



# Marches aléatoires en environnement aléatoire faiblement elliptique

Élodie Bouchet

## ► To cite this version:

Élodie Bouchet. Marches aléatoires en environnement aléatoire faiblement elliptique. Mathématiques générales [math.GM]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2014. Français. NNT : 2014LYO10102 . tel-01057100

**HAL Id: tel-01057100**

**<https://theses.hal.science/tel-01057100>**

Submitted on 21 Aug 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 102 - 2014

Année 2014

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1  
INSTITUT CAMILLE JORDAN - UMR 5208  
ÉCOLE DOCTORALE INFOMATHS

**Thèse de l'Université de Lyon**  
pour l'obtention du  
**Diplôme de Doctorat**

Spécialité : Mathématiques  
(arrêté du 7 août 2006)

Présentée par  
Élodie BOUCHET

**MARCHES ALÉATOIRES EN  
ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE  
FAIBLEMENT ELLIPTIQUE**

Thèse dirigée par Christophe SABOT,  
soutenue publiquement le 30 juin 2014,  
devant un jury composé de :

|                    |                          |            |
|--------------------|--------------------------|------------|
| Fabienne CASTELL   | Aix-Marseille Université | Examineur  |
| Francis COMETS     | Université Paris 7       | Examineur  |
| Nathanaël ENRIQUEZ | Université Paris 10      | Rapporteur |
| Yueyun HU          | Université Paris 13      | Rapporteur |
| Christophe SABOT   | Université Lyon 1        | Directeur  |
| Fabio TONINELLI    | Université Lyon 1        | Examineur  |



**Marches aléatoires en environnement aléatoire faiblement elliptique**

Cette thèse est dédiée à l'étude des marches aléatoires en milieu aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ . On s'intéresse tout particulièrement aux environnements qui sont elliptiques, mais pas uniformément elliptiques, et qui peuvent donc contenir des pièges sur lesquels la marche passe beaucoup de temps.

Le premier résultat de cette thèse (chapitre 4) concerne les environnements de Dirichlet, qui forment une sous-classe de marches aléatoires en milieu aléatoire présentant des propriétés remarquables. On se place en dimension  $d \geq 3$  et on étudie le cas où les pièges dus à la non-uniforme ellipticité sont prépondérants. Dans ce contexte, on montre l'équivalence des points de vue statique et dynamique pour une marche accélérée. Ceci permet de compléter les résultats de transience et récurrence directionnelles obtenus par Sabot, et de donner le degré polynomial de l'éloignement de la marche par rapport à l'origine dans le cas sous-balistique et transient.

On se place ensuite (chapitre 5) dans le cas des marches transientes dans une direction, et on étudie les conditions sur la loi de l'environnement nécessaires pour assurer l'existence de moments pour les temps de renouvellement. On améliore ainsi les résultats obtenus par Campos et Ramírez.

Dans la dernière partie (chapitre 6), on étudie les conditions d'application du théorème central limite quenched dans le cas des marches aléatoires balistiques. Sous la condition supplémentaire  $(T)$ , on affaiblit les hypothèses sur l'intégrabilité des temps de renouvellement des travaux de Rassoul-Agha et Seppäläinen et de Berger et Zeitouni : on arrive à la condition  $\mathbb{E}(\tau_1^{2+\varepsilon}) < +\infty$  (pour le théorème annealed la condition optimale est  $\mathbb{E}(\tau_1^2) < +\infty$ ).

## Random walks in weakly elliptic random environment

In this thesis we study random walks in random environment on  $\mathbb{Z}^d$ . We are particularly interested in environments that are elliptic, but not uniformly elliptic. Those environments can contain traps on which the walk spends a lot of time.

The first results in this thesis (chapter 4) deal with the particular case of Dirichlet environments. Random walks in Dirichlet environment form a sub-class of random walks in random environment with specific properties. We consider dimensions  $d \geq 3$  and we study the behavior of the walk when the traps created by the non-uniform ellipticity play an important part. In this context, we show the equivalence between the static and dynamic points of view for an accelerated walk. This completes the results of directional transience and recurrence obtained by Sabot, and it allows to find the polynomial order of the magnitude of the walk's displacement in the sub-ballistic transient case.

Then (chapter 5) we consider the case of directionally transient walks, and we study the conditions on the law of the environment that ensure the existence of moments for the regeneration times. We thus improve the results obtained by Campos and Ramírez.

In the last section (chapter 6), we consider the case of ballistic random walks and we study the conditions under which a quenched central limit theorem holds. Under the additional assumption  $(T)$ , we weaken the integrability of the regeneration times necessary for the works of Rassoul-Agha and Seppäläinen, and Berger and Zeitouni. We obtain the condition  $\mathbb{E}(\tau_1^{2+\varepsilon}) < +\infty$  (whereas for the annealed theorem, the optimal condition is  $\mathbb{E}(\tau_1^2) < +\infty$ ).

**Mots-clés :** Marche aléatoire – Milieu aléatoire – Renforcement – Loi de Dirichlet – Théorème limite – Ballisticité – Transience

**Keywords :** Random walk – Random environment – Reinforcement – Dirichlet distribution – Limit theorem – Ballisticity – Transience

Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

---

## Remerciements

---

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mon directeur de thèse Christophe Sabot. Durant ces quatre années, il m’a guidée dans l’environnement – non aléatoire, mais pas toujours simple à appréhender – de la recherche en mathématiques. Sa patience, sa confiance et ses conseils avisés m’ont permis de mener ce travail passionnant jusqu’au bout.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement mes rapporteurs Nathanaël Enriquez et Yueyun Hu pour le soin qu’ils ont apporté à la lecture de mon manuscrit. Merci également à Fabienne Castell, Francis Comets et Fabio Toninelli qui me font l’honneur de participer à mon jury.

Merci à mes coauteurs Alejandro Ramírez et Renato dos Santos, nos collaborations ont été très instructives. Merci à l’équipe de probabilités de l’Institut Camille Jordan, ainsi qu’à tous les membres de l’ANR MEMEMO qui m’ont accueillie au cours de diverses écoles d’été. Merci enfin à tout le personnel administratif du bâtiment Braconnier, toujours très efficace.

Un grand merci à tous les occupants passés et présents du bureau 107 : Haykel, John, Gladys, Hasan, Xiaolin, Nadja et Sylvain, pour tous les bons moments de travail comme de détente passés ensemble. Merci aussi à tous les thésards qui m’ont accueillie dès mon arrivée au laboratoire, notamment à Fred, Nicolas, Gaëlle, Amélie, Rémi, Julien, Thomas, Julien, Marianne, J-B, Alain et Alexis<sup>1</sup>. Merci enfin aux p’tits nouveaux, et en particulier à Blanche, Hugo, Adriane, Bérénice, Rudy, Niccoló, Benoît, Thomas, Corentin, Mathias, François, Quentin et Coline<sup>1</sup>, pour toutes les discussions animées le midi et pour nos pauses endiablées. Merci au passage au bureau 111A et au square Évariste Galois pour avoir hébergé un certain nombre des dites pauses.

Merci à tous mes amis d'avant la thèse pour leur soutien moral. Merci notamment au RATON-LAVEUR et à Élisabeth, Claire, Tannvir, Anne, Hélène, Jonas, Mathilde, Laetitia, Irène, Ophélia, Proux, Benoît, Nathanaël, Tahina, Gloupin, Marielle, Sébastien, Nicolas, MrPrez, Gawel, Anne, Aloïs, Karen, Antoine, Harpick, ~~Laure~~ ma peste préférée, Adrien, Nat, Nico, Charly, Kio et Dhjizette<sup>1</sup> qui m'ont régulièrement tenu compagnie à Lyon.

Merci à ma famille, et en particulier à mes parents pour leur soutien constant et leur foi en moi tout au long de mes études. Je pense aussi à mon frère, ma sœur, mes grands-parents et mes oncles et tantes<sup>1</sup>.

Enfin, merci à Olivier d'avoir été présent pour moi durant toutes ces années.

