soient M et N deux espace-temps. Soit A un fermé achronal edgeless d'un espace-temps M et soit $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme conforme local tel que $f|_A$ est injective. On suppose que l'image de Ω_A est causalement convexe dans N , alors f restreinte à Ω_A est injective.*

Démonstration. Comme l'application f préserve la causalité et comme l'image de l'ensemble Ω_A est causalement convexe dans N , pour tout $p \in \Omega_A$ on obtient

$$f(O_A^\pm(p)) = O_{f(A)}^\pm(f(p)) \quad (4.3)$$

Donc $f(\Omega_A)$ est contenu dans $\Omega_{f(A)}$. Soient p, q deux points de Ω_A tels que $p \neq q$. Pour fixer les idées on suppose p, q dans $\Omega^+(A)$. Alors, d'après la Proposition 2.6 leurs ombres ouvertes $O_{\Sigma^-}(p)$ et $O_{\Sigma^-}(q)$ sur Ω_A sont différentes. Comme $f|_A$ est injective les image $f(O_{\Sigma^-}(p))$ et $f(O_{\Sigma^-}(q))$ sont différentes aussi. D'après (4.3) on a $O_{f(A)}^-(f(p)) \neq O_{f(A)}^-(f(q))$, donc $f(p) \neq g(p)$. \square

5 Espace-temps de Sitter standards

Dans cette section on définit une classe d'espace-temps localement modélés sur l'espace de Sitter appelés *espace-temps standards*. La construction qu'on va présenter peut être attribuée à Kulkarni et Pinkall dans [20] bien que ceux-ci n'étaient pas conscients de l'aspect lorentzien de leur construction. Les résultats obtenus dans ce chapitre concernant les propriété des ombres permettent une exposition assez naturelle de cette construction, qui sera donc légèrement réinterprétée. Pour une autre exposition de cette construction on peut voir aussi [21].

Une autre construction des espace-temps de Sitter standard a été faite par Scannell dans [48], son but étant d'étendre aux espace-temps à courbure constante positive la classification faite par Mess, voir [41] et [38]. Ces deux constructions aboutissent au même résultat.

Ils montrent qu'à chaque variété S localement modélée sur la sphère conforme \mathbb{S}^n , où $n \geq 2$, il est possible d'associer de façon canonique deux espace-temps localement modélés sur l'espace de Sitter de dimension $n + 1$, l'un complet dans le futur et l'autre complet dans le passé. Il s'agit des *espace-temps standards associés à S* . Dans l'optique de cette thèse il est plus productif de décrire la construction de Kulkarni et Pinkall, car c'est elle qui se généralise de manière naturelle dans un contexte plus général, comme nous le verrons au chapitre 7.

La notion d'espace-temps de Sitter standard est fortement liée à la notion d'ombre qu'on vient d'introduire au début de ce chapitre. Le point de départ est le fait que l'espace-temps de Sitter $d\mathbb{S}_{1,n}$ peut être vu comme étant l'espace des boules fermées de la sphère \mathbb{S}^n muni d'une topologie et d'une notion de causalité appropriées.

5.1 Dualité entre les points de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$ et les boules de la sphère \mathbb{S}^n .

Soit $\tilde{i}_1 : d\mathbb{S}_{1,n} \hookrightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ le Cauchy-plongement décrit à la section 2.7, dont l'image est l'ouvert $dS_{1,n} = \mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ de $\widetilde{Ein}_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Comme il a été vu à la section 2.7 la frontière de $dS_{1,n}$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est composée de deux hypersurfaces $\mathbb{S}^n_- := \mathbb{S}^n \times \{-\pi/2\}$ et $\mathbb{S}^n_+ := \mathbb{S}^n \times \{\pi/2\}$. Ces deux hypersurfaces sont des hypersurfaces de Cauchy de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et, munies de la classe conforme de la métrique induite, elles s'identifient à la sphère conforme \mathbb{S}^n . On peut alors bien définir sur les deux composantes connexes de la frontière conforme \mathbb{S}^n_+ et \mathbb{S}^n_- une notion de boule ouverte et fermée. En fait les difféomorphismes conformes de la sphère \mathbb{S}^n , préservent les boules (ouvertes et fermées) de la métrique ronde sur \mathbb{S}^n .

Comme \mathbb{S}^n_+ et \mathbb{S}^n_- sont deux hypersurfaces de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on peut considérer l'ombre future d'un point de l'ouvert $dS_{1,n}$ sur \mathbb{S}^n_+ , ainsi que son ombre passée sur \mathbb{S}^n_- .

Définition 5.1. Soient $\mathcal{B}(\mathbb{S}^n_+)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{S}^n_-)$ les espaces des *boules ouvertes* respectivement sur \mathbb{S}^n_+ et \mathbb{S}^n_- et soient $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_+)$ et $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_-)$ les espaces des *boules ouvertes propres*, c'est-à-dire celles dont l'adhérence n'est pas \mathbb{S}^n_+ ou \mathbb{S}^n_- tout entier. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{S}^n_-) \setminus \mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_-)$ et ces de $\mathcal{B}(\mathbb{S}^n_+) \setminus \mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_+)$ sont les *boules ouvertes maximales* respectivement de \mathbb{S}^n_- et de \mathbb{S}^n_+ .

Lemme 5.2. *L'espace $dS_{1,n}$ est en bijection avec les deux espaces $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_-)$ et $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_+)$.*

Démonstration. Soit $p = (t_p, x_p)$ un point de $dS_{1,n}$, et soit $I^-(p)$ son passé strict dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après la Proposition 2.18, l'ombre ouverte passée de p sur \mathbb{S}^n_- , notée $O_{\mathbb{S}^n_-}(p)$, est la boule ouverte de \mathbb{S}^n_- de centre x_p et de rayon $\pi/2 + t_p$. Comme la distance entre t_p et $-\pi/2$ est strictement inférieure à π , $\overline{O_{\mathbb{S}^n_-}(p)}$ n'est pas \mathbb{S}^n_- toute entière. Donc la Proposition 2.6 implique que l'application

$$\begin{aligned} B^- : dS_{1,n} &\longrightarrow \mathcal{B}_0(\mathbb{S}^n_-) \\ p &\longmapsto B^-(p) := O_{\mathbb{S}^n_-}(p) \end{aligned}$$

est injective. La surjectivité découle du fait que le développement de Cauchy future de chaque boule ouverte propre de \mathbb{S}^n_- dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est exactement le passé stricte

d'un point dans $dS_{1,n}$. Pour les mêmes raisons l'application qu'à chaque point de $dS_{1,n}$ associe son ombre ouverte future sur \mathbb{S}_+^n est une bijection qu'on note B^+ . \square

Proposition 5.3. *La frontière conforme future de l'espace de Sitter, \mathbb{S}_+^n , est en bijection avec l'espace de boules maximales $\mathcal{B}(\mathbb{S}_-^n) \setminus \mathcal{B}_0(\mathbb{S}_-^n)$.*

De même la frontière conforme passée de l'espace de Sitter, \mathbb{S}_-^n , est en bijection avec l'espace de boules maximales $\mathcal{B}(\mathbb{S}_+^n) \setminus \mathcal{B}_0(\mathbb{S}_+^n)$.

Démonstration. Soit p un point de la frontière causale de $dS_{1,n}$, on suppose $p \in \mathbb{S}_+^n$. D'après la Proposition 2.18 on obtient que $\sigma^{-1}(p)$ est dans \mathbb{S}_-^n et que $\mathbb{S}_-^n \setminus \{\sigma^{-1}(p)\}$ est contenu dans la passé strict de p dans $\widehat{Ein}_{1,n}$. Donc $O_{\mathbb{S}_-^n}^-(p) = \mathbb{S}_-^n \setminus \{\sigma^{-1}(p)\}$. Soit maintenant q un point de \mathbb{S}_-^n . Alors, toujours d'après la Proposition 2.18 on obtient que $\mathbb{S}_-^n \setminus \{q\}$ est l'ombre ouverte passé du point $\sigma(q)$. Un raisonnement analogue peut être fait pour les ombres ouvertes sur \mathbb{S}_+^n des points dans \mathbb{S}_-^n . On peut alors prolonger B^+ et B^- en deux applications bijectives

$$\begin{aligned} \overline{B}^\pm : dS_{1,n} \cup \mathbb{S}_\mp^n &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{S}_\pm^n) \\ p &\longmapsto \overline{B}^\pm(p) := O_{\mathbb{S}_\pm^n}^\pm(p) \end{aligned}$$

\square

Remarque 5.4. *Les ouverts $\Omega_{\mathbb{S}_+}^-$ et $\Omega_{\mathbb{S}_-}^+$ de la Définition 2.1 coïncident avec l'ouvert $dS_{1,n} = \mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$.*

Soient B^+ et B^- les deux bijections décrites dans la preuve du Lemme 5.2. La relation d'ordre donnée par l'inclusion sur l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{S}_\pm^n)$ permet de définir des relations de causalité.

Définition 5.5. *Pour B_1, B_2 dans $\mathcal{B}(\mathbb{S}_+^n)$ on définit :*

$$B_1 \prec B_2 \text{ si } B_2 \subset B_1 \quad (4.4)$$

$$B_1 \ll B_2 \text{ si } \overline{B_2} \subset B_1 \quad (4.5)$$

Pour B_1 et B_2 dans $\mathcal{B}(\mathbb{S}_-^n)$ on définit :

$$B_1 \prec B_2 \text{ si } B_1 \subset B_2 \quad (4.6)$$

$$B_1 \ll B_2 \text{ si } \overline{B_1} \subset B_2 \quad (4.7)$$

Remarque 5.6. Les relations de causalité qu'on vient de définir ne sont rien d'autre que les relations de causalité sur l'espace de Sitter quand on l'identifie respectivement à $\mathcal{B}(\mathbb{S}_+^n)$ et à $\mathcal{B}(\mathbb{S}_-^n)$. En fait soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_\pm^n)$ alors :

$$\begin{aligned} B_1 \prec B_2 &\iff (B^\pm)^{-1}(B_1) \leq (B^\pm)^{-1}(B_2) \\ B_1 \ll B_2 &\iff (B^\pm)^{-1}(B_1) < (B^\pm)^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

où \leq et $<$ sont les relation de causalité dans $dS_{1,n}$.

Comme $d\mathbb{S}_{1,n}$ est un espace causal et B^\pm, \overline{B}^\pm son bijectives on obtient que $\mathcal{B}(\mathbb{S}_\pm^n)$ et $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}_\pm^n)$ sont des espace causaux (Définition 5.13).

Ces relations de causalité permettent de définir la topologie de Alexandrov sur les espace $\mathcal{B}(\mathbb{S}_\pm^n)$ et $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}_\pm^n)$ (Définition 5.14). Comme, d'après la Proposition 5.15, la topologie de $dS_{1,n}$ coïncide avec la topologie d'Alexandrov et, comme les applications B^\pm et \overline{B}^\pm et leurs applications réciproques préservent les relations de causalité, on obtient :

Proposition 5.7. *Les bijections $B^\pm : dS_{1,n} \rightarrow \mathcal{B}_0(\mathbb{S}_\pm^n)$ et $\overline{B}^\pm : dS_{1,n} \cup \mathbb{S}_\mp^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{S}_\pm^n)$ sont des homéomorphismes. \square*

Espace-temps de Sitter standard associé à un ouvert de \mathbb{S}^n

Soit U un ouvert de \mathbb{S}^n . Soit $\mathcal{B}_0(U)$ l'ensemble des boules ouvertes propres de \mathbb{S}^n dont la fermeture est contenue dans U .

On muni l'espace $\mathcal{B}_0(U)$ des relations de causalité définies par les formules (4.6) et (4.7), on note $\mathcal{B}_0^+(U)$ l'espace causal qu'on obtient. On peut alors munir $\mathcal{B}_0^+(U)$ de la topologie d'Alexandrov.

Si on identifie U avec un ouvert U_- de \mathbb{S}_-^n on voit alors que $\mathcal{B}_0^+(U)$ est un ouvert de $\mathcal{B}_0(\mathbb{S}_-^n)$, donc d'après la Proposition 5.7, $\mathcal{B}_0^+(U)$ s'identifie à un ouvert de l'espace $dS_{1,n}$.

Si $U = \mathbb{S}^n$ alors l'espace $\mathcal{B}_0^+(U)$ s'identifie à l'espace $dS_{1,n} \simeq d\mathbb{S}_{1,n}$ tout entier.

Si $U \neq \mathbb{S}^n$ l'espace $\mathcal{B}_0^+(U)$ s'identifie au développement de Cauchy futur de U_- vu comme un sous-ensemble achronal edgeless de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 6.23 $\mathcal{D}^+(U_-)$ (Définition 6.6) est un ouvert globalement hyperbolique de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Par définition l'ouvert $\mathcal{D}^+(U_-)$ a la propriété suivante : si x est dans $\mathcal{D}^+(U_-)$, alors toute courbe causale passée inextensible issue de x rencontre U_- .

Si on regarde $\mathcal{B}_0^+(U)$ comme un ouvert de $d\mathbb{S}_{1,n} \simeq dS_{1,n}$, on obtient alors que, pour tout point x dans $\mathcal{B}_0^+(U)$, toute courbe causale passée issue de x inextensible (sous-entendu inextensible dans $\mathcal{B}_0^+(U)$) n'admet pas de point limite passé dans $d\mathbb{S}_{1,n}$: elle est donc une courbe causale passé inextensible dans $d\mathbb{S}_{1,n}$. On vient de prouver que $\mathcal{B}_0^+(U)$ est un ouvert globalement hyperbolique de $d\mathbb{S}_{1,n}$ passé-complet.

D'une façon similaire si on muni $\mathcal{B}_0(U)$ des relations de causalité définies pas les formules (4.4) et (4.5) on obtient un espace causal $\mathcal{B}_0^-(U)$. On identifie U à un ouvert U_+ de la sphère \mathbb{S}_+^n , et on obtient que, si $U \neq \mathbb{S}^n$, alors $\mathcal{B}_0^-(U)$ s'identifie, *via* l'application B^+ , au développement de Cauchy passé de U_+ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. L'ouvert $\mathcal{B}_0^-(U)$ est alors un ouvert globalement hyperbolique future complet de $d\mathbb{S}_{1,n}$.

On voit que $\mathcal{B}_0^-(U)$ est futur et passé complet si et seulement si $U = \mathbb{S}^n$, et de même pour $\mathcal{B}_0^+(U)$.

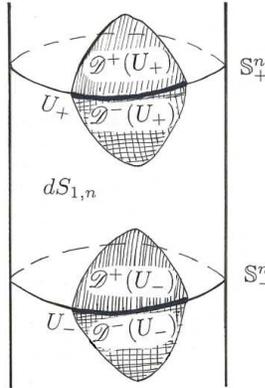
Les deux espace-temps $\mathcal{B}_0^+(U)$ et $\mathcal{B}_0^-(U)$ sont $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximaux. La preuve de la $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximalité n'est pas beaucoup plus simple que dans le cas plus général,

qu'on étudiera dans la section suivante, où U est une variété simplement connexe localement modelée sur la sphère conforme \mathbb{S}^n . On renvoie donc à la Proposition 5.16.

Les espaces $\mathcal{B}_0^+(U)$ et $\mathcal{B}_0^-(U)$ sont les espace-temps de Sitter standards, respectivement futur et passé complets, associés à l'ouvert U .

Remarque 5.8. Les espaces $\mathcal{B}_0^+(U)$ et $\mathcal{B}_0^-(U)$ ne sont pas C_0 -maximaux. On voit en fait que les développements de Cauchy dans l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ des ouverts U_- et U_+ sont des C_0 -extensions pour les espace-temps $\mathcal{B}_0^+(U)$ et $\mathcal{B}_0^-(U)$.

Le difféomorphisme conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ défini par $(x, t) \in \widetilde{Ein}_{1,n} \mapsto (x, t + \pi)$ envoie $\mathcal{D}^-(U_-)$ sur $\mathcal{D}^-(U_+) \simeq \mathcal{B}_0^-(U)$ et $\mathcal{D}^+(U_-) \simeq \mathcal{B}_0^+(U)$ sur $\mathcal{D}^+(U_+)$. On obtient alors que les espaces $\mathcal{B}_0^+(U)$ et $\mathcal{B}_0^-(U)$ ont la même C_0 -extension maximale, qui est donnée par $\mathcal{D}(U_-) \simeq \mathcal{D}(U_+)$.



5.2 Construction des espace-temps de Sitter standards

On va généraliser la construction de deux espace-temps $\mathcal{B}_0^+(U)$ et $\mathcal{B}_0^-(U)$, pour un ouvert U de la sphère \mathbb{S}^n , à toute variété localement modelé sur la sphère conforme \mathbb{S}^n . Plus précisément on montre que :

Il est possible d'associer à chaque variété S localement modelée sur la sphère conforme \mathbb{S}^n , où $n > 2$, deux espace-temps localement modelés sur l'espace de Sitter de dimension $n + 1$, $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$. Ces espace-temps sont globalement hyperboliques et $dS_{1,n}$ -maximaux et ils sont tels que $\mathcal{B}_0^+(S)$ est complet dans le passé et $\mathcal{B}_0^-(S)$ est complet dans le futur.

Les espaces $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ sont les espace-temps standards associés à S .

Dans l'exposition des résultats de cette section on aura besoin des deux lemmes suivants sur les homéomorphismes locaux, dont une preuve peut être trouvée dans [2].

Lemme 5.9. *Soit $f : N \rightarrow N'$ un homéomorphisme local entre deux variétés N et N' . Soit U un ouvert de N où f soit injective tel que l'adhérence de $V = f(U)$ soit localement connexe. Alors f est injective sur l'adhérence de U dans N .*

Lemme 5.10. *Soit $f : N \rightarrow N'$ un homéomorphisme local entre deux variétés N et N' . Soient U et V deux ouverts connexes de N tels que $f|_U$ et $f|_V$ est injective $U \cap V \neq \emptyset$ et $f(U) \subset f(V)$, alors $U \subset V$.*

Cas où S est simplement connexe

Soit S une variété simplement connexe de dimension $n \geq 2$ localement modélisée sur la sphère conforme, et soit $d : S \rightarrow \mathbb{S}^n$ son application développante. On a une notion de boule

Définition 5.11. Une *boule ouverte* de S est un ouvert B de S tel que $d|_B$ est injective et $d(B)$ est une boule ouverte de \mathbb{S}^n .

Une boule ouverte B de S est dite *maximale* si elle est maximale par rapport à la relation d'inclusion. Une boule ouverte *propre* est une boule ouverte de S qui n'est pas maximale.

On appelle $\mathcal{B}(S)$ l'espace des boules ouvertes sur S et $\mathcal{B}_0(S)$ l'espace des boules ouvertes propres sur S .

Lemme 5.12. *Soit S non difféomorphe à \mathbb{S}^n . Soit B une boule ouverte maximale de S , alors son adhérence \overline{B} est non compacte.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que \overline{B} est compact. Montrons qu'alors d est injective sur un voisinage ouvert de \overline{B} .

Soit $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de voisinages de \overline{B} tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_i = \overline{B}$. On suppose par l'absurde que pour tout i dans \mathbb{N} il existe deux points p_i et q_i de \mathcal{U}_i tels que $p_i \neq q_i$ et $d^-(p_i) = d^-(q_i)$. Par construction les suites $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ s'accroissent sur \overline{B} .

Comme \overline{B} est compact, quitte à remplacer par des sous-suites, on obtient que les suites $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des points p_∞ et q_∞ de \overline{B} . Par continuité de l'application d on obtient $p_\infty = q_\infty$. Comme d est un homéomorphisme local, elle est injective sur un voisinage de $p_\infty = q_\infty$. Il existe alors un entier i_0 dans \mathbb{N} tel que $p_i = q_i$ pour tout $i \geq i_0$ en contradiction avec ce qu'on avait supposé.

Comme les boules propres forment une base de voisinages pour S , \overline{B} est contenue dans une boule propre de S . Il s'en suit que B n'est pas une boule maximale en contradiction avec les hypothèses.

□

Les formules (4.6) et (4.7) permettent de définir des relations de causalité sur $\mathcal{B}_0(S)$ et $\mathcal{B}(S)$. Par une vérification directe on voit que les espaces $\mathcal{B}_0(S)$ et $\mathcal{B}(S)$, munis de ces relations de causalité, sont des espaces causaux (Définition 5.13). On les note $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}^+(S)$.

On peut aussi munir $\mathcal{B}_0(S)$ et $\mathcal{B}(S)$ des relations de causalités données par les formules (4.4) et (4.5), on obtient alors deux autres espaces causaux, qu'on note $\mathcal{B}_0^-(S)$ et $\mathcal{B}^-(S)$.

On remarque que la topologie d'Alexandrov relative aux deux relations de causalité qu'on a défini sur $\mathcal{B}(S)$ et $\mathcal{B}_0(S)$ est la même. En fait, en accord avec la Définition 5.14, les ouverts de la base de la topologie d'Alexandrov sur $\mathcal{B}(S)$ sont les ensembles

$$W(B_1, B_2) := \{B \in \mathcal{B}^\pm(S) / B_1 \ll B \ll B_2\}$$

où B_1 et B_2 varient dans $\mathcal{B}(S)$.

En identifiant la sphère \mathbb{S}^n à la fois avec \mathbb{S}_+^n et avec \mathbb{S}_-^n on peut définir deux nouvelles applications développantes pour S :

$$\begin{aligned} d^+ : S &\longrightarrow \mathbb{S}_+^n \\ d^- : S &\longrightarrow \mathbb{S}_-^n \end{aligned}$$

D'après le Lemme 5.2, étant donnée une boule ouverte propre B de \mathbb{S}_\pm^n (c'est-à-dire dont l'adhérence n'est pas \mathbb{S}_\pm^n toute entière) il existe un unique point p dans $dS_{1,n}$ tel que $B = O_{\mathbb{S}_\pm^n}^\pm(p)$. À l'aide des application B^+ et B^- on peut donc définir deux applications D^+ et D^- par :

$$\begin{aligned} D^\pm : \mathcal{B}_0(S) &\longrightarrow dS_{1,n} \\ B &\longmapsto (B^\pm)^{-1}(d^\pm(B)) \end{aligned}$$

En d'autres termes les applications D^+ et D^- associent à une boule ouverte B de S les uniques points $D^+(B) = p^+$ et $D^-(B) = p^-$ de $dS_{1,n}$ tels que l'ombre ouverte future de p^+ sur \mathbb{S}_+^n est la boule $d^+(B)$ et l'ombre ouverte passée de p^- sur \mathbb{S}_-^n est la boule $d^-(B)$.

Lemme 5.13. *Les applications D^+ et D^- sont des homéomorphismes locaux.*

Démonstration. Par définition même des boules sur S , l'application d restreinte à tout ouvert de la base de la topologie $W(B_1, B_2)$ est injective. Les deux applications D^+ et D^- envoient les ouverts $W(B_1, B_2)$ de la base de la topologie sur respectivement les ouverts $I^-(D^+(B_2)) \cap I^+(D^+(B_1))$ et $I^-(D^-(B_2)) \cap I^+(D^-(B_1))$, qui forment la base de la topologie d'Alexandrov de $dS_{1,n}$. Le lemme est donc prouvé. □

Lemme 5.14. *Pour tout couple d'éléments B_1 et B_2 de $\mathcal{B}_0^\pm(S)$ l'application D^\pm est injective sur l'ensemble $I^\pm(B_1) \cup I^\pm(B_2)$.*

Démonstration. On prouve le résultat pour D^- , le cas de D^+ est similaire. Par définition, d^- restreinte à chaque boule B_1 et B_2 est injective; donc D^- , restreinte aux ouverts $I^-(B_1)$ et $I^-(B_2)$, est elle aussi injective. On considère les ensembles

$$U := (D^-|_{I^-(B_1)})^{-1}(D(I^-(B_1)) \cap D(I^-(B_2)))$$

$$V := (D^-|_{I^-(B_2)})^{-1}(D(I^-(B_1)) \cap D(I^-(B_2)))$$

Les ouverts U et V sont contenus respectivement dans $I^-(B_1)$ et dans $I^-(B_2)$, donc les restrictions de D^- à U et à V sont injectives. Leur intersection est non vide car elle contient $I^-(B_1) \cap I^-(B_2)$, qui, par hypothèse, est non vide. De plus on a les égalités $D^-(U) = D^-(V) = D^-(I^-(B_1)) \cap D^-(I^-(B_2))$. Si on applique le Lemme 5.10 à U et V on obtient $U = V$ ce qui montre que D^- restreinte à $I^-(B_1) \cup I^-(B_2)$ est injective. \square

Proposition 5.15. *L'espace $\mathcal{B}_0(S)$ muni de la topologie d'Alexandrov est une variété.*

Démonstration. D'après le Lemme 5.13, les ouverts $W(B_1, B_2)$ sont des cartes locales pour $\mathcal{B}_0(S)$. De plus l'espace $\mathcal{B}_0(S)$ muni de la topologie d'Alexandrov est à base dénombrable d'ouverts. Si on fixe une boule B et une boule B' telle que $\overline{B} \subset B'$, alors une base de voisinages pour B est donnée par les ouverts $\{W(B_1, B_2)\}$ où $\overline{B_1} \subset B$ et $\overline{B_2} \subset B_2$ et $B_2 \subset B'$. Or, comme d^- est injective restreinte à B' , on obtient que D^- est injective restreinte à $I^-(B')$. L'ouvert $D^-(I^-(B'))$ est un voisinage de $D^-(B)$. Comme l'image de la base de voisinages $\{W(B_1, B_2)\}$ est une base de voisinages de $D^-(B)$ dans $dS_{1,n}$, et comme $dS_{1,n}$ est à base dénombrable on peut trouver une base dénombrable de voisinages de $D^-(B)$ de la forme $\{D^-(W(B_1^k, B_2^k))\}_{k \in \mathbb{N}}$, où $W(B_1^k, B_2^k)$ appartient à la famille $\{W(B_1, B_2)\}$. Les ouverts $\{D^-(W(B_1^k, B_2^k))\}$ sont donc une base de voisinages dénombrable pour B .

