



**HAL**  
open science

# Sur la polynomialité de certaines algèbres d'invariants d'algèbres de Lie.

Florence Fauquant-Millet

► **To cite this version:**

Florence Fauquant-Millet. Sur la polynomialité de certaines algèbres d'invariants d'algèbres de Lie.. Anneaux et algèbres [math.RA]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2014. tel-00994655

**HAL Id: tel-00994655**

**<https://theses.hal.science/tel-00994655>**

Submitted on 21 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : MATHÉMATIQUES

**Florence FAUQUANT-MILLET**

Université Jean Monnet, Saint-Etienne

TITRE :

## *Sur la polynomialité de certaines algèbres d'invariants d'algèbres de Lie.*

*Habilitation à diriger des recherches*  
soutenue le 13 mai 2014 devant le jury composé de :

- Jacques ALEV
- Roland BERGER
- Michel BRION, rapporteur
- Corrado DE CONCINI, rapporteur
- Stéphane GAUSSENT, tuteur
- Anthony JOSEPH
- Rupert W.T. YU, rapporteur

---

Florence FAUQUANT-MILLET  
Institut Camille Jordan, UMR 5208, Université de Lyon,  
Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Jean Monnet,  
23, rue du Dr Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cédex 02,  
e-mail : millet@univ-st-etienne.fr  
tél : 0477481526. fax : 0477481580.



# Introduction.

Les algèbres de Lie (dues à Sophus Lie - 1842 - 1899) sont des algèbres non associatives (munies d'un crochet dit de Lie, vérifiant certains axiomes bien précis) qui interviennent non seulement en mathématiques (où elles mettent en oeuvre à la fois de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie) mais aussi dans différentes branches de la physique ou de la chimie.

Parmi elles, les algèbres de Lie simples (ou semi-simples, c'est-à-dire somme d'algèbres de Lie simples) sont particulièrement intéressantes : sur  $\mathbb{C}$  ou sur  $\mathbb{R}$ , elles ont été toutes classifiées par E. Cartan et W. Killing vers 1890.

Les algèbres de Lie simples donnent lieu à des systèmes de racines, ce qui permet une étude combinatoire de telles algèbres.

Mais les algèbres de Lie simples ont également, grâce à leur groupe adjoint, des propriétés géométriques remarquables. Ainsi on peut utiliser des méthodes de géométrie algébrique pour mieux étudier ces algèbres de Lie simples ( voir par exemple [42] où B. Kostant a démontré un théorème de "séparation des variables" par des arguments de géométrie algébrique).

Enfin certaines sous-algèbres de Lie d'algèbres de Lie semi-simples jouent un rôle prépondérant, comme les sous-algèbres paraboliques ou même biparaboliques (Chap. I, Sect. B, Par. 1).

Sans être réductives (c'est-à-dire sans être, au centre près, isomorphes à une algèbre de Lie semi-simple), ces algèbres paraboliques ou biparaboliques ont un comportement qui peut rester "proche" de celui des algèbres réductives, tout en offrant une richesse supplémentaire dans l'étude des algèbres de Lie.

Par exemple d'après C. Chevalley la sous-algèbre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  semi-simple sur  $\mathbb{C}$ , formée des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{g}^*$  invariantes par l'action du groupe adjoint  $\mathbf{G}$  de  $\mathfrak{g}$ , est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de polynômes. Ainsi on peut se demander s'il en est de même pour une sous-algèbre de Lie parabolique ou biparabolique (tronquée) d'une algèbre de Lie semi-simple (voir Chap. IV).

De plus Kostant a calculé les degrés des générateurs homogènes de l'algèbre d'invariants  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  (toujours pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple sur  $\mathbb{C}$ ) en fonction des valeurs propres d'un

élément semi-simple  $h$  d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal  $(x, h, y)$  agissant sur le centralisateur  $\mathfrak{g}^y$  de  $y$  dans  $\mathfrak{g}$  ([41] ou [16, Chap. 8]). Cela donne le résultat remarquable (dû toujours à Kostant, [42]) selon lequel, en identifiant  $\mathfrak{g}^*$  avec  $\mathfrak{g}$  grâce à la forme de Killing, l'application de restriction induit un isomorphisme d'algèbres entre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  et l'algèbre des fonctions régulières sur  $x + \mathfrak{g}^y$ . D'ailleurs ce résultat a une interprétation géométrique intéressante en termes de "tranche" ou de "section de Weierstrass" (voir Chap. VI, Section A, Par. 1). Plus précisément  $x + \mathfrak{g}^y$  est une tranche ou section de Weierstrass (dite ici de *Kostant*) pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{g}^*$ . Ces sections de Weierstrass permettent une "linéarisation" des générateurs d'une algèbre d'invariants et donc une meilleure compréhension de ces générateurs.

On peut se demander si tous ces résultats peuvent ou non se généraliser aux algèbres de Lie paraboliques ou biparaboliques.

C'est ce qui a été fait en partie, du moins pour les sous-algèbres biparaboliques d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  de type  $A_n$  : A. Joseph a en effet montré que des sections de Weierstrass existent toujours pour de telles sous-algèbres. Plus précisément il a construit ce qu'il a appelé des "paires adaptées" (voir Chap. VI, Section A, Par. 2 pour une définition précise) qui fournissent ensuite, sous certaines conditions, des sections de Weierstrass. Ces paires adaptées sont en quelque sorte l'analogue, pour une algèbre de Lie non réductive, d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal. Notons que, si  $(x, h, y)$  est un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal de Kostant, le couple  $(h, x)$  est une paire adaptée pour  $\mathfrak{g}$  car  $(adh)(x) = -x$  et  $x$  est régulier dans  $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ .

Lorsqu'une paire adaptée existe, Joseph a d'ailleurs aussi montré un résultat analogue à celui de Kostant pour les degrés des générateurs de l'algèbre des invariants du biparabolique (tronqué) associé, lorsqu'on sait que cette algèbre d'invariants est une algèbre de polynômes (voir [40, Cor. 2.3] ou 2.4 de la Sec. A du Chap. VI).

Ainsi la connaissance de la polynomialité ou non de certaines algèbres d'invariants d'algèbres de Lie est-elle un problème crucial en théorie des invariants.

La recherche d'invariants dans des algèbres de Lie et la description précise de ces invariants sont un aspect important de la Théorie des Invariants et de la Théorie des Groupes de Lie, qui intéresse non seulement des mathématiciens dans le monde entier et ceci depuis plus d'un siècle, mais également des physiciens (voir par exemple [4], [5], [23] ou [54] ... où des descriptions d'opérateurs de Casimir, c'est-à-dire d'invariants dans des algèbres de Lie, sont données explicitement). Le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie joue un rôle important en théorie des représentations des algèbres de Lie, en particulier l'isomorphisme de Duflo entre ce centre et le centre de Poisson de l'algèbre symétrique.

L'essentiel de mon travail est consacré à l'étude de la polynomialité de l'algèbre des invariants de sous-algèbres (bi)paraboliques tronquées d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ , sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Signalons d'ailleurs que, pour une sous-algèbre biparabolique donnée, l'algèbre des invariants du tronqué associé est égal au semi-centre associé à cette sous-algèbre biparabolique.

Mon mémoire d'habilitation se décompose de la façon suivante.

– Le premier chapitre expose les notions préliminaires utiles pour la suite : j'y donne

les définitions d'une sous-algèbre de Lie (bi)parabolique, du semi-centre, de la troncation canonique, d'une algèbre de Lie ad-algébrique et des premiers résultats autour de ces notions.

– Le deuxième chapitre est consacré au cas quantique, que j'avais commencé à aborder dans ma thèse. J'y explique pourquoi le semi-centre (quantique) de l'algèbre enveloppante quantifiée associée à une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple est toujours une algèbre de polynômes. Les résultats de ce chapitre interviennent également dans la suite de mon travail.

– Le troisième chapitre fait le lien entre le cas quantique et le cas classique. On ne peut pas passer du cas quantique au cas classique simplement par spécialisation en  $q = 1$ , car dans le semi-centre (classique) associé à une sous-algèbre (bi)parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  peuvent apparaître des "racines-carrées" d'analogues de semi-invariants quantiques, ce qui rend le problème de la polynomialité du semi-centre plus difficile dans le cas classique. Par contre, ces racines-carrées n'apparaissent jamais si l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  est de type  $A$  ou  $C$ . J'explique dans ce chapitre pourquoi, pour une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  donnée d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$ , une certaine sous-algèbre d'invariants du dual de Hopf de l'algèbre enveloppante (classique) de  $\mathfrak{g}$  est polynomiale et comment on peut en déduire que la dimension de Gelfand-Kirillov des semi-centres classique et quantique associés à  $\mathfrak{p}$  est la même.

– Le quatrième chapitre est consacré au cas classique uniquement. J'y explique pourquoi, lorsque  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple de type  $A$  ou  $C$ , le semi-centre classique associé à n'importe quelle sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de polynômes. Pour cela on utilise un encadrement du semi-centre classique entre deux bornes, dont l'une (la borne inférieure) fait intervenir le semi-centre de son analogue quantique et des résultats du chapitre précédent sont utiles. La borne supérieure, elle, fait intervenir des résultats sur le semi-centre d'une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$  démontrés dans [28].

Je montre que lorsque les deux bornes mentionnées ci-dessus coïncident, le semi-centre classique est une algèbre de polynômes. Les bornes coïncident toujours lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$  ou  $C$ .

Pour le moment on ne connaît qu'un seul contre-exemple à la polynomialité du semi-centre d'une sous-algèbre (bi)parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  simple. C'est lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type  $E_8$  et  $\mathfrak{p}$  une certaine sous-algèbre parabolique ([61]).

J'explique également la généralisation au cas des sous-algèbres biparaboliques, traité dans [30] et [31].

Lorsque les deux bornes que j'ai mentionnées ci-dessus ne coïncident pas, il y a des cas où l'on peut quand même conclure quant à la polynomialité du semi-centre associé à une sous-algèbre (bi)parabolique. C'est ce que j'explique aussi dans ce chapitre.

Enfin il reste encore des cas où la polynomialité du semi-centre associé à une sous-algèbre parabolique n'est pour l'instant pas connue. C'est le cas par exemple de  $\mathfrak{g}$  de type  $B_5$  et  $\mathfrak{p}$  une certaine sous-algèbre parabolique (dont une sous-algèbre de Levi est de type  $A_3$ ) que je détaille dans ce chapitre.

– Le cinquième chapitre explique un lien entre les deux cas extrêmes de sous-algèbres paraboliques de l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  (c'est-à-dire une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$  et

l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  tout entière). Ce lien permet d'appréhender sous un autre angle l'étude de la polynomialité du semi-centre d'une sous-algèbre parabolique dans le cas général.

Dans ce chapitre, je donne également une formule pour l'indice d'une sous-algèbre parabolique ainsi que la somme des "faux degrés" en fonction de l'indice de la sous-algèbre parabolique en question (ces faux degrés sont définis grâce à la borne supérieure de l'encadrement mentionné au chapitre précédent).

Signalons que tous les résultats des chapitres ci-dessus démontrés pour les sous-algèbres paraboliques ont été généralisés par Joseph aux sous-algèbres biparaboliques.

– Le sixième chapitre propose une approche plus géométrique de l'étude de la polynomialité du semi-centre associé à une sous-algèbre biparabolique. Cette approche utilise les sections de Weierstrass et les paires adaptées, définies par Joseph.

Lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$ , des paires adaptées pour une sous-algèbre biparabolique tronquée existent toujours d'après [35]. Je montre dans ce chapitre comment elles peuvent être mises en relation avec des éléments réguliers nilpotents de  $\mathfrak{g}$ . Cela fait intervenir le groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}$  et on espère pouvoir ensuite trouver une recette permettant d'obtenir des paires adaptées ou plus généralement des sections de Weierstrass pour des sous-algèbres biparaboliques d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  qui n'est pas forcément de type  $A$ .

– Dans le septième chapitre, je propose quelques problèmes ouverts autour des notions que j'ai développées tout au long de mon mémoire. Signalons qu'au cours des différents chapitres j'ai également relevé des prolongements, questions ou conjectures, soulevés par mes travaux et ceux d'A. Joseph.

# Chapitre I

## Notions préliminaires.

*Dans tout mon mémoire,  $\mathbf{k}$  désigne un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle.*

*Dans un souci d'harmonisation, les notations seront parfois différentes de celles des articles auxquelles elles font référence.*

### A Un problème de Dixmier.

On considère  $\mathfrak{a}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  le corps des fractions de l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$ . L'action adjointe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  sur elle-même (qui est donnée par le crochet de Lie) s'étend en une action par dérivations sur  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  et  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  (que nous continuerons à appeler action adjointe). On notera alors  $\mathbf{C}(\mathfrak{a}) := \mathbf{K}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$  le corps des invariants de  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  et par  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a}) := \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$  l'algèbre des invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  (appelée aussi centre de Poisson de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ ). On a toujours  $\mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a})) \subset \mathbf{C}(\mathfrak{a})$  mais il se peut que l'inclusion soit stricte.

Un problème de J. Dixmier ([16, Problème 4]) est de savoir si le corps  $\mathbf{C}(\mathfrak{a})$  est toujours une extension transcendante pure du corps  $\mathbf{k}$ .

On peut également se demander sous quelles conditions sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes.

C'est le cas par exemple lorsque  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie semi-simple (voir [16, 7.3.8]) : dans ce cas on a l'égalité  $\mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a})) = \mathbf{C}(\mathfrak{a})$  (voir Section B, Cor. 5.13).

La question de la polynomialité du centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  constitue un des points essentiels de mon mémoire, du moins lorsque  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre biparabolique (tronquée) d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  (voir les définitions dans la Section B, Par. 1 et 7, pages 6 et 16).

Considérons donc une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathfrak{a}$  sa troncation canonique (voir définition page 16).

Je vais expliquer dans le Chap. IV pourquoi l'algèbre d'invariants  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes dans beaucoup de cas et notamment pour n'importe quelle sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  qui est le produit d'algèbres de Lie simples

de type  $A$  ou  $C$ . D'ailleurs l'algèbre des invariants  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est aussi égale au semi-centre de Poisson de  $\mathfrak{q}$  (voir Section B, Cor. 8.2).

Dans le cas où  $\mathfrak{q}$  est égale à l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  tout entière, la troncation canonique de  $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$  est égale à  $\mathfrak{g}$  et le centre et le semi-centre de Poisson coïncident. Un théorème de Chevalley permet d'obtenir dans ce cas la polynomialité de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  (voir encore [16, 7.3.8]).

Signalons également que si  $\mathfrak{a}$  est le centralisateur d'un élément d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$ , il a été démontré que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes dans beaucoup de cas ([53]), notamment dans tous les cas lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$  ou  $C$ .

Il y a cependant un exemple où ce résultat est faux. C'est le cas du centralisateur  $\mathfrak{g}^{x^\beta}$  du vecteur de plus haut poids de l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  de type  $E_8$ . Dans ce cas  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g}^{x^\beta})$  n'est pas une algèbre de polynômes d'après [61]. Ce centralisateur  $\mathfrak{g}^{x^\beta}$  correspond d'ailleurs à un parabolique tronqué de  $\mathfrak{g}$  (voir 4.1 de la Sec. D du Chap. IV).

## B Notations et premières définitions.

Dans cette section, on considèrera une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  de dimension finie sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . On note  $\Delta$  l'ensemble des racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  pour lequel on choisit une base  $\pi$ , encore appelée système de racines simples de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Cela définit l'ensemble  $\Delta^+$ , resp.  $\Delta^-$ , des racines positives, resp. négatives, de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , relativement au choix de  $\pi$ . On a  $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ .

Pour toute racine  $\alpha \in \Delta$ , on note  $x_\alpha$  l'unique vecteur de  $\mathfrak{g}$  (à un scalaire multiplicatif non nul près) de poids  $\alpha$  (pour l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ). Ceci définit alors une sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$ , resp.  $\mathfrak{b}^-$ , associée à l'ensemble des racines positives  $\Delta^+$ , resp. négatives  $\Delta^-$ , de  $\mathfrak{g}$ . On a en effet  $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ , resp.  $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$  où  $\mathfrak{n}$ , resp.  $\mathfrak{n}^-$ , désigne la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les vecteurs  $x_\alpha$ , resp.  $x_{-\alpha}$ , pour  $\alpha \in \pi$  ( $\mathfrak{n}$ , resp.  $\mathfrak{n}^-$ , est encore le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par les  $x_\alpha$ , resp.  $x_{-\alpha}$ , pour  $\alpha \in \Delta^+$ ).

### 1 Sous-algèbre parabolique et biparabolique de $\mathfrak{g}$ .

#### 1.1

**Définition.** i) Une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  contenant une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  résoluble maximale, c'est-à-dire contenant une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$ .

ii) Une sous-algèbre biparabolique (ou algèbre de type "algues") de  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  qui est l'intersection de deux sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$  dont la somme est égale à  $\mathfrak{g}$ .

A tout sous-ensemble  $\pi' \subset \pi$  on associe une, et une seule, sous-algèbre parabolique (dite standard)  $\mathfrak{p}_{\pi'}$  contenant la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  définie ci-dessus. Autrement dit  $\mathfrak{p}_{\pi'} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$  où  $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les vecteurs  $x_{-\alpha}$  pour  $\alpha \in \pi'$ .

Une sous-algèbre parabolique standard contenant le Borel négatif  $\mathfrak{b}^-$  et associée au sous-ensemble  $\pi'$  de  $\pi$  sera notée  $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$ . On a  $\mathfrak{p}_{\pi'}^- = \mathfrak{b}^- \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}$  où  $\mathfrak{n}_{\pi'}$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les vecteurs  $x_\alpha$  pour  $\alpha \in \pi'$ .

Réciproquement, puisque deux sous-algèbres de Borel de  $\mathfrak{g}$  sont conjuguées par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$  ([16, 1.10.20]), toute sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$  est la conjuguée (par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$ ) d'une sous-algèbre parabolique standard de  $\mathfrak{g}$  (contenant le Borel positif  $\mathfrak{b}$  par exemple).

## 1.2 Exemple.

Supposons que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  (l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre  $n+1$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$  de trace nulle). Alors une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  contenant la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$ , resp.  $\mathfrak{b}^-$ , formée de toutes les matrices triangulaires supérieures, resp. inférieures, de trace nulle, à conjugaison près par un élément du groupe  $\mathbf{SL}_{n+1}(\mathbf{k})$  (groupe des matrices d'ordre  $n+1$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$  et de déterminant égal à 1, qui est le groupe algébrique connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ), ou par un élément du groupe de type adjoint  $\mathbf{PSL}_{n+1}(\mathbf{k}) = \mathbf{SL}_{n+1}(\mathbf{k})/\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_{n+1}(\mathbf{k}))$  où  $\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_{n+1}(\mathbf{k}))$  est le centre de  $\mathbf{SL}_{n+1}(\mathbf{k})$  (ce qui revient au même, puisque  $\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_{n+1}(\mathbf{k}))$  est réduit aux scalaires).

## 1.3 Sous-algèbre biparabolique standard.

Soit  $\pi'$  et  $\pi''$  deux sous-ensembles de  $\pi$ . La sous-algèbre biparabolique standard de  $\mathfrak{g}$  (relativement à  $\mathfrak{h}$  et à  $\pi$ ) associée au couple  $(\pi', \pi'')$  est  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''} = \mathfrak{p}_{\pi'} \cap \mathfrak{p}_{\pi''}^-$ .

On pourra consulter la Figure 1 (page 78) du Chap. V ou la Figure 3 (page 95) du Chap. VI pour se faire une idée d'une sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$ .

Le dessin représentant les poids non nuls des vecteurs d'une telle sous-algèbre fait penser à des algues, d'où le nom "algèbre de type algues" sous lequel les sous-algèbres biparaboliques ont été introduites par V. Dergachev et A. Kirillov en 2000 ([13]). De telles algèbres sont parfois aussi appelées "sous-algèbres spéciales" de  $\mathfrak{g}$  ([59]).

Comme l'intersection de deux sous-algèbres de Borel de  $\mathfrak{g}$  contient une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  ([60, 29.4.9]), on peut montrer que toute sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g}$  est la conjuguée, par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$ , d'une sous-algèbre biparabolique standard de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\mathfrak{h}$  et  $\pi$  (voir aussi [60, 40.7.3]).

Si  $\pi' = \pi''$ , la sous-algèbre de Lie biparabolique standard  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est réductive et si  $\pi' = \pi$  ou  $\pi'' = \pi$ , la sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est une sous-algèbre parabolique.

## 1.4 Hypothèse standard.

Par la suite on ne considèrera que des sous-algèbres biparaboliques  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  telles que la plus petite algèbre de Lie réductive contenant  $\mathfrak{q}$  soit  $\mathfrak{g}$  tout entière. Cela correspond à des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  qui sont les conjuguées par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$  d'une sous-algèbre de Lie biparabolique standard (relativement à  $\mathfrak{h}$  et à  $\pi$ )  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  telle que  $\pi' \cup \pi'' = \pi$  pour  $\pi', \pi'' \subset \pi$ .

## 2 Décomposition d'une sous-algèbre parabolique ou biparabolique.

### 2.1 Action ad-réductive.

**Définition .** Soit  $\mathfrak{a}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbf{k}$ . On dira qu'une sous-algèbre de Lie commutative  $\mathfrak{z}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  agit ad-réductivement sur  $\mathfrak{a}$  s'il existe une base  $(a_1, \dots, a_r)$  de  $\mathfrak{a}$  telle que, pour tout  $z \in \mathfrak{z}$ ,  $(ad z)(a_i) = \mu_i(z)a_i$  avec  $\mu_i(z) \in \mathbf{k}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ . On dira également que  $\mathfrak{z}$  agit rationnellement ad-réductivement sur  $\mathfrak{a}$  s'il existe une base  $(a_1, \dots, a_r)$  de  $\mathfrak{a}$  et une base  $(z_1, \dots, z_s)$  de  $\mathfrak{z}$  telles que pour tous  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq s$ ,  $(ad z_j)(a_i) = \mu_i(z_j)a_i$  et  $\mu_i(z_j) \in \mathbb{Q}$ .

### 2.2

**Proposition .** Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  biparabolique vérifiant l'hypothèse standard de 1.4. Alors il existe un idéal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{q}$  agissant par dérivations sur  $\mathfrak{q}$  de façon ad-nilpotente, une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{q}$  semi-simple, et une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{q}$  commutative, agissant rationnellement ad-réductivement sur  $\mathfrak{q}$ , telles que  $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$ . De plus  $\mathfrak{z}$  est le centre de  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$ , l'idéal nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{q}$  est le radical nilpotent de  $\mathfrak{q}$  et aussi le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{q}$  et la sous-algèbre  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$  est un facteur de Levi de  $\mathfrak{q}$  (c'est-à-dire une sous-algèbre de Lie réductive maximale de  $\mathfrak{q}$ ).

*Démonstration.* Il suffit de considérer une sous-algèbre biparabolique standard  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''} = \mathfrak{p}_{\pi'}^- \cap \mathfrak{p}_{\pi''}$  pour  $\pi', \pi'' \subset \pi$  tels que  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ . On a  $\mathfrak{p}_{\pi'} = \mathfrak{m}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$  et  $\mathfrak{p}_{\pi''} = \mathfrak{m}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}^-$  où  $\mathfrak{m}_{\pi'}$ , resp.  $\mathfrak{m}_{\pi''}$ , est l'idéal de  $\mathfrak{b}$ , resp. de  $\mathfrak{b}^-$ , engendré par les vecteurs  $x_\alpha$  avec  $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ , resp.  $x_{-\alpha}$  avec  $\alpha \in \pi \setminus \pi''$ . Alors  $\mathfrak{m}_{\pi'}$ , resp.  $\mathfrak{m}_{\pi''}$ , est le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{p}_{\pi'}$ , resp. de  $\mathfrak{p}_{\pi''}$ , et c'est aussi le radical nilpotent de  $\mathfrak{p}_{\pi'}$ , resp. de  $\mathfrak{p}_{\pi''}$  (voir [60, 20.8.6]).

De plus on a  $[\mathfrak{m}_{\pi'} \cap \mathfrak{n}_{\pi''}, \mathfrak{m}_{\pi''} \cap \mathfrak{n}_{\pi'}^-] = 0$ . Soit  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\pi'} \cap \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{m}_{\pi''} \cap \mathfrak{n}_{\pi'}^-$  et  $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''}^-$ . On remarque que l'on a

$$(*) \quad \mathfrak{m} = \sum_{\alpha \in \Delta \cap (\mathbb{N}\pi'' \setminus \mathbb{N}(\pi' \cap \pi''))} \mathbf{k}x_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Delta \cap (\mathbb{N}\pi' \setminus \mathbb{N}(\pi' \cap \pi''))} \mathbf{k}x_{-\alpha}$$

et

$$(**) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta \cap \mathbb{N}(\pi' \cap \pi'')} \mathbf{k}x_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Delta \cap \mathbb{N}(\pi' \cap \pi'')} \mathbf{k}x_{-\alpha}.$$

On a  $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$  et  $\mathfrak{r}$  est la plus grande sous-algèbre de Lie réductive de  $\mathfrak{q}$ . Soit  $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''} \oplus (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''}, \mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''}^-]) \oplus \mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''}^-$  et  $\mathfrak{z}$  un supplémentaire bien choisi dans  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''}, \mathfrak{n}_{\pi' \cap \pi''}^-]$  qui agit rationnellement ad-réductivement sur  $\mathfrak{m}$  et par zéro sur  $\mathfrak{s}$ . Comme l'algèbre  $\mathfrak{s}$  est la plus grande sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{q}$ , le radical de  $\mathfrak{q}$  est  $\text{rad}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{z}$ . De plus  $\mathfrak{m}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{q}$  et on peut vérifier comme dans la preuve de [60, 20.8.6], puisque  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ , que  $\mathfrak{m}$  est le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{q}$ . Comme  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s}$  on a  $\mathfrak{q}' \cap (\text{rad}(\mathfrak{q})) = \mathfrak{m}$  et donc  $\mathfrak{m}$  est le radical nilpotent de  $\mathfrak{q}$  (voir aussi [31, 2.3]). D'où la proposition.  $\square$

### 3 Opposée d'une sous-algèbre biparabolique.

#### 3.1

**Définition .** Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre de Lie biparabolique standard de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$  pour deux sous-ensembles  $\pi'$  et  $\pi''$  de  $\pi$  vérifiant la condition  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ . La sous-algèbre biparabolique opposée de  $\mathfrak{q}$ , notée  $\mathfrak{q}^-$ , est définie par  $\mathfrak{q}^- = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}^-$ . C'est donc aussi une sous-algèbre biparabolique standard de  $\mathfrak{g}$  associée au couple  $(\pi'', \pi')$ .

#### 3.2

*Remarque .* Notons  $\kappa$  l'antiautomorphisme d'ordre deux de l'algèbre enveloppante universelle  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  envoyant  $x_\alpha$  sur  $x_{-\alpha}$  pour tout  $\alpha \in \pi$  et laissant fixes les éléments du Cartan de  $\mathfrak{g}$  ( $\kappa$  est encore appelé antiautomorphisme de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ ). Alors si  $\mathfrak{q}$  est une sous-algèbre biparabolique standard de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\kappa(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^-$ . La forme de Killing  $K$  de  $\mathfrak{g}$  étant non-dégénérée, elle fournit un isomorphisme entre  $\mathfrak{g}^*$  et  $\mathfrak{g}$  et par cet isomorphisme,  $\mathfrak{q}^*$  est isomorphe à  $\mathfrak{q}^-$ .

#### 3.3

Soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$ . Reprenons la décomposition de  $\mathfrak{q}$  (Prop. 2.2). On a  $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$  avec  $\mathfrak{r}$  réductive et  $\mathfrak{m}$  le radical nilpotent de  $\mathfrak{q}$  ( $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\pi'} \cap \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{m}_{\pi''} \cap \mathfrak{n}_{\pi'}^-$ ). Alors  $\mathfrak{q}^- = \mathfrak{m}^- \oplus \mathfrak{r}$  où

$$(***) \quad \mathfrak{m}^- = \mathfrak{m}_{\pi'}^- \cap \mathfrak{n}_{\pi''}^- \oplus \mathfrak{m}_{\pi''} \cap \mathfrak{n}_{\pi'} = \sum_{\alpha \in \Delta \cap (\mathbb{N}\pi'' \setminus \mathbb{N}(\pi' \cap \pi''))} \mathbf{k}x_{-\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta \cap (\mathbb{N}\pi' \setminus \mathbb{N}(\pi' \cap \pi''))} \mathbf{k}x_\alpha$$

est le radical nilpotent de  $\mathfrak{q}^-$  et  $\mathfrak{r}$  le facteur de Levi de  $\mathfrak{q}^-$ .

**Proposition .** Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre de Lie biparabolique standard de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ . Avec les notations précédentes, on a

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^- \oplus \mathfrak{r} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{q}^- = \mathfrak{m}^- \oplus \mathfrak{q}.$$

De plus  $\mathfrak{r}$  est réductive dans  $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^-$ , resp. dans  $\mathfrak{q}$ , resp. dans  $\mathfrak{q}^-$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^-$ , resp.  $\mathfrak{q}$ , resp.  $\mathfrak{q}^-$ , est, pour l'action adjointe, un  $\mathfrak{r}$ -module semi-simple (ie somme directe de  $\mathfrak{r}$ -modules simples).

*Démonstration.* La première assertion provient des égalités  $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$  et  $\mathfrak{q}^- = \mathfrak{m}^- \oplus \mathfrak{r}$  ainsi que des égalités (\*), (\*\*) et (\*\*\*) ci-dessus, qui entraînent que la somme  $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^- + \mathfrak{r}$  est bien directe. Pour vérifier la deuxième assertion, il suffit d'appliquer [16, 1.6.4] puisque les éléments de  $\mathfrak{z}$  agissent de manière ad-semi-simple sur  $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^-$ , resp. sur  $\mathfrak{q}$ , resp. sur  $\mathfrak{q}^-$ .  $\square$

### 3.4

Les égalités (\*) et (\*\*) de la preuve de la Prop. 2.2 ainsi que l'égalité (\*\*\*) ci-dessus et la Proposition précédente entraînent les observations suivantes.

*Remarque .* Soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$  une sous-algèbre biparabolique standard de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{q}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  (ie si  $\pi' = \pi$  ou  $\pi'' = \pi$ ), on a  $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^- = \mathfrak{g}$ . Sinon en général  $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^-$  est inclus strictement dans  $\mathfrak{g}$ . Notons  $R$  l'ensemble des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}$  (pour l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ). On a  $R \subset \Delta$  et plus précisément  $R = (\mathbb{N}\pi'' \cup (-\mathbb{N}\pi')) \cap \Delta$ . Alors  $-R$  est l'ensemble des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}^-$  et  $R \cup (-R)$  est l'ensemble des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^-$ . En général on a  $R \cup (-R) \subsetneq \Delta$  et  $R \cup (-R)$  peut n'être même pas additivement clos dans  $\Delta$ . Enfin  $R \cap (-R)$  est l'ensemble des poids non nuls des vecteurs du facteur de Levi  $\mathfrak{r}$  de  $\mathfrak{q}$  (ou de  $\mathfrak{q}^-$ ).

### 3.5

Par exemple dans  $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{k})$ , si  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_3\}$  (avec la numérotation des racines simples comme dans [8, Planche I]), alors  $R = \{\alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}$ . On a  $\alpha_1 + \alpha_2 \in R \cup (-R)$ ,  $\alpha_3 \in R \cup (-R)$  et  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \Delta$  mais  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \notin R \cup (-R)$ .

## 4 Centre d'une sous-algèbre biparabolique.

**Proposition .** *Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g}$  vérifiant l'hypothèse standard de 1.4. Alors le centre  $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$  de  $\mathfrak{q}$  est réduit à zéro.*

*Démonstration.* On peut supposer (quitte à prendre le conjugué par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$ ), que  $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$  avec  $\pi', \pi'' \subset \pi$  vérifiant l'hypothèse :  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ .

Soit  $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ . Alors  $x = y + h$  avec  $h \in \mathfrak{h}$  et  $y \in \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$ . Comme  $[\mathfrak{h}, x] = \{0\}$ , il s'ensuit que  $x \in \mathfrak{h}$  (donc que  $y = 0$ ) puisque le normalisateur de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  est égal à  $\mathfrak{h}$ . Enfin comme  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ , le fait que  $[\mathfrak{n}_{\pi''}, x] = \{0\}$  et que  $[\mathfrak{n}_{\pi'}^-, x] = \{0\}$  entraîne que, pour tout  $\alpha \in \pi$ ,  $\alpha(x) = 0$  donc que  $x = 0$ .  $\square$

## 5 Semi-centre et centre (de Poisson).

### 5.1 Crochet de Poisson.

On considère une algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de dimension finie sur  $\mathbf{k}$ . On note  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  l'algèbre symétrique de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  l'algèbre enveloppante universelle de  $\mathfrak{a}$ . Comme  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  s'identifie à la  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\dim \mathfrak{a}$  générateurs, c'est une algèbre commutative et associative intègre, qui admet donc un corps de fractions, que l'on notera  $\mathbf{K}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{a}))$ . L'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  sur elle-même donnée par le crochet de Lie s'étend en une action par dérivations sur  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ ,  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  et sur le localisé de l'algèbre commutative  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  par n'importe quelle partie multiplicative, donc en particulier sur son corps des fractions  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$ . Nous noterons encore *ad* cette action et nous continuerons à l'appeler action adjointe.

Fixons  $(a_1, \dots, a_r)$  une base du  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{a}$  et soit  $f \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})$ . Alors pour tout  $x \in \mathfrak{a}$ , on a  $(ad x)(f) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial a_i} [x, a_i]$  en identifiant  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  avec l'algèbre de polynômes  $\mathbf{k}[a_1, \dots, a_r]$ .

On peut alors définir sur  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  le crochet de Poisson suivant, qui prolonge l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  sur  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ . Si  $f, g \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})$ ,  $\{f, g\} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial a_i} \frac{\partial g}{\partial a_j} [a_i, a_j]$ . En particulier si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathfrak{a}$ , on a  $\{f, g\} = [f, g]$  et si  $g = x \in \mathfrak{a}$ , et  $f \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})$ , on a  $\{x, f\} = (ad x)(f)$ . Enfin pour tout  $f \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})$  fixé, l'application  $g \mapsto \{g, f\}$  est une dérivation de l'algèbre associative  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ . Ainsi  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ , munie de  $\{, \}$ , est une algèbre de Lie dont  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre de Lie.

Puis on peut étendre le crochet de Poisson de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  en un crochet de Poisson sur son corps des fractions  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$ , de sorte que pour  $f \in \mathbf{K}(\mathfrak{a})$  fixé, l'application  $g \mapsto \{g, f\}$  soit une dérivation de l'algèbre associative  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$ , muni de  $\{, \}$ , est aussi une algèbre de Lie.

## 5.2

**Définition.** Ici  $\mathbf{S}$  désigne indifféremment  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ ,  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  ou le localisé de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  par une partie multiplicative. On considère également  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{a}$ .

- i) Un semi-invariant de  $\mathbf{S}$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{b}$  est un élément  $s$  de  $\mathbf{S}$  tel que, pour tout  $x \in \mathfrak{b}$ ,  $(ad x)(s) \in \mathbf{k} s$ .  
Un semi-invariant de  $\mathbf{S}$  est un élément  $s$  de  $\mathbf{S}$  tel que, pour tout  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $(ad x)(s) \in \mathbf{k} s$ .
- ii) Le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathbf{S})$  de  $\mathbf{S}$  est l'espace vectoriel engendré par les semi-invariants de  $\mathbf{S}$ .
- iii) L'espace  $\mathbf{S}^{\mathfrak{b}}$  des invariants de  $\mathbf{S}$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{b}$  est  $\mathbf{S}^{\mathfrak{b}} = \{s \in \mathbf{S} \mid \forall x \in \mathfrak{b}, (ad x)(s) = 0\}$ .
- iv) L'ensemble  $\mathbf{Y}(\mathbf{S})$  est l'espace des invariants de  $\mathbf{S}$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$ . Autrement dit  $\mathbf{Y}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^{\mathfrak{a}} = \{s \in \mathbf{S} \mid \forall x \in \mathfrak{a}, (ad x)(s) = 0\}$ .

## 5.3

*Notations et Remarques.* 1) Lorsque  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathfrak{a})$ , on note  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  au lieu de  $\mathbf{Sy}(\mathbf{S}(\mathfrak{a}))$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  au lieu de  $\mathbf{Y}(\mathbf{S}(\mathfrak{a}))$ . Les espaces  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  sont appelés respectivement semi-centre et centre de Poisson de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ . En effet dans ce cas l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  induit sur  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  un crochet de Poisson  $\{, \}$  comme mentionné au 5.1. De plus  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  est le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par  $\{f \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}) \mid \forall g \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}), \{g, f\} \in \mathbf{k} f\}$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a}) = \{f \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}) \mid \forall g \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}), \{g, f\} = 0\}$ .

- 2) Lorsque  $\mathbf{S} = \mathbf{U}(\mathfrak{a})$ , on note  $\mathbf{Z}(\mathfrak{a})$  au lieu de  $\mathbf{Y}(\mathbf{U}(\mathfrak{a}))$  car dans ce cas  $\mathbf{Y}(\mathbf{U}(\mathfrak{a}))$  correspond au centre de  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  (pour la multiplication associative dans  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$ ). On peut également définir dans  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  une action adjointe de  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  sur elle-même,

qui étend l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  sur  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$ , en posant, pour tous  $u, v, w \in \mathbf{U}(\mathfrak{a})$ ,  $(ad(uv))(w) = (adu \circ adv)(w)$ , si on note encore  $ad$  cette action adjointe.

Alors le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}(\mathfrak{a}))$  est encore égal au  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par  $\{u \in \mathbf{U}(\mathfrak{a}) \mid \forall v \in \mathbf{U}(\mathfrak{a}), (adv)(u) \in \mathbf{k}u\}$ . Ce semi-centre est parfois aussi noté  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{a})$ .

- 3) Lorsque  $\mathbf{S} = \mathbf{K}(\mathfrak{a})$ , on note  $\mathbf{C}(\mathfrak{a})$  au lieu de  $\mathbf{Y}(\mathbf{K}(\mathfrak{a}))$ . Alors  $\mathbf{C}(\mathfrak{a}) = \{s \in \mathbf{K}(\mathfrak{a}) \mid \forall s' \in \mathbf{K}(\mathfrak{a}), \{s', s\} = 0\}$ . C'est le centre de Poisson de  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$ .

#### 5.4

*Remarque*. Pour  $\mathbf{S}$  comme dans la définition 5.2, les  $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels  $\mathbf{Sy}(\mathbf{S})$ ,  $\mathbf{Y}(\mathbf{S})$  et  $\mathbf{S}^{\mathfrak{b}}$  (pour  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{a}$ ) sont aussi des sous-algèbres de  $\mathbf{S}$ . De plus l'anneau  $\mathbf{C}(\mathfrak{a}) = \mathbf{K}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$  est un corps.

Cela provient essentiellement du fait que l'action adjointe agit par dérivations sur  $\mathbf{S}$ .

#### 5.5

*Remarque*. Il existe un isomorphisme d'algèbres entre  $\mathbf{Z}(\mathfrak{a})$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  (voir par exemple [16, 10.4.5]). Ceci est dû à M. Duflo (cf. [18] et [19]). Par une extension de l'application de Duflo (cf. [57]), R. Rentschler et M. Vergne ont montré que les semi-centres  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  et  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}(\mathfrak{a}))$  sont encore des algèbres isomorphes.

En particulier cela implique que le semi-centre de  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$  est commutatif (résultat connu aussi grâce à [16, 4.3.5]).

Par la suite on ne considèrera en général que le semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  au lieu du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}(\mathfrak{a}))$ . En effet plutôt que de travailler dans l'anneau non commutatif  $\mathbf{U}(\mathfrak{a})$ , il est plus aisé de travailler dans l'anneau commutatif  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  qui, en tant qu'anneau de polynômes sur  $\mathbf{k}$  en  $\dim \mathfrak{a}$  indéterminées, est un anneau factoriel.

Ainsi on dira aussi parfois que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  est le semi-centre (qu'on qualifiera à l'occasion de classique) associé à  $\mathfrak{a}$  (ou de  $\mathfrak{a}$ ).

#### 5.6

*Remarque*. Pour  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ , posons  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})_{\lambda} = \{s \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}) \mid \forall x \in \mathfrak{a}, (adx)(s) = \lambda(x)s\}$ . Alors  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})} \mathbf{S}(\mathfrak{a})_{\lambda}$  où  $\Lambda(\mathfrak{a}) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \mathbf{S}(\mathfrak{a})_{\lambda} \neq \{0\}\}$ .

#### 5.7

**Définition**. L'ensemble  $\Lambda(\mathfrak{a})$  ci-dessus est appelé ensemble des poids du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$ .

#### 5.8

En général, le semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  contient strictement le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ . C'est le cas par exemple pour l'algèbre de Lie résoluble  $\mathfrak{a}$  de base  $(x, y, z)$

telle que  $[x, y] = y$ ,  $[x, z] = z$  et  $[y, z] = 0$ , [16, 4.9.8]. Dans ce cas on vérifie que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a}) = \mathbf{k}$  alors que  $y$  et  $z$  sont des semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  et on a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{k}[y, z]$ .

### 5.9

*Remarque .* Il se peut cependant que l'on ait l'égalité  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ . C'est le cas par exemple si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie semi-simple, ou si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie nilpotente. En effet dans ces cas, on vérifie facilement que l'ensemble  $\Lambda(\mathfrak{a})$  des poids du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  est réduit à  $\{0\}$ . On verra plus loin (voir Prop. 9.7) que, si  $\mathfrak{a}$  est la troncation canonique d'une algèbre de Lie ad-algébrique (voir plus loin Déf. 6.2), alors le centre et le semi-centre de Poisson coïncident aussi.

Par contre même lorsque le semi-centre et le centre de Poisson coïncident, celui-ci peut ne pas être de type fini, même si son corps des fractions est une extension transcendante pure de  $\mathbf{k}$ . C'est le cas pour l'algèbre de Lie nilpotente  $\mathfrak{h}$  de dimension 45 définie dans [16, 4.9.20]. Il y est montré que l'algèbre des invariants  $\mathbf{Y}(\mathfrak{h})$  n'est pas de type fini, bien que le corps  $\mathbf{C}(\mathfrak{h}) = \mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{h}))$  soit une extension transcendante pure du corps de base  $\mathbf{k}$  (voir [16, 4.4.8]).

### 5.10

Le Lemme ci-dessous permettra de démontrer la Proposition 5.11 qui suit mais aussi la Prop. 1 de la Sec. B du Chap. III. Rappelons que l'anneau commutatif  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  est factoriel.

**Lemme .** *Soit  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{a}$  et  $u^{-1}v$  un semi-invariant de  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{b}$  avec  $u, v \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}) \setminus \{0\}$ ,  $u$  et  $v$  premiers entre eux. Alors  $u$  et  $v$  sont des semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{b}$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathfrak{b}$ . Comme  $(ad x)(u^{-1}v) \in \mathbf{k}(u^{-1}v)$ , et que  $u$  et  $v$  sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, on obtient que  $u$  divise  $(ad x)(u)$ . Par conséquent (en considérant les termes de plus haut degré dans l'algèbre de polynômes  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ ), on obtient que  $(ad x)(u) \in \mathbf{k}u$ . De même on a  $(ad x)(v) \in \mathbf{k}v$ . □

### 5.11

Le résultat ci-dessous est dû à Dixmier ([15]). (Signalons que Rentschler et Vergne ([57, Lemme 1.2]) l'attribuent à Chevalley.)

**Proposition .** *Chaque élément semi-invariant du corps  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  est un quotient d'éléments semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ .*

*Démonstration.* La preuve découle directement du Lemme ci-dessus en prenant  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ . □

## 5.12

**Corollaire .** *Supposons que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$ . Alors  $\mathbf{C}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a}))$ .*

*Démonstration.* On a toujours l'inclusion  $\mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a})) \subset \mathbf{C}(\mathfrak{a})$ . L'inclusion réciproque provient de la Proposition 5.11 puisque tout invariant de  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  est aussi semi-invariant donc est le quotient de deux éléments semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  (de même poids). Mais d'après l'hypothèse, tout semi-invariant de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  est invariant. □

## 5.13

Compte tenu de la Remarque 5.9, le Corollaire 5.12 implique immédiatement le Corollaire suivant.

**Corollaire .** *Si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie semi-simple ou nilpotente, alors  $\mathbf{C}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a}))$ .*

## 5.14

On note  $\mathfrak{a}'$  la sous-algèbre dérivée de  $\mathfrak{a}$ , c'est-à-dire le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par les crochets  $[x, x']$  pour  $x, x' \in \mathfrak{a}$ . Rappelons que  $\mathfrak{a}'$  est une sous-algèbre de Lie (et même un idéal) de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ .

**Proposition .** *On a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}'}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})$  et  $s \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})_\lambda$ . Alors si  $x = [x', x'']$  pour  $x', x'' \in \mathfrak{a}$ ,  $(ad [x', x''])(s) = (ad x' \circ ad x'' - ad x'' \circ ad x')(s) = (\lambda(x')\lambda(x'') - \lambda(x'')\lambda(x'))s = 0$  donc  $s \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}'}$  et la proposition. □

## 5.15

Remarquons que l'inclusion de la Prop. 5.14 peut être stricte. Par exemple prenons  $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbf{k})$  avec  $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  (numérotation des racines simples comme dans [8, Planche I]). On a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{n}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{n}) = \mathbf{k}[x_{\alpha_1+\alpha_2}]$ , la  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en un générateur  $x_{\alpha_1+\alpha_2}$  (d'après [28]). Mais  $\mathfrak{n}' = \mathbf{k}x_{\alpha_1+\alpha_2}$  et on vérifie facilement que  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})^{\mathfrak{n}'} = \mathbf{S}(\mathfrak{n}) = \mathbf{k}[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_1+\alpha_2}]$ .

Par contre on montrera que l'inclusion de la Prop. 5.14 est une égalité lorsque  $\mathfrak{a}$  est sous-algèbre biparabolique (voir Cor. 8.2).

## 6 Algèbre (presque) ad-algébrique.

## 6.1

On reprend les mêmes notations que dans le Par. 5. Pour tout  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $adx : y \in \mathfrak{a} \mapsto [x, y]$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{a}$ . Comme  $\mathbf{k}$  est un corps algébriquement clos, cet

endomorphisme admet une décomposition de Jordan dans l'espace  $\text{End}(\mathfrak{a})$  des endomorphismes de l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}$ . Une algèbre presque ad-algébrique est définie de la façon suivante (voir [29, 2.4.5] ou [F6, Appendice B.2]). D'après [9, Chap. VII, §5, Def. 1], une algèbre presque ad-algébrique pourrait aussi être dite ad-scindable.

**Définition .** On dit que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  est presque ad-algébrique ou ad-scindable lorsque pour tout  $x \in \mathfrak{a}$ , il existe deux éléments  $y, z$  dans  $\mathfrak{a}$  tels que l'on ait la décomposition de Jordan  $adx = ady + adz$  avec  $[ady, adz] = ady \circ adz - adz \circ ady = 0$ ,  $ady$  semi-simple (ou diagonalisable) et  $adz$  nilpotent dans  $\text{End}(\mathfrak{a})$ .

## 6.2

On définit également une algèbre ad-algébrique de la façon suivante (voir [60, 24.8.2] ou [F6, Appendice B.2]).

**Définition .** On dit qu'une algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  est ad-algébrique lorsque la sous-algèbre de Lie  $ad\mathfrak{a}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) = \text{End}(\mathfrak{a})$  (munie du crochet  $[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ ) est algébrique, c'est-à-dire lorsque  $ad\mathfrak{a}$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé (pour la topologie de Zariski sur l'espace vectoriel  $\text{End}(\mathfrak{a})$ ) du groupe linéaire  $\mathbf{GL}(\mathfrak{a})$  des automorphismes linéaires de  $\mathfrak{a}$ . (On dit dans ce cas que  $ad\mathfrak{a}$  est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique au sens de [11, Chap. II, § 1, Déf. 1], ou d'un groupe linéaire algébrique au sens de [7, 1.6]).

## 6.3

D'après [29, 2.4.5] et [60, 29.7.8], on a la propriété caractéristique suivante :

**Proposition .** Soit  $\mathfrak{a}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathfrak{m}$  le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{a}$ . Alors  $\mathfrak{a}$  est presque ad-algébrique (resp. ad-algébrique) si, et seulement si, il existe une sous-algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{a}$  et une sous-algèbre de Lie commutative  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{a}$ , centre de  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$ , qui agit ad-réductivement (resp. rationnellement ad-réductivement) sur  $\mathfrak{a}$ , tels que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$ .

## 6.4

*Remarques .* (1) La décomposition des sous-algèbres biparaboliques (Prop. 2.2) entraîne, grâce à la Proposition 6.3, que toute sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple sur  $\mathbf{k}$  est ad-algébrique (et donc aussi presque ad-algébrique).  
 (2) Une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  vérifiant l'hypothèse standard 1.4 est une sous-algèbre algébrique de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{q})$  puisque son centre est réduit à zéro (Prop. du Par. 4). Toute sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  est donc aussi algébrique et toute sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g}$  est algébrique comme intersection de deux algèbres de Lie algébriques.

## 7 Troncation canonique.

### 7.1

On reprend les mêmes notations que précédemment, notamment  $\mathfrak{a}$  qui désigne une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbf{k}$ . On va définir la troncation canonique  $\mathfrak{a}_\Lambda$  de  $\mathfrak{a}$  (voir [F6, 2.4]). Cette troncation canonique permet, lorsque  $\mathfrak{a}$  est presque ad-algébrique, d'exprimer le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  comme le centre de Poisson de l'algèbre symétrique de la troncation canonique de  $\mathfrak{a}$  (Prop. 7.3 (ii)). Ainsi la recherche de semi-invariants dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  se ramène à la recherche d'invariants dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)$ .

**Définition.** Soit  $\Lambda(\mathfrak{a})$  l'ensemble des poids du semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  (Déf. 5.7). La troncation canonique  $\mathfrak{a}_\Lambda$  de  $\mathfrak{a}$  est  $\mathfrak{a}_\Lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})} \ker \lambda$ .

### 7.2

On a alors la Proposition suivante (voir [F6, 2.4]) :

**Proposition.**  $\mathfrak{a}_\Lambda$  est un idéal de  $\mathfrak{a}$  qui contient  $\mathfrak{a}'$ .

*Démonstration.* Déjà on remarque que  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\Lambda] \subset \mathfrak{a}'$ . Puis pour montrer que  $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}_\Lambda$ , il suffit d'utiliser une preuve similaire à celle de la Proposition 5.14, en prenant pour tout  $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})$ , un élément  $s \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})_\lambda \setminus \{0\}$ . En effet si  $x = [x', x'']$  pour  $x', x'' \in \mathfrak{a}$ , on a d'après la preuve de la proposition 5.14,  $(ad [x', x''])(s) = 0 = \lambda([x', x'']) s$  donc  $\lambda([x', x'']) = 0$ .  $\square$

### 7.3

La Proposition suivante a été démontrée dans [F6, Appendice B.2].

**Proposition.** Soit  $\mathfrak{a}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbf{k}$ . Alors on a

$\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda)$ . De plus si  $\mathfrak{a}$  est presque ad-algébrique, on a

(i)  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}_\Lambda}$ .

(ii)  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda)$ .

*Démonstration.* Déjà il est facile de voir que l'on a l'inclusion  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}_\Lambda}$  par définition de  $\mathfrak{a}_\Lambda$  et d'après la remarque 5.6. Pour montrer que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda)$ , il reste à montrer qu'un élément du semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  appartient en fait à l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)$  de  $\mathfrak{a}_\Lambda$ .

Tout d'abord si  $\Lambda(\mathfrak{a}) = \{0\}$ , l'assertion est vraie car on a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  et  $\mathfrak{a}_\Lambda = \mathfrak{a}$ .

Supposons maintenant que  $\Lambda(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$ . En identifiant les éléments de  $\Lambda(\mathfrak{a})$  avec des éléments de  $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda)^*$ , on montre aisément que le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda)^*$  et le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{a})$  engendré par  $\Lambda(\mathfrak{a})$  ont la même dimension, donc sont égaux. On choisit alors une base  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  de  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{a})$  formée d'éléments  $\lambda_i \in \Lambda(\mathfrak{a})$  pour tout  $1 \leq i \leq r$  que l'on complète en une base de  $\mathfrak{a}^*$ . Soit  $(h_1, \dots, h_r, x_1, \dots, x_s)$  sa base duale (dans  $\mathfrak{a}$ ) de sorte que  $\lambda_i(h_j) = \langle h_j, \lambda_i \rangle = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker) pour tous  $1 \leq i, j \leq r$  (

ainsi  $(h_1, \dots, h_r)$  est une base de  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda$  identifié avec un sous-espace supplémentaire de  $\mathfrak{a}_\Lambda$  dans  $\mathfrak{a}$ . Pour tout  $J = (j_1, \dots, j_r) \in \mathbb{N}^r$ , posons  $h^J = \prod_{i=1}^r h_i^{j_i}$  et définissons la relation d'ordre (partiel) sur  $\mathbb{N}^r$  donnée par  $J \geq J' \iff j_i \geq j'_i \forall 1 \leq i \leq r$ , si  $J = (j_1, \dots, j_r)$  et  $J' = (j'_1, \dots, j'_r)$ . Soit  $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})$ . Tout élément  $s \in \mathbf{S}(\mathfrak{a})_\lambda \setminus \{0\}$  s'écrit comme une somme finie  $s = \sum_J h^J s_J$  pour  $s_J \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda) \setminus \{0\}$ . Alors si  $J_0$  est un élément maximal, pour la relation d'ordre dans  $\mathbb{N}^r$  ci-dessus, parmi les  $J$  figurant dans la somme égale à  $s$ , il vient  $s_{J_0} \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)_\lambda \setminus \{0\}$ . Ainsi, pour tout  $1 \leq i \leq r$ , il existe  $s_i \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)_{\lambda_i} \setminus \{0\}$ .

Considérons maintenant un élément non nul  $t = \sum_{J \in L} h^J t_J$  où pour tout  $J \in L \subset \mathbb{N}^r$  ( $L$  fini)  $t_J \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)$  et la famille  $\{t_J\}_{J \in L}$  est libre.

Supposons que  $t$  soit un semi-invariant de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ . Comme  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}_\Lambda}$ , on en déduit que  $t$  et chaque  $s_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) Poisson-commutent, ainsi que les  $t_J$  avec  $s_i$  (car  $s_i \in \mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$ ). Donc en notant  $\{, \}$  le crochet de Poisson dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ , on a, pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,

$$0 = \{t, s_i\} = \sum_{J \in L} t_J \{h^J, s_i\} = \sum_{J \neq 0, J \in L} \sum_{k=1}^r (\partial h^J / \partial h_k) \{h_k, s_i\} t_J = \left( \sum_{J \neq 0, J \in L} (\partial h^J / \partial h_i) t_J \right) s_i$$

$$\text{car } \{h_k, s_i\} = (ad h_k)(s_i) = \langle h_k, \lambda_i \rangle s_i = \delta_{ik} s_i.$$

Donc pour tout  $J \neq 0, J \in L$ , on a  $(\partial h^J / \partial h_i) = 0$  et ceci pour tout  $1 \leq i \leq r$ , ce qui est impossible.

