



**HAL**  
open science

# Étude de faisabilité d'un revêtement élastique pour la furtivité acoustique.

C. Dutrion

► **To cite this version:**

C. Dutrion. Étude de faisabilité d'un revêtement élastique pour la furtivité acoustique.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace - ISAE, 2014. Français. NNT: . tel-01020765

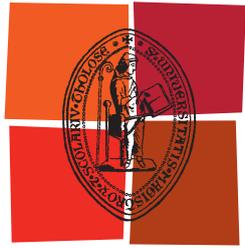
**HAL Id: tel-01020765**

**<https://theses.hal.science/tel-01020765>**

Submitted on 8 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Cécile DUTRION**

**le** mercredi 26 février 2014

**Titre :**

Étude de faisabilité d'un revêtement élastique pour la furtivité acoustique

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MEGeP : Dynamique des fluides

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Frank SIMON

**Jury :**

M. Mabrouk BEN TAHAR - rapporteur

M. Fabrice BOUST

M. Manuel COLLET

M. Sylvain GRANSART

M. Jean-Louis GUYADER - rapporteur

M. Frank SIMON - directeur de thèse



Cette thèse a été effectuée grâce aux financements de la Direction Générale de l'Armement et de la Région Midi-Pyrénées, au sein de l'ONERA Toulouse (Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique, Unité Instabilités, Transition et Acoustique).





---

## Étude de faisabilité d'un revêtement élastique pour la furtivité acoustique

### Résumé

Dans le cadre de certaines applications militaires ou métrologiques, on peut chercher à rendre un objet « invisible » vis-à-vis des ondes acoustiques. Différentes méthodes passives ont été proposées ces dernières années pour éviter ou atténuer la diffraction d'ondes acoustiques sur des obstacles rigides. Ces techniques reposent sur des phénomènes purement acoustiques, avec par exemple la présence de multiples résonateurs ou d'objets diffractants. L'étude présentée ici s'intéresse pour sa part aux effets que l'on pourrait obtenir au moyen d'un revêtement multicouche élastique fixé à un cylindre que l'on souhaite rendre indétectable.

Le comportement vibro-acoustique d'un tel revêtement est d'abord modélisé. Par optimisation, on détermine les caractéristiques mécaniques et dimensionnelles des couches permettant une atténuation omnidirectionnelle de la diffraction. Des configurations réalistes de revêtements composés d'une couche orthotrope et d'une couche isotrope sont dégagées dans le cas d'un milieu extérieur constitué d'air. On montre que de tels dispositifs permettent d'atténuer la diffraction à une fréquence donnée ou sur une bande de fréquence. Le problème de la caractérisation expérimentale de ces revêtements est également abordé.

Dans un second temps, le cas d'un milieu extérieur constitué d'eau est étudié. On met alors en évidence une réduction de la diffraction avec des revêtements composés de deux couches isotropes. L'influence des différents paramètres de la couche intérieure est analysée. Enfin, des exemples montrent que la bande de fréquence sur laquelle a lieu l'atténuation de la diffraction peut être élargie en augmentant le nombre de couches.

### Mots clés

diffraction acoustique, cylindre, furtivité, optimisation, matériau élastique multicouche

---

## Feasibility study of an acoustic cloak using a multi-layered elastic coating

### Abstract

Making an object invisible to acoustic waves could prove useful for military applications or measurements in confined space. Different passive methods have been proposed in recent years to avoid acoustic scattering from rigid obstacles. These techniques are exclusively based on acoustic phenomena, and use for instance multiple resonators or scatterers. This thesis deals with a different method and studies the effects in terms of scattering reduction of an elastic multi-layered coating fixed to the object to conceal.

Vibrations of the coating subject to acoustic waves are first modelled to compute the scattered pressure in the external fluid. Mechanical and dimensional properties of the layers leading to omnidirectional scattering reduction are optimised. Considering an external fluid consisting of air, realistic configurations of coatings emerge, composed of a thick internal orthotropic layer and a thin external isotropic layer. These coatings are shown to enable scattering reduction at a precise frequency or on a larger frequency band. The problem of experimental characterisation is also addressed.

The study then focuses on a cylinder immersed in water. Bi-layer isotropic coatings can be used in such configuration. A parametric study is led on the characteristics of the internal layer. Finally, significant scattering reduction is achieved for a larger frequency range by increasing the number of layers. Examples of four-layer isotropic coatings are presented to highlight this result.

### Keywords

acoustic scattering, cylinder, cloaking, optimisation, elastic multi-layered material

---



# Table des matières

Résumés	v
Table des matières	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xv
Notations et abréviations	xvii
Introduction	1
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Méthode de transformation de coordonnées	6
1.1.1 Principe	6
1.1.2 Masse volumique anisotrope : revêtement inertiel	8
1.1.3 Élasticité anisotrope : matériaux pentamodes	16
1.2 Méthodes d'annulation de la diffraction	18
1.2.1 Diffractions multiples et interférences destructives	18
1.2.2 Revêtement de type plasmonique	20
1.2.3 Impédance de surface	22
1.2.4 Méthode hybride	25
<b>2 Modélisation du revêtement multicouche cylindrique</b>	<b>29</b>
2.1 Description du problème et mise en équations	30
2.1.1 Présentation du problème	30
2.1.2 Pression acoustique dans le fluide extérieur	32
2.1.3 Contraintes et déformations dans le revêtement élastique	33
2.2 Résolution des équations du mouvement	36
2.2.1 Méthode de Skelton : approximations radiales de type éléments finis	36
2.2.2 Méthode avec matrices de transfert	43
2.3 Validation	48
2.3.1 Cylindre recouvert d'un revêtement isotrope	48
2.3.2 Cylindre recouvert d'un matériau orthotrope	51

<b>I</b>	<b>Milieu extérieur : air</b>	<b>55</b>
<b>3</b>	<b>Réduction de la diffraction dans l'air</b>	<b>57</b>
3.1	Démarche . . . . .	58
3.1.1	Choix d'une configuration . . . . .	58
3.1.2	Objectif et contraintes . . . . .	62
3.1.3	Sélection de configurations intéressantes . . . . .	63
3.2	Émergence de configurations bicouches orthotropes/isotropes . . . . .	64
3.2.1	Exemple de revêtement bicouche . . . . .	65
3.2.2	Contribution des différents modes au résultat final . . . . .	68
3.2.3	Intensité acoustique et intensité de structure . . . . .	70
3.3	Élargissement de la bande de fréquence d'atténuation de la diffraction . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Vers une configuration réalisable expérimentalement</b>	<b>77</b>
4.1	Passage d'un cylindre rigide infini à un cylindre de dimension finie . . . . .	78
4.1.1	Simulations 2D et 3D par éléments finis . . . . .	78
4.1.2	Comparaison entre résultats expérimentaux et code 2D . . . . .	80
4.2	Sélection d'une configuration bicouche au moyen des outils numériques . . . . .	82
4.2.1	Mousse de polyéthylène orthotrope comme couche intérieure . . . . .	82
4.2.2	Sélection d'une couche extérieure isotrope . . . . .	82
4.2.3	Réduction de la diffraction permise par le revêtement « PE/PMP » . . . . .	84
4.3	Essais préliminaires . . . . .	86
4.4	Mesures vibratoires en réponse à une excitation mécanique . . . . .	89
4.4.1	Description du dispositif . . . . .	89
4.4.2	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	89
<b>II</b>	<b>Milieu extérieur : eau</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>Réduction de la diffraction dans l'eau</b>	<b>95</b>
5.1	Des revêtements bicouches isotropes réalistes . . . . .	96
5.1.1	Configuration étudiée . . . . .	96
5.1.2	Recherche de solutions . . . . .	96
5.1.3	Exemple de revêtement bicouche élastomère/acier . . . . .	97
5.2	Étude paramétrique sur la couche intérieure . . . . .	98
5.2.1	Influence du facteur de perte . . . . .	100
5.2.2	Influence du coefficient de Poisson . . . . .	100
5.2.3	Influence de l'épaisseur . . . . .	106
5.3	Piste pour un revêtement large bande . . . . .	109
5.4	Comparaison eau/air . . . . .	111
5.4.1	Fonctions objectif $F_{\text{obj},1}$ et $F_{\text{obj},3}$ . . . . .	111
5.4.2	Milieux air et eau et nombres d'onde réduits $k_0 a \simeq 1$ et $k_0 a = 60$ . . . . .	111
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>113</b>

---

<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Superposition de couches homogènes isotropes</b>	<b>119</b>
A.1	Passage de la théorie à un modèle approché . . . . .	119
A.1.1	Principe . . . . .	119
A.1.2	Choix des paramètres . . . . .	120
A.1.3	Remarques . . . . .	123
A.2	Simulations COMSOL . . . . .	123
A.2.1	Configurations étudiées . . . . .	124
A.2.2	Choix d'une loi pour la vitesse du son . . . . .	125
A.2.3	Récapitulatif . . . . .	125
A.2.4	Résultats . . . . .	126
A.2.5	Remarque : paramètres constants dans la couche peu dense . . . . .	128
<b>B</b>	<b>Résolution des équations de Helmholtz et de Navier</b>	<b>129</b>
B.1	Résolution analytique . . . . .	129
B.1.1	Équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques . . . . .	129
B.1.2	Équations de Navier en coordonnées cylindriques . . . . .	132
B.2	Détails sur la résolution numérique des équations du mouvement . . . . .	133
B.2.1	Méthode de type éléments finis pour la discrétisation radiale . . . . .	133
B.2.2	Méthode de matrice de transfert et exponentielle matricielle . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Informations techniques sur le PMP</b>	<b>139</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>



# Table des figures

1.1	Transformation de coordonnées, d'après Leonhardt et Tyc (2009) et Norris (2008) . . .	7
1.2	Compression uniforme . . . . .	8
1.3	Obstacle sphérique entouré d'un revêtement inertiel idéal (Cummer <i>et al.</i> , 2008) . . .	9
1.4	Discrétisation du revêtement en 20 bicouches de matériaux homogènes isotropes . . .	12
1.5	Diagramme d'Ashby utilisé pour choisir une transformation de coordonnées $f$ . . . .	13
1.6	Dispositif permettant d'obtenir un métafluide de masse volumique anisotrope, présenté par Torrent et Sánchez-Dehesa (2010). . . . .	14
1.7	Proposition de García-Chocano <i>et al.</i> (2012) basée sur l'utilisation de gradients de température . . . . .	14
1.8	Revêtement conçu par Zhang, Xia, et Fang (2011), et pression mesurée à l'arrière d'un cylindre soumis à une source ponctuelle d'ultrasons émettant à 60 kHz. . . . .	15
1.9	Vue oblique d'un métamatériau mécanique pentamode réalisé par <i>Direct-Laser-Writing</i> (Kadic <i>et al.</i> , 2012). . . . .	17
1.10	Configuration 2D testée par García-Chocano <i>et al.</i> (2011) . . . . .	19
1.11	Configuration 3D testée par Sanchis <i>et al.</i> (2013). . . . .	19
1.12	Configuration 2D mise au point par Delrieu (2012). . . . .	19
1.13	Variations du gain en diffraction en fonction des paramètres de la couche recouvrant la sphère. Fréquence $k_0 a = 0.5$ et $b = 1.1a$ . (Guild, 2012) . . . . .	22
1.14	Schéma en coupe d'une métasurface enveloppant une sphère et exemples de configurations possibles pour la surface (Farhat <i>et al.</i> , 2012) . . . . .	24
1.15	Schéma d'un revêtement à réaction étendue (Bobrovnikskiĭ, 2008) . . . . .	24
1.16	Configuration hybride, d'après Martin et Orris (2012) . . . . .	25
2.1	Schéma de la géométrie . . . . .	30
2.2	Contraintes sur un élément cylindrique . . . . .	34
2.3	Position des nœuds d'un élément . . . . .	38
2.4	Assemblage des matrices et vecteurs $\mathbf{S}_n^k$ , $\mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^k$ et $\mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^k$ des $q$ sous-couches de l'élément $j$ , pour former le système $\mathbf{Z}_n^j \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^j$ . . . . .	40
2.5	Assemblage des matrices élémentaires $\mathbf{T}_n^j$ pour former le système matriciel global $\mathcal{W}_n \mathbf{u}_{n,\text{interfaces}} = \mathcal{F}_{n,\text{interfaces}}$ . . . . .	41
2.6	Caractéristiques des revêtements non uniformes 1 et 2. Discrétisation en 20 couches homogènes. . . . .	49
2.7	Comparaison entre les diagrammes de directivité obtenus par Romanov et Tolokonnikov (2011) et ceux calculés avec les méthodes 1 et 2. . . . .	50
2.8	Comparaison entre les niveaux de pression en champ lointain obtenus par Skelton et James (1993) et ceux obtenus avec les méthodes 1 et 2. . . . .	53

3.1	Diagramme d'Ashby ( $E, \rho$ ) adapté de CES Selector, Granta Design Ltd. . . . .	58
3.2	Zones de masses volumiques et de modules d'Young adimensionnés correspondant aux matériaux réels dans le cas d'une utilisation dans l'air et dans l'eau. . . . .	59
3.3	Diagrammes de directivité pour $k_0a = 1$ et 9 dans le cas d'un cylindre rigide . . . . .	60
3.4	Contribution des premiers modes de diffraction pour $0 \leq k_0a \leq 10$ dans le cas d'un cylindre rigide . . . . .	60
3.5	Configuration bicouche plane étudiée par Simon <i>et al.</i> (2006) et coefficient de réflexion obtenu avec une couche de feutre de 20 mm et une de titane de 1 mm. . . . .	61
3.6	Diagrammes de directivité obtenus pour $k_0a \approx 1.05$ , en l'absence et en présence du revêtement « SOGA_air ». . . . .	66
3.7	Gain en diffraction en fonction de la fréquence pour le revêtement « SOGA_air ». . . . .	66
3.8	Champs de pression autour d'un cylindre rigide entouré ou non du revêtement « SOGA_air ». . . . .	67
3.9	Contribution des 4 premiers modes de diffraction dans le cas d'un cylindre rigide . . . . .	68
3.10	Contribution des 4 premiers modes de rayonnement, réflexion et diffraction avec le revêtement « SOGA_air » . . . . .	69
3.11	Vecteurs intensité acoustique et intensité de structure dans le cas du revêtement « SOGA_air », à 380 Hz . . . . .	71
3.12	Vecteurs intensité de structure à l'intérieur du revêtement « SOGA_air » . . . . .	71
3.13	Résultats d'optimisation multi-objectif par algorithme génétique. . . . .	72
3.14	Gain en diffraction obtenu pour différentes configurations issues du front de Pareto . . . . .	73
3.15	Contribution des 4 premiers modes de rayonnement, réflexion et diffraction avec le revêtement « MOGA_air_B » . . . . .	75
4.1	Calcul 3D de la pression dans une sphère entourant un cylindre rigide de 1 m de long . . . . .	78
4.2	Amplitude de la pression dans le plan $z = 0$ calculée en 2D et en 3D, à 600 et 2000 Hz . . . . .	79
4.3	Dispositif de mesure intensimétrique en chambre anéchoïque. . . . .	80
4.4	Rapports de pression $ p/p_{inc} $ obtenus expérimentalement et avec le modèle vibro-acoustique 2D, sur un cercle entourant le cylindre, dans son plan médian . . . . .	81
4.5	Intensité acoustique dans la direction radiale (en dB) sur un cercle situé dans le plan médian du cylindre. Résultats expérimentaux et numériques . . . . .	81
4.6	Échantillon de mousse de polyéthylène . . . . .	82
4.7	Masse volumique $\rho_2$ et module d'Young $E_2$ permettant d'obtenir un gain en diffraction $\sigma_{gain} < -3$ dB à 600 Hz, pour quatre épaisseurs $h_2$ de la couche extérieure (couche intérieure : mousse PE). . . . .	83
4.8	Gain en diffraction en fonction de la fréquence pour la configuration « PE/PMP ». . . . .	85
4.9	Champs de pression à 600 Hz autour d'un cylindre entouré ou non du revêtement « PE/PMP ». . . . .	85
4.10	Rapports de pression $ p/p_{inc} $ obtenus numériquement sur un cercle entourant le cylindre, dans son plan médian, sans et avec le revêtement « PE/PMP » . . . . .	85
4.11	Exemple de poutres testées en analyse modale. . . . .	86
4.12	Dispositif expérimental utilisé pour estimer le module d'Young dans l'épaisseur de PE . . . . .	87
4.13	Excitation au marteau d'un revêtement « PE/PMP » collé sur un cylindre, et mesure de l'accélération résultante . . . . .	89
4.14	Fonctions de transfert accélération/force (en dB) obtenue expérimentalement. . . . .	90
4.15	Fonctions de transfert accélération/force (en dB) obtenues numériquement. . . . .	91

5.1	Fonction objectif $F_{\text{obj},3}$ en fonction de $\rho_1$ , $E_1$ et $h_1$ . Cylindre de 4.4 m de rayon, couche extérieure de 2 mm d'acier, et fréquence de 3255 Hz. . . . .	97
5.2	Diagrammes de directivité obtenus pour $k_0a = 60$ , sans revêtement et avec le revêtement « SOGA_eau ». . . . .	99
5.3	Gain en diffraction $\sigma_{\text{gain}}$ en fonction de la fréquence pour la configuration « SOGA_eau »	99
5.4	Influence du facteur de perte de la couche intérieure $\eta_1$ sur la fonction objectif $F_{\text{obj},3}$ , pour $\nu_1 = 0.48$ , $h_1 = 33$ mm, et $k_0a = 60$ . . . . .	101
5.5	Influence du coefficient de Poisson de la couche intérieure $\nu_1$ sur la fonction objectif $F_{\text{obj},3}$ , pour $\eta_1 = 10\%$ , $h_1 = 33$ mm, et $k_0a = 60$ . . . . .	102
5.6	Gain en diffraction en fonction de la fréquence pour des configurations correspondant aux maxima de diffraction pour 3 coefficients de Poisson différents . . . . .	103
5.7	Diagrammes de directivité obtenus à 3300 Hz, sans revêtement et avec le revêtement de caractéristiques données dans la table 5.3 pour $\nu_1 = 0.48$ . . . . .	104
5.8	Gain en diffraction en fonction de la fréquence pour deux configurations correspondant au deuxième type de réduction de la diffraction . . . . .	105
5.9	Diagrammes de directivité obtenus à 18500 Hz, sans revêtement et avec le revêtement de caractéristiques données dans la table 5.3 pour $\nu_1 = 0.48$ . . . . .	105
5.10	Influence de l'épaisseur de la couche intérieure $h_1$ sur la fonction objectif $F_{\text{obj},3}$ , pour $\nu_1 = 0.48$ , $\eta_1 = 10\%$ , et $k_0a = 60$ . . . . .	107
5.11	Gain en diffraction en fonction de la fréquence pour différentes épaisseurs de couche intérieure . . . . .	108
5.12	Gain en diffraction en fonction de la fréquence dans le cas de revêtements composés de 4 couches, pour différentes épaisseurs relatives de matériaux A et B . . . . .	110
A.1	Masse volumique en fonction de $r$ pour différents $f$ . . . . .	122
A.2	Masses volumiques des différentes couches lors des simulations pour les cas 3, 4 et 5 .	125



# Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif des différentes réalisations de revêtements passifs pour la furtivité acoustique . . . . .	27
2.1	Paramètres d'adimensionnement. . . . .	31
2.2	Caractéristiques d'un cas test proposé par <b>Romanov et Tolokonnikov (2011)</b> : cylindre rigide entouré d'un revêtement isotrope homogène en polyvinylbutiral (PVB). . . . .	49
2.3	Caractéristiques des configurations testées par <b>Skelton et James (1993)</b> . . . . .	52
3.1	Caractéristiques du feutre métallique en titane utilisé par <b>Simon et al. (2006)</b> . . . . .	61
3.2	Caractéristiques de la configuration « SOGA_air ». . . . .	65
3.3	Caractéristiques de quatre solutions du front de Pareto. . . . .	73
3.4	Caractéristiques de la configuration « MOGA_air_B ». . . . .	74
4.1	Caractéristiques de la configuration « PE/PMP ». . . . .	84
4.2	Caractéristiques des systèmes masse-mousse testés et résultats obtenus. . . . .	88
5.1	Caractéristiques de la configuration élastomère/acier « SOGA_eau ». . . . .	98
5.2	Caractéristiques des configurations correspondant aux maxima de réduction de la diffraction pour différentes valeurs de $\nu_1$ . . . . .	103
5.3	Caractéristiques des configurations correspondant au deuxième type de réduction de la diffraction, pour $\nu_1 = 0.48$ et $\nu_1 = 0.495$ . . . . .	104
5.4	Caractéristiques de la configuration sur laquelle est testée l'influence de l'épaisseur de la couche intérieure. . . . .	106
5.5	Caractéristiques des configurations à 4 couches testées ici. . . . .	109
A.1	Caractéristiques des couches constituant le revêtement entourant le cylindre dans les cas 3, 4 et 5 (masse volumique et célérité du son) . . . . .	124
B.1	Type d'onde cylindrique représenté par les fonction de Hankel selon la convention de temps choisie. . . . .	131



# Notations et abréviations

$\varepsilon$	déformation
$\sigma$	contrainte
$\mathbf{f}$	forces volumiques
$I$	intensité
$\mathbf{t}$	contraintes surfaciques
$\mathbf{u}$	déplacement
$\mathbf{V}_n$	vecteur d'état modal (déplacements et contraintes modaux à la surface d'une couche)
$\mathbf{Y}$	vecteur d'état (déplacements et contraintes à la surface d'une couche)
$\gamma$	nombre d'onde dans la direction radial (cas 3D)
$\epsilon_n$	facteur de Neumann (1 si $n = 0$ , 2 si $n \geq 1$ )
$\eta$	facteur de perte
$\lambda$	longueur d'onde
$\kappa$	constante de raideur du ressort
$\nu$	coefficient de Poisson
$\rho$	masse volumique
$\sigma$	section efficace (de diffraction)
$\omega$	pulsation
$a$	rayon de l'obstacle cylindrique ou sphérique
$b$	rayon extérieur du revêtement entourant l'obstacle
$c$	célérité du son
$c_{kl}$	coefficients de la matrice de rigidité
$E$	module d'Young
$F$	force
$F_{obj}$	fonction objectif
$f$	fréquence (chapitres 3, 4, 5)
$G$	module de cisaillement

---

$H$	fonction de transfert accélération/force
$h$	épaisseur d'une couche élastique
$K$	module d'élasticité isostatique
$k$	nombre d'onde
$l$	longueur
$M$	nombre de modes pris en compte après troncature
$m$	masse
$N$	nombre de couches visco-élastiques composant le revêtement
$P$	paramètre de directivité de l'onde diffractée
$p$	pression acoustique
$q$	nombre de subdivision des couches
$R$	coefficient de réflexion
$r$	position dans la direction radiale
$S$	surface
$s_{kl}$	coefficients de la matrice de souplesse
$Z$	impédance acoustique

### Notation spécifique au chapitre 1

$f$	transformation de coordonnée
-----	------------------------------

### Notations spécifiques aux annexes

$\gamma$	paramètres généralisés
$\psi$	potentiel vecteur
$\zeta$	taux d'amortissement
$\lambda$	premier coefficient de Lamé
$\mu$	second coefficient de Lamé
$\varphi$	potentiel scalaire
$f$	épaisseur relative de matériau dense par rapport au matériau peu dense (annexe A seulement)

### Indices

0	relatif au milieu extérieur
$j$	numéro de la couche pour laquelle la grandeur est évaluée (numérotation à partir de l'obstacle)
inc	relatif à l'onde incidente
diff	relatif à l'onde diffractée
ray	relatif à l'onde rayonnée
refl	relatif à l'onde réfléchie

---

L	relatif aux ondes longitudinales
T	relatif aux ondes transverses
gain	gain en dB de la grandeur considérée
ac	grandeur acoustique
str	grandeur structurelle

**Exposants**

$j$	numéro de la couche pour laquelle la grandeur est évaluée (numérotation à partir de l'obstacle)
H	grandeur transconjuguée
$\bar{\cdot}$	grandeur conjuguée

**Abréviations**

FFT	transformée de Fourier rapide ( <i>fast Fourier transform</i> )
FGM	matériau à gradient fonctionnel ( <i>functionally graded material</i> )
ABS	acrylonitrile butadiène styrène
PC	polycarbonate
PE	polyéthylène
PMMA	polyméthacrylate de méthyle
PMP	polyméthylpentène
PVC	polychlorure de vinyle
SOGA_air	configuration de référence du paragraphe 3.2
MOGA_air_B	configuration de référence du paragraphe 3.3
PE/PMP	configuration de référence du paragraphe 4.1
SOGA_eau	configuration de référence des paragraphes 5.1.3 et 5.2



# Introduction

Un fort intérêt a été porté ces dernières années au développement de méthodes de furtivité passives, et ce dans tous les domaines de la physique des ondes, aussi bien en électromagnétique, qu'en élastodynamique ou en acoustique. Dans ce dernier domaine, l'objectif de ces dispositifs est de supprimer, ou à défaut minimiser, la pression diffractée, c'est-à-dire la pression produite par l'impact d'une onde incidente sur un obstacle. Dans le cadre d'applications militaires, on peut chercher à rendre un objet indétectable par des ondes acoustiques (un sous-marin vis-à-vis d'un sonar par exemple). Il existe différentes méthodes de détection active d'objets, basées sur l'émission, la réception et l'analyse d'ondes. On trouve des techniques de localisation par écho, reposant sur l'utilisation d'une source et d'un récepteur. Elles permettent essentiellement d'acquérir des informations sur la distance et la taille d'un objet. Pour s'en prémunir, on peut mettre en place un dispositif opérant un changement de direction de l'onde réfléchi par rapport à sa trajectoire naturelle, ou encore entourer l'objet d'un matériau absorbant, supprimant toute réflexion. Mais on peut également être confronté à une méthode de détection tomographique. Dans ce cas, plusieurs sources et récepteurs sont positionnés autour d'un certain volume, et l'analyse des signaux reçus permet la localisation de l'objet à l'intérieur de celui-ci. Les méthodes de changement de direction de l'onde réfléchi sont alors inefficaces, tout comme celles consistant à absorber l'onde incidente : l'existence d'une zone d'ombre trahit en effet la présence, au sein du volume considéré, d'une région de nature différente de celle du fluide dans lequel se propagent les ondes. Dans ces conditions, pour qu'un objet ne soit pas détecté, il faut que sa diffraction soit nulle. Les années 1960 ont vu la naissance de méthodes actives, reposant sur l'utilisation de récepteurs et d'émetteurs positionnés à la surface de l'obstacle et permettant l'émission d'une onde en opposition de phase avec l'onde diffractée, provoquant ainsi son annulation. La mise en œuvre de tels dispositifs reste délicate en conditions réelles, et l'on peut donc chercher à développer des dispositifs passifs permettant une suppression omnidirectionnelle de la diffraction d'ondes acoustiques par un objet.

C'est en 2007 que paraît le premier article traitant de la faisabilité théorique de revêtements passifs permettant de rendre un objet non diffractant. [Cummer et Schurig \(2007\)](#) ont alors adapté aux ondes acoustiques la méthode de transformation de coordonnées décrite par [Pendry \*et al.\* \(2006\)](#) dans le domaine électromagnétique. Ils ont ainsi montré qu'une couche fluide, présentant une densité et une vitesse de propagation du son anisotropes et inhomogènes, pourrait guider l'onde incidente autour de l'obstacle et ainsi éviter toute diffraction. De tels matériaux fluidiques n'existent pas à l'état naturel, mais le développement récent de métamatériaux, aux propriétés macroscopiques inhabituelles, laisse penser que des fluides équivalents pourraient être réalisés, avec des caractéristiques apparentes proches de celles préconisées par la théorie. Le développement de tels *métafluides* a été un axe de recherche privilégié ces dernières années. [Cheng \*et al.\* \(2008\)](#) et [Torrent et Sánchez-Dehesa \(2008a\)](#) ont par exemple proposé de modéliser le fluide idéal de Cummer par une superposition de couches fluides homogènes et isotropes, en alternant des fluides plus denses

et des fluides moins denses que le milieu environnant. Ceci a permis de dépasser le problème lié à l'anisotropie et à l'inhomogénéité du fluide devant entourer l'obstacle. Cependant, ces études sont restées sur un plan uniquement numérique et deux problèmes majeurs apparaissent si l'on souhaite mettre en œuvre cette idée, à savoir maintenir en contact des fluides de densités différentes sans qu'ils ne se mélangent, et trouver des fluides moins denses que le milieu ambiant si celui-ci est constitué d'air. Dans le même temps, [Zhang et al. \(2011\)](#) ont développé un système fluide équivalent à celui de Cummer en se basant sur une analogie acoustique-électrique. Leurs études ont abouti à la réalisation d'un dispositif capable d'atténuer la diffraction d'ultrasons par un cylindre dans l'eau autour de 60 kHz.

D'autres techniques, parfois appelées *méthodes d'annulation de la diffraction*, ont été envisagées. Celles-ci consistent en effet à chercher des moyens d'annuler la diffraction d'une onde par un obstacle, à certaines fréquences, en jouant sur différents principes. Il peut aussi bien s'agir de phénomènes d'interférences destructives entre ondes diffractées par des obstacles entourant l'objet ([García-Chocano et al., 2011](#); [Sanchis et al., 2013](#)), que d'adaptation de surfaces d'impédance sélective en fréquence ([Alù, 2009](#)).

Les différents concepts proposés reposent sur une propagation particulière des ondes acoustiques dans le fluide entourant l'obstacle, et aboutissent à la définition de dispositifs fluidiques encombrants et parfois directifs ([Zhang et al., 2011](#); [García-Chocano et al., 2011](#)). Nous nous interrogeons donc sur la faisabilité de revêtements passifs *élastiques*, permettant de réduire la diffraction d'une onde acoustique par un cylindre, et ce quelles que soient la direction de l'onde incidente et la direction d'observation. Le revêtement élastique, excité par l'onde acoustique, émet une onde rayonnée qui s'ajoute, dans le fluide extérieur, à l'onde réfléchie par l'ensemble. L'idée est d'adapter les caractéristiques du revêtement de manière à ce que son rayonnement compense la réflexion de l'obstacle. Pour cela, nous centrons notre étude sur le cas d'un cylindre rigide infiniment long, soumis à une onde plane sous incidence normale, et recouvert d'un revêtement élastique multicouche.

La première partie de ce manuscrit présente un état de l'art concernant les dispositifs de furtivité passifs en acoustique. Le principe de la théorie fluide de Cummer est détaillé, et différentes idées avancées pour parvenir à réaliser des systèmes équivalents sont exposées. Des méthodes alternatives visant une annulation de la diffraction sont également décrites dans le chapitre 1.

Notre choix de nous intéresser à des revêtements élastiques, et non fluidiques, nous a conduits à développer un modèle analytique permettant l'étude du comportement vibratoire d'un revêtement multicouche élastique soumis à une excitation acoustique. Une approche se basant sur la transformation des différents champs dans le domaine des nombres d'onde et sur des approximations radiales de type éléments finis a été employée. Nécessitant l'utilisation de systèmes matriciels de taille proportionnelle au nombre de couches, cette méthode est peu adaptée à l'étude de revêtements comprenant un nombre de couches élevé. Ce type de revêtement apparaissant dans de nombreux concepts mis en évidence lors de l'état de l'art, nous avons également développé une seconde méthode, permettant au besoin de traiter ce cas. Celle-ci repose sur la décomposition des grandeurs du problème en fonctions propres et sur l'utilisation de matrices de transfert, et présente ainsi l'avantage de ne faire intervenir que des matrices de taille constante. La description de ces deux méthodes et la présentation de cas de validation font l'objet du chapitre 2.

La démarche a ensuite consisté à chercher, dans l'air puis dans l'eau, des configurations de revêtements bicouches élastiques permettant d'obtenir une atténuation de la diffraction à certaines fréquences.

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à mettre en évidence l'existence de revê-

tements correspondant à des caractéristiques réalistes, et efficaces dans l'air autour de fréquences relativement basses ( $k_0a \simeq 1$ ). Pour cela, un algorithme génétique a été couplé au code vibro-acoustique et des configurations intéressantes d'un point de vue réduction de la diffraction ont été recherchées par optimisation. Un exemple de configuration est analysé et la possibilité d'obtenir un revêtement large bande est étudiée. Les résultats de ces travaux sont présentés dans le chapitre 3.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la faisabilité pratique et à l'évaluation expérimentale des configurations de revêtements trouvées numériquement, comme évoqué dans le chapitre 4.

Dans un second temps, nous avons traité un cas se voulant représentatif d'applications de type discrétion acoustique sous-marine. Nous avons ainsi cherché des revêtements bicouches élastiques permettant d'atténuer la diffraction d'une onde plane de fréquence 3255 Hz par un cylindre de 4.4 m de rayon ( $k_0a \simeq 60$ ), dans l'eau. Un exemple de revêtement multicouche à finalité « large bande de fréquence » est proposé. Enfin, une comparaison portant sur l'influence du milieu fluide et de la fréquence d'étude sur le type de revêtement souhaitable clôt le chapitre 5.



# Chapitre 1

## État de l'art

Ce chapitre a pour but de recenser les différents dispositifs passifs proposés dans le domaine acoustique pour éviter les phénomènes de diffraction d'ondes acoustiques par des obstacles. On peut distinguer deux grands types de méthodes.

D'un côté se trouvent des techniques visant le développement de matériaux capables de guider les ondes autour de l'obstacle, évitant ainsi l'apparition de tout phénomène de diffraction. La théorie sur laquelle reposent ces méthodes est exposée dans la première partie de ce chapitre, de même que les idées de mise en œuvre proposées jusqu'à présent.

D'un autre côté, on peut rassembler les méthodes dites « d'annulation de la diffraction ». Contrairement aux précédentes, ces techniques ne visent pas, pour la plupart, l'absence totale de phénomène de diffraction, mais plutôt l'annulation de celui-ci à certaines fréquences. Elles consistent à adapter un concept de manière à obtenir l'effet recherché (par exemple interactions de diffraction sur de multiples obstacles, ou surface d'impédance sélective en fréquence). Différentes propositions de ce type sont recensées dans la deuxième partie de ce chapitre.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Méthode de transformation de coordonnées</b>	<b>6</b>
1.1.1	Principe	6
1.1.2	Masse volumique anisotrope : revêtement inertiel	8
1.1.3	Élasticité anisotrope : matériaux pentamodes	16
<b>1.2</b>	<b>Méthodes d'annulation de la diffraction</b>	<b>18</b>
1.2.1	Diffractions multiples et interférences destructives	18
1.2.2	Revêtement de type plasmonique	20
1.2.3	Impédance de surface	22
1.2.4	Méthode hybride	25

---

## 1.1 Méthode de transformation de coordonnées

Depuis la publication concomitante des articles de Leonhardt (2006) et de Pendry *et al.* (2006) montrant qu'il est théoriquement possible de rendre un objet non détectable par des ondes électromagnétiques, les recherches sur le thème de l'invisibilité se multiplient. Les approches de Leonhardt et de Pendry reposent toutes deux sur l'invariance de forme des équations de Maxwell lors de transformations de coordonnées.

Cette propriété, déjà décrite par Post (1962), est utilisée numériquement par Ward et Pendry (1996) afin de faciliter le traitement numérique de problèmes électromagnétiques dans lesquels une transformation du maillage serait nécessaire dans une certaine portion du domaine de calcul. Ils montrent qu'une redéfinition de la permittivité et de la perméabilité dans cette zone permet d'imiter la transformation du système de coordonnées nécessaire, et ainsi d'éviter d'avoir à résoudre les équations dans deux systèmes de coordonnées différents.

L'idée de montrer au moyen de transformations de coordonnées qu'un corps peut être rendu indétectable en l'entourant d'un milieu anisotrope apparaît pour la première fois dans des travaux sur la conductivité de Greenleaf *et al.* (2003). Ceux-ci s'intéressent au problème inverse à la base de la technique d'imagerie médicale de tomographie par impédance électrique, qui consiste à reconstruire la conductivité à l'intérieur d'un certain volume à partir de mesures de potentiel électrique à sa surface. Ils établissent la non-unicité de la solution de ce problème dans le cas de conductivités anisotropes, et montrent que de telles conductivités peuvent conduire aux mêmes mesures de tension et courant à la surface d'un corps qu'une conductivité homogène isotrope. Il se peut donc qu'un corps présentant une conductivité anisotrope ne soit pas distingué par ce moyen.

Ce sont des approches similaires qu'emploient Leonhardt (2006) et Pendry *et al.* (2006) pour affirmer que l'on peut forcer les ondes électromagnétiques à contourner un objet, à condition de l'entourer d'une zone de permittivité électrique et perméabilité magnétique anisotropes et inhomogènes. Bien que les caractéristiques requises ne soient naturellement présentes dans aucun milieu, le récent développement des métamatériaux<sup>1</sup> laisse penser qu'il est possible de fabriquer des matériaux ayant les propriétés voulues, permettant ainsi de réaliser des dispositifs de furtivité passifs. La première réalisation expérimentale d'une telle cape d'invisibilité est présentée la même année (Schurig *et al.*, 2006a). Ce principe est ensuite étendu aux phénomènes élastiques par Milton, Briane, et Willis (2006), et Norris et Shuvalov (2011), et aux ondes acoustiques par Cummer et Schurig (2007) puis Norris (2008). De manière analogue à la théorie proposée en électromagnétique, le contournement d'un obstacle par des ondes acoustiques est possible si le fluide qui l'entoure présente, sur une certaine épaisseur, une masse volumique et/ou une élasticité anisotrope(s). Obtenir un fluide anisotrope étant particulièrement délicat, les études se concentrent sur la réalisation de l'une ou l'autre de ces caractéristiques d'anisotropie.

### 1.1.1 Principe

La méthode de transformation de coordonnées, ou méthode de changement de variables<sup>2</sup>, permet de passer d'un obstacle de taille finie non nulle à un point ne diffractant pas l'onde incidente, et inversement. On peut définir, comme sur la figure 1.1, un espace virtuel dans lequel tout se passe comme si l'objet était réduit à un point O, et un espace réel dans lequel l'objet est à sa véritable

1. Matériaux composites dont la structure interne est organisée de manière à donner à l'ensemble des propriétés effectives macroscopiques impossibles ou difficiles à atteindre avec des matériaux ordinaires.

2. désignée en anglais par *transformation optics* ou *transformation acoustics* suivant le domaine d'application

taille. La région  $\Omega$  entourant le point  $O$  dans l'espace virtuel est déformée de manière à obtenir la région  $\omega$  dans l'espace physique. Cette transformation est telle que la frontière extérieure entourant la région considérée est identique dans les deux espaces ( $\partial\Omega = \partial\omega^+$ ). De plus, il y a correspondance point par point entre la région non déformée et la région déformée, à part au niveau du point  $O$  qui devient après transformation la surface  $\partial\omega^-$  de l'obstacle.

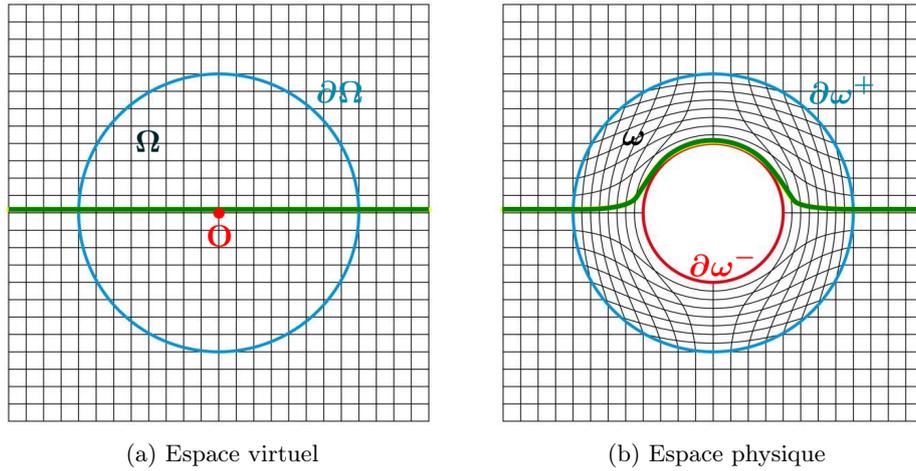


FIGURE 1.1 – Transformation de coordonnées, d'après Leonhardt et Tyc (2009) et Norris (2008)

Les équations gouvernant la propagation des ondes sont écrites dans l'espace virtuel  $\Omega$ . Le changement de variable choisi leur est appliqué. Les équations ainsi transformées, valables dans  $\omega$ , peuvent être réécrites sous une forme semblable aux équations de départ à condition de redéfinir les propriétés caractéristiques du milieu (permittivité et perméabilité dans le cas électromagnétique, masse volumique et module d'élasticité dans le cas acoustique) en les transformant en grandeurs anisotropes et inhomogènes, exprimées sous forme de tenseurs.

Comme le font remarquer Schurig *et al.* (2006b), cette invariance de forme des équations peut être interprétée de deux façons différentes. L'interprétation topologique traditionnelle consiste à considérer qu'il s'agit des mêmes propriétés de matériaux dans les deux cas, mais exprimées dans des espaces différents, les différences entre les grandeurs dans l'espace déformé et dans l'espace initial provenant de la topologie de la déformation. Mais on peut aussi choisir d'y voir des propriétés de matériaux différentes, exprimées dans les deux cas dans l'espace non déformé. L'invariance de forme des équations nous assure que les deux interprétations conduisent au même comportement physique. L'onde ne sera pas diffractée par l'obstacle si celui-ci est entouré, sur une bande  $\omega$ , d'un milieu ayant les caractéristiques anisotropes obtenues par la méthode de transformation de coordonnées.

En acoustique, la modification de la masse volumique et du module d'élasticité du fluide entourant l'obstacle correspond à une modification de la célérité du son dans cette zone (Torrent et Sánchez-Dehesa, 2008a). En effet, la célérité du son  $c$  dans les fluides tels que l'eau est définie par la relation de Newton-Laplace

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (1.1)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique du fluide, et  $K$  son module d'élasticité isostatique (*bulk modulus* en anglais). Cette grandeur, également appelée module de rigidité à la compression ou module d'incompressibilité, mesure la résistance d'une substance à une compression uniforme (cf. 1.2).

Elle traduit la relation de proportionnalité entre la pression appliquée et le taux de variation du volume ( $K = -\Delta P V_0 / \Delta V$ ). Notons qu'elle correspond à l'inverse du coefficient de compressibilité  $\chi$  habituellement utilisé en thermodynamique (Morse et Ingard, 1968; Germain, 1986).

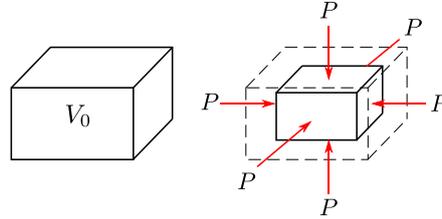


FIGURE 1.2 – Compression uniforme

Pour une configuration cylindrique ou sphérique, on peut comprendre intuitivement que la vitesse de propagation dans la direction tangentielle à l'intérieur du revêtement (zone  $\omega$  sur la figure 1.1b) doit être supérieure à la vitesse de propagation dans le milieu extérieur, pour que les ondes s'étant propagées dans le revêtement puissent en ressortir, après avoir parcouru un chemin plus long, en même temps que celles qui n'y sont pas passées.

### 1.1.2 Masse volumique anisotrope : revêtement inertiel

Les premiers résultats dans le domaine acoustique sont obtenus par Cummer et Schurig (2007). Par analogie avec les travaux menés en électromagnétique par Pendry *et al.* (2006), ils démontrent qu'un revêtement fluide axisymétrique, de masse volumique anisotrope et de module d'élasticité isotrope, présentant de plus un gradient de propriétés dans la direction radiale, permet de rendre un obstacle cylindrique indétectable par des ondes acoustiques. À l'instar de Norris (2008), nous appellerons ces revêtements, dans lesquels l'anisotropie nécessaire se situe au niveau de la masse volumique, des revêtements inertiels (*inertial cloak* en anglais). Cummer et Schurig précisent que cette analogie avec l'électromagnétique ne fonctionne pas en 3D, mais la preuve qu'un dispositif similaire peut également être défini en 3D pour un obstacle sphérique est apportée peu après par Chen et Chan (2007) et Cummer *et al.* (2008). La démonstration des premiers s'appuie sur une analogie avec les équations de conductivité, invariantes par transformation de coordonnées, comme montré par Greenleaf *et al.* (2003). Les seconds utilisent une méthode de calcul direct de la diffraction en faisant dès le départ l'hypothèse d'une masse volumique anisotrope. Ces deux approches aboutissent aux mêmes expressions pour les caractéristiques du revêtement fluide devant entourer la sphère.

#### 1.1.2.1 Propriétés théoriques du revêtement

Les propriétés théoriques de revêtements fluidiques inertiels à symétrie de révolution 2D et 3D ont été établies dans le cas général d'une transformation  $f$  permettant de passer de l'espace physique  $\omega$  à l'espace virtuel  $\Omega$  (Norris, 2008; Urzhumov *et al.*, 2010; Gokhale *et al.*, 2012). Ce changement de coordonnées a pour effet apparent de comprimer l'obstacle pour le réduire à un point. La configuration étudiée est celle représentée sur la figure 1.3a. Un obstacle cylindre ou sphérique de rayon  $a$  est entouré d'une bande de fluide d'épaisseur  $(b - a)$ , de masse volumique  $\rho$ , et de module d'élasticité  $K$ . Du fait de la symétrie de révolution des cas étudiés, la transformation  $f$  ne concerne

que la coordonnée radiale  $r$ . Il s'agit d'une fonction continue croissante, définie sur  $]a; b]$ , et telle que

$$\lim_{r \rightarrow a} f(r) = 0, \quad (1.2)$$

$$f(b) = b, \quad (1.3)$$

$$\text{pour tout } r \in ]a; b], \quad 0 < f(r) \leq r. \quad (1.4)$$

La transformation choisie par [Pendry \*et al.\* \(2006\)](#) et reprise par la plupart des auteurs qui suivirent,

$$f(r) = \frac{b}{b-a}(r-a), \quad (1.5)$$

correspond à une compression isotrope de l'obstacle. Il est important de souligner qu'il ne s'agit pas de l'unique définition possible de  $f$ .

Dans le cas général d'une transformation  $f$  quelconque, le tenseur de masse volumique et le module d'élasticité d'un revêtement inertiel sont définis par

$$\frac{\rho_r}{\rho_0} = f' \left( \frac{r}{f} \right)^{d-1}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\rho_{\perp}}{\rho_0} = \frac{1}{f'} \left( \frac{r}{f} \right)^{d-3}, \quad (1.7)$$

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{f'} \left( \frac{r}{f} \right)^{d-1}. \quad (1.8)$$

Dans ces expressions,  $d$  désigne la dimension du problème (2D ou 3D),  $f'$  la dérivée de  $f$ , et l'indice  $\perp$  la coordonnée cylindrique  $\theta$ , ou les coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\phi$ . Le résultat de simulation numérique présenté sur la figure 1.3b met en évidence l'absence parfaite de diffraction obtenue grâce à ces propriétés, dans le cas d'un obstacle sphérique et du choix de transformation classique 1.5.

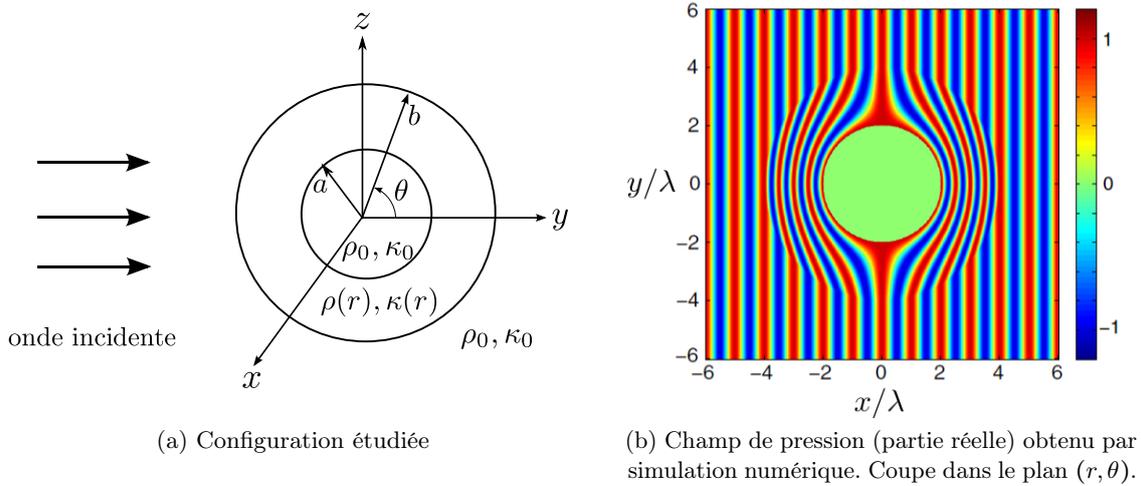


FIGURE 1.3 – Obstacle sphérique soumis à une onde plane incidente venant de la gauche et entouré d'un revêtement inertiel idéal. Résultats obtenus par [Cummer \*et al.\* \(2008\)](#).

D'après la relation 1.1, les propriétés mécaniques 1.6 à 1.8 conduisent à une célérité du son anisotrope caractérisée par

$$\frac{c_r}{c_0} = \frac{1}{f'}, \quad (1.9)$$

$$\frac{c_\perp}{c_0} = \frac{r}{f}. \quad (1.10)$$

Les équations 1.4 et 1.10 confirment l'idée avancée précédemment que la célérité azimutale à l'intérieur du revêtement doit être supérieure à la célérité du son dans le milieu extérieur pour permettre le contournement de l'obstacle par les ondes. Cette vitesse augmente à l'intérieur du revêtement fluide lorsque l'on se rapproche de l'obstacle, jusqu'à tendre vers l'infini (équations 1.10 et 1.2). La célérité radiale quant à elle doit être inférieure à la célérité du son dans le fluide environnant (équation 1.9 et croissance de  $f$ ). On doit donc avoir

$$c_r \leq c_0 \leq c_\theta. \quad (1.11)$$

D'autre part, il est à noter que l'impédance acoustique dans la direction radiale ( $\rho_r c_r$ ) est égale à celle du milieu environnant ( $\rho_0 c_0$ ) au niveau de la surface extérieure du revêtement, c'est-à-dire en  $r = b$  (voir équations 1.3, 1.6, et 1.9). Cette adaptation d'impédance garantit l'absence de réflexion sur la surface du revêtement.

## Problèmes

### Singularité en $r = a$

Au niveau de l'objet, en  $r = a$ , la célérité azimutale tend vers l'infini, de même que le module d'élasticité et que la composante radiale de la masse volumique. Ceci conduit, après intégration, à une masse totale du revêtement infinie (Norris, 2008). En pratique, ces trois conditions sont inatteignables. Par conséquent une très faible diffraction aura forcément lieu, ce qui signifie qu'une petite quantité d'énergie pourra pénétrer à l'intérieur de la zone à cacher. L'efficacité du dispositif dépendra alors de la nature de l'objet dissimulé (Cai et Sánchez-Dehesa, 2007; Cheng *et al.*, 2008).

D'un point de vue transformation, cela signifie que l'objet de rayon  $a$  ne pourra pas être virtuellement réduit à un point, mais seulement à un petit volume de rayon  $a'$ , que l'on espère indiscernable aux fréquences de détection. Urzhumov *et al.* (2010) introduisent un facteur de dégradation,  $a'/a$ , pour caractériser l'écart entre le dispositif pratique et la théorie.

### Dépendance radiale

Les propriétés mécaniques du revêtement fluide doivent varier continûment en fonction de la coordonnée radiale  $r$ . Ce problème, que l'on trouve également dans les études sur les matériaux à gradient fonctionnel<sup>3</sup>, peut être surmonté en divisant le revêtement en un nombre fini de couches homogènes (voir par exemple Chen *et al.* (2004a,b); Hasheminejad et Rajabi (2007a); Jamali *et al.* (2011) pour les applications liées aux matériaux à gradient fonctionnel, et Cheng *et al.* (2008) ou Torrent et Sánchez-Dehesa (2008a) pour les revêtements inertiels de furtivité acoustique).

### Masse volumique anisotrope

Si l'anisotropie du tenseur d'inertie n'est pas une propriété ordinaire des fluides, ce n'est pas non plus une condition impossible à réaliser. En effet, on sait depuis les travaux de Schoenberg et Sen

3. *functionally graded materials* en anglais, souvent abrégé en FGM

(1983) qu'un tenseur d'inertie anisotrope peut être obtenu en superposant périodiquement de petites quantités de fluides de caractéristiques différentes, séparées par des membranes imperméables et sans masse. Ceci repose sur la définition, par homogénéisation, de propriétés effectives pour l'ensemble du système. Basés sur ce même principe d'homogénéisation de structures complexes, des métamatériaux acoustiques sont conçus pour présenter une masse volumique effective négative. On peut tout à fait imaginer créer ainsi des matériaux possédant une masse volumique effective anisotrope (Mei *et al.*, 2007; Torrent et Sánchez-Dehesa, 2008b).

### 1.1.2.2 Réalisation : utilisation de métamatériaux

L'enjeu est donc principalement ici d'arriver à concevoir des systèmes fluidiques de masse volumique anisotrope. Différentes stratégies sont envisagées.

#### Superposition de couches de fluides homogènes et isotropes

S'inspirant des résultats obtenus par Schoenberg et Sen (1983), Cheng *et al.* (2008); Cheng et Liu (2008) et Torrent et Sánchez-Dehesa (2008a) proposent d'entourer un cylindre d'une superposition, en alternance, de deux types de fluides homogènes et isotropes, comme illustré sur la figure 1.4a. Pour une épaisseur de revêtement donnée, le nombre de couches doit être suffisamment élevé pour que la discrétisation puisse rendre compte des gradients de propriétés dans la direction radiale, et la longueur d'onde doit être suffisamment importante pour que l'on puisse appliquer une méthode d'homogénéisation<sup>4</sup>. On pourra ainsi, en considérant une superposition de couches A d'épaisseur  $d_A$ , et de couches B d'épaisseur  $d_B$ , exprimer les caractéristiques mécaniques du revêtement total en fonction des caractéristiques de chaque couche par les relations

$$\rho_r = \frac{1}{d_A + d_B} (d_A \rho_A + d_B \rho_B), \quad (1.12)$$

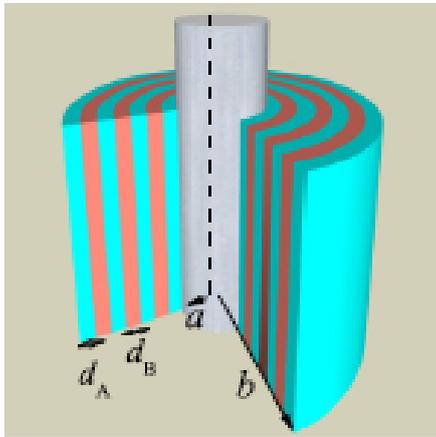
$$\frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{d_A + d_B} \left( \frac{d_A}{\rho_A} + \frac{d_B}{\rho_B} \right), \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{d_A + d_B} \left( \frac{d_A}{K_A} + \frac{d_B}{K_B} \right). \quad (1.14)$$

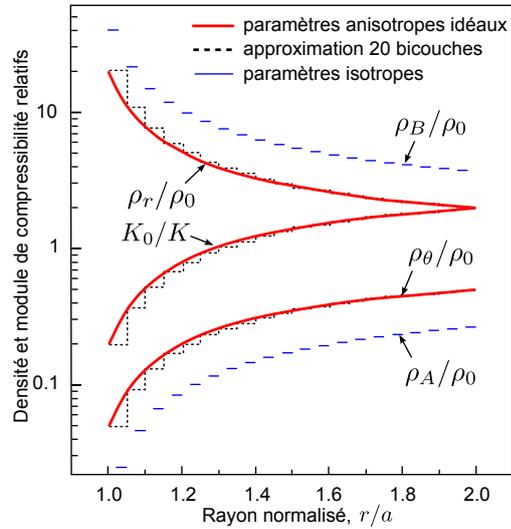
Les caractéristiques des couches permettant un contournement de l'obstacle par les ondes sont obtenues en combinant ces équations aux équations sur les propriétés mécaniques de type 1.6 à 1.8 établies par Cummer et Schurig (2007) en utilisant la transformation classique 1.5. Il apparaît alors nécessaire d'alterner des couches de fluides beaucoup moins denses que le milieu extérieur, et des couches de fluides beaucoup plus denses que celui-ci (cf. figure 1.4b).

Maintenir une alternance entre des couches de fluides de densités aussi différentes semble à première vue difficile à réaliser. De plus, les milieux les plus couramment rencontrés en acoustique, l'air et l'eau, ont des valeurs de masse volumique extrêmes par rapport aux autres fluides (très faible pour l'air, très élevée pour l'eau). La réalisation d'une telle superposition, faisant intervenir des fluides ayant des caractéristiques plus de dix fois inférieures ou supérieures à ces valeurs, est impossible avec des matériaux ordinaires. Torrent et Sánchez-Dehesa (2008a) suggèrent donc de se tourner du côté des métamatériaux.

4. La longueur d'onde doit être supérieure à 4 fois l'épaisseur d'un bicouche d'après Martin et Orris (2012).



(a) Configuration étudiée (Torrent et Sánchez-Dehesa, 2011)



(b) Caractéristiques mécaniques des couches (Cheng *et al.*, 2008)

FIGURE 1.4 – Discrétisation du revêtement et approximation de l'orthotropie par homogénéisation de 20 bicouches de matériaux homogènes isotropes (toutes les couches ayant la même épaisseur).

Urzhumov *et al.* (2010) reprennent l'étude de cette configuration stratifiée bidimensionnelle et proposent de procéder différemment de manière à obtenir un revêtement ne faisant intervenir que des matériaux aux propriétés atteignables. Au lieu de partir d'une transformation  $f$  donnée qui impose des propriétés de matériaux qui peuvent être irréalisables, il peut être intéressant de faire l'inverse : choisir un modèle de matériau et chercher une transformation qui pourrait convenir. Concrètement et comme illustré sur la figure 1.5, il s'agit de représenter les valeurs atteignables de célérités du son dans les directions radiale et tangentielle pour le modèle de matériau ou métamatériau envisagé sous la forme d'un diagramme d'Ashby ( $c_0/c_\theta, c_0/c_r$ ) (voir Ashby (2000)). Ces rapports de célérité sont liés par les relations 1.9 et 1.10 aux transformations de coordonnées possibles  $f$  ainsi qu'à leurs dérivées  $f'$ . Ce diagramme permet donc de définir un ensemble d'équations différentielles possibles pour la transformation  $f$ , équations de la forme  $f' = F(f/r)$ . Après élimination de toutes les possibilités ne vérifiant pas la condition 1.11 sur l'anisotropie des célérités (zones hachurées sur la figure), un choix arbitraire d'équation différentielle est effectué, ce qui conduit, par intégration, à une transformation  $f$  qui ne nécessite que des matériaux faisables avec le modèle choisi.

Urzhumov *et al.* (2010) montrent également qu'un modèle de métamatériau à 3 couches par cellules unitaires, au lieu de 2 comme proposé ci-dessus, apporte une plus grande flexibilité dans la conception, mais pas de meilleures performances d'un point de vue furtivité. Ils s'interrogent aussi sur l'effet qu'aurait la présence dans le revêtement d'ondes transverses de cisaillement en plus des ondes longitudinales de compression, puisque la réalisation pratique d'un métamatériau est fortement susceptible de faire intervenir des matériaux solides plutôt que des fluides. Pour des métamatériaux élastiques avec un coefficient de Poisson  $\nu > 0.49$ , les ondes de cisaillement n'altèrent pas l'effet de furtivité du revêtement. De tels métamatériaux pourraient être construits à partir de caoutchoucs incompressibles ( $\nu \approx 0.499$ ) et de fluides.

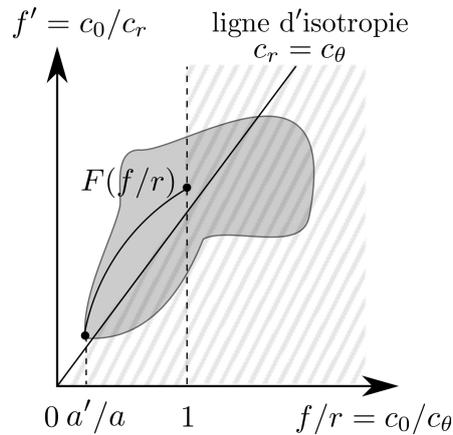


FIGURE 1.5 – Diagramme d’Ashby pour la sélection de matériaux présentant une célérité du son anisotrope. Il est ici utilisé pour choisir une transformation de coordonnées  $f$  (cf. [Urzhumov et al. \(2010\)](#)).

### Suggestions de métamatériaux

Différentes idées de métamatériaux pouvant permettre de créer des fluides équivalents (parfois appelés métafluides) présentant des caractéristiques d’anisotropie ont été proposées.

[Torrent et Sánchez-Dehesa \(2008b\)](#) se sont intéressés aux *cristaux soniques*, et ont montré que les effets de diffractions multiples dans un réseau de cylindres élastiques situés dans un fluide non visqueux ou dans un gaz, peuvent donner des caractéristiques acoustiques anisotropes (masse volumique et célérité du son). Ils se sont appuyés pour cela sur des études théoriques et expérimentales antérieures concernant les propriétés homogénéisées de réseaux de cylindres élastiques dans le cas de longueurs d’onde suffisamment grandes ([Torrent et al., 2006](#); [Torrent et Sánchez-Dehesa, 2006](#)). [Pendry et Li \(2008\)](#) proposent eux aussi d’obtenir une densité anisotrope au moyen d’un réseau de diffracteurs solides logés dans un milieu fluide.

Notons également la réalisation par [Torrent et Sánchez-Dehesa \(2010\)](#) de métafluides anisotropes grâce à des guides d’ondes fermés par des *surfaces crénelées* (voir figure 1.6). Cette structure alternant des couches d’air de deux hauteurs différentes se comporte en basses fréquences comme un cylindre fluide de masse volumique anisotrope. Les célérités radiale et tangentielle du son dans ce milieu sont évaluées grâce à la mesure des fréquences de résonance de la cavité. Selon la hauteur  $h_1$  entre la paroi supérieure du guide d’ondes et les créneaux de la paroi inférieure, des célérités radiales différentes peuvent être obtenues. La célérité tangentielle reste quant à elle toujours autour de la célérité du son dans l’air. Un tel dispositif n’est donc pas directement applicable d’un point de vue furtivité (cf. relation 1.11). D’autres mécanismes physiques permettant de dépasser ce problème doivent être trouvés.

La densité de l’air dépendant de sa température, [García-Chocano et al. \(2012\)](#) proposent d’utiliser des *gradients de température*. Les études de [Cai et Sánchez-Dehesa \(2008\)](#) et [Sánchez-Dehesa et al. \(2009\)](#) ont mis en évidence la possibilité de courber des ondes ultrasonores dans l’air et de les focaliser à l’arrière d’un tube grâce à des gradients de température produits par chauffage ou refroidissement du tube. L’idée développée par Garcia-Chocano et illustrée sur la figure 1.7 consiste à entourer la zone à cacher de cylindres rigides dont la surface est chauffée ou refroidie en fonction de la distance

au centre de l'obstacle, de manière à créer le gradient de température voulu. Cette méthode permet d'obtenir n'importe quel profil de masse volumique effective, mais pas n'importe quelles valeurs de module d'élasticité. En particulier, celui-ci ne peut pas prendre de valeurs inférieures au module de l'air (Torrent *et al.*, 2006; Torrent et Sánchez-Dehesa, 2006, 2009), alors que c'est le cas dans une certaine zone du revêtement avec la théorie de Cummer (voir figure 1.4b). Cette distribution de cylindres, appelée cristal acoustique circulaire, ne permet donc pas de réaliser un revêtement parfait, mais, même avec un faible nombre de couches, une réduction de la rétrodiffusion peut être observée numériquement à certaines fréquences. De manière pratique, une telle configuration paraît toutefois difficilement réalisable.