Il reste donc à prouver que l'espace $\mathcal{B}_0(S)$ est Hausdorff. Soient B_1 et B_2 deux éléments de $\mathcal{B}_0(S)$ qui ne sont pas séparés. Soient B'_1 et B'_2 autres deux éléments dans $\mathcal{B}_0(S)$ tels que $B_1 \subset B'_1$ et $B_2 \subset B'_2$. Les ouverts $I^-(B'_1)$ et $I^-(B'_2)$ sont des voisinages respectivement de B_1 et B_2 , ils ont donc une intersection non vide. Soit B un élément de cette intersection. La boule ouverte B est contenue dans $B'_1 \cap B'_2$, laquelle est donc non vide. Comme d'après le Lemme 5.14 la restriction de D^- à $I^+(B'_1) \cup I^+(B'_2)$ est injective et son image est $I^+(D^-(B'_1)) \cup I^-(D^+(B'_2)) \cap J^+(\mathbb{S}^n)$. Comme l'espace $dS_{1,n}$ est Hausdorff le lemme est prouvé. \square

D'après le Lemme 5.15 et le Lemme 5.13 on peut transporter sur $\mathcal{B}_0(S)$ la métrique de l'espace de Sitter par les deux applications D^+ et D^- . Les relations de causalité définies par les formules (4.4) et (4.5) coïncident avec

les relations de causalité induites par la métrique lorentzienne définie par D^+ . On note $\mathcal{B}_0^+(S)$ la variété lorentzienne ainsi obtenue.

De même les relations de causalité définies par les formules (4.6) et (4.7) coïncident avec les relations de causalité induites par la métrique lorentzienne définie par D^- .

On $\mathcal{B}_0^-(S)$ la variété lorentzienne ainsi obtenue.

Le tiré en arrière du champ de vecteurs qui définit l'orientation chronologique sur $dS_{1,n}$ permet de définir des orientations chronologiques sur $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$, on choisira pour chaque espace l'orientation chronologique qui est en accord avec les relations de causalité déjà définies.

On obtient donc deux espace-temps causaux localement modelés sur $dS_{1,n}^n$. On remarque qu'on peut passer de $\mathcal{B}_0^+(S)$ à $\mathcal{B}_0^-(S)$ juste en renversant l'orientation chronologique.

Proposition 5.16. *Les espace-temps $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ sont des espace-temps globalement hyperboliques $dS_{1,n}$ -maximaux respectivement passé et futur complets.*

Démonstration. On suppose que S n'est pas difféomorphe à \mathbb{S}^n car dans ce cas les espace $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ s'identifient à l'espace $dS^{1,n}$, comme on a vu précédemment.

On prouve le résultat pour $\mathcal{B}_0^+(S)$.

Étape 1) : $\mathcal{B}_0^-(S)$ est globalement hyperbolique.

Soient B_1 et B_2 deux éléments de $\mathcal{B}_0^+(S)$ tels que $B_2 \prec B_1$ et soit B un élément de $I^+(B_1)$. Alors l'ensemble $J^-(B_1) \cap J^+(B_2)$ est contenu dans $I^-(B)$. D'après le Lemme 5.14 l'application D^- est injective sur $I^-(B)$, donc, d'après le Lemme 5.13, sa restriction à $I^-(B)$ est un homéomorphisme. Par construction l'image de $I^-(B)$ par D^- est l'ouvert $I^-(D^-(B))$. De plus D^- préserve les relations de causalité, donc en particulier

$$D^-(J^-(B_1) \cap J^+(B_2)) = J^-(D^-(B_1)) \cap J^+(D^-(B_2)).$$

Or, $J^-(D^-(B_1)) \cap J^+(D^-(B_2))$ est compact, car $dS_{1,n}$ est globalement hyperbolique, donc $J^-(B_1) \cap J^+(B_2)$ est compact aussi. On vient de prouver que l'espace-temps $\mathcal{B}_0^+(S)$ est globalement hyperbolique.

Étape 2) : $\mathcal{B}_0^+(S)$ est passé complet.

Soit $B(t)$ une courbe passé inextensible de $\mathcal{B}_0^+(S)$ définie sur $[0, \infty[$. Comme pour tout B dans $I^-(B(0))$ on a $B \subset B(0)$ et l'application d^- est injective sur $B(0)$, on obtient que l'application D^- est injective sur le passé de strict de $B(0)$. L'image par D^- de $I^-(B(0))$ est l'ouvert $I^-(D^-(B(0)))$. Il s'en suit que le point limite passé de $D^-(B(t))$ appartient à la frontière \mathbb{S}_-^n , donc la courbe $D^-(B(t))$ est une courbe inextensible de $dS_{1,n}$. Comme D^- est une isométrie locale et comme $dS_{1,n} \simeq dS_{1,n}$ est passé complet, on obtient que $\mathcal{B}_0^+(S)$ est aussi passé complet.

Étape 3) : $\mathcal{B}_0^+(S)$ est $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximal.

Soit $f : \mathcal{B}_0^+(S) \rightarrow M$ un Cauchy-plongement de $\mathcal{B}_0^+(S)$ dans un espace-temps M globalement hyperbolique localement modelé sur $d\mathbb{S}_{1,n}$. Soit Σ une hypersurface de Cauchy de $\mathcal{B}_0^+(S)$.

Soit $dev : M \rightarrow dS_{1,n}$ l'application développante (où on a identifié $d\mathbb{S}_{1,n} \simeq dS_{1,n}$). Alors $dev \circ f : \mathcal{B}_0^+(S) \rightarrow d\mathbb{S}_{1,n}$ est une autre application développante pour $\mathcal{B}_0^+(S)$: elle diffère donc de D^- par la composition au but par un élément g de $O_0(1, n)$. Quitte à composer dev par g^{-1} on peut donc considérer que $dev \circ f = D^-$.

On suppose par l'absurde que $\partial f(\mathcal{B}_0^+(S))$ est non vide. Comme $\mathcal{B}_0^+(S)$ est passé complet la frontière $\partial^- f(\mathcal{B}_0^+(S))$ est forcément vide.

Soit p un point de $\partial^+ f(\mathcal{B}_0^+(S))$. Il existe une courbe $c :]0, \infty[\rightarrow M$ de type temps contenue dans $f(\mathcal{B}_0^+(S))$ dont l'extrémité future est p . L'ouvert $I^-(p)$ est alors l'union croissante des ouverts $I^-(c(t))$:

$$I^-(p) = \bigcup_{t \in]0, \infty[} I^-(c(t)).$$

Comme, d'après le Lemme 5.14, la restriction de l'application dev à chaque $I^-(c(t))$ est injective, on obtient que dev restreinte à $I^-(p)$ est injective elle aussi. Comme pour tout $t \in]0, \infty[$ l'ouvert $I^-(c(t))$ est contenu dans $f(\mathcal{B}_0^+(S))$, l'image réciproque par d^- de l'ombre ouverte passée du point $dev(c(t))$ est une boule ouverte propre $B(t)$ de S . On appelle B l'union des boules $B(t)$, qui, étant une union croissante de boules ouvertes, est une boule ouverte de S .

Comme p n'appartient pas à $f(\mathcal{B}_0^+(S))$, par construction B est une boule maximale de S .

D'après le Lemme 5.9 d^- est injective sur \overline{B} , adhérence de B dans S . Montrons que \overline{B} est compact.

D'après le Lemme 5.9 l'application dev restreinte à $J^-(p)$ est injective. Le Lemme 1.2 implique que l'ombre fermée passée de p sur l'hypersurface de Cauchy $f(\Sigma)$ est compacte. L'ombre $\overline{O_{f(\Sigma)}^-}(p) = J^-(p) \cap f(\Sigma)$ est alors un compact contenu dans $f(\mathcal{B}_0^+(S))$ sur lequel la restriction de l'application dev est injective. Donc

$$dev(J^-(\overline{O_{f(\Sigma)}^-}(p))) = J^-(dev(\overline{O_{f(\Sigma)}^-}(p))). \quad (4.8)$$

L'ensemble $J^-(dev(\overline{O_{f(\Sigma)}^-}(p))) \cap \mathbb{S}_-^n$ est un fermé de \mathbb{S}_-^n , il est donc compact et par construction il est égal à $\overline{d^-(B)}$. Montrons alors que $\overline{d^-(B)}$ est égal à $d^-(\overline{B})$.

Comme d^- est un homéomorphisme local on a l'inclusion $d^-(\overline{B}) \subset \overline{d^-(B)}$. Prouvons l'inclusion réciproque.

Soit x un point de $\overline{d^-(B)}$. D'après l'égalité (4.8) il existe un point q dans $\overline{O_{f(\Sigma)}^-}(p)$ tel que x appartient à $J^-(dev(q)) \setminus I^-(dev(q))$. Soit q' un point de $I^+(q) \cap U$, où U est un voisinage de q contenu dans $f(\mathcal{B}_0^+(S))$ sur lequel dev est injective.

Comme dev preserve les relations de causalité $dev(q') \in I^+(dev(q))$ et $dev(I^-(q')) = I^-(dev(q'))$. Il s'en suit que x appartient à $O_{\mathbb{S}_-^n}^-(dev(q'))$.

Par construction, comme q' appartient à $f(\mathcal{B}_0^+(S))$, l'ouvert $O_{\mathbb{S}^n}^-(dev(q'))$ est l'image par d^- d'une boule ouverte propre B' de S . Donc x est l'image par d^- d'un point y de S . Comme d^- est un homéomorphisme local on obtient que y appartient à \overline{B} . Le fait que d^- est un homéomorphisme local implique aussi que \overline{B} est compact, car $d(\overline{B})$ est compact.

Comme on a supposé que S n'est pas difféomorphe à \mathbb{S}^n , d'après le Lemme 5.12 \overline{B} est non compacte : contradiction. \square

Cas où S n'est pas simplement connexe

Soit S une variété de dimension $n \geq 2$ localement modelée sur la sphère conforme. Soient d et ρ son application développante et son morphisme d'holonomie.

$$\begin{aligned} d : S &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ \rho : \pi_1(S) &\longrightarrow O_0(1, n) \end{aligned}$$

En utilisant la construction pour le cas simplement connexe on peut construire deux espace-temps $\mathcal{B}_0^+(\tilde{S})$ et $\mathcal{B}_0^-(\tilde{S})$, respectivement passés et futur complets. L'application d est équivariante par rapport à l'action de $\pi_1(S)$ sur \tilde{S} et à l'action de $\Gamma := \rho(\pi_1(S))$ sur \mathbb{S}^n , donc elle envoie boules ouvertes sur boules ouvertes et boules ouvertes maximales sur boules ouvertes maximales.

Il s'en suit qu'on peut définir une action de $\pi_1(S)$ sur l'espace $\mathcal{B}(\tilde{S})$ qui préserve l'espace $\mathcal{B}_0(\tilde{S})$. Du fait que l'application d est équivariante par rapport à l'action de $\pi_1(S)$ sur \tilde{S} et à l'action de Γ sur \mathbb{S}^n , les applications D^+ et D^- sont équivariantes elles aussi. On obtient que $\pi_1(S)$ agit par isométries sur les espaces $\mathcal{B}_0^+(\tilde{S})$ et $\mathcal{B}_0^-(\tilde{S})$.

Lemme 5.17. *L'action de $\pi_1(S)$ sur l'espace $\mathcal{B}_0(\tilde{S})$ est libre et propre.*

La preuve de ce résultat est essentiellement la même que dans le cas plus général considéré au chapitre 7, on renvoie donc au Lemme 2.5.

Le quotient de $\mathcal{B}_0(\tilde{S})$ par l'action de $\pi_1(S)$ est donc une variété.

Comme l'action de $\pi_1(S)$ sur les espaces $\mathcal{B}_0^+(\tilde{S})$ et $\mathcal{B}_0^-(\tilde{S})$ est une action isométrique, on peut bien définir une métrique lorentzienne sur le quotient. Les variétés lorentziennes ainsi obtenues sont notées $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$.

Comme l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathcal{B}_0^+(\tilde{S})$ et $\mathcal{B}_0^-(\tilde{S})$ préserve l'orientation chronologique, on a bien défini des orientations chronologiques sur $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$.

Proposition 5.18. *Les espace-temps $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ sont globalement hyperboliques.*

Une preuve peut être trouvée dans [1] Proposition 2.1. Une autre preuve de la Proposition 5.18 découle des résultats des résultats du Chapitre 7 où on exposera une généralisation de la construction qu'on vient de voir. D'après le Remarque

1.3 et la Proposition 1.8, en fait, les espace-temps $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ s'identifient à deux ouverts causalement convexes de l'espace-temps globalement hyperbolique $\mathcal{B}(S)$, défini par (7.1). Il s'en suit qu'ils sont globalement hyperboliques.

Comme leurs revêtements universels sont respectivement futur et passé complets, les espace-temps $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ sont respectivement futur et passé complets. Ils sont aussi $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximaux car leurs revêtements universels $\mathcal{B}_0^+(\tilde{S})$ et $\mathcal{B}_0^-(\tilde{S})$ sont $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximaux. Supposons en effet par l'absurde qu'il y ait un Cauchy-plongement f non surjectif de $\mathcal{B}_0^\pm(S)$ dans un espace-temps M ; on peut alors relever f en un Cauchy-plongement non surjectif de $\mathcal{B}_0^\pm(\tilde{S})$ dans \tilde{M} , ce qui est impossible puisqu'on a déjà montré que $\mathcal{B}_0^\pm(\tilde{S})$ est $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximal.

Chapitre 5

Frontière causale et C -maximalité

1 Frontière causale

Dans cette section on va décrire la méthode de Penrose, Geroch et Kronheimer pour attacher une frontière causale à un espace-temps. Pour plus de détails sur ce sujet on peut consulter [33] section 6.8, ou [28], dans lequel cette construction a été introduite. Il a y plusieurs façon d'attacher une frontière causale à un espace-temps, suivant le phénomène à l'infini qu'on veut étudier. La frontière causale dont on va parler ne dépend que de la structure causale de l'espace-temps ; elle ne permet pas par exemple d'étudier la complétude ou l'incomplétude des géodésiques de type temps.

Dans la suite on va supposer que M est un espace-temps qui vérifie le principe de causalité forte. On a déjà vu qu'un espace-temps qui vérifie le principe de causalité forte est distinguant (voir Proposition 8.9), c'est-à-dire que chaque point p de M est uniquement déterminé par son passé strict $I^-(p)$ ou par son futur strict $I^+(p)$ (voir Définition 8.9). Par ailleurs $I^-(p)$ est un ouvert et un ensemble passé, de plus $I^-(p)$ n'est pas union de deux ouverts non vides strictement contenus dans $I^-(p)$ qui soient aussi des ensembles passés. Cela signifie que $I^-(p)$ est un IP au sens de la définition suivante :

Définition 1.1. Un sous ensemble \mathcal{V} de M est un *IP* (*Indecomposable Past set*) s'il vérifie :

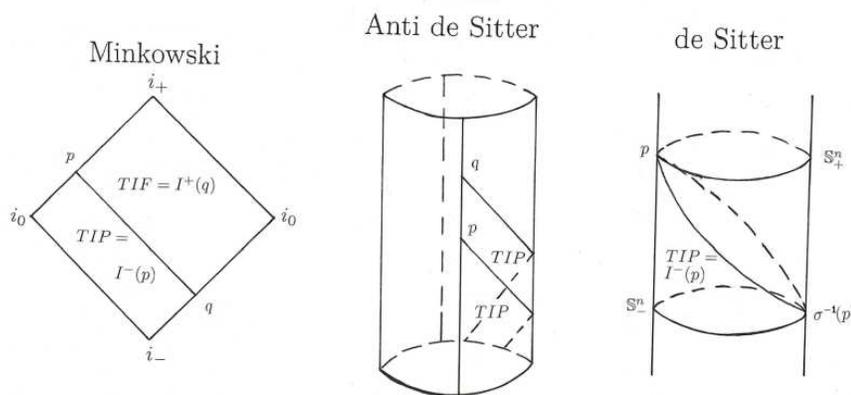
- 1) \mathcal{V} est ouvert
- 2) \mathcal{V} est un tel que $I^-(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$ (autrement dit il est un ensemble passé)
- 3) \mathcal{V} n'est pas l'union de deux sous-ensembles propres non vides qui vérifient 1) et 2).

Si \mathcal{V} est le passé strict d'un point de M on dit que \mathcal{V} est un *PIP* (*Proper Indecomposable Past set*), dans le cas contraire on dit que \mathcal{V} est un *TIP* (*Terminal Indecomposable Past set*).

De façon symétrique on peut définir les IFs, PIFs et TIFs. Un IF (*Indecompo-*

sable Future set) est un ensemble futur qui est ouvert et qui n'est pas union de deux ensembles futurs ouverts non vides propres. Un PIF (*Proper Indecomposable Future set*) est un IF qui est le futur strict d'un point de M , et un TIF (*Terminal Indecomposable Future set*) est un IF qui n'est le futur strict d'aucun point dans M .

L'idée est de considérer les TIPs et les TIFs comme points de la frontière causale. Par exemple si on considère les modèles conformes des espaces de Minkowski, de Sitter et anti-de Sitter, décrits à la section 2.7, on voit qu'il y a une relation stricte entre les TIPs et les TIFs de ces espaces et les points de la frontière conforme. En général à un point p de leur frontière conforme est associé naturellement un TIP ou un TIF de l'espace : le TIP ou TIF associé est l'intersection de l'espace avec le passé ou le futur strict, $I^\pm(p)$, du point p dans l'espace d'Einstein universel. Cependant il y a quelques exceptions : par exemple au point i_0 dans la frontière causale de l'espace de Minkowski n'est associé aucun TIP ou TIF. De plus la frontière conforme de l'espace anti-de Sitter contient des courbes de type temps ce qui implique qu'à chacun de ses point est associé un TIP et un TIF de l'espace. Par contre tout se passe bien pour l'espace de Sitter, où à chaque point de la frontière conforme est associé un seul TIP ou un seul TIF. Cela n'est pas un hasard, mais lié au fait que le plongement de l'espace de Sitter dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est le seul des trois plongements considérés à être un Cauchy-plongement. Dans la section suivante on verra plus en détail la relation entre la frontière causale qu'on va définir pour un espace-temps M et la frontière de l'image d'un Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps.



Il serait souhaitable de définir, pour tout espace-temps général M , une topologie et des relations de causalité sur sa frontière causale - c'est à dire l'ensemble de ces TIPs et TIFs - de façon compatible avec les relations de causalité et la topologie de M .

Ce problème n'a pas de solution élémentaire et a été l'objet de travaux récents

comme : [23] ou [17]. En fait dans le contexte général la construction de Penrose, Geroch et Kronheimer présente quelques inconvénients. Dans [13] il est prouvé que, sous les hypothèses plus restrictives du principe de causalité forte pour l'espace-temps M , il est possible de définir une frontière causale qui vérifie des bonnes propriétés. Par exemple si M est causalement continu on peut étendre les relations de causalité à la frontière causale de façon compatible avec celles sur M , et étendre à la frontière causale la topologie d'Alexandrov.

Comme on sera toujours sous l'hypothèse très forte de l'hyperbolicité globale, la construction de Penrose, Geroch et Kronheimer suffit à nos besoins.

On a alors la caractérisation suivante, due à Penrose, Geroch et Kronheimer, qui permet de voir les points de la frontière causale comme les points à l'infini, futur et passé, des courbes de type temps de M .

Lemme 1.2. *Un sous-ensemble W est un TIP (TIF) si et seulement si il existe une courbe causale inextensible future (passée) γ telle que $I^-(\gamma) = W$.*

Ce lemme, assez élémentaire, est prouvé dans [33], section 6.8.

Soit \hat{M} l'ensemble des IPs de M et \check{M} l'ensemble des IFs. On peut penser à \hat{M} comme à un complété partiel de M auquel on a ajouté, comme points idéaux, les extrémités futures des courbes causales inextensibles. Ce procédé ne dépend que de la structure causale de M . En fait, si on fixe une métrique dans la classe conforme définie sur M , de sorte que cette métrique ait des géodésique de type temps incomplètes dans le futur, alors les 'points idéaux' qu'on a rajoutés représentent les singularités et les points à l'infini, sans qu'on puisse distinguer les uns des autres.

On peut définir des relations de causalité sur les ensembles \hat{M} et \check{M} de façon à les rendre des espaces causaux au sens de [18], voir Définition 5.13. Soit $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \hat{M}$ alors

$$\mathcal{V} \prec \mathcal{W} \text{ si } \mathcal{V} \subset \mathcal{W} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{V} \ll \mathcal{W} \text{ si } \exists p \in \mathcal{W} \text{ tel que } \mathcal{V} \subset I^-(p) \quad (5.2)$$

Et des relation similaires peuvent être définies sur \check{M} : pour $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \check{M}$, on écrit $\mathcal{V} \prec \mathcal{W}$ si $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \ll \mathcal{W}$ s'il existe $p \in \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{W} \subset I^+(p)$.

Remarque 1.3. Les relations qu'on vient de définir contiennent les relations de causalité sur M lorsque \mathcal{V} et \mathcal{W} sont des PIPs (ou des PIFs). En fait il y a deux applications injectives naturellement définies

$$\begin{aligned} I^- : M &\longrightarrow \hat{M} \\ p &\longmapsto I^-(p) \\ I^+ : M &\longrightarrow \check{M} \\ p &\longmapsto I^+(p) \end{aligned}$$

Pour ce qui concerne les relations de chronologie on a $p < q$ si et seulement si $I^-(p) \ll I^-(q)$. De plus si $p \leq q$ alors $I^-(p) \prec I^-(q)$, mais d'après [17] Figure 2, la réciproque n'est pas toujours vraie : on peut avoir que $I^-(p) \prec I^-(q)$ sans que p et q soient causalement liés.

Il s'agit là d'un des problèmes qu'on rencontre lorsqu'on cherche la bonne définition de frontière causale pour des espace-temps assez généraux.

L'idée est de trouver une bonne façon d'identifier les IPs avec les IFs pour obtenir une variété à bord N , telle que M s'identifie à un ouvert dense de N et N est munie des relations de causalités qui prolongent celles de M . Le bord $N \setminus M$ de cette variété sera appelé frontière causale de M .

On considère l'espace

$$M^\# := (\hat{M} \sqcup \check{M}) / I^-(p) \sim I^+(p) \quad \forall p \in M \quad (5.3)$$

En d'autres termes $M^\#$ est l'union de M avec ses TIPs et TIFs. Cependant, comme montré par l'exemple de l'espace anti-de Sitter, il n'est pas suffisant d'identifier les PIPs avec les PIFs mais il faut aussi identifier quelques TIPs et TIFs si on veut pouvoir définir sur $M^\#$ une topologie qui soit Hausdorff et aussi compatible avec celle sur M . La façon dont Geroch, Kronheimer et Penrose ont procédé est de définir une topologie sur $M^\#$ qui prolonge dans un certain sens la topologie de M et ensuite d'identifier le nombre minimal de points pour rendre cette topologie Hausdorff.

On choisit comme pré-base pour la topologie sur $M^\#$ la famille d'ensemble de la forme suivante. Si \mathcal{A} est a IF alors on définit

$$\mathcal{A}^{int} := \{\mathcal{V} \in \hat{M}/\mathcal{V} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\} \quad (5.4)$$

$$\mathcal{A}^{ext} := \{\mathcal{V} \in \hat{M}/\mathcal{V} = I^-(\mathcal{W}) \Rightarrow I^+(\mathcal{W}) \not\subseteq \mathcal{A}\} \quad (5.5)$$

où \mathcal{W} est un sous-ensemble de M . Soit $\mathcal{B} \in \hat{M}$ un IP, alors on peut définir de façon similaire des ensembles \mathcal{B}^{int} et \mathcal{B}^{ext} . Les ouverts de $M^\#$ sont alors définis comme les unions des intersections finies des ensembles de la forme \mathcal{A}^{int} , \mathcal{A}^{ext} , \mathcal{B}^{int} , \mathcal{B}^{ext} . Cette définition est en analogie avec le fait que dans M les ensembles de la forme $I^+(p)$, $I^-(p)$, $M \setminus I^+(p)$ et $M \setminus I^-(p)$ forment une pré-base de la topologie d'Alexandrov.