Par conséquent  $L = \{(0, \dots, 0)\}$  et  $t = t_{(0, \dots, 0)} \in \mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)$  et  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a}_\Lambda)^{\mathfrak{a}_\Lambda} = \mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda)$ .

Enfin pour démontrer (i) et (ii) dans le cas où  $\mathfrak{a}$  est presque ad-algébrique, il suffit pour le (i) d'utiliser la propriété caractéristique des algèbres presque ad-algébriques (Prop. 6.3). On a alors  $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$  où  $\mathfrak{s}$  est une algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{z}$  est le centre de  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$ ,  $\mathfrak{m}$  est le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{z}$  agit ad-réductivement sur  $\mathfrak{a}$ . Alors  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m}$  est inclus dans  $\mathfrak{a}_\Lambda$  et  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda$  agit ad-réductivement sur  $\mathfrak{a}$  puisque  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda$  s'identifie à une sous-algèbre de  $\mathfrak{z}$ . Donc l'inclusion  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}_\Lambda}$  devient une égalité dans ce cas. Enfin le (ii) provient du fait que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}_\Lambda}$ . □

## 7.4

On prendra garde que, même pour une algèbre ad-algébrique  $\mathfrak{a}$ , son semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$  n'est pas forcément égal à  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}'}$ , comme l'exemple de 5.15 le prouve.

## 8 Centre et semi-centre de Poisson d'un biparabolique et centre d'un parabolique tronqué.

### 8.1

On considère  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  une sous-algèbre biparabolique standard de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  avec  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ . Alors l'ensemble des poids  $\Lambda(\mathfrak{q})$  du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  peut être identifié avec un sous-ensemble de  $\mathfrak{h}^*$  puisque les éléments de  $\Lambda(\mathfrak{q})$  doivent s'annuler sur l'algèbre dérivée  $\mathfrak{q}'$  de  $\mathfrak{q}$  et qu'on peut prendre comme supplémentaire de

$\mathfrak{q}'$  dans  $\mathfrak{q}$  un sous-espace du Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ . Plus précisément, comme  $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}_\Lambda$ , on a  $\Lambda(\mathfrak{q}) \subset \sum_{\alpha \in \pi \setminus (\pi' \cap \pi'')} \mathbb{Z}\varpi_\alpha$  où  $\varpi_\alpha$  est le poids fondamental associé à la racine simple  $\alpha$ , relativement à  $\pi$ . De plus pour tout  $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{q})$ , le sous-espace  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})_\lambda$  défini dans la Remarque 5.6 peut être identifié au sous-espace de poids  $\lambda$  (pour l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ) de  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$ .

Enfin on a  $\mathfrak{q}_\Lambda = \mathfrak{q}' + \mathfrak{h}_\Lambda$  où  $\mathfrak{h}_\Lambda = \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle h, \lambda \rangle = 0 \forall \lambda \in \Lambda(\mathfrak{q})\}$ . Remarquons que  $\mathfrak{h}_\Lambda \supset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}'$ .

Nous verrons plus loin (3.3 de la Section B du Chap. V), comment décrire précisément  $\mathfrak{h}_\Lambda$ .

## 8.2

**Corollaire.** *Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{k}$ . Soit  $\mathfrak{q}_\Lambda$  la troncation canonique de  $\mathfrak{q}$ .*

- (i) *On a  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda) = \mathbf{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}'} = \mathbf{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}_\Lambda}$ .*
- (ii) *L'algèbre  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  est factorielle.*
- (iii) *Si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi}^-$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  simple, de plus grande racine  $\beta$ , alors le centre  $\mathfrak{z}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  de  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est inclus dans  $\mathbf{k}x_\beta$ . Il est égal à  $\mathbf{k}x_\beta$  si, et seulement si,  $\langle h, \beta \rangle = 0$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}_\Lambda$ .*
- (iv) *Si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$  (avec  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ ) est une sous-algèbre biparabolique propre de  $\mathfrak{g}$  simple (c'est-à-dire  $\pi' \cap \pi'' \subsetneq \pi$ ), alors le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q})$  est réduit aux scalaires.*

*Démonstration.* Le (i) découle de la proposition 7.3, car toute sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple est presque ad-algébrique, d'après la remarque 6.4 et car  $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}'$  s'identifie à une sous-algèbre de  $\mathfrak{h}$  donc agit ad-réductivement sur  $\mathfrak{q}$ . Pour le (ii), considérons  $A$  une algèbre commutative intègre sur  $\mathbf{k}$  et  $X$  une famille de dérivations de  $A$  localement nilpotentes. Soit  $A^X = \{a \in A \mid \delta a = 0, \forall \delta \in X\}$ . Un argument dans [28, 3.5] permet d'affirmer que, si  $a, b \in A \setminus \{0\}$  sont tels que  $ab \in A^X$  alors  $a, b \in A^X$ . Par conséquent si  $A$  est factorielle, alors  $A^X$  l'est aussi. Or  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$  est factorielle (puisque c'est une algèbre de polynômes sur  $\mathbf{k}$  en  $\dim \mathfrak{q}$  indéterminées) et l'algèbre dérivée  $\mathfrak{q}'$  est engendrée par des dérivations de  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$  localement ad-nilpotentes, d'où le (ii) (voir aussi [F5, 1.7]).

Démontrons le (iii). Soit  $z = z' + h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ , avec  $z' \in \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}_{\pi}^-$  et  $h \in \mathfrak{h}_\Lambda$ . Alors  $[x_\alpha, z] = 0$  pour tout  $\alpha \in \pi$ , donc  $h = 0$  puisque, les vecteurs de poids étant en somme directe, pour tout  $\alpha \in \pi$ ,  $\langle h, \alpha \rangle = 0$ . De plus  $[x_\alpha, z'] = 0$  pour tout  $\alpha \in \pi$ , ce qui implique que  $z' \in \mathfrak{n}$  et même que  $z' \in \mathbf{k}x_\beta$ . Si pour tout  $h \in \mathfrak{h}_\Lambda$ ,  $\langle h, \beta \rangle = 0$ , on a bien sûr  $x_\beta \in \mathfrak{z}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ . Sinon  $x_\beta \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ . D'où le (iii).

Démontrons le (iv). Pour cela on a besoin de la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  exhibée au Chap. IV (voir 4.7 de la Sec. B du Chap. IV) pour le semi-centre  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  d'un parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$ , qui est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs, chacun d'eux ayant pour poids  $\varepsilon_\Gamma \delta_\Gamma$ ,  $\Gamma \in \Pi$ . Tous ces poids sont des poids entiers dominants non nuls dès que  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{g}$  et que  $\mathfrak{g}$  est simple (voir Par. 1 de la Section C du Chapitre IV).

Considérons un élément  $y \in \mathbf{Y}(\mathfrak{q})$ . Comme  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{\pi'} \cap \mathfrak{p}_{\pi''}^-$ , est une sous-algèbre biparabolique propre de  $\mathfrak{g}$  simple, alors  $\mathfrak{p}_{\pi'}$  ou  $\mathfrak{p}_{\pi''}^-$  est une sous-algèbre parabolique propre de  $\mathfrak{g}$ . Supposons que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  soit propre. On a donc  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}) = \mathbf{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} \subset \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{q}} = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{q}}$ . En effet si  $y \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{q}}$ , alors pour tout  $\alpha \in \pi''$ , on a  $(ad x_{\alpha})(y) = 0$  et si  $\alpha' = [x_{\alpha}, x_{-\alpha}]$ ,  $(ad \alpha')(y) = 0$  donc  $(ad x_{-\alpha})(y) = 0$  aussi par la théorie des  $\mathfrak{sl}_2$ -modules (voir aussi [30, 7.9]). De même pour tout  $\alpha \in \pi'$ , on a  $(ad x_{-\alpha})(y) = 0$  et donc  $(ad x_{\alpha})(y) = 0$ . Par conséquent  $y \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{q}}$  puisque  $\pi' \cup \pi'' = \pi$  et en particulier  $y \in \mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$ . On a donc (avec les notations du Par. 3 de la Section B du Chap. IV)  $gr'(gr''(y)) \in \mathbf{S}^{\mathbf{J}}$ . Mais  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$  est une algèbre de polynômes dont les poids des générateurs sont tous des poids entiers dominants non nuls, d'après ce qui a été expliqué ci-dessus, et le poids de  $gr'(gr''(y))$  est nul. Par suite  $gr'(gr''(y)) \in \mathbf{k}$  et donc  $y \in \mathbf{k}$  d'après la construction des graduations  $gr'$  et  $gr''$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  (voir [F5, Section 4]).

□

### 8.3

*Remarque.* La situation du (iii) se produit par exemple si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_7(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1\}$  ou  $\pi' = \{\alpha_3\}$  ou  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  ou  $\pi' = \emptyset$  (numérotation des racines comme dans [8, Planche II]). On vérifie qu'alors  $\mathfrak{h}_{\Lambda} = \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{n}_{\pi'}, \mathfrak{n}_{\pi'}^-]$  et que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{q}_{\Lambda}) = \mathbf{k}x_{\beta}$ .

Si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$  est une sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g}$  avec  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ , et  $\pi' \neq \pi$  et  $\pi'' \neq \pi$ , alors il se peut que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{q}_{\Lambda})$  soit égal à  $\mathfrak{q}_{\Lambda}$  tout entier. C'est par exemple le cas pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_7(\mathbf{k})$ , et  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2\}$ . Alors dans ce cas on vérifie que  $\mathfrak{h}_{\Lambda} = \{0\}$  et que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{q}_{\Lambda}) = \mathfrak{q}_{\Lambda} = \mathbf{k}x_{-\alpha_1} \oplus \mathbf{k}x_{-\alpha_3} \oplus \mathbf{k}x_{\alpha_2}$ .

## 9 Indice d'une algèbre de Lie.

### 9.1

On continue avec les mêmes notations que précédemment, notamment  $\mathfrak{a}$  qui désigne toujours une algèbre de Lie de dimension finie sur le corps  $\mathbf{k}$ .

Pour  $f \in \mathfrak{a}^*$ , notons  $\mathfrak{a}^f = \{x \in \mathfrak{a} \mid \forall y \in \mathfrak{a}, f([x, y]) = 0\}$ .

Alors on définit l'indice de  $\mathfrak{a}$  par :  $\text{indice}(\mathfrak{a}) = \min_{f \in \mathfrak{a}^*} \dim(\mathfrak{a}^f)$  ([60, 19.7.3]).

On dit qu'un élément  $f \in \mathfrak{a}^*$  est régulier lorsque  $\dim(\mathfrak{a}^f) = \text{indice}(\mathfrak{a})$  et on note  $\mathfrak{a}_{reg}^*$  l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathfrak{a}^*$  ([60, 19.7.3]).

### 9.2

Supposons désormais que  $\mathfrak{a}$  est ad-algébrique et notons  $\mathbf{A}$  son groupe adjoint (c'est-à-dire  $\mathbf{A}$  est le sous-groupe fermé (donc algébrique) irréductible du groupe linéaire  $\mathbf{GL}(\mathfrak{a})$  des automorphismes linéaires de  $\mathfrak{a}$  dont l'algèbre de Lie est  $ad(\mathfrak{a})$ ).

Le groupe adjoint  $\mathbf{A}$  agit aussi sur l'espace dual  $\mathfrak{a}^*$  de  $\mathfrak{a}$  par une action déduite de celle sur  $\mathfrak{a}$  appelée action coadjointe (autrement dit si  $f \in \mathfrak{a}^*$ ,  $x \in \mathfrak{a}$ , et  $g \in \mathbf{A}$ , on a  $(g.f)(x) = f(g^{-1}.x)$  où l'on note  $g.x$  l'action de  $g$  sur  $x$ ).

Alors l'indice de  $\mathfrak{a}$  est aussi la codimension minimale d'une orbite coadjointe, c'est-à-dire  $\text{indice}(\mathfrak{a}) = \min_{f \in \mathfrak{a}^*} \text{codim}(\mathbf{A}.f)$  puisque  $\dim \mathfrak{a} - \dim(\mathfrak{a}^f) = \dim(\mathbf{A}.f)$  ([16, 1.11.3]).

On dira qu'une  $\mathbf{A}$ -orbite coadjointe est régulière lorsque sa codimension dans  $\mathfrak{a}^*$  est minimale (égale à l'indice de  $\mathfrak{a}$ ).

### 9.3

Soit  $(a_1, \dots, a_r)$  une base du  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{a}$ . Alors le rang sur  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  de la matrice  $([a_i, a_j])_{1 \leq i, j \leq r}$  est égal à  $\dim \mathfrak{a} - \text{indice}(\mathfrak{a})$  (en considérant les  $[a_i, a_j]$  comme des éléments de  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$ ) (voir aussi [60, 40.2.5]).

### 9.4

Notons  $\text{degtr}(\mathbf{C}(\mathfrak{a}))$  le degré de transcendance sur le corps  $\mathbf{k}$  du corps  $\mathbf{C}(\mathfrak{a})$  et  $\text{GKdim}(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a}))$  la dimension de Gelfand-Kirillov de  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a})$ , qui est aussi égale au degré de transcendance sur  $\mathbf{k}$  du corps des fractions de  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a})$ .

Comme l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  est supposée ad-algébrique, un résultat de Chevalley-Dixmier ([14, lemme 7]) entraîne l'égalité :

$$(*) \quad \text{indice}(\mathfrak{a}) = \text{degtr}(\mathbf{C}(\mathfrak{a})).$$

L'égalité (\*) est également connue comme étant un cas particulier d'un théorème de Rosenlicht ([56]).

### 9.5

Comme  $\mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a})) \subset \mathbf{C}(\mathfrak{a})$ , la dimension de Gelfand-Kirillov du centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est toujours inférieure ou égale à l'indice de  $\mathfrak{a}$  d'après (\*). (Remarquons que lorsque  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  la dimension de Gelfand-Kirillov de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est alors égale à l'indice de  $\mathfrak{a}$  puisque dans ce cas  $\mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a})) = \mathbf{C}(\mathfrak{a})$  et d'après (\*) - si on ne suppose pas  $\mathfrak{a}$  ad-algébrique, ceci provient de [49, Prop. 4.1]).

Donc la Proposition 7.3 implique que la dimension de Gelfand-Kirillov du semi-centre de Poisson  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a})$  est inférieure ou égale à l'indice de la troncation canonique  $\mathfrak{a}_\Lambda$  de  $\mathfrak{a}$ . Nous verrons en fait (Prop. 9.7) qu'il y a égalité.

### 9.6

Rappelons  $\Lambda(\mathfrak{a})$ , l'ensemble des poids du semi-centre de Poisson  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a})$  et notons  $\mathbf{G}(\mathfrak{a})$  le groupe additif engendré par  $\Lambda(\mathfrak{a})$ . C'est un groupe abélien libre de type fini (voir [F6, Appendice C] pour une preuve détaillée). Notons  $n(\mathfrak{a})$  son rang.

Comme  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{a})} \mathbf{S}(\mathfrak{a})_\lambda$ , et que pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda(\mathfrak{a})$ ,  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})_\lambda \mathbf{S}(\mathfrak{a})_\mu \subset \mathbf{S}(\mathfrak{a})_{\lambda+\mu}$ , on a  $\text{GKdim}(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a})) \geq n(\mathfrak{a})$ .

De plus, puisque tout invariant de  $\mathbf{K}(\mathfrak{a})$  est quotient de semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  de même poids (Prop. 5.11), on a

$$(**) \quad \text{degtr}(\mathbf{C}(\mathfrak{a})) = \text{GKdim}(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{a})) - n(\mathfrak{a})$$

On a donc d'après (\*) et (\*\*),

$$(***) \quad \text{indice}(\mathfrak{a}) = \text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})) - n(\mathfrak{a}).$$

### 9.7

On obtient alors la Proposition suivante (voir aussi [F6, Lemme 2.5], démontré dans le cas où  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ).

**Proposition .** *Soit  $\mathfrak{a}$  une algèbre de Lie ad-algébrique et  $\mathfrak{a}_\Lambda$  sa troncation canonique. Alors on a*

$$(i) \quad \mathbf{Sy}(\mathfrak{a}_\Lambda) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda) = \mathbf{Sy}(\mathfrak{a}).$$

$$(ii) \quad (\mathfrak{a}_\Lambda)_\Lambda = \mathfrak{a}_\Lambda.$$

$$(iii) \quad \text{indice}(\mathfrak{a}_\Lambda) = \text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{a})).$$

$$(iv) \quad \dim \mathfrak{a} + \text{indice}(\mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{a}_\Lambda + \text{indice}(\mathfrak{a}_\Lambda).$$

*Démonstration.* Pour montrer l'assertion (i) il suffit, d'après la Prop. 7.3, de montrer que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}_\Lambda) \subset \mathbf{Sy}(\mathfrak{a})$ . Cela provient du fait que  $\mathfrak{a}$  étant ad-algébrique, il existe un espace vectoriel supplémentaire de  $\mathfrak{a}_\Lambda$  dans  $\mathfrak{a}$  qui agit de façon ad-réductive sur  $\mathfrak{a}$  (voir aussi la fin de la preuve de la Prop. 7.3). Donc  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}_\Lambda) \subset \mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda)$  d'après la Prop. 7.3. Mais  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda) \subset \mathbf{Sy}(\mathfrak{a}_\Lambda)$ , d'où l'égalité et le (i). Le (ii) en découle immédiatement puisqu'on en déduit que  $\Lambda(\mathfrak{a}_\Lambda) = \{0\}$ .

Enfin le (i) entraîne, grâce au Corollaire 5.12, que l'on a  $\mathbf{C}(\mathfrak{a}_\Lambda) = \mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda))$ .

De plus comme  $\mathfrak{a}$  est ad-algébrique,  $\mathfrak{a}_\Lambda$  l'est aussi (d'après la Prop. 6.3). Donc d'après (\*) ci-dessus, on a

$$\text{indice}(\mathfrak{a}_\Lambda) = \text{degtr}(\mathbf{C}(\mathfrak{a}_\Lambda)) = \text{degtr}(\mathbf{Frac}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda))) = \text{GKdim}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a}_\Lambda)) = \text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}))$$

par (i). D'où le (iii).

Enfin pour montrer le (iv), rappelons d'abord (voir Preuve de la Prop. 7.3) que l'on peut identifier  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{a})$  avec  $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda)^*$ .

Puis comme  $\mathfrak{a}$  est ad-algébrique,  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda$  agit rationnellement ad-réductivement sur  $\mathfrak{a}$ . Donc il existe une base de  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_\Lambda$  sur laquelle les éléments de  $\Lambda(\mathfrak{a})$  prennent des valeurs rationnelles. Donc  $\dim(\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{a})) = \dim(\mathfrak{a}) - \dim(\mathfrak{a}_\Lambda) = n(\mathfrak{a})$ .

Par conséquent l'égalité (\*\*\*) et le (iii) permettent de conclure. □

# Chapitre II

## Le cas quantique.

On reprend les mêmes notations que celles introduites dans la Section B du Chapitre I. En particulier on désigne par  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur le corps  $\mathbf{k}$  et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . On fixe également une base  $\pi$  de l'ensemble des racines  $\Delta$  de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  et  $\pi'$  un sous-ensemble de  $\pi$ , auquel est associée une sous-algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}'$  de  $\mathfrak{g}$  et on pose  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ . On notera  $P(\pi)$ , resp.  $P(\pi')$ , le réseau des poids et  $P^+(\pi)$ , resp.  $P^+(\pi')$ , l'ensemble des poids entiers dominants, relativement à  $\pi$ , resp. à  $\pi'$ .

### A Le théorème fondamental.

#### 1 Le contexte.

##### 1.1

On considère une indéterminée  $q$  et  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  une sous-algèbre parabolique standard de  $\mathfrak{g}$  (voir Chap. I, Section B, Par. 1) associée à  $\pi'$ . Alors  $\mathfrak{g}'$  est une sous-algèbre de Lie semi-simple maximale de  $\mathfrak{p}$  et l'algèbre  $\mathfrak{h}'$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}'$ . On notera également  $W$ , resp.  $W'$ , le groupe de Weyl de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , resp. de  $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  et  $(, )$  la forme bilinéaire, sur  $\mathbf{k}$ , symétrique non dégénérée invariante par  $W$ , définie sur l'espace dual  $\mathfrak{h}^*$  de  $\mathfrak{h}$  à partir de la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ . Le plus long élément de  $W$ , resp. de  $W'$ , sera noté  $w_0$ , resp.  $w'_0$ .

##### 1.2

On peut définir, d'après Drinfeld et Jimbo, l'algèbre enveloppante quantifiée simplement connexe, que nous noterons  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , associée à  $\mathfrak{g}$ . De même  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$  désignera l'algèbre enveloppante quantifiée simplement connexe de Drinfeld-Jimbo associée à  $\mathfrak{g}'$ . Si  $\mathbf{K}$  est le plus petit corps contenant le corps des fractions rationnelles  $\mathbf{k}(q)$  ainsi que  $q^{1/m}$  pour un  $m \in \mathbb{N}^*$  convenable, alors  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de Hopf. On peut également définir une sous-algèbre de Hopf de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , que nous noterons  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ , associée à  $\mathfrak{p}$  et si  $\mathfrak{p}'$  est l'al-

gèbre dérivée de  $\mathfrak{p}$ , une sous-algèbre  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  associée à  $\mathfrak{p}'$ . Pour plus de détails, notamment pour les relations entre les générateurs de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  ou pour la définition précise de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ , on pourra se référer à mon article [F2] (voir aussi les notations de [F4]).

### 1.3

La définition de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  entraîne l'existence de deux sous-algèbres  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n})$ , resp.  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  (qu'on peut dire associées à  $\mathfrak{n}$ , resp.  $\mathfrak{n}^-$ ) telles que la multiplication donne l'isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels suivant :  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}) \otimes \mathbf{U}^0 \otimes \mathbf{U}_q(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  où  $\mathbf{U}^0$  est la  $\mathbf{K}$ -algèbre du tore  $\mathbf{T}_\pi = \{\tau(\mu) \mid \mu \in P(\pi)\}$  associé à  $\pi$ . (Rappelons que le tore  $\mathbf{T}_\pi$  est le groupe abélien multiplicatif engendré par les  $\tau(\varpi_\alpha)$  où les  $\varpi_\alpha$  sont les poids fondamentaux associés aux racines simples  $\alpha$  de  $\pi$ ).

Notons également  $(\mathbf{U}^0)'$  la  $\mathbf{K}$ -algèbre du sous-groupe de  $\mathbf{T}_\pi$  engendré par les  $\tau(\alpha)$ , pour  $\alpha \in \pi'$ .

La multiplication donne les isomorphismes de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels suivants :  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}) \otimes \mathbf{U}^0 \otimes \mathbf{U}_q(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) \simeq \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  et  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}) \otimes (\mathbf{U}^0)' \otimes \mathbf{U}_q(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) \simeq \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$  où  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  est la sous-algèbre de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  associée à  $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$ .

### 1.4

On peut définir une action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  sur elle-même, ainsi que de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  sur elle-même (notée encore *ad*) qui vérifie la règle de Leibniz (c'est-à-dire pour tous  $a, b, c \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , resp.  $a, b, c \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ , si  $\delta$  est le coproduit et si  $\delta(a) = a_1 \otimes a_2$  alors  $(ada)(bc) = (ada_1)(b)(ada_2)(c)$  en omettant le signe somme) et telle que  $a \mapsto ada$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  dans  $End(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$  soit un morphisme d'algèbres.

### 1.5

On considèrera une certaine filtration  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  ([29, 5.3.1]), invariante par l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , déterminée par le degré des générateurs de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ . Plus précisément si l'on note  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq card(\pi)$ , les racines simples de  $\pi$ ,  $e_i$ , resp.  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq card(\pi)$ , les générateurs ("canoniques") de l'algèbre  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n})$ , resp.  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ , de poids  $\alpha_i$ , resp.  $-\alpha_i$  pour l'action adjointe du tore  $\mathbf{T}_\pi$  (voir [F2, 0]) alors dans cette filtration, le degré de  $e_i$ , resp.  $g_i$ , vaut zéro et celui de  $\tau(\alpha_i)$  vaut  $-1$ .

Comme pour tout  $\mu \in P(\pi)$ ,  $\mu = \sum k_i \alpha_i$ ,  $k_i \in \mathbb{Q}$ ,  $\deg(\tau(\mu)) = -\sum k_i$ , ce degré est à valeurs dans  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  (d'après [29, 7.1.25]). On notera  $gr_{\mathcal{F}}$  la graduation associée à cette filtration  $\mathcal{F}$ .

### 1.6

On dit que  $u \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  est un semi-invariant de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  lorsque, pour tout  $v \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ ,  $(adv)(u) \in \mathbf{K}u$  et le semi-centre (dit aussi semi-centre quantique)  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  est alors défini comme étant le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel engendré par les semi-invariants de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ . Cela correspond, pour  $q = 1$ , à la définition du semi-centre de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$  donnée dans le Chap. I, Sec. B, au 5.3, 2).

## 1.7

Grâce à la règle de Leibniz, on vérifie que le semi-centre de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  est une sous-algèbre de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ . On vérifie également que  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  est l'algèbre des invariants de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  par l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$ . Autrement dit  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})) = \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})^{\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')} := \{u \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}) \mid \forall v \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}'), (adv)(u) = \varepsilon(v)u\}$  où  $\varepsilon$  est la co-identité (ou augmentation) de l'algèbre de Hopf  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  (voir [F2, Lemme 3.1.2]).

## 1.8

Contrairement à ce qui se passe dans le cas classique, c'est-à-dire pour l'algèbre enveloppante universelle - classique -  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , l'action adjointe dans le cas quantique, c'est-à-dire dans  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , n'est pas forcément localement finie.

Pour  $A = \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  ou  $A = \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , notons  $\mathbf{F}(A) = \{a \in A \mid \dim(ad A)(a) < \infty\}$  l'algèbre des éléments de  $A$  sur lesquels  $A$  agit de façon localement finie par l'action adjointe (c'est aussi un  $A$ -module pour l'action adjointe). Il est évident que  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  est inclus dans l'algèbre  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ .

Comme  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} (ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))\tau(-4\lambda)$  ([29, 7.1.6, 7.1.16]), j'ai vérifié ([F2, Lemme 3.1.1]) que l'on a  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})) = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} (ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))\tau(-4\lambda)$ .

## 2 Le résultat fondamental.

On définit l'ensemble  $\mathcal{D}$  par :

$$\mathcal{D} = \{\lambda \in P^+(\pi) \mid (w'_0\lambda - w_0\lambda, \pi') = 0\}.$$

On remarque que  $\mathcal{D}$  est un monoïde additif.

Dans ma thèse (voir [F1]) et aussi dans [F2, Thm. du Par. 3], j'ai montré le résultat fondamental suivant :

**Théorème .** *On a :*

(i)

$$\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{D}} \mathbf{Sy}(\lambda)$$

où  $\mathbf{Sy}(\lambda) = (ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))\tau(-4\lambda) \cap \mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ .

(ii)  $\mathbf{Sy}(\lambda)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension un pour tout  $\lambda \in \mathcal{D}$  et son générateur a pour poids (pour l'action adjointe de  $\mathbf{U}^0$ )  $w'_0\lambda - w_0\lambda$ .

*Idée de démonstration.*

Ce résultat vient du fait que, dans le cas quantique, grâce à l'application de Rosso, l'image du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  est dans le dual de Hopf  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^*$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , qui est la somme directe pour  $\lambda \in P^+(\pi)$  des espaces de coefficients matriciels  $\mathbf{C}_q(\lambda)$  définis ci-dessous. Dans ce dual de Hopf, l'existence d'un semi-invariant se traduit simplement en termes de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$ -modules simples duaux l'un de l'autre.

Plus précisément, fixons  $\lambda \in P^+(\pi)$ . On note  $\mathbf{L}_q(\lambda)$  le  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -module (à gauche) simple de plus haut poids  $\lambda$  et  $\mathbf{C}_q(\lambda)$  le  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel engendré par les coefficients matriciels  $c_{\xi, v} \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^*$  pour  $\xi \in \mathbf{L}_q(\lambda)^*$  et  $v \in \mathbf{L}_q(\lambda)$  :  $c_{\xi, v}$  est défini par  $c_{\xi, v}(u) = \xi(u.v)$  pour tout  $u \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ .

On note  $R$  la forme de Rosso : c'est une forme bilinéaire  $ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -invariante sur  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}) \times \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , non dégénérée sur  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}) \times \mathbf{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ . On note  $\mathcal{R} : \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^*$  l'application de Rosso associée (pour tous  $u, v \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ ,  $\mathcal{R}(u)(v) = R(u, v)$ ). Lorsque  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  est muni de l'action adjointe et que  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^*$  est muni de l'action coadjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , l'application de Rosso  $\mathcal{R}$  est un morphisme de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules injectif.

De plus on a  $\mathcal{R}((ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))\tau(-4\lambda)) = \mathbf{C}_q(\lambda)$  ([29, 7.1.22]). De façon analogue j'ai montré que

$$\mathcal{R}((ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))\tau(-4\lambda)) = \mathbf{C}'_q(\lambda)$$

où  $\mathbf{C}'_q(\lambda)$  est le  $\mathbf{K}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}_q(\lambda)$  engendré par les coefficients  $c_{\xi, v}$  où  $\xi \in \mathbf{L}_q(\lambda)^*$  et  $v \in \mathbf{L}'_q(\lambda) := \mathbf{U}_q(\mathfrak{n}_{\pi'}^-).v_\lambda$  où  $v_\lambda$  est un vecteur de plus haut poids  $\lambda$  de  $\mathbf{L}_q(\lambda)$ . Notons que  $\mathbf{L}'_q(\lambda)$  est un  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$  (pour l'action de  $\mathbf{U}^0$ ).

J'ai montré que l'on a la suite d'isomorphismes de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ -modules suivants :

$$(ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))\tau(-4\lambda) \longrightarrow \mathbf{C}'_q(\lambda) \longrightarrow \mathbf{L}_q(\lambda)^* \otimes \mathbf{L}'_q(\lambda)$$

avec  $\mathcal{R}$  comme premier isomorphisme et avec l'application  $c_{\xi, v} \mapsto \xi \otimes v$  comme deuxième isomorphisme.

Comme les semi-invariants de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  sont les invariants de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  pour l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$ , l'existence d'un semi-invariant par l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  dans  $(ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))\tau(-4\lambda)$  est équivalente à l'existence d'un invariant par l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$  dans  $(ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))\tau(-4\lambda)$  et donc aussi à l'existence d'un invariant par l'action coadjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$  dans  $\mathbf{C}'_q(\lambda)$ .

Considérons  $\mathbf{L}_q(\lambda)^*$  comme un  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche et notons  $\xi_{-w_0\lambda}$  son vecteur de plus haut poids  $(-w_0\lambda)$ , déterminé à un scalaire multiplicatif non nul près. Posons  $(\mathbf{L}_q(\lambda)^*)' := \mathbf{U}_q(\mathfrak{n}_{\pi'}^-).\xi_{-w_0\lambda}$  : c'est un sous- $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$ -module simple de  $\mathbf{L}_q(\lambda)^*$  de plus haut poids  $-w_0\lambda$  (pour l'action de  $\mathbf{U}^0$ ). On a donc  $(\mathbf{L}_q(\lambda)^*)' \simeq \mathbf{L}'_q(-w_0\lambda)$  comme  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$ -modules à gauche.

Or on montre que l'existence d'un invariant non nul par l'action de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$  dans  $\mathbf{L}_q(\lambda)^* \otimes \mathbf{L}'_q(\lambda)$  implique que les  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$ -modules simples  $\mathbf{L}'_q(\lambda)^*$  et  $(\mathbf{L}_q(\lambda)^*)'$  sont isomorphes, donc que l'on a  $\lambda \in \mathcal{D}$  et qu'un tel invariant est unique à un scalaire multiplicatif près et son poids, pour l'action de  $\mathbf{U}^0$ , est égal à  $w'_0\lambda - w_0\lambda$ .

Réciproquement on montre que, pour  $\lambda \in \mathcal{D}$ , les  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}')$ -modules simples  $\mathbf{L}'_q(\lambda)^*$  et  $(\mathbf{L}_q(\lambda)^*)'$  sont isomorphes, puis que l'espace  $\mathbf{Sy}(\lambda)$  est non nul et est donc de dimension un d'après la première partie.

Comme  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})) = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{Sy}(\lambda)$  d'après 1.8, on en déduit le théorème.  $\square$

## B Le cas particulier d'une sous-algèbre parabolique propre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$ de dimension maximale.

Il s'agit de la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  associée au sous-ensemble  $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_n\}$  si  $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  est le système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  numérotées comme dans Bourbaki ([8, Planche I]). Cette sous-algèbre parabolique est constituée des matrices à coefficients dans  $\mathbf{k}$  de trace nulle dont les coefficients de la dernière ligne sont nuls sauf éventuellement le dernier.

### 1 Description de $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ .

#### 1.1

Comme l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, l'algèbre enveloppante  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est un module libre sur son centre  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ . Il existe donc un sous-espace vectoriel  $\mathbf{H}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , que l'on peut choisir  $ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -stable, tel que la multiplication dans  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  donne l'isomorphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules :  $\mathbf{H}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ . Ceci est un théorème de séparation des variables dû à Kostant ([42]) dont on pourra trouver également une version dans [16, 8.2]. Les éléments de  $\mathbf{H}(\mathfrak{g})$  sont appelés éléments harmoniques de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ .

Dans le cas quantique il y a également un théorème de séparation analogue (voir [29, 7.3.8]), mais seulement pour la sous-algèbre  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$  des éléments de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  sur lesquels  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  agit par l'action adjointe de façon localement finie. Notons  $\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g})$  le centre de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  : c'est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes en rang de  $\mathfrak{g}$  générateurs.

Il existe un  $\mathbf{K}$ -sous-espace vectoriel  $\mathbf{H}_q(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$ ,  $ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -stable, tel que la multiplication dans  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  donne l'isomorphisme de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules :  $\mathbf{H}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{Z}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$  ([29, 7.3.8]).

Posons  $\rho = \sum_{i=1}^n \varpi_i$  où  $\varpi_i$  désigne le  $i$ ème poids fondamental correspondant à la  $i$ ème racine simple  $\alpha_i$  ( $\rho$  est aussi égal à la demi-somme des racines positives de  $\mathfrak{g}$ ). On vérifie que l'on a le corollaire suivant (voir [F2, Lemmes 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3]).

**Corollaire.** *Soit  $\mathfrak{p}$  défini comme au début de cette section. Alors le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes en un générateur  $d$  de poids  $(n+1)\varpi_n$  et qui appartient à  $(ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))(\tau(-4\rho))$ . De plus  $d \in \mathbf{H}_q(\mathfrak{g})$  et c'est le vecteur de plus haut poids de l'unique copie du  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -module simple  $\mathbf{L}_q((n+1)\varpi_n)$  de plus haut poids  $(n+1)\varpi_n$  dans  $\mathbf{H}_q(\mathfrak{g})$ .*

*Idée de démonstration.*

Dans ce cas on vérifie que l'ensemble  $\mathcal{D}$  du Par. 2 de la section A est un monoïde engendré par  $\rho$ . Donc  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{Sy}(m\rho)$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes en une indéterminée  $d \in \mathbf{Sy}(\rho)$ . De plus le poids de  $d$  est  $w'_0\rho - w_0\rho = (n+1)\varpi_n$  et  $d$ , annulé par l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{n}) \subset \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$ , est un vecteur de plus haut poids  $(n+1)\varpi_n$ .

Enfin le nombre de copies de  $\mathbf{L}_q((n+1)\varpi_n)$  dans l'espace des éléments harmoniques  $\mathbf{H}_q(\mathfrak{g})$  est égal à la dimension du sous-espace de poids zéro de  $\mathbf{L}_q((n+1)\varpi_n)$  (voir [29, 8.1.5]), qui vaut un. Il suffit ensuite d'utiliser la filtration  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  mentionnée au 1.5

de la Section A. On applique alors [29, 8.1.3, 8.1.11] pour constater que l'unique composante  $H_m$  de  $gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{H}_q(\mathfrak{g}))$  contenant  $\mathbf{L}_q((n+1)\varpi_n)$  vérifie  $m = \deg(gr_{\mathcal{F}}(\tau(-4\rho))) = \deg(gr_{\mathcal{F}}(d))$  et donc que  $d$  appartient à  $\mathbf{H}_q(\mathfrak{g})$ .  $\square$

## 1.2

*Remarque.* Le Corollaire 1.1 est une généralisation au cas quantique d'un résultat analogue pour l'algèbre enveloppante universelle (classique)  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{p}$  pour le parabolique  $\mathfrak{p}$  défini comme au début de cette section. En effet ce cas particulier de sous-algèbre parabolique a été étudié dans le cas classique indépendamment par Dixmier et Joseph ([17] et [27]) : ils ont montré que, dans ce cas, le semi-centre classique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}(\mathfrak{p}))$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en une indéterminée que nous noterons encore  $d$  et ont donné une description de  $d$  tout à fait analogue à ce qui est mentionné dans le Corollaire ci-dessus. Ils ont en effet montré que  $d$  est un vecteur de plus haut poids  $(n+1)\varpi_n$  de l'unique copie du  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module simple  $\mathbf{L}((n+1)\varpi_n)$  de plus haut poids  $(n+1)\varpi_n$  dans l'espace des éléments harmoniques  $\mathbf{H}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ .

## 2 La conjecture de Gelfand-Kirillov.

### 2.1

On continue toujours avec le cas particulier de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique propre de  $\mathfrak{g}$  de dimension maximale (dont le Levi a pour ensemble de racines simples  $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_n\}$ ). Rappelons que le centre  $\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  est un anneau de polynômes sur  $\mathbf{K}$  en  $n$  indéterminées  $z_1, \dots, z_n$  : pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $z_i$  est l'unique invariant, à un scalaire multiplicatif près, par l'action adjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , de  $(ad \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))(\tau(-4\varpi_i))$ .

Dans [17] Dixmier a montré que l'algèbre enveloppante universelle  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est, à localisation près par  $d$ , une extension centrale polynomiale de l'algèbre enveloppante universelle  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{p}$ .

J'ai montré que, de façon analogue au cas classique, à localisation près par le semi-invariant  $d \in \mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ , l'algèbre enveloppante quantifiée  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  est une extension centrale polynomiale de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ .

Plus précisément, on a le théorème suivant (voir [F3, Thm. 3]).

**Théorème.** *On garde les mêmes hypothèses qu'au début de la section et les mêmes notations. Alors l'ensemble des puissances de  $d$  est une partie de Ore de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  et de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ . Notons  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})_d$ , resp.  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})_d$ , le localisé de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , resp. de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$ , par cette partie de Ore. Alors  $z_1, \dots, z_n$  sont  $\mathbf{Frac}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ -algébriquement indépendants et on a*

$$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})_d = \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})_d[z_1, \dots, z_n].$$

La démonstration étant assez technique et longue, je vais me contenter de ne donner ici que les grandes lignes. Pour plus de détails, on pourra se référer à mes deux articles [F2] et [F3].

*Idée de démonstration.*

Soit  $\mathfrak{m}^-$  le radical nilpotent de la sous-algèbre parabolique opposée de  $\mathfrak{p}$ . Notant  $x_{i,j}$  la matrice d'ordre  $n+1$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la  $i$ ème ligne et  $j$ ème colonne qui vaut 1, le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{m}^-$  est engendré par les vecteurs  $x_{n+1,j}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . On a alors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k}) = \mathfrak{m}^- \oplus \mathfrak{p}$  et on note  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{m}^-)$  la sous-algèbre de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  associée à  $\mathfrak{m}^-$ , engendrée par les vecteurs  $\tilde{g}_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , où  $\tilde{g}_n = g_n$  et pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\tilde{g}_i = (ad g_i)\tilde{g}_{i+1}$  et  $\tilde{g}_0 = 1$ . Chaque  $\tilde{g}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est de poids  $-(\alpha_i + \dots + \alpha_n)$  pour l'action adjointe du tore  $\mathbf{T}_\pi$  (voir [F2] pour plus de détails).

J'ai alors montré les résultats intermédiaires suivants (voir [F2, Thm. du Par. 1] et [F2, Thm. du Par. 2]) :

## 2.2

**Lemme.** *La multiplication donne l'isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels suivant :*

$$\mathbf{U}_q(\mathfrak{m}^-) \otimes \mathbf{U}_q(\mathfrak{p}) \simeq \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}).$$

## 2.3

**Lemme.** *Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , et pour tout  $0 \leq j \leq n$ , il existe  $p_{i,j} \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  tel que*

$$z_i = \sum_{0 \leq j \leq n} \tilde{g}_j p_{i,j}.$$

Ce dernier lemme est un résultat analogue à celui établi dans [17, 2.7], mais je l'ai démontré de façon tout à fait différente, en utilisant l'application de Rosso  $\mathcal{R}$ . En effet l'image par  $\mathcal{R}$  de chaque générateur  $z_i$  du centre  $\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g})$  s'exprime en termes de coefficients matriciels (dans l'espace  $\mathbf{C}_q(\varpi_i)$ ). Or  $\mathbf{C}_q(\varpi_i)$  est l'espace des coefficients matriciels du  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ -module simple  $\mathbf{L}_q(\varpi_i)$  de plus haut poids  $\varpi_i$ , et  $\mathbf{L}_q(\varpi_i)$  est une puissance extérieure de  $\mathbf{L}_q(\varpi_n)$ , ce qui permet d'obtenir le lemme ci-dessus.

## 2.4

Le lemme 2.3 exprimant chaque générateur  $z_i$  de  $\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g})$  linéairement en fonction des  $\tilde{g}_j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , ou  $z_i - p_{i,0}$  linéairement en fonction des  $\tilde{g}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , pour obtenir les  $\tilde{g}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , en fonction des  $z_i - p_{i,0}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , il faut ensuite "inverser" en quelque sorte la matrice  $(p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et montrer que le déterminant (au sens classique du terme) de cette matrice est égal à  $d$ , à un scalaire multiplicatif non nul près. Pour cela je me suis inspirée de la méthode utilisée dans [17], notamment concernant "l'admissibilité" d'une matrice à coefficients dans un anneau non nécessairement commutatif. Il a donc fallu montrer que dans la matrice  $(p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  les éléments de chaque colonne sont deux à deux permutable.

Pour ce faire j'ai utilisé l'expression de l'image par  $\mathcal{R}$  de chacun des  $p_{i,j}$ , donnée en fonction de certains coefficients matriciels (voir [F3, (2)]) et c'est un calcul sur ces coefficients matriciels qui m'a permis de conclure (voir [F3, Cor. 1.3]).

Posant  $z_0 = 1$ , j'ai alors développé le déterminant de la matrice  $(p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  suivant la dernière colonne et j'ai montré que pour tout  $1 \leq j \leq n$  et pour tout  $0 \leq i \leq n$ , il existe  $q_{i,j} \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  tel que l'on ait  $\tilde{g}_j d = \sum_{i=0}^n z_i q_{i,j}$ . On en déduit alors, grâce au Lemme

2.2, que pour tout  $u \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une partie finie  $I$  de  $\mathbb{N}^n$  et pour tout  $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n) \in I$ , il existe  $u_{\vec{i}} \in \mathbf{U}_q(\mathfrak{p})$  tels que

$$u = d^{-k} \sum_{\vec{i} \in I} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} u_{\vec{i}}.$$

L'égalité ci-dessus permet alors de conclure.  $\square$

## 2.5

Du théorème 2.1 on déduit que la conjecture de Gelfand-Kirillov (quantique) est vraie pour  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k}))$  (voir [F3, Cor. 2.1]).

**Corollaire.** *Le corps des fractions de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k}))$  ( $\mathbf{k}$  corps algébriquement clos de caractéristique nulle) est isomorphe à un corps de Weyl quantique, c'est-à-dire au corps des fractions d'une algèbre engendrée par des éléments qui  $q$ -commutent, sur une extension transcendante pure du corps  $\mathbf{K}$ .*

*Idée de démonstration.*

Du théorème 2.1 on déduit que l'on a l'isomorphisme de corps suivant :

$$\mathbf{Frac}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))) \simeq \mathbf{Frac}(\mathbf{Frac}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))) \otimes \mathbf{Frac}(\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g}))).$$

Mais on montre que  $\mathbf{Frac}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})))$  est isomorphe à un corps de Weyl quantique  $\mathbf{D}_q$ , c'est-à-dire un corps engendré par des éléments qui  $q$ -commutent.

Ainsi on obtient l'isomorphisme de corps suivant

$$\mathbf{Frac}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))) \simeq \mathbf{Frac}(\mathbf{D}_q \otimes \mathbf{Frac}(\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g})))$$

ce qui donne le Corollaire puisque  $\mathbf{Frac}(\mathbf{Z}_q(\mathfrak{g}))$  est une extension transcendante pure de  $\mathbf{K}$  car isomorphe au corps des fractions rationnelles  $\mathbf{K}(z_1, \dots, z_n)$  et car le passage de  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$  à  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  se fait par multiplication par une partie du tore ([29, 7.1.13]).  $\square$

## 2.6

Signalons que Alev et Dumas avaient étudié précédemment le cas de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  et  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_3)$  et montré que la conjecture de Gelfand-Kirillov quantique est vraie dans ces cas ([1]). Récemment Futorny et Hartwig ont montré que cette conjecture est vraie aussi pour  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{gl}_N)$  ([21]).

Dans le cas classique la conjecture de Gelfand-Kirillov consiste à affirmer que le corps des fractions de l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie algébrique sur un corps  $\mathbf{k}$  algébriquement clos de caractéristique nulle est isomorphe au corps des fractions d'une algèbre de Weyl sur une extension transcendante pure de  $\mathbf{k}$ .

Cette conjecture (classique) avait été démontrée par Gelfand et Kirillov ([22]) pour  $\mathfrak{gl}_N$ ,  $\mathfrak{sl}_N$  et toute algèbre de Lie nilpotente et affirmée pour toute algèbre de Lie simple de rang 2. Pour les algèbres de Lie résolubles, cette conjecture fut prouvée indépendamment

par Borho, Gabriel et Rentschler ([6]), Joseph ([25]) et McConnell ([44]). De plus Alev, Ooms et Van den Bergh ([3]) ont prouvé que cette conjecture est vraie pour toute algèbre de Lie de dimension au plus égale à 8. Cependant les mêmes auteurs ont trouvé des contre-exemples à cette conjecture ([2]). Enfin Premet ([55]) a montré que cette conjecture est fautive pour les algèbres de Lie simples de type  $B$  et  $D$  et pour les algèbres de Lie simples de type  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  et  $F_4$ . Signalons que la conjecture de Gelfand-Kirillov dans le cas des algèbres de Lie simples de type  $C$  reste un problème ouvert ([55, 1.4]).

## 2.7

*Remarque.* Le problème qui se pose si on veut adapter le travail que j'ai expliqué ci-dessus au cas d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  simple de type  $C$ , c'est que dans ce cas il n'y a aucune sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  soit une algèbre de polynômes en une seule indéterminée, c'est-à-dire il n'y a aucune sous-algèbre parabolique tronquée d'indice un (voir Prop. 9.7, Section B, Chap. I). Ce n'est que pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$  qu'il existe des sous-algèbres paraboliques tronquées d'indice un (voir plus loin le Par. 2 de la Sec. 1 du Chap. III).

## C Le cas quantique général.

Le théorème fondamental (Thm. du Par. 2 de la Sec. A) a la conséquence importante suivante : le semi-centre quantique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ , pour n'importe quelle sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de n'importe quelle algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ , est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes.

Mais avant d'énoncer ce théorème (voir [F4, Thm. 1]), je vais d'abord définir deux involutions de l'ensemble des racines simples  $\pi$  de  $\mathfrak{g}$ , que je noterai  $i$  et  $j$ . Ces involutions vont intervenir dans la description du nombre de générateurs de l'algèbre de polynômes  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ .

### 1 Les involutions $i$ et $j$ de $\pi$ .

#### 1.1

Les définitions que je donne ici sont celles de [F6, 2.2, 5.1]. Pour l'involution  $i$ , elle est légèrement différente de celle donnée dans mes articles précédents, mais on obtient le même ensemble  $\Pi$  (voir plus bas) avec l'avantage d'obtenir, grâce à cette définition de  $i$ , de "vraies" orbites et non certaines orbites tronquées, comme je l'ai expliqué dans [F5, 3.2.1].

Rappelons que l'on note  $w_0$  le plus long élément du groupe de Weyl  $W$  de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  et  $w'_0$  le plus long élément du groupe de Weyl  $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  où  $\mathfrak{g}'$  est la plus grande sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{p}$  et où  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ .

Pour tout  $\alpha \in \pi$ , on pose  $j(\alpha) = -w_0\alpha$ .

L'involution  $i$  est définie de la façon suivante. Pour tout  $\alpha \in \pi'$ , on pose  $i(\alpha) = -w'_0\alpha$  et pour tout  $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ , on pose  $i(\alpha) = j(ij)^r(\alpha)$  où  $r \in \mathbb{N}$  est le plus petit entier naturel

tel que  $j(ij)^r(\alpha) \notin \pi'$ . (Par exemple si  $j(\alpha) \notin \pi'$ , on pose  $i(\alpha) = j(\alpha)$ ).

On notera  $\langle ji \rangle$  le sous-groupe des permutations de  $\pi$  engendré par la permutation  $ji = j \circ i$ ,  $\Pi$  l'ensemble des  $\langle ji \rangle$ -orbites des éléments de  $\pi$  et  $\Pi'$  l'ensemble des  $\langle ji \rangle$ -orbites des éléments de  $\pi$  qui sont entièrement incluses dans  $\pi'$ . On remarque que, si  $\Gamma \in \Pi \setminus \Pi'$ , alors  $\text{card}(\Gamma \cap (\pi \setminus \pi')) = 1$  (voir [F6, 5.2]).

## 1.2 Quelques exemples.

1. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $A_n$ , que  $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  et que  $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_n\}$  (avec la numérotation des racines simples comme dans [8, Planche I]). Pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ , on a  $i(\alpha_k) = \alpha_{n-k}$  et pour tout  $1 \leq s \leq n$ , on a  $j(\alpha_s) = \alpha_{n+1-s}$ . Donc pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ , on a  $ji(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$ . Par conséquent  $\Pi$  n'est constitué que d'une seule orbite  $\pi$ .
2. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $B_5$  et  $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  (avec la numérotation des racines simples comme dans [8, Planche II]). Dans ce cas  $j = Id_\pi$  et  $i(\alpha_1) = \alpha_1$ ,  $i(\alpha_5) = \alpha_5$ ,  $i(\alpha_2) = \alpha_4$  et  $i(\alpha_3) = \alpha_3$  donc  $\Pi = \{\{\alpha_1\}, \{\alpha_5\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_4\}\}$ .
3. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $B_4$  et  $\pi' = \{\alpha_3\}$ . Alors  $\Pi = \{\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_4\}\}$ .
4. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $B_n$  ( $n \geq 3$ ) et que  $\mathfrak{g}'$  soit simple de type  $B_{n-1}$ . Alors  $i = j = Id_\pi$  donc  $\Pi = \{\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_n\}\}$ .

## 2 La polynomialité du semi-centre quantique.

### 2.1

Posons, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $d_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varpi_\gamma$  où  $\varpi_\gamma$  est le poids fondamental associé à  $\gamma$ , relativement à  $\pi$ .

Dans [F4, Thm. 1], j'ai démontré, en collaboration avec A. Joseph :

**Théorème.** *Soit  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  une sous-algèbre parabolique de n'importe quelle algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ . Alors le semi-centre quantique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi) = \text{card}(\pi \setminus \pi') + \text{card}(\Pi')$  générateurs ayant pour poids (pour l'action adjointe de  $\mathbf{U}^0$ )  $\delta_\Gamma = w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi$ .*

*Idée de démonstration.*

On montre que les  $d_\Gamma$ ,  $\Gamma \in \Pi$ , sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants et qu'ils engendrent le monoïde additif  $\mathcal{D}$  du Par. 2 de la Sec. A.

Utilisant ensuite le gradué associé à la filtration  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  (1.5 de la Section A), on a  $gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{D}} gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\lambda))$  par le Thm. du Par. 2 de la Sec A et par [29, 7.1.4]. De plus  $gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\lambda))gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\mu)) = gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\lambda + \mu))$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$  par [29, 7.1.7] et car tous les sous-espaces  $gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\lambda))$ , pour  $\lambda \in \mathcal{D}$ , sont de dimension un. On en déduit que  $gr_{\mathcal{F}}(\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})))$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes et qu'il en est de même pour  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  en le même nombre de générateurs  $N = \text{card}(\Pi) = \text{card}(\pi \setminus \pi') + \text{card}(\Pi')$  puisque  $\text{card}\{\Gamma \in \Pi \mid \Gamma \not\subset \pi'\} = \text{card}(\pi \setminus \pi')$  (voir 1.1).

□

## 2.2

*Remarque .* Pour tout  $\lambda \in \mathcal{D}$ , notons  $p_\lambda$  un semi-invariant engendrant l'espace vectoriel  $\mathbf{Sy}(\lambda)$  de dimension un. Le théorème 2.1 n'implique pas a priori que les  $p_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathcal{D}$ , commutent deux à deux, bien que leurs gradués respectifs commutent entre eux à un scalaire près. Cependant en introduisant la  $R$ -matrice de Drinfeld de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$  (voir [29, 9.4] puis [F4, Lemme 2.3, Prop. 2.4, Remarque après la Prop. 2.4]), j'ai montré que l'on peut choisir les  $p_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathcal{D}$ , de sorte qu'ils commutent deux à deux. On obtient ainsi que le semi-centre quantique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes au sens classique du terme.

## 2.3

*Remarque .* Reprenons le cas particulier de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  avec  $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_n\}$  (voir Sec. B). Comme  $\Pi$  n'est constitué que d'une seule orbite  $\pi$  (voir 1.2) on retrouve que le semi-centre quantique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ , dans ce cas, est une  $\mathbf{K}$ -algèbre de polynômes en un générateur, de poids  $w'_0\rho - w_0\rho = (n+1)\varpi_n$  (voir Cor. 1.1 de la Sec. B).

# Chapitre III

## Du cas quantique au cas classique.

Les notations sont les mêmes que dans le Chapitre II.

Jusqu'ici la polynomialité du semi-centre classique  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  n'était pas encore connue, à part pour quelques cas particuliers : celui de l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  tout entière (grâce à l'isomorphisme de Harish-Chandra et à un théorème de Chevalley, voir aussi [16, 7.3.8]) ou celui d'une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$  (grâce aux travaux de Joseph dans [28]), ainsi que le cas particulier d'une sous-algèbre parabolique de dimension maximale de  $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  (grâce à Dixmier et Joseph, voir [17] et [27] et voir aussi la remarque 1.2 de la Sec. B du Chap. II).

Cependant le cas quantique permet d'obtenir, en calquant mot pour mot la preuve du Thm. du Par. 2 de la Sec. A du Chap. II, la polynomialité d'une certaine sous-algèbre d'invariants du dual de Hopf  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  de l'algèbre enveloppante universelle (classique)  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$ .

De ce résultat on peut déduire que les dimensions de Gelfand-Kirillov des semi-centres quantique et classique associés à  $\mathfrak{p}$  sont égales.

### A La polynomialité d'une certaine sous-algèbre d'invariants du dual de Hopf $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ de $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ .