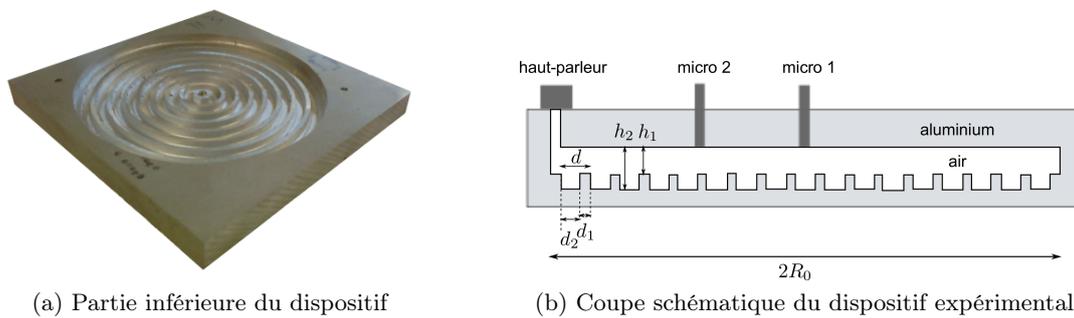


FIGURE 1.6 – Dispositif permettant d'obtenir un métafluide de masse volumique anisotrope, présenté par Torrent et Sánchez-Dehesa (2010).

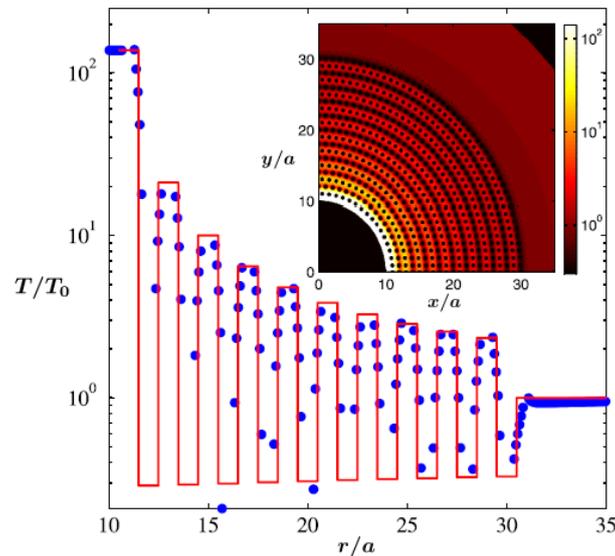


FIGURE 1.7 – Proposition de García-Chocano *et al.* (2012) basée sur l'utilisation de gradients de température, obtenus par chauffage ou refroidissement de 2460 cylindres positionnés de manière à former 20 couches concentriques autour de l'obstacle. L'encombrement est ici de  $b = 3a$ , avec  $b$  le rayon extérieur du revêtement et  $a$  le rayon de l'obstacle.

### Réalisation basée sur le principe de circuit acoustique

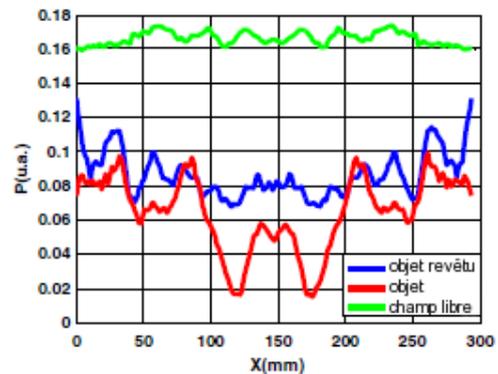
Pour l'instant il semblerait qu'une seule méthode ait permis la réalisation expérimentale d'un revêtement cylindrique basé sur le principe de transformation de coordonnées décrit par Cummer : l'utilisation d'une analogie à constantes localisées avec l'électricité (voir Bruneau (1998)). Cette technique (Zhang, 2010), également employée pour créer des métamatériaux permettant une forte focalisation des ondes, consiste à transformer les critères concernant les propriétés acoustiques en des critères d'impédance et d'admittance pouvant être interprétés électriquement. Un circuit constitué de capacités et d'inductances est mis en place pour répondre à ces critères. Les inductances correspondent, d'un point de vue acoustique, à des conduits ouverts, et les capacités à des cavités. Les valeurs de ces inductances et capacités acoustiques dépendent de la nature du fluide présent dans ce circuit et des différentes dimensions qui le caractérisent (volume des cavités, taille des conduits). Le revêtement est donc composé d'un réseau de cavités reliées entre elles par des conduits, la taille de ces différents éléments variant en fonction de leur position dans le revêtement (de manière à satisfaire les critères de dépendance radiale imposés par la méthode de transformation), mais étant toujours très inférieure à la longueur d'onde de fonctionnement pour que la modélisation reste valable.

La figure 1.8a montre une partie du dispositif réalisé par Zhang *et al.* (2011) et composé d'un empilement de disques en aluminium creusés de cavités et conduits, remplis d'eau lors du fonctionnement. Les résultats présentés sur la figure 1.8b mettent en évidence une amélioration dans la zone d'ombre située à l'arrière de l'obstacle grâce à ce dispositif, mais l'écart avec la configuration idéale de champ libre reste important. Ceci peut être dû au fait que ce revêtement ne correspond pas exactement aux relations prescrites par la méthode de Cummer, mais à des relations approchées.

Guild (2012) s'interroge sur le rôle joué dans cet écart par les pertes thermovisqueuses à l'intérieur des nombreuses cavités du revêtement. Il souligne aussi le fait que le modèle ne contient pas de corrections de fin de conduit permettant la prise en compte de la masse de fluide entraînée, et précise que les introduire diminuerait sensiblement les vitesses de phase atteignables, et par conséquent les performances théoriques du dispositif.



(a) Configuration testée



(b) Résultats expérimentaux

FIGURE 1.8 – (a) Revêtement conçu par Zhang, Xia, et Fang (2011). (b) Pression mesurée le long d'un front d'onde situé à l'arrière d'un cylindre d'acier soumis à une source ponctuelle d'ultrasons émettant à 60 kHz. Le milieu extérieur est constitué d'eau. Le centre du cylindre se situe en  $x = 150$  mm.

Les suggestions de métamatériaux exposées dans cette partie ont toutes pour but la conception d'un matériau équivalent à un fluide ayant une masse volumique anisotrope et un module d'élasticité isotrope. Comme annoncé en introduction, la méthode de transformation de coordonnées permet également de définir des revêtements présentant à la fois une anisotropie de la masse volumique et de l'élasticité, ou même le cas opposé au revêtement inertiel, à savoir une masse volumique scalaire et un tenseur d'élasticité. Ce dernier type de revêtement est qualifié de *pentamode* par Norris (2008).

### 1.1.3 Élasticité anisotrope : matériaux pentamodes

Norris (2008) montre en effet qu'il n'existe pas qu'un unique revêtement possible pour une transformation  $f$  donnée d'un espace physique  $\omega$  à un espace virtuel  $\Omega$ . Dans le cas d'une configuration à symétrie de révolution, un revêtement à densité isotrope est envisageable. Il présente alors une élasticité anisotrope, et ces caractéristiques mécaniques sont données par les relations

$$\frac{\rho}{\rho_0} = f' \left( \frac{f}{r} \right)^{d-1}, \quad (1.15)$$

$$\frac{K_r}{K_0} = \frac{1}{f'} \left( \frac{f}{r} \right)^{d-1}, \quad (1.16)$$

$$\frac{K_{\perp}}{K_0} = f' \left( \frac{f}{r} \right)^{d-3} \quad (1.17)$$

(cf. Gokhale *et al.* (2012)). Ces expressions conduisent aux mêmes célérités radiale et tangentielle que celles établies dans le cas de revêtements inertiels (relations 1.9 et 1.10). De même, il y a adaptation d'impédance dans la direction radiale au niveau de la surface extérieure du revêtement, mais pas dans la direction tangentielle.

Ce type de revêtement peut être vu comme un matériau pentamode. Ces matériaux, introduits de manière théorique par Milton et Cherkaev (1995), ont un comportement mécanique comparable, dans une certaine mesure, à celui des fluides. De l'eau dans un cylindre, par exemple, peut difficilement être comprimée, alors que la remuer dans toutes les directions à l'aide d'une cuillère ne pose aucun problème : l'eau ne résiste pas aux contraintes de cisaillement, mais sa résistance à la compression est grande. D'un point de vue mécanique, le comportement élastique des matériaux peut être décrit par une matrice symétrique  $6 \times 6$  reliant contraintes et déformations. Les 6 modes propres de cette matrice de rigidité correspondent à 6 façons possibles de déformer le corps élastique. Dans le cas de matériaux pentamodes comme dans celui des fluides, 5 valeurs propres de cette matrice sont nulles<sup>5</sup>, les vecteurs propres associés représentant des modes de déformations faciles, ne nécessitant pas d'énergie. Cette catégorie de matériaux inclut donc les fluides, mais permet en plus une éventuelle anisotropie de la compressibilité, ce qui n'est pas le cas des fluides ordinaires. La propagation des ondes dans les matériaux pentamodes pourra donc être qualifiée de quasi-longitudinale.

La réalisation de tels matériaux est problématique et nécessite le recours à des microstructures spécifiques (Milton et Cherkaev, 1995). Norris (2009) propose un assemblage de perles microscopiques disposées sous forme de réseau hexagonal, les points de contact entre chaque perle étant lubrifiés (Norris, 2009). Sur un principe similaire, il développe un modèle de revêtement pentamode qu'il appelle « eau métallique » (Norris et Nagy, 2011; Norris, 2011). Ces deux métafluides ne semblent pas avoir été réalisés pour l'instant.

---

5. d'où le préfixe *penta-*.

Scandrett *et al.* (2010) s'intéressent pour leur part à la faisabilité de revêtements multicouches pentamodes, et plus précisément au caractère atteignable des propriétés requises. Il s'agit de trouver un compromis entre bonne réduction de la diffraction en champ lointain et propriétés de couches raisonnables, c'est-à-dire relativement proches de celles du milieu extérieur. Ils proposent de prendre les propriétés obtenues par la méthode de transformation de coordonnées comme point de départ d'un processus d'optimisation dont le but est de définir un revêtement qui soit à la fois réaliste et large bande (Scandrett *et al.*, 2011). Leur choix se porte sur une méthode d'optimisation locale par gradient, concernant dans un premier temps le coefficient de diffraction de l'obstacle revêtu de matériau pentamode à une fréquence. À partir des résultats de cette première étape, une deuxième optimisation peut permettre de sélectionner les paramètres minimisant au mieux la diffraction sur une bande de fréquence plus large autour de celle-ci.

Gokhale *et al.* (2012), comme l'avaient fait Urzhumov *et al.* (2010) pour les revêtements inertiels, suggèrent de procéder à l'inverse de ce qui est proposé habituellement. Au lieu de choisir une transformation de coordonnées, puis de chercher des matériaux ayant les bonnes propriétés, on peut d'abord repérer des matériaux intéressants, puis chercher les transformations possibles qui garantiraient un effet de furtivité. Des exemples sont donnés de recherche de transformations pour des distributions spatiales particulières de propriétés de matériaux. Ils considèrent notamment des cas où une des grandeurs est constante ou bien obéit à une loi en puissance, ou encore le cas d'un revêtement à anisotropie élastique minimale (les matériaux fortement anisotropes étant particulièrement difficiles à réaliser).

La première réalisation de matériau pentamode est très récente (Kadic *et al.*, 2012). Le prototype présenté sur la figure 1.9 est constitué d'un réseau de doubles-cônes de dimensions de l'ordre du micron en contact quasi ponctuel. Kadic *et al.* (2013) montrent qu'en choisissant bien les longueurs des doubles-cônes et la position de leurs points de contact, une vitesse de phase anisotrope peut être obtenue dans la structure, avec des différences de phase pouvant aller jusqu'à un facteur 10 entre vitesse longitudinale et vitesse transverse.

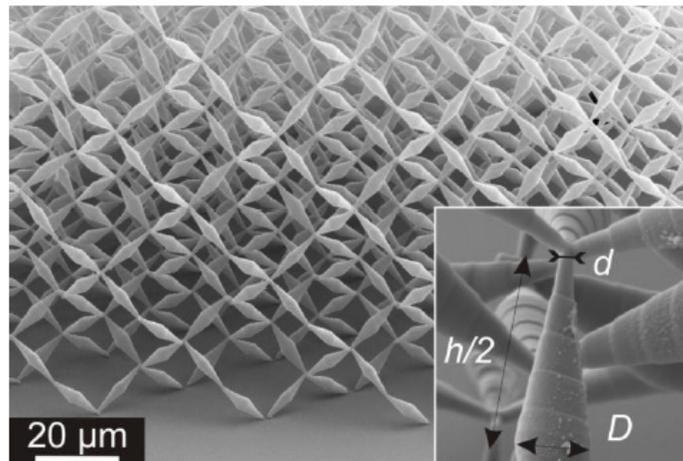


FIGURE 1.9 – Vue oblique d'un métamatériau mécanique pentamode polymère réalisé par *Direct-Laser-Writing* par Kadic *et al.* (2012). Volume de l'échantillon total :  $261 \mu\text{m} \times 261 \mu\text{m} \times 224 \mu\text{m}$ .

La réalisation de matériaux pentamodes ayant des caractéristiques compatibles avec la méthode de transformation de coordonnées reste encore un challenge. Les concepts proposés jusqu'à maintenant reposent sur la définition de microstructures organisées nécessitant une très grande précision de fabrication à petite échelle. Dans le but de réaliser un revêtement pentamode, le mode de fabrication doit également permettre la répétition du motif unitaire de ces structures sur des volumes de taille macroscopique. De plus, ces métafluides étant dimensionnés de manière à présenter une très faible résistance à des contraintes de type cisaillement, la stabilité de ces structures peut s'avérer problématique.

Parallèlement à ces études sur les revêtements inertiels et pentamodes, d'autres approches, non basées sur la méthode de transformation, ont été employées pour concevoir des dispositifs de furtivité passifs. Au lieu de partir d'une théorie et de chercher à développer des matériaux la satisfaisant, on peut partir d'une configuration, et chercher comment adapter les paramètres qui entrent en jeu de manière à obtenir une importante réduction de la diffraction.

## 1.2 Méthodes d'annulation de la diffraction

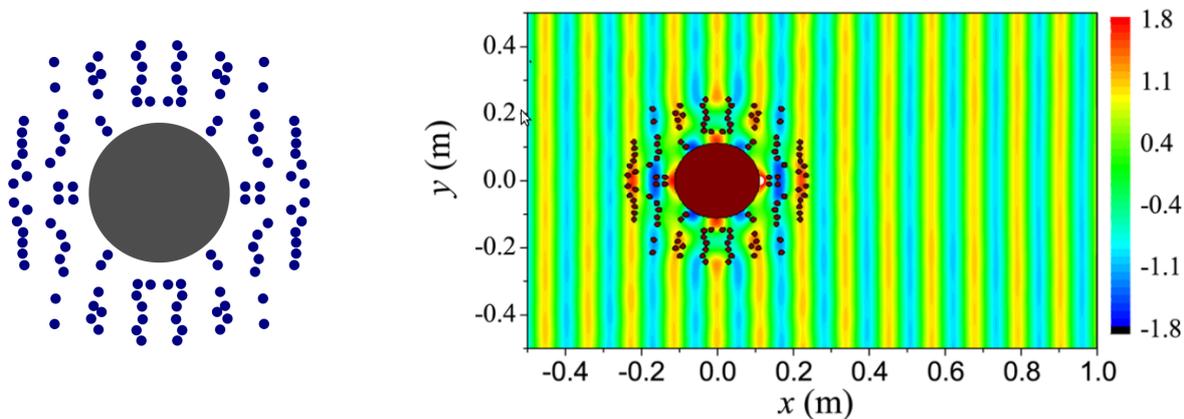
Les méthodes présentées dans cette partie consistent à choisir un type de revêtement, à résoudre le problème de diffraction de l'objet revêtu, et à déterminer quelles propriétés du revêtement permettent d'annuler le champ diffracté et sous quelles conditions. Ici, à la différence de la méthode de transformation, le revêtement n'est pas obligatoirement de type fluide. De plus, les interactions entre l'onde incidente et l'objet à cacher sont possibles et pas nécessairement indésirables. Avec la méthode de transformation de coordonnées, ces interactions, si elles ont lieu, constituent une dégradation du dispositif par rapport au cas théorique et ne sont donc pas souhaitées.

### 1.2.1 Diffractions multiples et interférences destructives

Deux dispositifs basés sur le même principe ont été présentés récemment ([García-Chocano \*et al.\*, 2011](#); [Sanchis \*et al.\*, 2013](#)). Il s'agit d'ajouter autour de l'objet à cacher de nouveaux obstacles, de petite taille et en grand nombre. L'onde incidente est diffractée à la fois par l'objet initial et par l'ensemble des obstacles rajoutés. Des phénomènes d'interactions entre les multiples diffractions se produisent. Ceux-ci peuvent conduire à des zones où la diffraction totale devient très importante, ou au contraire quasi nulle. Par optimisation, il est possible de déterminer les positions et dimensions des obstacles ajoutés qui permettent d'obtenir une forte diminution de la diffraction totale. Dans les études citées, deux méthodes d'optimisation, algorithme génétique et recuit simulé, sont employées pour minimiser la section efficace de diffraction de l'ensemble, et la fréquence d'optimisation est choisie de sorte que la longueur d'onde soit égale au rayon de l'obstacle (cylindrique ou sphérique). Le milieu extérieur est choisi dans les deux cas comme étant de l'air.

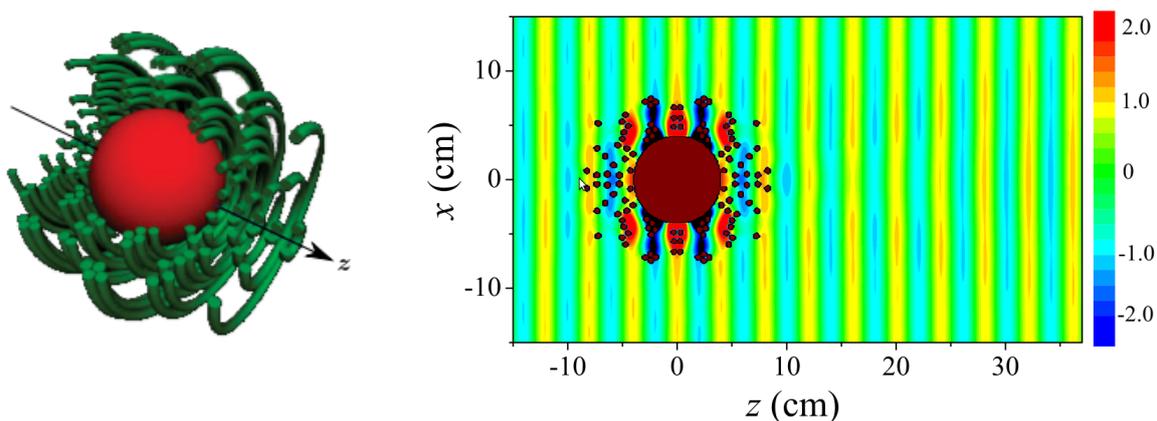
[García-Chocano \*et al.\* \(2011\)](#) présentent un dispositif 2D, composé de 120 cylindres d'aluminium de 1.5 cm de diamètre entourant un obstacle cylindrique de 22.5 cm de diamètre (voir schéma 1.10a). La distribution de cylindres obtenue par optimisation conduit à de très bons résultats (voir figure 1.10b) sur une étroite bande de fréquence (100 Hz environ) autour de 3061 Hz.

De manière analogue, [Sanchis \*et al.\* \(2013\)](#) proposent une distribution spécifique de tores concentriques autour d'une sphère rigide. Les mesures effectuées sur un prototype composé de 60 tores de 0.267 cm de section transverse entourant une sphère de 4 cm de rayon, montrent une importante réduction de la diffraction autour de 8.55 kHz et sur une bande de fréquence de 120 Hz



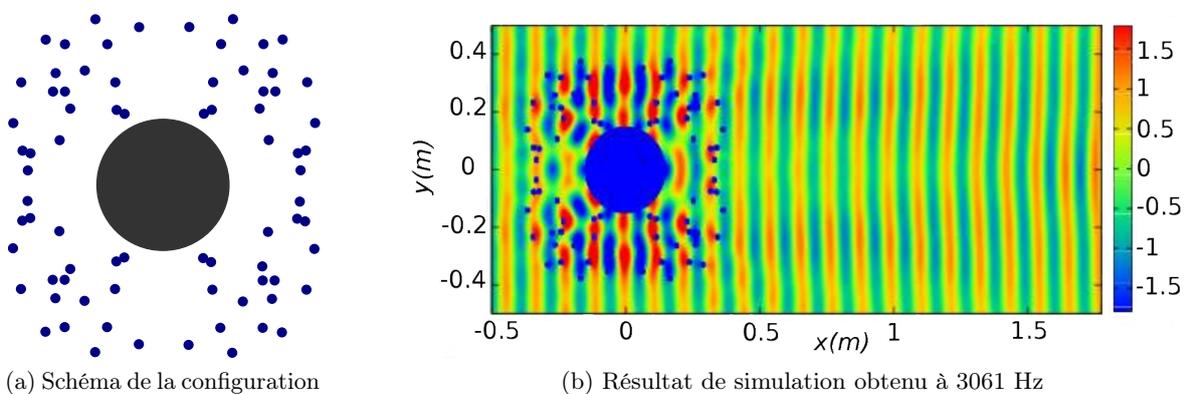
(a) Schéma de la configuration

(b) Résultat de simulation obtenu à 3 kHz

FIGURE 1.10 – Configuration 2D testée par *García-Chocano et al. (2011)*

(a) Schéma de la configuration

(b) Résultat de simulation obtenu à 8.62 kHz

FIGURE 1.11 – Configuration 3D testée par *Sanchis et al. (2013)*.

(a) Schéma de la configuration

(b) Résultat de simulation obtenu à 3061 Hz

FIGURE 1.12 – Configuration 2D mise au point par *Delrieu (2012)*.

(voir également le résultat de simulation numérique présenté sur la figure 1.11).

À l'ONERA, au sein du DMAE<sup>6</sup>, Delrieu (2012) a cherché à reproduire un dispositif similaire à celui de García-Chocano. Au moyen d'une optimisation par algorithme génétique, 80 tubes de 2 cm de diamètre ont été placés autour d'un cylindre de 30 cm de diamètre. Bien que cette configuration présente moins de degrés de liberté que celle de García-Chocano, une réduction intéressante de la diffraction peut être obtenue (voir figure 1.12).

On remarque sur les figures 1.10 à 1.12 deux types d'effets dus aux interférences entre les ondes diffractées par l'obstacle et les ondes diffractées par les objets positionnés autour. Des niveaux de pression très élevés apparaissent dans la zone entourant l'obstacle où se situent les cylindres ou les tores. En dehors de cette région, les interférences entre ondes diffractées semblent destructives : il n'y a pas de cône d'ombre à l'arrière de l'obstacle ou de fortes réflexions à l'avant, comme ce serait le cas sans ces dispositifs. De ce point de vue, cette technique peut être rapprochée de la méthode proposée en électromagnétique par Milton et Nicorovici (2006) et basée sur un phénomène de résonance anormalement localisée (Sanchis *et al.*, 2013).

En plus de conduire à une quasi annulation de la diffraction, ces dispositifs présentent deux avantages majeurs. Les pertes sont faibles à l'intérieur de ces revêtements : à l'arrière du cylindre ou de la sphère, le niveau d'onde incidente est parfaitement restitué. Ils sont également relativement faciles à réaliser, la taille des obstacles ajoutés n'étant pas inférieure à celle de l'obstacle de plusieurs ordres de grandeur (à la différence des métamatériaux présentés dans la partie 1.1). Le prototype faisant intervenir des tores a par exemple été fabriqué par impression 3D, cette technique offrant la précision nécessaire, et le plastique pouvant être considéré comme rigide d'un point de vue acoustique aux fréquences considérées. Les inconvénients liés à ce type de revêtement sont d'une part une bande de fréquence de fonctionnement étroite due à la nature résonnante du phénomène, et d'autre part le caractère directionnel du dispositif. En effet, la distribution de cylindres ou tores ne présentant pas de symétrie de révolution, ces revêtements ne sont efficaces que dans le cas d'ondes se propageant dans une direction.

## 1.2.2 Revêtement de type plasmonique

### Électromagnétique

Alù et Engheta (2005, 2008b) ont montré dans le domaine électromagnétique qu'il existe une zone de paramètres pour lesquels un revêtement peut apporter une atténuation de la diffraction de plus de 40 dB, tout en restant hors de la région de résonance. Les valeurs de permittivité et perméabilité requises pour ce revêtement sont nettement inférieures à celles du milieu environnant. Dans les cas usuels, cela ne correspond à aucun matériau ordinaire. Pour obtenir les bonnes caractéristiques, il est nécessaire soit d'avoir recours à des métamatériaux, soit d'utiliser des matériaux plasmoniques.

Au sens large, le terme *plasma* est utilisé pour désigner tout milieu possédant des charges mobiles libres. Cela couvre donc aussi bien les gaz ionisés que des solides dans lesquels sont présents des électrons libres (par exemple, des métaux dans certaines bandes de fréquence). Une interaction avec des ondes électromagnétiques peut entraîner des oscillations de ces charges libres pour une fréquence appelée fréquence plasma. Leurs modes résonants sont alors appelés plasmons, et l'étude de ces phénomènes, la plasmonique. À une fréquence légèrement inférieure à la fréquence plasma, la permittivité d'un matériau plasmonique peut atteindre les valeurs requises pour la réalisation d'un revêtement de furtivité.

---

6. Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique

Ce type de revêtement, appelé revêtement plasmonique, a été très étudié en électromagnétique par [Alù et Engheta \(2007a,b, 2008a\)](#). En particulier, sa robustesse vis-à-vis des variations du design ou de la fréquence a été démontrée. Récemment son efficacité a été prouvée expérimentalement grâce à la réalisation d'un revêtement plasmonique pour un cylindre de longueur finie ([Rainwater et al., 2012](#)). Enfin notons que, dans la mesure où ces matériaux reposent sur la présence de modes de résonance plasmonique pour l'obtention des propriétés désirées, la bande de fréquence sur laquelle le dispositif peut être efficace est forcément limitée.

### Acoustique

Nous avons vu précédemment qu'une certaine correspondance peut être établie entre électromagnétique et acoustique en ce qui concerne les applications de type furtivité (cf. [Cummer et Schurig \(2007\)](#) par exemple). Même dans le cas tridimensionnel dans lequel il n'y a pas correspondance directe entre les deux types d'équations, on peut rapprocher le rôle de la masse volumique en acoustique de celui de la permittivité en électromagnétique, et celui du module d'élasticité de celui de la perméabilité. [Guild et al. \(2011b\)](#) cherchent donc à étendre ce concept de revêtement plasmonique, initialement développé en électromagnétique, à l'acoustique.

Ils partent du problème de diffraction d'une sphère entourée d'un revêtement composé d'une ou plusieurs couches, et cherchent les paramètres à donner au revêtement afin d'annuler la diffraction. Dans le modèle utilisé, l'obstacle sphérique et les différentes couches peuvent être fluides ou élastiques, et les paramètres sont tous considérés comme homogènes et isotropes. Des solutions approchées sont données dans le cas de basses fréquences ou de couches minces par rapport à la longueur d'onde de l'onde incidente.

La figure 1.13 représente un diagramme paramétrique montrant le gain en diffraction pouvant être obtenu grâce à *une couche fluide*, en fonction de la masse volumique  $\rho$  et du module d'élasticité  $K$  de celle-ci, pour une fréquence relativement faible (correspondant à un nombre d'onde réduit  $k_0 a = 0.5$ , soit à une longueur d'onde  $\lambda = 4\pi a$ ). Les gains positifs (en rouge) correspondent à une forte augmentation de la diffraction due à des modes de résonance du revêtement, indiqués par  $V_0 = 0$  et  $V_1 = 0$ . On voit également une zone très localisée, en bleu, où le gain en diffraction est négatif, c'est-à-dire où l'on a une réduction de la diffraction. Cette zone correspond à l'annulation des deux premiers modes de diffraction ( $U_0 = U_1 = 0$ ) et se situe hors de la région de résonance, ce qui laisse penser qu'un *revêtement fluide de type plasmonique* est réalisable dans le cas acoustique ([Guild, 2012](#)).

Les propriétés du fluide constituant le revêtement doivent être légèrement inférieures à celles du milieu environnant. Dans le cas où la sphère se trouve dans de l'eau, un grand nombre de matériaux homogènes ordinaires peuvent correspondre, il n'est pas nécessaire de recourir à des métamatériaux ou à des matériaux résonants à une échelle microscopique, comme c'est le cas pour les revêtements plasmoniques électromagnétiques.

Dans le cas où une sphère élastique est entourée d'*une couche élastique* et non pas fluide, il n'est pas possible de définir un revêtement non-résonant de type plasmonique. On peut cependant obtenir une réduction importante de la diffraction sur une étroite bande de fréquence, en utilisant un phénomène d'*anti-résonance* de la couche élastique ([Guild et al., 2011a](#)). Pour annuler la diffraction à une fréquence  $f_0$ , les propriétés du revêtement sont choisies de manière à ce que la première résonance des modes d'ordre supérieur se produise à une fréquence plus basse que  $f_0$ , et à ce que l'anti-résonance ait lieu à  $f_0$  pour les modes contribuant de manière significative à la diffraction totale.

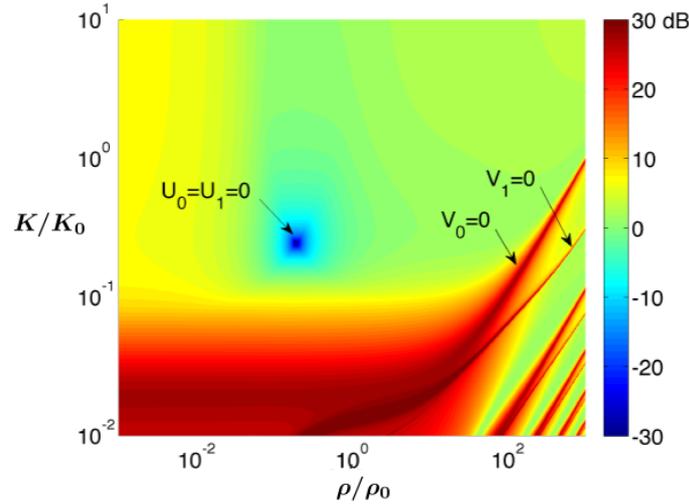


FIGURE 1.13 – Variations du gain en diffraction en fonction des paramètres de la couche recouvrant la sphère. Fréquence  $k_0a = 0.5$  et  $b = 1.1a$ . (Guild, 2012)

Guild *et al.* (2012) mettent en évidence les avantages que présente l'ajout d'une deuxième couche de fluide à un revêtement de type plasmonique. En permettant l'annulation de plus de modes de diffraction, il est possible de concevoir un dispositif fonctionnant pour des fréquences plus élevées qu'avec un revêtement composé d'une seule couche de fluide. Ainsi, pour un revêtement bicouche conçu pour minimiser la diffraction d'une sphère en acier placée dans de l'eau à une fréquence correspondant à  $k_0a = 2$ , la diffraction est atténuée jusqu'à  $k_0a = 5$ , avec une réduction de 35 dB à la fréquence d'optimisation, et de 20 dB pour les fréquences inférieures. Dans le cas d'un revêtement bicouche fluide-élastique, les résultats obtenus pour la diffraction sont similaires, à l'exception d'une résonance basse fréquence non présente dans le cas fluide-fluide, et correspondant d'après l'auteur à la propagation d'une onde de Lamb asymétrique dans la couche élastique.

D'un point de vue pratique, des revêtements de type plasmonique semblent réalisables pour des applications dans l'eau, environnement dans lequel une ou deux couches faisant intervenir des matériaux homogènes classiques peuvent suffire. Dans le cas de l'air, la faisabilité de ce type de dispositif est moins évidente. Le recours à des métamatériaux peut s'avérer nécessaire pour obtenir des matériaux de masse volumique inférieure à celle de l'air. Ces dispositifs occupent peu d'espace et permettent à l'onde incidente de pénétrer jusqu'à l'objet. Ils pourraient donc servir à réaliser des capteurs acoustiques idéaux, capables de mesurer l'onde incidente sans la perturber dans des environnements encombrés ou en champ proche (application envisagée pour les revêtements plasmoniques électromagnétiques par Alù et Engheta (2009)).

### 1.2.3 Impédance de surface

#### Surfaces sélectives en fréquence

Alù (2009) souligne le fait que les méthodes proposées en électromagnétique pour concevoir des dispositifs de furtivité passifs reposent sur l'ajustement des propriétés d'un certain volume de matière. Que ce soit avec la méthode de transformation de coordonnées, de résonance anormalement localisée, ou dans le cas de revêtements plasmoniques, le dispositif doit présenter une épaisseur relativement importante. Par exemple, les revêtements obtenus par transformation de coordonnées doivent

avoir une taille de l'ordre de grandeur de la taille de l'objet à cacher pour permettre l'obtention des gradients de propriétés recherchés, sans compter un éventuel espace supplémentaire entre le revêtement et l'objet pour éviter un couplage entre les éléments du métamatériau et l'obstacle. Selon l'application, ceci peut être difficile à mettre en oeuvre, et il pourrait être avantageux de disposer d'un revêtement surfacique (*mantle cloak* en anglais). Naturellement, cette remarque est également valable dans le domaine acoustique, les méthodes y étant développées s'inspirant directement des propositions faites en électromagnétique.

Pour répondre à ce problème, Alù propose de concevoir une surface d'impédance particulière, à la manière de ce qui existe avec les surfaces sélectives en fréquence (Munk, 2000). Ces fines surfaces métalliques présentent un motif particulier et périodique, de taille nettement inférieure à la longueur d'onde. Le comportement électromagnétique de la surface peut être caractérisé par une impédance moyenne, variable en fonction des motifs et de la fréquence de l'onde incidente. Chen *et al.* (2011) et Farhat *et al.* (2012) adaptent cette proposition dans le cas de configurations respectivement 2D et 3D, soumises à des ondes acoustiques (voir illustration 1.14 pour le cas 3D).

Si la pression et la vitesse normale doivent être continues au niveau de la paroi de l'obstacle, il peut y avoir discontinuité de la vitesse normale au niveau du revêtement selon son impédance de surface. Cela se traduit par l'expression

$$Z_s = \frac{p|_{r=a_s}}{v_r|_{r=a_s^+} - v_r|_{r=a_s^-}}, \quad (1.18)$$

dans laquelle les signes + et - désignent respectivement les côtés extérieur et intérieur du revêtement surfacique de rayon  $a_s$ . L'impédance de surface moyenne  $Z_s = R_s - iX_s$  est composée d'une partie réelle  $R_s$  associée à l'absorption, et d'une partie réactive  $X_s$  pouvant varier sur une large gamme de valeurs en fonction de la géométrie de la structure et de la longueur d'onde du signal d'excitation. Chen et Farhat montrent qu'en choisissant bien la réactance d'une surface supposée sans perte ( $R_s = 0$ ), il est théoriquement possible de supprimer le mode de diffraction le plus important dans la configuration considérée (le mode fondamental pour de faibles fréquences). De fins revêtements conçus sur le principe des surfaces sélectives en fréquence pourraient ainsi permettre une atténuation de la diffraction, au moins à basse fréquence.

### Revêtements à réaction étendue

Signalons également ici les travaux de Bobrovnikskiï (2006a,b, 2010), concernant eux aussi le développement de revêtements présentant une impédance de surface particulière. À la différence de l'approche présentée ci-dessus, le but n'est pas là de concevoir un revêtement surfacique. Une certaine épaisseur n'est pas exclue, et peut même s'avérer nécessaire à la réalisation des propriétés de surface appropriées.

Bobrovnikskiï montre que le champ diffracté par un objet peut être entièrement déterminé par des impédances acoustiques définies à sa surface. Pour rendre un objet indétectable, il suffit donc de l'entourer d'un revêtement dont la surface extérieure présente des impédances de surface semblables à celles du corps idéal non diffractant. Peu importe alors sa structure intérieure. Ce corps idéalement transparent a une surface de réaction globale (Bobrovnikskiï, 2007), c'est-à-dire une surface où chaque point est couplé à tous les autres, où ce qui se passe à un endroit à des répercussions en tous les autres points de la surface. Ce caractère global du revêtement est nécessaire pour obtenir une retransmission de l'énergie incidente à l'arrière de l'obstacle, et ainsi une suppression de la zone d'ombre. En pratique, une telle structure est extrêmement complexe à réaliser. Bobrovnikskiï (2008) propose un concept de revêtement à réaction étendue (CER pour *coating with extended reaction*

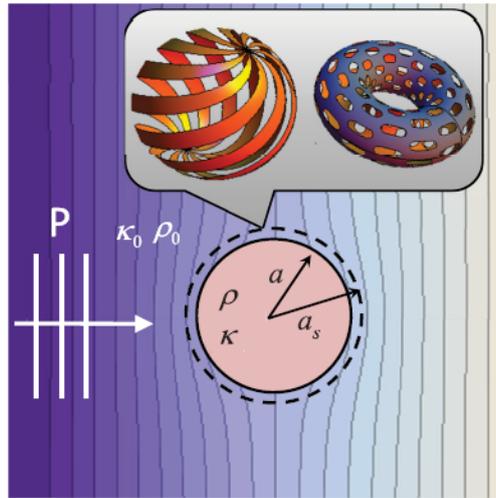


FIGURE 1.14 – Schéma en coupe d'une métasurface de rayon  $a_s$  (ligne en pointillés) enveloppant une sphère de rayon  $a$  soumise à une onde de pression plane venant de la gauche. Encart : exemples de configurations possibles pour la surface. (Farhat *et al.*, 2012)

en anglais), dont la réaction de surface se situe entre le global et le local. La figure 1.15 offre une représentation schématique de CER d'ordre 1, c'est-à-dire dans lequel les éléments ne sont couplés qu'avec leurs premiers voisins. Plus l'ordre de couplage est élevé (pas de couplage, couplage avec les premiers voisins, avec les premiers et les deuxièmes voisins, etc.), plus la puissance diffractée est faible. Un CER0, de réaction uniquement locale, est efficace à très basses fréquences seulement ( $k_0 a < 0.2$ ), ce qui est à rapprocher du fait qu'un corps rigide diffracte naturellement peu à ces fréquences. Un corps recouvert d'un CER1 dont les paramètres sont choisis de manière à annuler les deux premiers modes de diffraction, est pratiquement invisible à faibles fréquences ( $k_0 a < 1$ ), et partiellement à moyennes fréquences ( $k_0 a < 4$ ). Cependant on peut craindre que l'énergie qui n'est pas diffractée par ces premiers modes soit redistribuée sur d'autres modes de diffraction, non contrôlés par le revêtement. Pour lutter contre ce phénomène de *spillover*, Bobrovnikskiï suggère de procéder par minimisation de fonctions objectives, telles que la quantité d'énergie rétrodiffusée ou la section efficace de diffraction de l'obstacle, plutôt que de chercher à annuler tel ou tel mode de diffraction. Enfin, précisons qu'aucune indication d'ordre pratique n'est donnée quant à la réalisation de ces CER.

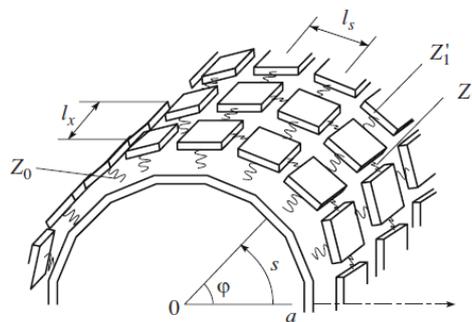


FIGURE 1.15 – Représentation schématique d'un revêtement à réaction étendue sur une surface cylindrique (Bobrovnikskiï, 2008).

### 1.2.4 Méthode hybride

Martin et Orris (2012) proposent de combiner la méthode de transformation de coordonnées et celle d'annulation de la diffraction pour obtenir de meilleurs résultats. Leur étude concerne un obstacle cylindrique soumis à une onde acoustique dans un environnement aqueux, mais pourrait également être étendue à des configurations 3D en acoustique ou 2D en électromagnétique.

Leur idée consiste à réduire dans un premier temps la section efficace de diffraction d'un cylindre de rayon  $r_o$  au moyen d'une couche fluide d'épaisseur  $\delta$  (couche en rose sur la figure 1.16a). Une étude paramétrique permet de choisir les propriétés de cette couche (masse volumique et module d'élasticité) minimisant la diffraction sur une certaine bande de fréquence. Le problème est ainsi ramené à celui d'un cylindre de rayon  $a$  ayant une diffraction inférieure à celle du cylindre initial. Un revêtement multicouche inertiel semblable à ceux présentés dans le paragraphe 1.1.2.2 est ensuite appliqué à cet ensemble. Il s'agit d'un revêtement imparfait, dans le sens où l'entendent Urzhumov *et al.* (2010) et Jiang *et al.* (2011), c'est-à-dire ne faisant pas totalement disparaître l'objet, mais réduisant très fortement sa taille apparente. Un facteur de dégradation  $a'/a$  égal à  $1/3$  a été choisi, de manière à ce que les propriétés requises pour les couches fluides ne s'écartent pas de plus d'un ordre de grandeur de celles de l'eau. De plus, celles-ci sont calculées en se basant sur le revêtement inertiel idéal prévu pour un objet plus petit, de rayon  $0.8a$  et non de rayon  $a$ . Les valeurs extrêmes de paramètres obtenues contre l'obstacle ne sont tout simplement pas prises en compte (cf. figures 1.16b et 1.16c).

De manière pratique, les couches fluides constituant la partie inertielle du revêtement devront être composées de matériaux composites ayant un module de cisaillement quasi nul (comme par exemple la solution proposée par Popa *et al.* (2011) ou les matériaux de Torrent et Sánchez-Dehesa (2007) obtenus par diffractions multiples).

Des simulations numériques faites dans le cas où un cylindre d'aluminium est soumis à une onde plane montrent que cette configuration hybride permet une réduction de la diffraction sur une large bande de fréquence : une diminution de 15 dB pour  $k_0 r_o \leq \pi$  et d'environ 10 dB pour  $2\pi < k_0 r_o < 4\pi$ , soit 5 dB de réduction supplémentaire par rapport aux deux types de dispositif pris séparément.

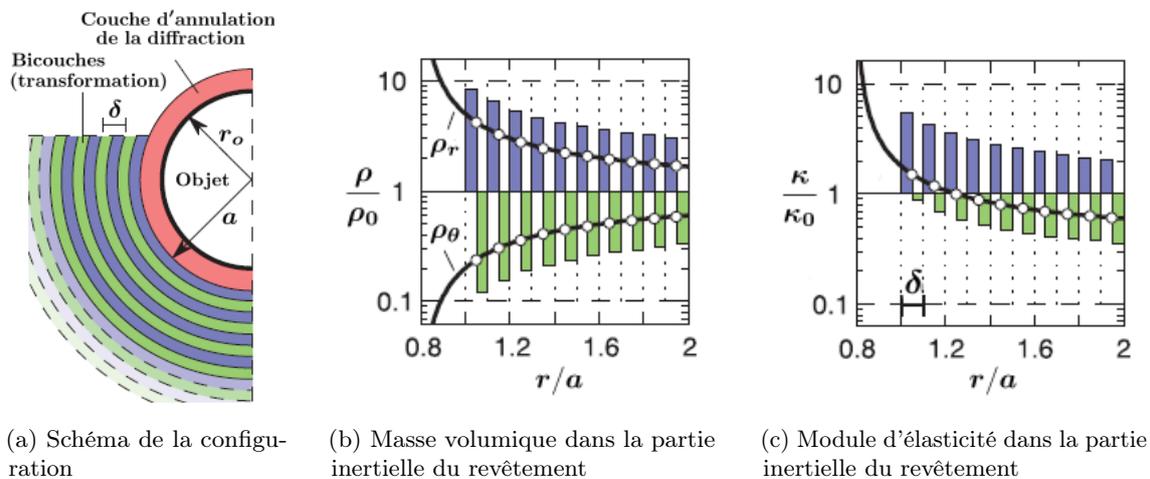


FIGURE 1.16 – Configuration hybride, d'après Martin et Orris (2012)

La technique de furtivité obtenue par changement de coordonnées, séduisante d'un point de vue théorique, s'avère difficile à mettre en œuvre expérimentalement. Pour rendre un cylindre transparent d'un point de vue acoustique, il est en effet nécessaire de l'entourer d'un revêtement fluide anisotrope, présentant un certain gradient de masse volumique et d'élasticité dans la direction radiale. Une superposition de couches isotropes homogènes est suggérée par différents auteurs pour parvenir à ce résultat. Il s'agit alors d'alterner des couches fluides, respectivement plus denses et moins denses que le milieu environnant, et cela avec un rapport de plusieurs ordres de grandeurs, ce qui est particulièrement problématique dans le cas de l'air. Des simulations (cf. annexe A) nous ont permis de constater que cette condition doit impérativement être respectée pour obtenir un effet de réduction de la diffraction : l'utilisation de fluides peu denses ayant des caractéristiques de l'ordre de grandeur, ou légèrement supérieures à celles de l'air, conduit à une diffraction plus importante qu'en l'absence de revêtement. D'autres idées ont été avancées ces dernières années pour obtenir les caractéristiques d'anisotropie souhaitées en développant des métamatériaux, mais une seule a pour l'instant abouti à une réalisation concrète (voir [Zhang et al. \(2011\)](#), table 1.1).

Des méthodes alternatives, qualifiées de *méthodes d'annulation de la diffraction*, sont également proposées. Elles consistent, pour une configuration donnée, à chercher les paramètres qui permettraient d'obtenir une réduction omnidirectionnelle de la diffraction à une certaine fréquence. [García-Chocano et al. \(2011\)](#) et [Sanchis et al. \(2013\)](#) ont récemment démontré la faisabilité et l'efficacité de techniques reposant sur l'utilisation d'interférences destructives entre ondes diffractées sur de multiples obstacles entourant un cylindre (voir table 1.1). L'inconvénient principal de ces dispositifs réside dans leur directivité. En effet, ils ne permettent d'obtenir une atténuation de la diffraction que pour une onde plane se propageant dans une direction donnée.

Les différents concepts réalisés jusqu'ici reposent sur une modification de la propagation des ondes acoustiques dans le fluide autour de l'obstacle. Nous avons pour notre part décidé d'étudier les possibilités liées à la présence d'un revêtement *élastique* autour de l'obstacle. L'idée est de chercher les caractéristiques du revêtement qui permettent une compensation de la pression réfléchie et de la pression rayonnée par le revêtement. En cela, notre approche est comparable aux méthodes d'annulation de la diffraction.

	Zhang <i>et al.</i> (2011)	García-Chocano <i>et al.</i> (2011)	Sanchis <i>et al.</i> (2013)
<b>Obstacle</b>	cylindre 2D	cylindre 2D	sphère 3D
<b>Méthode</b>	TA	SC	SC
<b>Direction</b>	omnidirectionnel	directionnel	directionnel
<b>Milieu extérieur</b>	eau	air	air
<b><math>a</math></b>	13.5 mm	11.25 cm	4 cm
<b><math>b</math></b>	$4a$	$2a$	non indiqué
<b>Fréquence</b>	60 kHz	3 kHz	8.55 kHz
<b>Largeur de bande</b>	12 kHz	100 Hz	120 Hz
<b><math>\lambda</math></b>	$2a$	$a$	$a$

TABLE 1.1 – Récapitulatif des différentes réalisations de revêtements passifs pour la furtivité acoustique. La méthode de transformation de coordonnées est désignée par les initiales TA (*transformation acoustics*), et la méthode d'annulation de la diffraction par SC (*scattering cancellation*).



## Chapitre 2

# Modélisation du comportement vibro-acoustique d'un matériau multicouche cylindrique

Les résultats théoriques et les propositions de réalisation avancées jusqu'à présent se basent sur la propagation des ondes acoustiques dans des fluides présentant des caractéristiques particulières, et notamment une densité anisotrope. La mise en œuvre de ces propositions reste problématique, et on peut se demander s'il ne serait pas possible de fabriquer un revêtement pour la furtivité acoustique en utilisant des phénomènes de vibration, contraction et dilatation de différentes couches élastiques. Il est donc nécessaire de développer un outil permettant de simuler la propagation des ondes dans un matériau multicouche cylindrique. De manière à pouvoir prendre en compte tout type de comportement, et à ce que la modélisation reste applicable dans le cas le plus général, aucune approximation de type couches minces n'est employée. Ainsi la forme du déplacement n'est pas imposée à l'intérieur du revêtement. Deux méthodes sont développées. La première repose sur une transformation des champs dans le domaine des nombres d'onde, ainsi que sur des approximations radiales de type éléments finis. La seconde est basée sur l'utilisation d'une décomposition des grandeurs du problème en fonctions propres, et sur l'introduction de matrices de transfert.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Description du problème et mise en équations</b>	<b>30</b>
2.1.1	Présentation du problème	30
2.1.2	Pression acoustique dans le fluide extérieur	32
2.1.3	Contraintes et déformations dans le revêtement élastique	33
<b>2.2</b>	<b>Résolution des équations du mouvement</b>	<b>36</b>
2.2.1	Méthode de Skelton : approximations radiales de type éléments finis	36
2.2.2	Méthode avec matrices de transfert	43
<b>2.3</b>	<b>Validation</b>	<b>48</b>
2.3.1	Cylindre recouvert d'un revêtement isotrope	48
2.3.2	Cylindre recouvert d'un matériau orthotrope	51

---

## 2.1 Description du problème et mise en équations

### 2.1.1 Présentation du problème

#### Géométrie et notations

On considère un cylindre rigide infiniment long, de rayon  $a$ , situé dans un milieu fluide de densité  $\rho_0$ , et dont la célérité du son est notée  $c_0$ . Un revêtement composé de  $N$  couches de matériaux visco-élastiques, homogènes et possiblement orthotropes, est fixé sur ce cylindre. L'ensemble est excité par un train d'ondes planes de pulsation  $\omega$ , sous incidence normale par rapport à l'axe longitudinal. On choisit le repère cartésien de façon à ce que l'axe des  $x$  coïncide avec la direction de propagation de l'onde incidente (cf. figure 2.1). Pour résoudre ce problème, on utilise une formulation complexe, avec une dépendance temporelle harmonique décrite par le facteur  $e^{-i\omega t}$ .

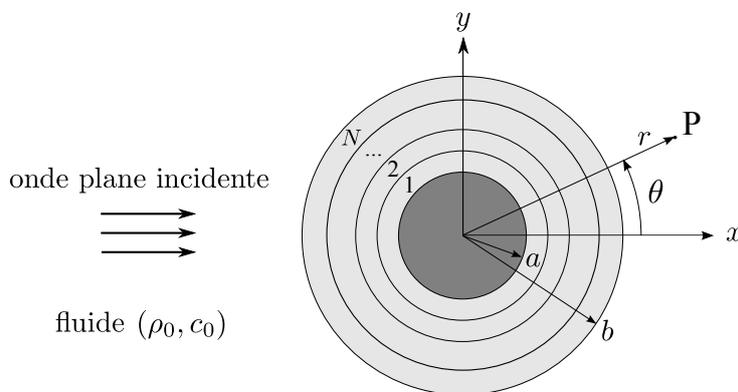


FIGURE 2.1 – Schéma de la géométrie

La pression acoustique  $p_{\text{réelle}}$  mesurable dans le milieu fluide est donc donnée par

$$p_{\text{réelle}} = \Re(p e^{-i\omega t}), \quad (2.1)$$

où  $p$  est l'amplitude complexe de la pression acoustique complexe  $p e^{-i\omega t}$ . Dans le cas d'une onde plane incidente se propageant dans la direction des  $x$  croissants, cette amplitude  $p$  est de la forme

$$p_{\text{inc}} = p_0 e^{ik_0 x}, \quad (2.2)$$

où  $p_0$  est un réel représentant l'amplitude de l'onde incidente, et où  $k_0$ , le nombre d'onde, est lié à la pulsation d'excitation  $\omega$  et à la célérité du son dans le milieu fluide  $c_0$  par la relation de dispersion  $k_0 = \omega/c_0$ .

De la même façon, des grandeurs complexes sont définies pour les autres quantités d'intérêt. Dans le domaine fluide, il s'agit du vecteur déplacement correspondant au mouvement des particules dû aux ondes acoustiques, d'amplitude complexe notée  $\mathbf{u}$ .

Dans le milieu solide que constituent les différentes couches du revêtement, on s'intéresse aux contraintes, aux déformations et aux déplacements, d'amplitudes complexes respectives  $\boldsymbol{\sigma}^j$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^j$  et  $\mathbf{u}^j$ . L'exposant  $j$  présent dans ces expressions fait référence au numéro de la couche considérée, la première étant celle en contact avec l'obstacle, et la  $N$ -ième, celle en contact avec le fluide extérieur.

Chaque couche  $j$  est déterminée par

- son épaisseur  $h_j$ ,

et par les caractéristiques mécaniques du matériau visco-élastique qui la compose,

- la masse volumique  $\rho_j$ ,
- le module d'Young  $E^j$ ,
- le module de cisaillement  $G^j$ ,
- le coefficient de Poisson  $\nu^j$ ,
- le facteur de perte  $\eta_j$ .

Précisons enfin que l'on notera  $r_{j-1}$  la position de l'interface entre les couches  $j - 1$  et  $j$ , et  $r_j$  celle de l'interface entre les couches  $j$  et  $j + 1$ .

### Matériaux visco-élastiques orthotropes

Les matériaux visco-élastiques présentent un amortissement structurel non négligeable. Lorsque l'on soumet un matériau visco-élastique à des contraintes alternées, un déphasage entre les contraintes et les déformations apparaît. Ces matériaux sont généralement associés à une structure primaire afin d'augmenter son amortissement. Le caoutchouc et le néoprène sont par exemple très efficaces dans ce type d'application.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux visco-élastiques sont généralement écrites sous forme complexe (cf. Hasheminejad et Safari (2005)). Avec la convention temporelle choisie ici, les modules d'Young et modules de cisaillement sont de la forme  $\tilde{E} = E(1 - i\eta)$  et  $\tilde{G} = G(1 - i\eta)$ , où  $\eta$  représente le facteur de perte du matériau. La convention de temps en  $e^{i\omega t}$  conduirait à des expressions semblables, mais en  $(1 + i\eta)$ . On considère dans cette étude que l'amortissement est isotrope. Le facteur de perte  $\eta$  ne dépend pas de la direction, et est le même pour les modules d'Young et de cisaillement, et cela dans toutes les directions. Les coefficients de Poisson sont quant à eux réels.

Le facteur de perte  $\eta$  varie d'un ordre de grandeur de  $10^{-3}$  pour l'aluminium, à  $10^{-1}$  pour le caoutchouc naturel, le liège, et certains polymères et élastomères.

Notons qu'il existe des modélisations plus complètes des matériaux visco-élastiques, permettant de rendre compte de l'effet de la fréquence d'excitation et de la température sur le module d'Young (par exemple le modèle utilisé par Mofakhami *et al.* (2008)). Ces effets ne sont pas pris en considération ici.

### Adimensionnement

Les équations présentées dans la suite de ce chapitre sont écrites sous forme adimensionnée. Pour les obtenir, les grandeurs physiques et les variables homogènes à des distances sont divisées par  $a$ , le rayon de l'obstacle. La pression et les contraintes sont rapportées au module d'élasticité isostatique du fluide extérieur  $\rho_0 c_0^2$ . Les variables temporelles sont rendues sans dimension grâce au rapport  $a/c_0$ . Les caractéristiques des couches de matériaux conservent quant à elles leurs dimensions.

$r, x, \mathbf{u}$	$p, \boldsymbol{\sigma}$	$\omega$	$t$
$a$	$\rho_0 c_0^2$	$c_0/a$	$a/c_0$

TABLE 2.1 – Paramètres d'adimensionnement.

### 2.1.2 Pression acoustique dans le fluide extérieur

La propagation des ondes acoustiques dans le milieu fluide est traduite par l'équation de Helmholtz, qui s'écrit sous forme adimensionnée

$$\nabla^2 p + \omega^2 p = 0, \quad (2.3)$$

l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques étant donné par

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.4)$$

Notons que la pulsation adimensionnée  $\omega$  est égale à  $k_0 a$ . Elle correspond donc au rapport de la circonférence de l'obstacle sur la longueur d'onde caractérisant l'excitation, et est parfois appelée nombre d'onde réduit. Le problème considéré étant de nature bidimensionnelle, les différentes grandeurs ne dépendent pas de la variable axiale  $z$ , et les dérivées par rapport à celle-ci sont toutes nulles. Le laplacien se résume donc aux trois premiers termes de l'expression 2.4.

La pression acoustique dans le milieu fluide peut se décomposer en une partie correspondant à la pression incidente  $p_{\text{inc}}$ , et une partie représentant la pression diffractée  $p_{\text{diff}}$ . Cette pression diffractée peut elle-même être vue comme la somme de la pression  $p_{\text{refl}}$  qui serait réfléchiée par un obstacle rigide de rayon  $b$ , et de la pression rayonnée  $p_{\text{ray}}$  causée par le mouvement de la surface extérieure du revêtement élastique. La pression totale peut donc aussi être décomposée en pression bloquée (correspondant au cas d'un cylindre rigide équivalent soumis à la même onde incidente) et pression rayonnée (due à la vibration de la surface de l'obstacle).

$$p = \overbrace{p_{\text{inc}} + p_{\text{refl}} + p_{\text{ray}}}^{p_{\text{bloquée}}} \quad (2.5)$$

$p_{\text{diff}}$

La pression due à l'onde plane incidente donnée par l'expression 2.2 peut s'écrire, après adimensionnement et expansion en série de Bessel (Abramowitz et Stegun, 1965),

$$p_{\text{inc}}(r, \theta) = p_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n i^n J_n(\omega r) \cos(n\theta) \quad \text{avec} \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2 & \text{if } n \geq 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

La pression diffractée correspond à une onde cylindrique divergente, centrée en  $r = 0$  et se propageant dans la direction des  $r$  croissants. Mathématiquement, elle est solution de l'équation de Helmholtz 2.3 du fait de la linéarité de celle-ci. D'après les développements donnés en annexe B.1.1, elle a pour forme générale

$$p_{\text{diff}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n H_n(\omega r) \cos(n\theta), \quad (2.7)$$

où  $H_n$  désigne la fonction de Hankel de première espèce d'ordre entier  $n$ , et où le coefficient de diffraction  $A_n$  est à déterminer par application des conditions aux limites au niveau de la surface extérieure du revêtement, en  $r = r_N$ . À cet endroit, il doit y avoir continuité de la pression et de la composante normale du déplacement, c'est-à-dire de la composante radiale (la surface étant cylindrique). Ceci se traduit d'une part par une égalité entre la pression dans le fluide en  $r_N^+$  et la contrainte radiale  $\sigma_{rr}$  dans le revêtement en  $r_N^-$ ,

$$\text{pour tout } \theta, \quad p(r_N^+, \theta) = -\sigma_{rr}^N(r_N^-, \theta), \quad (2.8)$$

et d'autre part par une égalité entre le déplacement radial  $u_r$  des particules fluides en  $r_N^+$  et le déplacement radial  $u_r^N$  du revêtement en  $r_N^-$ ,

$$\text{pour tout } \theta, \quad u_r(r_N^+, \theta) = u_r^N(r_N^-, \theta). \quad (2.9)$$

La relation d'Euler linéarisée permet d'exprimer le déplacement des particules fluides en fonction de la pression. Sa version adimensionnée s'écrit

$$\omega^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.10)$$

La pression apparaissant dans cette équation correspond à la pression acoustique totale  $p = p_{\text{inc}} + p_{\text{diff}}$ ,

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} [p_0 \epsilon_n i^n J_n(\omega r) + A_n H_n(\omega r)] \cos(n\theta). \quad (2.11)$$

Par projection dans la direction radiale et application de la condition aux limites 2.9, on obtient

$$\text{pour tout } \theta, \quad u_r^N(r_N^-, \theta) = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} [p_0 \epsilon_n i^n J_n'(\omega r_N^+) + A_n H_n'(\omega r_N^+)] \cos(n\theta). \quad (2.12)$$

La détermination des coefficients de diffraction  $A_n$  nécessite donc le calcul du déplacement  $u_r^N(r_N^-, \theta)$  de la surface extérieure du revêtement. Pour cela, on doit étudier les vibrations de ce dernier, ce qui est fait dans les paragraphes suivants.

### 2.1.3 Contraintes et déformations dans le revêtement élastique

#### Loi de comportement

On considère que le comportement des matériaux composant le revêtement est décrit par un modèle d'élasticité linéaire, les constantes élastiques étant complexes pour tenir compte de la *visco*-élasticité des matériaux (cf. paragraphe 2.1.1). Le caractère linéaire du comportement élastique est traduit par la loi de Hooke généralisée qui relie le tenseur des contraintes au tenseur des déformations, par l'intermédiaire d'un tenseur de rigidité d'ordre 4, contenant  $3^4$  constantes élastiques. Les différentes symétries de ces tenseurs et l'utilisation de la notation de Voigt permettent de réduire cette relation à des vecteurs contraintes et déformations de dimension 6, reliés par une matrice de rigidité (6, 6) présentant 21 constantes indépendantes. Des simplifications supplémentaires dues à l'orthotropie des matériaux considérés conduisent à des matrices de rigidité possédant uniquement 9 grandeurs indépendantes, ce qui donne, pour toute couche  $j$  du revêtement, une relation du type

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^j \\ \sigma_{\theta\theta}^j \\ \sigma_{zz}^j \\ \sigma_{\theta z}^j \\ \sigma_{zr}^j \\ \sigma_{r\theta}^j \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \begin{pmatrix} c_{11}^j & c_{12}^j & c_{13}^j & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^j & c_{22}^j & c_{23}^j & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^j & c_{23}^j & c_{33}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^j \\ \varepsilon_{\theta\theta}^j \\ \varepsilon_{zz}^j \\ 2\varepsilon_{\theta z}^j \\ 2\varepsilon_{zr}^j \\ 2\varepsilon_{r\theta}^j \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

reliant les contraintes adimensionnées  $\boldsymbol{\sigma}^j$  (cf. figure 2.2) aux déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}^j$ , avec  $c_{kl}^j$  les constantes élastiques du matériau.

Le cylindre et son revêtement sont supposés infiniment longs, et les contraintes appliquées appartiennent aux plans de section droite de cet ensemble. On peut donc considérer qu'il s'agit d'un

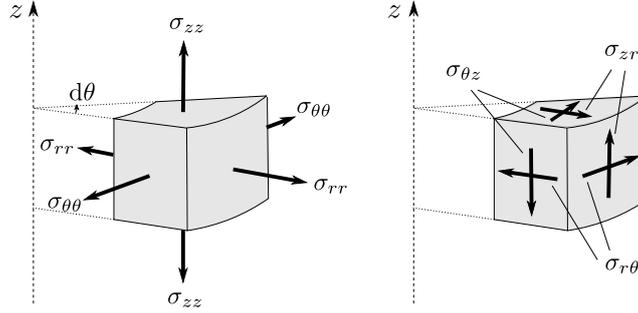


FIGURE 2.2 – Contraintes sur un élément cylindrique

problème bidimensionnel de type déformations planes, dans lequel seules les déformations  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$ , et  $\varepsilon_{r\theta}$  sont non nulles. Ainsi, on peut se ramener à une matrice de rigidité de taille (3, 3) telle que

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^j \\ \sigma_{\theta\theta}^j \\ \sigma_{r\theta}^j \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \begin{pmatrix} c_{11}^j & c_{12}^j & 0 \\ c_{12}^j & c_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^j \\ \varepsilon_{\theta\theta}^j \\ 2\varepsilon_{r\theta}^j \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Les constantes élastiques  $c_{kl}$  intervenant dans la matrice de rigidité sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse, de coefficients  $s_{kl}$ , en tenant compte du fait que

$$\frac{\nu_{\theta r}}{E_{\theta}} = \frac{\nu_{r\theta}}{E_r}, \quad \frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{\nu_{rz}}{E_r}, \quad \frac{\nu_{\theta z}}{E_{\theta}} = \frac{\nu_{z\theta}}{E_z}. \quad (2.15)$$

Les coefficients  $s_{kl}$  et  $c_{kl}$  des matrices de souplesse et de rigidité sont donnés par

$$\begin{aligned} s_{11}^j &= \frac{1}{E_r(1-i\eta)} \left( 1 - \nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r} \right) \Big|_j, & c_{11}^j &= \frac{s_{22}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \Big|_j, \\ s_{12}^j &= \frac{-1}{E_r(1-i\eta)} \left( \nu_{r\theta} + \nu_{rz}\nu_{\theta z} \frac{E_z}{E_{\theta}} \right) \Big|_j, & c_{12}^j &= \frac{-s_{12}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \Big|_j, \\ s_{22}^j &= \frac{1}{E_{\theta}(1-i\eta)} \left( 1 - \nu_{\theta z}^2 \frac{E_z}{E_{\theta}} \right) \Big|_j, & c_{22}^j &= \frac{s_{11}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \Big|_j, \\ s_{66}^j &= \frac{1}{G_{r\theta}(1-i\eta)} \Big|_j, & c_{66}^j &= \frac{1}{s_{66}} \Big|_j. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ces constantes dépendent donc du facteur de perte  $\eta$ , du module de cisaillement  $G_{r\theta}$ , ainsi que des coefficients de Poisson  $\nu$  et modules d'Young  $E$  dans toutes les directions. Notons que pour les matériaux usuels, ayant un coefficient de Poisson compris entre 0 et 0.5, les termes en  $\nu^2$ , très faibles, peuvent être négligés<sup>1</sup>. Dans ce cas, seuls  $E_r$ ,  $E_{\theta}$ ,  $\nu_{r\theta}$  et  $G_{r\theta}$  ont une contribution significative. Mais on sait que l'on peut également créer des matériaux à coefficient de Poisson négatif (matériaux auxétiques) au moyen de structures de type réseau, qui peuvent présenter un coefficient de Poisson inférieur à -1 dans certaines configurations anisotropes (Greaves *et al.*, 2011). Les termes en  $\nu^2$  ne sont alors plus négligeables. Afin de ne pas restreindre la généralité du problème, les expressions exactes sont donc conservées dans la modélisation.

