



Quelques propriétés combinatoires et algorithmiques de formes quadratiques, polynômes et ensembles ordonnés

Roland Jégou

► To cite this version:

Roland Jégou. Quelques propriétés combinatoires et algorithmiques de formes quadratiques, polynômes et ensembles ordonnés. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 1984. Français. NNT : 1984MON20223 . tel-00941060

HAL Id: tel-00941060

<https://theses.hal.science/tel-00941060>

Submitted on 3 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Option : Informatique

QUELQUES PROPRIETES COMBINATOIRES ET ALGORITHMIQUES DE FORMES QUADRATIQUES , POLYNOMES ET ENSEMBLES ORDONNES .

par

Roland JEGOU

soutenue le 12 Octobre 1984 devant la commission d'examen

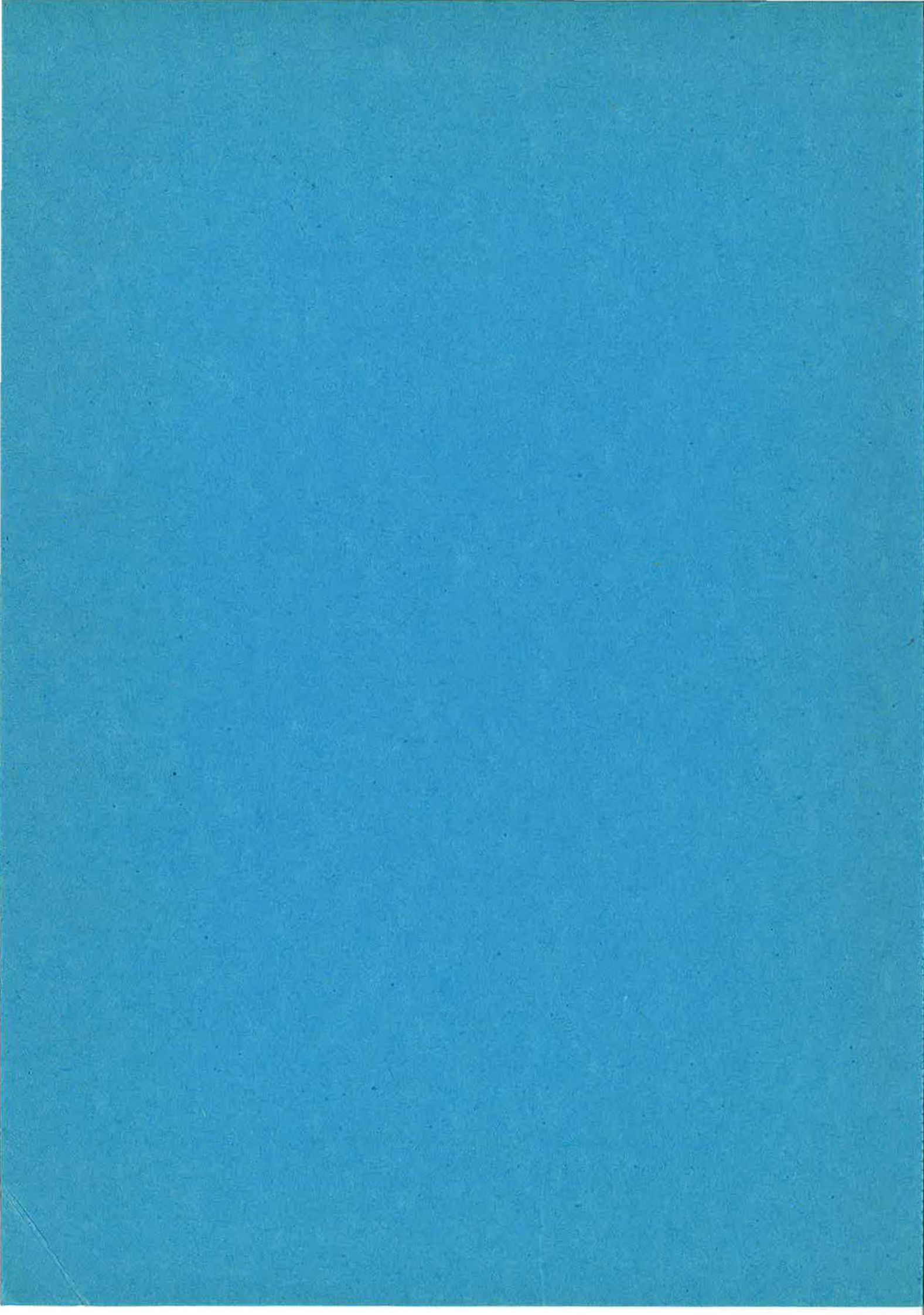
JURY : Michel CHEIN

Olivier COGIS

Jean FERRIE

Michel HABIB

Maurice POUZET



ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE



présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE
Option : Informatique

**QUELQUES PROPRIETES COMBINATOIRES
ET ALGORITHMIQUES DE FORMES QUADRATIQUES ,
POLYNOMES ET ENSEMBLES ORDONNES .**

par

Roland JEGOU

soutenue le 12 Octobre 1984 devant la commission d'examen

**JURY : Michel CHEIN
Olivier COGIS
Jean FERRIE
Michel HABIB
Maurice POUZET**



PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES
ET AGGREGATION DE FORMES QUANTITATIVES
POLYMERES ET ENSEMBLES COMBINATOIRES

Page 100

Document de la Direction des Mines

Direction des Mines
Bureau des Mines
Bureau des Mines
Bureau des Mines
Bureau des Mines



Ce travail a été effectué dans le cadre du Département Informatique Appliquée de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.

Je voudrais tout d'abord exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Michel HABIB, Directeur du Département Informatique, pour m'y avoir accueilli, pour sa participation active à cette étude et sa grande disponibilité allant jusqu'à me recevoir chez lui à des heures que la morale réprouve.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur CHEIN qui me fait l'honneur de juger cette thèse.

Je remercie vivement le Professeur Jean FERRIE et le Maître Assistant Olivier COGIS d'avoir accepté d'être membres du jury, ainsi que Monsieur Maurice POUZET, Professeur à l'Université Claude Bernard (Lyon I), qui a bien voulu se déplacer pour juger mon travail.

Un grand merci à tous les membres du Département, en particulier à Mme BARNEOUD dont la force de frappe n'est plus à contester, pour leur amicale et algorithmique complicité.

Je remercie enfin Messieurs LOUBET et DARLES pour leur contribution à la réalisation matérielle de l'ouvrage.

INTRODUCTION GENERALE

La première partie de notre travail, menée en collaboration étroite avec V. BOUCHITTE et M. HABIB, porte sur l'étude de quelques invariants comme le nombre de sauts et la dimension sur les ensembles ordonnés finis.

Nous reproduisons ici intégralement les deux articles
N-free posets as generalizations of series-parallel posets

M. HABIB, R. JEGOU

Some results on the greedy dimension

V. BOUCHITTE, M. HABIB, R. JEGOU

à paraître respectivement dans Discrete Applied Mathematics et dans Order.

Le nombre de sauts a fait l'objet de nombreux travaux parmi lesquels ceux de G. CHATY, M. CHEIN, O. COGIS, U. FAIGLE, G. GIERZ, M. HABIB, P. MARTIN, G. PETOLLA, W. POGUNTKE, W.R. PULLEYBLANK, I. RIVAL, M.M. SYSLO ..., et reste d'actualité comme en témoigne le congrès GRAPHS and ORDER (Banff 1984).

Cette notion définie originellement sur les graphes sans circuit comme étant le nombre minimum d'arcs à ajouter à un tel graphe pour obtenir un graphe sans circuit ayant un chemin hamiltonien, est étudiée ici sur les ordres sans N.

Nous mettons en évidence une construction récursive de ces ordres en généralisant celle des ordres série parallèles (SP) introduits par E.L. LAWLER et étudiés notamment par J. VALDES, R.E. TARJAN et E.L. LAWLER.

Les ordres sans N, ou quasi-série-parallèles (QSP), peuvent donc se définir à l'aide de deux opérations simples à partir de l'ordre réduit à un élément.

Cette construction permet en particulier d'obtenir un algorithme linéaire (en fonction du nombre de sommets et du nombre d'arcs du graphe de Hasse) de reconnaissance et de décomposition qui calcule le nombre de sauts.

La dimension d'un ordre partiel P définie en 1941 par B. DUSHNIK et E.W. MILLER est le cardinal minimal d'ensemble d'ordres totaux supérieurs à P dont l'intersection est P .

Cette définition est étendue au cas où les ordres totaux supérieurs à P sont gloutons (c'est à dire construits algorithmiquement à partir d'un élément minimal en prenant un successeur accessible de l'élément courant, à défaut un élément minimal, dans le sous-ordre restant, in english "climb as high as you can") obtenant ainsi la dimension gloutonne.

Nous montrons que cette nouvelle notion de dimension s'identifie à la dimension usuelle sur une large classe d'ordres contenant les ordres sans N , les ordres de dimension 2 et les treillis distributifs.

La deuxième partie, qui trouve son origine dans une question posée par M. CHEIN, à savoir le calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse d'ordre n (graphe simple orienté sans circuit et sans arc de transitivité) est consacrée à l'étude des nombres extrémaux (minimal et maximal) d'arêtes d'un joint de k stables suivant un graphe simple (sans boucle et sans arête multiple) d'ordre k .

Ce problème est équivalent à l'optimisation d'une forme quadratique sans carré à coefficients 0 ou 1 sur l'ensemble des partitions d'un entier n en k sommants.

Dans un premier temps, les k stables étant fixés, nous étudions les permutations donnant les nombres extrémaux d'arêtes du joint.

Reprenant le rapport

Sur quelques formes quadratiques associées à des partitions d'entiers

R. JEGOU

(à paraître dans la RAIRO, Recherche Opérationnelle),

nous donnons les solutions dans le cas d'une chaîne élémentaire d'ordre k .

La réponse à la question de M. CHEIN en est une conséquence directe.

D'autres cas particuliers sont étudiés, comme par exemple les graphes à seuil et les unions disjointes de cliques.

Nous étudions ensuite les partitions minimales et maximales.

Le problème de minimisation est entièrement résolu et nous montrons que le problème de maximisation est NP-difficile car il est équivalent, dans certains cas, à la recherche d'une clique maximale.

Ce résultat est une conséquence indirecte d'un théorème de maximisation dû à T.S. MOTZKIN et E.G. STRAUSS dont nous donnons par ailleurs une preuve plus rapide et plus combinatoire.

Enfin ces problèmes sont généralisés à des polynômes sans carré à coefficients entiers par le biais de l'opération de substitution dans les hypergraphes. Le problème de minimisation est là aussi entièrement résolu en nombres entiers.

Pour terminer, nous présentons quelques exemples d'hypergraphes pour lesquels les problèmes de T.S. MOTZKIN et E.G. STRAUSS et de la partition maximale ont une solution polynômiale.

N.B. : les références bibliographiques correspondant aux personnes citées ci-dessus, sont naturellement rassemblées en fin des chapitres concernés.

GENERAL INTRODUCTION

The first part of this work has been done with the collaboration of V. BOUCHITTE and M. HABIB. It concerns the study of some invariants as the jump number and the dimension of finite posets.

We expose two papers :

N-free posets as generalization of series-parallel posets, M.HABIB, R.JEGOU
Some results on the Greedy dimension, V. BOUCHITTE, M. HABIB, R. JEGOU
to appear respectively in Discrete Applied Mathematics and Order.

The Jump number has been studied by many authors, for example G CHATTY, M. CHEIN, O. COGIS, U. FAIGLE, G. GIERZ, M. HABIB, M. MARTIN, G. PETOLLA, W. POGUNTKE, W.R. PULLEYBANK, I. RIVAL, M.M. SYSLO...

This notion was first defined on dags (directed acyclic graphs) to be the minimum number of arcs that have to be added in order to obtain an hamiltonian path. It is studied here on N-free posets.

A generalization of the definition of the series-parallel (SP) posets, introduced by E.L. LAWLER and studied in particular by J. VALDES, R.E. TARJAN, E.L. LAWLER, gives a recursive construction of the N-free posets, then called also quasi-series-parallel posets (QSP). Thus they are defined with only two simple operations starting with the one element poset.

So we obtain a linear algorithm (depending on the numbers of vertices and edges of the Hasse diagram) for recognize, decompose and calculate the jump number of any N-free poset.

In 1941, B. DUSHNIK and E.W. MILLER defined the dimension of a poset P to be the minimal cardinality of a set of linear extensions of P the intersection of which is P .

We define the greedy dimension of a finite poset P by using greedy linear extensions, that means linear extensions of P algorithmically obtained with the simple rule "climb as high as you can".

Our first results establish the equality of this notion with the usual dimension on a wide class of posets which contains N-free posets, 2-dimensionnal posets and distributive lattices.

The second part has started with a question asked by M. CHEIN : which is the maximal number of arcs in a Hasse diagram with n vertices ?

A specific answer to this question was obtained and exposed in the paper : "Sur quelques formes quadratiques associées à des partitions d'entiers" R. JEGOU, to appear in RAIRO, Recherche Opérationnelle.

In fact this second part is devoted to study the more general problem to determine the optimal (minimal and maximal) numbers of edges of the join of k stables with a k vertices graph.

This problem is equivalent to minimize and to maximize a square-free and 0,1-coefficients quadratic form with the integer linear constraints

$$(C_1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{cases}$$

where the integers k, n verifies $2 \leq k \leq n$.

At first, we fix the k stables and study the optimal permutations.

When the graph is an elementary chain we obtain the answer to the question of M. CHEIN. Some other particular cases are studied, for example the threshold graphs.

Then we study the general problem : determine the minimal and maximal partitions.

The minimal partition problem is completely solved and we show that the maximal partition problem is NP-hard because the solution needs the research of a maximal clique when G is a regular graph.

This precedent result is an indirect consequence of a maximisation theorem due to T.S. MOTZKIN and E.G. STRAUSS, which is extended in the multigraph and integer cases by a more combinatorial and simpler proof.

We end by a generalization to square-free polynoms with integer coefficients using the substitution operation in hypergraphs.

The minimization problem is also completely solved and we expose some examples on which the problem of T.S. MOTZKIN and E.G. STRAUSS and the maximisation problem have a polynomial solution.

PLAN

PREMIERE PARTIE

ORDRES SANS N ET DIMENSION GLOUTONNE

CHAPITRE I : N-free posets as generalizations of series-parallel posets

- I.1 - Introduction
- I.2 - Jump number and dimension of QSP posets
- I.3 - Characterization of QSP posets
- I.4 - A linear recognition algorithm

CHAPITRE II : Some results on the greedy dimension

- II.1 - Introduction
- II.2 - The greedy dimension

DEUXIEME PARTIE

DE L'UTILITE DES JOINTS

CHAPITRE I : Présentation - Notations

CHAPITRE II : Cas d'une chaîne élémentaire

- II.1 - Introduction
- II.2 - Formes générales des solutions
- II.3 - Extensions
 - II.3.1 Au cas d'un cycle élémentaire
 - II.3.2 Au calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse.

CHAPITRE III Permutations extrémales

- III.1 - Introduction
- III.2 - Propriétés élémentaires
- III.3 - Quelques cas particuliers

- III.3.1 Graphes à seuil
- III.3.2 Graphes simples réguliers de degré 1 ou $k-2$
- III.3.3 Chaque composante connexe est une étoile
- III.3.4 Chaque composante connexe est une clique

CHAPITRE IV Partitions extrémales

- IV.1 - Introduction
- IV.2 - Partitions minimales
- IV.3 - Partitions maximales
 - IV.3.1 Quelques résultats préliminaires
 - IV.3.2 Le Théorème de MOTZKIN et STRAUSS - Application au problème des partitions maximales
 - IV.3.3 Etude générale des partitions maximales
- IV.4 - Considérations algorithmiques

CHAPITRE V Extensions aux hypergraphes

- V.1 - Introduction
- V.2 - Permutations extrémales - Cas particuliers
 - V.2.1 Cas d'arêtes disjointes 2 à 2
 - V.2.2 Cas d'une c -chaîne et d'un c -cycle comme application du chapitre II
- V.3 - Partitions extrémales
 - V.3.1 Partitions minimales
 - V.3.2 Partitions maximales
 - 1 - Extension du Théorème MOTZKIN et STRAUSS à des polynômes quelconques sans carré
 - 2 - Etude du problème des partitions maximales

On vous aura prévenu ...

" L'étude des mathématiques, en comprimant la sensibilité et l'imagination,
rend quelquefois l'explosion des passions terrible".

Mgr Dupanloup, de la Haute Education
Intellectuelle, 1855.

PREMIERE PARTIE

ORDRES SANS N ET DIMENSION GLOUTONNE

CHAPITRE I

N-FREE POSETS AS GENERALIZATIONS OF SERIES-PARALLEL POSETS

ABSTRACT

N-free posets seems to have recently taken some importance and motivated many studies.

This class of posets introduced by GRILLET [8] and HEUCHENNE[11] are very related to another important class of posets, namely the series-parallel posets, introduced by LAWLER [12] and studied by VALDES et al. [21].

In this paper, we show how N-free posets can be considered as generalizations of series-parallel posets, by giving a recursive construction of N-free posets. Furthermore we propose a linear time algorithm to recognize and decompose any N-free poset.

This yields some very naturel problems, namely: which are the properties (such as linear time algorithm for some invariant) of series-parallel posets that are kept for N-free posets?

I - INTRODUCTION

Series-parallel graphs or digraphs are well known, since the early work of DUFFIN [5] and others. There were defined as analogous of electrical networks. In [12] LAWLER introduced a class of posets named series-parallel which were studied also in [21] and [2].

In the following we introduce a generalization of the series-parallel posets.

Throughout $P = (E, <)$ denotes a finite and non empty (i.e. having at least one vertex) partially ordered set or poset. Furthermore we denote by $\text{Max}(P)$ (resp. $\text{Min}(P)$) the set of all maximal (resp. minimal) elements of P .

We define a concatenation operation (quasi-series composition) on posets as follows:

Let P_1, P_2 be two posets and let $A \subseteq \text{Max}(P_1)$ and $B \subseteq \text{Min}(P_2)$ with $A \neq \emptyset$ and $B \neq \emptyset$.

$P = (P_1, A) \cdot (P_2, B)$ is the poset obtained as follows :

if $P_1 = (E_1, <_1)$ and $P_2 = (E_2, <_2)$, with $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, then

$P = (E_1 \cup E_2, <)$ such that :

$a < b$ if $a, b \in E_1$ and $a <_1 b$

or $a, b \in E_2$ and $a <_2 b$

or $a \in E_1, b \in E_2$ and there exist $\alpha \in A, \beta \in B$ such that $a <_1 \alpha$ and $\beta <_2 b$.

(When $A = \text{Max}(P_1)$ and $B = \text{Min}(P_2)$, we obtain the classical series composition as defined in LAWLER [12] or in VALDES et al. [21]).

This operation is a particular case of the graph operations studied in [3] by CUNNINGHAM or more generally of combinatorial operations as studied in [4] by CUNNINGHAM and EDMONDS.

Let us recall the classical **parallel composition** on posets.
 $P = P_1 + P_2$ is the poset obtained on $E = E_1 \cup E_2$ from the disjoint union of P_1 and P_2 .

Hence we can define the **Quasi-Series-Parallel** (QSP for short) class of posets, as the smallest class of posets that contains P_0 and closed under quasi-series and parallel compositions. (Where P_0 is the poset having only one element).

Decomposition trees for QSP

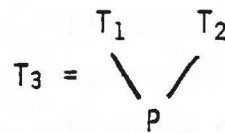
A QSP defined by a sequence of quasi-series and parallel compositions can be represented in a natural way, by a binary tree as shown in fig. 1.

This tree has been constructed by :

- (i) associating the trivial tree having one node with the trivial poset P_0 .
- (ii) using the rules of fig. 1 to build larger trees from smaller ones as the process of building QSP posets by quasi-series and parallel compositions progresses.

Let T_i $i=1,2,3$ be the binary tree associated with the QSP poset P_i then :

if $P_3 = P_1 + P_2$



if $P_3 = (P_1, A) \cdot (P_2, B)$

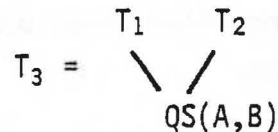


fig. 1

Notes:

1°) This decomposition tree is not unique.

2°) As we label the QS-nodes of a decomposition tree by the two associated sets A and B, then the tree provides a reconstruction of P.

For examples of QSP posets and associated decomposition-tree, see figures 2 and 3 which show examples given by LECLERC and MONTJARDET in [13].

In II, we study this class of posets and show that it has some properties with respect to poset invariants such as the jump number and the dimension.

We are wondering if some other poset invariants (such as scheduling problems) can be easily computed for QSP posets as shown for series-parallel graphs by TAKAYAMA et al. in [20].

In III, we show the class of QSP posets is identical to the well known class of N-free posets studied by many authors such as: GRILLET [8], HEMMINGER and BEINEKE [10], HEUCHENNE [11], LECLERC and MONTJARDET [13], RIVAL [17] and SYSLO [19]. Thus N-free posets can be considered as extensions of series-parallel posets and it is very natural to ask which properties are kept.

In IV we propose a kind of standard decomposition and its associated decomposition tree and also a linear recognition algorithm based on this tree.

II - JUMP NUMBER AND DIMENSION OF QSP POSETS.

A linear extension of a finite ordered set P is a total ordering τ of the elements of P in which $a < b$ in τ , whenever $a < b$ in P .

Let us denote by $\mathcal{L}(P)$ the set of all these linear extensions.

A) JUMP NUMBER.

For $\tau = x_1, \dots, x_n \in \mathcal{L}(P)$
a **jump** of τ is a pair (x_i, x_{i+1}) , $1 \leq i < n$ such that $x_i \not\leq x_{i+1}$ in P .

We define also the **jump number** of τ , denoted by $\sigma(\tau, P)$ as the number of such couples.

Similarly we define $\sigma(P) = \min_{\tau \in \mathcal{L}(P)} \sigma(\tau, P)$ as the **jump number** of P .

Recently the jump number has received some attention by CHEIN, COGIS, GIERZ, HABIB, PULLEYBLANK, POGUNTKE, RIVAL, SYSLO in references [1], [2], [7], [15], [16], [17] and [19].

In particular, PULLEYBLANK in [15] showed the NP-completeness of the problem to determine $\sigma(P)$ and this explains our interest in polynomially determining the jump number of restricted classes of posets, such as QSP posets.

At last we use two classes of linear extensions :

$\mathcal{O}(P) = \{ \tau \in \mathcal{L}(P) \mid \sigma(\tau, P) = \sigma(P) \}$, the set of all optimal linear extensions.

$\mathcal{G}(P)$, the set of all "greedy" linear extensions.

This notion was first introduced in [2].

A greedy linear extension is obtained when using systematically the following rule : "Climb as high as you can" .

More precisely, a linear extension can be seen as a sequence of maximal subsequences of elements of P separated by the jumps.

(i.e. $\tau = C_1.C_2.....C_{\sigma(\tau, P)+1} \in \mathcal{L}(P)$.)

We define $P_i = P - \bigcup_{1 \leq j < i} C_j$

τ is a greedy linear extension iff $\forall i, 1 \leq i \leq \sigma(\tau, P)$
 $\exists y$ minimal in P_i , such that y
 covers $\sup(C_i)$ in P .

(For any subsequence C of τ , we define two distinguished vertices, which are resp. the least and the greatest element of C with respect to the linear extension τ . We denote these elements resp. by $\sup_{\tau}(C)$ and $\inf_{\tau}(C)$. When there is no possible ambiguity, we simply denote them by $\sup(C)$ and $\inf(C)$).

Let us now consider $P = (P_1, A) \cup (P_2, B)$ and $\tau \in \mathcal{L}(P)$. Let a (resp. b) denotes the rightmost (resp. leftmost) element of A (resp. B) in τ . Thus we can decompose: $\tau = \tau_1 a \tau_2 b \tau_3$

The subsequence τ_1 is made up with maximal subsequences of elements of P_1 and P_2 . Clearly these subsequences are separated by jumps as their elements are necessarily incomparable in P . Thus we can construct v_1 as follows :

$v_1 = \tau''_1 \tau'_1$ where τ''_1 consists of elements of P_2
 τ'_1 consists of elements of P_1

Similarly for τ_2 and τ_3 we obtain :

$f(\tau) = \tau''_1 \tau'_1 a \tau'_2 \tau''_2 b \tau''_3 \tau'_3 \in \mathcal{L}(P)$, the canonical linear extension associated with τ .

Obviously, we have $\sigma(\tau, P) = \sigma(f(\tau), P)$.

LEMMA 1 : If $P = (P_1, A) \cdot (P_2, B)$ then $\sigma(P) > \sigma(P_1) + \sigma(P_2)$

Proof : Let us consider $\tau \in \mathcal{G}(P)$, and $v = f(\tau)$ as above

$v = \tau''_1 \tau'_1 a \tau'_2 \tau''_2 b \tau''_3 \tau'_3 \in \mathcal{G}(P)$. This yields immediatly

$v' = \tau'_1 a \tau'_2 \tau'_3 \in \mathcal{L}(P_1)$

$v'' = \tau''_1 \tau''_2 b \tau''_3 \in \mathcal{L}(P_2)$

Since $(\sup(\tau''_1), \inf(\tau'_1))$, $(\sup(\tau'_2), \inf(\tau''_2))$
and $(\sup(\tau''_3), \inf(\tau'_3))$ are jumps of v , we have :

$\sigma(v, P) = \sigma(v', P_1) + \sigma(v'', P_2) + \text{the jump } (\sup(\tau'_2), \inf(\tau''_2))$

And thus, including the case where τ'_2 and τ''_2 are empty,
 $\sigma(P) > \sigma(P_1) + \sigma(P_2)$. ■

LEMMA 2: Let $P = (P_1, A) \cdot (P_2, B)$ and $\mathcal{G}(P_1) \subseteq \mathcal{G}(P_1)$,
 $\mathcal{G}(P_2) \subseteq \mathcal{G}(P_2)$ then: $\sigma(P) = \sigma(P_1) + \sigma(P_2)$ and $\mathcal{G}(P) \subseteq \mathcal{G}(P)$.

Proof : Let $\tau \in \mathcal{G}(P)$, necessarily using the previous decomposition
 $\tau = \tau_1 a b \tau_3$ (i.e. τ_2 is empty).

Thus, using the same transformations as in lemma 1, with
 $v = f(\tau)$, we have: $\sigma(v, P) = \sigma(v', P_1) + \sigma(v'', P_2)$

Furthermore, since τ is a greedy linear extension, clearly
also v' and v'' are greedy respectively in P_1 and P_2 and thus by
hypothesis, $\sigma(\tau', P_1) = \sigma(P_1)$ and $\sigma(\tau'', P_2) = \sigma(P_2)$

Hence $\sigma(\tau, P) = \sigma(P_1) + \sigma(P_2) = \sigma(P)$
and therefore $\mathcal{G}(P) \subseteq \mathcal{G}(P)$. ■

Theorem 1 : For a QSP poset P , $\mathcal{G}(P) = \mathcal{G}(P)$

Proof : The previous lemma 2 gives immediately a recursive proof of
 $\mathcal{G}(P) \subseteq \mathcal{G}(P)$. Let us examine the equality.

If there exists $\tau \in \mathcal{G}(P) - \mathcal{G}(P)$, for $P = (P_1, A) \cdot (P_2, B)$,
then we apply on τ the transformations of lemma 1.

As $\sigma(P) = \sigma(P_1) + \sigma(P_2)$ then:

$\sigma(\tau, P) = \sigma(v', P_1) + \sigma(v'', P_2)$.

By the induction hypothesis $v' \in \mathcal{G}(P_1)$ and $v'' \in \mathcal{G}(P_2)$
and this gives $\tau \in \mathcal{G}(P)$, a contradiction. ■

COROLLARY : $\sigma(P)$ is exactly the number of P-nodes in the decomposition tree (i.e. the number of parallel compositions).

Proof: Since it is very easy to verify $\sigma(P_1 + P_2) = \sigma(P_1) + \sigma(P_2) + 1$ for every posets P_1 and P_2 , and since by lemma 2 we have:
 $\sigma((P_1, A) \cdot (P_2, B)) = \sigma(P_1) + \sigma(P_2)$, when P_1 and P_2 are QSP posets, thus we can polynomially compute $\sigma(P)$ by simply counting the P-nodes of one of its binary decomposition trees. ■

B) DIMENSION.

Let us now consider the well known **dimension** of posets, denoted by $\dim$, as defined by DUSHNIK and MILLER in [6]. For a recent survey on this subject, see ref. [14] by KELLY and TROTTER.

Unfortunately for this invariant the QSP class of posets yields only the following partial result.

LEMMA 2 : $\dim(P_1 + P_2) = \max(2, \dim(P_1), \dim(P_2))$, and
 $\dim((P_1, A) \cdot (P_2, B)) \leq \max(\dim(P_1), \dim(P_2)) + 1$.

Proof : The first equality is well known and quite obvious, let us consider the inequality.

When $\dim(P_1) = \dim(P_2) = 1$, then trivially $\dim((P_1, A) \cdot (P_2, B)) = 1$

Let us now suppose $\dim(P_1) = p$, $\dim(P_2) = q$ and $P = (P_1, A) \cdot (P_2, B)$ with $p \leq q$ and $2 \leq q$.

Thus there exist $\alpha_i \in \mathcal{L}(P_1)$, $1 \leq i \leq p$ and $\beta_j \in \mathcal{L}(P_2)$, $1 \leq j \leq q$, such that : $P_1 = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \alpha_i$, $P_2 = \bigcap_{1 \leq j \leq q} \beta_j$.

We define :

$$Q = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq p} (\alpha_i \beta_i) \right) \cap \left(\bigcap_{p < j \leq q} (\alpha_p \beta_j) \right)$$

Thus Q is the intersection of q linear extensions of P , and $P \subseteq Q$ (natural order induced by the inclusion of their associated binary relations.)

We notice :

1) For $x \in P_1$:

$$(\exists b \in B \text{ with } x \not\leq b) \Rightarrow (\forall y \in B, x \not\leq y).$$

2) For $x \in P_2$:

$$(\exists a \in A \text{ with } a \not\leq x) \Rightarrow (\forall y \in A, y \not\leq x).$$

Thus we may define I_A (resp. I_B) the set of elements of P_2 (resp. P_1) which are incomparable in P with the elements of A (resp. B).

Let us recall an interesting theorem of RABINOVITCH 1973 (see KELLY and TROTTER [14] p. 191). For A, B , two disjoint subsets of a poset P , there does not exist an extension E of P such that $a < b$ for each incomparable pair $\langle a, b \rangle$ with $a \in A$ and $b \in B$, iff there are $a_1, a_2 \in A$, and $b_1, b_2 \in B$ with $b_1 < a_1$, $b_2 < a_2$, b_1 and a_2 , and b_2 and a_1 are incomparable.

Hence there obviously exists $R \in \mathcal{L}(P)$ such that: $\forall x \in I_A$ $\forall y \in I_B$, $y < x$ in R . Then we can easily check that $Q \cap R = P$ and thus we have obtained the desired inequality. ■

COMMENTS:

Although $\dim((P_1, A) \cdot (P_2, B)) = \max(2, \dim(P_1), \dim(P_2))$ when $A = \max(P_1)$ and $B = \min(P_2)$ (normal series composition), the above inequality cannot be strengthened for the quasi-series composition. (See figures 2 and 3).

Similarly series-parallel posets are 2-dimensional posets, but since any poset P can be embedded in a QSP poset P , by adding vertices on the edges of its Hasse diagram. Thus there exist QSP posets of high dimension.

III- CHARACTERIZATIONS OF QSP POSETS.

Let us denote by an "N" the following poset on four elements $\{a,b,c,d\}$ such that $a < b$, $c < b$ and $c < d$, and a and c , a and b , b and d , are incomparable.

We say that a poset P is "N-free" if it contains no cover preserving subset isomorphic to N .

With this definition we can now give some characterizations of the QSP class of posets.

Theorem 2: The four following properties are equivalent:

- (i) P is QSP.
- (ii) P is an N-free poset.
- (iii) P is a C.A.C. **Chain-Antichain Complete** order (i.e. every maximal chain intersects each maximal antichains).
- (iv) The Hasse diagram of P is a line-digraph.

Therefore, this particular class of posets has been studied several times, and was first introduced by GRILLET [8] who showed equivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (ii). HEUCHENNE in [11] showed (iv) $\Leftrightarrow$ (ii). LECLERC and MONTJARDET studied this class in [13].