Avec A. Joseph, j'ai montré ([F4, Prop. 3.1]) la polynomialité d'une certaine sous-algèbre d'invariants de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ , qui est l'analogie classique de  $\mathcal{R}(\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p})))$ , autrement dit de l'algèbre des invariants par l'action coadjointe de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}')$  de la somme directe  $\bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}'_q(\lambda)$  (voir preuve du Thm. du Par. 2 de la Sec. A du Chap. II).

## 1 Les notations.

### 1.1

Pour tout  $\lambda \in P^+(\pi)$ , notons  $\mathbf{L}(\lambda)$  le  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$ ,  $\mathbf{C}(\lambda) \subset \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel des coefficients matriciels de  $\mathbf{L}(\lambda)$  et  $v_\lambda$  un vecteur de plus haut poids de  $\mathbf{L}(\lambda)$ . Posons  $\mathbf{L}'(\lambda) := \mathbf{U}(\mathfrak{g}') \cdot v_\lambda = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) \cdot v_\lambda$  et notons  $\mathbf{C}'(\lambda)$  le sous- $\mathbf{k}$ -espace vectoriel de  $\mathbf{C}(\lambda)$  engendré par les  $c_{\xi, v}$  pour  $\xi \in \mathbf{L}(\lambda)^*$  et  $v \in \mathbf{L}'(\lambda)$  (pour tout  $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ ,  $c_{\xi, v}(u) = \xi(u \cdot v)$ ). On remarque que  $\mathbf{C}'(\lambda)$  est l'analogie classique du sous-espace  $\mathbf{C}'_q(\lambda)$  de  $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})^*$  défini dans la preuve du Thm. du Par. 2 de la Section A du Chap. II.

### 1.2

Notons également  $\mathbf{G}$  le groupe algébrique connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathbf{P}$  le sous-groupe algébrique irréductible de  $\mathbf{G}$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathbf{P}'$  son groupe dérivé, et  $\mathbf{U}$  son radical unipotent (le radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{p}$ , qui est aussi son plus grand idéal nilpotent, est alors l'algèbre de Lie de  $\mathbf{U}$  et l'algèbre dérivée  $\mathfrak{p}'$  de  $\mathfrak{p}$  est l'algèbre de Lie de  $\mathbf{P}'$ ).

### 1.3

Le dual de Hopf  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  vérifie  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}(\lambda)$ . C'est aussi l'algèbre (commutative)  $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$  des fonctions régulières sur  $\mathbf{G}$ .

Enfin on pose  $\mathbf{C}' = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}'(\lambda)$ . C'est une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ .

### 1.4

On peut définir des actions à droite, resp. à gauche, de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , resp. du groupe  $\mathbf{G}$ , sur  $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$  par :  $(c_{\xi, v}, x) \mapsto c_{\xi, x \cdot v}$  et  $(x, c_{\xi, v}) \mapsto c_{\xi, x \cdot v}$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , resp.  $x \in \mathbf{G}$ , et pour tout  $c_{\xi, v} \in \mathbf{C}(\lambda)$ . Ainsi  $\mathbf{C}'$  est un sous- $\mathfrak{p}$ -bimodule (resp. un sous- $\mathbf{P}$ -bimodule) de  $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$  et  $\mathbf{C}'$  coïncide avec l'ensemble des invariants de  $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$  par l'action à gauche de  $\mathfrak{m}$ , resp. de  $\mathbf{U}$  (voir [F5, 6.3] pour plus de détails). L'algèbre  $\mathbf{C}'$  peut être identifiée avec l'algèbre  $\mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}]$  des fonctions régulières sur l'espace homogène  $\mathbf{G}/\mathbf{U}$  (voir [29, 2.4.7]).

### 1.5

Enfin on peut aussi définir une action coadjointe de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  : elle est définie par  $x \cdot c_{\xi, v} = -{}^t(ad x)(c_{\xi, v}) = c_{\xi, x \cdot v} - c_{\xi, x, v}$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et  $c_{\xi, v} \in \mathbf{C}(\lambda)$ . Cette action correspond à l'action coadjointe de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  définie par  $(X \cdot c_{\xi, v})(u) = c_{\xi, v}(X^{-1} \cdot u) = c_{\xi, v}(exp(-x) u exp(x))$  pour  $X = exp(x) \in \mathbf{G}$ ,  $x \in \mathfrak{g}$  et  $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ .

Ainsi  $\mathbf{C}'$  est aussi un  $\mathbf{P}$ -module pour l'action coadjointe de  $\mathbf{P}$ , isomorphe à  $\bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{L}(\lambda)^* \otimes \mathbf{L}'(\lambda)$ , vu comme  $\mathbf{P}$ -module pour l'action diagonale.

On notera  $\mathbf{C}'^{\mathfrak{p}'} = \mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  l'algèbre des invariants de  $\mathbf{C}'$  par l'action coadjointe de  $\mathfrak{p}'$ , resp. de  $\mathbf{P}'$ .

## 2 La Proposition.

Rappelons l'ensemble  $\Pi$  des  $\langle ji \rangle$ -orbites de  $\pi$  (voir 1.1 de la Sec. C du Chap. II).

Dans [F4, Prop. 3.1], on a montré :

**Proposition .** *L'algèbre des invariants  $\mathbf{C}'^{\mathfrak{p}'} = \mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  de  $\mathbf{C}'$  par l'action coadjointe de  $\mathfrak{p}'$ , resp. de  $\mathbf{P}'$ , est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs ayant pour poids (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{h}$ )  $\delta_\Gamma = w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi$ .*

*Idée de démonstration.*

De façon analogue à la preuve du Thm. du Par 2 de la Sec. A du Chap. II, on montre facilement que

$$\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{D}} (\mathbf{C}'(\lambda))^{\mathbf{P}'}$$

où  $(\mathbf{C}'(\lambda))^{\mathbf{P}'} = \mathbf{C}'^{\mathbf{P}'} \cap \mathbf{C}'(\lambda)$  avec  $\dim((\mathbf{C}'(\lambda))^{\mathbf{P}'}) = 1$  pour tout  $\lambda \in \mathcal{D}$ , chaque élément de  $(\mathbf{C}'(\lambda))^{\mathbf{P}'}$  ayant pour poids  $w'_0 \lambda - w_0 \lambda$  (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{h}$ ).

On en déduit comme dans le Thm. 2.1 de la Sec. C du Chap. II que l'algèbre des invariants  $\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs, chacun de ces générateurs ayant pour poids  $\delta_\Gamma$ ,  $\Gamma \in \Pi$  (voir aussi la preuve de [F4, Prop. 3.1] pour plus de détails).  $\square$

## B La dimension de Gelfand-Kirillov de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

La polynomialité de l'algèbre des invariants  $\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  démontrée dans la Section précédente ainsi que la polynomialité du semi-centre quantique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$  démontrée au Chap. II, Sec. C, Thm. 2.1, nous ont conduits à la question suivante :

le semi-centre classique  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  associé à n'importe quelle sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque  $\mathfrak{g}$  est-il une algèbre de polynômes ?

Bien que ne sachant pas encore sous quelles conditions nécessaires et suffisantes ce résultat est vrai (rappelons que pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $E_8$ , un contre-exemple a été donné par Yakimova, [61]), A. Joseph et moi-même avons démontré que la dimension de Gelfand-Kirillov de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  (et donc l'indice du parabolique tronqué  $\mathfrak{p}_\Lambda$  associé) est toujours égale à  $\text{card}(\Pi)$ .

### 1 La Proposition.

Dans [F4, Prop. 3.2], on a montré :

**Proposition .** *La dimension de Gelfand-Kirillov du semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est égale à la dimension de Gelfand-Kirillov du semi-centre quantique  $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ , c'est-à-dire est égale à  $\text{card}(\Pi)$ .*

*Idée de démonstration.*

Rappelons le Cor. 8.2 de la Section B du Chap. I. On a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$  où  $\mathfrak{p}'$  est l'algèbre dérivée de  $\mathfrak{p}$ . Ainsi  $\mathrm{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})) = \mathrm{degtr}(\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}))$ . Or on a

$$(*) \quad \mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}) = (\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})))^{\mathfrak{p}'}$$

En effet soit  $u = w^{-1}v \in (\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})))^{\mathfrak{p}'}$  avec  $w$  et  $v$  non nuls dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  et premiers entre eux. Alors  $v$  et  $w$  sont semi-invariants pour l'action adjointe de  $\mathfrak{p}'$  d'après le Lemme 5.10 de la Sec. B du Chap. I.

Mais  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s}$  où  $\mathfrak{m}$  est le radical nilpotent de  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{s}$  une algèbre de Lie semi-simple. On en déduit, puisque les éléments de  $\mathfrak{m}$  agissent par dérivations nilpotentes et que  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}'$ , que  $v$  et  $w$  sont invariants par l'action adjointe de  $\mathfrak{p}'$ .

Il suffit ensuite d'utiliser [14, Lemme 7] pour en déduire que

$$\mathrm{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})))^{\mathfrak{p}'}) = \dim \mathfrak{p} - \max_{x \in \mathfrak{p}^*} \dim(\mathbf{P}' \cdot x)$$

où  $\mathbf{P}'$  agit sur  $\mathfrak{p}^*$  par l'action coadjointe définie par  $(X.\xi)(x) = \xi(X^{-1}.x) = \xi(X^{-1}xX)$  pour tous  $\xi \in \mathfrak{p}^*$ ,  $x \in \mathfrak{p}$ , et  $X \in \mathbf{P}'$  et où  $\mathbf{P}' \cdot x$  désigne l'orbite de  $x \in \mathfrak{p}^*$  par l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$ . Or le radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{p}$  est aussi l'orthogonal de  $\mathfrak{p}$  pour la forme de Killing  $K$  de  $\mathfrak{g}$ , donc on peut identifier, grâce à  $K$ ,  $\mathfrak{p}^*$  avec l'espace quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$  et l'action de conjugaison de  $\mathbf{P}'$  sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$  s'identifie avec l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$  sur  $\mathfrak{p}^*$ .

Donc

$$(**) \quad \mathrm{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})))^{\mathfrak{p}'}) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}) - \max_{x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{m}} \dim(\mathbf{P}' \cdot x)$$

où  $\mathbf{P}' \cdot x$  désigne l'orbite de  $x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{m}$  par l'action de conjugaison de  $\mathbf{P}'$ .

Rappelons l'algèbre  $\mathbf{C}'$  qui est l'algèbre des invariants de  $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$  par l'action à gauche de  $\mathbf{U}$ , resp. de  $\mathfrak{m}$ , et qui s'identifie donc ([29, 2.4.7]) avec l'algèbre  $\mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}]$  des fonctions régulières sur l'espace homogène  $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ . Rappelons également que  $\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  désigne l'algèbre des invariants de  $\mathbf{C}'$  par l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$ .

D'après [28, 3.5] l'algèbre commutative  $\mathbf{C}'$  est factorielle puisque  $\mathfrak{m}$  agit à gauche par dérivations localement nilpotentes sur  $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$ , qui est elle-même une algèbre factorielle puisque  $\mathbf{G}$  est un groupe algébrique (au sens de [11, Chap. II, § 1, Déf. 1]) irréductible.

En utilisant la factorialité de  $\mathbf{C}'$ , on montre, de façon analogue à ce qui a été expliqué plus haut pour démontrer (\*) que

$$(***) \quad (\mathbf{Frac}(\mathbf{C}'))^{\mathbf{P}'} = \mathbf{Frac}(\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'})$$

Puis, en utilisant une généralisation de [14, Lemme 7], on obtient

$$\mathrm{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}]))^{\mathbf{P}'}) = \dim(\mathbf{G}/\mathbf{U}) - \max_{x \in \mathbf{G}/\mathbf{U}} \dim(\mathbf{P}' \cdot x)$$

où  $\mathbf{P}' \cdot x$  est l'orbite de  $x \in \mathbf{G}/\mathbf{U}$  par l'action de conjugaison de  $\mathbf{P}'$ . On a donc

$$\mathrm{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}]))^{\mathbf{P}'}) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}) - \max_{x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{m}} \dim(\mathbf{P}' \cdot x)$$

où  $\mathbf{P}' \cdot x$  est l'orbite de  $x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{m}$  par l'action de conjugaison de  $\mathbf{P}'$ .

D'où  $\text{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}]))^{\mathbf{P}'}) = \text{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{p})))^{\mathbf{P}'})$  d'après (\*\*). Enfin de (\*) et (\*\*\*) on obtient

$$\text{degtr}((\mathbf{Frac}(\mathbf{C}^{\mathbf{P}'})) = \text{GKdim}(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})).$$

Il suffit enfin d'utiliser la Proposition du Par. 2 de la Sec. A pour conclure.  $\square$

## 2 Le cas d'un (bi)parabolique tronqué d'indice un.

Supposons l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  simple et considérons  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique propre de  $\mathfrak{g}$ . Alors la troncation canonique  $\mathfrak{p}_\Lambda$  de  $\mathfrak{p}$  ne peut être d'indice un que lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_n$  ( $n \geq 2$ ). En effet d'après la Prop. 9.7 de la Sec. B du Chap. I, cela correspond à  $\text{GKdim}(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})) = 1$ . Donc cela correspond à  $\text{card}(\Pi) = 1$  d'après la Proposition du Par. 1.

Or en examinant [F4, Tableau de 1.2] ou [F1, Cor. 1.5.3 et 1.5.4], on voit que, pour  $\mathfrak{g}$  simple de type autre que  $A$ ,  $\text{card}(\Pi)$  ne peut pas être égal à un.

Enfin pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A_n$  ( $n \geq 2$ ), on vérifie que  $\text{card}(\Pi) = 1$  si, et seulement si,  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  dont la plus grande sous-algèbre de Lie semi-simple est isomorphe au produit  $\mathfrak{sl}_p(\mathbf{k}) \times \mathfrak{sl}_q(\mathbf{k})$  avec  $p + q = n + 1$  et  $p$  et  $q$  premiers entre eux ([33, Lemme 2.3]).

Enfin la troncation canonique d'une sous-algèbre biparabolique propre de  $\mathfrak{g}$  est d'indice un si c'est en fait la troncation canonique d'une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  (voir plus loin, Thm. 1.6 de la Sec. D du Chap. IV).

# Chapitre IV

## Le cas classique.

Comme je l'ai déjà dit dans le Chap. III, la polynomialité du semi-centre classique  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  associé à une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  quelconque n'était pas encore connue, sauf pour quelques cas particuliers.

Dans ce chapitre, je vais expliquer comment A. Joseph et moi-même avons démontré que, lorsque  $\mathfrak{g}$  est un produit d'algèbres de Lie simples de type  $A$  ou  $C$ , alors le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est toujours une algèbre de polynômes, quelle que soit la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  (voir [F5]).

Cette preuve repose sur l'encadrement du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  entre deux bornes. Rappelons la Prop. du Par. 2 de la Sec. A du Chap. III et plus particulièrement la sous-algèbre des invariants  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  qui est une algèbre de polynômes. L'algèbre  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$  est formée des éléments de  $\mathbf{C}' = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}'(\lambda) = \mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}]$  invariants par l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$  (avec les notations de la Sec. A du Chap. III). La borne inférieure est alors l'image par une application dite de Kostant du gradué associé à la filtration dite aussi de Kostant de la sous-algèbre  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ .

D'ailleurs cette application de Kostant fournit également une égalité (voir [F6, 3.6] et plus loin, Prop. 4.2 (ii)) permettant de mieux décrire l'espace des éléments harmoniques  $\mathbb{H}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ . Rappelons que, de façon analogue à  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est un module libre sur son centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  (puisque  $\mathfrak{g}$  est semi-simple). Il existe donc  $\mathbb{H}(\mathfrak{g})$ , un  $\mathbf{k}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ , que l'on peut choisir  $ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -stable, tel que la multiplication donne l'isomorphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules suivant :  $\mathbb{H}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{Y}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{S}(\mathfrak{g})$  (voir aussi le Par. 1 de la Sec. B du Chap. II ou bien [16, 8.2]). De plus on peut prendre  $\mathbb{H}(\mathfrak{g}) = (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g}))\mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)$ , et c'est ce que nous ferons.

La borne supérieure, elle, provient du Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  et de la description précise du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  associé à ce Borel et qui a été étudié en détail dans [28].

Ces deux bornes sont des  $\mathbf{k}$ -algèbres de polynômes, ou des gradués de  $\mathbf{k}$ -algèbres de polynômes, en  $card(\Pi)$  générateurs, les générateurs de chacune des deux bornes ayant des poids qui peuvent éventuellement différer d'un facteur  $1/2$  suivant des règles combinatoires précises que j'expliquerai plus loin.

Nous avons ainsi montré que, pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$  ou  $C$ , et pour n'importe quelle sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$ , les deux bornes coïncident, car dans ce cas les

poids des générateurs sont les mêmes pour les deux bornes. Cela implique que l'algèbre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda)$  est elle-même une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes.

## A L'application de Kostant et la borne inférieure.

Rappelons les notations de la Sec. A du Chap. III, notamment  $\mathbf{C}' = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}'(\lambda) = \mathbf{k}[\mathbf{G}/\mathbf{U}] \subset \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  et  $\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  l'algèbre des invariants de  $\mathbf{C}'$  par l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$ , qui est une algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs, chacun de ces générateurs ayant pour poids  $w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$  pour tout  $\Gamma \in \Pi$  avec  $d_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varpi_\gamma$  (voir Prop. du Par. 2 de la Section A du Chap. III).

### 1 La filtration de Kostant.

La filtration de Kostant est une filtration décroissante de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  qui permet ensuite de définir l'application dite de Kostant (voir Par. 2).

**Définition-Proposition.** ([F5, 6.1])

On note  $(\mathbf{U}^k(\mathfrak{g}))_{k \in \mathbb{N}}$  la filtration canonique de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  et  $\mathbf{U}^{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)$  par  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) = \{f \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})^* \mid f(\mathbf{U}^{k-1}(\mathfrak{g})) = 0\}$ . Cette filtration de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \mathbf{k}[\mathbf{G}]$  correspond aussi à l'ordre d'annulation en l'élément neutre de  $\mathbf{G}$ .

Alors  $(\mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*))_{k \in \mathbb{N}}$  est une filtration décroissante, exhaustive et séparée de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ , qui est invariante par l'action coadjointe de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ .

*Démonstration.* En effet on a

$$\mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \mathcal{F}_K^0(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) \supset \mathcal{F}_K^1(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) \supset \cdots \supset \mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) \supset \mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) \supset \cdots$$

puisque la filtration canonique de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  est croissante. Donc la filtration de Kostant de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  est décroissante et exhaustive.

De plus comme la filtration canonique de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  est exhaustive, on en déduit que la filtration de Kostant de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  est séparée. Enfin comme la filtration canonique de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  est invariante par l'action adjointe de  $\mathfrak{g}$ , il s'ensuit que la filtration de Kostant de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  est invariante par l'action coadjointe de  $\mathfrak{g}$ . □

### 2 L'application de Kostant.

L'application dite de Kostant fournit un isomorphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules et d'algèbres entre le gradué de  $\mathbf{C}'$  associé à la filtration de Kostant et l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{p}$ . Le gradué de  $\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  associé à la filtration de Kostant s'injecte alors comme algèbre et comme  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -module dans le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathbf{P}'}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Notons  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$  l'espace des polynômes de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$  homogènes de degré  $k$ , qui est aussi la puissance symétrique  $k$ -ième de  $\mathfrak{g}$ . Rappelons qu'alors  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$  est isomorphe à l'espace quotient  $\mathbf{U}^k(\mathfrak{g})/\mathbf{U}^{k-1}(\mathfrak{g})$ .

On définit l'application  $\widetilde{\psi}_k$  par

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_k : \mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) &\longrightarrow \mathbf{S}_k(\mathfrak{g})^* \\ f &\longmapsto \widetilde{\psi}_k(f) : u + \mathbf{U}^{k-1}(\mathfrak{g}) \longmapsto f(u) \quad (u \in \mathbf{U}^k(\mathfrak{g})) \end{aligned}$$

Lorsque  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)$  et  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g})^*$  sont munis de l'action coadjointe de  $\mathfrak{g}$ , on vérifie que  $\widetilde{\psi}_k$  est un morphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules et que son noyau est  $\mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)$ .

### 3 La borne inférieure.

#### 3.1

On peut considérer la filtration de Kostant  $\mathcal{F}_K$  induite sur la sous-algèbre  $\mathbf{C}'$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  puis le gradué associé  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}')$ .

**Proposition.** ([F5, 6.5, 6.6])

Il existe un isomorphisme  $\psi$  d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules entre  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}')$  et l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{p}$ .

*Idée de la construction de l'isomorphisme ci-dessus.*

Notons  $\mathfrak{p}^-$  le parabolique opposé de  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{m}$  le radical nilpotent de  $\mathfrak{p}$ . Alors on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}^-$  d'après la Prop. 3.3 et la Rem. 3.4 de la Sec. B du Chap. I. Donc  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g}) = \mathbf{S}_{k-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{m} \oplus \mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^-)$ . Par conséquent  $\widetilde{\psi}_k(\mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}')) \subset \mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^-)^*$  puisque  $\mathbf{C}' = \{f \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})^* \mid f(\mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}) = 0\}$  (en identifiant un élément de  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^-)^*$  avec un élément de  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g})^*$  qui s'annule sur  $\mathbf{S}_{k-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ ). De plus  $\widetilde{\psi}_k$  restreint à  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}')$  est un morphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{p}$ ). Le noyau de la restriction de  $\widetilde{\psi}_k$  à  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}')$  est  $\mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{C}')$ .

Enfin pour en déduire la surjectivité du morphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules induit par  $\widetilde{\psi}_k$  sur le quotient  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}')/\mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{C}')$  dans  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^-)^*$ , j'ai vérifié que l'on a ([F5, 6.4]) :

$$\dim(\mathbf{C}'/\mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}')) = \dim(\mathbf{U}^{k-1}(\mathfrak{p}^-)).$$

Cette égalité découle du fait que  $\mathbf{C}'$  sépare les éléments de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ , et pour vérifier cela, vue l'expression de  $\mathbf{C}' = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}'(\lambda)$ , il suffit de montrer que

$$\bigcap_{\lambda \in P^+(\pi)} \text{Ann}_{\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)}(\mathbf{L}'(\lambda)) = \{0\}.$$

Ceci se vérifie de façon analogue à [29, 7.1.9] (voir aussi [F5, 6.4] pour plus de détails).

Ainsi on obtient un isomorphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules entre  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}')$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{p}^-)^*$  puis, en utilisant les isomorphismes canoniques de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules entre  $\mathbf{S}(\mathfrak{p}^-)^*$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{p}^{-*})$  puis entre  $\mathbf{S}(\mathfrak{p}^{-*})$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  grâce à la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , on obtient un isomorphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules entre  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}')$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$ , que nous noterons encore  $\widetilde{\psi} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{\psi}_k$ .

Enfin il suffit de modifier légèrement  $\widetilde{\psi}$  en posant  $\psi = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \psi_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \widetilde{\psi}_k$  pour obtenir un isomorphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ -modules et d'algèbres entre  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}')$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$ . L'application  $\psi$  sera appelée l'application de Kostant.  $\square$

### 3.2

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Notons  $K_k$  la forme bilinéaire sur l'espace  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$  déduite de la forme de Killing  $K$  de  $\mathfrak{g}$ . Elle peut être définie par  $K_0(x, y) = xy$  pour tous  $x, y \in \mathfrak{k}$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$K_k(x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \prod_{i=1}^k K(x_i, y_{\sigma(i)}),$$

où  $\Sigma_k$  désigne le groupe des permutations de  $\{1, \dots, k\}$  et où  $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

Notons également  $s : \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$  la symétrisation définie comme dans [16, 2.4.5, 2.4.6]. Soit  $f \in \mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}') \setminus \mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{C}')$ . On remarque que  $k$  est le plus petit entier naturel tel que  $f(x^k) \neq 0$  pour un certain  $x \in \mathfrak{g}$ . On note  $gr_{\mathcal{F}_K}(f)$  la classe de  $f$  dans  $\mathcal{F}_K^k(\mathbf{C}') / \mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{C}')$ . D'après ce qui a été démontré précédemment  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(f)) = \psi_k(f) = \psi_k(gr_{\mathcal{F}_K}(f)) \in \mathbf{S}_k(\mathfrak{p})$ . Grâce aux identifications faites entre  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^-)^*$ ,  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^{-*})$  et  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{p})$ , on a, pour tout  $a \in \mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^-)$ ,

$$(*) \quad f(s(a)) = K_k(\psi_k(gr_{\mathcal{F}_K}(f)), a)$$

(voir aussi [F6, 3.2]).

Si on considère l'application  $\psi_k$  à valeurs dans  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{p}^{-*})$  (que l'on peut identifier avec l'espace des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{p}^-$  homogènes de degré  $k$ ), on peut écrire, pour tout  $x \in \mathfrak{p}^-$ ,  $\psi_k(gr_{\mathcal{F}_K}(f))(x) = f(x^k)$ .

Soit  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'})$  l'algèbre graduée associée à la filtration de Kostant induite sur  $\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}$  et  $(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'))^{\mathbf{P}'}$  l'algèbre des invariants de  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}')$  par l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$  qui se déduit de l'action coadjointe de  $\mathbf{P}'$  sur  $\mathbf{C}'$ . Alors on a  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'}) \subset (gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'))^{\mathbf{P}'}$ .

**Corollaire .** (voir [F5, Prop. 6.7]). *Le morphisme  $\psi$  restreint à  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'})$  est une injection d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules entre  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'^{\mathbf{P}'})$  et  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathbf{P}'}$ .*

*Démonstration.* Cela provient tout simplement de l'inclusion ci-dessus et de la Proposition 3.1 qui impliquent que  $\psi$  restreint à  $(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'))^{\mathbf{P}'}$  est un isomorphisme d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules entre  $(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'))^{\mathbf{P}'}$  et  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathbf{P}'}$ . □

### 3.3

*Remarque .* Lorsque  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$  l'injection du Cor. 3.2 devient un isomorphisme puisque dans ce cas  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  est une somme directe de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules simples. Cependant lorsque  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$  l'injection du Cor. 3.2 n'a pas de raison d'être en général aussi une surjection. Néanmoins lorsque les deux bornes de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  coïncident, alors dans ce cas la surjectivité est vraie et c'est le cas lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$  ou  $C$ . Signalons que pour  $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$  la surjectivité est fautive dès que  $\mathfrak{g}$  est simple de type autre que  $A$  ou  $C$ .

### 3.4

Rappelons que l'on note  $\Pi$  l'ensemble des  $\langle ji \rangle$ -orbites de  $\pi$  et pour  $\Gamma \in \Pi$ , on a posé  $d_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} \varpi_\alpha$  et  $\delta_\Gamma = w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ . Pour un élément  $c$  du dual de Hopf  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , on notera  $gr_{\mathcal{F}_K}(c)$  son image dans l'algèbre graduée associée à la filtration de Kostant de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ .

*Remarque .* D'après ce qui a été démontré précédemment (voir Prop. du Par 2 de la Sec. A du Chap. III et Cor. 3.2), pour tout  $\Gamma \in \Pi$ , il existe dans l'espace  $\mathbf{C}'(d_\Gamma) \subset \mathbf{C}(d_\Gamma) \subset \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  un unique (à un scalaire multiplicatif non nul près) élément  $c_\Gamma$  invariant par l'action coadjointe de  $\mathfrak{p}'$ , de poids  $\delta_\Gamma$ , tel que  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(c_\Gamma)) \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})$ .

## 4 Vers une approche des semi-invariants comme éléments harmoniques.

### 4.1

Rappelons l'application de Kostant  $\psi = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \psi_k : gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathfrak{g})$  qui est un isomorphisme d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules et qui a été définie au Par. 2 et au 3.1 (en prenant ici  $\pi' = \pi$ ).

Rappelons que l'on note  $\mathfrak{m}^-$  le radical nilpotent de  $\mathfrak{p}^-$  (la sous-algèbre parabolique opposée de  $\mathfrak{p}$ ) et  $\mathbb{H}(\mathfrak{g}) = (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g}))\mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)$  l'espace des éléments harmoniques de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ .

Pour tout sous-espace vectoriel  $V$  du dual de Hopf  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , on note  $gr_{\mathcal{F}_K}(V)$  le gradué de  $V$  associé à la filtration de Kostant induite sur  $V$ .

Soit  $\lambda \in P^+(\pi)$ . Rappelons que  $\mathbf{C}'(\lambda)$  est le sous-espace de l'espace  $\mathbf{C}(\lambda)$  des coefficients matriciels de  $\mathbf{L}(\lambda)$  invariants par l'action à gauche du radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{p}$ .

Dans le Paragraphe 3.1, on a montré que l'on a  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'(\lambda))) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{p})$  et  $\psi$  restreint à  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'(\lambda))$  est une injection.

Rappelons que l'algèbre dérivée  $(\mathfrak{p}^-)'$  de  $\mathfrak{p}^-$  vérifie  $(\mathfrak{p}^-)' = \mathfrak{m}^- \oplus \mathfrak{g}'$  et que  $(\mathfrak{p}^-)' \supset \mathfrak{n}^-$ . Notons  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda)$ , resp.  $\mathfrak{n}^-\mathbf{C}(\lambda)$ , le sous-espace de  $\mathbf{C}(\lambda)$  formé des invariants par l'action à gauche de  $(\mathfrak{p}^-)'$ , resp. de  $\mathfrak{n}^-$ .

Comme  $(\mathfrak{p}^-)' \supset \mathfrak{n}^-$ , on a  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda) \subset \mathfrak{n}^-\mathbf{C}(\lambda) \simeq \mathbf{L}(\lambda)^* \otimes \mathbf{k}v_{w_0\lambda}$  où  $v_{w_0\lambda}$  est un vecteur de plus bas poids de  $\mathbf{L}(\lambda)$ . Donc l'espace  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda)$  est non nul si, et seulement si, on a  $(w_0\lambda, \pi') = 0$  et dans ce cas on a  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda) = \mathfrak{n}^-\mathbf{C}(\lambda)$ .

Notons également  $((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$  l'espace des invariants de  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda)$  par l'action coadjointe de  $(\mathfrak{p}^-)'$ .

Comme  $(\mathfrak{p}^-)' \supset \mathfrak{m}^-$ , on a  $((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'} \subset (\mathfrak{m}^-\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$ . Or de façon analogue à ce qui a été démontré pour  $(\mathfrak{m}^-\mathbf{C}(\lambda))^{\mathfrak{p}'}$  =  $\mathbf{C}'(\lambda)^{\mathfrak{p}'}$ , l'espace des invariants de  $\mathbf{C}'(\lambda)$  par l'action coadjointe de  $\mathfrak{p}'$ , l'espace  $(\mathfrak{m}^-\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$  est non nul, et dans ce cas de dimension un, si et seulement si  $\lambda \in \mathcal{D}$ , c'est-à-dire  $(\lambda - w'_0 w_0 \lambda, \pi') = 0$ .

Finalement on obtient donc que l'espace  $((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$  est de dimension un si et seulement si  $(w_0\lambda, \pi') = 0$  et  $(\lambda, \pi') = 0$  et est nul sinon. Lorsqu'il est de dimension un, l'espace vectoriel  $((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$  est engendré par le coefficient matriciel  $c_{\xi_\lambda, v_{w_0\lambda}}$  où  $\xi_\lambda$  est un vecteur de poids  $\lambda$  de  $\mathbf{L}(\lambda)^*$  pour l'action à droite de  $\mathfrak{h}$ .

D'après ce qui a été montré dans la Prop. 3.1, puisque  $(\mathfrak{p}^-)' \supset \mathfrak{m}^-$ , on a

$\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{p}^-)$ . De plus comme  $(\mathfrak{p}^-)' \supset \mathfrak{n}^-$ , on a  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))) \subset \psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{n}^-\mathbf{C}(\lambda))) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)$  d'après un résultat de Kostant. En fait on peut montrer un résultat plus précis, à savoir le Lemme ci-dessous (voir aussi [F6, Lemme 3.5]), notamment l'inclusion dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)$ .

On notera enfin  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)^{(\mathfrak{p}^-)'}$  l'algèbre des invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)$  par l'action adjointe de  $(\mathfrak{p}^-)'$ .

**Lemme.** *Soit  $\lambda \in P^+(\pi)$ .*

- (i) *L'application de Kostant  $\psi$  induit un morphisme injectif de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)$ -modules de  $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))$  dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)$ .*
- (ii) *L'application  $\psi$  induit un morphisme injectif de  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules de  $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$  dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)^{(\mathfrak{p}^-)'}$ .*

*Démonstration.* Le (ii) se déduit du (i) puisque  $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))^{(\mathfrak{p}^-)'}$  est inclus dans  $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda)))^{(\mathfrak{p}^-)'}$ , le  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -module des invariants de  $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))$  par l'action coadjointe de  $(\mathfrak{p}^-)'$  sur le gradué, obtenue par passage au quotient.

Pour montrer le (i), il suffit de considérer  $\lambda \in P^+(\pi)$  tel que  $(w_0\lambda, \pi') = 0$ . Alors d'après ce qui a été remarqué ci-dessus, on a  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda) = \mathfrak{n}^-\mathbf{C}(\lambda) \simeq \mathbf{L}(\lambda)^* \otimes \mathbf{k}v_{w_0\lambda}$ .

Or on a  $\mathfrak{p}^- = (\mathfrak{p}^-)' \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$  où  $\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} := \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle h, \pi' \rangle = 0\}$  et  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda) = \{f \in \mathbf{C}(\lambda) \mid f(\mathbf{U}(\mathfrak{g})(\mathfrak{p}^-)') = 0\}$ . Donc il est facile de constater que, si  $f \in \mathcal{F}_K^k((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))$ , alors  $f(\mathbf{U}^{k-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{p}^-) = 0$  puisque, pour tout  $u \in \mathbf{U}^{k-1}(\mathfrak{g})$  et tout  $h \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ , on a  $f(uh) = \langle h, w_0\lambda \rangle f(u) = 0$ . Comme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}^-$ , il s'ensuit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{S}_k(\mathfrak{g}) = \mathbf{S}_{k-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{p}^- \oplus \mathbf{S}_k(\mathfrak{m})$ . D'où le (i) en utilisant les isomorphismes de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)$ -modules entre  $\mathbf{S}(\mathfrak{m})^*$ ,  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^*)$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)$ . □

## 4.2

Enfin on a montré dans [F6, Lemme 3.6] la Proposition suivante.

**Proposition.** *On a*

$$(i) \quad \sum_{\lambda \in P^+(\pi)} \psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda))) = \mathbf{S}(\mathfrak{m}^-).$$

$$(ii) \quad \sum_{\lambda \in P^+(\pi)} \psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}(\lambda))) = \mathbb{H}(\mathfrak{g}).$$

*Idée de la démonstration.*

L'inclusion  $\subset$  du (i) provient du (i) du Lemme 4.1. Pour l'inclusion réciproque, que je ne vais pas détailler ici, il suffit de constater que, pour  $\nu \in \mathbb{N}\pi$ , le sous-espace  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)_{-\nu}$  de poids  $-\nu$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)$  est tel qu'il existe  $\lambda \in P^+(\pi)$  "assez grand" et vérifiant  $(w_0\lambda, \pi') = 0$  tel que  $\dim(\mathbf{L}(\lambda)_{w_0\lambda+\nu}) = \dim(\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)_{-\nu})$ . Comme  $(\mathfrak{p}^-)'\mathbf{C}(\lambda) \simeq \mathbf{L}(\lambda)^* \otimes \mathbf{k}v_{w_0\lambda}$ , on a

$\dim(\mathbf{L}(\lambda)_{w_0\lambda+\nu}) = \dim((\mathfrak{p}^-)' \mathbf{C}(\lambda))_{-\nu}$  où  $((\mathfrak{p}^-)' \mathbf{C}(\lambda))_{-\nu}$  est le sous-espace de poids  $-\nu$  de  $(\mathfrak{p}^-)' \mathbf{C}(\lambda)$  (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{h}$ ). En passant au gradué associé à la filtration de Kostant, on obtient l'inclusion cherchée.

Pour montrer l'inclusion  $\supset$  du (ii), il suffit d'appliquer le (i) à  $\pi' = \emptyset$ . Alors  $\mathfrak{m}^- = \mathfrak{n}^-$ . L'inclusion  $\supset$  provient donc du fait que  $\mathbf{U}(\mathfrak{g}) \cdot (\mathfrak{n}^- \mathbf{C}(\lambda)) = \mathbf{C}(\lambda)$ , que  $\psi$  est un morphisme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules et que  $\mathbb{H}(\mathfrak{g}) = (\text{ad } \mathbf{U}(\mathfrak{g}))\mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)$ .

Enfin pour l'inclusion  $\subset$  du (ii), on considère  $\lambda \in P^+(\pi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $c \in \mathbf{C}(\lambda) \cap \mathcal{F}_K^k(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*) \setminus \mathcal{F}_K^{k+1}(\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)$ , et  $gr_{\mathcal{F}_K}(c)$  son image dans le gradué associé à la filtration de Kostant. On note  $\mathbb{H}_k = \mathbb{H}(\mathfrak{g}) \cap \mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$ ,  $\mathbf{Y}_k(\mathfrak{g}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{g}) \cap \mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$ , et  $\mathbf{Y}_+(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{Y}_n(\mathfrak{g})$ . Il suffit alors d'utiliser la propriété suivante ([42, 1.4]) :  $\psi_k(gr_{\mathcal{F}_K}(c)) \in \mathbb{H}_k \iff K_k(\psi_k(gr_{\mathcal{F}_K}(c)), f) = 0$  pour tout  $f \in \mathbf{Y}_+(\mathfrak{g})\mathbf{S}(\mathfrak{g}) \cap \mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$ .

D'après (\*) de 3.2, il suffit donc de montrer que, pour tout  $f \in \mathbf{Y}_+(\mathfrak{g})\mathbf{S}(\mathfrak{g}) \cap \mathbf{S}_k(\mathfrak{g})$ ,  $c(s(f)) = 0$  où  $s$  est la symétrisation. Or ceci est évident vu que les éléments du centre agissent par des scalaires sur le module simple  $\mathbf{L}(\lambda)$ .  $\square$

### 4.3

On peut faire les Remarques suivantes (voir aussi [F6, Remarques 3.7]).

*Remarques.* 1) Appliquons la Prop. 3.1 à  $\mathfrak{p}^-$  au lieu de  $\mathfrak{p}$  avec  $\pi' = \emptyset$  (c'est-à-dire à  $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{b}^-$ ). Alors on a  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{n}^- \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)) = \mathbf{S}(\mathfrak{b}^-)$ . Mais  $\mathfrak{n}^- \mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathfrak{n}^- \mathbf{C}(\lambda)$  et le (i) de la Prop. 4.2 appliqué avec  $\pi' = \emptyset$  donne

$$\sum_{\lambda \in P^+(\pi)} \psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{n}^- \mathbf{C}(\lambda))) = \mathbf{S}(\mathfrak{n}^-) \subsetneq \psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathfrak{n}^- \mathbf{C}(\lambda))) = \mathbf{S}(\mathfrak{b}^-).$$

2) D'après le Corollaire 3.2, on a  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{D}} (\mathfrak{m} \mathbf{C}(\lambda))^{\mathfrak{p}'})) \subset \mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  et ceci est vrai aussi pour les sous-espaces de poids. Par conséquent, d'après le (ii) de la Prop. 4.2, les éléments de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  qui appartiennent à un seul  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{m} \mathbf{C}(\lambda))^{\mathfrak{p}'}))$ , pour  $\lambda \in \mathcal{D}$ , sont des éléments harmoniques. Ceci se produit en particulier pour les semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  d'un poids donné si on a l'égalité pour la borne inférieure (c'est-à-dire l'égalité dans le Corollaire 3.2) et si de plus le sous-espace de poids de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  en question est de dimension un. Ceci nous amène à conjecturer que, lorsque  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{g}$ , tous les éléments de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  sont harmoniques.

3) Posons  $\mathbb{H}_{\pi'} = \sum_{\lambda \in P^+(\pi) | (w_0\lambda, \pi')=0} \psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}(\lambda)))$ . D'après le (ii) de la Prop. 4.2 on a  $\mathbb{H}_{\pi'} \subset \mathbb{H}(\mathfrak{g})$  et d'après le (i) de la Prop. 4.2, on a

$$(\text{ad } \mathbf{U}(\mathfrak{g}))(\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-)) \subset \mathbb{H}_{\pi'}.$$

Cependant cette inclusion peut être stricte car si  $V$  est un  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module simple de dimension finie, sa multiplicité dans  $(\text{ad } \mathbf{U}(\mathfrak{g}))(\mathbf{S}(\mathfrak{m}^-))$  est inférieure ou égale à la dimension de l'espace  $V^{\mathfrak{r}_{\pi'}}$  des invariants de  $V$  par l'action du facteur réductif de Levi  $\mathfrak{r}_{\pi'} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$  de  $\mathfrak{p}$ , et on peut avoir une inégalité stricte, alors que la multiplicité de  $V$  dans  $\mathbb{H}_{\pi'}$  est supérieure ou égale à  $\dim(V^{\mathfrak{r}_{\pi'}})$ . (Voir [F6, 3.7, 3] pour plus de détails). En fait on ne sait pas si l'on a l'égalité pour cette dernière multiplicité. Si on l'avait, on pourrait considérer  $\mathbb{H}_{\pi'}$  comme l'analogue de l'espace  $\mathbb{H}(\mathfrak{g})$  des éléments harmoniques pour une sous-algèbre parabolique (associée à  $\pi \setminus \pi'$ ).

## B La borne supérieure.

Je vais expliquer ici comment tout élément de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$  admet comme termes principaux (en un sens que je détaillerai dans le Par. 3) des éléments dans une certaine algèbre de polynômes  $\mathbf{S}^J$  incluse dans  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi}^-)$  lorsque  $\mathfrak{h}^\perp = \{0\}$  (voir Par. 1 ci-dessous pour une définition de  $\mathfrak{h}^\perp$ ). Rappelons que, d'après [28], le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes. L'idée est d'abord de localiser par la partie multiplicative  $E$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})$  engendrée par les générateurs (de degré strictement positif) de l'algèbre de polynômes  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  puis de décrire le localisé  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E^{\mathfrak{n}}$  par  $E$  de l'espace des invariants  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}}$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{n}$  comme l'image du localisé  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E$  par un certain morphisme  $\Phi$  d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules. Cette Section s'appuie sur les Sections 4 et 5 de [F5].

Nous adopterons la convention suivante. Si  $S$  est un ensemble sur lequel agit un certain groupe  $G$ , on notera  $S/G$  un ensemble de représentants dans  $S$  des classes modulo l'action de  $G$ .

### 1 Rappels sur le semi-centre du Borel.

Joseph dans [28] a décrit explicitement le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$  de l'algèbre symétrique du Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  ainsi que le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}) = \mathbf{S}(\mathfrak{n})^{\mathfrak{n}}$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})$ . Il a montré que ce semi-centre et ce centre sont des algèbres de polynômes, le premier en  $\text{card}(\pi) = \text{rang}(\mathfrak{g})$  générateurs, le second en  $\text{card}(\pi/\langle j \rangle)$  générateurs, l'ensemble des poids (pour l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ) de ces deux algèbres de polynômes étant le même (on le notera  $\mathcal{B}$ ). (L'involution  $j$  de  $\pi$  a été définie au 1.1 de la Sec. C du Chap. II). Plus précisément il existe un système  $\mathcal{K}$  (déterminé de façon canonique) de racines positives fortement orthogonales tel que  $\mathcal{B} = P^+(\pi) \cap \mathbb{N}\mathcal{K}$ . Soit  $\alpha \in \pi$ . On pose  $\rho_\alpha = \varepsilon_\alpha(\varpi_\alpha + \varpi_{j(\alpha)})$  avec

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \alpha = j(\alpha) \text{ et } \varpi_\alpha \in \mathbb{N}\mathcal{K} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Rappelons que  $\varpi_\alpha$  est le poids fondamental associé à la racine simple  $\alpha$ , relativement à  $\pi$ ).

Les nombres  $\varepsilon_\alpha$  suivent des règles précises données par [28, Tables I et II] ou par [F5, Table].

On constate que tous les  $\varepsilon_\alpha$  valent un si, et seulement si,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple de type  $A$  ou  $C$  ou un produit d'algèbres de Lie simples de type  $A$  ou  $C$ . (Dans ce cas on dira que  $\mathfrak{g}$  est de type  $AC$ ).

D'après [28], le monoïde  $\mathcal{B}$  est libre engendré par les  $\rho_\alpha$ , pour  $\alpha \in \pi/\langle j \rangle$  et le sous-espace de poids  $\rho_\alpha$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  est un espace de dimension un. En choisissant un vecteur non nul  $a_{\rho_\alpha}$  dans chacun de ces sous-espaces de poids, on obtient que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  est une algèbre de polynômes engendrée par les  $a_{\rho_\alpha}$ , pour  $\alpha \in \pi/\langle j \rangle$ . (Si on pose  $\alpha = \alpha_i$ , on pourra noter  $\rho_i$  au lieu de  $\rho_{\alpha_i}$  ou  $a_{\rho_i}$  au lieu de  $a_{\rho_{\alpha_i}}$ ). Enfin d'après [28], le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  vérifie  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^\perp)^{\mathfrak{n}}$  où  $\mathfrak{h}^\perp$  est l'orthogonal dans  $\mathfrak{h}$  (pour la dualité) du monoïde

libre  $\mathcal{B} \subset \mathfrak{h}^*$ . Posons, pour  $\alpha \in \pi$ ,  $h(\alpha) = \mathcal{H}^{-1}(\varpi_\alpha - \varpi_{j(\alpha)})$  avec  $\mathcal{H} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$  l'isomorphisme obtenu grâce à la forme de Killing  $K$  de  $\mathfrak{g}$  et vérifiant  $\langle \mathcal{H}^{-1}(x), y \rangle = (x, y) = K(\mathcal{H}^{-1}(x), \mathcal{H}^{-1}(y))$  pour tous  $x, y \in \mathfrak{h}^*$  et  $\mathcal{H}(\check{\alpha}) = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$  pour tout  $\alpha \in \pi$  (de coracine  $\check{\alpha}$ ) ([F6, 5.2.2]).

Alors  $\mathfrak{h}^\perp$  est le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par les  $h(\alpha)$ ,  $\alpha \in \pi$ .

De plus le sous-espace de poids  $\rho_\alpha$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{b})$  est de dimension un si  $\alpha = j(\alpha)$  et dans ce cas ce sous-espace est égal au sous-espace de même poids de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  ou de dimension deux sinon. Dans ce dernier cas, l'un des générateurs de ce sous-espace de poids est  $a_{\rho_\alpha} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  et l'autre générateur, noté  $c_{\rho_\alpha}$  vérifie  $c_{\rho_\alpha} = a_{\rho_\alpha}h(\alpha) + b_{\rho_\alpha}$  où  $b_{\rho_\alpha}$  est un vecteur de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})$  de poids  $\rho_\alpha$ . Enfin les éléments  $a_{\rho_\alpha}$  et  $b_{\rho_\alpha}$  sont des polynômes homogènes de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})$  avec  $\deg(b_{\rho_\alpha}) = \deg(a_{\rho_\alpha}) + 1$ .

## 2 Un localisé de $\mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}}$ .

On considère la partie multiplicative  $E$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n})$  engendrée par les  $a_{\rho_\alpha}$  pour  $\alpha \in \pi/\langle j \rangle$ . On va utiliser le Lemme de Taylor ([26, 2.2 et 2.6]) pour construire un morphisme surjectif d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules entre  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E^{\mathfrak{n}}$ .

Pour cela, on utilise (puisque  $\mathfrak{n}$  est nilpotente) une suite décroissante d'idéaux  $\mathfrak{n}_i$  de  $\mathfrak{n}$  ( $1 \leq i \leq N+1$  si  $N = \dim(\mathfrak{n})$ ) normalisés par la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  tels que  $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}_{N+1} = \{0\}$  vérifiant  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i] \subset \mathfrak{n}_{i+1}$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ . On ordonne alors l'ensemble  $\Delta^+$  des racines positives de sorte que pour tout  $1 \leq i \leq N$ , on ait  $\mathfrak{n}_i = \bigoplus_{i \leq j \leq N} \mathbf{k}x_j$  où  $x_j$  est un vecteur de poids  $\gamma_j \in \Delta^+$ . Puis on pose pour tout  $1 \leq i \leq N+1$ ,  $T_i = (\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E)^{\mathfrak{n}_i}$  l'espace des invariants du localisé  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{n}_i$  (voir Déf. 5.2 de la Sec. B du Chap. I). Chaque  $T_i$  est un  $ad \mathbf{U}(\mathfrak{b})$ -module (et aussi une algèbre). Comme  $E \subset \mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  on a aussi  $T_i = (\mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}_i})_E$  pour tout  $1 \leq i \leq N+1$ . Grâce au Lemme de Taylor, on construit alors, pour tout  $1 \leq i \leq N$ , un vecteur  $y_i \in T_{i+1}$  de poids  $-\gamma_i$  et tel que  $(ad x_i)(y_i) = 1$ . Pour tout  $1 \leq i \leq N$ , on définit l'application linéaire  $\Phi_i : T_{i+1} \longrightarrow T_i$  par

$$\Phi_i(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} y_i^n (ad x_i)^n(a)$$

pour tout  $a \in T_{i+1}$ . On a  $(ad x_i)(\Phi_i(a)) = 0$  donc on a bien  $\Phi_i(a) \in T_i$ . De plus l'image de  $\Phi_i$  est  $T_i$  car pour tout  $a \in T_i$ , on a  $\Phi_i(a) = a$ . Enfin comme les poids (par rapport à l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ) de  $x_i$  et  $y_i$  sont opposés, on en déduit facilement que  $\Phi_i$  est un morphisme de  $ad \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules. De plus  $\Phi_i$  est un morphisme d'algèbres.

On pose  $\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_N$ . Alors  $\Phi : \mathbf{S}(\mathfrak{p})_E \longrightarrow \mathbf{S}(\mathfrak{p})_E^{\mathfrak{n}}$  est un morphisme surjectif d'algèbres et de  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules.

Posons  $\mathfrak{h}^{\perp} = \{h \in \mathfrak{h}^\perp \mid \langle h, \pi' \rangle = 0\} = \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ .

On montre alors le Lemme suivant (voir [F5, Lemme 4.1.5]).

**Lemme.** *Quel que soit le sous-espace supplémentaire  $\mathfrak{h}^{\mathbf{J}}$  de  $\mathfrak{h}^{\perp}$ , on a*

$$\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E^{\mathfrak{n}} = \mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^{\perp})_E^{\mathfrak{n}} \Phi(\mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^{\mathbf{J}})).$$

*Démonstration.* Cela provient en effet de l'égalité  $\mathbf{S}(\mathfrak{b}_l \oplus \mathfrak{h}^l)_E^n = \mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^l)_E^n = \Phi(\mathbf{S}(\mathfrak{b}_l \oplus \mathfrak{h}^l)_E)$  où  $\mathfrak{b}_l = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l}$  pour un supplémentaire  $\mathfrak{l}$  dans  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{h}^\perp$  puis du fait que  $\Phi$  est un morphisme d'algèbres.  $\square$

### 3 Termes principaux des éléments de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

D'après le Lemme du Par. 2, tout vecteur  $z \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})$  semi-invariant s'écrit donc

$$(*) \quad z = \sum_{i \in I} e_i \Phi(u_i)$$

où  $I$  est fini et où les  $e_i \in \mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^l)_E^n$  sont linéairement indépendants et les  $u_i \in \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^j)$  avec les notations précédentes. Il suffit ensuite de définir (voir [F5, 4.2.1, 4.2.6] pour plus de détails) deux graduations sur  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  (invariantes par l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ), notées  $gr'$  et  $gr''$ , pour lesquelles les éléments non nuls de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{h}^l)$  ont pour degré zéro, et qui passent donc au localisé  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})_E$ , pour obtenir la Proposition ci-dessous (voir aussi [F5, 4.2.8]). Notons que, pour tout polynôme homogène  $a \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})$ ,  $gr'(gr''(a))$  est encore un polynôme homogène de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  de même degré et que, pour tout  $u \in \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^j)$ ,  $gr'(gr''(\Phi(u))) = gr'(gr''(u))$  d'après [F5, lemme 4.2.3].

Revenons à  $z \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})$  semi-invariant et à l'écriture (\*) ci-dessus. Les définitions et propriétés des graduations  $gr'$  et  $gr''$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  entraînent que  $gr'(gr''(z)) = \sum_{i \in I'} e'_i u'_i$  où  $I' \subset I$ , les  $u'_i$  étant linéairement indépendants dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^j)$  et invariants par l'action adjointe de  $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$ , et les  $e'_i$  étant finalement dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^l)_E^n$  (et non dans le localisé par rapport à  $E$ ) puisque  $gr'(gr''(z)) \in \mathbf{S}(\mathfrak{p})$ . De plus la somme du poids (pour l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ ) de  $e'_i$  et du poids de  $u'_i$  est égale au poids de  $z$ , donc est orthogonale à  $\pi'$  (pour la forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $(, )$  sur  $\mathfrak{h}^*$ ).

On note  $\mathbf{S}^J$  la sous-algèbre de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^l)_E^n \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^j)_{\pi'}^{\pi'}$  engendrée par les vecteurs de poids orthogonal à  $\pi'$ . Remarquons que, lorsque  $\mathfrak{h}^\perp = \{0\}$  (par exemple pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B$  ou  $C$ ),  $\mathbf{S}^J$  n'est autre que la sous-algèbre de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  engendrée par les vecteurs de poids orthogonal à  $\pi'$ .

**Proposition.** *Quel que soit le sous-espace supplémentaire  $\mathfrak{h}^j$  de  $\mathfrak{h}^l$  dans  $\mathfrak{h}^\perp$ , on a*

$$gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}))) \subset \mathbf{S}^J.$$

Autrement dit pour tout  $s \in \mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ , vecteur de poids  $\delta \in P^+(\pi)$ , il existe  $I$  fini et pour tout  $i \in I$ ,  $u_i \in \mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^l)_E^n$ , vecteur de poids  $\mu_i$  et  $v_i \in \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^j)_{\pi'}^{\pi'}$ , vecteur de poids  $-\nu_i$  tels que  $gr'(gr''(s)) = \sum_{i \in I} u_i v_i$ . D'où  $\mu_i - \nu_i = \delta$  et  $(\mu_i - \nu_i, \pi') = 0$ . Les termes  $u_i v_i$  s'appellent les termes principaux de  $s$ .

Compte tenu de la construction des graduations, il s'ensuit que, pour  $\pi' = \emptyset$ , c'est-à-dire pour  $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ , on a (voir [F5, 4.2.9])

$$gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}))) = \mathbf{Sy}(\mathfrak{b}) = \mathbf{S}^J.$$

En effet dans ce cas  $\mathfrak{h}^l = \mathfrak{h}^\perp$  donc  $\mathfrak{h}^j = \{0\}$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{h}^l) = \mathbf{S}(\mathfrak{b})$ .

Enfin, pour  $\pi' \subset \pi$  quelconque, nous avons montré que, pour un  $\mathfrak{h}^j$  bien choisi, l'algèbre  $\mathbf{S}^J$  est une algèbre de polynômes.

Ceci fera l'objet du paragraphe suivant.

