HAL
open science

Une étude des systèmes non linéaires en théorie du contrôle par les fonctions de Lyapunov

Emmanuel Moulay

To cite this version:

Emmanuel Moulay. Une étude des systèmes non linéaires en théorie du contrôle par les fonctions de Lyapunov. Automatique / Robotique. Université de Poitiers, 2014. tel-00974513

HAL Id: tel-00974513

https://theses.hal.science/tel-00974513

Submitted on 7 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE POITIERS

Habilitation à diriger des recherches

présentée par

Emmanuel Moulay

Une étude des systèmes non linéaires en théorie du contrôle par les fonctions de Lyapunov

Spécialité : AUTOMATIQUE

Soutenue le 28 mars 2014 devant le jury suivant :

Président du jury :	Jean-Pierre RICHARD	Professeur à l'École Centrale de Lille
Rapporteurs :	Jean-Pierre BARBOT	Professeur à l'ENSEA
	Christophe PRIEUR	DR CNRS au GIPSA-lab
	Witold RESPONDEK	Professeur à l'INSA de Rouen
Examinateurs :	Patrick COIRAULT	Professeur à l'Université de Poitiers
	Vilmos KOMORNIK	Professeur à l'Université de Strasbourg
	Wilfrid PERRUQUETTI	Professeur à l'École Centrale de Lille
	Franck PLESTAN	Professeur à l'École Centrale de Nantes

HDR préparée au laboratoire *Xlim-SIC (UMR CNRS 7252)*
Université de Poitiers

“Comprendre l’incertitude du réel, savoir qu’il y a du possible encore invisible dans le réel.”

Edgar Morin, La Méthode : 6. Éthique, Points, 2006

À ma famille

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les collègues et amis qui ont accepté de participer à mon jury et avec qui j'ai travaillé en étroite collaboration depuis plusieurs années : Patrick Coirault du *Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes* de Poitiers, Wilfrid Perruquetti du *Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal* de Lille qui fut mon directeur de thèse et Franck Plestan de l'*Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes*. Ils ont su me faire me partager leur vision pertinente et profonde de l'automatique.

Je tiens ensuite à remercier Jean-Pierre Barbot, Christophe Prieur et Witold Respondek, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de faire partie du jury. L'intérêt qu'ils portent à mon travail est pour moi un encouragement et une source de motivation importants. Vilmos Komornik et Jean-Pierre Richard me font l'honneur et le plaisir de participer au jury. Je les en remercie chaleureusement.

Merci à Jean-Francois Lafay qui m'a accueilli à l'*Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes* lors de mon recrutement comme chargé de recherche au *CNRS* ainsi que Michel Malabre pour ses qualités humaines. Merci à Rodolphe Vauzelle, Christine Fernandez et Dominique Cros de *Xlim* qui m'ont ensuite reçu chaleureusement à Poitiers où j'ai trouvé un cadre de travail propice à ma recherche et à mon épanouissement.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitue à mes co-auteurs avec qui j'ai travaillé avec plaisir ces dernières années : Laurent Autrique du *Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés* d'Angers, Olivier Bachelier du *Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes* de Poitiers, Sanjay P. Bhat de *Tata Consultancy Services* en Inde, Sylvain Brémond du *CEA de Cadarache*, Rémi Carles de l'*Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier*, Denis Efimov de l'*INRIA Lille-Nord Europe*, Thierry Floquet du *Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal* de Lille, Alain Glumineau de l'*Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes*, Qing Hui de la *Texas Tech University* aux États-Unis, Samir Ladaci de l'*Université de Skikda* en Algérie, Rémy Nouailletas du *CEA de Cadarache*, Yuri Orlov du *Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada* au Méxique, Nader Yeganefar du *Laboratoire d'Analyse Topologie et Probabilités* de Marseille.

Je remercie aussi mon ami Nima Yeganefar et Patrice Remaud avec qui nous discutons souvent d'histoire et de philosophie des sciences au *Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes* de Poitiers. Je remercie Tomas Ménard, Oumar Gaye et Emmanuel Bernuau que

j'ai co-encadrés en thèse, ainsi que Claude Moog de l'*Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes* qui m'a aidé dans l'encadrement de Tomas Ménard. Je n'oublie pas mon collègue de bureau Benjamin Bringier et les collègues de Poitiers tous très sympathiques.

Enfin, je remercie ma femme Sophie, mes enfants Judith, Lucas et Augustin ainsi que ma famille et ma belle-famille, qui m'ont apporté un soutien quotidien indispensable.

Table des matières

Introduction générale **8**

Notations et abréviations **13**

1 Notions générales **15**
1.1 Stabilité de Lyapunov, fonctions de Lyapunov et homogénéité 15
1.2 Rétractions 19
1.3 Outils d'analyse des EDPs 20

2 Observation en temps fini et stabilisation des systèmes homogènes **23**
2.1 Introduction 23
2.2 Observateurs en temps fini 23
2.2.1 Cas des systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie 25
2.2.2 Cas des systèmes uniformément observables 27
2.3 Stabilisation des systèmes homogènes 31
2.3.1 Stabilisation par des retours d'état homogènes 32
2.3.2 Stabilisation homogène 34
2.4 Conclusion 36

3 L'obstruction topologique **37**
3.1 Introduction 37
3.2 Rétraction du domaine d'attraction 38
3.3 Obstruction topologique à la stabilisation par un retour d'état dépendant du temps 39
3.4 Conclusion 42

4 Contrôle du flux magnétique et équation de Schrödinger d'ordre supérieur **43**
4.1 Introduction 43
4.2 Contrôle du flux magnétique dans les plasmas de tokamak 43
4.2.1 Retour d'état proportionnel 44
4.2.2 Retour d'état proportionnel-intégral 47
4.2.3 Simulation numérique de cas tests 48
4.3 Les équations de Schrödinger d'ordre supérieur 51
4.3.1 Les différentes équations quantiques 51
4.3.2 Résolution des équations de Schrödinger d'ordre supérieur et convergence 55

4.4 Conclusion 58

Perspectives **59**

Bibliographie **69**

Introduction générale

Ce manuscrit présente une partie du travail réalisé en théorie du contrôle des systèmes non linéaires depuis l'obtention de ma thèse en 2005 [97] en tant que chargé de recherche au *CNRS* en Automatique à l'*Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes* entre 2006 et 2009, puis au département *SIC* du laboratoire *Xlim* à Poitiers depuis 2010. Le lecteur trouvera dans les livres suivants [26, 51, 52, 65, 73, 134, 142] quelques ouvrages de référence en théorie du contrôle des systèmes non linéaires. Le mémoire est constitué de trois chapitres qui regroupent respectivement mes travaux sur :
– l'observation en temps fini et la stabilisation des systèmes homogènes ;
– l'obstruction topologique ;
– le contrôle du flux magnétique et l'équation de Schrödinger d'ordre supérieur.
Cette sélection a été guidée par l'applicabilité des résultats. En effet, ce critère me paraît aujourd'hui plus que jamais important en science. Le fil conducteur du manuscrit reste l'utilisation des fonctions de Lyapunov, introduites par Alexander Mikhaïlovich Lyapunov (1857-1918) [87], qui interviennent dans presque toutes les preuves. En effet, les fonctions de Lyapunov permettent de montrer la stabilité des systèmes en utilisant la seconde méthode de Lyapunov [69], la première méthode étant dédiée à la linéarisation. De plus, elles permettent de caractériser complètement la stabilité asymptotique uniforme, que ce soit pour les points d'équilibre [76] comme pour les ensembles invariants [136]. J'ai choisi de ne pas mettre les preuves qui apparaissent dans les références associées aux résultats présentés dans le mémoire, ceci afin de bien mettre en évidence les axes de recherche suivis et ne pas alourdir la présentation.

Après un chapitre introductif rappelant les principales notions utilisées dans ce manuscrit, le chapitre 2 présente une partie de mes travaux sur l'observation et la stabilisation pour les systèmes homogènes. L'homogénéité pondérée permet d'avoir assez facilement la propriété de temps fini, que ce soit pour le problème de la stabilisation en temps fini que j'ai développé dans ma thèse [97] ou pour le problème de l'observation en temps fini. Nous avons construit au cours de la thèse de Tomas Ménard un observateur global en temps fini pour les systèmes uniformément observables, présenté dans la première partie du chapitre 2. Ce travail s'appuie sur l'observateur en temps fini développé dans [115] pour les systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie et sur l'observateur à grand gain développé dans [40]. Le caractère global permet de construire l'observateur en temps fini sans se préoccuper des conditions initiales. Parmi les domaines d'application des techniques d'observation en temps fini, mentionnons :
– la robotique humanoïde qui nécessite la stabilisation sur chaque pas et l'observation de certaines variables en temps fini ;

– les actionneurs électriques couramment utilisés en robotique ;
– la synchronisation de systèmes chaotiques en sécurité de l'information ;
– la stabilisation des véhicules sous-marins, satellites et automobiles qui sont soumis à de fortes contraintes de temps.

Dans la seconde partie du chapitre 2, nous présentons une technique de stabilisation homogène par des retours d'état homogènes utilisant les fonctions de Lyapunov contrôlées. Pour cela, nous utilisons la technique des fonctions de Lyapunov contrôlées qui permet via une généralisation de la formule de Sontag d'avoir un retour d'état homogène. En ajoutant des conditions supplémentaires, nous pouvons construire un système bouclé homogène. La propriété d'homogénéité pondérée est intéressante pour un système et elle peut être vue comme une généralisation de la linéarité à des ordres supérieurs. L'homogénéisé peut aussi être plus intéressant que le linéarisé car il approxime souvent mieux un système non linéaire et permet de construire des retours d'état plus précis [62].

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'obstruction topologique à la stabilité asymptotique pour les systèmes non linéaires. Les interactions entre la topologie et le contrôle des systèmes non linéaires se sont développés avec les travaux d'Henri Poincaré et se poursuivent encore aujourd'hui. Nous pouvons citer deux auteurs qui ont marqué l'interaction entre ces deux disciplines : Roger W. Brockett et Nam P. Bhatia. Roger W. Brockett laisse son nom à la condition de Brockett [19] qui est une condition nécessaire de stabilisation et Nam P. Bhatia est l'auteur de *Stability Theory of Dynamical Systems* [14]. Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à une autre obstruction à la stabilisation appelée l'obstruction topologique dont on peut trouver une démonstration dans [134]. Cette obstruction indique que l'espace d'état d'un système ayant un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable est contractible. Dans un premier temps, nous l'étendons aux ensembles invariants asymptotiquement stables en utilisant différentes notions de rétractes. Puis dans un deuxième temps, nous montrons qu'elle ne peut pas être levée à l'aide d'un retour d'état dépendant du temps au sens de la stabilité uniforme, contrairement à l'obstruction de Brockett. Comme l'obstruction topologique ne peut pas non plus être levée à l'aide de retours d'état discontinus, une solution d'avenir serait de se tourner vers la classe des retours d'état hybrides.

Le chapitre 4 est dédié à l'étude de certaines EDPs. On s'intéresse en particulier au problème de la stabilisation qui a connu de nombreux développements au cours des deux dernières décennies [26, 71]. Au point de départ de ce travail, j'ai répondu à une sollicitation du *CEA de Cadarache* qui souhaitait travailler avec des automaticiens sur le problème du contrôle de profil de courant dans les réacteurs de tokamak. Attiré par ce vaste projet pour l'humanité que représente le contrôle de la fusion thermonucléaire, j'ai commencé à travailler sur ce sujet, puis nous avons recruté Oumar Gaye en thèse. Dans la première partie de ce chapitre 4, je présente une des deux méthodes que nous avons développées pour résoudre ce problème. Elle s'appuie sur les fonctions de Lyapunov pour la construction d'un retour d'état proportionnel-intégral et sur les LMIs pour montrer l'atténuation des perturbations. L'autre méthode utilise les modes glissants en dimension infinie mais n'a finalement pas été retenue pour être implémentée sur un réacteur à fusion en raison du problème de chattering lié à la discontinuité du retour d'état. La spécificité de ces deux approches vient du fait que la construction des retours d'état se fait en dimension infinie et que

nous ne discrétisons qu'une fois le contrôleur construit pour trouver les paramètres ingénieurs. Nous espérons ainsi préserver plus longtemps le modèle physique et améliorer les performances de contrôle. Ceci m'a amené à m'intéresser davantage à la physique et en particulier à la mécanique quantique. J'ai ainsi vu la possibilité de développer des équations de Schrödinger d'ordre supérieur. Ceci est présenté dans la seconde partie du chapitre 4. Nous obtenons l'existence des solutions pour ces équations sans potentiel, avec un potentiel borné et avec un potentiel linéaire. Nous montrons aussi que ces équations convergent vers l'équation semi-relativiste et possède donc la propriété de prendre en compte certains effets relativistes modérés et sont donc plus précises que l'équation de Schrödinger. En revanche, elles ne sont pas aussi universelles que l'équation de Schrödinger car elles ne fonctionnent plus par exemple avec un potentiel harmonique. Nous pensons cependant qu'elles constitueront une solution pratique intermédiaire entre l'équation de Schrödinger et l'équation semi-relativiste et se prêteront à un contrôle plus précis des systèmes quantiques pour des applications possibles en chimie, en physique atomique et en optique [31].

Nous conclurons ce mémoire par des perspectives d'avenir.

Notations et abréviations

Notations

Symbole	**Description**
$\mathbb{N}$:	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$:	Ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{R}$:	Corps des réels
$\mathbb{R}_{\geq 0}$:	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_{>0}$:	Ensemble des nombres réels strictement positifs
$\mathbb{C}$:	Corps des complexes
$\mathbb{K}$:	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\lvert . \rvert$:	Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et module sur $\mathbb{C}$
$\lVert . \rVert_n$:	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$
$\langle ., . \rangle$:	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{V}$:	Voisinage non vide de l'origine dans $\mathbb{R}^n$
$\epsilon\mathcal{B}^n$:	Boule ouverte de rayon $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}^n$
$C^0(E, F)$:	Ensemble des fonctions continues de E dans F
$C^k(E, F)$:	Ensemble des fonctions de classe k de E dans F
$C^\infty(E, F)$:	Ensemble des fonctions lisses de E dans F
$C_c^\infty(E, F)$:	Ensemble des fonctions lisses à support compact de E dans F
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:	Espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$
$L^2(\Omega)$:	Espace des fonctions de carré intégrable sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$
$H^s(\Omega)$:	Espace de Sobolev sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $s \in \mathbb{R}$
$\lceil x \rfloor^a$:	$\lceil x \rfloor^a = \lvert x \rvert^a \, sgn(x)$, $x \in \mathbb{R}$
$\mathcal{M}$:	Espace topologique localement compact
$(\mathcal{M}, \varphi)$:	Système dynamique
$\varphi(t, x)$:	Semi-flot d'un système dynamique
$\mathsf{T}\mathcal{N}$:	Espace tangent à la variété $\mathcal{N}$
$\mathcal{L}_f V(x)$:	Dérivée de Lie de V le long de f
$\hbar$:	Constante de Planck réduite
c :	Vitesse de la lumière dans le vide

Abréviations

EDO :	Equation différentielle ordinaire
EDP :	Equation aux dérivées partielles
FLC :	Fonction de Lyapunov contrôlée
ITER :	*International thermonuclear experimental reactor*
LMI :	*Linear matricial inequality*
LTE	*Long term evolution*
SINR	*Signal to interference plus noise ratio*

Chapitre 1

Notions générales

Ce chapitre présente des outils mathématiques de base qui seront utiles à la compréhension du manuscrit.

1.1 Stabilité de Lyapunov, fonctions de Lyapunov et homogénéité

Dans ce manuscrit, on considère des semi-flot continus indépendants du temps $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ sur un espace topologique localement compact $\mathcal{M}$. Le semi-flot φ vérifie $\varphi(0, x) = x$ et $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $x \in \mathcal{M}$. L'espace topologique $\mathcal{M}$, appelé l'espace d'état, et le semi-flot φ, aussi appelé la fonction d'évolution, définissent ensemble un *système dynamique* qui est noté $(\mathcal{M}, \varphi)$. Le lecteur trouvera de plus amples informations dans [13, 14].
Pour chaque $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on note φ_t la fonction $x \mapsto \varphi(t, x)$.

Définition 1.1 *Un ensemble $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ est* invariant *si $\varphi_t(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ pour tout $t \geq 0$.*

Rappelons la définition de la stabilité de Lyapunov.

Définition 1.2 *Un ensemble $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ est* asymptotiquement stable *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$\mathcal{K}$ est* stable au sens de Lyapunov*, i.e. pour tout voisinage ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$ tel que $\varphi_t(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{O}$ pour tout $t \geq 0$.*
2. *$\mathcal{K}$ est* attractif*, i.e. il existe un voisinage ouvert $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{W}$ et tout voisinage ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$, il existe $T \geq 0$ tel que $\varphi(t, x) \in \mathcal{U}$ pour tout $t > T$.*

Si $\mathcal{W} = \mathcal{M}$, on dit que le système est globalement asymptotiquement stable*. Le* domaine d'attraction *d'un ensemble asymptotiquement stable $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ est l'ensemble $\mathcal{A}$ des points x de $\mathcal{M}$ tels que pour tout voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{K}$, il existe $T > 0$ tel que $\varphi(t, x) \in \mathcal{U}$ pour tout $t \geq T$.*

On sait que le domaine d'attraction $\mathcal{A}$ d'un ensemble asymptotiquement stable est un ensemble ouvert et invariant [69].

Définition 1.3 *La* dérivée de Lie *de $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le long de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est définie par*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_f V : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \end{array}$$

Définition 1.4 *Une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie positive (respectivement définie négative) si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ (respectivement $V(0) = 0$ et $V(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$).*

Considérons maintenant le système

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Un point $x_e \in \mathbb{R}^n$ est un *point d'équilibre* du système (1.1) si $f(x_e) = 0$.
On note $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Si $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable, la *dérivée totale de V pour le système* (1.1) est définie par

$$\dot{V}(x) = \mathcal{L}_f V(x).$$

Définition 1.5 *Une* fonction de Lyapunov *$V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ pour le système* (1.1) *est une fonction continûment différentiable définie positive telle que $\dot{V}$ est définie négative. On dit aussi que V est une fonction de Lyapunov stricte.*

On énonce le théorème de Lyapunov qui constitue la seconde méthode de Lyapunov pour prouver la stabilité asymptotique d'un système [69, Theorem 4.1].