Recently RIVAL [16] and SYSLO [19] studied them with respect to the jump number.

Obviously, from the last statement (iv) we can associate many other characterizations of QSP by transposing those developed for line-digraphs by HEMMINGER and BEINEKE in [10], or by SYSLO in [18].

Proof: Hence to prove theorem 2, it only remains to show the equivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) : This part of the proof is nearly obvious, since P_0 does not contain any N , and our two fundamental operations (quasi-series and parallel composition) cannot create any N .

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Let P be a connected poset. For any x in P we denote by $\Gamma^-(x)$ (resp. $\Gamma^+(x)$) the set of predecessors (resp. successors) of x in the Hasse diagram of P .

Since P is finite there exists $x \in P$ such that $\Gamma^-(x) \subseteq \text{Min}(P)$. If P is N -free, we can write $P = (A, A) \cdot (P', B)$ with $A = \Gamma^-(x)$, $B = \Gamma^+(s)$ where $s \in A$, and $P' = P - B$.

As it is very easy to see that the subgraph of the Hasse diagram of P induced by $A \cup B$ is a complete bipartite graph. ■

From this proof we obtain another recursive construction of the QSP class, using the following restrictions of the parallel and quasi-series composition:

-the P_0 -parallel composition

$$P = P_0 + P_1 \quad \text{for any poset } P_1$$

-the source composition

$$P = S_1 \times (P_2, S_2) \quad \text{which is the poset } P = (S_1, S_1) \cdot (P_2, B) \text{ where } S_1 \text{ is a stable set, } P_2 \text{ a poset and } B \subseteq \text{min}(P_2)$$

Corollary : The QSP class is the smallest class of posets that contains P_0 and closed under P_0 -parallel and source composition.

Using theorem 2, we notice that our theorem 1 is equivalent to the main result of RIVAL in [16]. Furthermore the use of the above corollary could even give a simpler proof.

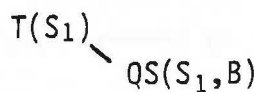
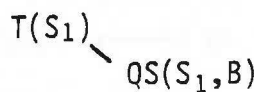
IV A LINEAR RECOGNITION ALGORITHM.

We present here an algorithm in $O(n + m)$ to recognize and to decompose a poset P when its Hasse diagram $H = (X, U)$ is given, (where X is the vertex set and U the arc set, $|X| = n$ and $|U| = m$).

It is based essentially on the corollary of the Theorem 2 and runs as follows:

```
begin
  T ← ∅
  while H ≠ ∅ do
    begin
      x ← source of H

      if H = {x} + (H - {x}) then H ← H - {x}
                                T ← T + 
                                T ← T + 

      if H = S1 × (H - S1, B) then H ← H - S1
                                {with x ∈ S1}
                                T ← T + 
                                T ← T + 

      else " P is not QSP "

    end; {of the while}
  end. {of the algorithm}
```

We expose now the algorithm with more details and prove its correctness and determine its complexity.

A - Data structures and preprocessing

We suppose $X = \{1, 2, \dots, n\}$ and H represented by its neighbourhood function (lists):

$$\begin{aligned}\Gamma^+ : X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ i &\longmapsto \Gamma^+(i) = \{i_1, \dots, i_k\}\end{aligned}$$

the ordered successor set (list) ie such that : $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

The algorithm uses the two well known functions on posets, the **rank** and the **tension** respectively denoted by r and t and defined as follows:

$$\begin{aligned}r : X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto r(x) = \text{the length of the longest path from a minimal element to } x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t : U &\longrightarrow \mathbb{N} \\ xy &\longmapsto t(xy) = r(y) - r(x)\end{aligned}$$

These functions can be computed in $O(n + m)$ with the above data structures for H .

At last, with the same complexity we obtain the ordered lists Γ^- of the predecessor sets, the out-degree and the set (list) $\min(P)$, which is the source-set of H .

B - The Algorithm

begin

$$T \leftarrow \emptyset$$
$$S \leftarrow \min(P)$$

$x \leftarrow$ first element of S

```
B ← true
```

```
while (  $\exists x \in H - T$  ) and ( B = true ) do
```

begin

```
x ← first element in S not yet marked
```

```
if x is a sink
```

```

then  T ← T + p
      mark x

```

```

else y ← first successor of x

```

```
if t(xy) = 1
```

then Bipartite($\Gamma^-(y)$, $\Gamma^+(x)$, B)

```
if B = true
```

then mark every element of $\Gamma^-(y)$

$T \leftarrow T +$ QS

$$\{ \Gamma^-(y) = \{x_1, \dots, x_k\} \}$$
$$S \leftarrow S + \Gamma^+(x)$$

```
end; {of the while}
```

```
if B = true then "P is QSP"
```

$$T \leftarrow T - \overset{x}{\diagup} p + \overset{x}{\diagup}$$

```
else "P is not QSP"
```

```
end. {of the algorithm}
```

$\text{Bipartite}(\Gamma^-(y), \Gamma^+(x), B)$ is a procedure which checks that the subgraph of H induced by $\Gamma^-(y) \cup \Gamma^+(x)$ is a complete bipartite graph and answers $B = \text{true}$ in this case.

We remark that in each QS-node it suffices to notice only $\Gamma^+(x)$ because we have automatically $\Gamma^-(y)$ by exploring its left son.

C - Proof and Complexity

THEOREM 3: The above algorithm recognizes and decomposes a poset P in $O(n + m)$ when its Hasse diagram H is given by its neighbourhood function.

Proof:

If P is QSP the corollary of the Theorem 2 proves that H can be decomposed as

$$H = \{x\} + (H - \{x\}) \quad \text{with } x \in \min(H)$$

$$\text{or } H = S_1 \times (H - S_1, B) \quad \text{where } S_1 \subseteq \min(H) \\ B \subseteq \min(H - S_1)$$

and so on with $H - S_1$.

Else it contains necessarily a N which will be detected in the procedure Bipartite .

Let us remark that when P is QSP and $t(xy) > 2$ in the algorithm then x is not considered but there exists at least one z in $\Gamma^-(y)$ such that $t(zy) = 1$. Therefore x will be placed in the tree T when a vertex like z will be considered.

Let us determine now the complexity when P is QSP.

At the end of the algorithm we have $|S| = n$, each element is considered at most two time then the use of S requires $O(n)$ elementary operations.

To verify that the subgraph of H induced by $\Gamma^+(x) = \{y_1, \dots, y_l\}$ and $\Gamma^-(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ is complete bipartite we must test the equalities

$$\Gamma^+(x_i) = \Gamma^+(x_1) \quad i = 2, k$$

$$\Gamma^-(y_j) = \Gamma^-(y_1) \quad j = 2, l$$

This can be done in $O(|\Gamma^+(x)| \times |\Gamma^-(y)|)$ with the ordered lists and then in $O(n + m)$ for the whole graph.

Obviously the decomposition-tree of P uses $O(n)$ time.

Finally the algorithm is in $O(n + m)$ when P is QSP, else it stops before. ■

D - Standard decomposition-tree

The algorithm supplies a natural decomposition tree for any QSP.

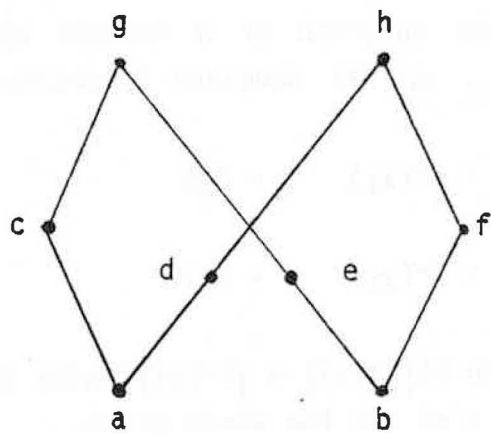
Indeed the elements are placed in the tree with respect to the rank function: at first the minimal elements, then the unit-rank elements and so on.

The only difference between two algorithmic decomposition-trees associated with the same N -free poset depends on the apparition order of the elements with the same rank in S .

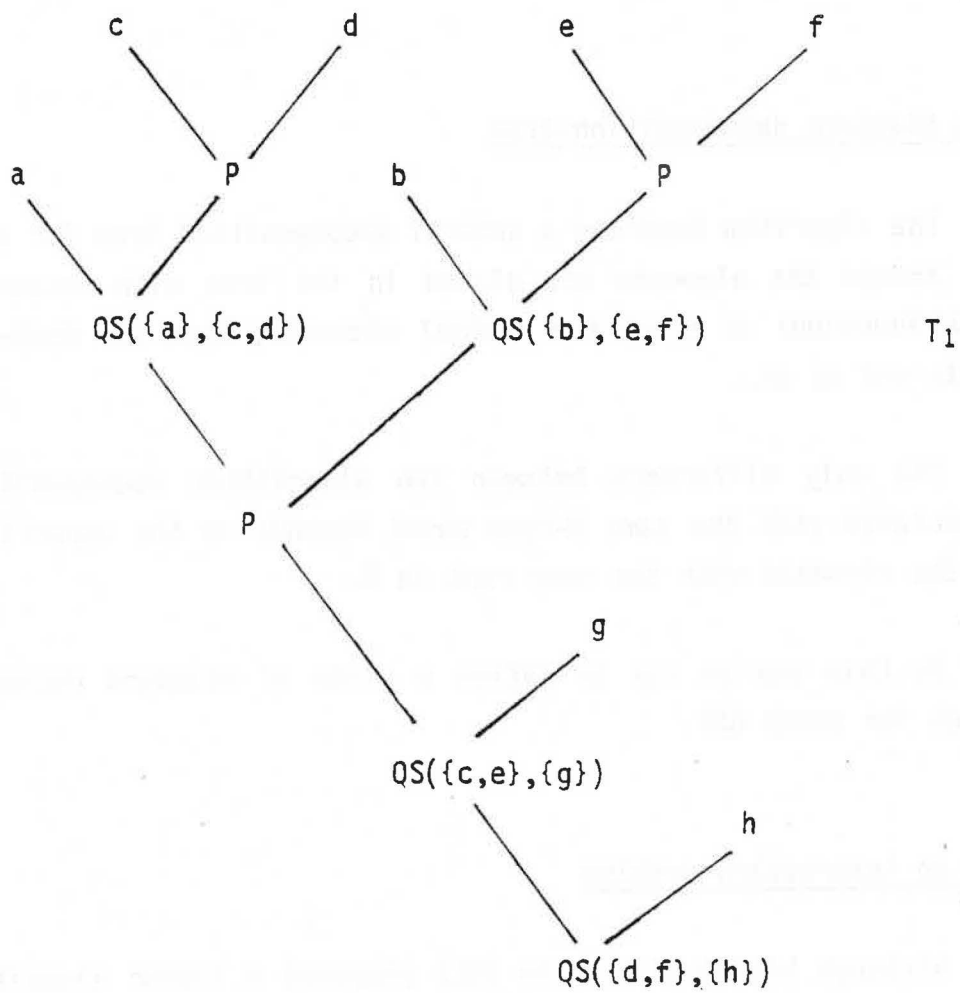
By this way we can so define a class of standard decomposition-trees for every QSP.

E - An interesting problem

Although VALDES et al. in [21] proposed a linear algorithm which recognizes every acircuit digraph whose transitive closure yields series-parallel poset, it is not known if there exists a linear algorithm to recognize every acircuit digraph whose transitive closure yields a QSP poset.



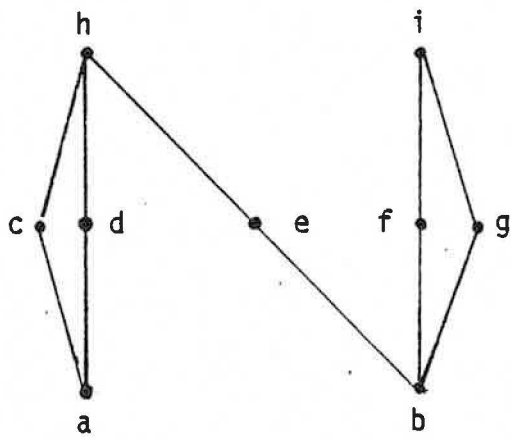
P_1



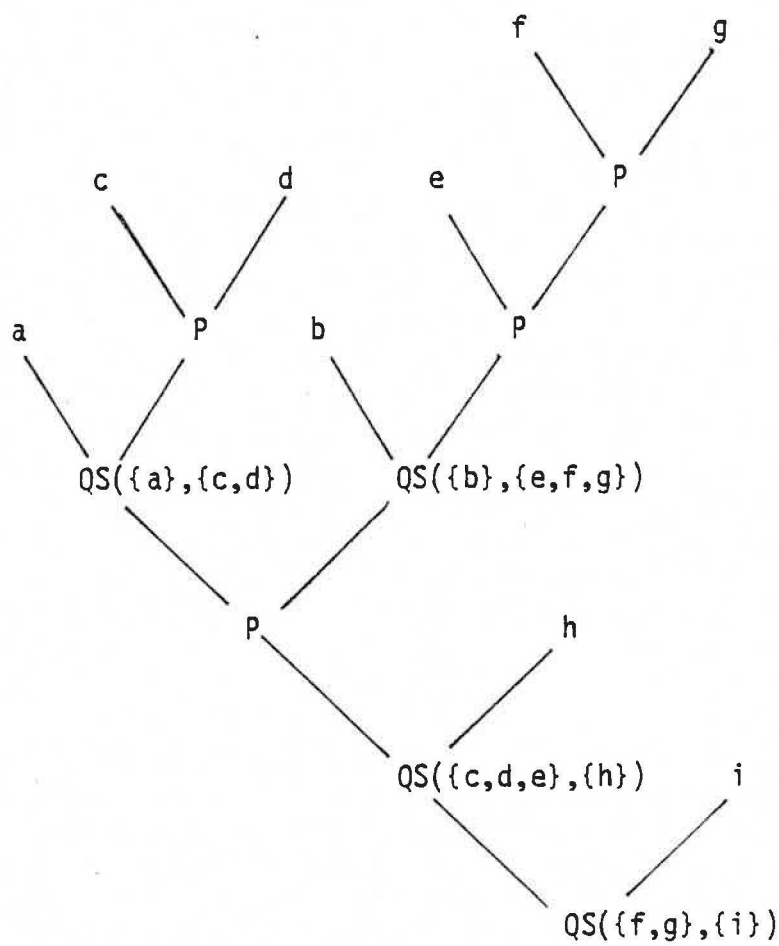
T_1

$$\sigma(P_1) = 3 \quad \text{and} \quad \dim(P_1) = 3$$

fig. 2.



P_2



T_2

$$\sigma(P_2) = 4 \quad \text{and} \quad \dim(P_2) = 2.$$

fig. 3

REFERENCES

- 1- M. CHEIN, M. HABIB, The jump number of dags and posets : an introduction, Ann. Discrete Math. 9 (1980), p. 189-194.
- 2- O. COGIS, M. HABIB, Nombre de sauts et graphes série-parallèles, R.A.I.R.O. Informatique Théorique/Theoretical Informatics, Vol 13, N°1, (1979), p. 3-18.
- 3- W.H. CUNNINGHAM, Decomposition of directed graphs, SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods, Vol. 3, N°2,(1982), p. 214-228.
- 4- W.H. CUNNINGHAM, J. EDMONDS, A combinatorial decomposition theory, Canad. J. Math. 32 (1980), p. 734-765.
- 5- R.J. DUFFIN, Topology of series-parallel networks, Journal of Mathematical Analysis and Applications 10 (1965), 303-318.
- 6- B. DUSHNIK, E.W. MILLER, Partially ordered sets, Amer. J. Math. 63 (1941), p. 600-610.
- 7- G. GIERZ, W. POGUNTKE, Minimizing setups for ordered sets:a linear algebraic approach, SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods, Vol.4, N°1, (1983), p.132-144.
- 8- P.A. GRILLET, Maximal chains and antichains, Fund. Math. 65 (1969), p. 157-167.
- 9- M. HABIB, R. MOHRING, On some complexity properties of N-free posets, in preparation.
- 10- R.L. HEMMINGER, L.W. BEINEKE, Line graphs and line digraphs, in: L.W. BEINEKE, R.J. WILSON (eds.), Selected topics in Graph Theory, Academic Press, London, (1978), p. 271-305.
- 11- C. HEUCHENNE, Sur une certaine correspondance entre graphes, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 33 (1964), p. 743-753.
- 12- E.L. LAWLER, Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, Ann. Discrete Math. 2,(1978),p. 75-90.

- 13- B. LECLERC, B. MONTJARDET, Orders C.A.C., Fund. Math. (1973), p. 11-22.
- 14- D. KELLY, W.T. TROTTER, Dimension theory for ordered sets, in Ordered sets, RIVAL ed., Nato Advanced Studies, (1982), p. 171-211.
- 15- W.R. PULLEYBLANK, On minimizing setups in precedence constrained scheduling, Discrete Appl. Math. (to appear).
- 16- I. RIVAL, Optimal linear extensions by interchanging chains, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.85, N°4,(1982), p.509-513.
- 17- I. RIVAL, Linear extensions of finite ordered sets, Ann. Discrete Math., to appear (1984), p.355-370.
- 18- M.M. SYSLO, A labelling algorithm to recognize a line digraph and output its root digraph, Information Processing Letters 15(1982), p.28-30.
- 19- M.M. SYSLO, Minimizing the jump number for ordered sets : a graph-theoretic approach, Order 1 (1984), p. 7-19.
- 20- K. TAKAMIZAWA, T. NISHIZEKI, N. SAITO, Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs, J.A.C.M., vol.29, N°3,(1982), p. 623-641.
- 21- J. VALDES, R.E. TARJAN, E.L. LAWLER, The recognition of Series Parallel digraphs, Proc. 11th Ann. A.C.M. Symp. on Theory of Computing (1979) p. 1-12.

CHAPITRE II

SOME RESULTS ON THE GREEDY DIMENSION

ABSTRACT

This paper introduces a new concept of dimension for partially ordered sets. DUSHNIK and MILLER in 1941 introduced the concept of dimension of a partial order P , as the minimum cardinality of a realizer, (i.e. a set of linear extensions of P whose intersection is P). Every poset has a greedy realizer (i.e. a realizer consisting of greedy linear extensions). We begin the study of the notion of greedy dimension of a poset and its relationship with the usual dimension by proving that equality holds for a wide class of posets including N -free posets, 2-dimensional posets and distributive lattices.

RESUME

Ce papier est principalement consacré à la définition d'une nouvelle notion de dimension.

En effet, DUSHNIK et MILLER ont introduit en 1941 la dimension d'un ordre partiel comme le cardinal minimal d'une base, (i.e. un ensemble d'ordres totaux supérieurs à P dont l'intersection est P).

Remarquant que tout ordre partiel admet une base constituée uniquement d'ordres totaux gloutons, nous commençons l'étude de la dimension gloutonne et nous remarquons qu'il y a égalité entre les 2 notions de dimension sur une large classe d'ordres partiels comprenant les ordres Quasi-Serie-Parallèles, ou ordres sans N .

I - INTRODUCTION

Throughout we consider only finite partially ordered sets (also called **posets**). If a poset is denoted by P , then its underlying set will usually also be denoted by P and its order relation by $\leq_P$. If for $a, b \in P$, we have neither $a \leq_P b$, nor $b \leq_P a$, then the pair $\langle a, b \rangle$ is called **noncomparable** and we denote by $\parallel$ this binary symmetric relation on P . We say x covers y in P , if $y <_P x$ and if there exists no element between them (in other words $[y, x]$, the interval in P from y to x is an edge of the (Hasse) diagram of P). A **linear extension** τ of P is a linear (total) order which contains P (i.e. $x \leq_P y \Rightarrow x \leq_\tau y$). We denote by $\mathcal{L}(P)$ the set of all linear extensions associated with P .

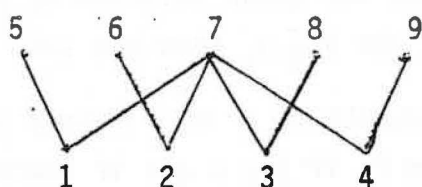
SZPILRAJN [13] showed in 1930 that any order relation can be extended to a linear order. He also proved that any order relation is the intersection of its linear extensions. If $\mathcal{C}$ is a family of linear extensions whose intersection is the order relation $\leq_P$ on P , then $\mathcal{C}$ is a **realizer** of $\leq_P$. We also say that $\mathcal{C}$ realizes P . In 1941, DUSHNIK and MILLER [2] defined the **dimension** $\dim(P)$ of a poset P , as the minimum cardinality of a realizer of $\leq_P$. Many authors since have made significant contributions to the theory of dimension for posets. For an excellent and recent survey on dimension, see KELLY and TROTTER [9] on which we base most of our notation.

It is natural to look for generalizations of dimension by considering particular classes of linear extensions. Here we study greedy linear extensions and the associated greedy dimension, which we denote by $\dim_g$. We show that these two notions of dimension are identical over the class of N -free posets. We previously asked whether $\dim_g$ is a comparability invariant. Since TROTTER, and ourselves independently have found two interesting counterexamples (see figure 1). These examples also disprove the monotonicity of $\dim_g$. There still remain two important problems about the greedy dimension.

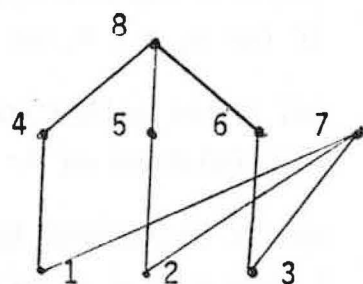
1°) Characterize the class of posets for which $\dim(P) = \dim_g(P)$.

2°) Is the computation of $\dim_g$ an NP-hard problem ?

(YANNAKAKIS in [15] proved that dimension itself is NP-hard).



P_1



P_2

$$\dim_g(P_1) = \dim_g(P_2) = 4$$

$$\dim(P_1) = \dim(P_2) = 3$$

$$\dim_g(P_1^d) = \dim_g(P_2^d) = 3$$

$$\dim_g(P_1 - \{7\}) = \dim_g(P_2 - \{7\}) = 2$$

$$\dim_g(\hat{P}_1) = \dim_g(\hat{P}_2) = 3$$

(where P^d denotes the dual of P and $\hat{P}$ a minimal N -free poset containing P obtained by adding vertices on covering edges).

Figure 1

A poset P is called **d-irreducible** if it has dimension $d > 2$ and if the removal of any element lowers its dimension. An **irreducible** poset is d -irreducible for some $d > 2$. A linear extension $\tau \in \mathcal{L}(P)$, can be written as a word on P , $\tau = x_1 \dots x_n$, with $n = |P|$.

In this notation, we see immediately that there is a canonical decomposition of τ into its maximal subsequences, chains of P separated by incomparability arcs. Thus, $\tau = C_1 \dots C_k$.

Let us denote by $\inf(C)$ and $\sup(C)$, respectively, the first and the last element of a sequence C . Therefore in this decomposition, we have : $\sup(C_i) \parallel \inf(C_{i+1})$ for $1 \leq i < k$.

$\tau = C_1 \dots C_k$ is called a **greedy linear extension** of P
iff $\inf(C_j)$ covers $\sup(C_i)$ in $P \Rightarrow \exists x \in P, x \leq_P \inf(C_j)$

$$\text{and } x \notin \bigcup_{1 \leq m \leq i} C_m$$

Algorithmically a greedy linear extension is one obtained by systematically following this rule : "**Climb as high as you can**". It is easy to compute a greedy linear extension.

This concept was first introduced by COGIS and HABIB [1] in work on the jump number (nombre de sauts) of posets. More recently RIVAL [11], and HABIB and JEGOU [6], and, FAIGLE and GIERZ [4] give some further developments. Let us denote by $g(P)$ the set of all greedy linear extensions associated with a poset P . Obviously $g(P) \subseteq \mathcal{L}(P)$.

II - THE GREEDY DIMENSION

In [3] EL-ZAHAR and RIVAL prove for every pair a, b such that $a \parallel b$ the existence of a greedy linear extension τ with $a <_{\tau} b$. This yields

immediately the existence of a **greedy realizer**, and thus of the **greedy dimension**. We have also obtained this result by producing algorithmically such a greedy linear extension for every critical pair. We now give another proof of a similar result interesting in itself, which was communicated to us by COGIS.

As in [3], we adopt the following notation:

$$D(z) = \{t \in P \mid t <_P z\} \text{ and } I(z) = \{t \in P \mid t \parallel z\}.$$

z is **accessible** if $D(z)$ is a chain in P . A chain C in P is a **greedy chain** if $\sup(C)$ is a maximal accessible element.

Lemma 1: For every $x \in P$, there exists $\tau = C_1 \dots C_m$ which is the beginning of a greedy linear extension of P , such that:

- i) C_i $1 \leq i \leq m$ is a greedy chain of $P - (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_{i-1})$ not containing x
- ii) every greedy chain in $P - (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m)$ contains x
- iii) $I(x) \subseteq C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m$.

Proof. Clearly there exists $\tau = C_1 \dots C_m$ which satisfies i) and ii). We just have to prove that it implies iii).

If every greedy chain in a poset Q contains x then x is accessible (trivial) and $I_Q(x) = \emptyset$. (Indeed, let $y \in Q$, if y is accessible then it belongs to a greedy chain and hence x and y are comparable; if y is not accessible then there exists z maximal accessible element with $z \leq y$, thus we have $x \leq_Q y$).

Therefore from ii) with $Q = P - (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m)$ we have $I_Q(x) = \emptyset$, and thus $I_P(x) \subseteq C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m$.

Lemma 2. For every $x \in P$, there exists a greedy linear extension τ_x such that $y <_{\tau_x} x$ for every $y \in I(x)$.

Proof. According to the lemma 1, we can complete $\tau = C_1 \dots C_m$ with any greedy linear extension of $P - (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m)$ and obtain $\tau_x = \tau \vee$ which is a greedy linear extension of P .

Proposition 1. For every poset P there exists a greedy realizer.

Proof. We just notice that $\bigcap_{x \in P} \tau_x = P$, and thus we have a greedy realizer of P .

Definition. The **greedy dimension** of a poset P , denoted by $\dim_g(P)$, is the minimum cardinality of a greedy realizer.

For any poset P , we have obviously that $\dim(P) \leq \dim_g(P)$. Our main result is that equality holds for a wide class of posets called N -free. A poset is N -free if it has no " N " in its (Hasse) diagram. (See RIVAL [11] or HABIB and JEGOU [6] for a study of this class of posets.)

For brevity, we adopt the following notation.

For $\tau = C_1 C_2 \dots C_k \in (P)$, we say that τ is not **greedy** in $\sup(C_i)$ if there exists j , $i < j \leq k$ with $\inf(C_j)$ covers $\sup(C_i)$ in P , and for each y such that $y \leq_P \inf(C_j)$ we have $y \leq_{\tau} \sup(C_i)$.

Theorem. Let P be a N -free poset. Then $\dim_g(P) = \dim(P)$.

Proof. Let P be an N -free poset, and $B = \{\tau_1, \dots, \tau_{\dim(P)}\}$ be a minimal realizer of P .

Suppose there exists $\tau_i \in B$ which is not greedy. Let x be the first element (i.e. the smallest with respect to τ_i) where τ_i is not greedy. We can decompose τ_i in $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ with $x = \sup(\mu_1)$, and where $y = \inf(\mu_3)$ satisfies (1) $x \leq_P y$, (2) $\mu_1 y$ is the beginning of a greedy linear extension of P , and (3) y is the smallest element of τ_i that satisfies (1) and (2).

As τ_i is not greedy in x then μ_2 is not empty, $x \parallel \inf(\mu_2)$ and for each $t \in \mu_2$, $t \parallel y$. Let $\tau'_i = \mu_1 y \mu_2 \mu'_3$ with $\mu'_3 = \mu_3 - y$. Consider $B' = B - \tau_i + \tau'_i$. We shall prove that B' is a realizer of P . Trivially $\tau'_i \in \mathcal{L}(P)$. Furthermore, the only change from τ_i to τ'_i is the removal of y with respect to the elements of μ_2 . We distinguish two cases.

α) For each $z \in \mu_2$, $z \parallel x$.

Then, there must exist some $\theta \in B$ such that $z \leq_{\theta} x$ and thus $z \leq_{\theta} y$,

Thus B' is still a realizer of P .

β) There exists a the smallest element of μ_2 comparable with x .

As seen previously $\inf(\mu_2) \neq a$, and therefore, we necessarily have $z \in \mu_2$ such that a covers z . If not then $\mu_1 a$ would be the beginning of a greedy linear extension which contradicts the previous condition (3). But then we have a forbidden configuration namely an " N ", $\{z, a, x, y\}$.

Remarks

As illustrated in figure 1, to any poset P we can associate an N -free poset $\hat{P}$ which contains P . Thus there exist N -free posets of large greedy dimension.

Let us recall that for N -free posets every greedy linear extension realizes the minimum number of jumps. For a proof of this result see RIVAL [11], SYSLO [12], HABIB and JEGOU [6], or FAIGLE and GIERZ [4]. Therefore N -free posets seem to be very closely related with greedy linear extensions.

It is not known whether the computation of dimension is still an NP-hard problem over the class of N -free posets.

Proposition 2. If $\dim P=2$ then every minimal realizer of P is greedy.

Proof. Let $B = \{\tau_1, \tau_2\}$ be a minimal realizer of P , we can apply exactly the same proof as above. Suppose τ_1 is not greedy in x , then we decompose τ_1 into $\mu_1\mu_2\mu_3$, as in Proposition 1. We have $x \leq_{\tau_1} \mu_2$ and

$\mu_2 \leq_{\tau_1} y$. Necessarily we have $y \leq_{\tau_2} \mu_2$ and hence $x \leq_{\tau_2} \mu_2$, which implies $x \leq_{\hat{P}} \mu_2$.

This yields a contradiction as τ was supposed to be not greedy in x . ■

This result is closely related to a characterization of planar lattices. As a matter associated with any planar lattice, there are two natural linear extensions: the **left order** which for a given planar embedding selects elements along the "left boundary" and the **right order** which does this on the "right boundary". These linear extensions are actually greedy and their intersection is the order (cf. KELLY and RIVAL [8]).

Let us denote by $w(P)$ the width of P , i.e. the cardinal of a maximum antichain.

Proposition 3. $\dim_g(P) \leq w(P)$

Proof. As an extension of the two previous lemmas, we now prove that for every chain $D=[a_1, \dots, a_k]$ in P there exist a **greedy lower extension** (i.e. a greedy linear extension τ , in which for every $a_i \in D$ and for every $z \in I(a_i)$, then $z \underset{\tau}{\leq} a_i$).

The proof goes by induction on $|D|$. If $|D|=1$, the result is direct from the lemma 2. If $|D| > 2$, let us apply the lemma 1 for a_1 in P . Thus there exists $\tau(a_1) = C_1 \dots C_m$ the beginning of a greedy linear extension in P , which satisfies i), ii) and iii). Then using the induction hypothesis there exists ν a greedy lower extension for $D - \{a_1\}$ in $Q = P - (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m)$. Therefore $\tau = \tau(a_1)\nu$ is a greedy lower extension for D in P .

By the theorem of Dilworth there exist coverings of P by $w(P)$ chains. Let us take such a covering $D_1, \dots, D_{w(P)}$. For every i , $1 \leq i \leq w(P)$, let τ_i be a greedy lower extension of D_i , then $\{\tau_i, 1 \leq i \leq w(P)\}$ is a greedy realizer of P (since for every pair x, y in P with $x \parallel y$, then $x \in D_i$ and $y \in D_j$, with $i \neq j$, and $x \underset{\tau_j}{\leq} y, y \underset{\tau_i}{\leq} x$).

Comments on this result.

- This result was also obtained independently by TROTTER.
- HIRAGUCHI in 1951 [7] proved the same inequality for the usual dimension, and thus this implies $\dim_g(P) = \dim(P)$ for posets such that $\dim(P) = w(P)$.
- By an analogous remark SIMION proved for every poset P , $\dim_g(P) \leq w(J_P)$, where J_P denotes the subposet of join-irreducible elements. Since it is known that $\dim(L) = w(J_L)$ for every distributive lattice L (see KELLY and TROTTER [9]) one can easily deduce $\dim_g(L) = \dim(L)$.

- For a chain D in P , we can similarly study the notion of **greedy upper extension**, but these extensions do not always exist. (See for example the chain $D=\{7\}$ in poset P_1 of figure 1).

ACKNOWLEDGEMENTS. The authors are really indebted to Professor I. RIVAL and to an anonymous referee for corrections which improved the presentation of this paper. The authors also thank Professor T. TROTTER Jr. for his interest on the greedy dimension.