---

1. Si vous n'apparaissez pas sur cette page, c'est probablement que ~~je ne vous aime pas~~ je vous ai ~~délibérément~~ accidentellement oublié, auquel cas vous pouvez ~~m'en vouloir~~ me le faire remarquer gentiment pour que je vous envoie une version corrigée.

---

## Table des matières

---

|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Résumé - Abstract</b>                                            | <b>iii</b> |
| <b>Remerciements</b>                                                | <b>v</b>   |
| <b>Table des matières</b>                                           | <b>vii</b> |
| <b>Table des figures</b>                                            | <b>xi</b>  |
| <b>1 Généralités sur les marches aléatoires en milieu aléatoire</b> | <b>1</b>   |
| 1.1 Présentation du modèle . . . . .                                | 2          |
| 1.2 Influence des pièges . . . . .                                  | 4          |
| 1.3 Principaux problèmes, éléments de réponses . . . . .            | 5          |
| 1.3.1 Questions ouvertes . . . . .                                  | 6          |
| 1.3.2 Cas particulier : les environnements de Dirichlet . . . . .   | 10         |
| 1.4 Mes contributions . . . . .                                     | 11         |
| <b>2 Les environnements de Dirichlet</b>                            | <b>13</b>  |
| 2.1 Définition et premières propriétés . . . . .                    | 13         |
| 2.1.1 Loi de Dirichlet . . . . .                                    | 13         |
| 2.1.2 Environnement de Dirichlet . . . . .                          | 14         |
| 2.2 Lien avec les marches renforcées . . . . .                      | 15         |
| 2.3 L'invariance par retournement du temps . . . . .                | 16         |
| 2.4 Les pièges dans le cas Dirichlet . . . . .                      | 18         |
| 2.4.1 Le cas particulier des pièges de taille 2 . . . . .           | 18         |
| 2.4.2 Les pièges de taille quelconque . . . . .                     | 19         |

|          |                                                                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5      | Énoncé des résultats du chapitre 4 : balisticité et transience directionnelle . . . . .          | 20        |
| 2.5.1    | Une marche accélérée . . . . .                                                                   | 21        |
| 2.5.2    | Retour à la marche initiale . . . . .                                                            | 23        |
| 2.5.3    | Idée générale des preuves . . . . .                                                              | 25        |
| <b>3</b> | <b>Conditions de balisticité</b>                                                                 | <b>31</b> |
| 3.1      | Temps de renouvellement et balisticité . . . . .                                                 | 31        |
| 3.1.1    | Définition des temps de renouvellement . . . . .                                                 | 31        |
| 3.1.2    | Loi des grands nombres et principe d'invariance . . . . .                                        | 33        |
| 3.2      | Condition de Kalikow . . . . .                                                                   | 34        |
| 3.2.1    | Marche auxiliaire de Kalikow . . . . .                                                           | 35        |
| 3.2.2    | Définition de la condition de Kalikow . . . . .                                                  | 35        |
| 3.2.3    | Cas particulier des environnements de Dirichlet . . . . .                                        | 36        |
| 3.3      | Énoncé des résultats du chapitre 6 . . . . .                                                     | 36        |
| 3.3.1    | Conditions $(T)_\gamma, (T), (T')$ . . . . .                                                     | 36        |
| 3.3.2    | Résultat principal du chapitre 6 . . . . .                                                       | 38        |
| 3.4      | Énoncé des résultats du chapitre 5 . . . . .                                                     | 38        |
| 3.4.1    | Condition polynomiale $(P)_M$ . . . . .                                                          | 38        |
| 3.4.2    | Conditions d'ellipticité . . . . .                                                               | 39        |
| 3.4.3    | Résultat principal du chapitre 5 . . . . .                                                       | 41        |
| 3.4.4    | Quelques exemples . . . . .                                                                      | 41        |
| <b>4</b> | <b>Sub-ballistic random walk in Dirichlet environment</b>                                        | <b>45</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                                           | 45        |
| 4.2      | Definitions and statement of the results . . . . .                                               | 46        |
| 4.3      | Outline of the proofs . . . . .                                                                  | 51        |
| 4.4      | Proof of theorem 26 . . . . .                                                                    | 52        |
| 4.5      | Proof of theorem 29 and corollary 31 . . . . .                                                   | 62        |
| 4.6      | Proof of theorem 33 . . . . .                                                                    | 67        |
| 4.7      | Appendix: Proof of lemma 38 . . . . .                                                            | 72        |
| <b>5</b> | <b>Sharp ellipticity conditions for ballistic behavior of random walks in random environment</b> | <b>79</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .                                                                           | 79        |
| 5.1.1    | Polynomial condition, ellipticity condition . . . . .                                            | 81        |
| 5.1.2    | Ballisticity results . . . . .                                                                   | 83        |
| 5.1.3    | New examples of random walks satisfying $(P)_M$ . . . . .                                        | 85        |
| 5.2      | First tools for the proofs . . . . .                                                             | 88        |
| 5.2.1    | Regeneration times . . . . .                                                                     | 88        |
| 5.2.2    | Atypical Quenched Exit Estimate . . . . .                                                        | 90        |

|          |                                                                                         |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2.3    | Some results on flows . . . . .                                                         | 91         |
| 5.3      | Proof of theorem 48 . . . . .                                                           | 92         |
| 5.3.1    | Construction of the flows $\theta_{i,x}$ . . . . .                                      | 94         |
| 5.3.2    | Bounds for $\mathbb{P}(F_1)$ . . . . .                                                  | 96         |
| 5.3.3    | Bound for $\mathbb{P}(F_2^c)$ . . . . .                                                 | 98         |
| 5.4      | New examples of random walks satisfying $(P)_M$ . . . . .                               | 100        |
| 5.4.1    | Proof of Theorem 53 . . . . .                                                           | 100        |
| 5.4.2    | Proof of Theorem 56 . . . . .                                                           | 104        |
| <b>6</b> | <b>Quenched central limit theorem for ballistic RWRE: sharp integrability condition</b> | <b>107</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .                                                                  | 107        |
| 6.2      | An illustration: Dirichlet environments . . . . .                                       | 110        |
| 6.3      | First steps to prove theorem 66 . . . . .                                               | 111        |
| 6.4      | Proof of theorem 68 . . . . .                                                           | 112        |
| 6.5      | Proof of theorem 69 . . . . .                                                           | 116        |
| 6.5.1    | Construction of joint regeneration times . . . . .                                      | 116        |
| 6.5.2    | Markovian structure and coupling . . . . .                                              | 121        |
| 6.5.3    | Bound on the number of common points . . . . .                                          | 124        |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                    | <b>127</b> |



---

## Table des figures

---

|     |                                                                   |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Environnement autour de 0 pour $d = 2$ . . . . .                  | 2  |
| 1.2 | Exemple de piège sur deux sommets . . . . .                       | 4  |
| 1.3 | Autres exemples de pièges finis . . . . .                         | 5  |
| 1.4 | La marche vue de la particule . . . . .                           | 8  |
| 2.1 | Une marche aléatoire renforcée par arêtes orientées . . . . .     | 16 |
| 2.2 | Exemple de graphe retourné . . . . .                              | 16 |
| 2.3 | Poids des arêtes sortant de $\{0, e_1\}$ , pour $d = 2$ . . . . . | 19 |
| 2.4 | Construction de $\kappa^\Lambda$ . . . . .                        | 22 |
| 3.1 | Construction des temps de renouvellement . . . . .                | 32 |
| 3.2 | Environnement particulier de Campos et Ramírez . . . . .          | 42 |



# CHAPITRE 1

---

## Généralités sur les marches aléatoires en milieu aléatoire

---

La notion de « marche aléatoire » apparaît pour la première fois en 1905. Elle est introduite par le biostatisticien Karl Pearson pour mieux comprendre les migrations d'une population de moustiques dans une forêt (voir [23]). Il se pose notamment la question de la vitesse à laquelle il est possible de s'éloigner du point de départ. En 1921, le mathématicien George Pólya propose des résultats plus approfondis (voir [25]). Pour des marches sur  $\mathbb{Z}^d$  où la marche a autant de chances d'aller dans chacune des  $2d$  directions à chaque pas (appelées « marches aléatoires simples »), il montre qu'il y a une différence de comportement entre les dimensions  $d \leq 2$  et  $d \geq 3$ . Si  $d \leq 2$ , la marche revient une infinité de fois à son point de départ avec probabilité 1 (on dit que la marche est « récurrente »). Alors que si  $d \geq 3$ , la marche ne passe qu'un nombre fini de fois sur chaque sommet avec probabilité 1, et donc elle finit par s'éloigner du point de départ (on dit que la marche est « transiente »).