Une fois définie cette topologie sur $M^\#$, qui en général n'est pas Hausdorff, le cas de l'espace anti-de Sitter en est un exemple, Penrose et Kronheimer la rendent Hausdorff suivant le procédé standard. C'est-à-dire on quotiente $M^\#$ par la relation d'équivalence qui est l'intersection de toutes les relations d'équivalence telles que la topologie quotient est Hausdorff. On obtient alors un complété qu'on note N . Le plongement $M \hookrightarrow M^\#$ donné par les application I^\pm , définies par la Remarque 1.3, définit alors un plongement $M \hookrightarrow N$. La frontière causale est alors définie comme $N \setminus M$. Portant dans le cas général cette définition de complété causale de M et

de frontière causale de M a été beaucoup contesté et revue même récemment, voir par exemple [17], [23], [50] et [49].

Si M est causalement continu (Définition 8.3) Budic et Sachs ont montré dans [13] que la topologie définie sur M^\sharp par la pré-base \mathcal{A}^{int} , \mathcal{A}^{ext} , \mathcal{B}^{int} , \mathcal{B}^{ext} est Hausdorff sans qu'il soit nécessaire d'identifier aucun point. Donc pour les espace-temps causalement continus on définit :

Définition 1.4. *La frontière causale d'un espace-temps causalement continu M est l'ensemble des TIPs et des TIFs de M c'est-à-dire $\mathcal{H}(M) := M^\sharp \setminus M$ muni de la topologie définie par la pré-base (5.4).*

Les relations de causalité définies dans (5.1) sur \hat{M} et \check{M} permettent de définir des relations de causalité sur M^\sharp . Il reste à voir si ces relations sont compatibles avec les relations de causalité sur M . D'après la Remarque 1.3 la relation de chronologie \ll , qui passe au quotient en une relation \ll sur M^\sharp , coïncide avec la relation $<$ sur M . Le problème est de voir sous quelles condition on a le même resultat pour la relation \prec .

On dit que M est *causalement simple* si le passé et le futur causal de tout point de M est fermé. Dans [13] les auteurs montrent le résultat suivant :

Proposition 1.5. *La relation de causalité \prec sur le complété M^\sharp restreinte à M coïncide avec celle de M , \leq , si et seulement si M est causalement simple.*

En particulier ces relations sont bien définies si M est globalement hyperbolique, car dans ce cas M est causalement simple d'après la Proposition 6.3. Budic et Sachs donnent une caractérisation des espace-temps globalement hyperboliques en fonction de leur frontière causale.

Proposition 1.6. *Un espace-temps est globalement hyperbolique si et seulement si tout point de sa frontière causale a le futur strict ou le passé strict vide.*

Remarque 1.7. Si M est globalement hyperbolique, d'après la Proposition 1.6 la frontière causale est l'ensemble des TIPs et des TIFs muni de la topologie d'Alexandrov donnée par les relations de causalité (5.1). Dans ce cas on note $\mathcal{H}^+(M)$ l'ensemble des TIPs, la *frontière causale future*, et $\mathcal{H}^-(M)$ l'ensemble des TIFs, la *frontière causale passée*. La frontière causale $\mathcal{H}(M)$ d'un espace-temps globalement hyperbolique est alors l'union disjointe des deux ensembles $\mathcal{H}^+(M)$ et $\mathcal{H}^-(M)$. Le complété causale M^\sharp de M est l'union disjointe de M , $\mathcal{H}^+(M)$ et $\mathcal{H}^-(M)$ muni de la topologie d'Alexandrov donnée par les relations de causalités définies par (5.1).

Exemple 1.8. La frontière causale de l'espace d'Einstein universel est réduite à deux points. En effet, $\widehat{Ein}_{1,n}$ est globalement hyperbolique et il découle du Lemme 2.18 que le futur et le passé de toute courbe inextensible est l'espace tout entier. Donc $\widehat{Ein}_{1,n}$ a un seul TIP et un seul TIF : l'espace entier.

2 Frontière causale et maximalité

Lemme 2.1. *Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement tel que $\partial^+ f(M) \neq \emptyset$. Alors pour tout $p \in \partial^+ f(M)$ l'ensemble $\mathcal{W}_p := f^{-1}(I^-(p) \cap f(M))$ est un TIP de M . De plus, si $q \in \partial^+ f(M)$, $q \neq p$ ssi $\mathcal{W}_p \neq \mathcal{W}_q$.*

Démonstration. Soit Σ une hypersurface de Cauchy de M et $S := f(\Sigma)$ son image. Si $p \in \partial^+ f(M)$, d'après le Lemme 2.5 on a $I^-(p) \cap I^+(S) \subset f(M)$, donc

$$I^-(f(\mathcal{W}_p)) = I^-(I^-(p) \cap f(M)) = I^-(I^-(p) \cap I^+(S)) = I^-(p) \quad (5.6)$$

D'après le Lemme 2.1 $f(M)$ est causalement convexe dans N , alors, par (5.6) on obtient que \mathcal{W}_p est un ensemble passé.

Le fait que \mathcal{W}_p est ouvert est évident.

Soient \mathcal{V} et \mathcal{U} deux ensembles passés dont l'union est \mathcal{W}_p . D'après (5.6) il s'en suit que $I^-(p) = I^-(f(\mathcal{U})) \cup I^-(f(\mathcal{V}))$ mais, comme $I^-(p)$ est un IP de N , on a $I^-(f(\mathcal{U})) = I^-(p)$ ou $I^-(f(\mathcal{V})) = I^-(p)$. Comme $f(M)$ est causalement convexe dans N on a $I^-(f(\mathcal{V})) \cap f(M) = f(\mathcal{V})$ et $I^-(f(\mathcal{U})) \cap f(M) = f(\mathcal{U})$. On obtient alors $f(\mathcal{V}) = I^-(p) \cap f(M)$ ou $f(\mathcal{U}) = I^-(p) \cap f(M)$, ce qui implique qu'on a $\mathcal{W}_p = \mathcal{V}$ ou $\mathcal{W}_p = \mathcal{U}$. Donc l'ensemble \mathcal{W}_p est un IP de M qui n'est le passé d'aucun point de M , il s'agit d'un TIP.

D'après la Proposition 8.9, si q est un point dans $\partial^+ f(M)$ tel que $q \neq p$, on a $I^-(p) \neq I^-(q)$. Les égalités (5.6) appliquée à p et q impliquent alors $I^-(p) \cap f(M) \neq I^-(q) \cap f(M)$, et donc $\mathcal{W}_p \neq \mathcal{W}_q$. Réciproquement si $p, q \in \partial^+ f(M)$ sont tels que $I^-(p) \cap f(M) \neq I^-(q) \cap f(M)$ on a $I^-(p) \neq I^-(q)$ et donc $q \neq p$. \square

Corollaire 2.2. *L'espace-temps $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est C-maximal, donc en particulier il est C_0 -maximal.*

Démonstration. Dans l'Exemple 1.8 on a vu que la frontière causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ ne contient que deux points.

Soit f un Cauchy-plongement non surjectif de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ dans un espace-temps N . On obtient que $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ ou $\partial^- f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ est non vide. D'après le Lemme 2.5, $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ et $\partial^- f(\widetilde{Ein}_{1,n})$, s'ils sont non vides, sont des ensemble achronaux edgeless. Ceci est impossible car ils contiennent au plus un point. \square

Proposition 2.3. *Soit M un espace-temps qui admet une hypersurface de Cauchy S non compacte. Alors, si pour tout TIP et TIF \mathcal{V} l'ensemble $S \cap \overline{\mathcal{V}}$ est non compact, M est C-maximal.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement. On suppose par l'absurde que $\partial f(M) \neq \emptyset$ dans N . Pour fixer les idées on suppose $\partial^+ f(M) \neq \emptyset$.

Soit p un point de $\partial^+ f(M)$. D'après le Lemme 2.1, l'ouvert \mathcal{W}_p de M , dont l'image par f est l'ouvert $I^-(p) \cap f(M)$, est un TIP de M . Par hypothèse l'ensemble $\overline{\mathcal{W}_p} \cap S$

est non compact. Son image par f est l'ensemble $J^-(p) \cap f(S)$, qui est donc non compact dans N . Or, comme N est un espace-temps globalement hyperbolique d'hypersurface de Cauchy $f(S)$, la Proposition 6.8 implique que $J^-(p) \cap f(S)$ est compact : absurde.

Le même raisonnement en utilisant l'hypothèse sur les TIFs montre aussi que $\partial^- f(M) = \emptyset$, donc M est maximal. \square

2.1 Frontière causale et maximalité du développement de Cauchy d'un ensemble achronal edgeless.

Soit A un sous-ensemble achronal edgeless d'un espace-temps M . Ici on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur l'espace-temps M , en particulier M n'est pas forcément globalement hyperbolique.

D'après la Proposition 6.7 l'ouvert $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ est globalement hyperbolique. Si on voit $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ comme un espace-temps on peut parler de sa frontière causale. Il y a une relation intime entre la frontière causale de $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ en tant qu'espace-temps et sa frontière en tant qu'ouvert de M . On reprend la notation introduite à la Définition 6.12.

Lemme 2.4. *On a naturellement défini un plongement*

$$\partial^\pm \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{H}^\pm(\text{int}(\mathcal{D}(A))).$$

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que pour la Proposition 2.1. En effet d'après le Lemme 6.13 la frontière $\partial^\pm \mathcal{D}(A)$ est un fermé achronal edgeless de M . Pour tout point p de $\partial^+ \mathcal{D}(A)$, $I^-(p) \cap I^+(A) \subset \text{int}(\mathcal{D}(A))$. Comme $I^-(p)$ est un IP de M et comme $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ est causalement convexe dans M on obtient que $I^-(p) \cap \text{int}(\mathcal{D}(A))$ est un TIP de $\text{int}(\mathcal{D}(A))$.

Un raisonnement symétrique montre que pour tout point q de $\partial^+ \mathcal{D}(A)$, $I^+(q) \cap \mathcal{D}(A)$ est un TIF de $\text{int}(\mathcal{D}(A))$.

On définit alors de façon naturelle l'application $p \in \partial^\pm \mathcal{D}(A) \mapsto I^\mp(p) \cap \text{int}(\mathcal{D}(A))$. Cette application est clairement injective car M est distinguant d'après la Proposition 8.9. De plus elle et sa réciproque (réciproque de la restriction à l'image) préservent les relations de causalité définies sur $\partial^\pm \mathcal{D}(A)$ et entre les éléments de $\mathcal{H}^\pm(\text{int}(\mathcal{D}(A)))$ par (5.1). Donc, comme la topologie des deux espaces coïncide avec la topologie d'Alexandrov (Proposition 1.5), on obtient que l'application $p \in \partial^\pm \mathcal{D}(A) \mapsto I^\mp(p) \cap \text{int}(\mathcal{D}(A))$ est un homéomorphisme sur l'image et que l'image est un ouvert de $\mathcal{H}^\pm(\mathcal{D}(A))$. \square

Proposition 2.5. *Si les plongements $\partial^\pm \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{H}^\pm(\text{int}(\mathcal{D}(A)))$ sont surjectifs, l'espace-temps $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ est C -maximal.*

Démonstration. D'après le Lemme 6.13 et le Lemme 6.9 pour tout point p dans $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ il existe un rayon géodésique lumière passé inextensible qui ne rencontre

pas $\text{int}(\mathcal{D}(A))$, en particulier il ne rencontre pas A .

Par ailleurs, comme $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ est achronal edgeless (Lemme 6.13) on obtient que $I^-(p) \cap I^+(A) \subset \text{int}(\mathcal{D}(A))$ et donc que toutes les courbes de type temps inextensibles issues de p rencontrent A . Il s'en suit que $J^-(p) \cap A$ est non compact pour tout p dans $\partial^+ \mathcal{D}(A)$.

Un raisonnement symétrique montre que pour tout point q de $\partial^- \mathcal{D}(A)$, $J^+(q) \cap A$ est non compact.

Or pour tout p de $\partial^+ \mathcal{D}(A)$ et q dans $\partial^- \mathcal{D}(A)$ on a $J^-(p) \cap A = \overline{I^-(p)} \cap A$ et $J^+(q) \cap A = \overline{I^+(q)} \cap A$. De plus $I^-(p) \cap \text{int}(\mathcal{D}(A))$ et $I^+(q) \cap \text{int}(\mathcal{D}(A))$ sont respectivement un TIP et un TIF de $\text{int}(\mathcal{D}(A))$. Par hypothèse tous les TIPs et les TIFs de $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ sont de cette forme, donc, d'après la Proposition 2.3 l'espace-temps $\text{int}(\mathcal{D}(A))$ est C -maximal. \square

3 C_0 -Maximalité des espace-temps à courbure constante

Dans la section 1.2 on a observé qu'il y a différentes notions de maximalité suivant la catégorie d'espace-temps qu'on considère. Si on se restreint aux espace-temps à courbure constante, on parle d'espace-temps $\mathbb{R}^{1,n}$ -maximaux, $d\mathbb{S}^{1,n}$ -maximaux ou $Ad\mathbb{S}^{1,n}$ -maximaux.

Ici on se propose de comprendre sous quelles conditions ces espace-temps, maximaux en tant qu'espaces à courbure constante, sont aussi C_0 -maximaux et même C -maximaux. Autrement dit, étant donné un espace-temps globalement hyperbolique (M, g) à courbure constante, $\mathbb{R}^{1,n}$ -maximal, $d\mathbb{S}^{1,n}$ -maximal ou $Ad\mathbb{S}^{1,n}$ -maximal, on se demande si dans la classe conforme de g il existe une métrique g' telle que (M, g) se plonge par un Cauchy-plongement non surjectif dans (M, g') . On se restreindra au cas des espace-temps qui ont une hypersurface de Cauchy compacte, autrement dit *Cauchy-compact*.

Le lemme suivant montre que la C -maximalité d'un espace-temps et celle de son revêtement universel sont fortement liées.

Lemme 3.1. *Un espace-temps M est C -maximal si son revêtement universel est C -maximal.*

Démonstration. On suppose que M n'est pas C -maximal. Il existe alors un Cauchy-plongement conforme f dans un espace-temps N . Or on peut relever f en un Cauchy-plongement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ qui est surjectif si et seulement si le plongement f l'était. \square

Il y a à ce jour beaucoup de travaux dédiés à la compréhension des espace-temps à courbure constante maximaux, voir par exemple [41], [48], [11], [3]. Un cas particulièrement étudié est celui des espace-temps globalement hyperboliques

maximaux à courbure constante qui ont une hypersurface de Cauchy compacte, qu'on appelle par abbréviation *CGHM* (*Cauchy-compact Globalement Hyperbolique Maximaux*). En s'appuyant sur les résultats de classification déjà connus, on étudiera dans les sections suivantes la C -maximalité et la C_0 -maximalité de ces espace-temps.

3.1 Espace-temps CGHM plats

Les espace-temps CGHM localement modélés sur l'espace de Minkowski ont été étudiés de façon approfondie dans [3] et [11]. Dans [3] il est prouvé que les espace-temps CGHM plats ont un revêtement universel isométrique, soit à l'espace de Minkowski tout entier, soit à un domaine régulier (voir Définition 6.26) de $\mathbb{R}^{1,n}$. Le résultat principal de [3] est :

Théorème 3.2. *Tout espace-temps GHMC plat est finiment revêtu par un espace-temps de translation, un espace de Misner, ou la suspension plate d'un espace-temps standard.*

Ici on ne va pas expliquer en détail ce qu'est un espace-temps de translation, un espace de Misner, ou la suspension plate d'un espace-temps standard. Pour notre objectif il nous suffit de rappeler comment sont faits leurs revêtement universels. Le revêtement universel d'un espace-temps de translation de dimension $n + 1$ est l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$, celui d'un espace de Misner est un domaine régulier de $\mathbb{R}^{1,n}$ qui est l'intersection du futur de deux hyperplans lumières. Le revêtement universel de la suspension plate d'un espace-temps standard est toujours un domaine régulier de $\mathbb{R}^{1,n}$, produit par l'espace euclidien \mathbb{R}^h d'un domaine régulier de $\mathbb{R}^{1,k}$, où $k + h = n$.

Frontière causale et C -maximalité de l'espace de Minkowski

On considère le modèle conforme de l'espace de Minkowski, noté $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ pour un certain $p = (x, t)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (Définition 2.37). L'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ est égal au développement de Cauchy du fermé achronal edgeless $(\mathbb{S}^n \times \{t - \pi\}) \setminus \{(x, t - \pi)\}$.

Lemme 3.3. *On a les identifications*

$$\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{1,n}) = \partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p)$$

$$\mathcal{H}^-(\mathbb{R}^{1,n}) = \partial^- \mathbb{R}^{1,n}(p)$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.4 on a l'inclusion $\partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p) \subset \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{1,n})$. Soit \mathcal{V} un TIP de $\mathbb{R}^{1,n}$. D'après le Lemme 1.2 il existe une courbe causale c futur inextensible dans $\mathbb{R}^{1,n}$ telle que $I^-(c) = \mathcal{V}$. Si on identifie $\mathbb{R}^{1,n}$ avec son modèle conforme $\mathbb{R}^{1,n}(p)$, la courbe c admet un point limite futur q dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Le point

q appartient à la frontière de $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et il appartient aussi au futur strict de l'ensemble $(\mathbb{S}^n \times \{t - \pi\}) \setminus \{(x, t - \pi)\}$. Donc q est un point de $\partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p)$. Comme $I^-(q) \cap \mathbb{R}^{1,n}(p) = I^-(c) \cap \mathbb{R}^{1,n}(p)$ le lemme est prouvé. \square

Proposition 3.4. *L'espace de Minkowski est C -maximal.*

Démonstration. Conséquence directe du Lemme 3.3 et de la Proposition 2.5. \square

On peut mieux comprendre les TIPs et les TIFs de l'espace de Minkowski.

Lemme 3.5. *Les TIPs (TIFs) de l'espace de Minkowski sont les passés (futurs) des hyperplans lumières avec en plus le TIP (TIF) constitué par l'espace de Minkowski tout entier.*

Démonstration. D'après le Lemme 3.3 les TIPs de $\mathbb{R}^{1,n}$, identifié au sous-ensemble $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, sont les intersections du passé strict des point de la frontière $\partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p)$ avec l'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(p)$. Or, d'après le Lemme 1.2 un TIP est le passé d'une courbe causale future inextensible. Soit donc q un point dans $\partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p)$.

Si $p = q$, il est clair que $I^-(p) \cap \mathbb{R}^{1,n}(p) = \mathbb{R}^{1,n}(p)$. Si $q \neq p$ soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ une géodésique lumière futur qui a son extrémité future en q . Le passé de α est l'union de tous les cônes passés tangents à α . Cette union remplit le demi-espace délimité par l'unique hyperplan lumière P qui contient α . Il s'agit du passé de P . \square

Remarque 3.6. D'après le Lemme 3.5 et le Lemme 1.2 le passé (futur) d'une courbe causale inextensible de $\mathbb{R}^{1,n}$ est soit l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ tout entier, soit le passé (futur) d'un hyperplan lumière. De plus pour tout point q de $\partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p)$ (resp. $\partial^+ \mathbb{R}^{1,n}(p)$), $p \neq q$, on obtient que l'ensemble $I^-(q) \cap \mathbb{R}^{1,n}(p)$ (resp. $I^+(q) \cap \mathbb{R}^{1,n}(p)$) vu comme ouvert de $\mathbb{R}^{1,n}$ est le passé (resp. futur) d'un hyperplan lumière.

Frontière causale et C -maximalité d'un domaine régulier de l'espace de Minkowski

Lemme 3.7. *La frontière d'un domaine régulier G est un fermé achronal edgeless.*

Démonstration. Soit G un domaine régulier futur (passé) complet. Il s'agit d'un sous-ensemble futur (passé) de $\mathbb{R}^{1,n}$. Le Lemme 4.15 implique alors que G est un fermé achronal edgeless. \square

D'après le Lemme 4.17 on a :

$$\mathbb{R}^{1,n} = I^+(\partial G) \sqcup \partial G \sqcup I^-(\partial G). \quad (5.7)$$

En particulier, si G est futur complet, on a $G = I^+(\partial G)$, et si G est passé complet, on a $G = I^-(\partial G)$.

Lemme 3.8. *Si G est futur complet $G = \mathcal{D}^+(\partial G)$ et $\mathcal{D}^-(\partial G) = \emptyset$. Si G est passé complet $G = \mathcal{D}^-(\partial G)$ et $\mathcal{D}^+(\partial G) = \emptyset$.*

Démonstration. On montre le résultat dans le cas où G est futur complet. Prouvons que $G = \mathcal{D}^+(\partial G)$. L'inclusion $\mathcal{D}^+(\partial G) \subset G$ découle directement des définitions et du fait que $G = I^+(\partial G)$.

Soit p un point de G et soit c une courbe causale inextensible dans le passé issue de p . D'après la définition d'ouvert régulier on peut trouver deux hyperplans lumière P_1 et P_2 tels que G est contenu dans l'intersection de leur futur strict. Quitte à translater l'origine on peut supposer que $P_1 \cap P_2$ contient l'origine. Soit v_1 et v_2 deux vecteurs de type lumière tel que $P_1 = v_1^\perp$ et $P_2 = v_2^\perp$. Alors, pour $i = 1, 2$ on a :

$$I^+(P_i) = \{v \in \mathbb{R}^{1,n} / Q_{1,n}(v, v_i) < 0\}$$

Soit $v_0 := v_1 + v_2$, il s'agit d'un vecteur de type temps, donc l'hyperplan $P_0 = v_0^\perp$ est de type espace. Par un calcul direct on voit que $I^+(P_1) \cap I^+(P_2) \subset I^+(P_0)$. On peut donc trouver un hyperplan de type espace P tel que $I^+(P_1) \cap I^+(P_2) \subset I^+(P)$ juste en translantant P_0 . Donc on obtient $\overline{G} \subset I^+(P)$

Comme les hyperplans de type espace sont des hypersurfaces de Cauchy de $\mathbb{R}^{1,n}$, la courbe c doit rencontrer P . D'après le Lemme 3.7 la frontière ∂G est un fermé achronal edgeless donc, d'après (5.7) c doit rencontrer ∂G .

Prouvons que $\mathcal{D}^-(\partial G)$ est vide.

Soit $q \in I^-(\partial G)$, on suppose par l'absurde que p appartient à $\mathcal{D}^-(\partial G)$. Alors pour tout point p dans $I^+(q) \cap I^-(\partial G)$, p appartient à $\text{int}(\mathcal{D}^-(\partial G))$.

Comme p est dans $\mathbb{R}^{1,n} \setminus \overline{G}$, par définition il existe un hyperplan lumière P tel que p n'appartient pas à $I^+(P)$. Soit l la direction lumière contenue dans P . Soit c la géodésique lumière futur inextensible parallèle à l issue de p : la courbe c ne rencontre pas l'ouvert G .

En même temps, comme p appartient à $\mathcal{D}^-(\partial G)$ la courbe c doit rencontrer ∂G . Comme c ne rencontre pas G on obtient qu'à partir du moment où c rencontre ∂G elle reste piégée dans ∂G .

D'après le Lemme 1.2, comme p appartient à $\text{int}(\mathcal{D}^-(\partial G))$ l'intersection $J^+(p) \cap \partial G$ est compacte. Cela est impossible car on a vu que $J^+(p) \cap \partial G$ contient une géodésique lumière inextensible dans le futur. Le résultat est prouvé. \square

Corollaire 3.9. *Soit G un domaine régulier futur (passé) complet. Alors pour tout point p de ∂G il existe un rayon géodésique lumière α inextensible dans le futur (passé) issu de p et contenu entièrement dans ∂G .*

Démonstration. Le résultat est une conséquence du Lemme 3.8 et de la Proposition 6.14. \square

Lemme 3.10. *Si G est futur complet on a l'identification $\mathcal{H}^-(G) = \partial G$. Si G est passé complet on a $\mathcal{H}^+(G) = \partial G$.*

Démonstration. On suppose par exemple que G soit futur complet, dans ce cas pour tout point p de ∂G , $I^+(p) \subset G$. Alors, comme $I^+(p)$ est un IF de $\mathbb{R}^{1,n}$ et comme p n'appartient pas à G , on obtient que $I^+(p)$ est un TIF de G . \square

Proposition 3.11. *Tout domaine régulier de l'espace de Minkowski est C -maximal.*

Démonstration. Soit G un domaine régulier futur complet. On identifie $\mathbb{R}^{1,n}$ avec le modèle conforme $\mathbb{R}^{1,n}(p)$, comme dans la section précédente.

D'après le Lemme 3.8 et la Proposition 6.7, l'ouvert G est globalement hyperbolique. Soit A une de ses hypersurfaces de Cauchy.

Le fait que G soit futur complet implique que $\mathcal{H}^+(G) \subset \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{1,n})$ donc, d'après le Lemme 3.3, $\mathcal{H}^+(G)$ s'identifie à un ouvert de $\partial^+\mathbb{R}^{1,n}(p)$.