1. Pour les métaux, polymères et céramiques, on a par exemple  $0.25 < \nu < 0.35$ .

### Relations déformations-déplacements

Les déformations  $\varepsilon^j$  apparaissant dans l'équation 2.14 peuvent s'exprimer en fonction des déplacements  $\mathbf{u}^j$  par les relations géométriques

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^j &= \frac{\partial u_r^j}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^j &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^j}{\partial \theta} + \frac{u_r^j}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta}^j &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^j}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^j}{\partial r} - \frac{u_\theta^j}{r} \right).\end{aligned}\tag{2.17}$$

### Équations du mouvement

Les équations de conservation de la quantité de mouvement à l'intérieur de la couche  $j$  s'écrivent, pour ce qui est des contraintes et des déplacements,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^j - \sigma_{\theta\theta}^j) &= -\frac{\rho_j}{\rho_0} \omega^2 u_r^j, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^j &= -\frac{\rho_j}{\rho_0} \omega^2 u_\theta^j.\end{aligned}\tag{2.18}$$

L'ensemble des équations 2.14 à 2.18 permet l'écriture d'un système vérifié par le déplacement  $\mathbf{u}^j$ , dont la résolution analytique directe n'est pas possible.

Dans le cas de matériaux isotropes, une solution analytique peut être trouvée en supposant que le déplacement dérive d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur. Le déplacement peut alors être vu comme la somme de deux déplacements, l'un associé à des ondes de compression, l'autre à des ondes de cisaillement (voir annexe B.1.2). Cette méthode est initialement proposée par [Faran \(1951\)](#) pour des cylindres élastiques isotropes excités par une onde acoustique sous incidence normale. Elle est reprise par [Morse et Feshbach \(1953\)](#), ou encore [White \(1958\)](#), qui introduit la possibilité d'une incidence oblique de l'onde excitant le cylindre élastique. [Doolittle et Überall \(1966\)](#) l'adaptent au cas de couches cylindriques, en ajoutant la prise en compte des conditions de continuité au niveau des interfaces entre couches. [Flax et Neubauer \(1977\)](#) s'intéressent de la même façon à des couches élastiques isotropes pouvant présenter une certaine absorption, et [Gaunaud \(1977\)](#) et [Hasheminejad et Safari \(2005\)](#) considèrent des matériaux visco-élastiques décrits respectivement par les modèles de Kelvin-Voigt et de Havriliak-Negami. Les résultats obtenus dans ces trois cas ne diffèrent des études purement élastiques que par le fait que les constantes de propagation des ondes longitudinales et transverses sont ici complexes.

Pour des cylindres ou coques cylindriques à isotropie transverse<sup>2</sup>, des techniques similaires, basées sur une décomposition du vecteur déplacement en trois termes, sont employées. Les deux premiers termes correspondent à la décomposition du cas isotrope, et font donc intervenir deux potentiels, le troisième terme varie d'un auteur à l'autre. [Buchwald \(1961\)](#), [Mirsky \(1965\)](#), [Ahmad et Rahman \(2000\)](#) et [Pan et al. \(2003\)](#) choisissent de l'exprimer en fonction des potentiels des deux premiers termes, tandis que [Morse et Feshbach \(1953\)](#), [Zhang et al. \(1995\)](#) et [Honarvar et Sinclair \(1996\)](#) utilisent un troisième potentiel. [Honarvar et al. \(2007\)](#) montrent que dans ce cas, l'onde se propageant dans le matériau peut être vue comme une combinaison d'une onde de compression et

2. *i. e.* possédant des caractéristiques élastiques identiques dans les directions  $r$  et  $\theta$ , mais pas dans la direction  $z$

de deux ondes de cisaillement, l'une polarisée horizontalement, l'autre verticalement.

Que ce soit dans le cas de matériaux isotropes ou transversalement isotropes, les solutions obtenues grâce à ces décompositions s'écrivent comme des superpositions de modes normaux faisant intervenir des fonctions de Bessel (voir par exemple les solutions B.26 et B.27 du cas isotrope données en annexe B.1.2). On a, pour chaque couche, un certain nombre de coefficients modaux à déterminer en appliquant les conditions aux limites. Une première méthode consiste à rassembler les équations correspondant à ces conditions aux limites sous forme d'un système matriciel. Sa résolution nécessite des calculs sur des matrices de taille  $(4N + 2, 4N + 2)$  pour le cas bidimensionnel à  $N$  couches traité ici. Cette méthode, appelée *expansion en modes normaux*, est tout à fait adaptée pour des revêtements comptant une ou deux couches élastiques, mais l'est beaucoup moins lorsque le nombre de couches est important.

Pour éviter le calcul de déterminant et l'inversion de matrices de grande taille, il est possible d'utiliser des matrices de transfert pour chaque couche, reliant les contraintes et déplacements d'un côté de la couche, aux contraintes et déplacements de l'autre côté de celle-ci (Sastry et Munjal, 1998; Chen *et al.*, 2004a,b). Par multiplication, on obtient une matrice de transfert globale, reliant ce qui se passe au niveau de la surface extérieure du revêtement, à ce qui se passe au niveau de sa surface intérieure, c'est-à-dire au niveau de l'obstacle dans la configuration étudiée ici. Le vecteur rassemblant les contraintes et déplacements au niveau d'une interface est appelé vecteur d'état, et cette technique, formulation d'état (*state-space formulation* en anglais).

Les méthodes appliquées dans le cas de revêtements multicouches isotropes ou transversalement isotropes, pour réduire les équations du mouvement à des équations d'ondes, ne semblent pas facilement applicables au cas de matériaux orthotropes. Des solutions approchées peuvent toutefois être trouvées, sans pour autant recourir à des hypothèses simplificatrices de type couches minces. Deux méthodes sont présentées ici. La première, proposée par Skelton et James (1993), consiste à utiliser des transformées de Fourier pour représenter les variations des grandeurs intéressantes dans la direction tangentielle, et à employer une approche de type éléments finis pour déterminer leurs variations dans la direction radiale. La seconde, développée par Chen *et al.* (2004b), Hasheminejad et Rajabi (2007a), et Jamali *et al.* (2011), est basée sur une formulation d'état et l'utilisation de matrices de transfert.

## 2.2 Résolution des équations du mouvement

### 2.2.1 Méthode de Skelton : approximations radiales de type éléments finis

De manière classique (cf. Williams (1998)), Skelton et James (1993) proposent de représenter les variations des grandeurs physiques dans la direction tangentielle par des transformations en séries de Fourier. Cela donne, par exemple pour le déplacement,

$$\mathbf{u}^j(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_n^j(r) e^{in\theta}, \quad (2.19)$$

expression qui est à rapprocher de celle trouvée dans le cas de matériaux isotropes (cf. équations B.28 et B.29 de l'annexe B.1.2). Mais tandis que l'on dispose d'expressions pour le déplacement modal pour les matériaux isotropes, le déplacement spectral  $\mathbf{u}_n^j(r)$  est ici entièrement à déterminer. Pour cela, et comme détaillé dans la suite du paragraphe, on peut utiliser une discrétisation de type éléments finis dans la direction radiale.

## 2.2.1.1 Principe des travaux virtuels

Le revêtement dont on cherche à déterminer le déplacement est divisé en un certain nombre de couches, que l'on considère comme autant d'éléments ou sous-domaines. Au lieu d'utiliser sur chacune des couches les équations de quantité de mouvement sous leur forme locale données par les équations 2.18, on se tourne ici vers une formulation variationnelle du problème. On utilise le principe des travaux virtuels selon lequel, dans toute couche  $j$ , à tout instant et pour tout déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}^j$ , il y a égalité entre le travail virtuel des efforts d'inertie et le travail virtuel des efforts intérieurs et extérieurs. Cela se traduit par l'équation adimensionnée

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_j} \frac{\rho_j}{\rho_0} \ddot{\mathbf{u}}^j \cdot \delta \mathbf{u}^j dV}_{\text{travail virtuel du champ d'accélération}} = - \underbrace{\int_{\mathcal{D}_j} \boldsymbol{\sigma}^j : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^j dV}_{\text{travail virtuel des efforts intérieurs}} + \overbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_j} \mathbf{t}^j \cdot \delta \mathbf{u}^j dS}_{\text{travail virtuel des efforts de contacts}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_j} \frac{\rho_j}{\rho_0} \mathbf{f}^j \cdot \delta \mathbf{u}^j dV}_{\text{travail virtuel des efforts à distance}}, \quad (2.20)$$

dans laquelle les efforts extérieurs sont séparés en forces volumiques  $\mathbf{f}^j$  appliquées au domaine considéré, et contraintes  $\mathbf{t}^j$  s'exerçant sur ses frontières. Le domaine  $\mathcal{D}_j$  correspond au volume qu'occupe la couche  $j$ , et  $\partial \mathcal{D}_j$  correspond aux frontières de ce domaine. Comme expliqué précédemment, les tenseurs des contraintes et des déformations ( $\boldsymbol{\sigma}^j$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^j$ ) sont remplacés par des vecteurs (notés ici de manière identique). Le passage de grandeurs tensorielles à des grandeurs vectorielles transforme le produit doublement contracté de l'équation 2.20 en simple produit scalaire. Puisque l'on considère des grandeurs complexes<sup>3</sup>, on utilise ici le produit scalaire hermitien canonique pour lequel on a, pour tous vecteurs complexes  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^H \mathbf{x}, \quad (2.21)$$

où  $(\cdot)^H$  représente l'opérateur de transconjugaison.

Par ailleurs, on considère que dans le cas traité ici, les forces volumiques  $\mathbf{f}^j$  sont négligeables. Le dernier terme de l'équation 2.20 disparaît donc. Les seules forces extérieures agissant sur la couche  $j$  sont les contraintes qui s'exercent au niveau de sa surface extérieure (en  $r = r_j$ ), et au niveau de sa surface intérieure (en  $r = r_{j-1}$ ). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int_{\mathcal{D}_j} \frac{\rho_j}{\rho_0} \delta \mathbf{u}^j(r, \theta)^H \mathbf{u}^j(r, \theta) r dr d\theta dz &= - \int_{\mathcal{D}_j} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^j(r, \theta)^H \boldsymbol{\sigma}^j(r, \theta) r dr d\theta dz + \\ r_j \int_{\partial \mathcal{D}_j^+} \delta \mathbf{u}^j(r_j, \theta)^H \mathbf{t}^j(r_j, \theta) d\theta dz &+ r_{j-1} \int_{\partial \mathcal{D}_j^-} \delta \mathbf{u}^j(r_{j-1}, \theta)^H \mathbf{t}^j(r_{j-1}, \theta) d\theta dz. \end{aligned} \quad (2.22)$$

La configuration étudiée étant bidimensionnelle, les différentes grandeurs intervenant dans les intégrales ne dépendent pas de la coordonnée  $z$ . On s'intéresse donc par la suite aux équations par unité de longueur suivant  $z$ .

Grâce à l'égalité de Parseval, on peut passer de l'équation 2.22 à une équation concernant les grandeurs spectrales, notées avec un indice  $n$  et ne dépendant que de la variable radiale  $r$ . On sait que, pour deux fonctions  $f$  et  $g$  continues par morceaux et  $2\pi$ -périodiques, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{f_n} g_n, \quad (2.23)$$

avec  $f_n$  et  $g_n$  les transformées de Fourier respectives de  $f$  et  $g$ . Cela conduit à l'équation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{r_{j-1}}^{r_j} \left[ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^j{}^H \boldsymbol{\sigma}_n^j - \omega^2 \frac{\rho_j}{\rho_0} \delta \mathbf{u}_n^j{}^H \mathbf{u}_n^j \right] r dr = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ r_j \delta \mathbf{u}_n^j|_{r_j}{}^H \mathbf{t}_n^j|_{r_j} + r_{j-1} \delta \mathbf{u}_n^j|_{r_{j-1}}{}^H \mathbf{t}_n^j|_{r_{j-1}} \right]. \quad (2.24)$$

3. La matrice de raideur est complexe à cause de la prise en compte de la visco-élasticité des matériaux, le vecteur rassemblant les contraintes est donc lui aussi complexe (voir équation 2.14).

On cherche donc à ce que l'intégrale du membre de gauche soit égale à l'expression entre crochets du membre de droite pour tout entier relatif  $n$ . En d'autres termes, on cherche à ce que le travail virtuel des efforts spectraux à l'intérieur de la couche  $j$  soit égal au travail virtuel des efforts spectraux extérieurs appliqués à cet élément.

Les contraintes et les déformations sont liées aux déplacements par la loi de Hooke 2.14 et les relations géométriques 2.17. Cela donne, dans le domaine spectral, des relations de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}_n^j(r) = \mathbf{D}^j \mathbf{L} \mathbf{u}_n^j(r), \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^j(r) = \mathbf{L} \mathbf{u}_n^j(r), \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{D}^j$  la matrice de raideur de l'élément  $j$ , et  $\mathbf{L}$  l'opérateur linéaire transcrivant les équations 2.17. La seule inconnue du terme de gauche dans l'équation 2.24 est donc le déplacement spectral  $u_n^j$ .

### 2.2.1.2 Approximation nodale

Dans les méthodes de type éléments finis, on suppose que l'on peut décrire le déplacement à l'intérieur des différents éléments par des fonctions de forme connue, par exemple des fonctions linéaires ou quadratiques. On peut alors exprimer le déplacement en un point de l'élément  $j$  en fonction des déplacements de points particuliers de cet élément appelés nœuds. Dans le cas présent, on choisit d'employer une démarche similaire, et d'utiliser, pour le déplacement spectral, une approximation de forme quadratique en  $r$ . Comme représenté sur la figure 2.3, on considère que chaque élément comprend trois nœuds. Le premier se situe au niveau de la frontière intérieure de la couche cylindrique considérée, le deuxième au centre de l'élément, et le dernier au niveau de sa surface extérieure. Le déplacement spectral à l'intérieur de la couche  $j$  est alors obtenu grâce aux déplacements nodaux  $\mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j$  par une relation du type

$$\mathbf{u}_n^j(r) = \mathbf{N}^j(r) \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j, \quad (2.27)$$

où  $\mathbf{N}^j(r)$  est la matrice des fonctions de forme ou fonctions d'interpolation de l'élément  $j$ , dont l'expression est donnée en annexe B.2.1. Le vecteur  $\mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j$  est ici de dimension 6. On s'intéresse en effet aux déplacements au niveau des 3 nœuds de chaque élément, et cela dans deux directions (la direction tangentielle et la direction radiale).

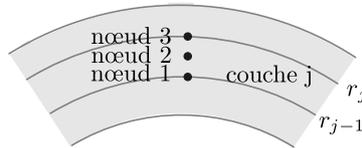


FIGURE 2.3 – Position des nœuds d'un élément

L'introduction de cette approximation nodale dans l'équation obtenue à partir des expressions 2.24 à 2.26 conduit à

$$\delta \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j \text{ }^H \int_{r_{j-1}}^{r_j} \left[ \mathbf{B}_n^{j \text{ } H} \mathbf{D}^j \mathbf{B}_n^j - \omega^2 \frac{\rho_j}{\rho_0} \mathbf{N}^{j \text{ } H} \mathbf{N}^j \right] r \, dr \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \delta \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j \text{ }^H \mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^j \quad (2.28)$$

$$\text{avec } \mathbf{B}_n^j = \mathbf{L}\mathbf{N}^j, \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n,\text{nœud } 3}^j \\ \mathbf{u}_{n,\text{nœud } 2}^j \\ \mathbf{u}_{n,\text{nœud } 1}^j \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^j = \begin{pmatrix} r_j \mathbf{t}_n^j|_{r_j} \\ \mathbf{0} \\ r_{j-1} \mathbf{t}_n^j|_{r_{j-1}} \end{pmatrix}.$$

Cette équation doit être vérifiée pour tout déplacement spectral virtuel des nœuds  $\delta \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j$ . On en déduit que l'on doit avoir, pour tout entier relatif  $n$ ,

$$(\mathbf{K}_n^j - \omega^2 \mathbf{M}^j) \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^j, \quad (2.29)$$

avec

$$\mathbf{K}_n^j = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \mathbf{B}_n^{jH} \mathbf{D}^j \mathbf{B}_n^j r \, dr, \quad (2.30)$$

la matrice de raideur de la couche  $j$ , de dimension (6,6) et à coefficients complexes, et

$$\mathbf{M}^j = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{\rho_j}{\rho_0} \mathbf{N}^{jH} \mathbf{N}^j r \, dr, \quad (2.31)$$

la matrice de masse de la couche  $j$ , également de dimension (6,6) mais à coefficients réels.

Grâce au système 2.29, on peut obtenir la matrice de raideur dynamique  $\mathbf{T}_n^j$  de la couche  $j$ , telle que

$$\mathbf{T}_n^j \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n,\text{nœud } 3}^j \\ \mathbf{u}_{n,\text{nœud } 1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{n,\text{nœud } 3}^j \\ \mathbf{t}_{n,\text{nœud } 1}^j \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Cependant, Skelton et James (1993) font remarquer que l'approximation du déplacement par une fonction de forme quadratique en  $r$  sera certainement insuffisante dans de nombreux cas (même si elle devrait donner des résultats corrects en basses fréquences). Ils proposent d'améliorer la précision de l'approximation en subdivisant automatiquement chaque couche en  $q$  sous-couches.

### 2.2.1.3 Subdivision en $q$ sous-couche pour une meilleure précision

Pour chaque sous-couche, on calcule les matrices de raideur et de masse selon les expressions ci-dessus, et on assemble les systèmes de la forme

$$\mathbf{S}_n^k \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^k = \mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^k, \quad \text{avec} \quad \mathbf{S}_n^k = (\mathbf{K}_n^k - \omega^2 \mathbf{M}^k), \quad (2.33)$$

obtenus pour chaque sous-couche, en un système matriciel du type

$$\mathbf{Z}_n^j \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^j. \quad (2.34)$$

Dans cette expression, le vecteur colonne  $\mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j$  rassemble les déplacements spectraux au niveau des nœuds des différentes sous-couches de l'élément  $j$ , et  $\mathbf{F}_{n,\text{nœuds}}^j$  est le vecteur colonne des excitations spectrales exercées sur ces nœuds. Cet assemblage repose sur la continuité des déplacements aux interfaces entre sous-couches et est représenté schématiquement sur la figure 2.4. Par construction, la matrice  $\mathbf{Z}_n^j$  est de taille  $(4q+2, 4q+2)$ , et a une structure de type bande. Du fait de la continuité des contraintes au niveau des différentes interfaces, les contraintes s'appliquant à l'intérieur de la couche  $j$  sont nulles. Seules les composantes correspondant aux contraintes sur la surface extérieure et sur la surface intérieure de la couche  $j$  ne s'annulent pas.

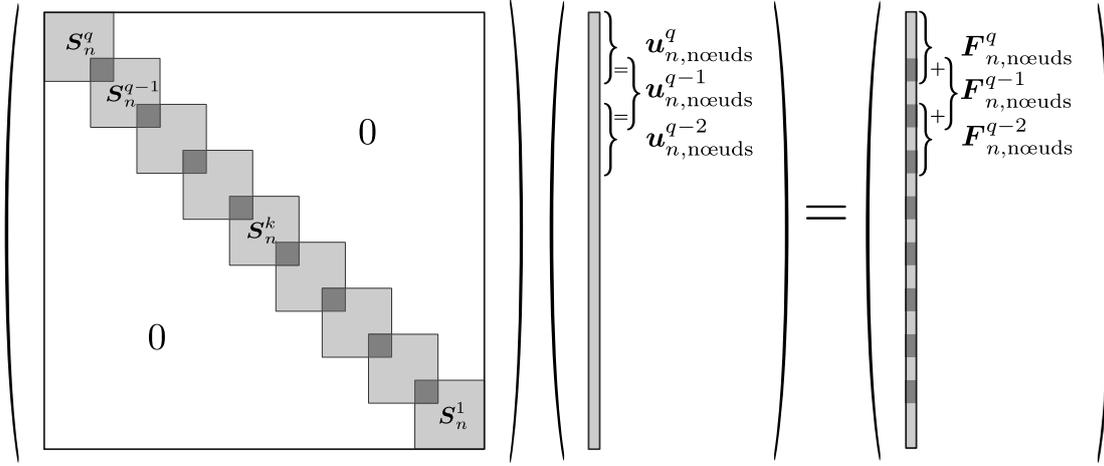


FIGURE 2.4 – Assemblage des matrices et vecteurs  $S_n^k$ ,  $\mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^k$  et  $F_{n,\text{nœuds}}^k$  des  $q$  sous-couches de l'élément  $j$ , pour former le système  $\mathcal{Z}_n^j \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathcal{F}_{n,\text{nœuds}}^j$ . Les zones foncées correspondent à l'addition des composantes de deux matrices voisines.

Après inversion du système, on obtient une matrice pleine, de taille  $(4q + 2, 4q + 2)$ , qui multiplie un vecteur, celui des excitations spectrales, dont seules les deux premières et les deux dernières composantes sont non nulles. Comme on ne cherche ici que les déplacements spectraux au niveau des surfaces extérieure et intérieure de la couche  $j$ , on conserve uniquement les quatre coefficients se trouvant à chaque angle de l'inverse de  $\mathcal{Z}_n^j$ , et on obtient le système

$$\begin{pmatrix} u_{\theta,n}^j(r_j) \\ u_{r,n}^j(r_j) \\ u_{\theta,n}^j(r_{j-1}) \\ u_{r,n}^j(r_{j-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_j t_{\theta,n}^j(r_j) \\ r_j t_{r,n}^j(r_j) \\ r_{j-1} t_{\theta,n}^j(r_{j-1}) \\ r_{j-1} t_{r,n}^j(r_{j-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Il suffit ensuite d'inverser une nouvelle fois le système, et, dans la matrice obtenue, de diviser les coefficients des deux premières lignes de la matrice par  $r_j$ , et ceux des deux dernières lignes par  $r_{j-1}$ , pour aboutir à l'expression de la matrice de raideur dynamique  $\mathbf{T}_n^j$ . Celle-ci relie les excitations spectrales au niveau des surfaces extérieure et intérieure de la couche, et les déplacements spectraux de ces mêmes surfaces,

$$\underbrace{\mathbf{T}_n^j}_{(4,4)} \begin{pmatrix} u_{\theta,n}^j(r_j) \\ u_{r,n}^j(r_j) \\ u_{\theta,n}^j(r_{j-1}) \\ u_{r,n}^j(r_{j-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{\theta,n}^j(r_j) \\ t_{r,n}^j(r_j) \\ t_{\theta,n}^j(r_{j-1}) \\ t_{r,n}^j(r_{j-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

#### 2.2.1.4 Assemblage des matrices élémentaires

De la même façon que précédemment, les matrices  $\mathbf{T}_n^j$  obtenues pour les différentes couches du revêtement sont assemblées en tenant compte de la continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces entre couches (voir figure 2.5). Cela conduit à un système matriciel de la forme

$$\mathcal{W}_n \mathbf{u}_{n,\text{interfaces}} = \mathcal{F}_{n,\text{interfaces}} \quad (2.37)$$

traduisant le comportement global du revêtement. La matrice  $\mathcal{W}_n$  est une matrice bande de taille  $(2N + 2, 2N + 2)$ ,  $N$  correspondant au nombre de couches du revêtement. Le vecteur  $\mathbf{u}_{n,\text{interfaces}}$  contient les déplacements spectraux au niveau des interfaces entre les différentes couches, et le vecteur  $\mathcal{F}_{n,\text{interfaces}}$ , les contraintes spectrales appliquées à ces endroits. Par continuité, la somme des contraintes dues au revêtement s'exerçant au niveau d'une interface entre deux couches est nulle. Si une force ponctuelle extérieure était appliquée au niveau d'une de ces interfaces, on ajouterait ici cette contribution dans le vecteur  $\mathcal{F}_{n,\text{interfaces}}$  (voir Skelton et James (1993)). Dans la configuration que l'on étudie, ce n'est pas le cas, et seuls le premier et le dernier vecteur de  $\mathcal{F}_{n,\text{interfaces}}$  sont non nuls.

FIGURE 2.5 – Assemblage des matrices élémentaires  $\mathbf{T}_n^j$  pour former le système matriciel global  $\mathcal{W}_n \mathbf{u}_{n,\text{interfaces}} = \mathcal{F}_{n,\text{interfaces}}$ . Les zones foncées correspondent à l'addition des coefficients de deux matrices élémentaires voisines.

### 2.2.1.5 Conditions aux limites et résolution

Les contraintes qui s'exercent sur la paroi extérieure du revêtement  $\mathbf{t}_n^N(r_N)$  sont dues à la pression acoustique présente dans le fluide extérieur. Celle-ci, donnée comme une somme de termes en  $\cos(n\theta)$  dans l'équation 2.11, peut également s'écrire comme une somme de termes en  $e^{in\theta}$ ,

$$p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \underbrace{p_0 i^n J_n(\omega r)}_{p_{\text{inc}}} + \underbrace{B_n H_n(\omega r)}_{p_{\text{diff}}} \right] e^{in\theta}. \quad (2.38)$$

Comme précédemment, on utilise conjointement la relation d'Euler linéarisée et la continuité du déplacement radial à l'interface entre le milieu fluide et le revêtement solide pour déterminer  $B_n$ . En utilisant la décomposition spectrale 2.19 pour exprimer les déplacements à l'intérieur du revêtement élastique, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{r,n}^N(r_N) e^{in\theta} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ p_0 i^n J'_n(\omega r_N) + B_n H'_n(\omega r_N) \right] e^{in\theta}, \quad (2.39)$$

ce qui conduit à

$$B_n = -p_0 i^n \frac{J'_n(\omega r_N)}{H'_n(\omega r_N)} + \omega \frac{u_{r,n}^N(r_N)}{H'_n(\omega r_N)}, \quad (2.40)$$

et donc à la pression acoustique

$$p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \underbrace{p_0 i^n \left( J_n(\omega r) - \frac{J'_n(\omega r_N)}{H'_n(\omega r_N)} H_n(\omega r) \right)}_{p_{\text{bloquée}}} + \underbrace{\omega \frac{u_{r,n}^N(r_N)}{H'_n(\omega r_N)} H_n(\omega r)}_{p_{\text{ray}}} \right] e^{in\theta}, \quad (2.41)$$

que l'on peut noter

$$p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(r) e^{in\theta}. \quad (2.42)$$

On note au passage que l'on peut faire apparaître dans l'expression de la pression totale, obtenue en séparant le champ de pression total en onde incidente et onde diffractée, une séparation en pression bloquée et pression rayonnée, comme annoncé dans le paragraphe 2.1.2. Le premier terme de la somme correspond en effet au champ de pression autour d'un cylindre rigide de rayon  $r_N$  soumis à une onde plane (la pression bloquée). Le second représente une onde cylindrique divergente dont l'amplitude est proportionnelle au déplacement de la surface extérieure du revêtement. Il s'agit donc d'une onde rayonnée par celui-ci, due à ses vibrations.

Cette pression qui, en  $r = r_N$ , s'applique sur la surface extérieure du revêtement, correspond à une contrainte radiale. Cela donne, en considérant les grandeurs spectrales,

$$\mathbf{t}_n^N(r_N) = \begin{pmatrix} t_{r,\theta}^N(r_N) \\ t_{r,n}^N(r_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n(r_N) = \alpha_n + \beta_n u_{r,n}^N(r_N) \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

avec

$$\alpha_n = -\frac{2p_0 i^{n+1}}{\pi \omega r_N H_n'(\omega r_N)} \quad \text{et} \quad \beta_n = -\omega \frac{H_n(\omega r_N)}{H_n'(\omega r_N)}. \quad (2.44)$$

L'expression de  $\alpha_n$  est obtenue grâce à une propriété du Wronskien des fonctions de Bessel et de Neumann (Abramowitz et Stegun (1965), propriété 9.1.16) et à la définition des fonctions de Hankel de première espèce (équation B.10 de l'annexe B.1.1). On montre en effet à partir de ces deux équations que

$$J_n(\xi) H_n'(\xi) - J_n'(\xi) H_n(\xi) = \frac{2i}{\pi \xi}. \quad (2.45)$$

L'autre condition aux limites à vérifier est l'absence de déplacement au niveau du cylindre, due au fait que le revêtement est fixé à l'obstacle. Cela se traduit donc par la nullité de  $\mathbf{u}_n^1(r_0)$ , c'est-à-dire des deux dernières composantes du vecteur  $\mathbf{u}_{n,\text{interfaces}}$ . On restreint donc le système 2.37 à un système à  $2N$  équations et  $2N$  inconnues, qui sont les déplacements spectraux aux interfaces entre couches,  $\mathbf{u}_n^N(r_N)$  à  $\mathbf{u}_n^1(r_1)$ . L'inversion de ce système permet, entre autres, le calcul du déplacement spectral dans la direction radiale au niveau de la surface extérieure du revêtement,  $u_{r,n}^N(r_N)$ . Cela permet alors le calcul de la pression en tout point du fluide extérieur (voir équation 2.41).

### Remarque

En tenant compte de la symétrie de la configuration par rapport à l'axe  $x$ , qui impose que  $u_{r,n}(r) = u_{r,-n}(r)$ , et de la propriété des fonctions de Bessel et de Hankel qui stipule que

$$J_{-n}(\xi) = (-1)^n J_n(\xi) \quad (2.46)$$

$$H_{-n}(\xi) = (-1)^n H_n(\xi) \quad (2.47)$$

(voir Abramowitz et Stegun (1965)), on remarque que l'équation 2.41 peut également s'écrire sous la forme

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n \left[ p_0 i^n \left( J_n(\omega r) - \frac{J_n'(\omega r_N)}{H_n'(\omega r_N)} H_n(\omega r) \right) + \omega \frac{u_{r,n}^N(r_N)}{H_n'(\omega r_N)} H_n(\omega r) \right] \cos(n\theta). \quad (2.48)$$

Cette écriture permet de limiter les étapes de calcul matriciel présentées ci-dessus aux harmoniques  $n$  comprises entre 0 et  $M$  (la somme infinie étant nécessairement tronquée), au lieu de les effectuer pour  $n$  allant de  $-M$  à  $M$ .

### 2.2.1.6 Récapitulatif

Pour chaque  $n$  compris entre 0 et  $M$ , on effectue donc les étapes suivantes :

- calcul, pour chaque couche  $j$ , de la matrice  $\mathbf{T}_n^j$  qui relie les déplacements spectraux au niveau des surfaces extérieure et intérieure aux excitations spectrales exercées sur ces mêmes surfaces. Pour cela,
  - on subdivise chaque couche en  $q$  sous-couches, pour lesquelles on calcule les matrices  $\mathbf{S}_n^k$ ,
  - on assemble celles-ci en une matrice  $\mathbf{Z}_n^j$ ,
  - on élimine lignes et colonnes inutiles pour obtenir la matrice  $\mathbf{T}_n^j$ .
- assemblage des matrices  $\mathbf{T}_n^j$  obtenues pour chaque couche en une matrice  $\mathbf{W}_n$  qui représente le comportement du revêtement dans sa totalité ;
- application des conditions aux limites et résolution du système.

La pression dans le fluide extérieur s'obtient ensuite par addition des différentes contributions harmoniques.

Cette méthode nécessite des opérations sur des matrices de taille  $(6, 6)$ ,  $(4q + 2, 4q + 2)$ ,  $(4, 4)$  et  $(2N + 2, 2N + 2)$ . Selon le nombre de couches et de subdivisions considérées, certaines matrices peuvent donc atteindre une taille importante. Cependant il s'agit de matrices bandes présentant un grand nombre de coefficients nuls. On pourrait donc utiliser des algorithmes spécifiques permettant d'optimiser le calcul numérique et ainsi de limiter les inconvénients dus aux tailles des matrices.

## 2.2.2 Méthode avec matrices de transfert

La résolution des équations du mouvement dans le revêtement multicouche cylindrique orthotrope ne nécessite pas obligatoirement le recours à des matrices de taille importante. [Chen et al. \(2004b\)](#); [Hasheminejad et Rajabi \(2007a\)](#); [Jamali et al. \(2011\)](#) proposent une méthode qui permet de relier les déplacements et contraintes au niveau de la surface extérieure du revêtement aux déplacements et contraintes au niveau de sa surface intérieure, au moyen d'une matrice de taille  $(4, 4)$ . Si dans ce cas la taille des matrices à calculer ne dépend pas du nombre de couches  $N$ , cette méthode est en revanche valable pour des couches relativement fines, et nécessite donc souvent la subdivision des  $N$  couches initiales en un nombre important de sous-couches. Pour chacune d'entre elles, le calcul à effectuer est rapide, mais dans la mesure où l'opération doit être répétée un grand nombre de fois, cette méthode n'est pas obligatoirement plus avantageuse que la précédente d'un point de vue numérique. Enfin, précisons que la condition portant ici sur l'épaisseur des couches ne restreint pas la généralité du calcul. Comme exposé dans le détail de la méthode présenté ci-dessous, il ne s'agit pas d'une hypothèse de type couches minces.

### 2.2.2.1 Équations du mouvement et matrice de transfert du revêtement global

En séparant les variations radiales des variations tangentielles, les équations différentielles vérifiées par le déplacement et les contraintes (issues des équations 2.14 à 2.18) peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^j}{\partial r} = \mathbf{M}^j \mathbf{Y}^j, \quad (2.49)$$

avec  $\mathbf{Y}^j = (u_\theta^j, u_r^j, \sigma_{rr}^j, \sigma_{r\theta}^j)^T$  le vecteur d'état, et  $\mathbf{M}^j$  la matrice définie par

$$\mathbf{M}^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\rho_0 c_0^2}{c_{66}^j} \\ -\frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{r} \frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} & \frac{\rho_0 c_0^2}{c_{11}^j} & 0 \\ \frac{e_{22}^j}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{e_{22}^j}{r^2} - \frac{\rho_j}{\rho_0} \omega^2 & \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} - 1 \right) & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{e_{22}^j}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\rho_j}{\rho_0} \omega^2 & -\frac{e_{22}^j}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{2}{r} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

où

$$e_{22}^j = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( c_{22}^j - \frac{(c_{12}^j)^2}{c_{11}^j} \right). \quad (2.51)$$

Les constantes élastiques  $c_{kl}^j$  étant complexes, la matrice  $\mathbf{M}^j$  est elle aussi complexe. Les variations par rapport à  $r$  des composantes  $u_\theta^j$ ,  $u_r^j$ ,  $\sigma_{rr}^j$  et  $\sigma_{r\theta}^j$  peuvent s'écrire indépendamment de  $\sigma_{\theta\theta}^j$ . Cette composante n'apparaît donc pas dans le vecteur d'état  $\mathbf{Y}^j$ . Elle s'obtient par la relation

$$\sigma_{\theta\theta}^j = \frac{e_{22}^j}{r} \frac{\partial u_\theta^j}{\partial \theta} + \frac{e_{22}^j}{r} u_r^j + \frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} \sigma_{rr}^j. \quad (2.52)$$

On suppose que la dépendance tangentielle des composantes du vecteur d'état est semblable à celle des déplacements et contraintes dans le cas de matériaux isotropes (voir équations B.28 et B.29), et que l'on peut utiliser une décomposition modale du type

$$\mathbf{Y}^j = \begin{pmatrix} u_\theta^j \\ u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \\ \sigma_{r\theta}^j \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{\theta,n}^j(r) \sin(n\theta) \\ u_{r,n}^j(r) \cos(n\theta) \\ \sigma_{rr,n}^j(r) \cos(n\theta) \\ \sigma_{r\theta,n}^j(r) \sin(n\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

L'orthogonalité des fonctions trigonométriques permet alors de transformer l'équation 2.49 en une équation différentielle ordinaire ne dépendant que de la variable  $r$ , et vérifiée pour chaque mode  $n$  par le vecteur d'état modal  $\mathbf{V}_n^j = (u_{\theta,n}^j, u_{r,n}^j, \sigma_{rr,n}^j, \sigma_{r\theta,n}^j)^T$ ,

$$\frac{d\mathbf{V}_n^j}{dr} = \mathbf{P}_n^j \mathbf{V}_n^j, \quad (2.54)$$

la matrice modale  $\mathbf{P}_n^j$  étant donnée par

$$\mathbf{P}_n^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{n}{r} & 0 & \frac{\rho_0 c_0^2}{c_{66}^j} \\ -\frac{c_{12}^j n}{c_{11}^j r} & -\frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} \frac{1}{r} & \frac{\rho_0 c_0^2}{c_{11}^j} & 0 \\ e_{22}^j \frac{n}{r^2} & \frac{e_{22}^j}{r^2} - \frac{\rho_j}{\rho_0} \omega^2 & \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}^j}{c_{11}^j} - 1 \right) & -\frac{n}{r} \\ \frac{e_{22}^j n^2}{r^2} - \frac{\rho_j}{\rho_0} \omega^2 & \frac{e_{22}^j n}{r^2} & \frac{c_{12}^j n}{c_{11}^j r} & -\frac{2}{r} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Les couches composant le revêtement sont supposées suffisamment fines pour que l'on puisse considérer que la matrice  $\mathbf{P}_n^j(r)$  est constante sur toute l'épaisseur de la couche  $j$ . Une subdivision préalable des couches en sous-couches de plus faible épaisseur peut donc s'avérer nécessaire. On choisit d'évaluer la valeur de cette matrice constante au niveau de la surface interne de la couche, c'est-à-dire en  $r = r_{j-1}$ . Par intégration de l'équation différentielle 2.54, on obtient alors, pour le vecteur d'état modal dans la couche  $j$ , l'expression

$$\mathbf{V}_n^j(r) = \exp \left[ (r - r_{j-1}) \mathbf{P}_n^j(r_{j-1}) \right] \mathbf{V}_n^j(r_{j-1}), \quad (2.56)$$

valable pour  $r_{j-1} \leq r \leq r_j$  et  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Grâce à cette relation, on peut, pour chaque couche, relier le vecteur d'état au niveau de la surface externe, au vecteur d'état au niveau de la surface interne. Il suffit pour cela, d'appliquer la relation 2.56 en  $r = r_j$ . On a alors

$$\mathbf{V}_n^j(r_j) = \exp \left[ \frac{h_j}{a} \mathbf{P}_n^j(r_{j-1}) \right] \mathbf{V}_n^j(r_{j-1}), \quad (2.57)$$

où le terme en exponentielle correspond à une matrice que l'on appelle matrice de transfert (modale) de la couche  $j$ .

La continuité des contraintes et déplacements aux interfaces entre couches se traduit par

$$\mathbf{V}_n^j(r_{j-1}) = \mathbf{V}_n^{j-1}(r_j). \quad (2.58)$$

Cela permet, de proche en proche, d'aboutir à une relation entre les variables d'état au niveau de la surface extérieure du revêtement (en  $r = r_N$ ), et les variables d'état au niveau de sa surface intérieure (c'est-à-dire en  $r = r_0$ ),

$$\mathbf{V}_n^N(r_N) = \mathbf{T}_n \mathbf{V}_n^1(r_0). \quad (2.59)$$

La matrice de transfert modale du revêtement global  $\mathbf{T}_n$  correspond à la multiplication des matrices de transfert modales de chaque couche,

$$\mathbf{T}_n = \prod_{j=N}^1 \exp \left[ \frac{h_j}{a} \mathbf{P}_n^j(r_{j-1}) \right]. \quad (2.60)$$

### 2.2.2.2 Conditions aux limites

On sait que les déplacements sont nuls au niveau de la surface intérieure du revêtement, puisque celui-ci est fixé sur l'obstacle cylindrique. D'autre part, les contraintes appliquées au niveau de la surface extérieure sont uniquement radiales : elles sont dues à la pression acoustique  $p(r_N, \theta)$ . On a donc, pour tout  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^N(r_N, \theta) &= -p(r_N, \theta), & u_r^1(r_0, \theta) &= 0, \\ \sigma_{r\theta}^N(r_N, \theta) &= 0, & u_\theta^1(r_0, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Rappelons que le coefficient de diffraction  $A_n$  intervient dans l'expression de la pression acoustique dans le milieu extérieur,

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \underbrace{p_0 \epsilon_n i^n J_n(\omega r)}_{p_{\text{inc}}} + \underbrace{A_n H_n(\omega r)}_{p_{\text{diff}}} \right] \cos(n\theta).$$

Il est déterminé grâce à la condition de continuité de la vitesse radiale à l'interface entre le milieu fluide et le milieu solide

$$u_r^N(r_N, \theta) = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ p_0 \epsilon_n i^n J'_n(\omega r_N) + A_n H'_n(\omega r_N) \right] \cos(n\theta).$$

La décomposition modale utilisée ici pour le déplacement radial  $u_r^j$  dans le revêtement (cf. équation 2.53) conduit à l'expression

$$A_n = -p_0 \epsilon_n i^n \frac{J'_n(\omega r_N)}{H'_n(\omega r_N)} + \omega \frac{u_{r,n}^N(r_N)}{H'_n(\omega r_N)}, \quad (2.62)$$

ce qui donne pour la pression acoustique

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \underbrace{p_0 \epsilon_n i^n \left( J_n(\omega r) - \frac{J'_n(\omega r_N)}{H'_n(\omega r_N)} H_n(\omega r) \right)}_{p_{\text{bloquée}}} + \underbrace{\omega \frac{u_{r,n}^N(r_N)}{H'_n(\omega r_N)} H_n(\omega r)}_{p_{\text{ray}}} \right] \cos(n\theta). \quad (2.63)$$

La transcription des conditions aux limites 2.61 en conditions aux limites portant sur les grandeurs modales correspondantes transforme donc le système 2.59 en

$$\begin{pmatrix} u_{\theta,n}^N(r_N) \\ u_{r,n}^N(r_N) \\ \alpha_n + \beta_n u_{r,n}^N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{n,11} & T_{n,12} & T_{n,13} & T_{n,14} \\ T_{n,21} & T_{n,22} & T_{n,23} & T_{n,24} \\ T_{n,31} & T_{n,32} & T_{n,33} & T_{n,34} \\ T_{n,41} & T_{n,42} & T_{n,43} & T_{n,44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{rr,n}^1(r_0) \\ \sigma_{r\theta,n}^1(r_0) \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

De la même manière que précédemment (voir paragraphe 2.2.1.5), les notations

$$\alpha_n = -\frac{2p_0 \epsilon_n i^{n+1}}{\pi \omega r_N H'_n(\omega r_N)} \quad \text{et} \quad \beta_n = -\omega \frac{H_n(\omega r_N)}{H'_n(\omega r_N)} \quad (2.65)$$

sont introduites afin d'alléger l'écriture.

Le système 2.64 ne contient alors plus que 4 inconnues : les déplacements  $u_r^N(r_N)$  et  $u_\theta^N(r_N)$  au niveau de la surface extérieure, et les contraintes  $\sigma_{rr}^1(r_0)$  et  $\sigma_{r\theta}^1(r_0)$  au niveau de la surface intérieure. Il peut être réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & T_{n,13} & T_{n,14} \\ 0 & -1 & T_{n,23} & T_{n,24} \\ 0 & -\beta_n & T_{n,33} & T_{n,34} \\ 0 & 0 & T_{n,43} & T_{n,44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\theta,n}^N(r_N) \\ u_{r,n}^N(r_N) \\ \sigma_{rr,n}^1(r_0) \\ \sigma_{r\theta,n}^1(r_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

La résolution de ce système permet l'obtention de  $u_{r,n}^N(r_N)$ , et par là-même le calcul de la pression acoustique dans tout le fluide extérieur (cf. équation 2.63).

### 2.2.2.3 Récapitulatif

La méthode consiste ici à subdiviser chaque couche en  $q$  sous-couches, puis, pour chaque mode  $n$  compris entre 0 et  $M$ , à

- calculer la matrice modale  $\mathbf{P}_n^j(r_{j-1})$  de chaque couche  $j$ ,
- évaluer les matrices de transfert  $\exp[h_j \mathbf{P}_n^j(r_{j-1})/a]$  de chaque couche,
- obtenir la matrice de transfert globale du revêtement,  $\mathbf{T}_n$ , par multiplication des matrices de transfert des différentes couches,
- résoudre le système 2.66, afin d'obtenir le déplacement radial de la surface extérieure du revêtement  $u_{r,n}^N(r_N)$ .

Enfin, la pression acoustique dans le fluide extérieur peut être calculée par sommation des différentes contributions modales.

### Remarques

Le calcul des exponentielles de matrice, nécessaire à l'obtention des matrices de transfert de chaque couche, est effectué grâce à la bibliothèque EXPOKIT (Sidje, 1998; Moler et Loan, 2003). La routine utilisée combine une approximation de Padé de la fonction exponentielle et une méthode de *scaling and squaring* (voir Higham (2005), et annexe B.2.2).

Plus la pulsation adimensionnée  $\omega$  est importante, plus le nombre d'harmoniques à prendre en compte est grand. Pour  $\omega$  de l'ordre de 1, une troncature à  $M \approx 45$  est tout à fait suffisante, alors que pour  $\omega \approx 10$ , il est nécessaire de monter à  $M \approx 70$ , ou pour  $\omega \approx 60$ , à  $M \approx 400$ . Le temps de calcul est donc d'autant plus long que la pulsation adimensionnée  $\omega$  est grande, et ce quelle que soit la méthode utilisée pour le calcul des vibrations du revêtement.

Le nombre de sous-couches nécessaires,  $q$ , dépend de la fréquence adimensionnée, mais aussi de l'épaisseur des différentes couches du revêtement. Comme cette subdivision ne découle pas des mêmes raisons dans chacune des deux méthodes, le nombre de sous-couches à partir duquel le calcul converge n'est pas le même dans les deux cas. Ainsi, pour une pulsation adimensionnée  $\omega \leq 8$  et un revêtement composé de 2 couches élastiques de même épaisseur et telles que  $b/a = 1.25$ , le calcul par la première méthode converge à partir d'une subdivision de chaque couche en 3 sous-couches, alors que la seconde requiert une subdivision en 20 sous-couches. De manière plus générale, la méthode basée sur l'utilisation de matrices de transfert est adaptée à des problèmes comprenant un très grand nombre de couches peu épaisses, tandis que la première convient davantage à l'étude de revêtements comportant peu de couches, dont l'épaisseur est grande par rapport à la longueur d'onde.

## 2.3 Validation

Ces deux méthodes de calcul ont été codées en Fortran 95 et validées sur différents cas présents dans la littérature. La méthode comportant des approximations radiales de type éléments finis est désignée ici par l'expression « méthode 1 », tandis que la méthode faisant intervenir pour chaque couche des matrices de transfert est appelée « méthode 2 ».

### 2.3.1 Cylindre recouvert d'un revêtement isotrope

On s'intéresse dans un premier temps au cas où le cylindre rigide est entouré d'un revêtement isotrope. Comme évoqué précédemment, le problème de diffraction peut alors être traité analytiquement. [Romanov et Tolokonnikov \(2011\)](#) ont ainsi déterminé de manière exacte les diagrammes de diffraction de cylindres rigides entourés de revêtements élastiques isotropes uniformes et non-uniformes. Ils présentent des diagrammes de directivité pour 4 configurations différentes,

- un cylindre rigide seul
- un cylindre rigide entouré d'un revêtement uniforme en polyvinylbutiral (PVB),
- un cylindre rigide entouré d'un revêtement non-uniforme, noté 1, de masse volumique et module d'Young décroissants dans l'épaisseur du revêtement à mesure que l'on s'écarte du cylindre rigide,
- un cylindre rigide entouré d'un revêtement non-uniforme, noté 2, de masse volumique et module d'Young croissants dans l'épaisseur du revêtement.

Dans tous ces cas, on considère que le milieu extérieur est constitué d'eau, que l'épaisseur du revêtement est telle que  $b/a = 1.1$ , et que les obstacles sont soumis à une onde plane de pulsation adimensionnée  $\omega$ .

Les caractéristiques des revêtements non-uniformes sont obtenues à partir de celles de la couche uniforme en PVB (cf. table 2.2) par les relations

$$\begin{aligned} E_1(r) &= f_1(r)E_{\text{uni}}, & E_2(r) &= f_2(r)E_{\text{uni}}, \\ \rho_1(r) &= f_1(r)\rho_{\text{uni}}, & \rho_2(r) &= f_2(r)\rho_{\text{uni}}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

avec

$$f_1(r) = 2 \left( \frac{r - r_0}{r_N - r_0} \right)^2 + \frac{1}{3}, \quad f_2(r) = 2 \left( \frac{r - r_N}{r_N - r_0} \right)^2 + \frac{1}{3}. \quad (2.68)$$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , représentées sur la figure 2.6, sont choisies de manière à ce que leur valeur moyenne sur l'épaisseur du revêtement soit égale à 1. Pour rendre compte de l'évolution radiale continue des caractéristiques mécaniques des revêtements non-uniformes, on divise ceux-ci en 20 couches homogènes, de caractéristiques constantes. Le coefficient de Poisson de chacune de ces couches est égal à celui du PVB ( $\nu_{\text{uni}} = 0.40$ , cf. table 2.2). Enfin, puisque [Romanov et Tolokonnikov \(2011\)](#) considèrent des matériaux élastiques et non *visco*-élastiques, on choisit des facteurs de perte très faibles ( $\eta = 0.1\%$ ) pour effectuer les calculs avec les méthodes 1 et 2.

Romanov et Tolokonnikov présentent des diagrammes de directivité pour des ondes incidentes de pulsation adimensionnée  $\omega = 4$  et  $\omega = 8$ . La grandeur qu'ils considèrent,  $|P(\theta)|$ , représente la dépendance angulaire de la pression diffractée en champ lointain. En effet, l'utilisation de la forme asymptotique des fonctions de Hankel pour de grands arguments (voir [Abramowitz et Stegun \(1965\)](#))

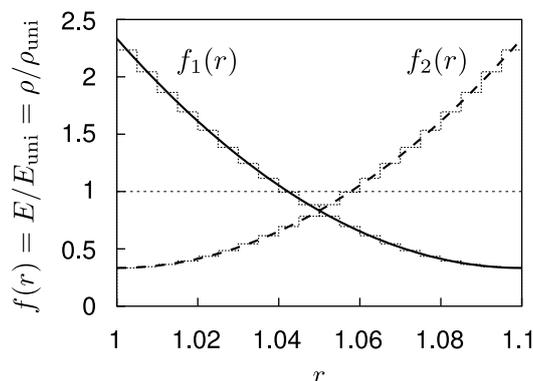


FIGURE 2.6 – Caractéristiques des revêtements non uniformes 1 et 2, définies par rapport au revêtement en PVB, de caractéristiques  $E_{\text{uni}}$ ,  $\rho_{\text{uni}}$ . Discrétisation en 20 couches homogènes.

Caractéristiques générales		PVB uniforme	
milieu extérieur : eau		$\rho_{\text{uni}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1070
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000	$E_{\text{uni}}$ (GPa)	2.74
$c_0$ (m/s)	1485	$\nu_{\text{uni}}$	0.40
dimension du revêtement		$\eta_{\text{uni}}$	0.001
$b/a$	1.1		

TABLE 2.2 – Caractéristiques d'un cas test proposé par [Romanov et Tolokonnikov \(2011\)](#) : cylindre rigide entouré d'un revêtement isotrope homogène en polyvinylbutiral (PVB).

permet de séparer les dépendances radiale et angulaire de la pression diffractée à grande distance,

$$p_{\text{diff}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n H_n(\omega r) \cos(n\theta) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi\omega r}} e^{i(\omega r - \pi/4)}}_{\text{dépendance radiale}} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n A_n \cos(n\theta)}_{\text{dépendance angulaire}}. \quad (2.69)$$

Le terme de dépendance radiale est commun à toutes les ondes cylindriques se propageant dans la direction des  $r$  croissants, tandis que le terme de dépendance angulaire est caractéristique de l'obstacle et de la fréquence adimensionnée considérés. La grandeur représentée par [Romanov et Tolokonnikov \(2011\)](#) correspond à une version normalisée de l'amplitude de ce terme,

$$|P(\theta)| = \frac{2}{\sqrt{\pi\omega r_N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n A_n \cos(n\theta) \right|. \quad (2.70)$$

On note, sur la figure 2.7, l'adéquation entre les résultats obtenus avec les méthodes 1 et 2 et les résultats de Romanov et Tolokonnikov. La coïncidence est quasiment parfaite dans le cas de la méthode 1. Avec la méthode 2, on remarque une légère différence pour  $\omega = 8$  dans le cas du cylindre recouvert du revêtement non-uniforme 2, mais dans les autres cas, les résultats de cette méthode se superposent exactement à ceux de la méthode 1 et sont très proches de ceux de Romanov et Tolokonnikov. Les conditions aux limites au niveau des surfaces extérieure et intérieure du revêtement sont donc bien prises en compte dans les codes développés, de même que les conditions de continuité aux interfaces entre couches. On dispose donc d'outils permettant de calculer la diffraction d'une onde plane sur un cylindre rigide recouvert de plusieurs couches de matériaux élastiques isotropes.

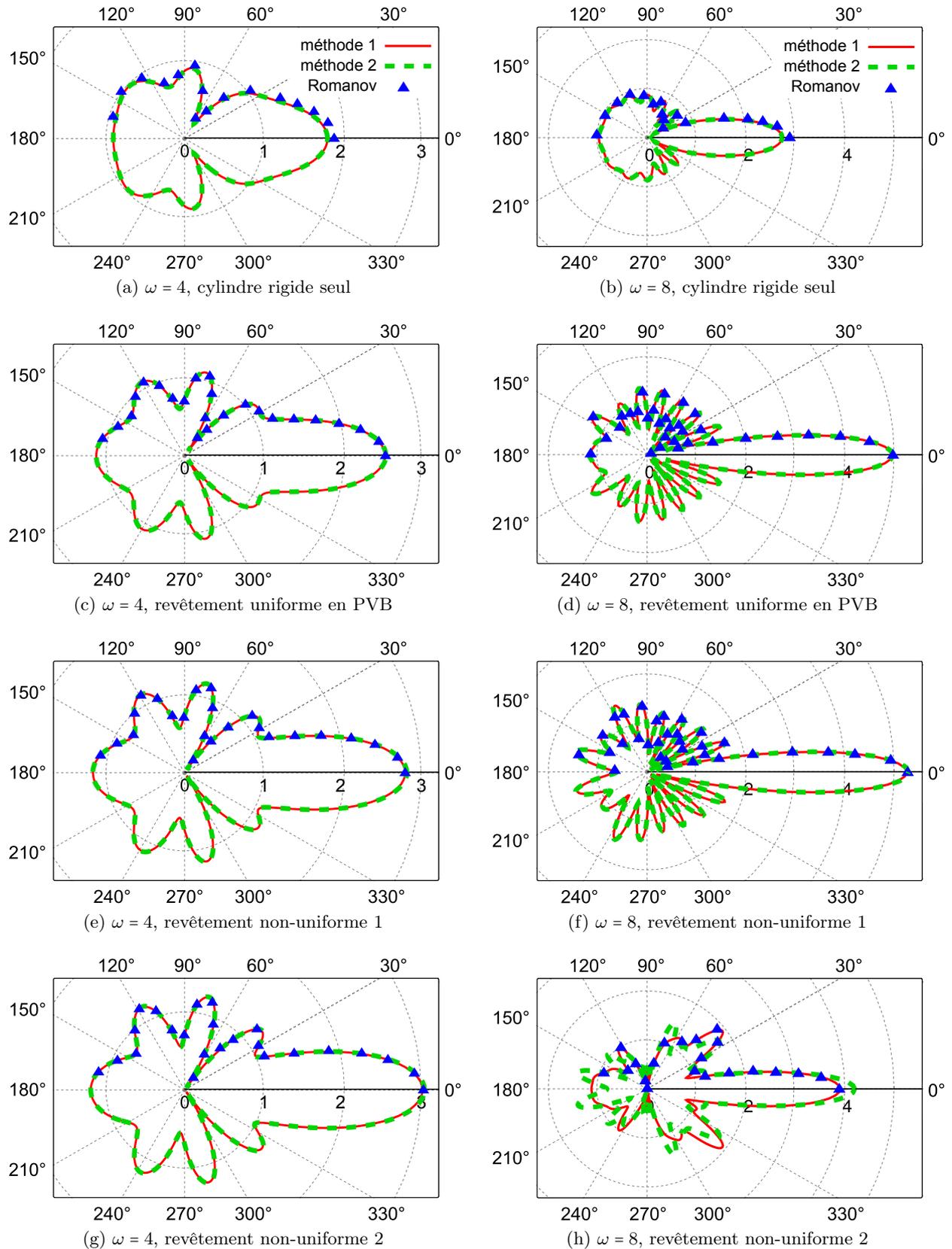


FIGURE 2.7 – Diagrammes de directivité obtenus par Romanov et Tolokonnikov (2011) ( $\blacktriangle$ ), calculés avec la méthode 1 (ligne continue) et avec la méthode 2 (pointillés), dans le cas d'un cylindre rigide seul ou entouré de différents revêtements. La grandeur tracée,  $|P(\theta)|$ , est sans dimension.

### 2.3.2 Cylindre recouvert d'un matériau orthotrope

Il est ensuite nécessaire de valider la bonne prise en compte de l'orthotropie des matériaux élastiques, caractéristique à l'origine de la mise en place de ces deux méthodes de calcul. Les études portant sur l'action d'ondes acoustiques sur des coques ou revêtements cylindriques orthotropes sont généralement illustrées d'exemples où l'excitation du milieu élastique est due à des ondes planes sous incidence oblique (Koval (1979); Blaise *et al.* (1991); Hasheminejad et Rajabi (2007b); Jamali *et al.* (2011) par exemple). Une telle excitation provoque la propagation d'ondes dans la direction axiale à l'intérieur du revêtement, ce qui ne peut être traité avec les méthodes 2D présentées ici. La validation est donc effectuée sur une configuration différente de celle considérée jusqu'alors. On s'intéresse à une coque cylindrique orthotrope de longueur infinie, soumise à une force radiale ponctuelle appliquée en un point de la surface intérieure de la coque, de coordonnées  $(r, \theta, z) = (r_0, 0, 0)$ . Ce problème est lui aussi tridimensionnel. Le calcul complet des vibrations de la coque, ou de la pression acoustique générée par celles-ci dans le milieu extérieur, nécessite de prendre en compte la propagation des ondes dans les trois directions de l'espace. Mais cela n'est pas indispensable pour évaluer le niveau de pression en champ lointain dans le plan  $z = 0$  (plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et contenant le point où s'exerce la force radiale). En effet, Skelton et James (1993), qui prennent en compte la propagation des ondes dans la direction axiale au moyen de transformées de Fourier intégrales suivant  $z$ , montrent que la pression dans le fluide extérieur est donnée (ici sous forme dimensionnée) par

$$p(r, \theta, z) = \frac{\rho_0 \omega^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{r,n,\alpha}^j(b) H_n(\gamma r)}{\gamma H_n'(\gamma b)} e^{i\alpha z} d\alpha, \quad (2.71)$$

où  $\gamma = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2}$  est le nombre d'onde radial des ondes acoustiques se propageant dans le fluide extérieur. L'utilisation de la forme asymptotique des fonctions de Hankel pour de grands arguments et l'estimation de l'intégrale par la méthode de la phase stationnaire conduisent à une expression simplifiée de la pression en champ lointain dans le plan  $z = 0$ ,

$$p(r, \theta, 0) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{-i \rho_0 \omega^2 e^{ik_0 r}}{\pi k_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n (-i)^n u_{r,n,0}^j(b)}{H_n'(\omega b)} \cos(n\theta). \quad (2.72)$$

Dans cette expression n'interviennent que les déplacements spectraux  $u_{r,n,0}^j(r_N)$ , obtenus pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire lorsque l'on ne considère pas de propagation selon la direction  $z$ . Ceux-ci correspondent donc aux déplacements  $u_{r,n}^j(r_N)$  calculés par les méthodes bidimensionnelles détaillées dans ce chapitre. On peut ainsi comparer les niveaux de pression en champ lointain donnés par Skelton et James (1993), issus de calculs tridimensionnels, et ceux obtenus en utilisant l'expression 2.72 et les déplacements spectraux calculés par les méthodes 1 et 2 (en adaptant bien sûr les conditions aux limites).

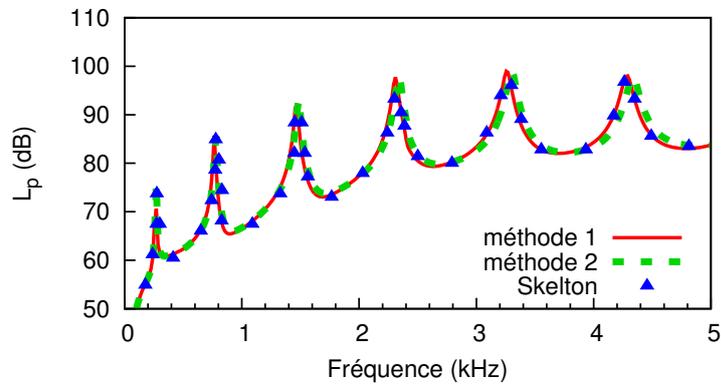
Skelton et James s'intéressent à une coque de rayon intérieur  $a = 0.08$  m, et de rayon extérieur  $b = 0.10$  m, remplie d'eau et entourée d'air. La coque est en plastique renforcé de fibres de verre (*glass-reinforced plastic*, GRP), et, selon les cas, les fibres de renfort sont dirigées dans la direction axiale ou dans la direction circonférentielle. Ces renforts ont pour effet d'augmenter la rigidité du matériau dans leur direction d'orientation, ce qui rend le matériau orthotrope. La figure 2.8a concerne une coque à renforcement axial, dont les caractéristiques sont données dans la colonne « GRP ax. » de la table 2.3. La figure 2.8b correspond à une coque de même dimension, mais à renforcement circonférentiel. Ses caractéristiques figurent dans la colonne « GRP circ. » de la table 2.3. Enfin, le cas représenté sur la figure 2.8c est celui d'une coque de même épaisseur totale que

les précédentes, et composée d'une couche intérieure à renforcement circonférentiel et d'une couche extérieure à renforcement axial. Dans ces trois configurations, la force ponctuelle exercée en  $(r_0, 0, 0)$  est d'amplitude unitaire. L'évolution du niveau de pression en champ lointain en fonction de la fréquence est calculée grâce à la formule 2.72, évaluée en  $\theta = 0$  à 1 m du centre de la coque. La pression de référence utilisée, de  $1 \mu\text{Pa}$ , est celle habituellement employée pour les études en milieu liquide.