Mais l'étude des marches aléatoires simples a ses limites : elle ne permet que de considérer l'évolution d'un marcheur dans des milieux parfaitement homogènes et isotropes. Pour mieux comprendre les phénomènes de duplication des brins d'ADN, le biophysicien Chernov est alors amené à introduire en 1967 de nouvelles marches, les marches aléatoires en milieu aléatoire (voir [12]). En 1972, Temkin utilise à son tour ce nouvel outil (voir [41]), cette fois-ci pour étudier la cinétique des transitions de phase dans les alliages de métaux.

Dans ce chapitre, on va commencer par présenter les marches aléatoires en milieu aléatoire et certaines de leurs particularités. Puis on donnera un aperçu des résultats connus et des problèmes ouverts.

## 1.1 Présentation du modèle

Une marche aléatoire en milieu aléatoire peut être définie sur n'importe quel graphe, mais on va se placer ici dans le cadre principal de cette thèse : le cas du graphe  $\mathbb{Z}^d$ , où  $d \in \mathbb{N}^*$  est un entier naturel non nul, que l'on va munir d'un environnement i.i.d. (indépendant et identiquement distribué).

Pour construire une marche aléatoire en milieu aléatoire, on a besoin de deux étapes :

1. On commence par tirer aléatoirement un environnement selon une loi de probabilité  $\mathbb{P}$  fixée. La loi  $\mathbb{P}$  est construite telle que pour chaque sommet  $x \in \mathbb{Z}^d$ , les probabilités de sortie sont tirées aléatoirement de manière i.i.d.. Une fois cette opération effectuée, on fixe l'environnement obtenu.
2. On se déplace ensuite aléatoirement dans cet environnement, en respectant les probabilités de sortie fixées pour chaque sommet.

Pour formaliser cette définition, on va introduire quelques notions et notations. Tout d'abord, on note  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$ , et on pose  $e_j := -e_{j-d}$  pour  $j \in \llbracket d+1, 2d \rrbracket$ . L'ensemble  $U := \{e_1, \dots, e_{2d}\}$  est alors l'ensemble des vecteurs unité de  $\mathbb{Z}^d$ .

On note  $\|z\|_1 = \sum_{i=1}^d |z_i|$  la norme  $L_1$  de  $z \in \mathbb{Z}^d$ . On écrit  $x \sim y$  si  $\|y - x\|_1 = 1$ , on dit alors que  $x$  et  $y$  sont voisins. Cela permet de définir l'ensemble des arêtes orientées associées au graphe  $\mathbb{Z}^d$  :

$$E := \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \text{ tels que } x \sim y\}.$$

On peut alors introduire l'ensemble de tous les environnements sur  $\mathbb{Z}^d$  :

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega(x, y))_{x \sim y} \in ]0, 1]^E \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{Z}^d, \sum_{i=1}^{2d} \omega(x, x + e_i) = 1 \right\}.$$

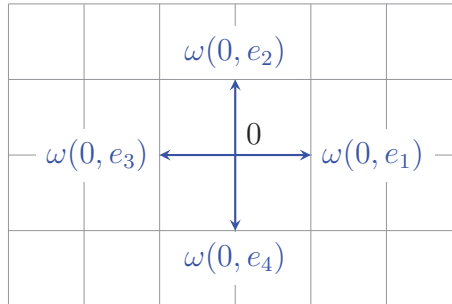


FIGURE 1.1 – Environnement autour de 0 pour  $d = 2$

Un environnement est un élément  $\omega \in \Omega$ , dont on note les composantes  $\omega(x, x + e_i)$ , pour tous  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ . Dans le chapitre 5, issu de l'article [9], on notera exceptionnellement  $\omega(x, e_i)$  à la place de  $\omega(x, x + e_i)$  pour respecter les notations de l'article.

Le choix d'un environnement  $\omega \in \Omega$  se fait comme suit. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité définie sur l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_{2d}) \in ]0, 1]^{2d}, \sum_{i=1}^{2d} x_i = 1\}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on choisit les probabilités de sortie  $(\omega(x, x + e_i))_{i=1, \dots, 2d}$  selon la loi  $\mu$ , de manière i.i.d.. L'environnement  $\omega$  est ainsi tiré aléatoirement sous la mesure produit  $\mathbb{P} := \mu^{\mathbb{Z}^d}$ .

Une fois que l'environnement  $\omega \in \Omega$  a été choisi, on le fixe. La marche aléatoire partant d'un point  $x$  en environnement  $\omega$  est alors définie comme la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}^d$ , de loi  $P_x^\omega$  (parfois également notée  $P_{x, \omega}$ ) définie par la condition initiale  $P_x^\omega(X_0 = x) := 1$  et les probabilités de transition :

$$P_x^\omega(X_{n+1} = y + e_i | X_n = y) := \omega(y, y + e_i),$$

pour tous  $y \in \mathbb{Z}^d$  et  $i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ .

La loi  $P_x^\omega$  est appelée la loi *quenched* de la marche aléatoire  $(X_n)_{n \geq 0}$  en environnement  $\omega$ . Une autre loi de probabilité naturelle pour étudier le comportement de  $(X_n)_{n \geq 0}$  est la loi

$$P_x := \int_{\Omega} P_x^\omega d\mathbb{P}$$

appelée la loi *moyennée* ou *annealed* de la marche aléatoire en milieu aléatoire. Dans les chapitres 4 et 6, issus des articles [8] et [10], on notera exceptionnellement  $\mathbb{P}_x$  à la place de  $P_x$  pour respecter les notations des articles.

La loi *annealed* permet d'étudier le comportement de la marche sans se placer dans le cas particulier d'un environnement fixé. Elle a en revanche l'inconvénient de perdre la propriété markovienne de la marche, et donc d'être plus complexe à étudier.

Dans la suite, on notera  $\mathbb{E}$  l'espérance correspondant à la loi de l'environnement  $\mathbb{P}$ ,  $E_x^\omega$  l'espérance correspondant à la loi quenched  $P_x^\omega$ , et  $E_x$  l'espérance associée à la loi *annealed*  $P_x$ .

On souhaite étudier un certain nombre de comportements des marches aléatoires en milieu aléatoire, parmi lesquels la transience et la balisticité tiennent une place importante. Fixons une direction  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . On dit que la marche aléatoire en milieu aléatoire est transiente dans la direction  $l$  si

$$P_0(A_l) = 1,$$

où l'évènement  $A_l$  est défini comme :

$$A_l := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot l = +\infty \right\}.$$

Par ailleurs, on dit que la marche est balistique dans la direction  $l$  si  $P_0$ -p.s.,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot l}{n} > 0.$$

Ainsi, la marche est transiente dans la direction  $l$  si elle part à l'infini presque sûrement dans cette direction, et la marche est balistique dans la direction  $l$  si elle a en plus une vitesse strictement positive.

## 1.2 Influence des pièges

Les marches aléatoires en milieu aléatoire ont un comportement différent des marches simples : elles sont souvent beaucoup plus lentes à s'éloigner de leur point de départ. Une des principales raisons qui expliquent cela est la possibilité de créer des pièges dans l'environnement.

Un piège est une partie de l'environnement d'où il est difficile de sortir, parce que les probabilités de transition sortantes sont trop faibles. Si la marche rentre dans un piège, elle va donc y rester un certain temps avant de pouvoir s'éloigner. Et si les pièges sont nombreux, la marche peut être ralentie de manière significative.