REFERENCES

- 1 - O. COGIS, M. HABIB, Nombre de sauts et graphes série-parallèles, RAIRO Inform. Théorique, 13 (1979) 3-18.
- 2 - B. DUSHNIK, E.W. MILLER, Partially ordered sets, Amer. J. Math. 63, (1941) 600-610.
- 3 - M.H. EL-ZAHAR, I. RIVAL, Greedy linear extensions to minimize jumps, to appear in Discrete Applied Mathematics.
- 4 - U. FAIGLE, G. GIERZ, A construction for strongly greedy ordered sets, Proc. 8 Symp. Operation Research (Karlsruhe) 1983 307-314.
- 5 - M. HABIB, Comparability invariants, to appear in Annals of Discrete Mathematics (1984).
- 6 - M. HABIB, R. JEGOU, On quasi-series-parallel posets, to appear in Discrete Mathematics.
- 7 - T. HIRAGUCHI, On the dimension of partially ordered sets, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 1, (1951) 77-94.
- 8 - D. KELLY, I. RIVAL, Planar lattices, Canadian J. of Math., Vol. 27, (1975) 636-665.
- 9 - D. KELLY, W.T. TROTTER Jr., Dimension theory for ordered sets, in Ordered Sets, I. RIVAL (ed.) 1982, D. REIDEL Publishing Company, 171-211.
- 10 - I. RABINOVITCH, I. RIVAL, The rank of a distributive lattice, Discrete Math. 25, (1979) 275-279.
- 11 - I. RIVAL, Optimal linear extensions by interchanging chains, Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), 387-394.
- 12 - M. SYSLO, Minimizing the jump number for ordered sets : a graph theoretic approach, ORDER Vol. 1, N°1 (1984) 7-20.
- 13 - E. SZPILRAJN, Sur l'extension de l'ordre partiel, Fund. Math. 16 (1930) 386-389.
- 14 - W.T. TROTTER, J.I. MOORE, D.P. SUMNER, The dimension of a comparability graph, Proc. Amer. Math. Soc. 60, (1976) 35-38.
- 15 - M. YANNAKAKIS, The complexity of the partial order dimension problem, SIAM J. Alg. Disc. Meth., Vol. 3, N° 3 (1982) 351-358.

Un problème plus simple :

"13 Bis,

Est-ce un nombre pair ou impair ?"

R. QUENEAU.

DEUXIEME PARTIE

DE L'UTILITE DES JOINTS

CHAPITRE I

PRESENTATION - NOTATIONS

Dans toute la suite k et n seront deux entiers vérifiant $2 \leq k \leq n$ et $\mathcal{P}(n,k)$ désignera l'ensemble des partitions de n en k sommants que nous définirons, à la numérotation près, comme L. COMTET [5] par :

$$\mathcal{P}(n,k) = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k, \sum_{i=1}^k n_i = n \}$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$[a,b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ intervalle entier ($a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$)

$\lfloor x \rfloor =$ partie entière inférieure de x

$\lceil x \rceil =$ partie entière supérieure de x ($x \in \mathbb{R}$)

$\Sigma_k =$ ensemble des permutations de $[1,k]$

Les termes ou notions employés concernant la théorie des graphes sont empruntés à C. BERGE [1].

Tous les graphes ou multigraphes considérés seront non orientés et nous écrirons $ij = ji = \{i,j\}$ pour toute arête.

Pour tout graphe simple $G = (X,E)$, donc sans boucle et sans arête multiple, et tout sommet x de G , $\Gamma(x)$ sera l'ensemble des voisins de x et $d(x)$ son degré. Par définition $d(x) = |\Gamma(x)|$, rappelons que

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2m \quad (1), \text{ où } m = |E| \text{ est le nombre d'arêtes de } G.$$

Si G est un multigraphe sans boucle E est une famille d'arêtes et le degré, $d(x)$, d'un sommet x , le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. L'égalité (1) tient toujours.

Les problèmes que nous allons étudier utilisent les opérations classiques de joint suivant un graphe et de substitution dans un hypergraphe. Ces opérations interviennent en combinatoire et en optimisation lorsque l'on s'intéresse à des problèmes de décomposition de structures comme par exemple les graphes, les hypergraphes, les fonctions booléennes. Dans [10] le lecteur trouvera un aperçu général du sujet ainsi que de ses nombreuses applications.

L'opération de joint [15] est définie de la façon suivante: si G et G' sont deux graphes simples quelconques et x un sommet de G , le joint de

G' par rapport à x suivant G , noté $G \overset{G'}{\underset{x}{\text{joint}}}$, est le graphe simple obtenu en remplaçant x par G' et en reliant tout sommet de G' à tout voisin de x dans G .

Cette opération se définit de même pour des multigraphes sans boucles.

Soit $G = ([1,k], E)$ un graphe simple d'ordre k .

A toute partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$ nous pouvons associer une partition $\{S_1, \dots, S_k\}$ de $[1,n]$ où $S_i = n_i \ \forall i \in [1,k]$ et définir k graphes stables $G_i = (S_i, \emptyset)$.

Etant donnée une permutation σ de Σ_k , nous noterons $G(p,\sigma) = ([1,n], E(p,\sigma))$ le graphe simple d'ordre n défini par

$$G(p,\sigma) = G \overset{\begin{matrix} G_{\sigma(1)} & G_{\sigma(2)} & \dots & G_{\sigma(k)} \\ 1 & 2 & \dots & k \end{matrix}}{\underset{\quad}{\text{joint}}}$$

obtenu en faisant le joint de $G_{\sigma(i)}$, d'ordre $n_{\sigma(i)}$, par rapport au sommet i , $\forall i \in [1,k]$.

Le nombre d'arêtes de $G(p,\sigma)$ est alors:

$$\begin{aligned} m_{G(p,\sigma)} &= |E(p,\sigma)| = \sum_{ij \in E} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(j)} \\ &= \sum_{ij \in E} x_i x_j \end{aligned}$$

en posant $x_i = n_{\sigma(i)} \ \forall i \in [1,k]$.

L'expression obtenue reste valable pour un multigraphe sans boucle.

Cette deuxième partie est principalement consacrée à l'étude des problèmes suivants:

(PB1) Etant donnée $p \in \mathcal{P}(n,k)$, déterminer les permutations minimales, σ_m , et maximales, σ_M , optimisant $m_G(p, \sigma)$ sur Σ_k , c'est-à-dire vérifiant:

$$m_G(p, \sigma_m) \leq m_G(p, \sigma) \leq m_G(p, \sigma_M) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

(PB2) Déterminer les partitions minimales, p_m , et maximales, p_M , optimisant $m_G(p, \sigma)$ sur Σ_k et $\mathcal{P}(n,k)$, c'est-à-dire vérifiant:

$$m_G(p_m, \sigma_m) \leq m_G(p, \sigma) \leq m_G(p_M, \sigma_M)$$

$$\forall p \in \mathcal{P}(n,k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

Nous noterons parfois $(PB1)_m$ (resp. $(PB1)_M$) le problème des permutations minimales (resp. maximales). De même pour les partitions en remplaçant 1 par 2.

Il est clair que le problème des partitions extrémales est équivalent à la résolution, en nombres entiers, des problèmes:

$$\min_{(C_1)} Q(x_1, \dots, x_k) \quad \text{et} \quad \max_{(C_1)} O(x_1, \dots, x_k)$$

où (C_1) représente les contraintes linéaires:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{cases}$$

et Q est une forme quadratique quelconque sans carré à coefficients 0 ou 1.

Le chapitre II est la reprise du rapport [9] sans modifications fondamentales (hormis quelques fautes d'orthographe) puisqu'il comporte la résolution du problème à l'origine de cette étude, à savoir le calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse, la question ayant été soulevée par M. CHEIN [2] motivé par des considérations algorithmiques.

La réponse est obtenue en étudiant les problèmes précédents lorsque G est une chaîne élémentaire. La méthode de résolution utilisée fournit de plus les solutions dans le cas d'un cycle élémentaire.

Au chapitre III, le problème des permutations extrémales est étudié sur quelques cas particuliers, le but étant de mettre en évidence différentes méthodes de résolution et de classer le problème au niveau de sa complexité algorithmique. Les techniques calculatoires d'échange déjà employées au chapitre II, et dont nous verrons une extension au chapitre V, peuvent donner les solutions (cas de graphes simples d'ordre k de degré 1 ou $k-2$) mais une connaissance plus fine de la partition est nécessaire dans certains cas (union disjointe de deux étoiles).

L'exemple des graphes à seuil, où sont utilisées des méthodes plus combinatoires directement liées à la structure du graphe, permet d'espérer l'obtention des solutions pour certaines familles de graphes ayant un mode de construction récursif.

Enfin, le dernier cas (lorsque chaque composante connexe de G est une clique) nous fait conjecturer la NP-difficulté du problème général.

Nous montrons, au chapitre IV, que toute partition minimale peut s'écrire sous la forme :

$$p_m = (1, \dots, 1, n-k+1)$$

la valeur minimale de $m_G(p, \sigma)$, $m + \delta(n-k)$, étant obtenue quand G_k est associé à un sommet de degré minimal δ .

Ce résultat reste valable pour un multigraphe sans boucle et dans le cas réel.

Pour tout graphe simple $G = ([1, K], E)$, T.S. MOTZKIN et E.G. STRAUSS [13] ont résolu le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{ij \in E} x_i x_j \\ \sum_{i=1}^k x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Ils montrent que le maximum est atteint lorsque les valeurs non nulles sont associées à une clique maximale.

Nous donnons de ce résultat une preuve plus combinatoire, permettant aussi d'avoir la solution en nombres entiers, sous les contraintes linéaires générales:

$$(C_0) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^k x_i = N \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$.

Nous l'étendons au cas d'un multigraphe sans boucle et l'appliquons au problème des partitions maximales lorsque G est un graphe simple régulier (ie $d(i) = d \quad \forall i \in [1, k]$). Ceci nous permet alors de montrer que $(PB2)_M$ est NP-difficile.

Le chapitre V est consacré à l'étude d'une généralisation naturelle des problèmes précédents aux hypergraphes. Rappelons d'abord quelques définitions.

Un hypergraphe $H = (X, \mathcal{E})$ est la donnée d'une famille de parties $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_m)$ d'un ensemble X vérifiant:

- (i) $E_j \neq \emptyset \quad \forall j \in [1, m]$
- (ii) $\bigcup_{j=1}^m E_j = X$

Si aucune arête n'est incluse dans une autre H sera dit simple, si toutes les arêtes sont distinctes (dans le sens ensembliste) il sera dit sans arête multiple.

L'hypergraphe partiel de $H = (X, \mathcal{E})$ engendré par une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est l'hypergraphe $(Y, \mathcal{F})$ où :

$$Y = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

Le sous-hypergraphe de $H = (X, \mathcal{E})$ engendré par $A \subset X$ est l'hypergraphe $(A, \mathcal{E}_A)$ où

$$\mathcal{E}_A = \{ E \cap A \mid E \cap A \neq \emptyset, E \in \mathcal{E} \}.$$

L'opération de substitution, à propos de laquelle on peut consulter [3], est définie de la façon suivante: si $H = (X, \mathcal{E})$ et $H' = (X', \mathcal{E}')$ sont deux hypergraphes quelconques tels que $X \cap X' = \emptyset$, la substitution, dans H , de $x \in X$ par H' , est l'hypergraphe

$$H_{\substack{H' \\ x}} = (X - \{x\} \cup X', \mathcal{E}'')$$

où

$$\mathcal{E}'' = (E - \{x\} \cup E' \mid x \in E \in \mathcal{E}, E' \in \mathcal{E}') \cup \{E \mid x \notin E \in \mathcal{E}\}$$

La substitution des sommets d'un hypergraphe H d'ordre k par k stables $H_1, \dots, H_k$, liés à une partition $p \in \mathcal{P}(n, k)$, suivant une permutation $\sigma \in \Sigma_k$, qui donne l'hypergraphe

$$H(p, \sigma) = H \begin{array}{cccc} H_{\sigma(1)} & H_{\sigma(2)} & \dots & H_{\sigma(k)} \\ 1 & 2 & \dots & k \end{array}$$

est décrite en détail au chapitre V.

Avec les notations déjà employées dans le cas des graphes simples, on obtient

$$m_H(p, \sigma) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \prod_{i \in E} x_i$$

D'où une généralisation de certains des résultats précédents à des polynômes quelconques sans carré (ie $\text{degré}(x_i) = 1 \quad \forall i \in [1, k]$) et à coefficients entiers.

Les résultats du chapitre II concernant les permutations maximales sont ainsi étendus aux cas de c -chaînes et de c -cycles (hypergraphes unifornes généralisant les chaînes et les cycles élémentaires).

Nous montrons d'autre part que toute partition minimale peut se mettre sous la forme

$$p_m = (1, \dots, 1, n-k+1)$$

solution restant, là aussi, valable dans le cas réel.

Le théorème de MOTZKIN et STRAUSS est étendu aux hypergraphes quelconques, la configuration maximale est alors un hypergraphe partiel tel que tout couple de sommets soient adjacents. Pour les partitions maximales le nombre maximal d'arêtes est obtenu lorsque les stables non unitaires sont substitués à des sommets d'un sous-hypergraphe ayant la même propriété d'adjacence.

Ces problèmes étant NP-difficiles nous étudions quelques cas pour lesquels la solution est polynômiale.

CHAPITRE II

CAS D'UNE CHAÎNE ÉLÉMENTAIRE

II.1 - INTRODUCTION

Si G est une chaîne élémentaire d'ordre k , que nous noterons $G = ([1,k], E)$ où

$$E = \{ \{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{k-1, k\} \},$$

pour toute partition $p \in \mathcal{P}(n,k)$ et toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$, le nombre d'arêtes du joint des k stables $G_i = (S_i, \emptyset)$, $i \in [1,k]$, suivant G par rapport à σ est

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{ij \in E} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(j)} = \sum_{i=1}^{k-1} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(i+1)}$$

Avec les notations choisies, à savoir $x_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1,k]$, nous écrirons

$$m_G(p, \sigma) = Q(p, \sigma) = Q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1}$$

C'est pourquoi nous étudions ici la forme quadratique en k variables

$$Q(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1}$$

sur laquelle nous étudions les problèmes de minimisation et de maximisation en variables entières sous contraintes linéaires suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{array} \right.$$

Nous montrons que les solutions de ces problèmes peuvent s'obtenir uniquement par des techniques simples de type analyse combinatoire.

Nous allons résoudre les problèmes suivants:

(PB1) Etant donnée $p \in \mathcal{P}(n, k)$ déterminer les permutations extrémales σ_m et σ_M c'est à dire vérifiant

$$Q(p, \sigma_m) \leq Q(p, \sigma) \leq Q(p, \sigma_M) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

(PB2) Déterminer les partitions extrémales p_m et p_M c'est à dire vérifiant

$$Q(p_m, \sigma_m) \leq Q(p, \sigma) \leq Q(p_M, \sigma_M) \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

A priori, σ_m et σ_M dépendent de la partition p considérée. D'autre part, à toute permutation σ correspond la permutation "miroir" $\bar{\sigma}$ définie par $\bar{\sigma}(i) = \sigma(k + 1 - i) \quad \forall i \in [1, k]$, et qui vérifie trivialement

LEMME II.1 $Q(p, \bar{\sigma}) = Q(p, \sigma).$

Nous déterminerons tout d'abord les permutations extrémales σ_m et σ_M puis nous en déduirons les formes exactes des partitions minimales et maximales p_m et p_M .

Pour un cycle élémentaire $G' = ([1, k], E')$ d'ordre k , comme $E' = E \cup \{(k, 1)\}$ la forme quadratique $\tilde{Q}$ associée est

$$m_{G'}(p, \sigma) = \tilde{Q}(p, \sigma) = Q(p, \sigma) + x_k x_1$$

Les formes des permutations et partitions extrémales de $\tilde{Q}$ sont ainsi obtenues à partir de celles de Q .

Enfin nous montrons comment p_M permet le calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse d'ordre n et de rang k .

II.2 - FORMES GENERALES DES SOLUTIONS

A l'aide du Lemme II.2.1 nous déterminons les permutations extrêmes σ_m et σ_M et montrons qu'elles sont uniques dans un sens que nous préciserons. Nous en déduisons les partitions minimales et maximales, p_m et p_M à partir desquelles nous pouvons obtenir un encadrement précis de $Q(p, \sigma)$ en fonction de k et n .

Pour toute partition $p \in \mathcal{P}(n, k)$ et toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$ nous avons:

LEMME II.2.1 Si $i, j \in [1, k]$ vérifient $i + 1 \leq j$

$$\text{- Si } (x_{i-1} \geq x_{j+1}) \text{ et } (x_i \geq x_j) \quad (I)$$

$$\text{ou } (x_{i-1} \leq x_{j+1}) \text{ et } (x_i \leq x_j) \quad (II)$$

alors

$$Q(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots) \\ \geq Q(\dots, x_{i-1}, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{i+1}, x_i, x_{j+1}, \dots)$$

$$\text{- Si } (x_{i-1} \leq x_{j+1}) \text{ et } (x_i \geq x_j) \quad (III)$$

$$\text{ou } (x_{i-1} \geq x_{j+1}) \text{ et } (x_i \leq x_j) \quad (IV)$$

alors

$$Q(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots) \\ \leq Q(\dots, x_{i-1}, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{i+1}, x_i, x_{j+1}, \dots).$$

Preuve

Le résultat est immédiat car:

$$Q(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots) \\ - Q(\dots, x_{i-1}, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{i+1}, x_i, x_{j+1}, \dots)$$

$$= x_{i-1}x_i + x_jx_{j+1} - x_{i-1}x_j - x_ix_{j+1}$$

$$= (x_{i-1} - x_{j+1})(x_i - x_j).$$

Remarquons que le Lemme II.2.1 est valable dans les cas extrêmes $i = 1$, dans les cas (II) et (III) par exemple, où il suffit de prendre $x_0 = 0$ et $j = k$, dans les cas (I) et (IV) en particulier, où il suffit de prendre $x_{k+1} = 0$.

Une partition $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ étant donnée, partant d'une permutation quelconque σ de Σ_k , par minoration et majoration successives, utilisant le Lemme II.2.1, les deux Théorèmes suivants donnent les solutions de (PB1).

D'après le Lemme II.1, quitte à remplacer σ par $\bar{\sigma}$ nous supposons
 $\sigma_m(1) > \sigma_m(k)$ et $\sigma_M(1) < \sigma_M(k)$,
 ainsi pour $Q(x_1, x_2, \dots, x_k)$ nous faisons les hypothèses $x_k \neq n_k$ et
 $x_k \neq n_1$ dans les Théorèmes II.2.1 et II.2.2 respectivement.

THEOREME II.2.1 $Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, n_{k-2}, n_3, \dots, n_n, n_{k-3}, n_2, n_{k-1})$

Preuve

Le Lemme II.2.1 appliqué avec $x_i = x_1$ (donc $x_{i-1} = x_0 = 0$) et
 $x_j = n_k$ puis avec $x_i = n_{k-1}$ et $x_j = x_k$ (donc $x_{j+1} = x_{k+1} = 0$)
 qui vérifient respectivement les hypothèses (II) et (I) montrent que:

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, x_2, \dots, x_{k-1}, n_{k-1}).$$

De la même façon, en utilisant le Lemme II.2.1 avec $x_i = x_2$ et
 $x_j = n_1$, puis $x_i = n_2$ et $x_j = x_{k-1}$ où (I) et (II) sont respective-
 vement vérifiées, nous avons:

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, x_3, \dots, x_{k-2}, n_2, n_{k-1}).$$

De sorte qu'en appliquant le Lemme II.2.1 sous les formes (I) et
 (II) alternativement avec:

$x_i = x_3$	et	$x_j = n_{k-2}$	(II)
$x_i = n_{k-3}$	et	$x_j = x_{k-2}$	(I)
$x_i = x_4$	et	$x_j = n_3$	(I)
$x_i = n_4$	et	$x_j = x_{k-3}$	(II)

·
·
·

nous obtenons finalement

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, n_{k-2}, n_3, \dots, n_4, n_{k-3}, n_2, n_{k-1}).$$

■

THEOREME II.2.2 $Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_3, n_5, \dots, n_6, n_4, n_2).$

Preuve

En appliquant le Lemme II.2.1 avec $x_i = x_1$ (donc $x_{i-1} = x_0 = 0$) et $x_j = n_1$ qui vérifie (III) puis avec $x_i = n_2$ et $x_j = x_k$ (donc $x_{j+1} = x_{k+1} = 0$) qui vérifie (IV) nous avons nécessairement

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, x_2, \dots, x_{k-1}, n_2).$$

Supposons avoir montré

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, \dots, n_{2q-1}, x_{q+1}, \dots, x_{k-q}, n_{2q}, \dots, n_2).$$

où $q \geq 1$ et $2q+1 < k$.

Alors nous obtenons

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, \dots, n_{2q-1}, n_{2q+1}, x_{q+2}, \dots, x_{k-q-1}, n_{2q+2}, n_{2q}, \dots, n_2)$$

de la même façon c'est à dire en appliquant le nouveau Lemme II.2.1 avec $x_i = x_{q+1}$ et $x_j = n_{2q+1}$, cas (III), puis avec $x_i = n_{2q+2}$ et $x_j = x_{k-q}$, cas (IV).

Si bien que nécessairement

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_3, n_5, \dots, n_6, n_4, n_2).$$

Remarquons que d'après les Théorèmes précédents, compte tenu de la notation utilisée pour toute partition $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathfrak{S}(n, k)$ à savoir $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, et d'après le Lemme II.1, il y a unicité des permutations extrémales, à la permutation-miroir près.

Réolvons maintenant (PB2).

LEMME II.2.2 $Q(p, \sigma) \geq n-1 \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$

Preuve

Pour tout couple de $\mathbb{N}^*$ nous avons $xy \geq x + y - 1$.
Si bien que

$$Q(p, \sigma) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{k-1} (x_i + x_{i+1} - 1).$$

Or

$$\sum_{i=1}^{k-1} (x_i + x_{i+1} - 1) = \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=2}^{k-1} x_i - k + 1.$$

$$\text{Donc, comme } \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k n_i = n \text{ et } x_i \geq 1 \quad \forall i \in [1, k],$$

nous obtenons $Q(p, \sigma) \geq n + k - 2 - k + 1$, c'est à dire $Q(p, \sigma) \geq n-1$. ■

THEOREME II.2.3 Toute partition minimale est de la forme
 $p_m = (1, \dots, 1, n_{k-1}, n_k)$ où $n_{k-1} = 1$ si $k = 2$.

Preuve

Si $k = 2$ alors $p_m = (1, n-1)$ d'après le Lemme II.2.2 car
 $Q(p_m, \sigma) = n-1$ et $Q(p, \sigma) = n_1 n_2 \geq n_1 + n_2 = n$ si $p = (n_1, n_2)$ vérifie
 $2 \leq n_1 \leq n_2$.

Supposons donc $k \geq 3$.

Comme $n_k + n_{k-1} = n - k + 2$ nous avons:

$$Q(p_m, \sigma_m) = Q(n_k, 1, \dots, 1, n_{k-1}) = n_k + k - 3 + n_{k-1} = n-1.$$

Ainsi, d'après le Lemme II.2.2, toute partition de la forme
 $p_m = (1, \dots, 1, n_{k-1}, n_k)$ est minimale.

Montrons pour établir le Théorème que toute partition minimale est nécessairement de cette forme, c'est à dire vérifie $n_1 = \dots = n_{k-2} = 1$.

Soit $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$, il nous suffit de travailler avec la permutation minimale, c'est à dire à partir de

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_k, n_1, x_3, \dots, x_{k-1}, n_{k-1}).$$

Nous avons $n_1 = 1$ car en supposant $n_1 \geq 2$, comme $n_k + x_3 \geq 2$, alors:

$$Q(n_k, n_1, x_3, \dots, n_{k-1}) > Q(n_k + n_1 - 1, 1, x_3, \dots, n_k)$$

$$\Leftrightarrow n_k n_1 + n_1 x_3 > n_k + n_1 - 1 + x_3$$

$$\Leftrightarrow (n_1 - 1) (n_k + x_3 - 1) > 0.$$

De même $x_i = 1 \quad \forall i \in [3, k-1]$ car en supposant $x_i \geq 2$, comme $x_{i-1} + x_{i+1} \geq 2$, alors:

$$Q(n_k, 1, x_3, \dots, x_i, \dots, n_{k-1}) > Q(n_k + x_i - 1, 1, x_3, \dots, 1, \dots, n_{k-1})$$

$$\Leftrightarrow n_k + x_i (x_{i-1} + x_{i+1}) > n_k + x_i - 1 + x_{i-1} + x_{i+1}$$

$$\Leftrightarrow (x_i - 1) (x_{i-1} + x_{i+1} - 1) > 0.$$

Remarquons que dès que $k \geq 3$ n_{k-1} et n_k peuvent prendre des valeurs quelconques, sous réserve que $n_{k-1} + n_k = n - k + 2$.

Le Théorème suivant donne la forme de toute partition maximale p_M quand $4 \leq k \leq n$ et le Corollaire II.2 les expressions de $Q(p_M, \sigma_M)$ en fonction de k et n .

Nous examinerons ensuite les cas particuliers $k = 2$ et $k = 3$.

THEOREME II.2.4 Lorsque k et n vérifient $4 \leq k \leq n$ toute partition maximale est de la forme

$$p_M = (1, \dots, 1, n_{k-2}, n_{k-1}, n_k)$$

avec $n_{k-2} = 1$ si $k = 4$.

Preuve

Nous établissons ce résultat par majorations successives à partir d'une partition quelconque $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ en utilisant la permutation maximale.

Si $k \geq 5$, en notant $\{a, b\} = \{n_{k-2}, n_{k-1}\}$, nous avons:

$$Q(n_1, n_3, \dots, a, n_k, b, \dots, n_4, n_2) \leq Q(1, n_3, \dots, a, n_k + n_1 + n_2 - 2, b, \dots, n_4, 1)$$

$$\Leftrightarrow n_1 n_3 + n_k(a + b) + n_4 n_2 \leq n_3 + (a + b)n_k + (a + b)(n_1 + n_2 - 2) + n_4$$

$$\Leftrightarrow (a + b - n_3)(n_1 - 1) + (a + b - n_4)(n_2 - 1) \geq 0$$

$$\text{car } \begin{cases} a > n_3 \\ b > n_4 \end{cases} \Rightarrow a + b > n_4 \geq n_3.$$

Ainsi p_M vérifie nécessairement $n_1 = n_2 = 1$.

Supposons avoir montré $n_1 = \dots = n_{i-1} = 1$ où i est impair et vérifie $3 \leq i \leq k-5$ si k est pair et $3 \leq i \leq k-4$ si k est impair, alors $n_i = n_{i+1} = 1$. Nous avons en effet:

$$Q(1, \dots, 1, n_i, \dots, a, n_k, b, \dots, n_{i+1}, 1, \dots, 1) \leq Q(1, \dots, 1, 1, n_{i+2}, \dots, a, n_k + n_i + n_{i+1} - 2, b, \dots, n_{i+3}, 1, 1, \dots, 1)$$

$$\Leftrightarrow n_i + n_i n_{i+2} + (a + b)n_k + n_{i+3} n_{i+1} + n_{i+1} \leq 1 + n_{i+2} + (a + b)n_k + (a + b)(n_i + n_{i+1} - 2) + n_{i+3} + 1$$

$$\Leftrightarrow (a + b - n_{i+2} - 1)(n_i - 1) + (a + b - n_{i+3} - 1)(n_{i+1} - 1) \geq 0$$

$$\text{car } \begin{cases} a \geq n_{i+2} \geq 1 \\ b \geq n_{i+3} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - n_{i+2} - 1 \geq 0 \\ a + b - n_{i+3} - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi pour $k \geq 5$:

$$Q(p_M, \sigma_M) = Q(1, \dots, 1, n_{k-2}, n_k, n_{k-1}, 1, \dots, 1) \quad k \text{ impair}$$

$$Q(p_M, \sigma_M) = Q(1, \dots, 1, n_{k-3}, n_{k-1}, n_k, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \quad \text{sinon.}$$

Si k est pair nous avons nécessairement $n_{k-3} = 1$ car:

$$Q(1, \dots, 1, n_{k-3}, n_{k-1}, n_k, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \leq Q(1, \dots, 1, 1, n_{k-1}, n_k + n_{k-3} - 1, n_{k-2}, 1, \dots, 1)$$

$$\Leftrightarrow (n_{k-3} - 1)(n_{k-2} - 1) \geq 0.$$

Enfin, si $k = 4$ alors $n_1 = n_2 = 1$ car

$$Q(n_1, n_3, n_1, n_2) \leq Q(1, n_3 + n_2 - 1, n_4 + n_1 - 1, 1).$$

En conclusion, comme

$$Q(p_M, \sigma_M) = (n_k + 1)(n_{k-2} + n_{k-1}) + k - 5 \quad \forall k \geq 4$$

il est clair que nous avons obtenu la forme définitive de p_M .

COROLLAIRE II.2

Pour k et n tels que $4 \leq k \leq n$

$$Q(p_M, \sigma_M) = \begin{cases} \frac{1}{4} ((n-k+2)^2 + 4n-8) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont de même parité} \\ \frac{1}{4} ((n-k+1)(n-k+3) + 4n-8) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Nous avons démontré que

$$Q(p_M, \sigma_M) = (n_k + 1)(n_{k-2} + n_{k-1}) + k - 5.$$

Si nous posons $x = n_k$ et $y = n_{k-2} + n_{k-1}$ il s'agit alors de maximiser

$$Q(p_M, \sigma_M) = xy + y + k - 5$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x + y + k - 3 = n \\ x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

Donc $Q(p_M, \sigma_M) = -x^2 + x(n - k + 2) + n - 2.$

Le maximum étant obtenu dans $\mathbb{R}$ pour $\frac{1}{2}(n - k + 2)$

- si n et k sont de même parité, $n - k$ est pair, donc $x = \frac{1}{2}(n - k + 2)$ et $y = \frac{1}{2}(n - k + 4)$

- sinon $n - k$ est impair donc $x = y = \frac{1}{2}(n - k + 3).$

D'où les expressions de $Q(p_M, \sigma_M)$.

La proposition suivante calcule $Q(p_M, \sigma_M)$ lorsque $k = 2$ ou 3 .

PROPOSITION II.2 Si $k = 2$ ou 3

$$Q(p_M, \sigma_M) = \begin{cases} \frac{1}{4} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{4} (n^2 - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Si $k = 2$ $Q(p, \sigma) = n_1 n_2 \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, 2), \quad \forall \sigma \in \Sigma_2.$

Si $k = 3$ $Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_2, n_3) = n_3(n_1 + n_2) \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, 3).$

De sorte qu'en posant $x = n_k$ nous avons dans les deux cas

$$Q(p, \sigma_M) = x(n - x) = -x^2 + nx.$$

Le maximum est donc obtenu pour $x = \frac{1}{2} n$ si n est pair et pour

$x = \frac{1}{2} (n - 1)$ ou $x = \frac{1}{2} (n + 1)$ sinon, d'où les résultats annoncés. ■

II.3 - EXTENSIONS

II.3.1 - Au cas d'un cycle élémentaire

La forme quadratique obtenue dans ce cas est alors

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(p, \sigma) &= \tilde{Q}(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(k)}) \\ &= Q(p, \sigma) + n_{\sigma(k)} n_{\sigma(1)} = Q(x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)\end{aligned}$$

où $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$.

Les méthodes développées précédemment vont nous permettre de résoudre (PB1) et (PB2) sur Q .