Théorème 1.6 (Théorème de Lyapunov) *Supposons que $f(0) = 0$. S'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ pour le système* (1.1) *alors l'origine du système* (1.1) *est asymptotiquement stable. Si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ alors l'origine du système* (1.1) *est globalement asymptotiquement stable.*

Ce théorème de Lyapunov s'étend aux EDOs non autonomes dépendant du temps [69, Theorem 4.9], aux ensembles invariants des systèmes dynamiques [14], aux systèmes à retards via l'utilisation des fonctionnelles de Lyapunov [54, p. 132], aux EDPs [142, Theorem 87], aux systèmes discrets [36]. C'est donc un théorème très général pour prouver la stabilité d'un système dynamique.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$, considérons le *système affine* suivant

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

où $f_i \in C^0(\mathbb{R}^n)$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et $f_0(0) = 0$. On parle de *système bouclé* pour désigner le système

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

qui correspond au système (1.2) auquel on applique le retour d'état $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$. On définit la notion de fonction de Lyapunov contrôlée introduite dans [3].

Définition 1.7 *Une fonction définie positive continûment différentiable* $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *est une* fonction de Lyapunov contrôlée (FLC) *pour le système* (1.2) *si pour tout* $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \left(a\left(x\right) + \left\langle B\left(x\right), u \right\rangle \right) < 0$$

où

$$\begin{aligned} a\left(x\right) &= \mathcal{L}_{f_0} V(x), \\ b_i(x) &= \mathcal{L}_{f_i} V(x), \qquad 1 \leq i \leq m, \\ B\left(x\right) &= \left(b_1(x), \ldots, b_m(x)\right). \end{aligned}$$

Une FLC vérifie la propriété de petit contrôle *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, si* $x \in \delta \mathcal{B}^n$, *alors il existe* $u \in \epsilon \mathcal{B}^m$ *tel que*

$$a\left(x\right) + \left\langle B\left(x\right), u \right\rangle < 0.$$

Remarque 1.8 *Si* $m = 1$, *la propriété de petit contrôle est équivalente à*

$$\limsup_{\|x\|_n \to 0} \frac{a(x)}{\left|B\left(x\right)\right|} \leq 0.$$

La limite peut très bien être $-\infty$.

On définit la notion d'homogénéité pondérée introduite dans [123] qui généralise la notion de linéarité.

Définition 1.9 *Une fonction* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est* homogène de degré d par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ *si*

$$V\left(\Delta_\lambda\left(x\right)\right) = \lambda^d V\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

pour tout $\lambda > 0$ *où* $\Delta_\lambda\left(x\right) = \left(\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_n} x_n\right)$. *Une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est* homogène de degré d par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ *si pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *la* $i-$*ème composante* f_i *est une fonction homogène de degré* $r_i + d$, *i.e.*

$$f_i\left(\Delta_\lambda\left(x\right)\right) = \lambda^{r_i + d} f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

pour tout $\lambda > 0$. *Le système* (1.1) *est dit* homogène de degré d par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ *si* f *est* homogène de degré d *par rapport aux poids* $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$.

Nous faisons maintenant un bref rappel concernant la stabilité en temps fini. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [97]. La stabilité en temps fini est plus restrictive que la stabilité asymptotique. Dans le cas d'un système stable en temps fini à l'origine, toutes les solutions convergent en temps fini vers l'origine. Un tel système ne possède donc pas la propriété d'unicité des solutions et ne peut être lipschitzien à l'origine. Nous serons obligés de considérer des systèmes continus et non lipschitziens à l'origine. Pour un système continu, l'existence des solutions au sens classique est toujours assurée, mais l'unicité ne l'est pas, contrairement aux systèmes lipschitziens. Il est possible d'obtenir la stabilité en temps fini pour des systèmes seulement continus ayant l'unicité à droite des solutions. On définit ainsi la notion d'unicité à droite des solutions.

Définition 1.10 *Le système* (1.1) *possède l'*unicité à droite des solutions *si pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, il existe* $T_{x_0} > 0$ *tel que, si* $\varphi_1 : [0, T_1) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et* $\varphi_2 : [0, T_2) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *sont deux solutions maximales de* (1.1) *avec* $\varphi_1(0, x_0) = \varphi_2(0, x_0) = x_0$*, alors* $T_{x_0} \leq \min\{T_1, T_2\}$ *et* $\varphi_1(t, x_0) = \varphi_2(t, x_0)$ *pour tout* $t \in [0, T_{x_0})$*.*
On peut supposer sans perte de généralité que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$*,* T_{x_0} *est choisi de façon à être le plus grand possible dans* $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$*.*

On rappelle la définition de la stabilité en temps fini introduite dans [53] et dont une formulation moderne est donnée dans [10].

Définition 1.11 ([10]) *Supposons que* $f(0) = 0$*. L'origine du système* (1.1) *est un point d'équilibre* stable en temps fini *s'il existe une fonction* $T : \mathcal{V}\backslash\{0\} \to (0, +\infty)$*, appelée temps d'établissement du système* (1.1)*, telle qu'on ait les propriétés suivantes :*
- stabilité au sens de Lyapunov *: pour tout voisinage ouvert* $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ *de l'origine, il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *de l'origine, tel que pour tout* $x_0 \in \mathcal{U}\backslash\{0\}$ *et pour toute solution* $\varphi(t, x_0)$ *de* (1.1) *telle que* $\varphi(0, x_0) = x_0$*,* $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{O}$ *pour tout* $t \in [0, T(x_0))$*.*
- convergence en temps fini *: pour tout* $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{0\}$*, et pour toute solution* $\varphi(t, x_0)$ *de* (1.1) *telle que* $\varphi(0, x_0) = x_0$*,* $\varphi(t, x_0)$ *est définie sur* $[0, T(x_0))$ *et* $\lim_{t \to T(x_0)} \varphi(t, x_0) = 0$*.*

L'origine du système (1.1) *est un point d'équilibre* globalement stable en temps fini *s'il est stable en temps fini avec* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$*.*

Nous illustrons la définition précédente par un exemple classique.

Exemple 1.12 *Soit le système*

$$\dot{x} = \lceil x \rfloor^\alpha = -sign(x)|x|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1). \tag{1.4}$$

Les solutions partant de x_0 *au temps* $t = 0$ *sont données par*

$$\varphi(t, x_0) = \begin{cases} sign(x_0)\left(|x_0|^{1-\alpha} - t(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} & si \quad 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha},\ x_0 \neq 0 \\ 0 & si \quad t > \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha},\ x_0 \neq 0 \\ 0 & si \quad t \geq 0,\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Les solutions décroissent et finissent par être nulles à partir d'un certain temps. Le système (1.4) *est donc stable en temps fini. De plus, le temps d'établissement est donné par*

$$T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Dans le cas général, l'utilisation directe de la définition 1.11 de la stabilité en temps fini n'est pas possible sans la connaissance des solutions. Des conditions suffisantes ont donc été développées. Dans [53], l'auteur a obtenu une première condition nécessaire et suffisante pour les systèmes scalaires. Ce résultat se généralise aux dimensions supérieures, mais cette condition est alors seulement suffisante [103].

Définition 1.13 *Soit* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. *On définit la* forme canonique d'observabilité *par*

$$\dot{z} = A(a_1, \ldots, a_n) z + f\left(y, u, \dot{u}, ..., u^{(r)}\right) \tag{1.5}$$
$$y = Cz \tag{1.6}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ *est l'état,* u *la variable de contrôle,* y *la sortie,* $r \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

1.2 Rétractions

Nous rappelons différentes notions concernant les rétractes qui seront utiles pour le chapitre 3. Le lecteur pourra trouver de nombreuses informations sur la théorie des rétractes dans [64].

Définition 1.14 *Soit* $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{M}$.

1. X *est un* rétracte *de* Y *s'il existe une application continue* $r : Y \to X$, *appelée* rétraction, *telle que* $r(x) = x$ *pour tout* $x \in X$.
2. X *est un* rétracte par déformation *de* Y *s'il existe une homotopie continue* $h : [0,1] \times Y \to \mathcal{M}$ *telle que*

$$h(0, y) = y,$$
$$h(1, y) \in X,$$
$$h(1, x) = x,$$

   pour tout $y \in Y$ *et* $x \in X$.
3. X *est un* rétracte par déformation forte *de* Y *s'il existe une homotopie continue* $h : [0,1] \times Y \to \mathcal{M}$ *telle que*

$$h(0, y) = y,$$
$$h(1, y) \in X,$$
$$h(t, x) = x,$$

   pour tout $y \in Y$, $x \in X$ *et* $t \in [0,1]$.
4. X *est un* rétracte par déformation faible *de* Y *si chaque voisinage ouvert* $U \subseteq \mathcal{M}$ *de* X *contient un rétracte* V *par déformation forte de* Y *tel que* $X \subseteq V$.

Un ensemble $Y \subseteq \mathcal{M}$ est *contractible* s'il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que l'ensemble singleton $X = \{x\}$ est un rétracte par déformation forte de Y.

Définition 1.15 *$X \subseteq \mathcal{M}$ est un rétracte de voisinage (respectivement, un rétracte par déformation de voisinage, un rétracte par déformation forte de voisinage) de $\mathcal{M}$ s'il existe un voisinage ouvert $Y \subseteq \mathcal{M}$ de X tel que X est un rétracte (respectivement, rétracte par déformation, rétracte par déformation forte) de Y.*

On rappelle un résultat qui relie les définitions 1.14 et 1.15.

Proposition 1.16 ([100]) *Supposons que $X \subseteq \mathcal{M}$ soit un rétracte par déformation faible de $Y \subseteq \mathcal{M}$. Alors on a les résultats suivants.*

1. *Si X est un rétracte de voisinage de $\mathcal{M}$, alors X est un rétracte de Y.*
2. *Si X est un rétracte par déformation de voisinage de $\mathcal{M}$, alors X est un rétracte par déformation de Y.*
3. *Si X est un rétracte par déformation forte de voisinage de $\mathcal{M}$, alors X est un rétracte par déformation forte de Y.*

1.3 Outils d'analyse des EDPs

Concernant le contenu de cette partie qui servira au chapitre 4, le lecteur peut se référer à [120]. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$, on note

$$\partial^\beta f = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} f.$$

Définition 1.17 *On définit l'*espace de Schwartz *par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{K}) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < +\infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier *de f, notée $\widehat{f}$ où $\mathcal{F}(f)$, est définie par*

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{\frac{-ix \cdot p}{\hbar}} f(x) \mathrm{d}x \tag{1.8}$$

où p est la variable de Fourier et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

La fonction $\mathbb{R}^n \ni p \mapsto \widehat{f}(p)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Les principales propriétés de la transformée de Fourier qui seront utilisées dans ce mémoire sont données dans la proposition 1.18. En particulier, on choisit le facteur de normalisation $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ dans (1.8) afin que la formule d'inversion de Fourier et la formule de Plancherel soient simples.

Proposition 1.18 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p) = i\frac{p_j}{\hbar}\widehat{f}(p); \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial p_j}(p) = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{F}\left(x_j f\right)(p). \tag{1.10}$$

On a la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}}\int_{p\in\mathbb{R}^n} e^{\frac{+ix\cdot p}{\hbar}}\widehat{f}(p)\mathrm{d}p$$

et la formule de Plancherel

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

qui indique que la transformée de Fourier est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.19 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L^2(\Omega)$ est l'*espace des fonctions de carré intégrable sur *Ω, i.e. les fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{K}$ telles que*

$$\int_{x\in\Omega} |u(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty.$$

*Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'*espace de Sobolev *$H^s(\Omega)$ par*

$$H^s(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \|f\|^2_{H^s(\Omega)} := \int_{p\in\Omega} \left(1 + |p|^2\right)^s \left|\widehat{f}(p)\right|^2 \mathrm{d}p < +\infty \right\}.$$

Si de plus s est un entier positif, l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ peut être caractérisé par

$$H^s(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq s \right\}.$$

Chapitre 2

Observation en temps fini et stabilisation des systèmes homogènes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons fait le choix de nous concentrer sur deux aspects de l'étude des systèmes homogènes. Le premier aspect, présenté dans la partie 2.2 et développé en collaboration avec Tomas Ménard et Wilfrid Perruquetti, concerne la construction d'observateurs en temps fini pour des systèmes uniformément observables, globalement lipschitziens et dont l'entrée est bornée. Ce travail représente une suite naturelle et complémentaire de ma thèse [97] qui traitait le problème de la stabilisation en temps fini. Le second aspect, présenté dans la partie 2.3, concerne la stabilisation homogène pour un système homogène possédant une fonction de Lyapunov contrôlée. Les méthodes proposées sont constructives et fournissent des stratégies implémentables en théorie du contrôle, ce qui est un des objectifs majeurs en automatique.

2.2 Observateurs en temps fini

Lorsque l'état d'un système observable n'est pas complètement mesurable ou qu'on ne souhaite pas le mesurer dans son intégralité, on peut concevoir un observateur qui permet de le reconstruire à partir d'un modèle étendu. Cette technique fut introduite par le père fondateur de l'automatique moderne Rudolf E. Kalman dans [66] pour les systèmes linéaires stochastiques puis par David G. Luenberger dans [86] pour les systèmes linéaires déterministes. Puis ces techniques se sont développées pour les systèmes non linéaires, avec par exemple le filtre de Kalman étendu.

La majorité des observateurs qui existent dans la littérature sont des observateurs asymptotiques [8], c'est-à-dire que l'erreur d'observation tend vers zéro sans jamais l'atteindre. Or, il existe un certain nombre de problèmes où la connaissance exacte de l'état est requise. Nous pouvons citer deux exemples qui nécessitent la propriété de temps fini :

– le robot marcheur en robotique où l'on doit stabiliser le système en temps fini sur chaque pas (voir par exemple [116]) ;

– la synchronisation unidirectionnelle de signaux chaotiques développée dans [113] dont la problématique est équivalente à le recherche d'un observateur [106]. Différents observateurs basés sur des méthodes adaptatives [38], le *backstepping* [89], les formes hamiltoniennes [81] ou les exposants de Lyapunov [113] ont été proposés avec une convergence de l'erreur asymptotique.

Concernant la synchronisation de signaux chaotiques pouvant être utilisée en sécurité de l'information, le caractère chaotique oblige à avoir un degré de précision extrêmement élevé en raison de la sensibilité par rapport aux conditions initiales [114]. Dans ce cadre, l'utilisation d'observateurs en temps fini permet de reconstruire exactement le signal contrairement à un observateur classique [4, 115].

La première approche développée dans [32, 58] pour la synthèse d'observateurs en temps fini utilise des observateurs par modes glissants. Cette approche considère des systèmes discontinus contrairement à l'approche proposée dans ce mémoire où les systèmes sont continus. La continuité de l'observateur permet d'obtenir la continuité du système bouclé à condition que le retour d'état soit lui-même continu. On évite dans ce cas les phénomènes oscillatoires potentiellement néfastes aux actionneurs.

Dans [37], les auteurs proposent une seconde approche pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Ce résultat utilise la théorie des systèmes à retards et a été étendu dans [95] pour les systèmes sous une forme canonique d'observabilité. La même méthodologie a été utilisée dans [94] pour construire un observateur en temps fini pour les systèmes linéaires variants dans le temps. Dans [126], les auteurs utilisent le même principe pour concevoir leur observateur.

L'homogénéité a été utilisée ces dernières années pour la construction d'observateurs en temps fini. Une méthode algébrique utilisant un observateur homogène en temps fini a par exemple été proposée dans [132]. En utilisant l'homogénéité, il est possible de trouver des conditions suffisantes de stabilité en temps fini qui peuvent se vérifier facilement. Rappelons ce résultat.

Proposition 2.1 ([9]) *Supposons que le système* (1.1) *soit homogène de degré* $d < 0$ *par rapport aux poids* $(r_1, \ldots, r_n) \in (0, +\infty)^n$. *Alors l'origine du système* (1.1) *est globalement stable en temps fini si et seulement si elle est localement asymptotiquement stable.*

Le résultat suivant montre que la stabilité en temps fini persiste même en présence de perturbations sur l'état.

Proposition 2.2 ([12]) *Considérons le système* (1.1) *et supposons que* f *se décompose sous la forme* $f = g_1 + \cdots + g_k$ *où les* g_i *sont continus et homogènes de degré* m_i *par rapport aux poids* $(r_1, \ldots, r_n) \in (0, +\infty)^n$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *avec* $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. *Si l'origine du système*

$$\dot{x} = g_1(x)$$

est stable en temps fini alors l'origine du système (1.1) *est localement stable en temps fini.*

On peut trouver une étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes homogènes dans [12, 99]. Une première approche a été développée dans [63] utilisant l'homogénéité pour la conception d'un contrôleur par retour de sortie pour les systèmes de dimension deux. À partir de là, on a développé deux approches différentes. En effet, pour montrer qu'un système homogène

est stable en temps fini, il faut montrer que son degré d'homogénéité est négatif et qu'il est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Les deux approches correspondent à la façon de montrer la stabilité au sens de Lyapunov. Une première approche est celle par *backstepping* ; cette construction est bien adaptée aux systèmes homogènes car c'est un algorithme récursif, voir [119, 77, 78, 2]. Cependant, le calcul des gains se révèle compliqué quand l'ordre du système augmente. Une approche alternative, basée sur le lemme du tube en topologie, a été proposée dans [115] pour les systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie. Dans [131], cette approche a été généralisée aux systèmes uniformément observables avec un observateur semi-global. Dans [130], un observateur avec un gain adaptatif a permis d'obtenir la convergence globale. Nous avons également construit un observateur global, mais avec un gain fixe qui est le même que dans le cas linéaire. Ceci permet une mise en place simplifiée de l'observateur en temps fini [92].