D'après le Lemme 6.13 et le Lemme 6.9 pour tout point p dans $\partial^+\mathbb{R}^{1,n}(p)$ il existe un rayon géodésique lumière passé inextensible qui ne rencontre pas $\mathbb{R}^{1,n}(p)$ donc en particulier il ne rencontre pas G . Comme $\mathcal{H}^+(G) \subset \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{1,n})$ on obtient alors que, pour tout TIP \mathcal{V} de G , $\overline{\mathcal{V}} \cap A$ est non compact.

De même d'après le Lemme 3.9 et le Lemme 3.10 on obtient que pour tout TIF \mathcal{V} de G , $\overline{\mathcal{V}} \cap A$ est non compact.

Le résultat découle alors de la Proposition 2.5. \square

D'après le Théorème 3.2, le Lemme 3.1 et la Proposition 3.11 on obtient :

Proposition 3.12. *Tout espace-temps plat CGHM est C -maximal.* \square

3.2 Espace-temps CGHM Anti de Sitter

Le théorème suivant a été prouvé par Mess dans [41] en dimension 3 mais sa preuve se généralise à toute dimension.

Théorème 3.13. *Tout espace-temps CGHM localement modelé sur $AdS_{1,n}$ est isométrique au quotient d'un domaine régulier de l'espace anti-de Sitter par un sous-groupe discret sans torsion de $Isom(AdS_{1,n})$.*

On va donc définir les domaines réguliers de l'espace Anti de Sitter. On ne va pas donner la définition classique, celle par exemple donnée dans [21], mais on prouvera que les deux définitions sont équivalentes (voir Remarque 3.18).

On a vu à la Section 2.7 que l'espace $AdS_{1,n}$ est conformément équivalent à l'ouvert $(\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{S}^1, ds^2 - d\theta^2)$ de $Ein_{1,n}$, où \mathcal{H}_+^n est une hémisphère de la sphère \mathbb{S}^n . Le revêtement universel, $\widetilde{AdS}_{1,n}$, est alors conformément équivalent à l'ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ donné par $\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$ muni de la classe conforme de métriques induite.

Soit Λ un fermé achronal edgeless de $\widetilde{AdS}_{1,n} \simeq \mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, Λ n'est pas forcément un fermé de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. On note $\overline{\Lambda}$ son adhérence dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, et $\Lambda_0 = \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. On rappelle que la frontière conforme de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ s'identifie à l'espace d'Einstein universel d'une dimension inférieur, $\widetilde{Ein}_{1,n-1}$ (voir Définition 2.34).

L'espace-temps $(\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}, ds^2 - dt^2)$ est un espace-temps statique (Définition 7.1)

donc d'après la Proposition 7.3 l'ensemble Λ est le graphe d'une application 1-Lipschitz $f : \mathcal{H}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme f est 1-Lipschitz elle se prolonge de façon unique à la frontière de \mathcal{H}_+^n en une application 1-Lipschitz $\bar{f} : \overline{\mathcal{H}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}$ et le graphe de \bar{f} est égal à $\overline{\Lambda}$.

D'après la Proposition 2.22 l'ensemble $\overline{\Lambda}$ est un fermé achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Comme $\overline{\mathcal{H}_+^n}$ est compact on obtient que $\overline{\Lambda}$ et Λ_0 sont compacts, en particulier Λ_0 est une sphère topologique de dimension $n - 1$.

Lemme 3.14. *Le développement de Cauchy $\mathcal{D}(\Lambda)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est d'intérieur non vide si et seulement si Λ_0 ne contient pas deux points conjugués dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. On suppose que $\overline{\Lambda}$ contient deux point conjugués p, q avec $p = \sigma(q)$. On identifie $\widetilde{Ein}_{1,n}$ à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, donc si $q = (x, t)$ on a $p = (-x, t + \pi)$. On obtient alors que p, q appartiennent à Λ_0 .

Comme $\overline{\Lambda}$ est achronal on a $\overline{\Lambda} \cap I^-(p) = \emptyset$ et $\overline{\Lambda} \cap I^+(q) = \emptyset$. Donc $\overline{\Lambda}$ est contenue dans la frontière $\partial I^+(q) = \partial I^-(p)$. Il s'en suit que pour tout point q' dans Λ il existe une géodésique lumière α qui passe par q' et telle que dans Λ elle n'a ni point limite futur ni point limite passé. D'après le Lemme 6.9 les développements de Cauchy $\mathcal{D}^+(A)$ et $\mathcal{D}^-(A)$ sont vides.

On suppose maintenant que $\mathcal{D}(\Lambda)$ est d'intérieur vide. Cela implique que les développements $\mathcal{D}^+(A)$ et $\mathcal{D}^-(A)$ sont vides : en effet étant donné un point p dans $\mathcal{D}^\pm(A)$ l'ouvert $I^\mp(q') \cap I^\pm(\Lambda)$ est contenu dans $\mathcal{D}^\pm(A)$.

D'après le Lemme 6.9 pour tout point q de Λ il existe une géodésique lumière passée α et une géodésique lumière future β issues de q telles que α n'a pas de point limite passé dans Λ et β n'a pas de point limite futur dans Λ . Or, d'après la Proposition 5.10 et comme Λ est achronal, les géodésiques α et β sont contenues dans une même géodésique lumière γ inextensible dans $\widetilde{AdS}_{1,n} \simeq \mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$.

La géodésique γ a ses points limites futur et passé, q^+, q^- , dans Λ_0 . D'après la description des géodésiques lumières de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (Lemme 2.19 et Remarque 2.20), si les deux points $q^+ = (x^+, t^+)$, et $q^- = (x^-, t^-)$ sont liés par une géodésique lumière on doit avoir que $d(x^+, x^-) = |t^+ - t^-|$. De plus si $d(x^+, x^-) < \pi$ l'unique géodésique lumière entre q^+ et q^- est contenue dans $\partial \mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$. Comme γ est contenue dans Λ on obtient que $\pi = d(x^+, x^-) = |t^+ - t^-|$ et donc que q^+ et q^- sont conjugués. Le résultat est prouvé. \square

Définition 3.15. *Un domaine régulier Anti de Sitter est l'intérieur du développement de Cauchy d'un fermé achronal edgeless Λ de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ dont l'adhérence $\overline{\Lambda}$ ne contient pas deux points conjugués de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Lemme 3.16. *La projection de revêtement $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow Ein_{1,n}$ restreinte à $\mathcal{D}(\Lambda)$ est injective.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de l'achronalité de Λ . On fixe un point $p = (x_p, t_p)$ de Λ , alors pour tout autre point $q = (x_q, t_q)$ dans Λ on a

$\pi > d(x_q, x_p) \geq |t_p - t_q|$ car Λ est achronal. Il s'en suit que Λ est contenu dans $\mathbb{S}^n \times]t_p - \pi, t_p + \pi[$ qui est un domaine d'injectivité de la projection π . \square

On définit l'ensemble

$$E(\Lambda_0) := \widetilde{AdS}_{1,n} \setminus \bigcup_{p \in \Lambda_0} (J^+(p) \cup J^-(p))$$

Il s'agit de l'ensemble des points de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ qui ne sont causalement liés à aucun point de Λ_0 . On remarque que si Λ_0 contient deux points conjugués alors $E(\Lambda_0)$ est vide.

Lemme 3.17. *Soit Λ un fermé achronal edgeless de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ tel que Λ_0 ne contient pas deux points conjugués. Alors $\mathcal{D}(\Lambda) = E(\Lambda_0)$ et cet ensemble est un ouvert.*

Démonstration. D'après la définition de développement de Cauchy on a l'inclusion $\mathcal{D}(\Lambda) \subset E(\Lambda_0)$. Prouvons l'inclusion réciproque.

On remarque que

$$E(\Lambda_0) = \{(x, t) \in \mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R} : d(x, x_p) > |t - t_p| \forall p \in \Lambda_0\} \quad (5.8)$$

Pour tout point $p = (x_p, t_p)$ dans Λ_0 la coordonnée x_p appartient à $\partial\mathcal{H}_+^n$ qui est un compact de \mathbb{S}^n . Donc, étant donné un point $q = (x_q, t_q)$ dans $E(\Lambda_0)$, l'application $x_p \in \partial\mathcal{H}_+^n \mapsto d(x_p, x_q)$ admet un minimum m . L'ouvert

$$U_q := \{(x, t) \in \mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R} : m/2 > d(x, x_q) > |t - t_q|\}$$

est alors un voisinage ouvert de q contenu dans $E(\Lambda_0)$. L'ensemble $E(\Lambda_0)$ est donc un ouvert de $\mathcal{H}_+^n \times \mathbb{R}$.

D'après (5.8) si $q = (x_q, t_q)$ est dans $E(\Lambda_0)$ alors $\overline{E(\Lambda_0)}$ est un fermé du compact $\mathbb{S}^n \times [t_q - \pi, t_q + \pi]$, et est donc compact lui aussi.

Soit p un point de $E(\Lambda_0) \cap I^+(\Lambda)$. Étant donnée une courbe causale passée inextensible c de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ issue de \overline{p} , elle doit sortir de $\overline{E(\Lambda_0)}$. La courbe c doit donc rencontrer la frontière de $\overline{E(\Lambda_0)}$ en un point q' . Comme $E(\Lambda_0)$ est un ouvert sa frontière est contenue dans $\bigcup_{p \in \Lambda_0} (J^+(p) \cup J^-(p))$.

Par définition de $E(\Lambda_0)$ le point q' ne peut pas appartenir à Λ_0 . Si q' appartient à $(\bigcup_{p \in \Lambda_0} J^+(p)) \setminus \Lambda_0$, il existe une courbe causale passée entre q' et un point q'' de Λ_0 . D'après la Proposition 5.9 il existe alors une courbe causale entre p et q'' , mais cela contredit encore une fois le fait que p appartient à $E(\Lambda_0)$.

On obtient que q' appartient à $\bigcup_{p \in \Lambda_0} J^-(p) \setminus \Lambda_0$.

D'après le Lemme 4.17 l'espace $\widetilde{AdS}_{1,n}$ est union disjointe de Λ , $I^+(\Lambda)$ et $I^-(\Lambda)$. Comme Λ est contenu dans $E(\Lambda_0)$ l'ensemble $\bigcup_{p \in \Lambda_0} J^-(p) \setminus \Lambda_0$ est contenu dans $I^-(\Lambda)$. Donc la courbe c pour rencontrer $\bigcup_{p \in \Lambda_0} J^-(p) \setminus \Lambda_0$ doit avant rencontrer

Λ . On a prouvé que p appartient à $\mathcal{D}^+(\Lambda)$.

D'une façon similaire on prouve que tout point de $E(\Lambda_0) \cap I^-(\Lambda)$ appartient à $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Comme, d'après le Lemme 4.17 $E(\Lambda_0)$ est l'union disjointe de $E(\Lambda_0) \cap I^-(\Lambda)$, Λ , $E(\Lambda_0) \cap I^+(\Lambda)$, le résultat est prouvé. \square

Remarque 3.18. Souvent on donne une définition de domaine régulier Anti de Sitter différente de la Définition 3.15. Dans [21] par exemple on définit le domaine régulier associé au fermé achronal edgeless Λ_0 de $\partial \widetilde{AdS}_{1,n} \simeq \widetilde{Ein}_{1,n-1}$, comme étant l'intérieur de l'ensemble $E(\Lambda_0)$. Dans le Lemme 3.17 on a prouvé l'égalité $\mathcal{D}(\Lambda) = E(\Lambda_0)$ pour tout sous-ensemble achronal edgeless Λ de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ dont la frontière dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est Λ_0 . De plus dans [5] Proposition 2.4.9 il est montré que étant donné un fermé achronal edgeless Λ_0 de $\widetilde{Ein}_{1,n-1}$ il existe une famille de sous-ensembles fermés achronaux edgeless de $\widetilde{AdS}_{1,n}$ dont la frontière dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est Λ_0 . Donc les deux définitions sont équivalentes.

Proposition 3.19. *On a les identifications*

$$\partial^- \mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{H}^- \mathcal{D}(\Lambda) \quad \text{et} \quad \partial^+ \mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{H}^+ \mathcal{D}(\Lambda).$$

Démonstration. Le Lemme 2.4 donne les inclusions $\partial^\pm \mathcal{D}(\Lambda) \subset \mathcal{H}^\pm \mathcal{D}(\Lambda)$.

Soit maintenant c une courbe futur inextensible de $\mathcal{D}(\Lambda)$. Comme montré dans la preuve du Lemme 3.17, l'adhérence du développement de Cauchy $\overline{\mathcal{D}(\Lambda)}$ est compacte. Donc la courbe c a forcément un point limite futur q sur la frontière $\partial^+ \mathcal{D}(\Lambda)$. L'unique TIP associé à c , d'après le Lemme 1.2, est alors égal à l'intersection du passé strict du point q avec $\mathcal{D}(\Lambda)$. On a alors l'inclusion $\mathcal{H}^+ \mathcal{D}(\Lambda) \subset \partial^+ \mathcal{D}(\Lambda)$.

Le même raisonnement peut être fait à partir d'une courbe passée inextensible issue d'un point de $\mathcal{D}(\Lambda)$, on prouve ainsi l'inclusion $\mathcal{H}^- \mathcal{D}(\Lambda) \subset \partial^- \mathcal{D}(\Lambda)$. Le résultat est prouvé. \square

Proposition 3.20. *Tout domain régulier Anti-De Sitter est C-maximal.*

Démonstration. C'est une conséquence des Propositions 2.5 et 3.19. \square

Proposition 3.21. *Tout espace-temps CGHM localement modelé sur $AdS_{1,n}$ est C-maximal.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 3.13, de la Proposition 3.20 et du Lemme 3.1. \square

3.3 Espace-temps CGHM localement De Sitter

Théorème 3.22 (Scannell [48]). *Tout espace-temps CGHM localement modelé sur $dS_{1,n}$ est isométrique à un quotient d'un espace De Sitter standard par un sous-groupe d'isométries discret et sans torsion.*

On a déjà remarqué que l'espace-temps $d\mathbb{S}_{1,n}$ n'est pas C_0 -maximal, car il se plonge par un Cauchy-plongement dans l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. On va maintenant montrer que tout espace-temps CGHM localement modelé sur $d\mathbb{S}_{1,n}$, donc $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximal, n'est pas C_0 -maximal. Pour ce faire on construit une C_0 -extension maximale pour les espace-temps de Sitter standards.

On commence par étudier la frontière causale de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$. Comme notre discours ne concerne pas la métrique de l'espace $d\mathbb{S}_{1,n}$, mais seulement sa structure causale, dans la suite on identifie $d\mathbb{S}_{1,n}$ toujours à son modèle conforme $dS_{1,n}$. On rappelle que $dS_{1,n}$ est l'ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ donné par $\mathbb{S}^n \times]-\pi/2, \pi/2[$ avec la classe conforme de métriques induite, et que sa frontière est formée par deux copies de la sphère conforme $\mathbb{S}_-^n := \mathbb{S}^n \times \{-\pi/2\}$ et $\mathbb{S}_+^n := \mathbb{S}^n \times \{\pi/2\}$ qui sont aussi deux hypersurfaces de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Remarque 3.23. Comme \mathbb{S}_+^n et \mathbb{S}_-^n sont deux hypersurfaces de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on obtient que toute courbe causale inextensible de $dS_{1,n}$, si complétée avec ses deux points limites en $\widetilde{Ein}_{1,n}$, connecte un point de \mathbb{S}_-^n à un point de \mathbb{S}_+^n . Alors d'après le Lemme 1.2 la frontière causale de l'espace de Sitter s'identifie à sa frontière conforme, donc $\mathcal{H}^-(d\mathbb{S}_{1,n})$ et $\mathcal{H}^+(d\mathbb{S}_{1,n})$ s'identifient respectivement avec \mathbb{S}_-^n et \mathbb{S}_+^n .

En faisant agir le difféomorphisme conforme $\delta : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$, défini dans la section 2, on voit que l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'union disjointe d'un nombre infini de copies de $dS_{1,n}$ recollés les unes sur les autres par leurs frontières causales : les ouverts $\delta^k(dS_{1,n})$ pour $k \in \mathbb{N}$. Donc $O_0(1, n)$, le groupe des isométries de $d\mathbb{S}_{1,n}$, s'identifie au sous-groupe de $O_0(2, n+1)$ qui préserve $d\mathbb{S}_{1,n}$ et donc aussi tous ses itérés $\delta^k(d\mathbb{S}_{1,n})$. Comme on a vu à la section 2.7 l'action de $O_0(1, n)$ se prolonge en une action conforme sur les deux sphères \mathbb{S}_-^n et \mathbb{S}_+^n qui forment sa frontière causale. On obtient donc une action de $O_0(1, n)$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui préserve chaque ouvert $\delta^k(dS_{1,n})$ pour $k \in \mathbb{N}$, et qui préserve la structure conforme riemannienne sur sa frontière.

Maintenant on fixe une sphère à la frontière entre deux modèles conformes de l'espace de Sitter, et on l'appelle simplement \mathbb{S}^n . On appelle $dS_{1,n}^+$ et $dS_{1,n}^-$ les deux modèles conformes qu'elle sépare. Comme déjà observé, Remarque 5.4, ce sont respectivement les ouverts $\Omega_{\mathbb{S}^n}^+$ et $\Omega_{\mathbb{S}^n}^-$ défini par 2.1.

On va voir comment la construction des espaces de Sitter standards $\mathcal{B}_0^\pm(S)$ peut être adaptée pour associer à toute hypersurface S localement modelée sur la sphère conforme \mathbb{S}^n un unique espace-temps globalement hyperbolique conformément plat C -maximal dans lequel les espace-temps standards $\mathcal{B}_0^\pm(S)$ se plongent conformément.

C -extension maximale d'un espace-temps standard associé à un ouvert de \mathbb{S}^n .

Soit U un ouvert de \mathbb{S}^n . On considère Si $U = \mathbb{S}^n$ on a vu que $B_0^\pm(U) = dS_{1,n}$, on sait dans ce cas que son C -extension maximale est l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. On suppose donc $U \neq \mathbb{S}^n$. D'après la Remarque 5.8 les espaces $B_0^+(U)$ et $B_0^-(U)$ se plongent conformément dans le développement de Cauchy $\mathcal{D}(U)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Plus précisément $B_0^+(U)$ s'identifie à $\mathcal{D}^+(U)$ et $B_0^-(U)$ s'identifie à $\mathcal{D}^-(U)$. En particulier on obtient que les plongements $B_0^\pm(U) \hookrightarrow \mathcal{D}^\pm(U)$ sont des Cauchy-plongements.

Lemme 3.24. *On a les identifications*

$$\partial^- \mathcal{D}(U) = \mathcal{H}^- \mathcal{D}(U) \quad \text{et} \quad \partial^+ \mathcal{D}(U) = \mathcal{H}^+ \mathcal{D}(U).$$

Démonstration. La preuve est tout à fait similaire à celle de la Proposition 3.19 une fois remarqué que la condition $U \neq \mathbb{S}^n$ implique que $\overline{\mathcal{D}(U)}$ est un compact de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. \square

D'après la Proposition 2.5 on obtient alors :

Corollaire 3.25. *L'espace-temps $\mathcal{D}(U)$ est la C -extension maximale des espace-temps $B_0^+(U)$ et $B_0^-(U)$.*

Remarque 3.26. Comme dans le Lemme 3.17 on peut définir l'ensemble

$$E(\partial U) := \widetilde{Ein}_{1,n} \setminus \bigcup_{p \in \partial U} (J^+(p) \cap J^-(p))$$

et on peut montrer que $\mathcal{D}(U)$ est égal à la composante connexe de $E(\partial U)$ qui contient U .

Cas général : C -extension maximale de l'espace-temps standard $B_0^\pm(S)$

Dans la suite S est une variété localement modelée sur la sphère conforme \mathbb{S}^n , où $n \geq 2$. Dans la section 5 on a vu qu'à chaque variété S est possible d'associer deux espace-temps de Sitter standards de dimension $n + 1$, $\mathcal{B}_0^+(S)$ et $\mathcal{B}_0^-(S)$ respectivement futur et passé complets.

On suppose d'abord que S est simplement connexe. Soit $d : S \rightarrow \mathbb{S}^n$ son application développante.

Lemme 3.27. *Les frontières causales $\mathcal{H}^+(\mathcal{B}_0^+(S))$ et $\mathcal{H}^-(\mathcal{B}_0^-(S))$ s'identifient avec l'espace $\mathcal{B}(S) \setminus \mathcal{B}_0(S)$ des boules maximales de S .*

Démonstration. On prouve le résultat pour $\mathcal{B}_0^+(S)$, la preuve pour $\mathcal{B}_0^-(S)$ étant similaire.

D'après le Lemme 1.2 chaque TIP \mathcal{V} de l'espace $\mathcal{B}_0^+(S)$ est égal au passé strict d'une courbe causale future inextensible $c : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{B}_0^+(S)$. D'après la définition des relations de causalité (4.4) les éléments de $I^-(c)$ sont les boules propres contenues dans l'union $\bigcup_{t \in [0, \infty[} c(t)$. De plus comme c est une courbe causale future on obtient que si $t < t'$ les boules $c(t)$ et $c(t')$ vérifient $c(t) \subset c(t')$. Or, une union croissante de boules ouvertes est une boule ouverte, on note $B := \bigcup_{t \in [0, \infty[} c(t)$. Comme c est future inextensible dans $\mathcal{B}_0^+(S)$ on obtient que la boule B est une boule maximale de S .

Réciproquement étant donnée une boule maximale B de $\mathcal{B}_0^+(S)$, par définition $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, où B_n sont des boules propres de $\mathcal{B}_0^+(S)$ telles que $B_n \subset B_{n+1}$. D'après la définition des relations de causalité (4.4) on a $B_{n+1} \in I^+(B_n)$. Donc on peut construire une courbe causale future inextensible c telle que $I^-(c) = B$. Le résultat est prouvé. \square

Lemme 3.28. *S'il existe $B \in \mathcal{B}(S)$ telle que $d(B) = \mathbb{S}^n$ ou $d(B) = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ alors l'application $d : S \rightarrow \mathbb{S}^n$ est injective d'image \mathbb{S}^n ou $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$.*

Comme le cas où d est injective a déjà été traité dans la section précédente on suppose par la suite que pour toute boule ouverte maximale $B \in \mathcal{B}(S)$ on a $d(B) \neq \mathbb{S}^n$ ou $d(B) \neq \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$. Soient $D^+ : \mathcal{B}_0^+(S) \rightarrow dS_{1,n}^+$ et $D^- : \mathcal{B}_0^-(S) \rightarrow dS_{1,n}^-$ les deux applications développements définies à la Section 5.2 où on a identifié \mathbb{S}^n avec la sphère qui forme la frontière entre les ouverts $dS_{1,n}^+$ et $dS_{1,n}^-$.

On considère l'union disjointe

$$\mathfrak{B}(S) := \mathcal{B}_0^-(S) \sqcup S \sqcup \mathcal{B}_0^+(S)$$

On définit l'application

$$D : \mathfrak{B}(S) \longrightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} D^+(x) & x \in \mathcal{B}_0^+(S) \\ d(x) & x \in S \\ D^-(x) & x \in \mathcal{B}_0^-(S) \end{cases}$$

On a déjà défini des relations de causalité sur $\mathcal{B}_0^\pm(S)$. On va étendre ces relations de causalité à tout $\mathfrak{B}(S)$, en particulier on doit définir ces relations dans le cas où deux éléments de M n'appartiennent pas au même espace-temps $dS_{1,n}$ -standard $\mathcal{B}_0^+(S)$ ou $\mathcal{B}_0^-(S)$.

Définition 3.29. *Soient $B_1 \in \mathcal{B}_0^-(S)$ et $B_2 \in \mathcal{B}_0^+(S)$ on dit que :*

- $B_1 \ll B_2$ si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$
- $B_1 \prec B_2$ si $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \neq \emptyset$

Soit $p \in S$ et $B \in \mathcal{B}^+(S)$ on dit que :

- $p \ll B_2$ si $p \in B$
 - $p \prec B$ si $p \in \overline{B}$
- Soit $p \in S$ et $B \in \mathcal{B}^+(S)$ on dit que :
- $B_2 \ll p$ si $p \in B$
 - $B \prec p$ si $p \in \overline{B}$

Avec ces relations $\mathfrak{B}(S)$ est un espace causal, Définition 5.13. On peut donc définir une topologie d'Alexandrov sur $\mathfrak{B}(S)$. On a alors les résultats suivants dont on ne donne pas la preuve maintenant car elle sera donnée dans le chapitre 7 dans un contexte plus général.

Proposition 3.30. *L'application D est un homéomorphisme local. L'espace $\mathfrak{B}(S)$ muni de la topologie d'Alexandrov est une variété.*

L'application D induit alors une structure d'espace-temps conformément plat sur $\mathfrak{B}(S)$.