Si nous notons respectivement $\tilde{\sigma}_m$, $\tilde{\sigma}_M$ et $\tilde{p}_m$, $\tilde{p}_M$ les permutations et partitions extrémales, en supposant $k \geq 4$, nous avons

THEOREME II.3.1 Etant donnée $p \in \mathcal{P}(n, k)$, alors:

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, n_{k-1}, n_3, \dots, n_4, n_{k-2}, n_2, n_k)$$

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_2, n_4, \dots, n_5, n_3, n_1).$$

Preuve

Comme pour tout $i \in [1, k]$

$$\begin{aligned}Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, x_1) \\ = Q(x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)\end{aligned}$$

nous pouvons supposer $\tilde{\sigma}_m(1) = k$ et $\tilde{\sigma}_M(1) = 1$, autrement dit:

$$\tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_m) = Q(n_k, x_2, \dots, x_k, n_k)$$

$$\tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_M) = \tilde{Q}(n_1, x_2, \dots, x_k, n_1).$$

Il suffit alors de reprendre les preuves des Théorèmes II.2.1 et II.2.2 sur ces expressions. ■

THEOREME II.3.2

Toute partition minimale est de la forme

$$\tilde{p}_m = (1, \dots, 1, n\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n_k).$$

Preuve

Nous avons $\tilde{Q}(p, \sigma) \geq 2n - k \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$.
En effet

$$\tilde{Q}(p, \sigma) = Q(x_1, x_2, \dots, x_k, x_1) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + x_k x_1 \quad \text{donc}$$

$$\tilde{Q}(p, \sigma) \geq \sum_{i=1}^{k-1} (x_i + x_{i+1} - 1) + x_k + x_1 - 1 \quad \text{d'où}$$

$$Q(p, \sigma) \geq 2 \sum_{i=1}^k x_i - k = 2n - k \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

L'égalité

$$\sum_{i=1}^k x_i x_{i+1} + x_k x_1 = \sum_{i=1}^{k-1} (x_i + x_{i+1} - 1) + x_k + x_1 - 1$$

n'a lieu que si pour chaque produit $x_i x_{i+1}$, $x_k x_1$ l'un des facteurs au moins est unitaire. De sorte que, compte tenu de la remarque faite au début de preuve du Théorème II.3.1, il faut au moins nécessairement $x_1 = x_3 = \dots x_{k-1} = 1$ si k est pair et $x_1 = x_3 = \dots = x_k = 1$ sinon.

Ainsi, toute partition minimale p_m a au moins $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ éléments unitaires, autrement dit, vérifie:

$$n_1 = n_2 = \dots = n\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = 1$$

et dans ce cas $\tilde{Q}(\tilde{p}_m, \tilde{\sigma}_m) = 2n - k$.

THEOREME II.3.3 Toute partition maximale est de la forme

$$\tilde{p}_M = (1, \dots, 1, n_{k-2}, n_{k-1}, n_k).$$

Preuve

Il suffit de reprendre la preuve du Théorème II.2.4. avec

$$\tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_M) = Q(n_1, n_2, n_4, \dots, n_5, n_3, n_1)$$

pour une partition quelconque $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathfrak{P}(n, k)$.

Ainsi, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\tilde{p}_M, \tilde{\sigma}_M) &= Q(1, \dots, 1, n_{k-1}, n_k, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \\ &= (n_k + 1)(n_{k-1} + n_{k-2}) + k - 4. \end{aligned}$$

■

Il nous est alors facile d'obtenir les valeurs exactes des entiers n_{k-2} , n_{k-1} et n_k , d'où

COROLLAIRE II.3 Pour k et n tels que $4 \leq k \leq n$

$$\tilde{Q}(\tilde{p}_M, \tilde{\sigma}_M) = \begin{cases} \frac{1}{4} ((n-k+2)^2 + 4n - 4) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont de même parité} \\ \frac{1}{4} ((n-k+1)(n-k+3) + 4n - 4) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est cependant intéressant de remarquer que lorsque $k = 3$, les résultats précédents ne s'appliquent plus pour les partitions maximales.

Nous avons en effet, d'une part:

$$\tilde{Q}(p, \sigma) = \tilde{Q}(p, \sigma') \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma_3, \quad \forall p \in \mathfrak{P}(n, 3)$$

et d'autre part:

PROPOSITION II.3.1 Les partitions maximisant $\tilde{Q}(p, \sigma)$ sur $\mathcal{P}(n, 3)$ sont:

$$\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right) \quad \text{si } n \in 3\mathbb{N}^*$$

$$\left(\frac{n-1}{3}, \frac{n-1}{3}, \frac{n+2}{3}\right) \quad \text{si } n \in 3\mathbb{N}^* + 1$$

$$\left(\frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}\right) \quad \text{si } n \in 3\mathbb{N}^* + 2.$$

Preuve

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{P}(n, 3)$ alors

$$\forall \sigma \in \Sigma_3 \quad \tilde{Q}(p, \sigma) = Q(x, y, z, x) = xy + yz + zx = \frac{1}{2} (n^2 - (x^2 + y^2 + z^2))$$

car $x + y + z = n$.

Ainsi, maximiser $\tilde{Q}(p, \sigma)$ revient à minimiser $x^2 + y^2 + z^2$.

En remarquant que si a, b sont deux entiers non nuls

$$a - b \geq 2 \Rightarrow a^2 + b^2 > (a - 1)^2 + (b + 1)^2$$

toute partition maximale $\tilde{p}_M = (n_1, n_2, n_3) \in \mathcal{P}(n, 3)$ doit nécessairement vérifier

$$|n_i - n_j| \leq 1 \quad \forall i, j \in [1, 3].$$

D'où les 3 formes possibles des partitions maximales. ■

II.3.2 - Au calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse

Lorsque l'on veut faire l'analyse en complexité d'algorithmes sur des graphes, il est naturel de chercher à calculer la taille des données, en l'occurrence le nombre d'arêtes des graphes considérés.

Ainsi, V. KOUBEK et V. RÖDL [10] se sont récemment intéressés au dénombrements d'arcs d'un treillis distributif.

Les questions abordées précédemment permettent de résoudre un problème posé par M. CHEIN [2], à savoir le nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse.

Soit $G=(X,U)$ un graphe simple orienté sans circuit tel que $|X|=n$ et $|U|=m$. L'ensemble $T(G)$ des graphes sur X ayant même fermeture transitive que G , est un treillis dont le plus petit élément est par définition le graphe de Hasse associé à G , $G_h=(X,U_h)$, obtenu par suppression de tous ses arcs de transitivité.

G^t , la fermeture transitive de G , étant un ordre partiel fini, sa fonction rang permet de partitionner X en $\rho+1$ stables $X_0, X_1, \dots, X_\rho$ où $\rho \in [1, n-1]$ est le rang de G , nous excluons le cas trivial où $\rho = 0$ auquel cas $G=(X, \emptyset)$.

Remarquons enfin que cette décomposition est identique pour tout élément de $T(G)$, en particulier pour G_h . Le lecteur intéressé peut consulter [14].

Nous noterons $G_M = (X_0, X_1, \dots, X_\rho, U_M) = K_{X_0, X_1, \dots, X_\rho}$ où $x_i = |X_i|$, $i \in [0, \rho]$, le graphe multiparti complet construit à partir de cette décomposition.

PROPOSITION II.3.2 Avec les notations précédentes $|U_h| < |U_M|$.

Preuve

Supposons $G_h \neq G_M$.

Le rang r d'un sommet et la tension t d'un arc sont respectivement définis par :

$$r(x) = i \iff x \in X_i \quad \forall i \in [0, \rho]$$

$$t(x, y) = r(x) - r(y) \quad \forall (x, y) \in U_h.$$

Si tous les arcs de G_h sont de tension 1, on augmente strictement leur nombre en construisant G_M , dans ce cas $|U_h| < |U_M|$.

Sinon, soit $(x, y) \in U_h$ tel que $t(x, y) \geq 2$. Il existe alors au moins un chemin de longueur $r(y)$ joignant une source s à y . Soient x' et x'' les 2 sommets sur ce chemin tels que $r(x') = r(x)$ et x'' est le suivant de x' . Alors :

$x' \neq x$, $(x, x'') \notin U_h$ sinon (x, y) serait de transitivité

$(x, x'') \in U_M$, $(x, y) \notin U_M$.

Notons $G'_h = G_h - (x, y) + (x, x'')$.

Nous obtenons ainsi par une suite d'échanges à partir de G_h un graphe $G'_h = (X, U'_h)$ dont tous les arcs sont à tension unitaire et qui vérifie $|U'_h| = |U_h|$, $U'_h \subseteq U_M$.

Finalement $|U_h| < |U_M|$. ■

Nous en déduisons une première majoration du nombre d'arcs m_h d'un graphe de Hasse tenant compte explicitement de sa fonction rang

$$m_h \leq \sum_{i=0}^{\rho-1} x_i x_{i+1}.$$

Comme $\{x_0, x_1, \dots, x_\rho\}$ est une partition de $|X| = n$ en $\rho+1$ sommants et

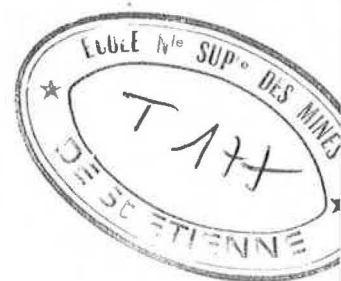
$$\sum_{i=0}^{\rho-1} x_i x_{i+1} = Q(x_0, x_1, \dots, x_\rho)$$

nous obtenons une majoration de m_h en fonction de n et ρ , dès que $\rho \geq 3$, en appliquant le Corollaire II.1 avec $k = \rho+1$.

THEOREME II.3.4 Le nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse d'ordre n et de rang p tels que $3 \leq p \leq n$ est égal à

$$\frac{1}{4}((n-p+1)^2 + 4n - 8) \quad \text{si } n \text{ et } p \text{ sont de parité distincte}$$

$$\frac{1}{4}((n-p+2)(n-p) + 4n - 8) \quad \text{sinon.}$$



Nous pouvons alors en déduire une majoration de m_h ne dépendant que de n .

THEOREME II.3.5 Tout graphe de Hasse $G_h = (X, U_h)$ tel que $|X| = n$ et $|U_h| = m_h$ vérifie

$$m_h \leq \frac{1}{4} n^2 \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$m_h \leq \frac{1}{4} (n^2 - 1) \quad \text{sinon.}$$

Preuve

D'après la Proposition II.2 dans les cas $p = 1$ et $p = 2$ nous avons

$$m_h \leq \begin{cases} \frac{1}{4} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{4} (n^2 - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que si $p \geq 3$ les bornes données dans le Théorème II.3.4, pour n fixé, sont toujours strictement majorées par $\frac{1}{4} (n^2 - 1)$. ■

Ce dernier résultat peut s'obtenir directement à partir de la majoration

$$m_h \leq \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1}$$

découlant de la Proposition II.3.2.

Il suffit en effet d'établir

$$n^2 - 4 \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} \geq \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $n = x_0 + x_1 + \dots + x_p$, on a

$$\begin{aligned} n^2 - 4 \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} &= \sum_{i=0}^p x_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq p} x_i x_j - 4 \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^p x_i^2 - 2 \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} + 2 \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=i+2}^p x_i x_j \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (x_0 - x_1 + \dots + (-1)^p x_p)^2 &= \sum_{i=0}^p x_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=0}^p x_i^2 - 2 \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} - 2 \sum_{i=0}^{p-3} \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(p-i-1)} x_i x_{i+2j+1} + 2 \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(p-i)} x_i x_{i+2j} \end{aligned}$$

Si bien que

$$n^2 - 4 \sum_{i=0}^{p-1} x_i x_{i+1} = (x_0 - x_1 + \dots + (-1)^p x_p)^2 + 4 \sum_{i=0}^{p-3} \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(p-i-1)} x_i x_{i+2j+1}$$

Comme

$$(x_0 - x_1 + \dots + (-1)^p x_p)^2 \geq \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\sum_{i=0}^{p-3} \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(p-i-1)} x_i x_{i+2j+1} \geq 0, \text{ nous obtenons l'égalité voulue.}$$

Remarquons pour terminer que ces majorations sont les meilleures possibles en fonction de n uniquement et qu'elles sont atteintes par les graphes bipartis et tripartis complets suivants:

$$K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad K_{x_0, \frac{n}{2}, x_2} \quad \text{où} \quad x_0 + x_2 = \frac{n}{2} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$K_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}} \quad \text{et} \quad K_{x_0, \frac{n-1}{2}, x_2} \quad \text{où} \quad x_0 + x_2 = \frac{n+1}{2} \quad \text{ou bien} \quad K_{x_0, \frac{n+1}{2}, x_2}$$

$$\text{où } x_0 + x_2 = \frac{n-1}{2} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$



CHAPITRE III

PERMUTATIONS EXTREMALES

III.1 INTRODUCTION

Rappelons rapidement le problème (PB1) étudié ici.

Etant donné un graphe simple $G = ([1,k], E)$ et une partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$, il s'agit de déterminer les permutations minimales, σ_m , et maximales, σ_M , minimisant et maximisant respectivement l'expression

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{ij \in E} x_i x_j$$

(où $x_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1,k]$) sur Σ_k .

Ces permutations doivent donc vérifier

$$m_G(p, \sigma_m) \leq m_G(p, \sigma) \leq m_G(p, \sigma_M) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

Autrement dit, nous cherchons à savoir comment répartir les stables $G_1, \dots, G_k$ sur les k sommets de G pour que le joint $G(p, \sigma)$ ainsi obtenu possède soit le minimum soit le maximum d'arêtes.

Nous établissons en III.2 une équivalence entre les problèmes de minimisation et de maximisation via le graphe complémentaire. Devant le peu de résultats obtenus dans le cas général, nous étudions des cas particuliers sous deux approches différentes : l'exploitation de propriétés fondamentales du graphe considéré ou bien de la structure de la forme quadratique associée.

La première est illustrée par le § III.3.1 qui considère les graphes à seuil, les graphes simples ayant exactement deux sommets de même degré en sont un exemple.

La seconde est la continuation du chapitre II qui contient les solutions lorsque G est une chaîne ou un cycle élémentaire. Il y est prouvé que des techniques simples d'analyse combinatoire peuvent résoudre (PB1) quand la forme quadratique associée a une structure particulière. De plus, les méthodes employées n'utilisent comme connaissance de la partition p que l'ordonnement de ses éléments. Il est donc naturel de vouloir prolonger ces techniques à d'autres cas.

Les graphes simples réguliers d'ordre k et de degré 1 ou $k-2$ sont étudiés en III.3.2.

Nous obtenons d'autre part les permutations minimales pour une union disjointe d'étoiles et les permutations maximales dans la cas de cliques. Dans le premier, cas l'étude des permutations maximales montre qu'une connaissance plus précise de p est nécessaire et la recherche des permutations minimales dans le second cas, de conjecturer la NP-complétude du problème général.

Une étude reste à faire sur la structure des graphes dont la forme quadratique associée est optimisable sur Σ_k par des techniques calculatoires du type échanges-réordonnements que nous appliquons ici.

Enfin, s'il y a peu d'espoir d'obtenir une solution générale à (PB1), une autre approche serait la recherche d'algorithmes polynômiaux pour certaines classes de graphes.

III.2 PROPRIETES ELEMENTAIRES

Notons $K = ([1,k], \mathcal{P}_2([1,k]))$ le graphe complet d'ordre k où $\mathcal{P}_2([1,k])$ est l'ensemble des parties de $[1,k]$ ayant exactement 2 éléments.

Soient $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$, alors

$$\begin{aligned} m_K(p, \sigma) &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} x_i x_j = \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i n_j \\ &= \frac{1}{2} (n^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2) \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^k n_i = n \end{aligned}$$

Il est donc clair que $m_K(p, \sigma) = m_K(p, \sigma') \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma_k$, puisque l'expression obtenue ne dépend plus que de p .

Le graphe simple $\bar{G} = ([1,k], \bar{E})$ complémentaire de G est défini par:

$$\bar{E} = \mathcal{P}_2([1,k]) - E$$

Pour toute permutation σ de Σ_k on peut donc écrire

$$\begin{aligned} m_G(p, \sigma) + m_{\bar{G}}(p, \sigma) &= \sum_{ij \in E} x_i x_j + \sum_{ij \in \bar{E}} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} x_i x_j = m_K(p, \sigma) \end{aligned}$$

σ_m étant une permutation minimale de G on a

$$m_G(p, \sigma_m) \leq m_G(p, \sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

$$\Leftrightarrow m_K(p, \sigma_m) - m_{\bar{G}}(p, \sigma_m) \leq m_K(p, \sigma) - m_{\bar{G}}(p, \sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

$$\Leftrightarrow m_{\bar{G}}(p, \sigma) \leq m_{\bar{G}}(p, \sigma_m) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

Nous en déduisons

$$m_{\bar{G}}(p, \sigma_m) \leq m_{\bar{G}}(p, \sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

où σ_m est une permutation maximale de G .

THEOREME III.2.1 Toute permutation minimale (resp. maximale) de G est une permutation maximale (resp. minimale) de $\bar{G}$.

Ainsi, par exemple, les résultats du chapitre II permettent d'obtenir les permutations extrémales de tout graphe simple dont le complémentaire est soit une chaîne élémentaire, soit un cycle élémentaire.

Nous exposons au paragraphe III.3.1. une illustration particulière de ce Theorème et de la propriété suivante.

PROPOSITION III.2.1 Si G possède s sommets isolés, toute permutation maximale (resp. minimale) associe $n_1, \dots, n_s$ (resp. $n_{k-s+1}, \dots, n_k$) à ces sommets.

Preuve: triviale.

III.3. QUELQUES CAS PARTICULIERS

III.3.1. Graphes à seuil

Ces graphes ont été définis par V. CHVATAL et P.L. HAMMER en 1973 [4] afin d'étudier le nombre de stabilité. M.C. GOLUBIC leur consacre tout un chapitre dans [8].

Soit $G = ([1, k], E)$ un graphe simple. Notons $\{\delta_1, \dots, \delta_\mu\}$ l'ensemble des degrés des sommets non isolés:

$$0 < \delta_1 < \dots < \delta_\mu$$

et $\delta_0 = 0, \delta_{\mu+1} = k - 1$.

Si, pour $i \in [1, \mu]$, D_i est l'ensemble des sommets de degré δ_i , alors $\{D_0, D_1, \dots, D_\mu\}$ est une partition de $[1, k]$, en remarquant que D_0 peut être vide.

THEOREME III.3.1 Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) G est un graphe à seuil
- (ii) Pour $i \neq j$
 $xy \in E \iff i + j > \mu \quad \forall x \in D_i, \forall y \in D_j$
- (iii) $\delta_{i+1} = \delta_i + |D_{\mu-i}| \quad \forall i \in [0, \lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor - 1]$
 $\delta_i = \delta_{i+1} - |D_{\mu-i}| \quad \forall i \in [\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor + 1, \mu]$

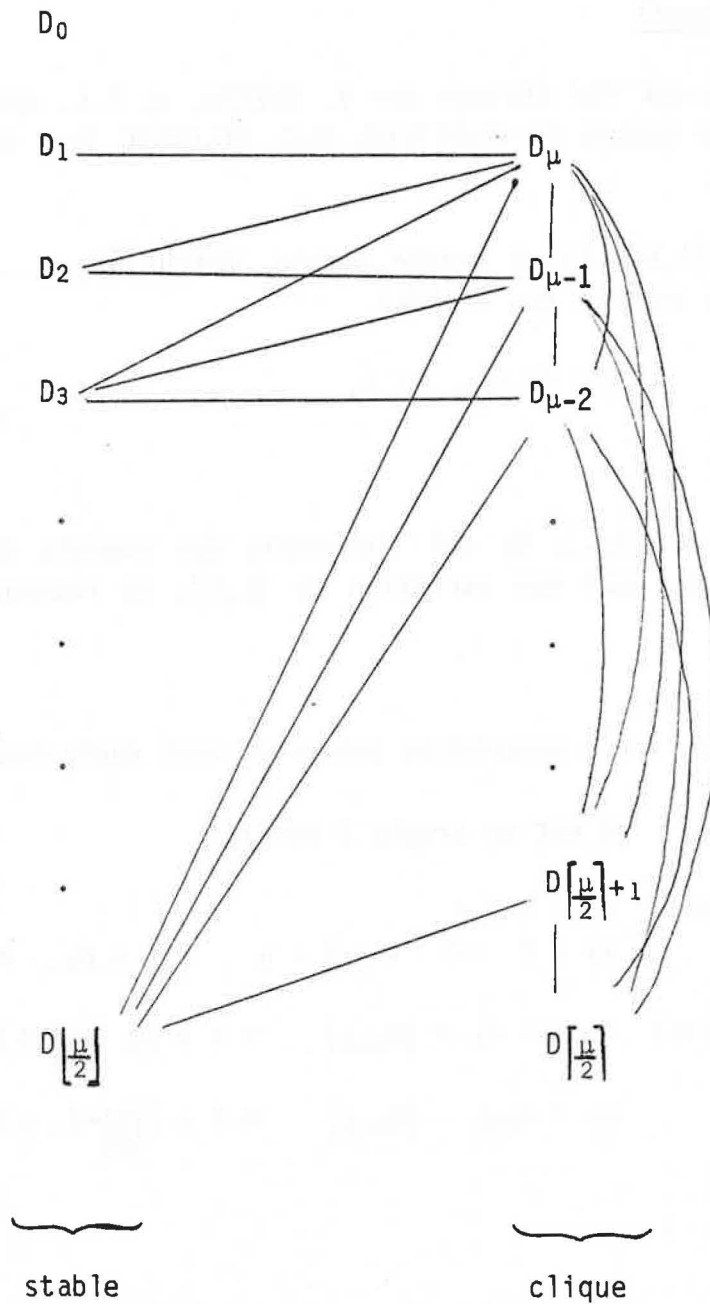
Preuve: voir [8].

(ii) montre que la structure du graphe est entièrement définie par les indices de la partition $\{D_0, D_1, \dots, D_\mu\}$.

Les sommets de $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}$ forment un stable et les sommets restants, une clique.

D'après (iii), les autres arêtes sont telles que, pour i dans $1, \dots, \lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor$, tout x de D_i est adjacent à tout y de D_j dès que $i+j \geq \mu+1$.

Schématiquement on a la structure suivante:



D_0 , qui contient tous les sommets isolés de G peut être vide et $D_{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}$ n'existe que si μ est impair.

PROPOSITION III.3.1

Tout sous-graphe d'un graphe à seuil est aussi à seuil.

Une partition $p = (n_1, \dots, n_k)$ étant donnée, étudions les permutations maximales σ_M .

D'après la proposition III.2.1, aux sommets isolés de $G_0 = G$ sont associés $n_1, \dots, n_{|D_0|}$.

Considérons le graphe $G' = (X', E')$, obtenu à partir de G par suppression de D_0 . C'est un graphe à seuil tel que $E' = E$ et (iii) montre que D_μ contient les sommets dominants car:

$$\begin{aligned}\delta_\mu &= \delta_{\mu+1} - |D_0| \\ &= k - 1 - |D_0| \\ &= |X'| - 1\end{aligned}$$

La proposition III.2.1 entraîne qu'à ces sommets sont associés $n_k, \dots, n_{k - |D_\mu| + 1}$.

La détermination exactes de σ_M se fait en poursuivant le raisonnement avec G_1 , obtenu à partir de G' par suppression des sommets de D_μ , et la partition

$$p_1 = (n_{|D_0|+1}, \dots, n_{k - |D_\mu|})$$

Nous obtenons, pour terminer, $G\left[\frac{\mu}{2}\right]$, graphe à seuil contenant

- soit uniquement le stable $D\left[\frac{\mu}{2}\right]$, si μ est pair
- soit le stable $D\left[\frac{\mu}{2}\right]$ et la clique $D\left[\frac{\mu}{2}\right]$, si μ est impair.

Aux sommets du stable sont associés les plus petits éléments de $p\left[\frac{\mu}{2}\right]$.

La détermination de toute permutation maximale, σ_M , nécessite donc uniquement la connaissance de $D_0, \dots, D_\mu$.

La structure de toute permutation minimale s'obtient de même en utilisant le théorème III.2.1 et la

PROPOSITION III.3.2

Le complémentaire d'un graphe à seuil est aussi un graphe à seuil.

Remarque

Comme le note GOLUMBIC dans [8], la reconnaissance d'un graphe à seuil se fait en $O(k)$ (k est le nombre de sommets) à partir de la séquence des degrés en utilisant la propriété (iii). La complexité de la détermination des permutations extrémales ainsi que des calculs de $m_G(p, \sigma_m)$ et de $m_G(p, \sigma_M)$ est en $O(k+m)$.

APPLICATION Cas des graphes ayant exactement deux sommets de même degré

Le résultat précédent permet de résoudre le problème des permutations extrémales pour les graphes simples ayant exactement deux sommets de même degré. Ceci résulte de la Proposition III.3.3.

Notons $\mathcal{F}$ la famille des classes d'isomorphisme de ces graphes.

PROPOSITION III.3.3 Tout élément de $\mathcal{F}$ est à seuil.

Preuve

$\mathcal{F}$ contient au moins $G(2) = \begin{smallmatrix} & & \\ & \text{---} & \\ i & & 2 \end{smallmatrix}$ et $\bar{G}(2) = \begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ i & & 2 \end{smallmatrix}$ qui sont à seuil.

Soit G un élément d'ordre k de $\mathcal{F}$, alors l'ensemble de ses degrés $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_\mu\}$ est soit $\{0, 1, \dots, k-2\}$ (I) soit $\{1, 2, \dots, k-1\}$ (II).

D'autre part, dès que $k \geq 3$, G a au plus un sommet isolé, cas (I), ou un sommet dominant, cas (II). En effet, si G possède deux sommets isolés alors le graphe d'ordre $k-2$ obtenu par suppression de ces sommets devrait avoir tous ses degrés différents.

La propriété évidente

$$G \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{G} \in \mathcal{F}$$

permet de conclure en ce qui concerne les sommets dominants.

Il suffit d'étudier le cas (II) car, dans le premier cas le graphe obtenu par suppression du sommet isolé est du deuxième type.

Notons i l'indice des deux sommets de même degré, alors $i = \left\lfloor \frac{\mu}{2} \right\rfloor$.

Montrons cette propriété par induction sur k .

Elle est trivialement vraie sur $G(2)$ et sur $G(3) = \overset{\cdot}{1} \text{---} \overset{\cdot}{3} \text{---} \overset{\cdot}{2}$

Supposons-la vraie jusqu'à $k-1$ lorsque $k \geq 4$.

On a $\mu = k - 1$.

Considérons G' , le graphe d'ordre $k-1$ obtenu à partir de G par suppression du sommet dominant, alors

$$\mu' = \mu - 2 \quad \text{et} \quad \delta_j' = \delta_j - 1 \quad \forall j \in [1, \mu']$$

et G'' , le graphe d'ordre $k - 2$ et du type (II) obtenu à partir de G' par suppression du sommet isolé, donc

$$\mu'' = \mu' \quad \text{et} \quad \delta_j'' = \delta_j' \quad \forall j \in [1, \mu'']$$

Par hypothèse de récurrence, on a sur G'' $i'' = \left\lceil \frac{\mu''}{2} \right\rceil$, donc, comme $i'' = i' = i - 1$, on en déduit:

$$i = i'' + 1 = \left\lceil \frac{\mu - 2}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\mu}{2} \right\rceil$$

$$\text{Finalement } \left| D \left\lceil \frac{\mu}{2} \right\rceil \right| = 2 \quad \text{et} \quad |D_j| = 1 \quad \forall j \in [1, k-1] \quad j \neq i$$

et comme $\delta_j = j \quad \forall j \in [1, k-1]$, il est facile de vérifier la propriété (iii) du Théorème III.3.1. ■

Conséquence

$\mathcal{F}$ ne possède que deux éléments distincts ayant k sommets: $G(k)$ et $\bar{G}(k)$.

En effet, tout élément $G(k)$, d'ordre $k \geq 3$, de $\mathcal{F}$ ayant un sommet dominant est du type (II), donc unique d'après la démonstration précédente, et l'autre élément d'ordre k , ayant un sommet isolé, est nécessairement $\bar{G}(k)$.

III.3.2 Graphes simples réguliers de degré 1 ou k-2

Un graphe simple $G = ([1,k], E)$ régulier de degré 1 est une réunion disjointe d'arêtes, autrement dit :

$$E = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \dots, \{k-1,k\}\}$$

(k doit être pair: $k = 2m = 2|E|$)

$\bar{G} = ([1,k], \mathcal{P}_2([1,k]) - E)$ est alors régulier de degré k-2.

Compte tenu du Théorème III.2.1 qui fournit les permutations extrémales de $\bar{G}$ à partir de celles de G, il suffit de résoudre (PB1) sur G.

Pour $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$, $\sigma \in \Sigma_k$ et $x_i = n_{\sigma(i)}$ $\forall i \in [1,k]$:

$$m_G(p, \sigma) = x_1 x_2 + x_3 x_4 + \dots + x_{k-1} x_k$$

que nous noterons $Q_G(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

LEMME III.3.1 Si $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ alors

$$a_1 a_4 + a_2 a_3 \leq a_1 a_3 + a_2 a_4 \leq a_1 a_2 + a_3 a_4$$

Preuve : Evidente.

THEOREME III.3.2 $m_G(p, \sigma_m) = Q_G(n_1, n_k, n_2, n_{k-1}, \dots, n_m, n_{m+1})$

$$m_G(p, \sigma_M) = Q_G(n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_{k-1}, n_k)$$

Preuve :

Fixons $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$.

Pour déterminer σ_m nous procéderons par minoration successives en utilisant le Lemme III.3.1 à partir de $m_G(p, \sigma)$ où $\sigma \in \Sigma_k$ est quelconque.

Quitte à changer la numérotation, on peut supposer

$$\{x_1, x_3, \dots, x_{k-1}\} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$$

Si $x_2 \neq n_k$, en appliquant le Lemme avec $a_1 = x_1 = n_1$, $\{a_2, a_3\} = \{x_2, x_j\}$ et $a_4 = n_k$, x_j étant le facteur associé à n_k , nous obtenons :

$$m_G(p, \sigma) > Q_G(n_1, n_k, x_3, \dots, x_k)$$

Supposons

$$m_G(p, \sigma) \geq Q_G(n_1, n_k, \dots, n_i, n_{k-i+1}, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

pour $1 \leq i \leq k - 5$.

Alors, comme $x_{i+1} = n_{i+1}$, si $x_{i+2} \neq n_{k-i}$, l'application du Lemme avec $a_1 = x_{i+1}$, $\{a_2, a_3\} = \{x_{i+2}, x_j\}$ et $a_4 = n_{k-i}$ où x_j est le facteur associé à n_{k-i} , donne

$$m_G(p, \sigma) > Q_G(n_1, n_k, \dots, n_{i+1}, n_{k-i}, x_{i+3}, \dots, x_k)$$

D'où la forme des permutations minimales.

Pour mettre en évidence σ_M , on procède cette fois-ci par majorations successives utilisant toujours le Lemme III.3.1 et en remarquant qu'ici on peut supposer

$$\{x_1, x_3, \dots, x_{k-1}\} = \{n_1, n_3, \dots, n_{k-1}\}$$

En effet, si $x_2 \neq n_2$, l'application du Lemme avec $a_1 = x_1$, $a_2 = n_2$ et $\{a_3, a_4\} = \{x_2, x_j\}$, x_j étant le facteur associé à n_2 , donne

$$m_G(p, \sigma) \leq Q_G(n_1, n_2, x_3, \dots, x_k)$$

Comme précédemment, il est alors facile de montrer par récurrence que

$$m_G(p, \sigma) \leq Q_G(n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_{k-1}, n_k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

qui fournit σ_M . ■

III.3.3 Chaque composante connexe est une étoile

Rappelons qu'une étoile est un arbre ayant un sommet dominant.

Supposons $G = ([1,k], E)$ union disjointe de s étoiles ($s \geq 2$) numérotées de 1 à s par ordre décroissant, l'étoile i ayant $e_i \geq 1$ sommets pendants. On a donc $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_s$

Une partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ étant donnée, pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$ nous avons:

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{i=1}^s x_i \sum_{j=1}^{e_i} x_{ij}$$

(pour l'étoile i , x_i est donc l'entier associé au centre et $x_{i1}, x_{i2}, \dots$, les entiers associés aux e_i sommets pendants).