L'exemple le plus simple de piège est le cas de deux arêtes de sens contraires entre deux sommets, si les probabilités de transition de ces arêtes sont proches de 1. La marche fait alors de nombreux aller-retour entre ces deux sommets avant de sortir.

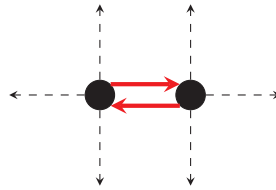


FIGURE 1.2 – Exemple de piège sur deux sommets

Les pièges peuvent prendre n'importe quelle forme, et être constitués de n'importe quel nombre de sommets, mais les plus petits sont les plus fréquents. En effet, moins il y a de sommets impliqués, moins il y a de probabilités de transition à contrôler, et plus la probabilité qu'un ensemble de sommets soit un piège est grande.

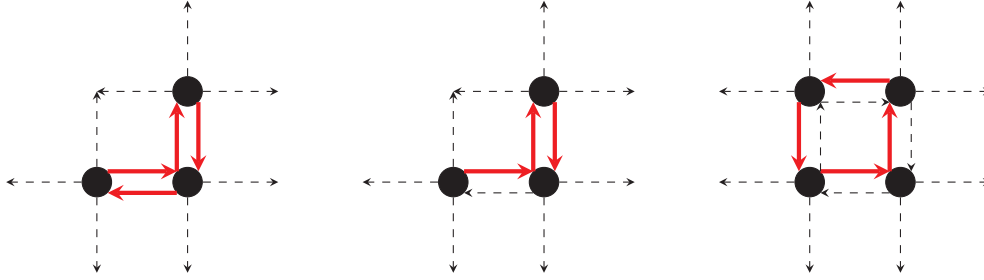


FIGURE 1.3 – Autres exemples de pièges finis

Un piège est d'autant plus fort que la probabilité d'en sortir est faible. Pour mieux comprendre l'influence qu'ils ont, on introduit des conditions sur la loi de l'environnement aléatoire :

- On dit que l'environnement est *elliptique* sous la loi  $\mathbb{P}$  si pour tous  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(\omega(x, x + e_i) > 0) = 1.$$

- On dit que l'environnement est *uniformément elliptique* sous la loi  $\mathbb{P}$  s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(\omega(x, x + e_i) \geq c) = 1.$$

Ainsi, dans le cas d'environnements uniformément elliptiques, on a toujours une minoration de la probabilité de sortir d'un piège de taille finie, et la force des pièges de taille finie est donc majorée. Dans la suite, on s'intéressera particulièrement au cas d'environnements qui sont elliptiques, mais pas uniformément elliptiques : la marche peut alors rencontrer des pièges de taille finie arbitrairement forts, qui peuvent ralentir la marche significativement.

### 1.3 Principaux problèmes, éléments de réponses

Le comportement des marches aléatoires en milieu aléatoire a été très étudié dans le cas de la dimension 1 (initialement par Solomon [33], Kesten, Kozlov, Spitzer [19] et Sinaï [32]). Il est désormais assez bien compris, et on dispose de très nombreux résultats généraux, dont les notes de Zeitouni ([47]) donnent un bon aperçu.

Le cas des dimensions  $d \geq 2$  est beaucoup plus complexe, et on dispose de peu de résultats généraux. L'essentiel des résultats porte sur le cas de marches qui vérifient des conditions particulières de transience et balisticité, ou sur le cas de marches dont l'environnement ne diffère de celui de la marche simple que par des petites perturbations.

### 1.3.1 Questions ouvertes

On va commencer par présenter un certain nombre de questions qui sont toujours ouvertes pour le cas d'un environnement aléatoire général.

#### La loi du 0 – 1 de Kalikow

Ce problème est issu de questions posées par Kalikow dans [17]. Pour un environnement i.i.d., on s'intéresse à la probabilité que la marche soit transiente dans des directions données.

**Proposition 1** (Loi du 0 – 1 de Kalikow). *Soit  $\mathbb{P}$  la loi d'un environnement i.i.d. sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ . On note  $X_n$  la marche aléatoire dans cet environnement. Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on pose*

$$A_l := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot l = +\infty \right\}.$$

On a alors :

$$P_0(A_l \cup A_{-l}) \in \{0, 1\}.$$

Ce résultat est d'abord démontré par Kalikow dans [17] (théorème 3) pour le cas des environnements i.i.d. et uniformément elliptiques. Il est ensuite généralisé par Zerner et Merkl dans [50] (proposition 3) au cas de tous les environnements i.i.d. elliptiques. Le cas non elliptique n'est pas connu.

Dans [17], Kalikow énonce également la conjecture suivante, qui affine un peu le résultat précédent :

**Conjecture 2** (Conjecture de Kalikow). *Soit  $\mathbb{P}$  la loi d'un environnement i.i.d. sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ . On note  $X_n$  la marche aléatoire dans cet environnement. Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on pose*

$$A_l := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot l = +\infty \right\}.$$

On a alors :

$$P_0(A_l) \in \{0, 1\}.$$

Dans le cas  $d = 2$ , cette conjecture est prouvée par Zerner et Merkl ([50], théorème 1) pour tout environnement i.i.d.. La preuve est ensuite simplifiée par Zerner dans [49]. Dans ces deux articles, il est présenté des contre-exemples pour le cas d'un environnement non i.i.d. et non-uniformément elliptique en dimension  $d = 2$ .

La conjecture reste ouverte pour le cas général des dimensions  $d \geq 3$ . On la résoudra dans le cas particulier des lois de Dirichlet (voir chapitres 2 et 4).

### Des critères de transience et de balisticité

D'une manière générale, on voudrait pouvoir caractériser les environnements dans lesquels les marches sont transientes ou balistiques. Des critères de transience et de balisticité ont été établis, notamment par Kalikow ([17]), par Sznitman et Zerner ([38]) et par Sznitman ([34], [35] et [36]), mais le problème général reste ouvert. On s'attardera plus en profondeur sur ces critères dans le chapitre 3.

Par ailleurs, on s'intéresse aux lois des grands nombres. Dans [48], Zerner propose le résultat suivant sous réserve de la conjecture de Kalikow :

**Théorème 3** (Corollaire 2 de [48]). *Soit un environnement elliptique sur  $\mathbb{Z}^d$ , i.i.d. sous une loi  $\mathbb{P}$ . On suppose que  $\forall i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ , on a  $P_0(A_{e_i}) \in \{0, 1\}$ . Alors il existe  $v \in \mathbb{R}^d$  déterministe tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \quad P_0 \text{ p.s..}$$

L'existence de critères assurant l'existence d'une loi des grands nombres avec vitesse non nulle pour le cas d'un environnement général reste cependant une question ouverte importante.

En particulier, on s'intéresse à la question suivante : soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , est-ce que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- la marche est balistique dans la direction  $l$ ,
- la marche est transiente dans la direction  $l$ ?

On conjecture que ces propriétés sont équivalentes pour  $d \geq 2$  dès que l'environnement est « suffisamment elliptique », mais cela reste une question ouverte importante.

Sznitman a introduit des conditions appelées  $(T)$  et  $(T')$  (dans [34], [35], [36], voir aussi le chapitre 3) qui semblent caractériser la transience directionnelle. Sous ces conditions, et sous des conditions additionnelles d'ellipticité (uniforme ellipticité ou conditions d'intégrabilité sur l'environnement), on obtient également la balisticité de la marche. Néanmoins, l'équivalence entre les conditions  $(T)$  et  $(T')$  et la transience directionnelle reste une question ouverte, ces résultats ne sont donc qu'une réponse partielle à la question de l'équivalence entre balisticité et transience directionnelles.

Les résultats de cette thèse répondent également en partie à cette question. Je me suis intéressée notamment au cas particulier des environnements de Dirichlet (présentés plus longuement dans la suite et dans le chapitre 2) pour lesquels on peut trouver des marches transientes dans une direction, mais pas balistiques. Dans le cas  $d \geq 3$ , on peut même obtenir une caractérisation complète des balisticités et transiences directionnelles de la marche

en fonction des paramètres de la loi de Dirichlet (voir Sabot [28] et Bouchet [8]).