Proposition 3.31. *L'espace $\mathfrak{B}(S)$ est globalement hyperbolique C -maximal et S est une hypersurface de Cauchy S . Les espaces \mathcal{B}_0^\pm se plongent dans $\mathfrak{B}(S)$ par des Cauchy-plongements.*

Corollaire 3.32. *Les espace-temps standards $\mathcal{B}^\pm(S)$ ne sont pas C_0 -maximaux.*

Remarquons que comme les espaces de Sitter standards $\mathcal{B}_0^-(S)$ et $\mathcal{B}_0^+(S)$ sont $d\mathbb{S}_{1,n}$ -maximaux l'espace-temps $\mathfrak{B}(S)$ n'admet pas de métrique localement $d\mathbb{S}_{1,n}$.

Chapitre 6

Injectivité de l'application développante

Dans ce chapitre on va étudier l'application développante des espace-temps globalement hyperboliques conformément plats maximaux. On va trouver des conditions sous lesquelles elle est injective et on va en général en étudier l'image. Comme pour les résultats qu'on va présenter dans ce chapitre on a besoin de la C_0 -maximalité de \widetilde{M} , on va momentanément perdre en généralité en se restreignant au cas où M est simplement connexe. On verra au chapitre suivant que si un espace-temps conforme est C_0 -maximal, alors son revêtement universel est C_0 -maximal lui aussi, ce qui permettra d'étendre les résultats de ce chapitre au cas de tout espace-temps conformément plat globalement hyperbolique C_0 -maximal, pas nécessairement simplement connexe.

On dit que deux points d'un espace-temps sont *conjugués* s'il sont liés par deux segments de géodésiques lumière distants. Un des résultats principaux de ce chapitre est le suivant :

Corollaire 6.2.4. *Soit M espace-temps globalement hyperbolique simplement connexe conformément plat C_0 -maximal de dimension $n + 1 \geq 3$. Si M admet deux points conjugués alors M est conformément équivalent à $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Il en découle des informations sur l'image de l'application développante D même dans le cas où M n'admet pas de points conjugués. En particulier on va prouver que D restreinte au passé et au futur de tout point de M est injective. De manière plus précise, on va démontrer¹ :

Théorème 6.3.9. *Soit M un espace-temps simplement connexe globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal. Alors, si M n'est pas élémentaire, pour*

1. Un espace-temps conformément plat est dit *élémentaire* s'il est conformément équivalent à l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ ou à l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$, ou au futur (ou passé) d'un hyperplan lumière dans $\mathbb{R}^{1,n}$, cf. Définition 3.8.

tout point \mathcal{V} dans $\mathcal{H}^+(M)$ l'application D restreinte à \mathcal{V} est injective et \mathcal{V} est conformétement équivalent à un domaine régulier futur complet de $\mathbb{R}^{1,n}$.

1 Espace-temps simplement connexes maximaux

Dans cette section on va voir une application de l'unicité de l'extension C_0 -maximale. On va montrer que l'espace $Ein_{1,n}$ est la seule variété conformétement plate simplement connexe admettant des hypersurfaces de Cauchy compactes.

Lemme 1.1. *Soit un difféomorphisme local $f : (S, g) \rightarrow (S', g')$ entre deux variétés Riemanniennes. On suppose que (S, g) est complète et que f est tel que $g(\cdot, \cdot) \leq f^*g'(\cdot, \cdot)$. Alors f est un revêtement.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S'$ une courbe en S' . Comme f est un difféomorphisme local pour tout $x \in f^{-1}(\gamma(0))$ il existe un voisinage ouvert U de x en S où on peut relever γ en $\tilde{\gamma} : [0, a[\rightarrow U$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$. Soit $[0, T[$ intervalle maximal sur lequel on peut définir le relevé $\tilde{\gamma}$, on sait qu'il est ouvert car f est un difféomorphisme local. On va montrer qu'il est aussi fermé, le résultat suivra de la connexité de $[0, 1]$.

Soit $(t_n) \subset [0, T[$ une suite telle que $t_n \rightarrow T$, alors $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(T)$ en S' . Par hypothèse $g(\cdot, \cdot) \leq f^*g'(\cdot, \cdot)$ donc $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en S . Comme (S, g) est complet la suite $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a un limite l : par continuité de f on a $f(l) = \gamma(T)$. Donc on peut prolonger $\tilde{\gamma}$ en T en posant $\tilde{\gamma}(T) = l$, il s'en suit que $T = 1$. \square

Théorème 1.2. *Pour $n \geq 2$, $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est le seul espace-temps conformétement plat C_0 -maximal simplement connexe Cauchy-compact.*

Démonstration. Soit M une espace-temps conformétement plat C_0 -maximal Cauchy-compact et soit $\Sigma \subset M$ une de ses hypersurfaces de Cauchy de type espace (par hypothèse elle est compacte). D'après la Proposition 6.20 M est difféomorphe au produit $\Sigma \times \mathbb{R}$, donc on obtient que Σ est simplement connexe.

Soit $D : M \rightarrow Ein_{1,n}$ l'application développante qui définit la structure conformétement plate sur M . On considère la décomposition $Ein_{1,n} \simeq (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, [d\sigma^2 - dt^2])$, donnée par la Proposition 2.4. Le tiré en arrière de la métrique $d\sigma^2 - dt^2$ par D est une métrique lorentzienne sur M qui induit une métrique Riemannienne g_0 sur Σ . La métrique g_0 est complète car Σ est compacte.

Soit $\pi : Ein_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection sur le première facteur : c'est une fibration dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs de type temps ∂_t . On a que $\pi^*d\sigma = d\sigma \geq d\sigma - dt^2$, donc $d\pi$ dilate les longueurs. Comme $D|_{\Sigma}$ est

une isométrie locale on a que $d(\pi \circ D|_\Sigma)$ dilate les longueurs aussi. De façon plus explicite, pour tout X dans $T_x\Sigma \subset T_xM$ on a :

$$g_0(X, X) = g(d_xDX, d_xDX) = d\sigma(Y, Y) - |a|^2 \leq d\sigma(Y, Y)$$

où Y est la composante orthogonale à l'orbite de ∂t et a celle tangente.

D'après le Lemme 1.1 l'application $\pi \circ D|_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$ est un revêtement. Comme \mathbb{S}^n est simplement connexe, c'est un difféomorphisme. On obtient que $D(\Sigma)$ est une hypersurface plongée de type espace complète de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

D'après le Lemme 7.5, comme $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, d\sigma^2 - dt^2)$ est un espace-temps statique, $D(\Sigma)$ est achronale. L'image $D(\Sigma)$ est un compact de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, car il est difféomorphe au compact Σ . D'après la Proposition 6.21 on obtient alors que $D(\Sigma)$ est une hypersurface de Cauchy de $Ein_{1,n}$.

D'après la Proposition 2.12 et la Remarque 2.4 l'ensemble Ω_Σ (Définition 2.1) est un voisinage ouvert causalement convexe de Σ . Or, tout ouvert causalement convexe d'un espace-temps globalement hyperbolique est un espace-temps globalement hyperbolique. Soit c une courbe causale inextensible issue d'un point p de Ω_Σ , elle doit rencontrer Σ en un point q . Comme Ω_Σ est un voisinage de Σ , q appartient à Ω_Σ . Du fait que Ω_Σ est causalement convexe on déduit que le morceau de c compris entre p et q est contenu dans Ω_Σ . On obtient que Ω_Σ est un espace-temps globalement hyperbolique d'hypersurface de Cauchy Σ .

D'après le Lemme 4.3 l'application D est injective sur Ω_Σ qui est donc difféomorphe à un voisinage Ω de l'hypersurface de Cauchy $D(\Sigma)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

La partie unicité du Théorème 3.1 dit que toutes les extensions C_0 -maximales de $\Omega_\Sigma \simeq \Omega$ sont conformément équivalentes. Comme l'extension C_0 -maximale de Ω est $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et comme celle de Ω_Σ est M on obtient $M \simeq Ein_{1,n}$. \square

2 Injectivité de D

Dans cette section M est un espace-temps conformément plat de dimension $n + 1 \geq 3$. Soient $D : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ son application développante et $\rho : \pi_1(M) \rightarrow O_0(2, n + 1)$ son morphisme d'holonomie.

Remarque 2.1. L'application D est un difféomorphisme local qui définit la structure causale de \widetilde{M} . Il est donc clair que D envoie toute courbe causale de \widetilde{M} sur une courbe causale de \widetilde{Ein} . Comme \widetilde{Ein} vérifie le principe de causalité, il ne contient pas de courbe causale qui se recoupe : *on obtient que l'application D restreinte à toute courbe causale est injective.*

Voyons comment cette remarque est liée à la question de l'injectivité de l'application développante D . Si x est un point de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ d'après la Remarque 2.20 toutes les géodesiques lumières au départ de ce point se rencontrent en $\sigma^k(x)$

pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors si on a deux géodésiques lumières passées inextensibles distinctes $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{M}$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$, telles que les géodésiques lumières $D \circ \alpha$ et de $D \circ \beta$ s'intersectent en un point z différent de $D(p)$, une condition nécessaire pour que la restriction de D à $\alpha \cup \beta$ soit injective est que les courbes α et β s'intersectent elles aussi en un point $q \in D^{-1}(z)$. Inversement, si $D(\alpha) \cap D(\beta) = \emptyset$ la restriction de D à $\alpha \cup \beta$ est injective.

Définition 2.2. *On dit que deux point p, q de \widetilde{M} sont conjugués s'il vérifient :*

- *il existe deux géodésiques lumières distinctes α et β qui s'intersectent en p et q*
- *les courbes α et β n'ont pas d'autres points d'intersection entre p et q .*

On voit que cette définition de points conjugués coïncide sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ avec la Définition 2.8.

La Proposition 5.10 implique que la deuxième condition de la Définition 2.2 est vérifiée si les deux point p et q , liés par les géodésiques α et β , ne sont pas temporellement liés.

La terminologie de points conjugués est inspirée par analogie avec le cas riemannien. On va voir que, contrairement au cas riemannien, l'existence de points conjugués est une condition fortement restrictive pour un espace-temps conformément plat.

Théorème 2.3. *Soit M espace-temps globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal de dimension $n + 1 \geq 3$, et soit $D : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ son application développante. S'il existe une géodésique lumière α dont l'image par D contient deux points conjugués dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ alors D est un difféomorphisme et donc $\widetilde{M} \simeq \widetilde{Ein}$.*

Démonstration. Par hypothèse $D \circ \alpha$ contient deux points conjugués de \widetilde{Ein} qu'on note x et y , avec $x = \sigma(y)$. Comme D restreinte à α est injective il existe seulement deux points p et q de α tels que $D(p) = x$ et $D(q) = y$.

étape 1) : Toute géodésique lumière passée inextensible issue de p passe par q .

Soit

$$\mathcal{N}^-(p) := \{v \in T_p \widetilde{M} / v \text{ vecteur lumière passé} \}$$

Sur $\mathcal{N}^-(p)$ on a la relation d'équivalence $v \sim w$ si et seulement il existe λ dans \mathbb{R}^+ tel que $v = \lambda w$. On considère l'ensemble quotient

$$\mathcal{S}^-(p) := \mathcal{N}^-(p) / \sim$$

il s'agit de l'ensemble des rayons lumières passés de l'espace tangent $T_p \widetilde{M}$. On note $p_1 : \mathcal{N}^-(p) \rightarrow \mathcal{S}^-(p)$ la projection au quotient et on munit $\mathcal{S}^-(p)$ de la topologie quotient.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des éléments l de $\mathcal{S}^-(p)$ tels que la géodésique lumière passée inextensible issue de p tangente à l , qu'on note γ_l , contient q .

Par hypothèse \mathcal{E} est non vide car il contient la direction tangente à la géodésiques α . On va montrer que \mathcal{E} est ouvert et fermé dans $\mathcal{S}^-(p)$.

L'ensemble \mathcal{E} est ouvert.

Soit l_0 un élément de \mathcal{E} alors $D \circ \gamma_{l_0}$ contient y .

Soit V un voisinage ouvert de y et soit W la composante connexe de $D^{-1}(V)$ qui contient q . On peut choisir V de façon que $D|_W$ soit injective.

Comme D est continue et comme on a supposé γ_{l_0} passée inextensible, $D \circ \gamma_{l_0}$ doit rentrer dans $J^-(y) \setminus y$. Soit z un point de $D \circ \gamma_{l_0}$ qui appartient à $(J^-(y) \setminus y) \cap V$ et soit q_0 l'unique point de γ_{l_0} tel que $D(q_0) = z$.

Comme $J^+(y)$ est un fermé dans V on peut trouver un voisinage ouvert connexe V' de z tel que $V' \subset V$ et $V' \cap J^+(y) = \emptyset$. La composante connexe W' de $D^{-1}(V')$ contenue dans W est un voisinage ouvert de q_0 .

On fixe une métrique lorentzienne g dans la classe conforme de \widetilde{M} . On peut considérer alors l'application exponentielle par rapport à la métrique g . L'application $\exp_p : T_p \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ est continue, donc, comme W' est un ouvert, l'ensemble $\mathcal{W} := \exp_p^{-1}(W')$ est un ouvert de $T_p M$. On obtient alors que le sous-ensemble de $\mathcal{S}^-(p)$ définit par

$$\mathcal{U} := p_1(\mathcal{W} \cap \mathcal{N}^-(p)) = \{l \in \mathcal{S}^-(p) / \gamma_l \cap W' \neq \emptyset\}$$

est un ouvert non vide qui contient l_0 .

Soit l un élément de \mathcal{U} . La courbe γ_l rencontre W' , donc la courbe $D \circ \gamma_l$ rencontre V' . On obtient que $D \circ \gamma_l$ est une géodésique lumière passée issue de x qui rencontre des points de $J^-(y)$: d'après la description des géodésiques lumières de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (Remarque 2.20) la courbe $D \circ \gamma_l$ contient y . Comme $D|_W$ est injective on obtient que γ_l passe par q . On a montré que \mathcal{U} est un voisinage ouvert de l_0 contenu dans \mathcal{E} .

L'ensemble \mathcal{E} est fermé.

Soit $\{l_n\} \subset \mathcal{E}$ on suppose que l_n converge vers une limite $l \in \mathcal{S}^-(p)$. Alors d'après le Lemme 6.2 la suite $\{\gamma_{l_n}\}$ a une courbe limite causale passé c qui va de p à q . Le fait que x n'est pas temporellement relié à y implique que q n'est pas temporellement relié à p , car l'image par D d'une courbe de type temps est une courbe de type temps. D'après la Proposition 5.10 on obtient que c est forcément une géodésique lumière. Comme $l_n \rightarrow l \in \mathcal{S}^-(p)$ la géodésique c est rien d'autre que la géodésique γ_l .

étape 2) $\partial I^-(p)$ est une hypersurface de Cauchy compacte de \widetilde{M} .

Soit S l'union des géodésiques lumières entre p et q . Par construction $D(S) = \partial I^-(x)$. D'après la Proposition 5.10 on a l'inclusion $S \subset \partial I^-(p)$. De plus l'ensemble S est achronal dans M . En effet s'il existe une courbe temporelle passé γ qui relie deux points p' et q' de S , alors la courbe $D \circ \gamma$ est une courbe temporelle passé de \widetilde{Ein} qui relie les deux points $D(p')$ et $D(q')$ dans $D(S)$. Or

$D(S) = \partial J^-(x)$ qui est un ensemble achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Le fait que S est achronal implique $S \subset \partial I^-(p)$, donc $I^-(p) = S$.

Comme l'application D est injective le long de toute courbe causale et comme entre $D(p)$ et $D(q)$ les géodésiques lumières passées inextensibles issues de $D(p)$ ne se rencontrent pas, on obtient que la restriction de D à S est injective. Comme $D(S) = \partial I^-(D(p))$ est compacte on obtient alors que S est aussi compacte.

D'après le Lemme 4.15, comme $I^-(p)$ est un ensemble passé, sa frontière $\partial I^-(p) = S$ est un ensemble edgeless. Donc S est un sous-ensemble compact achronal edgeless de \widetilde{M} : d'après la Proposition 6.21 le sous-ensemble S est une hypersurface de Cauchy de \widetilde{M} .

étape 3) On a prouvé que \widetilde{M} possède une hypersurface de Cauchy compacte : le Théorème 1.2 implique alors que \widetilde{M} est conformétement équivalent à \widetilde{Ein} . Ceci achève la preuve du théorème. \square

Corollaire 2.4. *Soit M espace-temps globalement hyperbolique conformétement plat C_0 -maximal de dimension $n + 1 \geq 3$. Si \widetilde{M} admet deux points conjugués alors $\widetilde{M} \simeq \widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soient p, q deux points conjugués de \widetilde{M} . Leurs images par D sont tels que $D(q) = \sigma^k(D(p))$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. Soit α une géodésique lumière entre p et q , alors $D \circ \alpha$ est une géodésique lumière entre $D(p)$ et $D(q)$. La géodésique $D \circ \alpha$ passe alors forcément par le point $\sigma(D(p))$ ou le point $\sigma^{-1}(D(p))$, suivant que k est positive ou négative. Le théorème précédent implique alors que $\widetilde{M} \simeq \widetilde{Ein}_{1,n}$. \square

Le Théorème 2.3 implique le résultat suivant :

Théorème 2.5. *Soit M un espace-temps conformétement plat C_0 -maximal qui contient deux géodésiques lumières distinctes, librement homotopes et ayant les mêmes extrémités. Alors M est un quotient fini de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. La condition que les deux géodésiques soient homotopes à extrémités fixées implique que dans le revêtement universel de M on a deux points conjugués. D'après le Corollaire 2.4 \widetilde{M} est alors conformétement équivalent à l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. En particulier le relevé \tilde{S} de toute hypersurfaces de Cauchy S de M est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^n . Le groupe fondamental de M préserve \tilde{S} et il agit proprement et librement sur \tilde{S} car le quotient est S . Comme \tilde{S} est compacte, $\pi_1(M)$ est un groupe fini. \square

Remarque 2.6. D'après le Théorème 2.3 et la Remarque 2.1 si \widetilde{M} n'est pas conformétement équivalent à l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$, la restriction de l'application développante D à la frontière du passé et du futur causal de tout point de \widetilde{M} est injective.

Proposition 2.7. *Pour tout point p in \widetilde{M} l'application développante restreinte à $J^+(p) \cup J^-(p)$ est injective.*

Démonstration. On suppose que \widetilde{M} n'est pas conformément équivalente à \widetilde{Ein} , car dans ce cas le résultat est trivialement vérifié.

On va montrer que D restreinte à $J^-(p)$ est injective. De la même façon, en renversant l'orientation chronologique il est possible de montrer que D restreinte à $J^+(p)$ est injective. Une fois cela fait, pour montrer qu'alors D restreinte à $J^+(p) \cup J^-(p)$ est injective il suffit de remarquer que, comme $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est un espace-temps causal, deux points de \widetilde{M} causalement reliés ne peuvent pas avoir la même image par D .

Prouvons que le développement de Cauchy passé de $S := \partial J^-(p)$ est égal à $I^-(p)$. Soit Σ une hypersurface de Cauchy de \widetilde{M} dont le passé strict contient p , alors on a $J^-(p) \cap \Sigma = \emptyset$. En particulier $J^-(p)$ est contenu dans $I^-(\Sigma)$. Donc toute courbe causale future inextensible α issue d'un point de $I^-(p)$ doit rencontrer Σ . On obtient que α doit sortir de $J^-(p)$ donc α rencontre $\partial J^-(p)$. Le développement de Cauchy passé du S , l'ensemble $\mathcal{D}^-(S)$, est contient $I^-(p)$. Comme $I^-(S) = I^-(p)$ on obtient que $\mathcal{D}^-(S) = I^-(p)$.

D'après la Remarque 3.2 et la Proposition 2.10 l'ensemble Ω_S^- est un ouvert non vide. Comme on a supposé que \widetilde{M} n'est pas conformément équivalente à $\widetilde{Ein}_{1,n}$, d'après la Proposition 6.21 et le Théorème 1.2 l'hypersurface S est non compacte. Alors la Proposition 2.2 implique que $\Omega_S^- = \mathcal{D}^-(S) = I^-(p)$.

D'après la Proposition 2.6 chaque point q de $J^-(p)$ est caractérisé par son ombre future fermée sur S , l'ensemble $\overline{O}_S^+(q) = J^+(q) \cap S$.

Soit maintenant $q \in I^-(p)$. On sait que toute courbe causale future issue de q rencontre S . Comme D est un difféomorphisme local qui préserve la causalité, toute courbe causale inextensible α dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ issue de $D(q)$ contient l'image par D d'une courbe causale inextensible future issues de q , donc α rencontre $D(S)$. On obtient que $D(q)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}^-(D(S))$, ce qui implique

$$D(\overline{O}_S^+(q)) = \overline{O}_{D(S)}^+(D(q)) \quad (6.1)$$

Soient $p_1, p_2 \in J^-(p)$ tels que $p_1 \neq p_2$. D'après la Proposition 2.6 $\overline{O}_S^+(p_1) \neq \overline{O}_S^+(p_2)$. D'après la Remarque 2.6 l'application D restreinte à S est injective, donc $D(\overline{O}_S^+(p_1)) \neq D(\overline{O}_S^+(p_2))$. D'après (6.1) on obtient $\overline{O}_{D(S)}^+(D(p_1)) \neq \overline{O}_{D(S)}^+(D(p_2))$ et donc $D(p_1) \neq D(p_2)$. \square

Corollaire 2.8. *Pour tout point p de \widetilde{M} l'image de $I^-(p)$ par D est un ouvert causalement convexe globalement hyperbolique de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soient x, y deux points de $D(I^-(p))$ et soit $c : [0, \infty[\rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une courbe causale future inextensible telle que $c(0) = x$ et $c(1) = y$. Une telle courbe rencontre $D(\partial I^-(p)) \subset \partial I^-(D(p))$ en un unique point z .

Soit $p' \in I^+(p)$, alors $J^-(p) \subset I^-(p')$ et $D|_{I^-(p')}$ est injective. On suppose que $(D|_{I^-(p')})^{-1} \circ c$ a image non connexe et contient au moins deux courbes causales futures inextensibles $\alpha : [0, a[\rightarrow \widetilde{M}$ et $\beta :]b, b' \rightarrow \widetilde{M}$ telles que $\alpha(0) = (D|_{I^-(p')})^{-1}(x)$ et $\beta(1) = (D|_{I^-(p')})^{-1}(y)$ avec $a < b$.

Ces courbes doivent rencontrer $\partial I^-(p)$. Il est donc clair que $D \circ \alpha : [0, a[\rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ doit rencontrer $D(\partial I^-(p))$ en z , mais par hypothèse l'image $D \circ \alpha([0, a[$ ne contient pas y , car $D|_{I^-(p')}$ est injective et par hypothèse α ne passe pas par $(D|_{I^-(p')})^{-1}(y)$. Comme $D \circ \alpha([0, a[$ est contenue dans c cela est absurde.

On vient de prouver que $D(I^-(p))$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Ce fait plus le fait que $I^-(p)$ est un ouvert globalement hyperbolique de \widetilde{M} impliquent que $D(I^-(p))$ est globalement hyperbolique. \square

Proposition 2.9. *Soient $p, q \in M$ tels que $I^-(p) \cap I^-(q) \neq \emptyset$ alors D restreinte à $I^-(p) \cup I^-(q)$ est injective.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est tout à fait similaire à celle du Lemme 5.14, où le rôle de B_1 et B_2 est joué cette fois par p et q . \square

Corollaire 2.10. *L'application développante restreinte à tout ouvert de la forme*

$$\mathcal{U}(p) := \bigcup_{q^- \in I^-(p)} \bigcup_{q^+ \in I^+(p)} (I^-(q^+) \cap I^+(q^-))$$

est injective.

On appelle $\mathcal{U}(p)$ *domaine d'injectivité canonique de p .*

3 Extension de D à la frontière causale de \widetilde{M}

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique de dimension $n+1 \geq 3$. On suppose M simplement connexe et on note $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ son application développante.

Dans le chapitre 5 on a défini la frontière causale d'un espace-temps lorsqu'il est causalement continu (Définition 1.4). Comme M est globalement hyperbolique, d'après le Corollaire 8.6, il est causalement continu, on peut définir sa frontière causale, notée $\mathcal{H}(M)$.

Comme M est globalement hyperbolique, d'après la Remarque 1.7 sa frontière causale est l'union disjointe de l'ensemble des TIPs $\mathcal{H}^+(M)$ et des TIFs $\mathcal{H}^-(M)$. Il s'en suit que le complété causal M^\sharp de M est l'union disjointe de M , $\mathcal{H}^+(M)$ et $\mathcal{H}^-(M)$.

La Proposition 1.5 implique que les relations de causalité définies par la formule (5.1) induisent des relations de causalité sur M^\sharp qui prolongent celles de M . Donc

la topologie d'Alexandrov associé de ces relations est une topologie sur M^\sharp qui prolonge la topologie de M .

Dans cette section on va voir comment prolonger l'application développante D à l'espace M^\sharp de façon continue.

D'après le Lemme 1.2 pour chaque TIP \mathcal{V}^- (pour chaque TIF \mathcal{V}^+) il existe une courbe causale future (passée) inextensible c telle que $\mathcal{V}^- = I^-(c)$ ($\mathcal{V}^+ = I^+(c)$). On peut donc voir $\mathcal{H}^+(M)$ (et $\mathcal{H}^-(M)$) aussi comme l'ensemble des courbes causales inextensibles futures (passées) identifiées par la relation "avoir le même passé (futur)".