2.2.1 Cas des systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie

Nous rappelons tout d'abord les résultats que nous avons obtenus concernant les systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie dans [115]. On considère la construction d'un observateur en temps fini pour les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = A\left(-k_1, \ldots, -k_n\right) x + f(y, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r)}) \\ y = Cx, \quad y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}^*$, u est une entrée suffisamment dérivable et $A\left(-k_1, \ldots, -k_n\right)$ et C sont donnés par (1.7). Le système (2.1) représente la forme canonique des systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie. Le lecteur pourra trouver dans [74, 75, 138] une étude détaillée des systèmes linéarisables par injection d'entrée-sortie. L'observateur proposé est de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = A\left(-k_1, \ldots, -k_n\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} + f(y, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r)}) - \begin{pmatrix} k_1 \lceil \hat{x}_1 - x_1 \rfloor^{\alpha_1} \\ k_2 \lceil \hat{x}_1 - x_1 \rfloor^{\alpha_2} \\ \vdots \\ k_n \lceil \hat{x}_1 - x_1 \rfloor^{\alpha_n} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

où $\lceil x \rfloor^{\alpha} = sgn(x).|x|^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Les gains k_i et les puissances α_i sont définis dans la suite. L'équation de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 \lceil e_1 \rfloor^{\alpha_1} \\ \dot{e}_2 = e_3 - k_2 \lceil e_1 \rfloor^{\alpha_2} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - k_{n-1} \lceil e_1 \rfloor^{\alpha_{n-1}} \\ \dot{e}_n = -k_n \lceil e_1 \rfloor^{\alpha_n} \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $e = \hat{x} - x$.
Afin de pouvoir appliquer la proposition 2.1, il faut choisir les puissances α_i de telle façon que le système (2.3) soit homogène. On a le résultat suivant.

Théorème 2.3 ([115]) *Soit* $\alpha_1 \in \left(1-\frac{1}{n},1\right)$, $\alpha_i = i\alpha_1 - (i-1)$ *pour tout* $i \in \{1,\dots,n\}$ *et les gains* $(k_1,\dots,k_n)$ *tels que la matrice* $A(-k_1,\dots,-k_n)$ *soit de Hurwitz alors il existe* $\epsilon \in \left(0,\frac{1}{n}\right)$ *tel que pour tout* $\alpha_1 \in (1-\epsilon,1)$, *le système* (2.1) *admet le système* (2.2) *pour observateur global en temps fini.*

On démontre ce théorème en utilisant la fonction homogène

$$V(\alpha_1,e) = \tilde{e}^T P \tilde{e}$$

où

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} \lceil e_1 \rfloor^{\frac{1}{q}} \\ \lceil e_2 \rfloor^{\frac{1}{\alpha_1 q}} \\ \vdots \\ \lceil e_n \rfloor^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}} \end{pmatrix}$$

avec $q = \Pi_{i=1}^{n}((i-1)\alpha_1-(i-2))$ le produit des poids, et P la solution de l'équation de Lyapunov

$$A(-k_1,\dots,-k_n)^T P + PA(-k_1,\dots,-k_n) = -I$$

et le lemme du tube afin de prouver la stabilité de (2.3). Rappelons le lemme du tube qu'on peut trouver par exemple dans [104].

Lemme 2.4 (Lemme du tube) *Considérons l'espace produit :* $X \times Y$ *où* Y *est un compact. Si* N *est un ouvert de* $X \times Y$ *contenant la tranche* $\{x_0\} \times Y$ *de* $X \times Y$, *alors* N *contient un tube* $W \times Y$ *de* $\{x_0\} \times Y$, *où* W *est un voisinage ouvert de* x_0 *dans* X.

Si les gains sont choisis de la même manière que pour un observateur linéaire avec une condition de Hurwitz, alors en réglant le gain α_1 assez proche de 1, on obtient la stabilité en temps fini grâce au lemme du tube 2.4 qui permet de changer légèrement le paramètre α_1 sans perdre la stabilité.
Donnons un exemple d'application de ce théorème au circuit de Chua qui peut être utilisé pour la synchronisation chaotique.

Exemple 2.5 ([115]) *Le circuit de Chua appartient à la classe des systèmes chaotiques qui peuvent être mis sous une forme canonique* (1.5)-(1.6). *Les équations de l'oscillateur de Chua sont données par*

$$\begin{cases} C_1\dot{x}_1 = \frac{1}{R}(x_2 - x_1) + h(x_1) \\ C_2\dot{x}_2 = \frac{1}{R}(x_1 - x_2) + x_3 \\ L\dot{x}_3 = -x_2 - rx_3 \end{cases} \tag{2.4}$$

où L *est l'inductance,* R *et* r *deux résistances,* C_1 *et* C_2 *deux capacités et*

$$h(x) = G_2x_1 + \frac{1}{2}(G_1 - G_2)(|x_1 + B| - |x_1 - B|)$$

la fonction de Chua qui est linéaire par morceaux. La sortie est $y = x_1$. Les variables x_1, x_2 et x_3 représentent respectivement les tensions aux bornes des condensateurs de capacités C_1 et C_2, et le courant électrique dans la bobine d'inductance L.
En utilisant la transformation $z = Tx$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2R} + \frac{r}{L} & \frac{1}{C_1R} & 0 \\ \frac{1}{C_2L}\left(1 + \frac{r}{R}\right) & \frac{r}{C_1LR} & \frac{1}{C_1C_2R} \end{pmatrix}$$

le système (2.4) *est transformé en la forme canonique observable* (1.5)-(1.6) *avec*

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1R} - \frac{1}{C_2R} - \frac{r}{L} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{L}\left(\frac{r}{C_1R} + \frac{r}{C_2R} + \frac{1}{C_2}\right) & 0 & 1 \\ \frac{-1}{C_1C_2RL} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{C_2R} + \frac{r}{L}\right) \\ \frac{1}{C_1C_2L}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \end{pmatrix} h(y).$$

Pour les simulations, nous avons pris les valeurs numériques suivantes $C_1 = 10.04\text{nF}$, $C_2 = 102.2\text{nF}$, $R = 1747\Omega$, $r = 20\Omega$, $L = 18.8\text{mH}$, $G_1 = -0.756\text{mS}$, $G_2 = -0.409\text{mS}$ et $B = 1\text{V}$. On rappelle les unités utilisées : F *le farad,* H *le henry,* Ω *l'ohm,* S *le siemens et* V *le volt. Le gain de l'observateur a été réglé comme suit $\alpha_1 = 0.7, k_1 = 1000, k_2 = 240, k_3 = 24$. La dynamique de l'erreur d'observation $e = \hat{z} - z$ est alors donnée par*

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - 1000 \lceil e_1 \rfloor^{0.7} \\ \dot{e}_2 = e_3 - 240 \lceil e_1 \rfloor^{0.4} \\ \dot{e}_3 = -24 \lceil e_1 \rfloor^{0.1} \end{cases}$$

et $e(t)$ converge vers l'origine en temps fini (voir les figures 2.1 et 2.2).
On peut alors utiliser ce système pour encrypter un message et le retrouver via l'utilisation d'un observateur en temps fini [115].

2.2.2 Cas des systèmes uniformément observables

Observateur semi-global

Le prochain résultat donné dans [131] considère les systèmes uniformément observables, affine en l'entrée et multi-entrées multi-sorties (MIMO), i.e. de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} f_j(x) u_j \\ y = h(x), \quad y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.5}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u_j \in \mathbb{R}$ pour $j \in \{1, \ldots, m\}$. D'après [57], la fonction

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h(x) \\ \mathcal{L}_{f_0} h(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{f_0}^{n-1} h(x) \end{pmatrix}$$

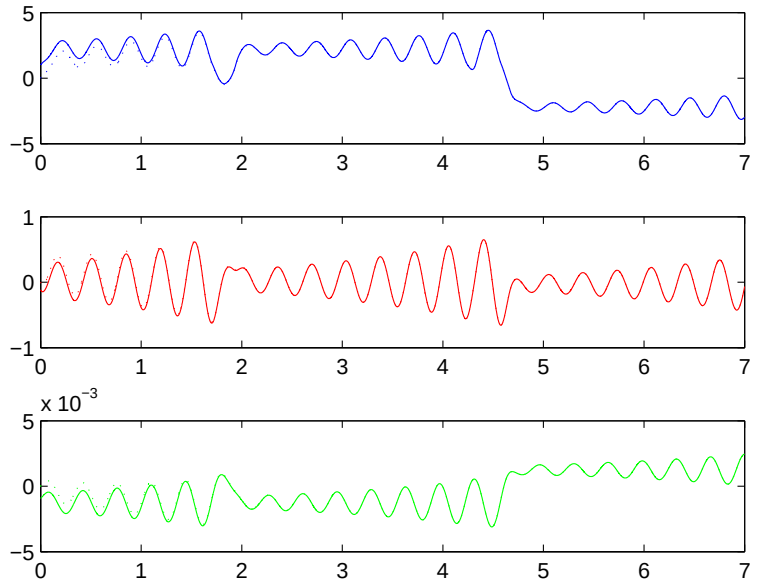


FIGURE 2.1 – États du système (2.4) en trait plein et son observateur en pointillé

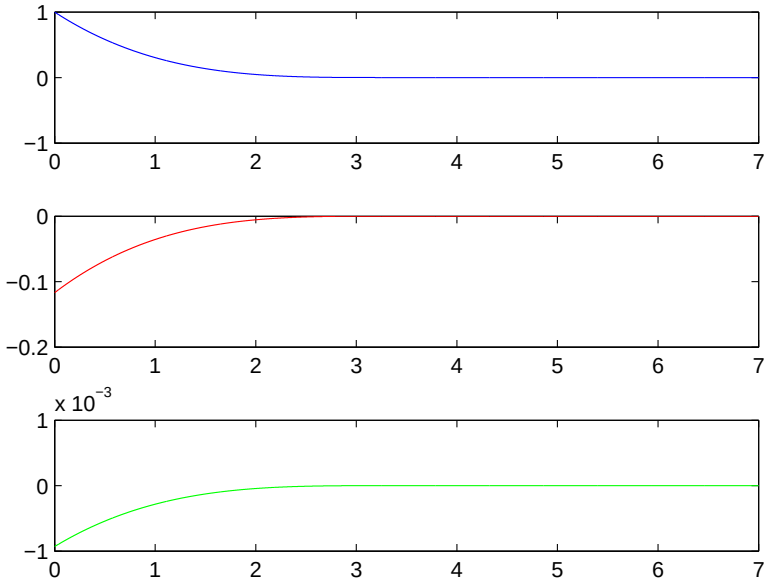


FIGURE 2.2 – Erreurs d'observation

définit un système de coordonnées locales qui transforme le système (2.5) en le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sum_{j=1}^{m} g_{1j}(x_1)u_j \\ \dot{x}_2 = x_3 + \sum_{j=1}^{m} g_{2j}(x_1, x_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(x_1, \ldots, x_n)u_j \\ y = x_1 = Cx \end{cases} \tag{2.6}$$

L'observateur proposé dans [131] est basé sur l'observateur à grand gain développé dans [40] et est de la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1\lceil \hat{x}_1 - y \rfloor^{\alpha_1} + \sum_{j=1}^{m} g_{1j}(\hat{x}_1)u_j \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2\lceil \hat{x}_1 - y \rfloor^{\alpha_2} + \sum_{j=1}^{m} g_{2j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = \varphi(\hat{x}) - k_n\lceil \hat{x}_1 - y \rfloor^{\alpha_n} + \sum_{j=1}^{m} g_{nj}(\hat{x})u_j \end{cases} \tag{2.7}$$

Les puissances α_i sont définies comme dans le théorème 2.3 et les gains sont donnés par

$$K = [k_1, \ldots, k_n]^T = S_\infty^{-1}(\theta)C^T \tag{2.8}$$

où $S_\infty(\theta)$ est solution de l'équation de Riccati stationnaire suivante

$$\begin{cases} \theta S_\infty(\theta) + A^T S_\infty(\theta) + S_\infty(\theta)A - C^T C = 0 \\ S_\infty(\theta) = S_\infty^T(\theta) \end{cases} \tag{2.9}$$

En posant $e = \hat{x} - x$, l'équation de l'erreur est donnée par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_1} + \tilde{f}_1 \\ \dot{e}_2 = e_3 - k_2\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_2} + \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - k_{n-1}\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_{n-1}} + \tilde{f}_{n-1} \\ \dot{e}_n = -k_n\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_n} + \tilde{f}_n \end{cases}$$

où les fonctions $\tilde{f}_i$ sont données par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}_i & = & \sum_{j=1}^{m}(g_{ij}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_i) - g_{ij}(x_1, \ldots, x_i))u_j \\ \tilde{f}_n & = & (\varphi(\hat{x}) - \varphi(x)) + \sum_{j=1}^{m}(g_{nj}(\hat{x}) - g_{nj}(x))u_j \end{array}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Le résultat de convergence suivant a été obtenu dans [131].

Théorème 2.6 ([131]) *Supposons que l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ soit bornée et que les fonctions φ et g_{ij} soient globalement lipschitziennes pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, m\}$, alors le système* (2.6) *admet le système* (2.7) *comme observateur semi-global en temps fini.*

On démontre ce théorème en utilisant la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\alpha_1, e) = \tilde{e}^T S_\infty(\theta)\tilde{e}$$

où

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} \lceil e_1 \rfloor^{\frac{1}{q}} \\ \lceil e_2 \rfloor^{\frac{1}{\alpha_1 q}} \\ \vdots \\ \lceil e_n \rfloor^{\frac{1}{\alpha_{n-1} q}} \end{pmatrix}$$

avec $q = \Pi_{i=1}^n((i-1)\alpha_1 - (i-2))$ le produit des poids et $S_\infty(\theta)$ définie par l'équation (2.9).

Observateur global

Nous allons maintenant présenter le résultat que nous avons obtenu dans [92] où un observateur global en temps fini pour les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sum_{j=1}^m g_{1j}(x_1)u_j \\ \dot{x}_2 = x_3 + \sum_{j=1}^m g_{2j}(x_1, x_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^m g_{nj}(x_1, \ldots, x_n)u_j \\ y = x_1 = Cx \end{cases} \tag{2.10}$$

est construit. L'observateur considéré est de la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1(\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_1} + \rho e_1) + \sum_{j=1}^m g_{1j}(\hat{x}_1)u_j \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2(\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_2} + \rho e_1) + \sum_{j=1}^m g_{2j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)u_j \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = -k_n(\lceil e_1 \rfloor^{\alpha_n} + \rho e_1) + \varphi(\hat{x}) + \sum_{j=1}^m g_{nj}(\hat{x})u_j \end{cases} \tag{2.11}$$

où $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ et les puissances α_i sont définies comme dans le théorème 2.3 pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Les gains k_i sont définis par (2.8) et (2.9) et le gain ρ par

$$\rho = \left(\frac{n^2 \theta^{\frac{2}{3}} S_1 + 1}{2} \right)$$

avec

$$S_1 = \max_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} |S_\infty(1)_{i,j}|.|S_\infty^{-1}(1)_{j,1}|.$$

Le terme de correction linéaire ρe_1 dans l'observateur (2.11) qu'on ajoute à l'observateur (2.7) permet d'obtenir la convergence globale. Le théorème suivant donne les conditions pour obtenir la convergence globale de l'observateur.

Théorème 2.7 ([92]) *Considérons le système* (2.10) *avec* φ *et* $g_{i,j}$ *globalement lipschitziennes pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *et l'entrée* $u \in \mathbb{R}^m$ *bornée. Alors il existe un réel* $0 < \theta^* < +\infty$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que, pour tout* $\theta > \theta^*$ *et* $\alpha \in (1-\varepsilon, 1)$*, le système* (2.10) *admet le système* (2.11) *comme observateur global en temps fini.*

De plus, il a été possible de borner le temps d'établissement du système d'erreur et nous renvoyons le lecteur à l'article [92] pour une preuve détaillée de ce résultat technique.

Exemple 2.8 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_3 = \sin(x_1 + x_2 + x_3) \\ y = x_1 \end{cases}$$

qui est déjà sous forme canonique observable (2.10)*. Nous considérons ici l'observateur suivant*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - k_1(\lceil e_1 \rfloor^{\alpha} + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \hat{x}_1 \sin(\hat{x}_2) - k_2(\lceil e_1 \rfloor^{2\alpha-1} + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \sin(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3) - k_3(\lceil e_1 \rfloor^{3\alpha-2} + \rho e_1) \end{cases}$$

qui correspond à (2.11)*. Les gains sont donnés par*

$$k_1 = 2\theta, k_2 = 2\theta^2, k_3 = \theta^3, \rho = \frac{(81\theta^{\frac{2}{3}} + 1)}{2}.$$

Nous prenons une valeur de $\alpha = 0,9$ *et* $\theta = 10$ *et nous pouvons constater sur la figure 2.3 que la convergence en temps fini a bien lieu.*

2.3 Stabilisation des systèmes homogènes

L'homogénéité pondérée joue un rôle important dans la théorie du contrôle des systèmes non linéaires [123]. Cette notion a été utilisée :

1. pour la construction d'une approximation nilpotente qui est contrôlable en temps petit et homogène dans [62] ;
2. pour la stabilisation par retour d'état dans [67, 68] en cherchant un système bouclé homogène ;
3. pour la stabilisation en temps fini en utilisant la proposition 2.1 comme dans [12].

La stabilisation des systèmes par un retour d'état homogène a été développée dans [27] en utilisant la technique de *backstepping* et dans [48] en utilisant des fonctions de Lyapunov contrôlées homogènes pour les systèmes contrôlables.