Etant donnés $x_1, \dots, x_\alpha$ et $y_1, \dots, y_\beta$ deux suites de réels, nous noterons $x'_1, \dots, x'_\alpha$ et $y'_1, \dots, y'_\beta$ les mêmes éléments réordonnés tels que

$$x'_i \leq y'_j \quad \forall i \in [1, \alpha] \quad \forall j \in [1, \beta]$$

1 - Permutations minimales

Il est clair que toute permutation minimale doit vérifier

$$(I) \quad x_i \leq x_{ij} \quad \forall j \in [1, e_i] \quad \forall i \in [1, s]$$

LEMME III.3.2 Si $\alpha \geq \beta$ et $y \leq x$ alors

$$x \sum_{i=1}^{\alpha} x_i + y \sum_{j=1}^{\beta} y_j \geq y \sum_{i=1}^{\alpha} x'_i + x \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$$

Preuve

En posant $x = y + z$ ($z \geq 0$), comme

$$\sum_{i=1}^{\alpha} x_i + \sum_{j=1}^{\beta} y_j = \sum_{i=1}^{\alpha} x'_i + \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$$

l'inégalité du Lemme est équivalente à

$$z \left(\sum_{i=1}^{\alpha} x_i - \sum_{j=1}^{\beta} y'_j \right) \geq 0$$

que l'on a d'après $x \geq y$ et $\sum_{i=1}^{\alpha} x_i \geq \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$ puisque les valeurs sont réordonnées et $\alpha \geq \beta$. ■

Remarque

Si dans le Lemme on rajoute les hypothèses $x \geq x_i \quad \forall i \in [1, \alpha]$, $y \geq y_j \quad \forall j \in [1, \beta]$, la transformation effectuée n'implique pas nécessairement $x \geq y'_j \quad \forall j \in [1, \beta]$.

Il est donc possible de minimiser encore l'expression obtenue en échangeant x et $y'_\beta = \min \{y'_1, \dots, y'_\beta\}$.

PROPOSITION III.3.4 Toute permutation minimale vérifie

$$x_i = n_i \quad \forall i \in [1, s]$$

Preuve

En faisant varier i de 1 à $s-1$, si $x_i \neq n_i$ on applique le Lemme III.3.2 à

$$x_i \sum_{j=1}^{e_i} x_{ij} + n_i \sum_{v=1}^{e_u} x_{uv}$$

Nous obtenons nécessairement $x_i = n_i \quad \forall i \in [1, s]$ car la propriété (I) nous assure que $\exists i \in [1, s]$ tel que $x_i = n_1$ et après chaque application du Lemme l'inégalité $x_i \leq x_{ij} \quad \forall j \in [1, e_i], \quad \forall i \in [1, s]$ est vérifiée, quitte à permuter x_i avec $\min \{x_{i_1}, \dots, x_{e_i}\}$ (voir remarque précédente). ■

LEMME III.3.3 Si $x < y$ alors

$$x \sum_{i=1}^{\alpha} x_i + y \sum_{j=1}^{\beta} y_j > x \sum_{i=1}^{\alpha} x'_i + y \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$$

Preuve

En posant $y = x + z$ l'inégalité est équivalente à

$$z \left(\sum_{j=1}^{\beta} y_j - \sum_{j=1}^{\beta} y'_j \right) > 0$$

qui elle-même résulte de $z > 0$ (car $y > x$) et $\sum_{j=1}^{\beta} y_j > \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$ d'après le réordonnement. ■

THEOREME III.3.3 Toute permutation minimale σ_m envoie n_1 et les e_1 plus grandes valeurs, $n_k, \dots, n_{k-e_1+1}$, sur la première étoile, n_2 et les e_2 plus grandes valeurs restantes sur la deuxième étoile, ..., et n_s et $n_{s+1}, \dots, n_{s+e_s}$ sur la plus petite étoile, $n_1, \dots, n_s$ étant associés aux sommets dominants.

Preuve

Nous avons déjà établi $x_i = n_i \quad \forall i \in [1, s]$. Pour obtenir la répartition sur les sommets pendants il suffit d'appliquer le Lemme III.3.3, pour chaque valeur i de 1 à $s-1$, à

$$n_i \sum_{j=1}^{e_i} x_{ij} + n_u \sum_{v=1}^{e_u} x_{uv} \quad \forall u \in [i+1, s]$$

2 - Permutations maximales

Nous donnons seulement ici des propriétés que doivent vérifier toute permutation maximale. Cet exemple a cependant l'avantage de mettre en évidence (voir le cas de deux étoiles) qu'une connaissance plus élaborée de la partition considérée est nécessaire pour résoudre complètement $(PB1)_m$, et donc $(PB1)_M$ d'après le Théorème III.2.1.

Remarquons tout d'abord que toute permutation maximale, α_M , doit vérifier

$$(II) \quad x_i \geq x_{ij} \quad \forall j \in [1, e_i] \quad \forall i \in [1, s]$$

LEMME III.3.4 Si $\alpha \geq \beta$ et $y \geq x$ alors

$$x \sum_{i=1}^{\alpha} x_i + y \sum_{j=1}^{\beta} y_j \geq y \sum_{i=1}^{\alpha} x'_i + x \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$$

Preuve

En posant $y = x + z$, il suffit de vérifier

$$z \left(\sum_{i=1}^{\alpha} x'_i - \sum_{j=1}^{\beta} y_j \right) \geq 0$$

inégalité résultant de $z \geq 0$ (car $y \geq x$) et de $\sum_{i=1}^{\alpha} x'_i \geq \sum_{j=1}^{\beta} y_j$ puisque les valeurs sont réordonnées et $\alpha \geq \beta$. ■

Remarque

Si nous supposons de plus $x \geq x_i \quad \forall i \in [1, \alpha]$ et $y \geq y_j \quad \forall j \in [1, \beta]$, l'expression majorante obtenue dans le Lemme vérifie alors

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \geq x'_i \geq y'_j & \forall i \in [1, \alpha] \quad \forall j \in [1, \beta] \\ x \geq y'_j \end{cases}$$

Mais on ne peut rien dire sur les comparaisons $\langle x : x'_i \rangle$ en général.

Nous pouvons alors montrer $x_1 = n_k$.

En effet, la propriété (II) entraîne que $\exists i \in [1, s]$ tel que $x_i = n_k$. Donc si $i \neq 1$ on obtient le résultat en appliquant le Lemme précédent à

$$x_1 \sum_{j=1}^{e_1} x_{1j} + n_k \sum_{h=1}^{e_i} x_{ih}$$

puisque $n_k > x_1$.

En appliquant à nouveau le Lemme III.3.4 pour chaque valeur de i dans $[2, s-1]$ avec $x = x_i$ et $y = \max_{i < j \leq s} x_j$ nous obtenons de plus $x_2 > x_3 > \dots > x_s$.

LEMME III.3.5 Si $x > y$ alors

$$x \sum_{i=1}^{\alpha} x_i + y \sum_{j=1}^{\beta} y_j \leq x \sum_{i=1}^{\alpha} x'_i + y \sum_{j=1}^{\beta} y'_j$$

Preuve :

En posant $x = y + z$ il suffit de vérifier

$$z \left(\sum_{i=1}^{\alpha} x'_i - \sum_{i=1}^{\alpha} x_i \right) \geq 0$$

ce qui est immédiat car $z > 0$ et $\sum_{i=1}^{\alpha} x'_i \geq \sum_{i=1}^{\alpha} x_i$

THEOREME III.3.4 En posant $m_G(p, \sigma_M) = \sum_{i=1}^s x_i \sum_{j=1}^{e_i} x_{ij}$

les propriétés suivantes sont nécessairement vérifiées

- (i) $x_1 = n_k > x_2 > \dots > x_{s-1} > x_s$
- (ii) $x_i > x_{ij} \quad \forall j \in [1, e_i] \quad \forall i \in [1, s]$
- (iii) $x_{ij} > x_{uv} \quad \forall i, u \in [1, s] \quad (i < u)$
 $\forall j \in [1, e_i]$
 $\forall v \in [1, e_u]$

Preuve

(i) et (ii) sont déjà établies.

Pour obtenir (iii) il suffit d'appliquer le Lemme III.3.5 pour chaque valeur de i dans $[1, s-1]$ avec $x = x_i$ et $y = y_j$, j variant de $i+1$ à s . ■

Conséquence

Il est facile de voir que

$$\{x_{s_1}, \dots, x_{s_{e_s}}\} = \{n_1, n_2, \dots, n_{e_s}\}$$

i.e. aux sommets pendants de la plus petite étoile sont nécessairement attachées les plus petites valeurs de la partition.

Considérons le cas de 2 étoiles. On a donc $s = 2$.

Notons $e_1 = a$ et $e_2 = b$ (on a $a \geq b \geq 1$ et $k = a + b + 2$).

En appliquant le Théorème

$$m_G(p, \sigma_M) = n_k \sum_{i=1}^a x_{1i} + x_2 \sum_{j=1}^b n_j$$

On peut montrer facilement que

$$n_k > n_1 + \dots + n_b \Rightarrow x_2 = n_{b+1}$$

$$n_k = n_1 + \dots + n_b \Rightarrow x_2 \text{ quelconque dans } \{n_{b+1}, \dots, n_{k-1}\}$$

$$n_k < n_1 + \dots + n_b \Rightarrow x_2 = n_{k-1}$$

L'expression exacte de σ_M dépend ici de la comparaison d'un élément de la partition avec une combinaison linéaire de certains autres.

Il est tentant de conjecturer (et nous le faisons) que dans le cas général

$$\text{- ou bien } x_2 = n_{k-1}, x_3 = n_{k-2}, \dots, x_s = n_{k-s+1}$$

$$\text{- ou bien } x_2 = n_{k-e_1-1}, x_3 = n_{k-e_1-e_2-2}, \dots, x_s = n_{s+1}$$

III.3.4 Chaque composante connexe est une clique

Notons $K_1, K_2, \dots, K_c$ les graphes complets composant G d'ordres respectifs $k_1, \dots, k_c$ tels que $k_1 > k_2 > \dots > k_c > 2$.

On a donc
$$\sum_{i=1}^c k_i = k.$$

Soit $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$, pour $\sigma \in \Sigma_k$ quelconque, nous avons :

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{i=1}^c m_{K_i}(p, \sigma)$$

où $m_{K_i}(p, \sigma)$ est la restriction de $m_G(p, \sigma)$ à la composante K_i .

LEMME III.3.6 Si $c = 2$, toute permutation maximale, σ_M , associe les plus grandes valeurs de p à la plus grande clique.

Preuve

Notons a et b ($2 \leq a \leq b$) les ordres respectifs de deux cliques K_a et K_b composant G .

Déterminer σ_M sur G équivaut, d'après le Théorème III.2.1. à déterminer σ_M sur $\bar{G} = K_{a,b}$ (le graphe biparti complet) comme permutation minimale.

Or

$$m_{\bar{G}}(p, \sigma) = \left(\sum_{i=1}^a x_i \right) \left(\sum_{i=a+1}^k x_i \right)$$

en notant $\{1, 2, \dots, a\}$ et $\{a+1, \dots, k\}$ ($a + b = k$) les deux stables de $K_{a,b}$.

Il suffit de montrer

$$m_{\bar{G}}(p, \sigma_M) = \left(\sum_{i=1}^a n_i \right) \left(\sum_{i=a+1}^k n_i \right)$$

c'est à dire

$$\left(\sum_{i=1}^a x_i \right) \left(\sum_{i=a+1}^k x_i \right) > \left(\sum_{i=1}^a n_i \right) \left(\sum_{i=a+1}^k n_i \right) \quad (I)$$

où $x_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1, k] \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$.

$$\text{Or } n = \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^a n_i + \sum_{i=a+1}^k n_i = \sum_{i=1}^a x_i + \sum_{i=a+1}^k x_i$$

$$\text{Si nous notons } N_a = \sum_{i=1}^a n_i \quad \text{et} \quad X_a = \sum_{i=1}^a x_i, \text{ alors}$$

$$(I) \quad \Leftrightarrow X_a (n - X_a) > N_a (n - N_a)$$

$$\Leftrightarrow (X_a - N_a) (n - (X_a + N_a)) > 0$$

D'où le résultat en constatant que $X_a \geq N_a$ (car N_a est la somme des a plus petits éléments de p) et $n \geq X_a + N_a$ (puisque $a \leq b$ et $a + b = k$) ■

Dans le cas général ($c \geq 3$), nous avons de même

THEOREME III.3.5 Toute permutation maximale, σ_M , associe les k_1 plus grandes valeurs de p à K_1 , les k_2 plus grandes valeurs restantes à K_2 , ... et les k_c dernières valeurs à K_c , la plus petite clique.

Preuve

Elle découle directement du Lemme précédent puisqu'il suffit de l'appliquer sur K_i et K_j , i variant de 1 à $c - 1$ et j de $i + 1$ à c . ■

Etudions les permutations minimales.

$$\begin{aligned}
 m_G(p, \sigma) &= \sum_{i=1}^c m_{K_i}(p, \sigma) \\
 &= \sum_{i=1}^c \sum_{uv \in K_i} x_u x_v \\
 &= \sum_{i=1}^c \frac{1}{2} (N_i^2 - \sum_{j \in X_i} x_j^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^c N_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i^2
 \end{aligned}$$

où X_i est l'ensemble des sommets de K_i et $N_i = \sum_{j \in X_i} x_j$ la somme des entiers que σ associe à K_i , $\{X_1, \dots, X_c\}$ est une partition de $[1, k]$, donc

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j \in X_i} x_j^2 = \sum_{i=1}^k n_i^2$$

La partition $p = (n_1, \dots, n_k)$ étant fixée, la somme $\sum_{i=1}^k n_i^2$ est constante.

Déterminer σ_m revient donc à minimiser $\sum_{i=1}^c N_i^2$.

La solution entière d'un tel problème sous les uniques contraintes

$\sum_{i=1}^c N_i = n$, est obtenue quand $|N_i - N_j| < 1 \quad \forall i, j \in [1, c]$
(voir Lemme IV.3.1)

Mais ici, nous avons les contraintes supplémentaires:

$\forall i \in [1, c]$, N_i est la somme de k_i éléments de $p = (n_1, \dots, n_k)$

N_i, N_j , $i, j \in [1, c]$, $i \neq j$, n'ont aucun élément en commun.

PROPOSITION III.3.5 $\sum_{i=1}^c N_i^2$ minimale $\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq c} N_i N_j$ maximale

$\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq c} |N_i - N_j|$ minimale

Preuve

La première équivalence résulte de l'égalité

$$\sum_{i=1}^c N_i^2 = (N_1 + \dots + N_c)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq c} N_i N_j \quad (\text{II})$$

car $\sum_{i=1}^c N_i = \sum_{i=1}^k n_i = n$

Compte tenu de l'équivalence

$$\sum_{1 \leq i < j \leq c} |N_i - N_j| \text{ minimale} \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq c} (N_i - N_j)^2 \text{ minimale}$$

la seconde équivalence s'obtient à partir de

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq c} (N_i - N_j)^2 &= (c-1) \sum_{i=1}^c N_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq c} N_i N_j \\ &= (c-1)n^2 - 2c \sum_{1 \leq i < j \leq c} N_i N_j \end{aligned}$$

d'après (II)

CONJECTURE

Considérons le cas $c = 2$.

Le problème est donc le suivant: étant donnés $p = (n_1, \dots, n_k)$ et k_1, k_2 tels que $k_1 > k_2 > 2$, $k_1 + k_2 = k > 5$ il faut trouver une partition X_1, X_2 de $[1, k]$ avec $|X_1| = k_1$, $|X_2| = k_2$ minimisant

$$\left| \sum_{i \in X_1} n_i - \sum_{j \in X_2} n_j \right|$$

Nous conjecturons la NP-difficulté de ce problème.

Deux remarques sur cette question.

(i) Si $k_2 = 1$ ou $k_1 = k_2 = 2$ les solutions sont respectivement

$$X_1 = [1, k-1], X_2 = \{k\} \quad \text{et} \quad X_1 = \{1, 4\} \quad X_2 = \{2, 3\}$$

(ii) Le problème de la partition

Données $P = \{n_1, \dots, n_k\}$

Problème Trouver $I \subset [1, k]$ tel que

$$\sum_{i \in I} n_i = \sum_{j \in \bar{I}} n_j$$

est NP-difficile [7], même lorsque l'on impose $|I| = \frac{k}{2}$

CHAPITRE IV

PARTITIONS EXTREMALES

IV.1 INTRODUCTION

Nous étudions dans ce chapitre le problème, (PB2), des partitions extrémales, p_m et p_M , ainsi que des permutations associées, σ_m et σ_M définies sur un graphe simple $G = ([1, k], E)$ et telles que

$$m_G(p_m, \sigma_m) \leq m_G(p, \sigma) \leq m_G(p_M, \sigma_M)$$

$$\forall \sigma \in \Sigma_k \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k)$$

Le Théorème IV.2.2 résout complètement le problème des partitions minimales, les solutions restant valables dans le cas des multigraphes sans boucle. Nous montrons ensuite comment ils permettent l'optimisation de certaines formes quadratiques en nombres entiers et réels.

Après avoir exposé une autre preuve plus combinatoire du Théorème de MOTZKIN et STRAUSS [13] nous l'étendons (d'Achille) à des multigraphes sans boucle. Le résultat, en nombres entiers, donne la solution de (PB2)_m pour les graphes réguliers.

Sans résoudre entièrement le problème, nous donnons cependant quelques résultats concernant les partitions maximales entières, nous les prolongeons, dans $\mathbb{R}$, au problème de la maximisation d'une forme quadratique sans carré et à coefficients 0 ou 1 sous les mêmes contraintes.

Enfin, au § IV.4, nous analysons rapidement les résultats précédents au niveau de leur complexité algorithmique et montrons que le problème des partitions maximales est NP-difficile.

Préliminaires

Soient $\{x_1, \dots, x_k\}$, $\{y_1, \dots, y_k\}$ deux ensembles de réels tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \geq 1 \quad \forall i \in [1, k] \\ \sum_{i=1}^k x_i = n \\ 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \end{array} \right.$$

LEMME IV.1.1 Avec les hypothèses précédentes,

$$\sum_{i=1}^k x_i y_i \geq y_1(n - k) + \sum_{i=1}^k y_i$$

Si $x_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, k]$, l'égalité est réalisée si et seulement si

$$y_1 = \dots = y_k$$

Preuve

Pour tout i dans $[1, k]$

$$x_1 y_1 + \dots + x_i y_i + \dots \geq (x_1 + x_i - 1) y_1 + \dots + y_i + \dots$$

$$\Leftrightarrow (y_i - y_1)(x_i - 1) \geq 0 \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i \geq y_1 \\ x_i \geq 1 \end{array} \right.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^k x_i y_i \geq (n - k + 1) y_1 + \sum_{i=2}^k y_i$$

qui donne l'inégalité.

Quand $x_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, k]$, l'inégalité est stricte dès qu'il existe $y_i > y_1$. ■

Remarquons que si $n > k$, les y_i étant fixés

$$\sum_{i=1}^k x_i y_i = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 = \dots = y_k$$

Soient $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$, avec la notation $x_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1, k]$, nous avons

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{ij \in E} x_i x_j$$

alors, en posant $\sum_{j \in \Gamma(i)} = 0$ si $\Gamma(i) = \emptyset$, on peut écrire

$$2 m_G(p, \sigma) = \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j$$

car chaque arête est prise en compte pour chacune de ses extrémités.

LEMME IV.1.2
$$m_G(p, \sigma) = -m + \sum_{i=1}^k x_i d(i) + \sum_{ij \in E} (x_i - 1)(x_j - 1)$$

Preuve

$$\begin{aligned} 2 m_G(p, \sigma) &= \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j = \sum_{i=1}^k x_i (d(i) + \sum_{j \in \Gamma(i)} (x_j - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i d(i) + \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j \in \Gamma(i)} (x_j - 1) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i d(i) + \sum_{i=1}^k (x_i - 1) \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j \end{aligned}$$

(car chaque arête ij contribue pour $x_i(x_j - 1)$, suivant i , et pour $x_j(x_i - 1)$, suivant j)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k x_i d(i) + \sum_{i=1}^k (x_i - 1) (d(i) + \sum_{j \in \Gamma(i)} (x_j - 1)) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k x_i d(i) - \sum_{i=1}^k d(i) + \sum_{i=1}^k (x_i - 1) \sum_{j \in \Gamma(i)} (x_j - 1) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k x_i d(i) - 2m + 2 \sum_{ij \in E} (x_i - 1)(x_j - 1) \end{aligned}$$

Remarques

(i) Le Lemme précédent, prouvé avec un graphe simple, reste toujours valable dans le cas d'un multigraphe sans boucle. Il suffit en effet de modifier $\Gamma(i)$ en répétant chaque voisin j de en autant (en emporte le vent) de fois que la multiplicité de l'arête ij .

(ii) Comme

$$\sum_{i=1}^k x_i d(i) = \sum_{i=1}^k (x_i - 1) d(i) + 2m$$

le Lemme précédent entraîne

$$m_G(p, \sigma) = m + \sum_{i=1}^k (x_i - 1) d(i) + \sum_{ij \in E} (x_i - 1) (x_j - 1)$$

Soit f une application à k variables et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Pour un vecteur $(x_1, \dots, x_k)$ de $\mathbb{R}^k$ la notation $f(\dots, x, \dots, y, \dots)$ signifie que seules sont prises en considération les valeurs de deux coordonnées quelconques distinctes, les autres restant constantes.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, soit

$$C = \{ (x_1, \dots, x_k) \mid \sum_{i=1}^k x_i = N \}$$

PROPOSITION IV.1

Si, pour tout vecteur de C , f vérifie
 $f(\dots, x, \dots, y, \dots) < f(\dots, x+\varepsilon, \dots, y-\varepsilon, \dots)$
dès que $y - x = 2\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), alors le maximum est atteint
par le vecteur

$$\left(\frac{N}{k}, \dots, \frac{N}{k} \right)$$

Preuve

Si, pour un vecteur maximal, deux valeurs ne sont pas égales, alors l'inégalité stricte entraîne une contradiction. ■

PROPOSITION IV.2 Si, pour tout vecteur entier de C (i.e. $x_i \in \mathbb{N}$)
 $f(\dots, x, \dots, y, \dots) < f(\dots, x+1, \dots, y-1, \dots)$
dès que $y - x > 2$, alors le maximum est atteint par le
vecteur
 $(a, \dots, a, a+1, \dots, a+1)$

où $N = ak + b$, $0 \leq b < k$ (division euclidienne)

Preuve

Il suffit de constater qu'ici nous obtenons

$$| x_i - x_j | \leq 1 \quad \forall i, j \in [1, k] \quad \blacksquare$$

Des résultats analogues s'obtiennent par minimisation.

IV.2 PARTITIONS MINIMALES

Nous noterons δ le degré minimal de G .

THEOREME IV.2.1 Toute partition minimale peut se mettre sous la forme

$$p_m = (1, \dots, 1, n-k+1)$$

Preuve

Pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$, si i est le sommet auquel est associé le stable $G_k = (S_k, \emptyset)$, d'ordre $n - k + 1$, alors

$$\begin{aligned} m_G(p_m, \sigma) &= (n - k + 1)d(i) + \sum_{uv \in G - \{i\}} 1 \\ &= (n - k + 1)d(i) + m - d(i) \\ &= m + d(i)(n - k) \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'arêtes est donc obtenu quand i est de degré minimal

$$m_G(p_m, \sigma_m) = m + \delta(n - k)$$

Il suffit maintenant de montrer que

$$m_G(p, \sigma) \geq m + \delta(n - k) \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

D'après le Lemme IV.1.2

$$m_G(p, \sigma) = -m + \sum_{i=1}^k x_i d(i) + \sum_{ij \in E} (x_i - 1)(x_j - 1)$$

Comme $x_i = n_{\sigma}(i) \geq 1 \quad \forall i \in [1, k]$, on en déduit

$$m_G(p, \sigma) \geq -m + \sum_{i=1}^k x_i d(i)$$

et l'application du Lemme IV.1.1 avec $\{y_1, \dots, y_k\} = \{d(i), \dots, d(k)\}$ entraîne

$$\sum_{i=1}^k x_i d(i) \geq \delta(n-k) + \sum_{i=1}^k d(i)$$

donc

$$\sum_{i=1}^k x_i d(i) \geq 2m + \delta(n-k)$$

par conséquent

$$m_G(p, \sigma) \geq m + \delta(n-k)$$

Remarque

Une preuve directe de l'inégalité

$$m_G(p, \sigma) \geq -m + \sum_{i=1}^k x_i d(i)$$

est obtenue en constatant que $x_i x_j \geq x_i + x_j - 1$ car $x_i \geq 1$ $\forall i \in [1, k]$. En effet

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{ij \in E} x_i x_j \geq \sum_{ij \in E} (x_i + x_j - 1)$$

$$m_G(p, \sigma) \geq \sum_{ij \in E} (x_i + x_j) - m = \sum_{i=1}^k x_i d(i) - m$$

Nous avons donc mis en évidence une forme standard (indépendante du graphe) pour toute partition minimale, en remarquant toutefois que pour obtenir le nombre minimal d'arêtes, $m + \delta(n-k)$, les permutations minimales associées doivent placer le stable d'ordre $n - k + 1$ sur un sommet de degré minimal. Cependant, il n'y a pas unicité et le Théorème IV.2.2 résout complètement ce problème en indiquant la forme générale de toute partition minimale pour un graphe quelconque.

Pour tout graphe G , on a trivialement

$$m_G(p, \sigma) \geq m \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

Ce minimum est atteint d'une part dans le cas où $n = k$ puisque $\mathcal{P}(n, k) = \{(1, \dots, 1)\}$ et d'autre part quand G a s sommets isolés ($s \geq 1$, $\delta = 0$) par toute partition $p = (1, \dots, 1, n_{k-s+1})$ et toute permutation σ associant $G_{k-s+1}, \dots, G_k$ à ces sommets isolés.

C'est pourquoi, dans la suite, nous faisons les hypothèses $k < n$ et $\delta \geq 1$.

THEOREME IV.2.2

Toute partition minimale est nécessairement de la forme

$$p_m = (1, \dots, 1, n_{k-s+1}, \dots, n_k)$$

où s est le cardinal d'un stable, S , de G tel que

$$d(i) = \delta \quad \forall i \in S.$$

Le nombre minimal d'arêtes du joint, $m + \delta(n-k)$, est alors obtenu pour toute permutation associant $G_{k-s+1}, \dots, G_k$ aux sommets de S .

Preuve

Si σ_m est une telle permutation et $S = \{1, \dots, s\}$ alors

$$\begin{aligned} m_G(p_m, \sigma_m) &= \sum_{i=1}^s x_i d(i) + m_{G-S}(p, \sigma) \\ &= \delta(n_{k-s+1} + \dots + n_k) + m - s\delta \\ &= \delta(n - k + s) + m - s\delta \\ &= m + \delta(n-k) \end{aligned}$$

Etudions maintenant la forme générale d'une partition minimale.

Soit $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$, alors

$$p \text{ minimale} \Rightarrow n_1 = 1$$

En effet, si $n_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, k]$, alors pour toute permutation σ de Σ_k

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{ij \in E} x_i x_j \geq \sum_{ij \in E} (x_i + x_j) = \sum_{i=1}^k x_i d(i)$$

$$\text{car } x, y \geq 2 \Rightarrow xy \geq x + y$$

Donc, en appliquant le Lemme IV.1.1 avec $\{d(i), \dots, d(k)\}$

$$m_G(p, \sigma) \geq 2m + \delta(n-k) > m + \delta(n-k)$$

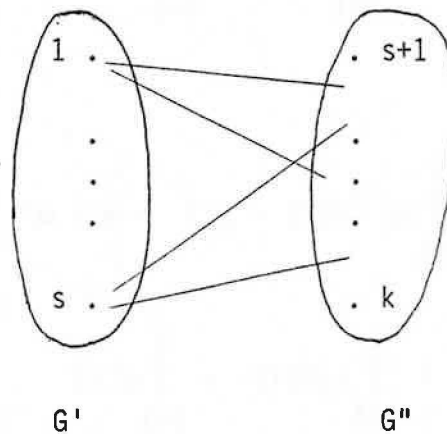
$$\text{car } \delta \geq 1 \Rightarrow m > 0$$

Soient $p = (1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$.
 Renombrons les sommets de G $1, \dots, s, s+1, \dots, k$ de
 telle sorte que:

$$\begin{cases} x_i \geq 2 & \forall i \in [1, s] \\ x_j = 1 & \forall j \in [s+1, k] \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons décomposer G en deux sous-graphes, G' et G'' , sur les sommets $X' = \{1, \dots, s\}$ et $X'' = \{s+1, \dots, k\}$ respectivement. X' et X'' sont non vides puisque $n_1 = 1$ et $k < n$ (donc $\exists i \in \{2, \dots, k\} \mid n_i \geq 2$).

Nous noterons $G' = (X', E')$ et $G'' = (X'', E'')$



Alors

$$m_G(p, \sigma) = m_{G'}(p, \sigma) + m_{G', G''}(p, \sigma) + m_{G''}(p, \sigma)$$

Or

$$m_{G'}(p, \sigma) = \sum_{ij \in E'} x_i x_j \geq \sum_{ij \in E'} (x_i + x_j) = \sum_{i=1}^s x_i y_i$$

puisque sur X' $x_i \geq 2$, y_i désignant le degré du sommet i dans G' .

$$m_{G', G''}(p, \sigma) = \sum_{i=1}^s x_i (d(i) - y_i)$$

car chaque sommet i de X' possède $d(i) - y_i$ voisins dans G'' où à chaque sommet est associé un stable d'ordre 1.

$$m_{G''}(p, \sigma) = m - m' - \sum_{i=1}^s (d(i) - y_i)$$

où $m' = |E'|$ est le nombre d'arêtes de G' $2m' = \sum_{i=1}^s y_i$

et $\sum_{i=1}^s (d(i) - y_i)$ est le nombre d'arêtes, dans G , reliant G' à G'' .

Donc

$$m_{G''}(p, \sigma) = m - m' - \sum_{i=1}^s d(i) + \sum_{i=1}^s y_i = m + m' - \sum_{i=1}^s d(i)$$

Finalement

$$m_G(p, \sigma) > \sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{i=1}^s x_i (d(i) - y_i) + m + m' - \sum_{i=1}^s d(i)$$

$$m_G(p, \sigma) > m + m' + \sum_{i=1}^s x_i d(i) - \sum_{i=1}^s d(i)$$

Or, en appliquant le Lemme IV.1.1 avec $\{x_1, \dots, x_s\}$ et $\{d(i), \dots, d(s)\}$, en notant δ' le degré minimal de G' , nous obtenons

$$\sum_{i=1}^s x_i d(i) > \delta'(n-k) + \sum_{i=1}^s d(i) \quad (I)$$

car $\sum_{i=1}^s a_i = n - k + s$ puisque $x_j = 1 \quad \forall j \in X''$

Donc

$$m_G(p, \sigma) > m + m' + \delta'(n-k) + \sum_{i=1}^s d(i) - \sum_{i=1}^s d(i)$$

$$m_G(p, \sigma) > m + m' + \delta'(n-k)$$

Nous n'avons $m + m' + \delta'(n-k) = m + \delta(n-k)$ que si $\delta' = \delta$ et $m' = 0$ car $\delta' > \delta$ et $n > k$.

Par conséquent, en remarquant que $x_i > 2 \quad \forall i \in X'$, l'égalité (I) n'a lieu que si $d(1) = d(2) = \dots = d(x) = \delta' = \delta$, $m_G(p, \sigma)$ n'est minimal, c'est à dire égal à $m + \delta(n-k)$, que si σ associe les éléments non unitaires de p aux sommets d'un stable de G (donc le graphe G' avec les notations précédentes) dont les sommets sont de degré minimal dans G . ■

Remarques

(1) Une partition minimale, p_m , ne donne le nombre minimal d'arêtes qu'associée à une permutation minimale.

En effet, en général, il n'est pas vrai que

$$m_G(p_m, \sigma) \leq m_G(p, \sigma) \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

Considérons $G = ([1, k], E)$ une $k-1$ -étoile, c'est à dire

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, k\}\}$$

Prenons $n = 2k$, $p = (2, 2, \dots, 2)$ et une permutation σ qui associe le stable G_k , d'ordre n_k , au sommet 1 de degré $\Delta = k-1$.

On a $p_m = (1, \dots, 1, k+1)$.

Alors

$$m_G(p_m, \sigma) = m + \Delta(n-k) = (k-1)(k+1)$$

$$m_G(p, \sigma) = 4m = 4(k-1)$$

Donc, si $k > 4$, $m_G(p_m, \sigma) > m_G(p, \sigma)$

(2) Les résultats précédents restent valables lorsque G est un multigraphe sans boucle. Compte tenu de la remarque (i) du Lemme IV.1.2 il suffit de reprendre les preuves avec

$$d(i) = \sum_{j \in \Gamma(i)} m_{ij}$$

où m_{ij} est la multiplicité de l'arête ij .