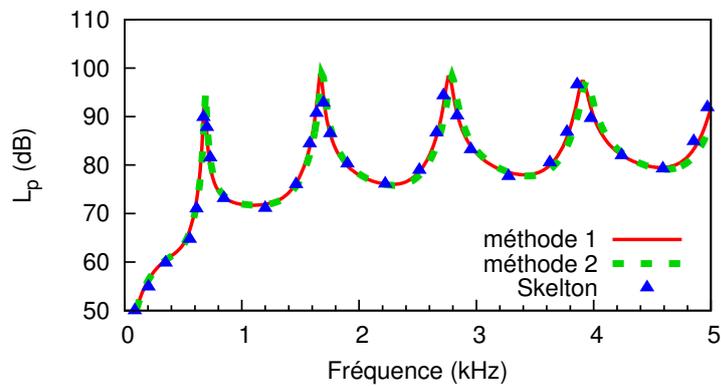
Caractéristiques générales			Grandeurs	GRP ax.	GRP circ.
milieu extérieur : air			$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1370	1370
$\rho_0$	(kg/m <sup>3</sup> )	1.21	$E_r$ (GPa)	2.2	2.2
$c_0$	(m/s)	343	$E_\theta$ (GPa)	2.2	25
milieu intérieur : eau			$E_z$ (GPa)	25	2.2
$\rho_{\text{int}}$	(kg/m <sup>3</sup> )	1000	$G_{r\theta}$ (GPa)	0.61	0.65
$c_{\text{int}}$	(m/s)	1500	$\nu_{r\theta}$	0.40	0.03
dimensions du revêtement			$\nu_{\theta z}$	0.03	0.34
$a$	(m)	0.08	$\nu_{rz}$	0.03	0.03
$b$	(m)	0.10	$\eta$	0.02	0.02

TABLE 2.3 – Caractéristiques des configurations testées par Skelton et James (1993).

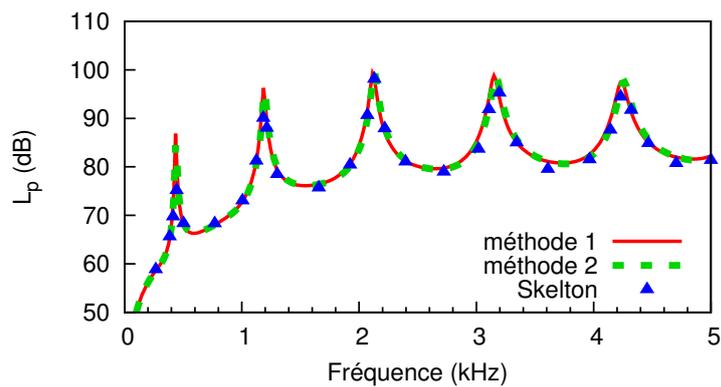
Les résultats obtenus à partir des méthodes 1 et 2 sont très proches de ceux présentés par Skelton et James. Aux fréquences les plus élevées, on observe un très faible décalage entre les méthodes 1 et 2 dans les cas monocouches (figures 2.8a et 2.8b). Mais ces différences restent minimales, et l'accord avec les données de la littérature est globalement bon. Les deux méthodes implémentées permettent donc bien de modéliser le comportement vibratoire d'une coque cylindrique orthotrope.



(a) Coque à renforcement axial



(b) Coque à renforcement circonférentiel



(c) Coque composée d'une couche à renforcement axial et d'une couche à renforcement circonférentiel

FIGURE 2.8 – Niveaux de pression en champ lointain obtenus par Skelton et James (1993) ( $\blacktriangle$ ) et au moyen des méthodes 1 (ligne continue) et 2 (pointillés) dans le cas de coques orthotropes soumises chacune à une force ponctuelle radiale unitaire.

Nous disposons donc de deux outils permettant de modéliser le comportement vibro-acoustique d'un revêtement constitué de plusieurs couches visco-élastiques orthotropes. Le premier utilise une technique de calcul des variations radiales du déplacement proche de la méthode des éléments finis, et nécessite le recours à des matrices dont la taille dépend du nombre de couches. Il est adapté à l'étude de revêtements présentant un faible nombre de couches. Le deuxième, basé sur l'utilisation de matrices de transfert, convient davantage au cas de revêtements comportant un grand nombre de couches fines. Il est donc intéressant pour l'étude de revêtements dont les caractéristiques varient continuellement dans la direction radiale, comme les matériaux à gradient fonctionnel ou un équivalent élastique du revêtement fluide idéal de Cummer.

L'étude de la réponse vibratoire d'un revêtement multicouche visco-élastique à une excitation acoustique de type onde plane a permis de mettre en évidence l'importance de plusieurs paramètres, dont la pulsation adimensionnée  $\omega$  (ou le produit du nombre d'onde par le rayon de l'obstacle,  $k_0 a$ ), les caractéristiques mécaniques des matériaux du revêtement adimensionnées par celles du milieu extérieur, ainsi que les épaisseurs des différentes couches rapportées au rayon de l'obstacle cylindrique. Afin de limiter le nombre de paramètres entrant en jeu, nous centrons la suite de cette étude sur des revêtements composés de deux couches de matériaux visco-élastiques. Dans la mesure où nous cherchons à obtenir des configurations *réalistes* permettant de réduire la diffraction dans l'air et dans l'eau, nous ne traiterons pas le problème de manière adimensionnée.

Première partie

Milieu extérieur : air



# Chapitre 3

## Réduction de la diffraction dans l'air

On cherche à savoir s'il est possible d'obtenir une réduction omnidirectionnelle de la diffraction d'une onde plane par un cylindre rigide, dans l'air, au moyen d'un revêtement composé de matériaux élastiques réalistes. Pour répondre à cette question, un algorithme génétique est couplé au code vibro-acoustique décrit dans le paragraphe 2.2.1, et des configurations bicouches sont recherchées par optimisation, en autorisant des plages de variation de paramètres mécaniques correspondant à celles des matériaux existants. Une des configurations trouvées est ensuite analysée, notamment en ce qui concerne la contribution de ces différents modes de rayonnement à l'atténuation de la diffraction. Enfin, la question de la faisabilité d'un revêtement large bande de fréquence est abordée.

### Sommaire

---

<b>3.1 Démarche</b> . . . . .	<b>58</b>
3.1.1 Choix d'une configuration . . . . .	58
3.1.2 Objectif et contraintes . . . . .	62
3.1.3 Sélection de configurations intéressantes . . . . .	63
<b>3.2 Émergence de configurations bicouches orthotropes/isotropes</b> . . . . .	<b>64</b>
3.2.1 Exemple de revêtement bicouche . . . . .	65
3.2.2 Contribution des différents modes au résultat final . . . . .	68
3.2.3 Intensité acoustique et intensité de structure . . . . .	70
<b>3.3 Élargissement de la bande de fréquence d'atténuation de la diffraction</b> .	<b>70</b>

---

## 3.1 Démarche

### 3.1.1 Choix d'une configuration

L'étude présentée dans le chapitre 2 a montré que la réponse vibratoire d'un revêtement multicouche à une excitation acoustique dépend fortement du nombre d'onde réduit  $k_0a$ , ainsi que des caractéristiques mécaniques et dimensionnelles des couches, adimensionnées par les grandeurs  $\rho_0$  et  $\rho_0 c_0^2$  correspondant au milieu environnant, et par le rayon  $a$  du cylindre. En considérant les différentes constantes élastiques comme indépendantes les unes des autres (hypothèse forte), on aboutit à 10 grandeurs caractéristiques par couche. Même en se limitant à des revêtements bicouches, le nombre de variables reste élevé, et l'on va donc chercher à en fixer plusieurs pour faciliter le travail d'optimisation et l'interprétation des résultats.

De plus, si certaines comme le coefficient de Poisson ou le facteur de perte varient peu d'un matériau à l'autre, d'autres comme le module d'Young ou la masse volumique ont des plages de variation beaucoup plus importantes. Ainsi, le module d'Young des matériaux usuels peut aller de quelques dixièmes de MPa pour certaines mousses de polymères flexibles à plusieurs centaines de GPa pour les métaux les plus durs, soit un écart de plus de 6 ordres de grandeur. Dans une moindre mesure, leurs masses volumiques sont comprises entre quelques dizaines de  $\text{kg/m}^3$  et plus de  $10^4 \text{ kg/m}^3$  (voir Ashby (2000) et figure 3.1).

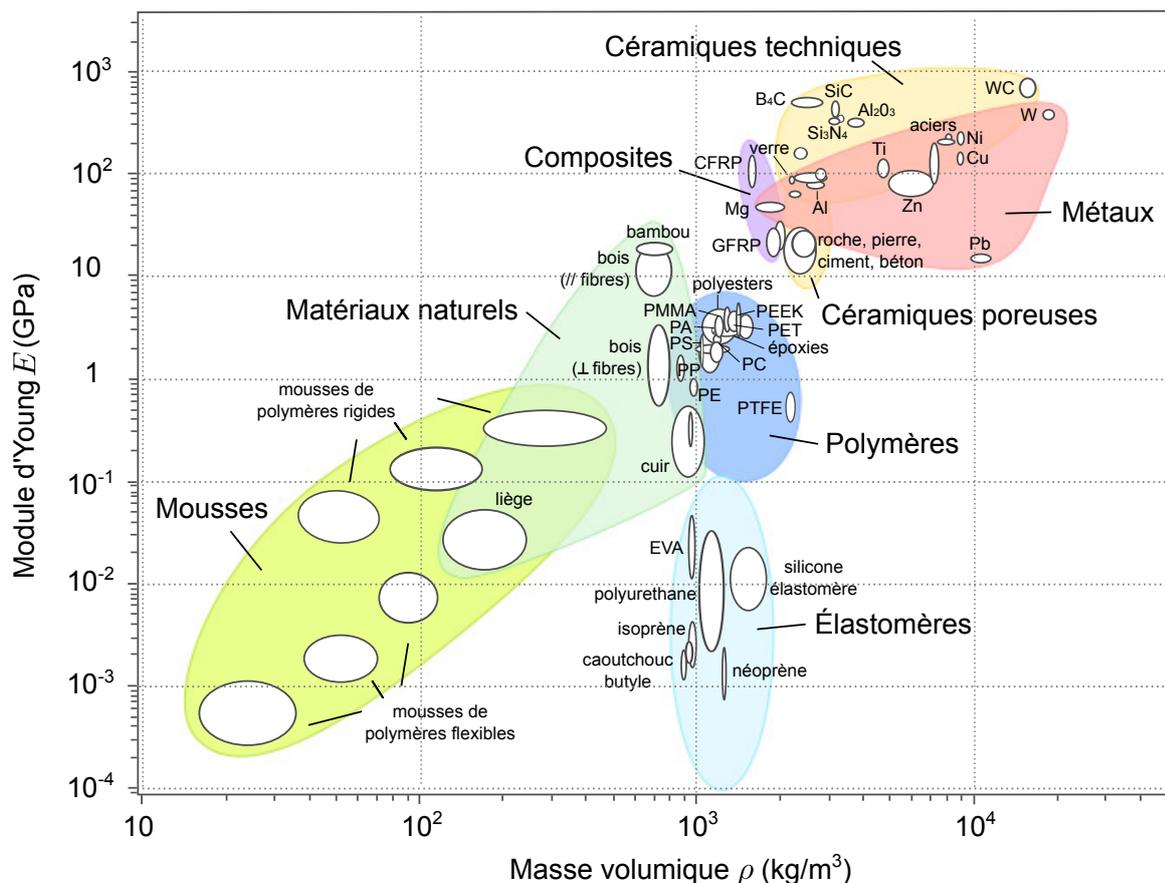


FIGURE 3.1 – Diagramme d'Ashby représentant les différentes familles de matériaux suivant leurs modules d'Young et masses volumiques (adapté de CES Selector, Granta Design Ltd).

### Milieu extérieur

Chercher des arrangements de matériaux élastiques permettant de réduire la diffraction sans définir au préalable la nature du milieu extérieur permettrait de voir dans quel milieu un tel revêtement de furtivité serait le plus réalisable. Cela supposerait de travailler sur les équations adimensionnées telles qu'écrites dans le chapitre 2, et d'utiliser des paramètres mécaniques adimensionnés du type  $(\rho/\rho_0, E/\rho_0 c_0^2)$ . L'adimensionnement des caractéristiques des matériaux existants, en fonction d'une utilisation dans l'eau ou dans l'air, conduit à des plages de variation s'étendant sur un nombre important d'ordres de grandeur (cf. figure 3.2). Les modules d'Young adimensionnés, par exemple, vont de  $E/\rho_0 c_0^2 = 10^{-4}$  pour les mousses les plus souples dans de l'eau, à  $10^7$  pour les métaux dans l'air. Il est donc nécessaire de fixer la nature du milieu extérieur pour limiter l'étendue de ces plages de variation. On opte dans un premier temps pour un milieu extérieur constitué d'air.

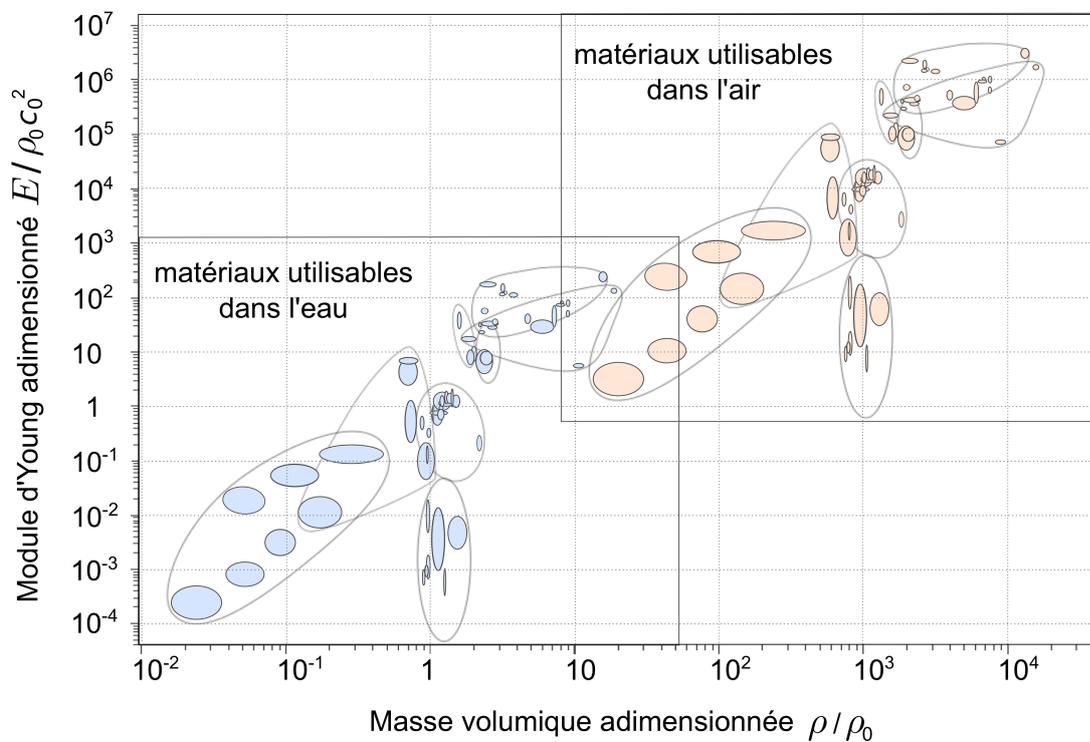


FIGURE 3.2 – Zones de masses volumiques et de modules d'Young adimensionnés correspondant aux matériaux réels dans le cas d'une utilisation dans l'air (en orange) et dans l'eau (en bleu).

### Fréquence d'excitation

Les configurations intéressantes d'un point de vue réduction de la diffraction sont recherchées à fréquence fixée. En effet, si l'on considère la fréquence (ou le nombre d'onde réduit  $k_0 a$ ) comme variable d'optimisation, l'algorithme de sélection ira automatiquement vers les fréquences les plus faibles, pour lesquelles la diffraction est moins importante, même en l'absence de revêtement. On voit par exemple sur les diagrammes de directivité<sup>1</sup> des figures 3.3a et 3.3b que le phénomène de diffraction à l'arrière d'un cylindre rigide soumis à une onde plane est 4 fois plus important pour

1. La grandeur sans dimension tracée,  $|P(\theta)|$ , représente la dépendance angulaire de la pression diffracté en champ lointain. Elle correspond à la normalisation de Romanov et Tolokonnikov (2011) (cf. équation 2.70).

$k_0a = 9$  que pour  $k_0a = 1$ .

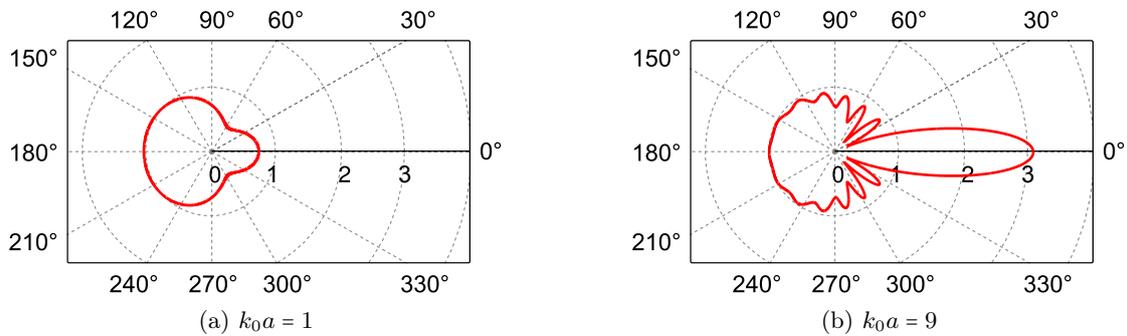


FIGURE 3.3 – Diagrammes de directivité  $|P(\theta)|$  pour  $k_0a = 1$  et  $9$ , dans le cas d'un cylindre rigide soumis à une onde plane d'amplitude unitaire.

Par ailleurs, on remarque sur la figure 3.4 que la densité modale, c'est-à-dire le nombre de modes contribuant significativement à la diffraction, devient de plus en plus importante à mesure que le nombre d'onde réduit  $k_0a$  augmente. Ainsi, pour  $k_0a = 1$ , la pression diffractée est due aux modes  $0$ ,  $1$  et  $2$ , alors que pour  $k_0a = 9$  les modes  $n = 0$  à  $n = 11$  doivent être pris en compte. Comme il semble à première vue plus simple d'annuler trois modes de diffraction plutôt qu'une dizaine, on choisit de fixer la fréquence d'étude à une valeur relativement basse, correspondant à un nombre d'onde réduit  $k_0a$  se situant autour de  $1$ .

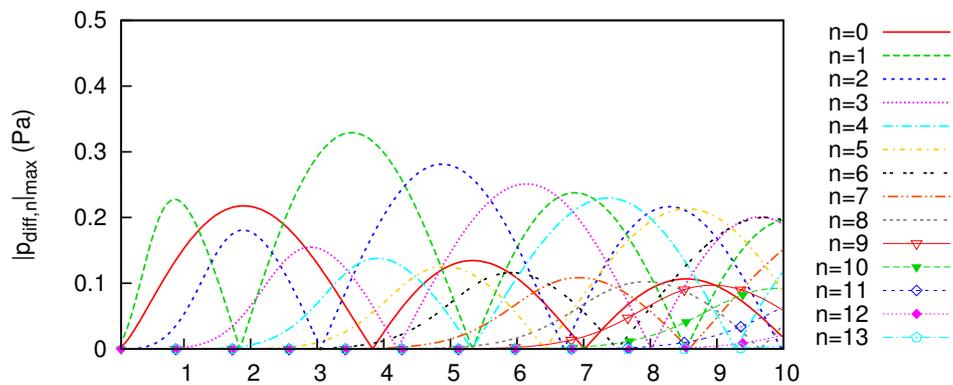


FIGURE 3.4 – Contribution respective des premiers modes de diffraction pour  $0 \leq k_0a \leq 10$ , dans le cas d'un cylindre rigide soumis à une onde plane d'amplitude unitaire.

### Bicouche de type masse-ressort

Dans des études portant sur l'excitation de panneaux élastiques par des ondes acoustiques planes sous différentes incidences, [Simon et al. \(2006\)](#) ont montré qu'il était possible d'obtenir une forte réduction du coefficient de réflexion à certaines fréquences sans prendre en compte l'absorption intrinsèque des matériaux. C'est notamment le cas avec certains panneaux composés d'une couche en feutre métallique, épaisse et orthotrope, recouverte d'une mince couche de titane. Cette configuration

est représentée sur la figure 3.5a. Le coefficient de réflexion  $R$ ,

$$R = \frac{p_{\text{refl}} + p_{\text{ray}}}{p_{\text{inc}}} \Big|_{z=0}, \quad (3.1)$$

obtenu pour un feutre de titane de 20 mm d'épaisseur et une couche de titane de 1 mm d'épaisseur est tracé sur la figure 3.5b. Les caractéristiques du feutre sont données dans la table 3.1, et l'on note que celui-ci présente un module d'Young dans la direction  $z$  6 fois inférieur à son module d'Young dans les directions  $x$  et  $y$ . Le coefficient de réflexion est calculé en fonction de la fréquence des ondes excitatrices et de leur angle d'incidence par rapport à l'axe  $z$ , c'est-à-dire par rapport à la normale au plan dans lequel se trouvent les couches élastiques. On remarque que, pour cette configuration, des coefficients de réflexion inférieurs à 1 sont obtenus à intervalles de fréquence réguliers. Ces pics périodiques correspondent à des maxima d'absorption. Le matériau bicouche considéré ici permet par exemple d'atteindre un coefficient de réflexion de 0.4, soit un coefficient d'absorption de 0.85, à une fréquence de 220 Hz pour une incidence normale à sa surface ( $\theta = 0^\circ$ ). Les coefficients de réflexion obtenus pour une incidence de  $45^\circ$  sont quasiment identiques à ceux obtenus sous incidence normale. Lorsque les ondes incidentes sont rasantes ( $\theta = 89.9^\circ$ ), un phénomène lui aussi périodique se produit, mais pour des fréquences différentes.

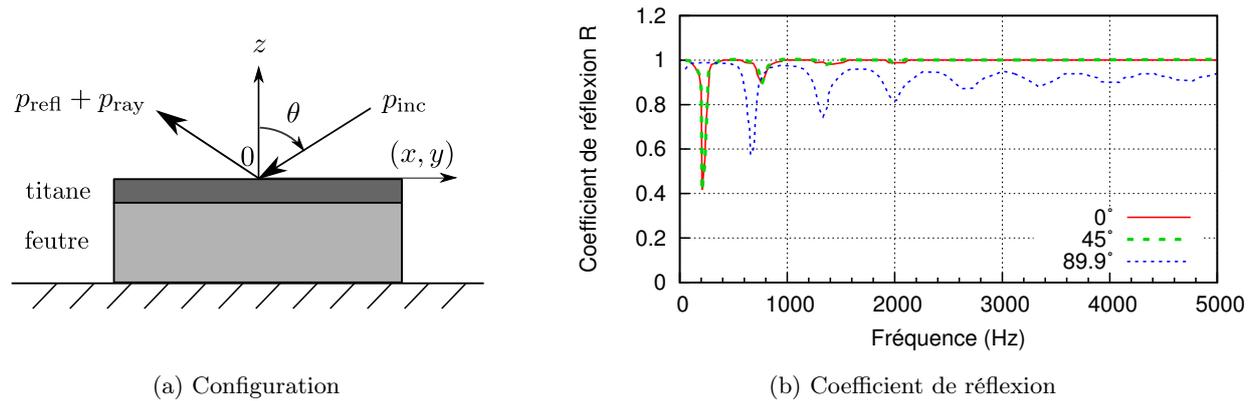


FIGURE 3.5 – Configuration bicouche plane étudiée par [Simon et al. \(2006\)](#) et coefficient de réflexion obtenu avec une couche de feutre de 20 mm (cf. table 3.1), et une de titane de 1 mm, pour différents angles d'incidence des ondes excitatrices.

$\rho$	$E_x$	$E_y$	$E_z$	$G_{yz}$	$G_{xz}$	$G_{xy}$	$\nu_{yz}$	$\nu_{xz}$	$\nu_{xy}$
(kg/m <sup>3</sup> )	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)			
430	1.8	1.8	0.3	0.2	0.2	0.4	0.03	0.03	1.56

TABLE 3.1 – Caractéristiques du feutre métallique en titane utilisé par [Simon et al. \(2006\)](#).

Dans le cadre de cette thèse, on choisit de considérer des configurations similaires, à savoir des revêtements cylindriques composés d'une couche extérieure relativement mince et dense, et d'une couche intérieure, plus épaisse, moins dense et éventuellement orthotrope. L'idée est de créer un résonateur de type masse-ressort, et d'ajuster ses caractéristiques de manière à ce qu'à une fréquence donnée, l'onde rayonnée par le revêtement,  $p_{\text{ray}}$ , annule l'onde qui serait réfléchi

un cylindre rigide de rayon  $b$  ( $b$  étant le rayon extérieur du revêtement),  $p_{\text{ref}}$ . Nous venons de voir que cela est possible pour des géométries planes, mais que les fréquences correspondant à une importante atténuation de la diffraction dépendent de l'angle d'incidence des ondes acoustiques sur le matériau bicouche élastique. On peut donc se demander si ce concept est applicable à une géométrie cylindrique. En effet, à la surface d'un revêtement cylindrique, l'angle d'incidence des ondes varie, d'un élément ( $b d\theta dz$ ) à l'autre, allant d'une incidence normale à une incidence rasante.

En couplant un algorithme d'optimisation au code vibro-acoustique décrit dans le chapitre 2, on peut chercher, parmi un très grand nombre de combinaisons possibles, celles qui pourraient conduire à une atténuation de la diffraction à une fréquence donnée. Si de telles configurations existent, cela permettra de sélectionner celles offrant les meilleurs résultats. La démarche d'optimisation suivie est décrite dans les deux paragraphes ci-dessous.

### 3.1.2 Objectif et contraintes

#### Choix d'une fonction objectif

L'objectif des dispositifs de furtivité étudiés ici est de réduire de manière importante et omnidirectionnelle la diffraction d'une onde par un obstacle. Pour trouver des agencements de couches élastiques permettant d'atteindre ce but, on cherche par optimisation les caractéristiques mécaniques et dimensionnelles des matériaux du revêtement qui minimisent la section efficace de diffraction de l'obstacle noté  $\sigma_{\text{diff}}$ . Celle-ci est définie par

$$\sigma_{\text{diff}} = \int_S \frac{\langle I_{\text{diff}} \rangle}{\langle I_{\text{inc}} \rangle} dS, \quad (3.2)$$

où  $S$  peut être n'importe quelle surface encerclant l'obstacle, et où  $\langle I_{\text{diff}} \rangle$  représente l'intensité moyenne due à l'onde diffractée au niveau de l'élément de surface  $dS$ , perpendiculairement à celui-ci. L'intensité  $\langle I_{\text{inc}} \rangle$  est définie de manière analogue vis-à-vis de l'onde incidente. Pour des raisons pratiques, on calcule ce rapport d'intensités à travers une surface cylindrique dont l'axe coïncide avec celui de l'obstacle et de son revêtement.

Une annulation totale de la diffraction semble difficilement réalisable. On cherche donc avant tout à ce que celle-ci soit plus faible en présence des matériaux élastiques enrobant le cylindre qu'en leur absence. La fonction objectif  $F_{\text{obj}}$  utilisée pour l'optimisation est définie comme le rapport de la section efficace de diffraction dans le cas où l'obstacle est entouré d'un revêtement  $\sigma_{\text{diff, revêtement}}$ , sur la section efficace de diffraction obtenue avec le cylindre rigide seul  $\sigma_{\text{diff, cyl. rigide}}$ , soit

$$F_{\text{obj}} = \frac{\sigma_{\text{diff, revêtement}}}{\sigma_{\text{diff, cyl. rigide}}}. \quad (3.3)$$

L'efficacité des configurations sélectionnées en fonction de la fréquence considérée sera caractérisée par le gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$ , exprimé en dB et défini par

$$\sigma_{\text{gain}} = 10 \log \left( \frac{\sigma_{\text{diff, revêtement}}}{\sigma_{\text{diff, cyl. rigide}}} \right). \quad (3.4)$$

Un dispositif intéressant d'un point de vue furtivité doit permettre d'obtenir une section efficace de diffraction avec revêtement nettement inférieure à celle obtenue en l'absence de revêtement. Cela correspond donc à un gain  $\sigma_{\text{gain}}$  négatif, tendant idéalement vers  $-\infty$ .

### Matériaux les plus réalistes possibles

Dans la mesure où l'on s'intéresse à la *faisabilité* d'un dispositif de furtivité acoustique au moyen d'un revêtement élastique, il est important de rester dans des plages de variation des paramètres mécaniques correspondant à des matériaux existants. Pour cela, on se base sur les données rassemblées par Ashby (2000), et en particulier sur le diagramme 3.1 représentant les différentes familles de matériaux en fonction de leurs modules d'Young et masses volumiques. Les coefficients de Poisson sont dans un premier temps laissés libres de varier entre 0 et 0.5, et les facteurs de perte entre 0.1 % et 20 %.

Précisons qu'en ce qui concerne l'optimisation, cela ne se traduit qu'au niveau des plages de variation des caractéristiques mécaniques : il ne s'agit pas d'une optimisation sous contrainte au sens mathématique. Cela permet d'éviter une convergence de l'algorithme d'optimisation vers des valeurs de paramètres trop éloignées des caractéristiques des matériaux réels, sans toutefois garantir l'existence des matériaux trouvés et donc la réalisabilité des solutions. Il est d'ailleurs peu probable que les résultats obtenus par optimisation sur 10 variables indépendantes correspondent précisément à des matériaux disponibles sur le marché, prêts à être utilisés. Mais l'existence de solutions théoriques proches de valeurs réalistes constituerait un résultat intéressant. D'une part, les progrès continus<sup>2</sup> dans le domaine des matériaux laissent penser qu'il pourrait un jour être possible de fabriquer des matériaux ayant des caractéristiques s'éloignant de celles des matériaux existants actuellement (par exemple par tissage ou impression 3D). D'autre part, des configurations approchées, moins performantes mais réalisables, peuvent s'avérer avantageuses dans le cadre de certaines applications.

### 3.1.3 Sélection de configurations intéressantes

Comme souligné en introduction de ce chapitre, le nombre de paramètres intervenant dans la réponse vibratoire du revêtement, et donc dans le calcul de la fonction objectif, est important. Pour chaque couche, on peut faire varier les trois composantes du module d'Young  $\mathbf{E}$ , le module de cisaillement  $G_{r\theta}$ , les coefficients de Poisson  $\nu_{r\theta}$ ,  $\nu_{rz}$ , et  $\nu_{\theta z}$ , le facteur de perte  $\eta$ , la masse volumique  $\rho$  et l'épaisseur  $h$ , soit 10 paramètres, qui se ramènent à 5 si le matériau considéré est isotrope<sup>3</sup>. Même si les algorithmes disponibles actuellement permettent de traiter un grand nombre de variables, l'interprétation des résultats reste difficile. On cherche donc à réduire le nombre de variables d'étude. Par optimisations successives, on parvient à fixer la valeur de certains paramètres, soit parce que leur influence sur la fonction objectif est faible, soit au contraire parce qu'ils sont déterminants et qu'ils doivent se situer sur une très faible plage de variation pour qu'un effet de réduction de la diffraction soit observable.

### Algorithme génétique

Différentes méthodes sont envisageables pour rechercher les valeurs des paramètres mécaniques et dimensionnels des couches qui minimisent la section efficace de diffraction de l'obstacle cylindrique et de son revêtement. Il s'agit d'un problème non convexe comportant un grand nombre de minima locaux. On se dirige donc vers des méthodes de recherche globales. Parmi elles, les méthodes évolutives s'inspirant de mécanismes naturels sont particulièrement adaptées au traitement de problèmes comportant un grand nombre de paramètres dont l'impact sur la fonction objectif est difficile à évaluer. On peut citer par exemple les algorithmes génétiques, reproduisant les mécanismes

2. Ces dernières années ont vu par exemple le développement de matériaux fonctionnels, intelligents, composites, de nanomatériaux, métamatériaux, etc.

3. On utilise alors  $G = E/2(1 + \nu)$ .

de sélection naturelle darwiniens. C'est ce type d'algorithme que l'on a choisi d'utiliser dans le cadre de cette étude. Il consiste dans un premier temps à évaluer un certain nombre d'individus (correspondant ici à un jeu de paramètres mécaniques et dimensionnels). Ces individus forment une population. Une sélection est opérée selon un ou plusieurs critères (à savoir la ou les fonctions objectif). Les individus répondant le mieux à ces critères sont conservés. Une nouvelle génération est créée en renouvelant une partie de la population initiale par croisement et mutation des individus parents. Les croisements entre individus « performants » doivent permettre de converger vers un optimum. Les mutations sont nécessaires pour assurer l'exploration de la totalité de l'espace, et éviter la convergence de l'algorithme vers un minimum local. Le réglage des taux de croisement et de mutation est donc particulièrement important, de même que celui du critère d'arrêt (nombre maximal d'évaluations de la fonction objectif effectuées). Il existe de nombreuses variantes fonctionnant sur ce principe, et on utilise ici la bibliothèque JEGA de DAKOTA<sup>4</sup>, développée par Eddy et Lewis (2001) au sein de Sandia National Laboratories. Celle-ci contient deux méthodes d'optimisation globale : MOGA, un algorithme génétique multi-objectif (*Multi-Objective Genetic Algorithm*) permettant de rechercher un optimum de Pareto, et SOGA, un algorithme génétique permettant la recherche de l'optimum d'une fonction objectif (*Single-Objective Genetic Algorithm*).

### 3.2 Émergence de configurations bicouches orthotropes/isotropes

Choisir, pour déterminer les différentes couches, des plages de variation de caractéristiques mécaniques recouvrant celles de la totalité des matériaux existants est compliqué (il faudrait par exemple autoriser la variation du module d'Young de  $10^{-4}$  à  $10^3$  MPa). On choisit donc de procéder par optimisations successives, ciblées à chaque fois sur une famille de matériaux peu denses et peu rigides (mousses, élastomères, polymères), et une famille de matériaux présentant au contraire des modules d'Young et masses volumiques plus élevés (métaux, céramiques, composites, polymères). Les polymères sont considérés comme appartenant à la première ou à la seconde catégorie selon le type de matériaux auquel on cherche à les associer.

Les premières optimisations, effectuées sur des revêtements composés de deux matériaux isotropes, n'ont pas donné de résultats intéressants d'un point de vue réduction de la diffraction. En effet, aucune des configurations ainsi testées n'a conduit à une fonction objectif inférieure à 1, pour  $k_0a \simeq 1$ . Lors de nouvelles simulations autorisant une orthotropie de la couche intérieure, il est apparu que des configurations présentant une couche intérieure de module d'Young dans la direction radiale  $E_{r,1}$  nettement inférieur à son module d'Young dans les deux autres directions,  $E_{\theta,1} = E_{z,1}$ , permettaient d'obtenir une importante atténuation de la diffraction. C'est donc sur ce type de revêtement que nous nous concentrons ici.

Les calculs suivants ont été réalisés en considérant une couche intérieure orthotrope et une couche extérieure isotrope. Le coefficient de Poisson de la couche extérieure  $\nu_2$  a été fixé à 0.3, et son facteur de perte  $\eta_2$  à 1%. D'après les résultats d'optimisation et les analyses de sensibilité<sup>5</sup> menées en complément, la masse volumique  $\rho_1$  et le module de cisaillement  $G_{r\theta,1}$  de la couche intérieure ont une faible influence sur le résultat final, tandis que les modules d'Young des deux couches, leurs épaisseurs et la masse volumique de la couche extérieure  $\rho_2$  sont déterminants.

4. *Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications*

5. L'outil DACE (*Design and Analysis of Computer Experiments*) de DAKOTA a été utilisé pour calculer les indices de Sobol associés à chaque paramètres, dans les plages de variations autorisées.

### 3.2.1 Exemple de revêtement bicouche

Dans le cas d'un cylindre rigide de 0.15 m de rayon soumis à une onde plane de fréquence 380 Hz, différentes combinaisons de caractéristiques ont été mises en évidence comme permettant une forte atténuation de la diffraction. L'une de ces configurations, de caractéristiques données dans la table 3.2, est présentée ici. On s'y référera par la suite comme à la configuration « SOGA\_air », puisqu'elle a été obtenue au moyen de l'algorithme SOGA dans le cas d'un milieu fluide constitué d'air.

Caractéristiques générales	Grandeurs	couche int.	couche ext.
milieu extérieur : air	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	100	1200
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> ) 1.2	$E_r$ (MPa)	0.1	800
$c_0$ (m/s) 340	$E_\theta$ (MPa)	0.8	800
	$E_z$ (MPa)	0.8	800
dimensions du revêtement	$G_{r\theta}$ (MPa)	0.25	307.7
$a$ (m) 0.15	$\nu_{r\theta}$	0.4	0.3
$b$ (m) 0.153	$\nu_{\theta z}$	0.3	0.3
$h_1$ (mm) 2.4	$\nu_{rz}$	0.4	0.3
$h_2$ (mm) 0.6	$\eta$	0.005	0.01

TABLE 3.2 – Caractéristiques de la configuration « SOGA\_air ».

Cette configuration permet d'obtenir une atténuation de la diffraction de 11.2 dB à 380 Hz, la fréquence d'optimisation. Cette réduction peut être constatée sur les diagrammes de directivité  $|P(\theta)|$  représentés sur la figure 3.6, établis en l'absence et en présence du revêtement. L'ajout de ces couches élastiques permet d'annuler la diffraction en champ lointain dans la direction  $\theta = 180^\circ$ , c'est-à-dire du côté d'où provient l'onde incidente. La diffraction est aussi minimale à l'arrière du cylindre, pour des angles compris entre  $30^\circ$  et  $60^\circ$ , et, par effet de symétrie, entre  $300^\circ$  et  $330^\circ$ . L'atténuation est également significative dans les autres directions, puisque l'on passe d'une amplitude relative de pression diffractée pouvant atteindre 1 dans le cas sans revêtement à une amplitude inférieure ou égale à 0.25 avec le revêtement.

L'efficacité de ce dispositif est estimée en fonction de la fréquence de l'onde excitatrice au moyen du gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  (voir équation 3.4). Celui-ci est tracé sur la figure 3.7. On y voit un pic de gain négatif, correspondant à une atténuation de la diffraction due à la présence du revêtement, entre 270 Hz et 425 Hz, c'est-à-dire autour de la fréquence d'optimisation. La largeur de bande à -6 dB,  $\Delta f$ , est de 115 Hz. L'atténuation maximale (-12.2 dB) se produit à la fréquence  $f_{\text{min}} = 370$  Hz (gain minimal).

On remarque également sur le graphique 3.7 un pic de gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  positif, atteignant +7.4 dB, juste avant le pic négatif. À des fréquences inférieures à 270 Hz, le revêtement a l'effet contraire à celui escompté : la diffraction est beaucoup plus importante en sa présence qu'en son absence. Pour des fréquences supérieures à 650 Hz, le revêtement a un effet négligeable sur la section efficace de diffraction. Son épaisseur étant très faible ( $b/a = 1.02$ ), les effets liés à l'augmentation de rayon de l'ensemble cylindrique sont ici imperceptibles.

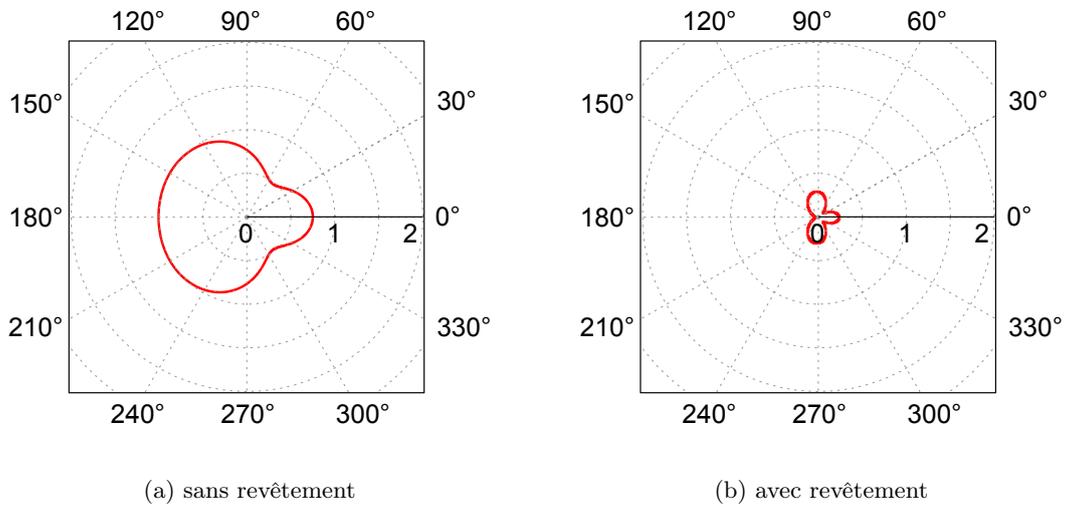


FIGURE 3.6 – Diagrammes de directivité  $|P(\theta)|$  obtenus pour  $k_0 a \approx 1.05$ , (a) en l'absence et (b) en présence du revêtement « SOGA\_air ». (Cylindre rigide de 15 cm de rayon, onde plane de fréquence 380 Hz.)

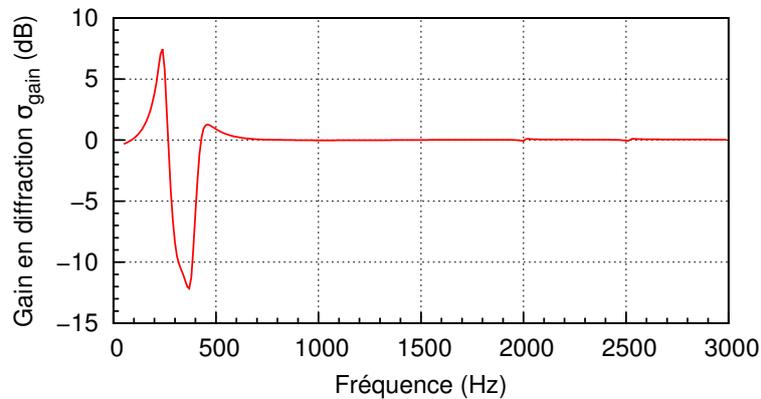


FIGURE 3.7 – Variations du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour le revêtement « SOGA\_air ».

Les champs de pression acoustique représentés sur la figure 3.8 illustrent ces observations. À 380 Hz, la pression autour du cylindre recouvert du revêtement « SOGA\_air » varie majoritairement entre 0.9 et 1.1 Pa (sauf au voisinage immédiat de l'ensemble cylindrique où elle est comprise entre 1.1 et 1.2 Pa). La comparaison avec le cas du cylindre rigide seul, où la pression prend des valeurs se situant entre 0.4 et 1.8 Pa, montre l'efficacité du dispositif à cette fréquence. À 250 Hz en revanche, le revêtement apparaît nettement défavorable, avec une importante diffraction en amont du cylindre, et une zone d'ombre particulièrement marquée en aval. Enfin, à 1000 Hz, les différences entre les champs de pression obtenus avec et sans revêtement sont difficilement discernables.

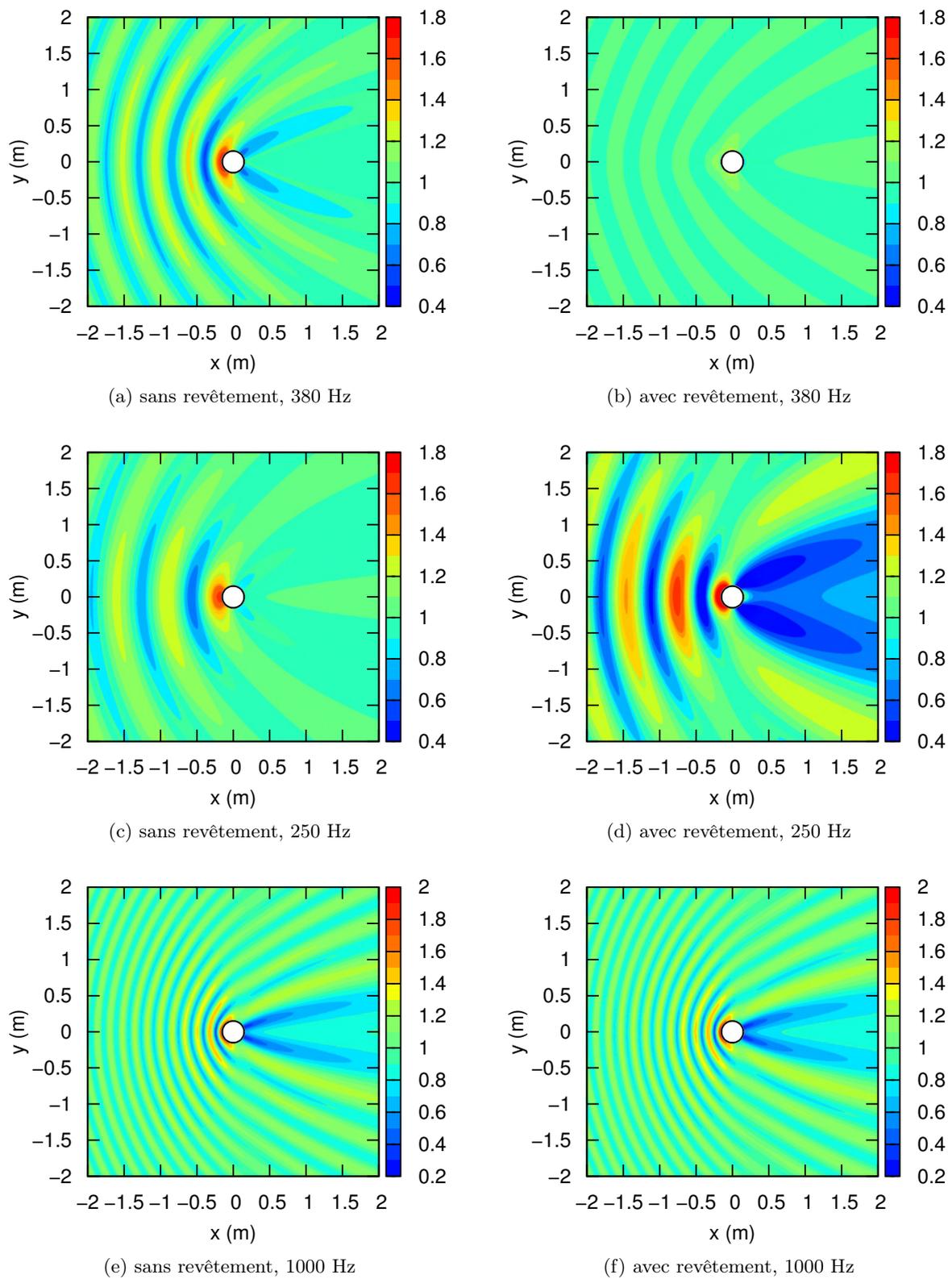


FIGURE 3.8 – Amplitude de la pression complexe (en Pa) autour d'un cylindre rigide de 15 cm de rayon, soumis à une onde plane incidente d'amplitude 1 Pa, en l'absence et en présence du revêtement « SOGA<sub>air</sub> ».

### 3.2.2 Contribution des différents modes au résultat final

Nous avons vu dans le paragraphe 3.1.1 que pour des nombres d'onde réduits de l'ordre de 1, seuls les premiers modes jouent un rôle important dans le calcul de la pression acoustique. On remarque sur le graphe 3.9 que la diffraction d'une onde plane de fréquence 380 Hz sur un cylindre rigide de 0.15 m de rayon est essentiellement due au mode axisymétrique  $n = 0$ , au mode  $n = 1$ , et dans une moindre mesure au mode  $n = 2$ . On peut se demander comment la présence du revêtement « SOGA\_air » modifie les contributions respectives de ces modes au phénomène de diffraction.

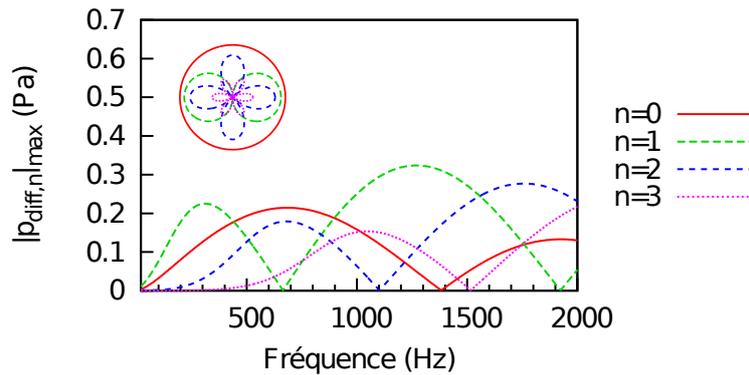


FIGURE 3.9 – Contribution des quatre premiers modes de diffraction dans le cas d'un cylindre rigide de 0.15 m de rayon, soumis à une onde plane de fréquence 380 Hz.

L'objectif visé lors de l'ajout du revêtement élastique est une compensation de la pression réfléchie  $p_{\text{refl}}$  au niveau de sa surface extérieure par la pression rayonnée  $p_{\text{ray}}$ , conduisant à une annulation de la pression diffractée. Sur la figure 3.10a, on voit que pour des basses fréquences, l'amplitude de la pression rayonnée est égale à l'amplitude de la pression réfléchie pour le mode  $n = 0$  à 400 et 480 Hz, et pour le mode  $n = 1$  à 210, 350, 530 et 720 Hz. Pour que les pressions  $p_{\text{ray},n}$  et  $p_{\text{refl},n}$  se compensent, il faut qu'en plus d'avoir la même amplitude, elles soient en opposition de phase. Si l'on considère le déphasage entre la pression modale rayonnée et la pression modale réfléchie représenté sur la figure 3.10b, on remarque que pour le mode  $n = 1$  celui-ci est de  $30^\circ$  à 210 Hz, proche de  $180^\circ$  à 350 et 530 Hz, et de  $-15^\circ$  à 720 Hz. La pression rayonnée et la pression réfléchie pour le mode  $n = 1$  sont donc d'amplitudes équivalentes et en opposition de phase à 350 et 530 Hz. La somme de ces deux pressions modales, c'est-à-dire la pression diffractée pour le mode  $n = 1$ , s'annule donc à ces fréquences, ce que l'on peut vérifier sur le graphe 3.10c. Aux deux autres fréquences, le déphasage entre les pressions rayonnée et réfléchie est faible, et leur somme est donc relativement importante. De la même façon, l'annulation à 400 Hz de la diffraction due au mode  $n = 0$  correspond à des pressions  $p_{\text{ray},0}$  et  $p_{\text{refl},0}$  de même amplitude et en opposition de phase.

En comparant les figures 3.9 et 3.10c, on constate que l'ajout du revêtement bicouche a permis de créer deux annulations de pression diffractée modale supplémentaires par rapport au cas du cylindre rigide seul : celle de  $|p_{\text{diff},0}|$  à 400 Hz et celle de  $|p_{\text{diff},1}|$  à 350 Hz. Entre ces deux fréquences, les 3 modes jouant un rôle dans la diffraction en l'absence de revêtement sont de très faible amplitude, ce qui explique le pic négatif de gain en diffraction. Le revêtement produit également l'apparition d'un pic de diffraction du mode  $n = 1$  en dessous de la première fréquence d'annulation de  $|p_{\text{diff},1}|$ , à 250 Hz. Cette résonance du mode circonférentiel  $n = 1$  est cohérente avec les effets de diffraction très marqués en amont et en aval du cylindre, observés à cette fréquence sur les champs 3.8c et 3.8d.

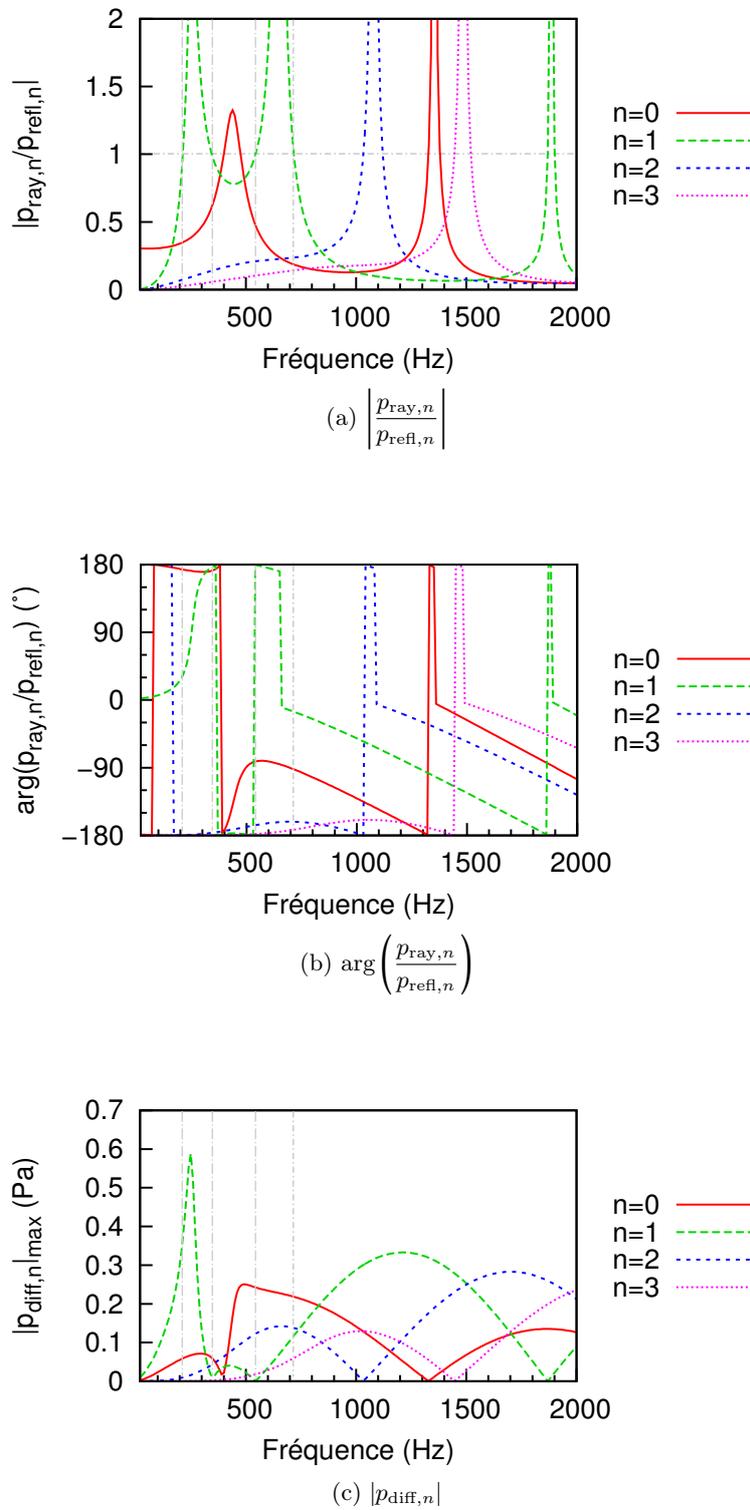


FIGURE 3.10 – Contribution des quatre premiers modes de rayonnement, réflexion et diffraction dans le cas où le cylindre est entouré du revêtement « SOGA<sub>air</sub> ».

### 3.2.3 Intensité acoustique et intensité de structure

Enfin, on peut également s'intéresser à la propagation de l'énergie lors de ce phénomène de diffraction. Pour cela, le flux d'énergie dans le fluide entourant l'obstacle peut être représenté par les vecteurs intensité acoustique  $\mathbf{I}_{ac}$ , calculés au moyen de la pression et du déplacement acoustiques complexes, respectivement  $p$  et  $\mathbf{u}$ , par l'expression

$$\mathbf{I}_{ac} = \frac{1}{2} \Re \left( p \overline{\mathbf{u}} \right). \quad (3.5)$$

L'intensité de structure dans le revêtement élastique peut être représentée par les vecteurs de Poynting (voir les travaux de Romano *et al.* (1990); Williams (1991) pour les matériaux isotropes, et ceux de Simon et Pautin (2006) pour les matériaux multicouches anisotropes). Ces vecteurs sont définis, pour toute couche  $j$ , par le produit du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^j$  et de la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}^j$ , selon la formule

$$\mathbf{I}_{str}^j = -\Re \left( \dot{\mathbf{u}}^j \boldsymbol{\sigma}^j \right). \quad (3.6)$$

Dans le cas cylindrique bidimensionnel considéré ici, les composantes radiales et tangentielles de l'intensité moyenne de structure dans la couche  $j$  sont donc données par

$$I_{str,r}^j = -\Re \left( \overline{u_r^j} \sigma_{rr}^j + \overline{u_\theta^j} \sigma_{r\theta}^j \right), \quad (3.7)$$

$$I_{str,\theta}^j = -\Re \left( \overline{u_r^j} \sigma_{r\theta}^j + \overline{u_\theta^j} \sigma_{\theta\theta}^j \right). \quad (3.8)$$

Sur la figure 3.11 est représentée l'allure des vecteurs intensité acoustique dans l'air en l'absence et en présence du revêtement « SOGA\_air », ainsi que celle des vecteurs intensité de structure à l'intérieur du revêtement lorsque celui-ci est présent. Un agrandissement des vecteurs de Poynting dans les couches élastiques est également proposé sur la figure 3.12.

On remarque que la présence du revêtement permet d'obtenir des lignes de courant d'intensité acoustique beaucoup moins perturbées que dans le cas du cylindre rigide seul. Elles s'approchent fortement des lignes droites que l'on constaterait si l'on considérait la propagation d'une onde plane dans de l'air, sans obstacle. De plus, la différence d'amplitude entre les vecteurs intensité acoustique en amont et en aval du cylindre, marquée dans le cas du cylindre rigide seul, n'apparaît pas en présence du revêtement « SOGA\_air ».

Le flux d'énergie à l'intérieur de celui-ci circule essentiellement dans la couche extérieure. Les vecteurs de Poynting sont en effet de très faible amplitude dans la couche intérieure. On note que dans la couche extérieure, ces vecteurs sont d'amplitude beaucoup plus importante et sont tangents à la surface du revêtement, ce qui montre un contournement de l'obstacle par le flux d'énergie.

## 3.3 Élargissement de la bande de fréquence d'atténuation de la diffraction

Les premières optimisations, menées avec la fonction objectif  $F_{obj}$  décrite dans le paragraphe 3.1.2, ont permis de cibler des familles de matériaux susceptibles de conduire à une réduction de la diffraction à une fréquence donnée. Elles nous ont amené à réduire progressivement le nombre de variables et

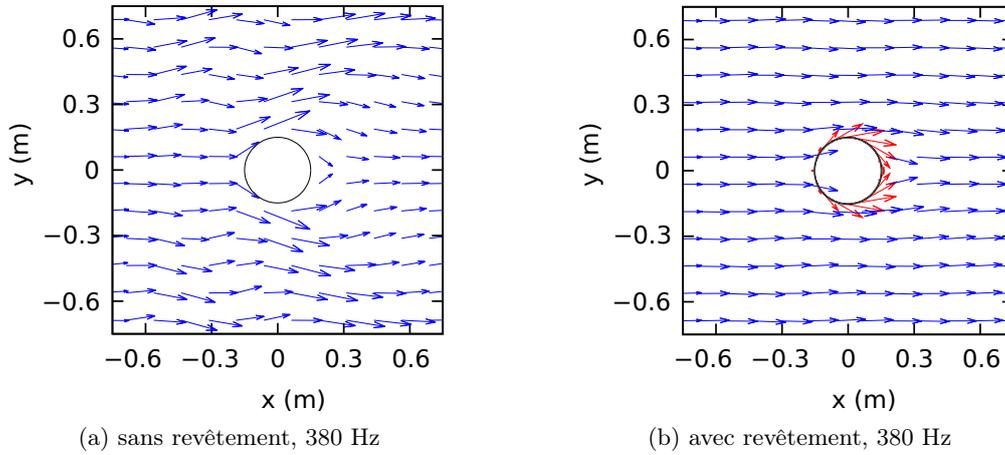


FIGURE 3.11 – Vecteurs intensité acoustique dans l'air extérieur (en bleu), et intensité de structure dans le revêtement (en rouge). Revêtement « SOGA<sub>air</sub> », onde plane à 380 Hz.

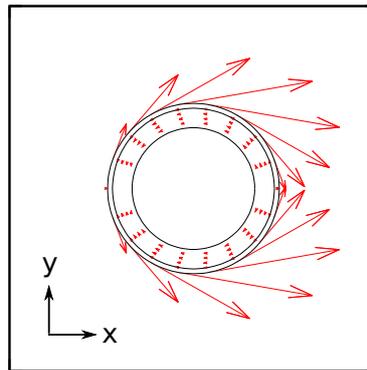


FIGURE 3.12 – Vecteurs intensité de structure à l'intérieur du revêtement « SOGA<sub>air</sub> ». (Dans un but de lisibilité, les épaisseurs des couches ne sont pas représentées à l'échelle par rapport à la taille du cylindre).

l'étendue des gammes de valeurs que celles-ci peuvent prendre. Le nombre de jeux de paramètres à tester a diminué, et l'on peut donc s'autoriser des calculs plus longs à chaque évaluation. Par exemple, au lieu de calculer, pour chaque combinaison de caractéristiques, la section efficace de diffraction à *une* fréquence, il peut être intéressant de l'estimer sur un large intervalle de fréquence. On peut ainsi chercher les paramètres permettant d'obtenir la diffraction minimale sur l'intervalle  $[f_1; f_2]$  en utilisant la fonction objectif

$$F_{\text{obj},2} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{\sigma_{\text{diff, revêtement}}}{\sigma_{\text{diff, cyl. rigide}}} df. \quad (3.9)$$

Cela permet de sélectionner des configurations moins performantes à une fréquence donnée que celles obtenues avec la première fonction objectif, mais efficaces sur une bande de fréquence beaucoup plus large. Ces configurations, intéressantes dans le cadre d'applications pratiques, avaient été éliminées lors du processus de sélection de l'algorithme génétique à cause de l'existence de combinaisons permettant une réduction de la diffraction plus forte à la fréquence d'optimisation.

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus par une optimisation multi-objectif. Les différentes combinaisons de paramètres sélectionnées sont évaluées selon deux critères.

- La première fonction objectif,  $F_{\text{obj},1}$ , correspond au gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  le plus faible atteint sur une bande de fréquence allant de  $f_1 = 90$  Hz à  $f_2 = 540$  Hz (soit des nombres d'onde réduits compris entre 0.25 et 1.5).
- Le deuxième critère est la fonction objectif  $F_{\text{obj},2}$  décrite ci-dessus, et évaluant le caractère large bande du dispositif.

La configuration étudiée est semblable à celle du cas « SOGA\_air » par ses dimensions (rayon du cylindre et épaisseur des couches). Le revêtement est composé d'une couche intérieure souple et peu dense ( $\rho_1 = 24$  kg/m<sup>3</sup>), présentant un rapport d'orthotropie de 10 entre ses modules d'Young  $E_\theta = E_z =$  et  $E_r$  (avec  $E_r = 0.13872$  MPa). La couche extérieure est supposée isotrope, plus dense et plus rigide que la couche intérieure.

Les variables d'optimisation sont au nombre de 6 :

- le module d'Young  $E_2$  de la couche extérieure,
- la masse volumique  $\rho_2$  de la couche extérieure,
- les coefficients de Poisson  $\nu_{r\theta,1}$ ,  $\nu_{\theta z,1}$  et  $\nu_{rz,1}$  de la couche intérieure,
- le module de cisaillement  $G_{r\theta,1}$  de la couche intérieure.

Les plages de variation autorisées pour le module d'Young et la masse volumique de la couche extérieure englobent celles des matériaux polymères et des différents bois (0.14 à 6 GPa, et 660 à 1680 kg/m<sup>3</sup>). Les coefficients de Poisson de la couche intérieure peuvent prendre des valeurs comprises entre 0.2 et 0.4, et le module de cisaillement peut varier entre 3 et 7 MPa.

Les couples  $(F_{\text{obj},1}, F_{\text{obj},2})$  obtenus lors des évaluations effectuées par l'algorithme MOGA sont représentés sur la figure 3.13. Si l'on met de côté les considérations liées à la faisabilité du revêtement, les solutions les plus intéressantes sont celles correspondant aux carrés rouges, et formant le front de Pareto. Ces solutions sont non dominées, dans le sens où l'on n'a pas rencontré au cours du processus d'optimisation de configuration permettant d'obtenir simultanément une meilleure fonction objectif  $F_{\text{obj},1}$  et une meilleure fonction objectif  $F_{\text{obj},2}$ . Il s'agit alors de choisir le compromis entre les deux critères le plus adapté à l'application visée.