## 4 L'algèbre de polynômes $\mathbf{S}^J$ .

### 4.1

C'est essentiellement lorsque  $\mathfrak{h}^\perp \neq \{0\}$  (c'est-à-dire lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$ , de type  $E_6$  ou de type  $D_{2n+1}$  ou un produit d'algèbres de Lie simples de ces types) qu'apparaissent les difficultés techniques pour montrer la polynomialité de  $\mathbf{S}^J$  pour un choix de  $\mathfrak{h}^J$  particulier.

Rappelons l'ensemble  $\Pi$  des  $\langle ji \rangle$ -orbites de  $\pi$  introduit au 1.1 de la Sec. C du Chap. II. On pose alors  $\Pi_1 = \{\Gamma \in \Pi \mid \Gamma \neq j(\Gamma)\}$  et  $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$ . On rappelle que  $\mathcal{B}$  est l'ensemble des poids du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  et aussi du centre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  et on notera  $\mathcal{B}'$  l'ensemble des poids du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}_{\pi'})$  et aussi du centre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'})$  où  $\mathfrak{b}_{\pi'} = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}'$ . ( $\mathcal{B} \subset P^+(\pi)$  et  $\mathcal{B}' \subset P^+(\pi')$ ). On notera ainsi  $\rho'_\alpha = \varepsilon'_\alpha(\varpi'_\alpha + \varpi'_{i(\alpha)})$  les générateurs du monoïde libre  $\mathcal{B}'$ , pour  $\alpha \in \pi' / \langle i \rangle$ , avec  $\varepsilon'_\alpha$  défini comme  $\varepsilon_\alpha$  mais relativement à  $\pi'$ , et  $a_{-\rho'_\alpha}$  un générateur du sous-espace de poids  $-\rho'_\alpha$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'})$ .

Pour  $\Gamma \in \Pi$ , on a déjà posé  $d_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varpi_\gamma$  où  $\varpi_\gamma$  est le poids fondamental associé à  $\gamma$  et relativement à  $\pi$ . On posera de même  $d'_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} \varpi'_\gamma$  où  $\varpi'_\gamma$  est le poids fondamental associé à  $\gamma \in \pi'$  et relativement à  $\pi'$ . Plus généralement on posera, pour tout sous-ensemble  $S$  de  $\pi$ ,  $d_S = \sum_{\alpha \in S} \varpi_\alpha$ .

Si  $P(\pi) = \sum_{\alpha \in \pi} \mathbb{Z} \varpi_\alpha$ , resp.  $P(\pi') = \sum_{\alpha \in \pi'} \mathbb{Z} \varpi'_\alpha$ , est le réseau des poids de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  relativement à  $\pi$ , resp. de  $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  relativement à  $\pi'$ , on vérifie facilement qu'il existe un entier naturel non nul  $r$  tel que

$$P(\pi) \subset P(\pi') \oplus \frac{1}{r} \sum_{\alpha \in \pi \setminus \pi'} \mathbb{Z} \varpi_\alpha$$

et pour tout  $\alpha \in \pi'$ , la projection de  $\varpi_\alpha$  dans  $P(\pi')$  par cette décomposition est égale à  $\varpi'_\alpha$  (voir [F5, 2.5 (1)]). Pour  $\lambda \in P(\pi)$ , on notera  $\lambda' \in P(\pi')$  sa projection dans  $P(\pi')$  par cette décomposition. Ainsi pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $d'_\Gamma = d'_{\Gamma \cap \pi'}$  est la projection dans  $P(\pi')$  par cette décomposition de  $d_\Gamma$  ou de  $d_{\Gamma \cap \pi'}$ .

### 4.2

*Remarque.* Pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $d_\Gamma + d_{j(\Gamma)} - d'_\Gamma - d'_{j(\Gamma)} = w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ .

*Démonstration.* On peut écrire  $d_\Gamma = d'_\Gamma + d''_\Gamma$  avec  $d''_\Gamma \in \frac{1}{r} \sum_{\alpha \in \pi \setminus \pi'} \mathbb{Z} \varpi_\alpha$ .

Alors  $w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma = d_\Gamma - w_0 d_\Gamma - d'_\Gamma + w'_0 d_\Gamma = d_\Gamma + d_{j(\Gamma)} - (d'_\Gamma + d''_\Gamma - w'_0 d'_\Gamma - d''_\Gamma)$  car  $w'_0 \varpi_\alpha = \varpi_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \pi \setminus \pi'$  et car  $-w_0 d_\Gamma = d_{j(\Gamma)}$ . Enfin  $-w'_0 d'_\Gamma = d'_{i(\Gamma \cap \pi')} = d'_{j(\Gamma) \cap \pi'} = d'_{j(\Gamma)}$  car  $i(\Gamma \cap \pi') = j(\Gamma) \cap \pi'$ .  $\square$

### 4.3

Pour  $\Gamma \in \Pi$ , on pose

$$\varepsilon_\Gamma = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \Gamma \in \Pi_2 \text{ et } d_\Gamma \in \mathcal{B} \text{ et } d'_\Gamma \in \mathcal{B}' \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

#### 4.4 Quelques exemples.

1. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit de type  $AC$ . Alors pour tout  $\pi' \subset \pi$ , on vérifie que  $\varepsilon_\Gamma = 1$ , quel que soit  $\Gamma \in \Pi$ .
2. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $B_5$ , avec  $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  (la racine  $\alpha_5$  étant la plus courte) et  $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ . Alors  $\Pi = \Pi_2$  car  $j = Id_\pi$ .  
Pour  $\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_4\} \in \Pi_2$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1/2$  car  $d_\Gamma = \varpi_2 + \varpi_4 \in \mathcal{B}$  et  $d'_\Gamma = \varpi'_2 + \varpi'_4 \in \mathcal{B}'$  (voir [28, Table I] et [F5, Table]).  
Pour toute  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\Gamma \neq \{\alpha_2, \alpha_4\}$ , on a  $\varepsilon_\Gamma = 1$  car pour  $\Gamma = \{\alpha_{2j-1}\}$  ( $1 \leq j \leq 3$ ),  $d_\Gamma = \varpi_{2j-1} \notin \mathcal{B}$  d'après [F5, Table].
3. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $B_4$  et  $\pi' = \{\alpha_3\}$ . Alors pour  $\Gamma = \{\alpha_2\} \in \Pi = \Pi_2$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1/2$  car  $d_\Gamma = \varpi_2 \in \mathcal{B}$  et  $d'_\Gamma = 0 \in \mathcal{B}'$  et pour toute  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\Gamma \neq \{\alpha_2\}$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1$ , d'après [F5, Table].
4. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit simple de type  $B_n$  ( $n \geq 3$ ), avec  $\mathfrak{g}'$  de type  $B_{n-1}$ . Alors pour tout  $\Gamma \in \Pi = \Pi_2$ , on a  $d_\Gamma \notin \mathcal{B}$  ou  $d'_\Gamma \notin \mathcal{B}'$ , d'après [F5, Table], donc  $\varepsilon_\Gamma = 1$ .

#### 4.5 Le cas où $\mathfrak{h}^\perp = \{0\}$ .

Par souci de simplicité, je vais expliquer en détails comment on peut montrer la polynomialité de  $\mathbf{S}^j$  dans le cas où  $\mathfrak{h}^\perp = \{0\}$ . Pour le cas général, on pourra se référer à [F5, Sec. 5].

L'espace  $\mathfrak{h}^\perp$  est réduit à  $\{0\}$  si, et seulement si,  $j = Id_\pi$ . Dans ce cas pour tout  $\alpha \in \pi$ , on a  $\rho_\alpha = \varpi_\alpha$  si  $\varepsilon_\alpha = 1/2$  et  $\rho_\alpha = 2\varpi_\alpha$  sinon. De plus, puisque  $j = Id_\pi$ , on a, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\Gamma = \{\alpha\}$  si  $\alpha = i(\alpha)$  ou  $\Gamma = \{\alpha, i(\alpha)\}$  sinon. En particulier pour  $\Gamma \notin \Pi'$ ,  $\Gamma = \{\alpha\}$  pour  $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ .

**4.5.1** Soit  $\Gamma \in \Pi$ . On pose

$$a_\Gamma = \prod_{\alpha \in \Gamma} (a_{\rho_\alpha}^{1/\varepsilon_\alpha})^{\varepsilon_\Gamma}$$

et

$$a'_\Gamma = \prod_{\alpha \in \Gamma \cap \pi'} (a_{-\rho'_\alpha}^{1/\varepsilon'_\alpha})^{\varepsilon_\Gamma}$$

avec la convention  $a'_\Gamma = 1$  si  $\Gamma \cap \pi' = \emptyset$ .

**Proposition .** *L'élément  $a_\Gamma$  est dans  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  et l'élément  $a'_\Gamma$  est dans  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  et lorsque  $j = Id_\pi$ , le poids de  $a_\Gamma$  est égal à  $2\varepsilon_\Gamma d_\Gamma$  et le poids de  $a'_\Gamma$  est égal à  $-2\varepsilon_\Gamma d'_\Gamma$ .*

*Démonstration.* Si  $\varepsilon_\Gamma = 1$  on voit sans problème pourquoi  $a_\Gamma$ , resp.  $a'_\Gamma$ , appartient à  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$ , resp. à  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ .

Supposons que  $\varepsilon_\Gamma = 1/2$ . Alors cela implique que  $d_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} \varpi_\alpha \in \mathcal{B}$  donc puisque dans le cas où  $j = Id_\pi$ ,  $\mathcal{B}$  est un monoïde libre engendré par les  $2\varepsilon_\beta \varpi_\beta$ , pour  $\beta \in \pi$ , cela implique que  $\varepsilon_\alpha = 1/2$  pour tout  $\alpha \in \Gamma$ . Par conséquent  $a_\Gamma = \prod_{\alpha \in \Gamma} a_{\rho_\alpha} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n})$ .

Enfin si  $\Gamma = \{\alpha\} \in \Pi'$  alors  $d'_\Gamma = \varpi'_\alpha \in \mathcal{B}'$  et donc  $\varepsilon'_\alpha = 1/2$  et  $a'_\Gamma = a_{-\rho'_\alpha} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ . Si  $\Gamma = \{\alpha\} \notin \Pi'$  alors  $d'_\Gamma = 0 \in \mathcal{B}'$  et  $a'_\Gamma = 1 \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ . Si  $\Gamma = \{\alpha, i(\alpha)\} \in \Pi'$  ( $\alpha \neq i(\alpha)$  et donc  $\alpha \in \pi'$ ) alors  $\varepsilon'_\alpha = 1$  et  $a'_\Gamma = (a_{-\rho'_\alpha})^{1/2}(a_{-\rho'_{i(\alpha)}})^{1/2} = a_{-\rho'_\alpha} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  car  $\rho'_\alpha = \rho'_{i(\alpha)}$ . Pour les poids, une vérification simple suffit, utilisant la définition des  $\rho_\alpha$  et des  $\rho'_\alpha$ . □

**4.5.2** Pour  $\Gamma \in \Pi$ ,  $s_\Gamma = a_\Gamma a'_\Gamma$  est un polynôme homogène de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  dont le degré (strictement positif) sera noté  $\varepsilon_\Gamma \partial_\Gamma$ .

**Proposition .** *Lorsque  $j = Id_\pi$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathfrak{h}^\perp = \{0\}$ , l'algèbre  $\mathbf{S}^J$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes engendrée par les  $s_\Gamma = a_\Gamma a'_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ , donc est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs, chacun des générateurs ci-dessus ayant pour poids  $\varepsilon_\Gamma \partial_\Gamma = 2\varepsilon_\Gamma(d_\Gamma - d'_\Gamma)$ , et pour degré  $\varepsilon_\Gamma \partial_\Gamma$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi$ .*

*Démonstration.* Les  $s_\Gamma$ ,  $\Gamma \in \Pi$ , sont bien dans  $\mathbf{S}^J$  car  $a_\Gamma \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  et  $a'_\Gamma \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  et car le poids de  $s_\Gamma$  est  $2\varepsilon_\Gamma(d_\Gamma - d'_\Gamma)$  d'après la Prop. 4.5.1 qui est orthogonal (pour la forme bilinéaire  $(, )$ ) à  $\pi'$  d'après la fin de 4.1. Comme les  $a_{\rho_\alpha}$  et les  $a_{-\rho'_\alpha}$  sont algébriquement indépendants, on en déduit que les  $s_\Gamma$ ,  $\Gamma \in \Pi$ , le sont aussi.

Enfin on a  $\mathbf{S}^J = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}\pi | (\nu, \pi') = 0} \left( \bigoplus_{\mu \in \mathcal{B} | \mu - \nu \in \mathcal{B}'} \mathbf{S}_{\nu, \mu}^J \right)$  avec  $\mathbf{S}_{\nu, \mu}^J = \mathbf{Y}(\mathfrak{n})_\mu \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{\nu - \mu}$  où l'on note  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})_\mu$  le sous-espace de poids  $\mu$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{\nu - \mu}$  le sous-espace de poids  $\nu - \mu$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ . Comme ces sous-espaces de poids sont de dimension un, il en résulte que  $\mathbf{S}_{\nu, \mu}^J$  est aussi de dimension un.

De plus pour tout  $\nu \in \mathbb{Z}\pi$  tel que  $(\nu, \pi') = 0$  et tel qu'il existe  $\mu \in \mathcal{B}$  tel que  $\mu - \nu \in \mathcal{B}'$ , on peut vérifier que, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ , il existe  $m_\Gamma \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu = 2 \sum_{\Gamma \in \Pi} m_\Gamma \varepsilon_\Gamma d_\Gamma$  et  $\mu - \nu = 2 \sum_{\Gamma \in \Pi'} m_\Gamma \varepsilon_\Gamma d'_\Gamma$  (voir aussi [F5, Prop. 3.2.11]). Par conséquent l'espace vectoriel  $\mathbf{S}_{\nu, \mu}^J$  est engendré par le vecteur  $\prod_{\Gamma \in \Pi} s_\Gamma^{m_\Gamma}$ .

Ainsi on obtient que  $\mathbf{S}^J$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes engendrée par les  $s_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ . □

#### 4.6 Le cas où $\mathfrak{h}^\perp \neq \{0\}$ .

Dans ce cas  $\mathbf{S}^J = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}\pi | (\nu, \pi') = 0} \left( \bigoplus_{\mu \in \mathcal{B} | \mu - \nu \in \mathcal{B}'} \mathbf{S}_{\nu, \mu}^J \right)$  avec  $\mathbf{S}_{\nu, \mu}^J = \mathbf{S}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^\perp)_\mu \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{\nu - \mu}$ .

De plus, pour tout  $\nu \in \mathbb{Z}\pi$  tel que  $(\nu, \pi') = 0$  et tel qu'il existe  $\mu \in \mathcal{B}$  tel que  $\mu - \nu \in \mathcal{B}'$  on vérifie que, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ , il existe  $m_\Gamma \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle j \rangle} m_\Gamma \varepsilon_\Gamma (d_\Gamma + d_{j(\Gamma)})$  et  $\mu - \nu = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle j \rangle} m_\Gamma \varepsilon_\Gamma (d'_\Gamma + d'_{j(\Gamma)})$  (voir [F5, Prop. 3.2.11]).

On vérifie également que  $\dim(\mathbf{S}_{\nu, \mu}^J) = \prod_{\Gamma \in \Pi_1 / \langle j \rangle} (m_\Gamma + 1)$ .

Pour  $\Gamma \in \Pi$ , les éléments  $s_\Gamma = a_\Gamma a'_\Gamma$  définis dans le cas où  $j = Id_\pi$  (4.5.1) sont encore dans  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}) \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  et cette fois de poids  $\varepsilon_\Gamma (d_\Gamma + d_{j(\Gamma)} - d'_\Gamma - d'_{j(\Gamma)})$ , qui est orthogonal

à  $\pi'$  pour la forme  $(, )$  d'après la fin de 4.1. De plus  $\varepsilon_\Gamma(d_\Gamma + d_{j(\Gamma)} - d'_\Gamma - d'_{j(\Gamma)}) = \varepsilon_\Gamma(w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma)$  d'après la Remarque 4.2.

On vérifie que, pour un choix de sous-espace supplémentaire  $\mathfrak{h}^J$  de  $\mathfrak{h}^I$  dans  $\mathfrak{h}^\perp$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi_1/\langle j \rangle$  il existe, en plus de  $s_\Gamma$ , un élément  $t_\Gamma$  de  $\mathbf{S}^J$  ( qui est un polynôme homogène de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  de degré un de plus que  $s_\Gamma$  et qui est exprimé en fonction des  $a_{\rho_\alpha}$ ,  $c_{\rho_\alpha}$ ,  $a_{-\rho'_\alpha}$ ,  $c_{-\rho'_\alpha}$  et d'un certain élément  $H_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} h(\alpha)$  de  $\mathfrak{h}^\perp$ , que l'on impose d'être dans  $\mathfrak{h}^J$  pour  $\Gamma$  non réduit à un élément) de poids  $\varepsilon_\Gamma(d_\Gamma + d_{j(\Gamma)} - d'_\Gamma - d'_{j(\Gamma)})$ .

Enfin l'ensemble  $\{s_\Gamma, \Gamma \in \Pi_2, s_\Gamma, t_\Gamma, \Gamma \in \Pi_1/\langle j \rangle\}$  est un ensemble d'éléments algébriquement indépendants de  $\mathbf{S}^J$ .

Compte tenu de la dimension de chaque espace  $\mathbf{S}^J_{\nu, \mu}$ , on en déduit que  $\mathbf{S}^J$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs, dont un ensemble de générateurs est  $\{s_\Gamma, \Gamma \in \Pi_2, s_\Gamma, t_\Gamma, \Gamma \in \Pi_1/\langle j \rangle\}$ .

#### 4.7 Cas général.

Pour tout  $\Gamma \in \Pi_2$ , on pose  $\partial_\Gamma = \frac{1}{\varepsilon_\Gamma} \deg(s_\Gamma)$ . Si de plus  $j \neq Id_\pi$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi_1/\langle j \rangle$ , on pose  $\partial_\Gamma = \deg(s_\Gamma)$  et  $\partial_{j(\Gamma)} = \deg(t_\Gamma) = \partial_\Gamma + 1$ .

On définit également le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{p}_\Pi$  de  $\mathfrak{p}$  par  $\mathfrak{p}_\Pi = \mathfrak{p}' + \mathfrak{h}_\Pi$  où  $\mathfrak{h}_\Pi = \mathfrak{h}' + \sum_{\Gamma \in \Pi_1} \mathbf{k}H_\Gamma$ . Alors  $\mathfrak{p}_\Pi$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{p}$ .

On obtient la Proposition suivante, valable dans le cas général, c'est-à-dire quand  $\mathfrak{h}^\perp$  est réduit ou non à zéro (voir [F5, 5.4.2]).

**Proposition .** *Pour un choix particulier de sous-espace supplémentaire  $\mathfrak{h}^J$  de  $\mathfrak{h}^I$  dans  $\mathfrak{h}^\perp$ , l'algèbre  $\mathbf{S}^J$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs ayant pour poids  $\varepsilon_\Gamma(d_\Gamma + d_{j(\Gamma)} - d'_\Gamma - d'_{j(\Gamma)}) = \varepsilon_\Gamma(w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma) = \varepsilon_\Gamma \delta_\Gamma$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi$ , et homogènes pour les graduations  $gr'$  et  $gr''$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$ , ainsi que pour la graduation naturelle de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  (leur degré  $\varepsilon_\Gamma \partial_\Gamma$ , pour cette dernière graduation, peut être calculé grâce aux Tables de [28, Tables I et II] et [F5, Table] et est strictement positif).*

*Enfin  $\mathfrak{p}_\Pi$  est le plus petit sous-espace de  $\mathfrak{p}$  contenant  $\mathfrak{p}'$  tel que  $\mathbf{S}^J \subset \mathbf{S}(\mathfrak{p}_\Pi)$ .*

#### 4.8

*Remarque .* On a montré dans [F6, 5.2.10] qu'en fait  $\mathfrak{p}_\Pi = \mathfrak{p}_\Lambda$  la troncation canonique de  $\mathfrak{p}$ .

## C Comparaison des deux bornes.

### 1 Récapitulatif.

Rappelons les résultats obtenus aux Sections A et B. Il existe deux graduations  $gr'$  et  $gr''$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  telles que l'on ait

$$(*) \quad gr'(gr''(\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}^{\mathbf{P}'})))) \subset gr'(gr''(\mathbf{S}(\mathfrak{p}))) \subset \mathbf{S}^J.$$

De plus  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$ , resp.  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$ , est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs ayant pour poids  $w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ , resp.  $\varepsilon_\Gamma(w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma)$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ .

Supposons  $\mathfrak{g}$  simple et  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ . Par [F5, Cor. 5.4.3], chaque  $\varepsilon_\Gamma(w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma) = \varepsilon_\Gamma \delta_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ , est un élément non nul de  $P^+(\pi)$  (qui est orthogonal à  $\pi'$  pour la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)$  d'après la Remarque 4.2 et la fin de 4.1) et donc chaque sous-espace de poids de  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$  est de dimension finie. De plus la double inclusion (\*) ci-dessus implique que la dimension d'un sous-espace de poids de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  est comprise entre la dimension du sous-espace de même poids de  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$  et la dimension du sous-espace de même poids de  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$  (voir [F5, 7.1] pour plus de détails).

Pour un  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -module  $M$ , qui est la somme directe de ses sous-espaces de poids  $M_\nu$ , tous supposés de dimension finie, on peut définir (voir [31, 2.8]) le caractère formel de  $M$  par

$$\text{ch}(M) = \sum (\dim M_\nu) e^\nu.$$

Pour deux  $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ -modules  $M$  et  $M'$  vérifiant les hypothèses ci-dessus, on écrira que  $\text{ch}(M) \leq \text{ch}(M')$  lorsque, pour tout  $\nu \in \mathfrak{h}^*$ ,  $\dim M_\nu \leq \dim M'_\nu$ .

La comparaison des dimensions des sous-espaces de poids expliquée ci-dessus entraîne donc que les caractères formels de  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$ ,  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  et  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$  sont dans cet ordre (croissant).

Supposons que, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1$ . Alors les caractères formels de  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$  et  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$  sont égaux (car dans ce cas  $\mathbf{C}^{\mathbf{P}'}$  et  $\mathbf{S}^{\mathbf{J}}$  sont deux algèbres de polynômes ayant le même nombre de générateurs avec les mêmes poids). Cela implique alors que la double inclusion (\*) ci-dessus est une double égalité. En particulier on a  $\text{gr}'(\text{gr}''(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p}))) = \mathbf{S}^{\mathbf{J}}$ , ce qui entraîne que  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs, chacun de ses générateurs ayant pour poids  $\delta_\Gamma = w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi$  et étant des polynômes homogènes de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  de degré  $\partial_\Gamma$  (strictement positif).

## 2 Le théorème.

On obtient ainsi le Théorème suivant (voir [F5, Thm. 7.3]).

**Théorème.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\pi'$  une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  telle que, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1$ . Alors le semi-centre  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi)$  générateurs homogènes de degré strictement positif ayant pour poids  $w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ , pour tout  $\Gamma \in \Pi$ .*

*C'est en particulier le cas lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type A ou C ou un produit d'algèbres de Lie simples de type A ou C et pour n'importe quelle sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .*

## D Généralisation.

Les travaux de A. Joseph, auxquels je n'ai pas collaborés, et que je vais mentionner dans cette section, généralisent aux sous-algèbres biparaboliques mes travaux avec Joseph sur les sous-algèbres paraboliques.

J'ai choisi de les présenter aussi ici car ces travaux éclairent encore davantage l'intérêt de nos travaux antérieurs sur les paraboliques (puisqu'ils se généralisent facilement aux

biparaboliques) et aussi car je vais utiliser dans le Chap. VI les résultats qu'a démontrés Joseph pour les biparaboliques (notamment par exemple la construction de 1.3 des involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$ , qui généralisent au cas des biparaboliques les involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$  associées à un parabolique).

D'autre part j'ai voulu recenser dans le Par. 4 les cas où les bornes du Thm. du Par. 3 (qui est une généralisation du Thm. du Par. 2 de la Sec. C) ne coïncident pas mais où l'on peut quand même conclure quant à la polynomialité du semi-centre associé à un biparabolique : il s'agit des algèbres biparaboliques Frobenius ou quasi-Frobenius (4.2) ou du centralisateur du vecteur de plus haut poids de  $\mathfrak{g}$  simple (4.1) ou de certains cas particuliers calculables par ordinateur (4.3).

Enfin le Par. 5 explique pourquoi le problème de la polynomialité du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  associé à un (bi)parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  semi-simple n'est pas encore résolu, notamment déjà pour un certain parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B_5$ .

Cela permet de mieux comprendre ce qu'il reste à chercher sur ce problème de la polynomialité du semi-centre associé à un biparabolique, ainsi que sur la recherche d'une description plus ou moins explicite des semi-invariants en question, même lorsqu'on sait que le semi-centre est une algèbre de polynômes (c'est ce que j'explique en 5.2 et que je reprends d'ailleurs dans la Sec. E du Chap. VII).

On considère donc désormais  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  une sous-algèbre biparabolique standard de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ .

Comme pour le semi-centre d'un parabolique, A. Joseph a encadré le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  entre deux bornes. La borne inférieure est le gradué associé à la filtration de Kostant d'une certaine sous-algèbre (polynomiale) du dual de Hopf  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ . La borne supérieure provient d'une décomposition de  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$  analogue à celle utilisée pour obtenir la borne supérieure du semi-centre d'une sous-algèbre parabolique.

Je ne rentrerai pas dans les détails des démonstrations, mais je vais donner les analogies avec le cas d'un parabolique.

Rappelons que  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''} = \mathfrak{p}_{\pi'} \cap \mathfrak{p}_{\pi''}^-$  avec  $\pi', \pi'' \subset \pi$  tels que  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ .

## 1 La borne inférieure pour un biparabolique.

### 1.1 L'analogie de $\mathbf{C}'$ .

Rappelons que dans l'expression de la borne inférieure du semi-centre d'un parabolique intervient la sous-algèbre  $\mathbf{C}'$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  isomorphe comme  $\mathfrak{p}$ -module et  $\mathfrak{k}$ -algèbre à  $\bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{L}(\lambda)^* \otimes \mathbf{L}'(\lambda)$ . Son analogue pour un biparabolique  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')$  la sous-algèbre de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  isomorphe comme  $\mathfrak{q}$ -module et  $\mathfrak{k}$ -algèbre à  $\bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{L}_{\pi''}^-(-\lambda) \otimes \mathbf{L}_{\pi'}(\lambda)$  où  $\mathbf{L}_{\pi'}(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{r}_{\pi'})v_\lambda$  et  $\mathbf{L}_{\pi''}^-(-\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{r}_{\pi''})v_{-\lambda}$ , avec  $\mathfrak{r}_{\pi'}$ , resp.  $\mathfrak{r}_{\pi''}$ , le facteur (réductif) de Levi de  $\mathfrak{p}_{\pi'}$ , resp.  $\mathfrak{p}_{\pi''}^-$  et  $v_\lambda$ , resp.  $v_{-\lambda}$ , un vecteur de plus haut poids, resp. de plus bas poids, de  $\mathbf{L}(\lambda)$ , resp. de  $\mathbf{L}(\lambda)^*$ . Autrement dit, notant pour tout  $\lambda \in P^+(\pi)$ ,  $\mathbf{C}_{\pi', \pi''}(\lambda) \subset \mathbf{C}(\lambda)$  le  $\mathfrak{q}$ -module isomorphe à  $\mathbf{L}_{\pi''}^-(-\lambda) \otimes \mathbf{L}_{\pi'}(\lambda)$  on a  $\mathbf{A}(\pi', \pi'') = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} \mathbf{C}_{\pi', \pi''}(\lambda)$ .

Dans le cas où  $\pi'' = \pi$ , on retrouve  $\mathbf{A}(\pi', \pi) = \mathbf{C}'$  car  $\mathbf{C}_{\pi', \pi}(\lambda) = \mathbf{C}'(\lambda)$ .

De façon analogue à ce qui a été démontré pour un parabolique (voir preuve de la Proposition du Par. 2 de la Sec. A du Chap. III) Joseph a montré (voir [30, Lemme 3.6]) :

**Lemme.** *Pour  $\lambda \in P^+(\pi)$ , l'espace des  $\mathfrak{q}'$ -invariants de  $\mathbf{L}_{\pi''}^-(-\lambda) \otimes \mathbf{L}_{\pi'}(\lambda)$  a une dimension inférieure ou égale à un, avec égalité si et seulement si*

$$(w_{\pi'}\lambda - w_{\pi''}\lambda, \pi' \cap \pi'') = 0$$

où  $w_{\pi'}$ , resp.  $w_{\pi''}$ , est le plus long élément du groupe de Weyl  $W_{\pi'}$ , resp.  $W_{\pi''}$ , sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions définies par  $\pi'$ , resp. par  $\pi''$ .

Par conséquent pour  $\lambda \in P^+(\pi)$ , l'espace des  $\mathfrak{q}'$ -invariants  $(\mathbf{C}_{\pi', \pi''}(\lambda))^{\mathfrak{q}'}$  pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{q}'$  de  $\mathbf{C}_{\pi', \pi''}(\lambda)$  est de dimension inférieure ou égale à un, avec égalité si et seulement si  $(w_{\pi'}\lambda - w_{\pi''}\lambda, \pi' \cap \pi'') = 0$ .

De plus lorsque la dimension vaut un, le poids (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{h}$ ) d'un  $\mathfrak{q}'$ -invariant de  $\mathbf{C}_{\pi', \pi''}(\lambda)$  est égal à  $w_{\pi'}\lambda - w_{\pi''}\lambda$ .

## 1.2 L'analogie de $\mathcal{D}$ .

On définit alors le monoïde additif  $\mathcal{D}_{\pi', \pi''}$  par  $\mathcal{D}_{\pi', \pi''} = \{\lambda \in P^+(\pi) \mid (w_{\pi'}\lambda - w_{\pi''}\lambda, \pi' \cap \pi'') = 0\}$ .

Lorsque  $\pi'' = \pi$ , le monoïde additif  $\mathcal{D}_{\pi', \pi}$  correspondant au parabolique  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  est égal au monoïde additif  $\mathcal{D}$  du Par. 2 de la Section A du Chap. II.

## 1.3 Les involutions $i$ et $j$ pour un biparabolique.

Pour pouvoir décrire précisément le monoïde  $\mathcal{D}_{\pi', \pi''}$  il nous faut, de façon analogue à ce qui a été fait pour  $\mathcal{D}$  dans le cas d'un parabolique, définir des involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$  qui généralisent au cas du biparabolique les involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$  définies pour un parabolique (voir 1.1 de la Sec. C du Chap. II). Voici comment les involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$  sont construites pour un biparabolique  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  et comment l'ensemble  $\tilde{\pi}$  est défini.

Pour  $\alpha \in \pi'$ , on pose  $i(\alpha) = -w_{\pi'}(\alpha)$  et pour  $\alpha \in \pi''$ ,  $j(\alpha) = -w_{\pi''}(\alpha)$ . Soit  $\alpha \in \pi$ . Comme  $\pi' \cup \pi'' = \pi$  on peut supposer par exemple que  $\alpha \in \pi'$ . Supposons qu'en plus  $\alpha \notin \pi''$  de sorte que  $j$  ne soit pas définie comme précédemment en  $\alpha$ . Alors on applique  $i$  à  $\alpha$  puis  $j$  à  $i(\alpha)$  si on le peut (c'est-à-dire si  $i(\alpha) \in \pi''$ ) etc... jusqu'à ce que l'on obtienne à nouveau  $\alpha$  ou bien une autre racine  $\alpha' \in \pi$  à laquelle le processus ne peut plus s'appliquer. Dans le premier cas on pose  $j(\alpha) = \alpha$  et dans le second cas si c'est  $j$  qui n'est pas défini en  $\alpha'$ , on pose  $j(\alpha) = \alpha'$ , et si c'est  $i$  qui n'est pas défini en  $\alpha'$  on rajoute une racine dite fictive  $\tilde{\alpha}$  et on pose  $j(\alpha) = \tilde{\alpha}$  et  $i(\tilde{\alpha}) = \alpha'$ . On note ensuite  $\tilde{\pi}$  la réunion de  $\pi$  et de l'ensemble des racines fictives (éventuellement vide). Dans le cas où le biparabolique est un parabolique, l'ensemble des racines fictives est vide et donc  $\tilde{\pi} = \pi$ .

La construction des involutions  $i$  et  $j$  ci-dessus est imposée par le fait que, lorsqu'on étend  $-w_{\pi'}$ , resp.  $-w_{\pi''}$ , à  $\pi$  tout entier grâce à l'identité en involutions  $i'$ , resp.  $j'$  de  $\pi$ , les  $\langle i', j' \rangle$ -orbites obtenues puissent se décomposer en  $\langle ij \rangle$ -orbites ([30, section 4]). C'est en effet le nombre de ces  $\langle ij \rangle$ -orbites qui est égal à la dimension de Gelfand-Kirillov du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  (voir Thm. 1.6 ci-dessous).

Bien sûr lorsque la sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  (c'est-à-dire lorsque  $\pi' = \pi$  ou  $\pi'' = \pi$ ) on retrouve les involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$  définies au 1.1 de la Sec. C du Chap. II (avec éventuellement interversion de  $i$  et  $j$ ). On notera  $E(\pi', \pi'')$  l'ensemble des intersections avec  $\pi$  des  $\langle ji \rangle$ -orbites des éléments de  $\tilde{\pi}$ . Dans le cas où  $\pi'' = \pi$ , on obtient  $E(\pi', \pi) = \Pi$  (notation du 1.1 de la Sec. C du Chap. II).

La Proposition de [30, 4.8] généralise au cas d'un biparabolique ce qui se passe pour le monoïde additif  $\mathcal{D}$  associé à un parabolique.

**Proposition .** *Le monoïde additif  $\mathcal{D}_{\pi', \pi''}$  est libre de générateurs les  $d_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} \varpi_\alpha$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ .*

#### 1.4

Notons  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  l'algèbre des invariants de  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')$  par l'action coadjointe de  $\mathfrak{q}'$ . Utilisant le Lemme 1.1 et la Proposition 1.3, Joseph en a déduit (voir [30, Thm. 7.2]) que l'on a :

**Théorème .** *On a  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{D}_{\pi', \pi''}} (\mathbf{C}_{\pi', \pi''}(\lambda))^{\mathfrak{q}'}$  donc  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(E(\pi', \pi''))$  générateurs ayant pour poids (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{h}$ )  $w_{\pi'} d_\Gamma - w_{\pi''} d_\Gamma = \delta_\Gamma$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ .*

*Remarques .* 1) On remarquera que, lorsque  $\pi'' = \pi$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{\pi'}$  est un parabolique, le théorème ci-dessus n'est autre que la Proposition du Par. 2 de la Sec. A du Chap. III.

2) D'après le lemme 1.1 et la proposition 1.3, pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , il existe un, et un seul (à un scalaire multiplicatif non nul près) élément  $c_\Gamma \in (\mathbf{C}_{\pi', \pi''}(d_\Gamma))^{\mathfrak{q}'} \setminus \{0\}$ . De plus cet élément est de poids  $\delta_\Gamma$ . Alors si  $r = \text{card}(E(\pi', \pi''))$ , on a  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'} = \mathbf{k}[c_{\Gamma_1}, \dots, c_{\Gamma_r}]$  l'algèbre de polynômes à coefficients dans  $\mathbf{k}$  et de générateurs  $c_{\Gamma_1}, \dots, c_{\Gamma_r}$ .

#### 1.5

Puis ([30, Cor. 7.6]) Joseph a montré que l'on a :

**Corollaire .** *Le gradué  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'})$  de  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  associé à la filtration de Kostant induite sur  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  s'injecte dans  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  grâce à l'application de Kostant  $\psi$ .*

*Remarques .* 1) Lorsque  $\pi'' = \pi$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{\pi'}$ , le corollaire ci-dessus est le Corollaire 3.2 de la Sec. A.

2) Posons, pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ ,  $f_\Gamma = \psi(gr_{\mathcal{F}_K}(c_\Gamma))$  où  $c_\Gamma$  a été défini à la Remarque 2) de 1.4. D'après le Corollaire ci-dessus,  $f_\Gamma \in \mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  et  $f_\Gamma$  est de poids  $\delta_\Gamma$ . En fait d'après [31, 10.2] on a même  $f_\Gamma \in \mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$ . De plus pour  $\pi'' = \pi$  et  $\mathfrak{g}$  simple, on a aussi  $f_\Gamma = f_{i(\Gamma)}$  à un scalaire multiplicatif non nul près d'après [31, 10.3].

## 1.6

Enfin bien que l'image de  $gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'})$  dans  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$  ne soit pas forcément polynomiale, Joseph a montré que sa dimension de Gelfand-Kirillov vaut  $\text{card}(E(\pi', \pi''))$  ([30, Prop. 7.10]) puis que le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})$  a la même dimension de Gelfand-Kirillov.

Cela donne le Théorème suivant ([30, Thm. 7.14]), qui généralise au cas des biparaboliques la Proposition du Par. 1 de la Sec. B du Chap. III.

**Théorème.** *Soit  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  une sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g}$ . Alors*

$$\text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}_{\pi', \pi''})) = \text{card}(E(\pi', \pi'')).$$

## 2 La borne supérieure pour un biparabolique.

## 2.1

Pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , on peut définir  $\varepsilon_\Gamma$  comme dans [31, 3.3] mais aussi de la façon suivante. On note  $\mathcal{B}_{\pi'}$ , resp.  $\mathcal{B}_{\pi''}$ , l'ensemble des poids du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}_{\pi'})$ , resp. de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}_{\pi''})$  où  $\mathfrak{b}_{\pi'} = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}$ , resp.  $\mathfrak{b}_{\pi''} = \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h}_{\pi''}$  avec  $\mathfrak{h}_{\pi'} = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{n}_{\pi'}, \mathfrak{n}_{\pi'}^-]$ , resp.  $\mathfrak{h}_{\pi''} = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{n}_{\pi''}, \mathfrak{n}_{\pi''}^-]$ .

Pour  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , ayant posé  $d_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} \varpi_\alpha$ ,  $d'_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma \cap \pi'} \varpi'_\alpha$  et  $d''_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma \cap \pi''} \varpi''_\alpha$  où  $\varpi'_\alpha$ ,  $\alpha \in \pi'$ , resp.  $\varpi''_\alpha$ ,  $\alpha \in \pi''$ , est le poids fondamental associé à  $\alpha$  relativement à  $\pi'$ , resp.  $\pi''$ , on pose

$$\varepsilon_\Gamma = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \Gamma = j(\Gamma) \text{ et } d'_\Gamma \in \mathcal{B}' \text{ et } d''_\Gamma \in \mathcal{B}'' \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque  $\pi'' = \pi$ , on retrouve la définition de  $\varepsilon_\Gamma$  pour tout  $\Gamma \in \Pi$  donnée au 4.3 de la Sec. B.

## 2.2

Le théorème ci-dessous généralise au cas d'un biparabolique la Proposition du Par. 3 de la Sec. B.

D'après [31, Thm. 5.8]) on a :

**Théorème.** *Il existe des sous-espaces  $\mathfrak{h}^I$  et  $\mathfrak{h}^J$  de  $\mathfrak{h}$  et des graduations  $gr'$  et  $gr''$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$  tels que l'on ait*

$$gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}))) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h}^I)^{\mathfrak{n}_{\pi''}} \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$$

et plus précisément  $gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}))) \subset \mathbf{S}^J$  où  $\mathbf{S}^J$  est la sous-algèbre de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h}^I)^{\mathfrak{n}_{\pi''}} \mathbf{S}(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$  engendrée par les vecteurs dont les poids sont orthogonaux (pour la forme bilinéaire  $(,)$ ) à  $\pi' \cap \pi''$ .

### 2.3

Posons  $E^1(\pi', \pi'') = \{\Gamma \in E(\pi', \pi'') \mid j(\Gamma) \neq \Gamma\}$  et  $E^2(\pi', \pi'') = E(\pi', \pi'') \setminus E^1(\pi', \pi'')$ . Dans le cas où  $\pi'' = \pi$ ,  $E^1(\pi', \pi) = \Pi_1$  et  $E^2(\pi', \pi) = \Pi_2$  (voir les notations de 4.1 de la Sec. B). Généralisant la Prop. 4.7 de la Sec. B au cas d'un biparabolique, Joseph a montré ([31, Prop. 6.6]) :

**Proposition .** *L'algèbre  $\mathbf{S}^J$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(E(\pi', \pi''))$  générateurs homogènes de degré strictement positif  $\varepsilon_\Gamma \partial_\Gamma$  et de poids  $\varepsilon_\Gamma(w_{\pi'} d_\Gamma - w_{\pi''} d_\Gamma) = \varepsilon_\Gamma \delta_\Gamma$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ . On pourra noter ces générateurs  $s_\Gamma$ ,  $\Gamma \in E^2(\pi', \pi'')$ , et  $s_\Gamma, t_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in E^1(\pi', \pi'')/\langle j \rangle$ , choisis de sorte que  $\deg(t_\Gamma) = \deg(s_\Gamma) + 1$ .*

### 3 Comparaison des deux bornes.

Comparant les deux bornes et montrant que les sous-espaces de poids de la borne supérieure sont de dimension finie lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple, que  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est strictement incluse dans  $\mathfrak{g}$  qui est la plus petite algèbre de Lie réductrice contenant  $\mathfrak{q}$ , Joseph obtient un encadrement pour le caractère formel  $ch(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{q}))$  (voir [31, 2.8]) de  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{q})$  entre les caractères formels de la borne inférieure et de la borne supérieure ci-dessus (voir [31, Thm. 6.7]). Ainsi le théorème ci-dessous généralise aux sous-algèbres biparaboliques le théorème du Par. 2 de la Sec. C valable pour les sous-algèbres paraboliques.

**Théorème .** *Supposons que  $\pi' \cup \pi'' = \pi$  et que  $\pi' \cap \pi'' \subsetneq \pi$  et  $\pi$  connexe.*

*Alors*

$$\prod_{\Gamma \in E(\pi', \pi'')} (1 - e^{\delta_\Gamma})^{-1} \leq ch(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{q})) \leq \prod_{\Gamma \in E(\pi', \pi'')} (1 - e^{\varepsilon_\Gamma \delta_\Gamma})^{-1}.$$

*Lorsque  $\varepsilon_\Gamma = 1$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , les deux bornes précédentes coïncident et le semi-centre  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{q})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(E(\pi', \pi''))$  générateurs. C'est le cas lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type AC et  $\mathfrak{q}$  n'importe quelle sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g}$ .*

### 4 Cas où les deux bornes de l'encadrement de $ch(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{q}))$ ne coïncident pas forcément et où l'on peut quand même conclure.

Pour une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$ , lorsque les deux bornes du Thm. du Par. 3 coïncident (c'est-à-dire lorsque les  $\varepsilon_\Gamma$  valent un, pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ ), le semi-centre  $\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{q})$  associé à  $\mathfrak{q}$ , qui est aussi le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  associé à la troncation canonique  $\mathfrak{q}_\Lambda$  de  $\mathfrak{q}$ , est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(E(\pi', \pi''))$  générateurs. Il se peut cependant que les deux bornes ne coïncident pas mais que l'on puisse quand même conclure quant à la polynomialité du centre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ .

#### 4.1 Le cas du centralisateur du vecteur de plus haut poids.

Supposons que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  soit simple et notons  $\beta$  la plus grande racine de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^{x_\beta}$  le centralisateur de l'unique vecteur (à un scalaire près)  $x_\beta$  de plus haut poids  $\beta$  de  $\mathfrak{g}$ .

On remarque d'abord que  $\mathfrak{g}^{x\beta} = \mathfrak{p}'$  l'algèbre dérivée du parabolique  $\mathfrak{p}$  dit de Heisenberg (voir [34, 6.12]) c'est-à-dire dont le radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  est une algèbre de Lie de Heisenberg de centre  $\mathbf{k}x_\beta$ . De plus cette algèbre dérivée est aussi la troncation canonique du parabolique  $\mathfrak{p}$ . Ainsi le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g}^{x\beta})$  est égal au semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  et le Thm. du Par. 3 ci-dessus s'applique. On constate alors que les deux bornes, sauf pour  $\mathfrak{g}$  de type  $A$  ou  $C$ , ne sont pas égales.

Cependant Joseph a amélioré la borne supérieure de l'encadrement du Thm. du Par. 3 pour en déduire une nouvelle borne supérieure pour  $ch(\mathbf{Y}(\mathfrak{g}^{x\beta}))$  (voir [34, Lemme 6.11]) qui est cette fois égale à la borne inférieure obtenue dans le Thm. du Par. 3 (voir [34, Lemme 6.12]), sauf pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $E_8$ . Ainsi il obtient (voir [34, 6.14]) que, pour  $\mathfrak{g}$  simple de type autre que  $E_8$ , le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g}^{x\beta})$  est une algèbre de polynômes dont il décrit également les degrés des générateurs ([34, Remarque 6.11 et 6.14]). L'existence de cette borne supérieure améliorée repose dans l'existence, pour le centralisateur  $\mathfrak{g}^{x\beta}$ , d'une "paire adaptée" (voir plus loin la définition du Par. 2 de la Sec. A du Chap. VI). Une telle paire adaptée n'existe pas toujours mais il s'avère qu'elle existe bien dans le cas du centralisateur  $\mathfrak{g}^{x\beta}$  pour  $\mathfrak{g}$  simple de type autre que  $E_8$ . Pour l'instant on ne sait pas encore si une paire adaptée existe ou non pour le centralisateur  $\mathfrak{g}^{x\beta}$  pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $E_8$ . Cependant il a été démontré par O. Yakimova ([61]) que le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g}^{x\beta})$ , pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $E_8$ , n'est pas une algèbre de polynômes. C'est le seul contre-exemple à la polynomialité du centre de Poisson d'un biparabolique tronqué que nous connaissons à ce jour.

## 4.2 Le cas des biparaboliques Frobenius et quasi-Frobenius.

A. Joseph a étudié dans [38] le cas des sous-algèbres biparaboliques Frobenius et quasi-Frobenius (les sous-algèbres biparaboliques Frobenius étant quasi-Frobenius). Si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est une telle sous-algèbre, Joseph a montré que le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $card(E(\pi', \pi''))$  générateurs. Dans ce cas la borne inférieure du Thm. du Par. 3 n'est en général pas égale à  $ch(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}))$  alors que la borne supérieure lui est égale, ce qui permet quand même d'en déduire la polynomialité de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$ . Un exemple (trivial) de sous-algèbre biparabolique quasi-Frobenius est la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$ . En fait les résultats de Joseph dans [38] généralisent aux sous-algèbres biparaboliques quasi-Frobenius ses résultats de [28] pour le semi-centre associé au Borel.

**Définition.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur  $\mathbf{k}$ .

Une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  est dite Frobenius lorsque son indice vaut zéro, autrement dit lorsqu'il existe dans  $\mathfrak{q}^*$  une orbite coadjointe dense.

Une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  de  $\mathfrak{g}$  est dite quasi-Frobenius lorsqu'aucune  $\langle ij \rangle$ -orbite ne se trouve entièrement dans  $\pi' \cap \pi''$  (voir [38, 4.2, Remark 2]).

On considère une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  de  $\mathfrak{g}$ . Rappelons  $E(\pi', \pi'')$  l'ensemble des intersections avec  $\pi$  des  $\langle ij \rangle$ -orbites des éléments de  $\tilde{\pi}$  (voir 1.3) et pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , rappelons que l'on a posé  $\delta_\Gamma = w_{\pi'} d_\Gamma - w_{\pi''} d_\Gamma$  où  $d_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varpi_\gamma$

(voir notation du Thm. 1.4). Alors (voir [30, 5.1]) on a  $\delta_\Gamma = \delta_{i(\Gamma)} = \delta_{j(\Gamma)}$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ .

La sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  est Frobenius si, et seulement si, l'algèbre  $\mathbf{C}(\mathfrak{q}) = (\mathbf{Frac}(\mathbf{S}(\mathfrak{q})))^{\mathfrak{q}}$  est réduite aux scalaires (car  $\text{indice}(\mathfrak{q}) = \text{degtr}(\mathbf{C}(\mathfrak{q}))$ ). Comme de plus chaque élément de  $\mathbf{C}(\mathfrak{q})$  est un quotient d'éléments de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  de même poids, on obtient que  $\mathbf{C}(\mathfrak{q})$  est réduit aux scalaires si, et seulement si, tout sous-espace de poids de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  est de dimension un. Les bornes inférieure et supérieure de  $ch(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q}))$  du Thm. du Par. 3 permettent alors d'en déduire (voir aussi [38, Lemme 4.1]), que  $\mathfrak{q}$  est Frobenius, si, et seulement si, tous les  $\delta_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants et tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$  est aussi une  $\langle i, j \rangle$ -orbite (c'est-à-dire tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$  est tel que  $\Gamma = i(\Gamma) = j(\Gamma)$ ).

D'après [38, Lemme 4.2 (iii)] si  $\mathfrak{q}$  est Frobenius, alors  $\mathfrak{q}$  est quasi-Frobenius.

D'après la définition d'une sous-algèbre biparabolique quasi-Frobenius et d'après [30, Prop. 5.8(ii)] (voir aussi [38, 4.2, Remark 2]), si  $\mathfrak{q}$  est quasi-Frobenius, alors les  $\delta_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')/\langle j \rangle$ , sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants.

Supposons donc  $\mathfrak{q}$  quasi-Frobenius. Soit  $\Gamma \in E^2(\pi', \pi'')$ , resp.  $\Gamma \in E^1(\pi', \pi'')/\langle j \rangle$ . Alors le sous-espace de poids  $\delta_\Gamma = \delta_{j(\Gamma)}$  de la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  est engendré par  $s_\Gamma^{1/\varepsilon_\Gamma}$ , resp. par  $s_\Gamma$  et  $t_\Gamma$  (voir Prop. 2.3). D'autre part le sous-espace de poids  $\delta_\Gamma$  de la borne inférieure  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  est de dimension supérieure ou égale à deux si  $\Gamma \neq j(\Gamma)$  (car il contient les vecteurs linéairement indépendants  $c_\Gamma$  et  $c_{j(\Gamma)}$  définis dans le 2) de la Remarque 1.4) ou supérieure ou égale à un si  $\Gamma = j(\Gamma)$ . Donc, d'après l'encadrement des caractères formels donné par le Thm. du Par. 3, si  $\Gamma \neq j(\Gamma)$  alors le sous-espace de  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  comme celui de  $\mathbf{S}^J$  de poids  $\delta_\Gamma$  est de dimension deux et si  $\Gamma = j(\Gamma)$  alors le sous-espace de  $\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'}$  comme celui de  $\mathbf{S}^J$  de poids  $\delta_\Gamma$  est de dimension un. Soit  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$  et  $f_\Gamma \in \mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$  défini comme dans le 2) de la Remarque de 1.5. D'après [38, Thm. 5.3], l'élément  $f_\Gamma$  a une racine-carrée dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$  si, et seulement si  $\varepsilon_\Gamma = 1/2$ . Si  $\varepsilon_\Gamma = 1$  on pose  $g_\Gamma = f_\Gamma$  et si  $\varepsilon_\Gamma = \frac{1}{2}$ , on prend pour  $g_\Gamma$  la racine-carrée de  $f_\Gamma$  dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{q})$ , qui est de poids  $\frac{1}{2}\delta_\Gamma$ . Alors  $g_\Gamma \in \mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  et même  $g_\Gamma \in \mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ . Par conséquent d'après l'encadrement des caractères formels donné par le Thm. du Par. 3, pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , le sous-espace de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  de poids  $\varepsilon_\Gamma\delta_\Gamma$  a la même dimension que le sous-espace de  $\mathbf{S}^J$  du même poids et donc pour tout  $\nu \in \mathfrak{h}^*$ , le sous-espace de poids  $\nu$  de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  a même dimension que celui de poids  $\nu$  de  $\mathbf{S}^J$ . Par suite les caractères formels de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  et de  $\mathbf{S}^J$  sont égaux et donc  $gr'(gr''(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q}))) = \mathbf{S}^J$  (mais on n'a pas  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{A}(\pi', \pi'')^{\mathfrak{q}'})) = \mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  sauf si  $\varepsilon_\Gamma = 1$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ ). On en déduit que  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $card(E(\pi', \pi''))$  générateurs de poids  $\varepsilon_\Gamma\delta_\Gamma$ , pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ .

Supposons  $\mathfrak{q}$  Frobenius. Comme tout sous-espace de poids de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  est de dimension un, on retrouve par [28, Lemme 4.2] que  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $card(E(\pi', \pi''))$  générateurs (qui sont les  $g_\Gamma$ ,  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , définis dans l'alinéa précédent, voir aussi [38, Lemme 4.5]), car de plus  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q}) = \mathbf{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}'}$  est un anneau factoriel, d'après le Cor. 8.2 de la Sec. B du Chap. I.

Supposons  $\mathfrak{q}$  quasi-Frobenius. Dans ce cas une  $\langle ij \rangle$ -orbite  $\Gamma$  n'est pas forcément une  $\langle i, j \rangle$ -orbite. Si  $\Gamma \neq i(\Gamma)$  la dimension du sous-espace de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  de poids  $\delta_\Gamma$  vaut deux

et la description des générateurs de la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  donnée dans [31, Prop. 6.6] entraîne que les générateurs homogènes  $g_\Gamma = f_\Gamma$  et  $f'_\Gamma$  du sous-espace de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  de poids  $\delta_\Gamma$  sont tels que  $\deg(f'_\Gamma) = \deg(f_\Gamma) + 1$  car le deuxième générateur homogène est de la forme  $f'_\Gamma = H_\Gamma f_\Gamma + f''_\Gamma$  où  $H_\Gamma \in \mathfrak{h}$  (défini dans [38, 4.10]) est l'analogue du  $H_\Gamma \in \mathfrak{h}$  défini dans 4.6 de la Sec. B et où  $f''_\Gamma \in \mathbf{S}(\mathfrak{q}')$  (voir [38, 7.3, 7.4]). D'après [38, Prop. 7.8], on retrouve que le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(E(\pi', \pi''))$  générateurs et que c'est un module libre sur le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$  engendré par les  $f'_\Gamma$  pour  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')/\langle i \rangle$  tel que  $\Gamma \neq i(\Gamma)$ . De plus ([38, Prop. 7.6])  $\mathfrak{q}'$  est la troncation canonique d'une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{q}$  qui est Frobenius, appelée une "ablation" de  $\mathfrak{q}$ . Ainsi  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes dont les générateurs sont les  $g_\Gamma$  pour  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')/\langle i \rangle$ .

Remarquons que trivialement, la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre parabolique (donc biparabolique) quasi-Frobenius (puisque dans ce cas,  $\pi' = \emptyset$  et  $\pi'' = \pi$ ). On constate que le résultat de [38, Prop. 7.8] est bien une généralisation de [28, Thm. 4.16] concernant le semi-centre du Borel. Une autre analogie avec le semi-centre du Borel est que les deux algèbres de polynômes  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$  (pour  $\mathfrak{q}$  biparabolique quasi-Frobenius) ont le même ensemble de poids, les sous-espaces de poids de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}')$  étant de dimension un (voir [38, 7.9]).

### 4.3 Exemples en type B.

Pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B_3$  ou  $B_4$ , I. Heckenberger ([24]) a montré, grâce à des calculs sur ordinateur, que toutes les sous-algèbres paraboliques pour lesquelles les deux bornes ne coïncident pas sont quand même polynomiales.