Proposition 3.1. *L'application D restreinte à tout TIP et TIF de M est injective et son image est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. On le prouve pour les TIPs, l'autre cas est similaire.

Soit \mathcal{V} un TIP de \widetilde{M} . D'après le Lemme 1.2 il existe une courbe de type temps future inextensible $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{M}$ telle que $I^-(\alpha) = \mathcal{V}$. Alors \mathcal{V} est l'union croissante des ouverts de la forme $I^-(\alpha(t))$, avec $t \in \mathbb{R}$. Donc pour tout couple de points $p, q \in \mathcal{V}$ il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que p et q appartiennent à $I^-(\alpha(t))$. D'après la Proposition 2.7 D restreinte à $I^-(\alpha(t))$ est injective, donc p et q ne peuvent pas avoir la même image par D .

L'image de $D|_{\mathcal{V}}$ est causalement convexe car d'après le Corollaire 2.8 l'image de $I^-(\alpha(t))$ est causalement convexe pour tout t dans \mathbb{R} . \square

On rappelle qu'on note \hat{M} l'ensemble des IPs de M et \check{M} l'ensemble des IFs.

Lemme 3.2. *L'application D définit deux applications*

$$\hat{D} : \hat{M} \rightarrow \{ \text{IPs de } \widetilde{Ein}_{1,n} \}$$

$$\check{D} : \check{M} \rightarrow \{ \text{IFs de } \widetilde{Ein}_{1,n} \}$$

De plus si M n'est pas conformétement équivalente à $\widetilde{Ein}_{1,n}$ pour tout IP (IF) \mathcal{V} de M $\hat{D}(\mathcal{V})$ est un PIP ($\check{D}(\mathcal{V})$ est un PIF) de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Démonstration. Soit \mathcal{V} un IP de M . On définit $\hat{D}(\mathcal{V}) := I^-(D(\mathcal{V}))$.

Si $\mathcal{V} = I^-(p)$ pour un certain p dans \widetilde{M} alors $I^-(D(\mathcal{V})) = I^-(D(p))$, il est donc clair qu'il s'agit d'un IP de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. On suppose donc que \mathcal{V} est un TIP de M .

Soit γ une courbe future inextensible telle que $I^-(\gamma) = \mathcal{V}$. Si la courbe $D \circ \gamma$ est une courbe causale future inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ alors on $I^-(D \circ \gamma) = \widetilde{Ein}_{1,n}$. Donc étant donné un point p de $D \circ \gamma$ il existe un point q de $D \circ \gamma$ dans le futur causal de p tel que $\sigma(p)$ appartient à $I^-(q)$. Soit α la géodésique lumière entre p et $\sigma(p)$, et c une courbe causale entre $\sigma(p)$ et q , la courbe $\beta := \alpha \cup c$ est une courbe causale entre p et q . Comme $D(\mathcal{V})$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ la courbe causale β est contenue dans $D(\mathcal{V})$ et donc en particulier α est contenue dans $D(\mathcal{V})$.

D'après le Théorème 2.3 on a $M \simeq \widetilde{Ein}_{1,n}$ et D est un difféomorphisme, donc le lemme est trivialement vrai dans ce cas.

On suppose donc que $D \circ \gamma$ admet un point limite futur p dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Il faut prouver que $I^-(D(\mathcal{V})) = I^-(p)$. On a $\mathcal{V} = I^-(\gamma) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} I^-(\gamma(t))$ et

$$\begin{aligned} I^-(D(\mathcal{V})) &= I^-(D(I^-(\gamma))) = I^-(D(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} I^-(\gamma(t)))) = \\ &I^-(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} D(I^-(\gamma(t)))) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} I^-(D \circ \gamma(t)) = I^-(D \circ \gamma) \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité est vraie car D est un difféomorphisme local et pour tout voisinage U d'un point q d'un espace-temps on a $I^-(p) = I^-(I_U^-(p))$. Par définition de point limite futur et comme, d'après le Corollaire 8.6, $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est causalement continu, on a $I^-(D \circ \gamma) = I^-(p)$.

Pour définir l'application \check{D} il suffit de faire le même raisonnement après avoir renversé l'orientation chronologique de M . \square

On peut maintenant prolonger l'application développante à la frontière causale de M . En effet les deux applications \hat{D} et \check{D} définies au Lemme 3.2 coïncident sur M lorsqu'on l'identifie à un ouvert respectivement de \hat{M} et de \check{M} . De plus l'ensemble des PIPs et des PIFs de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est en bijection avec l'espace-temps $\widetilde{Ein}_{1,n}$ par les applications I^\pm définies par la Remarque 1.3. On obtient que les applications \hat{D} et \check{D} passent au quotient en une application $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$. Plus explicitement, comme $M^\sharp = M \sqcup \mathcal{H}^+(M) \sqcup \mathcal{H}^-(M)$, l'application D^\sharp est définie de la façon suivante. Soit $p \in M^\sharp$ alors

$$D^\sharp(p) := \begin{cases} D(p) & \text{si } p \in M \\ (I^+)^{-1} \circ \hat{D}(p) & \text{si } p \in \mathcal{H}^+(M) \\ (I^-)^{-1} \circ \check{D}(p) & \text{si } p \in \mathcal{H}^-(M) \end{cases}$$

On remarque que si $M \simeq \widetilde{Ein}_{1,n}$, d'après l'Exemple 1.8, sa frontière causale est composée de seulement deux points : D^\sharp dans ce cas envoie l'unique point de la frontière causale future (passée) de M sur l'unique point de la frontière causale future (passée) de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

D'après la définition des relations de causalité sur M^\sharp , données par (5.1), pour tout couple d'éléments \mathcal{V}, \mathcal{W} de M^\sharp on a :

$$\mathcal{V} \prec \mathcal{W} \iff D^\sharp(\mathcal{V}) \leq D^\sharp(\mathcal{W}) \quad (6.2)$$

$$\mathcal{V} \ll \mathcal{W} \iff D^\sharp(\mathcal{V}) < D^\sharp(\mathcal{W}). \quad (6.3)$$

Comme sur les deux variété M^\sharp et $\widetilde{Ein}_{1,n}$, la topologie qu'on considère est la topologie d'Alexandrov, il s'en suit que l'application $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est continue.

TIPs et TIFs maximaux

Soit M un espace-temps globalement hyperbolique.

Sur les frontières causales de M et en général sur les variétés à bord \hat{M} et \check{M} on a défini au chapitre 5 des relations de causalité par les formules (5.1).

Sur les variétés \hat{M} et \check{M} on a aussi la relation d'ordre donnée par l'inclusion : elle coïncide avec la relation de causalité \prec sur \hat{M} et avec l'opposé de \prec sur \check{M} . Or la relation d'inclusion naturellement définie entre les IPs et les IFs est inductive. En effet soit $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une chaîne de IPs par rapport à la relation d'inclusion, on a $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_{i+1}$ pour tout i dans \mathbb{N} . On va vérifier que l'union croissante $\mathcal{W} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ est un IP de M .

Comme \mathcal{W} est union croissante d'ouverts il est ouvert. De plus pour tout $p \in I^-(\mathcal{W})$ il existe un $q \in \mathcal{V}_i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$ tel que $p \in I^-(q)$. Comme \mathcal{V}_i est un ensemble passé on a $p \in \mathcal{V}_i$ et donc $p \in \mathcal{W}$. On suppose que \mathcal{W} est union de deux ouverts passés U et V alors pour tout entier i l'ouvert \mathcal{V}_i est union des ouverts $U \cap \mathcal{V}_i$ et $V \cap \mathcal{V}_i$. Comme \mathcal{V}_i est un IP les ouverts $U \cap \mathcal{V}_i$ et $V \cap \mathcal{V}_i$ sont contenus l'un dans l'autre. Il s'en suit que les ouverts $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (U \cap \mathcal{V}_i)$ et $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (V \cap \mathcal{V}_i)$ sont contenus l'un dans l'autre.

On a obtenu donc que \mathcal{W} est un IP qui majore tous les éléments de la chaîne. D'après le lemme de Zorn il existe au moins un élément maximal \mathcal{U} dans \hat{M} . Il est clair que \mathcal{U} doit forcément être un TIP de M . Dans le cas contraire, si $\mathcal{U} = I^-(p)$ pour un certain p dans M , alors pour tout point q dans $I^+(p)$ l'ouvert $I^-(q)$ est un majorant de \mathcal{U} .

Un raisonnement analogue prouve que \check{M} possède aussi des éléments maximaux pour la relation d'inclusion et que ces éléments sont des TIFs. On les appelle *TIPs* et les *TIFs maximaux* de M .

D'après les formules (5.1) on voit qu'un TIP maximal a son futur causal vide au même titre qu'un TIF maximal a son passé causal vide.

On suppose que \tilde{M} admet un unique TIP \mathcal{V} (ou TIF) maximal alors par définition M coïncide avec ce TIP ou TIF, d'après la Proposition 3.1 D est injective.

Exemple 3.3. Voici des exemples d'espace-temps globalement hyperboliques conformément plats C_0 -maximaux admettant un unique TIP ou un unique TIF maximal :

- L'espace de Minkowski : il a un unique TIP maximal et un unique TIF maximal, qui sont respectivement le passé et le futur de toute droite verticale.
- Les domaines réguliers de l'espace de Minkowski : ceux parmi eux qui sont futur-complets ont un unique TIP maximal, ceux qui sont passé-complets ont un unique TIF maximal.
- L'espace d'Einstein a un unique TIP et un unique TIF, qui sont respective-

ment le passé et le futur de toute courbe causale inextensible.

Remarque 3.4. On remarque qu'à l'opposé des exemples précédents tous les TIFs et tous les TIPs de l'espace de Sitter sont maximaux. Pour voir cela il suffit d'identifier la frontière causale de $d\mathbb{S}_{1,n}$ avec la frontière conforme (Définition 2.30) laquelle est une hypersurface de type espace de $\widetilde{Ein}_{1,n}$: aucun TIP de $d\mathbb{S}_{1,n}$ n'est causalement relié à un autre TIP et il en est de même pour les TIFs.

Remarque 3.5. Soit G un ouvert régulier futur complet de $\mathbb{R}^{1,n}$. On a vu que G a un unique TIP maximal. On va prouver que, sauf dans le cas où G est le futur strict d'un point, il a plus d'un TIF maximal, en particulier G n'a pas de TIF maximal isolé.

En effet soit p un point dans ∂G . D'après le Lemme 6.11 si c est une géodésique lumière passée inextensible issue de p , l'intersection $c \cap \partial G$ est un segment compact $[p, q]$. D'après la Proposition 5.10, comme ∂G est un sous-ensemble achronal (Lemme 3.7), toute géodésique lumière passée γ issue de q est contenue dans $I^-(\partial G)$.

Si tout point q' de ∂G est causalement relié à q , c'est à dire s'il existe un segment $[q, q']$ de géodésique lumière futur entre q et q' alors $G = I^+(q)$. En effet d'après le Lemme 6.9 il existe une géodésique lumière inextensible future c' issue de q' contenue dans ∂G . Or d'après la Proposition 5.10, comme ∂G est achronal, la géodésique c' doit être le prolongement du segment $[q, q']$.

On a prouvé que si G n'est pas le futur d'un point, il existe un point z dans ∂G qui n'est pas causalement relié à q . En changeant éventuellement le point z , avec un procédé similaire à celui utilisé pour définir le point q , on peut supposer que $J^-(z) \setminus \{z\}$ est contenu dans $I^-(\partial G)$.

Les deux TIFs de G définis par $I^+(q)$ et $I^+(z)$ sont alors deux TIF maximaux de G .

On rappelle la définition de domaine de Minkowski associé à un point x de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ donnée à la section 2.7 : il s'agit de l'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(x) := I^-(x) \cap I^+(\delta^{-1}(x))$ de l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Dans la section 2.7 on a vu qu'un tel ouvert est l'image d'un plongement conforme "canonique" de l'espace de Minkowski dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Proposition 3.6. *Soit M un espace-temps simplement connexe globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal non conformément équivalent à $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Alors pour tout point p dans M la restriction de D à $I^-(p)$ (resp. $I^+(p)$) est injective et son image est un domaine régulier de $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$ (resp. $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(D(p)))$) futur (resp. passé) complet.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.7 l'application développante D est injective sur le passé $I^-(p)$. De plus d'après le Théorème 2.3, comme par hypothèse M n'est pas conformément équivalente à $\widetilde{Ein}_{1,n}$, l'image de $I^-(p)$ par D est contenue dans le domaine de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$.

On note S la frontière de $D(I^-(p))$ dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. On va montrer que S est non vide.

On suppose par l'absurde que la frontière S est vide, donc $D(I^-(p)) = \mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. Soit q un point dans $I^+(p)$. Alors d'après la Proposition 2.7 l'application D est injective sur le passé $I^-(q)$ et on a $I^-(p) \subset I^-(q)$. Il s'en suit que $D(I^-(p)) \subset D(I^-(q))$. Étant donné un point x dans $I^-(D(q)) \cap I^+(D(p))$ le point $\delta^{-1}(x)$ est contenu dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$ et donc dans $D(I^-(q))$. Comme l'ouvert $D(I^-(q))$ est causalement convexe, toutes les géodésiques lumières qui lient x à $\delta^{-1}(x)$ sont contenues dans $D(I^-(q))$. D'après le Théorème 2.3 on obtient $M \simeq \widehat{Ein}_{1,n}$ contrairement aux hypothèses, donc S est non vide.

Le fermé S est l'image par D^\sharp de l'ouvert $\mathcal{H}^-(I^-(p))$ de $\mathcal{H}^-(M)$ défini comme étant l'ensemble des TIFs de M non disjoints de $I^-(p)$. D'après la Proposition 1.6 la frontière $\mathcal{H}^-(M)$ est achronal. Il s'en suit que, d'après (6.2), S est un sous-ensemble achronal de $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. On obtient que S est un fermé achronal edgeless de $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$.

On suppose que le développement de Cauchy de S dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$ est vide. D'après le Remarque 6.15 on obtient que S est un hyperplan lumière de $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. Or, pour tout point q dans $J^+(p) \setminus I^+(p)$, la restriction de D au passé $I^-(q)$ est injective, et $D(I^-(p)) \subset D(I^-(q))$. Soit x un point dans $I^-(D(q)) \cap I^+(\partial I^-(D(p)))$: le point $\delta^{-1}(x)$ est dans $D(I^-(p))$ et est donc contenu dans $D(I^-(q))$. Comme l'ouvert $D(I^-(q))$ est causalement convexe, toutes les géodésiques lumières qui lient x à $\delta^{-1}(x)$ sont contenues dans $D(I^-(q))$. D'après le Théorème 2.3 on obtient $M \simeq \widehat{Ein}_{1,n}$ contrairement aux hypothèses, donc le développement de Cauchy de S est non vide.

On va montrer que le développement de Cauchy passé de S est vide.

On suppose par l'absurde que $\mathcal{D}^-(S)$ est non vide. On définit la variété

$$\mathcal{M} = M \sqcup \mathcal{D}(S) / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence qui identifie les points de $I^-(p)$ avec leurs image par D . Soit $\pi : M \sqcup \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{M}$ la projection canonique au quotient.

Comme $D(I^-(p)) \subset \mathcal{D}(S)$, tout couple de points de \mathcal{M} est contenu dans l'image de $\mathcal{D}(S)$ par π , donc \mathcal{M} est Hausdorff. De plus la structure d'espace-temps conformément plat de $\mathcal{D}(S)$ passe au quotient en une structure sur \mathcal{M} .

Soit Σ une hypersurface de Cauchy de M , et soit $\pi(\Sigma)$ son image dans \mathcal{M} . Comme toute courbe causale future inextensible dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$ issue d'un point x dans $\mathcal{D}^-(S)$ rencontre S , toute courbe causale inextensible de \mathcal{M} issue du point $\pi(x)$ rentre dans $\pi(M)$, donc rencontre $\pi(\Sigma)$. Cela montre que $\pi(\Sigma)$ est une hypersurface de Cauchy de \mathcal{M} . Il en découle que \mathcal{M} est une extension conformément plate non triviale de M : ceci est absurde puisque par hypothèse M est C_0 -maximal.

D'après le Théorème 3.2 on obtient que le développement de Cauchy de S est un ouvert régulier G de $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. Or un ouvert régulier de $\mathbb{R}^{1,n}$ est soit passé complet, soit futur complet : comme $\mathcal{D}^-(\partial G) = \mathcal{D}^-(S)$ est vide on obtient que G

est futur complet. Les ouverts G et $D(I^-(p))$ sont d'intersection non vide et ont la même frontière S : on obtient que G est égal à $D(I^-(p))$. \square

Proposition 3.7. *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal. On suppose que $\mathcal{H}^+(M)$ contient plus d'un TIP maximal. Alors pour tout TIP maximal \mathcal{V} et tout voisinage U de \mathcal{V} dans $\mathcal{H}^+(M)$ il existe un TIP maximal \mathcal{W} contenu dans U et différent de \mathcal{V} .*

Démonstration. Par hypothèse, M n'est pas conformétement équivalent à l'espace d'Einstein ou de Minkowski, car ces deux espaces ont un seul TIP maximal.

On suppose qu'il existe un voisinage U de \mathcal{V} dans $\mathcal{H}^+(M)$ qui ne contient pas d'autres TIP maximaux. Soit \mathcal{V}' un autre TIP maximal. On suppose d'abord que $\mathcal{V}' \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Soit p un point de cette intersection. D'après la Proposition 3.6 l'image par D de $I^+(p)$ est un domaine régulier passé complet G du domaine de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. Soit maintenant $x \in (\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}') \cap I^+(p)$. D'après la Proposition 3.6 l'image par D de $I^+(x)$ est un domaine régulier passé complet G' du domaine de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}(D(x))$. Par hypothèse le domaine G contient les deux TIPs maximaux \mathcal{V} et \mathcal{V}' . Il ne peut donc pas être le passé d'un point.

On suppose par l'absurde que G' est le passé d'un point w dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(x))$. Dans ce cas la frontière de G' est l'union des géodésiques lumières futures issue de w inextensibles dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(x))$. Soit c une de ces géodésiques, on a l'inclusion $\partial G' \subset \partial G$, donc c est contenue dans ∂G . Soit r le point limite futur de C dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$. Comme ∂G est un fermé de $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$ on a $r \in \partial G$. D'après le Lemme 6.9 il existe un rayon géodésique lumière futur inextensible α issu de r contenu dans ∂G . Or, la Proposition 5.10 implique, comme ∂G achronal, que la géodésique α est le prolongement de la géodésique c . On a donc prouvé que le cône futur de w dans $\mathbb{R}^{1,n}(D(p))$ est contenu dans ∂G , ce qui implique $I^+(w) = G$, contrairement aux hypothèses. Donc G' contient au moins deux TIPs maximaux.

Les ensembles $\{\mathcal{W} \in \mathcal{H}^+(M) / I^+(y) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset\}$ quand y varie dans $I^+(p)$ forment une base de voisinages pour \mathcal{V} dans $\mathcal{H}^+(M)$. Or cela contredit le fait que le voisinage U de \mathcal{V} dans $\mathcal{H}^+(M)$ ne contient pas d'autres TIPs maximaux. On obtient donc que l'intersection $\mathcal{V}' \cap \mathcal{V}$ est vide.

Soit \mathcal{U} l'union de tous les TIPs maximaux de M différents de \mathcal{V} . Comme M est l'union de ses TIPs maximaux on obtient que M est l'union disjointe des ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} . Par connexité de M on obtient alors que $\mathcal{U} = \emptyset$, donc \mathcal{V} est l'unique TIP maximal de M . \square

Définition 3.8. On dit qu'un espace-temps conformétement plat est *élémentaire* s'il est conformétement équivalent à l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ ou à l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$, ou au futur (ou passé) d'un hyperplan lumière dans $\mathbb{R}^{1,n}$.

Théorème 3.9. *Soit M un espace-temps simplement connexe globalement hyperbolique conformétement plat C_0 -maximal. Alors, si M n'est pas élémentaire, pour*

tout point \mathcal{V} dans $\mathcal{H}^+(M)$ l'application D restreinte à \mathcal{V} est injective et \mathcal{V} est conformément équivalent à un domaine régulier futur complet de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Démonstration. D'après la Proposition 2.7 l'application développante D est injective sur le TIP \mathcal{V} . De plus d'après le Théorème 2.3, comme par hypothèse M n'est pas conformément équivalent à $\widetilde{Ein}_{1,n}$, l'image de \mathcal{V} par D est contenue dans le domaine de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$.

On considère l'ouvert de la frontière passée $\mathcal{H}^-(\mathcal{V})$ formés des TIFs de M non disjoints de \mathcal{V} , autrement dit par les TIPs qui sont dans le passé chronologique de \mathcal{V} . D'après la Proposition 1.6, $D^\sharp(\mathcal{V})$ est un sous-ensemble achronal edgeless de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

On note S la frontière de $D(\mathcal{V})$ dans $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$.

étape 1) : On suppose que S est vide.

Dans ce cas $D(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$. Comme, d'après (6.2), D^\sharp est continue et préserve les relations de causalité l'image de $\mathcal{H}^-(\mathcal{V})$ par D^\sharp est la partie de la frontière de $D(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui est dans le passé strict de $D^\sharp(\mathcal{V})$. Il s'agit de l'ensemble $\partial I^+(\delta^{-1}(D^\sharp(\mathcal{V}))) \setminus \{\sigma^{-1}(D^\sharp(\mathcal{V}))\}$.

On voit alors que l'ouvert $\mathcal{H}^-(\mathcal{V})$ de $\mathcal{H}^-(M)$ contient un seul TIF maximal : le TIF \mathcal{W} dont l'image est le point $\delta^{-1}(D^\sharp(\mathcal{V}))$.

D'après la Proposition 3.7 D est injective et $M = \mathcal{W}$. Comme d'après les hypothèses l'image de \mathcal{V} par D est contenue dans $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$, on obtient $D(M) = D(\mathcal{W}) = \mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$. Donc M est conformément équivalent à l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$.

étape 2) : On suppose que S est non vide. Le fermé S est contenu dans l'image de $\mathcal{H}^-(\mathcal{V})$ par D^\sharp , qui est un sous-ensemble achronal edgeless de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. On obtient que S est un fermé achronal edgeless de $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$.

On suppose d'abord que le développement de Cauchy de S est non vide. Avec la méthode déjà utilisée dans la preuve de la Proposition 3.6 on prouve que la maximalité de M implique $\mathcal{D}^-(S) = \emptyset$. D'après le Théorème 3.2 le développement de Cauchy de S est un ouvert régulier G de $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$. Comme $\mathcal{D}^-(S)$ est vide, G est futur complet. Les ouverts G et $D(\mathcal{V})$ sont d'intersection non vide et ils ont la même frontière : il s'en suit que $G = D(\mathcal{V})$. Donc \mathcal{V} est conformément équivalent à un domaine régulier futur complet de $\mathbb{R}^{1,n}$.

étape 3) : On suppose que le développement de Cauchy de S est vide. D'après le Remarque 6.15 S est un hyperplan lumière de $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$.

D'après le Lemme 3.5 tout hyperplan lumière de $\mathbb{R}^{1,n}(D^\sharp(\mathcal{V}))$ est la frontière du passé strict d'un point x dans $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{1,n}) \simeq \partial I^-(D^\sharp(\mathcal{V}))$ et du futur strict d'un point y dans $\mathcal{H}^-(\mathbb{R}^{1,n}) \simeq \partial I^+(\delta^{-1}(D^\sharp(\mathcal{V})))$, avec $x = \sigma(y)$.

On obtient que l'image de $\mathcal{H}^-(\mathcal{V})$ par D^\sharp est l'ensemble $\partial I^+(y) \setminus \{y\}$. Il s'en suit que y est un TIF isolé pour l'ouvert $D(\mathcal{V})$.

On note \mathcal{W} le TIF de M qui est envoyé par D^\sharp sur y . On obtient que \mathcal{W} est un TIF isolé de M . D'après la Proposition 3.7, D est injective, et $M = \mathcal{W}$.