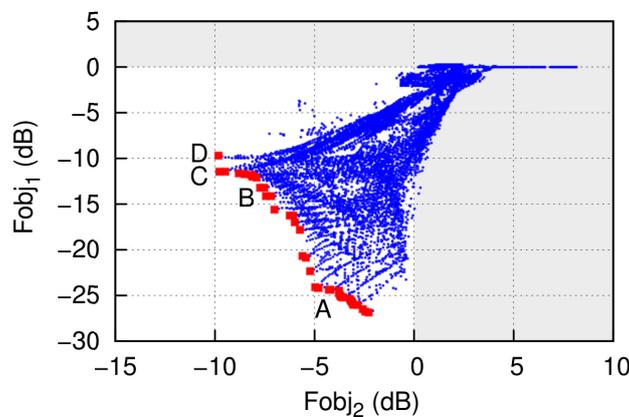


FIGURE 3.13 – Résultats d'optimisation multi-objectif par algorithme génétique. Les évaluations dominées au sens de Pareto sont représentées par des points bleus, les non dominées par des carrés rouges.

Les gains en diffraction correspondant à 4 de ces solutions non dominées au sens de Pareto sont tracés en fonction de la fréquence sur la figure 3.14. Les caractéristiques de ces combinaisons sont données dans la table 3.3. On voit qu'il est possible d'atteindre une largeur de bande à -6 dB de 179 Hz avec un gain minimal en diffraction de -24 dB, ou encore une largeur de bande de 440 Hz avec un gain minimal de -9.7 dB. Le fait que l'on obtienne ici des réductions de la diffraction supérieures à celle obtenue précédemment est dû à des plages de variation de paramètres mécaniques légèrement différentes. On peut par ailleurs remarquer que la recherche de configurations minimisant la diffraction entre 90 et 540 Hz a permis de sélectionner des configurations pour lesquelles le pic de gain positif qui apparaissait dans le cas « SOGA\_air » est ici repoussé à de très basses fréquences.

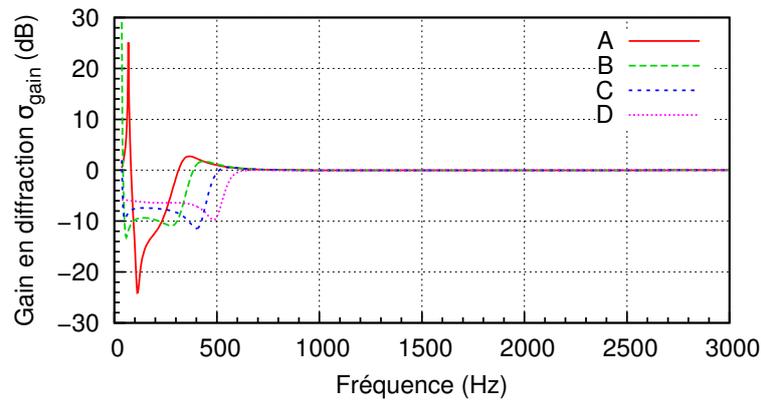


FIGURE 3.14 – Gain en diffraction obtenu pour différentes configurations issues du front de Pareto de la figure 3.13.

Grandeurs		A	B	C	D
$E_2$	(MPa)	1248.48	1248.48	1317.84	1664.64
$\rho_2$	(kg/m <sup>3</sup> )	660	672	660	660
$\nu_{r\theta,1}$		0.36	0.36	0.36	0.21
$\nu_{\theta z,1}$		0.34	0.35	0.34	0.25
$\nu_{rz,1}$		0.25	0.25	0.25	0.38
$G_{r\theta,1}$	(MPa)	0.971	0.735	0.583	0.749
$\sigma_{\text{gain,min}}$	(dB)	-24.1	-13.2	-11.5	-9.7
$f_{\text{min}}$	(Hz)	166	112	455	538
$\Delta f_{(-6\text{dB})}$	(Hz)	179	292	408	440

TABLE 3.3 – Caractéristiques de quatre solutions du front de Pareto.

La contribution des premiers modes de diffraction est analysée dans le cas de la solution B. Les caractéristiques de cette configuration, désignée par « MOGA\_air\_B », sont rassemblées dans la table 3.4. Comme dans le cas « SOGA\_air », les annulations des modes de pression diffractée correspondent à une compensation de l'onde réfléchie et de l'onde rayonnée, les deux étant de même amplitude et en opposition de phase à la fréquence considérée. On remarque, par rapport au cas « SOGA\_air », un glissement de la première fréquence d'annulation de  $|p_{\text{diff},1}|$  vers 0. La résonance de ce mode est donc déplacée à de très basses fréquences, comme noté au sujet de la courbe 3.14. Cela crée une bande de fréquences de presque 300 Hz dans laquelle les modes de diffraction  $n = 0$

et  $n = 2$  sont quasiment nuls, et le mode  $n = 1$  est très faible. Cette bande correspond à la large zone de gain en diffraction négatif.

Caractéristiques générales			Grandeurs	couche int.	couche ext.
milieu extérieur : air			$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	24	672
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	1.2		$E_r$ (MPa)	0.1387	1248.48
$c_0$ (m/s)	340		$E_\theta$ (MPa)	1.3872	1248.48
			$E_z$ (MPa)	1.3872	1248.48
dimensions du revêtement			$G_{r\theta}$ (MPa)	0.7352	480.18
$a$ (m)	0.15		$\nu_{r\theta}$	0.36	0.3
$b$ (m)	0.153		$\nu_{\theta z}$	0.35	0.3
$h_1$ (mm)	2.4		$\nu_{rz}$	0.25	0.3
$h_2$ (mm)	0.6		$\eta$	0.01	0.01

TABLE 3.4 – Caractéristiques de la configuration « MOGA\_air\_B ».

Dans ce chapitre, a été présentée la démarche utilisée pour sélectionner des configurations permettant une atténuation de la diffraction dans l'air, pour un nombre d'onde réduit  $k_0 a$  proche de 1. Des optimisations par algorithme génétique ont permis de mettre en évidence les possibilités offertes, dans ce cas-là, par des revêtements composés d'une couche intérieure de module d'Young dans la direction radiale,  $E_{r,1}$ , faible devant ses modules d'Young dans les directions axiale et circonférentielle,  $E_{\theta,1}$  et  $E_{z,1}$ . Un exemple de revêtement, de caractéristiques réalistes et permettant d'atteindre une atténuation de la diffraction de 12 dB à 380 Hz (avec une largeur de bande à -6 dB de 115 Hz), a ensuite été analysé. Il a en particulier été montré que, dans ce cas, la réduction de la diffraction à la fréquence d'optimisation correspond à une annulation des principaux modes de diffraction, annulation due à la compensation de la pression réfléchiée par la pression rayonnée. Enfin, une optimisation du gain en diffraction sur une large bande de fréquence a permis de faire ressortir des configurations permettant une atténuation importante et large bande, pour de faibles fréquences.

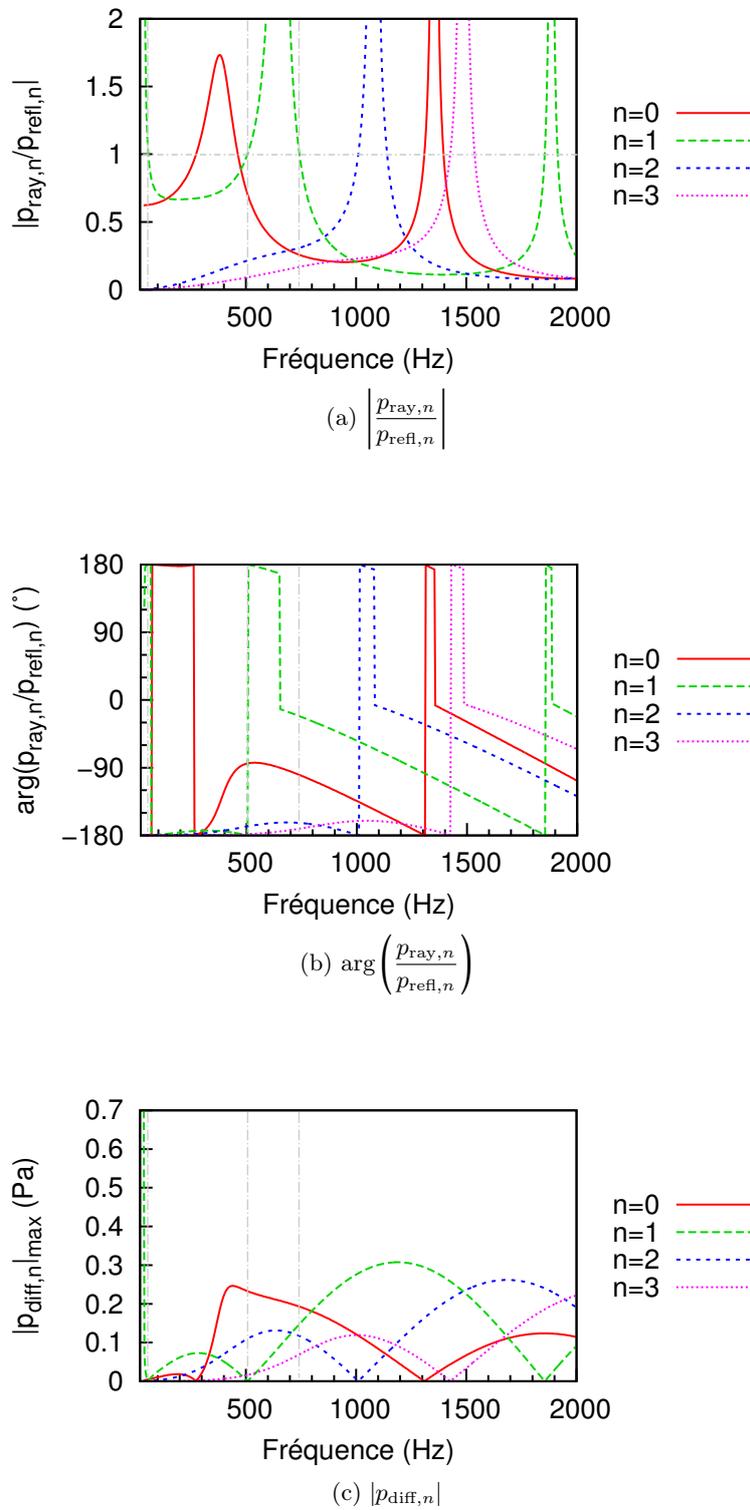


FIGURE 3.15 – Contribution des quatre premiers modes de rayonnement, réflexion et diffraction dans le cas où le cylindre est entouré du revêtement « MOGA\_air\_B ».



## Chapitre 4

# Vers une configuration réalisable expérimentalement

On s'intéresse ici à la faisabilité pratique d'un revêtement bicouche orthotrope/isotrope pour réduire la diffraction d'une onde sur un cylindre dans l'air. On s'interroge dans un premier temps sur l'effet parasite des diffractions se produisant aux extrémités d'un cylindre de dimension finie. On cherche ensuite une configuration bicouche réalisable, pouvant permettre l'observation expérimentale du phénomène de réduction de la diffraction, en employant les outils numériques décrits précédemment. Des essais sont effectués afin de vérifier les caractéristiques du matériau que l'on souhaite utiliser comme couche interne. Enfin, des mesures vibratoires sont réalisées sur un revêtement en polyéthylène et polyméthylpentène soumis à une excitation mécanique. Les résultats ainsi obtenus sont comparés à ceux issus de simulations effectuées avec le modèle vibro-acoustique décrit au chapitre 2.2.1.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Passage d'un cylindre rigide infini à un cylindre de dimension finie . . . . .</b>	<b>78</b>
4.1.1	Simulations 2D et 3D par éléments finis . . . . .	78
4.1.2	Comparaison entre résultats expérimentaux et code 2D . . . . .	80
<b>4.2</b>	<b>Sélection d'une configuration bicouche au moyen des outils numériques . . . . .</b>	<b>82</b>
4.2.1	Mousse de polyéthylène orthotrope comme couche intérieure . . . . .	82
4.2.2	Sélection d'une couche extérieure isotrope . . . . .	82
4.2.3	Réduction de la diffraction permise par le revêtement « PE/PMP » . . . . .	84
<b>4.3</b>	<b>Essais préliminaires . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>4.4</b>	<b>Mesures vibratoires en réponse à une excitation mécanique . . . . .</b>	<b>89</b>
4.4.1	Description du dispositif . . . . .	89
4.4.2	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	89

---

## 4.1 Passage d'un cylindre rigide infini à un cylindre de dimension finie

Les travaux numériques présentés dans les chapitres 2 et 3 concernent des configurations bidimensionnelles. L'obstacle sur lequel l'onde incidente est diffractée est un cylindre rigide infiniment long. En pratique, la longueur de l'obstacle est nécessairement finie, et l'on peut se demander si des effets de diffraction au niveau des extrémités du cylindre peuvent avoir une influence importante sur les mesures de pression ou d'intensité effectuées autour du cylindre lors d'expérimentations. On s'intéresse ici au cas d'un cylindre rigide seul, sur lequel aucun revêtement n'est fixé.

### 4.1.1 Simulations 2D et 3D par éléments finis

Les modèles vibro-acoustiques décrits dans le chapitre 2 et implémentés dans le cadre de cette étude ne permettent pas de prendre en compte la propagation d'ondes dans la direction de l'axe du cylindre. On utilise donc le logiciel de simulation par éléments finis COMSOL pour calculer la pression autour du cylindre dans les cas 2D et 3D.

Dans le cas tridimensionnel, on considère un cylindre rigide de 0.125 m de rayon et de 1 m de long, orienté suivant la direction  $z$ , et soumis à une onde plane d'amplitude 1 Pa se propageant dans la direction des  $x$  croissants. Comme représenté sur la figure 4.1, la pression est calculée à l'intérieur d'une sphère entourant le cylindre. La condition de non réflexion des ondes sur la surface de la sphère est assurée par une couche absorbante de type PML (*Perfectly Matched Layer*). La taille de la sphère et des éléments tétraédriques constituant son maillage sont adaptés en fonction des fréquences d'étude.

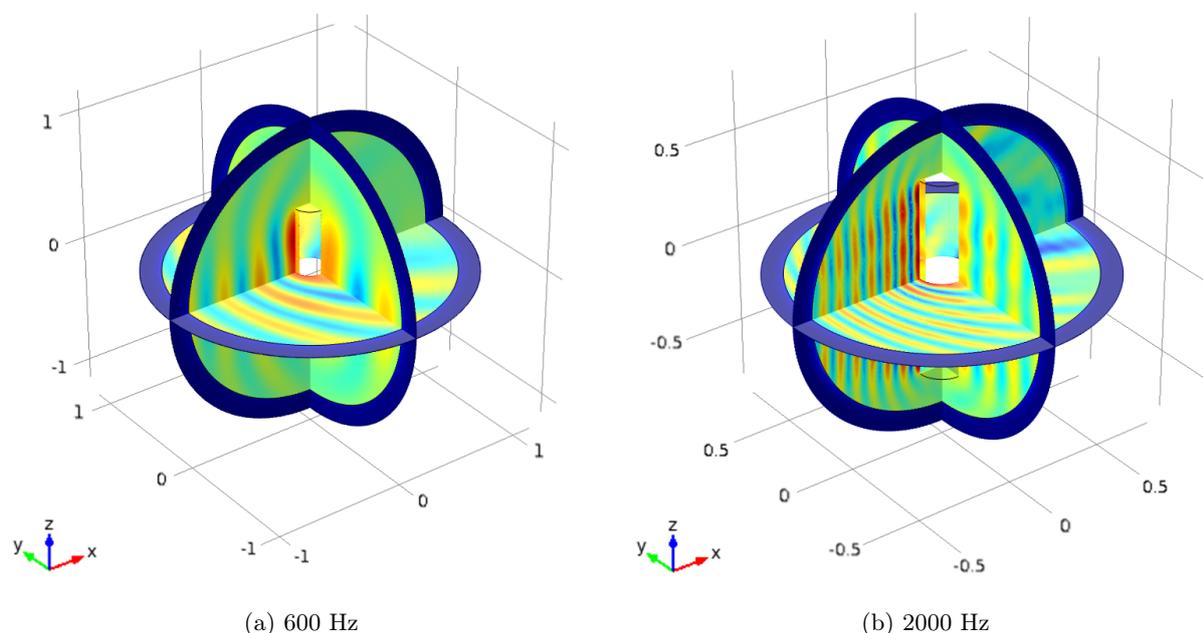


FIGURE 4.1 – Calcul 3D par éléments finis de la diffraction d'une onde plane sur un cylindre rigide de 1 m de long. Amplitude de la pression complexe  $|p|$  sur 3 plans de coupe perpendiculaires.

Sur la figure 4.2, la pression obtenue au niveau du plan médian du cylindre dans le cas 3D est comparée à celle obtenue dans le cas 2D, pour des fréquences de 600 et 2000 Hz. À plusieurs

endroits, on relève de légères différences de niveaux de pression entre les deux calculs, mais l'allure générale des fronts d'onde, et plus généralement des champs, reste la même dans les deux cas.

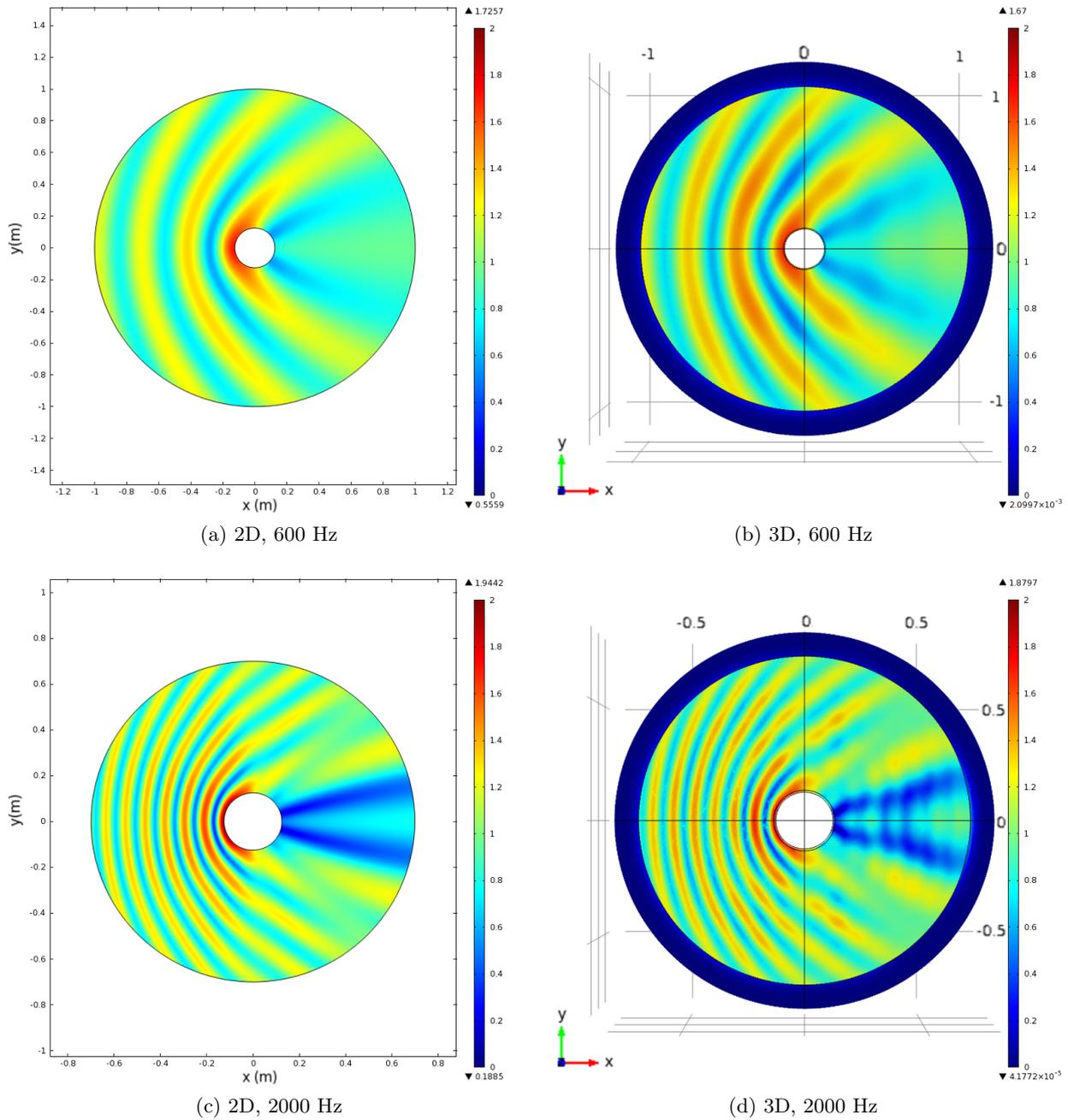


FIGURE 4.2 – Amplitude de la pression complexe  $|p|$  (Pa) dans le plan  $z = 0$ , obtenue pour un cylindre infini (calcul 2D) et un cylindre de 1 m de long (calcul 3D), soumis à une onde plane d'amplitude unitaire, de fréquence 600 ou 2000 Hz.

### 4.1.2 Comparaison entre résultats expérimentaux et code 2D

Des mesures de pression et d'intensité sont effectuées autour d'un cylindre en PVC de 1 m de long et 0.125 m de rayon, dans la chambre anéchoïque de l'ONERA. Fixé à mi-hauteur de la salle au moyen d'une barre métallique, le cylindre est soumis à un bruit blanc émis par un haut-parleur distant de l'axe du cylindre de 3.4 m. Cette distance est théoriquement suffisante pour supposer une propagation de type onde plane au voisinage du cylindre. Une sonde intensimétrique Brüel & Kjær, composée de deux microphones 1/2" écartés de 12 mm, est fixée à un bras solide d'un plateau tournant, et installée de manière à pouvoir mesurer la pression et l'intensité sur un cercle de 0.367 m de rayon autour de l'axe du cylindre, dans son plan médian. Ce dispositif est présenté sur la figure 4.3.



(a) Dispositif expérimental



(b) Sonde intensimétrique et haut-parleur

FIGURE 4.3 – Dispositif de mesure intensimétrique en chambre anéchoïque.

Des mesures sont effectuées tous les  $5^\circ$  autour du cylindre. Les données sont analysées par FFT, de 0 à 3200 Hz, avec une résolution fréquentielle de 4 Hz. L'amplitude de la pression obtenue pour les différents angles de mesure est représentée sur la figure 4.4a en fonction de la fréquence. Pour comparaison, les résultats fournis par le modèle vibro-acoustique 2D sont donnés sur la figure 4.4b. Malgré les différences entre les deux situations considérées (cylindre fini/cylindre infini, source ponctuelle/onde plane), on retrouve le même type de champ, avec des amplitudes comparables.

La figure 4.5 représente les intensités acoustiques dans la direction radiale  $I_{ac,r}$  obtenues expérimentalement et numériquement sur ce cercle. Les variations d'amplitude de cette grandeur que l'on peut observer sur la partie du cercle se trouvant à l'aval de l'obstacle, sont similaires dans les deux cas, sauf pour quelques angles proches de  $90^\circ$  à une fréquence de 2000 Hz. Ces erreurs de mesure peuvent être attribuées d'une part à la présence d'erreurs de phase entre les deux microphones, d'autre part aux faibles valeurs de l'intensité radiale, dues à la répartition de l'énergie acoustique sur une large bande de fréquence (0 à 3200 Hz).

Ainsi, il semble que les effets de diffraction se produisant aux extrémités du cylindre de 1 m de

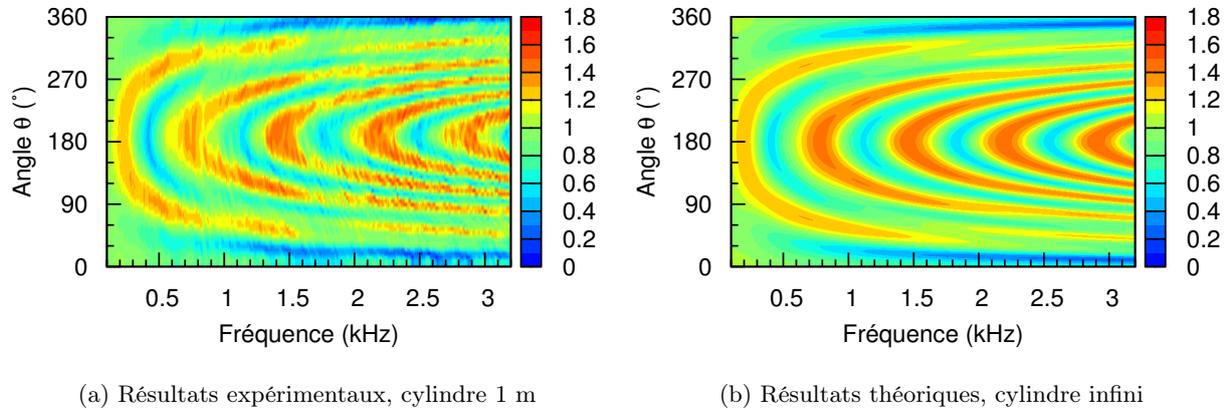


FIGURE 4.4 – Amplitude du rapport de pression  $|p/p_{inc}|$ , sur un cercle de 0.367 m de rayon autour du cylindre rigide, pour différents angles  $\theta$  et différentes fréquences de l'onde incidente. Résultats obtenus (a) expérimentalement et (b) au moyen du premier modèle vibro-acoustique 2D du chapitre 2.

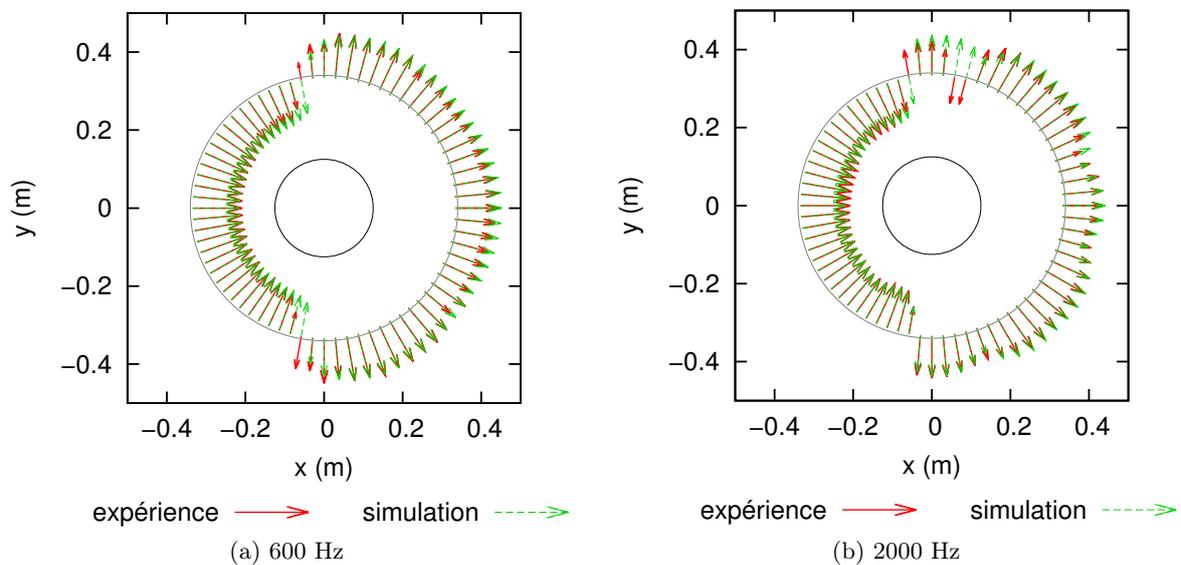


FIGURE 4.5 – Intensité acoustique dans la direction radiale  $I_{ac,r}$  (en dB) au niveau du plan médian du cylindre, sur un cercle de rayon 0.367 m autour de son axe. Résultats obtenus expérimentalement et par simulation numérique, à 600 et 2000 Hz.

long aient une influence limitée sur la pression et l'intensité mesurées dans le plan médian de ce dernier. Des expériences sur des cylindres et des revêtements de dimension finie dans la direction  $z$  sont donc envisageables.

## 4.2 Sélection d'une configuration bicouche au moyen des outils numériques

### 4.2.1 Mousse de polyéthylène orthotrope comme couche intérieure

On dispose d'une plaque de mousse de polyéthylène (PE) présentant des caractéristiques d'orthotropie. D'après les données disponibles, le module d'Young dans l'épaisseur de la plaque est de 1.2 MPa, tandis que les modules d'Young dans son plan sont de 14 MPa. Ce rapport d'orthotropie s'approche de ceux mis en évidence par optimisation comme permettant d'obtenir des effets de réduction de la diffraction. On choisit donc de chercher une configuration de revêtement bicouche utilisant ce matériau comme couche intérieure. La figure 4.6 présente un échantillon de mousse de polyéthylène découpé dans cette plaque. Celle-ci a été fabriquée à partir de deux plaques de mousse de même épaisseur, collées par fusion (ligne jaune sur la photo). Les dimensions de la plaque (0.9 m  $\times$  0.9 m  $\times$  13 mm) imposent un rayon maximal de cylindre de 0.13 m. On choisit d'en utiliser un correspondant à des dimensions standard, de 0.125 m de rayon.

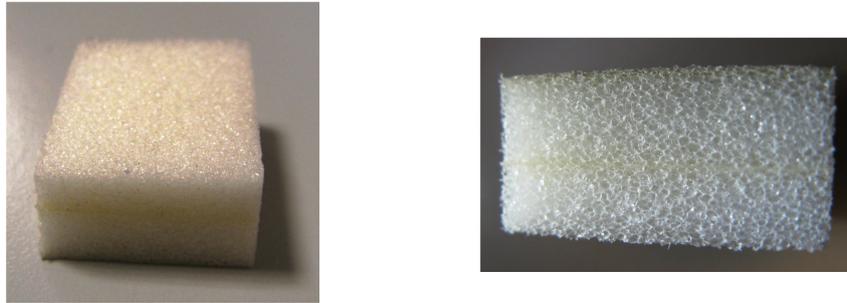


FIGURE 4.6 – Échantillon de mousse de polyéthylène

### 4.2.2 Sélection d'une couche extérieure isotrope

Les outils numériques mis en place dans le chapitre 3 sont utilisés pour chercher une couche extérieure qui pourrait conduire à une réduction de la diffraction. Les caractéristiques de la couche intérieure sont alors fixées. Grâce à l'optimisation par algorithme génétique, on repère les zones intéressantes d'un point de vue réduction de la diffraction pour chacun des paramètres suivants :

- le module d'Young  $E_2$  de la couche externe,
- sa masse volumique  $\rho_2$ ,
- son épaisseur  $h_2$ ,
- son facteur de perte  $\eta_2$ ,
- la fréquence  $f$  de l'onde incidente.

On considère que le matériau composant la couche externe est isotrope, et que son coefficient de Poisson  $\nu_2$  vaut 0.3.

Un travail d'optimisation est effectué sur ces variables avec la fonction objectif  $F_{\text{obj}}$  définie par l'expression 3.3. Les configurations sélectionnées par l'algorithme génétique et offrant le meilleur gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  correspondent toutes à des fréquences se situant autour de 600 Hz (soit  $k_0 a \simeq 1.39$ ) et à des facteurs de perte  $\eta_2$  entre compris entre 8 et 10 %. Ces résultats montrent également que les modules d'Young  $E_2$  et les masses volumiques  $\rho_2$  permettant d'obtenir une réduction de la diffraction sont proches de ceux des matériaux polymères.

La fréquence est donc fixée à 600 Hz, et le facteur de perte  $\eta_2$  de la couche extérieure à 9%. La fonction objectif est alors évaluée, pour différentes épaisseurs  $h_2$ , en fonction du module d'Young  $E_2$  et de la masse volumique  $\rho_2$  de la couche externe. Pour chaque épaisseur, peu de couples  $(E_2, \rho_2)$  conduisent à une réduction de la diffraction, et lorsqu'elle se produit, celle-ci est de l'ordre de quelques dB (-5 dB environ dans les configurations les plus favorables).

Sur la figure 4.7 sont représentées les solutions permettant d'atteindre un gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  inférieur à -3 dB, à 600 Hz, pour des épaisseurs de couches externes de 0.5, 1, 1.5 et 2 mm. À épaisseur fixée, les modules d'Young et masses volumiques des configurations relevées semblent respecter une relation linéaire. L'épaisseur de couche extérieure qui permet d'obtenir le nombre de couples  $(E_2, \rho_2)$  intéressants le plus élevé est  $h_2 = 0.5$  mm. Un doublement de cette épaisseur provoque une division par 2 des valeurs de modules d'Young nécessaires pour obtenir une réduction de la diffraction, et restreint la gamme de masses volumiques pour lesquelles le phénomène se produit. De même, une multiplication par 3 (respectivement par 4) de l'épaisseur  $h_2$  initiale entraîne une division par 3 (respectivement par 4) du niveau des modules d'Young intéressants, ainsi qu'une réduction supplémentaire de la plage de masses volumiques. Pour obtenir un effet d'atténuation de la diffraction, le module d'Young  $E_2$  de la couche extérieure doit donc être inversement proportionnel à son épaisseur  $h_2$ .

Comme évoqué plus haut, les niveaux de masse volumique et module d'Young considérés ici correspondent aux caractéristiques mécaniques des matériaux polymères. Celles de quatre polymères thermoplastiques sont placées sur la figure 4.7. On voit que le PMMA<sup>1</sup>, plus connu sous le nom de Plexiglas, est proche de la zone intéressante pour une couche extérieure de 0.5 mm d'épaisseur. Cependant la réalisation d'un cylindre de 0.125 m de rayon et seulement 0.5 mm d'épaisseur en cette matière est problématique. Le polycarbonate (PC) et l'ABS<sup>2</sup> pourraient également être utilisés pour des épaisseurs comprises entre 0.5 et 1 mm, malheureusement non disponibles. On choisit donc d'utiliser le polyméthylpentène (PMP), existant sous forme de film de 0.5 mm d'épaisseur, en envisageant une superposition de deux couches (voir caractéristiques en annexe C).

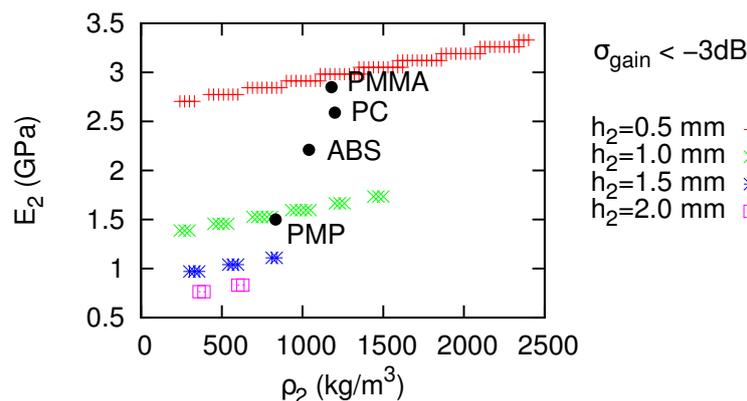


FIGURE 4.7 – Masse volumique  $\rho_2$  et module d'Young  $E_2$  permettant d'obtenir un gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}} < -3$  dB à 600 Hz, pour quatre épaisseurs  $h_2$  de la couche extérieure. La couche intérieure est constituée de la mousse de polyéthylène décrite dans le paragraphe 4.2.1.

1. polyméthacrylate de méthyle  
2. acrylonitrile butadiène styrène

### 4.2.3 Réduction de la diffraction permise par le revêtement « PE/PMP »

Le gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  que l'on pourrait obtenir avec un revêtement bicouche composé de 13 mm de mousse de polyéthylène et de 1 mm de polyméthylpentène est représenté sur la figure 4.8. Les caractéristiques de cette configuration, appelée ici « PE/PMP », sont précisées dans la table 4.1. On trouve numériquement que ce revêtement permet une atténuation de la diffraction de 5.1 dB à 600 Hz, et une légère augmentation de celle-ci en-dessous de 394 Hz et au-dessus de 636 Hz. Cette augmentation atteint au maximum 1.5 dB et n'a donc rien de comparable avec le pic de gain positif dépassant les 7 dB, constaté dans le cas de la configuration « SOGA\_air » dans le paragraphe 3.2.1.

L'atténuation attendue pour la configuration « PE/PMP », bien que peu importante, devrait pouvoir être constatée expérimentalement. En effet, si l'on considère les champs de pression représentés sur la figure 4.9, on voit que l'ajout du revêtement permet d'obtenir, dans un voisinage proche du cylindre, des fronts d'ondes moins marqués en amont, et une zone d'ombre moins prononcée en aval. Des mesures effectuées effectuées dans ces zones devraient permettre de mettre en évidence les effets du revêtement à 600 Hz, et le dispositif utilisé pour mesurer la pression et l'intensité à 0.367 m de l'axe du cylindre dans son plan médian (cf. paragraphe 4.1.2) serait adapté à de telles mesures.

La figure 4.10 montre la pression obtenue par simulation sur un cercle de 0.367 m rayon, dans un plan perpendiculaire à l'axe d'un cylindre infiniment long, recouvert ou non du revêtement « PE/PMP ». Cette pression est donnée en fonction de la fréquence de l'onde plane incidente et de l'angle d'observation. En présence du revêtement, on remarque une discontinuité dans les zones de surpression apparaissant autour de 75° et 285° vers 600 Hz. De plus, une ligne légèrement incurvée, correspondant à une pression relative de 1, est présente entre 90° et 270°, c'est-à-dire en amont du cylindre, alors que l'on peut observer une zone de dépression à cette endroit en l'absence de revêtement. Un phénomène similaire est à noter pour les angles situés en aval du cylindre, entre 0° et 60°, et, par symétrie, entre 300° et 360°. Le dispositif expérimental présenté sur la figure 4.3 pourrait donc permettre de visualiser l'effet du revêtement « PE/PMP ».

Caractéristiques générales			Grandeurs	couche int.	couche ext.
milieu extérieur : air			$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	89	835
$\rho_0$	(kg/m <sup>3</sup> )	1.2	$E_r$ (MPa)	1.2	1500
$c_0$	(m/s)	340	$E_\theta$ (MPa)	14	1500
			$E_z$ (MPa)	14	1500
dimensions du revêtement			$G_{r\theta}$ (MPa)	0.1	576.9
$a$	(m)	0.125	$\nu_{r\theta}$	0.3	0.3
$b$	(m)	0.139	$\nu_{\theta z}$	0.3	0.3
$h_1$	(mm)	13	$\nu_{rz}$	0.3	0.3
$h_2$	(mm)	1	$\eta$	0.11	0.09

TABLE 4.1 – Caractéristiques de la configuration « PE/PMP ».

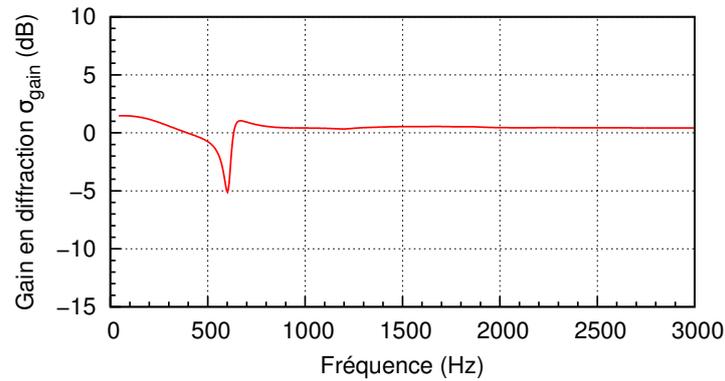


FIGURE 4.8 – Gain en diffraction en fonction de la fréquence pour la configuration « PE/PMP ».

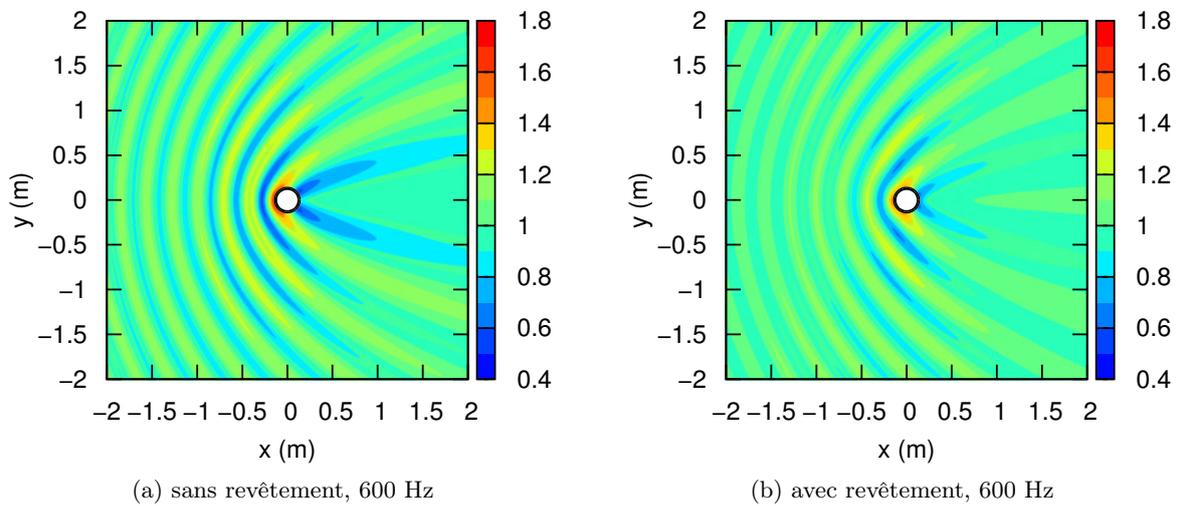
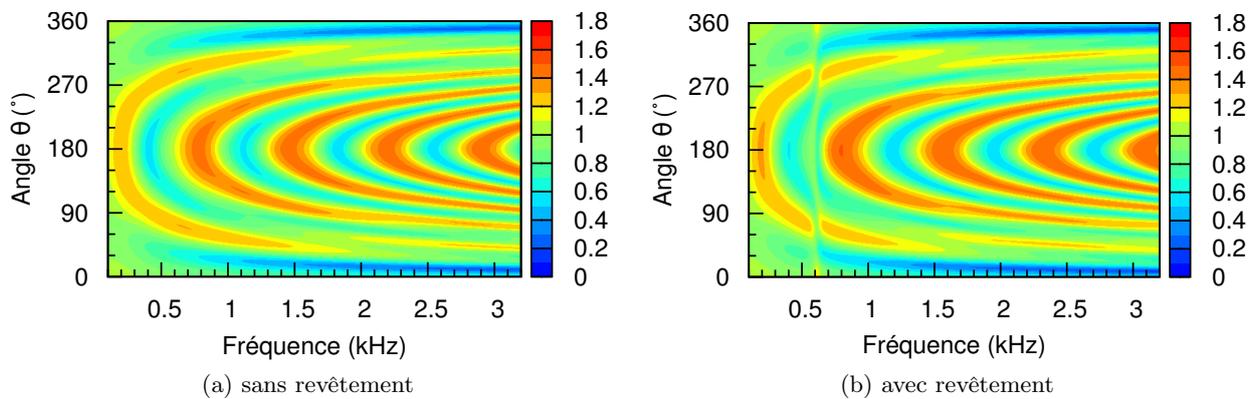


FIGURE 4.9 – Amplitude de la pression (en Pa) autour d'un cylindre de 0.125 m de rayon, soumis à une onde plane incidente d'amplitude 1 Pa, en l'absence et en présence du revêtement « PE/PMP ».

FIGURE 4.10 – Amplitude du rapport de pression  $|p/p_{inc}|$ , sur un cercle de 0.367 m de rayon autour d'un cylindre entouré ou non du revêtement « PE/PMP ».

### 4.3 Essais préliminaires

Dans la configuration d'étude, l'effet recherché de réduction de la diffraction ne se produit que pour des combinaisons de matériaux de caractéristiques précises. Par exemple, on voit sur la figure 4.7 que, pour une couche extérieure de 0.5 mm d'épaisseur et de masse volumique  $1250 \text{ kg/m}^3$ , une atténuation de la diffraction aura lieu si cette couche a un module d'Young de 3 MPa, mais pas si celui-ci est de 3.2 MPa. Inversement, si l'on fixe les caractéristiques de la couche extérieure, on obtient une très grande sensibilité du résultat aux caractéristiques de la couche intérieure. On a par ailleurs vu dans le chapitre 3 que l'orthotropie de la couche intérieure semblait déterminante, et que les meilleurs résultats étaient obtenus lorsque le module d'Young de cette couche dans la direction radiale  $E_{r,1}$  était très inférieur aux modules d'Young dans les directions axiale et circonférentielle  $E_{z,1}$  et  $E_{\theta,1}$ . Devant l'importance du rôle joué par l'orthotropie de la couche intérieure, on souhaite vérifier les valeurs de module d'Young dont on dispose pour la mousse de polyéthylène.

Pour cela, différents types de test ont été envisagés, notamment des tests d'analyse modale sur des poutres sandwich avec une âme en polyéthylène (voir figure 4.11), et des essais en traction, avec de la mousse de polyéthylène, seule. Il s'est avéré que la faible masse des poutres testées en analyse modale les rendait inadaptées à ce type de mesure. L'idée d'une évaluation des modules d'Young de la mousse par traction a également dû être écartée. Les mors dont nous disposons pour fixer des éprouvettes ne peuvent contenir de matériaux aussi épais.

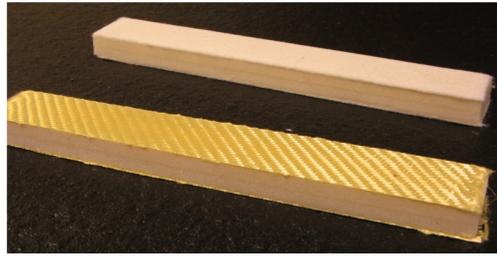


FIGURE 4.11 – Exemple de poutres testées en analyse modale.

On s'est donc tourné vers une méthode d'estimation reposant sur une analogie avec un système résonnant de type masse-ressort. Le dispositif utilisé est présenté sur la figure 4.12. Une masse est collée sur un disque de mousse, lui-même fixé à un plan. La surface supérieure de l'ensemble est excitée au moyen d'un marteau, et un accéléromètre permet d'enregistrer la réponse vibratoire. On peut alors comparer le rôle joué par la mousse à celui d'un ressort.

La fréquence de résonance d'un système masse-ressort 1D est donnée par l'expression

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad (4.1)$$

où  $m$  est la masse de l'objet attaché au niveau de l'extrémité mobile du ressort, et  $\kappa$  la constante de raideur du ressort. Celle-ci relie l'allongement  $l - l_{\text{vide}}$  du ressort à la force  $F$  exercée sur le système, selon l'équation

$$F = \kappa(l - l_{\text{vide}}), \quad (4.2)$$

avec  $l_{\text{vide}}$  la longueur à vide du ressort. Cette expression peut également s'écrire en fonction de la

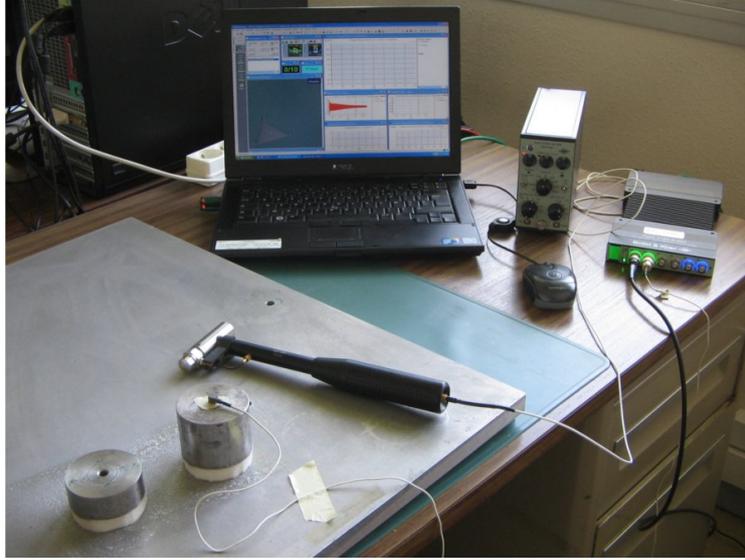


FIGURE 4.12 – Dispositif expérimental utilisé pour estimer le module d'Young  $E_{r,1}$  de la plaque de polyéthylène dans son épaisseur : plots masse-mousse, accéléromètre, marteau avec capteur de force, système d'acquisition et d'analyse FFT, amplificateur de charge accélérométrique, ordinateur.

déformation  $\varepsilon$

$$F = \kappa \varepsilon l_{\text{vide}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{l - l_{\text{vide}}}{l_{\text{vide}}}. \quad (4.3)$$

Par ailleurs, on rappelle que la loi de Hooke (cf. équation 2.13) relie les contraintes  $\sigma$  exercées dans un matériau élastique aux déformations  $\varepsilon$  qu'il subit, par l'intermédiaire de la matrice de rigidité. On considère ici que les déformations de la mousse dans le plan de la table sont négligeables. En effet, l'excitation a lieu selon la direction verticale. De plus, la mousse est collée à la table et à la masse, ce qui entraîne des déformations horizontales nulles au niveau de ces surfaces, et comme son épaisseur est relativement faible, on peut raisonnablement supposer une faible amplitude des déformations dans les plans horizontaux à l'intérieur de la mousse. La loi de Hooke devient alors

$$\sigma_1 \approx E^* \varepsilon_1, \quad (4.4)$$

où l'indice 1 désigne des grandeurs concernant la direction verticale, et où  $E^*$  est une constante élastique de la matrice de rigidité, définie dans le cas d'un matériau orthotrope par

$$E^* = \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}} E_1, \quad (4.5)$$

les indices 2 et 3 renvoyant ici aux directions constituant le plan horizontal. Ne pouvant disposer d'aucune information sur les valeurs des coefficients de Poisson dans les différentes directions, on considère en première approximation que le module d'Young dans la direction verticale  $E_1$  se situe autour de la grandeur mesurée  $E^*$ , et l'on tiendra compte par la suite d'une certaine dispersion autour de cette valeur.

La contrainte  $\sigma_1$  qui s'exerce sur la mousse correspond à la force  $F$  rapportée à la surface  $S$  sur laquelle celle-ci s'applique. On obtient donc

$$\frac{F}{S} = \sigma_1 \approx E^* \varepsilon_1. \quad (4.6)$$

Par analogie avec le système masse-ressort, on peut estimer que la fréquence de résonance de l'ensemble masse-mousse correspond à

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E^* S}{m l_{\text{vide}}}}. \quad (4.7)$$

Dans le cas de la figure 4.12, la grandeur évaluée par cette méthode correspond au module d'Young dans l'épaisseur de la plaque, soit celui noté  $E_{r,1}$  dans l'étude de la configuration « PE/PMP » (l'indice 1 désignant ici le matériau constituant la couche intérieure, c'est-à-dire le polyéthylène). La fréquence de résonance de deux systèmes de masses  $m$  différentes est mesurée. Les résultats obtenus sont rassemblés dans la table 4.2. En moyenne, la grandeur  $E^*$  mesurée vaut 1.84 MPa, et l'on considérera donc que le module d'Young dans l'épaisseur de la plaque de mousse de polyéthylène  $E_{r,1}$  est proche de 1.8 MPa, ce qui représente un écart important avec la valeur dont nous disposons (1.2 MPa).

Grandeurs		Mesure 1	Mesure 2
$m$	(g)	999.1	480
$l_{\text{vide}}$	(mm)	13.5	13.5
$S$	(cm <sup>2</sup> )	28.27	28.27
$f$	(Hz)	102	138
$E^*$	(MPa)	1.96	1.72

TABLE 4.2 – Caractéristiques des systèmes masse-mousse testés et résultats obtenus.

Ces mesures reposent sur l'hypothèse de très faibles déformations dans le plan horizontal, on ne peut donc pas l'utiliser pour vérifier le module d'Young de la mousse dans le plan de la plaque, c'est-à-dire avec les notations précédentes  $E_{\theta,1} = E_{z,1}$ . En effet, dans ce cas, la raideur du matériau dans l'une des directions du plan horizontal ( $E_{r,1}$ ) serait inférieure à sa raideur dans les deux autres directions ( $E_{\theta,1}$  et  $E_{z,1}$ ), l'hypothèse de déformations négligeables dans le plan serait alors invalide. On conservera donc la valeur donnée de 14 MPa pour  $E_{\theta,1}$  et  $E_{z,1}$ .

De nouvelles simulations effectuées avec des modules d'Young  $E_{r,1}$  situés autour de 1.8 MPa montrent qu'avec ces caractéristiques le revêtement « PE/PMP » ne permet d'obtenir une réduction de la diffraction à aucune fréquence. Il ne provoque pas non plus d'augmentation significative de celle-ci à une fréquence particulière. L'étude expérimentale de la diffraction d'une onde acoustique par un cylindre recouvert de ce revêtement ne présente donc pas d'intérêt ici. Nous pouvons cependant nous intéresser à la réponse vibratoire du revêtement lors d'une excitation mécanique, et comparer les résultats obtenus expérimentalement et numériquement, en vue de valider le code vibro-acoustique développé et utilisé dans le cadre de cette thèse.

## 4.4 Mesures vibratoires en réponse à une excitation mécanique

### 4.4.1 Description du dispositif

Une bande de mousse de polyéthylène de 20 cm de hauteur est collée sur le cylindre rigide présenté dans le paragraphe 4.1.2. Deux films de 0.5 mm d'épaisseur de PMP sont ensuite collés sur la mousse. Vingt points, espacés de manière régulière, sont repérés à la surface du revêtement, à mi-hauteur de celui-ci (voir figure 4.13). Un accéléromètre est placé au point 11, et une force est appliquée au marteau au point 10 ou au point 5, soit à  $17^\circ$  ou  $103^\circ$  du point de mesure.



FIGURE 4.13 – Excitation au marteau d'un revêtement de type « PE/PMP » collé sur un cylindre rigide, et mesure de l'accélération en un point situé à environ  $17^\circ$  du point d'application de la force.

### 4.4.2 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques

Le logiciel d'analyse FFT employé, Pulse Reflex de Brüel & Kjær, fournit une fonction de transfert  $|H|$  en dB correspondant à l'accélération sur la force. Ces résultats sont donnés sur la figure 4.14. Pour une excitation au point 5, c'est-à-dire loin du point de mesure, les niveaux de  $|H|$  sont moins élevés que lorsque la force est appliquée à côté de l'accéléromètre (au point 10), en raison de l'amortissement du matériau. On note également une croissance de la fonction de transfert avec la fréquence pour une excitation au point 10, ce qui n'est pas le cas pour une excitation au point 5. Il y a alors 3 pics d'anti-résonance, vers 500, 1600 et 3000 Hz.

Des simulations numériques ont été effectuées avec le modèle vibro-acoustique présenté dans le paragraphe 2.2.1 dans des configurations similaires à celle-ci. Les caractéristiques utilisées sont celles figurant dans la table 4.1, à l'exception du module d'Young du PE dans la direction radiale,  $E_{r,1}$ , pour lequel les valeurs de 1.7, 1.8 et 1.9 MPa sont employées. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.15. Comme dans le cas expérimental, on observe dans ces trois cas numériques des valeurs plus élevées lorsque l'excitation se fait au point le plus proche de l'accéléromètre. On note alors la même tendance d'augmentation de  $|H|$  avec la fréquence. Dans le cas où la force est appliquée au point 5, on retrouve 2 pics négatifs pour  $E_{r,1} = 1.7$  et 1.8 MPa. Dans le premier cas, ils se situent vers 1600 et 2900 Hz, soit à des fréquences proches des fréquences obtenues expérimentalement. Dans le deuxième cas, ces pics correspondent à des fréquences légèrement inférieures. Pour  $E_{r,1} = 1.9$  MPa, ces zones de fréquence ne correspondent plus à de réels pics, même si l'on remarque encore la

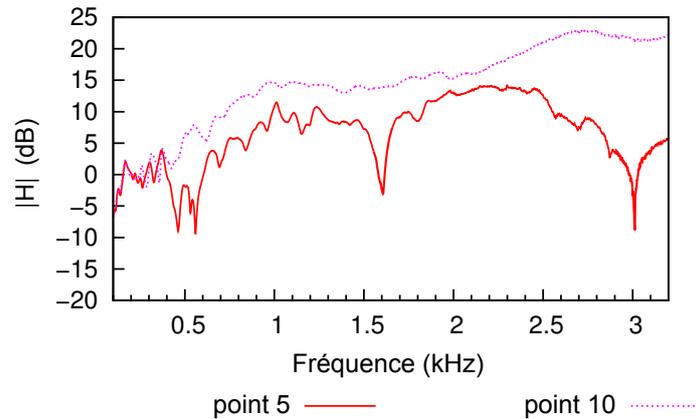


FIGURE 4.14 – Fonctions de transfert accélération/force (en dB) obtenue expérimentalement.

présence d'un phénomène particulier. Enfin, on remarque que le changement de facteur de perte de la couche extérieure ne modifie pas l'allure des courbes. Seule la profondeur des pics dépend de ces valeurs.

L'allure générale de ces courbes numériques est tout à fait comparable à celle des courbes obtenues expérimentalement, notamment pour  $E_{r,1} = 1.7$  MPa, c'est-à-dire pour une valeur de module d'Young du PE dans la direction radiale proche de celle réévaluée par la méthode présentée ci-dessus. Les différences sont surtout visibles au niveau des basses fréquences (inférieures à 600 Hz). L'accord entre ces courbes nous permet de valider le modèle vibro-acoustique utilisé dans cette étude.

Nous avons vu dans ce chapitre que les revêtements multicouches élastiques, sélectionnés numériquement pour réduire la diffraction à certaines fréquences, peuvent être testés expérimentalement sur des cylindres de longueur finie. Les diffractions aux extrémités d'un cylindre de 1 m de long et 0.125 m de rayon (par exemple) ne modifient que faiblement l'intensité et la pression acoustiques au voisinage du cylindre et dans son plan médian, par comparaison avec le cas d'un cylindre infiniment long. Des configurations de revêtements réalisables en pratique ont été dégagées, et nous en avons choisi une faisant intervenir une couche de mousse de polyéthylène orthotrope et une couche de polyméthylpentène isotrope. La sensibilité du dispositif de réduction de la diffraction aux caractéristiques mécaniques des matériaux le composant a été soulignée. Or la réévaluation expérimentale du module d'Young dans la direction radiale de la mousse de polyéthylène a révélé un écart important avec les valeurs dont nous disposions, et qui avaient conduit au choix du PMP comme couche extérieure. Aucun phénomène d'atténuation ou d'augmentation de la diffraction n'étant plus à attendre avec ces caractéristiques de revêtement, nous nous sommes orientés vers un test d'analyse des vibrations de celui-ci lors d'une excitation mécanique. L'adéquation entre les résultats obtenus expérimentalement et numériquement valide le modèle vibro-acoustique développé dans cette thèse.

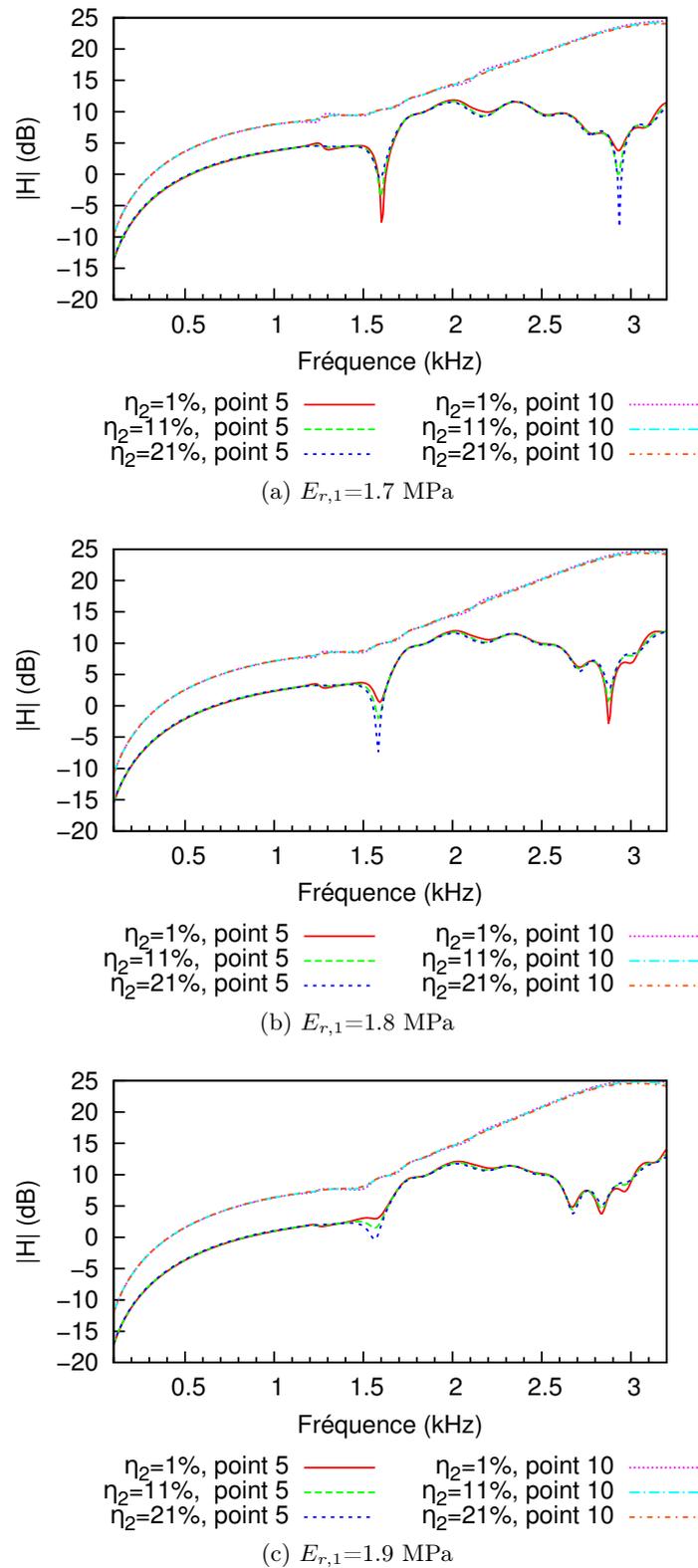


FIGURE 4.15 – Fonctions de transfert accélération/force (en dB) obtenues numériquement.



Deuxième partie

Milieu extérieur : eau



# Chapitre 5

## Réduction de la diffraction dans l'eau

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux possibilités de réduction de la diffraction au moyen de revêtements élastiques, lorsque le cylindre se situe dans l'eau. L'objectif poursuivi ici n'est pas l'invisibilité totale du cylindre, quelle que soit la direction d'observation. Nous cherchons à obtenir une réduction importante de la diffraction sur le plus grand angle possible, mais nous n'excluons pas l'éventuelle existence d'une zone d'ombre à l'arrière du cylindre.

Des configurations bicouches isotropes répondant à ces critères sont recherchées numériquement. Une étude paramétrique est effectuée autour d'une des solutions trouvées. Des revêtements composés de quatre couches élastiques sont ensuite testés dans une optique d'élargissement de la bande de fréquence de réduction de la diffraction offerte par le dispositif. Enfin, les résultats obtenus dans le cas de l'eau sont comparés à ceux obtenus pour l'air.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Des revêtements bicouches isotropes réalistes</b> . . . . .	<b>96</b>
5.1.1	Configuration étudiée . . . . .	96
5.1.2	Recherche de solutions . . . . .	96
5.1.3	Exemple de revêtement bicouche élastomère/acier . . . . .	97
<b>5.2</b>	<b>Étude paramétrique sur la couche intérieure</b> . . . . .	<b>98</b>
5.2.1	Influence du facteur de perte . . . . .	100
5.2.2	Influence du coefficient de Poisson . . . . .	100
5.2.3	Influence de l'épaisseur . . . . .	106
<b>5.3</b>	<b>Piste pour un revêtement large bande</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>5.4</b>	<b>Comparaison eau/air</b> . . . . .	<b>111</b>
5.4.1	Fonctions objectif $F_{\text{obj},1}$ et $F_{\text{obj},3}$ . . . . .	111
5.4.2	Milieux air et eau et nombres d'onde réduits $k_0 a \simeq 1$ et $k_0 a = 60$ . . . . .	111

---

## 5.1 Des revêtements bicouches isotropes réalistes

### 5.1.1 Configuration étudiée

Comme dans le chapitre 3, on considère un cylindre rigide infiniment long sur lequel est fixé un revêtement élastique bicouche. L'ensemble, situé ici dans de l'eau, est soumis à une onde plane sous incidence normale. Nous choisissons d'étudier le cas d'un cylindre de 4.4 m de rayon, et d'une fréquence d'excitation de 3255 Hz, ce qui correspond dans l'eau à un nombre d'onde réduit  $k_0 a$  à 60, ou à un rapport rayon sur longueur d'onde  $a/\lambda_0$  légèrement inférieur à 10 (cas représentatif des besoins en discrétion sous-marine). On cherche à déterminer s'il est possible de réduire de manière significative la diffraction de l'onde par cet obstacle en utilisant un revêtement bicouche composé de matériaux réalistes et d'une épaisseur maximale de l'ordre de 10 cm.