Supposons par exemple  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B_4$  et considérons  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique associée à  $\pi' = \{\alpha_3\}$  (avec la numérotation des racines simples comme dans [8, Planche II]). La borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  est une algèbre de polynômes en 4 générateurs  $s_{\Gamma_i}$  pour  $\Gamma_i = \{\alpha_i\}$ ,  $1 \leq i \leq 4$  (seule  $\varepsilon_{\Gamma_2} = 1/2$ ). Un calcul simple nous donne les poids  $\varepsilon_{\Gamma_i} \delta_{\Gamma_i}$  des  $s_{\Gamma_i}$  qui sont respectivement :  $2\varpi_1$ ,  $\varpi_2$ ,  $\varpi_2 + 2\varpi_4$  et  $2\varpi_4$ .

D'autre part Heckenberger aidé par des calculs sur ordinateur ([24]) a montré que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est une algèbre de polynômes de générateurs  $a_1, a_2, a_3, a_4$  ayant pour poids respectif  $2\varpi_1$ ,  $\varpi_2$ ,  $2(\varpi_2 + \varpi_4)$  et  $2\varpi_4$  et pour degré respectif 2, 1, 6, 2.

La comparaison des poids des générateurs de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  et de  $\mathbf{S}^J$  implique que :

$$\text{gr}'(\text{gr}''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}))) \neq \mathbf{S}^J.$$

La sous-algèbre d'invariants  $\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'}$  du dual de Hopf de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  est une algèbre de polynômes en 4 générateurs  $b_1, b_2, b_3, b_4$  ayant pour poids respectifs  $\delta_{\Gamma_i}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , c'est-à-dire :  $2\varpi_1$ ,  $2\varpi_2$ ,  $\varpi_2 + 2\varpi_4$  et  $2\varpi_4$ .

La comparaison des poids des générateurs de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  et de  $\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'}$  montre également que  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'})) \neq \mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

D'ailleurs on constate que  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(b_1)) = a_1$ ,  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(b_2)) = a_2^2$ ,  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(b_3)) = a_2 a_4$ , et  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(b_4)) = a_4$ . De plus le calcul du caractère formel de  $\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'}$  entraîne que son sous-espace de poids  $2\varpi_2 + 4\varpi_4$  est de dimension deux, comme l'est aussi le sous-espace du même poids de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ . Ainsi  $a_3 a_4$  (en plus de  $a_2^2 a_4^2$ ) est dans le sous-espace de  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'}))$  de poids  $2\varpi_2 + 4\varpi_4$  (on a  $a_3 a_4 = \psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(b_3^2 - b_2 b_4^2))$ ).

En fait, comme l'a observé Heckenberger,  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'}))$  est la sous-algèbre de l'algèbre de polynômes  $\mathbf{k}[a_1, a_2, a_3, a_4]$  engendrée par  $a_1, a_2^2, a_2a_4, a_3a_4, a_4$ . On peut constater que cette sous-algèbre n'est même pas factorielle! On pourra consulter [38, 11.1] et [31, Section 10, Remark 4] pour plus de détails.

## 5 Reste encore des problèmes non résolus.

Il y a quand même des cas où les bornes du Thm. du Par. 3 ne coïncident pas et où on ne peut pas conclure.

Le premier exemple qui apparaît en type  $B$  est lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $B_5$  et  $\mathfrak{p}$  est la sous-algèbre parabolique associée au système de racines simples  $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  (numérotation de [8, Planche II]).

### 5.1 Exemple en type $B_5$ .

Supposons maintenant  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B_5$  et considérons  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique associée à  $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  (numérotation de [8, Planche II]). Je vais expliquer un peu plus en détail ce que l'on sait dans ce cas et pourquoi on ne peut pas conclure quant à la polynomialité du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  (voir [38, 11.2 - 11.7]).

Les différentes  $\langle ji \rangle$ -orbites sont  $\Gamma_1 = \{\alpha_2, \alpha_4\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\alpha_3\}$ ,  $\Gamma_3 = \{\alpha_5\}$  et  $\Gamma_4 = \{\alpha_1\}$ . Seule l'orbite  $\Gamma_1$  est telle que  $\varepsilon_{\Gamma_1} = \frac{1}{2}$ . On calcule les poids  $\varepsilon_{\Gamma} \delta_{\Gamma}$  et les degrés  $\varepsilon_{\Gamma} \partial_{\Gamma}$  des générateurs  $s_{\Gamma}$ ,  $\Gamma \in \Pi$ , de la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ . On obtient grâce notamment aux Tables de [28, Tables I et II] et [F5, Table] :

$\varepsilon_{\Gamma_1} \delta_{\Gamma_1} = \varpi_1 + 2\varpi_5$  et  $\varepsilon_{\Gamma_1} \partial_{\Gamma_1} = 4$  (en effet  $s_{\Gamma_1} = a_{\Gamma_1} a'_{\Gamma_1}$  et  $a_{\Gamma_1} = a_{\varpi_2} a_{\varpi_4}$  et  $\deg(a_{\varpi_2}) = 1$  et  $\deg(a_{\varpi_4}) = 2$  et  $a'_{\Gamma_1} = a_{-(\varpi'_2 + \varpi'_4)}$  et  $\deg(a_{-(\varpi'_2 + \varpi'_4)}) = 1$ ),

$\varepsilon_{\Gamma_2} \delta_{\Gamma_2} = \varpi_1 + 2\varpi_5$  et  $\varepsilon_{\Gamma_2} \partial_{\Gamma_2} = 6$  (car  $s_{\Gamma_2} = a_{\Gamma_2} a'_{\Gamma_2}$  et  $a_{\Gamma_2} = a_{2\varpi_3}$  et  $a'_{\Gamma_2} = a_{-2\varpi'_3}$  et  $\deg(a_{2\varpi_3}) = 4$  et  $\deg(a_{-2\varpi'_3}) = 2$ ),

$\varepsilon_{\Gamma_3} \delta_{\Gamma_3} = 2\varpi_5$  et  $\varepsilon_{\Gamma_3} \partial_{\Gamma_3} = 3$  (car  $s_{\Gamma_3} = a_{\Gamma_3} a'_{\Gamma_3}$  et  $a_{\Gamma_3} = a_{2\varpi_5}$  et  $a'_{\Gamma_3} = 1$  et  $\deg(a_{2\varpi_5}) = 3$ ),

$\varepsilon_{\Gamma_4} \delta_{\Gamma_4} = 2\varpi_1$  et  $\varepsilon_{\Gamma_4} \partial_{\Gamma_4} = 2$  (car  $s_{\Gamma_4} = a_{\Gamma_4} a'_{\Gamma_4}$  et  $a_{\Gamma_4} = a_{2\varpi_1}$  et  $a'_{\Gamma_4} = 1$  et  $\deg(a_{2\varpi_1}) = 2$ ).

On en déduit donc que les sous-espaces de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  formés des polynômes homogènes de poids  $\varpi_1 + 2\varpi_5$  et de degré respectif 4 et 6 sont de dimension inférieure ou égale à un et que tout polynôme homogène de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  non nul de poids  $\varpi_1 + 2\varpi_5$ , s'il existe, ne peut être que de degré 4 ou 6.

D'autre part la borne inférieure de l'encadrement de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  entraîne l'existence de semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  : ce sont, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $f_{\Gamma} = \psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(c_{\Gamma}))$  où  $c_{\Gamma}$  est l'unique (à un scalaire multiplicatif non nul près) élément non nul de  $\mathbf{C}^{\mathfrak{p}'} \cap \mathbf{C}'(d_{\Gamma})$ . On connaît leur poids, ce sont les  $\delta_{\Gamma} = w'_0 d_{\Gamma} - w_0 d_{\Gamma}$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ , mais par contre leur degré (en tant que polynôme homogène de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$ ) est difficile à établir. En effet le degré de  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(c))$  pour  $c \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  est le plus petit entier naturel  $k$  tel que  $c(x^k) \neq 0$  pour un certain  $x \in \mathfrak{g}$  et un tel entier est difficile à évaluer.

Ainsi la borne inférieure entraîne l'existence d'un semi-invariant  $f_{\Gamma_1}$  de poids  $\delta_{\Gamma_1}$  c'est-à-dire de poids  $2(\varpi_1 + 2\varpi_5)$ . On pourrait s'attendre à ce que le degré de  $f_{\Gamma_1}$  soit

$\partial_{\Gamma_1} = 8$ , en pensant que la racine carrée de  $f_{\Gamma_1}$  existerait dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  (et donc serait semi-invariante) et aurait pour terme principal  $s_{\Gamma_1}$ .

## 5.2 Recherche de semi-invariant dans le cas général.

De façon générale, pour  $\Gamma \in \Pi$ , on peut essayer de construire un semi-invariant  $s \in \mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  dont l'un des termes principaux est un générateur  $s_{\Gamma}$ , resp.  $t_{\Gamma}$  de la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  (c'est-à-dire tel que  $gr'(gr''(s))$  est une somme dont l'un des termes est  $s_{\Gamma}$ , resp.  $t_{\Gamma}$ ). Supposons pour simplifier que  $j = Id_{\pi}$ . Alors les générateurs de  $\mathbf{S}^J$  sont uniquement les  $s_{\Gamma} = a_{\Gamma}a'_{\Gamma}$ . On peut procéder de la façon suivante (voir [38, 5.8]). On considère le sous- $ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -module de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  engendré par  $s_{\Gamma}$  et l'espace des  $\mathfrak{g}'$ -invariants de ce module est alors de dimension inférieure ou égale à un. En effet  $ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')(s_{\Gamma}) = ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')(a_{\Gamma})ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')(a'_{\Gamma})$  puisque  $a_{\Gamma} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  est un vecteur de plus haut poids  $2\varepsilon_{\Gamma}d_{\Gamma}$  et que  $a'_{\Gamma} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  est un vecteur de plus bas poids  $-2\varepsilon_{\Gamma}d'_{\Gamma}$ . Comme  $(d_{\Gamma} - d'_{\Gamma}, \pi') = 0$ , on en déduit que les  $ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -modules engendrés par  $a_{\Gamma}$ , resp. par  $a'_{\Gamma}$ , sont duaux l'un de l'autre. Donc l'espace des  $\mathfrak{g}'$ -invariants du produit tensoriel de ces modules est de dimension un et l'espace des  $\mathfrak{g}'$ -invariants de l'image dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  par la multiplication de ce produit tensoriel est de dimension inférieure ou égale à un.

Dans le cas où cet espace est de dimension un, on obtient ainsi un  $\mathfrak{g}'$ -invariant non nul de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$ . Le problème est qu'en général cet élément n'est pas  $\mathfrak{p}'$ -invariant. Il faut donc ensuite ajouter d'autres  $\mathfrak{g}'$ -invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  de même poids et qui n'ont pas de termes principaux de degré plus grand pour les graduations  $gr'$  et  $gr''$  de sorte d'obtenir un élément du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  dont un des termes principaux est  $s_{\Gamma}$ . Mais l'existence de tels  $\mathfrak{g}'$ -invariants n'est pas du tout assurée. D'autre part il se peut que l'espace des  $\mathfrak{g}'$ -invariants du  $ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -sous-module de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  engendré par l'élément  $s_{\Gamma}$  soit nul. En conclusion une telle construction n'est pas toujours possible.

On peut aussi espérer pouvoir construire des semi-invariants de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  en appliquant la méthode précédente non plus à  $a_{\Gamma} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  et à  $a'_{\Gamma} \in \mathbf{Y}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$  mais à un élément non nul  $b_{-\nu}$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{m})$  de plus bas poids (disons  $-\nu$ ) pour l'action adjointe de  $\mathfrak{g}'$  (qui existe toujours puisque le radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{p}$  est un idéal de  $\mathfrak{p}$  donc  $\mathbf{S}(\mathfrak{m})$  est un  $\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -module donc somme de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -modules simples). Si on suppose qu'il existe dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}' + \mathfrak{h})$  un vecteur non nul  $a_{\nu}$  de plus haut poids  $\nu$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{g}'$ , alors comme  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{g}' + \mathfrak{h}$  on pourrait espérer obtenir un élément de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  en appliquant la méthode ci-dessus à  $a_{\nu}$  et à  $b_{-\nu}$ , mais cela ne nous donne encore une fois qu'un élément  $\mathfrak{g}'$ -invariant de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  qui peut être en plus éventuellement nul. Signalons cependant que, lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  et que  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique propre de dimension maximale de  $\mathfrak{g}$ , la méthode précédente donne un  $\mathfrak{p}'$ -invariant non nul donc un semi-invariant non nul de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  et une description très particulière de ce semi-invariant (voir [27], [17] ou [F5, 1.4, 1.5]). Cela provient de l'égalité  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{g}'}$  dans ce cas très particulier, voir [F7, 1.10]. En général cependant on a une inclusion stricte  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'} \subset \mathbf{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{g}'}$  et une description précise des semi-invariants (même lorsqu'on connaît leur poids et leur degré) est loin d'être évidente à calculer.

### 5.3 Retour à l'exemple en type $B_5$ .

Appliquant la construction du début de 5.2 à l'élément  $s_{\Gamma_1}$  de notre exemple, Joseph a pu construire ([38, 11.2 - 11.6]) un semi-invariant  $s$  de poids  $\varpi_1 + 2\varpi_5$  et de degré 4. Alors nécessairement, à cause des poids et des degrés, on a  $gr'(gr''(s)) = s_{\Gamma_1}$ .

Les calculs de Heckenberger montrent qu'il n'y a aucun semi-invariant de poids  $\varpi_1 + 2\varpi_5$  et de degré 6. Donc  $f_{\Gamma_2}$  (provenant de la borne inférieure de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  et plus précisément de  $\mathbf{C}'(d_{\Gamma_2})$ ) qui est de poids  $\delta_{\Gamma_2} = \varpi_1 + 2\varpi_5$  et de degré supposé 6 est en réalité de degré 4 et  $gr'(gr''(f_{\Gamma_2})) = s_{\Gamma_1}$ .

Ainsi, puisque le sous-espace de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  formé des polynômes homogènes de poids  $\varpi_1 + 2\varpi_5$  et de degré 4 est de dimension égale à un, on en déduit que nécessairement  $f_{\Gamma_2} = s$  à un scalaire multiplicatif non nul près. Enfin il serait éventuellement possible que l'on ait  $f_{\Gamma_2}^2 = f_{\Gamma_1}$  bien que cela contredise ce qui a été trouvé par Joseph dans le cas des biparaboliques quasi-Frobenius : en effet dans le cas des biparaboliques quasi-Frobenius, certaines racines-carrées d'éléments semi-invariants peuvent être semi-invariantes mais elles ne peuvent pas être en même temps égales à un élément provenant de la borne inférieure. Bien sûr ici  $\mathfrak{p}$  n'est pas quasi-Frobenius, donc on ne peut pas infirmer l'égalité ci-dessus.

(Rappelons que les  $f_{\Gamma}$  pour  $\Gamma \in \Pi$  ne sont pas nécessairement algébriquement indépendants car  $\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(\mathbf{C}'^{\mathfrak{p}'}))$  n'est pas forcément polynomiale bien que  $\mathbf{C}'^{\mathfrak{p}'}$  le soit).

Comme ici  $\mathfrak{p}_{\Lambda} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}_{\pi}^-$  est de dimension  $25 + 3 + 6 = 34$ , I. Heckenberger a cherché par ordinateur des invariants en 34 variables jusqu'au degré 8 sans pouvoir conclure quant à la polynomialité de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{p}_{\Lambda}) = \mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

## Chapitre V

# Lien entre les deux cas extrêmes et la somme des faux degrés.

Puisqu'il y a des cas où l'on ne peut pas conclure avec nos méthodes quant à la polynomialité du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$ , isomorphe au semi-centre  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{p})$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ , pour  $\mathfrak{p}$  sous-algèbre parabolique ou biparabolique de  $\mathfrak{g}$ , nous avons tenté avec A. Joseph d'établir un lien entre les deux cas extrêmes de paraboliques, à savoir le Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}$  lui-même, car, rappelons-le, le semi-centre  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$  de l'algèbre enveloppante du Borel, isomorphe au semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  de l'algèbre symétrique du Borel et le centre  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  isomorphe au centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$  sont des algèbres de polynômes en le même nombre de générateurs. Ainsi dans [F6] nous avons construit, comme cela a été suggéré par Borho (voir [28, 4.18]), une application linéaire  $\varphi$  (qui n'est toutefois pas un morphisme d'algèbres) entre le semi-centre  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{b})$  et le centre  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , ainsi qu'une application linéaire  $gr\varphi$  entre le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{b})$  et le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ , utilisant le fait que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  sont des algèbres de polynômes ayant le même ensemble de poids, les sous-espaces de poids de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  étant tous de dimension un et un procédé similaire à ce qui a été expliqué au 5.2 de la Sec. D du Chap. IV. Nous avons montré que, lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type  $AC$ , ces deux applications linéaires  $\varphi$  et  $gr\varphi$  sont bijectives (2.9 et 2.11) et que, si l'on note  $gr(u)$  l'image canonique dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}) = gr(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$  d'un élément  $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ ,  $gr(\varphi(u)) = gr\varphi(gr(u))$  dès que  $u$  est un vecteur de poids de  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$  (2.12). Par contre lorsque  $\mathfrak{g}$  n'est pas de type  $AC$ , nous avons montré que les applications  $\varphi$  et  $gr\varphi$  ne sont pas injectives. Nous faisons la conjecture que les applications  $\varphi$  et  $gr\varphi$  sont surjectives (2.17).

Dans le chapitre IV, pour un parabolique  $\mathfrak{p}$  donné, à tout  $\Gamma \in \Pi$ , on a associé un nombre entier strictement positif  $\partial_\Gamma$  que nous appellerons son "faux degré" (4.7 de la Sec. B du Chap. IV). Je vais expliquer comment on a calculé l'indice de  $\mathfrak{p}$  puis comment on a montré que la somme des "faux degrés" est égale à l'entier  $c(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{p} + \text{indice}(\mathfrak{p}))$ , cet entier jouant un rôle particulier que j'expliquerai au 3.4 de la Sec. B.

## A Lien entre les deux cas extrêmes.

### 1 Construction de l'application linéaire $\varphi$ entre $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$ et $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ et de l'application linéaire $gr\varphi$ entre $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$ et $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$ .

L'application linéaire, que l'on notera  $\varphi$ , de  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$  dans  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  et celle, que l'on notera  $gr\varphi$  de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  dans  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  sont définies de la façon suivante (voir aussi [F6, Section 4]).

Rappelons ([28]) que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}} \simeq \mathbf{Sz}(\mathfrak{b}) = \mathbf{U}(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ , resp.  $\mathbf{Z}(\mathfrak{n}^-) = \mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)^{\mathfrak{n}^-} \simeq \mathbf{Y}(\mathfrak{n}^-) = \mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)^{\mathfrak{n}^-}$  sont des  $\mathbf{k}$ -algèbres de polynômes dont l'ensemble des poids est  $\mathcal{B}$ , resp.  $-\mathcal{B}$ , les sous-espaces de poids de  $\mathbf{Z}(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{Y}(\mathfrak{n}^-)$  étant tous de dimension un. De plus  $\mathcal{B}$  est un monoïde libre engendré par les  $\rho_\alpha$  pour  $\alpha \in \pi/\langle j \rangle$  où  $\rho_\alpha = \varepsilon_\alpha(\varpi_\alpha + \varpi_{j(\alpha)})$ . Ainsi les générateurs de  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$  et de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  sont des vecteurs de poids de la forme  $\lambda - w_0\lambda$  pour  $\lambda \in P^+(\pi)$  auxquels il faut rajouter (pour  $\mathfrak{g}$  de type autre que  $AC$ ) certains vecteurs de poids  $\frac{1}{2}(\lambda - w_0\lambda)$ , pour  $\lambda \in P^+(\pi)$ .

Notons  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})_+$  l'idéal d'augmentation de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ . La semi-simplicité de  $\mathfrak{g}$  entraîne que l'on a  $\mathbf{U}(\mathfrak{g}) = \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \oplus (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})_+) \mathbf{U}(\mathfrak{g})$  et  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{g}) \oplus (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})_+) \mathbf{S}(\mathfrak{g})$ .

Soit  $\mu \in \mathcal{B}$ . On fixe dans le sous-espace de poids  $-\mu$  de  $\mathbf{Z}(\mathfrak{n}^-)$ , noté  $\mathbf{Z}(\mathfrak{n}^-)_{-\mu}$  un vecteur non nul  $b_{-\mu}$ . Soit  $a_\mu$  un vecteur de poids  $\mu$  de  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$ , resp.  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$ . Rappelons que  $gr(u)$  désigne l'image canonique dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}) = gr(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$  d'un élément  $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ . Comme les vecteurs de poids de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n}^-)$  sont des polynômes homogènes de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)$ , on a nécessairement  $s^{-1}(b_{-\mu}) = gr(b_{-\mu})$  où  $s$  est la symétrisation.

On note  $M_\mu$  le  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module engendré par  $a_\mu$  : c'est un sous- $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module simple de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , resp.  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ , de plus haut poids  $\mu \in P^+(\pi)$  (voir [16, 7.2.4]). On note  $N_\mu$  le  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module engendré par  $b_{-\mu}$ , resp. par  $s^{-1}(b_{-\mu})$  : c'est un sous- $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module simple de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , resp.  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ , de plus bas poids  $-\mu$ . Enfin on note  $M_\mu N_\mu$  l'image du produit tensoriel  $M_\mu \otimes N_\mu$  par la multiplication dans  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , resp. dans  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ . Alors on a  $(ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})) (a_\mu b_{-\mu}) = M_\mu N_\mu$  et l'espace des  $\mathfrak{g}$ -invariants  $(M_\mu N_\mu)^\mathfrak{g}$  de  $M_\mu N_\mu$  est de dimension inférieure ou égale à un, puisque les  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -modules  $M_\mu$  et  $N_\mu$  sont duaux l'un de l'autre et donc l'espace des  $\mathfrak{g}$ -invariants  $(M_\mu \otimes N_\mu)^\mathfrak{g}$  du produit tensoriel  $M_\mu \otimes N_\mu$  est de dimension un (voir aussi [F6, 4.5]).

**Définition.** ([F6, 4.10]) Soit  $a_\mu$  un vecteur de poids  $\mu$  de  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$ , resp.  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$ . On définit  $\varphi(a_\mu)$ , resp.  $gr\varphi(a_\mu)$ , comme l'unique élément de  $(M_\mu N_\mu)^\mathfrak{g}$  tel que  $\varphi(a_\mu) - a_\mu b_{-\mu} \in (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})_+) (a_\mu b_{-\mu})$ , resp.  $gr\varphi(a_\mu) - a_\mu s^{-1}(b_{-\mu}) \in (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})_+) (a_\mu s^{-1}(b_{-\mu}))$ . En l'étendant par linéarité, on définit ainsi une application linéaire  $\varphi : \mathbf{Sz}(\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  resp.  $gr\varphi : \mathbf{Sy}(\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbf{Y}(\mathfrak{g})$ .

### 2 Restriction des applications linéaires $\varphi$ et $gr\varphi$ .

#### 2.1

On note  $\mathcal{B}^0$  le sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{B}$  formé des poids  $B$  tels qu'il existe  $\lambda \in P^+(\pi)$  vérifiant  $B = \lambda - w_0\lambda$ . Alors  $\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}$  si, et seulement si,  $\mathfrak{g}$  est de type  $AC$ . On note  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})$ , resp.  $\mathbf{Sy}^0(\mathfrak{b})$ , la sous-algèbre (de polynômes) de l'algèbre de polynômes  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$ , resp.  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$ , engendrée par les vecteurs de poids dans  $\mathcal{B}^0$ . Pour tout  $B \in \mathcal{B}^0$ ,

notons  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})_B = \mathbf{Sz}(\mathfrak{b})_B$  le sous-espace de poids  $B$  de  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})$  ou de  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$  et posons  $\Lambda_B = \{\lambda \in P^+(\pi) \mid \lambda - w_0\lambda = B\}$ . Alors  $\text{card}(\Lambda_B)$  est fini et  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})_B$  est un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel de dimension  $\text{card}(\Lambda_B)$ .

## 2.2

Soit  $A = (\mathfrak{n}^- \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{n}^-}$  l'algèbre des invariants par l'action coadjointe de  $\mathfrak{n}^-$  de l'algèbre  $\mathfrak{n}^- \mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  des invariants du dual de Hopf  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$  par l'action à gauche de  $\mathfrak{n}^-$ . D'après la Prop. du Par. 2 de la Sec. A du Chap. III appliquée à  $\pi' = \emptyset$ , on a  $A = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}^0} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_B} \mathbf{k}c_\lambda$  où  $c_\lambda = c_{\xi_\lambda, v_{w_0\lambda}} \in \mathbf{C}(\lambda)$  avec  $\xi_\lambda$ , resp.  $v_{w_0\lambda}$ , un vecteur de plus bas poids de  $\mathbf{L}(\lambda)^*$ , resp. de  $\mathbf{L}(\lambda)$ , que l'on a fixé (voir aussi [F6, 3.2]).

## 2.3

Si  $\psi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \psi_n$  est l'application de Kostant (voir 3.1 de la Sec. A du Chap. IV), on a  $\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A)) \subset \mathbf{Sy}(\mathfrak{b}^-)$  d'après le Cor. 3.2 de la Sec. A du Chap. IV.

## 2.4

Fixons une base de Chevalley  $\{x_\alpha, \alpha \in \Delta, \alpha^\vee, \alpha \in \pi\}$  de  $\mathfrak{g}$  et désignons par  $\kappa$  à la fois l'antiautomorphisme de Chevalley de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  associé à cette base de Chevalley et l'automorphisme qui prolonge à  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$  sa restriction à  $\mathfrak{g}$  ([F6, 2.7]).  $\kappa$  envoie  $x_\alpha$  sur  $x_{-\alpha}$  pour tout  $\alpha \in \Delta$  et laisse les éléments du Cartan  $\mathfrak{h}$  invariants.

## 2.5

Soit  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par la base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$  et soit  $\mathbf{S}_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$  l'espace des polynômes homogènes de degré  $n$  et à coefficients réels ayant pour indéterminées les éléments de la base de Chevalley. Si  $K_n$  est la forme bilinéaire sur  $\mathbf{S}_n(\mathfrak{g})$  définie à partir de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  (voir 3.2 de la Sec. A du Chap. IV), alors on a pour tout  $x \in \mathbf{S}_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ ,

$$K_n(x, \kappa(x)) = 0 \implies x = 0.$$

Cette propriété est appelée la forte non-dégénérescence de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . (Voir [F6, 2.7]).

## 2.6

D'après [F6, 3.3 (i) et 4.6] on a :

**Lemme .** *Soit  $B \in \mathcal{B}^0$ . Il existe une base  $(p_\mu)_{\mu \in \Lambda_B}$  de  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})_B$  telle que, pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda_B$ ,  $c_\lambda(p_\mu) = \delta_{\lambda, \mu}$  (symbole de Kronecker). De plus on a  $\kappa(\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A))) = \mathbf{Sy}^0(\mathfrak{b})$  et  $s(\kappa(\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A)))) = \mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})$ .*

*Idee de la démonstration :*

Soit  $B \in \mathcal{B}^0$ . Notons  $A_B$  le sous-espace de poids  $-B$  de  $A$  (pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{h}$ ). Alors  $A_B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_B} \mathbf{k}c_\lambda$ . Posons  $\mathcal{U}_B = \kappa(s(\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(A_B)))) = s(\kappa(\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(A_B))))$ . Alors  $\mathcal{U}_B \subset \mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B = \mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B$ . On montre alors que l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_B & \longrightarrow & A_B^* \\ p & \mapsto & (c \mapsto c(p)) \end{array} \text{ est un isomorphisme de } \mathbf{k}\text{-espaces vectoriels (voir [F6,$$

Preuve du Lemme 3.3] pour plus de détails). L'existence de cet isomorphisme repose sur le fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} gr_{\mathcal{F}_K}^n(A_B) & \longrightarrow & \mathcal{U}_{n,B}^* \\ gr_{\mathcal{F}_K}^n(c) & \mapsto & (b \mapsto c(b)) \end{array} \text{ est un isomorphisme de } \mathbf{k}\text{-espaces vectoriels (voir [F6,$$

Lemme 3.2 (ii)]), où l'on a posé, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $gr_{\mathcal{F}_K}^n(A_B) = \mathcal{F}_K^n(A_B)/\mathcal{F}_K^{n+1}(A_B)$  et pour  $c \in \mathcal{F}_K^n(A_B) \setminus \mathcal{F}_K^{n+1}(A_B)$ ,  $gr_{\mathcal{F}_K}^n(c)$  l'image canonique de  $c$  dans  $gr_{\mathcal{F}_K}^n(A_B)$  et  $\mathcal{U}_{n,B} = \kappa(s(\psi_n(gr_{\mathcal{F}_K}^n(A_B))))$ .

Ce dernier isomorphisme provient essentiellement de la forte non-dégénérescence de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  (voir 2.5).

Ainsi la base  $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_B}$  de  $A_B$  possède une base duale (dans  $A_B^*$ ) dont l'image  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_B}$  par  $\Psi^{-1}$  est une base de  $\mathcal{U}_B$  telle que  $c_\lambda(p_\mu) = \delta_{\lambda,\mu}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda_B$ . Enfin puisque la dimension de  $\mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B$  est  $\text{card}(\Lambda_B)$  et que  $\mathcal{U}_B \subset \mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B$ , on en déduit que  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_B}$  est aussi une base de  $\mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B$  et que  $\mathcal{U}_B = \mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B$ . D'où le lemme.  $\square$

## 2.7

Fixons, pour tout  $B \in \mathcal{B}^0$  et pour tout  $\lambda \in \Lambda_B$ , un vecteur  $v_\lambda$  de plus haut poids  $\lambda$  dans  $\mathbf{L}(\lambda)$  et rappelons qu'un élément non nul  $b_{-B}$  a été fixé dans  $\mathbf{Z}(\mathfrak{n}^-)_{-B}$ . Du lemme précédent on peut alors déduire le lemme suivant (voir aussi [F6, Lemme 4.3]).

**Lemme .** *Soit  $B \in \mathcal{B}^0$ . Il existe une base  $(a_{B,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_B}$  de  $\mathbf{S}\mathbf{z}^0(\mathfrak{b})_B$  telle que pour tout  $\mu \in \Lambda_B$ , on ait*

$$a_{B,\lambda} b_{-B} v_\mu = \delta_{\lambda,\mu} v_\mu.$$

*Idee de démonstration.*

Il suffit, avec les notations du lemme précédent, de prendre  $a_{B,\lambda} = p_\lambda$  à un scalaire multiplicatif non nul près. En effet on observe que, pour  $\lambda \in \Lambda_B$  et pour  $\xi_{w_0\lambda}$  un vecteur de plus haut poids de  $\mathbf{L}(\lambda)^*$  bien choisi, on a  $b'_{-B} = s(\kappa(\psi(gr_{\mathcal{F}_K}(c_{\xi_{w_0\lambda}, v_\lambda})))) \in \mathbf{Z}(\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^-)_{-B}$  où  $\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^- = \mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  (d'après l'analogie de 2.3 appliqué avec des invariants par  $\mathfrak{n}$ ). De plus  $b'_{-B} \neq 0$  et il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$c_{\xi_{w_0\lambda}, v_\lambda}(b'_{-B}) = K_n \left( \psi_n(gr_{\mathcal{F}_K}^n(c_{\xi_{w_0\lambda}, v_\lambda}), \kappa(\psi_n(gr_{\mathcal{F}_K}^n(c_{\xi_{w_0\lambda}, v_\lambda})))) \right)$  par (\*) de 3.2 de la Sec. A du Chap. IV et cette quantité est non nulle par la forte non-dégénérescence (2.5) de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Donc  $b'_{-B} v_\lambda$  est un multiple non nul de  $v_{w_0\lambda}$  et on en déduit le lemme, grâce au lemme 2.6.  $\square$

## 2.8

Pour tout  $B \in \mathcal{B}^0$  et  $\lambda \in \Lambda_B$ , on pose  $z_{B,\lambda} = \varphi(a_{B,\lambda})$  (avec les notations du lemme 2.7 et de la Déf. du Par. 1). Comme  $P^+(\pi)$  est dénombrable, on numérote ses éléments  $\lambda_i$  comme dans [F6, 4.6] : par cet ordre on obtient que :

si  $i < j$ , on a  $\lambda_i - w_0\lambda_i = \lambda_j - w_0\lambda_j$  ou  $(\lambda_i - w_0\lambda_i) - (\lambda_j - w_0\lambda_j) \notin \mathbb{N}\pi$ . On définit aussi pour tout  $\lambda \in P^+(\pi)$ ,  $\bar{c}_\lambda$  comme l'élément de  $\mathbf{C}(\lambda)$  (invariant par l'action coadjointe de  $\mathfrak{g}$ ) tel que, pour tout  $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ ,  $\bar{c}_\lambda(u) = \text{tr}(u, \mathbf{L}(\lambda))$ . Alors on obtient le lemme suivant (voir aussi [F6, Lemmes 4.4 et 4.6]).

**Lemme.** *Avec la numérotation des  $\lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , de  $P^+(\pi)$  de [F6, 4.6], et en posant pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $z_i = z_{\lambda_i - w_0\lambda_i, \lambda_i}$ , on a*

$$\bar{c}_{\lambda_i}(z_j) = \delta_{i,j}$$

pour tous  $i \leq j$  et en particulier, pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $\lambda_i - w_0\lambda_i = \lambda_j - w_0\lambda_j$ , on a  $\bar{c}_{\lambda_i}(z_j) = \delta_{i,j}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , posons  $a_i = a_{\lambda_i - w_0\lambda_i, \lambda_i} \in \mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})_{\lambda_i - w_0\lambda_i}$  et  $b_i = b_{w_0\lambda_i - \lambda_i} \in \mathbf{Z}(\mathfrak{n}^-)_{w_0\lambda_i - \lambda_i}$ . Alors  $\bar{c}_{\lambda_i}(z_j) = \text{tr}(z_j, \mathbf{L}(\lambda_i)) = \text{tr}(a_j b_j, \mathbf{L}(\lambda_i))$  car pour tout  $u, v \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ , on a  $\text{tr}((ad u)(v), \mathbf{L}(\lambda)) = \varepsilon(u)\text{tr}(v, \mathbf{L}(\lambda))$  où  $\varepsilon$  est la co-identité de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ . Donc pour  $i < j$  tel que  $(\lambda_i - w_0\lambda_i) - (\lambda_j - w_0\lambda_j) \notin \mathbb{N}\pi$ , l'assertion vient du fait que  $b_j \mathbf{L}(\lambda_i) = 0$  dans ce cas.

Enfin soit  $i \leq j$  tel que  $\lambda_i - w_0\lambda_i = \lambda_j - w_0\lambda_j$ . Pour tout  $v \in \mathbf{L}(\lambda_i)$  vecteur de poids, on a  $a_j b_j v = 0$  si  $v$  n'est pas dans le sous-espace de plus haut poids de  $\mathbf{L}(\lambda_i)$ . Enfin si  $v$  est proportionnel à  $v_{\lambda_i}$ , alors d'après le Lemme 2.7, on a  $a_j b_j v = \delta_{i,j} v$ . D'où  $\bar{c}_{\lambda_i}(z_j) = \delta_{i,j}$  dans ce cas. □

## 2.9

Comme pour tout  $B \in \mathcal{B}^0$ ,  $(a_{B,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_B}$  est une base de  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})_B$ , on peut prolonger par linéarité l'application  $a_{B,\lambda} \mapsto z_{B,\lambda}$  pour tout  $B \in \mathcal{B}^0$  et  $\lambda \in \Lambda_B$ . Notons  $\varphi^0 : \mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  l'application obtenue. Alors on a (voir aussi [F6, Cor. 4.6]) :

**Corollaire.** *L'application  $\varphi^0$  est une application linéaire injective. De plus pour tous  $B \in \mathcal{B}^0$  et  $\lambda \in \Lambda_B$ , on a*

$$(*) \quad \deg(z_{B,\lambda}) \leq \deg(a_{B,\lambda}) + \deg(b_{-B})$$

où  $\deg(u) = \deg(gr(u))$  pour tout  $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ .

*Démonstration.* La première assertion du corollaire découle immédiatement du lemme 2.8.

Pour l'inégalité sur les degrés, elle provient du fait que  $z_{B,\lambda} \in (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g}))(a_{B,\lambda} b_{-B})$  et de l'invariance de la filtration canonique de  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  par l'action adjointe de  $\mathfrak{g}$ . □

## 2.10

On remarque qu'alors  $\varphi^0 : \mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  est la restriction à  $\mathbf{Sz}^0(\mathfrak{b})$  de l'application linéaire  $\varphi$  définie au Par. 1, car cette dernière ne dépend pas de la base de vecteurs de poids choisie dans  $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$ .

On définit également  $gr\varphi^0 : \mathbf{Sy}^0(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  comme la restriction à  $\mathbf{Sy}^0(\mathfrak{b})$  de l'application linéaire  $gr\varphi$  définie au Par. 1. L'application linéaire  $\varphi^0$ , resp.  $gr\varphi^0$ , est égale à l'application linéaire  $\varphi$ , resp.  $gr\varphi$ , si, et seulement si,  $\mathfrak{g}$  est de type AC.

**2.11**

Nous avons montré, en utilisant des séries de Poincaré ainsi que la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  pour le centre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  (dans le cas particulier où  $\pi' = \pi$ ) et par des considérations de degrés, que si  $\mathfrak{g}$  est de type  $AC$ , alors  $\varphi = \varphi^0$  est aussi surjective ([F6, Thm. 4.8]) et  $gr\varphi = gr\varphi^0$  est également bijective ([F6, Cor. 4.10 et 4.13]) et que de plus l'inégalité (\*) du Cor. 2.9 est une égalité.

**2.12**

Si  $B \in \mathcal{B}$  et  $a \in \mathbf{Sz}(\mathfrak{b})_B$ , les définitions de  $\varphi$  et de  $gr\varphi$  (voir Par. 1) nous donnent :  
 si  $gr\varphi(gr(a)) \neq 0$  alors  $\deg(gr\varphi(gr(a))) = \deg(a) + \deg(b_{-B})$ , alors que  $\deg(\varphi(a)) \leq \deg(a) + \deg(b_{-B})$  avec égalité si, et seulement si,  $gr\varphi(gr(a)) \neq 0$  (voir aussi [F6, rq 1 de 4.10]). Dans ce cas on a  $gr(\varphi(a)) = gr\varphi(gr(a))$  (lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type  $AC$ , cette égalité est donc toujours vraie dès que  $a \in \mathbf{Sz}(\mathfrak{b})_B \setminus \{0\}$ ).

**2.13**

Signalons que dans [F6, Thm. 4.8] nous avons redémontré le théorème de Chevalley pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$  ou  $C$ , selon lequel  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{rang}(\mathfrak{g}) = \text{card}(\pi)$  générateurs homogènes (le théorème de Chevalley est bien sûr valable pour tout type d'algèbre de Lie simple). Notre théorème nous redonne également les degrés  $m_i$  des générateurs homogènes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  dans ces cas. Signalons que les  $m_i - 1$  sont les "exposants" du groupe de Weyl  $W$  ([8, Chap. V, §6.2, Prop. 3]), dont les valeurs sont données par [8, Planches I à IX] et qui correspondent aux valeurs propres du polynôme caractéristique de toute transformation de Coxeter relative à  $W$ .

**2.14**

Ainsi pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A_n$ , on obtient grâce à [F6, Thm. 4.8] pour tout  $\alpha \in \pi/\langle j \rangle$ , un générateur homogène  $y_\alpha$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de degré égal à  $2\deg(a_{\rho_\alpha})$  et si  $\alpha \neq j(\alpha)$ , un deuxième générateur homogène  $y_{j(\alpha)}$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de degré  $2\deg(a_{\rho_\alpha}) + 1$ . Comme pour tout  $1 \leq k \leq [\frac{n+1}{2}]$ ,  $\deg(a_{\rho_k}) = k$ , d'après [28, Table I], on retrouve bien les degrés  $2, 3, \dots, n+1$  bien connus des générateurs homogènes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A_n$  ([8, Planche I]).

**2.15**

Pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $C_n$ , on obtient, grâce à [F6, Thm. 4.8], pour tout  $\alpha \in \pi$ , un générateur homogène  $y_\alpha$  de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de degré  $2\deg(a_{\rho_\alpha})$ . Comme  $\deg(a_{\rho_k}) = k$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ , d'après [28, Table I], on retrouve bien les degrés  $2, 4, 6, \dots, 2n$  des générateurs homogènes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  dans ce cas ([8, Planche III]).

**2.16**

Plus généralement, pour tout  $\alpha \in \pi/\langle j \rangle$ , posons  $s_\alpha + t_\alpha = 2 \deg(a_{\rho_\alpha})$  et si  $\alpha \neq j(\alpha)$ , posons  $s_{j(\alpha)} + t_{j(\alpha)} = 2 \deg(a_{\rho_\alpha}) + 1$ . Si  $l = \text{card}(\pi)$ , numérotions les  $s_\alpha + t_\alpha$ ,  $\alpha \in \pi$ , de sorte que l'on ait  $s_1 + t_1 \leq s_2 + t_2 \leq \dots \leq s_l + t_l$ . De même numérotions les degrés  $m_i$  des générateurs homogènes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  de sorte que  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_l$ .

On a alors remarqué dans [F6, Lemme 4.11] que l'on a toujours, par inspection des Tables de [28],  $s_i + t_i \leq m_i$  pour tout  $1 \leq i \leq l$ .

**2.17**

Si  $\mathfrak{g}$  n'est pas de type *AC*, les applications  $gr\varphi$  et  $\varphi$  ne sont pas injectives ([F6, Cor. 4.10 et rq 2 de 4.10] et  $gr\varphi^0$  n'est pas surjective ([F6, rq de 4.11]). De plus  $gr\varphi^0$  peut ne pas être injective, par exemple pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $G_2$  ([F6, 4.13]). Nous faisons la conjecture que  $\varphi^0$  (et donc  $\varphi$ ) est surjective ainsi que  $gr\varphi$  ([F6, 4.14]).

**2.18**

Posons  $A(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \mathbf{S}(\mathfrak{b})_\mu^n \mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)_{-\mu}^{n^-}$  où  $\mathbf{S}(\mathfrak{b})_\mu^n$ , resp.  $\mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)_{-\mu}^{n^-}$ , désigne le sous-espace de  $\mathbf{S}(\mathfrak{b})^n$ , resp. de  $\mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)^{n^-}$ , de poids  $\mu$ , resp.  $-\mu$ . Alors  $A(\mathfrak{g})$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\pi) = \text{rang}(\mathfrak{g})$  générateurs et la conjecture selon laquelle  $gr\varphi$  est surjective se traduit par (voir aussi [37, 3.2]) :

$$(**) \quad (ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})A(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} = \mathbf{Y}(\mathfrak{g}) = \mathbf{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

*Remarque.* On pourrait également penser que l'on aurait  $ad \mathbf{U}(\mathfrak{g})A(\mathfrak{g}) = \mathbf{S}(\mathfrak{g})$  mais cela est déjà faux pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{k})$ . Par contre si on remplace partout l'algèbre symétrique par l'algèbre enveloppante, il n'est pas exclu que cela soit vrai. Enfin on pourrait également conjecturer (voir [37, 3.3]) que l'on a

$$ad \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \left( \bigoplus_{\mu, \nu \in \mathfrak{h}^*} \mathbf{S}(\mathfrak{b})_\mu^n \mathbf{S}(\mathfrak{n}^-)_{-\nu}^{n^-} \right) = \mathbf{S}(\mathfrak{g})$$

car cette égalité entraînerait l'égalité (\*\*).

**B Calcul de l'indice de  $\mathfrak{p}$ .**

On considère à nouveau  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ . Rappelons l'égalité (\*\*\*) de 9.6 de la Sec. B du Chap. I. Comme  $\mathfrak{p}$  est ad-algébrique, on a

$$\text{indice}(\mathfrak{p}) = \text{GKdim}(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})) - \text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p})).$$

Donc pour calculer l'indice de  $\mathfrak{p}$ , il suffit de connaître  $\text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p}))$ , le rang du groupe additif engendré par l'ensemble  $\Lambda(\mathfrak{p})$  des poids de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$ , puisque l'on sait déjà que  $\text{GKdim}(\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})) = \text{card}(\Pi)$  d'après la Prop. du Par. 1 de la Sec. B du Chap. III.

## 1 Premières observations sur le rang de $\Lambda(\mathfrak{p})$ .

### 1.1

Rappelons que l'on note  $\mathfrak{p}_\Lambda$  la troncation canonique de  $\mathfrak{p}$  et que le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par  $\Lambda(\mathfrak{p})$  est isomorphe à  $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\Lambda)^*$  (voir Preuve de la Prop. 7.3 de la Sec. B du Chap. I). Par conséquent on peut considérer  $\Lambda(\mathfrak{p})$  comme inclus dans  $\mathfrak{h}^*$ . De plus d'après la preuve de la Prop. 9.7 de la Sec. B du Chap. I, on a

$$\text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p})) = \text{codim}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_\Lambda)$$

(voir aussi [F6, 2.5 (\*\*\*)]).

### 1.2

Par conséquent le rang de  $\Lambda(\mathfrak{p})$  est égal à la dimension du  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par  $\Lambda(\mathfrak{p})$ , à savoir la codimension de  $\mathfrak{p}_\Lambda$  dans  $\mathfrak{p}$ . La borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  permet d'affirmer que les poids des éléments du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  sont dans  $\sum_{\alpha \in \pi \setminus \pi'} \mathbb{N}\varpi_\alpha$  et plus précisément dans  $\frac{1}{2}\mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}$  est le monoïde engendré par les  $\delta_\Gamma = w'_0 d_\Gamma - w_0 d_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi$ .

## 2 Une sous-algèbre particulière de $\mathfrak{h}$ .

### 2.1

Rappelons  $\mathcal{H} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  l'isomorphisme obtenu à partir de la forme de Killing  $K$  de  $\mathfrak{g}$  (voir Par. 1, Sec. B du Chap. IV). Le sous-groupe  $\langle i, j \rangle$  des permutations de  $\pi$  engendré par les involutions  $i$  et  $j$  de  $\pi$  est un groupe de Coxeter et pour tout  $k$  dans ce sous-groupe, on note  $l(k)$  sa longueur.

### 2.2

On pose, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $H_\Gamma = \sum_{k \in \langle i, j \rangle} (-1)^{l(k)} \mathcal{H}^{-1}(\varpi_k(\gamma))$  où  $\gamma \in \Gamma$ . (On remarque que  $H_\Gamma$  correspond à l'élément du même nom défini au 4.6 de la Sec. B du Chap. IV à un multiple non nul près). Alors  $H_\Gamma$  ne dépend pas de l'élément  $\gamma \in \Gamma$  que l'on a choisi et  $H_{j(\Gamma)} = -H_\Gamma$  pour tout  $\Gamma \in \Pi$ . Donc  $H_\Gamma = 0$  pour tout  $\Gamma \in \Pi_2$ .

Rappelons également  $\mathfrak{h}_\Pi = \mathfrak{h}' + \sum_{\Gamma \in \Pi} \mathbf{k}H_\Gamma$  défini au 4.7 de la Sec. B du Chap. IV.

On peut alors montrer (voir [F6, Lemme 5.2.2] pour plus de détails) :

**Lemme .**  $K(\mathfrak{h}_\Pi, \mathcal{H}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p}))) = 0$ .

### 2.3

Rappelons que l'on a noté  $\Pi' = \{\Gamma \in \Pi \mid \Gamma \subset \pi'\}$ . Notons également  $\Pi'' = \Pi \setminus \Pi'$ . Comme on l'a déjà remarqué au 1.1 de la Sec. C du Chap. II, si  $\Gamma \in \Pi''$ , alors  $\text{card}(\Gamma \cap (\pi \setminus \pi')) = 1$ .

Pour un élément  $\alpha \in \pi$ , notons  $\Gamma_\alpha$  la  $\langle ji \rangle$ -orbite de  $\alpha$ . Alors on a  $j(\Gamma_\alpha) = \Gamma_{j(\alpha)} = \Gamma_{i(\alpha)}$  et pour  $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ ,  $\Gamma_\alpha \in \Pi_2 \iff \alpha = i(\alpha)$ .

**2.4**

Posons  $\Pi_1'' = \Pi'' \cap \Pi_1$ . Alors  $\Pi_1'' = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in \pi \setminus \pi' \text{ et } \alpha \neq i(\alpha)\}$ . On continue d'utiliser la convention mentionnée au début de la Sec. B du Chap. IV. Posons  $(\pi \setminus \pi')_{--} = (\pi \setminus \pi') \setminus (\pi \setminus \pi')_{++}$  où  $(\pi \setminus \pi')_{++} = (\pi \setminus \pi') / \langle i \rangle$ . Alors  $(\pi \setminus \pi')_{--}$  est en bijection avec  $\Pi_1'' / \langle i \rangle$ .

**2.5**

On montre alors (voir [F6, Lemme 5.2.6 (ii)]) que les  $H_{\Gamma_\alpha}$ , pour  $\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{--}$  sont linéairement indépendants modulo  $\mathfrak{h}'$ .

**2.6**

Posons  $\mathfrak{h}_\Pi'' = \mathfrak{h}' + \sum_{\Gamma \in \Pi''} \mathbf{k}H_\Gamma$ . Alors  $\mathfrak{h}_\Pi'' = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{--}} \mathbf{k}H_{\Gamma_\alpha}$  d'après ce qui a été dit plus haut.

**2.7**

Soit  $\Lambda''(\mathfrak{p})$  le monoïde engendré par les  $\delta_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi''$ . Grâce à la borne inférieure de l'encadrement de  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{p})$ , on a  $\Lambda''(\mathfrak{p}) \subset \Lambda(\mathfrak{p})$ .

**2.8**

Pour  $\alpha \in \pi \setminus \pi'$  tel que  $\alpha \neq i(\alpha)$  on a  $\delta_{\Gamma_\alpha} = \delta_{\Gamma_{i(\alpha)}}$  (d'après la Remarque 4.2 de la Sec. B du Chap. IV) et on montre ([F6, Prop. 5.2.7]) que les  $\delta_{\Gamma_\alpha}$ , pour  $\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{++}$ , sont linéairement indépendants.

$$\text{Donc } \mathbf{k}\Lambda''(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{++}} \mathbf{k}\delta_{\Gamma_\alpha}.$$

**3 Conséquences.****3.1**

Les considérations ci-dessus permettent d'en déduire le corollaire ci-dessous (voir aussi [F6, Cor. 5.2.9]) :

**Corollaire.** *Soit  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ . Avec les notations précédentes, on a*

- (i)  $\mathfrak{h}_\Pi = \mathfrak{h}_\Pi'' = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{--}} \mathbf{k}H_{\Gamma_\alpha}$
- (ii)  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{p}) = \mathbf{k}\Lambda''(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{++}} \mathbf{k}\delta_{\Gamma_\alpha}$ .
- (iii)  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\Pi \oplus \mathbf{k}\mathcal{K}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p}))$ .
- (iv)  $\text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p})) = \text{card}(\pi \setminus \pi') - \frac{1}{2}\text{card}(\Pi_1'')$ .
- (v)  $\text{indice}(\mathfrak{p}) = \text{card}(\Pi') + \frac{1}{2}\text{card}(\Pi_1'')$ .

*Démonstration.* Déjà la somme  $\mathfrak{h}_\Pi + \mathbf{k}\mathcal{H}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p}))$  est une somme directe, vu le Lemme 2.2 et vu que la forme de Killing  $K$  restreinte à  $\mathbb{R}\mathcal{H}^{-1}(\pi) \times \mathbb{R}\mathcal{H}^{-1}(\pi)$  est définie positive. Donc  $\dim(\mathfrak{h}_\Pi + \mathbf{k}\mathcal{H}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p}))) = \dim \mathfrak{h}_\Pi + \dim \mathbf{k}\mathcal{H}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p})) \geq \dim(\mathfrak{h}') + \text{card}((\pi \setminus \pi')_{--}) + \text{card}((\pi \setminus \pi')_{++}) = \text{card}(\pi)$  d'après 2.6, 2.7 et 2.8. D'où les assertions (i), (ii) et (iii).

D'après 1.2 et les assertions précédentes, on a  $\text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p})) = \dim(\mathbf{k}\mathcal{H}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p}))) = \text{codim}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_\Pi) = \text{codim}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_\Pi'') = \text{card}(\pi) - (\text{card}(\pi') + \text{card}((\pi \setminus \pi')_{--})) = \text{card}(\pi \setminus \pi') - \frac{1}{2}\text{card}(\Pi_1'')$  d'après 2.4.

Enfin on a  $\text{indice}(\mathfrak{p}) = \text{GKdim}(\mathbf{S}\mathfrak{y}(\mathfrak{p})) - \text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p})) = \text{card}(\Pi) - \text{card}(\pi \setminus \pi') + \frac{1}{2}\text{card}(\Pi_1'') = \text{card}(\Pi') + \frac{1}{2}\text{card}(\Pi_1'')$  car  $\Pi = \Pi' \sqcup \Pi''$  et  $\text{card}(\Pi'') = \text{card}(\pi \setminus \pi')$ .  $\square$

### 3.2

*Remarques.* 1. On pourra remarquer (voir aussi [F6, 5.2.9, Remarques, 1]) que l'égalité des  $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels  $\mathbf{k}\Lambda''(\mathfrak{p}) = \mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{p})$  ainsi que l'inclusion  $\Lambda''(\mathfrak{p}) \subset \Lambda(\mathfrak{p})$  n'impliquent pas forcément que l'on a l'égalité  $\Lambda''(\mathfrak{p}) = \Lambda(\mathfrak{p})$  ou bien  $\Lambda(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2}\Lambda''(\mathfrak{p})$  (en type autre que  $AC$ ). Ces égalités seraient beaucoup plus délicates à démontrer. I. Heckenberger a vérifié par ordinateur que l'on a bien l'égalité  $\Lambda''(\mathfrak{p}) = \Lambda(\mathfrak{p})$  pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A_l$  pour  $l \leq 24$  et toute sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$ .

2. On a une formule analogue pour l'indice d'un biparabolique ([30, 5.9 et 7.16]).

3. De nombreux travaux traitent de l'indice d'une sous-algèbre parabolique. Déjà un manuscrit non publié de A.G. Elashvili ([20]) donne quelques résultats partiels. Puis V. Dergachev et A. Kirillov ([13]) ont décrit l'indice de sous-algèbres biparaboliques (encore appelées sous-algèbres spéciales) d'une algèbre de Lie simple de type  $A$  en termes du nombre de cycles d'une certaine permutation de cette sous-algèbre biparabolique (notre solution s'exprime sous une forme légèrement différente et a l'avantage d'être valable pour tout type d'algèbre de Lie simple). Puis D. Panyushev a décrit ([50]) l'indice de sous-algèbres spéciales en type  $C$  et a obtenu ([51]) des résultats partiels concernant les paraboliques en type  $B$ ,  $D$  et  $F$ . Enfin P. Tauvel et R.W.T. Yu ([59]) ont donné une borne supérieure pour l'indice d'un biparabolique exprimée en fonction de cascades de Kostant et ont conjecturé qu'il y a égalité. Ils ont également remarqué que, grâce à [13], leur conjecture est vérifiée en type  $A$ .