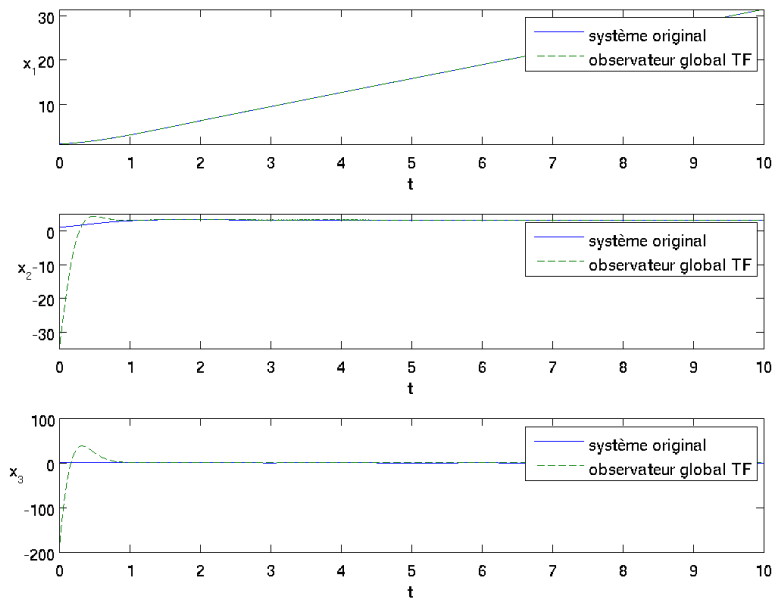


FIGURE 2.3 – États et estimées

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats obtenus dans [98] où l'on cherche des retours d'état homogènes en utilisant des FLCs. Nous utiliserons une formule modifiée de la formule de Sontag donnée dans [133] afin d'obtenir un retour d'état homogène explicite. Dans un premier temps, il est intéressant de chercher un retour d'état homogène même si la stabilisation homogène n'est pas possible. En effet, les fonctions homogènes possèdent des propriétés intéressantes qui permettent de restreindre leur étude à des variétés compactes (voir [121, Lemma 1]). Dans un second temps, trouver un retour d'état homogène est souvent le premier pas pour la stabilisation homogène. On peut aussi mentionner que certains systèmes homogènes stabilisables ne peuvent pas être stabilisés par des retours d'état homogènes et ceci a été mis en évidence dans [122] et [129] pour des systèmes affines.

2.3.1 Stabilisation par des retours d'état homogènes

Rappelons la définition de la stabilisation.

Définition 2.9 *Le système* (1.2) *est* stabilisable *(respectivement* continûment stabilisable*) s'il existe un retour d'état* $u \in C^0\left(\mathcal{V} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^m\right)$ *(respectivement* $u \in C^0\left(\mathcal{V}, \mathbb{R}^m\right)$*) tel que :*

1. $u(0) = 0$,
2. *l'origine du système* (1.3) *est asymptotiquement stable.*

Si on veut utiliser une FLC pour obtenir un retour d'état homogène, on peut utiliser une version modifiée du contrôle de Sontag. On considère dans la suite les fonctions $a(x)$, $b_i(x)$, $1 \leq i \leq m$

et $B(x)$ données dans la définition 1.7 et $b(x) = \|B(x)\|_m^2$.

Lemme 2.10 ([98]) *S'il existe une FLC $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système affine* (1.2)*, alors il est stabilisable par le retour d'état $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$ défini par*

$$u_i(x) = \begin{cases} -b_i(x) \frac{a(x)+(|a(x)|^p+b(x)^q)^{\frac{1}{p}}}{b(x)} & \text{if } x \in \mathcal{V}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

où $p > 1$, $q > 1$ sont des constantes positives. Si de plus V vérifie la propriété de petit contrôle, alors le retour d'état (2.12) *est ausi continu à l'origine.*

La preuve détaillée de ce résultat se trouve dans [98] et une version plus faible se trouve dans [102, Lemma 19]. Le contrôle de Sontag donné dans [133] correspond au cas particulier où $(p, q) = (2, 2)$.
On donne un résultat de stabilisation par un retour d'état homogène pour les systèmes avec une seule entrée u.

Théorème 2.11 ([98]) *Considérons le système affine* (1.2) *avec $m = 1$. S'il existe :*

1. *une FLC $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système affine* (1.2) *telle que $a(x)$ est homogène de degré d_0 et $B(x)$ est homogène de degré d_1 par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$;*
2. *$p > 1$, $q > 1$ des réels positifs tels que $p = \dfrac{2qd_1}{d_0}$;*

alors le retour d'état

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{a(x)+(|a(x)|^p+b(x)^q)^{\frac{1}{p}}}{B(x)} & \text{if } x \in \mathcal{V}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

stabilise le système (1.2) *et est homogène de degré $d_0 - d_1$ par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n)$. Si de plus V vérifie la propriété de petit contrôle, alors le retour d'état* (2.13) *stabilise continûment le système* (1.2)*.*

Illustrons le théorème 2.11 par un exemple.

Exemple 2.12 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$$

et la FLC

$$V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Alors $a(x) = -x_1^4$ est homogène de degré 4 et $B(x) = x_2$ est homogène de degré 1 par rapport aux poids $(1, 1)$. Comme

$$\frac{a(x)}{|B(x)|} = \frac{-x_1^4}{|x_2|} \leq 0$$

on déduit que V vérifie la propriété de petit contrôle. Le théorème 2.11 avec $4p = 2q$, par exemple $(p, q) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$, implique que le système est continûment stabilisable par le retour d'état

$$u(x) = -\frac{-x_1^4 + \left(x_1^6 + x_2^6\right)^{\frac{2}{3}}}{x_2}$$

qui est homogène de degré 3 par rapport aux poids $(1, 1)$.

Nous allons maintenant donner un résultat de stabilisation par un retour d'état homogène pour les systèmes à entrées multiples.

Théorème 2.13 ([98]) *Considérons le système affine* (1.2). *S'il existe :*

1. *une FLC $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système* (1.2) *telle que $a(x)$ est homogène de degré d_0 et $b_i(x)$ sont homogènes de degré d_1 par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$;*
2. *$p > 1$, $q > 1$ des constantes positives telles que $p = \dfrac{2qd_1}{d_0}$;*

alors le retour d'état (2.12) *stabilise le système* (1.2) *et ses composantes $u_i(x)$ sont homogènes de degré $d_0 - d_1$ par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Si de plus V vérifie la propriété de petit contrôle, alors le retour d'état* (2.12) *stabilise continûment le système* (1.2).

2.3.2 Stabilisation homogène

Par *stabilisation homogène*, on entend qu'il existe un retour d'état tel que le système bouclé est homogène. On donne un théorème pour la stabilisation homogène utilisant une FLC homogène.

Théorème 2.14 ([98]) *Considérons le système affine* (1.2) *avec $m = 1$ où $f_0(x)$ est homogène de degré d_0 et $f_1(x)$ est homogène de degré d_1 par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$. S'il existe une FLC $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système* (1.2) *homogène de degré d par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$, alors le retour d'état* (2.13) *où*

$$p = \frac{2q(d + d_1)}{d + d_0},\ p > 1,\ q > 1,$$

est homogène de degré $d_0 - d_1$ et le système bouclé (1.3)-(2.13) *est homogène de degré d_0 par rapport aux poids $(r_1, \ldots, r_n)$. Si de plus V vérifie la propriété de petit contrôle, alors le retour d'état* (2.13) *stabilise continûment le système* (1.2).

Pour prouver ce résultat on utilise en particulier l'article [121].

Exemple 2.15 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases} \tag{2.14}$$

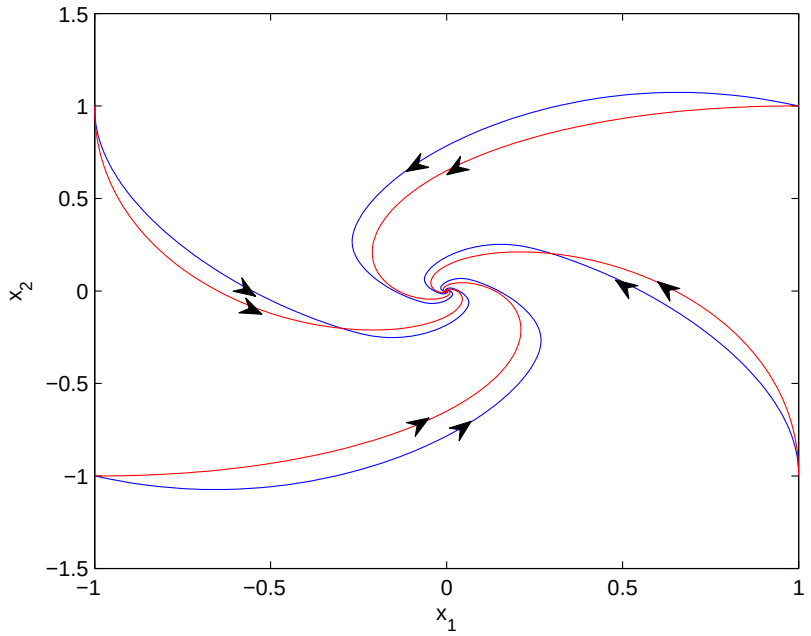


FIGURE 2.4 – Portraits de phase des systèmes bouclés

et la FLC

$$V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

homogène de degré 2 *par rapport aux poids* $(1,1)$. *On a* $f_0(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ *qui est homogène de degré 0 et* $f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *qui est homogène de degré* -1 *par rapport aux poids* $(1,1)$. *Le théorème* (2.14) *avec* $p = q$, *par exemple* $(p,q) = (2,2)$, *implique que le système est stabilisable par le retour d'état*

$$u(x) = \frac{x_1^2 - (x_1^8 + x_2^8)^{\frac{1}{4}}}{x_2} \tag{2.15}$$

qui est homogène de degré 1 *par rapport aux poids* $(1,1)$. *De plus, le système bouclé* (2.14)-(2.15) *est homogène de degré* 0 *par rapport aux poids* $(1,1)$.
La figure 2.4 présente les portraits de phase des systèmes bouclés avec le contrôle linéaire $u = -x_2$ *en rouge et le contrôle homogène* (2.15) *en bleu.*
On a donc pu construire pour le système (2.14) *un retour d'état homogène de degré 0 autre que le retour d'état linéaire.*

2.4 Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la construction d'observateurs en temps fini. Dans la seconde partie, nous avons étudié la stabilisation homogène pour un système homogène possédant une fonction de Lyapunov contrôlée.
Nous soulignons le fait que nos travaux réalisés sur les observateurs sont allés au-delà des observateurs en temps fini. Nous avons en particulier développé une approximation homogène pour l'observabilité pouvant être utilisée pour la construction de nouveaux observateurs plus performants [93]. Cependant, cette méthode n'est pas systématiquement constructive. Quant à nos travaux sur la stabilité et la stabilisation des systèmes homogènes, nous pouvons aussi citer un travail concernant les systèmes homogènes dépendant d'un paramètre [99]. Ce travail ne fournit pas de nouvelles méthodes constructives mais généralise un résultat obtenu par Sanjay P. Bhat dans [12].

Chapitre 3

L'obstruction topologique

3.1 Introduction

Il existe deux principales obstructions topologiques à la stabilisation. La première qui s'appelle l'*obstruction de Brockett* est une obstruction locale reliée à la structure du système contrôlé [19]. La seconde qui s'appelle l'*obstruction topologoqie* est une obstruction globale reliée à la topologie de l'espace d'état du système dynamique [134, Thm. 21].
Nous allons faire un bref rappel des obstructions tournant autour de l'obstruction de Brockett et de leurs relations. Il y a plusieurs conditions nécessaires à la stabilité et la stabilisation d'un point d'équilibre d'une équation différentielle. La première condition nécessaire de stabilisation est la *condition de Brockett* donnée dans [19, Theorem 1] pour les systèmes lisses. Cette condition est encore vraie pour les systèmes continus [108] et même pour une classe de systèmes discontinus [124]. Une condition nécessaire de stabilité appelée la *condition de l'indice* est donnée dans [72, Theorem 52.1]. Cette condition utilise la théorie du degré qui est rappelée dans [80]. Elle est vraie pour les systèmes en dimension finie et s'exprime en utilisant le degré de Brouwer, et pour les systèmes en dimension infinie et s'exprime alors en utilisant le degré de Leray-Schauder (voir par exemple [109] et [110, Theorem 2.2]). Cette condition a été étendue aux systèmes discontinus dans [45]. Une autre condition nécessaire à la stabilisation appelée la *condition de Coron* a été proposée dans [24]. Elle est basée sur les groupes d'homologie et d'homotopie. Récemment, la condition de Coron a été étendue à la stabilisation des sous-variétés de codimension un en utilisant la dualité de Poincaré dans [88]. Les relations entre ces conditions sont schématisés par le tableau (3.1).

$$\begin{array}{ccccc} \text{Stabilisation asymptotique} & \overset{(a)}{\rightarrow} & \text{Condition de l'indice} & \overset{(b)}{\rightarrow} & \text{Condition de Brockett} \\ & & \overset{(c)}{\downarrow} & \overset{(d)}{\nearrow} & \\ & & \text{Condition de Coron} & & \end{array} \tag{3.1}$$

Avec des hypothèses supplémentaires physiquement peu réalistes, un résultat inverse à l'implication (a) est présenté dans [110, Theorem 2.2]. Un résultat inverse à l'implication (c) est donné dans [26, Theorem 11.8] pour la stabilisation dynamique des systèmes analytiques. On peut trouver une démonstration de l'implication (b) dans la preuve de la condition de Brockett

donnée dans [134, Theorem 22] ou dans [26, Theorem 11.4]. Les auteurs utilisent le fait que le degré est un invariant homotopique lorsque l'homotopie vérifie une condition de bord. De plus, l'article [141] développe les conditions de l'indice et de Brockett pour des attracteurs globaux. La théorie de l'homotopie a aussi été utilisée pour une obstruction à la stabilisation simultanée dans [29]. La condition de l'indice est dédiée aux points d'équilibre et est basée sur la théorie du degré. Elle a été présentée pour la première fois pour la stabilité asymptotique dans [72].
Nous allons présenter deux développements tournant autour de l'obstruction topologique. Le premier développement présenté dans la partie 3.2 et publié avec Sanjay P. Bhat montre que le domaine d'attraction se rétracte sur un ensemble asymptotiquement stable dans un sens que nous définirons. Le second développement présenté dans la partie 3.3 concerne l'obstruction topologique à la stabilisation par un retour d'état dépendant du temps et a été développé en collaboration avec Emmanuel Bernuau et Wilfrid Perruquetti. On sait qu'on peut lever l'obstruction de Brockett par un retour d'état dépendant du temps, malheureusement il n'en est pas de même pour l'obstruction topologique pour une notion de stabilité uniforme que nous définirons.

3.2 Rétraction du domaine d'attraction

Dans cette partie, nous allons présenter des résultats issus de [100] où $\mathcal{M}$ est un espace métrique localement compact. Le théorème [134, Theorem 21] montre que le domaine d'attraction d'un système dynamique avec un équilibre asymptotiquement stable est contractible. Dans cette partie, on généralise ce résultat aux espaces compacts asymptotiquement stables. On montre qu'un attracteur compact asymptotiquement stable d'un système dynamique continu défini sur un espace métrique localement compact est un rétracte par déformation de son domaine d'attraction dans un sens que nous définirons. Une version faible de ce résultat utilisant seulement les rétractes apparaît dans [14, Lemma 3.2].

Théorème 3.1 ([100]) *Supposons que $\mathcal{K}$ soit un ensemble compact asymptotiquement stable pour le système dynamique $(\mathcal{M}, \varphi)$ avec le domaine d'attraction $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation faible de $\mathcal{A}$.*

Pour démontrer ce résultat, on utilise l'existence d'une fonction de Lyapunov donnée par le théorème inverse de Lyapunov dans [14, Theorem 2.10] et le semi-flot.

Remarque 3.2 *Le théorème 3.1 reste valide lorsque $\mathcal{M}$ est un espace de Hausdorff localement compact et $\mathcal{K}$ est un ensemble invariant asymptotiquement stable (voir [13, Theorem 10.6]).*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.1 et de la proposition 1.16.

Corollaire 3.3 ([100]) *Supposons que $\mathcal{K}$ soit un ensemble compact asymptotiquement stable pour le système dynamique $(\mathcal{M}, \varphi)$ avec le domaine d'attraction $\mathcal{A}$. Alors on a les résultats suivants :*

1. *Si $\mathcal{K}$ est un rétracte de voisinage de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{K}$ est un rétracte de $\mathcal{A}$.*

2. *Si $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation de voisinage de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation de $\mathcal{A}$.*
3. *Si $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation forte de voisinage de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation forte de $\mathcal{A}$.*

Remarque 3.4 *Les ensembles qui sont des rétractes de voisinage sont assez communs. En particulier, pour les espaces de dimensions finies, les rétractes de voisinage sont aussi des rétractes de voisinage euclidiens qui sont bien connus et étudiés par exemple dans [17, 59]. On peut noter que les CW-complexes sont des rétractes de voisinage euclidiens. Le corollaire 3.3 conduit ainsi à une condition nécessaire pour la stabilisabilité par un retour d'état continu.*

Un point est toujours un rétracte par déformation forte de voisinage si $\mathcal{M}$ est localement contractible. Ainsi, on reconnaît le résultat [134, Theorem 21] comme un cas particulier du théorème 3.1 dont voici l'énoncé.

Corollaire 3.5 ([100]) *Supposons que $\mathcal{M}$ soit localement contractible. Considérons le système dynamique $(\mathcal{M}, \varphi)$ avec un point d'équilibre x_e. Supposons que x_e soit asymptotiquement stable. Le domaine d'attraction qui est donné par*

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathcal{M} : \lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x) = x_e \right\}$$

est un ensemble contractible.

En réalité, le résultat présenté dans [134, Theorem 21] est valable pour le cas plus général des espaces topologiques car le flot fournit une homotopie naturelle.
La proposition 3.6 décrit une situation commune dans laquelle l'ensemble $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation forte de voisinage de $\mathcal{M}$.

Proposition 3.6 ([100]) *Supposons que $\mathcal{M}$ soit une variété lisse de dimension finie et $\mathcal{K}$ une sous-variété compacte de $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{K}$ est un rétracte par déformation forte de voisinage de $\mathcal{M}$.*

La proposition 3.6 implique qu'une large classe d'ensembles invariants étudiés en automatique est composé de rétractes par déformation forte de voisinage. Si $\mathcal{K}$ n'est pas un rétracte de voisinage, comme les fractales (voir par exemple [23, Remark 5]), on ne peut pas conclure à partir des résultats précédents à une condition nécessaire de stabilité. Si on n'a aucune hypothèse sur $\mathcal{K}$, il existe encore un résultat théorique présenté dans [100, Proposition 11] mais qui n'a pas vraiment d'intérêt pratique.