Par ailleurs, je me suis également intéressée au cas plus général de certains environnements i.i.d. qui ne sont pas uniformément elliptiques, mais qui satisfont certaines conditions d'intégrabilité sur la loi de l'environnement. Pour ces environnements, sous la condition (T) de Sznitman, on obtient une loi des grands nombres avec vitesse non nulle (voir Bouchet, Ramírez et Sabot [9]). On est donc dans un cas où la condition (T) donne à la fois la transience directionnelle et la balisticité.

### L'existence d'une mesure invariante pour la marche vue de la particule

On note  $\tau_x$  le décalage sur l'environnement :

$$\tau_x \omega(y, z) = \omega(x + y, x + z).$$

La marche vue de la particule est la marche aléatoire définie comme

$$\bar{\omega}_n = \tau_{X_n} \omega.$$

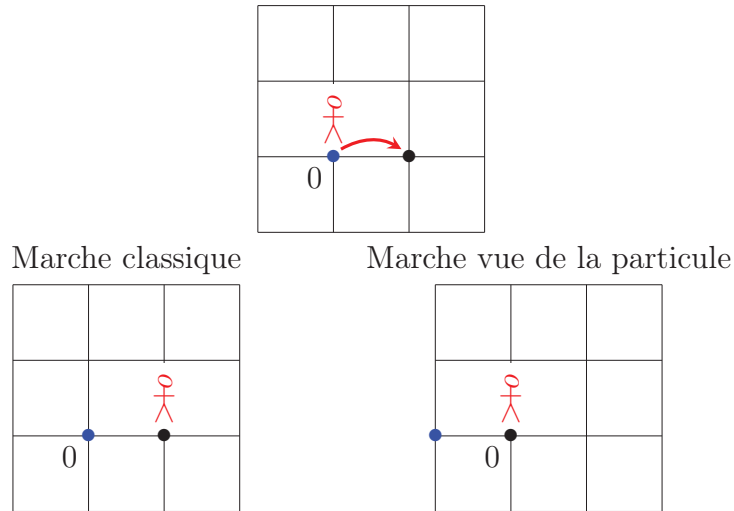


FIGURE 1.4 – La marche vue de la particule

Soit  $\omega_0 \in \Omega$ . Sous  $P_0^{\omega_0}$ , le processus vu de la particule est un processus de Markov à valeurs dans l'espace d'états  $\Omega$ , et son générateur  $R$  est donné par :

$$Rf(\omega) = \sum_{i=1}^{2d} \omega(0, e_i) f(\tau_{e_i} \omega).$$

L'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à la loi de l'environnement  $\mathbb{P}$  pour ce générateur donne des informations cruciales sur la marche, notamment par des théorèmes ergodiques. En particulier, elle implique l'équivalence entre balisticité et transience directionnelles (la preuve est effectuée dans le cas particulier des environnements de Dirichlet dans la section 5 de [28], et dans la section 4.6 du chapitre 4. Elle n'est pas spécifique au cas des environnements de Dirichlet, et peut s'appliquer dans le cas d'un environnement i.i.d. général). Cette existence est classique dans le cas des marches aléatoires en conductances aléatoires (cas où les arêtes ne sont pas orientées). Malheureusement, elle est rarement connue dans le cas non réversible des marches aléatoires en milieu aléatoire.

### L'existence de principes d'invariance

On suppose que la marche aléatoire en milieu aléatoire  $(X_n)_{n \geq 0}$  satisfait une loi des grands nombres de vitesse déterministe  $v : \frac{X_n}{n} \rightarrow v$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s..

Cette condition étant satisfaite, on dit que  $(X_n)_{n \geq 0}$  satisfait un principe d'invariance annealed de matrice de covariance déterministe et définie positive  $\sigma_{P_0}^2$  si l'interpolation linéaire des processus

$$B^n(t) := \frac{X_{[nt]} - [nvt]}{\sqrt{n}}, \quad t \geq 0$$

converge en loi quand  $n \rightarrow \infty$  sous la mesure  $P_0$  vers un mouvement brownien de covariance  $\sigma_{P_0}^2$ .

On dit que la marche aléatoire en milieu aléatoire  $(X_n)_{n \geq 0}$  satisfait un principe d'invariance quenched de matrice de covariance déterministe et définie positive  $\sigma_{P_0}^2$  si pour  $\mathbb{P}$  presque tout environnement  $\omega$ , on a la convergence précédente sous la mesure  $P_0^\omega$ .

Un principe d'invariance annealed a été montré par Sznitman dans [34] (théorème 4.1), sous certaines conditions de balisticité et pour tout  $d \geq 2$ . Des principes quenched ont été montrés indépendamment par Rassoul-Agha et Seppäläinen dans [26] (théorème 1.1), et par Berger et Zeitouni dans [4] (théorème 1.1). On renvoie au chapitre 3 pour les hypothèses et les conditions nécessaires pour ces résultats.

Dans le cas d'un environnement qui ne diffère de celui de la marche aléatoire simple que par des petites perturbations, la situation est un peu différente. Bolthausen et Zeitouni donnent dans [7] un théorème limite local (théorème 2.5) dans le cas  $d \geq 3$ , sous une condition d'isotropie. Leur résultat n'est pas assez fort pour donner un principe d'invariance, mais représente un premier pas dans cette direction, et permet déjà d'assurer la transience de

la marche. Le modèle continu associé est quant à lui mieux compris : Sznitman et Zeitouni ont prouvé dans [37] l'existence d'un principe d'invariance.

### 1.3.2 Cas particulier : les environnements de Dirichlet

Au cours de cette thèse, on va s'intéresser en particulier au cas des environnements qui suivent une loi de Dirichlet, de paramètres notés  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$ . Ces paramètres sont appelés poids, et correspondent aux  $2d$  directions différentes de  $\mathbb{Z}^d$ .

Les environnements de Dirichlet et leurs propriétés seront présentés en détail dans le chapitre 2, mais on va déjà donner ici un aperçu des résultats obtenus en les étudiant.

Un des intérêts de ces environnements est qu'ils vérifient une propriété particulière d'invariance statistique par retournement du temps (développée dans la section 2.3) qui rend leur étude plus facile.

#### Quelques résultats de transience et de balisticité

Enriquez et Sabot ([15], théorème 1), puis Tournier ([45], théorème 6) ont montré que lorsque certaines conditions sur les paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$  sont satisfaites, la marche vérifie une condition de balisticité (la condition de Kalikow, introduite dans [17] et qui sera décrite dans le chapitre 3). Leurs résultats donnent également des bornes sur la vitesse asymptotique de la marche.

Par ailleurs, Sabot et Tournier ([30], corollaire du théorème 1) ont montré que dès qu'il existe un  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  tel que  $\alpha_i \neq \alpha_{i+d}$ , on peut trouver une direction  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  pour laquelle la marche est transiente.

#### Cas particulier des dimensions $d \geq 3$

Sabot a montré dans [27] (théorème 2) que dans le cas  $d \geq 3$ , les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$  en environnement de Dirichlet sont transientes pour toutes valeurs des paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$ . Le résultat est également valable dans le cas des poids symétriques (le cas  $\alpha_i = \alpha_{i+d}$  pour tout  $i$ ).

Par ailleurs, dans [28] (théorème 1), il montre l'existence d'une mesure invariante absolument continue pour le processus de l'environnement vu de la particule. Le résultat est valable en dimension  $d \geq 3$ , dès que  $\kappa := 2 \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i - \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} (\alpha_i + \alpha_{i+d})$  est strictement supérieur à 1. Sabot montre également qu'une telle mesure invariante n'existe pas dans le cas  $\kappa \leq 1$ . Cela lui permet de donner une caractérisation complète (en fonction de la valeur de  $\kappa$ ) du régime balistique pour tout  $d \geq 3$ . Dans les cas balistiques, cela lui

permet également de caractériser entièrement les transiencies directionnelles (théorème 2 de [28]).