La formule de l'indice d'un parabolique donnée dans le Corollaire 3.1 réécrite en termes de cascades de Kostant nous a permis ([F6, Prop. 6.6]) de démontrer que la conjecture de Tauvel et Yu est vraie pour toute sous-algèbre parabolique de toute algèbre de Lie semi-simple. De façon analogue ([30, Thm. 8.4]) A. Joseph a montré que cette conjecture est également vraie pour tout biparabolique.

### 3.3

Enfin rappelons que l'on a posé  $\mathfrak{p}_\Pi = \mathfrak{h}_\Pi + \mathfrak{p}'$  au 4.7 de la Sec. B du Chap. IV. Alors on a  $\mathfrak{p}_\Pi = \mathfrak{p}_\Lambda$  la troncation canonique de  $\mathfrak{p}$  (voir [F6, preuve du Cor. 5.2.10]). En effet, grâce au Lemme 2.2 et au Cor. 3.1, on montre que  $\mathfrak{h}_\Pi$  est l'orthogonal de  $\mathbf{k}\mathcal{H}^{-1}(\Lambda(\mathfrak{p}))$  dans  $\mathfrak{h}$  par rapport à  $K$ , qui n'est autre que  $\mathfrak{p}_\Lambda \cap \mathfrak{h}$ . Donc  $\mathfrak{p}_\Pi \subset \mathfrak{p}_\Lambda$ . De plus d'après le Cor. 3.1,

on a  $\text{codim}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_{\Pi}) = \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h}_{\Pi} = \text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p}))$ . Or  $\text{rang}(\Lambda(\mathfrak{p})) = \text{codim}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_{\Lambda})$  d'après 1.1. D'où l'égalité  $\mathfrak{p}_{\Pi} = \mathfrak{p}_{\Lambda}$ . Par conséquent  $\mathfrak{h}_{\Lambda} = \mathfrak{p}_{\Lambda} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\Pi} = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{--}} \mathbf{k}H_{\Gamma_{\alpha}}$ .

### 3.4

Posons pour toute algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  ad-algébrique,  $c(\mathfrak{a}) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{a} + \text{indice}(\mathfrak{a}))$ . Ce nombre est un entier puisque toute orbite coadjointe est de dimension paire. C'est aussi une borne supérieure pour la dimension de Gelfand-Kirillov de toute sous-algèbre Poisson-commutative de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$ .

Par exemple pour  $h \in \mathfrak{a}^*$ , si on note  $T_h(\mathfrak{a})$  la sous-algèbre de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  engendrée par les fonctions dans le développement de  $z \mapsto f(z + \lambda h)$  en puissances de  $\lambda$  lorsque  $f$  parcourt  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  (méthode du “shift of argument”), il est bien connu (voir [F6, Appendice A]) que  $T_h(\mathfrak{a})$  est Poisson-commutative. Dans le cas où  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ , on peut déduire de la construction de Mishchenko et Fomenko ([46, section 4]) un isomorphisme de  $T_h(\mathfrak{g})$  dans l'algèbre des fonctions régulières sur une certaine variété affine (algèbre isomorphe à  $\mathbf{S}(\mathfrak{b}^*)$ ) et donc que  $\text{GKdim}(T_h(\mathfrak{g})) = \dim \mathfrak{b} = c(\mathfrak{g})$ . D'après [39, Prop. 16]  $T_h(\mathfrak{g})$  est alors Poisson-commutative maximale (voir aussi [F6, Introduction]). Il n'existe cependant pas de construction analogue pour l'algèbre enveloppante, à part pour les cas classiques ([48]).

La Prop. 9.7 de la Sec. B du Chap. I donne alors le Corollaire suivant (voir aussi [F6, Cor. 5.2.10]) :

**Corollaire.** (i)  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_{\Pi})$ .

ii)  $c(\mathfrak{p}) = c(\mathfrak{p}_{\Pi})$ .

iii)  $\text{indice}(\mathfrak{p}_{\Pi}) = \text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}))$ .

Vue la Prop. 9.7 de la Sec. B du Chap. I, valable également pour un biparabolique, on peut remarquer que ce corollaire reste vrai si on remplace le parabolique  $\mathfrak{p}$  par un biparabolique  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{p}_{\Pi}$  par la troncation canonique de  $\mathfrak{q}$  (voir aussi [30, 7.18] pour le (ii)).

## C La somme des faux degrés.

On considère toujours une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ .

### 1 Définition des faux degrés.

Les “faux degrés” associés aux  $\langle ij \rangle$ -orbites de  $\Pi$  sont définis de façon combinatoire à partir des degrés des générateurs homogènes de la borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

Ils sont égaux aux vrais degrés des générateurs homogènes du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  lorsque les deux bornes de l'encadrement de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  coïncident. Sinon, lorsque  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est polynomial mais que les deux bornes ne coïncident pas, les faux et les vrais degrés peuvent ne pas être égaux (1.2.1, 1.2.2 et 1.2.3). Par contre il est fort probable que la somme des faux et la somme des vrais degrés soient souvent égales (1.2.2, 1.2.3, ou Lemme 2.1) mais ce n'est pas toujours le cas (1.2.1). De plus les faux degrés ont l'avantage d'être

définis même pour une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  dont on ne sait pas si  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est polynomial et leur somme est toujours égale (Prop. 2.2) à l'entier  $c(\mathfrak{p})$  défini au 3.4 de la Sec. B.

### 1.1

A tout  $\Gamma \in \Pi$ , on a associé dans 4.7 de la Sec. B du Chap. IV un nombre entier strictement positif  $\partial_\Gamma$  que nous appellerons son “faux degré”. Je rappelle ici comment on peut le définir.

La borne supérieure  $\mathbf{S}^J$  de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont les  $s_\Gamma$ , pour  $\Gamma \in \Pi_2$  et  $s_\Gamma$  et  $t_\Gamma$  pour  $\Gamma \in \Pi_1/\langle j \rangle$ . Alors pour tout  $\Gamma \in \Pi_2$ ,  $\partial_\Gamma = \frac{1}{\varepsilon_\Gamma} \deg(s_\Gamma)$  et pour tout  $\Gamma \in \Pi_1/\langle j \rangle$ ,  $\partial_\Gamma = \deg(s_\Gamma)$  et  $\partial_{j(\Gamma)} = \deg(t_\Gamma) = \deg(s_\Gamma) + 1 = \partial_\Gamma + 1$ .

Lorsque, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1$ , on sait qu'alors  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est une algèbre de polynômes car les deux bornes coïncident et  $gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}))) = \mathbf{S}^J$ . Dans ce cas les faux degrés  $\partial_\Gamma$  correspondent donc aux vrais degrés des générateurs homogènes de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

Par contre lorsque les deux bornes ne coïncident pas, et qu'on sait quand même que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est une algèbre de polynômes, il se peut que les faux degrés ne correspondent pas aux vrais degrés des générateurs homogènes de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  d'après les exemples qui suivent.

### 1.2 Exemples.

**1.2.1** Par exemple prenons  $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$  lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type autre que  $A$  ou  $C$ . D'après [F5, 4.2.9] on a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b}) = \mathbf{S}^J$ . De plus  $\Pi = \{\{\alpha\}, \alpha \in \pi\}$  et il existe  $\alpha \in \pi$  tel que  $\alpha = j(\alpha)$  et tel que  $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}$  (puisque  $\mathfrak{g}$  n'est pas de type  $AC$ ). Autrement dit les vrais et les faux degrés de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  coïncident sauf pour les éléments de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$  de la forme  $a_{\varpi_\alpha}$  pour lesquels le faux degré est le double de son vrai degré. Dans ce cas la somme des vrais et la somme des faux degrés ne sont donc pas égales.

**1.2.2 Exemple pour  $\mathfrak{g}$  de type  $B_4$ .** Reprenons l'exemple de 4.3 de la Sec. D du Chap. IV. Pour la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  correspondant à  $\pi' = \{\alpha_3\}$  de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B_4$ , Heckenberger a montré que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est une algèbre de polynômes en des générateurs homogènes de degré 2, 1, 6, 2 respectivement. On peut également calculer les faux degrés  $\partial_{\Gamma_i}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) et on trouve : 2, 2, 5, 2 respectivement. On constate que la somme des faux degrés est égale à la somme des vrais degrés dans ce cas (voir aussi [31, Section 10, Remark 4]).

**1.2.3 Exemple pour  $\mathfrak{g}$  de type  $G_2$ .** Supposons  $\mathfrak{g}$  simple de type  $G_2$  et soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les deux racines simples de  $\mathfrak{g}$  avec  $\alpha_1$  la racine courte. Si  $\mathfrak{p}$  correspond à  $\pi' = \{\alpha_2\}$ , alors on vérifie que, pour tout  $\Gamma \in \Pi$ ,  $\varepsilon_\Gamma = 1$ , donc  $gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}))) = \mathbf{S}^J$  et les vrais et les faux degrés coïncident. Si  $\mathfrak{p}$  correspond à  $\pi' = \{\alpha_1\}$ , on peut vérifier que  $\mathfrak{p}$  est la parabolique de Heisenberg, c'est-à-dire la sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  dont le radical nilpotent est l'algèbre de Lie de Heisenberg dont le centre est  $\mathbf{k}x_\beta$  où  $x_\beta$  est le vecteur de plus haut poids de  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{p}'$  est le centralisateur  $\mathfrak{g}^{x_\beta}$  de  $x_\beta$  dans  $\mathfrak{g}$  et c'est aussi la

troncation canonique de  $\mathfrak{p}$ . D'après [34, 6.11-6.14],  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{g}^{x_\beta})$  est une algèbre de polynômes en deux générateurs de degré respectif 4 et 1 (voir aussi [34, A.3]). On calcule d'autre part que les faux degrés valent respectivement 3 et 2. Ainsi la somme des vrais degrés est-elle égale à la somme des faux degrés dans ce cas.

## 2 La somme des faux degrés.

### 2.1

Rappelons le nombre  $c(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{p} + \text{indice}(\mathfrak{p}))$  défini au 3.4 de la Sec. B. Dans [F6, Section 6] A. Joseph et moi-même avons montré que la somme des faux degrés de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est toujours égale à l'entier  $c(\mathfrak{p})$ , ce qui n'est pas forcément vrai pour la somme des vrais degrés (par exemple, pour le Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $G_2$ , la somme des faux degrés est égale à 4 alors que la somme des vrais degrés est égale à 3). Par contre il est fort probable que la somme des vrais degrés (lorsqu'on sait que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est polynomiale) soit souvent égale à la somme des faux degrés. C'est déjà le cas lorsque  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$  (voir le lemme ci-dessous) ou lorsque  $\mathfrak{p}$  est n'importe quelle sous-algèbre parabolique distincte du Borel de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $G_2$  (voir l'exemple de 1.2.3) ou lorsque  $\mathfrak{p}$  correspond à  $\{\alpha_3\}$  dans  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B_4$  (voir l'exemple de 1.2.2).

La preuve que la somme des faux degrés est égale à l'entier  $c(\mathfrak{p})$  repose essentiellement sur le lemme suivant (voir aussi [F6, Lemme 4.9]).

**Lemme.** *Lorsque  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$  la somme des faux degrés est égale à la somme des vrais degrés.*

*Idée de démonstration.* Rappelons que, lorsque  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ , le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est égal au centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  et est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{rang}(\mathfrak{g}) = \text{card}(\pi)$  générateurs homogènes. De plus les degrés  $m_k$  (pour tout  $1 \leq k \leq \text{card}(\pi)$ ), appelés aussi exposants, de ces générateurs, ont été déterminés par Kostant ([41, 8.1.1]) et satisfont l'égalité  $\sum_{1 \leq k \leq \text{card}(\pi)} m_k = \dim \mathfrak{b}$  (voir [16, 7.3.8]).

Dans le cas où  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ , on a  $\Pi = \{\{\alpha\}, \alpha \in \pi\}$  car  $\pi' = \pi$  et donc  $i = j$ . Donc pour tout  $\Gamma = \{\alpha\} \in \Pi$ ,  $s_\Gamma = a_{\rho_\alpha} a_{-\rho_\alpha}$  (car  $\varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\alpha$ ) et  $\deg(s_\Gamma) = 2 \deg(a_{\rho_\alpha})$ . Rappelons que  $\partial_\Gamma = \frac{1}{\varepsilon_\Gamma} \deg(s_\Gamma)$ .

Si  $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}$ , on a donc  $\partial_\Gamma = 4 \deg(a_{\rho_\alpha})$  et si  $\varepsilon_\alpha = 1$  avec  $\alpha = j(\alpha)$  on a  $\partial_\Gamma = 2 \deg(a_{\rho_\alpha})$ . Si  $\alpha \neq j(\alpha)$  on a  $\partial_\Gamma = 2 \deg(a_{\rho_\alpha})$  pour  $\alpha \in \pi / \langle j \rangle$  et  $\partial_{j(\Gamma)} = 2 \deg(a_{\rho_\alpha}) + 1$ .

Notons  $S^f$  la somme des faux degrés. On a donc dans le cas où  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} S^f &= \sum_{\Gamma \in \Pi} \partial_\Gamma \\ &= 4 \sum_{\substack{\alpha \in \pi \\ \varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}}} \deg(a_{\rho_\alpha}) + 2 \sum_{\alpha \in \pi | \alpha = j(\alpha), \varepsilon_\alpha = 1} \deg(a_{\rho_\alpha}) + \sum_{\alpha \in \pi / \langle j \rangle | \alpha \neq j(\alpha)} (4 \deg(a_{\rho_\alpha}) + 1) \\ &= \sum_{\alpha \in \pi} \frac{1}{\varepsilon_\alpha} (s_\alpha + t_\alpha) \end{aligned}$$

en utilisant les notations de 2.16 de la Sec. A.

Posons, pour tout  $\alpha \in \pi$ ,  $B_\alpha = \varpi_\alpha + \varpi_{j(\alpha)} = \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \rho_\alpha$  et notons  $a_{B_\alpha}$  un vecteur (unique à un scalaire multiplicatif non nul près) de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  de poids  $B_\alpha$ . Comme  $B_\alpha = B_{j(\alpha)}$ , on a donc  $S^f = 2 \sum_{\alpha \in \pi} \deg(a_{B_\alpha}) + \text{card}(\{\alpha \in \pi / \langle j \rangle \mid \alpha \neq j(\alpha)\})$ . Il suffit ensuite de remarquer que, d'après [28],  $\deg(a_{B_\alpha}) = |B_\alpha|$  où  $|B_\alpha|$  est la somme des coefficients (entiers positifs) qui apparaissent dans  $B_\alpha$  exprimé comme combinaison linéaire des racines positives fortement orthogonales. Puis on termine comme dans la preuve de [F6, Lemme 4.9] en utilisant des propriétés ([28]) des racines fortement orthogonales et le fait que la somme des vrais degrés des générateurs homogènes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  est égale à la dimension du Borel  $\mathfrak{b}$ .  $\square$

## 2.2

Enfin on obtient la Proposition suivante (voir [F6, Prop. 6.5] pour la démonstration qui repose essentiellement sur le Lemme 2.1 précédent ainsi que sur la formule de l'indice de  $\mathfrak{p}$  établie au *v*) du Cor. 3.1 de la Sec. B).

**Proposition.** *Soit  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  et  $S^f$  la somme des faux degrés ( $S^f = \sum_{\Gamma \in \Pi} \partial_\Gamma$ ). Alors on a*

$$S^f = c(\mathfrak{p}).$$

*Remarque.* Pour un biparabolique, on peut également définir le faux degré, noté encore  $\partial_\Gamma$ , associé à tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$  (voir 2.3 de la Sec. D du Chap. IV). Dans [31, Thm. 9.6] Joseph a démontré que la proposition précédente est vraie aussi si  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre biparabolique de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  semi-simple.

## 2.3

Considérons maintenant une algèbre de Lie de Kac-Moody de type affine  $\mathfrak{g}$ , ayant une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ , et un système de racines simples supposé connexe encore noté  $\pi = \{\alpha_i\}_{i=0}^l$  et soit  $\delta$  l'unique racine indivisible imaginaire positive qui engendre l'ensemble des racines imaginaires positives de  $\mathfrak{g}$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est de dimension infinie, mais si on considère une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  de  $\mathfrak{g}$  avec  $\pi', \pi'' \subset \pi$  tels que  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ ,  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  est de dimension finie si, et seulement si,  $\pi'$  et  $\pi''$  sont tous deux des sous-ensembles propres de  $\pi$  ([31, 7.1]). Il existe des poids fondamentaux  $\varpi_i$ ,  $0 \leq i \leq l$  tels que  $\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i=0}^l \mathbf{k}\varpi_i \oplus \mathbf{k}\delta$  et une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $\mathfrak{h}^*$  invariante par le groupe de Weyl  $W$  de  $\mathfrak{g}$  qui permet donc d'identifier  $\mathfrak{h}^*$  avec  $\mathfrak{h}$  (désignons cet isomorphisme par  $\mathcal{H} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ ).

Supposons donc que  $\pi'$  et  $\pi''$  sont des sous-ensembles propres de  $\pi$  tels que  $\pi' \cup \pi'' = \pi$  et notons  $\bar{\mathfrak{q}}$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$  définie par  $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}$  où  $\bar{\mathfrak{h}} = \mathcal{H}^{-1}(\bigoplus_{i=0}^l \mathbf{k}\varpi_i)$ .

Le semi-centre de Poisson  $\mathbf{Sy}(\bar{\mathfrak{q}})$  associé à  $\bar{\mathfrak{q}}$  vérifie des propriétés analogues au semi-centre de Poisson associé à une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple et les notations utilisées pour un biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple sont encore valables. On a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}) = \mathbf{Sy}(\bar{\mathfrak{q}}) \otimes \mathbf{k}[\mathcal{H}^{-1}(\delta)]$  (voir [31, 7.17] car  $\mathcal{H}^{-1}(\delta)$  commute avec tous les éléments de  $\mathfrak{q}'$ ).

Ainsi  $\mathbf{Sy}(\bar{\mathfrak{q}})$  peut être encadré entre deux bornes définies de façon similaire au cas semi-simple (voir [31, 7.19, 7.20]). Lorsque  $\varepsilon_\Gamma = 1$  pour tout  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$ , le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\bar{\mathfrak{q}})$  est polynomial (voir [31, 7.21]) puisque dans ce cas les deux bornes coïncident et on en déduit que le semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  est également polynomial dans ce cas.

De plus, d'après [31, Thm. 9.6], la Prop. 2.2 est vraie aussi pour la sous-algèbre  $\bar{\mathfrak{q}}$ .

Elle l'est d'ailleurs aussi pour  $\mathfrak{q}$  en ajoutant à la somme des  $\partial_\Gamma$  pour  $\Gamma \in E(\pi', \pi'')$  la valeur 1 qui est le degré de  $\mathcal{H}^{-1}(\delta)$ .

En effet on a  $c(\mathfrak{q}) = c(\bar{\mathfrak{q}}) + 1$  puisque l'indice de  $\mathfrak{q}$  est égal à  $\text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})) - \dim(\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{q}))$  où  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{q})$  est le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par les poids du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})$  (d'après (\*\*\*) de 9.6 de la Sec. B du Chap. I). Or  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{q})$  est égal à  $\mathbf{k}\Lambda(\bar{\mathfrak{q}})$ , puisque  $\mathcal{H}^{-1}(\delta)$  est de poids zéro et de plus  $\text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q})) = \text{GKdim}(\mathbf{Sy}(\bar{\mathfrak{q}})) + 1 = \text{card}(E(\pi', \pi'')) + 1$  (voir [31, Lemme 9.3]).

### D Un exemple de calcul explicite en type A de la troncation canonique d'un parabolique et degrés et poids des générateurs de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda)$ .

On considère ici  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_6(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  correspondant à  $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_2, \alpha_4\}$ .

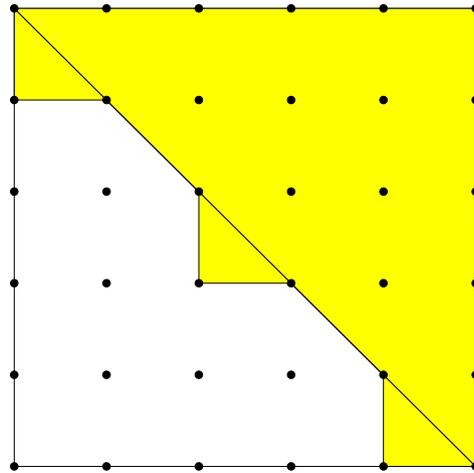


Figure 1.

Représentation des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{p}$ .

Les points noirs, sauf ceux de la diagonale, dans la zone en jaune, représentent les poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{p}$ . Ainsi on constate qu'il y a  $15 + 3$  poids non nuls dans  $\mathfrak{p}$ .

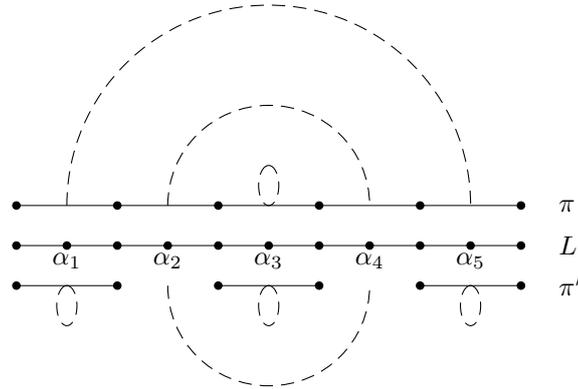


Figure 2.

Représentation des  $\langle i, j \rangle$ -orbites des éléments de  $\pi$ .

J'ai dessiné en pointillés les arcs correspondant aux  $\langle ij \rangle$ -orbites des éléments de  $\pi$ . Au-dessus de la ligne horizontale  $L$  se trouvent les arcs correspondant à  $j$  et en dessous les arcs correspondant à  $i$ . On constate qu'il y a trois  $\langle i, j \rangle$ -orbites dont deux qui sont aussi des  $\langle ij \rangle$ -orbites. Il y a donc quatre  $\langle ij \rangle$ -orbites.

## 1 L'ensemble $\Pi$ .

L'ensemble  $\Pi$  des  $\langle ji \rangle$ -orbites est  $\Pi = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$  avec  $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \alpha_5\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\alpha_2\}$ ,  $\Gamma_3 = \{\alpha_3\}$  et  $\Gamma_4 = \{\alpha_4\}$ . On a  $\Pi' = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}$  et  $\Pi'' = \{\Gamma_2, \Gamma_4\}$  et  $\Pi_1 = \{\Gamma_2, \Gamma_4\} = \Pi''$ .

Par conséquent on sait déjà que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda)$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en  $\text{card}(\Pi) = 4$  générateurs et indice( $\mathfrak{p}_\Lambda$ ) = 4 (d'après le Thm. du Par. 2 de la Sec. C du Chap. IV et la Prop. 9.7 de la Sec. B du Chap. I).

## 2 Ensemble des poids du semi-centre $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ , troncation canonique de $\mathfrak{p}$ et indice de $\mathfrak{p}$ .

De plus l'ensemble  $\Lambda(\mathfrak{p})$  des poids de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  vérifie  $\mathbf{k}\Lambda(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{++}} \mathbf{k}\delta_{\Gamma_\alpha}$ ,  $\mathfrak{h}_\Lambda = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in (\pi \setminus \pi')_{--}} \mathbf{k}H_{\Gamma_\alpha}$  et indice( $\mathfrak{p}$ ) =  $\text{card}(\Pi') + \frac{1}{2}\text{card}(\Pi''_1)$  d'après le Cor. 3.1 de la Sec. B et avec les notations qui y sont utilisées.

Or  $\text{card}(\Pi') = 2$  et  $\text{card}(\Pi''_1) = 2$  donc indice( $\mathfrak{p}$ ) =  $2 + 1 = 3$ .

Ici  $\pi \setminus \pi' = \{\alpha_2, \alpha_4\}$  et on peut prendre  $(\pi \setminus \pi')_{++} = \{\alpha_2\}$  et  $(\pi \setminus \pi')_{+-} = \{\alpha_4\}$  (ou vice-versa).

D'autre part, à un scalaire multiplicatif non nul près, on a  $H_{\Gamma_4} = -H_{\Gamma_2} = \mathcal{H}^{-1}(\varpi_4 - \varpi_2)$ . De plus  $\delta_{\Gamma_2} = \delta_{\Gamma_4} = w'_0\varpi_2 - w_0\varpi_2 = \varpi_2 + \varpi_4$  car  $\alpha_2 \notin \pi'$  donc  $w'_0\varpi_2 = \varpi_2$ .

Par conséquent  $\mathfrak{h}_\Lambda = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{k}\mathcal{H}^{-1}(\varpi_4 - \varpi_2)$  où  $\mathfrak{h}'$  est le  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel engendré par les coracines  $\alpha_1^\sim, \alpha_3^\sim, \alpha_5^\sim$  associées resp. à  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ .

On a donc  $\dim(\mathfrak{p}_\Lambda) = \dim(\mathfrak{n}) + \dim(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) + \dim(\mathfrak{h}_\Lambda) = 15 + 3 + 3 + 1 = 22$  alors que  $\dim(\mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{n}) + \dim(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) + \dim(\mathfrak{h}) = 15 + 3 + 5 = 23$ .

### 3 Degrés des générateurs de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

Le degré de chaque générateur de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est donné par le degré de son terme principal dans  $\mathbf{S}^J$ , c'est-à-dire ici, puisque  $\mathbf{S}^J = gr'(gr''(\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})))$  et que tous les  $\varepsilon_{\Gamma_i}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , valent un, l'ensemble des degrés des générateurs homogènes de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  est  $\{\partial_{\Gamma_i}, 1 \leq i \leq 4\}$ .

Rappelons que  $\partial_{\Gamma_i} = \deg(s_{\Gamma_i})$  si  $\Gamma_i = j(\Gamma_i)$  et sinon  $\partial_{\Gamma_i} = \deg(s_{\Gamma_i})$  et  $\partial_{j(\Gamma_i)} = \deg(s_{\Gamma_i}) + 1$  pour  $\Gamma_i \in \Pi/\langle j \rangle$ , avec  $s_{\Gamma_i} = a_{\Gamma_i} a'_{\Gamma_i}$ .

Ici  $a_{\Gamma_i} = \prod_{\alpha \in \Gamma_i} a_{\rho_\alpha}$  et si  $\Gamma_i \cap \pi' \neq \emptyset$ ,  $a'_{\Gamma_i} = \prod_{\alpha \in \Gamma_i \cap \pi'} a_{-\rho'_\alpha}$ , sinon  $a'_{\Gamma_i} = 1$  (tous les  $\varepsilon_\alpha$  valent un ici).

Ainsi on obtient, en examinant [28, Table I],  $\deg(a_{\Gamma_1}) = 2 \deg(a_{\varpi_1 + \varpi_5}) = 2 \times 1 = 2$  et  $\deg(a'_{\Gamma_1}) = \deg(a_{-2\varpi'_1}) + \deg(a_{-2\varpi'_5}) = 1 + 1 = 2$  donc  $\deg(s_{\Gamma_1}) = 2 + 2 = 4$ . De même  $\deg(a_{\Gamma_3}) = \deg(a_{2\varpi_3}) = 3$  et  $\deg(a'_{\Gamma_3}) = \deg(a_{-2\varpi'_3}) = 1$  donc  $\deg(s_{\Gamma_3}) = 3 + 1 = 4$ .

Enfin pour  $\Gamma_2 \in \Pi_1$ , on a  $j(\Gamma_2) = \Gamma_4$  et  $a_{\Gamma_2} = a_{(\varpi_2 + \varpi_4)}$  donc  $\deg(a_{\Gamma_2}) = 2$  et  $a'_{\Gamma_2} = 1$  car  $\Gamma_2 \subset \pi \setminus \pi'$ . Donc  $\partial_{\Gamma_2} = \deg(s_{\Gamma_2}) = 2$  et  $\partial_{\Gamma_4} = \deg(s_{\Gamma_2}) + 1 = 3$ .

### 4 Poids des générateurs de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .

On calcule aussi les poids des générateurs de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  qui valent  $\delta_{\Gamma_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq 4$ . On sait déjà que ces poids sont proportionnels à  $\delta_{\Gamma_2} = \varpi_2 + \varpi_4$  d'après le Par. 2. En fait on vérifie qu'ils valent exactement  $\delta_{\Gamma_2} = \varpi_2 + \varpi_4$ .

Ainsi les quatre générateurs homogènes de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  sont de poids  $\varpi_2 + \varpi_4$  et de degré respectif 2, 3, 4 et 4.

### 5 Somme des faux degrés.

On peut vérifier que la somme des faux degrés est bien égale à  $c(\mathfrak{p}_\Lambda) = c(\mathfrak{p})$ . En effet  $S^f = 2 + 3 + 4 + 4 = 13$  (car ici les vrais et les faux degrés coïncident) et  $c(\mathfrak{p}_\Lambda) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{p}_\Lambda) + \text{indice}(\mathfrak{p}_\Lambda)) = \frac{1}{2}(22 + 4) = 13 = \frac{1}{2}(23 + 3) = c(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{p}) + \text{indice}(\mathfrak{p}))$ .

# Chapitre VI

## Une autre approche de la polynomialité : les sections de Weierstrass et les paires adaptées.

Mes deux derniers articles ([F7] et [F8]), toujours en collaboration avec A. Joseph, tentent d'appréhender la polynomialité du semi-centre de Poisson associé à un parabolique ou à un biparabolique d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  semi-simple de façon un peu plus géométrique, par le biais des sections de Weierstrass et des paires adaptées.

Dans tout ce chapitre  $\mathfrak{a}$  désigne une algèbre de Lie algébrique dans  $\mathfrak{gl}(U) = \text{End}(U)$  : autrement dit  $\mathfrak{a}$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé (pour la topologie de Zariski sur  $\text{End}(U)$ ) du groupe linéaire  $\mathbf{GL}(U)$  ( $U$  étant un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel de dimension finie). On note  $\mathbf{A}$  le groupe adjoint de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}^*$  la variété des zéros de l'idéal de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  engendré par les polynômes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  de degré strictement positif. Rappelons que le groupe adjoint  $\mathbf{A}$  agit sur  $\mathfrak{a}^*$  par l'action coadjointe définie par : pour tous  $x, a \in \mathfrak{a}$  et tout  $f \in \mathfrak{a}^*$ ,  $((\exp ad a).f)(x) = f(\exp(-ad a)(x))$ .

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  étant algébrique, elle est *ad*-algébrique. Réciproquement pour toute algèbre de Lie *ad*-algébrique, on peut trouver un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $U$  de dimension finie tel que cette algèbre de Lie soit algébrique dans  $\mathfrak{gl}(U)$  (en suivant par exemple la preuve de [16, Thm. 2.5.5]).

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est toujours une algèbre de Lie simple ou semi-simple de dimension finie sur  $\mathbf{k}$  et la variété  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  s'identifie avec le cône des éléments nilpotents de  $\mathfrak{g}$ . C'est une sous-variété irréductible de  $\mathfrak{g}^*$  ([16, 8.1.3]).

Rappelons que toute sous-algèbre biparabolique (tronquée ou non) de  $\mathfrak{g}$  est *ad*-algébrique, donc aussi algébrique dans un certain  $\mathfrak{gl}(U)$ .

## A Définitions et premières propriétés.

L'existence d'une section de Weierstrass (du moins au sens algébrique du terme) pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  entraîne la polynomialité de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  et permet également de "linéariser" les générateurs de l'algèbre  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ . De plus si l'on pose  $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_\Lambda$ , la troncation canonique d'une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  et dans ce cas (voir Remarque (1) de 1.4), une section de Weierstrass au sens algébrique est aussi une section de Weierstrass au sens géométrique.

Les paires adaptées pour  $\mathfrak{a}$  non réductives sont l'analogue des  $\mathfrak{sl}_2$ -triplets principaux pour  $\mathfrak{a}$  réductives. Elles fournissent sous certaines conditions des sections de Weierstrass (voir 2.4).

Malheureusement pour certaines sous-algèbres biparaboliques  $\mathfrak{q}$ , il n'existe pas de paires adaptées pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  alors que des sections de Weierstrass existent pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  (voir 2.9). Il se peut aussi qu'aucune section de Weierstrass n'existe (voir 2.10).

### 1 Les sections de Weierstrass.

Il existe deux notions de sections de Weierstrass, l'une plutôt "algébrique" donnée par Popov ([52, Def. 2.2.1]) et l'autre plutôt "géométrique".

Voici ces deux notions (voir aussi [F8, 1]). On considère  $\eta$  un élément de  $\mathfrak{a}^*$  et  $V$  un  $\mathbf{k}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{a}^*$ . Rappelons que l'algèbre  $R[\eta + V]$  des fonctions régulières ou polynomiales sur  $\eta + V \subset \mathfrak{a}^*$  s'identifie avec une algèbre-quotient de  $R[\mathfrak{a}^*] \simeq \mathbf{S}(\mathfrak{a})$  par l'application de restriction.

#### 1.1 Définition "algébrique" d'une section de Weierstrass.

**Définition .** On dit que la sous-variété linéaire  $\eta + V$  est une section de Weierstrass au sens algébrique pour le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  dans  $\mathfrak{a}^*$  lorsque l'application de restriction induit un isomorphisme d'algèbres de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  sur l'algèbre  $R[\eta + V]$  des fonctions régulières sur  $\eta + V$ .

Ainsi l'existence d'une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  dans  $\mathfrak{a}^*$  au sens algébrique entraîne la polynomialité de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ .

#### 1.2

**Définition .** (voir [36, 7.3]).

Soit  $s \in \eta + V$ . On dit que  $\eta + V$  coupe transversalement l'orbite coadjointe  $\mathbf{A}.s$  lorsque l'espace tangent  $T_{s, \mathbf{A}.s}$  en  $s$  à l'orbite  $\mathbf{A}.s$  et l'espace tangent  $T_{s, \eta + V}$  en  $s$  à  $\eta + V$  ont une intersection réduite à  $\{0\}$ , autrement dit  $(ad \mathfrak{a})(s) \cap V = \{0\}$  où ici  $ad$  désigne l'action coadjointe de  $\mathfrak{a}$  sur  $\mathfrak{a}^*$ .

### 1.3 Définition “géométrique” d’une section de Weierstrass.

**Définition .** On dit que la sous-variété linéaire  $\eta + V$  est une section de Weierstrass au sens géométrique pour le centre de Poisson  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  dans  $\mathfrak{a}^*$  lorsque  $\eta + V$  vérifie les deux propriétés suivantes.

- i)  $\mathbf{A}(\eta + V)$  est dense dans  $\mathfrak{a}^*$  (mais  $\mathbf{A}(\eta + V)$  n’est pas forcément ouvert dans  $\mathfrak{a}^*$ ).
- ii)  $\eta + V$  rencontre chaque orbite coadjointe dans  $\mathbf{A}(\eta + V)$  en exactement un point et transversalement.

### 1.4 Remarques.

- (1) Il n’est pas clair si en général les deux notions de sections de Weierstrass sont équivalentes. Cependant dans [F8, 10.12] nous avons montré que lorsque  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ , une section de Weierstrass  $\eta + V$  au sens algébrique du terme est aussi une section de Weierstrass au sens géométrique du terme et réciproquement, sous une condition supplémentaire assez faible (à savoir  $\text{codim}_{\eta+V}((\eta+V) \setminus (\eta+V)_{reg}) \geq 2$  avec  $(\eta+V)_{reg} = (\eta+V) \cap \mathfrak{a}_{reg}^*$ ) satisfaite en particulier si la section de Weierstrass  $\eta + V$  pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  supposé polynomial est construite à partir d’une paire adaptée, comme expliqué au 2.4.
- (2) Signalons que dans [F7] ainsi que dans [32], [33], [34], [35], [36], les sections de Weierstrass au sens algébrique étaient plutôt appelées “tranches algébriques”. La terminologie de “section de Weierstrass” a été introduite par l’école russe, en particulier par Popov ([52]). Cette terminologie provient du cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  agissant sur un module simple de dimension 10 (module des formes cubiques en trois variables) pour lequel une telle section fut exhibée par Weierstrass dans son étude des courbes elliptiques par des 3-formes cubiques (voir [37, Section 2] pour plus de détails).
- (3) Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple, une section de Weierstrass fut construite par Kostant ([42]), qu’on appellera aussi “tranche de Kostant”. Pour cela Kostant a utilisé un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal  $(x, h, y)$  (ici tous les éléments du triplet sont réguliers, en identifiant  $\mathfrak{g}$  avec  $\mathfrak{g}^*$  par la forme de Killing,  $x$  et  $y$  sont ad-nilpotents et  $h$  est ad-semi-simple et ils engendrent une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}_2$ . De plus on a  $(adh)(x) = -x$ ). Alors  $x + \mathfrak{g}^y$  est une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{g}^*$  au sens algébrique et géométrique ( $\mathfrak{g}^y$  étant le centralisateur de  $y$  dans  $\mathfrak{g}$ ).
- (4) Dans la tranche de Kostant mentionnée ci-dessus, l’élément  $\eta$  (qui est ici  $x$ ) est régulier mais il n’est pas toujours nécessaire de supposer que  $\eta \in \mathfrak{a}^*$  soit régulier, pour obtenir une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  dans  $\mathfrak{a}^*$  (voir l’exemple du Borel tronqué dans  $\mathfrak{g}$  simple de type  $G_2$  donné au 3.1).

Par contre dans la définition d’une paire adaptée, l’élément  $\eta \in \mathfrak{a}^*$  qui intervient doit être supposé régulier (voir la définition ci-dessous).

## 2 Les paires adaptées.

Une paire adaptée peut être définie de la façon suivante (voir [F7, 1.3]).

**Définition .** Une paire adaptée  $(h, \eta)$  pour  $\mathfrak{a}$  consiste en un élément régulier  $\eta \in \mathfrak{a}^*$  et en un élément  $h \in \mathfrak{a}$  vérifiant  $(adh)(\eta) = -\eta$  où  $ad$  désigne ici l'action coadjointe.

Dans la définition ci-dessus on peut supposer, sans perte de généralité, puisque l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  est algébrique (donc ad-algébrique) que l'élément  $h$  est ad-semi-simple.

### 2.1

Remarquons que si  $(h, \eta)$  est une paire adaptée pour  $\mathfrak{a}$ , alors, pour tout  $a \in \mathbf{A}$ ,  $(a.h, a.\eta)$  est encore une paire adaptée pour  $\mathfrak{a}$ , puisque  $a.(adh)(\eta) = (ad(a.h))(a.\eta)$ . On dira que deux paires adaptées  $(h, \eta)$  et  $(h', \eta')$  pour  $\mathfrak{a}$  sont équivalentes lorsqu'il existe  $a \in \mathbf{A}$  tel que  $\eta' = a.\eta$ . On a remarqué dans [F8, Remarque de 10.8] que, pour un biparabolique  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  et sa troncation canonique  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , si  $\mathbf{Q}_\Lambda$  est le groupe adjoint de  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , alors deux paires adaptées  $(h, \eta)$  et  $(h', \eta')$  pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  avec  $h$  et  $h'$  ad-semi-simples, sont équivalentes si, et seulement si, il existe  $q \in \mathbf{Q}_\Lambda$  tel que  $h' = q.h$  et  $\eta' = q.\eta$ .

### 2.2

La construction de paires adaptées est un problème difficile d'algèbre linéaire. Remarquons que  $(adh)(\eta) = -\eta$  implique que  $\eta \in \mathcal{N}(\mathfrak{a})$ . Pour qu'une paire adaptée pour  $\mathfrak{a}$  existe, il faut donc que  $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a}_{reg}^* = \mathcal{N}(\mathfrak{a})_{reg}$  soit non vide. On ne sait pas si c'est une condition suffisante.

### 2.3

Dans [F8, 10.6] on a montré que, si  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est polynomial, alors l'application  $(h, \eta) \mapsto \mathbf{A}.\eta$  induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de paires adaptées pour  $\mathfrak{a}$  dans l'ensemble des  $\mathbf{A}$ -orbites denses dans une composante irréductible de  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ .

### 2.4

Soit  $(h, \eta)$  une paire adaptée pour  $\mathfrak{a}$ , et  $V$  un supplémentaire  $adh$ -stable de  $(ad\mathfrak{a})(\eta)$  dans  $\mathfrak{a}^*$ . Supposons de plus que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est polynomial. Alors il a été démontré dans [40, Cor. 2.3] que  $\eta + V$  est une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  dans  $\mathfrak{a}^*$  au sens algébrique et donc aussi au sens géométrique du terme d'après [F8, 10.12]. En particulier chaque  $\mathbf{A}$ -orbite dans  $\mathbf{A}.\eta + V$  rencontre  $\eta + V$  en exactement un point et transversalement.

De plus par régularité de  $\eta$  dans  $\mathfrak{a}^*$ , la dimension de  $V$  est égale à l'indice  $\ell(\mathfrak{a})$  de  $\mathfrak{a}$ , et si les  $d_k$ ,  $1 \leq k \leq \ell(\mathfrak{a})$ , sont les degrés des générateurs homogènes de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ , alors l'ensemble des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité)  $e_k$ ,  $1 \leq k \leq \ell(\mathfrak{a})$ , de  $adh$  sur  $V$  vérifient  $e_k = d_k - 1$ . Enfin si on est toujours dans les hypothèses ci-dessus, alors

$\eta + V \subset \mathfrak{a}_{reg}^*$  ([36, 7.4, 7.8, 7.13]). Par conséquent toutes les  $\mathbf{A}$ -orbites rencontrées par  $\eta + V$  sont régulières dans ce cas, mais toutes les  $\mathbf{A}$ -orbites régulières ne sont pas forcément rencontrées par  $\eta + V$ . De plus trivialement on a  $\text{codim}_{\eta+V}((\eta + V) \setminus (\eta + V)_{reg}) \geq 2$  (dès que  $\dim V \geq 2$ ) car dans ce cas  $(\eta + V) \setminus (\eta + V)_{reg} = \emptyset$ .

## 2.5

Rappelons que lorsqu'une  $\mathbf{k}$ -algèbre commutative et graduée admet un système de générateurs homogènes de degrés strictement positifs et algébriquement indépendants, (c'est-à-dire lorsque cette algèbre est une  $\mathbf{k}$ -algèbre graduée de polynômes) alors l'ensemble des degrés dépend uniquement de l'algèbre ([8, Cor. du 1. du § 5 du Chap. V]).

Supposons donc que  $\mathfrak{a}$  soit tel que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  (ce qui est le cas pour la troncation canonique d'une algèbre de Lie ad-algébrique). S'il existe une paire adaptée  $(h, \eta)$  pour  $\mathfrak{a}$  telle que  $adh$  agissant sur un sous-espace supplémentaire  $adh$ -stable de  $(ad \mathfrak{a})(\eta)$  dans  $\mathfrak{a}^*$  admette au moins une valeur propre strictement négative, alors on peut déduire de 2.4 que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  n'est pas polynomial. De même si deux paires adaptées  $(h, \eta)$ , resp.  $(h', \eta')$ , pour  $\mathfrak{a}$  sont telles que les ensembles de valeurs propres de  $adh$ , resp.  $adh'$ , agissant sur un sous-espace supplémentaire dans  $\mathfrak{a}^*$  de  $(ad \mathfrak{a})(\eta)$ , resp. de  $(ad \mathfrak{a})(\eta')$ ,  $adh$ -stable, resp.  $adh'$ -stable, soient distincts, alors on peut déduire de 2.4 que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  n'est pas polynomial.

Ainsi on pourrait peut-être espérer pouvoir construire, pour  $\mathfrak{g}$  simple de type  $E_8$  et  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique de Heisenberg de  $\mathfrak{g}$ , une (ou plusieurs) paire(s) adaptée(s) pour  $\mathfrak{p}_\Lambda$  et retrouver, en utilisant les remarques ci-dessus, le contre-exemple de Yakimova, à savoir que  $\mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda)$  n'est pas polynomial (voir 4.1 de la Sec. D du Chap. IV).

## 2.6

Dans le cas de la tranche de Kostant (voir (3) de 1.4), le  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal  $(x, h, y)$  fournit  $(h, x)$  comme paire adaptée pour  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^y$  est un supplémentaire dans  $\mathfrak{g}$  (isomorphe à  $\mathfrak{g}^*$ ) de  $[\mathfrak{g}, x]$ .

## 2.7

Joseph a montré dans [35] que, lorsque l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  est de type  $A$ , alors il existe des paires adaptées pour toute sous-algèbre biparabolique tronquée de  $\mathfrak{g}$ . Par contre on ne sait pas, pour une sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}$  donnée de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$ , si la construction de [35] donne toutes les paires adaptées, à équivalence près, pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , ni lesquelles des paires adaptées pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  construites dans [35] sont équivalentes.

## 2.8

Supposons que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$ . Alors (voir [F8, 10.6]) la dimension de toute composante irréductible de  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  est supérieure ou égale à  $\dim(\mathfrak{a}) - \text{GKdim}(\mathbf{Y}(\mathfrak{a})) = \dim(\mathfrak{a}) - \text{indice}(\mathfrak{a}) = d(\mathfrak{a})$  puisque  $\mathfrak{a}$  est supposé algébrique, donc ad-algébrique. De plus la dimension de toute  $\mathbf{A}$ -orbite est inférieure ou égale à  $\dim(\mathfrak{a}) - \text{indice}(\mathfrak{a})$ . Donc il suffit que  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  possède un nombre fini de  $\mathbf{A}$ -orbites pour qu'il y ait des paires adaptées pour

$\mathfrak{a}$  (voir [40, 1.7]). En effet dans ce cas on vérifie que toute composante irréductible de  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  est de dimension  $d(\mathfrak{a})$  et qu'il existe au moins un élément  $\eta \in \mathfrak{a}_{reg}^* \cap \mathcal{N}(\mathfrak{a})$ . On en déduit alors (comme dans la preuve de [F8, Prop. 10.6] pour prouver 2.3) que  $\mathbf{k}^*\eta \subset \mathbf{A}.\eta$  (puisque pour tout  $\lambda \in \mathbf{k}^*$ ,  $\lambda\eta \in \mathfrak{a}_{reg}^* \cap \mathcal{N}(\mathfrak{a})$  et donc  $\mathbf{A}.\lambda\eta$  et  $\mathbf{A}.\eta$  sont denses dans la composante irréductible de  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  qui contient  $\eta$  et comme ces orbites sont ouvertes dans leur adhérence, elles coïncident). Donc l'espace tangent en  $\eta$  à  $\mathbf{A}.\eta$  (qui est  $(ad\mathfrak{a})(\eta)$ ) contient  $\mathbf{k}\eta$  et donc il existe  $h \in \mathfrak{a}$  tel que  $(adh)(\eta) = -\eta$ .

Très peu de choses sont connues sur la structure de  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ . En particulier on ne sait pas quand  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  est équidimensionnelle (cela a été démontré pour tout centralisateur  $\mathfrak{a}$  en type  $A$  dans [53, Thm. 5.4]). On ne sait pas non plus quand, pour  $\mathfrak{a}$  algébrique,  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  possède un nombre fini de  $\mathbf{A}$ -orbites (cela semble assez rare).

## 2.9

D'après [40, 1.7],  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})_{reg}$  est vide quand  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_\Lambda$  (la troncation canonique du Borel  $\mathfrak{b}$ ) dans  $\mathfrak{g}$  simple de type  $B$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  et  $G$  (voir aussi [36, 13.3]). Donc d'après 2.2 aucune paire adaptée pour  $\mathfrak{b}_\Lambda$  ne peut exister dans ces cas. Par contre des sections de Weierstrass  $\eta + V$  ont été construites dans [36, Thm. 9.4] pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  dans  $\mathfrak{b}_\Lambda^*$  lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$ ,  $B_{2m+1}$ ,  $D$ ,  $E$  et  $G$ . Ce sont des sections de Weierstrass au sens algébrique du terme mais d'après [F8, 10.12] également au sens géométrique du terme.

D'ailleurs, en dehors du type  $A$ , la section de Weierstrass  $\eta + V$  obtenue alors rencontre un sous-ensemble ouvert dense d'orbites régulières, même si le  $\eta$  de la section n'est pas régulier. Remarquons qu'en type  $A$ , la section de Weierstrass  $\eta + V$  obtenue provient d'une paire adaptée  $(h, \eta)$  (une telle paire adaptée existe d'après 2.7 et cette section de Weierstrass est construite comme dans 2.4) et donc dans ce cas d'après 2.4 toute  $\mathbf{A}$ -orbite rencontrée par  $\eta + V$  est régulière mais toute  $\mathbf{A}$ -orbite régulière n'est pas forcément rencontrée par  $\eta + V$ .

## 2.10

D'après [36, 11.4] il n'y a pas de section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  dans  $\mathfrak{b}_\Lambda^*$  lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $C_2$ .

## 3 Construction de sections de Weierstrass.

On vient de voir ci-dessus qu'il y a plus de chance de trouver des sections de Weierstrass  $\eta + V$  que des paires adaptées, car pour les premières la régularité de  $\eta$  n'est pas exigée. Cependant ces sections de Weierstrass sont loin d'être faciles à construire en général.

Une approche possible a fonctionné dans presque tous les cas d'algèbres de Lie simples pour le Borel tronqué  $\mathfrak{b}_\Lambda$  (en identifiant  $\mathfrak{b}_\Lambda^*$  avec une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  grâce à la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ ) : elle consiste à décrire le  $\eta \in \mathfrak{b}_\Lambda^*$  d'une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  dans  $\mathfrak{b}_\Lambda^*$  comme la restriction à  $\mathfrak{b}_\Lambda$  d'un élément  $\eta_0$  de  $\mathfrak{g}$  (isomorphe à  $\mathfrak{g}^*$ ) régulier nilpotent (c'est-à-dire dans  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{reg}$ ). Cette méthode a permis de construire des

sections de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  dans  $\mathfrak{b}_\Lambda^*$  dans toute algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  de type  $A, B_{2m+1}, D, E$  et  $G$  (voir [36, Thm. 9.4]) même lorsqu'aucune paire adaptée n'existe (en dehors du type  $A$ ). Dans cette construction, un élément particulier du groupe de Weyl associé à  $\mathfrak{g}$  joue un rôle prépondérant : c'est celui qui, par conjugaison, permet de passer de l'élément régulier nilpotent standard  $\sum_{\alpha \in \pi} x_{-\alpha}$  de  $\mathfrak{g}$  à l'élément régulier nilpotent  $\eta_0$  de  $\mathfrak{g}$ .

### 3.1 Exemple de section de Weierstrass (type $G_2$ pour le Borel tronqué).

Supposons  $\mathfrak{g}$  simple de type  $G_2$ . Dans ce cas on a vu (2.9) qu'il ne peut pas exister de paire adaptée pour  $\mathfrak{b}_\Lambda = \mathfrak{n}$  car  $\mathcal{N}(\mathfrak{n})_{reg}$  est vide. On peut d'ailleurs retrouver directement ce résultat car ici l'ensemble  $\mathfrak{n}_{reg}^*$  est constitué des éléments de  $\mathfrak{n}^*$  ne s'annulant pas sur  $x_\beta$  (où  $\beta$  est la plus grande racine de  $\mathfrak{g}$ ) et  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  est l'algèbre de polynômes engendrée par  $x_\beta$  et par  $x_{\alpha_1} x_\beta + x_{2\alpha_1 + \alpha_2}^2 + x_{\alpha_1 + \alpha_2} x_{3\alpha_1 + \alpha_2}$  (pour un bon choix des vecteurs radiciels) où  $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  avec  $\alpha_1$  la racine courte de  $\mathfrak{g}$ . Donc la variété des zéros dans  $\mathfrak{n}^*$  de l'idéal engendré par les générateurs de degré strictement positif de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  a une intersection vide avec  $\mathfrak{n}_{reg}^*$ . En revanche, suivant le procédé expliqué en [36, 9.3], on construit une section de Weierstrass ([36, Ex 3 de 11.4])  $\eta + V$  pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{n})$  dans  $\mathfrak{n}^*$  avec  $\eta = x_{-(3\alpha_1 + \alpha_2)}$  et  $V = \mathbf{k}x_{-\beta} + \mathbf{k}x_{-(\alpha_1 + \alpha_2)}$  (en identifiant  $\mathfrak{n}^*$  avec  $\mathfrak{n}^-$  par la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ ). D'après [36, Ex. 3 de 11.4],  $\eta + V$  est une section de Weierstrass au sens algébrique et d'après [F8, 10.12] c'est aussi une section de Weierstrass au sens géométrique du terme, ce que l'on peut aussi vérifier dans cet exemple directement.

En effet on vérifie que, pour tout  $y \in \eta + V$ ,  $(ad \mathfrak{n})(y) \cap V = \{0\}$ , c'est-à-dire que l'orbite  $\mathbf{N}.y$  coupe  $\eta + V$  transversalement. De plus, comme  $\eta + V$  est une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  au sens algébrique, les fonctions de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  séparent les points de  $\eta + V$  et donc la première partie de la condition *ii*) de la définition géométrique d'une section de Weierstrass est satisfaite. Enfin d'après [36, 7.9] puisque  $\mathbf{S}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  n'a pas de semi-invariants propres,  $\mathbf{N}.(\eta + V)$  est dense dans  $\mathfrak{n}^*$ , donc la condition *i*) de la définition géométrique d'une section de Weierstrass est également satisfaite, et on en déduit aussi que  $\mathbf{N}.(\eta + V)_{reg}$  est dense dans  $\mathfrak{n}_{reg}^*$ . (Il a même été démontré dans [36, Ex. 3 de 11.4] qu'ici  $\mathbf{N}.(\eta + V)_{reg} = \mathfrak{n}_{reg}^*$ ). Par conséquent  $\eta + V$  est également une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{b}_\Lambda)$  au sens géométrique du terme.

Enfin il a été observé dans [36, Ex 3 de 11.4] que  $\mathbf{N}.(\eta + V)$  n'est pas ouvert dans  $\mathfrak{n}^*$ .

### 3.2

Avec l'espoir de pouvoir appliquer une méthode analogue à celle expliquée dans [36, 9.3] à un biparabolique tronqué quelconque de  $\mathfrak{g}$ , on a donc montré dans [F7] et [F8] que le  $\eta$  des paires adaptées construites dans [35] pour tout biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$  est la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . On espère pouvoir ensuite trouver une recette pour un élément du groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}$  ayant un sens dans les autres types d'algèbres de Lie simples et qui donnerait, par restriction à un biparabolique tronqué, le  $\eta$  d'une section de Weierstrass (et également l'espace vectoriel  $V$ ).

Remarquons simplement que si  $\eta$  est le second élément d'une paire adaptée pour un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  de  $\mathfrak{g}$ , alors en identifiant  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  à une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  grâce à la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , on peut montrer comme dans 2.2 que  $\eta \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$  mais bien sûr  $\eta$  n'est en général pas régulier dans  $\mathfrak{g}$  (sauf si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ ).

## B Recherche d'éléments réguliers nilpotents de $\mathfrak{g}$ via les paires adaptées, en type A.

### 1 Le cas de l'indice un.

On suppose ici que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est simple et on considère une sous-algèbre biparabolique propre  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  telle que sa troncation canonique  $\mathfrak{q}_\Lambda$  soit d'indice un. Cela entraîne (voir Par. 2 de la Sect. B du Chap. III) que  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_{n-1}$  ( $n \geq 3$ ) et que  $\mathfrak{q}$  a une sous-algèbre de Levi formée de deux blocs de matrices de tailles copremières. Autrement dit le système  $\pi''$  de racines simples associé à  $\mathfrak{q}$  vérifie  $\pi'' = \pi \setminus \{\alpha_p\}$  avec  $p$  et  $n$  premiers entre eux et le semi-centre  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en une indéterminée  $f$ .