En pratique, il est peu probable que des dispositifs de détection entourent totalement l'objet à dissimuler. Il n'est donc pas nécessaire de se fixer un objectif aussi contraignant que l'annulation *omnidirectionnelle* de la diffraction. Il est naturellement impossible de prévoir les positions des systèmes de détection, mais on peut raisonnablement supposer que l'existence d'une zone d'ombre à l'arrière de l'objet n'est pas problématique. La fonction objectif utilisée dans ce chapitre n'est donc plus l'intensité diffractée sur la totalité d'une surface cylindrique entourant l'obstacle, comme c'était le cas dans le chapitre 3. On s'intéresse cette fois-ci à l'intensité diffractée sur un demi-cylindre situé en amont de l'obstacle. Si l'on considère que l'onde incidente se propage dans la direction  $\theta = 0^\circ$ , la portion de cylindre sur laquelle on calcule l'intensité diffractée est celle comprise entre  $\theta = 90^\circ$  et  $\theta = 270^\circ$ . La fonction objectif est alors définie, par unité de longueur dans la direction de l'axe du cylindre, comme étant le rapport

$$F_{\text{obj},3} = \frac{\sigma_{\text{diff, revêtement}}}{\sigma_{\text{diff, cyl. rigide}}}, \quad (5.1)$$

avec

$$\sigma_{\text{diff}} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\langle I_{\text{diff}} \rangle}{\langle I_{\text{inc}} \rangle} r \, d\theta. \quad (5.2)$$

En procédant ainsi, on se situe donc à mi-chemin entre les études visant à supprimer la rétrodiffusion, c'est-à-dire l'onde diffractée dans la direction d'où provient l'onde incidente (*backscattering* en anglais), et les travaux sur la furtivité totale (*cloaking*).

### 5.1.2 Recherche de solutions

Dans un premier temps, on procède par optimisation par algorithme génétique pour cibler les catégories de matériaux qui pourraient conduire à une réduction de la diffraction sur la surface de contrôle en amont du cylindre. Il s'avère que le recours à des matériaux orthotropes n'est pas nécessaire ici : on obtient des résultats intéressants en utilisant des revêtements bicouches *isotropes*.

De premiers résultats montrent les effets bénéfiques que l'on pourrait obtenir au moyen d'un revêtement composé d'une couche intérieure ayant des caractéristiques mécaniques proches de celles des mousses, et d'une couche extérieure de type composite ou céramique poreuse.

L'utilisation de céramique poreuse comme couche extérieure d'un revêtement destiné à être plongé dans l'eau ne paraissant pas des plus appropriées, des essais sont ensuite effectués avec une couche extérieure constituée d'*acier*, d'une épaisseur fixée à 2 mm. On trouve alors par optimisation que les caractéristiques mécaniques de la couche intérieure qui permettraient dans ce cas d'obtenir une atténuation de la diffraction sont proches de celles des *élastomères*.

De manière à compléter ces premiers résultats, des évaluations directes de la fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$  sont ensuite effectuées en faisant varier la masse volumique  $\rho_1$  et le module d'Young  $E_1$  de la couche intérieure sur toute la gamme de valeurs des matériaux élastomères. Ces calculs prennent un compte un facteur de perte  $\eta_1$  fixé à 10% et un coefficient de Poisson  $\nu_1$  de 0.48. Les résultats obtenus pour des couches intérieures de 33 mm, 68 mm et 138 mm sont présentés sur la figure 5.1. On voit qu'il existe de très nombreux couples  $(E_1, \rho_1)$  susceptibles de conduire à une réduction de l'intensité diffractée ( $F_{\text{obj},3} < 1$ ). On remarque que les zones correspondant aux réductions les plus élevées varient en fonction de l'épaisseur de la couche intérieure, et sont d'autant plus nombreuses que celle-ci est élevée. En faisant varier l'épaisseur de la couche intérieure avec un faible pas, on s'aperçoit que ces bandes de forte atténuation de la diffraction balayent toute la plage de variation des paramètres, plage fixée de manière à englober tous les élastomères. Les zones délimitées par des pointillés blancs sur la figure 5.1 correspondent aux différents types de matériaux existants dans cette catégorie (cf. Ashby (2000) et figure 3.1). En ajustant l'épaisseur de la couche intérieure du revêtement, on peut donc choisir différents couples  $(E_1, \rho_1)$  correspondant à des matériaux existants et conduisant à une réduction significative de la diffraction en amont de l'objet.

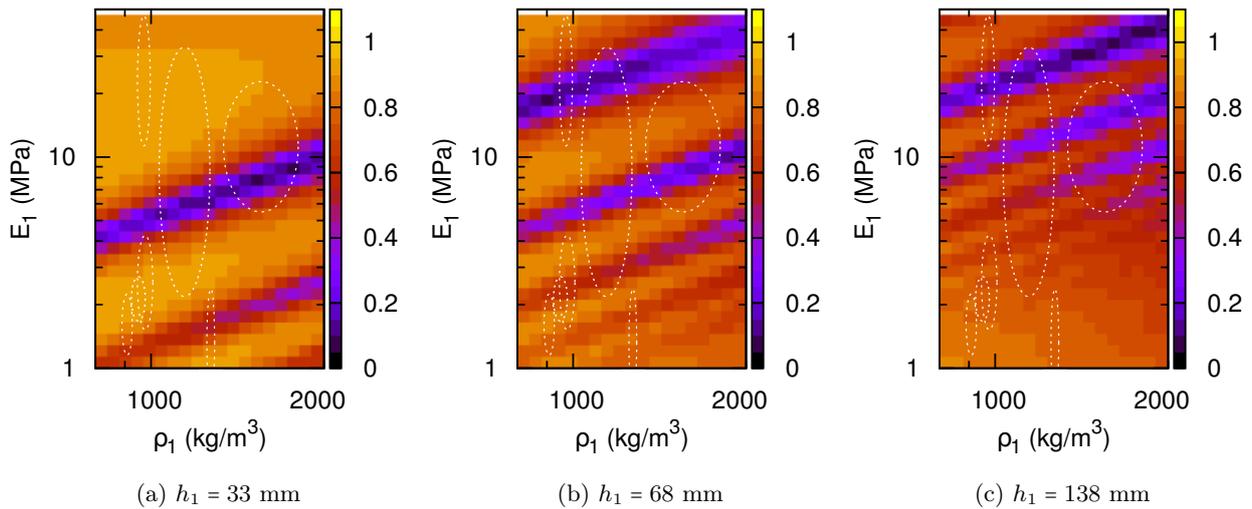


FIGURE 5.1 – Fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$  en fonction de la masse volumique  $\rho_1$ , du module d'Young  $E_1$  et de l'épaisseur  $h_1$  de la couche intérieure, pour un cylindre rigide de 4.4 m de rayon, une couche extérieure de 2 mm d'acier, et une fréquence d'excitation de 3255 Hz.

### 5.1.3 Exemple de revêtement bicouche élastomère/acier

Parmi les différentes possibilités mises en évidence ci-dessus, on choisit d'étudier le cas d'un revêtement bicouche composé d'une couche extérieure de 2 mm d'épaisseur, en acier, et d'une couche intérieure de 33 mm d'épaisseur, en matériau de type élastomère, de module d'Young  $E_1 = 7.31$  MPa et de masse volumique  $\rho_1 = 1425$  kg/m<sup>3</sup>. Les caractéristiques de cette configuration, que l'on appellera « SOGA\_eau », sont rassemblées dans la table 5.1. Une réduction de la diffraction d'environ 19 dB est obtenue en amont de l'objet grâce à ce revêtement lorsque l'onde plane incidente a une fréquence de 3255 Hz.

Caractéristiques générales		Grandeurs	élastomère	acier
milieu extérieur : eau		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1425	7820
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000	$E$ (MPa)	7.31	210.10 <sup>3</sup>
$c_0$ (m/s)	1500	$\nu$	0.48	0.3
rayon de l'obstacle		$\eta$	0.1	0.001
$a$ (m)	4.4	$h$ (mm)	33	2

TABLE 5.1 – Caractéristiques de la configuration élastomère/acier « SOGA\_eau ».

Cette forte atténuation est illustrée par les diagrammes de directivité<sup>1</sup> obtenus en l'absence et en présence du revêtement, et représentés sur la figure 5.2. On remarque que la diffraction est en effet considérablement réduite du côté de l'onde incidente, entre 90° et 270°, conformément à ce que laissait supposer la faible valeur de la fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$ . Elle l'est également, dans une moindre mesure mais toujours de manière significative, sur les côtés, entre 30° et 90°, et, par symétrie, entre 270° et 330°. La zone d'ombre à l'arrière du cylindre est en revanche un peu plus marquée dans le cas avec revêtement que dans le cas sans revêtement.

Le gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$ , calculé sur la surface de contrôle se situant en amont de l'obstacle, est donné en fonction de la fréquence sur la figure 5.3. On remarque des pics de gain négatifs, se répétant tous les 3300 Hz, avec une amplitude de moins en moins importante. Cette périodicité indique que l'on est en présence d'un phénomène résonnant. On note également que le gain en diffraction minimal, -21 dB, est atteint avec le revêtement « SOGA\_eau » pour une onde plane incidente de fréquence 3300 Hz. La bande de fréquence à -6 dB autour de ce pic est d'environ 400 Hz. (Rappelons qu'il s'agit d'un gain de -6 dB *en amont* du cylindre uniquement.)

## 5.2 Étude paramétrique sur la couche intérieure

Dans la mesure où l'on s'intéresse ici à des matériaux isotropes, le nombre de paramètres intervenant pour chaque couche est de 5 (et non pas de 10 comme dans le cas de matériaux orthotropes). Il est donc plus facile d'étudier l'influence de ces différents paramètres, à savoir le module d'Young  $E$ , la masse volumique  $\rho$ , le facteur de perte  $\eta$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et l'épaisseur de la couche  $h$ .

Pour cela, on part de la configuration « SOGA\_eau », que l'on utilise comme référence, et on fait successivement varier différents paramètres de la couche intérieure. Tous les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus en considérant une couche extérieure de 2 mm d'acier. Le module d'Young  $E_1$  et la masse volumique  $\rho_1$  de la couche intérieure peuvent prendre des valeurs comprises entre respectivement 1 MPa et 5 GPa, et 34 kg/m<sup>3</sup> et 2000 kg/m<sup>3</sup>. Ces plages de variation comprennent les caractéristiques de différentes familles de matériaux existants, moins denses et moins rigides que l'acier (mousses, élastomères, polymères, etc.). On s'intéresse à la façon dont une modification du facteur de perte  $\eta_1$ , du coefficient de Poisson  $\nu_1$  ou de l'épaisseur  $h_1$  de la couche intérieure, affecte la répartition des zones  $(E_1, \rho_1)$  intéressantes d'un point de vue réduction de la diffraction en amont de l'obstacle.

1. La grandeur adimensionnée  $|P(\theta)|$  tracée sur ces diagrammes est celle utilisée par Romanov et Tolokonnikov (2011), et dont la définition est donnée par l'équation 2.70.

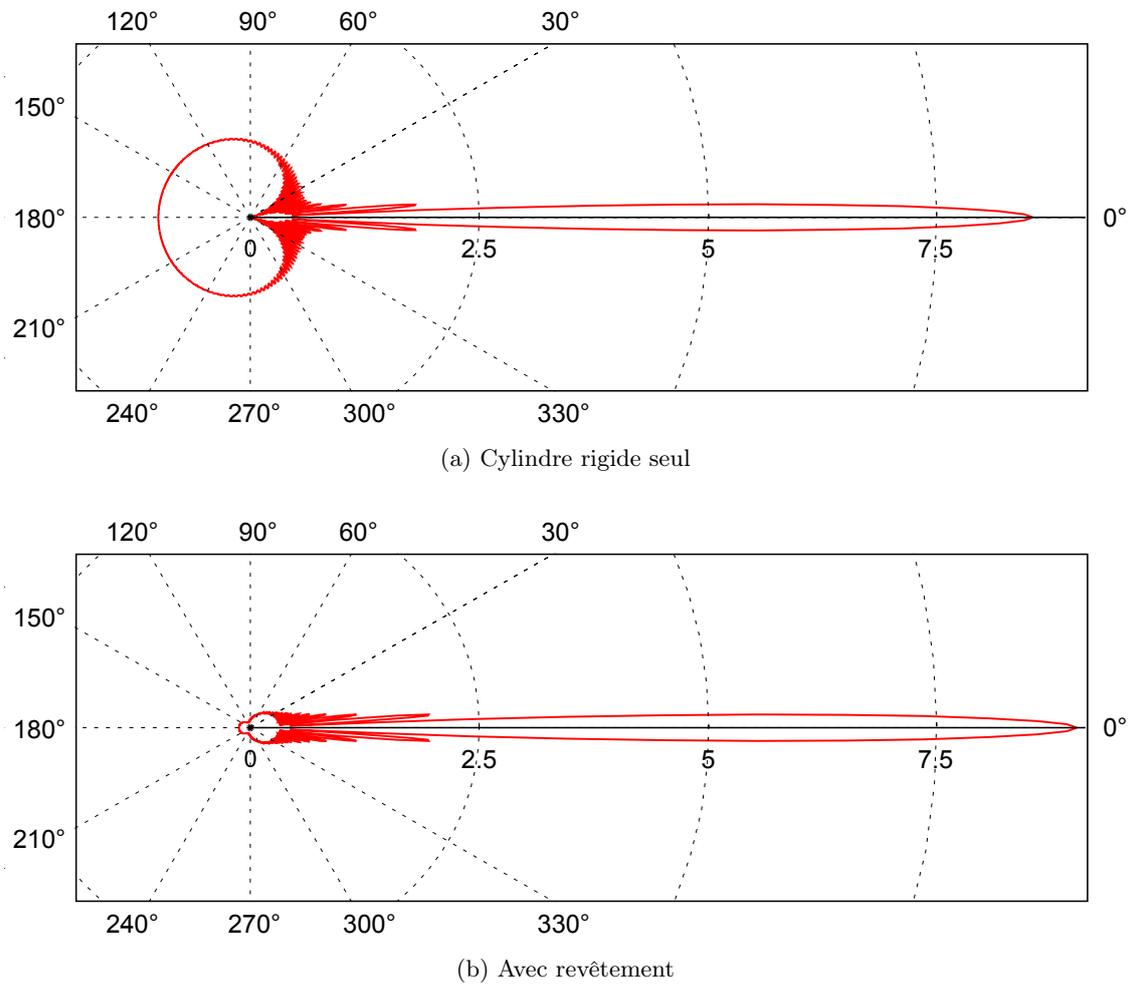


FIGURE 5.2 – Diagrammes de directivité obtenus pour  $k_0a = 60$ , sans revêtement et avec le revêtement bicouche isotrope élastomère/acier « SOGA\_eau ». La grandeur tracée,  $|P(\theta)|$ , est sans dimension.

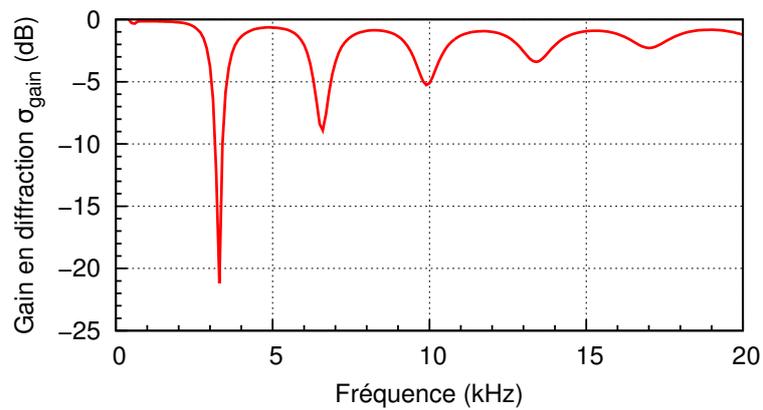


FIGURE 5.3 – Variations du gain en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  en fonction de la fréquence d'excitation pour la configuration « SOGA\_eau ».

### 5.2.1 Influence du facteur de perte

Dans un premier temps, on fait varier le facteur de perte  $\eta_1$  de la couche intérieure, celle-ci ayant un coefficient de Poisson  $\nu_1$  fixé à 0.48 et une épaisseur de 33 mm. On note sur la figure 5.4 que, pour les différentes valeurs de facteur de perte  $\eta_1$  testées, les configurations permettant d'obtenir une réduction de la diffraction sont représentées par trois lignes de couples  $(E_1, \rho_1)$ . Ces droites conservent la même pente et la même ordonnée à l'origine, quel que soit le facteur de perte. Celui-ci a une nette influence sur le niveau d'atténuation obtenu. Le minimum de fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$  atteint se situe autour de 0.6 pour  $\eta_1 = 1\%$ , diminue aux alentours de 0.2 pour  $\eta_1 = 5\%$ , passe sous 0.1 pour  $\eta_1 = 10\%$  et  $15\%$ , puis augmente de nouveau progressivement jusqu'à 0.2 pour  $\eta_1 = 25\%$ . Par ailleurs, on remarque que les zones  $(E_1, \rho_1)$  intéressantes deviennent de plus en plus diffuses à mesure que le facteur de perte  $\eta_1$  augmente, notamment autour de  $1000 \text{ kg/m}^3$  et  $100 \text{ MPa}$ . Cela peut être intéressant d'un point de vue pratique, la précision nécessaire sur les caractéristiques mécaniques de la couche intérieure étant alors moins élevée que pour de faibles facteurs de perte.

En conclusion, ce paramètre n'a pas d'influence déterminante sur les combinaisons  $(E_1, \rho_1)$  à utiliser pour observer un effet d'atténuation de la diffraction, mais il joue fortement sur l'intensité du phénomène, d'une manière non linéaire.

### 5.2.2 Influence du coefficient de Poisson

On voit sur la figure 5.5 que l'effet du coefficient de Poisson de la couche intérieure  $\nu_1$  ne concerne pas les niveaux de réduction atteints, mais les combinaisons  $(E_1, \rho_1)$  pour lesquelles le phénomène se produit. On remarque par ailleurs que les résultats obtenus pour  $\nu_1 = 0.1, 0.2,$  et  $0.3$  sont comparables, et qu'au-delà, les variations engendrées par un changement du coefficient de Poisson  $\nu_1$  sont importantes. On dénombre 6 droites intéressantes pour les coefficients de Poisson les plus faibles, 5 pour  $\nu_1 = 0.4$ , 3 pour  $\nu_1 = 0.48$  et seulement 2 pour  $\nu_1 = 0.495$ .

Les 6 lignes présentes pour les valeurs de  $\nu_1$  les plus faibles semblent se déplacer vers des niveaux de module d'Young inférieurs lorsque le coefficient de Poisson augmente, jusqu'à sortir de la plage de variation considérée. Les caractéristiques des configurations correspondant aux maxima d'atténuation atteints avec  $\nu_1 = 0.3, 0.48$  et  $0.495$ , sont données dans la table 5.2. On constate qu'ils sont tous obtenus pour la même masse volumique  $\rho_1 = 1424 \text{ kg/m}^3$ , et que le module d'Young  $E_1$  de ces configurations diminue fortement et de manière non linéaire lorsque  $\nu_1$  augmente. Les gains en diffraction correspondants, tracés sur la figure 5.6, montrent qu'il s'agit bien, dans ces 3 cas, du même phénomène de résonance.

Pour conserver l'effet de résonance à une fréquence donnée, il faut donc diminuer  $E_1$  si l'on souhaite augmenter  $\nu_1$  au-delà de 0.3. Et dans le cas d'une mise en œuvre pratique, la sensibilité très forte de la fonction objectif aux coefficients de Poisson élevés signifie qu'une bonne précision sur les caractéristiques des matériaux utilisés est nécessaire.

Pour  $\nu_1 = 0.48$  et  $\nu_1 = 0.495$ , on remarque l'existence d'une zone  $(E_1, \rho_1)$  de réduction de la diffraction ne correspondant pas au phénomène de résonance que l'on vient de décrire. Cette zone commence à apparaître pour  $\nu_1 = 0.4$  et devient de plus en plus importante à mesure que le coefficient de Poisson augmente. L'atténuation de la diffraction y est moins prononcée que sur les lignes précédemment évoquées.

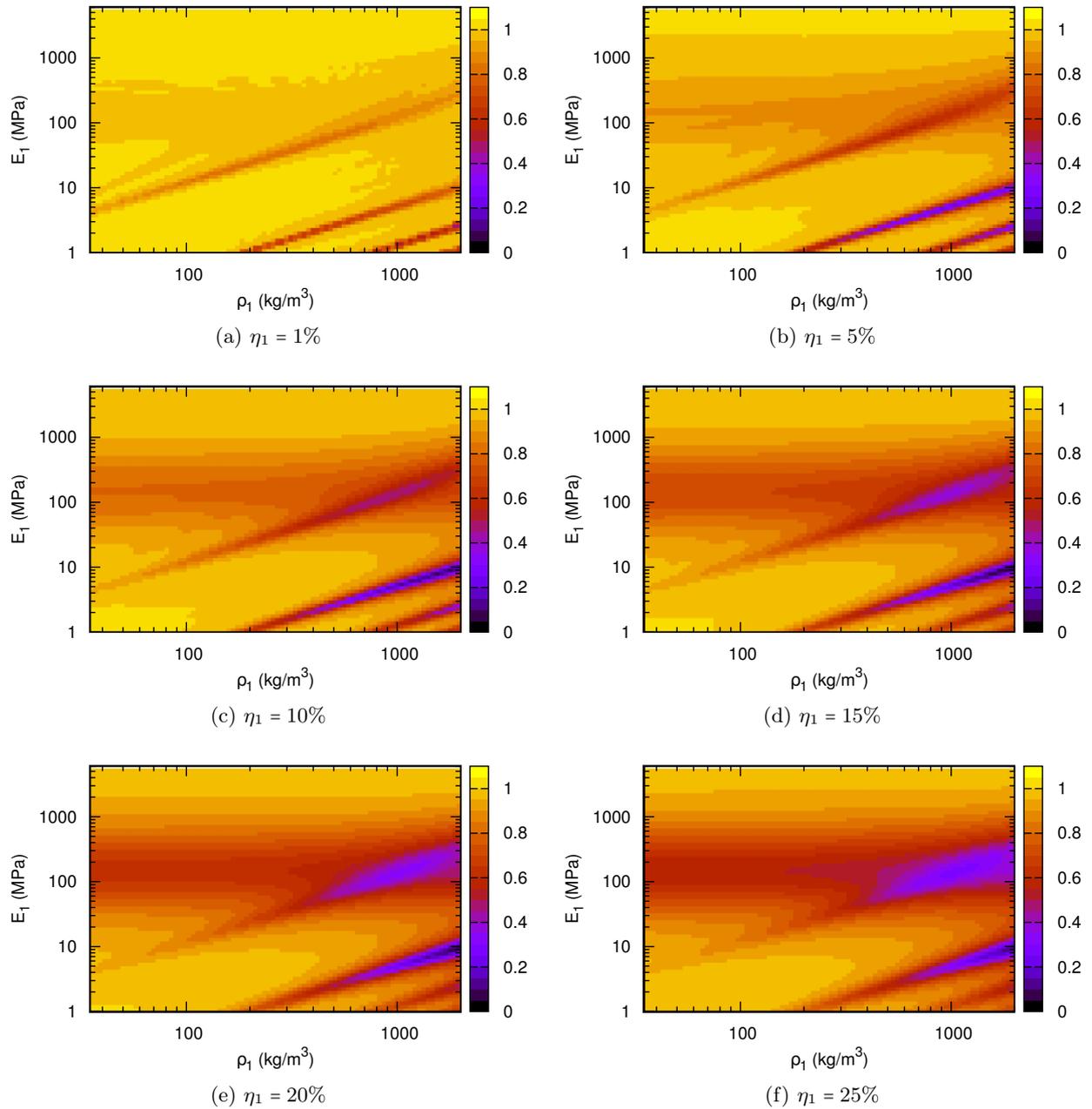


FIGURE 5.4 – Influence du facteur de perte de la couche intérieure  $\eta_1$  sur la fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$ , dans le cas d'une couche extérieure de 2 mm d'acier, d'une couche intérieure de coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0.48$  et d'épaisseur  $h_1 = 33$  mm, pour une onde plane incidente de nombre d'onde réduit  $k_0 a = 60$ .

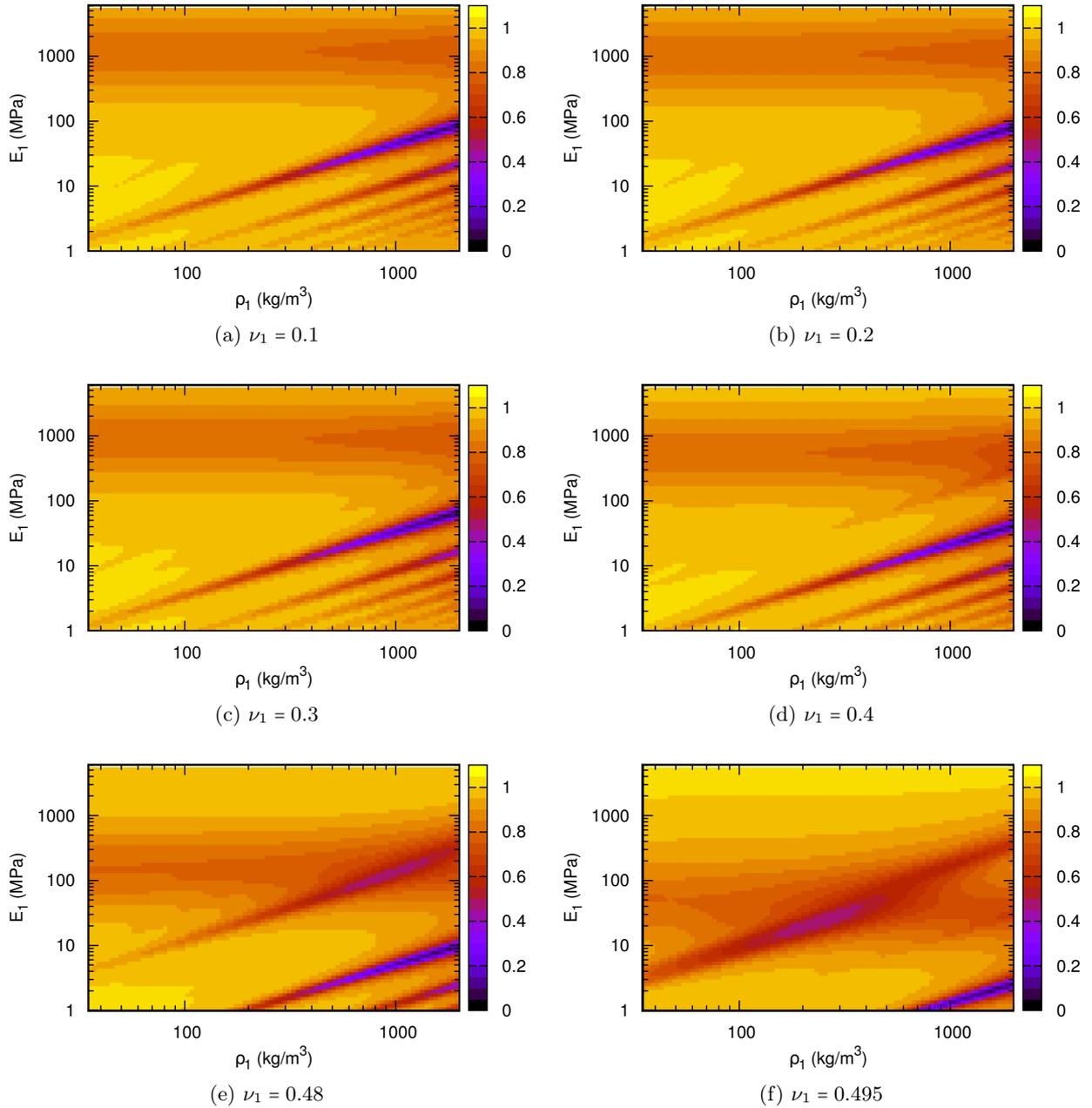


FIGURE 5.5 – Influence du coefficient de Poisson de la couche intérieure  $\nu_1$  sur la fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$ , dans le cas d'une couche extérieure de 2 mm d'acier, d'une couche intérieure de facteur de perte  $\eta_1 = 10\%$  et d'épaisseur  $h_1 = 33$  mm, pour une onde plane incidente de nombre d'onde réduit  $k_0 a = 60$ .

Caractéristiques générales			Grandeurs	couches intérieures			acier
milieu extérieur : eau			$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1424	1425	1424	7820
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000		$E$ (MPa)	47.21	7.31	1.86	210.10 <sup>3</sup>
$c_0$ (m/s)	1500		$\nu$	0.3	0.48	0.495	0.3
rayon de l'obstacle			$\eta$	0.1	0.1	0.1	0.001
$a$ (m)	4.4		$h$ (mm)	33	33	33	2

TABLE 5.2 – Caractéristiques des configurations correspondant aux maxima de réduction de la diffraction obtenus pour  $\nu_1 = 0.3, 0.48$  et  $0.495$ .

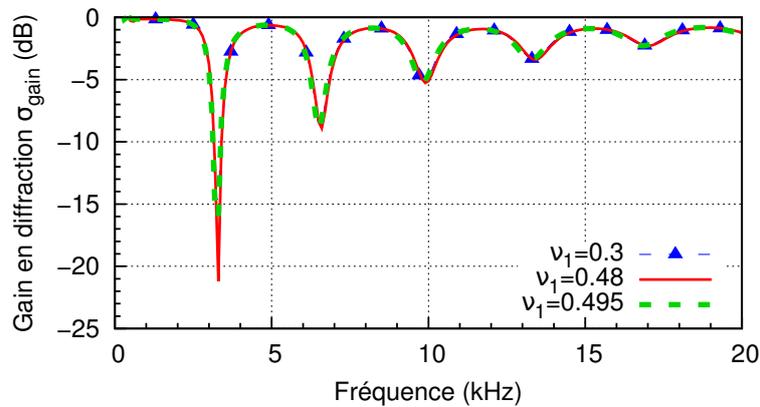


FIGURE 5.6 – Variations du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour les configurations correspondant aux maxima de diffraction, pour  $\nu_1 = 0.3, 0.48$  et  $0.495$  (voir table 5.2).

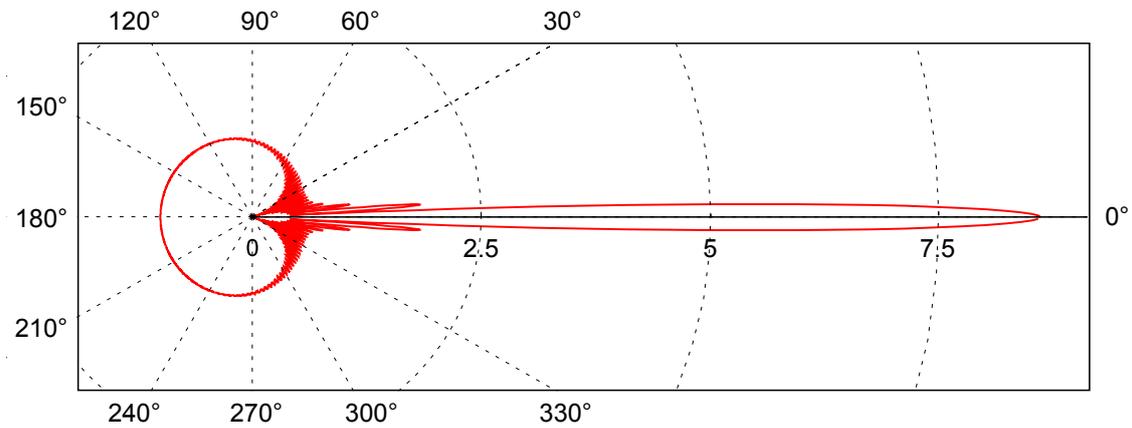
On peut observer sur la figure 5.8 le gain en diffraction obtenu pour deux combinaisons  $(E_1, \rho_1)$  correspondant à cette région, pour  $\nu_1 = 0.48$  et pour  $\nu_1 = 0.495$ . Les caractéristiques des configurations correspondantes sont données dans la table 5.3. On ne retrouve pas la périodicité observée sur la figure 5.6, mais l'on constate cependant, notamment pour  $\nu_1 = 0.48$ , la présence de plusieurs pics d'atténuation de la diffraction. Un gain de -3 dB, correspondant à la légère atténuation constatée sur la figure 5.5e, est observable vers 3300 Hz, et l'on note également la présence de deux autres pics : l'un, plus large et plus profond (environ -12 dB), autour de 18500 Hz, et l'autre, plus faible, vers 34000 Hz.

Les diagrammes de directivité obtenus en l'absence et en présence de ce revêtement, à 3300 Hz et 18500 Hz, sont représentés sur les figures 5.7 et 5.9. À 3300 Hz, on remarque une annulation de la diffraction en champ lointain à 90° et 270°, c'est-à-dire sur les côtés de l'obstacle. La diffraction est faiblement réduite à l'amont, et augmente à l'aval. À 18500 Hz, la réduction de la diffraction est importante dans toutes les directions, sauf à l'arrière du cylindre, où la zone d'ombre est une fois de plus très marquée.

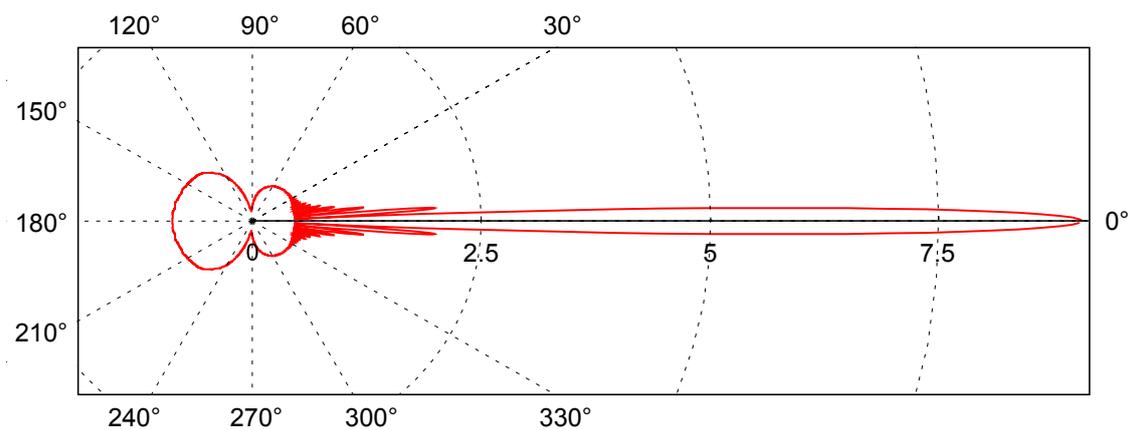
L'influence du coefficient de Poisson de la couche intérieure  $\nu_1$  est donc multiple. D'une part, ce paramètre joue sur les valeurs de caractéristiques mécaniques  $(E_1, \rho_1)$  à imposer pour se trouver en présence du phénomène résonnant conduisant à l'atténuation de diffraction maximale. D'autre part, une forte augmentation de sa valeur provoque l'apparition d'une deuxième zone de couples  $(E_1, \rho_1)$  correspondant à un autre phénomène résonnant, ici d'amplitude moins élevée.

Caractéristiques générales		Grandeurs		couches int.	acier	
milieu extérieur : eau		$\rho$	(kg/m <sup>3</sup> )	880	240	7820
$\rho_0$	(kg/m <sup>3</sup> ) 1000	$E$	(MPa)	112.7	25.35	210.10 <sup>3</sup>
$c_0$	(m/s) 1500	$\nu$		0.48	0.495	0.3
rayon de l'obstacle		$\eta$		0.1	0.1	0.001
$a$	(m) 4.4	$h$	(mm)	33	33	2

TABLE 5.3 – Caractéristiques des configurations correspondant au deuxième type de réduction de la diffraction, pour  $\nu_1 = 0.48$  et  $\nu_1 = 0.495$ .



(a) Cylindre rigide seul



(b) Avec revêtement

FIGURE 5.7 – Diagrammes de directivité obtenus à 3300 Hz, sans revêtement et avec un revêtement de caractéristiques données dans la table 5.3, pour  $\nu_1 = 0.48$ .

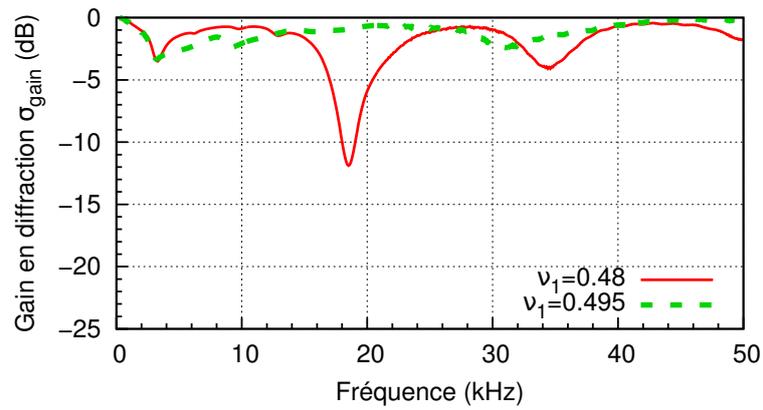


FIGURE 5.8 – Variations du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour deux configurations correspondant au deuxième type de réduction de la diffraction (caractéristiques dans la table 5.3).

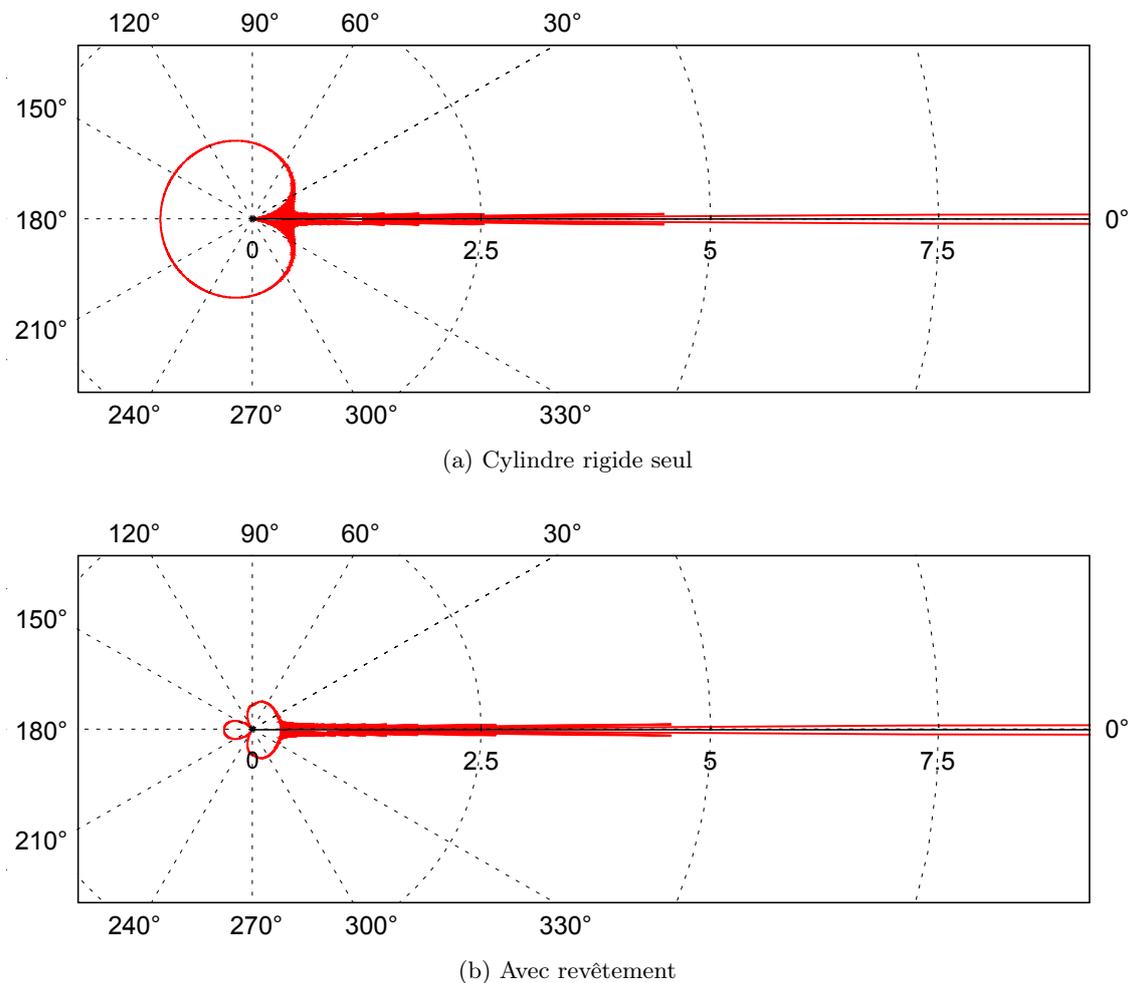


FIGURE 5.9 – Diagrammes de directivité obtenus à 18500 Hz, sans revêtement et avec un revêtement de caractéristiques données dans la table 5.3, pour  $\nu_1 = 0.48$ .

### 5.2.3 Influence de l'épaisseur

Comme on peut le voir sur la figure 5.10, l'influence de l'épaisseur de la couche intérieure  $h_1$  se remarque essentiellement au niveau du premier phénomène résonnant décrit dans le paragraphe précédent. Dans la zone de masses volumiques  $\rho_1$  les plus élevées et de modules d'Young  $E_1$  les plus faibles, le nombre de lignes correspondant à de fortes réductions de la diffraction augmente à mesure que l'épaisseur  $h_1$  augmente. Pour une épaisseur de 16.5 mm, le meilleur résultat est observé pour une couche intérieure de masse volumique  $\rho_1 = 1900 \text{ kg/m}^3$  et de module d'Young  $E_1 = 2.11 \text{ MPa}$ . Ce même matériau, utilisé avec une épaisseur double, se situe sur la deuxième bande d'atténuation de la diffraction, où la réduction atteinte est moins importante que sur la première. Si l'on triple (ou quadruple) son épaisseur initiale, on passe sur la troisième (ou quatrième) ligne de faible diffraction.

En parallèle, on constate sur la figure 5.11 que lorsque l'on double l'épaisseur de ce matériau, on passe de la fréquence fondamentale à la première harmonique du phénomène résonnant, puis à la seconde harmonique si on triple l'épaisseur, et à la troisième si on la quadruple. Ceci est cohérent avec les observations faites sur la figure 5.10, puisque les pics correspondant à des harmoniques d'ordre plus élevé ont des amplitudes inférieures, et correspondent donc à des zones où la fonction objectif prend des valeurs un peu plus élevées.

Il apparaît donc clairement que la fréquence de résonance du système est ici inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche intérieure.

Enfin, on remarque que pour des épaisseurs élevées, la fréquence fondamentale est basse, les harmoniques sont rapprochées, et les bandes intéressantes dans le diagramme  $(E_1, \rho_1)$  aussi. Les valeurs de la fonction objectif restent donc relativement basses entre deux zones de couples  $(E_1, \rho_1)$  correspondant à des pics de résonance, ce qui peut s'avérer intéressant en pratique, notamment en cas d'incertitude sur les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés.

Caractéristiques générales			Grandeurs	intérieur	acier
milieu extérieur : eau			$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1900	7820
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000		$E$ (MPa)	2.11	$210 \cdot 10^3$
$c_0$ (m/s)	1500		$\nu$	0.48	0.3
rayon de l'obstacle			$\eta$	0.1	0.001
$a$ (m)	4.4		$h$ (mm)	$x \cdot 16.5$	2

TABLE 5.4 – Caractéristiques de la configuration sur laquelle est testée l'influence de l'épaisseur de la couche intérieure.

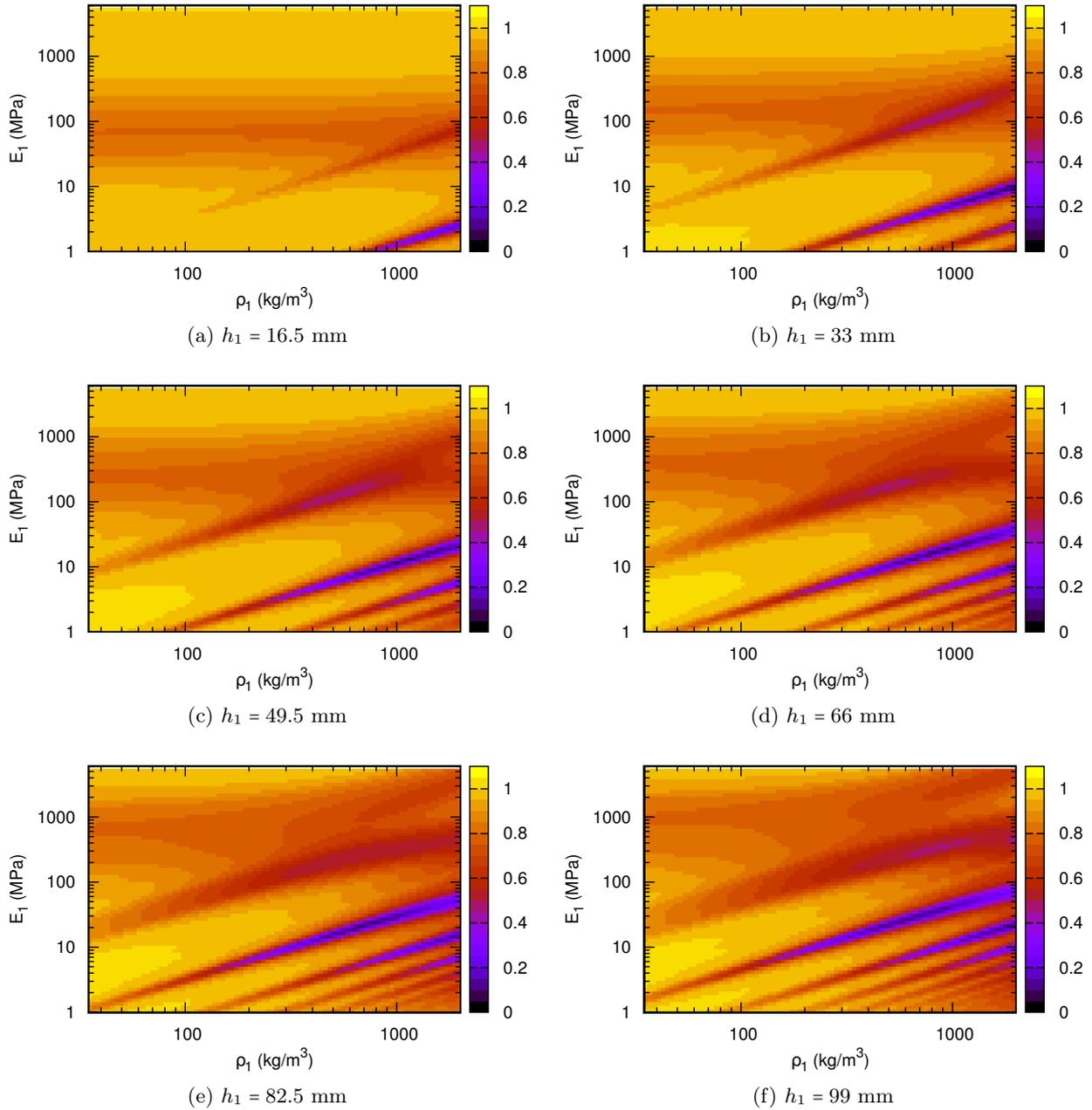


FIGURE 5.10 – Influence de l'épaisseur de la couche intérieure  $h_1$  sur la fonction objectif  $F_{\text{obj},3}$ , dans le cas d'une couche extérieure de 2 mm d'acier, d'une couche intérieure de coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0.48$  et de facteur de perte  $\eta_1 = 10\%$ , pour une onde plane incidente de nombre d'onde réduit  $k_0 a = 60$ .

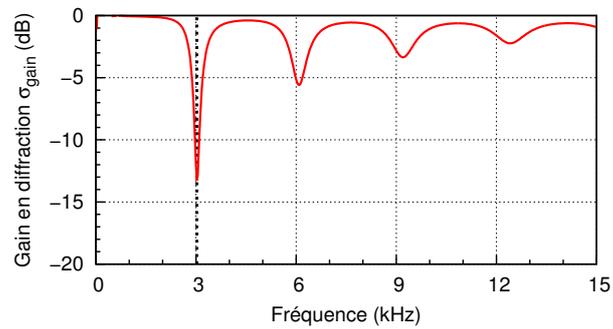
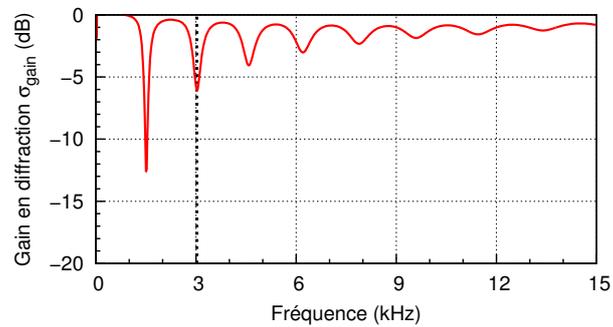
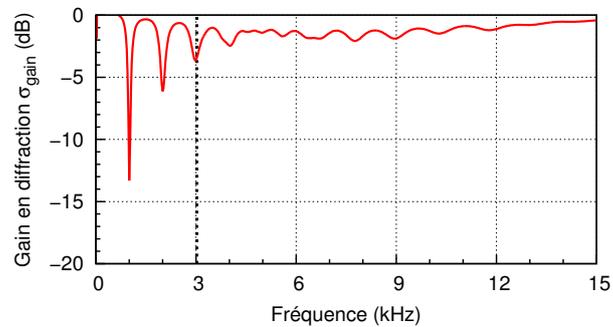
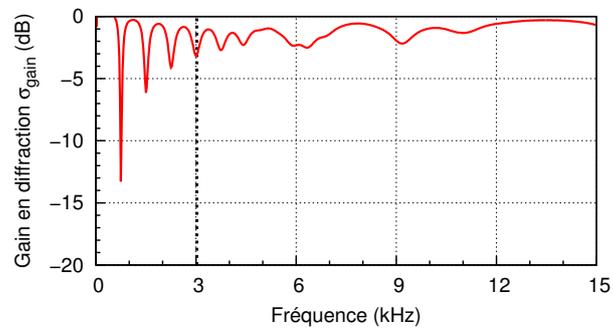
(a)  $h_1 = 16.5$  mm(b)  $h_1 = 33$  mm(c)  $h_1 = 49.5$  mm(d)  $h_1 = 66$  mm

FIGURE 5.11 – Variations du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour quatre épaisseurs de couche intérieure (caractéristiques dans la table 5.4).

## 5.3 Piste pour un revêtement large bande

Les pics de réduction de la diffraction mis en évidence dans le paragraphe précédent correspondent à d'étroites bandes de fréquence. En combinant optimisation par algorithme génétique<sup>2</sup> et étude paramétrique, on cherche à élargir l'intervalle de fréquence sur lequel le revêtement a un effet positif, dans le cas où celui-ci est constitué d'une superposition de deux bicouches de type élastomère/acier.

Les revêtements considérés comprennent donc, en partant de la surface du cylindre,

- une couche d'un matériau de type élastomère, noté A,
- une couche d'acier de 2 mm d'épaisseur,
- une couche d'un matériau de type élastomère, noté B,
- une couche d'acier de 2 mm d'épaisseur.

Comme dans le paragraphe 5.1.2, les coefficients de Poisson  $\nu_1$  et  $\nu_3$  des couches correspondant aux élastomères sont fixés à 0.48, et leurs facteurs de perte  $\eta_1$  et  $\eta_3$  à 10%. On choisit d'imposer une épaisseur totale de revêtement de 24 mm et de faire varier les épaisseurs relatives des matériaux A et B, et leurs modules d'Young et masses volumiques.

Pour un matériau A de module d'Young  $E_1 = 3$  MPa et masse volumique  $\rho_1 = 950$  kg/m<sup>3</sup>, et un matériau B de module d'Young  $E_3 = 10$  MPa et masse volumique  $\rho_3 = 1450$  kg/m<sup>3</sup>, différentes configurations permettant une atténuation large bande de la diffraction sont envisageables<sup>3</sup>. Les gains les plus intéressants apparaissent lorsque le bicouche supérieur (plus dense et plus rigide) est moins épais que celui situé contre le cylindre.

Sur la figure 5.12 sont donnés les gains en diffraction  $\sigma_{\text{gain}}$  obtenus pour trois épaisseurs relatives de matériaux A et B. On remarque dans chaque cas un premier pic de gain négatif à 4700 Hz, et un deuxième, voire un troisième, à des fréquences variables. Il semble que l'augmentation de l'épaisseur du matériau A par rapport au matériau B élargisse le deuxième pic et le déplace vers des fréquences plus élevées. Dans la première configuration, les deux pics sont proches (4700 et 6600 Hz) et le gain reste relativement faible entre les deux fréquences correspondantes. Cela permet d'obtenir un maximum de -4 dB sur une largeur de bande de 3250 Hz. Dans le deuxième cas, le gain maximal atteint sur la plus grande largeur de bande est de -2.5 dB (sur 6600 Hz). Dans le troisième cas, il n'est plus que de -1.4 dB (sur 10800 Hz), mais l'intérêt de la configuration réside alors dans la largeur et la profondeur du pic à 9900 Hz. Autour de cette fréquence, on atteint un gain maximal de -5 dB sur 3250 Hz.

Caractéristiques générales	Grandeurs	élastomère A	élastomère B	acier
milieu extérieur : eau	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	950	1450	7820
$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> ) 1000	$E$ (MPa)	3	10	$210 \cdot 10^3$
$c_0$ (m/s) 1500	$\nu$	0.48	0.48	0.3
rayon de l'obstacle	$\eta$	0.1	0.1	0.001
$a$ (m) 4.4	$h$ (mm)	$17 \pm 1$	$3 \pm 1$	2

TABLE 5.5 – Caractéristiques des configurations à 4 couches testées ici.

2. La fonction objectif utilisée est l'équivalent de la fonction objectif  $F_{\text{obj},2}$  (équation 3.9), pour une intensité diffractée sur un demi-cylindre en amont de l'obstacle.

3. Il ne s'agit pas là de configurations « optimales », mais simplement d'exemples d'arrangements permettant une atténuation large bande de la diffraction.

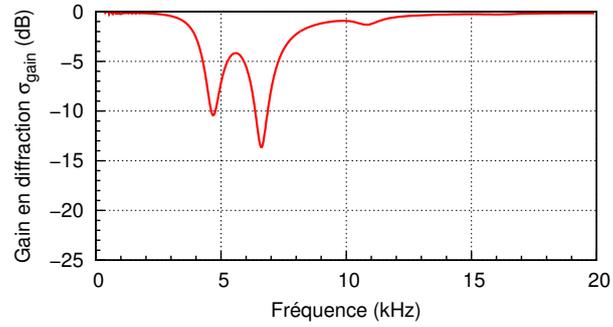
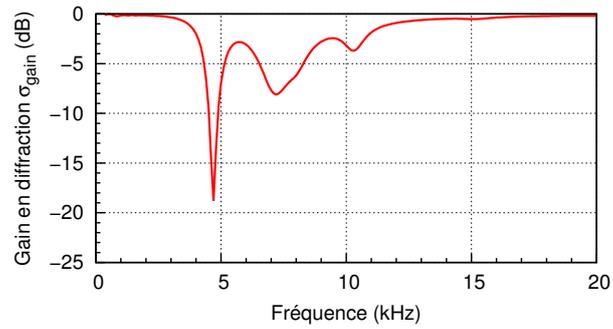
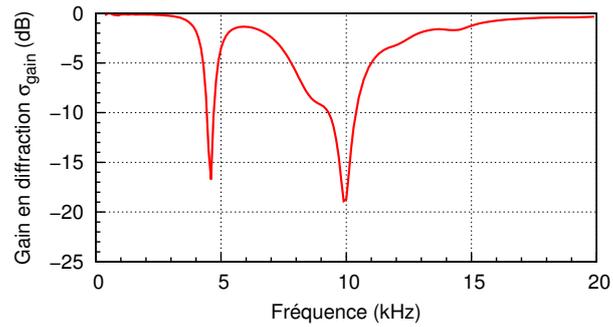
(a)  $h_1 = 16$  mm,  $h_3 = 4$  mm(b)  $h_1 = 17$  mm,  $h_3 = 3$  mm(c)  $h_1 = 18$  mm,  $h_3 = 2$  mm

FIGURE 5.12 – Gain en diffraction en fonction de la fréquence dans le cas de revêtements composés de 4 couches (élastomère A, acier, élastomère B, acier), pour différentes épaisseurs relatives de matériaux A et B. Les caractéristiques de ces configurations sont données dans la table 5.5.

## 5.4 Comparaison eau/air

Les études présentées dans ce chapitre montrent qu'il est possible de diminuer fortement la diffraction d'une onde plane sur un cylindre, dans l'eau, en entourant celui-ci de matériaux isotropes, présentant des caractéristiques réalistes. Dans le cas d'un milieu extérieur constitué d'air, nous avons vu qu'il est nécessaire de se tourner vers des matériaux orthotropes, moins facilement disponibles. On peut se demander si l'obtention des résultats présentés ici est due à l'utilisation d'une fonction objectif différente (intensité diffractée en amont du cylindre/intensité diffractée dans toutes les directions), à la différence de milieu extérieur (eau/air), ou encore au nombre d'onde réduit pour lequel l'étude a été menée ( $k_0a = 60/k_0a \simeq 1$ ).

### 5.4.1 Fonctions objectif $F_{\text{obj},1}$ et $F_{\text{obj},3}$

Des essais similaires à ceux du paragraphe 5.1, dans l'eau et pour un nombre d'onde réduit  $k_0a = 60$ , ont été effectués avec la fonction objectif  $F_{\text{obj},1}$  à la place de la fonction  $F_{\text{obj},3}$ , c'est-à-dire en considérant l'intensité sur une surface entourant la totalité de l'obstacle. Ces calculs ont conduit aux mêmes configurations que celles présentées ici. Seule la valeur du gain en diffraction diffère alors. Elle est naturellement plus faible, puisque la forte zone d'ombre à l'arrière du cylindre diminue les performances du dispositif, évaluées suivant le critère d'une réduction omnidirectionnelle de la diffraction.

### 5.4.2 Milieux air et eau et nombres d'onde réduits $k_0a \simeq 1$ et $k_0a = 60$

Pour un nombre d'onde réduit  $k_0a$  donné, on sait que la pression diffractée par le cylindre revêtu dépend des caractéristiques mécaniques des différentes couches adimensionnées par les caractéristiques du milieu extérieur. Par adimensionnement et redimensionnement des résultats, on peut voir que les revêtements isotropes permettant une réduction de la diffraction dans l'eau pour  $k_0a = 60$ , ne correspondent, dans l'air et pour ce même nombre d'onde réduit, à aucun matériau utilisable (voir figure 3.2). Choisir ce nombre d'onde réduit pour chercher des revêtements dans l'air n'aurait donc pas permis d'obtenir des configurations isotropes comme celles-ci.

Par ailleurs, des essais ont été menés dans l'eau avec des nombres d'onde réduits  $k_0a$  de 10 puis de 1. Pour  $k_0a = 10$ , des configurations bicouches isotropes permettant une réduction de la diffraction et correspondant à des matériaux existants ont été trouvées, mais avec des plages de caractéristiques mécaniques  $(E_1, \rho_1)$  beaucoup plus restreintes, et des niveaux d'atténuation plus faibles. Dans le cas  $k_0a = 1$ , la recherche, dans les plages de variation des matériaux réels, de matériaux isotropes susceptibles de former avec l'acier un revêtement de réduction de la diffraction, n'a donné aucun résultat.

L'obtention de revêtements composés de deux couches isotropes réalistes est donc due simultanément au nombre d'onde réduit considéré et au fait que l'on se situe dans l'eau.

Dans cette partie, a été mise en évidence l'existence de revêtements bicouches isotropes permettant, pour un nombre d'onde réduit  $k_0a$  de 60 et dans l'eau, une forte réduction de la diffraction dans toutes les directions, excepté à l'arrière de l'obstacle. Il peut s'agir par exemple d'une épaisse couche d'élastomère, et d'une mince couche d'acier.

Il a été montré que la réduction de la diffraction à la fréquence considérée correspond à un phénomène de résonance se produisant pour certaines combinaisons de masse volumique, module d'Young, coefficient de Poisson et épaisseur de la couche intérieure. L'influence de ces paramètres a été étudiée dans le cas d'une couche extérieure de 2 mm d'acier, en laissant les caractéristiques de la couche intérieure libres de varier sur toute l'étendue des gammes de valeur correspondant aux matériaux existants. On note la forte sensibilité du phénomène de réduction de la diffraction au coefficient de Poisson lorsque celui-ci prend des valeurs élevées, et le fait que la fréquence de résonance est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche intérieure. Plus cette épaisseur est importante, plus le nombre de combinaisons  $(E_1, \rho_1)$  possibles est élevé. Le facteur de perte de la couche interne n'a quant à lui pas d'effet significatif sur les autres caractéristiques à utiliser. Il semble exister une valeur optimale de ce paramètre qui maximise les niveaux de réduction de diffraction atteints. Ces considérations sur les effets respectifs des différentes caractéristiques de la couche intérieure peuvent être utiles dans le cadre d'une mise en œuvre pratique. Par exemple, on peut ainsi chercher à compenser la sensibilité du dispositif vis-à-vis du coefficient de Poisson par une épaisseur de couche importante.

Enfin, un exemple de revêtement composé de quatre couches élastiques isotropes et permettant une atténuation large bande de la diffraction a été présenté.

# Conclusions et perspectives

## Bilan de l'étude

Cette thèse a été consacrée à la recherche de revêtements multicouches élastiques réalistes permettant l'atténuation de la diffraction d'une onde acoustique plane sur un cylindre rigide. Pour cela, différents outils numériques ont été mis en place, notamment deux codes de modélisation du comportement vibro-acoustique d'un matériau multicouche élastique. Dans leur forme actuelle, ces modèles sont adaptés à l'étude de configurations bidimensionnelles, avec un matériau cylindrique infiniment long, excité par une onde plane dont la direction de propagation appartient aux plans de section droite du cylindre. La première méthode, utilisant des approximations radiales de type éléments finis, convient à l'étude de revêtements comprenant un faible nombre de couches, relativement épaisses. La deuxième, reposant sur la mise en place de matrices de transfert pour chaque couche, sera avantageusement utilisée dans le cas de revêtements composés d'un nombre important de couches, par exemple dans le cas d'un gradient de propriétés mécaniques dans la direction radiale. Ces deux modélisations ont été validées par comparaison avec des cas issus de la littérature.

La première méthode ainsi développée a été couplée à un algorithme génétique, et des revêtements bicouches élastiques permettant une réduction de la diffraction ont été recherchés par optimisation. Les tests ont été effectués sur des revêtements présentant une couche intérieure moins dense et moins rigide que la couche extérieure.