Ces caractérisations des régimes balistiques et transients permettent par ailleurs de trouver (dans le cas  $d \geq 3$ ) des poids  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$  pour lesquels la marche est transiente dans une direction  $l$ , mais pas balistique dans cette direction. Cela répond donc en partie à la question : est-ce que transience directionnelle et balisticité sont équivalentes ? La preuve permet néanmoins de comprendre que dans ces cas particuliers, la vitesse nulle provient de la présence de nombreux pièges de taille finie, qui ralentissent fortement la marche. Ces pièges sont dus à la non-uniforme ellipticité de l'environnement.

## 1.4 Mes contributions

Mes travaux de thèse ont donné lieu à l'écriture de trois articles de recherche ([8], [9] et [10]).

Dans [8], je me suis intéressée au cas sous-balistique pour des environnements de Dirichlet dans le cas  $d \geq 3$  (le cas qui était laissé de côté dans [28]). J'ai introduit une marche aléatoire accélérée, pour laquelle je suis parvenue à montrer l'existence d'une mesure invariante absolument continue pour le processus de l'environnement vu de la particule. Ce résultat permet ensuite de caractériser complètement les transiencies directionnelles dans le cas sous-balistique (et donc dans tous les cas en recoupant avec le résultat de [28]). En corollaire, on obtient la loi du 0 – 1 de Kalikow dans le cas des environnements de Dirichlet (le cas  $d = 2$  étant donné par l'article de Zerner et Merkl [50]). J'ai également pu obtenir le degré polynomial de l'éloignement de la marche à l'origine dans le cas sous-balistique et transient. Ces résultats seront énoncés plus en détail dans les chapitres 2 et 4.

Dans [9], mes coauteurs et moi nous sommes intéressés au cas d'environnements non uniformément elliptiques, mais qui satisfont quand même certaines conditions d'ellipticité. Ce travail s'est effectué dans la continuité de l'article [11] de Campos et Ramírez. Pour de tels environnements, la condition polynomiale (une condition de balisticité introduite par Berger, Drewitz et Ramírez dans [3]) donne une loi des grands nombres et un principe d'invariance. Nous nous sommes attachés à améliorer la condition d'ellipticité de [11] pour étendre leurs résultats à un cadre un peu plus général. Nous avons également présenté quelques exemples d'environnements qui satisfont la condition polynomiale, et en particulier un exemple qui concerne les environnements de Dirichlet pour certaines valeurs des  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$ . Ces résultats seront énoncés plus en détail dans les chapitres 3 et 5.

Dans [10], mes coauteurs et moi nous sommes intéressés à des marches

aléatoires transientes en environnement aléatoire i.i.d., pour lesquelles nous avons cherché à obtenir des principes d'invariance quenched. Ce travail s'est effectué dans la continuité des articles [26] de Rassoul-Agha et Seppäläinen et [4] de Berger et Zeitouni, qui se basent sur l'utilisation de temps de renouvellement. Nous avons affaibli les hypothèses de [26] et [4] sur les moments de ces temps de renouvellement, en ajoutant en contrepartie une condition de balisticité (la condition  $(T)$ , introduite par Sznitman dans [35]). Cela nous permet d'obtenir un principe d'invariance quenched dès que  $\mathbb{E}(\tau_1^{2+\varepsilon}) < +\infty$  (pour le théorème annealed la condition optimale est  $\mathbb{E}(\tau_1^2) < +\infty$ ). Ces résultats peuvent être appliqués en particulier dans le cas d'environnements de Dirichlet pour certaines valeurs des  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$ , ils seront énoncés plus en détail dans les chapitres 3 et 6.

## CHAPITRE 2

---

### Les environnements de Dirichlet

---

Dans ce chapitre, on va s'intéresser au cas particulier des marches aléatoires en environnement de Dirichlet.

#### 2.1 Définition et premières propriétés

Pour introduire les environnements de Dirichlet, on a besoin de commencer par présenter la loi de Dirichlet, qui est une famille de lois de probabilités continues indexées par des réels strictement positifs.

##### 2.1.1 Loi de Dirichlet

Soit  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ . On note  $\Delta_N$  le simplexe :

$$\Delta_N := \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in ]0, 1]^N, \sum_{i=1}^N x_i = 1 \right\}.$$

Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ , des réels strictement positifs. On appelle loi de Dirichlet de paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  et on note  $\mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  la loi de probabilité continue à valeurs dans  $\Delta_N$  de densité sur le simplexe

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(\alpha_i)} \left( \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i-1} \right) dx_1 \dots dx_{N-1}.$$

Dans les formules qui précèdent,  $\Gamma$  représente la fonction Gamma

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

et  $dx_1 \dots dx_{N-1}$  est l'image de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{N-1}$  par la fonction  $(x_1, \dots, x_{N-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{N-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{N-1})$ . Il est direct que cette loi ne dépend pas du rôle spécifique de  $x_N$ .

La loi de Dirichlet correspond à une généralisation multidimensionnelle de la loi bêta : si  $(x_1, x_2)$  suit une loi  $\mathfrak{D}(\alpha_1, \alpha_2)$ , alors  $x_1$  suit une loi bêta de paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Notamment, les lois de Dirichlet correspondent aux distributions limites des urnes de Pólya à plusieurs couleurs : on considère une urne contenant des boules de  $N$  couleurs différentes, qui contient initialement  $\alpha_i$  boules de couleur  $i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . On procède à  $k$  tirages aléatoires comme suit : on choisit une boule uniformément dans l'urne, et on l'y replace en rajoutant une boule supplémentaire de la même couleur. Lorsque  $k$  tend vers l'infini, les proportions des boules de différentes couleurs suivent une loi  $\mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ .

Une autre propriété importante des lois de Dirichlet est que toute variable aléatoire qui suit une loi de Dirichlet peut facilement s'exprimer en fonction de variables aléatoires qui suivent des lois Gamma (de densités  $f(x; k) = \frac{x^{k-1} e^{-x}}{\Gamma(k)}$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $k \in \mathbb{R}_+$ , voir par exemple [46] page 180). En effet, si  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  suivent des lois Gamma indépendantes de paramètres respectifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , alors  $\left( \frac{\gamma_1}{\sum \gamma_i}, \dots, \frac{\gamma_N}{\sum \gamma_i} \right)$  suit une loi  $\mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ . On déduit de cette représentation les résultats suivants :

**Propriété 4.** Si  $(x_1, \dots, x_N)$  suit une loi  $\mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ , on a :

- **Propriété d'associativité** : On note  $I_1, \dots, I_k$  une partition de l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$ . La variable aléatoire  $(\sum_{j \in I_i} x_j)_{i=1, \dots, k}$  suit une loi  $\mathfrak{D} \left( (\sum_{j \in I_i} \alpha_j)_{i=1, \dots, k} \right)$ .
- **Propriété de restriction** : Soit  $J$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, N\}$  non vide. La variable aléatoire  $\left( \frac{x_j}{\sum_{i \in J} x_i} \right)_{j \in J}$  suit une loi  $\mathfrak{D}(\alpha_j)_{j \in J}$ , et est indépendante de  $\sum_{i \in J} x_i$  (qui elle suit une loi bêta de paramètres  $(\sum_{i \in J} \alpha_i, \sum_{i \notin J} \alpha_i)$  par la propriété d'associativité).

### 2.1.2 Environnement de Dirichlet

Tirer aléatoirement un environnement de Dirichlet sur  $\mathbb{Z}^d$  consiste à fixer des poids strictement positifs  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , et à tirer les probabilités de transition  $(\omega(x, x + e_i))_{i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket}$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  suivant des lois de Dirichlet i.i.d.  $\mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ .

Pour souligner la dépendance envers les poids  $\alpha_i$ , on notera dans la suite  $\mathbb{P}^{(\alpha)} := (\mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}))^{\mathbb{Z}^d}$  la loi de l'environnement de Dirichlet pour les poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ .

Les propriétés des lois de Dirichlet permettent d'établir que pour tous les poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , l'environnement de Dirichlet de loi  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  est elliptique, mais pas uniformément elliptique.

## 2.2 Lien avec les marches renforcées

Les marches aléatoires renforcées linéairement ont été introduites par Coppersmith et Diaconis ([13]) en 1986. Il existe trois grands types de renforcement linéaires qui font l'objet de recherches : le renforcement par sommets, le renforcement par arêtes orientées et le renforcement par arêtes non orientées. Chacun de ces renforcements a des particularités qui lui sont propres : le renforcement par sommets entraîne des phénomènes de localisation sur un ensemble fini de sommets (voir Tarrès [39] et [40]), le renforcement par arêtes non orientées peut être vu comme un mélange élaboré de chaînes de Markov réversibles et peut montrer une transition de phase entre récurrence positive et transience (voir Pemantle [24], Merkl et Rolles [22], Sabot et Tarrès [29] et Angel, Crawford et Kozma [1]), et le renforcement par arêtes orientées fait appel à des modèles particuliers de marches aléatoires en milieu aléatoire. Des modèles de renforcements non linéaires sont également les sujets d'étude, avec des fonctions de poids sur les arêtes qui peuvent être croissantes, mais aussi décroissantes. De tels modèles ont été étudiés notamment par Tóth (voir Tóth [42] et Tóth et Werner [43]), qui donne une expression des profils d'occupation en termes de processus de Ray-Knight.

L'une des raisons de l'intérêt que l'on porte aux environnements de Dirichlet est leur lien avec ces marches renforcées (voir Pemantle [24] et Enriquez et Sabot [15]). En effet, la loi annealed d'une marche aléatoire en environnement de Dirichlet de paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  est aussi la loi d'une marche aléatoire renforcée linéairement par arêtes orientées, de probabilités de transition :

$$P_x^{(\alpha)}(X_{n+1} = X_n + e_i | \sigma(X_k, k \leq n)) = \frac{\alpha_i + N_i(X_n, n)}{\sum_{k=1}^{2d} (\alpha_k + N_k(X_n, n))},$$

où  $N_k(x, n)$  représente le nombre de visites sur l'arête orientée  $(x, x + e_k)$  avant l'instant  $n$ .

Ce point de vue permet notamment de mieux comprendre les probabilités de transition obtenues pour des lois de Dirichlet. Par exemple, dans le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux (c.-à-d. l'environnement est isotrope), si les

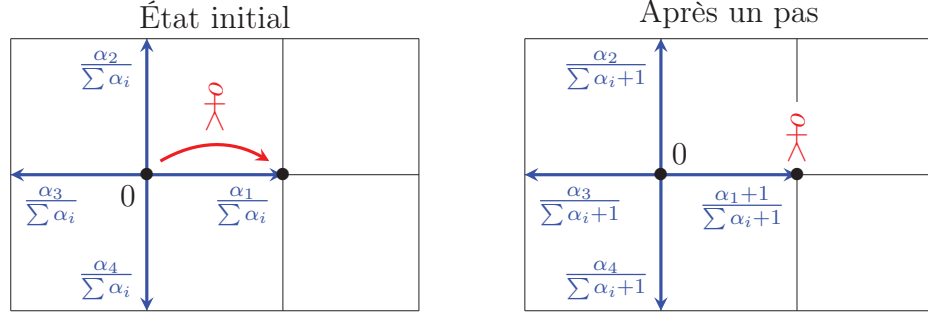


FIGURE 2.1 – Une marche aléatoire renforcée par arêtes orientées

$\alpha_i$  sont grands l'environnement sera très proche de celui de la marche aléatoire simple, et si les  $\alpha_i$  sont petits l'environnement sera très désordonné. Par ailleurs, dans le cas où les  $\alpha_i$  ne sont pas tous égaux, la direction correspondant au plus grand des  $\alpha_i$  sera privilégiée.

### 2.3 L'invariance par retournement du temps

Les environnements de Dirichlet vérifient une propriété qui nous intéresse particulièrement pour cette thèse : la propriété d'invariance statistique par retournement du temps.

Pour présenter cette propriété, on va se placer dans le cadre d'un graphe fini et fortement connexe  $G = (V, E)$ . Pour toute arête  $e = (x, y) \in E$ , on note  $\underline{e} = x$  son point de départ et  $\bar{e} = y$  son point d'arrivée.

On note  $\check{G} = (V, \check{E})$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en retournant toutes les arêtes, c'est à dire en inversant les points de départ et d'arrivée  $\underline{e}$  et  $\bar{e}$  des arêtes.

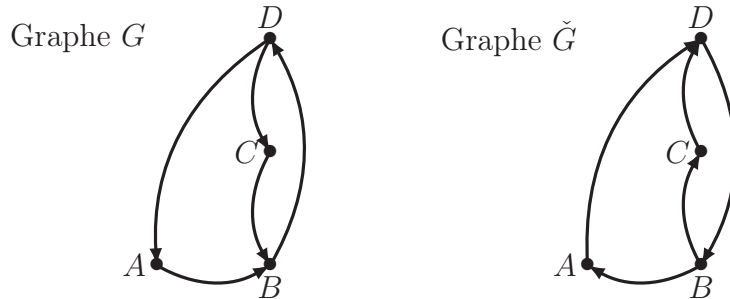


FIGURE 2.2 – Exemple de graphe retourné

On note

$$\Omega_G := \left\{ \omega = (\omega(x, y))_{x \sim y} \in ]0, 1]^E \text{ tels que } \forall x \in V, \sum_{y \sim x} \omega(x, y) = 1 \right\}$$

l'espace des environnements associés au graphe  $G$ .

Comme pour  $\mathbb{Z}^d$ , on peut munir  $G$  d'un environnement de Dirichlet : on associe à chaque arrête orientée  $e \in E$  un poids  $\alpha_e > 0$ , et on choisit pour tout  $x \in V$  des probabilités de transition  $(\omega(x, x + e))_{x=\underline{e}}$  suivant des lois  $\mathfrak{D}((\alpha_e)_{x=\underline{e}})$  indépendantes.

Pour tout environnement elliptique  $\omega \in \Omega_G$ , la chaîne de Markov de probabilités de transition données par  $\omega$  est irréductible. Comme  $G$  est par hypothèse un graphe fini, elle admet donc une unique probabilité invariante sur  $V$ , notée  $\pi_G^\omega$ . On peut alors définir l'environnement retourné dans le temps sur le graphe  $\check{G}$  comme :  $\forall (y, x) \in E$  (et donc  $\forall (x, y) \in \check{E}$ ),

$$\check{\omega}(x, y) = \omega(y, x) \frac{\pi_G^\omega(y)}{\pi_G^\omega(x)}.$$

Il est important de remarquer que  $\check{\omega} \in \Omega_{\check{G}}$  et que les  $\check{\omega}(x, y)$  correspondent à des probabilités de transition sur  $\check{G}$ .

Le résultat de retournement du temps pour les environnements de Dirichlet est le suivant :

**Proposition 5** (Retournement du temps). *Soit  $G = (V, E)$  un graphe fini, dirigé et fortement connexe. Soit des poids  $(\alpha_e)_{e \in E}$  que l'on suppose de divergence nulle, c.-à-d. qui vérifient que  $\forall x \in V$ ,*

$$\text{div}(\alpha)(x) := \sum_{e \in E, \bar{e}=x} \alpha_e - \sum_{e \in E, \underline{e}=x} \alpha_e = 0.$$

*Soit  $(\omega_e)_{e \in E}$  un environnement de Dirichlet de paramètres  $(\alpha_e)_{e \in E}$  sur  $G$ , alors l'environnement retourné dans le temps  $(\check{\omega}_{\check{e}})_{\check{e} \in \check{E}}$  est un environnement de Dirichlet de paramètres  $(\check{\alpha}_{\check{e}})_{\check{e} \in \check{E}}$  sur  $\check{G}$ , où  $\check{\alpha}_{\check{e}} := \alpha_e$  pour tout  $e \in E$ .*

Ce résultat a d'abord été démontré par Sabot dans [27] (lemme 1) en utilisant un changement de variables, une preuve plus probabiliste a ensuite été proposée par Sabot et Tournier dans [30] (proposition 1). Le retournement du temps est notamment très utile pour les preuves des articles [27], [30] et [28].