3.3 Obstruction topologique à la stabilisation par un retour d'état dépendant du temps

Cette partie est dédiée à l'exposition de résultats publiés dans [7]. L'article [11], montre que la stabilité globale asymptotique sur un fibré vectoriel implique la contractibilité de la base. En particulier, un système dynamique continu sur un espace d'état qui a la structure d'un fibré vectoriel

ayant une variété compacte pour base ne possède pas d'équilibre globalement asymptotiquement stable. En terme de stabilisation, cela signifie que si l'espace d'état d'un système dynamique a la structure d'un fibré vectoriel ayant une variété compacte pour base, alors aucun retour d'état statique continu ne peut globalement stabiliser un point d'équilibre. On sait que la condition de Brockett peut être levée par l'utilisation d'un retour d'état dépendant du temps. L'existence de tels retours d'état a été montrée dans [25] pour des systèmes vérifiant la condition d'accessibilité du rang. Une construction explicite a été proposée sous une hypothèse supplémentaire sur l'algèbre de Lie de contrôle dans [118]. Une question naturelle qu'on peut se poser est de savoir si l'obstruction topologique peut aussi être levée par un retour d'état dépendant du temps comme cela a été suggéré dans l'introduction de [105].
Dans [11, Remark 1], les auteurs mentionnent le fait que leur résultat est encore vrai dans le cas des retours d'état dynamiques. En effet, un retour d'état dynamique est vu comme une extension dynamique où l'état du système augmenté est stable. Dans ce cas, le résultat présenté dans [11] est applicable directement avec la méthode proposée dans leur article. On peut voir le retour d'état dépendant du temps comme une extension dynamique utilisant la dynamique $\dot{\tau} = 1$. Cependant dans cette situation, il n'y a pas de convergence vers un unique point d'équilibre, mais vers une sous-variété. Le résultat présenté dans [11] n'est alors plus applicable dans ce contexte. Nous allons voir dans cette partie que l'obstruction reste encore valable dans le cas d'un retour d'état dépendant du temps, au sens de la stabilité uniforme asymptotique, pour un système dynamique défini sur un fibré ayant une variété compacte pour base.
Par *variété*, nous entendons une variété connexe lisse de dimension finie sans bord. La définition d'un *fibré*, plus générale que celle d'un fibré vectoriel, est donnée par exemple dans [1]. Nous rappelons un premier résultat concernant les variétés compactes.

Proposition 3.7 ([49]) *Aucune variété compacte n'est contractible.*

Considérons un système contrôlé défini par

$$\dot{x} = f_0(x, u) \qquad x \in \mathcal{N}\,, u \in \mathsf{U}, \tag{3.2}$$

avec $\mathcal{N}$ une variété, U l'ensemble des contrôles admissibles et f_0 une fonction continue.
On se pose la question de la stabilisabilité du système (3.2) via un retour d'état dépendant du temps $u(x, t)$. Pour cela, posons $\dot{\tau} = 1$ et regardons la stabilité asymptotique partielle du système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x, u(x, \tau)) \\ \dot{\tau} = 1 \end{cases}$$

On introduit les définitions de stabilité partielle que nous utiliserons et qui sont adaptées de [50].

Définition 3.8 ([7]) *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{N} \times \mathcal{T}$ un produit cartésien de variétés. Considérons $f = (f_1, f_2)$ une fonction continue sur $\mathcal{P}$ ayant l'unicité à droite des solutions. On note φ le semi-flot de f et p_1 la projection canonique sur $\mathcal{N}$.*

1. *On dit que $x_e \in \mathcal{N}$ est un* équilibre partiel *si pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, on a $f_1(x_e, \tau) = 0$.*

2. *Un équilibre partiel* $x_e \in \mathcal{N}$ *est* partiellement uniformément stable en τ *si pour tout* $U \subset \mathcal{N}$ *voisinage de* x_e*, il existe* $V \subset \mathcal{N}$ *voisinage de* x_e *tel que pour tout* $x \in V$ *et pour tout* $\tau \in \mathcal{T}$*,* $p_1 \circ \varphi(t, (x, \tau)) \in U$ *pour tout* $t \geq 0$*.*
3. *Un équilibre partiel* $x_e \in \mathcal{N}$ *est* partiellement globalement uniformément asymptotiquement stable en τ *s'il est partiellement uniformément stable en* τ *et si pour tout* $(x, \tau) \in \mathcal{P}$ *on a* $p_1 \circ \varphi(t, (x, \tau)) \to x_e$ *lorsque* $t \to +\infty$*.*

Le dernier point de la définition 3.8 est légèrement différent des définitions standards. En effet, nous avons seulement besoin que la stabilité soit uniforme par rapport à τ pour prouver le résultat principal de cette partie. L'uniformité par rapport à τ au niveau de la convergence qui est généralement requise ne l'est pas ici.
La définition suivante de la stabilisabilité dépendant du temps est inspirée de [69, Chapter 12] et adaptée à un contexte de stabilité partielle.

Définition 3.9 ([7]) *Le système* (3.2) *est* globalement asymptotiquement uniformément stabilisable par un retour d'état continu dépendant du temps *s'il existe* $x_e \in \mathcal{N}$*, une variété* $\mathcal{T}$*, une application continue* $f_2 : \mathcal{N} \times \mathcal{T} \to \mathsf{T}\mathcal{T}$ *avec* $f_2(x, \tau) \in \mathsf{T}_\tau\mathcal{T}$ *pour tout* $x \in \mathcal{N}$ *et tout* $\tau \in \mathcal{T}$ *et un retour d'état continu* $u(x, \tau)$ *tel que* x_e *soit un équilibre partiel du système bouclé* $(\dot{x}, \dot{\tau}) = (f_0(x, u(x, \tau)), f_2(x, \tau))$ *et soit partiellement globalement uniformément asymptotiquement stable en* τ*.*

Remarque 3.10 *On remarque qu'en prenant* $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ *et* $f_2(x, \tau) = 1$*, la définition 3.9 se ramène à la définition de la stabilisation asymptotique globale par un retour d'état continu dépendant du temps. De manière générale, la variable* τ *peut être stable ou pas, scalaire où vectorielle, bornée ou pas.*

Dans [11, Theorem 1], les auteurs utilisent la proposition 3.7 pour prouver que si une variété $\mathcal{N}$ admet une structure de fibré vectoriel ayant une variété compacte pour base, alors aucun système (3.2) ayant une fonction continue f_0 sur $\mathcal{N}$ ne peut avoir un unique point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. Ils concluent que le système (3.2) ne peut pas être globalement asymptotiquement stabilisé par un retour d'état continu. On peut étendre ce résultat de la façon suivante.

Théorème 3.11 ([7]) *Supposons que* $\mathcal{N}$ *soit une variété avec une structure de fibré ayant une variété compacte pour base. S'il existe une section continue du fibré alors le système* (3.2) *n'est pas globalement asymptotiquement uniformément stabilisable par un retour d'état continu dépendant du temps de sorte que le système augmenté a l'unicité à droite des solutions.*

Exemple 3.12 *Considérons le système suivant défini sur le cercle unité*

$$\ddot{\theta} = u, \qquad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

En utilisant la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$*, on peut réécrire le système comme*

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = u \end{cases} \tag{3.3}$$

L'espace d'état est l'espace tangent au cercle noté $\mathsf{T}\mathbb{S}^1$*. L'espace tangent* $\mathsf{T}\mathbb{S}^1$ *a la structure d'un fibré vectoriel ayant pour base la variété compacte* $\mathbb{S}^1$ *avec la projection* π_0 *donnée par*

$$\pi_0(\theta, \omega) = \theta.$$

De plus, en tant que fibré vectoriel, l'espace fibré tangent admet la section nulle comme section continue. On peut se demander s'il est possible de construire un retour d'état continu dépendant du temps $u(\theta, \omega, t)$ *qui stabilise globalement un état* $(\theta_0, 0)$ *tel qu'on ait l'unicité à droite du système bouclé. Comme* $\mathbb{S}^1$ *est compact, d'après le théorème 3.11 le système* (3.3) *ne peut pas être globalement asymptotiquement uniformément stabilisé.*

Finalement, en prenant en compte le théorème 3.11 et [11, Theorem 1], on a le résultat suivant.

Corollaire 3.13 ([7]) *Considérons le système* (3.2) *défini sur une variété avec une structure de fibré ayant une variété compacte pour base. S'il existe une section continue du fibré alors le système* (3.2) *n'est pas globalement asymptotiquement uniformément stabilisable par un retour d'état continu dynamique de sorte que le système augmenté a l'unicité à droite des solutions.*

L'obstruction topologique du théorème 3.11 nous empêche d'avoir un retour d'état continu qui stabilise globalement asymptotiquement et uniformément le système (3.2) si l'espace d'état est une variété avec une structure de fibré ayant une variété compacte pour base, que le retour d'état soit dépendant du temps ou dynamique. De plus, les auteurs de l'article [90] ont prouvé que cette obstruction reste encore valable dans le cas des systèmes discontinus dans le cadre théorique des inclusions différentielles. Ainsi, l'obstruction topologique est une contrainte forte de stabilisation, et peu de techniques restent à disposition pour la contourner. D'abord, comme la propriété d'uniformité est utilisée et nécessaire pour la preuve du théorème 3.11, la possibilité d'une stabilisation non uniforme reste ouverte mais peu réaliste en pratique. Ensuite, les retours d'états hybrides sont peut-être une solution d'avenir pour résoudre le problème comme suggéré dans [90]. Enfin, d'autres notions de solutions existent pour les systèmes discontinus et certaines pourraient ne pas hériter de la même obstruction topologique à la stabilisation globale.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté nos principaux résultats obtenus concernant l'obstruction topologique. Ces résultats sont des conditions nécessaires de stabilisabilité pour un système, ce qui permet en pratique d'exclure un certain nombre de cas de figures non réalisables. Nous avons aussi travaillé sur l'utilisation de l'indice de Conley comme une possible extension de l'obstruction de Brockett aux ensembles invariants [101]. Cependant, nos résultats sont encore en développement et demandent à être approfondis.

Chapitre 4

Contrôle du flux magnétique et équation de Schrödinger d'ordre supérieur

4.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'étude de certaines EDPs. Dans un premier temps, nous allons proposer un retour d'état robuste proportionnel-intégral en dimension infinie pour l'équation du flux magnétique dans les plasmas de tokamak. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Laurent Autrique, Sylvain Brémond, Oumar Gaye, Rémi Nouailletas et Yuri Orlov et publié dans [42]. Nous avons aussi développé un retour d'état robuste par mode glissant en dimension infinie [43, 44] issu des travaux de Yuri Orlov dans [107] que nous ne présenterons pas ici. En effet, ce contrôle généré par mode glissant est discontinu en raison de l'utilisation de la fonction signe et il y a donc un risque d'apparition d'oscillations. Dans un second temps, nous présenterons un travail effectué avec Rémi Carles sur les équations de Schrödinger d'ordre supérieur qui ont pour objectif de prendre en compte des effets relativistes avec une équation de type Schrödinger [21]. Cette partie ne concerne pas directement le contrôle. Cependant le contrôle quantique s'est développé ces dernières années, voir par exemple [96], et le fait de pouvoir définir de nouvelles équations semi-relativistes très proches et plus précises que l'équation de Schrödinger devrait permettre de développer des stratégies de contrôle plus précises qui sont au cœur de problèmes en physique et chimie quantiques [31].

4.2 Contrôle du flux magnétique dans les plasmas de tokamak

Les besoins énergétiques croissants de la population mondiale requièrent le développement, la maîtrise et la fourniture de nouvelles formes d'énergie. Dans ce contexte, la fusion nucléaire est une piste de recherche prometteuse. Le projet mondial *ITER* est destiné à démontrer la faisabilité scientifique et technique de la fusion nucléaire comme nouvelle source d'énergie. Un des nombreux verrous scientifiques tient à la maîtrise de la distribution spatiale du profil de courant dans les plasmas de tokamak, paramètre clé pour la stabilité et la performance des expériences [18, 137]. L'évolution spatio-temporelle de ce courant est reliée à celle du flux magnétique. La

distribution spatiale du flux magnétique peut être décrite par une EDP linéaire 1D appelée l'équation de la diffusion résistive du flux magnétique. Nous ne rappellerons pas dans ce mémoire la façon d'obtenir l'équation d'évolution du flux magnétique à partir des hypothèses liées à la physique du système des plasmas de tokamak. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à la thèse d'Oumar Gaye [41] que j'ai co-encadrée. Dans cette partie, nous allons étudier la stabilisation de l'équation du flux magnétique en construisant deux retours d'état en dimension infinie. On commence par montrer qu'avec une action proportionnelle, le système devient exponentiellement stable et qu'on a l'atténuation des perturbations dans un sens $\mathcal{H}_\infty$ défini dans [39]. On utilise à la fois l'action proportionnelle et intégrale pour rejeter complètement les perturbations indépendantes du temps. On obtient ensuite une atténuation de toutes les perturbations dans le sens $\mathcal{H}_\infty$ défini dans [39]. Pour la partie simulation, on a effectué plusieurs cas test en dimension infinie sans le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie en faisant varier le gain proportionnel et intégral pour étudier leurs influences sur le système et la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures et des incertitudes du modèle.
L'équation d'évolution 1D du flux magnétique est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,1) = -V_0(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

où $x \in (0,1)$ est la coordonnée radiale du profil 1D, $\psi(t,x)$ le flux magnétique, R_0 et a sont respectivement les grand et petit rayons du plasma supposés constants, μ_0 la perméabilité du vide, $\eta_{||}(t,x)$ la résistivité parallèle du plasma. Les entrées du système sont la densité de courant non-inductive j_{ni} et la tension par tour du plasma V_0. La stabilisation de l'équation (4.1) consiste à construire un contrôle à l'intérieur $j_{ni}(t,x)$ et un contrôle au bord $V_0(t)$ en utilisant une fonction de Lyapunov. De plus, l'utilisation d'une LMI permet d'assurer des propriétés $\mathcal{H}_\infty$ au retour d'état proportionnel et proportionnel-intégral que nous allons proposer [42].

4.2.1 Retour d'état proportionnel

On définit la fonction $\psi_r(t,x)$ comme l'écart entre le profil du flux magnétique et la valeur du flux au bord en $x = 1$ par

$$\psi_r(t,x) = \psi(t,x) - \psi(t,1).$$

La variable ψ_r est gouvernée par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(t,x) \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0(t) \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(t,x)\Big|_{x=0} = 0, \quad \psi_r(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Cette formulation (4.2) permet d'exprimer le contrôle $V_0(t)$ non plus comme un contrôle frontière mais directement dans l'équation d'évolution.
Soit

$$\mathbf{W} = \left\{ \Psi \in \mathbf{H}^2(0,1) : \frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big|_{x=0} = \Psi(1) = 0 \right\} \subset L^2(0,1)$$

et ψ_r^{target} l'état désiré dans l'espace **W**. La variable d'erreur $\varepsilon(t,x)$ définie par

$$\varepsilon(t,x) = \psi_r(t,x) - \psi_r^{target}(x)$$

représente l'écart entre ψ_r et ψ_r^{target}. Cet espace **W** est muni du produit scalaire de l'espace $L^2(0,1)$ avec le poids x

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \Psi_1(x)\Psi_2(x)xdx$$

et de la norme

$$\|\Psi\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |\Psi(x)|^2 xdx}. \tag{4.3}$$

Nous utilisons la norme L^2 et non la norme $\mathbf{H}^2$ car elle est plus facile à manipuler et suffisante pour obtenir un retour d'état proportionnel ayant une propriété $\mathcal{H}_\infty$.
La fonction d'erreur ε est gouvernée par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x}\right) + \eta_{||}R_0 j_{ni} + V_0 \\ \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

sous les hypothèses réalistes

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x}\right| < +\infty; \qquad \left.\frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \qquad \psi_r^{target}(1) = 0.$$

En introduisant la relation

$$j_{control} = j_{ni} + \frac{V_0}{\eta_{||}R_0} \tag{4.5}$$

le système (4.4) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x}\right) + \eta_{||}R_0 j_{control} \\ \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Supposons de manière réaliste que la résistivité du plasma $\eta_{||}(t,x)$ est bornée par η_1 et η_2

$$0 < \eta_1 \leq \eta_{||}(t,x) \leq \eta_2. \tag{4.7}$$

On suppose de plus que la dérivée temporelle de $\eta_{||}(t,x)$ est bornée

$$\left|\frac{\partial \eta_{||}}{\partial t}\right| < \triangle. \tag{4.8}$$

L'objectif est de construire un contrôle $j_{control}$ pour que le système (4.6) décrivant l'évolution de l'erreur du système $\varepsilon(t,x)$ soit exponentiellement stable. Pour cela, on considère le retour d'état suivant

$$j_{control}(t,x) = -\frac{k}{\eta_{||}(t,x)R_0}\varepsilon(t,x) - \frac{1}{R_0\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \psi_r^{target}(x)}{\partial x}\right). \tag{4.9}$$

Alors le système bouclé (4.6)-(4.9), se transforme en le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k\varepsilon \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 4.1 ([42]) *Considérons le système d'erreur* (4.6) *et le retour d'état* (4.9) *sous les hypothèses* (4.7) *et* (4.8). *Le système en boucle fermée* (4.10) *est globalement exponentiellement stable pour la norme* (4.3)*, sous la contrainte que le gain* k *du retour d'état vérifie*

$$k > -\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + \frac{\triangle}{2\eta_1}.$$

On prouve ce théorème en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov suivante

$$V\left(\varepsilon(t,.)\right) = \int_0^1 \varepsilon(t,x)^2 \frac{x}{\eta_{||}(t,x)} dx.$$

On va maintenant voir que le retour d'état défini par la relation (4.9) résout le problème de contrôle $\mathcal{H}_\infty$ avec l'atténuation des perturbations, voir [33] pour plus de détails. Considérons maintenant le système perturbé

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k\varepsilon + h(t,x) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

où $h(t,x)$ est une perturbation telle que $h(\cdot,x) \in L^2(0,\infty)$ et $h(t,\cdot) \in \mathbf{W}$ pour tout $t \in [0,\infty)$. On note $h \in L^2(0,\infty;\mathbf{W})$.
Le résultat suivant établit qu'avec une condition sur le gain k, le retour d'état (4.9) qui assure déjà la stabilité exponentielle du système (4.10) d'après le théorème 4.1 permet aussi d'avoir un indice de performance négatif

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \left[\|\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} - \gamma^2 \|h(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} \right] dt - \gamma^2 \|\varepsilon(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} < 0 \tag{4.12}$$

sur la solution du système perturbé (4.11) pour tout $h \in L^2(0,\infty;\mathbf{W})$ avec γ une constante positive.