Aplication à l'optimisation (en nombres entiers et réels) de certaines formes quadratiques

De même qu'à tout graphe simple nous avons associé une forme quadratique, à toute forme quadratique Q du type

$$Q(x_1, \dots, x_k) = \sum c_{ij} x_i x_j$$

où les coefficients sont entiers et vérifient

$$c_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in [1, k] \mid i > j$$

nous pouvons associer un multigraphe sans boucle $G_Q = ([1, k], E)$ défini par

$$E = \bigcup_{c_{ij} \neq 0} \{ \{i, j\}_1, \dots, \{i, j\}_{c_{ij}} \}$$

Considérons la forme quadratique

$$R(x_1, \dots, x_k) = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^k x_i^2 + Q(x_1, \dots, x_k)$$

où $c = \max c_{ij}$

Notons (C_1) les contraintes linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{array} \right.$$

On notera δ (resp. Δ) le degré minimal (resp. maximal) de G_Q et $m = |E|$.

Pour une numérotation fixée des sommets de G_Q , x_i sera la valeur associée au sommet i .

THEOREME IV.2,3

Avec les notations précédentes nous avons

$$\min_{(C_1)} Q(x_1, \dots, x_k) = m + \delta(n-k)$$

$$\max_{(C_1)} R(x_1, \dots, x_k) = \frac{c}{2} n^2 + m - \frac{c}{2} k(k-1) - (c(k-1) - \Delta)(n-k)$$

Ces valeurs sont obtenues par tout vecteur

$$(1, \dots, 1, x_{k-s+1}, \dots, x_k)$$

où $\{k-s+1, \dots, k\}$ est

- un stable de G_Q dont les sommets sont de degré minimal, δ , dans le premier cas

- une clique de G_Q dont les sommets sont de degré maximal, Δ , et les arêtes de multiplicité maximale, c , dans le premier cas.

De plus ces résultats sont valables dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{N}$.

Preuve

Le premier résultat, en nombres entiers, est l'application directe de la remarque concernant les multigraphes sans boucle qui suit le Théorème IV.2.2.

Il reste vrai dans $\mathbb{R}$, car étant donné un vecteur quelconque $(x_1, \dots, x_k)$ vérifiant les contraintes (C_1) , on a

$$Q(x_1, \dots, x_k) \geq \sum_{i=1}^k x_i d(i) - m$$

d'après la remarque qui suit le Théorème IV.2.1, d'où l'on déduit

$$Q(x_1, \dots, x_k) \geq m + \delta(n - k)$$

en utilisant le Lemme IV.1.1. Il est alors facile de vérifier que tout vecteur ayant la forme annoncée atteint le minimum.

Pour R , considérons la forme quadratique

$$\bar{R}(x_1, \dots, x_k) = \sum \bar{c}_{ij} x_i x_j$$

où

$$\begin{cases} \bar{c}_{ij} = c - c_{ij} & i < j \\ \bar{c}_{ij} = 0 & i > j \end{cases}$$

qui définit ce que nous appellerons $\bar{G}_Q$ le multigraphe complémentaire de G_Q .

Alors

$$R(x_1, \dots, x_k) = \frac{c}{2} n^2 - \bar{R}(x_1, \dots, x_k)$$

Il suffit donc de minimiser $\bar{R}$, qui est de la même forme que Q , sous les contraintes (C_1)

D'où

$$\max_{(C_1)} R(x_1, \dots, x_k) = \frac{c}{2} n^2 - m' - \delta'(n-k)$$

où m' et δ' sont respectivement le nombre d'arêtes de $\bar{G}_Q$ et son degré minimal.

Le résultat définitif vient du fait qu'un stable de degré minimal, δ' , de $\bar{G}_Q$ est une clique de degré maximal, Δ , de G_Q , dont les arêtes sont de multiplicité maximale, c .

L'expression du maximum se calcule facilement en remarquant que

$$\begin{cases} m' = \frac{c}{2} k(k-1) - m \\ \delta' = c(k-1) - \Delta \end{cases}$$

IV.3 PARTITIONS MAXIMALES

IV.3.1 Quelques résultats préliminaires

Déterminons les partitions maximales réelles et entières dans le cas où $G = K$ est le graphe complet d'ordre K .

Pour $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$

$$m_K(p, \sigma) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i n_j = \frac{1}{2} \left(n^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2 \right)$$

Il s'agit donc de minimiser $\sum_{i=1}^k n_i^2$

LEMME IV.3.1 Pour tout entier $q \geq 2$, $\sum_{i=1}^k n_i^q$ atteint son minimum

- dans R pour $n_i = \frac{n}{k} \quad \forall i \in [1, k]$

- dans N pour la partition $(a, \dots, a, a+1, \dots, a+1)$
où $n = ak + b$, $0 \leq b < k$ (division euclidienne).

Preuve

Si $y - x \geq 2\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$, il est facile de montrer que

$$x^q + y^q > (x + \varepsilon)^q + (y - \varepsilon)^q.$$

Les propositions IV.1 et IV.2 permettent de conclure en prenant $y - x = 2\varepsilon$ dans le cas réel et $y - x \geq 2$ ($\varepsilon = 1$) dans le cas entier. ■

L'application de cette propriété avec $q = 2$ donne

PROPOSITION IV.3.1 $m_K(p, \sigma) \leq \frac{1}{2} (n^2 - (k-b)a^2 - b(a+1)^2) \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right)$

où $n = ak + b$, $0 \leq b < k$ (division euclidienne).

LEMME IV.3.2

Dans le cas entier

$$\max m_K(p, \sigma) \leq \max m_{K'}(p', \sigma')$$

où K et K' sont des graphes complets d'ordres respectifs k et k' tels que $k \leq k'$, et $p \in \mathcal{P}(n, k)$, $p' \in \mathcal{P}(n, k')$, $\sigma \in \Sigma_k$, $\sigma' \in \Sigma_{k'}$.

Preuve

Il suffit, pour $k' = k+1$, de montrer que

$$\min \sum_{i=1}^{k+1} n_i^2 < \min \sum_{i=1}^k m_i^2$$

sous les contraintes respectives

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i = n \qquad \sum_{i=1}^k m_i = n$$

L'inégalité est vraie dans $\mathbb{R}$ car les partitions minimales,

$(\frac{n}{k+1}, \dots, \frac{n}{k+1})$ et $(\frac{n}{k}, \dots, \frac{n}{k})$ respectivement, donnent

$$\frac{n^2}{k+1} < \frac{n^2}{k}$$

La partition de $\mathcal{P}(n, k)$ minimisant $\sum_{i=1}^k n_i^2$ est

$(a_1, \dots, a, a+1, \dots, a+1)$ où $n = ak + b$, $0 \leq b < k$ vérifie

$$\sum_{i=1}^k n_i^2 = (k-b)a^2 + b(a+1)^2 \leq \frac{n^2}{k}$$

Il est alors facile d'établir que

$$\frac{n^2}{k+1} < (k-b)a^2 + b(a+1)^2$$

qui démontre l'inégalité demandée.

IV.3.2 Le Théorème de MOTZKIN et STRAUSS. Solution de (PB2)_M pour un graphe régulier

Etant donné $G = ([1, k], E)$ un graphe simple T.S. MOTZKIN et E.G. STRAUSS [13] ont résolu le problème suivant

$$(I) \quad \max \sum_{ij \in E} x_i x_j$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous noterons $\sum_{ij \in E} x_i x_j = Q_G(x_1, \dots, x_k)$

et $M_1(G)$ la solution de (I)

THEOREME IV.3.1 (T.S. MOTZKIN, E.G. STRAUSS)

$$M_1(G) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q} \right)$$

obtenu avec $(0, \dots, 0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{1}{q})$ en associant les

valeurs non nulles aux sommets d'une clique, K , de G , d'ordre maximal, q .

Preuve (Principe de la...)

Les auteurs montrent la double inégalité en prouvant

$$M_1(G) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q} \right)$$

par induction sur k , l'ordre de G .

Ils établissent, par différenciation, que si G n'est pas complet, le maximum peut être obtenu par un vecteur ayant au moins une composante nulle, soit x_i . Ainsi $M_1(G) = M_1(G')$ où G' est le sous-graphe de G obtenu par suppression du sommet i . ■

Considérons maintenant le problème

$$(II) \quad \max_{(C_0)} Q_G(x_1, \dots, x_k)$$

où (C_0) représente les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k x_i = N \\ x_i > 0 \end{array} \right.$$

N étant un entier non nul.

Notons $M_N(G)$ la solution de (II)

COROLLAIRE IV.3.1 $M_N(G) = \frac{N^2}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$

obtenu par $(0, \dots, 0, \frac{N}{q}, \dots, \frac{N}{q})$ sur une clique d'ordre maximal, q , de G .

Preuve

Il suffit de remarquer que si $(x_1, \dots, x_k)$ vérifie les contraintes (C_0) alors, en posant

$$y_i = \frac{x_i}{N} \quad \forall i \in [1, k]$$

$(y_1, \dots, y_k)$ vérifie

$$\sum_{i=1}^k y_i = 1 \quad \text{et} \quad y_i > 0.$$

et

$$Q_G(x_1, \dots, x_k) = N^2 Q_G(y_1, \dots, y_k)$$

On a donc

$$M_N(G) = N^2 M_1(G)$$

Si la solution de (II) est une conséquence immédiate du Théorème IV.3.1, comme l'établit le Corollaire précédent, nous en donnons une preuve directe, plus générale et n'utilisant plus le résultat de MOTZKIN et STRAUSS. La méthode utilisée a d'autre part l'avantage de fournir la solution en nombres entiers et d'être utilisable dans le cas où $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{S}(n, k)$ (voir § IV.3.3) aussi bien que pour les hypergraphes (voir chapitre V).

THEOREME IV.3.2

Dans $\mathbb{R}$

$$M_N(G) = \frac{N^2}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

obtenu par $(0, \dots, 0, \frac{N}{q}, \dots, \frac{N}{q})$.

Dans $\mathbb{N}$

$$M_N(G) = \frac{1}{2} (N^2 - (q - b)a^2 - b(a + 1)^2)$$

obtenu par $(0, \dots, 0, a, \dots, a, a+1, \dots, a+1)$
où $N = aq + b$, $0 \leq b < q$ (division euclidienne).

Dans les deux cas, q est l'ordre d'une clique maximale de G , aux sommets de laquelle sont affectées les valeurs non nulles des vecteurs solutions.

Preuve

Si G est complet ($q = k$) les solutions sont données par la Proposition IV.3.1 et Lemme IV.3.2.

Supposons donc G non complet.

Soit $(x_1, \dots, x_k)$ un vecteur réalisant le maximum

$$Q_G(x_1, \dots, x_k) = M_N(G)$$

Pour tout sommet $i \in [1, k]$ nous noterons $\sum_i = \sum_{j \in \Gamma(i)} x_j$

S'il existe $x_i, x_j \in \mathbb{R}^*$ tels que $ij \notin E$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $\varepsilon \leq \min(x_i, x_j)$ nous avons nécessairement

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) > Q_G(\dots, x_i - \varepsilon, \dots, x_j + \varepsilon, \dots)$$

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) > Q_G(\dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j - \varepsilon, \dots)$$

Un calcul élémentaire nous donne alors $\sum_i = \sum_j$.

De la même façon, s'il existe $x_i, x_j \in \mathbb{N}^*$ tels que $ij \notin E$, alors

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) > Q_G(\dots, x_{i-1}, \dots, x_{j+1}, \dots)$$

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) > Q_G(\dots, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \dots)$$

Là aussi les calculs montrent que $\sum_i = \sum_j$

Dans les deux cas, nous avons alors

$$M_N(G) = Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = Q_G(\dots, 0, \dots, x_i + x_j, \dots)$$

Le maximum peut donc être obtenu par un vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf sur une clique. D'où les résultats d'après la Proposition IV.3.1 et le Lemme IV.3.2, ce dernier montrant que dans le cas entier la clique doit aussi être d'ordre maximal. ■

Si $G = ([1, k], E)$ est un multigraphe sans boucle alors

$$Q_G(x_1, \dots, x_k) = \sum_{ij \in E} x_i x_j = \sum_{ij \in E'} c_{ij} x_i x_j$$

où c_{ij} est un entier égal à la multiplicité de l'arête $ij \in E'$, $G' = ([1, k], E')$ représentant le graphe simple sous-jacent à G .

Notons

$$\sum_i = \sum_{j \in \Gamma(i)} c_{ij} x_j$$

On a alors

PROPOSITION IV.3.2 $M_N(G)$ est obtenu sur une clique de G' .

Ceci nous permet de donner une réponse définitive, en nombres entiers et réels, dans les cas triviaux suivants:

(i) La multiplicité est constante, i.e. $c_{ij} = c$. Car dans ce cas

$$Q_G(x_1, \dots, x_k) = c Q_{G'}(x_1, \dots, x_k)$$

le Théorème IV.3.2 est donc applicable.

(ii) G' est une forêt.

En effet, la clique maximale étant alors une arête ($q = 2$), il suffit d'en choisir une de multiplicité maximale car

$$M_N(G) = c_{ij} \frac{N^2}{4} \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

$$M_N(G) = c_{ij} \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \quad \text{dans } \mathbb{N}$$

Le problème général de caractériser exactement les cliques solutions et les vecteurs optimaux correspondants, compte tenu de la multiplicité des arêtes, reste ouvert. On a cependant

PROPOSITION IV.3.3 Tout vecteur optimal réel sur une clique solution doit vérifier

$$\sum_i = \sum_j = \frac{2}{N} M_N(G)$$

Preuve

En numérotant $1, 2, \dots, q$, les sommets d'une clique solution, K , nous avons

$$\begin{aligned} M_N(G) &= Q(x_1, \dots, x_q, 0, 0, \dots, 0) = Q_K(x_1, \dots, x_q) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq q} c_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Considérons x_i, x_j et ε tels que $0 < \varepsilon \leq \min(x_i, x_j)$ et notons

$$\sum'_i = \sum_i - c_{ij} x_i \quad \sum'_j = \sum_j - c_{ij} x_j$$

Alors

$$M_N(G) = c_{ij} x_i x_j + x_i \sum'_i + x_j \sum'_j + Q_{ij}$$

où Q_{ij} , le reste de l'expression, ne dépend ni de x_i ni de x_j .

Comme $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_q)$ est un vecteur maximal, on a

$$M_N(G) \geq c_{ij} (x_i - \varepsilon)(x_j + \varepsilon) + (x_i - \varepsilon) \sum'_i + (x_j + \varepsilon) \sum'_j + Q_{ij}$$

$$M_N(G) \geq c_{ij} (x_i + \varepsilon)(x_j - \varepsilon) + (x_i + \varepsilon) \sum'_i + (x_j - \varepsilon) \sum'_j + Q_{ij}$$

qui donnent

$$c_{ij} (x_i - x_j) - \sum_i' + \sum_j' - c_{ij} \varepsilon \leq 0$$

$$c_{ij} (x_i - x_j) + \sum_i' - \sum_j' - c_{ij} \varepsilon \leq 0$$

D'où

$$| \sum_i - \sum_j | \leq c_{ij} \varepsilon$$

c'est à dire $\sum_i = \sum_j$ puisque $c_{ij} > 0$ et ε est quelconque dans $]0, \min(x_i, x_j)]$

Finalement

$$2 M_N(G) = 2 Q_K(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^q x_i \sum_i = N \sum$$

d'où on déduit $\sum = \frac{2}{N} M_N(G)$

en notant $\sum = \sum_i \quad \forall i \in [1, q]$

20

Application au Problème des partitions maximales dans le cas des graphes réguliers

Il s'agit donc de maximiser

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{ij \in E} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(j)}$$

où $\sigma \in \Sigma_k$, $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $G = ([1, k], E)$ est un graphe simple.

La remarque (ii) qui suit le Lemme IV.1.2. montre que

$$m_G(p, \sigma) = m + \sum_{i=1}^k (x_i - 1)d(i) + \sum_{ij \in E} (x_i - 1)(x_j - 1)$$

donc, en notant $y_i = x_i - 1 \quad \forall i \in [1, k]$, on a

$$m_G(p, \sigma) = m + \sum_{i=1}^k y_i d(i) + \sum_{ij \in E} y_i y_j$$

Si bien que le Problème est équivalent à la résolution de

$$\max_{(C_0)} \sum_{i=1}^k y_i d(i) + \sum_{ij \in E} y_i y_j$$

car $(y_1, \dots, y_k)$ vérifie

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k y_i = N \\ y_i > 0 \end{cases}$$

avec $N = n - k \in \mathbb{N}^*$

D'après la remarque qui suit le Lemme IV.1.1, nous savons que

$$\sum_{i=1}^k y_i d(i) = \text{cte} \iff d(i) = d(2) = \dots = d(k)$$

c'est à dire G est régulier i.e. $d(i) = d \quad \forall i \in [1, k]$

Dans ce cas

$$m_G(p, \sigma) = m + d(n - k) + \sum_{ij \in E} y_i y_j$$

et l'application du Théorème IV.3.2 nous donne

THEOREME IV.3.3 La valeur maximale de $m_G(p, \sigma)$:

$$m + d(n - k) + \frac{1}{2} ((n - k)^2 - (q - b)a^2 - b(a+1)^2)$$

est obtenue par toute partition

$$p_M = (1, \dots, 1, a+1, \dots, a+1, a+2, \dots, a+2)$$

où $n - k = aq + b$, $0 \leq b < q$, et toute permutation σ_M associant $a+1, \dots, a+2$ aux q sommets d'une clique d'ordre maximal de G .

Remarquons que dans le cas réel

$$\max_{(C_1)} \sum_{ij \in E} x_i x_j = m + d(n - k) + \frac{1}{2} (n - k)^2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

est obtenu par $(1, \dots, 1, x, \dots, x)$ où $x = \frac{1}{q} (n - k + q)$, dans les mêmes conditions.

Application à la minimisation de certaines formes quadratiques

Avec les notations déjà utilisées, considérons les formes quadratiques

$$R(x_1, \dots, x_k) = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum c_{ij} x_i x_j$$

$$\bar{R}(x_1, \dots, x_k) = \sum \bar{c}_{ij} x_i x_j$$

Soient G et $\bar{G}$ les multigraphes engendrés.

Alors les résultats précédents permettent de résoudre, en nombres entiers et réels, le problème

$$\begin{array}{l} \min R(x_1, \dots, x_k) \\ (C_0) \end{array}$$

dans les cas suivants:

- G est un graphe simple i.e. $c = 1$ (Théorème III.3.2)
- G est de multiplicité constante
- G a une forêt comme graphe simple sous-jacent

et le problème

$$\begin{array}{l} \min R(x_1, \dots, x_k) \\ (C_1) \end{array}$$

lorsque G est un graphe simple régulier.

Il suffit en effet d'exploiter l'égalité

$$\min R(x_1, \dots, x_k) = \frac{c}{2} N^2 - \max \bar{R}(x_1, \dots, x_k)$$

IV.3.3 Etude générale des partitions maximales

Considérons le problème, en nombres entiers et réels, dans le cas où $G = ([1,k], E)$ est un multigraphe sans boucle. En notant Q_G la forme quadratique associée, nous étudions ici

$$\max_{(C_1)} Q_G(x_1, \dots, x_k) = \max_{(C_1)} \sum_{ij \in E} x_i x_j$$

THEOREME IV.3.4

Tout vecteur maximal peut se mettre sous la forme $(1, \dots, 1, x_{k-q+1}, \dots, x_k)$ où q est l'ordre d'une clique de G .

Preuve

Notons aussi $Q_G(x_1, \dots, x_k)$ la valeur du maximum et supposons qu'il existe deux valeurs x_i et x_j non unitaires telles que $ij \in E$.

Dans le cas réel, considérons ε quelconque vérifiant $0 < \varepsilon \leq \min(x_i - 1, x_j - 1)$, alors

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \geq Q_G(\dots, x_i - \varepsilon, \dots, x_j + \varepsilon, \dots)$$

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \geq Q_G(\dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j - \varepsilon, \dots)$$

Un calcul simple montre que nécessairement $\sum_i = \sum_j$

Dans le cas entier, par hypothèse $x_i \geq 2$ et $x_j \geq 2$, il suffit alors de reprendre le calcul précédent avec $\varepsilon = 1$ pour obtenir de même $\sum_i = \sum_j$.

Finalement, dans les deux cas

$$Q_G(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = Q_G(\dots, 1, \dots, x_j + x_i - 1, \dots)$$

qui montre que le maximum peut être atteint par un vecteur ayant la forme annoncée. ■

Soit $K = \{1, 2, \dots, q\}$, une clique maximisant Q_G .

En notant $(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q)$ un vecteur optimal on a

$$Q_G(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q) = m + \sum_{i=1}^q y_i d(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} c_{ij} y_i y_j$$

où $y_i = x_i - 1 \quad \forall i \in [1, q]$ (voir remarque (ii) après le Lemme IV.1.2).

$$\text{Nous noterons } \sum_i = \sum_{j \in \Gamma(i)} c_{ij} y_j \quad \forall i \in [1, q]$$

PROPOSITION IV.3.4 Tout vecteur optimal réel doit vérifier

$$d(i) + \sum_i = d(j) + \sum_j \quad \forall i, j \in [1, q]$$

Preuve

Pour toute arête ij de K , soit ε dans $]0, \min(y_i, y_j)[$.
Le vecteur considéré étant maximal, et en notant

$$\sum'_i = \sum_i - c_{ij} y_j \quad \sum'_j = \sum_j - c_{ij} y_i,$$

nous avons nécessairement

$$\begin{aligned} y_i d(i) + y_j d(j) + c_{ij} y_i y_j + y_i \sum'_i + y_j \sum'_j &\geq \\ (y_i + \varepsilon) d(i) + (y_j - \varepsilon) d(j) + c_{ij} (y_i + \varepsilon) (y_j - \varepsilon) + \\ &\quad (y_i + \varepsilon) \sum'_i + (y_j - \varepsilon) \sum'_j \end{aligned}$$

les autres valeurs s'annulant, car indépendantes de y_i et y_j .

D'où

$$d(i) + \sum_i - (d(j) + \sum_j) \leq \varepsilon c_{ij}$$

De même, avec $y_i - \varepsilon$ et $y_j + \varepsilon$, nous obtenons

$$d(j) + \sum_j - (d(i) + \sum_i) \leq \varepsilon c_{ij}$$

Finalement

$$|d(i) + \sum_i - (d(j) + \sum_j)| \leq \varepsilon c_{ij}$$

qui donne l'égalité demandée car ε est quelconque.

Ces résultats peuvent s'affiner dans le cas d'un graphe simple.

THEOREME IV.3.5 Si G est un graphe simple, Q_G atteint son maximum sur une clique, K , d'ordre q tel que

$$\sum_{i=1}^q (d(i) - d(1)) < n - k$$

avec la notation

$$d(1) \leq d(2) \leq \dots \leq d(q)$$

Le vecteur solution, $(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q)$, vérifie alors

$$x_i = \frac{1}{q} (n - k + q - \sum_{j=1}^q d(j)) + d(i) \quad i = 1, q$$

Preuve

Comme G est simple et $\sum_{i=1}^q y_i = n - k$, on a

$$\sum_i = n - k - y_i \quad \forall i \in [1, q]$$

ainsi

$$d(i) + \sum_i = d(j) + \sum_j \Leftrightarrow d(i) - y_i = d(j) - y_j$$

$$\Leftrightarrow d(i) - x_i = d(j) - x_j$$

car $y_i = x_i - 1$

En particulier $x_i = x_1 + d(i) \quad \forall i \in [1, q]$, d'où

$$n - k + q = \sum_{i=1}^q x_i = x_1 + \sum_{i=2}^q (x_1 + d(i) - d(1))$$

$$= qx_1 + \sum_{i=1}^q d(i) - qd(1)$$

donc

$$x_1 = \frac{1}{q} (n - k + q - \sum_{i=1}^q d(i)) + d(1) \quad \text{d'où l'on déduit}$$

$$x_i = \frac{1}{q} (n - k + q - \sum_{j=1}^q d(j)) + d(i) \quad \forall i \in [1, q]$$

Par hypothèse, $d(1) \leq d(2) \leq \dots \leq d(q)$, donc $x_1 = \min_{1 \leq i \leq q} x_i$.

Or il faut $x_i > 1 \quad \forall i \in [1, q]$. Il suffit de le vérifier pour x_1 , on obtient ainsi la condition du Théorème.

Revenons à l'étude des partitions maximales.

D'après le Théorème IV.3.4 toute partition optimale est de la forme

$$(1, \dots, 1, n_1, \dots, n_q) \quad \text{où } n_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, q].$$

Comme $\sum_{i=1}^q n_i = n - k + q \geq 2q$, nous obtenons la condition

triviale (I) $q \leq n \leq n - k$.

En reprenant la preuve de la Proposition IV.3.4 pour un graphe simple avec $y_i, y_j \geq 2$ et $\varepsilon = 1$, on a

$$|n_i - n_j + d(j) - d(i)| \leq 1 \quad \forall i, j \in [1, q]$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} -1 &\leq n_1 - n_2 + d(2) - d(1) \leq 1 \\ -1 &\leq n_1 - n_3 + d(3) - d(1) \leq 1 \\ &\vdots \\ -1 &\leq n_1 - n_q + d(q) - d(1) \leq 1 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$-q + 1 \leq qn_1 - \sum_{i=1}^q n_i + \sum_{i=1}^q d(i) - qd(1) \leq q - 1$$

L'hypothèse $n_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, q]$, nécessairement réalisée par $n_1 = \min_{1 \leq i \leq q} n_i$, nous donne

$$2q \leq qn_1 \leq n - k + q - \sum_{i=1}^q (d(i) - d(1)) + q - 1$$

soit

$$(II) \quad \sum_{i=1}^q (d(i) - d(1)) \leq n - k$$

De la même façon

$$-q + 1 \leq qn_q - \sum_{i=1}^q n_i + \sum_{i=1}^q d(i) - qd(q) \leq q - 1$$

donc

$$\sum_{i=1}^q (d(q) - d(i)) \leq qn_q - \sum_{i=1}^q n_i + q - 1$$

Or

$$\sum_{i=1}^q n_i = n - k + q = n_q + \sum_{i=1}^{q-1} n_i > n_q + 2(q-1)$$

i.e. $n_q < n - k - q + 2$

D'où

$$(III) \quad \sum_{i=1}^q (d(q) - d(i)) < (q-1)(n-k) - (q-1)^2$$

En conclusion, toute clique solution doit donc vérifier les trois conditions (I) (II) (III)

Le problème d'en donner une caractérisation plus fine dans le cas général reste ouvert. Mais le § suivant, consacré à l'aspect algorithmique des questions abordées, montre l'intérêt de l'étude de cas particuliers.

IV.4 CONSIDERATIONS ALGORITHMIQUES

La donnée d'une forme quadratique sans carré à coefficients entiers est celle du multigraphe sans boucle associé $G = ([1,k], E)$.

Avec les notations déjà utilisées, partant des données de G et de n la question est donc: quelles sont les complexités algorithmiques des calculs de

$$(i) \quad \min_{(C_1)} Q_G(x_1, \dots, x_k)$$

$$(ii) \quad \max_{(C_0)} Q_G(x_1, \dots, x_k)$$

$$(iii) \quad \max_{(C_1)} Q_G(x_1, \dots, x_k)$$

en nombres entiers, et en nombres réels?

(i) s'obtient banalement en $O(k+m)$ à partir de la représentation usuelle (listes de successeurs) de G puisque

$$\min_{(C_1)} Q_G(x_1, \dots, x_k) = m + \delta(n-k)$$

seul δ , le degré minimal, est donc à déterminer.

Le problème (ii) est NP-difficile dans le cas d'un graphe simple car, d'après le Théorème IV.3.2, il est équivalent à la recherche d'une clique maximale [7].

Le problème (iii) est aussi NP-difficile.

En effet, il est équivalent au problème (ii) dans le cas des graphes réguliers. Or d'après [7], le problème du stable maximal est NP-difficile dans le cas des graphes planaires cubiques. Donc, il en est de même du problème de la clique maximale pour les graphes complémentaires correspondants qui sont en particulier réguliers.

D'où le résultat pour un graphe simple régulier quelconque.

CHAPITRE V

EXTENSIONS AUX HYPERGRAPHES

V.I INTRODUCTION

A toute partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$, nous pouvons associer une partition $(S_1, \dots, S_k)$ de $[1, n]$ où $|S_i| = n_i \quad \forall i \in [1, k]$.

Notons $H_1, \dots, H_k$ les k hypergraphes stables $H_i = (S_i, \mathcal{E}_i)$ définis par

$$\mathcal{E}_i = \{\{x\} \mid x \in S_i\} \quad (|\mathcal{E}_i| = |S_i| = n_i) \quad \forall i \in [1, k].$$

Si $H = ([1, k], \mathcal{E})$ est un hypergraphe quelconque d'ordre k où $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_m) \mid |E_j| \geq 1 \quad \forall j \in [1, m]$ et σ une permutation de Σ_k , considérons

$$H(p, \sigma) = H \begin{matrix} H_{\sigma(1)} & H_{\sigma(2)} & \dots & H_{\sigma(k)} \\ 1 & 2 & \dots & k \end{matrix}$$

l'hypergraphe obtenu par substitution des sommets $1, \dots, k$ par $H_{\sigma(1)}, \dots, H_{\sigma(k)}$ respectivement.

Par définition $H(p, \sigma) = ([1, n], \mathcal{E}(p, \sigma))$ où

$$\mathcal{E}(p, \sigma) = (E_j - \{i\} \cup \{u\} \mid x \in S_{\sigma(i)}, i \in E_j, j \in [1, m])$$

de sorte que chaque arête E de H donne $\prod_{i \in E} n_{\sigma(i)}$ arêtes distinctes dans $H(p, \sigma)$.

Si bien qu'en notant $m_H(p, \sigma)$ le nombre d'arêtes de $H(p, \sigma)$ et $x_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1, k]$ nous obtenons

$$m_H(p, \sigma) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \prod_{i \in E} x_i$$

Remarques

(1) Les hypergraphes considérés sont quelconques. Ils peuvent avoir des arêtes multiples mais ne contiennent pas d'arêtes vides.

(2) Les hypergraphes $H_1, \dots, H_k$ étant des stables, l'opération de substitution dans un multigraphe sans boucle et sans sommet isolé correspond exactement à l'opération de joint suivant les k stables donnés.

Les problèmes que nous étudions ici sont les extensions aux hypergraphes de (PB1) et (PB2) définis au Chapitre I. Il s'agit donc de déterminer, dans un premier temps, les permutations optimales, α_m et α_M , minimisant et maximisant, respectivement, $m_H(p, \sigma)$ sur Σ_k , une partition p de $\mathcal{P}(n, k)$ étant fixée, puis les partitions minimales et maximales.

De même qu'à tout hypergraphe H nous avons associé un unique polynôme à k variables

$$P_H(x_1, \dots, x_k) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \prod_{i \in E} x_i$$

à tout polynôme à k variables

$$P(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^m P_j(x_1, \dots, x_k)$$

où chaque $P_j(x_1, \dots, x_k)$ est un produit de $x_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$ tel que $\text{degré}(x_i) \leq 1 \quad \forall i \in [1, k]$, correspond un unique hypergraphe $H_p = ([1, k], \mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_m)$ est défini par

$$E_j = \{ i \mid x_i \text{ figure dans } P_j(x_1, \dots, x_k) \} \quad \forall j \in [1, m]$$

Plusieurs P_j peuvent être identiques, le coefficient entier correspondant représentera alors la multiplicité de l'arête commune associée.

Ainsi (PB2) équivaut à résoudre, sur de tels polynômes les problèmes de minimisation et maximisation en nombres entiers suivants:

$$\begin{array}{ll} \min & P(x_1, \dots, x_k) \\ (C_1) & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & P(x_1, \dots, x_k) \\ (C_1) & \end{array}$$

Nous résolvons le problème des permutations minimales dans des cas particuliers (cas d'arêtes disjointes deux à deux ; cas de c-chaînes et c-cycles qui généralisent les graphes simples étudiés au Chapitre II).

$(PB2)_m$ est complètement résolu dans le cas général nous permettant ainsi de minimiser tout polynôme de la famille précédente sous les contraintes linéaires (C_1) .

Le Théorème de MOTZKIN et STRAUSS est en partie généralisé à ces polynômes. Lorsque l'hypergraphe associé à des propriétés particulières le résultat est obtenu complètement.

En ce qui concerne $(PB2)_m$ une caractérisation générale des partitions et permutations maximales correspondantes en est donnée en terme d'hypergraphe partiel.

Nous montrons que cet hypergraphe partiel se réduit à une arête sous certaines conditions.

Enfin, nous appliquons ces résultats aux cas de chaînes et de cycles particuliers.