Dans le cas de l'air et pour des nombres d'onde réduits faibles ( $k_0 a \simeq 1$ ), il est apparu qu'une superposition de deux matériaux isotropes ne pouvait conduire à une atténuation de la diffraction. L'utilisation d'une couche intérieure orthotrope et d'une couche extérieure isotrope a en revanche permis de dégager différentes combinaisons de caractéristiques mécaniques et dimensionnelles menant à une réduction omnidirectionnelle de la diffraction pouvant atteindre jusqu'à 12 dB à la fréquence d'optimisation. Les couches intérieures orthotropes sélectionnées au cours du processus d'optimisation présentent la particularité d'être moins rigides dans la direction radiale que dans les deux autres directions. Une analyse de la contribution des différents modes circonférentiels au phénomène de diffraction a permis de montrer que cette forte réduction de la diffraction à la fréquence d'optimisation correspond à une compensation des pressions réfléchies et rayonnées correspondant aux premiers modes, les plus importants à basse fréquence. De plus, nous avons montré qu'une fois la zone de matériaux intéressante ciblée, un changement de fonction objectif dans l'optimisation pouvait permettre d'obtenir des revêtements efficaces sur une plus large bande de fréquence.

Ces revêtements, considérés comme infiniment longs dans les travaux numériques, pourraient être testés expérimentalement. Nous avons en effet pu constater, numériquement et expérimentalement, que les diffractions intervenant aux extrémités d'un cylindre de 1 m de long et 0.125 m de rayon ont une influence modérée sur le champ de pression dans le plan médian du cylindre. En se basant sur

les matériaux et les données dont nous disposons, des configurations réalisables de revêtements, correspondant à une mousse de polyéthylène orthotrope et une couche de polymère isotrope, ont été dégagées. Pour des raisons pratiques, notre choix s'est porté sur une couche extérieure en polyméthylpentène. Une vérification du module d'Young radial de la mousse de polyéthylène orthotrope a montré un écart important (de l'ordre de 50 %) avec les valeurs fournies, qui avaient motivé ce choix de configuration. Le phénomène d'atténuation de la diffraction étant particulièrement sensible à ce paramètre, le revêtement réalisé ne permet aucun effet de ce type. Des tests de mesure de sa réponse vibratoire à des excitations mécaniques ont cependant été réalisés, permettant la validation du modèle développé pour traduire le comportement vibratoire d'un revêtement multicouche élastique.

Enfin, le cas de configurations correspondant à des nombres d'onde plus élevés ( $k_0a = 60$ ), dans l'eau, a été étudié. Dans ces conditions, un phénomène résonnant, conduisant à une forte réduction de la diffraction en amont du cylindre, peut se produire en utilisant un revêtement composé de deux matériaux isotropes, par exemple une couche relativement épaisse d'élastomère et une couche extérieure, plus fine, d'acier. Ces configurations ne permettent pas de supprimer la zone d'ombre à l'arrière de l'obstacle, zone correspondant toutefois à un angle solide restreint. L'étude paramétrique menée sur ce cas a permis de mettre en évidence l'influence importante du module d'Young, du coefficient de Poisson et de l'épaisseur de la couche intérieure sur le résultat, et des conséquences pratiques peuvent être tirées des tendances dégagées. Des exemples de revêtements composés de quatre couches isotropes et permettant une atténuation large bande ont également été présentés. Enfin, il a été souligné que l'obtention, dans ce cas, de configurations réalistes isotropes était due à la fois à la nature du milieu et au nombre d'onde considéré.

### Discussion et perspectives

Les travaux présentés ici tentent de dégager des tendances sur des cas d'étude particuliers (un milieu constitué d'air et un nombre d'onde réduit de 1, ou un milieu constitué d'eau et un nombre d'onde réduit de 60). Une étude théorique plus générale, par exemple sur des grandeurs adimensionnées et sans considération de disponibilité ou réalisabilité des matériaux, pourrait permettre de mieux comprendre les phénomènes entrant en jeu et l'influence des différents paramètres.

D'autre part, il serait intéressant, pour sélectionner des configurations en vue d'une mise en œuvre pratique, de disposer de bases de données précises sur les matériaux existants. Des informations sur l'incertitude des paramètres auxquels la fonction objectif est particulièrement sensible pourraient être intégrées dans le processus de sélection au moyen d'une optimisation robuste. La collaboration avec des laboratoires capables de produire des matériaux présentant des caractéristiques particulières est également une piste à explorer (fabrication par tissage ou impression 3D par exemple).

Les codes développés peuvent facilement être adaptés au cas tridimensionnel d'une onde plane sous incidence oblique. Des modèles permettant la prise en compte d'objets de taille finie, d'autres types de matériaux (par exemple des matériaux poreux), ou encore la présence d'un écoulement, pourraient également être développés. On peut aussi chercher à étudier le cas de revêtements n'entourant pas la totalité de l'obstacle cylindrique.

Les moyens mis en place ici peuvent être utilisés pour chercher des revêtements atténuant la diffraction sur un angle solide donné et sur une large bande de fréquence. Ils pourraient aussi permettre de sélectionner des configurations conduisant à une modification de la phase de l'onde diffractée, faussant ainsi la localisation qui pourrait être faite de l'objet par des mesures en champ

lointain.

Enfin, on peut penser à des dispositifs hybrides actifs/passifs, composés d'un revêtement élastique à la surface duquel se trouveraient des actionneurs amplifiant les vibrations du revêtement à certaines fréquences.

On peut envisager des applications de ce type de dispositifs dans le cadre militaire (détection de sous-marins, ou réduction de la diffraction du fuselage d'hélicoptères), mais aussi en métrologie. Ces revêtements pourraient par exemple permettre de réduire l'effet de diffraction produit par des supports multi-voies employés dans des milieux confinés (perche microphonique en soufflerie, antenne pour localisation de sources dans un véhicule, etc.). Ces dispositifs pourraient ainsi servir à diminuer le caractère intrusif de certaines méthodes de mesure.



Troisième partie

Annexes



# Annexe A

## Superposition de couches homogènes isotropes

### A.1 Passage de la théorie à un modèle approché

#### A.1.1 Principe

##### Variation spatiale continue

Afin de pallier le problème de la variation spatiale continue des paramètres  $\rho_r$ ,  $\rho_\theta$  et  $K$ , on peut envisager de discrétiser le matériau de manière à travailler sur une superposition de couches homogènes, dont les paramètres, constants à l'intérieur de chaque couche, évolueront de couche en couche de sorte que l'on conserve au final des gradients de masse volumique et module d'élasticité. Plus le nombre de couches d'un tel modèle sera élevé, meilleure sera l'approximation, et par conséquent l'efficacité du revêtement total. Cela se fera toutefois aux dépens de la facilité de fabrication et d'entretien du métamatériau.

##### Anisotropie

Une fois le problème de l'inhomogénéité traité, il faut également chercher une solution à celui de l'anisotropie de la masse volumique. Différents groupes de travail (Cheng, Chen et Torrent) ont proposé de superposer deux types de matériaux fluidiques homogènes et isotropes. Ils s'appuient pour cela sur des travaux de [Schoenberg et Sen \(1983\)](#).

D'après Schoenberg, lorsque la longueur d'onde est suffisamment grande devant l'épaisseur de chaque couche pour que l'on puisse appliquer les méthodes d'homogénéisation, un milieu constitué d'une superposition de couches de matériaux A et B (de masse volumique  $\rho_A$ ,  $\rho_B$  et module d'élasticité isostatique  $K_A$ ,  $K_B$ ) présente les caractéristiques apparentes suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_r &= f\rho_A + (1-f)\rho_B \\ \rho_\theta &= \frac{1}{\frac{f}{\rho_A} + \frac{1-f}{\rho_B}} \\ K &= \frac{1}{\frac{f}{K_A} + \frac{1-f}{K_B}}\end{aligned}\tag{A.1}$$

avec  $f = \frac{d_A}{d_A+d_B} = \frac{d_A}{d}$ , où  $d_A$  représente l'épaisseur de la couche A,  $d_B$  l'épaisseur de la couche B, et  $d$  l'épaisseur de ce que nous appellerons une bicouche A-B.

Pour qu'il y ait un phénomène de *cloaking*,  $\rho_r$ ,  $\rho_\theta$  et  $K$  doivent vérifier les équations (1.6) à (1.8). Ces 3 variables ne seront donc pas considérées ici comme des inconnues : pour chaque couche, on prendra la valeur théorique correspondant au centre de la couche ( $\rho_r(r_i)$ ,  $\rho_\theta(r_i)$ ,  $K(r_i)$ ) où  $r_i$  correspond à la distance radiale entre l'axe du cylindre et le plan médiant de la couche  $i$ ). Ainsi, le système d'équations (A.1) présente 5 inconnues ( $\rho_A$ ,  $\rho_B$ ,  $K_A$ ,  $K_B$  et  $f$ ) pour 3 équations. Il sera donc nécessaire d'imposer des contraintes supplémentaires (en fixant arbitrairement un ou plusieurs paramètre(s), ou en ajoutant une équation).

**Remarque :**  $0 < f < 1$

Un  $f$  proche de 0 correspond à une couche A très mince et une couche B très épaisse (et inversement lorsque  $f$  est proche de 1). Appliquer cette condition aux équations (A.1), tout en gardant en mémoire le fait que  $\rho_\theta < \rho_0 < \rho_r$ , permet d'établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } \rho_A > \rho_B, \quad \text{alors } \quad & \rho_B < \rho_\theta < \rho_0 < \rho_r < \rho_A. \\ \text{Si } \rho_A < \rho_B, \quad \text{alors } \quad & \rho_A < \rho_\theta < \rho_0 < \rho_r < \rho_B. \end{aligned}$$

Le revêtement est donc fait d'une alternance de couches peu denses et de couches denses, avec

$$\rho_{\text{peu denses}} < \rho_\theta < \rho_0 < \rho_r < \rho_{\text{denses}}. \quad (\text{A.2})$$

## A.1.2 Choix des paramètres

### A.1.2.1 Épaisseur des couches

Afin de simplifier les modèles d'études, l'épaisseur  $d$  des bicouches est généralement choisie comme constante sur toute la largeur du revêtement. De même, l'épaisseur relative  $f$  de matériau dense par rapport au matériau peu dense à l'intérieur d'une bicouche est souvent prise comme égale dans toutes les doubles-couches ( $f = \text{constante}$ ).

Les équations (A.1) permettent alors d'exprimer  $\rho_A$  et  $\rho_B$  en fonction de  $r$  et  $f$ . On obtient tout d'abord une expression de  $\rho_A$  en fonction de  $\rho_B$  :

$$\rho_A(r, f) = \frac{1}{f} \left[ \rho_r(r) - (1-f)\rho_B(r, f) \right] \quad (\text{A.3})$$

Puis on montre que  $\rho_B$  vérifie l'équation suivante :

$$\rho_B^2 + \frac{1}{1-f} \left[ (2f-1)\rho_\theta(r) - \rho_r(r) \right] \rho_B + \rho_0^2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta(r, f) = 8 \left[ \frac{\rho_0}{r(r-a)} \right]^2 a \frac{f}{1-f} \left( r - \frac{a}{2} \right) \left( r - \frac{a}{2} \frac{1-2f}{1-f} \right) \left( r - \frac{a}{2} \frac{2f-1}{f} \right) \quad (\text{A.5})$$

On vérifie aisément que  $\Delta > 0$  pour  $r > a$  et  $f \in [0; 1]$ . L'équation (A.4) admet donc deux solutions :

$$\rho_B(r, f) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho_r(r) - (2f-1)\rho_\theta(r)}{1-f} \pm \sqrt{\Delta(r, f)} \right] \quad (\text{A.6})$$

Les deux jeux de solutions ( $\rho_A, \rho_B$ ) obtenus sont équivalents : que l'on choisisse  $+\sqrt{\Delta}$  ou  $-\sqrt{\Delta}$  dans  $\rho_B$ , on obtient toujours une couche dense, de masse volumique supérieure à la masse volumique du milieu ambiant et d'autant plus élevée que la couche est mince, et une couche peu dense, dont la

masse volumique est inférieure à celle du milieu ambiant et d'autant plus faible que la couche est mince (voir figure A.1 et relation (A.2)). Par la suite on désignera la couche dense au moyen de l'indice A, et la peu dense par l'indice B. Cette notation correspond au choix de  $-\sqrt{\Delta}$  dans (A.6). Choisir  $+\sqrt{\Delta}$  conduit aux mêmes résultats, à ceci près que la couche dense est alors notée B, et la peu dense, A.

Ainsi, fixer l'épaisseur relative de la couche dense par rapport à la couche peu dense à travers tout le revêtement permet de déterminer la masse volumique que devra présenter chaque couche pour pouvoir conduire à un phénomène de *cloaking*. On peut cependant remarquer que les courbes idéales décrites ici seront difficilement atteignables en pratique. En effet, au voisinage de l'obstacle ( $r/a \rightarrow 1$ ) les masses volumiques tendent vers des valeurs extrêmes ( $+\infty$  pour la couche dense et 0 pour la peu dense); et de manière plus générale, il paraît très difficile, dans le cas où le milieu ambiant est de l'air, de fabriquer des matériaux peu denses, c'est-à-dire, selon les résultats présentés plus haut, moins denses que l'air...

Dans ce dernier cas (milieu ambiant constitué d'air), on va chercher à avoir les valeurs de  $\rho_B$  les plus élevées possibles. On peut voir sur la figure A.1 que celles-ci sont obtenues pour les  $f$  les plus faibles, c'est-à-dire lorsque l'on alterne des couches denses minces et des couches peu denses épaisses. Au contraire, si l'on s'intéresse au cas d'un obstacle placé dans de l'eau ( $\rho_0 \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ ), il sera vraisemblablement plus facile de fabriquer les couches peu denses que les couches denses. On privilégiera donc plutôt les valeurs de  $f$  proches de 1, c'est-à-dire d'épaisses couches denses et de minces couches peu denses.

### A.1.2.2 Élasticité

Le système d'équations présenté au paragraphe A.1 ne permet pas de déterminer de manière unique les modules d'élasticité des deux types de matériaux. On a uniquement une relation liant  $K_A$  et  $K_B$ . On dispose donc d'une certaine marge de manœuvre quant au choix de ces modules.

Dans un article paru en 2008, Torrent et Sánchez-Dehesa se sont intéressés au cas où la vitesse de propagation du son suivrait la même évolution dans les deux types de matériaux. La célérité du son étant liée au module d'élasticité isostatique par la relation  $c = \sqrt{K/\rho}$ , la condition  $c_A = c_B$  fournit l'équation supplémentaire qui nous manquait pour déterminer  $K_A$  et  $K_B$ . Le modèle ainsi constitué peut être testé par FEM grâce au logiciel de simulation COMSOL (il se trouve d'ailleurs dans la bibliothèque de tutoriels).

Partir de  $f = 0,5$  et  $c_A = c_B$  n'est pas la seule option envisageable. Selon les problèmes étudiés et les possibilités de fabrication, d'autres choix peuvent se révéler intéressants. Torrent et Sánchez-Dehesa analysent différentes options. Si l'on choisit de garder l'alternance d'épaisseurs égales de matériaux denses et de matériaux peu denses, on peut décider par exemple que la vitesse du son dans la couche dense sera constante, ou bien qu'elle sera proportionnelle à la vitesse du son dans la couche peu dense. Mais on peut également vouloir fixer les paramètres de l'un des deux types de couches, et jouer ensuite sur le ratio d'épaisseur  $f$  et les paramètres de l'autre type de couches pour obtenir le résultat recherché.

Cependant le problème lié à la fabrication de matériaux moins denses que l'air demeurera quelle que soit la solution choisie. Comme établi au paragraphe A.1.1, le modèle est par définition composé d'une couche dense (plus dense que le milieu ambiant) et d'une couche peu dense (moins dense que le milieu ambiant). Le choix d'un  $f$  fixe ou variable, ou d'une loi de comportement particulière pour la vitesse du son ne change rien à ce sujet.

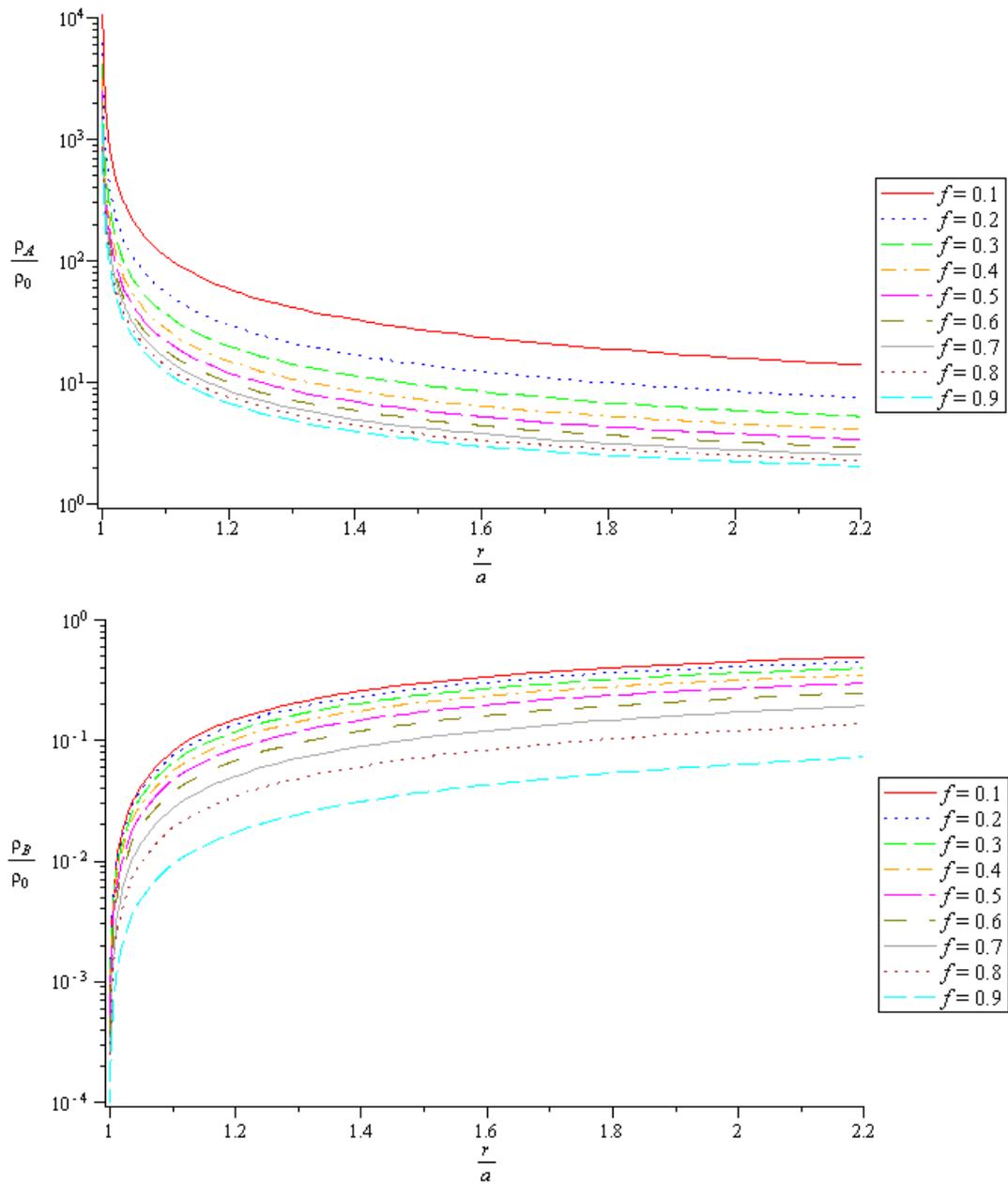


FIGURE A.1 – Masse volumique des deux types de couche pour des  $f$  donnés<sup>a</sup>

a.  $f = \frac{d_A}{d_A + d_B}$ , donc plus  $f$  est grand, plus la couche dense est épaisse et plus la couche peu dense est mince.

### A.1.3 Remarques

#### Cheng et Chen

Les choix effectués par Cheng et Chen en matière de module d'élasticité ou vitesse de son ne sont pas clairement explicités. Des simulations semblables ont été menées, avec 40 couches au lieu de 50, une longueur d'onde de 1 m, et un milieu ambiant constitué d'eau ( $\rho_0 = 998 \text{ kg/m}^3$ ,  $K_0 = 2,19 \text{ GPa}$ ). Différents types d'ondes incidentes ont été testés (onde plane ou source cylindrique plus ou moins proche de l'obstacle à isoler), et dans chacun de ces cas, les résultats sont comparables à ceux obtenus par Torrent, à savoir une très forte atténuation des modifications du champ de pression liées à la présence du cylindre rigide. Les réflexions à l'avant de l'obstacle et la zone d'ombre à l'arrière sont significativement diminuées. Le champ de pression à l'extérieur de la zone constituée de l'obstacle et du revêtement se rapproche ainsi de celui que l'on aurait en l'absence de l'obstacle.

#### Modèle

Lors de ces simulations, les matériaux sont considérés comme des fluides. COMSOL résout, aussi bien dans l'air que dans les matériaux A et B, l'équation

$$\nabla \cdot \left( -\frac{\nabla p}{\rho} \right) - \frac{\omega^2 p}{\rho c^2} = 0.$$

Seules sont donc prises en compte ici les ondes longitudinales. Si, à la place de fluides, on souhaite utiliser des solides élastiques, il faudra adapter le modèle de manière à également considérer la propagation d'ondes dans les directions transverses.

Le modèle idéal basé sur la superposition de couches de fluides homogènes et isotropes, alternativement denses et peu denses, donne des résultats intéressants en ce qui concerne la furtivité acoustique. Dans le cas où le milieu ambiant est de l'air, une difficulté majeure au niveau de la réalisation réside dans le fait que les couches peu denses doivent présenter une masse volumique inférieure à  $1,2 \text{ kg/m}^3$ . Dans la partie suivante, nous nous intéresserons à ce qu'il advient lorsque l'on s'écarte un peu de ce modèle théorique en augmentant légèrement la masse volumique des couches peu denses. Bien que nous envisagions des essais de fabrication avec des matériaux élastiques, nous nous limiterons ici à des simulations avec des fluides afin de ne pas nous écarter trop brutalement de la théorie, et de bien voir les effets d'un écart de masse volumique par rapport aux valeurs théoriques. La théorie présentée dans les articles de Torrent ou Chen est illustrée par des résultats de simulations numériques effectuées avec le logiciel COMSOL. Les configurations étudiées par ces auteurs consistent généralement en une alternance de couches fluides denses et peu denses de même épaisseur ( $f = \frac{d_A}{d_A + d_B} = 0.5$ ). Nous nous intéresserons ici au cas où les deux types de couches (A « dense », B « peu dense ») n'ont pas la même épaisseur : la couche dense est mince tandis que la couche peu dense est épaisse. Le rapport des épaisseurs  $f$  est constant d'une bicouche à l'autre, et nous avons choisi ici  $f = 0.077$ .

## A.2 Simulations COMSOL

Les résultats de simulation présentés dans ce chapitre ont été obtenus avec le module *Pressure Acoustics* de COMSOL (études 2D de type *Frequency Domain*). Nous avons cherché à voir quelle serait l'allure du champ de pression autour d'un cylindre de rayon  $a = 0.1 \text{ m}$  (entouré ou non par un matériau multicouche spécifique) sous incidence d'une onde plane venant de la gauche et d'amplitude  $1 \text{ Pa}$ .

### A.2.1 Configurations étudiées

Ce travail s'inscrivant dans le cadre d'études sur la furtivité acoustique, il est intéressant de pouvoir comparer les résultats obtenus lorsqu'un revêtement multicouche entoure un cylindre à ceux obtenus lorsque l'on n'a pas d'obstacle ou lorsque l'obstacle n'est pas entouré d'un revêtement particulier. Pour chaque fréquence, on a donc gardé comme références ces deux derniers cas (respectivement cas 1 et 2).

Dans les autres cas étudiés, l'obstacle cylindrique est entouré d'un revêtement d'épaisseur  $b - a = 0.13$  m composé d'une superposition de couches de fluides, selon les modèles proposés par Torrent et Chen, mais avec  $f = 0.077$  et non plus  $f = 0.5$ . Ces revêtement comptent au total 20 couches denses et peu denses, disposées en alternance. Leurs caractéristiques ont d'abord été prises comme égales à celles données par la solution théorique idéale après discrétisation (cas 3, cf tableau A.1). Dans ce cas-là, la masse volumique des couches peu denses prend des valeurs très faibles, inférieures à  $1.2 \text{ kg/m}^3$  (masse volumique de l'air). De manière à voir ce qui se passerait si l'on prenait des valeurs davantage susceptibles d'être atteintes en pratique, nous avons augmenté la masse volumique de chaque couche peu dense de  $0.3 \text{ kg/m}^3$  dans le cas 4 et de  $14.5 \text{ kg/m}^3$  dans le cas 5. Ainsi, la masse volumique des couches peu denses reste inférieure à celle de l'air dans le cas 4, et avoisine les  $15 \text{ kg/m}^3$  dans le cas 5, ce qui correspond aux matériaux les moins denses que l'on pourrait réaliser en pratique.

couche	Cas 3			Cas 4		Cas 5	
	$\rho_A$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$\rho_B$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$c$ ( $\text{m/s}$ )	$\rho_B$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$c$ ( $\text{m/s}$ )	$\rho_B$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$c$ ( $\text{m/s}$ )
A1	3135.54		39081		5249		762
B1		0.0725	2972	0.3725	1311	14.57	210
A2	129.57		1635		903		156
B2		0.1846	1167	0.4846	720	14.68	132
A3	71.68		928		613		117
B3		0.2749	783	0.5749	542	14.77	108
A4	51.33		687		491		101
B4		0.3492	617	0.6492	453	14.85	96
A5	40.73		565		422		92
B5		0.4114	524	0.7114	397	14.91	88
A6	34.15		491		379		86
B6		0.4643	464	0.7643	362	14.96	83
A7	29.62		442		348		81
B7		0.5097	423	0.8097	336	15.01	80
A8	26.29		407		325		78
B8		0.5493	393	0.8493	316	15.05	77
A9	23.72		380		308		76
B9		0.5840	370	0.8840	301	15.08	75
A10	21.68		360		294		74
B10		0.6147	351	0.9147	288	15.11	73

TABLE A.1 – Caractéristiques des couches constituant le revêtement entourant le cylindre dans les cas 3, 4 et 5 (masse volumique et célérité du son)

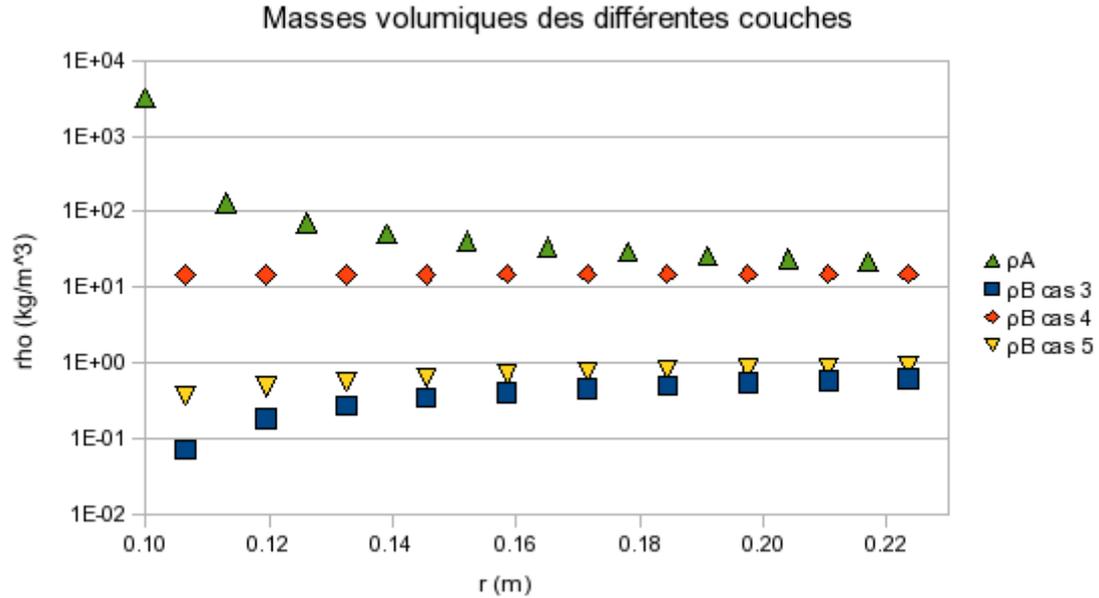


FIGURE A.2 – Masses volumiques des différentes couches lors des simulations pour les cas 3, 4 et 5

### A.2.2 Choix d'une loi pour la vitesse du son

Il est nécessaire, pour définir le module d'élasticité ou la célérité du son, d'ajouter une contrainte supplémentaire. Comme dans les premiers travaux de Torrent, nous avons choisi de nous intéresser au cas où la célérité du son évolue de la même manière dans les couches peu denses et dans les couches denses. Nous partons donc de  $c_A = c_B$ , soit  $\frac{K_A}{\rho_A} = \frac{K_B}{\rho_B}$ . On obtient pour les modules d'élasticité isostatique  $K$  des couches de type B la formule

$$K_B = K_0 \left( \frac{b-a}{b} \right)^2 \frac{r}{r-a} \quad (\text{A.7})$$

dans laquelle  $r$  correspond à la distance radiale entre le centre de l'obstacle cylindrique et le milieu de la couche considérée. Il est ensuite aisé d'en déduire  $K_A$  et de remonter aux vitesses du son dans chaque couche.

### A.2.3 Récapitulatif

- onde plane venant de gauche, d'amplitude 1 Pa
- milieu ambiant : air ( $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_0 = 340 \text{ m/s}$ )
- obstacle rigide : cylindre de rayon  $a = 0.1 \text{ m}$
- revêtement éventuel :
  - 20 couches fluides, denses et peu denses en alternance,
  - épaisseur du revêtement :  $b - a = 0.13 \text{ m}$ ,
  - épaisseur de chacune des 10 bicouches : 13 mm,
  - épaisseur des couches denses :  $d_A = 1 \text{ mm}$ ,
  - épaisseur des couches peu denses :  $d_B = 12 \text{ mm}$ ,
  - soit  $f = \frac{d_A}{d_A + d_B} \approx 0.077$ .

4 cas sont étudiés :

1. obstacle cylindrique dans de l'air
2. cylindre entouré de 20 couches fluides denses et peu denses dont les caractéristiques (idéales) ont été déterminées en employant la méthode de Torrent
3. cylindre entouré de 20 couches fluides denses et peu denses, la masse volumique des couches peu denses ayant été augmentée de  $0.3 \text{ kg/m}^3$  par rapport au cas idéal (cas 3)
4. cylindre entouré de 20 couches fluides denses et peu denses, la masse volumique des couches peu denses ayant été augmentée de  $14.5 \text{ kg/m}^3$  par rapport au cas idéal (cas 3)

### A.2.4 Résultats

Les figures de la table A.2.4 représentent les niveaux de pression acoustique (en dB) pour des fréquences comprises entre 500 Hz et 3500 Hz dans les 4 cas décrits ci-dessus. Dans l'idéal, on aimerait se rapprocher le plus possible du cas sans obstacle où le niveau de pression est uniforme dans tout l'espace considéré et égal à 91 dB (couleur orangée).

La superposition de couches fluides idéales<sup>1</sup> (cas 3) offre des résultats intéressants du point de vue de la furtivité acoustique pour de basses fréquences. En effet, jusqu'à environ 3000 Hz, le champ de pression est moins perturbé par l'obstacle entouré du revêtement multicouche que par l'obstacle seul. De faibles réflexions sont visibles à l'amont du cylindre à partir de 2000 Hz, et des perturbations à l'arrière du cylindre apparaissent vers 3000 Hz. Au-delà de cette fréquence, la présence du revêtement multicouche ne constitue plus un avantage ; au contraire, la situation est meilleure avec l'obstacle seul.

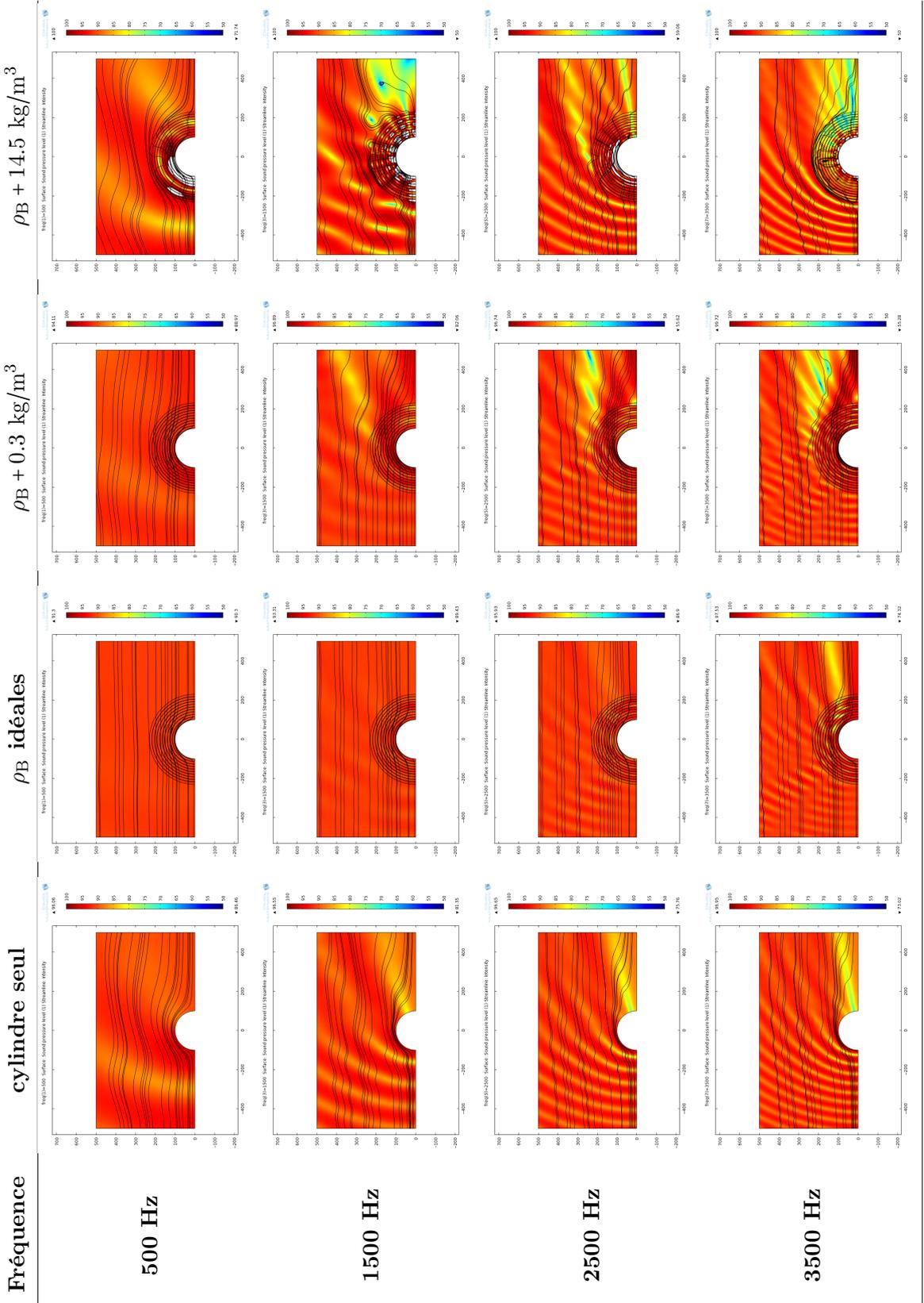
Les résultats obtenus lorsque l'on ajoute  $0,3 \text{ kg/m}^3$  aux masses volumiques des couches peu denses (cas 4) montrent une peu dense atténuation des perturbations par rapport au cas du cylindre seul pour des fréquences très basses (500 - 1000 Hz). Au-delà, l'absence de revêtement est préférable.

Augmenter la masse volumique des couches peu denses de  $14,5 \text{ kg/m}^3$  (cas 5) accroît fortement les perturbations liées à la présence d'un obstacle, et cela dès les fréquences les plus faibles.

Conformément à la théorie, il semble qu'on n'arrive à obtenir de bons résultats d'un point de vue furtivité que dans les cas où la masse volumique des couches peu denses reste inférieure à celle de l'air (cas 3 et 4). Cela paraît malheureusement inatteignable en pratique, du moins sans avoir recours à des gaz qui, s'ils permettraient de résoudre le problème de la masse volumique, poseraient d'autres problèmes au niveau de la fabrication (confinement du gaz, etc.). Si l'on ne veut pas approfondir la question de savoir comment fabriquer des fluides (ou métafluides) ayant les caractéristiques voulues, si l'on souhaite plutôt travailler avec des solides élastiques, il sera nécessaire de développer un autre modèle.

D'autre part, le choix effectué pour fixer la vitesse du son dans chaque couche ( $c_A = c_B$ ) n'est peut-être pas optimal. En effet, cela mène dans le cas 5 à une vitesse dans les fluides du revêtement inférieure à la vitesse du son dans l'air. Or, on pourrait penser qu'il faut que le son se déplace plus vite dans le revêtement que dans l'air (puisque le chemin parcouru est censé y être plus long, puisqu'incurvé). Se fixer une contrainte différente de  $c_A = c_B$  lorsque l'on n'opte pas pour les valeurs théoriques de masse volumique peut peut-être conduire à des comportements de  $c_A$  et  $c_B$  plus favorables pour des applications de type furtivité.

1. Elles ne le sont en fait pas réellement puisqu'elles correspondent déjà à une discrétisation des résultats théoriques.



### A.2.5 Remarque : paramètres constants dans la couche peu dense

Si l'on choisit de fixer  $\rho_B$  et  $K_B$  (ou, ce qui revient au même,  $c_B$ ), l'épaisseur relative de fluide peu dense et de fluide dense à l'intérieur de chaque bicouche  $f(r)$  et la masse volumique des couches denses  $\rho_A(r)$  est imposée par :

$$f(r) = \frac{\rho_r(r) - \rho_B}{\rho_A(r) - \rho_B} \quad (\text{A.8})$$

$$\rho_A(r) = \frac{\rho_r(r) - \rho_B}{\rho_\theta(r) - \rho_B} \rho_\theta(r) \quad (\text{A.9})$$

Comme précédemment,  $\rho_A$  est positif et  $f$  est compris entre 0 et 1 si et seulement si on a :

$$\forall r \in [a; b] \quad \rho_B < \rho_\theta(r) (< \rho_r(r))$$

$$\rho_B < \rho_{\theta_{min}} \quad (\text{A.10})$$

La valeur minimale de  $\rho_\theta$  est atteinte dans la couche la plus proche de l'obstacle (B1), et vaut dans notre cas (i.e. pour un revêtement de 13 cm composé de 10 bicouches) environ  $0,073 \text{ kg/m}^3$ . Il faudrait donc choisir ici un fluide peu dense de masse volumique inférieure à  $0,073 \text{ kg/m}^3$ . (Pour augmenter la valeur de  $\rho_{\theta_{min}}$ , il faudrait élargir les bicouches, du moins celles qui sont proches de l'obstacle).

D'autre part, on peut montrer que

$$\frac{1}{c_A^2} = \frac{\rho_A}{f} \left[ \frac{1}{K} - \frac{1-f}{K_B} \right]$$

$\frac{1}{c_A^2}$  étant positif, on doit impérativement avoir

$$K_B > (1-f)K. \quad (\text{A.11})$$

La plus grande valeur de  $(1-f)K$  est une fois de plus obtenue au plus proche de l'obstacle.

Les paramètres du fluide peu dense ne peuvent donc pas être choisis de manière totalement arbitraire. Ils doivent vérifier les équations (A.10) et (A.11). En choisissant une masse volumique d'environ  $15 \text{ kg/m}^3$  pour les couches peu denses comme nous l'avons fait dans le cas 5, nous ne pouvons pas arriver à un résultat satisfaisant, même en jouant sur les épaisseurs relatives des couches denses et peu denses. (On obtient en effet des masses volumiques négatives pour les couches denses proches de l'obstacle, et des  $f$  en dehors de l'intervalle  $[0; 1]$ ).

### Conclusion

Le fait que les couches peu denses doivent présenter une masse volumique inférieure à celle du milieu ambiant est extrêmement problématique dans le cas de l'air. Ce modèle pourrait peut-être davantage convenir dans le cas où le milieu ambiant est constitué d'eau.

## Annexe B

# Résolution des équations de Helmholtz et de Navier en coordonnées cylindriques

### B.1 Résolution analytique

#### B.1.1 Équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques

On considère que les variations de pression ont une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ , et qu'elles ne dépendent pas de la coordonnée axiale  $z$  puisque la configuration est bidimensionnelle. En tenant compte de cela, l'équation adimensionnée vérifiée par l'amplitude complexe  $p$  de la pression est

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \omega^2 p = 0 \quad (\text{B.1})$$

Pour résoudre cette équation, on emploie la méthode de séparation des variables (Williams, 1998; Bruneau, 1998). On suppose que la variation de pression  $p$ , qui dépend de  $r$  et de  $\theta$ , peut s'écrire sous la forme d'un produit d'une fonction de  $r$  et d'une fonction de  $\theta$ ,

$$p(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (\text{B.2})$$

En introduisant cette décomposition dans l'équation de Helmholtz (B.1), en multipliant le tout par  $r^2/(R\Theta)$ , et en réarrangeant les termes, on obtient

$$r^2 \frac{\ddot{R}}{R} + r \frac{\dot{R}}{R} + \omega^2 r^2 = -\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta}. \quad (\text{B.3})$$

Les points surmontant les noms des fonctions symbolisent les dérivées par rapport à leurs variables respectives. Les termes de gauche ne dépendent que de la coordonnée radiale  $r$ , et celui de droite que de la coordonnée azimutale  $\theta$ . Comme cette relation doit être vérifiée quels que soient  $r$  et  $\theta$ , et que ces coordonnées sont indépendantes l'une de l'autre, on en déduit que le membre de gauche et le membre de droite sont égaux à une constante que l'on choisit d'appeler  $n^2$ .

Ainsi

$$\ddot{\Theta} + n^2 \Theta = 0, \quad (\text{B.4})$$

donc  $\Theta$  est de la forme

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 e^{in\theta} + \Theta_2 e^{-in\theta} \quad (\text{B.5})$$

ou

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 \cos(n\theta) + \Theta_2 \sin(n\theta) \quad (\text{B.6})$$

où  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont des constantes quelconques. De plus, la fonction  $\Theta$  est  $2\pi$ -périodique. Pour tout  $\theta$ , on doit avoir  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ , donc  $n$  est nécessairement un entier.

La fonction  $R$  quant à elle vérifie

$$\ddot{R} + \frac{\dot{R}}{r} + \left[ \omega^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (\text{B.7})$$

Le changement de variable  $\xi = \omega r$  permet de mettre cette équation sous la forme de l'équation de Bessel

$$\xi^2 \ddot{R} + \xi \dot{R} + (\xi^2 - n^2) R = 0 \quad (\text{B.8})$$

### Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces  $J_n$  et  $Y_n$  sont deux solutions indépendantes de cette équation<sup>1</sup> (Abramowitz et Stegun, 1965). Les solutions de celle-ci peuvent donc s'écrire de manière générale comme des combinaisons linéaires de ces deux fonctions, soit, avec  $R_1$  et  $R_2$  deux constantes arbitraires,

$$R(\xi) = R_1 J_n(\xi) + R_2 Y_n(\xi). \quad (\text{B.9})$$

Toute combinaison linéaire de  $J_n(\xi)$  et  $Y_n(\xi)$  étant possible, on peut aussi bien décrire les solutions de l'équation de Bessel à l'aide de fonctions de Hankel de première et deuxième espèces  $H_n^{(1)}(\xi)$  et  $H_n^{(2)}(\xi)$ , puisque celles-ci sont définies par

$$H_n^{(1)}(\xi) = J_n(\xi) + iY_n(\xi), \quad (\text{B.10})$$

$$H_n^{(2)}(\xi) = J_n(\xi) - iY_n(\xi). \quad (\text{B.11})$$

Une autre forme générale des solutions de l'équation de Bessel est donc

$$R(\xi) = R_1 H_n^{(1)}(\xi) + R_2 H_n^{(2)}(\xi). \quad (\text{B.12})$$

Selon la configuration du problème, on exprime la solution comme une combinaison linéaire des fonctions de Bessel  $J_n$  et  $Y_n$ , qualifiées de solutions stationnaires, ou comme une combinaison linéaire des fonctions de Hankel  $H_n^{(1)}$  et  $H_n^{(2)}$ , représentant elles des solutions propagatives (Williams, 1998). Ces comportements s'expliquent en considérant les développements asymptotiques de ces fonctions pour des arguments très grands (Abramowitz et Stegun, 1965)

$$J_n(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right), \quad (\text{B.13})$$

$$Y_n(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right), \quad (\text{B.14})$$

et

$$H_n^{(1)}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{i\left(\xi - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}, \quad (\text{B.15})$$

$$H_n^{(2)}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-i\left(\xi - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}. \quad (\text{B.16})$$

1. La fonction de Bessel de deuxième espèce  $Y_n$  est parfois aussi appelée fonction de Neumann cylindrique et notée  $N_n$ .

Les expressions B.15 et B.16 présentent un terme de décroissance en amplitude en  $1/\sqrt{\xi}$ , donc en  $1/\sqrt{r}$ , et un terme propagatif en  $e^{\pm i\xi}$ , c'est-à-dire en  $e^{\pm i\omega r}$ . Lorsque l'on utilise la convention de temps  $e^{-i\omega t}$ , ceci signifie que les fonctions de Hankel  $H_n^{(1)}$  et  $H_n^{(2)}$  représentent des ondes cylindriques se propageant respectivement dans le sens des  $r$  croissants (ondes divergentes), et dans le sens des  $r$  décroissants (ondes convergentes). Remarquons qu'employer l'autre convention de temps possible, à savoir  $e^{i\omega t}$ , conduit au résultat inverse : la fonction  $H_n^{(1)}$  correspond alors à des ondes cylindriques convergentes, et la fonction  $H_n^{(2)}$  à des ondes cylindriques divergentes. Ceci est résumé dans le tableau B.1.

Convention	Fonction de Hankel	Type d'onde
$e^{-i\omega t}$	$H_n^{(1)}$	divergente
	$H_n^{(2)}$	convergente
$e^{i\omega t}$	$H_n^{(1)}$	convergente
	$H_n^{(2)}$	divergente

TABLE B.1 – Type d'onde cylindrique représenté par les fonction de Hankel selon la convention de temps choisie.

### Solution de l'équation de Helmholtz

Dans la configuration étudiée dans ce document, le milieu fluide est semi-infini. Le choix d'une solution de type onde propagative décrite par des fonctions de Hankel (voir équation B.12) est donc le plus adapté. L'application de la condition de rayonnement de Sommerfeld conduit à écarter le terme correspondant à une onde cylindrique convergente, se propageant dans le sens des  $r$  décroissants. L'amplitude complexe

$$p(r, \theta) = R_1 H_n^{(1)}(\omega r) (\Theta_1 \cos(n\theta) + \Theta_2 \sin(n\theta)), \tag{B.17}$$

avec  $n$  entier, et  $R_1$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  des constantes, est donc solution de l'équation d'onde B.1. Comme il n'y a pas de risque de confusion étant donné que seules des fonctions de Hankel de première espèce  $H_n^{(1)}$  interviennent dans la suite des calculs, celles-ci sont notées simplement  $H_n$  afin d'alléger les notations.

Pour obtenir une solution générale, on additionne toutes les combinaisons possibles pour les valeurs de  $n$  autorisées, c'est-à-dire que l'on somme sur tous les entiers. Par ailleurs, le repère est orienté de telle sorte que la pression en  $-\theta$  est égale à la pression en  $\theta$ . Pour respecter cette parité, seuls les termes en cosinus sont conservés. Ainsi, les solutions de l'équation de Helmholtz sont de la forme

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n H_n(\omega r) \cos(n\theta) \tag{B.18}$$

où  $n$  est entier et où  $A_n$  remplace les coefficients  $R_1$ ,  $\Theta_1$ , et  $\Theta_2$ . Les coefficients  $A_n$  sont ensuite déterminés grâce aux conditions aux limites du problème.

### B.1.2 Équations du mouvement dans un matériau élastique isotrope en coordonnées cylindriques

Les équations du mouvement dans un matériau à élasticité linéaire, isotrope et homogène, s'écrivent, sous forme adimensionnée et en fonction du déplacement,

$$(\lambda_j + 2\mu_j)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^j) - \mu_j\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}^j) = -\rho_j c_0^2 \omega^2 \mathbf{u}^j, \quad (\text{B.19})$$

avec  $\rho_j$  la masse volumique du matériau,  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  ses coefficients de Lamé, et  $c_0$  la célérité du son dans le fluide extérieur (apparaissant au cours de l'adimensionnement). Une solution exacte à ces équations élastodynamiques<sup>2</sup> peut être trouvée en décomposant le champ des déplacements à l'intérieur de la couche  $j$  au moyen d'un potentiel scalaire  $\varphi^j$  et d'un potentiel vecteur  $\psi^j$ ,

$$\mathbf{u}^j = -\nabla\varphi^j + \nabla \wedge \psi^j, \quad (\text{B.20})$$

la première composante étant de rotationnel nul, et la seconde de divergence nulle<sup>3</sup>. Dans le cas bidimensionnel traité ici, seule la composante suivant  $z$  du potentiel vecteur est non nulle. En introduisant la décomposition B.20 dans les équations B.19, et en prenant indépendamment la divergence et le rotationnel de l'expression ainsi obtenue, on montre que les équations du mouvement dans le matériau sont satisfaites si les potentiels  $\varphi^j$  et  $\psi_z^j$  vérifient les équations d'ondes

$$\nabla^2 \varphi^j + \left(\frac{\omega}{c_L^j}\right)^2 \varphi^j = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$\nabla^2 \psi_z^j + \left(\frac{\omega}{c_T^j}\right)^2 \psi_z^j = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$\text{avec } c_L^j = \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}} \quad \text{et} \quad c_T^j = \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}} \quad (\text{B.23})$$

(voir par exemple [Burel et al. \(2012\)](#)). L'équation B.21 correspond à une onde longitudinale de compression se propageant à la vitesse (adimensionnée)  $c_L^j$ , et l'équation B.22 à une onde transverse de cisaillement se propageant à la vitesse  $c_T^j$ . Comme détaillé dans le paragraphe précédent, la résolution d'équations d'onde en coordonnées cylindriques conduit à des sommes de modes, faisant intervenir des fonctions de Bessel. Ici, on obtient

$$\varphi^j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ B_n J_n(\omega_L^j r) + C_n Y_n(\omega_L^j r) \right] \cos(n\theta), \quad (\text{B.24})$$

$$\psi_z^j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ D_n J_n(\omega_T^j r) + E_n Y_n(\omega_T^j r) \right] \sin(n\theta), \quad (\text{B.25})$$

où  $\omega_L^j = \omega/c_L^j$  et  $\omega_T^j = \omega/c_T^j$ , et où les coefficients  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  et  $E_n$  sont à déterminer par application des conditions aux limites. L'équation B.20 permet ensuite de remonter aux déplacements dans la direction radiale et dans la direction tangentielle,

$$u_r^j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ -\omega_L^j \left( B_n J_n'(\omega_L^j r) + C_n Y_n'(\omega_L^j r) \right) + \frac{n}{r} \left( D_n J_n(\omega_T^j r) + E_n Y_n(\omega_T^j r) \right) \right] \cos(n\theta), \quad (\text{B.26})$$

$$u_\theta^j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ -\frac{n}{r} \left( B_n J_n(\omega_L^j r) + C_n Y_n(\omega_L^j r) \right) - \omega_T^j \left( D_n J_n'(\omega_T^j r) + E_n Y_n'(\omega_T^j r) \right) \right] \sin(n\theta), \quad (\text{B.27})$$

2. aussi appelées équations de Navier, ou bien de Navier-Lamé

3. décomposition dite de Helmholtz ou de Helmholtz-Hodge (ref?)

qui sont donc de la forme

$$u_r^j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{r,n}^j(r) \cos(n\theta), \quad (\text{B.28})$$

$$u_\theta^j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\theta,n}^j(r) \sin(n\theta). \quad (\text{B.29})$$

## B.2 Détails sur la résolution numérique des équations du mouvement dans le revêtement

### B.2.1 Méthode de type éléments finis pour la discrétisation radiale

#### B.2.1.1 Approximation nodale quadratique

On suppose que les déplacements à l'intérieur d'une couche sont de forme quadratique. Cela se traduit, pour chaque couche  $j$ , par l'existence de paramètres généralisés  $\gamma_n^j$  tels que

$$\begin{pmatrix} u_{\theta,n}^j(r) \\ u_{r,n}^j(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,n}^j \\ \gamma_{2,n}^j \\ \gamma_{3,n}^j \\ \gamma_{4,n}^j \\ \gamma_{5,n}^j \\ \gamma_{6,n}^j \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

soit

$$\mathbf{u}_n^j(r) = \mathbf{Q}(r) \boldsymbol{\gamma}_n^j. \quad (\text{B.31})$$

Comme on a choisi d'effectuer une approximation quadratique du déplacement, on utilise trois nœuds par élément pour déterminer les paramètres généralisés<sup>4</sup>. Le premier se situe au niveau de la frontière intérieure de la couche cylindrique, en  $r = r_{j-1}$ , le deuxième au centre de l'élément, c'est-à-dire en  $r = (r_{j-1} + r_j)/2$ , et le dernier se trouve au niveau de sa surface extérieure, en  $r = r_j$  (voir figure 2.3). Les déplacements nodaux s'écrivent eux aussi en fonction des paramètres  $\boldsymbol{\gamma}_n^j$ ,

$$\begin{pmatrix} u_{\theta,n}^j(r_j) \\ u_{r,n}^j(r_j) \\ u_{\theta,n}^j\left(\frac{r_j + r_{j-1}}{2}\right) \\ u_{r,n}^j\left(\frac{r_j + r_{j-1}}{2}\right) \\ u_{\theta,n}^j(r_{j-1}) \\ u_{r,n}^j(r_{j-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_j & r_j^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_j & r_j^2 \\ 1 & \frac{r_{j-1} + r_j}{2} & \left(\frac{r_{j-1} + r_j}{2}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{r_{j-1} + r_j}{2} & \left(\frac{r_{j-1} + r_j}{2}\right)^2 \\ 1 & r_{j-1} & r_{j-1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{j-1} & r_{j-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,n}^j \\ \gamma_{2,n}^j \\ \gamma_{3,n}^j \\ \gamma_{4,n}^j \\ \gamma_{5,n}^j \\ \gamma_{6,n}^j \end{pmatrix}, \quad (\text{B.32})$$

4. Dans le cas d'une approximation linéaire, on considérerait que chaque élément comporte deux nœuds.

ce que l'on notera

$$\mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathbf{A}^j \boldsymbol{\gamma}_n^j. \quad (\text{B.33})$$

En éliminant les paramètres généralisés  $\boldsymbol{\gamma}_n^j$  des systèmes B.31 et B.33, on peut exprimer le déplacement modal à n'importe quel endroit dans l'épaisseur d'une couche par interpolation des déplacements modaux de ses nœuds,

$$\mathbf{u}_n^j(r) = \mathbf{Q}(r) (\mathbf{A}^j)^{-1} \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j, \quad (\text{B.34})$$

ce que l'on écrira

$$\mathbf{u}_n^j(r) = \mathbf{N}^j(r) \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j, \quad (\text{B.35})$$

avec donc  $\mathbf{N}^j = \mathbf{Q} (\mathbf{A}^j)^{-1}$ .

L'utilisation de cette approximation nodale dans les relations déformations-déplacements 2.17 permet d'exprimer les déformations en n'importe quel endroit dans l'épaisseur d'une couche en fonction des déplacements des 3 nœuds de cette couche. Cela se traduit par la relation

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^j(r) = \mathbf{B}_n^j \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathbf{L} \mathbf{N}^j \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j = \mathbf{L} \mathbf{Q} (\mathbf{A}^j)^{-1} \mathbf{u}_{n,\text{nœuds}}^j. \quad (\text{B.36})$$

L'objectif est de calculer les matrices de raideur et de masse

$$\mathbf{K}_n^j = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \mathbf{B}_n^{jH} \mathbf{D}^j \mathbf{B}_n^j r \, dr, \quad (\text{B.37})$$

$$\mathbf{M}^j = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{\rho_j}{\rho_0} \mathbf{N}^{jH} \mathbf{N}^j r \, dr. \quad (\text{B.38})$$

Pour cela, on pourrait partir des expressions explicites de  $\mathbf{B}_n^j(r)$  et  $\mathbf{N}^j(r)$ , mais il est plus intéressant d'utiliser les formes « développées » de ces matrices, faisant intervenir la matrice  $(\mathbf{A}^j)^{-1}$ . En effet, celle-ci ne dépend pas de la variable  $r$  et peut donc être sortie de l'intégrale, ce qui conduit à

$$\mathbf{K}_n^j = (\mathbf{A}^j)^{-1H} \left( \int_{r_{j-1}}^{r_j} (\mathbf{L} \mathbf{Q})^H \mathbf{D}^j \mathbf{L} \mathbf{Q} r \, dr \right) (\mathbf{A}^j)^{-1}, \quad (\text{B.39})$$

$$\mathbf{M}^j = \frac{\rho_j}{\rho_0} (\mathbf{A}^j)^{-1H} \left( \int_{r_{j-1}}^{r_j} \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} r \, dr \right) (\mathbf{A}^j)^{-1}, \quad (\text{B.40})$$

en tenant compte du fait que l'on considère des matériaux homogènes, pour lesquels le coefficient  $\rho_j/\rho_0$  est constant sur chaque couche. L'expression de la matrice  $(\mathbf{A}^j)^{-1}$  est

$$(\mathbf{A}^j)^{-1} = \left( \frac{a}{h_j} \right)^2 \begin{pmatrix} r_{j-1}(r_{j-1} + r_j) & 0 & -4r_{j-1}r_j & 0 & r_j(r_{j-1} + r_j) & 0 \\ -(3r_{j-1} + r_j) & 0 & 4(r_{j-1} + r_j) & 0 & -(r_{j-1} + 3r_j) & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & r_{j-1}(r_{j-1} + r_j) & 0 & -4r_{j-1}r_j & 0 & r_j(r_{j-1} + r_j) \\ 0 & -(3r_{j-1} + r_j) & 0 & 4(r_{j-1} + r_j) & 0 & -(r_{j-1} + 3r_j) \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.41})$$

## B.2.1.2 Matrice de masse

Le produit matriciel  $Q^H Q$  intervenant dans la matrice de masse est donné par

$$Q^H Q = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ r & r^2 & r^3 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & r^3 & r^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & r^2 \\ 0 & 0 & 0 & r & r^2 & r^3 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & r^3 & r^4 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

Chacun des coefficients de cette matrice est multiplié par  $r$  avant d'être intégré entre  $r_{j-1}$  et  $r_j$ . Cela donne

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} Q^H Q r dr = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.43})$$

avec

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r_j^2 - r_{j-1}^2}{2}, & x_3 &= \frac{r_j^3 - r_{j-1}^3}{3}, & x_4 &= \frac{r_j^4 - r_{j-1}^4}{4}, \\ x_5 &= \frac{r_j^5 - r_{j-1}^5}{5}, & x_6 &= \frac{r_j^6 - r_{j-1}^6}{6}. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

## B.2.1.3 Matrice de raideur

Pour calculer la matrice de raideur, il faut disposer des expressions des matrices  $LQ$  et  $D^j$ , soit

$$LQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2r \\ \frac{in}{r} & in & inr & \frac{1}{r} & 1 & r \\ -\frac{1}{r} & 0 & r & \frac{in}{r} & in & inr \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^j = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \begin{pmatrix} c_{11}^j & c_{12}^j & 0 \\ c_{12}^j & c_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^j \end{pmatrix}. \quad (\text{B.45})$$

Par multiplications, on obtient la matrice (6, 6) correspondant à  $(LQ)^H D^j LQ$ . Chaque coefficient de cette matrice est ensuite multiplié par  $r$  et intégré entre  $r_{j-1}$  et  $r_j$ , ce qui conduit à la matrice

hermitienne

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} (\mathbf{LQ})^H \mathbf{D}^j \mathbf{LQ} r \, dr = \begin{pmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j & m_{13}^j & m_{14}^j & m_{15}^j & m_{16}^j \\ \overline{m_{12}^j} & m_{22}^j & m_{23}^j & m_{24}^j & m_{25}^j & m_{26}^j \\ \overline{m_{13}^j} & \overline{m_{23}^j} & m_{33}^j & m_{34}^j & m_{35}^j & m_{36}^j \\ \overline{m_{14}^j} & \overline{m_{24}^j} & \overline{m_{34}^j} & m_{44}^j & m_{45}^j & m_{46}^j \\ \overline{m_{15}^j} & \overline{m_{25}^j} & \overline{m_{35}^j} & \overline{m_{45}^j} & m_{55}^j & m_{56}^j \\ \overline{m_{16}^j} & \overline{m_{26}^j} & \overline{m_{36}^j} & \overline{m_{46}^j} & \overline{m_{56}^j} & m_{66}^j \end{pmatrix} \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} m_{11}^j &= (n^2 c_{22}^j + c_{33}^j) x_0, & m_{33}^j &= (n^2 c_{22}^j + c_{33}^j) x_4, \\ m_{12}^j &= (n^2 c_{22}^j) x_1, & m_{34}^j &= -in (c_{22}^j - c_{33}^j) x_2, \\ m_{13}^j &= (n^2 c_{22}^j - c_{33}^j) x_2, & m_{35}^j &= -in (c_{12}^j + c_{22}^j - c_{33}^j) x_3, \\ m_{14}^j &= -in (c_{22}^j + c_{33}^j) x_0, & m_{36}^j &= -in (2c_{12}^j + c_{22}^j - c_{33}^j) x_4, \\ m_{15}^j &= -in (c_{12}^j + c_{22}^j + c_{33}^j) x_1, & m_{44}^j &= (c_{22}^j + n^2 c_{33}^j) x_0, \\ m_{16}^j &= -in (2c_{12}^j + c_{22}^j + c_{33}^j) x_2, & m_{45}^j &= (c_{12}^j + c_{22}^j + n^2 c_{33}^j) x_1, \\ m_{22}^j &= n^2 c_{22}^j x_2, & m_{46}^j &= (2c_{12}^j + c_{22}^j + n^2 c_{33}^j) x_2, \\ m_{23}^j &= n^2 c_{22}^j x_3, & m_{55}^j &= (c_{11}^j + 2c_{12}^j + c_{22}^j + n^2 c_{33}^j) x_2, \\ m_{24}^j &= -(in c_{22}^j) x_3, & m_{56}^j &= (2c_{11}^j + 3c_{12}^j + c_{22}^j + n^2 c_{33}^j) x_3, \\ m_{25}^j &= -in (c_{12}^j + c_{22}^j) x_2, & m_{66}^j &= (4c_{11}^j + 4c_{12}^j + c_{22}^j + n^2 c_{33}^j) x_4, \\ m_{26}^j &= -in (2c_{12}^j + c_{22}^j) x_3 \end{aligned}$$

avec  $x_2$  à  $x_4$  donnés en B.44 et

$$x_0 = \log \left( \frac{r_j}{r_{j-1}} \right), \quad x_1 = r_j - r_{j-1} = \frac{h_j}{a}. \quad (\text{B.47})$$

## B.2.2 Méthode de matrice de transfert et exponentielle matricielle

### B.2.2.1 Approximation de Padé

Une méthode populaire de calcul d'exponentielle est l'utilisation d'approximants de Padé. Il s'agit de fractions rationnelles de la forme

$$r_{km}(x) = \frac{p_{km}(x)}{q_{km}(x)} \quad (\text{B.48})$$

avec

$$p_{km}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{(k+m-j)! k! x^j}{(k+m)! (k-j)! j!} \quad \text{et} \quad q_{km}(x) = \sum_{j=0}^m \frac{(k+m-j)! m! (-x)^j}{(k+m)! (m-j)! j!} \quad (\text{B.49})$$

dont le développement en séries de Taylor au voisinage de 0 est identique à celui de la fonction exponentielle jusqu'à l'ordre  $k + m$ ,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} - r_{km}(x) = O(x^{k+m+1}). \quad (\text{B.50})$$

L'approximant de Padé  $r_{km}$  d'ordre  $[k, m]$  est donc une fraction dont le numérateur  $p_{km}$  est un polynôme de degré  $k$ , et dont le dénominateur  $q_{km}$  est un polynôme de degré  $m$ . Il est intéressant de choisir des approximants d'ordre  $[m, m]$ , qui, en plus de fournir de très bonnes approximations de la fonction exponentielle, ont un coût de calcul moindre (Sidje, 1998).