L'image de M par D est alors contenue dans $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(y))$. On peut alors appliquer le raisonnement utilisé aux étapes 2) et 3) au TIF \mathcal{W} pour montrer que $D(\mathcal{W})$ est soit l'ouvert $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(y))$ tout entier, soit le passé de l'hyperplan lumière $\partial I^-(x)$. En particulier $D(\mathcal{W})$ ne peut pas être un domaine régulier passé complet de $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(y))$ car il contient dans son adhérence toutes les géodésiques lumières entre x et y qui sont des droites lumière dans $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(y))$. Il ne peut donc pas être égal à l'intersection du passé strict d'au moins deux hyperplans lumière. On obtient dans ce cas que M est conformétement équivalent au passé d'un hyperplan lumière dans $\mathbb{R}^{1,n}$ ou à l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ tout entier. \square

Proposition 3.10. *Soit M un espace-temps simplement connexe globalement hyperbolique conformétement plat C_0 -maximal qui n'est pas conformétement équivalent à l'espace $\tilde{E}in_{1,n}$. Si pour tout $p, q \in M$ on a que $I^+(p) \cap I^+(q) \neq \emptyset$ (resp. $I^-(p) \cap I^-(q) \neq \emptyset$) alors M est conformétement équivalent à un domaine régulier de Minkowski futur (resp. passé) complet, à $\mathbb{R}^{1,n}$ tout entier, ou au futur d'un hyperplan lumière de $\mathbb{R}^{1,n}$.*

Démonstration. On va prouver que M possède un unique TIP maximal. On suppose par l'absurde que M a plus d'un TIP maximal. Soit \mathcal{V} un TIP maximal de M et soit z un point de \mathcal{V} . Comme on suppose que M a au moins deux TIPs maximaux, d'après la Proposition 3.6 on obtient que l'image de $I^+(z)$ par D est un domaine régulier passé complet G du domaine de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(D(z)))$.

On va montrer dans un ouvert régulier passé complet il n'est pas possible qu'on ait $I^+(p) \cap I^+(q) \neq \emptyset$ pour tout couple (p, q) .

En effet soit S la frontière de Ω dans $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(D(z)))$. D'après le Lemme 3.7 la frontière ∂G dans $\mathbb{R}^{1,n}(\delta(D(z)))$ est un fermé achronal edgeless. Donc pour tout point x de ∂G on a $I^+(x) \cap \overline{G} = \emptyset$. On se donne un autre point y dans ∂G non causalement relié à x . Il existe un voisinage U de x et de y tel que $I^+(x) \cap I^+(y) \cap U = \emptyset$. Comme l'espace de Minkowski est causalement continu (Corollaire 8.6), pour deux points x' et y' de $G \cap U$ assez proches respectivement de x et de y on obtient que $I^+(x') \cap I^+(y') \cap U = \emptyset$ et donc $I^+(x') \cap I^+(y') \cap G = \emptyset$. Cela contredit les hypothèses sur M , qui a donc un unique TIP maximal.

D'après la Proposition 3.9 M est conformétement équivalent à l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ ou à un domaine régulier futur complet de $\mathbb{R}^{1,n}$ ou au futur d'un hyperplan lumière de $\mathbb{R}^{1,n}$. \square

Chapitre 7

C_0 -extension maximale : une construction abstraite

Dans ce chapitre on présente une autre preuve de l'existence et unicité. Cette preuve, contrairement à celle donnée au Chapitre 3, est constructive.

L'idée est d'utiliser le théorie des ombres, exposée au Chapitre 4, qui permet d'identifier un espace-temps M , possédant une hypersurface de Cauchy non compacte S , avec un sous-ensemble des compacts de S bien choisi. Ce sous-ensemble est ce qu'on va appeler l'espace $\mathcal{B}(S)$.

D'après le Théorème 1.2 le seul espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-compact conformément plat C_0 -maximal est l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Pour cette raison on va considérer d'abord le cas où M , et donc S , est simplement connexe et non Cauchy-compacte. Pour généraliser cette construction au cas où M n'est pas simplement connexe il faudra comprendre l'action du groupe fondamental de M sur l'espace $\mathcal{B}(\tilde{S})$ ainsi construit, où \tilde{S} est un relevé de S .

Pour définir l'espace $\mathcal{B}(S)$, à la rigueur, on n'a même pas besoin d'un espace-temps M . Tout ce dont on a besoin est une variété riemannienne S de dimension n et une immersion conforme $d : S \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$. À partir de la on va construire l'espace-temps $\mathcal{B}(S)$ en partant du cas où S est simplement connexe.

On souligne en particulier que, comme l'extension maximale $\mathcal{B}(S)$ est déterminée seulement par la structure induite sur l'hypersurface de Cauchy par la structure causale de M , l'espace-temps $\mathcal{B}(S)$ est naturellement unique à difféomorphismes conformes près.

Le fait d'avoir une preuve constructive de l'existence et unicité de l'extension maximal permet d'avoir plus d'informations sur la structure causale de cette dernière.

Le résultat plus remarquable qu'on va obtenir dans cette direction est le suivant :

Corollaire 7.2.8. *Tout espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal est C -maximal.*

En prouvant ce résultat on va prouver aussi la réciproque du Lemme 3.1 :

Corollaire 7.2.7. *Le revêtement universel de tout espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal est C_0 -maximal.*

1 L'espace $\mathcal{B}(S)$

Dans cette section S est une variété orientable simplement connexe non compacte de dimension n munie d'une métrique riemannienne conformément plate. On suppose qu'il existe une immersion conforme

$$d : S \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}.$$

On fixe une décomposition $\widetilde{Ein}_{1,n} \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ donnée par la Proposition 2.4 et on note $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection sur le premier facteur. Alors $\pi \circ d$ est un difféomorphisme local conforme pour la métrique canonique de \mathbb{S}^n .

Définition 1.1. Soit $\mathcal{K}(S)$ l'ensemble des compacts de S . On définit deux sous-ensembles $\mathcal{B}^+(S)$ et $\mathcal{B}^-(S)$ de $\mathcal{K}(S)$ de la façon suivante :

L'ensemble $\mathcal{B}^+(S)$ est l'ensemble des $B \in \mathcal{K}(S)$ pour lesquels il existe un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ tel qu'il existe un ouvert U de S qui vérifie :

- a) $d|_U$ est injective
- b) $B \subset U$
- c) $d(U)$ est un ensemble acausal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$
- d) $p \in \mathcal{D}^+(d(U))$ et $d(B) = \overline{O}_{d(U)}^-(p)$.

De la même façon on définit l'ensemble $\mathcal{B}^-(S)$ des $B \in \mathcal{K}(S)$ pour lesquels il existe un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ tel qu'il existe un ouvert U de S qui vérifie a), b), c) et d') $p \in \mathcal{D}^-(d(U))$ et $d(B) = \overline{O}_{d(U)}^+(p)$.

Comme d est une immersion conforme, l'image de S par d est un ensemble localement acausal, c'est-à-dire que pour tout point x de S il existe un voisinage ouvert U de x dans S tel que $d|_U$ est injective et $d(U)$ est acausal. Donc $\mathcal{B}^+(S)$ et $\mathcal{B}^-(S)$ sont non vide car ils contiennent les compacts de S formés d'un seul point. On appelle Σ cet ensemble :

$$\Sigma := \{\{x\} / x \in S\} \subset \mathcal{B}^\pm(S).$$

On note

$$\phi : S \rightarrow \Sigma$$

l'application qui à chaque point $x \in S$ associe le compact $\{x\}$, il s'agit d'une bijection.

Lemme 1.2. *Étant donné un élément B de $\mathcal{B}^+(S)$ (resp. in $\mathcal{B}^-(S)$) il existe un unique point p dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui vérifie les conditions a), b), c), d) de la Définition 1.1*

Démonstration. On montre le résultat pour $\mathcal{B}^+(S)$. Soit B un élément de $\mathcal{B}^+(S)$ et soient p_1 et p_2 deux points de \widetilde{Ein} tels qu'ils existent deux ouverts U_1 et U_2 de S qui vérifient les conditions a), b), c) et d) par rapport à B . Alors $B \subset (U_1 \cap U_2)$ et d restreinte à $(U_1 \cap U_2)$ est injective. De plus pour $i = 1, 2$, p_i appartient au développement de Cauchy futur $\mathcal{D}^+(d(U_i))$, et $d(B) = \overline{O}_{d(U_i)}^+(p_i)$. On obtient que $p_1, p_2 \in \mathcal{D}^+(d(U_1 \cap U_2))$ et $d(B) = \overline{O}_{d(U_1 \cap U_2)}^-(p_1) = \overline{O}_{d(U_1 \cap U_2)}^-(p_2)$. D'après la Proposition 2.7 on a alors $p_1 = p_2$. \square

On considère l'ensemble $\mathcal{B}^+(S) \sqcup \mathcal{B}^-(S)$ et on note $i^+ : \mathcal{B}^+(S) \hookrightarrow \mathcal{B}^+(S) \sqcup \mathcal{B}^-(S)$ et $i^- : \mathcal{B}^-(S) \hookrightarrow \mathcal{B}^+(S) \sqcup \mathcal{B}^-(S)$ les deux inclusions. On définit alors l'ensemble

$$\mathcal{B}(S) := (\mathcal{B}^+(S) \sqcup \mathcal{B}^-(S)) / \sim \quad (7.1)$$

où la relation \sim consiste à identifier $i^+(\Sigma)$ et $i^-(\Sigma)$.

Soit $p : \mathcal{B}^+(S) \sqcup \mathcal{B}^-(S) \rightarrow \mathcal{B}(S)$ la projection canonique au quotient. On appelle j^+ et j^- les deux applications injectives $j^+ = p \circ i^+$ et $j^- = p \circ i^-$. Dorénavant on identifiera $\mathcal{B}^+(S)$, $\mathcal{B}^-(S)$ et Σ avec leurs images $j^+(\mathcal{B}^+(S))$, $j^-(\mathcal{B}^-(S))$ et $j^+(\Sigma) = j^-(\Sigma)$ dans $\mathcal{B}(S)$.

Remarque 1.3. Il peut arriver qu'il existe $B \in \mathcal{B}^+(S)$ et $B' \in \mathcal{B}^-(S)$ tels que $B = B'$ en tant que compacts de S . Cela est par exemple le cas de éléments de Σ . Mais ça peut arriver même si B et B' ne sont pas réduits à un seul point. Un exemple où cela se vérifie est quand $S \simeq \mathbb{S}^n$ et $d(S)$ est le lieu des couples $(p, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ telles que $t = \text{cost}$ et la décomposition $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ est telle que sur elle la classe conforme de métriques de \widetilde{Ein} est la classe conforme de la métrique $d\sigma^2 - dt^2$. Dans ce cas on a $\mathcal{B}^+(S) = \mathcal{B}^-(S)$.

Grâce au lemme 1.2 on peut définir une application

$$D : \mathcal{B}(S) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n} \quad (7.2)$$

qui à un compact B associe l'unique point p de \widetilde{Ein} donné par le lemme 1.2. On remarque que $d = D \circ \phi$.

On veut montrer que l'ensemble $\mathcal{B}(S)$ est naturellement muni d'une structure d'espace-temps conformément plat. Pour définir la bonne topologie sur $\mathcal{B}(S)$ on commence par y définir des relations de causalité, ce qui permettra ensuite de considérer la topologie d' Alexandrov.

Définition 1.4. Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S)$. On dit que $B_1 \leq B_2$ si on est dans un des trois cas suivants :

- i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^+(S)$ et $B_1 \subset B_2$
- ii) $B_2 \in \mathcal{B}^+(S)$, $B_1 \in \mathcal{B}^-(S)$ et $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$
- iii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^-(S)$ et $B_2 \subset B_1$.

On dit que $B_1 < B_2$ si on est dans un des trois cas suivants :

- I) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^+(S)$ et $B_1 \subset \text{int}(B_2)$
- II) $B_2 \in \mathcal{B}^+(S)$, $B_1 \in \mathcal{B}^-(S)$ et $\text{int}(B_1) \cap \text{int}(B_2) \neq \emptyset$
- III) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^-(S)$ et $B_2 \subset \text{int}(B_1)$.

Lemme 1.5. Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S)$ alors

$$B_1 < B_2 \Rightarrow D(B_1) < D(B_2)$$

$$B_1 \leq B_2 \Rightarrow D(B_1) \leq D(B_2)$$

Démonstration. Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^+(S)$ tels que $B_1 < B_2$, donc par définition $B_1 \subset \text{int}(B_2)$. Soit U_2 un ouvert qui vérifie les conditions de la Définition 1.1 pour le compact B_2 , comme $B_1 \subset \text{int}(B_2)$ l'ouvert U_2 vérifie lui aussi ces conditions par rapport au compact B_1 . On en déduit $\overline{O_{d(U_2)}(D(B_1))} \subset O_{d(U_2)}^-(D(B_2))$. D'après la théorie des ombre cela n'est possible que si $D(B_1) < D(B_2)$. Le cas $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^-(S)$ est semblable.

Si on est dans le cas $B_2 \in \mathcal{B}^+(S)$ et $B_1 \in \mathcal{B}^-(S)$ alors $\text{int}(B_1) \cap \text{int}(B_2) \neq \emptyset$ et d est injective sur cette intersection. Par définition de D on a que $d(\text{int}(B_1) \cap \text{int}(B_2)) \in I^-(D(B_2))$ et $D(B_2) \in I^-(d(\text{int}(B_1) \cap \text{int}(B_2)))$ donc on obtient bien $D(B_2) \in I^-(D(B_2))$. \square

Il découle du Lemme 1.5 que $\mathcal{B}(S)$ muni des relations \leq et $<$ est un espace causal au sens de la Définition 5.13.

On va voir quelle sorte de structure causale les relations de la Définition 1.4 vont engendrer sur $\mathcal{B}(S)$. Étant donné que le passé strict et le passé causal d'un élément $B \in \mathcal{B}(S)$ est défini par :

$$I^-(B) := \{B' \in \mathcal{B}(S) / B' < B\} \quad \text{et} \quad J^-(B) := \{B' \in \mathcal{B}(S) / B' \leq B\}$$

d'après la Définition 1.4 si $B \in \mathcal{B}^+(S)$ on a

$$\begin{aligned} I^-(B) &= \{B' \in \mathcal{B}^+(S) / B' \subset \text{int}(B)\} \cup \{B' \in \mathcal{B}^-(S) / \text{int}(B') \cap \text{int}(B) \neq \emptyset\} \\ J^-(B) &= \{B' \in \mathcal{B}^+(S) / B' \subset B\} \cup \{B' \in \mathcal{B}^-(S) / B' \cap B \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

En particulier on obtient :

$$J^+(\Sigma) = \mathcal{B}^+(S) \quad \text{et} \quad J^-(\Sigma) = \mathcal{B}^-(S) \quad (7.3)$$

$$I^+(\Sigma) = \mathcal{B}^+(S) \setminus \Sigma \quad \text{et} \quad I^-(\Sigma) = \mathcal{B}^-(S) \setminus \Sigma. \quad (7.4)$$

De plus $\mathcal{B}^+(S)$ et $\mathcal{B}^-(S)$ sont causalement convexes dans $\mathcal{B}(S)$, c'est-à-dire que si on a $B, B' \in \mathcal{B}^+(S)$ et $B'' \in \mathcal{B}(S)$ tels que $B \leq B'' \leq B'$ alors $B'' \in \mathcal{B}^+(S)$, et $B'' \in \mathcal{B}^-(S)$.

Le sous-ensemble Σ est acausal, car, d'après ce qu'on vient de voir, pour tout $B \in \Sigma$ on a $J^+(B) \cap \Sigma = \{B\}$ et $J^-(B) \cap \Sigma = \{B\}$.

En accord avec la Définition 1.1 on peut définir l'ombre passée ouverte et l'ombre passée fermée d'un élément B de $\mathcal{B}^+(S)$ par :

$$O_{\Sigma}^-(B) := I^-(B) \cap \Sigma \quad \text{et} \quad \overline{O}_{\Sigma}^-(B) := J^-(B) \cap \Sigma$$

et de même on peut définir l'ombre future ouverte et l'ombre future fermée de tout élément B de $\mathcal{B}^-(S)$.

Pour tout $B \in \mathcal{B}^+(S)$ on obtient donc

$$O_{\Sigma}^-(B) = \phi(\text{int}(B)) \quad \text{et} \quad \overline{O}_{\Sigma}^-(B) = \phi(B). \quad (7.5)$$

Pour $B \in \mathcal{B}^+(S)$ on a alors

$$I^-(B) = (I^-(B) \cap \mathcal{B}^+(S)) \sqcup I^-(O_{\Sigma}^-(B)) \quad (7.6)$$

$$J^-(B) = (J^-(B) \cap \mathcal{B}^+(S)) \cup J^-(O_{\Sigma}^-(B)) \quad (7.7)$$

et des formules similaires sont vraies pour $B \in \mathcal{B}^-(S)$.

Les relations causales de la Définition 1.4 permettent de munir $\mathcal{B}(S)$ de la topologie d'Alexandrov, voir Définition 5.14, dont une base de voisinages est donnée par les ensembles $I(B, B') := I^-(B) \cap I^+(B')$ où $B, B' \in \mathcal{B}(S)$ et $B' < B$. La démonstration du lemme suivant découle directement des Définitions 1.1 et 1.4.

Lemme 1.6. *L'application $D : \mathcal{B}(S) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est un homéomorphisme local.*

Démonstration. D'après les Définitions 1.1 et 1.4 on obtient que D est injective sur l'ouvert $J^{\pm}(B) \cap \mathcal{B}^{\pm}(S)$ pour tout $B \in \mathcal{B}^{\pm}(S)$. De plus d'après le Lemme 1.5 et la définition de D , pour $B \in \mathcal{B}^+(S) \setminus \Sigma$, l'ensemble $D(I^-(B))$ est égal à $I^-(D(B)) \cap I^+(d(B))$ qui est un ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, et de même pour $B \in \mathcal{B}^-(S) \setminus \Sigma$. Tout point B de $\mathcal{B}^{\pm}(S) \setminus \Sigma$ est contenu dans un voisinage de la forme $I^{\mp}(B') \cap \mathcal{B}^{\pm}(S)$ pour un certain $B' \in \mathcal{B}^{\pm}(S)$. Donc on doit juste traiter le cas où $B \in \Sigma$. Soient $B' \in \mathcal{B}^+(S)$ et $B'' \in \mathcal{B}^-(S)$ tels que $B'' < B < B'$ et $\text{int}B'' \subset B'$. Soit U l'ouvert donné par la Définition 1.1 pour le compact B' . Alors $D(B), D(B')$ et $D(B'')$ appartiennent au développement de Cauchy de $d(U)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et $D(B)$ appartient à l'ouvert $I^-(D(B')) \cap I^+(D(B'')) = D(I^-(B') \cap I^+(B''))$, car $\text{int}B'' \subset B'$. Il existe donc un voisinage ouvert de B où D est injective. \square

Corollaire 1.7. *L'application $\phi : S \rightarrow \Sigma \subset \mathcal{B}(S)$ est un plongement topologique.*

Démonstration. La topologie induite sur Σ par celle de $\mathcal{B}(S)$ a comme base d'ouverts les intersections $I^+(B) \cap I^+(B') \cap \Sigma$ avec B qui varie dans $\mathcal{B}^-(S)$ et B' qui varie dans $\mathcal{B}^+(S)$. Ces ouverts sont égaux, d'après les définitions, aux intersections $\text{int}B \cap \text{int}B'$. Or ces ouverts forment une base de la topologie sur S car d est une immersion et une base d'ouverts sur $d(S)$ est donnée par les intersections $I^+(p) \cap I^+(p') \cap d(S)$, où $p < p'$ varient dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 1.5 on a le résultat. \square

On peut donc munir $\mathcal{B}(S)$ de l'unique structure de variété différentiable pour laquelle D est un difféomorphisme local. L'application D définit alors une structure de variété lorentzienne conformément plate sur $\mathcal{B}(S)$. Comme pour tout point dans $\mathcal{B}(S)$ on a déjà défini une notion de futur et de passé qui coïncide localement par l'application D avec celle de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on obtient que $\mathcal{B}(S)$ est chronologiquement orientable.

Proposition 1.8. *$\mathcal{B}(S)$ est globalement hyperbolique d'hypersurface de Cauchy Σ .*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.7 Σ est un fermé de $\mathcal{B}(S)$. De plus, d'après (7.3) Σ est aussi acausale. D'après la preuve du Lemme 1.6 tout point de Σ est contenu dans un voisinage U où D est injective et tel que $D(\Sigma \cap U)$ déconnecte $D(U)$ en deux ouverts. Il s'en suit que Σ est edgeless.

Soit B un point dans $\mathcal{B}^+(S)$. On va montrer que toute courbe causale passée inextensible $c : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{B}(S)$ issue de B rencontre Σ .

On suppose par l'absurde que c ne rencontre pas Σ . Comme $\mathcal{B}(S)$ est déconnecté par Σ en les deux ouverts $\mathcal{B}^+(S) \setminus \Sigma$ et $\mathcal{B}^-(S) \setminus \Sigma$, il s'en suit que c reste emprisonnée dans $\mathcal{B}^+(S) \setminus \Sigma$ et plus précisément dans $J^-(B) \cap (\mathcal{B}^+(S) \setminus \Sigma)$. D'après les Définitions 1.1 et 1.4 l'application D est injective sur l'ensemble $J^-(B) \cap \mathcal{B}^+(S)$ et son image est l'ensemble $J^-(D(B)) \cap I^+(d(U))$ où U est un ouvert de S qui vérifie les conditions *a), b), c)* et *d)* de la Définition 1.1 par rapport à B .

La courbe $D \circ c$ est alors une courbe causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contenue dans $J^-(D(B)) \cap I^+(d(U))$: elle admet forcément un point limite passé p dans $J^-(D(B)) \cap J^+(d(U))$. Comme D est un difféomorphisme local, cela implique que la courbe c admet aussi un point limite passé, contrairement à ce qu'on avait supposé au départ.

De la même façon on obtient que toute courbe causale future inextensible issue d'un point dans $\mathcal{B}^-(S)$ rencontre Σ . Le résultat est prouvé. \square

Remarque 1.9. Le fait que $\mathcal{B}(S)$ est globalement hyperbolique implique d'après le Théorème 6.20 que $\mathcal{B}(S)$ est difféomorphe au produit $\Sigma \times \mathbb{R}$. Comme Σ est homéomorphe à S qui est orientable par hypothèse, on obtient que $\mathcal{B}(S)$ est aussi orientable. De plus on obtient que $\mathcal{B}(S)$ est simplement connexe car S est simplement connexe.

Proposition 1.10. *L'espace-temps $\mathcal{B}(S)$ est C_0 -maximal.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un Cauchy-plongement non surjectif $f : \mathcal{B}(S) \hookrightarrow N$, où N est un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat. Soit $D : N \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une application développante pour N . Soit p un point de N . On peut supposer sans perte de généralité $p \in I^+(\Sigma)$. D'après le Lemme 1.2 l'ombre fermée passée de p sur Σ est un compact de Σ , et donc son image réciproque par l'application ϕ est un compact B de S . On va vérifier que B appartient à $\mathcal{B}^+(S)$.

Soit $p' \in N$ tel que $p < p'$. D'après la Proposition 2.7 l'application D est injective sur $I^-(p')$ qui est un voisinage ouvert de $J^-(p)$ dans N . Comme $D \circ f \circ \phi : S \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$, quitte à composer par un élément de $O_0(2, n+1)$, coïncide avec l'application d , on obtient que d restreinte à l'ouvert $U := \phi^{-1}(O_\Sigma^-(p'))$ est injective. Or l'ouvert U contient le compact B et l'image de B par d est l'ombre fermée passée du point $D(p)$. Donc B appartient à $\mathcal{B}^+(S)$, donc l'application f est surjective et le résultat est prouvé. \square

Proposition 1.11. *$\mathcal{B}(S)$ est un espace-temps C -maximal.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.3 on aura montré le résultat si on prouve que l'adhérence de l'intersection de tout TIP et de tout TIF de $\mathcal{B}(S)$ avec Σ est non compacte. On va prouver le résultat pour les TIPs, l'autre cas est similaire. Soit \mathcal{V} un TIP de $\mathcal{B}(S)$. D'après le Lemme 1.2 \mathcal{V} est le passé d'une courbe future inextensible $c : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{B}(S)$. Soit U l'ouvert de S donné par $\phi^{-1}(\mathcal{V} \cap \Sigma)$, on a

$$U := \bigcup_{t \in [0, \infty[} \text{int}(c(t)) \quad (7.8)$$

Il s'agit d'une union croissante d'ouverts de S sur chacun des quels d est injective. Supposons par l'absurde que $\mathcal{V} \cap \Sigma$ est compact, on obtient alors que \overline{U} aussi est compact. On va montrer que cela implique que \overline{U} appartient à $\mathcal{B}^+(S)$.

D'après le Lemme 5.9 d est injective sur \overline{U} , de plus $d(\overline{U})$ est compact lui aussi. Soit $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base de voisinages ouverts pour \overline{U} . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux points $p_n, q_n \in V_n$ tels que $d(p_n) = d(q_n)$. On peut choisir les V_n à adhérence compacte, dans ce cas, quitte à passer à une sous-suite les deux suites $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ont deux limites q_∞ et p_∞ . Comme $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \overline{U}$ les points q_∞ et p_∞ appartiennent à ∂U . Comme d est continue on obtient $d(q_\infty) = d(p_\infty)$, donc, comme d restreinte à \overline{U} est injective, on a $q_\infty = p_\infty$. Or d est un difféomorphisme local donc il existe un voisinage V de $q_\infty = p_\infty$ où d est injective : cela contredit la définition des suites $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe donc un voisinage V' de \overline{U} où d est injective.