V.2 PERMUTATIONS EXTREMALES - CAS PARTICULIERS

Nous appellerons r -clique d'ordre k l'hypergraphe K_r défini par $K_r = ([1, k], \mathcal{P}_r([1, k]))$, $\mathcal{P}_r([1, k])$ désignant l'ensemble des parties de $[1, k]$ ayant r éléments.

Remarquons que si $r = d$, on parlera de d -clique (on dira que l'on met le d en l' r).

LEMME V.2.1 $m_{K_r}(p, \sigma) = m_{K_r}(p, \sigma') \quad \forall p \in (n, k) \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma_k$

Preuve:triviale.

Soit H un hypergraphe sans arête multiple, si H contient une r -clique, elle n'intervient pas dans la recherche des permutations extrémales.

Ainsi est-il naturel de définir $\bar{H} = ([1, k], \bar{\mathcal{E}})$, le complémentaire de H , comme suit.

Notons $\{c_1, \dots, c_a\}$ où $1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_a$ l'ensemble des cardinaux des arêtes de H , alors, par définition, $\bar{\mathcal{E}}$ contiendra toutes les arêtes de

$$\bigcup_{i=1}^a \mathcal{P}_{c_i}([1, k])$$

ne figurant pas dans $\mathcal{E}$.

De sorte que

$$H \cup \bar{H} = ([1, k], \bigcup_{i=1}^a \mathcal{P}_{c_i}([1, k])) = \bigcup_{i=1}^a K_{c_i}$$

S'il existe des arêtes multiples il y a, pour définir $\bar{H}$, deux choix possibles:

(i) soit considérer M , la multiplicité maximale, alors une arête de multiplicité m_j dans $\mathcal{E}$ sera de multiplicité $M - m_j$ dans $\bar{\mathcal{E}}$, de telle sorte que $\mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}}$ contienne M représentants pour chaque arête de

$$\bigcup_{i=1}^a \mathcal{P}_{c_i}([1, k])$$

(ii) soit considérer les multiplicités maximales, $m_1, \dots, m_a$, suivant les cardinaux des arêtes, dans ce cas toute arête E de multiplicité m_j et de cardinal c_j sera de multiplicité $m_i - m_j$ dans $\bar{\mathcal{C}}$. $\mathcal{C} \cup \bar{\mathcal{C}}$ contiendra alors m_i représentants pour chaque arête de $\mathcal{P}_{c_i}([1,k])$, pour tout i dans $[1,a]$.

Lorsque l'arête n'existe pas on pose $m_j = 0$.

D'autre part, il va de soi, dans les deux cas, que l'obtention de $\bar{H}$ à partir de H nécessite la connaissance de $m_1, \dots, m_a$ et $M = \max_{1 \leq i \leq a} m_i$

définis sur H et que l'égalité $H = \bar{\bar{H}}$ n'est vraie que par rapport à ces paramètres.

PROPOSITION V.2 Dans tous les cas, toute permutation minimale (resp. maximale) de H est une permutation maximale (resp. minimale) de $\bar{H}$.

Preuve

Une partition $p \in \mathcal{P}(n,k)$ étant donnée, nous avons

$$m_H(p, \sigma) + m_{\bar{H}}(p, \sigma) = \text{cte} \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

En effet, dans le premier cas

$$\begin{aligned} \text{sinon} \quad m_H(p, \sigma) + m_{\bar{H}}(p, \sigma) &= M \sum_{i=1}^a m_{K_{C_i}}(p, \sigma) \\ m_H(p, \sigma) + m_{\bar{H}}(p, \sigma) &= \sum_{i=1}^a m_i m_{K_{C_i}}(p, \sigma) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

S'il y a peu de chance d'obtenir une solution générale à (PB1) dans le cas des graphes, comme nous l'avons indiqué au Chapitre II, il en va de même pour les hypergraphes. Il est donc intéressant d'étudier quelques cas particuliers pour lesquels les polynômes correspondants ont une structure exploitable.

V.2.1 Cas d'arêtes disjointes 2 à 2

Supposons que $H = ([1, k], \mathcal{E})$ vérifie $E \cap F = \emptyset \quad \forall E, F \in \mathcal{E} \mid E \neq F$.
Fixons $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et étudions d'abord le cas $m = 2$.

LEMME V.2.2 Si $|E_1| = a$ tel que $1 \leq a \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, alors

$$m_H(p, \sigma_M) = n_1 \dots n_a + n_{a+1} \dots n_k$$

Preuve

Montrons $m_H(p, \sigma) \leq n_1 \dots n_a + n_{a+1} \dots n_k \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$
On peut écrire

$$m_H(p, \sigma) = x_1 \dots x_a + x_{a+1} \dots x_k = A.B + C.D$$

où A est le produit des n_i , $i \in [1, a]$, figurant dans $x_1 \dots x_a$ et B le produit restant, C est le produit des n_j , $j \in [a+1, k]$, figurant dans $x_{a+1} \dots x_k$ et D le produit restant.

Les trois constatations suivantes

(i) $A.C = n_1 \dots n_a, B.D = n_{a+1} \dots n_k$

(ii) $A \leq D$ car tout facteur de A est inférieur à tout facteur de D et D possède au moins autant de termes que A .

(iii) $C \leq D$ car C et B ont autant de facteurs et tout facteur de B est supérieur à tout facteur de C .

entraînent que $A.B + C.D \leq A.C + B.D$, c'est-à-dire l'inégalité voulue. ■

Dans le cas général nous avons

THEOREME V.2.1 En notant $|E_j| = e_j \quad \forall j \in [1, m]$ tel que $e_1 \leq \dots \leq e_m$ pour toute partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ nous avons

$$\begin{aligned} m_H(p, \sigma_M) &= n_1 \dots n_{e_1} + n_{e_1+1} \dots n_{e_1+e_2} \\ &\quad + \dots + n_{k-e_m+1} \dots n_k \end{aligned}$$

Preuve

σ_M peut prendre la forme annoncée, sinon en considérant deux monômes défectueux, il est toujours possible de majorer $m_H(p, \sigma)$ en réordonnant leurs termes comme l'indique le Lemme précédent. ■

Au lecteur curieux et avide d'exercices de ce style voici un problème non résolu: déterminer les permutations minimales. Pour rester français et, surtout, pour ne pas concurrencer ERDÖS, nous fixons la mise à prix initiale à 10 F.

V.2.2 Cas d'une c-chaîne et d'un c-cycle comme application du Chapitre II

Nous appellerons c-chaîne tout hypergraphe $H = ([1, k], \mathcal{E})$ ayant au moins deux arêtes et tel qu'il existe un entier non nul c vérifiant

$$|E_j| = 2c \quad \forall j \in [1, m]$$

$$|E_i \cap E_j| = \begin{cases} c & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i, j \in [1, m] \quad |i < j$$

Il est clair que $k = (m+1)c$

Nous écrivons $E_j = \{(j-1)c+1, \dots, (j+1)c\} \quad \forall j \in [1, m]$

de sorte que

$$\begin{aligned} m_H(p, \sigma) &= \sum_{j=1}^m x_{(j-1)c+1} \dots x_{(j+1)c} \\ &= x_1 \dots x_c x_{c+1} \dots x_{2c} + x_{c+1} \dots x_{2c} x_{2c+1} \dots x_{3c} + \dots \end{aligned}$$

pour toute partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$, avec $x_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1, k]$.

Exemple: si $c = 2$ et $m = 4$ alors $k = 10$ et

$$= (\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{7, 8, 9, 10\})$$

$$m_H(p, \sigma) = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5 x_6 + x_5 x_6 x_7 x_8 + x_7 x_8 x_9 x_{10}$$

Le polynôme obtenu est une généralisation de la forme quadratique Q rencontrée au Chapitre II puisque si $c = 1$ H est une chaîne élémentaire et

$$m_H(p, \sigma) = \sum_{j=1}^{k-1} x_j x_{j+1} = Q(x_1, \dots, x_k)$$

Le maximum est atteint sur Σ_k avec $Q(n_1, n_3, \dots, n_4, n_2)$
Dans la suite nous supposons $c \geq 2$.

Une permutation $\sigma \in \Sigma_k$ étant donnée posons

$$\{X_1, \dots, X_{m+1}\} = \{x_{ic+1} \dots x_{(i+1)c} \mid i \in [0, m]\}$$

tels que $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_{m+1}$

Il est clair que

$$m_H(p, \sigma) \leq Q(X_1, X_3, \dots, X_4, X_2)$$

Nous allons démontrer le Théorème suivant.

THEOREME V.2.2 Une partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ étant donnée

$$m_H(p, \sigma_M) = Q(X_1, X_3, \dots, X_4, X_2)$$

$$\text{où } X_i = n_{(i-1)c+1} \dots n_{ic} \quad \forall i \in [1, m+1]$$

La preuve utilise essentiellement l'opération consistant à

- (1) échanger deux termes élémentaires de p
- (2) réorganiser les X_j suivant la permutation maximale de Q après chaque échange.

Cette opération est possible en vertu du Lemme qui suit dans lequel $A, Bx, C, D, Ey, \dots$ désignent des produits X_j . Dans l'écriture Bx la minuscule x est élément, n_i , de p et la majuscule est le produit (de $c-1$ termes) restant.

Pour la lisibilité, si, par exemple, $X_i = Bx$ et $X_j = C$, nous noterons $X_i X_j = xB.C$

Cette opération de base permet d'obtenir une permutation maximale σ_M par majorations successives à partir de $m_H(p, \sigma) = Q(X_1, X_3, \dots, X_3, X_2)$

LEMME V.2.3 Si $x \geq y$ et $Bx \leq Ey$, $C \leq D$, $A \leq F$, alors, en échangeant x et y on a

$$A \cdot Bx + xB \cdot c + \dots + D \cdot Ey + yE \cdot F \leq A \cdot By + yB \cdot C + \dots + D \cdot Ex + xE \cdot F$$

Preuve

L'inégalité est équivalente à

$$(x - y) (B(A + C) - E(D + F)) \leq 0$$

Elle est donc trivialement vérifiée compte tenu des hypothèses, car de plus $Bx \leq Ey \leq Ex \Rightarrow B \leq E$.

La propriété précédente sera notée $P(A, Bx, C ; D, Ey, F)$

Remarquons qu'elle est toujours vraie dans les cas suivants:

$C = D$, on notera $P(A, Bx, C, Ey, F)$

$A = 0$,

$A = F = 0$,

$C = Ey$ et $D = 0$, on notera $P(A, Bx, Ey, F)$ (dans ce dernier cas on a donc $A \cdot Bx + xB \cdot Ey + yE \cdot F$).

Preuve du Théorème.

A partir de $m_H(p, \sigma) = Q(X_1, X_3, \dots, X_4, X_2)$ nous obtenons $X_1 = n_1 \dots n_c$ de la façon suivante: pour chaque i , de 1 à c , si n_i ne figure pas dans X_1 , on applique $P(0, Bx, C ; D, Ey, F)$ ou $P(0, Bx, C, Ey, F)$ ou $P(0, Bx, Ey, F)$, suivant les cas, avec toujours $Bx = X_1$, $x = \max \{x_1, \dots, x_c\}$ et $y = n_i$ (Ey est le produit contenant n_i), puis on réordonne $X_1, \dots, X_{m+1}$ suivant $Q(X_1, X_3, \dots, X_4, X_2)$.

Il est facile de vérifier les hypothèses du Lemme V.2.3 compte tenu du réordonnement après chaque échange, et de remarquer que X_1 reste le minimum car $X_1 = Bx > By$.

Une méthode identique appliquée à $Q(X_2, X_4, \dots, X_3, X_1)$, avec $A = 0$ et $Bx = X_2$ pour i variant de $c+1$ à $2c$ fournit $X_2 = n_{c+1} \dots n_{2c}$ en remarquant que X_1 n'est modifié ni par les échanges ni par les réordonnements, cela parce qu'il contient les c plus petits éléments de p .

Il suffit alors de répéter la méthode alternativement sur $Q(X_1, X_3, \dots, X_4, X_2)$ et sur $Q(X_2, X_4, \dots, X_3, X_1)$ avec X_j , j variant de 3 à m . j étant fixé (donc $X_1, \dots, X_{j-1}$ sont déjà déterminés) on fait varier i de $(j-1)c+1$ à jc en appliquant (si n_i ne figure pas dans X_j) suivant le cas $P(X_{j-2}, Bx, C ; D, Ey, F)$ ou $P(X_{j-2}, Bx, C, Ey, F)$ ou $P(X_{j-2}, Bx, Ey, F)$ où $Bx = X_j$, $x = \max \{x_{(j-1)c+1}, \dots, x_{jc}\}$ et $y = n_i$ puis en réordonnant, suivant la permutation maximale de Q , les produits $X_1, \dots, X_{m+1}$ après chaque échange.

Il est clair que $X_1, \dots, X_{j-1}$ et X_j ne sont pas affectés pour les réordonnements: $X_1 \dots, X_{j-1}$ ne sont pas modifiés par les échanges et sont déjà triés, et, X_j étant le j ième élément après l'obtention de X_{j-1} , le reste, car sa valeur diminue à chaque échange.

Nous obtenons ainsi une forme stable (sur laquelle le Lemme V.2.3 n'est plus applicable) majorant $m_H(p, \sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$.

Fin de la (1^{ère}) preuve.

Comme dans le Chapitre II nous pouvons étendre les résultats précédents au cas d'un c-cycle.

$H = ([1, k], \mathcal{E})$ sera un tel hypergraphe s'il est une c-chaîne vérifiant de plus $|E_1 \cap E_m| = c$ et $m \geq 3$. De la même façon, nous noterons

$$E_j = \{(j-1)c+1, \dots, (j+1)c\} \quad \forall j \in [1, m-1]$$

et de plus $E_m = \{1, 2, \dots, c, k-c+1, \dots, k\}$.

Dans ce cas $k = cm$.

Exemple: Si $c = 2$ et $m = 4$, alors $k = 8$ et

$$= (\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{7, 8, 1, 2\})$$

Ainsi, pour toute partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$, nous avons

$$m_H(p, \sigma) = \sum_{j=1}^{m-1} x_{(j-1)c+1} \dots x_{(j+1)c} + x_{k-c+1} \dots x_k x_1 \dots x_c$$

Si $c = 1$, nous retrouvons un cycle élémentaire d'ordre k et son polynôme associé. On supposera donc $c \geq 2$.

Or, pour $\sigma \in \Sigma_k$, en posant

$$\{X_1, \dots, X_m\} = \{x_{ic+1} \dots x_{(i+1)c} \mid i \in [0, m-1]\}$$

avec $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_m$, il existe une permutation $\tau \in \Sigma_m$ vérifiant

$$\begin{aligned} m_H(p, \sigma) &= Q(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(m)}, X_{\tau(1)}) \\ &= \widetilde{Q}(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(m)}) \end{aligned}$$

Donc, d'après le Chapitre II, on peut écrire

$$m_H(p, \sigma) \leq Q(X_1, X_2, X_4, \dots, X_5, X_3, X_1)$$

THEOREME V.2.3 Une partition $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ étant donnée

$$m_H(p, \sigma_m) = Q(X_1, X_2, X_4, \dots, X_3, X_1)$$

$$\text{où } X_i = n_{(i-1)c+1} \dots n_{ic} \quad \forall i \in [1, m]$$

Preuve

Il faut montrer $X_1 = n_1 \dots n_c$ car le Lemme V.2.3 n'est plus applicable, X_1 ayant ici une position privilégiée. Nous pourrions ensuite conclure en reprenant la preuve du Théorème V.2.2, le Lemme V.2.3 devenant applicable dès la prise en compte de X_2 .

En posant $X_1 = Ax$, sur $Q(X_1, X_2, \dots, X_3, X_1)$, nous avons la propriété

(P) si $x \geq y$, alors, en échangeant x et y

$$\begin{aligned} & xA \cdot X_2 + \dots + B \cdot Cy + yC \cdot D + \dots + X_3 \cdot Ax \\ & \leq yA \cdot X_2 + \dots + B \cdot Cx + xC \cdot D + \dots + X_3 \cdot Ay \end{aligned}$$

En effet

$$(x - y) (A(X_2 + X_3) - C(B + D)) \leq 0$$

car $X_2 \leq B$, $X_3 \leq D$ et $Ax \leq Cy \leq Cx \Rightarrow A \leq C$

Cette propriété d'échange reste valable dans les cas limites $xA \cdot Cy + yC \cdot D + \dots + X_3 \cdot Ax$ et $xA \cdot X_2 + \dots + B \cdot Cy + yC \cdot Ax$, de même lorsque $B = X_2$ et/ou $D = X_3$.

La structure de X_1 s'obtient à partir de

$$m_H(p, \sigma) = Q(X_1, X_2, \dots, X_3, X_1)$$

par majorations successives de la façon suivante: on fait varier i de 1 à c de sorte qu'à chaque itération, si n_i n'est pas dans X_1 , on applique (P) (adaptée suivant le cas) avec $x = \max \{x_1, \dots, x_c\}$ et $y = n_i$ puis on réorganise $X_2, \dots, X_m$ suivant la permutation maximale de $\tilde{Q}$. ■

Le problème des permutations minimales, c'est-à-dire de la détermination de la structure des produits X_i associés, n'est pas résolu.

Mais nous proposons une généralisation du problème des permutations à des polynômes plus généraux.

Considérons la famille des polynômes définis par

$$P_{r,c}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^m x_{(i-1)(r-c)+1} \cdots x_{(i-1)(r-c)+r}$$

$$\text{où } m = \frac{k-r}{r-c} + 1, \quad 0 \leq c \leq r-1 \leq k-1, \quad k \equiv r \pmod{r-c}$$

(par exemple

$$P_{2,1}(x_1, \dots, x_k) = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots = Q(x_1, \dots, x_k)$$

$$P_{4,3}(x_1, \dots, x_k) = x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + \dots$$

$$P_{r,0}(x_1, \dots, x_k) = x_1x_2 \dots x_r + x_{r+1}x_{r+2} \dots x_{2r} + \dots$$

$$P_{2c,c}(x_1, \dots, x_k) = x_1 \dots x_c x_{c+1} \dots x_{2c} x_{2c+1} \dots x_{3c} + \dots$$

$$P_{k,c}(x_1, \dots, x_k) = x_1x_2 \dots x_k \quad \forall c),$$

Nous pensons que les permutations maximales associées à ces polynômes ont une structure identique à celle d'une chaîne élémentaire ou d'une c -chaîne, sinon sont au moins déterminables par des méthodes d'échanges-réordonnements du style de celles utilisées jusqu'à présent sans connaissance supplémentaire sur p .

V.3 PARTITIONS EXTREMALES

V.3.1 Partitions minimales

Soit $H = ([1, k], \mathcal{E})$ un hypergraphe quelconque. Pour tout sommet i de H nous noterons $d(i)$ le nombre d'arêtes contenant i ($d(i)$ est le degré de i si H est un multigraphe), remarquons que $d(i) \geq 1$ car tout sommet appartient au moins à une arête. Posons $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} d(i)$.

$$1 \leq i \leq k$$

PROPOSITION V.3.1
$$\sum_{i=1}^k d(i) = \sum_{j=1}^m |E_j|$$

Preuve

Considérons la matrice d'incidence de l'hypergraphe

$$M = (M(i, j) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m)$$

définie par

$$M(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque sommet i
$$\sum_{j=1}^m M(i, j) = d(i)$$

Pour chaque arête E_j
$$\sum_{i=1}^k M(i, j) = |E_j|$$

D'où

$$\sum_{i=1}^k d(i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m M(i, j) = \sum_{j=1}^m |E_j|$$

LEMME V.3.1 Etant donnée une suite de réels $x_1, \dots, x_r$, on a

$$(i) \quad x_i \geq 1 \quad \forall i \in [1, r] \Rightarrow \prod_{i=1}^r x_i \geq \sum_{i=1}^r x_i - r + 1$$

$$(ii) \quad x_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, r] \Rightarrow \prod_{i=1}^r x_i \geq \sum_{i=1}^r x_i$$

Preuve

Montrons (i) et (ii) par induction sur r .

Si $r = 2$

$$(i) \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \Rightarrow x_1 x_2 \geq x_1 + x_2 - 1$$

$$(ii) \quad (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Rightarrow x_1 x_2 \geq x_1 + x_2$$

Les propriétés étant vraies jusqu'à $r-1$ ($r \geq 3$)

$$\begin{aligned} (i) \quad \prod_{i=1}^r x_i &\geq \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i - r + 2 \right) x_r \\ &\geq \sum_{i=1}^{r-1} (x_i + x_r - 1) - (r-2)x_r \\ &\geq \sum_{i=1}^r x_i + (r-2)x_r - r + 1 - (r-2)x_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \prod_{i=1}^r x_i &\geq \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \right) x_r = \sum_{i=1}^{r-1} x_i x_r \\ &\geq \sum_{i=1}^{r-1} (x_i + x_r) = \sum_{i=1}^r x_i + (r-2)x_r \\ &\geq \sum_{i=1}^r x_i \end{aligned}$$

Les Théorèmes suivants donnent les solutions du problème des partitions minimales pour un hypergraphe quelconque, c'est-à-dire du problème

$$\min_{\substack{p \in \mathcal{P}(n,k) \\ \sigma \in \Sigma_k}} m_H(p, \sigma)$$

THEOREME V.3.1

La partition $p_m = (1, \dots, 1, n-k+1)$ est minimale.

Le nombre minimal d'arêtes $m_H(p_m, \sigma_m) = m + \delta(n-k)$ est obtenu par toute permutation, σ_m , substituant H_k à tout sommet i vérifiant $d(i) = \delta$.

Preuve

Soit $\sigma \in \Sigma_k$ quelconque.

Si i est le sommet de H auquel σ substitue le stable H_k , d'ordre $n - k + 1$, alors

$$\begin{aligned} m_H(p, \sigma) &= \sum_{E \in \mathcal{E} \mid i \in E} (n - k + 1) + m - d(i) \\ &= d(i)(n - k + 1) + m - d(i) \\ &= m + d(i)(n - k) \end{aligned}$$

Cette expression est minimale quand $d(i) = \delta$.

$$\text{Montrons } m_H(p, \sigma) \geq m + \delta(n - k) \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

Pour tout sommet $i \in [1, k]$, la substitution donne au moins $x_i d(i)$ arêtes car à tout sommet j adjacent à i est substitué un hypergraphe $H_{\sigma(j)}$ d'ordre au moins égal à 1.

Or, dans l'expression $\sum_{i=1}^k x_i d(i)$ ainsi obtenue nous considérons

chaque arête E_j de H pour chacun de ses éléments de sorte que nous la comptons exactement $|E_j|$ fois. Donc

$$m_H(p, \sigma) \geq \sum_{i=1}^k x_i d(i) - \sum_{j=1}^m (|E_j| - 1)$$

D'après le Lemme IV.1.1 nous avons

$$\sum_{i=1}^k x_i d(i) \geq \delta(n - k) + \sum_{j=1}^m d(i)$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition V.3.1

$$m_H(p, \sigma) \geq \sum_{j=1}^m |E_j| + \delta(n - k) - \sum_{j=1}^m (|E_j| - 1)$$

$$m_H(p, \sigma) \geq m + \delta(n - k)$$

COROLLAIRE V.3.1 Si $P(x_1, \dots, x_k)$ est un polynôme quelconque sans carré à coefficients entiers et k variables réelles alors

$$\min_{(C_1)} P(x_1, \dots, x_k) = P(1, \dots, 1, n - k + 1)$$

$$= m + \delta(n - k)$$

où m, δ sont les caractéristiques de l'hypergraphe H_p associé à P .

Preuve

Il suffit de reprendre la preuve du Théorème précédent sur $H_p = ([1, k], \mathcal{E})$ en remarquant cependant que $x_1, \dots, x_k$ étant réels, il faut utiliser le Lemme V.3.1, propriété (i).

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_k) &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \prod_{i \in E} x_i > \sum_{E \in \mathcal{E}} \left(\sum_{i \in E} x_i - |E| + 1 \right) \\ &> \sum_{i=1}^k x_i d(i) - \sum_{E \in \mathcal{E}} |E| + m \\ &> \delta(n-k) + \sum_{i=1}^k x_i d(i) - \sum_{j=1}^m |E_j| + m \\ &\quad \text{(Lemme IV.1.1)} \end{aligned}$$

D'où $P(x_1, \dots, x_k) > m + \delta(n-k)$, ce qui permet de conclure.

Le Théorème V.3.2 met en évidence une forme standard (indépendante de l'hypergraphe considéré) sur l'ensemble des partitions minimales. Le Théorème suivant résout complètement le problème en précisant la nature de toute partition minimale ainsi que des permutations minimales associées.

THEOREME V.3.2 Toute partition minimale est nécessairement de la forme

$$p_m = (1, \dots, 1, n_{k-s+1}, \dots, n_k)$$

où s est l'ordre d'un stable, S , de H vérifiant $d(i) = \delta \quad \forall i \in S$.

Le nombre minimal d'arêtes, $m + \delta(n-k)$, est obtenu par toute permutation σ_m substituant $H_{k-s+1}, \dots, H_k$ aux sommets de S .

Preuve

Si $1, 2, \dots, s$ sont les sommets de S

$$\begin{aligned} m_H(p_m, \sigma_m) &= \sum_{E \in \mathcal{E} \mid E \cap S = \emptyset} 1 + \sum_{E \in \mathcal{E} \mid E \cap S \neq \emptyset} x_i \\ &= m - s\delta + \sum_{i=1}^s \left(\sum_{E \in \mathcal{E} \mid i \in E} x_i \right) \\ &= m - s\delta + \delta(n_{k-s+1} + \dots + n_k) \\ &= m - s\delta + \delta(n - k + s) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } m_H(p_m, \sigma_m) = m + \delta(n-k)$$

Nous pouvons supposer $k < n$ et $\exists j \in [1, m] \mid |E_j| \geq 2$ car

- si $n = k$, $(n, k) = \{(1, \dots, 1)\}$, donc, on a trivialement
 $m_H(p, \sigma) = m = m + \delta(n-k) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k)$

- si $|E_j| = 1 \quad \forall j \in [1, m]$, alors

$$m_H(p, \sigma) = \sum_{i=1}^k x_i d(i) = m + \delta(n-k) \text{ si et seulement si } x_i = 1 \text{ pour}$$

tout i tel que $d(i) > \delta$, d'où le résultat dans ce cas particulier.

Toute partition minimale $p_m = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ vérifie nécessairement $n_1 = 1$, car si $n_i \geq 2 \quad \forall i \in [1, k]$ alors, pour toute permutation σ

$$m_H(p_m, \sigma) = \sum_{E \in \mathcal{C}} \prod_{i \in E} x_i \geq \sum_{E \in \mathcal{C}} \sum_{i \in E} x_i$$

d'après la propriété (ii) du Lemme V.3.1

Or

$$\sum_{E \in \mathcal{C}} \sum_{i \in E} x_i = \sum_{i=1}^k \sum_{E \in \mathcal{C} \mid i \in E} x_i = \sum_{i=1}^k x_i d(i)$$

Donc, en utilisant le Lemme IV.1.1

$$m_H(p_m, \sigma) \geq \sum_{i=1}^k x_i d(i) \geq \sum_{i=1}^k d(i) + \delta(n-k)$$

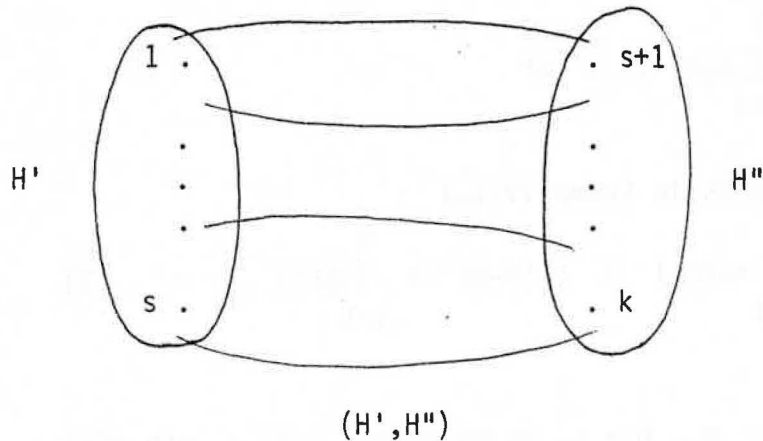
$$m_H(p_m, \sigma) \geq \sum_{j=1}^m |E_j| + \delta(n-k) > m + \delta(n-k)$$

Considérons $p = (1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$.

Renomérotions $1, \dots, s, s+1, \dots, k$ les sommets de H de telle sorte que

$$\begin{cases} x_i \geq 2 & \forall i \in [1, s] = X' \\ x_j = 1 & \forall j \in [s+1, k] = X'' \end{cases}$$

On peut alors décomposer H en deux hypergraphes $H' = (X', \mathcal{E}')$ et $H'' = (X'', \mathcal{E}'')$ ($\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ étant, respectivement, les arêtes de H entièrement contenues dans X' et X''). Remarquons que X' et X'' sont non vides car $n_1 = 1$ et $k < n$.



Notons $(H', H'') = \mathcal{E} - (\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}'')$ les arêtes de H reliant H' et H'' et $m(H', H'') = |\mathcal{E}(H', H'')|$.
 Cette décomposition permet d'écrire

$$m_H(p, \sigma) = m_{H'}(p, \sigma) + m_{H', H''}(p, \sigma) + m_{H''}(p, \sigma)$$

Or

$$m_{H'}(p, \sigma) = \sum_{E \in \mathcal{E}', i \in E} \prod x_i \geq \sum_{E \in \mathcal{E}', i \in E} x_i = \sum_{i=1}^s x_i \delta(i)$$

en appliquant la propriété (ii) du Lemme V.3.1 car $x_i \geq 2 \quad \forall i \in X'$ où $\delta(i)$ représente le nombre d'arêtes de $\mathcal{E}'$ contenant le sommet i .

$$m_{H', H''}(p, \sigma) = \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H''), i \in E} \left(\prod_{i \in E} x_i \right) = \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H''), i \in E \cap X'} \left(\prod_{i \in E \cap X'} x_i \right)$$

$$m_{H', H''}(p, \sigma) \geq \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H''), i \in E \cap X'} \left(\sum_{i \in E \cap X'} x_i \right) = \sum_{i=1}^s x_i (d(i) - \delta(i))$$

car $x_i \geq 2 \quad \forall i \in X', x_j = 1 \quad \forall j \in X''$

Enfin $m_H''(p, \sigma) = m'' = |\mathcal{E}''|$ car $x_j = 1 \quad \forall j \in X''$.

D'où

$$m_H(p, \sigma) \geq \sum_{i=1}^s x_i \delta(i) + \sum_{i=1}^s x_i (d(i) - \delta(i)) + m''$$

$$m_H(p, \sigma) \geq \sum_{i=1}^s x_i d(i) + m''$$

Or, d'après le Lemme IV.1.1

$$\sum_{i=1}^s x_i d(i) \geq \delta'(n-k) + \sum_{i=1}^s d(i) \quad (I)$$

car

$$\sum_{i=1}^s x_i = n - k + s, \text{ et en posant } \delta' = \min_{1 \leq i \leq s} d(i).$$

$$\text{D'où } m_H(p, \sigma) \geq m'' + \delta'(n-k) + \sum_{i=1}^s d(i)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s d(i) &= \sum_{E' \in \mathcal{E}'} |E'| + \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H'')} |E \cap X'| \\ &= m' + \sum_{E \in \mathcal{E}' \mid |E| \geq 2} (|E| - 1) + m(H', H'') + \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H'')} (|E \cap X'| - 1) \end{aligned}$$

Finalement, en excluant le cas sans intérêt où $\mathcal{E}(H', H'') = \emptyset$,

$$m_H(p, \sigma) \geq m + \delta'(n-k) + \sum_{E \in \mathcal{E}' \mid |E| \geq 2} (|E| - 1) + \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H'')} (|E \cap X'| - 1)$$

Cette dernière expression, compte tenu de $\delta' \geq \delta$ et que les deux sommations sont positives (en effet, par définition toute arête, E , de $\mathcal{E}(H', H'')$ vérifie $E \cap X' \neq \emptyset$) n'est égale à $m + \delta(n-k)$ que si

$$(1) \quad \delta' = \delta$$

$$(2) \quad \sum_{E \in \mathcal{E}' \mid |E| \geq 2} (|E| - 1) = 0 \quad \text{autrement dit, } H' \text{ ne possède aucune arête propre au moins un élément}$$

$$(3) \sum_{E \in \mathcal{E}(H', H'')} (|E \cap X'| - 1) = 0 \quad \text{i.e. chaque arête de } H \text{ a au plus un élément dans } H'.$$

En conclusion, remarquant d'autre part que (I) n'est une égalité que si $d(1) = \dots = d(s)$ (on peut en effet appliquer le Lemme IV.1.1 car $x_i \geq 2 \quad \forall i \in X'$) les éléments de H' doivent former un stable S vérifiant $d(i) = \delta \quad \forall i \in S$.