Théorème 4.2 ([42]) *Soit* $\gamma > 0$*, on suppose que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites et que le gain* k *du retour d'état* (4.9) *vérifie la condition*

$$k > \frac{(1+\gamma^2)\eta_2}{2\gamma^2\eta_1} - \frac{\exp(1)\eta_1^2}{\mu_0 a^2 \eta_2} + \frac{\triangle}{2\eta_1} \tag{4.13}$$

alors les perturbations $h \in L_2(0,\infty;\mathbf{W})$ *du système perturbé* (4.11) *sont atténuées au sens de* (4.12).

On obtient la propriété (4.12) en utilisant la condition (4.13) et une condition LMI.

4.2.2 Retour d'état proportionnel-intégral

L'objectif est de construire un retour d'état proportionnel-intégral qui puisse complètement rejeter les perturbations indépendantes du temps. Pour cela, on ajoute une hypothèse supplémentaire de séparation des variables sur la résistivité du plasma

$$\eta_{||}(t,x) = f(t)g(x) \tag{4.14}$$

avec les contraintes

$$0 < f_1 \leq f(t) \leq f_2, \quad 0 < g_1 \leq g(x) \leq g_2$$

où f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des constantes strictement positives. L'hypothèse (4.14) est justifiée dans [112, 111, 139]. On définit l'espace $\mathbf{W}_g$ par

$$\mathbf{W}_g = \left\{ \Psi \in \mathbf{H}^2(0,1) : \left.\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \Psi(1) = 0 \right\} \subset L^2(0,1)$$

et on le munit du produit scalaire de l'espace $L^2(0,1)$ avec le poids $\frac{x}{g(x)}$

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \Psi_1(x)\Psi_2(x)\frac{x}{g(x)}dx$$

et de la norme

$$\|\Psi\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |\Psi(x)|^2 \frac{x}{g(x)}dx}.$$

Il est clair que l'espace $\mathbf{W}_g$ n'est rien d'autre que l'espace $\mathbf{W}$ équipé d'un produit scalaire équivalent.
On considère le retour d'état proportionnel-intégral

$$j_{control}(t,x) = -\frac{k}{\eta_{||}(t,x)R_0}\varepsilon(t,x) - \frac{k_1}{\eta_{||}(t,x)R_0}\int_0^t \varepsilon(s,x)ds - \frac{1}{R_0\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \psi_r^{target}(x)}{\partial x}\right) \tag{4.15}$$

où k et k_1 sont des paramètres de poids à définir et $j_{control}$ est donnée par (4.5). Le système d'erreur (4.6) piloté par le retour d'état (4.15) avec une perturbation statique qui ne dépend pas du temps $h(x) \in \mathbf{W}_g$, est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) - k\varepsilon - k_1\int_0^t \varepsilon(s,x)ds + h(x) \\ \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 4.3 ([42]) *On suppose que les gains k et k_1 du retour d'état* (4.15) *vérifient*

$$k > -\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2}, \quad k_1 > 0$$

alors le système bouclé (4.16) *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace d'état $\mathbf{W}_g$ indépendamment de la perturbation externe $h(x) \in \mathbf{W}_g$ qui affecte le système.*

On prouve ce résultat en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle donné dans [61].
L'objectif est de montrer qu'en plus de rejeter des perturbations statiques qui ne dépendent pas du temps, le retour d'état proportionnel-intégral (4.15) atténue les perturbations qui dépendent du temps avec un certain paramètre d'atténuation $\gamma > 0$. Supposons que la perturbation h affectant le système (4.16) varie avec le temps. On obtient alors le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{f(t)g(x)}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k\varepsilon - k_1 \int_0^t \varepsilon(s,x) ds + h(t,x) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t,1) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

où $h \in L^2(0,\infty;\mathbf{W}_g)$ est une perturbation externe. Une condition supplémentaire sur le gain k du retour d'état proportionnel-intégral (4.15) est proposée de sorte que l'indice de performance suivant

$$\mathcal{J}_g = \int_0^\infty [\|\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} - \gamma^2 \|h(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)}] dt - \gamma^2 \|\varepsilon(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} < 0 \tag{4.18}$$

soit négatif pour les solutions de (4.17) avec des perturbations dépendant du temps $h \in L^2(0,\infty;\mathbf{W}_g)$ et un paramètre d'atténuation $\gamma > 0$.
On a le résultat suivant.

Théorème 4.4 ([42]) *On suppose que les conditions du théorème* (4.3) *sont satisfaites et que le gain proportionnel k du retour d'état* (4.15) *vérifie*

$$k > -\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2} + \frac{1}{2\gamma^2} + \gamma^2$$

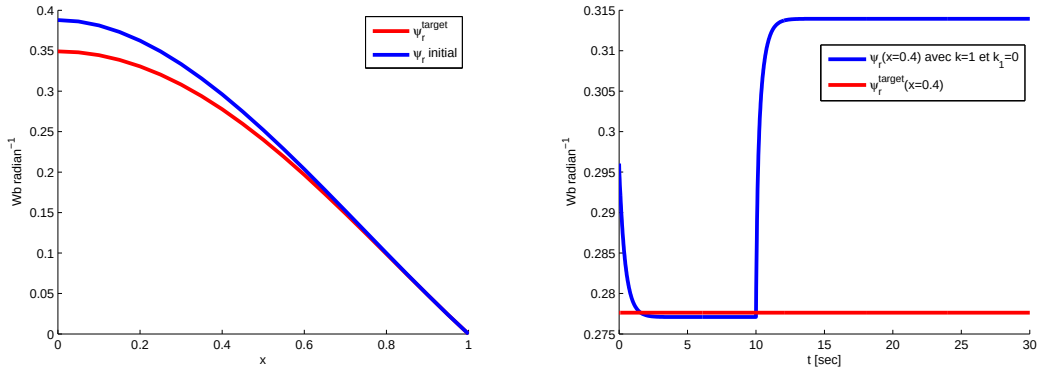
alors toute perturbation externe dépendant du temps $h \in L^2(0,\infty;\mathbf{W}_g)$ du système bouclé (4.17) *est atténuée au sens de* (4.18).

On démontre ce résultat en utilisant le lemme de Schur dans [16].

4.2.3 Simulation numérique de cas tests

Nous considérons le cas test pertinent où nous voulons contrôler l'évolution du flux magnétique ψ_r d'un état initial jusqu'à l'état final (voir la figure 4.1). Pour commencer, nous avons effectué une série de simulations de réponses indicielles en dimension infinie en réglant le gain proportionnel k et le gain intégral k_1 (voir les figures 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5).
Nous avons également vérifié l'effet d'incertitude du modèle par rapport à des perturbations h en ajoutant à $t = 10s$ sur le courant non inductif 20% du profil cible de courant.
Le comportement du système en boucle fermée est illustré par l'évolution en temps du flux magnétique ψ_r au point $x = 0.4$. Le comportement est similaire aux autres points.
Comme prévu à partir des résultats théoriques qui se trouvent dans les parties 4.2.1 et 4.2.2,

1. le système en boucle fermée est stable à condition que les relations du théorème 4.3 et théorème 4.4 soient satisfaites,



(a) Profil initial et cible de ψ_r

(b) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

FIGURE 4.1 – Profil initial et cible, et évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

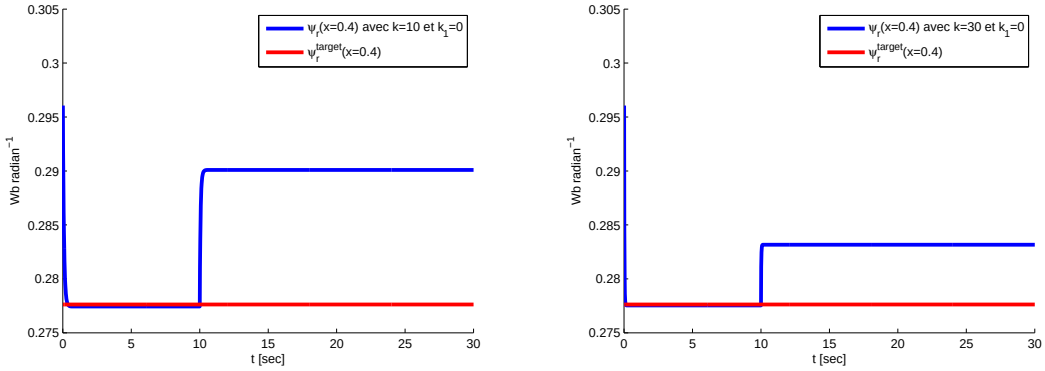


FIGURE 4.2 – Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$ avec $k = 10$ et $k = 30$ en fixant $k_1 = 0$

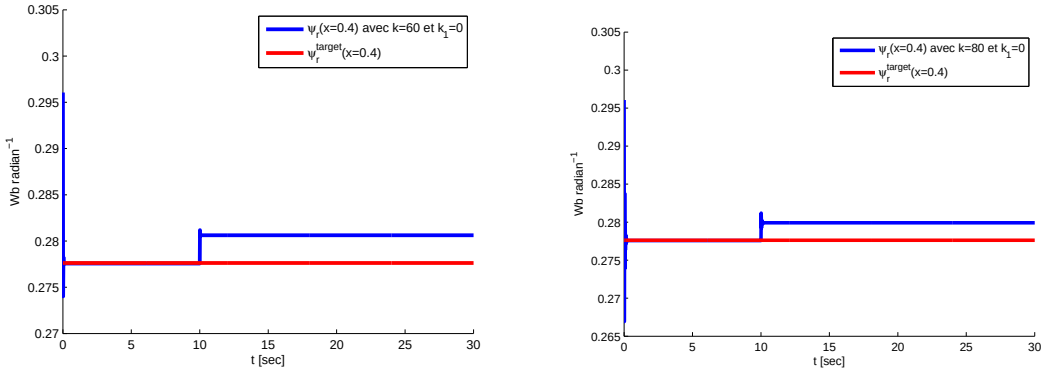


FIGURE 4.3 – Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$ avec $k = 60$ et $k = 80$ en fixant $k_1 = 0$

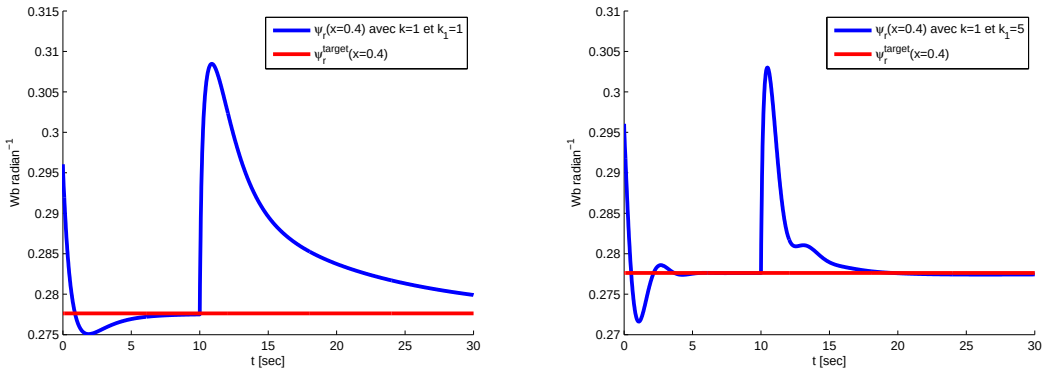


FIGURE 4.4 – Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$ avec $k_1 = 1$ et $k_1 = 5$ en fixant $k = 1$

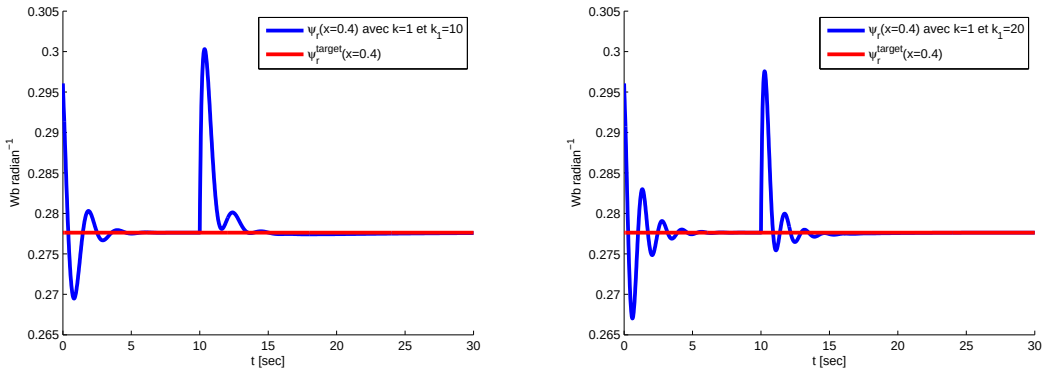


FIGURE 4.5 – Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$ avec $k_1 = 10$ et $k_1 = 20$ en fixant $k = 1$

2. dans le cas d'une action proportionnelle, l'erreur en régime permanent résultant d'une perturbation est d'autant plus petite que le gain proportionnel est grand,
3. le temps de réponse peut être réduit en utilisant un gain proportionnel plus grand mais cela risque de provoquer une grande imprécision,
4. le gain intégral permet d'annuler l'erreur en régime permanent résultant d'une perturbation statique de l'état d'équilibre.

Nous avons alors pu développer des simulations plus poussées faisant appel au simulateur METIS du *CEA* utilisé conjointement avec $Matlab/Simulink^{TM}$ pour simuler les décharges plasma dans le réacteur Tore Supra. Nous ne présentons pas ici ces résultats que le lecteur pourra trouver en détail dans [41]

4.3 Les équations de Schrödinger d'ordre supérieur

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus dans [21]. En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger est l'équation non relativiste fondamentale qui décrit comment la fonction d'onde d'un système physique quantique évolue au cours du temps. Elle a été publiée en 1926 par Erwin Schrödinger dans [127]. Cette équation a été étudiée en détail dans [6]. Puis l'équation quantique relativiste de Klein-Gordon fut développée par Oskar Klein et Walter Gordon dans [70, 46]. Cependant, cette équation n'est pas une équation de type Schrödinger car elle fait intervenir la dérivée seconde en temps. C'est l'équation de Dirac, formulée par Paul Dirac dans [30], qui fournit l'équation relativiste fondamentale de type Schrödinger. C'est une EDP matricielle de dimension quatre.
Nous montrons l'existence d'équations de type Schrödinger, provenant comme l'équation de Dirac de la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein, appelées équations de Schrödinger d'ordre supérieur. Chaque équation de Schrödinger d'ordre supérieur est une EDP unique de la forme Schrödinger, i.e. faisant intervenir le Laplacien et ayant un opérateur d'ordre supérieur [28, 60]. Ce n'est pas une équation d'onde relativiste car elle n'est pas invariante de Lorentz. Cependant, les équations de Schrödinger d'ordre supérieur convergent vers l'équation semi-relativiste et sont capables de prendre en compte des effets relativistes et leur précision qui peut être ajustée est donc plus grande que l'équation de Schrödinger. Elles peuvent se définir avec l'ajout d'un potentiel borné ou constant, mais pas harmonique. Elles peuvent être considérées comme une interpolation entre l'équation de Schrödinger et l'équation de Dirac valide dans le domaine semi-relativiste compris entre les domaines non relativiste et ultra-relativiste. L'équation semi-relativiste est étudiée dans [55, 56]. La racine carré qui fournit un opérateur pseudo-différentiel non local pose des difficultés en simulation en raison des conditions aux bords à définir sur un domaine borné contrairement aux équations de Schrödinger d'ordre supérieur.

4.3.1 Les différentes équations quantiques

La *relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein* est donnée par la formule

$$E = \gamma m \cdot c^2 \tag{4.19}$$

où E est l'énergie totale du corps,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

est le facteur de Lorentz avec $v^2 = \|\vec{v}\|^2$ le carré de la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ du corps, m la masse au repos du corps et c la vitesse de la lumière dans le vide [35].
Rappelons que l'énergie d'un système non relativiste est donnée par

$$E = V(t, \vec{r}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

où $V(t, \vec{r})$ est l'énergie potentielle avec $\vec{r} = (x, y, z)$ le vecteur position et $\mathbf{p} = \gamma m \vec{v}$ la quantité de mouvement. En utilisant le principe de correspondance entre le monde classique et le monde quantique donné dans [15]

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad \mathbf{p} \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = -i\hbar \vec{\nabla} \tag{4.20}$$

on obtient l'*équation de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \vec{r})}{\partial t} = V(t, \vec{r})\psi(t, \vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \vec{r}) \tag{4.21}$$

pour une particule se mouvant dans le potentiel $V(t, \vec{r})$, où $\Delta := \nabla^2$ est le Laplacien. La *fonction d'onde* $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ décrit l'évolution de l'état quantique dans l'espace et le temps. Dans ce qui suit ψ représente $\psi(t, \vec{r})$. Une *équation de type Schrödinger* est une équation

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \vec{r})}{\partial t} = H\psi(t, \vec{r})$$

où H est l'hamiltonien du système. Si $H = H(\Delta)$, alors on dit que l'équation (4.21) est une *équation de la forme Schrödinger*.
En utilisant l'égalité

$$\gamma^2 = \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1$$

et la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein (4.19), on obtient

$$E = \gamma m c^2 = m c^2 \sqrt{\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1}.$$

On a alors la relation suivante

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2. \tag{4.22}$$

Avec le principe de correspondance (4.20), on obtient l'*équation de Klein-Gordon*

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = m^2 c^4 \, \psi - \hbar^2 c^2 \Delta \psi. \tag{4.23}$$

L'équation (4.23) est d'ordre deux en le temps contrairement à l'équation de Schrödinger (4.21) et n'est pas une équation de type Schrödinger.
D'après (4.22), on a

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}, \tag{4.24}$$

et il vient

$$E = mc^2\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2} + 1}. \tag{4.25}$$

L'équation (4.24) conduit, avec le principe de correspondance (4.20), à l'*équation semi-relativiste*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \sqrt{-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4}\ \psi, \tag{4.26}$$

avec l'opérateur pseudo-différentiel $\sqrt{-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4}$ étudiée dans [79, Chapter 7] et [22]. L'équation semi-relativiste (4.26) avec un potentiel arbitraire dépendant de l'espace $V(\vec{r}) = V$ a été étudiée dans [55, 56, 83, 85, 84]. Cependant, son implémentation pose des problèmes importants en raison de l'opérateur pseudo-différentiel qui conduit à une infinité de conditions aux bords sur un domaine borné. C'est pourquoi cette équation est peu utilisée par les physiciens [47, 135].
Si on prend le développement en série de Taylor de (4.25)

$$E = mc^2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha(k)\frac{\mathbf{p}^{2k}}{m^{2k}c^{2k}}\right), \tag{4.27}$$

et le principe de correspondance (4.20), on obtient l'équation

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = mc^2\ \psi - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(k)\hbar^{2k}}{m^{2k-1}c^{2k-2}}\Delta^k\psi, \tag{4.28}$$

où

$$\alpha(k) = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!2^{2k-1}}. \tag{4.29}$$

Cette décomposition est évoquée par exemple dans [47, 82].