### B.2.2.2 Méthode de *scaling and squaring*

Cette approximation peut être utilisée pour évaluer des exponentielles matricielles de type  $\exp(\mathbf{A})$  avec  $\|\mathbf{A}\|$  relativement faible, puisqu'elle est obtenue par des développements limités au voisinage de 0. Pour pouvoir traiter le cas de matrices de norme plus élevée, on peut employer la méthode dite de *scaling and squaring*. L'idée est de diviser l'argument par une puissance de 2 de manière à obtenir un nouvel argument, de norme proche de 1, dont on peut calculer l'exponentielle par approximant de Padé. Il s'agit donc de choisir un entier naturel  $s$  tel que

$$\left\| \frac{\mathbf{A}}{2^s} \right\| \sim 1, \quad (\text{B.51})$$

et de calculer

$$\exp\left(\frac{\mathbf{A}}{2^s}\right) \approx r_{mm}\left(\frac{\mathbf{A}}{2^s}\right). \quad (\text{B.52})$$

On obtient ensuite l'exponentielle voulue par  $s$  élévations au carré successives,

$$\exp(\mathbf{A}) = \left(\exp\left(\frac{\mathbf{A}}{2^s}\right)\right)^{2^s} \approx \left(r_{mm}\left(\frac{\mathbf{A}}{2^s}\right)\right)^{2^s}. \quad (\text{B.53})$$

Ce principe est utilisé par différents algorithmes, avec des variantes quant au choix de la normalisation B.51, et par conséquent au choix de l'ordre  $m$  de l'approximant de Padé qui minimise alors l'erreur et le coût de calcul numérique. La fonction `expm` de MATLAB et l'algorithme PADM de Sidje (1998) (qui est celui employé dans le cadre de cette étude) utilisent un approximant de Padé d'ordre  $[6, 6]$ . Ward (1977) en a choisi pour sa part un d'ordre  $[8, 8]$ . D'après Higham (2005), ces choix ne sont pas optimaux. En prenant des approximants de Padé d'ordre  $[13, 13]$ , il est possible d'obtenir une meilleure approximation de la fonction exponentielle avec un nombre d'opérations inférieur et un *scaling* moins sévère ( $\|2^{-s}\mathbf{A}\| \leq 5.4$  contre  $\|2^{-s}\mathbf{A}\|_{\infty} \leq 0.5$  dans l'algorithme de Sidje (1998)). La réduction de la norme de  $\mathbf{A}$  étant moins importante, le nombre d'élévations au carré à la fin de la procédure est lui aussi moins important, ce qui est bénéfique dans la mesure où chaque élévation au carré amplifie les erreurs d'arrondis de l'évaluation initiale de  $\exp(2^{-s}\mathbf{A})$ . Ceci n'est signalé ici que de manière informative : étant donné le faible nombre d'opérations du programme dans lequel nous avons besoin de calculer des exponentielles matricielles, l'algorithme de Sidje basé sur l'utilisation de l'approximant de Padé d'ordre  $[6, 6]$  est tout à fait suffisant.



## Annexe C

# Informations techniques sur le PMP

Ci-dessous figurent les données communiquées par le fournisseur du film de polyméthylpentène, Goodfellow.

Common Brand Names: TPX®

General Description: General Description : A linear isotactic polyolefin more properly called poly 4-methyl pentene-1 which is made by Ziegler-Natta type catalysis (see also General Information under Polyethylene - Low Density). Commercially available grades are copolymers. It is semi-crystalline, transparent and usually colourless (one common grade is slightly yellow), very light and - for a polyolefin - expensive. [Its density of  $0.83\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$  is very close to the theoretical minimum for thermoplastics]. Its properties are reasonably similar to those of other polyolefins, compared to which it is more brittle and more gas permeable. It has a higher melting point (240C) than most polyolefins and retains form stability up to temperatures close to this i.e. it softens more slowly with increasing temperature than is normal for thermoplastics. It has good release characteristics and good high frequency electrical and valuable acoustic/ultrasonic properties.

Applications include medical and laboratory apparatus, microwave components and cookware and electronic components.

Grades of TPX®

TPX® is available in a range of grades with different melt flow rates (MFR) covering injection moulding, extrusion, blow moulding and coating. The list shown below gives details of the main processing methods and the MFR for each grade:

DX845 MFR of 9 g/10 min - highly recommended for film extrusion, possible use for injection moulding, fibre extrusion and blow moulding.

RT31 & RT31XB MFR of 21 g/10 min - highly recommended for injection moulding, possible use for film and fibre extrusion.

MX002 MFR of 21 g/10 min - highly recommended for injection moulding, film and mandrel extrusion, possible use for fibre extrusion and blow moulding.

MX002O MFR of 21 g/10 min - highly recommended for injection moulding and film extrusion, possible use for mandrel and fibre extrusion, and blow moulding.

MX004 & MX004XB MFR of 25 g/10 min - highly recommended for injection moulding, film and mandrel extrusion, possible use for fibre extrusion and blow moulding.

RT18 & RT18XB MFR of 26 g/10 min - highly recommended for injection moulding, possible use for film and fibre extrusion.

DX231 & DX310 MFR of 100 g/10 min - highly recommended for paper coating and possible use for fibre extrusion.

DX350 MFR of 110 g/10 min - highly recommended for paper coating and possible use for fibre extrusion.

DX820 MFR of 180 g/10 min - highly recommended for paper coating and fibre extrusion.

RT31 & RT31XB: low odor grades RT18XB, RT31XB & MX004XB: blue tint grades

#### Chemical Resistance

Acids - concentrated	Good-Fair
Acids - dilute	Good
Alcohols	Good
Alkalis	Good
Aromatic hydrocarbons	Fair-Poor
Greases and Oils	Good-Fair
Halogenated Hydrocarbons	Fair-Poor
Halogens	Fair-Poor
Ketones	Good-Fair

#### Electrical Properties

Dielectric constant @1MHz	2.12
Dissipation factor @ 1kHz	0.0002
Volume resistivity ( Ohmcm )	$>10^{16}$

#### Mechanical Properties

Elongation at break ( % )	15
Hardness - Rockwell	R85
Izod impact strength ( J m <sup>-1</sup> )	49
Tensile modulus ( GPa )	1.5

Tensile strength ( MPa )      25.5

#### Physical Properties

Density (  $\text{g cm}^{-3}$  )                      0.835  
 Flammability                                      HB  
 Limiting oxygen index ( % )              17  
 Refractive index                                1.463  
 Resistance to Ultra-violet                Poor  
 Water absorption - over 24 hours ( % ) 0.01

#### Thermal Properties

Coefficient of thermal expansion (  $\times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ) 117  
 Heat-deflection temperature - 0.45MPa ( C ) 100  
 Heat-deflection temperature - 1.8MPa ( C ) 40  
 Lower working temperature ( C )            -20 to -40  
 Specific heat (  $\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  )              2000  
 Thermal conductivity @23C (  $\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ) 0.17  
 Upper working temperature ( C )            75-115

#### Properties for Polymethylpentene Film

Property	Value
Permeability to Carbon Dioxide @25C	$\times 10^{-13} \text{ cm}^3 \cdot \text{cm cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ 70
Permeability to Nitrogen @25C	$\times 10^{-13} \text{ cm}^3 \cdot \text{cm cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ 5
Permeability to Oxygen @25C	$\times 10^{-13} \text{ cm}^3 \cdot \text{cm cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ 20
Permeability to Water @38C	$\times 10^{-13} \text{ cm}^3 \cdot \text{cm cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ 700



# Bibliographie

- M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. US Department of commerce, Dover, 1965. (Cité en pages 32, 42, 48 et 130.)
- F. AHMAD et A. RAHMAN : Acoustic scattering by transversely isotropic cylinders. *Journal of Engineering Science*, 38:325–335, 2000. (Cité en page 35.)
- A. AL  : Mantle cloak : invisibility induced by a surface. *Physical Review B*, 80(245115), 2009. (Cité en pages 2 et 22.)
- A. AL  et N. ENGHETA : Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings. *Physical Review E*, 72(016623), 2005. (Cité en page 20.)
- A. AL  et N. ENGHETA : Cloaking and transparency for collections of particles with metamaterial and plasmonic covers. *Optics Express*, 15(12):7578–7590, juin 2007a. (Cité en page 21.)
- A. AL  et N. ENGHETA : Plasmonic materials in transparency and cloaking problems : mechanism, robustness and physical insights. *Optics Express*, 15(6):3318–3332, mars 2007b. (Cité en page 21.)
- A. AL  et N. ENGHETA : Multifrequency optical invisibility cloak with layered plasmonic shells. *Physical Review Letters*, 100(113901), 2008a. (Cité en page 21.)
- A. AL  et N. ENGHETA : Plasmonic and metamaterial cloaking : physical mechanisms and potentials. *Journal of Optics A*, 10(093002), 2008b. (Cité en page 20.)
- A. AL  et N. ENGHETA : Cloaking a sensor. *Physical Review Letters*, 102(233901), 2009. (Cité en page 22.)
- M. F. ASHBY : *Choix des matériaux en conception mécanique*. Dunod, L’Usine Nouvelle, 2000. (Cité en pages 12, 58, 63 et 97.)
- A. BLAISE, C. LESUEUR, M. GOTTELAND et M. BARBE : On sound transmission into an orthotropic shell : comparison with koval’s results and understanding of phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 150(2):233–243, 1991. (Cité en page 51.)
- Y. I. BOBROVNITSKI  : Impedance theory of sound scattering : general relations. *Acoustical Physics*, 52(5):513–517, 2006a. (Cité en page 23.)
- Y. I. BOBROVNITSKI  : A new impedance-based approach to analysis and control of sound scattering. *Journal of Sound and Vibration*, 297:743–760, 2006b. (Cité en page 23.)
- Y. I. BOBROVNITSKI  : Theory of the new high-efficiency absorbing and nonscattering coatings. *Acoustical Physics*, 53(5):535–545, 2007. (Cité en page 23.)

- Y. I. BOBROVNITSKIĬ : A nonscattering coating for a cylinder. *Acoustical Physics*, 54(6):758–768, 2008. (Cité en pages xi, 23 et 24.)
- Y. I. BOBROVNITSKIĬ : Impedance acoustic cloaking. *New Journal of Physics*, 12(043049), avril 2010. (Cité en page 23.)
- M. BRUNEAU : *Manuel d'acoustique fondamentale*. Éditions Hermès, Paris, 1998. (Cité en pages 15 et 129.)
- V. T. BUCHWALD : Rayleigh wave in transversely isotropic media. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 14:293–317, 1961. (Cité en page 35.)
- A. BUREL, S. IMPÉRIALE et P. JOLY : Solving the homogeneous isotropic linear elastodynamics equations using potentials and finite elements. the case of the rigid boundary condition. *Numerical Analysis and Applications*, 5(2):136–143, 2012. (Cité en page 132.)
- L.-W. CAI et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Analysis of Cummer-Schurig acoustic cloaking. *New Journal of Physics*, 9(450), décembre 2007. (Cité en page 10.)
- L.-W. CAI et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Acoustical scattering by radially stratified scatterers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5), novembre 2008. (Cité en page 13.)
- H. CHEN et C. T. CHAN : Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials. *Applied Physics Letters*, 91(183518), novembre 2007. (Cité en page 8.)
- P.-Y. CHEN, M. FARHAT, S. GUENNEAU, S. ENOCH et A. ALÛ : Acoustic scattering cancellation via ultrathin pseudo-surface. *Applied Physics Letters*, 99(191913), 2011. (Cité en page 23.)
- W. Q. CHEN, Z. G. BIAN et H. J. DING : 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 41:947–964, 2004a. (Cité en pages 10 et 36.)
- W. Q. CHEN, Z. G. BIAN et H. J. DING : Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic fgm cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46:159–171, 2004b. (Cité en pages 10, 36 et 43.)
- Y. CHENG et X. J. LIU : Specific multiple-scattering process in acoustic cloak with multilayered homogeneous isotropic materials. *Journal of Applied Physics*, 104(104911), novembre 2008. (Cité en page 11.)
- Y. CHENG, F. YANG, J. Y. XU et X. J. LIU : A multilayer structured acoustic cloak with homogeneous isotropic materials. *Applied Physics Letters*, 92(151913), avril 2008. (Cité en pages 1, 10, 11 et 12.)
- S. A. CUMMER, B.-I. POPA, D. SCHURIG, D. R. SMITH, J. PENDRY, M. RAHM et A. STARR : Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell. *Physical Review Letters*, 100(024301), janvier 2008. (Cité en pages xi, 8 et 9.)
- S. A. CUMMER et D. SCHURIG : One path to acoustic cloaking. *New Journal of Physics*, 9(45), mars 2007. (Cité en pages 1, 6, 8, 11 et 21.)
- F. DELRIEU : Optimisation par méthode inverse d'un métamatériau de furtivité acoustique. Rapport technique, ONERA, DMAE, 2012. (Cité en pages xi, 19 et 20.)

- R. D. DOOLITTLE et H. ÜBERALL : Sound scattering by elastic cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 39(2):272–275, 1966. (Cité en page 35.)
- J. EDDY et K. LEWIS : Effective generation of pareto sets using genetic programming. In *ASME 2001, Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Pittsburgh, PA*, 2001. (Cité en page 64.)
- J. J. FARAN : Sound scattering by solid cylinders and spheres. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 23(4):405–418, juillet 1951. (Cité en page 35.)
- M. FARHAT, P.-Y. CHEN, S. GUENNEAU, S. ENOCH et A. AL  : Frequency-selective surface acoustic invisibility for three-dimensional immersed objects. *Physical Review B*, 86(174303), 2012. (Cité en pages xi, 23 et 24.)
- L. FLAX et W. G. NEUBAUER : Acoustic reflection from layered elastic absorptive cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2):307–312, février 1977. (Cité en page 35.)
- V. M. GARCÍA-CHOCANO, L. SANCHIS, A. DÍAZ-RUBIO, J. MARTÍNEZ-PASTOR, F. CERVERA, R. LLOPIS-PONTIVEROS et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Acoustic cloak for airborne sound by inverse design. *Applied Physics Letters*, 99(074102), 2011. (Cité en pages xi, 2, 18, 19, 26 et 27.)
- V. M. GARCÍA-CHOCANO, D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Reduced acoustic cloaks based on temperature gradients. *Applied Physics Letters*, 101(084103), 2012. (Cité en pages xi, 13 et 14.)
- G. C. GAUNAURD : Sonar cross section of a coated hollow cylinder in water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2):360–368, février 1977. (Cité en page 35.)
- P. GERMAIN : *Mécanique*.  cole Polytechnique, 1986. (Cité en page 8.)
- N. H. GOKHALE, J. L. CIPOLLA et A. N. NORRIS : Special transformations for pentamode acoustic cloaking. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(4), 2012. (Cité en pages 8, 16 et 17.)
- G. N. GREAVES, A. L. GREER, R. S. LAKES et T. ROUXEL : Poisson’s ratio and modern materials. *Nature materials*, 10:823–837, 2011. (Cité en page 34.)
- A. GREENLEAF, M. LASSAS et G. UHLMANN : Anisotropic conductivities that cannot be detected by eit. *Physiological Measurement*, 24(2):413–419, 2003. (Cité en pages 6 et 8.)
- M. D. GUILD : *Acoustic cloaking of pherical objects using thin elastic coatings*. Thèse de doctorat, The University of Texas at Austin, 2012. (Cité en pages xi, 15, 21 et 22.)
- M. D. GUILD, A. AL  et M. R. HABERMAN : Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(3):1355–1365, mars 2011a. (Cité en page 21.)
- M. D. GUILD, M. R. HABERMAN et A. AL  : Plasmonic cloaking and scattering cancelation for electromagnetic and acoustic waves. *Wave Motion*, 48:468–482, 2011b. (Cité en page 21.)
- M. D. GUILD, M. R. HABERMAN et A. AL  : Plasmonic-type acoustic cloak made of bilaminate shell. *Physical Review B*, 86(104302), 2012. (Cité en page 21.)

- S. M. HASHEMINEJAD et M. RAJABI : Acoustic resonance scattering from a submerged functionally graded cylindrical shell. *Journal of Sound and Vibration*, 302:208–228, 2007a. (Cité en pages 10, 36 et 43.)
- S. M. HASHEMINEJAD et M. RAJABI : Acoustic scattering characteristics of a thick-walled orthotropic cylindrical shell at oblique incidence. *Ultrasonics*, 47:32–48, 2007b. (Cité en page 51.)
- S. M. HASHEMINEJAD et N. SAFARI : Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, 280:101–125, 2005. (Cité en pages 31 et 35.)
- N. J. HIGHAM : The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 26(4):1179–1193, 2005. (Cité en pages 47 et 137.)
- F. HONARVAR, E. ENJILELA, A. N. SINCLAIR et A. MIRNEZAMI : Wave propagation in transversely isotropic cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 44:5236–5246, 2007. (Cité en page 35.)
- F. HONARVAR et A. N. SINCLAIR : Acoustic wave scattering from transversely isotropic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100:57–63, 1996. (Cité en page 35.)
- J. JAMALI, M. H. NAEI, F. HONARVAR et M. RAJABI : Acoustic scattering from functionally graded cylindrical shells. 63(1):25–56, 2011. (Cité en pages 10, 36, 43 et 51.)
- W. X. JIANG, T. J. CUI, X. M. YANG, H. F. MA et Q. CHENG : Shrinking an arbitrary object as one desires using metamaterials. *Applied Physics Letters*, 96(204101), 2011. (Cité en page 25.)
- M. KADIC, T. BÜCKMANN, R. SCHITTNY et M. WEGENER : On anisotropic versions of three-dimensional pentamode metamaterials. *New Journal of Physics*, 15(023029), 2013. (Cité en page 17.)
- M. KADIC, T. BÜCKMANN, N. STENGER, M. THIEL et M. WEGENER : On the practicability of pentamode mechanical metamaterials. *Applied Physics Letters*, 100(191901), 2012. (Cité en pages xi et 17.)
- L. R. KOVAL : On sound transmission into an orthotropic shell. *Journal of Sound and Vibration*, 63(1):51–59, 1979. (Cité en page 51.)
- U. LEONHARDT : Optical conformal mapping. *Science*, 312:1777–1780, 2006. (Cité en page 6.)
- U. LEONHARDT et T. TYC : Broadband invisibility by non-euclidean cloaking. *Science*, 323, 2009. (Cité en pages xi et 7.)
- T. P. MARTIN et G. J. ORRIS : Hybrid inertial method for broadband scattering reduction. *Applied Physics Letters*, 100(033506), janvier 2012. (Cité en pages xi, 11 et 25.)
- J. MEI, Z. LIU, W. WEN et P. SHENG : Effective dynamic mass density of composites. *Physical Review B*, 76(134205), 2007. (Cité en page 11.)
- G. W. MILTON, M. BRIANE et J. R. WILLIS : On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New Journal of Physics*, 8(248), octobre 2006. (Cité en page 6.)
- G. W. MILTON et A. V. CHERKAEV : Which elasticity tensors are realizable? *Journal of Engineering Materials and Technology*, 117(4), octobre 1995. (Cité en page 16.)

- G. W. MILTON et N.-A. NICOROVICI : On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance. *Proceedings of the Royal Society A*, 462:3027–3059, octobre 2006. (Cité en page 20.)
- I. MIRSKY : Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders, part i : theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 37:1016–1026, 1965. (Cité en page 35.)
- M. R. MOFAKHAMI, H. Hosseini TOUDESHPY et S. Hosseini HASHEMI : Noise reduction evaluation of multi-layered viscoelastic infinite cylinder under acoustic wave excitation. 15:551–572, 2008. (Cité en page 31.)
- C. MOLER et C. Van LOAN : Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 45(1):3–49, 2003. (Cité en page 47.)
- P. M. MORSE et H. FESHBACH : *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill Book Company and Kōgakusha Company, 1953. (Cité en page 35.)
- P. M. MORSE et K. U. INGARD : *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1968. (Cité en page 8.)
- B. A. MUNK : *Frequency Selective Surfaces : Theory and Design*. John Wiley and Sons, New York, 2000. (Cité en page 23.)
- A. N. NORRIS : Acoustic cloaking theory. *Proceedings of the Royal Society A*, 464:2411–2434, avril 2008. (Cité en pages xi, 6, 7, 8, 10 et 16.)
- A. N. NORRIS : Acoustic metafluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125:839–849, février 2009. (Cité en page 16.)
- A. N. NORRIS : Periodic metal structures for acoustic wave control. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130:2359, 2011. (Cité en page 16.)
- A. N. NORRIS et A. J. NAGY : Metal water : a metamaterial for acoustic cloaking. *In Phononics*, 2011. (Cité en page 16.)
- A. N. NORRIS et A. N. SHUVALOV : Elastic cloaking theory. *Wave Motion*, 48:525–538, 2011. (Cité en page 6.)
- Y. PAN, C. ROSSIGNOL et B. AUDOIN : Acoustic waves generated by a laser line pulse in a transversely isotropic cylinder. *Applied Physics Letters*, 82:4608–4610, 2003. (Cité en page 35.)
- J. B. PENDRY et J. LI : An acoustic metafluid : realizing a broadband acoustic cloak. *New Journal of Physics*, 11(115032), novembre 2008. (Cité en page 13.)
- J. B. PENDRY, D. SCHURIG et D. R. SMITH : Controlling electromagnetic fields. *Science*, 312, avril 2006. (Cité en pages 1, 6, 8 et 9.)
- B.-I. POPA, L. ZIGONEANU et S. A. CUMMER : Experimental acoustic ground cloak in air. *Physical Review Letters*, 106(253901), 2011. (Cité en page 25.)
- E. J. POST : *Formal structure of electromagnetics : general covariance and electromagnetics*. North-Holland, Amsterdam, 1962. (Cité en page 6.)

- D. RAINWATER, A. KERKHOFF, K. MELIN, J. C. SORIC, G. MORENO et A. ALÛ : Experimental verification of three-dimensional plasmonic cloaking in free space. *New Journal of Physics*, 14 (013054), 2012. (Cité en page 21.)
- A. J. ROMANO, P. B. ABRAHAM et E. G. WILLIAMS : A poynting vector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity analysis and source localization. part i : Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(3):1166–1175, mars 1990. (Cité en page 70.)
- A. G. ROMANOV et L. A. TOLOKONNIKOV : The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 75:595–600, 2011. (Cité en pages xi, xv, 48, 49, 50, 59 et 98.)
- J. SÁNCHEZ-DEHESA, M. I. ANGELOV, F. CERVERA et L.-W. CAI : Sound control by temperature gradients. *Applied Physics Letters*, 95(204102), 2009. (Cité en page 13.)
- L. SANCHIS, V. M. GARCÍA-CHOCANO, R. LLOPIS-PONTIVEROS, A. CLIMENTE, J. MARTINEZ-PASTOR, F. CERVERA et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Three-dimensional axisymmetric cloak based on the cancellation of acoustic scattering from a sphere. *Physical Review Letters*, 110(124301), mars 2013. (Cité en pages xi, 2, 18, 19, 20, 26 et 27.)
- J. S. SASTRY et M. L. MUNJAL : Response of a multi-layered infinite cylinder to a plane wave excitation by means of transfer matrices. *Journal of Sound and Vibration*, 209(1):99–121, 1998. (Cité en page 36.)
- C. L. SCANDRETT, J. E. BOISVERT et T. R. HOWARTH : Acoustic cloaking using layered pentamode materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127:2856–2864, mai 2010. (Cité en page 16.)
- C. L. SCANDRETT, J. E. BOISVERT et T. R. HOWARTH : Broadband optimization of a pentamode-layered spherical acoustic waveguide. *Wave Motion*, 48(6):505–514, septembre 2011. (Cité en page 17.)
- M. SCHOENBERG et P. N. SEN : Properties of a periodically stratified acoustic half-space and its relation to a biot fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 73:61–67, 1983. (Cité en pages 10, 11 et 119.)
- D. SCHURIG, J. J. MOCK, J. JUSTICE, S.A. CUMMER, J. B. PENDRY, A. F. STARR et D. R. SMITH : Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314:977–980, novembre 2006a. (Cité en page 6.)
- D. SCHURIG, J. B. PENDRY et D. R. SMITH : Calculation of material properties and ray tracing in transformation media. *Optics Express*, 14(21):9794–9804, 2006b. (Cité en page 7.)
- R. B. SIDJE : Expokit : a software package for computing matrix exponentials. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 24(1):130–156, 1998. (Cité en pages 47 et 137.)
- F. SIMON, F. MICHELI et M. LAVIEILLE : Absorption acoustique de liners fibreux en présence d'écoulement rasant chaud. Rapport technique RT 2/10387 DMSC / DMAE, ONERA, septembre 2006. (Cité en pages xii, xv, 60 et 61.)
- F. SIMON et S. PAUZIN : Structural intensity formulation and measurements validation in the case of composite multi-layered panels. *Acta Acustica*, 92(2), 2006. (Cité en page 70.)

- E. A. SKELTON et J. H. JAMES : Acoustics of an anisotropic layered cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 161(2):251–264, 1993. (Cité en pages xi, xv, 36, 39, 41, 51, 52 et 53.)
- D. TORRENT, A. HÅKANSSON, F. CERVERA et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Homogenization of two-dimensional clusters of rigid rods in air. *Physical Review Letters*, 96(204302), mai 2006. (Cité en pages 13 et 14.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Effective parameters of clusters of cylinders embedded in a nonviscous fluid or gas. *Physical Review B*, 74(224305), décembre 2006. (Cité en pages 13 et 14.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Acoustic metamaterials for new two-dimensional sonic devices. *New Journal of Physics*, 9(323), septembre 2007. (Cité en page 25.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Acoustic cloaking in two-dimensions : a feasible approach. *New Journal of Physics*, 10(063015), juin 2008a. (Cité en pages 1, 7, 10 et 11.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Anisotropic mass density by two-dimensional acoustic metamaterials. *New Journal of Physics*, 10(023004), février 2008b. (Cité en pages 11 et 13.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Sound scattering by anisotropic metafluids based on two-dimensional sonic crystals. *Physical Review B*, 79(174104), mai 2009. (Cité en page 14.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Anisotropic mass density by radially periodic fluid structures. *Physical Review Letters*, 105(174301), octobre 2010. (Cité en pages xi, 13 et 14.)
- D. TORRENT et J. SÁNCHEZ-DEHESA : Broadband acoustic cloaks based on the homogenization of layered materials. *Wave Motion*, 48(6):497–504, septembre 2011. (Cité en page 12.)
- Y. URZHUMOV, F. GHEZZO, J. HUNT et D. R. SMITH : Acoustic cloaking transformations from attainable material properties. *New Journal of Physics*, 12(073014), juillet 2010. (Cité en pages 8, 10, 11, 12, 13, 17 et 25.)
- A. J. WARD et J. B. PENDRY : Refraction and geometry in maxwell’s equations. *Journal of Modern Optics*, 43(4):773–793, 1996. (Cité en page 6.)
- R. C. WARD : Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate. *Society for Industrial and Applied Mathematics, Journal on Numerical Analysis*, 14(4):600–610, 1977. (Cité en page 137.)
- R. M. WHITE : Elastic wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 30(8):771–785, août 1958. (Cité en page 35.)
- E. G. WILLIAMS : Structural intensity in thin cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(4):1615–1622, avril 1991. (Cité en page 70.)
- E. G. WILLIAMS : *Fourier acoustics, sound radiation and nearfield acoustical holography*. Academic Press, 1998. (Cité en pages 36, 129 et 130.)
- B. ZHANG, H. DONG et K. WANG : Multipole sources in a fluid-filled borehole surrounded by a transversely isotropic elastic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(4):2546–2555, 1995. (Cité en page 35.)
- S. ZHANG : *Acoustic metamaterial design and applications*. Thèse de doctorat, University of Illinois, 2010. (Cité en page 15.)

S. ZHANG, C. XIA et N. FANG : Broadband acoustic cloak for ultrasound waves. *Physical Review Letters*, 106(024301), janvier 2011. (Cité en pages xi, 2, 15, 26 et 27.)

# On the feasibility of a 2D acoustic cloak using layers of elastic materials

Cécile Dutrion, Frank Simon

Department of Aerodynamics and Energetics Modeling,  
 Onera - The French Aerospace Lab  
 \*corresponding author, E-mail: cecile.dutrion@onera.fr

## Abstract

This paper examines the possibility of designing an acoustic cloak using a multilayered elastic cylindrical shell to eliminate the acoustic field scattered from a rigid cylinder impinged by plane waves. This scattered field is calculated by a semi-analytical code and depends on the dimensional and mechanical characteristics of the elastic layers. Optimization by genetic algorithm is led to determine the characteristics of the layers minimizing the scattering. Realizable elastic coatings leading to scattering reduction are eventually proposed.

## 1. Introduction

In the last years, different methods have been proposed to make an obstacle transparent to acoustic waves. There are two major approaches.

The first one is based on transformational acoustics and consists in designing a cloak able to guide waves around an object, without scattering. Indeed, thanks to a coordinate transformation method similar to that employed by Pendry [1] in the electromagnetic domain, Cummer and Schurig [2] demonstrated that perfect acoustic cloaking could be achieved by surrounding the obstacle with a specific anisotropic and inhomogeneous fluid. No such material can be found in nature, however the recent development of metamaterials offered new possibilities, and lately, some experimental realizations of materials having effective properties close to those prescribed by the transformational acoustics theory have been reported [3, 4].

The second type of solutions, called scattering cancellation techniques, has been introduced by Alù and Engheta [5]. The idea is to design a layer that permits a drastic reduction of the total scattering cross-section of the obstacle over a given frequency bandwidth. This approach has first been developed for electromagnetic cloaking, and has been extended afterwards to acoustic waves. Different proposals have been made. Bobrovnikskii [6, 7] studied the possibility of realizing coatings with tailored surface impedances. Chen and Farhat [8, 9] proposed a pattern structure with appropriate acoustic surface impedance leading to significant reduction of the scattering of a sphere. In a different way, but still relying on the minimization of the scattered field, García-Chocano *et al.* [10] designed an acoustic cloak for a cylindrical obstacle by surrounding it with an important number of cylinders of small diameter appropriately placed

to minimize the scattering. Guild [11, 12] showed numerically that a drastic scattering reduction could be achieved with a single isotropic layer wrapped around an elastic or fluid sphere.

In this study, a scattering cancellation approach is adopted. We examine the possibility of acoustic scattering reduction with devices based on elastic vibrations. The aim is to determine if layers of elastic materials could be employed to significantly reduce the scattering in the case of a rigid cylinder submitted to normal plane waves. First, the method used to evaluate the scattered pressure field in this configuration is described. Then, the inverse problem consisting in searching the parameters of the layers allowing a reduction of the acoustic scattering is exposed. The results of numerical minimization using genetic algorithm in the case of a bi-layer coating fixed on a rigid cylinder are presented, and finally a realizable configuration is proposed.

## 2. Evaluation of the scattered pressure field

### 2.1. Statement of the problem

Let us consider an infinite rigid cylinder of radius  $a$  placed in a fluid of mass density  $\rho$  and speed of sound  $c$ . A coating made of  $N$  layers of orthotropic viscoelastic materials is fixed on it. A plane acoustic wave of angular frequency  $\omega$  is impinging normally on the covered cylinder.  $e^{-i\omega t}$  harmonic time dependence is assumed. Coordinates systems are chosen such that the direction of the incident wave coincides with the  $x$ -axis in cartesian coordinates and corresponds to  $\theta = \pi$  in cylindrical coordinates. The geometry of the problem is depicted in Fig. 1.

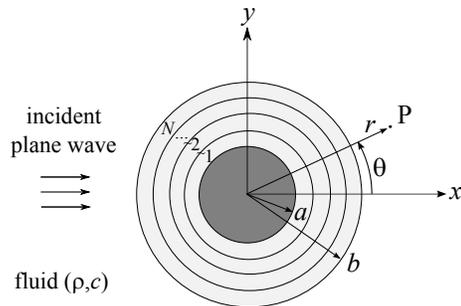


Figure 1: Multilayered coating made of  $N$  orthotropic viscoelastic materials and fixed on a rigid cylinder excited by a plane wave.

## 2.2. Pressure field in the exterior fluid

The acoustic pressure field in the exterior fluid  $p$  satisfies the Helmholtz equation

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

where  $k = \omega/c$  is the wave number. This pressure field can be splitted up into two parts: the incident pressure  $p_{inc}$  and the scattered pressure  $p_{scat}$ . The scattered pressure is composed of a reflected part  $p_{refl}$ , corresponding to the reflection of the incident wave on a rigid cylinder of radius  $b$ , and a radiated part  $p_{el}$ , due to the vibration of the surface of the elastic coating. The sum of the incident pressure and the reflected pressure forms the blocked pressure.

$$p = \underbrace{p_{inc} + p_{refl}}_{p_{blocked}} + p_{el} \quad (2)$$

The aim is to cancel the scattered pressure, that is to say to tailor the elastic coating so that the radiated pressure  $p_{el}$  cancels the reflected one  $p_{refl}$ .

### 2.2.1. Incident pressure

The pressure due to a plane wave of amplitude  $p_0$  travelling in the positive  $x$ -direction is usually written

$$p_{inc} = p_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (3)$$

but it can also be represented as a series of cylindrical Bessel functions of integer order as follows:

$$p_{inc} = p_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \epsilon_n J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (4)$$

where

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2 & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

### 2.2.2. Scattered pressure

The scattered pressure must satisfy the Helmholtz equation and the Sommerfeld radiation condition (*i.e.* there can only be cylindrical waves travelling from the scatterer to infinity). Thus the scattered pressure can be written

$$p_{scat} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\omega) H_n(kr) \cos(n\theta) \quad (5)$$

where  $A_n(\omega)$  is the unknown scattering coefficient and  $H_n(x)$  is the cylindrical Hankel function of the first kind of order  $n$ .

The scattering coefficient  $A_n(\omega)$  is determined using the boundary condition on the outer surface of the coating, stating that the acoustic radial velocity (resp. displacement) at  $r = b$  is equal to the radial velocity (resp. displacement) of the external surface of the coating. Thanks to the projection of the linearized Euler equation in the radial direction

$$\omega^2 \rho u_r = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (6)$$

we obtain a relation between the displacement  $u_r^N(b, \theta)$  of the external surface of the coating and the unknown scattering coefficient  $A_n(\omega)$ :

$$u_r^N(b, \theta) = \frac{e^{-i\omega t}}{\omega \rho c} \sum_{n=0}^{+\infty} [p_0 i^n \epsilon_n J'_n(kb) + A_n(\omega) H'_n(kb)] \cos(n\theta). \quad (7)$$

Thus, it is necessary to study the vibrations of the coating excited by a plane wave. A semi-analytical code has been developed to solve the equations of orthotropic elasticity in cylindrical configuration, evaluate  $u_r^N(b, \theta)$ , and finally  $p_{scat}$ .

## 2.3. Vibration analysis

In each layer  $k$  considered as linearly elastic medium, the equations of motion are, in terms of stress components ( $\sigma_{ij}$ ) and in the polar coordinates system  $(r, \theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^k}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^k}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^k - \sigma_{\theta\theta}^k) &= \rho_s^k \frac{\partial^2 u_r^k}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^k}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^k}{r \partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^k &= \rho_s^k \frac{\partial^2 u_\theta^k}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\rho_s^k$  is the mass density of the solid material composing the layer  $k$ , and  $(u_r, u_\theta)$  represents the material displacement.

For a cylindrically orthotropic material, the generalized Hooke's law can be written as:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^k \\ \sigma_{\theta\theta}^k \\ \sigma_{r\theta}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^k & c_{12}^k & 0 \\ c_{12}^k & c_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{rr}^k \\ \epsilon_{\theta\theta}^k \\ 2\epsilon_{r\theta}^k \end{pmatrix} \quad (9)$$

where  $c_{ij}$  are the elastic constants, and  $\epsilon_{ij}$  are strain components.

Moreover the strain components are related to the displacements by the equations:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr}^k &= \frac{\partial u_r^k}{\partial r}, \\ \epsilon_{\theta\theta}^k &= \frac{\partial u_\theta^k}{r \partial \theta} + \frac{u_r^k}{r}, \\ \epsilon_{r\theta}^k &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r^k}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^k}{\partial r} - \frac{u_\theta^k}{r} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

In the case of orthotropic material, the system obtained by substitution of (9) and (10) into (8) is not readily solvable analytically. Therefore two approximate methods have been employed here.

### 2.3.1. Method 1

The first method was proposed by Skelton and James [13] and is based on a wave number domain approach and approximations classically used in the finite element method.

Circumferential variations of field quantities are represented by Fourier series, which gives, for instance for the

displacements:

$$\begin{pmatrix} u_{\theta}^k \\ u_r^k \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \begin{pmatrix} u_{\theta,n}^k \\ u_{r,n}^k \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (11)$$

To take into account the propagation of waves in the radial direction due to a possible important thickness or softness of the elastic materials, spectral displacements are represented by quadratic functions in  $r$ , and radial variations of other field quantities are approximated by the finite element method. In each layer, the dynamic stiffness matrix  $\mathbf{S}_n^k$  is calculated using a method of minimization of energy functional, as described in [13, 14]. It relates spectral displacements  $\mathbf{u}_n^k$  and spectral excitations  $\mathbf{F}_n^k$  at the inner and outer surfaces of the element ( $r = a_{k-1}$  and  $r = a_k$ ) and can be written

$$\mathbf{S}_n^k \mathbf{u}_n^k = \mathbf{f}_n^k \quad (12)$$

with  $\mathbf{u}_n^k = \left( u_{\theta,n}^k(a_k), u_{r,n}^k(a_k), u_{\theta,n}^k(a_{k-1}), u_{r,n}^k(a_{k-1}) \right)^T$  and  $\mathbf{f}_n^k = \left( f_{\theta,n}^k(a_k), f_{r,n}^k(a_k), f_{\theta,n}^k(a_{k-1}), f_{r,n}^k(a_{k-1}) \right)^T$ .

A spectral dynamic stiffness ‘‘matrix’’ is also defined for the exterior fluid, where it can be derived from equations (5), (7) and (11) that

$$\rho\omega c \frac{H_{|n|}(kb)}{H'_{|n|}(kb)} u_{r,n}^N(b) = f_{r,n}(b). \quad (13)$$

The  $N$  element stiffness matrices are assembled together with the matrix of the exterior fluid in a  $(2N+2) \times (2N+2)$  block matrix, which gives the following matrix equation, expressing the continuity of displacements and stresses at layer interfaces:

$$\mathbf{Z}_n \mathbf{u}_n = \mathbf{e}_n, \quad (14)$$

where  $\mathbf{Z}_n$  is the system spectral stiffness matrix,  $\mathbf{u}_n$  is a vector containing the spectral displacements at the interfaces, and  $\mathbf{e}_n$  a vector containing the spectral excitations at the interfaces.

Boundary conditions are applied (no displacement at the inner surface and radial excitation due to the blocked pressure on the outer surface). Finally the solution of the system of equations (14) gives the spectral displacements at the layer interfaces, and particularly at the outer surface, which allows the determination of the scattered field in all the exterior fluid.

### 2.3.2. Method 2

The second method, similar to that employed by Chen [15], Hasheminejad [16] and Jamali [17], is based on state space formulation, wave function expansion and transfer matrix approach.

Equations (8), (10) and (9) may be written as follows:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^k}{\partial r} = \mathbf{M}^k \mathbf{Y}^k, \quad (15)$$

where  $\mathbf{Y}^k = \left( u_{\theta}^k, u_r^k, \sigma_{rr}^k, \sigma_{r\theta}^k \right)^T$  is called the state vector and  $\mathbf{M}^k$  is a  $4 \times 4$  complex matrix given in appendix.

The state vector  $\mathbf{Y}^k$  is expanded in terms of unknown modal coefficients as

$$\mathbf{Y}^k = \begin{pmatrix} u_{\theta}^k \\ u_r^k \\ \sigma_{rr}^k \\ \sigma_{r\theta}^k \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} bu_{\theta,n}^k(\xi) \sin(n\theta) \\ bu_{r,n}^k(\xi) \cos(n\theta) \\ c_{33}^N \sigma_{rr,n}^k(\xi) \cos(n\theta) \\ c_{33}^N \sigma_{r\theta,n}^k(\xi) \sin(n\theta) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

where  $\xi$  is the dimensionless radial coordinate  $\xi = r/b$ .

The orthogonality of trigonometric functions gives

$$\frac{d\mathbf{V}_n^k}{d\xi} = \mathbf{P}_n^k(\xi) \mathbf{V}_n^k, \quad (17)$$

where  $\mathbf{V}_n^k = \left( u_{\theta,n}^k, u_{r,n}^k, \sigma_{rr,n}^k, \sigma_{r\theta,n}^k \right)^T$  is the modal state vector. The modal matrix  $\mathbf{P}_n^k$  is given in appendix.

Layers are assumed to be thin enough to consider the matrix  $\mathbf{P}_n^k(\xi)$  constant within each layer. This constant matrix can be evaluated at  $\xi = \xi_{k-1}$ , the inner interface of the  $k$ -th layer. Then, it comes:

$$\mathbf{V}_n^k(\xi) = \exp[(\xi - \xi_{k-1})\mathbf{P}_n^k(\xi_{k-1})] \mathbf{V}_n^k(\xi_{k-1}), \quad (18)$$

where  $\xi_{k-1} \leq \xi \leq \xi_k$  and  $k = 1, 2, \dots, N$ , which gives at the outer surface of the  $k$ -th layer:

$$\mathbf{V}_n^k(\xi_k) = \exp[h_k \mathbf{P}_n^k(\xi_{k-1})/b] \mathbf{V}_n^k(\xi_{k-1}), \quad (19)$$

where  $h_k$  is the thickness of the considered layer.

For each layer, the state vector at the outer surface is related to the state vector at the inner surface. Continuity conditions at all interfaces between layers enable to relate the state variables at the outer surface of the coating ( $\xi_N = 1$ ) to the state variables at its inner surface ( $\xi_0 = a/b$ ).

$$\mathbf{V}_n^N(\xi_N) = \mathbf{T}_n \mathbf{V}_n^1(\xi_0), \quad (20)$$

with

$$\mathbf{T}_n = \prod_{k=N}^1 \exp[h_k \mathbf{P}_n^k(\xi_{k-1})/b] \quad (21)$$

the global modal transfer matrix.

The boundary conditions at the inner and outer surfaces of the coating are given by:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^N(b, \theta) &= -p(b, \theta) \\ \sigma_{r\theta}^N(b, \theta) &= 0 \\ u_r^0(a, \theta) &= 0 \\ u_{\theta}^0(a, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Their transcription in conditions on the modal coefficients leads to the following system:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & T_{n,13} & T_{n,14} \\ 0 & -1 & T_{n,23} & T_{n,24} \\ 0 & -\beta_n & T_{n,33} & T_{n,34} \\ 0 & 0 & T_{n,43} & T_{n,44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\theta,n}^N(\xi_N) \\ u_{r,n}^N(\xi_N) \\ \sigma_{rr,n}^0(\xi_0) \\ \sigma_{r\theta,n}^0(\xi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

with

$$\alpha_n = -\frac{2p_0 i^{n+1} \epsilon_n}{\pi k b c_{33}^N H_n'(kb)}$$

$$\beta_n = -\frac{\omega \rho c b H_n(kb)}{c_{33}^N H_n'(kb)}.$$

The solution of this system gives, in particular,  $u_{r,n}^N(\xi_N)$ , which allows the calculation of the pressure in the exterior fluid:

$$p(r, \theta, \omega) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \underbrace{p_0 i^n \epsilon_n \left( J_n(kr) - \frac{J_n'(kb)}{H_n'(kb)} H_n(kr) \right)}_{p_{blocked}} + \underbrace{\omega \rho c b u_{r,n}^N(\xi_N) \frac{H_n(kr)}{H_n'(kb)}}_{p_{el}} \right] \cos(n\theta). \quad (24)$$

### 2.3.3. Discussion

Both methods rely on series expansion of the displacements with regard to the circumferential variable  $\theta$ . In the first case, general Fourier series is used, whereas the second case is based on particular solutions in sine and cosine valid for cylindrical configurations.

Another difference lies in the fact that the continuity of displacements and stresses at the interfaces is not written in the same way in the two approaches. In the first one, a  $(2N+2) \times (2N+2)$  matrix corresponding to the whole multi-layered shell is formed. In the second approach, the matrix corresponding to the total system is of constant size  $(4 \times 4)$ , independently of the number of layers. A comparison of the two methods in terms of computational time (cf Figure 2) showed that the CPU time increases linearly with the number of layers  $N$  with the first method, whereas it stays roughly constant with the second one, which is consistent with the above remark. Besides, it can be noted that method 2 is interesting for a significant number of layers ( $N \geq 10$ ), and method 1 seems more appropriate for coatings with few layers. For the next step, *i.e.* the search of parameters of the different layers conducting to a scattering reduction, the study has been restricted to bi-layer coatings, and the simulations have thus been conducted with the first method.

Finally, the pressure fields obtained on a set of configurations with these two methods are very similar and fully comparable to those obtained for the same cases with the finite element simulation software COMSOL, which validates both approaches.

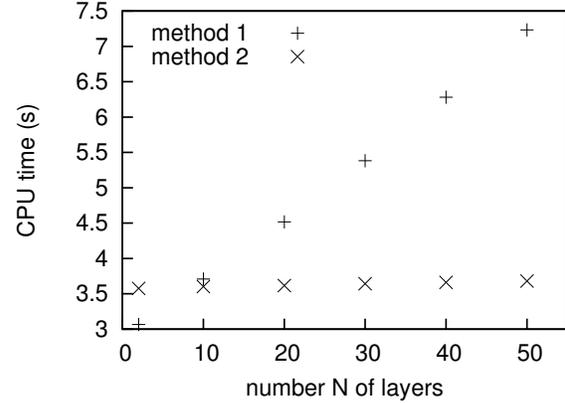


Figure 2: Comparison of CPU times with the two methods (same configurations)

## 3. Search for parameters minimizing the scattering

### 3.1. Method

Optimization techniques have been employed to find the dimensional and mechanical characteristics of the elastic layers leading to scattering reduction. Those parameters, that constitute the optimization variables, are, for each layer:

- thickness  $h$ ,
- Young modulus in the radial direction  $E_r$ ,
- Young modulus in the tangential direction  $E_\theta$ ,
- shear modulus  $G_{r\theta}$ ,
- Poisson's ratio  $\nu_{r\theta}$ ,
- mass density  $\rho$ ,
- structural loss factor  $\eta$ .

The study has been restricted to bi-layer coatings to limit the number of optimization variables.

A genetic algorithm (SOGA from the DAKOTA software) has been coupled with the vibro-acoustic approach described above. Simulations have been conducted to find the parameters of the layers minimizing the objective function, defined as the ratio of the scattering cross-section  $\sigma_{sc}$  in the "cloaked" case to the scattering cross-section in the "uncloaked" case.

$$F_{obj} = \frac{\sigma_{sc}^{(cloaked)}}{\sigma_{sc}^{(uncloaked)}} \quad (25)$$

The scattering cross-section is defined as

$$\sigma_{sc} = \int_S \frac{\langle I_{sc} \rangle}{\langle I_{inc} \rangle} dS, \quad (26)$$

where  $I$  is the acoustic active intensity in the radial direction

$$I = -i\omega p u_r, \quad (27)$$

and  $\langle . \rangle$  denotes a time-averaged quantity. As a result of the non-absorption of the fluid medium, the acoustic energy

conservation law allows us to calculate the intensity on any surface enclosing the obstacle. Here, it has been chosen to evaluate it on a cylinder of radius 0.75 m (for tests with a rigid cylinder of radius comprised between 0.05 m and 0.2 m).

The scattering gain  $\sigma_{gain}$  provided by the coating is measured in decibel as follows:

$$\sigma_{gain} = 10 \log_{10} \left[ \frac{\sigma_{sc}^{(cloaked)}}{\sigma_{sc}^{(uncloaked)}} \right]. \quad (28)$$

### 3.2. Numerical results

#### 3.2.1. Bi-layer coating

In the first simulations, the elastic and dimensional parameters characterizing the two elastic layers have all been considered as independent optimization variables, and could therefore vary independently of each other. Each parameter has been allowed to vary between bounds corresponding to existing materials, but no condition ensured that these parameters could all be achieved simultaneously. However this first step permitted us to note that a very good scattering reduction could be obtained with bi-layer coatings composed of an external isotropic and stiff layer, and an internal orthotropic and soft layer. For instance, in the case of a rigid cylinder 30 cm in diameter placed in air, a scattering reduction of 13 dB in comparison with the uncloaked case theoretically occurs at 380 Hz. The corresponding pressure fields are represented in Fig. 3.

As said previously, it is very unlikely that such materials could be found in practice, but these simulations highlighted the importance of the orthotropy of the internal layer. Indeed, optimizations have also been conducted with coatings made of two isotropic layers, but no configuration leading to scattering reduction could be found so. Considering an internal orthotropic layer and an external isotropic one, scattering reduction has been observed when the Young modulus of the internal layer in the radial direction was much smaller than the Young modulus in the tangential direction.

Table 1: Elastic and dimensional parameters obtained through optimization on a bi-layer coating made of an internal orthotropic layer and an external isotropic layer. Rigid cylinder 30 cm in diameter, optimization frequency: 380 Hz.

layer	1	2
$h$ (mm)	2.4	0.6
$E_r$ (MPa)	0.1	800
$E_\theta$ (MPa)	0.8	800
$G_{r\theta}$ (MPa)	0.25	308
$\nu_{r\theta}$	0.4	0.3
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	100	1200
$\eta$ (%)	0.5	1

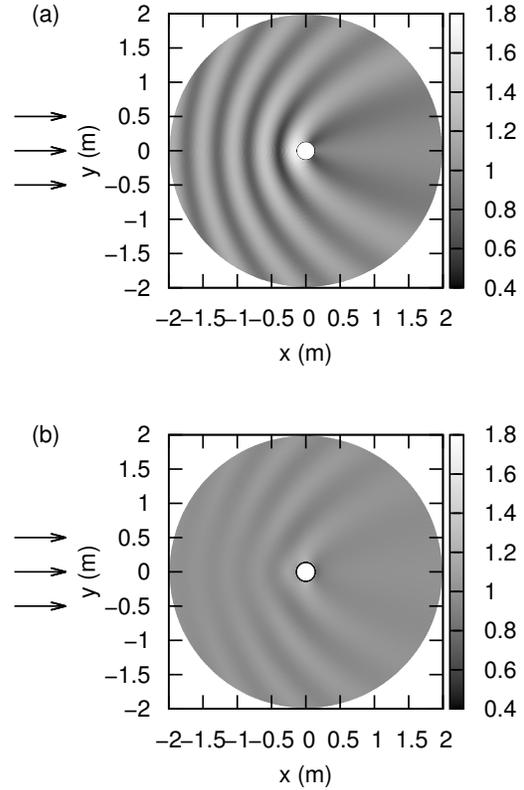


Figure 3: Absolute value of the complex pressure field around an uncloaked (a) or a cloaked (b) cylinder 30 cm in diameter, excited by a unit plane wave at 380 Hz. Coating entirely determined by optimization, cf Table 1.

#### 3.2.2. Realizable cloak

Further investigations have then been conducted for different sizes of obstacle, using a 10 mm orthotropic polyethylene foam for the internal layer, the aim being to find an existing material for the external layer that could lead to a substantial reduction of the acoustic scattering. Thanks to the genetic algorithm, interesting values of the thickness  $h_2$  and the structural loss factor  $\eta_2$  of the external layer have been determined, as well as the interesting frequency range. With all these parameters fixed, direct computation of the scattering cross-section  $\sigma_{sc}$  as a function of the Young modulus  $E_2$  and the mass density  $\rho_2$  of the external layer has been carried out. It appeared that, for a given size of obstacle, scattering reduction is only possible with a few pairs  $(E_2, \rho_2)$ , and that, although the attenuation is not as important with these coatings as it is with those founded in the first step, the phenomenon can still be observed. An example is given in Fig. 4 and Table 2, with a scattering gain of 5 dB. For smaller cylindrical obstacles, the curve representing the interesting zone moves towards lower  $(E_2, \rho_2)$ , and the frequency at which the scattering reduction occurs becomes higher (and inversely if a bigger obstacle is considered), cf Fig. 5.

As a concrete example, according to these simula-

tions and for an appropriate choice of obstacle size and frequency, coatings composed of orthotropic polyethylene foam and polymers like polymethylpentene, polycarbonate or poly(methyl methacrylate) can enable scattering reduction.

Table 2: Elastic and dimensional parameters given by optimization on a bi-layer coating having as internal layer a 10 mm polyethylene foam. Rigid cylinder 26.6 cm in diameter, optimization frequency: 680 Hz.

layer	1	2
$h$ (mm)	10	1
$E_r$ (MPa)	1.2	1820
$E_\theta$ (MPa)	14	1820
$G_{r\theta}$ (MPa)	0.1	700
$\nu_{r\theta}$	0.3	0.3
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	89	661
$\eta$ (%)	11	9

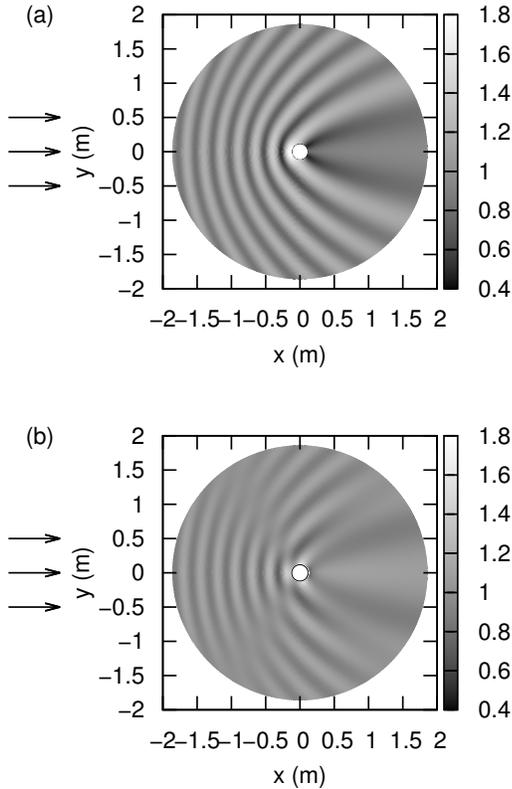


Figure 4: Absolute value of the complex pressure field around an uncloaked (a) or a cloaked (b) cylinder 26.6 cm in diameter, excited by a unit plane wave at 680 Hz. Coating with an internal layer of polyethylene foam and an external layer determined by optimization, cf Table 2.

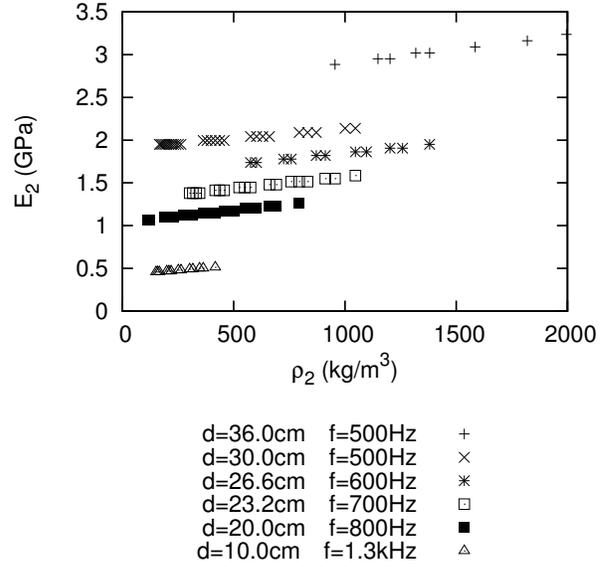


Figure 5:  $(E_2, \rho_2)$  leading to a scattering gain of at least 4 dB, in the case of an internal layer of polyethylene foam and an external isotropic layer with  $h_2 = 1$  mm and  $\eta_2 = 9\%$ .

### 3.3. Frequency band

The observed scattering reduction is effective on a narrow frequency band. The scattering gain of the configurations described in Table 1 and Table 2 is represented with regard to the frequency in Fig. 6. The configuration corresponding to the example 1 has a 3 dB-bandwidth of 142 Hz, whereas the configuration of the example 2 has a 3 dB-bandwidth of 48 Hz.

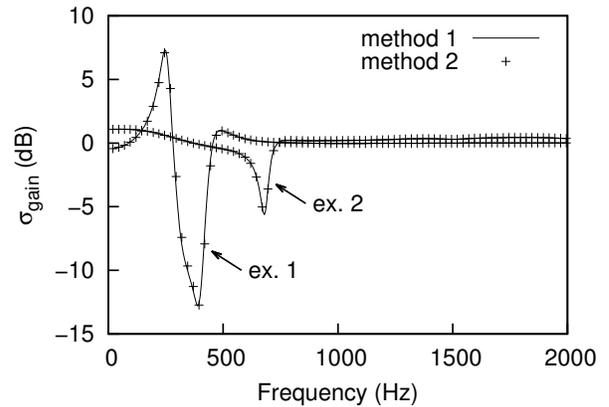


Figure 6: Variations of the scattering gain with frequency for the coatings described in Table 1 (example 1) and Table 2 (example 2).

## 4. Conclusions

Numerical simulations involving genetic algorithm showed that scattering reduction could be achieved by fixing an

elastic coating made of an internal orthotropic layer and an external isotropic layer on a rigid cylinder excited by a plane wave. Practical configurations have been proposed and are now to be tested experimentally in order to validate these numerical results. Further studies are considered to try to broaden the frequency range on which the coating effectively reduces the scattering. The effects of a greater number of layers are also going to be investigated.

## 5. Appendix

$$\mathbf{M}^k = \begin{pmatrix} m_{11}^k & m_{12}^k & m_{13}^k & m_{14}^k \\ m_{21}^k & m_{22}^k & m_{23}^k & m_{24}^k \\ m_{31}^k & m_{32}^k & m_{33}^k & m_{34}^k \\ m_{41}^k & m_{42}^k & m_{43}^k & m_{44}^k \end{pmatrix}$$

where

$$\begin{aligned} m_{11}^k &= \frac{1}{r} \\ m_{12}^k &= -\frac{\partial}{r\partial\theta} \\ m_{13}^k &= 0 \\ m_{14}^k &= \frac{1}{c_{33}^k} \\ m_{21}^k &= -\frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} \frac{\partial}{r\partial\theta} \\ m_{22}^k &= -\frac{1}{r} \frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} \\ m_{23}^k &= \frac{1}{c_{11}^k} \\ m_{24}^k &= 0 \\ m_{31}^k &= \frac{e^k}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \\ m_{32}^k &= \rho_s^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{e^k}{r^2} \\ m_{33}^k &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} - 1 \right) \\ m_{34}^k &= -\frac{\partial}{r\partial\theta} \\ m_{41}^k &= \rho_s^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{e^k}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\ m_{42}^k &= -\frac{e^k}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \\ m_{43}^k &= -\frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} \frac{\partial}{r\partial\theta} \\ m_{44}^k &= -\frac{2}{r} \end{aligned}$$

with

$$e^k = c_{22}^k - \frac{c_{12}^k{}^2}{c_{11}^k}$$

$$\mathbf{P}_n^k = \begin{pmatrix} p_{n,11}^k & p_{n,12}^k & p_{n,13}^k & p_{n,14}^k \\ p_{n,21}^k & p_{n,22}^k & p_{n,23}^k & p_{n,24}^k \\ p_{n,31}^k & p_{n,32}^k & p_{n,33}^k & p_{n,34}^k \\ p_{n,41}^k & p_{n,42}^k & p_{n,43}^k & p_{n,44}^k \end{pmatrix}$$

where

$$\begin{aligned} p_{n,11}^k &= \frac{1}{\xi} \\ p_{n,12}^k &= \frac{n}{\xi} \\ p_{n,13}^k &= 0 \\ p_{n,14}^k &= \frac{c_{33}^N}{c_{33}^k} \\ p_{n,21}^k &= -\frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} \frac{n}{\xi} \\ p_{n,22}^k &= -\frac{1}{\xi} \frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} \\ p_{n,23}^k &= \frac{c_{33}^N}{c_{11}^k} \\ p_{n,24}^k &= 0 \\ p_{n,31}^k &= \frac{e^k}{c_{33}^N} \frac{n}{\xi^2} \\ p_{n,32}^k &= \frac{1}{c_{33}^N} \left( -\rho_s^k \omega^2 b^2 + \frac{e^k}{\xi^2} \right) \\ p_{n,33}^k &= \frac{1}{\xi} \left( \frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} - 1 \right) \\ p_{n,34}^k &= -\frac{n}{\xi} \\ p_{n,41}^k &= \frac{1}{c_{33}^N} \left( -\rho_s^k \omega^2 b^2 + \frac{e^k n^2}{\xi^2} \right) \\ p_{n,42}^k &= \frac{e^k}{c_{33}^N} \frac{n}{\xi^2} \\ p_{n,43}^k &= \frac{c_{12}^k}{c_{11}^k} \frac{n}{\xi} \\ p_{n,44}^k &= -\frac{2}{\xi} \end{aligned}$$

## Acknowledgement

Funding for this work was provided by the ‘‘Direction Générale de l’Armement’’ and the ‘‘région Midi-Pyrénées’’.

## References

- [1] J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, Controlling electromagnetic fields, *Science* 312, 2006.
- [2] S.A. Cummer, D. Schurig, One path to acoustic cloaking, *New J. Phys.* 9, 45, 2007.
- [3] S. Zhang, C. Xia, N. Fang, Broadband acoustic cloak for ultrasound waves, *Phys. Rev. Lett.* 106, 024301, 2011.
- [4] B.-I. Popa, L. Zigoneanu, S.A. Cummer, Experimental acoustic ground cloak in air, *Phys. Rev. Lett.* 106, 253901, 2011.

- [5] A. Alù, N. Engheta, Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings, *Phys. Rev. E* 72, 016623, 2005.
- [6] Y.I. Bobrovnikskii, A new impedance-based approach to analysis and control of sound scattering, *J. Sound Vib.* 297: 743-760, 2006.
- [7] Y.I. Bobrovnikskii, Impedance acoustic cloaking, *New J. Phys.* 12, 043049, 2010.
- [8] P.-Y. Chen, M. Farhat, S. Guenneau, S. Enoch, A. Alù, Acoustic scattering cancellation via ultrathin pseudo-surface, *Appl. Phys. Lett.* 99, 191913, 2011.
- [9] M. Farhat, P.-Y. Chen, S. Guenneau, S. Enoch, A. Alù, Frequency-selective surface acoustic invisibility for three-dimensional immersed objects, *Phys. Rev. B* 86, 174303, 2012.
- [10] V.M. García-Chocano, L. Sanchis, A. Díaz-Rubio, J. Martínez-Pastor, F. Cervera, R. Llopis-Pontiveros, J. Sánchez-Dehesa, Acoustic cloak for airborne sound by inverse design, *Appl. Phys. Lett.* 99, 074102, 2011.
- [11] M.D. Guild, A. Alù, M.R. Haberman, Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere, *J. Acoust. Soc. Am.* 129, 3, 2011.
- [12] M.D. Guild, M.R. Haberman, A. Alù, Plasmonic cloaking and scattering cancellation for electromagnetic and acoustic waves, *Wave Motion* 48: 468-482, 2011.
- [13] E.A. Skelton, J.H. James, Acoustics of an anisotropic layered cylinder, *J. Sound Vib.* 161, 2, 1993.
- [14] O.C. Zienkiewicz, *La méthode des éléments finis*, McGraw-Hill, third edition, 1979.
- [15] W.Q. Chen, Z.G. Bian, H.J. Ding, Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells, *Int. J. Mech. Sci.* 46: 159-171, 2004.
- [16] S.M. Hasheminejad, M. Rajabi, Acoustic scattering characteristics of a thick-walled orthotropic cylindrical shell at oblique incidence, *Ultrasonics* 47: 32-48, 2007.
- [17] J. Jamali, M.H. Naei, F. Honarvar, M. Rajabi, Acoustic scattering from functionally graded cylindrical shells, *J. Mech.* 27, 2: 227-243, 2011.