Remarque

Ce théorème généralise les résultats obtenus au chapitre IV pour un multigraphe sans boucle et permet de les retrouver s'il n'y a pas de sommet isolé ($d(i) \geq 1 \quad \forall i \in [1, k]$ et $|E_j| = 2 \quad \forall j \in [1, m]$).

V.3.2 Partitions maximales

1 - Extension du Théorème de MOTZKIN et STRAUSS à des polynômes quelconques sans carré

Soit P un tel polynôme, il s'agit de déterminer

$$\begin{array}{c} \max P(x_1, \dots, x_k) \\ (C_0) \end{array}$$

en nombres entiers et réels.

Notons $H_p = ([1, k], \mathcal{E})$ l'hypergraphe associé à P .

THEOREME V.3.3 Le maximum est atteint par un vecteur du type

$$(0, \dots, 0, x_{k-q+1}, \dots, x_k)$$

les valeurs non nulles étant associées à un hypergraphe partiel $K = ([1, q], \mathcal{K})$ de H_p dans lequel deux sommets quelconques sont adjacents.

Preuve

Si i et j sont deux sommets non adjacents de H_p , on peut écrire

$$P(x_1, \dots, x_k) = x_i \sum_i + x_j \sum_j + P'(x_1, \dots, x_k)$$

où $x_i \sum_i$ (resp. $x_j \sum_j$) est la somme des monômes où apparaît x_i (resp. x_j) et $P'(x_1, \dots, x_k)$, le reste de l'expression, ne dépend ni de x_i ni de x_j .

Un calcul identique à celui fait dans le Théorème IV.3.2 montre que $\sum_i = \sum_j$, dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{N}$, lorsque, pour tout vecteur maximal, x_i et x_j ne sont pas nuls.

On vérifie facilement que

$$P(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = P(\dots, 0, \dots, x_i + x_j, \dots)$$

Cette égalité montre bien que le maximum peut être atteint par un vecteur dont les coordonnées non nulles sont associées à des sommets deux à deux adjacents dans H_p . Cet ensemble, $[1, q]$, de sommets ne peut être qu'un hypergraphe partiel, K , de H_p puisque dès qu'il existe une valeur x nulle

$$\sum_{E \in \mathcal{E} \mid x \in E} \prod_{i \in E} x_i = 0$$

i.e. tout monôme contenant cette valeur est nécessairement nul. ■

Le problème de déterminer un tel hypergraphe partiel dans H_p n'est pas résolu dans le cas général. Nous avons vu au Chapitre précédent que ce problème est NP-difficile dans le cas des graphes simples, nous limiterons donc nos prétentions à l'examen de quelques cas particuliers. Les r -cliques puis des familles d'hypergraphes pour lesquels la clique maximale se réduit à une arête, rendant ainsi polynomiale la recherche des solutions exactes.

Cas d'une r -clique $H_p = ([1,k], \mathcal{P}_r([1,k])) \quad (r \geq 2)$

THEOREME V.3.4 Dans R , P atteint son maximum

$$C_k^r \left(\frac{N}{k} \right)^r \quad \text{pour} \quad \left(\frac{N}{k}, \dots, \frac{N}{k} \right)$$

Dans N , P atteint son maximum

$$\sum_{\alpha=0}^r C_{k-b}^{\alpha} C_b^{r-\alpha} a^{\alpha} (a+1)^{r-\alpha}$$

avec les conventions $0^0 = 1$, et $C_n^p = 0$ si $p > n$
pour

$(a, \dots, a, a+1, \dots, a+1)$ où $N = ak + b$, $0 \leq b < k$

Preuve

On a

$$P(x_1, \dots, x_k) = \sum_{E \in \mathcal{P}_r([1,k])} \prod_{x \in E} x$$

Alors, x et y étant deux variables quelconques on peut écrire

$$P(x_1, \dots, x_k) = xy \sum_{xy} + (x+y) \sum + P'(x_1, \dots, x_k)$$

où $xy \sum_{xy}$ est la somme de tous les produits contenant xy , $\sum$ est la somme de tous les produits de $r-1$ variables ne contenant ni x ni y et $P'(x_1, \dots, x_k)$ est le reste de l'expression, indépendant de x et y .

Si $y - x \geq 2\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), alors

$$P(\dots, x, \dots, y, \dots) < P(\dots, x + \varepsilon, \dots, y - \varepsilon, \dots)$$

En effet

$$xy \sum_{xy} + (x + y) \sum < (x + \varepsilon)(y - \varepsilon) \sum_{xy} + (x + y) \sum$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < y - x$$

Le résultat s'obtient alors en vertu des propositions IV.1 et IV.2. ■

Conséquence

$$\text{Posons } \Pi(N, k) = \max_{(C_0)} \prod_{i=1}^k x_i$$

Le Théorème précédent appliqué avec $r = k$, donc pour

$$P(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k x_i$$

donne

$$\Pi(N, k) = \left(\frac{N}{k}\right)^k, \text{ dans } \mathbb{R}.$$

$$\Pi(N, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } N < k \\ a^{k-b} (a+1)^b & \text{sinon,} \end{cases} \text{ dans } \mathbb{N}$$

Cette dernière égalité s'obtient en constatant que si $N < k$ alors $a = 0$, d'une part, et que si $N \geq k$

$$C_{k-b}^{\alpha} > 1 \Rightarrow \alpha \leq k - b$$

$$C_b^{k-\alpha} > 1 \Rightarrow k - \alpha \leq b \Rightarrow \alpha \geq k - b$$

La seule valeur possible est donc $\alpha = k - b$

Exemples où K est une arête

Une conséquence immédiate du Théorème V.3.3.

COROLLAIRE V.3.2 Si H_p est tel que tout couple d'arêtes E_i, E_j vérifie
 $\exists x \in E_i - E_j, \exists y \in E_j - E_i$ non adjacents,
alors K se réduit à une arête.

Preuve: triviale

Remarques

(1) La réciproque est fausse.

En effet, l'existence d'un couple d'arêtes E_i, E_j vérifiant soit $E_i \subseteq E_j$, soit $\forall x \in E_i - E_j, \forall y \in E_j - E_i$ x et y sont adjacents n'entraîne pas toujours que K possède au moins deux arêtes.

(2) Si K se réduit à une arête de H_p , il est clair que

$$\max_{(C_0)} P = \max_{E \in \mathcal{E}} \Pi(N, |E|)$$

La connaissance des cardinaux des arêtes suffit donc pour le calcul du maximum.

(3) Tout hypergraphe ayant ses arêtes disjointes deux à deux vérifie trivialement le Corollaire V.3.2.

Rappelons qu'une **chaîne de longueur q** dans un hypergraphe [1] est une séquence

$$(i_1, E_1, i_2, E_2, \dots, E_q, i_{q+1})$$

où

- (1) $i_1, \dots, i_q \in [1, k]$ sont tous différents
- (2) $E_1, \dots, E_q \in \mathcal{E}$ sont toutes différentes
- (3) $i_j, i_{j+1} \in E_j \quad \forall j \in [1, q]$

Un **cycle** est une chaîne de longueur $q > 1$ telle que $i_{q+1} = i_1$.

Définition

- Nous appellerons **cycle dégénéré** tout cycle tel

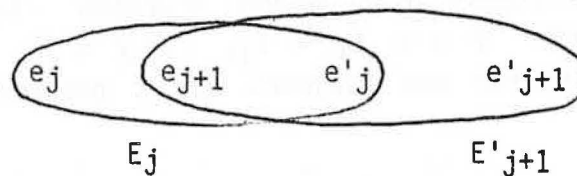
$$i_1, \dots, i_q \in E_1 \cap \dots \cap E_q$$

- Un hypergraphe $H = ([1, k], \mathcal{E})$ sera dit **chaîne stricte** si il existe deux suites $(e_1, \dots, e_m)$ et $(e'_1, \dots, e'_m)$ telles que

$$\begin{aligned} 1 &= e_1 < e_2 < \dots < e_m \\ e'_1 &< e'_2 < \dots < e'_m = k \\ e'_j &> e_{j+1} \\ e'_j &> e_j \end{aligned}$$

et

$$E_j = \{e_j, \dots, e'_j\} \quad \forall j \in [1, m].$$

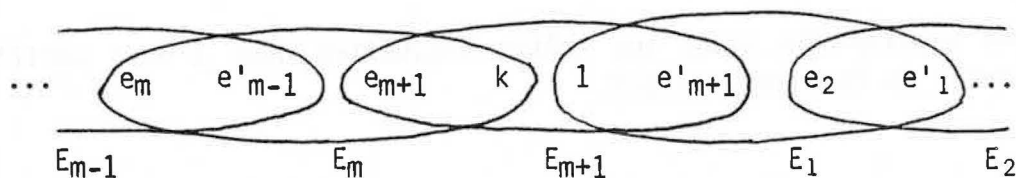


- H sera un **cycle strict** si c'est une chaîne stricte ayant de plus l'arête

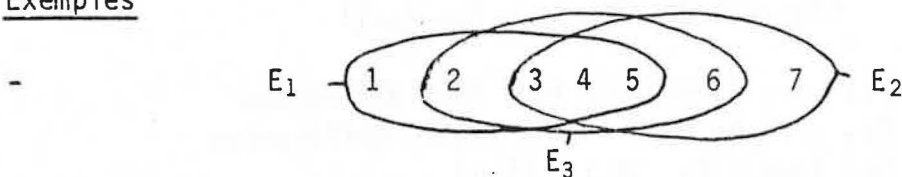
$$E_{m+1} = \{e_{m+1}, \dots, k, 1, \dots, e'_{m+1}\}$$

où

$$\begin{aligned} e'_{m+1} &< e_{m+1} \\ e'_{m-1} &< e_{m+1} < e'_m = k \\ 1 &= e_1 < e'_{m+1} < e_2 \\ m &> 3 \end{aligned}$$



Exemples



est une chaîne stricte, $(3, E_1, 4, E_2, 5, E_3, 3)$ est un cycle dégénéré, et $(2, E_2, 3, E_3, 4, E_1, 2)$ est un cycle non dégénéré de longueur 3.

- Tout cycle de longueur $q = 2$ est dégénéré.
- Les hypergraphes associés aux polynômes $P_{r,c}$ ($c \geq 1$) sont des chaînes strictes. Tout c -cycle est un cycle strict dès qu'il a au moins 4 arêtes.

PROPOSITION V.3.2 Si H_p est une chaîne stricte ou un cycle strict, P atteint son maximum sur une arête et

$$\max_{(C_0)} P = \max_{E \in \mathcal{E}} \Pi(N, |E|)$$

Preuve

Dans le cas d'une chaîne stricte, nous pouvons appliquer le Corollaire V.3.2 car $e_i \in E_i - E_j$ et $e'_j \in E_j - E_i$, pour $i, j \in [1, m]$ $|i < j$, ne sont pas adjacents puisqu'il n'existe pas d'arête $E_h \in \{E_1, \dots, E_m\}$ vérifiant $e_h < e_i < e'_j < e'_h$.

Pour un cycle strict nous avons la même propriété pour E_i, E_j tels que $i, j \in [2, m-1]$

De plus $e'_j \in E_j - E_{m+1}$ et $e_{m+1} \in E_{m+1} - E_j$ pour $j \in [1, m-1]$ ne sont pas adjacents, de même $e_m \in E_m - E_{m+1}$ et $e_1 = 1 \in E_{m+1} - E_m$.

Là aussi le Corollaire V.3.2 est applicable. ■

THEOREME V.3.5 Si H_p est simple tel que tout cycle est soit dégénéré soit strict alors P atteint son maximum sur une arête

$$\text{Donc} \quad \max_{(C_0)} P = \max_{E \in \mathcal{E}} \Pi(N, |E|)$$

Preuve

Excluons le cas trivial où les arêtes de H_p sont disjointes 2 à 2, et considérons $K = ([1, q], \mathcal{K})$, un hypergraphe partiel de H_p réalisant le maximum.

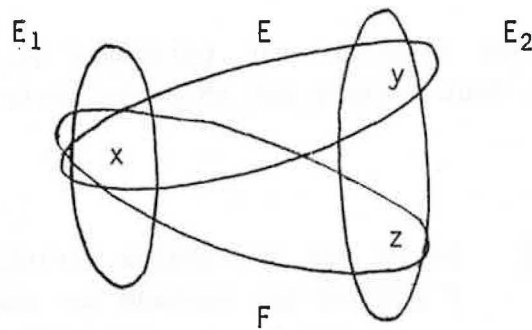
Supposons que K possède au moins deux arêtes E_1 et E_2 .

(1) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Soient $x \in E_1, y \in E_2$, alors $\exists E \in \mathcal{K} \mid x, y \in E$

D'autre part, soit $z \in E_2 - E$ (non vide par hypothèse), alors il existe dans $\mathcal{K}$ une arête, F , contenant x et z .

Donc (x, E, y, E_2, z, F, x) est un cycle de H_p de longueur 3.

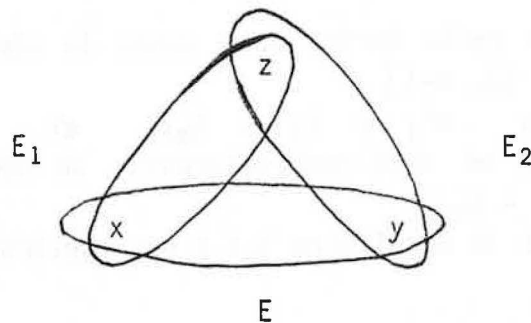


(2) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

Soient $x \in E_1 - E_2$ et $y \in E_2 - E_1$.

Comme x et y sont adjacents dans K $\} E \in \mathcal{K} \mid x, y \in E$.

Alors, si $z \in E_1 - E_2$, $(x, E_1, z, E_2, y, E, x)$ est un cycle de longueur 3 de H_p .



Ainsi, dans les deux cas, nous avons construit un cycle non dégénéré de longueur 3, ce qui est contraire à l'hypothèse car tout cycle non dégénéré est strict donc de longueur au moins égale à 4. ■

Une propriété non triviale de $\Pi(N,k)$

Si K est une arête on a

$$\max_{(C_0)} P = \max_{E \in \mathcal{E}} \Pi(N, |E|)$$

N étant fixé, il est donc intéressant d'étudier $\Pi(N,k)$ en fonction de k, c'est à dire de déterminer les partitions entières $p = (n_1, \dots, n_k)$ de N maximisant le produit

$$\prod_{i=1}^k n_i$$

Le cas réel est banal, la fonction $\left(\frac{N}{x}\right)^x$ atteint son maximum, maximum, $e^{\frac{N}{e}}$, pour $x = \frac{N}{e}$, les parties entières donnent les valeurs de k correspondant au maximum.

Dans le cas entier il faut supposer $k \leq n$, sinon $\Pi(N,k) = 0$.

On peut alors montrer (de manière fort laborieuse !) que le maximum est atteint pour $k_0 = \left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$, donc pour les partitions

$$(2, 2, 3, \dots, 3) \quad \text{si } N = 3k_0 - 2, \quad \Pi(N, k_0) = 4.3^{k_0-2}$$

$$(2, 3, \dots, 3) \quad \text{si } N = 3k_0 - 1, \quad \Pi(N, k_0) = 2.3^{k_0-1}$$

$$(3, \dots, 3) \quad \text{si } N = 3k_0, \quad \Pi(N, k_0) = 3^{k_0}$$

Par conséquent, $\max P$ n'est pas nécessairement obtenu sur une arête de cardinal maximal et les solutions réelles et entières peuvent concerner des arêtes différentes, par exemple si $N = 30$, les maximums sont obtenus pour $k = 11$ dans R et pour $k = 10$ dans N.

Cette distinction entre cas réel et entier est donc à prendre en compte pour tout résultat du type $\max_{\beta \in I} \Pi(\alpha, \beta)$

Une dernière remarque. Cette propriété a été découverte "expérimentalement" en testant $\Pi(N,k)$ jusqu'à $N = 92$ par un petit programme APL. Cette façon de procéder, tout à fait classique, corrobore les réflexions de H. COHEN [5] et légitime d'autre part son projet de "cahier de brouillon informatisé" pour l'étude des nombres (et de leurs bizarreries...).

2 - Etude du Problème des partitions maximales

Avec les notations définies en début de chapitre, il s'agit de résoudre

$$\max_{\substack{\sigma \in \Sigma_k \\ p \in \mathfrak{P}(n,k)}} m_H(p, \sigma)$$

que nous étudierons en nombres entiers et réels sous la forme

$$\max_{(C_1)} P_H(x_1, \dots, x_k)$$

Nous savons, d'après le chapitre IV, que ce problème est NP-difficile. Nous donnons simplement ici une caractérisation des vecteurs solutions dans le cas général puis étudierons des cas particuliers pour lesquels la solution peut être polynomialement calculable.

Le résultat du Théorème V.3.4, concernant les r -cliques d'ordre k , reste valable sous les contraintes (C_1) puisqu'en l'appliquant avec $N = n$ nous avons bien $\frac{N}{k} \geq 1$ dans le cas réel et $a = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \geq 1$ dans le cas entier, car par hypothèse $n \geq k$.

Dans le cas général l'adaptation de la preuve du Théorème V.3.3 aux contraintes (C_1) permet de montrer de même, dans les cas réels et entiers, que s'il existe, pour tout vecteur maximal $(x_1, \dots, x_k)$, deux sommets i, j non adjacents dont les valeurs associées, x_i et x_j , ne sont pas minimales (i.e. $x_i > 1$ et $x_j > 1$ dans le cas réel ; $x_i \geq 2$ et $x_j \geq 2$ dans le cas entier) alors on a de même $\sum_i = \sum_j$, d'où l'on déduit

$$P_H(\dots, 1, \dots, x_i + x_j - 1, \dots) = P_H(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

THEOREME V.3.6 Tout vecteur maximal de P_H peut se mettre sous la forme

$$(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q)$$

Le maximum est alors atteint en associant les valeurs $x_1, \dots, x_q$ aux sommet d'un sous-hypergraphe, $K = ([1, q], \mathcal{K})$, de H , pour lequel deux sommets quelconques sont adjacents.

Par rapport aux contraintes (C_0) nous perdons l'hypergraphe partiel, une propriété comme celle du Corollaire V.3.2. n'est plus démontrable. Mais nous avons cependant

THEOREME V.3.7 Si H est simple tel que tout cycle est soit dégénéré, soit strict alors K est au plus engendré par tous les éléments d'une arête de H .

Preuve

Nous pouvons reprendre la preuve du Théorème V.3.5. car elle n'utilise que les hypothèses faites sur H et la propriété d'adjacence de K . D'où le résultat sachant qu'ici K est un sous-hypergraphe. Hélas l'expression donnant le maximum est inaplicable car les contraintes $(C1)$ imposent ici $x_i > 1 \forall i \in [1, k]$.

Sous les hypothèses précédentes notons $E = \{1, \dots, q\}$ l'arête dans laquelle sont plongés les sommets de K . Tout vecteur maximal est de la forme $(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q)$ avec

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^q x_i = n - k + q \\ x_i > 1 \end{cases}$$

D'où le partitionnement $\mathcal{E} = \{E\} \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$

avec

$$\mathcal{E}' = \{E' \in \mathcal{E} \mid E \cap E' \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{E}'' = \{E'' \in \mathcal{E} \mid E \cap E'' = \emptyset\}$$

et $m = 1 + m' + m''$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} P_H(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q) &= \prod_{i \in E} x_i + \sum_{E' \in \mathcal{E}'} \prod_{i \in E'} x_i + \sum_{E'' \in \mathcal{E}''} \prod_{i \in E''} x_i \\ &= x_1 \dots x_q + \sum_{E' \in \mathcal{E}'} \prod_{i \in E \cap E'} x_i + \sum_{E'' \in \mathcal{E}''} 1 \\ &= x_1 \dots x_q + \sum_{E' \in \mathcal{E}'} \prod_{i \in E \cap E'} x_i + m \end{aligned}$$

Examinons quelques cas particuliers où $\mathcal{E}$ est déterminable facilement.

Cas d'arêtes disjointes 2 à 2

On a $\mathcal{E}' = \emptyset$ et $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} - \{E\}$, donc $m'' = m - 1$

$$\begin{aligned} P_H(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_q) &= x_1 \dots x_q + m - 1 \\ &= \Pi(n - k + q, q) + m - 1 \end{aligned}$$

Compte tenu des remarques faites sur la fonction Π nous obtenons finalement, dans les cas entiers et réels respectivement

$$m_H(p_M, \sigma_M) = m - 1 + \max_{E \in \mathcal{E}} a^{E-b} (a+1)^b$$

$$\text{où } n - k + q = a|E| + b, 0 \leq b < |E|$$

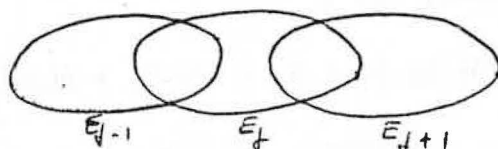
et

$$(C1) \quad \max P_H(x_1, \dots, x_k) = m - 1 + \max_{E \in \mathcal{E}} \left(\frac{n-k+|E|}{|E|} \right)^{|E|}$$

Cas d'une chaîne stricte dont les arêtes sont disjointes 3 à 3

Soit H une telle chaîne, ou bien $m = 2$ ou bien

$$E_j \cap E_{j+1} = \emptyset \quad \forall j \in [1, m-2], \quad 2 \leq i \leq m-j$$



Remarquons que par définition on a toujours $|E_j| \geq 2$ et $E_j \cap E_{j+1} \neq \emptyset$, mais on peut avoir $E_j - (E_{j-1} \cup E_{j+1}) = \emptyset$.

L'arête solution $E_j = \{1, \dots, q\}$, englobant K , intersecte soit une arête (E_x si $j = 1$ ou E_{m-1} si $j = m$) soit deux arêtes (E_{j-1} et E_{j+1} si $j \in [2, m-1]$). L'expression du maximum est donc nécessairement de l'une des deux formes suivantes.

$$(I) \quad x_1 \dots x_\alpha + x_1 \dots x_\alpha x_{\alpha+1} \dots x_{\alpha+\beta} + m-2$$

avec $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$ ($q = \alpha + \beta$)

Nous l'écrivons $\Pi_\alpha + \Pi_\alpha \Pi_\beta + m-2$;

$$(II) \quad x_1 \dots x_\alpha + x_1 \dots x_\alpha x_{\alpha+1} \dots x_{\alpha+\beta} \dots x_{\alpha+\beta+\gamma} \\ + x_{\alpha+\beta+1} \dots x_{\alpha+\beta+\gamma} + m-3$$

avec $\alpha \geq \gamma \geq 1$ et $\beta \geq 0$ ($q = \alpha + \beta + \gamma$).

Nous l'écrivons $\Pi_\alpha + \Pi_\alpha \Pi_\beta \Pi_\gamma + \pi_\gamma + m-3$.

Nous allons montrer que tout vecteur maximal (entier ou réel) vérifie

$$|x_i - x_j| \leq 1 \quad \forall i, j \in [1, q]$$

Il est facile de vérifier que dans (I),

$$x_i \geq x_j \quad \forall i \in [1, \alpha], \quad \forall j \in [\alpha+1, \alpha+\beta]$$

dans (II) nous avons de même,

$$x_i \geq x_j \quad \forall i \in [1, \alpha] \cup [\alpha+\beta+1, \alpha+\beta+\gamma], \quad \forall j \in [\alpha+1, \alpha+\beta+\gamma]$$

et de plus, en utilisant le Lemme V.2.2. ($\alpha \geq \gamma$, $\Pi_\alpha \Pi_\beta \Pi_\gamma$ restant constant pour un vecteur donné) on a :

$$x_i \geq x_j \quad \forall i \in [\alpha, \beta], \quad \forall j \in [\alpha+\beta+1, \alpha+\beta+\gamma]$$

Nous noterons $P(0)$ cette propriété d'ordonnement.

On peut remarquer que (I) s'obtient à partir de (II) en prenant $\Pi_\gamma = 1$ et $\beta \geq 1$. Il suffit donc d'étudier (II).

Nous écrirons $\Pi_\alpha = Ax$, $\Pi_\beta = By$, $\Pi_\gamma = Cz$ suivant les besoins du calcul (x, y, z représentant l'un des x_i et A, B, C les produits restants éventuellement égaux à 1).

Nous avons, (i) :

$$x-y \geq 2 \Rightarrow Ax + Ax.By.\Pi_\gamma + \Pi_\gamma \leq A(x-1) + A(x-1).B(y+1).\Pi_\gamma + \Pi_\gamma$$

$$\text{car } AB\Pi_\gamma (x-y-1) - A \geq A(B\Pi_\gamma - 1) \geq 0 \\ (A \geq 1, B \geq 1, \Pi_\gamma \geq 1)$$

de la même façon, (ii) :

$$z-y \geq 2 \Rightarrow \Pi_\alpha + \Pi_\alpha.By.Cz + Cz \leq \Pi_\alpha + \Pi_\alpha.B(y+1).C(z-1) + C(z-1)$$

et (iii) :

$$x-z \geq 2 \Rightarrow Ax + Ax.\Pi_\beta.Cz + Cz \leq A(x-1) + A(x-1).\Pi_\beta.C(z+1) + C(z+1)$$

Compte tenu de (P0), les trois propriétés (i), (ii) et (iii) montrent :

$$\forall i \in [1, \alpha], \forall j \in [\alpha+1, \alpha+\beta+\gamma] \\ 0 \leq x_i - x_j < 2 \\ \forall i \in [\alpha+\beta+1, \alpha+\beta+\gamma], \forall j \in [\alpha+1, \alpha+\beta]$$

Cela entraîne que, nécessairement, $|x_i - x_j| < 2 \quad \forall i, j \in [1, q]$.

D'où le résultat dans le cas entier.

Dans le cas réel, on peut montrer les trois mêmes propriétés avec, cette fois-ci, $(x-\varepsilon, y+\varepsilon)$, $(z-\varepsilon, y+\varepsilon)$, $(x-\varepsilon, z+\varepsilon)$ quand $x-y = 1+\varepsilon$, $z-y = 1+\varepsilon$ où ε vérifie $0 < \varepsilon < 1$, respectivement dans les cas (i), (ii), (iii).

Par exemple (i).

Supposons donc $x-y = 1+\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, alors :

$$Ax + Ax + By.\Pi_\gamma + \Pi_\gamma \leq A(x-\varepsilon) + A(x-\varepsilon).B(y+\varepsilon).\Pi_\gamma + \Pi_\gamma$$

En effet,

$$AB\Pi_\gamma (\varepsilon x - \varepsilon y - \varepsilon^2) - A\varepsilon = A\varepsilon [B\Pi_\gamma (x-y-\varepsilon)-1] \\ = A\varepsilon [B\Pi_\gamma - 1] > 0$$

Les deux nouvelles valeurs, $x-\varepsilon$ et $y+\varepsilon$, vérifient bien maintenant :

$$0 < x-\varepsilon - (y+\varepsilon) = x-y-2\varepsilon = 1-\varepsilon < 1$$

Nous en déduisons de même

$$|x_i - x_j| \leq 1 \quad \forall i, j \in [1, q]$$

Nous savons d'autre part, d'après l'étude de la fonction Π , que le produit Π_α est maximal lorsque

$$x_i = x_j \quad \forall i, j \in [1, \alpha]$$

De même pour Π_β et Π_γ

Pour résumer nous avons les deux propositions suivantes :

PROPOSITION V.3.3.

Les partitions maximisant $m_H(p, \sigma)$ sur une chaîne stricte H dont les arêtes disjointes 3 à 3 sont de la forme :

$P_M = (1, \dots, 1, a, \dots, a+1, \dots, a+1)$ où $n-k+|E| = a|E|+b$
 $0 \leq b < |E|$ pour une arête E de H .

Les permutations maximales σ_M associées sont données par (P_0) qui permet ainsi de calculer exactement $m_M(p_M, \sigma_M)$.

PROPOSITION V.3.4.

Tout vecteur maximal, solution de $\max P_H(x_1, \dots, x_k)$,
 (C1)

peut se mettre sous la forme $(1, \dots, 1, M-v, \dots, M-v, M+w, \dots, M+w, M+u, \dots, M+u)$ où u, v, w sont des réels vérifiant

$$u, v \in [0, 1], w \in [-1, 1]$$

$$0 \leq M-v \leq M+w \leq M+u$$

$$0 \leq u-w \leq 1$$

$$0 \leq u+v \leq 1$$

$$0 \leq w+v \leq 1$$

$$\alpha u - \beta v + \gamma w = 0$$

$$\text{et } M = \frac{1}{|E|} (n-k+|E|)$$

pour une arête E de H .

Le maximum s'écrit alors $(M+u)^\alpha + (M+u)^\alpha (M-v)^\beta (M+w)^\gamma + (M+w)^\gamma + m-3$ avec la convention $\gamma = 0$ dans le cas (I).

Remarquons que seul le maximum dans le cas entier est facilement calculable puisqu'il suffit de passer en revue toutes les arêtes de H .

Les résultats précédents sont bien sur applicables dans le cas d'un cycle strict ayant les mêmes propriétés, un c -cycle par exemple.

Dans le cas des polynômes $P_{r,c}$ il faut supposer $C \leq [r]$ pour
 2 que

l'hypergraphe associé aie ses arêtes disjointes 3 à 3.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - C. BERGE, Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1973.
- 2 - M. CHEIN, Communication personnelle.
- 3 - M. CHEIN, M. HABIB, M.C. MAURER, Partitive Hypergraphs, Discrete Mathematics 37, (1981), 35-50.
- 4 - V. CHVATAL, P.L. HAMMER, Set packing and threshold graphs, Univ. Waterloo Res. Report, 1973, CORR 73-2.
- 5 - M. COHEN, Théorie des Nombres et Ordinateurs, Gazette des Mathématiciens, N°25, Juillet 1984, (65-171).
- 6 - L. COMTET, Analyse combinatoire, T.1, Collection sur, PUF, 1970.
- 7 - M.R. GAREY, D.S. JONHSON, Computers and Intractability : a guide to the theory of NP-completeness, Freeman, 1978.
- 8 - M.C. GOLUMBIC, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, New York, 1980.
- 9 - R. JEGOU, Sur quelques formes quadratiques associées à des partitions d'entiers, à paraître dans RAIRO, Recherche Opérationnelle.
- 10 - V. KOUBEK, V. RÖDL, On the number of covering arcs in orderings, Commentationes Mathematicae Universitatis, Carolinae 22,4 (1981) 721-733.
- 11 - M. MINOUX, Programmation Mathématique: théorie et algorithmes, Dunod, Paris, 1983.
- 12 - R.H. MÖRHING, F.J. RADERMACHER, Substitution decomposition for discrete structures and connection with combinatorial optimization, to appear in Annals of Discrete Mathematics.
- 13 - T.S. MOTZKIN, E.G. STRAUSS, Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turan, Canadian Journal of Mathematics, 17 (1965), 533-540.
- 14 - B. ROY, Algèbre moderne et Théorie des graphes, T.1, Dunod, Paris, 1969.
- 15 - G. SABIDUSSI, Graph derivatives, Math. Zeitschr, 76 (1961), 385-401.

Tout n'est qu'une question d'organisation ...

"Si on travaille un jour pendant deux heures et le lendemain pendant huit heures,
on n'a travaillé que quatre heures par jour."

L. FOREST, Le Matin, 28 Mars 1922.

ANNEE : 1984

NOM DE L'AUTEUR : Roland JEGOU

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC (MONTPELLIER II)

RESUME :

L'optimisation de certaines formes quadratiques et de polynômes est obtenue en étudiant les nombres extrémaux d'arêtes d'un joint de k stables suivant un graphe d'ordre k puis son extension aux hypergraphes via la substitution.

Une construction récursive des ordres sans N , généralisant celle des ordres série-parallèles, fournit un algorithme linéaire de reconnaissance et de décomposition calculant le nombre de sauts.

On définit la dimension gloutonne d'un ordre partiel, on montre qu'elle s'identifie à la dimension usuelle sur une large classe d'ordres contenant les ordres sans N .

MOTS-CLES :

Ordre série-parallèle

Ordre sans N

Dimension (d'un ensemble ordonné)

Joint

Substitution