Proposition 4.5 ([21]) *Les équations* (4.27) *et* (4.28) *sont valides pour* $\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2} < 1$*, ce qui est équivalent à* $2v^2 < c^2$*.*

Cela signifie que l'équation (4.28) est équivalente à l'équation (4.26) lorsque la norme $||\vec{v}||$ de la particule étudiée vérifie

$$||\vec{v}|| < \frac{c}{\sqrt{2}} \approx 211\ 985\ 280\text{m.s}^{-1}. \tag{4.30}$$

L'équation (4.28) a un nombre infini de termes. Donc, un nombre infini d'opérateurs est nécessaire pour décrire l'évolution de la fonction d'onde ψ et cela conduit à une théorie non locale comme celle associée à l'équation semi-relativiste [135]. Cependant, on note que l'équation (4.28) est une équation de la forme Schrödinger avec un domaine de validité restreint.

On conserve alors uniquement les termes nécessaires de l'équation (4.28) pour atteindre une certaine précision dans un sens que nous allons définir et ceci en utilisant un développement limité.
Considérons l'approximation suivante

$$E_N = mc^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \alpha(k) \frac{\mathbf{p}^{2k}}{m^{2k} c^{2k}} \right) \tag{4.31}$$

de l'énergie (4.27) avec $N \geq 1$. En utilisant le principe de correspondance (4.20), on obtient l'équation de Schrödinger d'ordre supérieur

$$i\hbar \frac{\partial \psi_N}{\partial t} = mc^2 \, \psi_N - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha(k) \hbar^{2k}}{m^{2k-1} c^{2k-2}} \Delta^k \psi_N. \tag{4.32}$$

L'équation (4.32) a les avantages d'une équation de la forme Schrödinger sans les inconvénients de l'équation (4.28).
L'erreur $e_N = E - E_N$ entre l'expression réelle de l'énergie (4.27) et l'approximation (4.31) est donnée par

$$e_N = mc^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \alpha(k) \frac{\mathbf{p}^{2k}}{m^{2k} c^{2k}} \right).$$

Pour $\mathbf{p}^2 < m^2 c^2$, e_N correspond au reste d'une série alternée, ainsi

$$|e_N| \leq mc^2 \alpha(N+1) \frac{\mathbf{p}^{2N+2}}{m^{2N+2} c^{2N+2}} = mc^2 \alpha(N+1) \left(\frac{1}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \right)^{N+1}.$$

Avec l'hypothèse que $2v^2 < c^2$, on a $0 < \frac{1}{\frac{c^2}{v^2} - 1} < 1$. Comme $0 < mc^2 < 1$ pour les particules, on déduit $|e_N| \leq \alpha(N+1)$, ainsi on a le résultat suivant :

Proposition 4.6 ([21]) *On a*

$$\lim_{N \to \infty} |e_N| = 0$$

et plus précisément, la formule de Stirling conduit à

$$|e_N| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{3/2}} \right) \quad \textit{lorsque } N \to \infty.$$

Soit

$$\varepsilon_N := mc^2 \alpha(N+1) \frac{\mathbf{p}^{2N+2}}{m^{2N+2} c^{2N+2}} = mc^2 \alpha(N+1) \left(\frac{1}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \right)^{N+1}. \tag{4.33}$$

Dans ce qui suit, ε_N est appelée la *précision*. Cette précision concerne l'énergie des particules mais pas les solutions ψ et ψ_N des équations (4.28) et (4.32).

Exemple 4.7 *Considérons une particule libre de masse m. D'abord, conservons les deux premiers termes de l'équation* (4.32) *(i.e. $N = 1$). On obtient alors l'équation*

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = mc^2\psi_1 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_1. \tag{4.34}$$

On reconnaît l'équation de Schrödinger (4.21) *plus un terme additif $mc^2\psi_1$, où mc^2 est l'énergie au repos de la particule. La relation entre l'équation semi-relativiste* (4.26) *et l'équation* (4.34) *a déjà été soulevée dans [128]. Supposons que la particle ait une vitesse vérifiant $||\vec{v}|| = \frac{c}{100}$. La précision associée à l'équation* (4.34) *est*

$$\varepsilon_1 \approx \frac{1}{8}\cdot m\cdot 9\times 10^{16}\cdot 10^{-8} \approx 1.125\times 10^8 m.$$

Ensuite, en utilisant les trois premiers termes de l'équation (4.32) *(i.e. $N = 2$), on obtient l'équation de Schrödinger d'ordre 2*

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \left(mc^2 + V\right)\psi_2 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_2 - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\Delta^2\psi_2.$$

La précision associée à l'équation (4.34) *est donnée par*

$$\varepsilon_2 \approx \frac{1}{16}\cdot m\cdot 9\times 10^{16}\cdot 10^{-12} \approx 5.625\times 10^3 m.$$

Donc, en prenant en compte un terme supplémentaire dans l'équation (4.32)*, on augmente la précision* (4.33) *de 5 ordres de grandeur pour une particule ayant une vitesse de $||\vec{v}|| = \frac{c}{100}$. Lorsque la norme du vecteur vitesse se rapproche de $\frac{c}{\sqrt{2}}$, il est nécessaire de prendre en compte des termes d'ordre supérieur dans l'équation* (4.32) *pour conserver une précision suffisante. Donc, on peut régler la précision en choisissant un nombre N adapté de termes dans l'équation* (4.32)*. Cependant en pratique, il parait difficile d'aller au-delà de l'équation d'ordre 2. En effet, pour développer des simulations numériques sur un domaine borné, il faut fournir des conditions aux bords. L'ajout d'un bilaplacien lors de l'utilisation de l'équation de Schrödinger d'ordre 2 doublera le nombre de conditions aux bords qui sera alors égal à 4.*

4.3.2 Résolution des équations de Schrödinger d'ordre supérieur et convergence

Les résultats de cette section sont donnés dans $\mathbb{R}^n$, même si en pratique le cadre réel de la physique est défini pour $n = 3$.
Soit $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, considérons l'équation de Schrödinger généralisée

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + G(-\hbar^2\Delta)\psi = 0 \\ \psi(0,x) = \psi_0(x). \end{cases} \tag{4.35}$$

On a

$$\mathcal{F}\left(G(-\hbar^2\Delta)\psi\right)(p) = G(|p|^2)\widehat{\psi}(p).$$

L'idée principale avec l'introduction de la fonction G est de couvrir les trois cas suivants :

– l'équation de Schrödinger : $G(y) = -\frac{1}{2m}y$;
– l'équation semi-relativiste (4.26) : $G(y) = -\sqrt{c^2y + m^2c^4}$;
– les équations d'ordre supérieur (4.32) :

$$G(y) = -mc^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha(k)}{m^{2k-1}c^{2k-2}}(-y)^k.$$

En appliquant la transformée de Fourier à (4.35) par rapport à la variable d'espace, on obtient formellement une EDO du premier ordre en temps pour $\widehat{\psi}$

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t} + G(|p|^2)\widehat{\psi} = 0 \\ \widehat{\psi}(0,p) = \widehat{\psi}_0(p) \end{cases}$$

compte tenu de la proposition (1.18). On peut alors résoudre explicitement et on a

$$\widehat{\psi}(t,p) = \widehat{\psi}_0(p)e^{-itG(|p|^2)}. \tag{4.36}$$

Comme G est une fonction réelle, on a $|\widehat{\psi}(t,p)| = |\widehat{\psi}_0(p)|$ et on obtient d'après la proposition (1.18) le résultat suivant.

Proposition 4.8 ([21]) *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $\psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, le problème de Cauchy* (4.35) *a une solution unique $\psi \in C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^n))$, notée $\psi(t) = e^{-itG(-\hbar^2\Delta)}\psi_0$. Elle est donnée par* (4.36). *De plus on a*

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\psi_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi le propagateur $e^{-itG(-\hbar^2\Delta)}$ est unitaire sur chaque espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Considérons maintenant l'équation (4.32) en présence d'un potentiel externe V et en la réécrivant avec un nouvel indice pour simplifier les notations

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = V\psi - \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha(k)\hbar^{2k}}{m^{2k-1}c^{2k-2}}\Delta^k\psi \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases} \tag{4.37}$$

où on pose par convention $\alpha(0) = -1$. On va considérer dans la suite les deux cas suivants qui peuvent être résolus facilement : le cas où V est borné et le cas où V est linéaire par rapport à la position x. Ces cas incluent par exemple les particules dans des puits de potentiel borné, les neutrons dans un champ de gravitation et les électrons accélérés par un champ électrique.

Potentiel borné

En utilisant des arguments perturbatifs basés sur la formule de Duhamel, on peut montrer le résultat suivant en utilisant la proposition 4.8.

Proposition 4.9 ([21]) *Supposons que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors* (4.37) *a une unique solution $\psi \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$, et*

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si de plus, pour un certain $s \in \mathbb{N}$, $\partial^\alpha V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| \leq s$ et $\psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors on a $\psi \in C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^n))$.

Potentiel linéaire

Proposition 4.10 ([21]) *Supposons que V soit de la forme*

$$V(t,x) = \langle E(t), x\rangle = E_1(t)x_1 + \cdots + E_n(t)x_n,$$

pour $E \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. Si $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors (4.37) *a une unique solution $\psi \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$, et*

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Elle est donnée par sa transformée de Fourier

$$\widehat{\psi}(t,p) = \widehat{\psi}_0\left(p + \pi(t)\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \alpha(k)}{m^{2k-1}c^{2k-2}} \int_0^t |p + \pi(t) - \pi(s)|^{2k}\,\mathrm{d}s\right),$$

où $\pi(t) = \int_0^t E(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Potentiel harmonique

Supposons que $V(x) = \|x\|_n^2$. En prenant la transformée de Fourier dans (4.37), on déduit de la proposition (1.18), que $\widehat{\psi}$ est solution de

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t} = -\Delta\widehat{\psi} - \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha(k)}{m^{2k-1}c^{2k-2}}(-|p|^2)^k\widehat{\psi} \\ \widehat{\psi}(0,p) = \widehat{\psi}_0(p) \end{cases} \tag{4.38}$$

où Δ est le Laplacien par rapport à la variable p. L'équation (4.38) est de la forme $i\hbar\partial_t\widehat{\psi} = H\widehat{\psi}$, où

$$H = -\Delta - \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha(k)}{m^{2k-1}c^{2k-2}}(-|p|^2)^k.$$

Dans le cas $N = 2$, l'opérateur devient

$$H = -\Delta + mc^2 + \frac{|p|^2}{2m} - \frac{|p|^4}{8m^3c^2}$$

d'après (4.29). On sait alors que H n'est pas un opérateur essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, voir par exemple [34]. Aussi, il semble difficile de donner un sens aux solutions de (4.37) lorsque V est un potentiel harmonique car seuls les opérateurs auto-adjoints ont un sens en mécanique quantique.

Convergence de l'approximation

Nous étudions maintenant la convergence de ψ_N solution de (4.32) vers ψ solution de l'équation semi-relativiste (4.26), lorsque N tend vers l'infini.

Théorème 4.11 ([21]) *Soit* $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Supposons que* $\widehat{\psi_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\widehat{\psi_0}(p) = 0$ *si* $\left|\frac{p}{mc}\right| > 1$ *et que* $\psi|_{t=0} = \psi_N|_{t=0} = \psi_0$. *Alors on a* $\psi_N \to \psi$ *lorsque* $N \to \infty$, *dans le sens suivant : pour tout* $T > 0$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\psi(t,\cdot) - \psi_N(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{2T}{\hbar} mc^2 \alpha(N+1) \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut noter que l'hypothèse du théorème 4.11 est la même que celle de la proposition 4.5, ceci en raison des relations entre la quantité de mouvement **p** et la variable de Fourier p données par le principe de correspondance (4.20). Cela signifie que les équations de Schrödinger d'ordre supérieur convergent vers l'équation semi-relativiste pour les particules dont le vecteur vitesse vérifie (4.30).
On peut facilement généraliser les résultats de cette partie au cas de N particules indépendantes dans un champ de potentiel. On a aussi montré dans [20] que les équations de Schrödinger d'ordre supérieur sont bien définies avec un potentiel coulombien et pour toutes les particules, pas seulement celles dont le vecteur vitesse est inférieur à $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

4.4 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre les résultats que nous avons obtenus sur les EDPs, d'abord sur le contrôle du flux magnétique dans les plasmas de tokamak et ensuite sur les équations de Schrödinger d'ordre supérieur. Le contrôle des EDPs est devenu un des enjeux majeurs de l'automatique d'aujourd'hui, que ce soit pour les EDPs classiques ou pour les EDPs quantiques.

Perspectives

Pour poursuivre le travail présenté dans ce mémoire, je développe actuellement deux axes de recherche. Le premier concerne le contrôle des réseaux sans fils et le second le contrôle des systèmes de dimension infinie.

Le contrôle des réseaux sans fils

Le contrôle des réseaux de télécommunication est devenu un enjeu très important pour l'automatique [5, 125]. Depuis mon arrivée dans l'équipe *SYStèmes de COMmunications (SYSCOM)* du département *Xlim-SIC* qui travaille notamment sur les stratégies d'optimisation des transmissions radios dans les réseaux sans fil, nous avons lancé une nouvelle thématique de recherche sur le contrôle de la puissance des réseaux sans fils avec Patrick Coirault du *Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes (LIAS)* de Poitiers. J'encadre actuellement un doctorant avec Patrick Coirault sur le contrôle de la puissance pour les réseaux cellulaires et les réseaux de capteurs. La caractéristique principale de ces systèmes dynamiques est qu'ils sont discrets et qu'il existe une contrainte sur l'état qui est un indicateur de la qualité de la transmission de l'information appelé SINR. La théorie de Lyapunov est aujourd'hui bien développée pour les systèmes discrets ; en revanche la construction d'un retour d'état avec une contrainte sur l'état pose des difficultés majeures. Nous avons pris le parti, pour des raisons pratiques liées à la taille du système qui peut être très grande, de développer des retours d'état non linéaires avec une barrière de potentiel virtuel et les premiers résultats sont encourageants.

Le contrôle des réseaux mobiles communiquant via des systèmes de télécommunication sans fils, aussi appelé *réseaux mobiles ad hoc (MANET)*, est aussi un problème d'actualité [91]. Après un travail collaboratif avec Franck Plestan de l'*Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes* sur la construction d'un retour de sortie pour un système échantillonné basé sur la technique des modes glissants d'ordre deux [117], nous encadrons un doctorant travaillant sur la stabilisation robuste d'engins volants de type quadrirotor. Pour contrôler ce type de systèmes, il faut prendre en compte la transmission sans fil entre l'opérateur et le quadrirotor qui implique des retards variables dus à la retransmission de l'information lorsque celle-ci est dégradée. Un projet d'ampleur entre Airbus et le département *SIC* du laboratoire *Xlim* est aussi en cours de montage sur l'usine du futur. Ce projet inclura la localisation et le contrôle de réseaux mobiles d'agents, en particulier des humains et des robots communiquant via des systèmes de télécommunication sans fils, dont la qualité du lien radio doit être assurée. De manière générale,

on observe qu'il faut associer au sein des réseaux mobiles des systèmes liés au déplacement et des systèmes liés à la communication sans fils. Ceci induira des contraintes quant à la topologie des déplacements devant assurer la qualité du lien radio.

Le contrôle des systèmes de dimension infinie

Le contrôle des systèmes de dimension infinie est un enjeu majeur pour résoudre des problèmes importants qui se posent à l'heure actuelle dans nos sociétés.

Le contrôle du flux magnétique dans les plasmas de tokamak fait partie de ces problèmes dont l'enjeu est important afin de parvenir à la fusion thermonucléaire pour la production d'énergie. Dans le but d'améliorer encore le contrôle, nous allons devoir prendre en compte la seconde équation du transport de la chaleur. C'est une EDP non linéaire dont il va falloir identifier en ligne un paramètre physique mal connu. Cette seconde EDP du transport de la chaleur est couplée à l'EDP du flux magnétique. Nous allons devoir reposer le problème de contrôle et trouver de nouveaux retours d'état prenant en compte tous les moyens d'action dont disposent les physiciens. Ce projet est appelé à se continuer de nombreuses années puisque le projet *ITER*, en construction à proximité de Cadarache et qui a pour ambition de montrer la faisabilité d'un réacteur nucléaire utilisant le principe de la fusion, ne devrait commencer à fonctionner qu'à partir des années 2020.

Concernant les équations de Schrödinger d'ordre supérieur, nous avons montré leur existence dans le cas des potentiels coulombiens et nous avons aussi dévelopé les équations d'Hartree-Fock d'ordre supérieur pour les systèmes avec un grand nombre de particules en interaction [20]. Nous ne pouvons pas encore évaluer la portée applicative de ces équations semi-relativistes, mais nous sommes actuellement en train de travailler sur leurs simulations afin de pouvoir évaluer leurs performances. Par ailleurs, on peut espérer que les techniques de stabilisation de l'équation de Schrödinger s'étendront aux équations de Schrödinger d'ordre supérieur et permettront de traiter de manière plus précise le contrôle de certains systèmes quantiques.

Enfin, je travaille sur le contrôle des systèmes multidimensionnels qui sont une spécialité du *LIAS* de Poitiers. Nous avons étudié la stabilité de ces systèmes dans le cas discret [140] et nous souhaitons désormais regarder le cas continu qui fait partie des systèmes de dimension infinie et a un lien très étroit avec certaines EDPs hyperboliques.