Dans ce cas, une paire adaptée a été construite dans [33] pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$ . Or ici  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est une sous-variété fermée irréductible de codimension un de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  puisque c'est la variété des zéros dans  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  de  $f$ , qui est un polynôme de  $\mathbf{S}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  irréductible (puisque  $\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathfrak{q})$  est factorielle). Donc il existe une unique classe d'équivalence de paires adaptées pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  dans ce cas (voir 2.3 de la Sec. A).

#### 1.1

Voici comment on peut décrire un représentant de cette classe.

L'ensemble des racines simples  $\pi$  de  $\mathfrak{g}$  est tel que  $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$  et l'ensemble  $\pi'' = \pi \setminus \{\alpha_p\}$  avec  $p$  et  $n$  premiers entre eux correspond au parabolique  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{\pi''}^- = \mathfrak{n}_{\pi''} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ . On note  $\mathcal{K}$ , resp.  $\mathcal{K}''$ , la cascade de Kostant (de racines positives fortement orthogonales) associée à  $\pi$ , resp.  $\pi''$ . Pour  $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  on a  $\mathcal{K} = \{\beta_k = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k}\}_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}$ . On pose alors  $S = (\mathcal{K} \cup (-\mathcal{K}'')) \setminus \{\alpha\}$  où  $\alpha$  est l'unique racine de  $\pi \cup (-\pi)$  qui est aussi dans  $\mathcal{K} \cup (-\mathcal{K}'')$ . De plus ici  $\mathfrak{h}_\Lambda = \mathfrak{h}' = [\mathfrak{n}_{\pi''}, \mathfrak{n}_{\pi''}^-] \cap \mathfrak{h}$  et donc  $\mathfrak{q}_\Lambda = (\mathfrak{p}_{\pi''}^-)'$ . Par la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  s'identifie alors avec  $\mathfrak{q}_\Lambda^- = (\mathfrak{p}_{\pi''}^-)' = \mathfrak{n}_{\pi''}^- \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}$ .

Un des résultats principaux de [33] est que

$$(*) \quad \eta = \sum_{\beta \in S} x_\beta$$

est régulier dans  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  et qu'il existe  $h \in \mathfrak{h}_\Lambda = \mathfrak{h}'$  tel que  $(adh)(\eta) = -\eta$ . Ainsi  $(h, \eta)$  est une paire adaptée pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$ . De plus  $S|_{\mathfrak{h}_\Lambda}$  est une base de  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$  et donc un tel  $h$  est unique (pour  $\eta$  fixé).

L'écriture d'un  $\eta$  d'une paire adaptée pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  sous la forme (\*) avec  $S|_{\mathfrak{h}_\Lambda}$  qui est une base de  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$  sera appelée forme minimale de  $\eta$ . Si on conjugue un élément  $\eta$  écrit sous forme minimale par un élément du groupe  $\mathbf{Q}_\Lambda$ , on obtient encore un second élément d'une

paire adaptée mais en général il n'est plus écrit sous forme minimale. (Lorsque  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est polynomial, on a montré dans [F8, 10.1] qu'en fait tout second élément  $\eta$  d'une paire adaptée pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est de la forme (\*) avec  $S|_{\mathfrak{h}_\Lambda}$  engendrant seulement  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$ .)

Enfin  $V = \mathbf{k}x_\alpha$  est un supplémentaire *adh*-stable de  $(\text{ad } \mathfrak{q}_\Lambda)(\eta)$  dans  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ . Donc d'après 2.4 de la Sec. A,  $\mathscr{W} = \eta + \mathbf{k}x_\alpha$  est une section de Weierstrass pour  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  dans  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ .

## 1.2

Nous avons montré dans [F7, Cor. 3.12] que  $\eta \in \mathfrak{q}_\Lambda^*$  comme ci-dessus est la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g}^*$  (isomorphe à  $\mathfrak{g}$  par la forme de Killing), c'est-à-dire d'un élément de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{\text{reg}}$ . Plus généralement, on a même pu montrer le théorème suivant ([F8, Thm. 13.3]).

**Théorème .** *Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre (bi)parabolique propre de l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  telle que sa troncation canonique  $\mathfrak{q}_\Lambda$  soit d'indice un. Alors toute  $\mathbf{Q}_\Lambda$ -orbite régulière de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  est l'image, par restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , d'une  $\mathbf{Q}_\Lambda$ -orbite dans  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{\text{reg}}$ .*

*Idée de démonstration.*

Pour tout  $c \in \mathbf{k}$ , on construit dans [F8, 13.2] un élément  $y_c + cx_\alpha$  régulier nilpotent de  $\mathfrak{g}$  tel que sa restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  soit égale à  $\eta + cx_\alpha$ . Ainsi ([F8, Lemme 13.2]) on obtient qu'il existe une sous-variété de dimension un de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{\text{reg}}$  qui s'envoie bijectivement par l'application de restriction  $\rho : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{q}_\Lambda^*$  sur la section de Weierstrass  $\mathscr{W} = \eta + \mathbf{k}x_\alpha$ . Si  $p \neq 1$  cette sous-variété est irréductible. Sinon c'est la réunion d'une sous-variété irréductible de dimension un et d'un point. Comme  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est irréductible, le [32, Cor. 8.7] implique que tout élément régulier de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  appartient à la  $\mathbf{Q}_\Lambda$ -orbite d'un élément de la section de Weierstrass  $\mathscr{W}$ , cet élément étant lui-même l'image par  $\rho$  d'un élément de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{\text{reg}}$ . Ceci permet de conclure puisque  $\rho$  est un morphisme de  $\mathbf{Q}_\Lambda$ -modules.  $\square$

## 1.3

Considérons la projectivisation  $\mathbb{P}(\mathcal{N}(\mathfrak{g}))$  de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  et celle  $\mathbb{P}(\mathfrak{q}_\Lambda^*)$  de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ . L'application de restriction  $\rho : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{q}_\Lambda^*$  induit l'application projective  $\mathbb{P}\rho : \mathbb{P}(\mathcal{N}(\mathfrak{g})) \setminus \mathbb{P}(\ker(\rho)) \cap \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{q}_\Lambda^*)$ . Puisque l'image par la projection  $\mathbb{P}\rho$  d'un fermé est un fermé ([58, Thm. 3, 5.2, Chap. I]), que  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  est l'adhérence de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{\text{reg}}$ , et que  $\rho(\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{\text{reg}})$  est égale à  $(\mathfrak{q}_\Lambda^*)_{\text{reg}}$  d'après le Théorème ci-dessus, et que  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  est conique (c'est-à-dire que, pour tout  $c \in \mathbf{k}$  et tout  $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ ,  $cx \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ ), on en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire .** ([F8, Cor. 13.4]).

*L'image de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  par l'application  $\rho$  est  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ .*

## 1.4

Le théorème et le corollaire ci-dessus reposent essentiellement sur l'irréductibilité de la variété  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ , quand  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est d'indice un. En général l'irréductibilité de  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  n'est pas forcément assurée, lorsque  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est d'indice autre que un, même en type A. D'après 2.3 de la Sec. A,  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est non irréductible dès que l'on peut trouver plus d'une seule

classe d'équivalence de paires adaptées pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  (si  $\mathbf{Y}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est polynomial). D'autre part si  $(h, \eta)$  et  $(h', \eta')$  sont deux paires adaptées pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  avec  $h, h' \in \mathfrak{h}_\Lambda$ , alors d'après [F8, 10.9, 10.10], elles sont équivalentes si, et seulement si, il existe  $w \in W_M$  tel que  $h = wh'$  (où  $W_M$  est le groupe de Weyl du facteur de Levi de  $\mathfrak{q}_\Lambda$ ). Mais il est loin d'être évident de pouvoir déterminer, même avec ce critère (ou un autre plus fin encore - [35, 8.9]) quelles sont les paires adaptées construites dans [35] en type  $A$  qui sont équivalentes.

## 2 Généralisation en type $A$ .

On considère  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  une sous-algèbre biparabolique de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  ( $n \geq 2$ ) où  $\pi', \pi'' \subset \pi$  vérifient l'hypothèse standard  $\pi' \cup \pi'' = \pi$ . On suppose également que  $\pi' \cap \pi'' \subsetneq \pi$ , sinon il n'y a rien à faire car  $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ .

D'après [35] il existe une (et même plusieurs) paires adaptées  $(h, \eta)$  pour la troncation canonique  $\mathfrak{q}_\Lambda$  de  $\mathfrak{q}$ .

Dans [F8] on a montré que, pour toute paire adaptée  $(h, \eta)$  pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  construite dans [35], l'élément  $\eta$  est la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g}^*$  (voir [F8, Thm. 12.1]).

**Théorème.** *Soit  $(h, \eta) \in \mathfrak{h}_\Lambda \times \mathfrak{q}_\Lambda^*$  une des paires adaptées construites dans [35] pour un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  quelconque de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$ . Alors  $\eta$  est la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ .*

Je vais tenter d'expliquer dans les grandes lignes la démonstration de ce théorème (qui prend presque cent pages!).

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur une utilisation judicieuse de méandres.

Un méandre est une réunion d'arcs que l'on peut mettre bout à bout.

On construit d'abord des méandres dont les arcs correspondent aux cascades de Kostant associées à  $\pi'$  et à  $\pi''$  caractérisant le biparabolique  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$ . On doit ensuite, suivant des règles très précises, "modifier" ces méandres pour en déduire le  $\eta$  d'une paire adaptée pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$ .

Enfin il faut modifier encore ces méandres (plus précisément les "rectifier") pour pouvoir construire un nouveau système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  permettant d'obtenir l'élément régulier nilpotent  $y$  de  $\mathfrak{g}$  cherché (dont la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta$ ).

Tout le problème réside donc en ce que la restriction de  $y$  à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  soit égale à  $\eta$ .

Cela demande de construire un système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  vérifiant des propriétés bien particulières, notamment que ce système fasse apparaître "suffisamment" d'éléments dans le noyau de l'application de restriction  $\rho : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{q}_\Lambda^*$ .

En identifiant  $\mathfrak{g}^*$  avec  $\mathfrak{g}$  grâce à la forme de Killing, on voit que ce noyau est engendré par les vecteurs  $x_\alpha$  avec  $\alpha \in \tilde{K} = \Delta \setminus R$  où  $R$  est l'ensemble des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ .

Le nouveau système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  doit avoir "suffisamment" de racines dans  $\tilde{K}$  en un sens que je préciserai plus loin.

Une fois les méandres modifiés rectifiés, il faudra encore les "recoller" entre eux et relier la "chaîne" obtenue aux éventuels points (complètement) fixes.

## 2.1 Construction d'un $\eta$ d'une paire adaptée grâce aux méandres.

D'après [35], il existe un sous-ensemble  $S$  de l'ensemble des racines  $R \subset \Delta$  de  $\mathfrak{q}^*$  tel que  $\eta = \sum_{\beta \in S} x_\beta$  soit le second élément d'une paire adaptée pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$ . De plus  $S|_{\mathfrak{h}_\Lambda}$  est une base de  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$  (rappelons qu'une telle présentation de  $\eta$  est dite minimale).

La construction de ce  $\eta$  et notamment de l'ensemble  $S$  ci-dessus peut s'expliquer grâce à des méandres dits modifiés ([F8]).

La modification se fait sur les arcs (dits entiers) représentant les cascades de Kostant associées à  $\pi'$  et à  $\pi''$ . En fait certains arcs sont laissés tels quels et d'autres (entourant des arcs dits demi-entiers et marqués) sont modifiés.

Je vais donc d'abord expliquer ce que sont les arcs entiers, les arcs demi-entiers, puis le marquage de ces arcs demi-entiers et la modification des arcs entiers qui les entourent.

**2.1.1 Les arcs entiers et demi-entiers.** On dessine  $n$  points espacés de la même façon sur une ligne horizontale  $L$  (numérotés de 1 à  $n$ ) qui représentent les vecteurs  $\varepsilon_s$  ( $1 \leq s \leq n$ ) de la base duale de la base formée des matrices diagonales à  $n$  lignes et  $n$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbf{k}$ . On note encore  $\varepsilon_s$  leur restriction à  $\mathfrak{h}$ . Rappelons qu'alors  $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$  avec  $\alpha_s = \varepsilon_s - \varepsilon_{s+1}$  pour tout  $1 \leq s \leq n-1$ . Ainsi la racine simple  $\alpha_s$  peut-elle être représentée par le point demi-entier  $s + 1/2$  sur la ligne horizontale  $L$  et l'ensemble  $\pi$  peut être représenté par le sous-ensemble connexe d'entiers  $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$  de  $\mathbb{N}$  ou par l'ensemble des demi-entiers  $\{s + 1/2, 1 \leq s \leq n-1\}$ .

Chaque sous-ensemble  $\pi'$ , resp.  $\pi''$ , peut être représenté par la réunion de ses composantes connexes (entières) dans  $[1, n]$ .

Par exemple, pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbf{k})$ ,  $\pi$  peut être représenté par l'ensemble connexe  $[1, 4] = \{1, 2, 3, 4\}$  et si  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2\}$ ,  $\pi'$  peut être représenté par  $[1, 2] \cup [3, 4]$  et  $\pi''$  par  $\{1\} \cup [2, 3] \cup \{4\}$ .

Rappelons que la cascade de Kostant  $\mathcal{K}$  associée à  $\pi$  vérifie  $\mathcal{K} = \{\beta_s = \varepsilon_s - \varepsilon_{n+1-s} \mid 1 \leq s \leq [n/2]\}$  et que l'on note  $\mathcal{K}'$ , resp.  $\mathcal{K}''$ , la cascade de Kostant associée à  $\pi'$ , resp. à  $\pi''$ .

Tout élément  $\varepsilon_u - \varepsilon_v$  ( $u \neq v$ ) de  $\mathcal{K}'$ , resp. de  $-\mathcal{K}''$  est représenté par un arc joignant le point  $u$  de  $L$  au point  $v$  et dessiné au-dessus, resp. en dessous, de  $L$ . Cet arc est orienté par une flèche pointant de la gauche vers la droite, resp. de la droite vers la gauche, puisqu'il représente une racine positive, resp. négative. On dira que c'est un arc entier non modifié. Remarquons que nous dessinons ici les poids des éléments non pas de  $\mathfrak{q}$  mais du biparabolique opposé  $\mathfrak{q}^- = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}^- = \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$  puisqu'il nous faudra ensuite représenter les poids de l'élément  $\eta \in \mathfrak{q}^*$  et que  $\mathfrak{q}^*$  est isomorphe à  $\mathfrak{q}^-$  grâce à la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ .

Un arc sera dit demi-entier s'il joint au-dessus, resp. en dessous, de  $L$  deux points demi-entiers de  $L$ . Si  $\pi' = \pi$  la cascade de Kostant  $\mathcal{K}$  correspond à l'involution  $\tilde{\kappa}$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $\tilde{\kappa}(s) = n + 1 - s$  et l'involution  $j$  de  $\pi$  est donnée par  $j(\alpha_s) = \alpha_{\tilde{\kappa}(s)-1}$  pour tout  $1 \leq s \leq n-1$ . Ainsi chaque arc entier non modifié (correspondant à  $\varepsilon_s - \varepsilon_{\tilde{\kappa}(s)} \in \mathcal{K}$ ) dessiné au-dessus de  $L$  est juste au-dessus de l'arc demi-entier joignant au-dessus de  $L$   $\alpha_s$  à  $j(\alpha_s)$  (représentés par des points demi-entiers sur  $L$ ). Il en est de même de

chaque arc entier non modifié en dessous de  $L$  (qui se trouve juste en dessous de l'arc demi-entier correspondant).

On devra ensuite “marquer” certains de ces arcs demi-entiers (suivant une règle bien précise que j'explique en 2.1.2) pour modifier (suivant une règle précise également expliquée en 2.1.3) les arcs entiers qui les entourent. Cependant plusieurs choix de marquage puis de modification sont possibles, pour un biparabolique donné, ce qui nous donne plusieurs seconds éléments  $\eta$  de paires adaptées possibles (voir les exemples de 2.1.5).

Un arc (entier, resp. demi-entier) sera dit trivial s'il joint un point (entier, resp. demi-entier de  $L$ ) à lui-même.

**2.1.2 Marquage des arcs demi-entiers.** Rappelons que, puisque l'on représente ici l'ensemble  $R$  des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$  ( $R = (\mathbb{N}\pi' \cup (-\mathbb{N}\pi'')) \cap \Delta$ ) on notera  $i$  l'involution de  $\pi$  correspondant à  $\pi''$  et  $j$  celle correspondant à  $\pi'$ . Ces involutions  $i$  et  $j$  ont été définies au 1.3 de la Sec. D du Chap. IV, mais avec interversion des rôles de  $i$  et  $j$ . (En particulier si  $w_{\pi'}$ , resp.  $w_{\pi''}$ , désigne le plus long élément du groupe de Weyl associé à  $\pi'$ , resp.  $\pi''$ , on a pour tout  $\alpha \in \pi''$ ,  $i(\alpha) = -w_{\pi''}(\alpha)$  et pour tout  $\alpha \in \pi'$ ,  $j(\alpha) = -w_{\pi'}(\alpha)$  et  $i$ , resp.  $j$ , est étendue aux racines de  $\pi \setminus \pi''$ , resp.  $\pi \setminus \pi'$ , de la façon qui a été expliquée au 1.3 de la Sec. D du Chap. IV. Cela fait ainsi apparaître éventuellement des racines fictives -notées  $\tilde{\alpha}_s$  - de  $\pi$  et on note  $\tilde{\pi}$  la réunion de  $\pi$  et de ces éventuelles racines fictives).

Toute racine simple  $\alpha_s$  sera représentée par le point demi-entier  $s + 1/2$  sur la ligne horizontale  $L$  et toute racine fictive  $\tilde{\alpha}_s$  par un point demi-entier (de coordonnée disons  $\tilde{s} > n$  sur  $L$ ).

Si  $j(\alpha_s) = \alpha_u$  ou  $j(\alpha_s) = \tilde{\alpha}_u$ , resp.  $i(\alpha_s) = \alpha_v$  ou  $i(\alpha_s) = \tilde{\alpha}_v$ , un arc (dit demi-entier) au-dessus, resp. en dessous, de  $L$  joint  $s + 1/2$  à  $u + 1/2$ , ou à  $\tilde{u}$ , resp.  $s + 1/2$  à  $v + 1/2$ , ou à  $\tilde{v}$  et est non orienté. Cet arc demi-entier sera dit *fictif* s'il joint  $s + 1/2$  à  $u + 1/2$ , ou à  $\tilde{u}$ , resp.  $s + 1/2$  à  $v + 1/2$ , ou à  $\tilde{v}$ , avec  $\alpha_s \notin \pi'$ , resp.  $\alpha_s \notin \pi''$ . (Voir les Figures 4, 5, 6 et 7 de 2.1.5 où les arcs demi-entiers fictifs ont été représentés par des pointillés verts).

Soit  $\alpha \in \pi$ . On note  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  la  $\langle i, j \rangle$ -orbite de  $\alpha$ . On peut considérer  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  comme une réunion d'arcs demi-entiers “adjacents” (c'est-à-dire mis bout à bout).

En fait on doit marquer un, et un seul, arc (trivial ou non, mais toujours non fictif) de chaque  $\langle i, j \rangle$ -orbite, selon la règle que j'explique ci-dessous.

Supposons que la  $\langle i, j \rangle$ -orbite  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  ( $\alpha \in \pi$ ) ait au moins un point fixe (c'est-à-dire une racine fixée par  $i$  ou par  $j$ ). Alors c'est aussi une  $\langle ij \rangle$ -orbite et elle possède un deuxième point fixe (quitte à ce que ce soit le même si  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  est réduite à un point). D'après [30, 4.3, 4.4, 4.5],  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  est entièrement incluse dans  $\pi$ . De plus ou bien cette orbite est entièrement incluse dans  $\pi' \cap \pi''$  ou bien son intersection avec  $\pi \setminus (\pi' \cap \pi'')$  est un singleton.

Supposons que l'on soit dans ce dernier cas et notons  $\alpha' \in \tilde{\Gamma}_\alpha \cap (\pi \setminus (\pi' \cap \pi''))$ . Si  $\alpha' \in \pi' \setminus (\pi' \cap \pi'')$ , on a  $i(\alpha') = \alpha'$ , sinon  $j(\alpha') = \alpha'$  et l'arc demi-entier trivial correspondant, en dessous de  $L$ , resp. au-dessus de  $L$ , est fictif. On doit alors marquer l'autre arc demi-entier trivial non fictif au-dessus ou en dessous de  $L$  correspondant à l'autre point fixe de  $\tilde{\Gamma}_\alpha$ . (Voir les Figures 4, 5 et 6 de 2.1.5 pour  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_4} = \{\alpha_4\}$ . Ici l'arc

demi-entier trivial en dessous de  $L$  joignant  $4 + 1/2$  à lui-même est fictif et l'on doit nécessairement marquer l'arc demi-entier trivial au-dessus de  $L$ , qui est non fictif.)

Si  $\tilde{\Gamma}_\alpha \subset \pi' \cap \pi''$ , on doit marquer au choix l'un des deux arcs triviaux (ils sont tous les deux non fictifs). (Voir la Figure 7 de 2.1.5 pour  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_1} = \{\alpha_1, \alpha_7\}$  ou pour  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_4} = \{\alpha_4\}$ . On a le choix de marquer l'un ou l'autre des deux arcs triviaux de chacune de ces  $\langle ij \rangle$ -orbites.)

Supposons que  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  n'ait pas de point fixe. Dans ce cas d'après [30, 4.5],  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  possède au plus une racine fictive.

Lorsqu'elle possède une racine fictive  $\tilde{\alpha}$ , il existe deux racines distinctes  $\alpha'$  et  $\alpha''$  de  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  telles que  $i(\alpha') = j(\alpha'') = \tilde{\alpha}$ . Alors on marque un et un seul parmi n'importe quel arc demi-entier non fictif au-dessus ou en dessous de  $L$  de  $\tilde{\Gamma}_\alpha$ , ce qui est toujours possible. (Voir les Figures 4, 5 et 6 de 2.1.5 pour  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_1} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tilde{\alpha}\}$  où  $\tilde{\alpha}$  est une racine fictive. Alors  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_1}$  est une  $\langle i, j \rangle$ -orbite qui n'est pas une  $\langle ij \rangle$ -orbite. On a le choix de marquer l'arc demi-entier non fictif joignant  $1 + 1/2$  à  $2 + 1/2$  au-dessus de  $L$ , ou l'arc demi-entier non fictif joignant  $2 + 1/2$  à  $3 + 1/2$  en dessous de  $L$ ).

Si  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  n'a pas de racine fictive, on marque n'importe quel arc demi-entier non fictif au-dessus ou en dessous de  $L$  de  $\tilde{\Gamma}_\alpha$ . (Voir la Figure 7 de 2.1.5 pour  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_2} = \{\alpha_2, \alpha_6\}$  et  $\tilde{\Gamma}_{\alpha_3} = \{\alpha_3, \alpha_5\}$ . Pour la première  $\langle i, j \rangle$ -orbite, on doit nécessairement marquer l'arc demi-entier non fictif au-dessus de  $L$  joignant  $2 + 1/2$  à  $6 + 1/2$  puisque l'arc demi-entier en dessous de  $L$  est fictif. Pour la deuxième  $\langle i, j \rangle$ -orbite, on a le choix de marquer l'arc demi-entier non fictif au-dessus, ou en dessous de  $L$  joignant  $3 + 1/2$  à  $5 + 1/2$ ).

Une fois le marquage des arcs demi-entiers effectué, on obtient éventuellement, dans une même composante connexe de  $\pi'$ , resp.  $\pi''$ , un nombre maximum d'arcs demi-entiers marqués consécutifs au-dessus, resp. en dessous, de  $L$ . Les arcs entiers, qui "entourent" ces arcs demi-entiers consécutifs marqués, au dessus, resp. en dessous, de  $L$ , doivent être alors tous modifiés de la façon suivante.

**2.1.3 Modification des arcs entiers.** Je vais expliquer la modification seulement pour les arcs entiers au-dessus de  $L$ . Une méthode analogue est valable pour les arcs entiers en dessous de  $L$ .

On suppose  $\pi' \neq \emptyset$  et on fixe une composante connexe  $\mathcal{C}$  de  $\pi'$ . Supposons pour simplifier l'explication que  $\mathcal{C} = \{1 + 1/2, \dots, s - 1 + 1/2\}$  soit représentée par le sous-ensemble connexe  $[1, s]$  de  $\mathbb{N}$  (avec  $2 \leq s \leq n$ ). On dira que  $c = \frac{s+1}{2}$  est le centre de  $\mathcal{C}$ .

On représente d'abord tous les arcs entiers non modifiés, y compris l'arc entier non modifié trivial s'il existe, c'est-à-dire, lorsque  $s$  est impair, l'arc trivial joignant  $c$  à lui-même, ayant leurs deux extrémités dans  $[1, s]$  et qui représentent la cascade de Kostant  $\mathcal{H}'$  (c'est-à-dire qui joignent  $u$  à  $s + 1 - u$  pour tout  $1 \leq u \leq [c]$ ,  $u \in \mathbb{N}$ ).

On appellera "arc demi-entier central" l'arc demi-entier joignant  $c - \frac{1}{2}$  à  $c + \frac{1}{2}$  si  $c \in \mathbb{N}$  (c'est-à-dire si  $s$  est impair), ou l'arc demi-entier trivial joignant  $c$  à lui-même si  $c$  n'est pas entier (pour  $s$  pair).

On considère tous les arcs demi-entiers au-dessus de  $L$  dont les deux extrémités (points demi-entiers) appartiennent à  $\mathcal{C}$ . Les arcs demi-entiers peuvent être classés par ordre croissant selon l'ordre donné par leur extrémité se trouvant à droite de  $c$ . Deux arcs

demi-entiers sont dits consécutifs lorsque leurs extrémités à droite de  $c$  sont des demi-entiers dont la différence (en valeur absolue) diffère de un.

On appellera “arête” un méandre avec points fixes et “boucle” un méandre sans point fixe.

Supposons d’abord que parmi le nombre maximum d’arcs demi-entiers consécutifs marqués au dessus de  $L$  ayant leurs deux extrémités dans  $\mathcal{C}$  ne se trouve pas l’arc demi-entier central. Alors on doit modifier tous les arcs entiers au-dessus de  $L$  entourant ces arcs demi-entiers marqués (c’est-à-dire tous les arcs entiers, de celui juste au-dessus du plus grand arc demi-entier marqué jusqu’à celui juste en dessous du plus petit arc demi-entier marqué) de sorte que si on rajoute les arcs entiers non modifiés en dessous de  $L$  passant par ces mêmes points de  $L$ , on obtienne avec les arcs entiers modifiés une seule boucle, chaque arc modifié (nécessairement non trivial) ayant de plus ses extrémités de part et d’autre de  $c$ . (Voir la Figure 7 de 2.1.5 pour la modification des arcs entiers au-dessus de  $L$  joignant 2 à 7 et joignant 3 à 6, c’est-à-dire entourant l’arc demi-entier au-dessus de  $L$  marqué joignant  $2 + 1/2$  à  $6 + 1/2$ . On doit modifier ces arcs entiers de sorte d’obtenir une seule boucle si on rajoute en dessous de  $L$  les arcs entiers non modifiés passant par ces mêmes points).

Supposons ensuite que parmi le nombre maximum d’arcs demi-entiers consécutifs marqués au dessus de  $L$  ayant leurs deux extrémités dans  $\mathcal{C}$  se trouve l’arc demi-entier central. Alors on doit modifier tous les arcs entiers au-dessus de  $L$  entourant tous les arcs demi-entiers marqués (y compris l’arc entier trivial si  $s$  est impair) de sorte que, si on rajoute les arcs entiers non modifiés en dessous de  $L$  passant par ces mêmes points de  $L$ , on obtienne avec les arcs entiers modifiés une seule arête, chaque arc modifié non trivial ayant de plus ses extrémités de part et d’autre de  $c$  (éventuellement l’une des extrémités peut valoir  $c$ ).

Lorsque  $s$  est pair, cette modification donne lieu à deux points entiers fixes (et représentés par des arcs triviaux au-dessus de  $L$ ) qui sont de part et d’autre de  $c$ . (Voir les Figures 4, 5 et 6 de 2.1.5 pour la composante connexe  $[4, 5]$  de  $\pi'$ . Ici on modifie l’arc entier au-dessus de  $L$  joignant les points 4 et 5, entourant l’arc demi-entier central marqué. Les points 4 et 5 deviennent des points entiers fixes au-dessus de  $L$  après modification).

Lorsque  $s$  est impair, cette modification fait apparaître un seul point entier fixe (et représenté par un arc trivial au-dessus de  $L$ ) qui n’est pas égal à  $c$ . (Voir la Figure 6 de 2.1.5 où l’on a modifié les arcs entiers au-dessus de  $L$  entourant l’arc demi-entier central marqué de la composante connexe  $[1, 3]$  de  $\pi'$ . Après une modification possible, le point 3 devient un point entier fixe. Une autre modification aurait pu consister à relier au-dessus de  $L$  les points entiers 2 et 3 et à laisser fixe au-dessus de  $L$  le point 1).

On pourra consulter [F8, 5.1] pour plus de détails.

Pour les autres arcs entiers (ayant leurs deux extrémités dans  $[1, s]$  et qui n’entourent pas des arcs demi-entiers consécutifs marqués), il n’y a pas de modification. (Voir les Figures 4 et 5 de 2.1.5 pour la composante connexe  $[1, 3]$  de  $\pi'$  où les arcs entiers au-dessus de  $L$  n’entourent pas d’arc demi-entier marqué. On les laisse donc tels quels).

Enfin pour les singletons éventuels (constitués de points entiers) représentant  $\pi'$ , un arc entier trivial (au dessus de  $L$ ) doit joindre le point de ce singleton à lui-même et il est

laissé tel quel. (Voir les Figures 4, 5 et 6 de 2.1.5 : ici  $\pi''$  a deux composantes connexes  $\{1\}$  et  $\{5\}$  qui sont des singletons. On doit donc représenter les arcs entiers triviaux en dessous de  $L$  joignant 1 à lui-même et 5 à lui-même).

Tous les arcs entiers laissés tels quels sont dits aussi trivialement modifiés.

Les méandres obtenus après modification (triviale ou non) des arcs entiers sont appelés méandres modifiés.

**2.1.4 Écriture de  $\eta$ .** On pose alors  $\eta = \sum x_\beta$  où  $\beta$  parcourt l'ensemble  $S$  des racines correspondant aux arcs entiers non triviaux des méandres modifiés selon le procédé décrit ci-dessus.

Les seconds éléments  $\eta$  de paires adaptées construites dans [35] peuvent être obtenus grâce à ce procédé, pour certaines modifications particulières (il y a en effet en général plusieurs choix de modifications à faire, pour un marquage donné, et il y a aussi en général plusieurs choix de marquage des arcs demi-entiers). Seuls certains choix conduisent aux  $\eta$  construits dans [35].

Pour les autres modifications, on a vérifié ([F8, 6.2]) que cela donne aussi des éléments  $\eta$  écrits sous forme minimale (c'est-à-dire tels que  $S|_{\mathfrak{h}_\Lambda}$  est une base de  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$ ), mais on ne sait pas si cela donne un élément  $\eta$  régulier dans  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ .

**2.1.5 Exemples de marquages d'arcs demi-entiers et de modifications d'arcs entiers.**

**2.1.5.1 Premier exemple.** On considère ici  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ .

**Représentation des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}^*$ .**

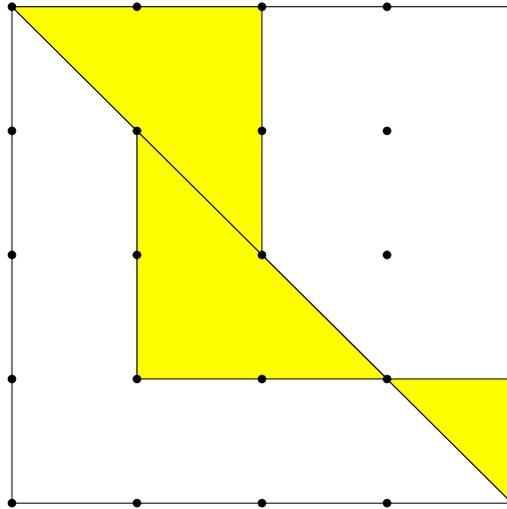


Figure 3.

Cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et de  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ .  
 Représentation de la sous-algèbre biparabolique  $\mathfrak{q}^*$ .

Les points noirs dans la zone en jaune (sauf ceux de la diagonale) représentent les poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}^* \simeq \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}^-$ , c'est-à-dire les éléments de  $R$ . Chaque matrice élémentaire  $x_{i,j}$ , pour  $i \neq j$ , a en effet pour poids la racine  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ .

**Exemple de marquage et de modification.**

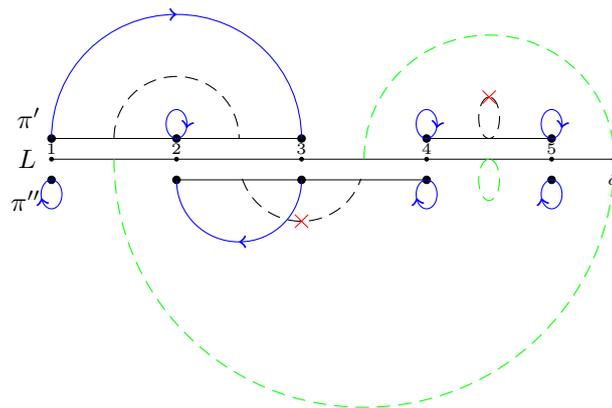


Figure 4.

Cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et de  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ .  
 Un marquage des arcs demi-entiers et une modification possible des arcs entiers.

En pointillés - noirs ou verts - sont représentés les arcs demi-entiers : ceux qui sont fictifs sont en vert. Pour deux d'entre eux, une de leurs extrémités est la racine fictive  $\tilde{\alpha}$  et le troisième est l'arc trivial en dessous de  $L$  qui joint  $\alpha_4$  à lui-même. Les arcs demi-entiers que l'on a choisi de marquer sont indiqués par une croix rouge. Cela conduit à modifier les arcs entiers qui entourent ces arcs demi-entiers marqués. En voici une modification possible. Les arcs entiers obtenus (modifiés trivialement ou non) sont dessinés en bleu. Notons  $x_{ij}$  pour  $x_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ . On obtient ainsi  $\eta = x_{13} + x_{32} \in \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'} \simeq \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}^*$ .

Pour le même choix de marquage des arcs demi-entiers, on peut choisir une autre modification des arcs entiers qui les entourent. Voici ce que l'on obtient dans ce cas.

**Même marquage et autre modification.**

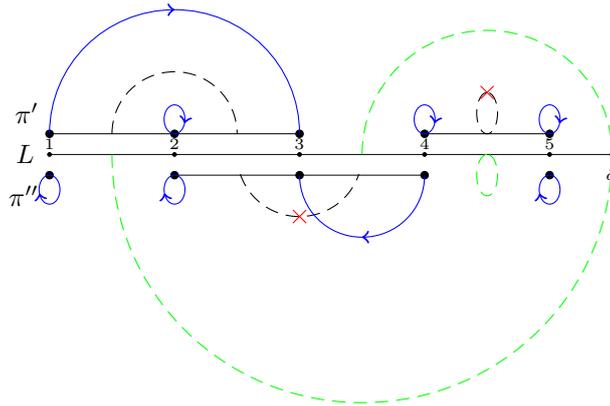


Figure 5.

Cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et de  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ .  
 Le même marquage que ci-dessus pour les arcs demi-entiers et une autre modification des arcs entiers.

Avec les mêmes conventions que précédemment on obtient  $\eta = x_{13} + x_{43} \in \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'} \simeq \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}^*$ .

On peut aussi choisir un autre marquage des arcs demi-entiers, d'où d'autres choix possibles de modifications des arcs entiers qui les entourent.

**Autre marquage et une modification.**

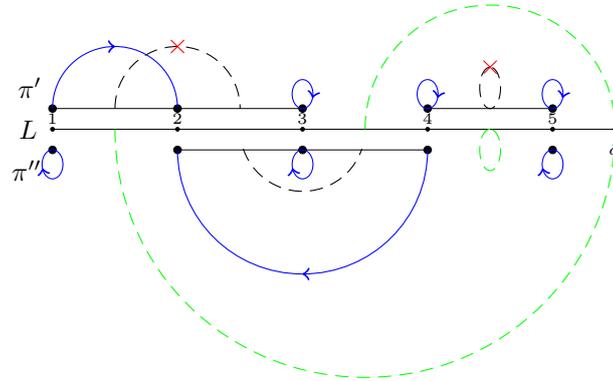


Figure 6.

Cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et de  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ .  
 Un autre marquage des arcs demi-entiers et une modification des arcs entiers.

Avec les mêmes conventions que précédemment, on obtient  $\eta = x_{12} + x_{42} \in \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'} \simeq \mathfrak{q}_{\pi', \pi''}^*$ .

Dans les exemples précédents les arcs demi-entiers marqués consécutifs comprennent tous, pour chaque composante connexe de  $\pi'$  ou de  $\pi''$ , l'arc demi-entier dit central.

Voici un exemple où les arcs demi-entiers marqués consécutifs dans une même composante connexe de  $\pi'$  ou de  $\pi''$  ne comprennent pas l'arc demi-entier central.

**2.1.5.2 Autre exemple.** On considère  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_8(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \pi$  et  $\pi'' = \pi \setminus \{\alpha_2, \alpha_6\}$ .

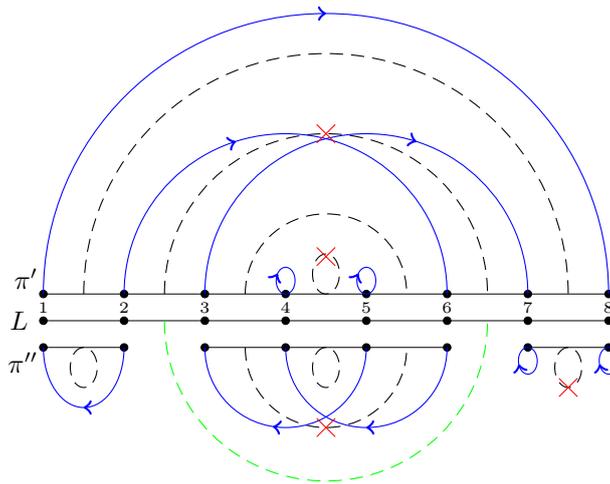


Figure 7.

Cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_8(\mathbf{k})$  et de  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \pi$  et  $\pi'' = \pi \setminus \{\alpha_2, \alpha_6\}$ .

Ici on a dû marquer (toujours avec une croix rouge) au-dessus de  $L$  un arc demi-entier non consécutif de l'arc demi-entier central et on a choisi de marquer l'arc demi-entier central au-dessus de  $L$ . En dessous de  $L$  on a choisi de marquer, dans la composante connexe [3, 6] de  $\pi''$  l'arc demi-entier distinct de l'arc demi-entier central et dans la composante connexe [7, 8] de  $\pi''$  l'arc demi-entier central. Cela conduit à devoir modifier au-dessus de  $L$  les deux arcs entiers entourant l'arc demi-entier (non central) marqué au-dessus de  $L$  ainsi que modifier l'arc entier au-dessus de l'arc demi-entier central (et on le remplace nécessairement par deux points fixes au-dessus de  $L$ ). En dessous de  $L$  on doit modifier, pour la composante connexe [3, 6] de  $\pi''$ , les deux arcs entiers entourant l'arc demi-entier (non central) marqué et, pour la composante connexe [7, 8] de  $\pi''$ , on doit modifier l'arc entier sous l'arc demi-entier central marqué (cela donne deux points fixes sous  $L$ ). Les autres arcs entiers sont modifiés trivialement (c'est-à-dire laissés tels quels). En bleu sont représentés les arcs entiers - modifiés trivialement ou non - obtenus. On obtient ici deux méandres modifiés et  $\eta = x_{53} + x_{37} + x_{64} + x_{26} + x_{21} + x_{18}$ .

## 2.2 Propriétés recherchées pour le nouveau système de racines simples.

Le procédé décrit ci-dessus donne  $\eta = \sum x_\beta$  avec  $\beta$  qui parcourt l'ensemble des racines représentées par les arcs entiers non triviaux obtenus après modification (triviale ou non) des arcs entiers non modifiés provenant des cascades de Kostant de  $\pi'$  et de  $\pi''$ .

Comme  $\eta = \sum_{\beta \in S} x_\beta$  avec  $S|_{\mathfrak{h}_\Lambda}$  une base de  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$ , il s'ensuit que les différents méandres modifiés obtenus ont tous des points fixes (sinon il y aurait une relation de dépendance linéaire entre ces racines) donc sont des arêtes au sens de 2.1.3.

Si  $E$  est une arête non triviale (c'est-à-dire non réduite à un point), on notera  $S_E$  l'ensemble des racines correspondant aux arcs non triviaux de  $E$  (rappelons que les arcs au-dessus de  $L$  sont orientés de gauche à droite et ceux en dessous de  $L$  de droite à gauche) et on posera  $\eta_E = \sum_{\beta \in S_E} x_\beta$ . Alors  $\eta = \sum \eta_E$  où l'on somme sur l'ensemble de toutes les arêtes non triviales.

On cherche à obtenir un nouveau système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  de sorte que la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  de la somme des vecteurs de poids écrite grâce à ce nouveau système donne  $\eta$ . Pour ce faire, on considère d'abord chaque arête séparément que l'on va "rectifier". On verra ensuite qu'on peut recoller toutes ces arêtes rectifiées entre elles puis ajouter encore éventuellement les arêtes triviales, afin d'obtenir le nouveau système de racines simples cherché, vérifiant la condition de restriction demandée.

Fixons une arête non triviale  $E$ . Si on parcourt cette arête  $E$  dans un certain sens, les arcs non triviaux ainsi parcourus (tous dans le même sens) correspondent à des racines  $\beta_i$  qui forment un sous-système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  mais ne sont dans  $S_E$  qu'au signe près (comme on le voit sur les Figures 5 et 6 ci-dessus). Notons  $e$  le nombre de points entiers de  $[1, n]$  par lesquels passe le méandre  $E$  et  $\epsilon_i = \pm 1$  de sorte que  $S_E = \{\epsilon_i \beta_i\}_{1 \leq i \leq e-1}$ .

Rappelons que  $\tilde{K}$  désigne l'ensemble des poids des vecteurs du noyau de l'application de restriction  $\rho : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{q}^*$  (en identifiant  $\mathfrak{g}^*$  avec  $\mathfrak{g}$  par la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ ). Si  $R$  est l'ensemble des poids non nuls des vecteurs de  $\mathfrak{q}^* \simeq \mathfrak{q}^- = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi''}^-$  ( $R = (\mathbb{N}\pi' \cup (-\mathbb{N}\pi'')) \cap \Delta$ ) alors on a  $\tilde{K} = \Delta \setminus R$ .

Remarquons que le radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{q}$  est engendré par les vecteurs de poids dans  $R_* = -R \setminus (-R \cap R)$  (car les poids non nuls des vecteurs du Levi de  $\mathfrak{q}$  sont dans  $-R \cap R = \mathbb{Z}(\pi' \cap \pi'') \cap \Delta$ ) et on a  $R_* \subset \tilde{K}$ . Dans le cas où  $\mathfrak{q}$  est un parabolique, on a même l'égalité  $R_* = \tilde{K}$ , mais sinon ce n'est plus forcément vrai et ce qui complique les choses, c'est qu'en général  $\tilde{K} \cap (-\tilde{K})$  n'est pas forcément vide (alors que  $R_* \cap (-R_*)$  est vide). Par exemple, dans  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbf{k})$ , pour  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2\}$ , on a  $-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \in \tilde{K} \cap (-\tilde{K})$ .

On considère alors un système  $\Pi_E^* = \{\beta_i^*\}_{1 \leq i \leq e-1}$  de racines simples de  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout  $1 \leq i \leq e-1$ ,  $\epsilon_i \beta_i \in \mathbb{N}\Pi_E^*$ ,
- 2) Si  $\beta_i^* \neq \epsilon_i \beta_i$ , alors  $\beta_i^* \in \tilde{K}$

On pose alors

$$y_E = \sum_{1 \leq i \leq e-1} x_{\epsilon_i \beta_i} + \sum_{1 \leq i \leq e-1 | \beta_i^* \neq \epsilon_i \beta_i} x_{\beta_i^*}.$$

Alors la restriction de  $y_E$  à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta_E$  grâce au point 2).

On constate de plus que  $y_E = \sum_{1 \leq i \leq e-1} x_{\beta_i^*} + \sum_{1 \leq i \leq e-1 | \beta_i^* \neq \epsilon_i \beta_i} x_{\epsilon_i \beta_i}$ . Or  $\sum_{1 \leq i \leq e-1} x_{\beta_i^*}$  est un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$  puisque  $\Pi_E^*$  est un système de racines simples de  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$  et donc le point 1) implique ([F7, Lemme 1.9]) que  $y_E$  est, à conjugaison près, un bloc de Jordan de taille  $e$ , donc est régulier nilpotent dans  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$ .

En fait c'est surtout la condition 2) qui est la plus délicate à vérifier, la condition 1) étant vérifiée grâce à une relation d'ordre bien choisie - dépendant bien sûr de la construction des  $\beta_i^*$  - de sorte que la matrice de l'application  $\epsilon_i \beta_i \mapsto \beta_i^*$  soit triangulaire avec des 1 sur la diagonale, voir [F8, 9.7].

### 2.3 Rectification d'une arête.

Considérons donc toujours une arête  $E$  non triviale et parcourons-la d'une extrémité (arbitrairement choisie) à l'autre toujours dans le même sens. Comme on peut encore le constater grâce aux Figures 5 et 6 ci-dessus, c'est aux points de  $L$  qui sont les extrémités d'arcs non triviaux de  $E$  orientés dans des sens opposés que se pose le problème d'obtenir un système de racines simples de  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$ .

On appelle "point tournant" de  $E$  un point entier sur la ligne horizontale  $L$  où les arcs de  $E$  arrivent tous (on dira alors que c'est un puits) ou d'où ils partent tous (on dira que c'est une source). On dira que c'est un "point tournant interne" si de plus ce n'est pas une extrémité de  $E$ . Par exemple, sur la Figure 5, pour la seule arête non triviale  $E$ , il y a un puits (3) qui est aussi un point tournant interne et deux sources (1 et 4) qui sont les extrémités de  $E$  et les racines  $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$  et  $\varepsilon_4 - \varepsilon_3$  ne forment pas un sous-système de racines simples de  $\mathfrak{g}$ . Il va falloir remplacer l'une de ces deux racines  $\epsilon_i \beta_i$  par une autre

$\beta_i^*$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) de sorte d'obtenir un système de racines simples de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{k})$  remplissant les conditions 1) et 2) de 2.2 et donc il va falloir supprimer le point tournant interne 3 ici.

Pour obtenir un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$  dont la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta_E$ , il faut donc supprimer tous les points tournants internes de  $E$ . On “assigne” alors à tout point tournant interne  $t$  de  $E$  l'une des deux racines représentée par un arc de  $E$  dont une extrémité est en  $t$ . Il y a parfois le choix pour assigner telle ou telle racine à  $t$  mais parfois non. Une telle racine assignée à  $t$  sera dite “marquée” (par analogie avec les arcs demi-entiers marqués) et ensuite remplacée par une autre racine qui soit dans  $\tilde{K}$  et telle que l'on obtienne un système de racines simples de type  $A_{e-1}$ . Ainsi si on note  $E^*$  l'arête rectifiée obtenue après suppression de tous les points tournants internes de  $E$  et des racines qui leur sont assignées, et rajout des nouvelles racines  $\beta_i^*$  qui les remplacent, les flèches des arcs de  $E^*$ , lorsqu'on parcourt  $E^*$  d'une extrémité à l'autre dans le même sens, sont-elles toutes dans le même sens :  $E^*$  passe par les mêmes points que  $E$  mais en général par un chemin différent de celui de  $E$ . En parcourant  $E^*$  dans le sens des flèches, on voit que  $E^*$  débute en une source de  $E$  pour aboutir en un puits de  $E$  (qui sont donc aussi resp. source et puits de  $E^*$ ). (Voir aussi [F8, Prop. 11.2]).

Les éléments  $\epsilon_i \beta_i$  de  $S_E$  correspondant à un arc de  $E$  dont une extrémité est un puits ou une source interne sont dits valeurs “frontière”. Ainsi pour obtenir  $\Pi_E^*$  on remplace certaines des valeurs frontière (celles qui sont marquées) et on assigne chaque valeur frontière marquée au point tournant interne correspondant (de sorte d'obtenir une bijection entre les valeurs frontière marquées et les points tournants internes). De plus chaque valeur frontière marquée  $\epsilon_i \beta_i$  doit être remplacée par  $\beta_i^* = \epsilon_i(\beta_i + \iota)$  tel que  $\epsilon_i(\beta_i + \iota) \in \tilde{K}$  pour que la condition 2) de 2.2 soit satisfaite.

Ainsi sur la Figure 5 on doit remplacer (et donc marquer) soit la valeur frontière  $\epsilon_1 \beta_1 = \epsilon_1 - \epsilon_3$  soit la valeur frontière  $\epsilon_2 \beta_2 = \epsilon_4 - \epsilon_3$  (ici  $\epsilon_1 = 1$  et  $\epsilon_2 = -1$  si on choisit de parcourir  $E$  de 1 vers 4).

La condition 2) de 2.2 demande de construire suffisamment de racines dans  $\tilde{K}$ , à partir des racines correspondant aux arcs non triviaux de l'arête  $E$ . En réalité il suffit de construire suffisamment de racines dans  $\tilde{K} \cup (-\tilde{K})$ . De telles racines sont dites “nil” (car les racines nil de  $R$  sont en fait dans l'ensemble des racines du radical nilpotent de  $\mathfrak{q}^*$ ).

On représente alors sur une ligne verticale  $V$  les points entiers de  $E$  et les valeurs  $\epsilon_i \beta_i$  des arcs de  $E$ , dans un sens de parcours de  $E$  choisi arbitrairement.

On appellera “intervalle” la valeur de la racine comprise entre deux points tournants de  $E$  et “intervalle simple” un intervalle compris entre deux points tournants successifs (quand on parcourt  $E$ ). Quand l'intervalle n'est pas simple, on le dira “composé” et “composé impair” lorsqu'il est constitué d'un nombre impair d'intervalles simples.

Comme, en parcourant  $E$ , il y a alternance des sources et des puits, un intervalle composé impair (de même qu'un intervalle simple) a pour extrémités un puits et une source.

Un point crucial dans notre construction de  $E^*$  et de racines nil a été de remarquer qu'une racine est non nil si, et seulement si, elle appartient à l'ensemble des racines du Levi de  $\mathfrak{q}$ , c'est-à-dire à  $R \cap (-R)$ . Autrement dit une racine est non nil si, et seulement si, les extrémités de l'arc entier (modifié, c'est-à-dire sur l'arête  $E$ ) qui la représente

appartiennent à la même “composante double”. Une composante double ou composante de la double partition est par définition l’intersection  $J' \cap J''$  où  $J'$ , resp.  $J''$ , est une composante connexe entière de  $\pi'$  (qui peut éventuellement être un singleton), resp. de  $\pi''$ .

C’est un examen attentif des composantes doubles et notamment des points tournants d’une arête  $E$  appartenant à une telle composante qui a permis essentiellement de conclure, quant au fait que  $\beta_i^* \in \tilde{K}$  lorsque  $\beta_i^* \neq \epsilon_i \beta_i$  (voir [F8, Section 8] pour plus de détails).

Ainsi on a montré dans [F8] qu’on peut prendre pour  $\iota$  un intervalle simple en général mais parfois un intervalle composé impair.

Plus précisément, la recette de marquage des valeurs frontière et de leur remplacement est la suivante.

En un point tournant interne, si aucune des deux valeurs frontière n’est nil, on doit marquer une et une seulement de ces deux valeurs (au choix) et l’assigner à ce point tournant interne. Si l’une exactement des deux valeurs frontière est nil, l’autre (non nil) doit être marquée et assignée à ce point tournant interne. Enfin si les deux valeurs frontière sont nil, celle “au dessus ” (sur la ligne verticale  $V$ ) du point tournant interne en question doit lui être assignée et être marquée, l’autre pouvant éventuellement aussi être marquée et assignée à un autre point tournant interne.

En fait ce qui complique un peu les choses sont les valeurs dites “isolées” c’est-à-dire celles dont les extrémités de l’arc qui les représente sont deux points tournants consécutifs. Nous avons montré qu’une valeur isolée est toujours nil.

Dans le cas des biparaboliques, il peut y avoir une suite (non réduite à un élément) de valeurs isolées consécutives. Cela ne peut pas se produire dans le cas d’un parabolique : dans ce cas une valeur isolée a sa valeur voisine forcément non-nil (donc non isolée).

Considérons un point tournant interne  $t$  de  $E$  et notons  $\epsilon_i \beta_i$  la valeur frontière marquée qui lui est assignée. Si  $\epsilon_i \beta_i$  est au-dessus de  $t$  sur la ligne verticale  $V$ , on dira que la signature de  $t$  vaut 1. Sinon on dira que la signature de  $t$  vaut  $-1$ .

C’est lorsque la signature de  $t$  vaut  $-1$  que l’on doit parfois ajouter à  $\beta_i$  un intervalle composé impair (que je n’expliquerai pas en détail, mais on choisit cet intervalle de sorte d’obtenir un système de racines simples de  $\mathfrak{sl}_e(\mathbf{k})$ , voir [F8, 9.5(i)] pour des précisions supplémentaires). Dans ce cas  $\beta_i$  est nécessairement non nil (et en dessous de  $t$ ) et on ajoute à  $\beta_i$  un intervalle composé impair (qui peut être éventuellement simple) se trouvant au-dessus de  $t$ .

Dans le cas où la signature de  $t$  vaut 1,  $\beta_i$  se trouve au-dessus de  $t$  et on lui ajoute un intervalle simple en dessous de  $t$ .

Dans tous les cas on peut montrer que  $\beta_i^* \in \tilde{K}$  ( voir [F8, Lemme 9.5 (i) et (ii)]).

**2.3.1 Exemple de la Figure 5.** Sur la Figure 5, la valeur frontière  $\epsilon_1 \beta_1 = \epsilon_1 - \epsilon_3$  est nil et la valeur frontière  $\epsilon_2 \beta_2 = \epsilon_4 - \epsilon_3$  l’est aussi car les extrémités de l’arc représentant  $\epsilon_1 \beta_1$ , resp.  $\epsilon_2 \beta_2$ , n’appartiennent pas à la même composante double (d’ailleurs ces valeurs sont des valeurs isolées). Aussi si on parcourt  $E$  dans le sens 1, 3, 4, on doit marquer  $\epsilon_1 \beta_1$  et l’assigner au point tournant interne (qui est un puits) 3. C’est-à-dire que la signature

de 3 vaut 1. Donc on remplace  $\epsilon_1\beta_1$  par  $\beta_1^* = \epsilon_1(\beta_1 + \iota)$  où  $\iota$  est l'intervalle simple  $\epsilon_3 - \epsilon_4$ . D'où  $\beta_1^* = \epsilon_1(\epsilon_1 - \epsilon_4) = \epsilon_1 - \epsilon_4 \in \tilde{K}$  (ce que l'on peut vérifier directement dans cet exemple, grâce à la Figure 3, puisque les points noirs de cette Figure qui ne sont pas dans la zone en jaune représentent les éléments de  $\tilde{K}$ ).