La courbe $D \circ c$ admet un point limite futur dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, car autrement, d'après l'étape 2) de la preuve du Théorème 2.3, on aurait que Σ est compacte, et donc que S est compacte, contrairement aux hypothèses. Soit p le point limite futur de

$D \circ c$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après la définition de D on a $d(\text{int}(c(t))) = O_{d(V)}^-(D(c(t)))$. Comme $\bigcup_{t \in [0, \infty[} I^-(D(c(t))) = I^-(p)$, d'après (7.8) on a $d(U) = O_{d(V)}^-(p)$. Le fait que $d(V)$ contient $\overline{d(U)}$ implique que p appartient à $\mathcal{D}(d(V))$. De plus $d(V)$ est un sous-ensemble acausal, donc, d'après le Lemme 1.3, on a $\overline{d(U)} = \overline{O_{d(V)}^-(p)}$, d'où $\overline{U} \in \mathcal{B}^+(S)$.

Par construction le compact \overline{U} est le point limite futur de la courbe c , ce qui contredit le fait que c est inextensible et aussi le fait que \mathcal{V} est un TIP. On obtient alors que $\mathcal{V} \cap \Sigma$ est non compact et le résultat est prouvé. \square

On a alors le théorème :

Théorème 1.12. *Soit $d : S \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une immersion conforme d'une variété riemannienne S simplement connexe de dimension n . Alors il existe un espace-temps N de dimension $n+1$ globalement hyperbolique conformément plat maximal tel que S s'identifie via un plongement conforme i à une hypersurface de Cauchy de N de sorte que $d = D \circ i$ où $D : N \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'application développante. De plus, N est unique à difféomorphisme conforme près.*

Démonstration. Il suffit de prendre $M = \mathcal{B}(S)$. Ceci est un espace-temps globalement hyperbolique C -maximal d'après la Proposition 1.11. D'après le Théorème 3.1 M est unique à difféomorphisme conforme près. \square

Remarque 1.13. Comme dans le Remarque 1.3 on considère la décomposition $\widetilde{Ein}_{1,n} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ telle que sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ la classe conforme des métriques s'écrit $[d\sigma^2 - dt^2]$. On considère l'hypersurface de type espace donné par $\mathbb{S}^n \times \{0\}$. Dans le cas où l'image de l'application $d : S \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est contenue dans $\mathbb{S}^n \times \{0\}$, on retrouve la construction des espace-temps de Sitter standards décrite à la section 5.

2 C_0 -maximalité et C -maximalité

La construction exposée dans la section précédente permet de répondre aux deux questions suivantes :

Q1 : Soit M un espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal, dans quel cas \widetilde{M} est-il lui aussi C_0 -maximal ?

Q2 : Un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat qui est C_0 -maximal est-il aussi C -maximal ?

Dans cette section M est un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal et \widetilde{M} est son revêtement universel. Soit S une hypersurface de Cauchy de type espace de M et \tilde{S} un de ses relevés dans \widetilde{M} . D'après le Lemme 3.4 \tilde{S} est une hypersurface de Cauchy acausale de \widetilde{M} . On suppose de plus que \tilde{S}

est non compacte.

Soit $\mathcal{K}(\tilde{S})$ l'ensemble des compacts de \tilde{S} . D'après la Proposition 2.7 l'application qui à chaque point de \tilde{M} associe son ombre fermée

$$i : \tilde{M} \longrightarrow \mathcal{K}(\tilde{S})$$

$$p \longmapsto \begin{cases} \overline{O_{\tilde{S}}^-}(p) & \text{si } p \in J^+(\tilde{S}) \\ \overline{O_{\tilde{S}}^+}(p) & \text{si } p \in I^-(\tilde{S}) \end{cases}$$

est injective. Comme \tilde{S} est acausale si p appartient à \tilde{S} son ombre fermée future et passée est tout simplement le compact $\{p\}$.

Lemme 2.1. *L'image de \tilde{M} par i est contenue dans $\mathcal{B}(\tilde{S})$.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.7 l'application développante D est injective sur le passé et sur le futur de tout point de \tilde{M} . Il s'en suit qu'étant donné un point p de $I^+(\tilde{S})$ et un point q dans $I^+(p)$, alors $O_{\tilde{S}}^-(p)$ est un ouvert de \tilde{S} qui contient $\overline{O_{\tilde{S}}^-}(p)$ et où D est injective. De plus, toujours d'après la Proposition 2.7, comme $D(I^-(q))$ est causalement convexe en $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on obtient que $D(O_{\tilde{S}}^-(q))$ est un sous-ensemble acausal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Toute courbe causale passée inextensible issue d'un point de $I^-(p)$ est contenue dans $I^-(q)$. Elle rencontre donc $\tilde{S} \cap I^-(q) = O_{\tilde{S}}^-(q)$. On obtient que p appartient à $\mathcal{D}^+(O_{\tilde{S}}^-(q))$. Comme $D(I^-(q))$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ on a $D(p) \in \mathcal{D}^+(D(O_{\tilde{S}}^-(q)))$ et $\overline{O^-}(D(p))_{D(\tilde{S})} = D(\overline{O_{\tilde{S}}^-}(p))$.

Le compact $\overline{O_{\tilde{S}}^-}(p)$ avec l'ouvert $O_{\tilde{S}}^-(q)$ vérifie alors les conditions *a*), *b*), *c*) et *d*) de la Définition 1.1. Il appartient donc à $\mathcal{B}(\tilde{S})$. On a prouvé que l'application i est à valeurs dans $\mathcal{B}(\tilde{S})$. \square

Par la suite on note Σ l'hypersurface de Cauchy de $\mathcal{B}(\tilde{S})$ donnée par $\{\{p\} / p \in \tilde{S}\}$.

Lemme 2.2. *L'application $i : \tilde{M} \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{S})$ est un Cauchy-plongement.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.7 l'application i est injective. De plus d'après la définition de l'ombre d'un point, Définition 1.1, une vérification directe montre que i est un isomorphisme des relations causales : pour $p, q \in \tilde{M}$

$$p \leq q \iff i(p) \leq i(q) \quad \text{et} \quad p < q \iff i(p) < i(q).$$

Comme sur les deux variété \tilde{M} et $\mathcal{B}(\tilde{S})$ la topologie considérée est celle d'Alexandrov (Définition 5.14) on obtient que i est un homéomorphisme sur son image. Il reste à montrer que $i(\tilde{S})$ est une hypersurface de Cauchy de $\mathcal{B}(\tilde{S})$. Or, d'après la définition de i , $i(\tilde{S})$ est l'hypersurface $\Sigma = \{\{p\} / p \in \tilde{S}\}$, qui d'après la Proposition 1.8 est une hypersurface de Cauchy de $\mathcal{B}(\tilde{S})$. \square

Soit Γ le groupe fondamental de M . D'après le Théorème 6.20 Γ s'identifie au groupe fondamental de S . L'action de Γ sur \tilde{S} induit alors naturellement une action sur $\mathcal{K}(\tilde{S})$. Soit $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n+1)$ l'application d'holonomie de M . L'application $D|_{\tilde{S}}$ est équivariante par rapport à l'action de Γ sur \tilde{S} et de $\rho(\Gamma)$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il s'en suit que l'action de Γ sur \tilde{S} preserve le sous-ensemble $\mathcal{B}(\tilde{S})$.

Remarque 2.3. Soit $\mathcal{D} : \mathcal{B}(\tilde{S}) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ l'application développante définie par (7.2). Comme $D|_{\tilde{S}}$ est équivariante par rapport à l'action de Γ sur \tilde{S} et de $\rho(\Gamma)$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ l'application \mathcal{D} est aussi équivariante par rapport à l'action de Γ sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$ et de $\rho(\Gamma)$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme l'action de $\rho(\Gamma)$ préserve les relations de causalité sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$, d'après le Lemme 1.5 l'action de Γ sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$ préserve les relations de causalité sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$.

Lemme 2.4. *Le Cauchy-plongement i est équivariant par rapport à l'action de Γ sur \tilde{M} et sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$.*

Démonstration. Comme l'action de Γ sur \tilde{M} respecte la causalité, pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a

$$\gamma(O_{\tilde{S}}^{\pm}(p)) = O_{\tilde{S}}^{\pm}(\gamma(p)) \quad (7.9)$$

suisant que p appartient à $J^-(\tilde{S})$ ou à $J^+(\tilde{S})$. Or, d'après la définition de i , cela veut dire précisément que i est équivariant par rapport à l'action de Γ . \square

Lemme 2.5. *L'action de Γ sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$ est libre et propre.*

Démonstration. Le fait que l'action de Γ sur $\mathcal{K}(\tilde{S})$ est libre découle directement du fait que l'action de Γ sur \tilde{S} est propre. Soit en effet $K \in \mathcal{K}(\tilde{S})$ alors l'ensemble Γ_K des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ est fini. Comme Γ est sans torsion, si par l'absurde il existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\gamma_0 K = K$, on a que $\{\gamma_0^n, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dénombrable d'éléments de Γ qui fixent K . Cela contredit le fait que Γ_K est un sous-ensemble fini.

Soit C un compact de $\mathcal{B}(\tilde{S})$. La famille d'ouverts

$$\{I^-(B) \cap I^+(P)\}_{B \in I^+(C), P \in I^-(C)}$$

est un recouvrement de C . Soit $\{I^-(B_i) \cap I^+(P_i)\}_{i=1, \dots, m}$ un sous-recouvrement fini. Quitte à remplacer B_i par un élément de $I^+(B_i)$ et P_i par un élément de $I^-(P_i)$, on peut supposer que $B_i \in I^+(\Sigma)$ et $P_i \in I^-(\Sigma)$ pour tout $i = 1, \dots, m$. D'après les égalités (7.5) l'ombre fermée passée de B_i sur Σ et l'ombre fermée future de P_i sur Σ sont respectivement les images $i(B_i)$ et $i(P_i)$. Il s'en suit que l'ensemble

$$\mathcal{K} := \bigcup_{i=1, \dots, m} (\overline{O}_{\Sigma}^-(B_i) \cup \overline{O}_{\Sigma}^+(P_i))$$

est l'image par i de l'ensemble $K := \bigcup_{i=1, \dots, m} (B_i \cup P_i)$, qui est compact. On note $G := \bigcup_{B \in C} B$. D'après la Définition 1.4 on a l'inclusion $G \subset K$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, on suppose qu'il existe un $B_0 \in C \cap \gamma C$. D'après la définition de l'action de Γ sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$, on obtient que $B_0 \subset G \cap \gamma G$. Cela implique alors que $B_0 \subset K \cap \gamma K$. Or comme l'action sur \tilde{S} est propre et K est un compact de \tilde{S} , l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $K \cap \gamma K \neq \emptyset$ est fini. Il s'en suit que l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $C \cap \gamma C \neq \emptyset$ est fini aussi. Donc l'action de Γ sur $\mathcal{B}(\tilde{S})$ est propre. \square

Proposition 2.6. *Le quotient $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$ par l'action de Γ est un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat. Le Cauchy-plongement i passe au quotient en un Cauchy-plongement $\bar{i} : M \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.5 le quotient $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$ admet une structure de variété différentiable. Comme, d'après le Remarque 2.3, l'application \mathcal{D} est équivariante par rapport à l'action de Γ sur son revêtement universel $\mathcal{B}(\tilde{S})$, on peut munir $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$ d'une structure d'espace-temps conformément plat.

On note $\pi_* : \mathcal{B}(\tilde{S}) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$ la projection au quotient. Alors l'image de Σ par π_* est une hypersurface de Cauchy de $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$. En effet toute courbe causale c inextensible de $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$ se relève en une courbe causale inextensible de $\mathcal{B}(\tilde{S})$ qui donc rencontre forcément Σ . On obtient que c rencontre $\pi_*(\Sigma)$.

D'après le Lemme 2.4 le Cauchy-plongement i est équivariant par rapport à l'action de Γ . Il passe donc au quotient en un plongement $\bar{i} : M \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$. Le diagramme suivante commute

$$\begin{array}{ccc} i : \tilde{M} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\tilde{S}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_* \\ \bar{i} : M & \longrightarrow & \mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma \end{array}$$

On obtient alors que l'image de S par i est l'hypersurface de Cauchy Σ/Γ de $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$. \square

Corollaire 2.7. *Le revêtement universel de tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal est C_0 -maximal.*

Démonstration. On suppose d'abord que l'espace-temps globalement hyperbolique conformément plat C_0 -maximal \tilde{M} n'est pas Cauchy-compact. Dans ce cas on peut définir l'espace $\mathcal{B}(\tilde{S})$. Comme M est C_0 -maximal le Cauchy plongement $\bar{i} : M \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$ défini à la Proposition 2.6 est surjectif. Son relevé aux revêtements universels $i : \tilde{M} \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{S})$ est donc surjectif lui aussi. Donc \tilde{M} est conformément équivalent à $\mathcal{B}(\tilde{S})$. D'après la Proposition 1.11 l'espace-temps $\mathcal{B}(\tilde{S})$ est C -maximal. On obtient alors que \tilde{M} est C -maximal et donc en particulier C_0 -maximal.

On suppose maintenant que \widetilde{M} est Cauchy-compacte. D'après la preuve du Théorème 1.2 il existe un Cauchy-plongement $\widetilde{M} \hookrightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ qui permet d'identifier \widetilde{M} à un ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Le groupe fondamental de M , qui agit sur \widetilde{M} de façon propre et libre, peut donc être identifié à un sous-groupe de $O_0(2, n+1)$. On va prouver que l'action de Γ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$, qui prolonge l'action de Γ sur \widetilde{M} , est propre et libre.

L'hypersurface de Cauchy \widetilde{S} est un compact localement acausal edgeless de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, et donc topologiquement une sphère (cf.). En particulier, \widetilde{S} est compacte. Comme l'action de Γ préserve l'hypersurface de Cauchy \widetilde{S} , et comme son action sur \widetilde{S} est propre, on obtient que Γ est un groupe fini. Il en découle que son action sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est propre. On va donc montrer qu'elle est aussi libre.

Comme Γ est fini, son intersection avec le centre de $O_0(2, n+1)$ engendré par l'application δ l'action de Γ , est triviale. Le groupe Γ s'identifie donc aussi à un sous-groupe fini de $O_0(2, n+1)$. Soit g la métrique riemannienne canonique sur \mathbb{R}^{n+3} , donnée par la forme quadratique $du^2 + dv^2 + dx_0^2 + \dots + dx_n^2$. La métrique $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* g$ est une métrique riemannienne invariante par l'action de Γ sur \mathbb{R}^{n+3} . Donc à conjugaison près le groupe Γ est contenu dans le sous-groupe de $O_0(2, n+1)$ donné par $\widetilde{SO(2)} \times \widetilde{SO(n)}$. On obtient alors qu'on peut identifier Γ à un sous-groupe de $\widetilde{SO(2)} \times \widetilde{SO(n)} = \widetilde{SO(2)} \times \widetilde{SO(n)}$.

Le produit $\widetilde{SO(2)} \times \widetilde{SO(n)}$ correspond à une décomposition $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$. Les orbites du groupe $\widetilde{SO(2)}$ sont donc les courbes de type temps inextensibles données par $\mathbb{R} \times \{x\}$, avec $x \in \mathbb{S}^n$. Les orbites du groupe $\widetilde{SO(n)}$ sont les hypersurfaces de Cauchy $\{t\} \times \mathbb{S}^n$. Donc si $\gamma_0 \in \Gamma$, $\gamma_0 \neq id$, fixe un point $p = (t, x)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, il fixe aussi point par point la courbe de type temps $\mathbb{R} \times \{x\}$. Comme cette courbe est de type temps inextensible elle doit rencontrer l'hypersurface de Cauchy \widetilde{S} , et donc elle doit rencontrer \widetilde{M} . Cela contredit le fait que l'action de Γ sur \widetilde{M} est libre.

Le Cauchy-plongement $j : \widetilde{M} \hookrightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$, équivariant par rapport à l'action de Γ , passe alors au quotient en un Cauchy-plongement $\bar{j} : M \hookrightarrow \widetilde{Ein}_{1,2}/\Gamma$. Comme M est C_0 -maximal \bar{j} est surjectif. On obtient alors que j est aussi surjectif, ce qui implique que \widetilde{M} est aussi C_0 -maximal car conformétement équivalent à $\widetilde{Ein}_{1,n}$. \square

Corollaire 2.8. *Tout espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal est C -maximal.*

Démonstration. Soit M un espace-temps globalement hyperbolique C_0 -maximal. D'après la Proposition 2.7 l'espace-temps \widetilde{M} est C_0 -maximal. Comme, d'après le Théorème 3.1, l'extension C_0 -maximal est unique à difféomorphisme conforme près, la Proposition 1.10 implique que l'espace \widetilde{M} est conformétement équivalent à l'espace $\mathcal{B}(\widetilde{S})$. D'après la Proposition 1.11 \widetilde{M} est alors C -maximal. D'après le Lemme 3.1 on obtient que M est un espace-temps C -maximal. \square

Remarque 2.9. Les résultats qu'on a prouvé dans ce chapitre donnent une autre preuve, constructive cette fois, de l'existence et unicité de l'extension maximale d'un espace-temps conformément plat. En effet, soit M un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat d'hypersurface de Cauchy S . D'après la Proposition 2.6 si \tilde{S} est non compacte, M se plonge par un Cauchy plongement dans l'espace-temps $\mathcal{B}(\tilde{S})/\Gamma$. Ce dernier espace est construit à partir de la structure induite sur \tilde{S} par la structure conformément plate de M . Il s'en suit que cette extension maximale est intrinsèquement unique.

Remarque 2.10. Grâce à cette preuve constructive de l'existence de l'extension C -maximale, on comprend mieux comment est faite l'image par D du passé ou du futur d'un point dans \tilde{M} . Le Théorème 3.9 tel quel s'applique seulement aux espaces-temps simplement connexes conformément plats maximaux. Mais maintenant grâce à la Proposition 2.7 on sait que le revêtement universel de tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat maximal est aussi maximal. On obtient donc que si M n'est pas un quotient fini de l'espace d'Einstein universel alors pour tout point p de \tilde{M} , $I^-(p)$ ($I^+(p)$) est conformément équivalent à un domaine régulier futur (passé) complet de l'espace de Minkowski.

Bibliographie

- [1] Galloway G.J. Andersson L. dS CFT and spacetime topology. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 6(2) :307–327, 2002.
- [2] T. Barbot. Variétés affines radiales de dimension 3. *Bull. Soc. math. France*, 128 :347–389, 2000.
- [3] Thierry Barbot. Globally hyperbolic flat space-times. *J. Geom. Phys.*, 53(2) :123–165, 2005.
- [4] Thierry Barbot. Causal properties of AdS-isometry groups. I. Causal actions and limit sets. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 12(1) :1–66, 2008.
- [5] Thierry Barbot. Domaines globalement hyperboliques de l'espace de Minkowski et de l'espace anti-de Sitter. In *Algèbre, dynamique et analyse pour la géométrie : aspects récents*. Ellipse, 2010. Proceedings des Écoles de Géométrie et Systèmes dynamiques, Algérie, 2004-2007.
- [6] Thierry Barbot, François Béguin, and Abdelghani Zeghib. Constant mean curvature foliations of globally hyperbolic spacetimes locally modelled on AdS_3 . *Geom. Dedicata*, 126 :71–129, 2007.
- [7] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez. On Smooth Cauchy Hypersurfaces and Geroch's Splitting Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 243 :461–470, 2003.
- [8] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez. Globally hyperbolic spacetimes can be defined as "causal" instead of "strongly causal". *Classical and Quantum Gravity*, 24(3) :745, 2007.
- [9] Miguel Bernal, Antonio et Sánchez. Further Results on the Smoothability of Cauchy Hypersurfaces and Cauchy Time Functions. *Letters in Mathematical Physics*, 77 :183–197, 2006.
- [10] Miguel Bernal, Antonio N. et Sánchez. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 257(1) :43–50, 2005.
- [11] Francesco Bonsante. Flat spacetimes with compact hyperbolic Cauchy surfaces. *J. Differential Geom.*, 69 :441–521, 2005.
- [12] Francesco Bonsante and Jean-Marc Schlenker. AdS manifolds with particles and earthquakes on singular surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 19(1) :41–82, 2009.

- [13] R. K. Budic, R. ; Sachs. Causal boundaries for general relativistic space-times. *J. Mathematical Phys.*, 15 :1302–1309, 1974.
- [14] Yvonne Choquet-Brouhat. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.*, 88 :141–225, 1952.
- [15] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 14 :329–335, 1969.
- [16] T. Chruściel Piotr and James D.E. Grant. Classe A spacetimes. Preprint(arXiv :1111.0400v2), 2011.
- [17] Simon F.R. Donald M. A new recipe for causal completions. *Preprint*, 2003.
- [18] Kronheimer E.H. and Penrose R. On the structure of causal spaces. *Proc. Camb.Phil.Soc*, 63 :481–501, 1967.
- [19] R. K. Sachs et H. Wu. General relativity and cosmology. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83 :1101–1164, 1977.
- [20] Kulkarni R.S. et Pinkall U. A canonical metric for Möbius structures and its applications. *Math. Z.*, 1(216) :89–129, 1994.
- [21] Lars Andersson et Thierry Barbot et Francois Béguin et Abdelghani Zeghib. Cosmological time versus CMC time in spacetimes of constant curvature. *accepté à Asian Journal of Mathematics*, 2008.
- [22] A. Fathi and A. Siconolfi. On smooth time functions. to appear. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, pages 1–37, 2011.
- [23] José L. Flores. The causal boundary of spacetimes revisited. *Comm. Math. Phys.*, 276(3) :611–643, 2007.
- [24] Charles Frances. *Géométrie et Dynamique Lorentziennes Conforme*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Lyon, 2002.
- [25] P. Gauduchon. Connexion canonique et structure de Weyl en géométrie conforme. Preprint, 1990.
- [26] R. Geroch. Spinor structure of space-times in general relativity ii. *J. Mathematical Phys.*, 83 :342–348, 1970.
- [27] Robert Geroch. Domain of dependence. *J. Math. Phys.*, 11 :437–449, 1970.
- [28] Penrose R. Geroch R., Kronheimer E. H. Ideal points in space-time. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 327 :545–567, 1972.
- [29] William M. Goldman. Geometric structures on manifolds and varieties of representations. In *Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987)*, volume 74 of *Contemp. Math.*, pages 169–198. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

- [30] William M. Goldman and Gregory A. Margulis. Flat Lorentz 3-manifolds and cocompact Fuchsian groups. In *Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999)*, volume 262 of *Contemp. Math.*, pages 135–145. Amer. Math. Soc., 2000.
- [31] Michael Gromov. Rigid transformations groups. In *Géométrie différentielle (Paris, 1986)*, volume 33 of *Travaux en Cours*, pages 65–139. Hermann, Paris, 1988.
- [32] R. K. Hawking, S. W. et Sachs. Causally continuous spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 35 :287–296, 1974.
- [33] S. W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [34] S. W. Hawking, A. R. King, and P. J. McCarthy. A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential, and conformal structures. *J. Mathematical Phys.*, 17(2) :174–181, 1976.
- [35] Beem John K., Ehrlich Paul E., and Kevin L. Easley. *Global Lorentzian geometry*, volume 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, second edition, 1996.
- [36] Shoshichi Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.
- [37] R. Kronheimer, E. H.; Penrose. On the structure of causal spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 63 :481–501, 1967.
- [38] Andersson L., Barbot T., Benedetti R., Bonsante F., Goldman W.M., Labourie f. et Scannell K.P., and J. Schlenker. Notes on : "Lorentz spacetimes of constant curvature" [geom. dedicata **126** (2007), 3–45] by g. mess. *Geom. Dedicata*, 126 :47–70, 2007.
- [39] François Labourie. Fuchsian affine actions of surface groups. *J. Differential Geom.*, 59(1) :15–31, 2001.
- [40] Shigenori Matsumoto. Foundations of flat conformal structure. In *Aspects of low-dimensional manifolds*, volume 20 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 167–261. Kinokuniya, Tokyo, 1992.
- [41] Geoffrey Mess. Lorentz spacetimes of constant curvature. *Geom. Dedicata*, 126 :3–45, 2007.
- [42] Barrett O' Neil. *Semi-Riemannian Geometry*. A Series of Monographs and Textbooks. Samuel Eilenberg and Hyman Bass, Orlando, 1983.
- [43] R. Penrose. Some unsolved problems in classical general relativity. In *Seminar on Differential Geometry*, volume 102 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 631–668. Princeton Univ. Press, 1982.

- [44] Roger Penrose. *Techniques of differential topology in relativity*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1972. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 7.
- [45] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [46] Ernst Alfred Ruh. *On automorphism group of a G-structure*. PhD thesis, Brown University, 1864.
- [47] Miguel Sánchez. Causal hierarchy of spacetimes, temporal functions and smoothness of Geroch's splitting. A revision. *Mat. Contemp.*, 29 :127–155, 2005.
- [48] Kevin P. Scannell. Flat conformal structures and the classification of de sitter manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 7(2) :325–345, 1999.
- [49] L. B. Szabados. Causal boundary for strongly causal spacetimes. *Classical Quantum Gravity*, 5(1) :121–134, 1988.
- [50] L. B. Szabados. Causal boundary for strongly causal spacetimes. II. *Classical Quantum Gravity*, 6(1) :77–91, 1989.