Bibliographie

[1] R. ABRAHAM et J. E. MARSDEN : *Foundations of Mechanics*. American Mathematical Society, 2008.

[2] V. ANDRIEU, L. PRALY et A. ASTOLFI : Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008.

[3] Z. ARTSTEIN : Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 7(11):1163–1173, 1983.

[4] A. AZEMI et E. E. YAZ : Sliding-mode adaptive observer approach to chaotic synchronization. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122(4):758–765, 2000.

[5] A. BEMPORAD, M. HEEMELS et M. JOHANSSON : *Networked control systems*, vol. 406 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2010.

[6] F. A. BEREZIN et M. A. SHUBIN : *The Schrödinger equation*, vol. 66 de *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[7] E. BERNUAU, W. PERRUQUETTI et E. MOULAY : Retraction obstruction to time-varying stabilization. *Automatica*, 49(6):1941–1943, 2013.

[8] G. BESANÇON : *Nonlinear Observers and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, New-York / Berlin, 2007.

[9] S. P. BHAT et D. S. BERNSTEIN : Finite-time stability of homogeneous systems. *In Proceedinds of the American Control Conference*, p. 2513–2514, Albuquerque, USA, 1997.

[10] S. P. BHAT et D. S. BERNSTEIN : Finite time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000.

[11] S. P. BHAT et D. S. BERNSTEIN : A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *Systems & Control Letters*, 39(1):63–70, 2000.

[12] S. P. BHAT et D. S. BERNSTEIN : Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17(2):101–127, 2005.

[13] N. P. BHATIA et O. HAJEK : *Local semi-dynamical systems*, vol. 90 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1969.

[14] N. P. BHATIA et G. P. SZEGŐ : *Stability Theory of Dynamical Systems*. Springer, 2002.

[15] N. BOHR : *The Correspondence Principle (1918 - 1923)*. Elsevier, 1976.

[16] S. BOYD, L. E. GHAOUI, E. FERON et V. BALAKRISHNAN : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, vol. 15 de *Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial & Applied Mathematics, 1987.

[17] E. BREDON : *Topology and Geometry*, vol. 139. Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Spinger, 1993.

[18] F. BRIBIESCA ARGOMEDO, C. PRIEUR, E. WITRANT et S. BRÉMOND : A strict control Lyapunov function for a diffusion equation with time-varying distributed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(2):290–303, 2013.

[19] R. W. BROCKETT : Asymptotic stability and feedback stabilization. *In Differential Geometric Control Theory*, p. 181–191. Birkhäuser, Boston, 1983.

[20] R. CARLES et E. MOULAY : Higher order Schrödinger and Hartree-Fock equations. arXiv :1305.4880.

[21] R. CARLES et E. MOULAY : Higher order Schrödinger equations. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(39):395304, 2012.

[22] Y. CHO et T. OZAWA : On the semirelativistic Hartree-type equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 38(4):1060–1074, 2006.

[23] B. CORNET et M. CZARNECKIB : Existence of generalized equilibria. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 44(5):555–574, 2001.

[24] J. M. CORON : A necessary condition for feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, 14(3):227–232, 1990.

[25] J. M. CORON : Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 5(3):295–312, 1992.

[26] J. M. CORON : *Control and Nonlinearity*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2007.

[27] J. M. CORON et L. PRALY : Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems & Control Letters*, 17(2):89–104, 1991.

[28] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON : *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1987.

[29] W. P. DAYAWANSA et B. HO-MOCK-QAI : Topological obstructions to simultaneous stabilization. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 1196–1201, Phoenix, Arizona, USA, 1999.

[30] P. A. M. DIRAC : The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A*, 117(778):610–624, 1928.

[31] D. DONG et I. R. PETERSEN : Quantum control theory and applications : A survey. *IET Control Theory & Applications*, 4(12):2651–2671, 2010.

[32] S. V. DRAKUNOV et V. I. UTKIN : Sliding mode observers. tutorial. *In 34th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 3376–3378, 1995.

[33] C. DU et L. XIE : *H_∞ Control and Filtering of Two-dimensional Systems*, vol. 278 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2002.

[34] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ : *Linear operators. Part II : Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*. John Wiley & Sons, 1963.

[35] A. EINSTEIN : Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig ? *Annalen der Physik*, 323(13):639–641, 1905.

[36] S. ELAYDI : *An introduction to difference equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.

[37] R. ENGEL et G. KREISSELMEIER : A continuous-time observer which converges in finite time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1202–1204, 2002.

[38] A. FRADKOV, H. NIJMEIJER et A. MARKOV : Adaptive observer-based synchronization for communication. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(12):2807–2813, 2000.

[39] E. FRIDMAN et Y. ORLOV : An LMI approach to H_∞ boundary control of semilinear parabolic and hyperbolic systems. *Automatica*, 45(9):2060–2066, 2009.

[40] J. P. GAUTHIER, H. HAMMOURI et S. OTHMAN : A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880, 1992.

[41] O. GAYE : *Contrôle du profil de facteur de sécurité dans les plasmas de tokamak en dimension infinie*. Thèse de doctorat, Université d'Angers, 2012.

[42] O. GAYE, L. AUTRIQUE, Y. ORLOV, E. MOULAY, S. BRÉMOND et R. NOUAILLETAS : H_∞ stabilization of the current profile in tokamak plasmas via LMI approach. *Automatica*, 49(9):2795–2804, 2013.

[43] O. GAYE, E. MOULAY, S. BRÉMOND, L. AUTRIQUE, R. NOUAILLETAS et Y. ORLOV : Sliding mode stabilization of the current profile in tokamak plasmas. *In Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2638–2643, Orlando, Florida, USA, 2011.

[44] O. GAYE, E. MOULAY, S. BRÉMOND, L. AUTRIQUE, R. NOUAILLETAS, J. F. ARTAUD et Y.ORLOV : Robust stabilization of the current profile in tokamak plasmas using sliding mode approach in infinite dimension. *Control Engineering Practice*, 21(10):1350–1358, 2013.

[45] D. GOELEVEN et B. BROGLIATO : Necessary conditions of asymptotic stability for unilateral dynamical systems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 61(6):961–1004, 2005.

[46] W. GORDON : Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 40(1-2):117–133, 1926.

[47] F. GROSS : *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[48] L. GRÜNE : Homogeneous state feedback stabilization of homogeneous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4):1288–1314, 2000.

[49] V. GUILLEMIN et A. POLLACK : *Differential topology*. American Mathematical Society, 2010.

[50] W. M. HADDAD et V. CHELLABOINA : *Nonlinear dynamical systems and control : A Lyapunov based approach*. Princeton University Press, 2007.

[51] W. HAHN : *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. Prentice-Hall inc., 1963. N.J.

[52] W. HAHN : *Stability of Motion*, vol. 138 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, New York, 1967.

[53] V. T. HAIMO : Finite time controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4):760–770, 1986.

[54] J. K. HALE et S. M. V. LUNEL : *Introduction to Functional Differential Equations*, vol. 99. Springer, 1993.

[55] R. L. HALL et W. LUCHA : Schrödinger upper bounds to semirelativistic eigenvalues. *Journal of Physics. A*, 38(37):7997–8002, 2005.

[56] R. L. HALL et W. LUCHA : Schrödinger secant lower bounds to semirelativistic eigenvalues. *International Journal of Modern Physics A*, 22(10):1899–1904, 2007.

[57] H. HAMMOURI, B. TARGUI et F. ARMANET : High gain observer based on a triangular structure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(6):497–518, 2002.

[58] I. HASKARA, U. OZGUNER et V. UTKIN : On sliding mode observers via equivalent control approach. *International Journal of Control*, 71(6):1051–1067, 1998.

[59] A. HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[60] B. HELFFER : *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, vol. 1336 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1988.

[61] D. HENRY : *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, vol. 840 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1981.

[62] H. HERMES : Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. *SIAM Review*, 33(2):238–264, 1991.

[63] Y. HONG, J. HUANG et Y. XU : On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(2):305–309, 2001.

[64] S. T. HU : *Theory of retracts*. Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[65] A. ISIDORI : *Nonlinear control systems*. Communications and Control Engineering. Springer, 1995.

[66] R. E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1):35–45, 1960.

[67] M. KAWSKI : Homogeneous stabilizing feedback laws. *Control Theory and Advanced Technology*, 6(4):497–516, 1990.

[68] M. KAWSKI : *Homogeneous feedback stabilization, in "New Trends in Systems Theory"*, vol. 7. Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, 1991.

[69] H. K. KHALIL : *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third édn, 2002.

[70] O. KLEIN : Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 37(12):895–906, 1926.

[71] V. KOMORNIK et P. LORETI : *Fourier series in control theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2005.

[72] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ et P. ZABREĬKO : *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, vol. 263 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1984.

[73] N. N. KRASOVSKY : *Stability of motion : applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*. Stanford university press, 1963.

[74] A. J. KRENER et A. ISIDORI : Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1):47 – 52, 1983.

[75] A. J. KRENER et W. RESPONDEK : Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2):197–216, 1985.

[76] J. KURZWEIL : On the inversion of Liapunov's second theorem on stability of motion. *American Mathematical Society Translations*, 24:19–77, 1963.

[77] J. LI et C. QIAN : Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):879–884, 2006.

[78] J. LI, C. QIAN et M. FRYE : A dual observer design for global output feedback stabilization of nonlinear systems with low-order and high-order nonlinearities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16(15):1697–1720, 2008.

[79] E. H. LIEB et M. LOSS : *Analysis*, vol. 14 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, second édn, 2001.

[80] N. LLOYD : A survey of degree theory : Basis and development. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30(8):607–616, 1983.

[81] D. LÓPEZ-MANCILLA, C. CRUZ-HERNÁNDEZ et C. POSADAS-CASTILLO : A modified chaos-based communication scheme using hamiltonian forms and observer. *Journal of Physics : Conference Series*, 23:267–275, 2005.

[82] W. LUCHA et F. F. SCHÖBERL : Semi-relativistic hamiltonians of apparently nonrelativistic form. *Physical Review A*, 51(6):4419–4426, 1995.

[83] W. LUCHA et F. F. SCHÖBERL : Spinless Salpeter equation : Analytic results. *In 11th International Conference on Problems of Quantum Field Theory*, Dubna, Russia, 1998.

[84] W. LUCHA et F. F. SCHÖBERL : Bound states by the spinless Salpeter equation. *Fizika B*, 8(1):193–206, 1999.

[85] W. LUCHA et F. F. SCHÖBERL : Semirelativistic treatment of bound states. *International Journal of Modern Physics A*, 14(15):2309–2333, 1999.

[86] D. G. LUENBERGER : Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80, 1964.

[87] A. M. LYAPUNOV : Stability of motion : General problem. *International Journal of Control*, 55(3):520–790, march 1992.

[88] A. MANSOURI : Local asymptotic feedback stabilization to a submanifold : Topological conditions. *Systems & Control Letters*, 56(7-8):525–528, 2007.

[89] S. MASCOLO et G. GRASSI : Controlling chaos via backstepping design. *Physical Review E*, 56(5):6166–6169, 1997.

[90] C. G. MAYHEW et A. R. TEEL : On the topological structure of attraction basins for differential inclusions. *Systems & Control Letters*, 60(12):1045–1050, 2011.

[91] S. K. MAZUMDER : *Wireless networking based control*. Springer, 2011.

[92] T. MÉNARD, E. MOULAY et W. PERRUQUETTI : A global high-gain finite-time observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6):1500–1506, 2010.

[93] T. MÉNARD, E. MOULAY et W. PERRUQUETTI : Homogeneous approximations and local observer design. *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*, 19(3):906–929, 2013.

[94] P. H. MENOLD, R. FINDEISEN et F. ALLGÖWER : Finite-time convergent observers for linear time varying systems. *In* 11th *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2003.

[95] P. H. MENOLD, R. FINDEISEN et F. ALLGÖWER : Finite time convergent observers for nonlinear systems. *In Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 6, p. 5673–5678, 2003.

[96] M. MIRRAHIMI, P. ROUCHON et G. TURINICI : Lyapunov control of bilinear Schrödinger equations. *Automatica*, 41(11):1987–1994, 2005.

[97] E. MOULAY : *Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lille, 2005.

[98] E. MOULAY : Stabilization via homogeneous feedback controls. *Automatica*, 44(11): 2981–2984, 2008.

[99] E. MOULAY : Stability and stabilization of homogeneous systems depending on a parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6):1382–1385, 2009.

[100] E. MOULAY et S. P. BHAT : Topological properties of asymptotically stable sets. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 73(4):1093–1097, 2010.

[101] E. MOULAY et Q. HUI : Conley index condition for asymptotic stability. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 74(13):4503–4510, 2011.

[102] E. MOULAY et W. PERRUQUETTI : Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2):1430–1443, 2006.

[103] E. MOULAY et W. PERRUQUETTI : Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems. *International Journal of Control*, 81(5):797–803, 2008.

[104] J. MUNKRES : *Topology*. Prentice Hall, second édn, 2000.

[105] H. NAKAMURA, Y. YAMASHITA et H. NISHITANI : Minimum projection method for nonsmooth control Lyapunov function design on general manifolds. *System & Control Letters*, 58:716–723, 2009.

[106] H. NIJMEIJER et I. M. Y. MAREELS : An observer looks at synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 44(10):882–890, 1997.

[107] Y. ORLOV : Discontinuous unit feedback control of uncertain infinite-dimensional systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2):834–843, 2000.

[108] R. ORSI, L. PRALY et I. MAREELS : Necessary conditions for stability and attractivity of continuous systems. *International Journal of Control*, 76(11):1070–1077, 2003.

[109] R. ORTEGA : Some applications of the topological degree to stability theory. *In Topological Methods in Differential Equations and Inclusions*. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[110] R. ORTEGA : A criterion for asymptotic stability based on topological degree. *In Proceedings of the first World Congress of Nonlinear Analysts, Walter de Gruyter*, p. 383–394, Tampa, Florida, USA, 1996.

[111] Y. OU, C. XU, E. SCHUSTER, J. R. FERRON, T. C. LUCE, M. L. .WALKER et D. A. HUMPHREYS : Receding-horizon optimal control of the current profile evolution during the ramp-up phase of a tokamak discharge. *Control Engineering Practice*, 19(1):22–31, 2011.

[112] Y. OU, C. XU, E. SCHUSTER, T. C. LUCE, J. R. FERRON, M. L. WALKER et D. A. HUMPHREYS : Optimal tracking control of current profile in tokamaks. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 19(2):432–441, 2011.

[113] L. M. PECORA et T. L. CARROLL : Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8):821–824, 1990.

[114] W. PERRUQUETTI et J. P. BARBOT : *Chaos in automatic control*, vol. 18. CRC Press, Taylor & Francis, 2006.

[115] W. PERRUQUETTI, T. FLOQUET et E. MOULAY : Finite-time observers : Application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(1):356–360, 2008.

[116] F. PLESTAN, J. W. GRIZZLE, E. R. WESTERVELT et G. ABBA : Stable walking of a 7-DOF biped robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(4):653–668, 2003.

[117] F. PLESTAN, E. MOULAY, A. GLUMINEAU et T. CHEVIRON : Robust output feedback sampling control based on second-order sliding mode. *Automatica*, 46(6):1096–1100, 2010.

[118] J. B. POMET : Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *System & Control Letters*, 18(2):147–158, 1992.

[119] C. QIAN et J. LI : Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6):885–890, 2005.

[120] J. RAUCH : *Partial Differential Equations*, vol. 128 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1991.

[121] L. ROSIER : Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letter*, 19(6):467–473, 1992.

[122] L. ROSIER : *Étude de Quelques Problèmes de Stabilisation*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1993.

[123] L. ROTHSCHILD et E. STEIN : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Mathematica*, 137(1):247–320, 1976.

[124] E. P. RYAN : On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32(6):1597–1604, 1994.

[125] J. SARANGAPANI : *Wireless ad hoc and sensor networks : protocols, performance, and control*. Automation and Control Engineering. CRC Press, 2007.

[126] F. SAUVAGE, M. GUAY et D. DOCHAIN : Design of a nonlinear finite-time converging observer for a class of nonlinear systems. *Journal of Control Science and Engineering*, 2007.

[127] E. SCHRÖDINGER : Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 385(13): 361–376, 1926.

[128] I. SEGAL : Space-time decay for solutions of wave equations. *Advances in Mathematics*, 22(3):305–311, 1976.

[129] R. SEPULCHRE et D. AEYELS : Stabilizability does not imply homogeneous stabilizability for controllable systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(5):1798–1813, 1996.

[130] Y. SHEN et Y. HUANG : Uniformly observable and globally lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(11):2621 –2625, 2009.

[131] Y. SHEN et X. XIA : Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 44(12):3152–3156, 2008.

[132] H. SIRA-RAMÍREZ et M. FLIESS : An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(2): 295–309, 2006.

[133] E. D. SONTAG : A universal construction of Arststein's theorem on nonlinear stabilization. *System & Control Letters*, 13(2):117–123, 1989.

[134] E. D. SONTAG : *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*, vol. 6 de *Textbooks in Applied Mathematics*. Springer, New-York, 1998.

[135] A. WACHTER : *Relativistic Quantum Mechanics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, 2012.

[136] F. W. WILSON : Smoothing derivatives of functions and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, p. 413–428, 1969.

[137] E. WITRANT, E. JOFRIAN, S. BRÉMOND, G. GIRUZZI, D. MAZON, O. BRANA et P. MOREAU : A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 49(7):1075–1105, 2007.

[138] X. XIA et W. GAO : Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(1):199–216, 1989.

[139] C. XU, O. YONGSHENG et E. SHUSTER : Sequential linear quadratic control of bilinear parabolic PDEs based on POD model reduction. *Automatica*, 47(2):418–426, 2011.

[140] N. YEGANEFAR, N. YEGANEFAR, M. GHAMGUI et E. MOULAY : Lyapunov theory for 2-d nonlinear Roesser models : application to asymptotic and exponential stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5):1299–1304, 2013.

[141] J. ZABCZYK : Some comments on stabilizability. *Applied Mathematics and Optimization*, 19(1):1–9, 1989.

[142] V. I. ZUBOV : *Methods of A. M. Lyapunov and their Application*. Noordhoff, 1964. Translated from a publication of the Publishing House of Leningrad University. 1957.