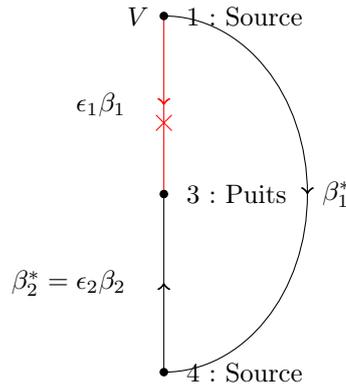


Figure 8.

Rectification de l'arête  $E$  passant par les points 1, 3, 4 dans cet ordre de la Figure 5 ci-dessus.

On a représenté sur une ligne verticale  $V$  les points entiers de  $L$  par lesquels passe l'arête  $E$  et par une flèche sur chaque segment joignant deux de ces points consécutifs, l'orientation de l'arc non trivial de  $E$  qui les joint. On constate, en examinant la Figure 5, qu'autour du puits interne 3 les deux valeurs frontière sont nil. On marque donc (marquage représenté par une croix rouge) la valeur frontière qui est au-dessus du puits 3 (cette valeur frontière marquée est représentée par un segment rouge, que l'on va supprimer pour obtenir l'arête rectifiée  $E^*$ ) et on assigne cette valeur frontière au puits 3. Donc la signature de 3 vaut 1 et on remplace  $\epsilon_1\beta_1$  par  $\beta_1^*$  représentée par un arc externe à droite de la ligne verticale  $V$ , orienté dans le même sens que  $\epsilon_1\beta_1$ . L'arête rectifiée  $E^*$  passe donc par les points 1, 4, 3 dans cet ordre et  $\Pi_E^* = \{\epsilon_1 - \epsilon_4, \epsilon_4 - \epsilon_3\}$  vérifie bien les conditions 1) et 2) de 2.2.

On a aussi  $y_E = \eta_E + x_{14}$  et sa restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta_E = \eta$  et  $y_E$  est un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{k})$ .

**2.3.2 Exemple de la Figure 6.** De même sur la Figure 6 ci-dessus, pour l'arête  $E$  passant par les points 1, 2, 4 dans cet ordre, on obtient que  $E^*$  passe par les points

1, 4, 2 dans cet ordre,  $\Pi_E^* = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_2\}$  et  $y_E = \eta_E + x_{14}$  est un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{k})$  dont la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta_E = \eta$ .

**2.3.3 Exemple de la Figure 4.** Lorsqu'il n'y a pas de point tournant interne sur une arête non triviale  $E$ , celle-ci est déjà rectifiée, c'est-à-dire  $E = E^*$  (c'est le cas de l'arête non triviale sur la Figure 4 ci-dessus).

**2.3.4 Exemple de la Figure 7.**

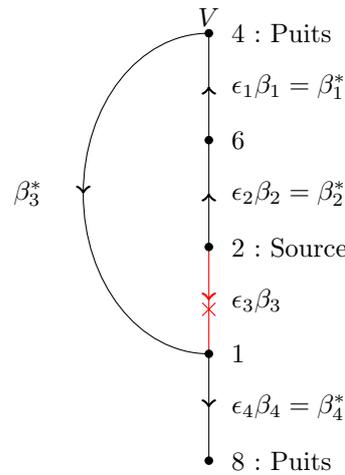


Figure 9.

*Rectification de l'arête  $E$  passant par les points 4, 6, 2, 1, 8 dans cet ordre de la Figure 7 ci-dessus.*

Autour de la source interne 2, la valeur frontière  $\epsilon_2\beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_6$  est nil alors que la valeur frontière  $\epsilon_3\beta_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$  est non-nil et donc marquée et représentée par un segment rouge que l'on supprimera pour obtenir  $E^*$  (le marquage est représenté par une croix rouge), et cette valeur frontière marquée est assignée à la source 2. Donc la signature de 2 vaut  $-1$  et on remplace  $\epsilon_3\beta_3$  par  $\beta_3^* = \varepsilon_4 - \varepsilon_1$  représentée par un arc externe à gauche de la ligne verticale  $V$ , orienté dans le même sens que  $\epsilon_3\beta_3$ . L'arête rectifiée  $E^*$  passe donc par les points 2, 6, 4, 1, 8 dans cet ordre et  $\Pi_E^* = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_6 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_8\}$  vérifie bien les conditions 1) et 2) de 2.2.

De plus  $y_E = \eta_E + x_{41}$  est régulier nilpotent dans  $\mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et sa restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta_E = x_{64} + x_{26} + x_{21} + x_{18}$ .

## 2.4 Recollement des arêtes rectifiées.

Comme on peut le constater sur la Figure 7, il peut y avoir plusieurs arêtes non triviales. Sur la Figure 7, on en a deux, l'une (voir Figure ci-dessus) a pour arête rectifiée  $E^*$  qui passe par les points 2, 6, 4, 1, 8 dans cet ordre. L'autre arête non triviale  $F$  passant par les points 5, 3, 7 dans cet ordre est déjà rectifiée car elle n'a pas de point tournant interne.

Il faut ensuite pouvoir mettre les arêtes rectifiées bout à bout pour pouvoir obtenir un système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  et un élément  $y$  nilpotent régulier de  $\mathfrak{g}$  dont la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  soit égale à  $\eta$ .

Le recollement de ces arêtes rectifiées doit se faire de sorte de rajouter des racines dans  $\tilde{K}$ .

Ce qui a permis de recoller ces arêtes rectifiées, c'est l'observation selon laquelle la source  $a^*$  et le but  $b^*$  de l'arête rectifiée  $E^*$  de l'arête non triviale  $E$  sont resp. une source et un puits de  $E$  ([F8, Prop. 11.2]) et que la valeur  $\iota_{E^*}$  de  $E^*$  ( $\iota_{E^*} = \varepsilon_{a^*} - \varepsilon_{b^*}$ ) est dans  $-\tilde{K}$  ([F8, Cor. 11.4]).

Il suffit alors de diviser l'ensemble des arêtes rectifiées en deux sous-ensembles (l'un,  $\mathcal{F}^+$ , contenant celles telles que  $\iota_{E^*} \in (-\tilde{K}) \cap \Delta^+$  et l'autre,  $\mathcal{F}^-$  contenant celles telles que  $\iota_{E^*} \in (-\tilde{K}) \cap \Delta^-$ ) pour les recoller ([F8, Section 12]). Plus précisément si on représente une arête rectifiée  $E_i^*$  de  $\mathcal{F}^+$  par un arc  $a_i^* \rightarrow b_i^*$  au-dessus de  $L$  et une arête rectifiée  $E'_i{}^*$  de  $\mathcal{F}^-$  par un arc  $b'_i{}^* \leftarrow a'_i{}^*$  en dessous de  $L$  et si on numérote ces arêtes rectifiées de sorte que leurs sources soient strictement croissantes sur  $L$ , on peut montrer que l'on obtient (si  $\mathcal{F}^+ = \{E_1^*, \dots, E_r^*\}$  et  $\mathcal{F}^- = \{E'_1{}^*, \dots, E'_s{}^*\}$  sont tous deux non vides) deux suites d'arcs  $a_r^* \rightarrow b_r^* \rightarrow a_{r-1}^* \rightarrow \dots \rightarrow a_1^* \rightarrow b_1^*$  et  $b'_s{}^* \leftarrow a'_s{}^* \leftarrow b'_{s-1}{}^* \leftarrow a'_{s-1}{}^* \leftarrow \dots \leftarrow a'_2{}^* \leftarrow b'_1{}^* \leftarrow a'_1{}^*$  telles que, pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ , resp.  $1 \leq j \leq s-1$ ,  $\varepsilon_{b'_{i+1}{}^*} - \varepsilon_{a_i^*} \in \tilde{K}$ , resp.  $\varepsilon_{b'_j{}^*} - \varepsilon_{a'_{j+1}{}^*} \in \tilde{K}$  (voir [F8, Lemme 12.2]). Il faut ensuite recoller ces deux chaînes d'arcs. En général on peut les recoller par l'arc  $b_1^* \rightarrow a'_1{}^*$  ou par l'arc  $b'_s{}^* \rightarrow a_r^*$  (dans le cas où ces arcs représentent des éléments de  $\tilde{K}$ ), voir [F8, Lemme 12.5]. Quand ceci n'est pas possible les arcs  $b_r^* \rightarrow a'_1{}^*$  et  $b'_s{}^* \rightarrow a_{r-1}^*$  représentent des éléments de  $\tilde{K}$  et on coupe les chaînes ci-dessus de sorte d'obtenir la chaîne  $a_r^* \rightarrow b_r^* \rightarrow a'_1{}^* \rightarrow b'_1{}^* \rightarrow a'_2{}^* \rightarrow \dots \rightarrow a'_{s-1}{}^* \rightarrow b'_{s-1}{}^* \rightarrow a'_s{}^* \rightarrow b'_s{}^* \rightarrow a_{r-1}^* \rightarrow \dots \rightarrow a_1^* \rightarrow b_1^*$  (voir [F8, Lemme 12.6]).

Encore une fois ce sont des considérations sur les sources et les puits des composantes doubles qui ont permis de conclure.

On obtient ainsi une seule chaîne  $a^* \rightarrow b^*$  ( $a^*$  une source et  $b^*$  un puits) formée de sous-chaînes correspondant aux arêtes rectifiées, les arcs reliant les arêtes rectifiées consécutives représentant des racines de  $\tilde{K}$ .

**2.4.1 Exemple de la Figure 7.** Dans ce cas  $\iota_{E^*} = \varepsilon_2 - \varepsilon_8 \in \Delta^+ \cap (-\tilde{K})$  et  $\iota_{F^*} = \varepsilon_5 - \varepsilon_7 \in \Delta^+ \cap (-\tilde{K})$ .

Ainsi la valeur  $\iota_{E^*}$ , resp.  $\iota_{F^*}$ , de l'arête rectifiée  $E^*$ , resp.  $F^*$ , est positive. Le procédé expliqué ci-dessus donne la chaîne  $5 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 8$  avec l'arc  $7 \rightarrow 2$  qui représente une racine dans  $\tilde{K}$ .

On obtient ainsi la Figure ci-dessous.

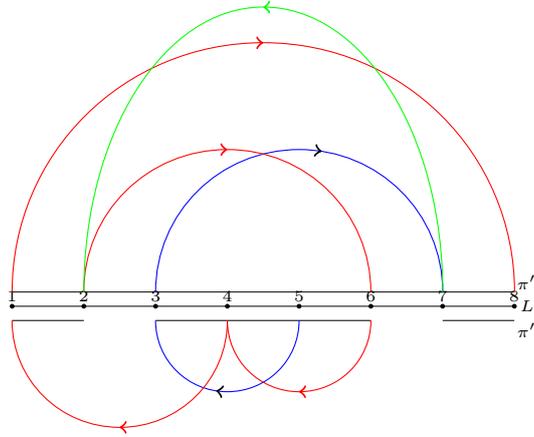


Figure 10.

Arcs représentant le nouveau système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  donnant un élément régulier nilpotent dont la restriction est égale à  $\eta$  de la Figure 7 ci-dessus.

En bleu sont représentés les arcs de l'arête  $F$  déjà rectifiée et en rouge ceux de l'arête rectifiée  $E^*$ . En vert est représenté l'arc  $7 \rightarrow 2$  joignant ces deux arêtes. Le nouveau système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  obtenu est :  $\Pi^* = \{\varepsilon_5 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_7, \varepsilon_7 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_6 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_8\}$ . De plus  $y = \eta + x_{41} + x_{72}$  est régulier nilpotent dans  $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$  et sa restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta$ . Enfin l'élément  $w$  du groupe de Weyl de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  envoyant  $\pi$  sur  $\Pi^*$  est  $w = s_1 s_2 s_4 s_6 s_1 s_3 s_5 s_2 s_4 s_6 s_1 s_3 s_5 s_6$  où l'on note  $s_i$  la réflexion relative à la racine simple  $\alpha_i$  de  $\pi$  (voir [F8, Fig. 24]).

### 2.5 Rajout des arêtes triviales s'il y en a.

Dans l'exemple ci-dessus il n'y avait pas d'arête triviale.

Par contre dans les Figures 4, 5 et 6 apparaissent des arêtes triviales, qu'il faut rajouter à la chaîne obtenue en recollant les arêtes rectifiées, afin d'obtenir un système de racines simples de  $\mathfrak{g}$  donnant un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$  dont la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta$ .

On appelle "point complètement fixe" un point entier de  $L$  correspondant à une arête triviale. On a montré ([F8, Lemme 12.8]) que pour tout sous-ensemble  $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s\}$  de l'ensemble des points complètement fixes il existe une permutation  $p$  de  $[1, s]$  telle que  $\varepsilon_{f_{p(i)}} - \varepsilon_{f_{p(i+1)}} \in \tilde{K}$  pour tout  $1 \leq i \leq s - 1$ .

Soit  $a^* \rightarrow b^*$  ( $a^*$  étant une source, et  $b^*$  un puits) la chaîne obtenue en recollant toutes les arêtes rectifiées entre elles comme expliqué en 2.4. On a montré que l'ensemble des points complètement fixes peut se décomposer en deux sous-ensembles : l'un,  $F_{a^*}$ , formé des points complètement fixes  $f$  tels que  $\varepsilon_f - \varepsilon_{a^*} \in \tilde{K}$  et l'autre,  $F_{b^*}$ , formé des points complètement fixes  $f$  tels que  $\varepsilon_{b^*} - \varepsilon_f \in \tilde{K}$ .

Ces résultats utilisent le fait que deux points complètement fixes ne peuvent pas appartenir à la même composante double ([F8, Lemme 11.5]) ainsi que les propriétés des composantes doubles vis-à-vis des sources et des puits ([F8, 12.9-12.13]).

On obtient alors un système  $\Pi^*$  de racines simples de  $\mathfrak{g}$  formé de la réunion des systèmes  $\Pi_E^*$  pour toute arête non triviale  $E$ , des racines dans  $\tilde{K}$  représentées par les arcs de la chaîne  $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots \rightarrow f_u \rightarrow a^*$  (si  $F_{a^*} = \{f_1, f_2, \dots, f_u\}$  où les  $f_i$  sont numérotés de sorte que l'arc reliant  $f_i$  à  $f_{i+1}$  représente une racine de  $\tilde{K}$ ) et des racines dans  $\tilde{K}$  représentées par les arcs de la chaîne  $b^* \rightarrow f'_1 \rightarrow f'_2 \rightarrow \dots \rightarrow f'_t$  (si  $F_{b^*} = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_t\}$  avec la même convention pour les arcs reliant  $f'_i$  à  $f'_{i+1}$ ) ainsi que des racines dans  $\tilde{K}$  représentées par les arcs reliant les arêtes rectifiées mises bout à bout pour obtenir la chaîne  $a^* \rightarrow b^*$  comme expliqué au 2.4.

Notons  $l_{2i-1} \rightarrow l_{2i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , les différents arcs (représentant des racines de  $\tilde{K}$ ) reliant les arêtes rectifiées mises bout à bout pour obtenir la chaîne  $a^* \rightarrow b^*$ . Posons, avec les notations de 2.2,  $y^* = \sum_{E \text{ non triviale}} y_E + \sum_{1 \leq i \leq m} x_{\varepsilon_{l_{2i-1}} - \varepsilon_{l_{2i}}}$  puis

$$y = y^* + \sum_{1 \leq i \leq u-1} x_{\varepsilon_{f_i} - \varepsilon_{f_{i+1}}} + \sum_{1 \leq i \leq t-1} x_{\varepsilon_{f'_i} - \varepsilon_{f'_{i+1}}} + x_{\varepsilon_{f_u} - \varepsilon_{a^*}} + x_{\varepsilon_{b^*} - \varepsilon_{f'_1}}.$$

Alors  $y$  restreint à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égal à  $\eta = \sum_{E \text{ non triviale}} \eta_E$  et  $y$  est un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  puisque  $y^*$  est un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{sl}_v(\mathbf{k})$  où  $v = \sum_{E \text{ non triviale}} \text{card}(E)$  (où  $\text{card}(E)$  désigne le cardinal de l'ensemble des points entiers de  $L$  par lesquels passe l'arête non triviale  $E$ ) et que  $u + t = n - v$ .

**2.5.1 Figure 11 : exemple de la Figure 4.** Il y a une seule arête non triviale  $E$  déjà rectifiée donc  $y^* = \eta = x_{13} + x_{32}$  et deux points complètement fixes 4 et 5. On vérifie que  $\varepsilon_5 - \varepsilon_4 \in \tilde{K}$  et que  $\varepsilon_2 - \varepsilon_5 \in \tilde{K}$ . Donc on peut prendre  $\Pi^* = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_5 - \varepsilon_4\}$  comme système de racines simples de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et  $y = \eta + x_{25} + x_{54}$  est régulier nilpotent dans  $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$  et sa restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta$ .

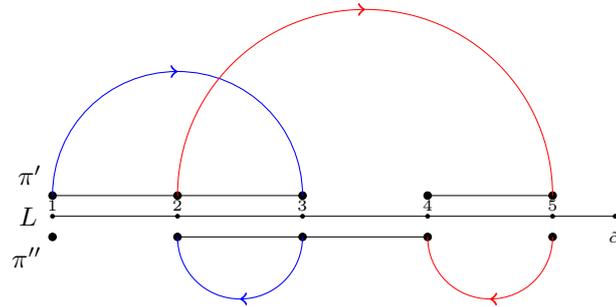


Figure 11.

*Arcs représentant les racines simples du nouveau système  $\Pi^*$  pour l'exemple de la Figure 4.*

En bleu sont représentés les arcs de l'arête déjà rectifiée  $E = E^*$ . On a rajouté en rouge les arcs représentant le lien avec un des points complètement fixes et le lien entre les deux points complètement fixes, qui représentent des racines de  $\tilde{K}$ .

**2.5.2 Figure 12 : exemple de la Figure 5.** A l'arête rectifiée  $E^* : 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$  on doit rajouter les points complètement fixes 2 et 5. On constate que  $2 \rightarrow 1$  et  $5 \rightarrow 1$  représentent tous deux des éléments de  $\tilde{K}$ . De plus  $2 \rightarrow 5$  représente aussi un élément de  $\tilde{K}$ . On peut donc prendre pour chaîne  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ .



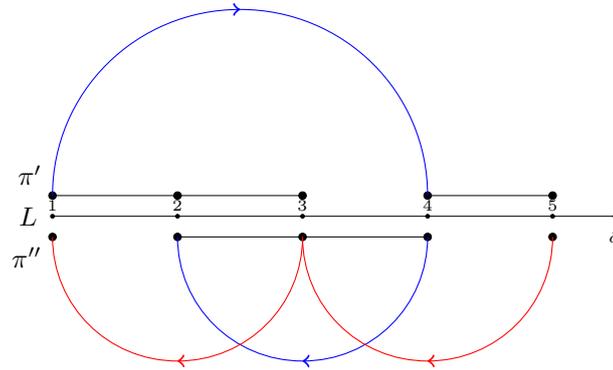


Figure 13.

Arcs représentant les racines simples du nouveau système  $\Pi^*$  pour l'exemple de la Figure 6.

En bleu sont représentés les arcs de l'arête rectifiée  $E^*$ . On a rajouté en rouge les arcs représentant le lien avec un des points complètement fixe et le lien entre les deux points complètement fixes, qui représentent des racines de  $\tilde{K}$ . Ainsi  $\Pi^* = \{\varepsilon_5 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_2\}$  et  $y = x_{53} + x_{31} + x_{14} + x_{42} + x_{12}$  est régulier nilpotent dans  $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$  et sa restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est égale à  $\eta = x_{42} + x_{12}$ .

**2.6 Comment obtenir l'élément  $w$  du groupe de Weyl  $W$  de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  tel que  $w(\pi) = \Pi^*$  ?**

J'ai expliqué plus haut que le but ultime de la recherche d'un élément régulier nilpotent de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  dont la restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$  soit égale au  $\eta$  d'une paire adaptée pour  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est de trouver un élément du groupe de Weyl  $W$  de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  ayant un sens dans les autres types d'algèbres de Lie simples et permettant d'obtenir des sections de Weierstrass, même lorsqu'aucune paire adaptée n'existe, pour tout biparabolique tronqué d'une algèbre de Lie simple quelconque (autre que  $A$ ). Aussi il est intéressant de calculer les éléments  $w$  de  $W$  envoyant le système  $\pi$  de racines simples de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  fixé au départ sur le nouveau système de racines simples  $\Pi^*$  trouvé grâce au procédé précédent.

Rappelons que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  et que  $\pi = \{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  est le système de racines simples de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  fixé au départ et posons  $\Pi^* = \{\beta_i^*\}_{1 \leq i \leq n-1}$  le nouveau système de racines simples de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  obtenu par le procédé précédent. Notons  $\{h_{\varpi_i}\}_{1 \leq i \leq n-1}$  la base duale de la base  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ . Comme  $\Pi^*$  est un système de racines simples de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , il existe un unique  $h \in \mathfrak{h}$  tel que  $\langle h, \beta_i^* \rangle = 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  et un unique élément  $w$  de  $W$  tel que  $w(\alpha_i) = \beta_i^*$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ . Cet élément  $w \in W$  vérifie de plus  $w^{-1}(h) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} h_{\varpi_i}$ .

Dans les Figures 11, 12 et 13, on a considéré  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$  et  $\mathfrak{q}_{\pi', \pi''}$  avec  $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  et  $\pi'' = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ .

Pour ce même biparabolique, on a obtenu des nouveaux systèmes de racines simples  $\Pi^*$  différents, selon le  $\eta$  de la paire adaptée considéré et selon aussi les rectifications d'arêtes choisies ou les recollements d'arêtes entre elles que l'on a choisis (en général il y a plusieurs choix possibles).

Ainsi cela nous donne plusieurs éléments  $w$  de  $W$  (un élément  $w$  par choix). Notons  $s_i$  la réflexion relative à la racine simple  $\alpha_i$ .

**2.6.1 Exemple de la Figure 11.** On trouve  $h = 2h_{\varpi_1} - h_{\varpi_2} + 3h_{\varpi_3} - h_{\varpi_4}$ . Alors  $s_4 s_2 \in W$  transforme  $h$  en  $\sum_{1 \leq i \leq 4} h_{\varpi_i}$ . Donc  $w = s_2 s_4$  transforme  $\pi$  en  $\Pi^*$ .

**2.6.2 Exemple de la Figure 12.** On trouve  $h = -2h_{\varpi_1} + 4h_{\varpi_2} - h_{\varpi_3} - 2h_{\varpi_4}$  et  $s_2 s_3 s_4 s_3 s_1$  transforme  $h$  en  $\sum_{1 \leq i \leq 4} h_{\varpi_i}$ . Donc  $w = s_1 s_3 s_4 s_3 s_2$  transforme  $\pi$  en  $\Pi^*$ .

**2.6.3 Exemple de la Figure 13.** On trouve  $h = 2h_{\varpi_1} - 3h_{\varpi_2} + 2h_{\varpi_3} - 3h_{\varpi_4}$  et  $w = s_2 s_4 s_1 s_3 s_2 s_4 s_1$  transforme  $\pi$  en  $\Pi^*$ .

**2.6.4** Pour l'instant on ne sait pas encore comment interpréter ces éléments du groupe de Weyl de sorte d'obtenir des sections de Weierstrass pour des biparaboliques tronqués dans d'autres types d'algèbres de Lie simples (autres que  $A$ ).

# Chapitre VII

## Des problèmes ouverts.

### A Recherche d'autres paires adaptées.

Le premier problème qui fait suite à mes deux derniers articles est le suivant : peut-on construire des paires adaptées, ou au moins des sections de Weierstrass, pour un biparabolique tronqué d'une algèbre de Lie simple de type autre que  $A$ ? Signalons que des paires adaptées ont déjà été construites pour certains biparaboliques tronqués de certaines algèbres de Lie simples ([43] ou [32]). De ces paires adaptées on peut espérer pouvoir en déduire, lorsqu'on ne la connaît pas déjà, la polynomialité ou non du centre de Poisson de l'algèbre symétrique du biparabolique tronqué en question, comme expliqué au 2.5 de la Sec. A du Chap. VI.

### B Forme minimale d'un élément régulier de $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ .

Si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie algébrique de groupe adjoint  $\mathbf{A}$ , on note  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  la variété des zéros de l'idéal de  $\mathbf{S}(\mathfrak{a})$  engendré par les vecteurs de  $\mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  de degré strictement positif. D'après 2.2 de la Sec. A du Chap. VI on sait que si  $(h, \eta)$  est une paire adaptée pour  $\mathfrak{a}$  alors  $\eta \in \mathcal{N}(\mathfrak{a})$ . De plus d'après 2.1 de la Sec. A du Chap. VI on sait que tout couple  $(a.h, a.\eta)$  avec  $a \in \mathbf{A}$  est encore une paire adaptée de  $\mathfrak{a}$  et on dit dans ce cas que les paires adaptées  $(h, \eta)$  et  $(a.h, a.\eta)$  sont équivalentes.

Rappelons que Joseph ([35]) a montré que, lorsque  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $A$ , tout biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  de  $\mathfrak{g}$  admet une paire adaptée  $(h, \eta)$ . On a donc  $\eta \in \mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ . De plus le  $\eta$  construit par Joseph est de la forme  $\sum_{\alpha \in S} x_\alpha$  où  $x_\alpha$  est un vecteur de  $\mathfrak{g}$  de poids  $\alpha$  et où  $S$  est un sous-ensemble de l'ensemble des racines de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  tel que  $S$  restreint à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_\Lambda$  de  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est une base de  $\mathfrak{h}_\Lambda^*$ . On dit qu'un  $\eta$  exprimé de cette façon est présenté sous "forme minimale". Bien sûr tous les seconds éléments de paires adaptées d'un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  ne se présentent pas forcément sous forme minimale. En effet, si on conjugue un  $\eta$  sous forme minimale par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , on obtient encore un second élément d'une paire adaptée, mais qui n'est plus sous forme minimale en général. De plus il n'est pas certain que toutes les classes d'équivalence de paires adaptées apparaissent dans [35].

Une question serait de savoir si, pour un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$ , tout élément régulier de  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  peut, à conjugaison près par un élément du groupe adjoint de  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , se présenter sous forme minimale.

C'est vrai dans le cas où le biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est *d'indice un* : cela repose essentiellement sur le fait que la variété  $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$  est une variété irréductible dans ce cas ([F7, 1.8] ou Par. 1 de la Sec. B du Chap. VI) et d'après la preuve du Thm. 1.2 de la Sec. B du Chap. VI.

Rappelons d'ailleurs que, pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple, la variété  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  est l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{g}$  (identifié à  $\mathfrak{g}^*$  par la forme de Killing) qui sont nilpotents. Or il est bien connu ([10]) que, pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple, toute orbite nilpotente régulière possède un représentant minimal (c'est-à-dire dans ce cas un vecteur qui est la somme d'exactlyment rang de  $\mathfrak{g}$  vecteurs de poids).

Ainsi il est naturel de se demander si un résultat analogue serait valable dans le cas d'un biparabolique tronqué quelconque.

## C Irréductibilité de $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$ pour un biparabolique $\mathfrak{q}$ Frobenius.

On a montré dans [F8] que, pour une algèbre de Lie algébrique  $\mathfrak{a}$  telle que  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{a})$  est polynomial (2.3 de la Sec. A du Chap. VI), il y a une bijection entre les classes d'équivalence de paires adaptées pour  $\mathfrak{a}$  et les composantes irréductibles de la variété  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  admettant une orbite dense. (D'après [F8, 10.6] une composante irréductible de  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  admettant une orbite dense est nécessairement de codimension égale à l'indice de  $\mathfrak{a}$ .) Ainsi si  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  n'a qu'une seule composante irréductible (c'est-à-dire si  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$  est elle-même irréductible) il ne peut y avoir qu'une seule classe d'équivalence de paires adaptées.

Ceci est vrai dans le cas où le biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  est *d'indice un*. De plus dans ce cas le biparabolique  $\mathfrak{q}$  associé est d'indice zéro c'est-à-dire est Frobenius (autrement dit il existe dans  $\mathfrak{q}^*$  une orbite dense).

Bien sûr il existe des biparaboliques Frobenius dont l'indice du tronqué associé ne vaut pas forcément un ([13] ou [12]). Mais à chaque fois qu'un biparabolique  $\mathfrak{q}$  est Frobenius, il existe une, et une seule, paire adaptée pour  $\mathfrak{q}$ , à conjugaison près par le groupe adjoint de  $\mathfrak{q}$  ([38] et [59]). On peut alors se demander, pour un biparabolique  $\mathfrak{q}$  Frobenius, si l'unicité de la classe d'équivalence des paires adaptées n'impliquerait pas l'irréductibilité de la variété  $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$ .

Dans le cas général on ne sait même pas si pour un biparabolique ou un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}$ , la variété des zéros  $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$  a toutes ses composantes irréductibles de même dimension.

## D Quelle est l'image par l'application de restriction de l'ensemble des éléments réguliers nilpotents de $\mathfrak{g}$ ?

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Lie algébrique de  $\mathfrak{g}$ . Notons  $\rho : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{a}^*$  l'application de restriction et  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{reg}$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{g}$  (identifié avec  $\mathfrak{g}^*$ ) réguliers nilpotents. Si  $\mathbf{G}$ , resp.  $\mathbf{A}$ , est le groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$ , resp. de  $\mathfrak{a}$ , on sait que  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{reg}$  se compose d'une seule  $\mathbf{G}$ -orbite ([16, 8.1.3]) et est une réunion de  $\mathbf{A}$ -orbites. Comme l'application  $\rho$  est un morphisme de  $\mathbf{A}$ -modules, on peut se demander quelles sont les  $\mathbf{A}$ -orbites de  $\mathfrak{a}^*$  qui apparaissent dans l'image par  $\rho$  de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{reg}$ . On peut aussi se demander si  $\mathfrak{a}_{reg}^*$  (l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathfrak{a}^*$ ) se trouve dans l'image par  $\rho$  de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{reg}$ , au moins lorsque  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre biparabolique tronquée de  $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$ . Bien sûr cela impliquerait les résultats de mes deux derniers articles avec A. Joseph (existence d'un élément régulier nilpotent  $y$  dont la restriction au biparabolique tronqué est égale au second élément d'une paire adaptée) mais sans donner une description précise de  $y$  comme cela a été fait dans [F7] et [F8].

Rappelons que dans le cas d'un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'indice un d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{k}$ , on a pu montrer ([F8, 13.3] ou 1.2 de la Sec. B du Chap. VI) que toute  $\mathbf{Q}_\Lambda$ -orbite régulière de  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$  est l'image, par restriction à  $\mathfrak{q}_\Lambda$ , d'une  $\mathbf{Q}_\Lambda$ -orbite de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})_{reg}$ . De ceci nous avons pu en déduire ([F8, 13.4] ou 1.3 de la Sec. B du Chap. VI) que pour un biparabolique tronqué  $\mathfrak{q}_\Lambda$  d'indice un, l'image de  $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$  par l'application de restriction  $\rho : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{q}_\Lambda^*$  est  $\mathfrak{q}_\Lambda^*$ .

## E Cas de l'indice un : description du générateur du semi-centre.

Dans le cas où le (bi)parabolique tronqué est d'indice un, et que c'est la troncation canonique d'un biparabolique propre d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$ , on sait que le semi-centre de l'algèbre symétrique du (bi)parabolique associé est une  $\mathbf{k}$ -algèbre de polynômes en une indéterminée  $d$  et que dans ce cas le biparabolique en question est en fait un parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  simple de type  $A$ . De plus on sait aussi que dans ce cas, la plus grande sous-algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}'$  de  $\mathfrak{p}$  est formée de deux blocs de matrices de trace nulle et de tailles copremières (voir Par. 2 de la Sec. B du Chap. III).

Lorsque  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique propre de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$  de dimension maximale (voir Sec. B du Chap. II), c'est-à-dire lorsque  $\mathfrak{g}'$  est isomorphe à  $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$ , une description précise du semi-invariant  $d$  engendrant le semi-centre  $\mathbf{S}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda)$  a été donnée par Joseph et Dixmier (cf. [27] et [17]). L'élément  $d$  s'exprime en effet comme une somme de produits d'éléments du radical nilpotent  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{p}$  et d'un élément harmonique de l'algèbre symétrique de  $\mathfrak{g}'$ . Plus précisément  $d$  (de degré  $\frac{n(n+1)}{2}$  et de poids  $(n+1)\varpi_n$  si  $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_n\}$ ) s'exprime comme le  $\mathfrak{g}'$ -invariant non nul du  $\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -sous-module de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  engendré par  $a_\nu b_{-\nu}$  où  $a_\nu$  est un vecteur de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}')$  (et même de  $\mathbb{H}(\mathfrak{g}')$ ) de plus haut poids  $\nu$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{g}'$  (ici  $\nu = n\varpi'_{n-1}$ ) et  $b_{-\nu}$  un vecteur de  $\mathbf{S}(\mathfrak{m})$  de plus bas poids  $-\nu$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{g}'$  (ici  $b_{-\nu} = x_{n,n+1}^n$ ). D'ailleurs  $a_\nu$  correspond aussi

au générateur du semi-centre de Poisson associé au parabolique de  $\mathfrak{g}'$  correspondant à  $\pi' \setminus \{\alpha_{n-1}\}$ . (Voir aussi la construction expliquée à la fin de 5.2 de la Sec. D du Chap. IV). En fait dans ce cas très particulier on a  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}') = \mathbf{S}(\mathfrak{p}')^{\mathfrak{g}'}$  alors qu'en général, même lorsque  $\mathfrak{p}_\Lambda = \mathfrak{p}'$ , ce qui est le cas si  $\mathfrak{p}_\Lambda$  est d'indice un, on a juste une inclusion stricte  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda) \subset \mathbf{S}(\mathfrak{p}_\Lambda)^{\mathfrak{g}'}$ .

On peut se demander si, dans tous les cas où le parabolique tronqué  $\mathfrak{p}_\Lambda$  est d'indice un, le générateur  $d$  du semi-centre  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}')$  peut encore s'exprimer d'une façon analogue à ce qui a été expliqué ci-dessus dans le cas d'un parabolique propre de dimension maximale de  $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$ . Par exemple lorsque  $\mathfrak{g}'$  correspond à deux blocs de matrices de trace nulle de taille respective 2 et 3 (dans  $\mathfrak{sl}_5(\mathbf{k})$ ) la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  a sa troncation canonique d'indice un et j'ai vérifié que dans ce cas le semi-invariant  $d$  (qui est de poids  $5\varpi_2$  et "seulement" de degré 9) de  $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$  a une expression plus compliquée que pour le cas d'une sous-algèbre parabolique propre de dimension maximale (voir l'article non publié [F'1]). Ici  $d$  est la somme de deux éléments  $\mathfrak{g}'$ -invariants non nuls obtenus par le procédé décrit ci-dessus. Plus précisément on montre que  $d$  appartient à  $\mathbb{H}_3(\mathfrak{g}')\mathbf{S}_6(\mathfrak{m})$  où  $\mathbb{H}_3(\mathfrak{g}')$  est l'espace des éléments harmoniques de  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}')$  de degré 3 et que  $d = d_1 + d_2$  où  $d_1$  est le  $\mathfrak{g}'$ -invariant (non nul) du  $ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -module de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  engendré par  $a_{\nu_1}b_{-\nu_1}$  avec  $a_{\nu_1} \in \mathbb{H}_3(\mathfrak{g}')$  de plus haut poids  $\nu_1 = 2\varpi'_1 + 2\varpi'_3 + 2\varpi'_4$  et  $b_{-\nu_1} \in \mathbf{S}_6(\mathfrak{m})$  de plus bas poids  $-\nu_1$  et  $d_2$  est le  $\mathfrak{g}'$ -invariant (non nul) du  $ad\mathbf{U}(\mathfrak{g}')$ -module de  $\mathbf{S}(\mathfrak{p})$  engendré par  $a_{\nu_2}b_{-\nu_2}$  avec  $a_{\nu_2} \in \mathbb{H}_3(\mathfrak{g}')$  de plus haut poids  $\nu_2 = 3\varpi'_4$  et  $b_{-\nu_2} \in \mathbf{S}_6(\mathfrak{m})$  de plus bas poids  $-\nu_2$ .

# Remerciements.

Je tiens à remercier Michel Brion, Corrado De Concini et Rupert Yu, rapporteurs de mon mémoire d'habilitation, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de donner un avis sur celui-ci. Je leur suis vivement reconnaissante de la patience dont ils auront fait preuve pour lire, comprendre et analyser tout ce que j'ai écrit ici. Leurs remarques toujours pertinentes sur la rédaction de ce travail m'ont été d'une très grande utilité, m'obligeant à mieux expliquer, ce qui m'a permis de prendre un peu plus de recul sur mon travail de recherche.

Mille excuses si malgré cela j'ai été parfois redondante ou peu claire dans mes explications. Je me rends compte, une fois la rédaction de ce mémoire terminée, qu'il est très difficile de faire la synthèse de tant d'années de travail et d'essayer de transmettre au mieux ses progrès et ses attentes dans un domaine si particulier des mathématiques.

Je voudrais aussi remercier les autres membres de mon jury, qui m'ont accordé leur confiance, notamment Stéphane Gaussent, mon tuteur, Roland Berger, toujours attentif à mes travaux et qui m'a été d'un grand soutien à l'Université Jean Monnet, Jacques Alev, qui s'est toujours beaucoup intéressé à ma recherche et m'y a encouragée.

Enfin je voudrais remercier Anthony Joseph sans qui je ne serais pas là aujourd'hui. Après m'avoir dirigée en thèse, il m'a fait l'honneur de bien vouloir continuer à travailler avec moi, poursuivant notre quête du Saint-Graal, amorcée si l'on peut dire pendant mes années de thèse avec le cas quantique.

Anthony Joseph a su me faire partager, au-delà de sa passion pour ce domaine des mathématiques dans lequel nous collaborons, une très grande exigence vis-à-vis de la connaissance scientifique et de sa transmission.

De plus les idées foisonnantes d'Anthony Joseph et sa connaissance très pointue du sujet m'ont permis de trouver moi-même quelques idées nouvelles et de toujours renouveler mes propres connaissances, les approfondir et découvrir des aspects des mathématiques qui m'étaient inconnus jusqu'alors. Cela est un très grand plaisir pour moi et une immense fierté de contribuer à écrire ne serait-ce qu'une infime partie de cette longue histoire des mathématiques.

## Liste de mes travaux.

- [F1] F. Fauquant-Millet, Algèbres enveloppantes quantifiées : sous-algèbres paraboliques et leurs semi-invariants. *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI (soutenue le 11 décembre 1998)*.
- [F2] F. Fauquant-Millet, Sur une algèbre parabolique  $\mathbf{P}$  de  $\check{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$  et ses semi-invariants par l'action adjointe de  $\mathbf{P}$ . *Bull. Sci. Math.*, **122** (1998) p. 495-519.
- [F3] F. Fauquant-Millet, Quantification de la localisation de Dixmier de  $\mathbf{U}(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ . *J. of Algebra*, **218** (1999), p. 93-116.
- [F4] F. Fauquant-Millet et A. Joseph, Sur les semi-invariants d'une sous-algèbre parabolique d'une algèbre enveloppante quantifiée. *Transformation Groups*, **Vol. 6**, No. 2 (2001), p. 125-142.
- [F5] F. Fauquant-Millet et A. Joseph, Semi-centre de l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, **38** (2005), p. 155-191.
- [F6] F. Fauquant-Millet et A. Joseph, La somme des faux degrés - un mystère en théorie des invariants. The sum of the false degrees - A mystery in the theory of invariants. *Advances in Mathematics*, **Vol. 217/4** (2008), p. 1476-1520.
- [F7] F. Fauquant-Millet et A. Joseph, Slices for biparabolics of index one. *Transformation Groups*, **Vol.16**, No. 4, (2011), p. 1081– 1113.
- [F8] F. Fauquant-Millet et A. Joseph, Adapted pairs in type  $A$  and regular nilpotent elements, soumis en juin 2013. *arXiv :1306.0529*
- [F'1] F. Fauquant-Millet, Description du semi-invariant dans le cas  $(2, 3)$  de  $\mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$ , article non publié **2009**. J'ai parlé de cette recherche dans mon exposé intitulé "Semi-centre of parabolic subalgebras" à la Conférence internationale "Algebraic Groups and Invariant Theory", du 30 août au 4 septembre 2009, au Centro Stefano Franscini (Ascona, Suisse).

Voir les "slides" de cet exposé à l'adresse :

<http://www.uni-graz.at/~baurk/AGIT/program.html>

# Bibliographie.

- [1] J. Alev et F. Dumas, Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques. *J. of Algebra*, **170** (1994), p. 229-265.
- [2] J. Alev, A. Ooms et M. Van den Bergh, A class of counterexamples to the Gelfand-Kirillov conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996) p. 1709-1716.
- [3] J. Alev, A. Ooms et M. Van den Bergh, The Gelfand-Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight. *J. of Algebra* **227** (2000), p. 549-581. *Corrigendum J. of Algebra* **230** (2000) p. 749.
- [4] F. Berdjis, A criterion for completeness of Casimir operators. *J. Math. Phys.* **22** (9), (Septembre 1981), p. 1851-1856.
- [5] A.M. Bincer, Casimir operators of the exceptional group  $G_2$  in a  $B_3$  basis. *Can. J. Phys.* **72**, 319 (1994), p. 319-320.
- [6] W. Borho, P. Gabriel et R. Rentschler, Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren, *Lecture Notes in Math.* **Vol. 357** Springer, Berlin and New-York, 1973.
- [7] A. Borel, "Linear Algebraic Groups", Second Enlarged Edition, Graduate Texts in Mathematics, **126**, Springer-Verlag, New York Inc., 1991.
- [8] N. Bourbaki, "Groupes et Algèbres de Lie", Chap. IV - VI, Hermann, Paris, 1968.
- [9] N. Bourbaki, "Groupes et Algèbres de Lie", Chap. VII et VIII, Hermann, Paris, 1975.
- [10] R.W. Carter et G.B. Elkington, A note on the parametrization of conjugacy classes. *J. of Algebra* **20** (1972), p. 350-354.
- [11] C. Chevalley, "Théorie des Groupes de Lie", Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago I et IV, Hermann, Paris, 1968.
- [12] V. Coll, A. Giaquinto et C. Magnant, Meanders and Frobenius seaweed Lie algebras. *J. Gen. Lie Theory Appl.* **5** (2011), Art. ID G110103.
- [13] V. Dergachev et A. Kirillov, Index of Lie algebras of seaweed type. *J. Lie Theory* **10** (2000), No. 2, p. 331-343.
- [14] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents II. *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), p. 325-388.

- [15] J. Dixmier, Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. *C.R. Acad. Sc. Paris*, **265** (1967) p. 408-410.
- [16] J. Dixmier, "Algèbres enveloppantes", Editions Jacques Gabay, Gauthier-Villars, 1974.
- [17] J. Dixmier, Sur les algèbres enveloppantes de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  et  $\mathfrak{af}(n, \mathbb{C})$ . *Bull. Sci. Math. 2ème série*, **100** (1976), p. 57-95.
- [18] M. Duflo, Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **5** (1972) p. 71-120.
- [19] M. Duflo, Construction of primitive ideals in an enveloping algebra. *Publ. of 1971 Summer School in Math., edited by I.M. Gelfand, Bolyai-Janos Math. Soc., Budapest.*
- [20] A.G. Elashvili, On the index of parabolic subalgebras of semisimple Lie algebras, preprint, 1990.
- [21] V. Futorny et J. T. Hartwig, Solution of a  $q$ -difference Noether problem and the quantum Gelfand-Kirillov conjecture for  $\mathfrak{gl}_N$ , *arXiv : 1111.6044*.
- [22] I.M. Gelfand et A.A. Kirillov, Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie. *Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math.* **31** (1966), p. 509-523.
- [23] B. Gruber et L. O'Raiheartaigh, S Theorem and construction of the invariants of the semisimple compact Lie algebras. *J. Math. Phys. Vol. 5, No. 12, (december 1964), p. 1796-1804.*
- [24] I. Heckenberger, On the semi-centre of  $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$  for parabolic subalgebras  $\mathfrak{p}$  of  $\mathfrak{so}_7$  and  $\mathfrak{so}_9$ , Weizmann Institute Report, 2005, non publié.
- [25] A. Joseph, Proof of the Gelfand-Kirillov conjecture for solvable Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974) p. 1-10.
- [26] A. Joseph, A generalization of the Gelfand-Kirillov conjecture. *Amer. J. of Math., Vol. 99* (1977), No. 6, p. 1151-1165.
- [27] A. Joseph, Second commutant theorems in enveloping algebras. *Amer. J. of Math., Vol. 99* (1977), No. 6, p. 1167-1192.
- [28] A. Joseph, A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra. *J. of Algebra*, **48** (1977), p. 241-289.
- [29] A. Joseph, "Quantum groups and their primitive ideals", *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge. Band 29, A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Springer-Verlag (1995).
- [30] A. Joseph, On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras, I. *J. of Algebra*, **305** (2006), p. 487-515.
- [31] A. Joseph, On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras, II. *J. of Algebra*, **312** (2007), p. 158-193.
- [32] A. Joseph, Parabolic actions in type A and their eigenslices. *Transformation Groups*, **Vol. 12, No. 3** (2007), p. 515-547.

- [33] A. Joseph, A slice theorem for truncated parabolics of index one and the Bezout equation. *Bull. Sci. Math.* **131** (2007), No. 3, p. 276-290.
- [34] A. Joseph, Compatible adapted pairs and a common slice theorem for some centralizers. *Transformation Groups*, **Vol. 13** (2008), Nos. 3-4, p. 637-669.
- [35] A. Joseph, Slices for biparabolic coadjoint actions in type A. *J. of Algebra* **319** (2008), No. 12, p. 5060-5100.
- [36] A. Joseph, An algebraic slice in the coadjoint space of the Borel and the Coxeter element. *Advances in Mathematics*, **227** (2011), p. 522-585.
- [37] A. Joseph, Some remarks on Weierstrass sections, adapted pairs and polynomiality. V. Dobrev (ed.) *Lie Theory and its applications in physics : IXth International workshop, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* **36**, DOI 10.1007/978-4-431-54270-4-4, Springer Japan 2013.
- [38] A. Joseph, The hidden semi-invariants generators of a quasi-Frobenius biparabolic. *preprint*
- [39] A. Joseph et P. Lamprou, Maximal Poisson commutative subalgebras for truncated parabolic subalgebras of maximal index in  $\mathfrak{sl}_n$ . *Transform. Groups* **12** (3) (2007), p. 549-571.
- [40] A. Joseph et D. Shafrir, Polynomiality of invariants, unimodularity ad adapted pairs. *Transform. Groups* **15** (2010), No. 4, p. 851-882.
- [41] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 973-1032.
- [42] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. of Math.*, **85** (1963), p. 327-404.
- [43] P. Lamprou, Slices for maximal truncated parabolic subalgebras of a semisimple Lie algebra. *preprint*
- [44] J.C. McConnell, Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture. *Proc. London Math. Soc.* **29** (1974), p. 453-484.
- [45] A. Melnikov, **B**-orbits of nilpotent order 2 and link patterns. *arXiv :math/0703371*.
- [46] A.S. Mishchenko, A.T. Fomenko, Euler equation on finite-dimensional Lie groups. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **42** (2) (1978) p. 396-415, 471.
- [47] A. Moreau et O. Yakimova, Coadjoint orbits of reductive type of seaweed Lie algebras. *Int. Math. Res. Not.* (to appear).
- [48] M. Nazarov et G. Olshanski, Bethe subalgebras in twisted Yangians. *Comm. Math. Phys.* **178** (2) (1996) p. 483-506.
- [49] A. I. Ooms et M. Van den Bergh, A degree inequality for Lie algebras with a regular Poisson semi-center. *J. of Algebra* **323** (2010), No. 2, p. 305-322.
- [50] D. Panyushev, Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras, *Mosc. Math. J.* **1** (2) (2001), p. 221-241, 303.

- [51] D. Panyushev, An extension of Raïs theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (3) (2005) p. 693-715.
- [52] V.L. Popov, Sections in invariant theory, in : The Sophus Lie Memorial Conference, Oslo, 1992, *Scandinavian University Press, Oslo, 1994*, p. 315-361.
- [53] D. Panyushev, A. Premet, O. Yakimova, On symmetric invariants of centralizers in reductive Lie algebras. *J. of Algebra*, **313** (2007), No. 1, p. 343-391.
- [54] A.M. Perelomov et V.S. Popov, Casimir Operators for the orthogonal and symplectic groups. *Soviet Journal of Nuclear Physics* **3**, No. 6, p. 819-824, (December 1966).
- [55] A. Premet, Modular Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture. *Inventiones Mathematicae* **181** (2010) p. 395-420.
- [56] M. Rosenlicht, A remark on quotient spaces. *An. Acad. Brasil. Cienc.* **35** (1963) p. 487-489.
- [57] R. Rentschler, M. Vergne, Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie, *Ann. Scient. École Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série* **6** (1973) p. 389-405.
- [58] I.R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, Varieties in Projective Space, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1977, 1994.
- [59] P. Tauvel et R.W.T. Yu, Sur l'indice de certaines algèbres de Lie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (6) (2004) 1793-1810.
- [60] P. Tauvel et R.W.T. Yu, "Lie Algebras and Algebraic Groups", Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2000.
- [61] O. Yakimova, A counterexample to Premet's and Joseph's conjecture. *Bull. Lond. Math. Soc.* **39** (2007), No. 5, p. 749-754.

# Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>I Notions préliminaires.</b>	<b>5</b>
A Un problème de Dixmier. . . . .	5
B Notations et premières définitions. . . . .	6
1 Sous-algèbre parabolique et biparabolique de $\mathfrak{g}$ . . . . .	6
2 Décomposition d'une sous-algèbre parabolique ou biparabolique. . . . .	8
3 Opposée d'une sous-algèbre biparabolique. . . . .	9
4 Centre d'une sous-algèbre biparabolique. . . . .	10
5 Semi-centre et centre (de Poisson). . . . .	10
6 Algèbre (presque) ad-algébrique. . . . .	14
7 Troncation canonique. . . . .	16
8 Centre et semi-centre de Poisson d'un biparabolique et centre d'un parabolique tronqué. . . . .	17
9 Indice d'une algèbre de Lie. . . . .	19
<b>II Le cas quantique.</b>	<b>22</b>
A Le théorème fondamental. . . . .	22
1 Le contexte. . . . .	22
2 Le résultat fondamental. . . . .	24
B Le cas particulier d'une sous-algèbre parabolique propre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{k})$ de dimension maximale. . . . .	26
1 Description de $\mathbf{Sy}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{p}))$ . . . . .	26
2 La conjecture de Gelfand-Kirillov. . . . .	27
C Le cas quantique général. . . . .	30
1 Les involutions $i$ et $j$ de $\pi$ . . . . .	30
2 La polynomialité du semi-centre quantique. . . . .	31

<b>III</b>	<b>Du cas quantique au cas classique.</b>	<b>33</b>
A	La polynomialité d'une certaine sous-algèbre d'invariants du dual de Hopf $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ de $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ .	33
1	Les notations.	34
2	La Proposition.	35
B	La dimension de Gelfand-Kirillov de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .	35
1	La Proposition.	35
2	Le cas d'un (bi)parabolique tronqué d'indice un.	37
<b>IV</b>	<b>Le cas classique.</b>	<b>38</b>
A	L'application de Kostant et la borne inférieure.	39
1	La filtration de Kostant.	39
2	L'application de Kostant.	39
3	La borne inférieure.	40
4	Vers une approche des semi-invariants comme éléments harmoniques.	42
B	La borne supérieure.	45
1	Rappels sur le semi-centre du Borel.	45
2	Un localisé de $\mathbf{S}(\mathfrak{p})^n$ .	46
3	Termes principaux des éléments de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ .	47
4	L'algèbre de polynômes $\mathbf{S}^J$ .	48
C	Comparaison des deux bornes.	51
1	Récapitulatif.	51
2	Le théorème.	52
D	Généralisation.	52
1	La borne inférieure pour un biparabolique.	53
2	La borne supérieure pour un biparabolique.	56
3	Comparaison des deux bornes.	57
4	Cas où les deux bornes de l'encadrement de $ch(\mathbf{Sy}(\mathfrak{q}))$ ne coïncident pas forcément et où l'on peut quand même conclure.	57
5	Reste encore des problèmes non résolus.	61
<b>V</b>	<b>Lien entre les deux cas extrêmes et la somme des faux degrés.</b>	<b>64</b>
A	Lien entre les deux cas extrêmes.	65
1	Construction de l'application linéaire $\varphi$ entre $\mathbf{Sz}(\mathfrak{b})$ et $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ et de l'application linéaire $gr\varphi$ entre $\mathbf{Sy}(\mathfrak{b})$ et $\mathbf{Y}(\mathfrak{g})$ .	65
2	Restriction des applications linéaires $\varphi$ et $gr\varphi$ .	65
B	Calcul de l'indice de $\mathfrak{p}$ .	70
1	Premières observations sur le rang de $\Lambda(\mathfrak{p})$ .	71
2	Une sous-algèbre particulière de $\mathfrak{h}$ .	71
3	Conséquences.	72
C	La somme des faux degrés.	74
1	Définition des faux degrés.	74
2	La somme des faux degrés.	76

D	Un exemple de calcul explicite en type $A$ de la troncation canonique d'un parabolique et degrés et poids des générateurs de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p}) = \mathbf{Y}(\mathfrak{p}_\Lambda)$ . . . . .	78
1	L'ensemble $\Pi$ . . . . .	79
2	Ensemble des poids du semi-centre $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ , troncation canonique de $\mathfrak{p}$ et indice de $\mathfrak{p}$ . . . . .	79
3	Degrés des générateurs de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ . . . . .	80
4	Poids des générateurs de $\mathbf{Sy}(\mathfrak{p})$ . . . . .	80
5	Somme des faux degrés. . . . .	80
<b>VI Une autre approche de la polynomialité : les sections de Weierstrass et les paires adaptées. . . . . 81</b>		
A	Définitions et premières propriétés. . . . .	82
1	Les sections de Weierstrass. . . . .	82
2	Les paires adaptées. . . . .	84
3	Construction de sections de Weierstrass. . . . .	86
B	Recherche d'éléments réguliers nilpotents de $\mathfrak{g}$ via les paires adaptées, en type $A$ . . . . .	88
1	Le cas de l'indice un. . . . .	88
2	Généralisation en type $A$ . . . . .	90
<b>VII Des problèmes ouverts. . . . . 112</b>		
A	Recherche d'autres paires adaptées. . . . .	112
B	Forme minimale d'un élément régulier de $\mathcal{N}(\mathfrak{q}_\Lambda)$ . . . . .	112
C	Irréductibilité de $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$ pour un biparabolique $\mathfrak{q}$ Frobenius. . . . .	113
D	Quelle est l'image par l'application de restriction de l'ensemble des éléments réguliers nilpotents de $\mathfrak{g}$ ? . . . . .	114
E	Cas de l'indice un : description du générateur du semi-centre. . . . .	114
<b>Remerciements. . . . .</b>		<b>116</b>
<b>Liste de mes travaux. . . . .</b>		<b>117</b>
<b>Bibliographie. . . . .</b>		<b>118</b>