Pour la suite, on va s'intéresser en particulier au cas où  $G$  est un sous-graphe de  $\mathbb{Z}^d$  et est muni d'un environnement i.i.d.. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on note

$T_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$  le tore de taille  $N$ , et  $G_N = (T_N, E_N)$  le graphe obtenu par projection de  $(\mathbb{Z}^d, E)$  sur  $T_N$ .

On vérifie facilement que  $\forall x \in T_N$ ,  $\sum_{e=x} \alpha(e) = \sum_{\bar{e}=x} \alpha(e) = \sum_{j=1}^{2d} \alpha_j$ , et donc  $\text{div}(\alpha)(x) = 0$ . La proposition précédente nous donne alors que l'environnement retourné  $(\check{\omega}(x, y))$  suit une distribution de loi  $\mathbb{P}_N^{(\check{\alpha})}$  sur  $\check{G}_N$ , avec  $\forall (x, y) \in E_N^2$ ,

$$\check{\alpha}(x, y) = \alpha(y, x).$$

## 2.4 Les pièges dans le cas Dirichlet

On s'intéresse ici à la force des pièges qui se forment dans des environnements de Dirichlet, et notamment à l'intégrabilité du temps de sortie des pièges en fonction des paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  de la loi.

### 2.4.1 Le cas particulier des pièges de taille 2

Dans le cas des environnements de Dirichlet, la non-uniforme ellipticité crée des pièges de taille finie. Les pièges les plus forts sont les pièges élémentaires de taille 2, décrits dans la section 1.2 et constitués de deux sommets reliés entre eux par deux arêtes de forte probabilité. Ce sont ces pièges qui expliquent l'origine du paramètre  $\kappa = 2 \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i - \max_{i \in [1, d]} (\alpha_i + \alpha_{i+d})$  qui intervient dans les énoncés de la section 1.3.2.

Pour s'en rendre compte, on commence par calculer l'espérance du temps de sortie de  $\{0, e_1\}$  pour une marche partant de 0 : notons

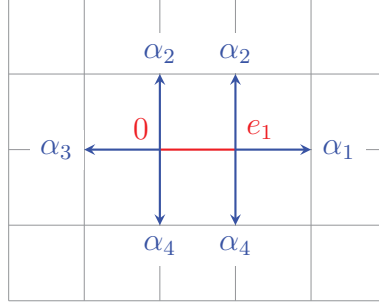
$$\Theta_0 := \inf\{n \in \mathbb{N} | X_n \notin \{0, e_1\}\}.$$

On peut facilement estimer la queue de distribution de cette variable aléatoire grâce à l'indépendance de l'environnement et à la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha)}(\Theta_0 \geq n) &= \mathbb{E}^{(\alpha)} \left( \omega(0, e_1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \omega(e_1, 0)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\sum \alpha_i)^2}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_{1+d})} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil) \Gamma(\alpha_{1+d} + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{\Gamma(\sum \alpha_i + \lceil \frac{n}{2} \rceil) \Gamma(\sum \alpha_i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} \\ &\sim_{n \rightarrow \infty} c n^{\alpha_1 + \alpha_{1+d} - 2 \sum \alpha_i} \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante strictement positive qui ne dépend que des  $\alpha_i$ , et  $\lfloor N \rfloor$  et  $\lceil N \rceil$  représentent respectivement les parties entières inférieure et supérieure de  $N$ .

Ainsi, l'espérance du temps passé sur  $\{0, e_1\}$  est finie si et seulement si  $2 \sum \alpha_i - (\alpha_1 + \alpha_{1+d}) > 1$ . On peut remarquer que  $2 \sum \alpha_i - (\alpha_1 + \alpha_{1+d})$  correspond au poids des arêtes sortant de  $\{0, e_1\}$ .

FIGURE 2.3 – Poids des arêtes sortant de  $\{0, e_1\}$ , pour  $d = 2$ 

Le même type de calcul peut être effectué pour sortir de  $\{0, e_i\}$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ . On introduit donc

$$\kappa := 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}).$$

La quantité  $\kappa$  minimise la somme des poids des arêtes sortant d'un ensemble du type  $\{0, e_i\}$ . Ainsi, si  $\kappa > 1$ , l'espérance du temps passé sur tout ensemble de deux sommets est finie. À l'inverse, si  $\kappa \leq 1$ , on peut passer un temps d'espérance infinie sur des pièges de taille 2.

### 2.4.2 Les pièges de taille quelconque

Pour comprendre la force des pièges de manière plus générale, on introduit un outil supplémentaire : la fonction de Green. C'est la fonction définie pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  et  $\omega \in \Omega$  par

$$G^\omega(x, y) := E_x^\omega \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \right),$$

elle représente l'espérance quenched du nombre de passages au point  $y$  pour une marche partant de  $x$ .

Une variante de cette fonction est la fonction de Green tuée en dehors d'une boîte. Si  $\Lambda$  est un ensemble connexe de sommets de  $\mathbb{Z}^d$ , on appelle fonction de Green tuée hors de  $\Lambda$  la fonction définie pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  et  $\omega \in \Omega$  par

$$G^{\omega, \Lambda}(x, y) := E_x^\omega \left( \sum_{n=0}^{T_\Lambda} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \right),$$

où

$$T_\Lambda = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \notin \Lambda\}.$$

Elle représente l'espérance quenched du nombre de passages au point  $y$  avant de sortir de  $\Lambda$ , pour une marche partant de  $x$ .

Ces deux fonctions sont particulièrement intéressantes lorsqu'on parvient à obtenir des résultats sur leur intégrabilité sous la loi de l'environnement. En effet, si  $\mathbb{E}^{(\alpha)}(G^\omega(0, 0)) = +\infty$ , on passe un temps d'espérance infinie dans des pièges, et la marche aléatoire ne peut pas être balistique. Si on a aussi  $\mathbb{E}^{(\alpha)}(G^{\omega, \Lambda}(0, 0)) = +\infty$ , c'est qu'on passe un temps d'espérance infinie dans des pièges de taille inférieure à la taille de  $\Lambda$ .

Dans le cas des lois de Dirichlet, l'intégrabilité est connue (voir [27] pour la fonction de Green, et [45] pour la fonction de Green tuée hors de toute boîte finie). La quantité  $\kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d})$ , définie précédemment lors de l'étude des pièges de taille 2, s'avère ici aussi primordiale. En effet, les fonctions de Green ont des moments d'ordre  $s$  intégrables si et seulement si  $s < \kappa$ .

On retrouve notamment que pour  $\kappa \leq 1$ , le temps passé sur les pièges de taille finie a une espérance infinie, et donc que dans ce cas la marche aléatoire va à vitesse nulle. Le fait que les fonctions de Green tuées ou non aient la même intégrabilité indique que les pièges qui influent le plus sur la marche sont les pièges de taille finie. Et comme le paramètre-clé  $\kappa$  correspond à l'intégrabilité des pièges de taille 2, on voit que les pièges du type  $\{0, e_i\}$  sont bien les pièges finis les plus forts : ce sont eux qui ralentissent le plus la marche.

## 2.5 Énoncé des résultats du chapitre 4 : balisticité et transience directionnelle

On va s'intéresser au problème de la caractérisation des balisticité, transience et récurrence directionnelles dans le cas des environnements de Dirichlet. Comme évoqué dans le chapitre 1, il a été montré par Sabot dans [28] (théorème 1) que lorsque

$$\kappa := 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1 \dots d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) > 1,$$

il existe une mesure invariante absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  pour le processus vu de la particule. Cela permet de caractériser complètement le régime balistique. De plus, dans le cas balistique, les résultats de [28] permettent également de caractériser complètement les transience et récurrence directionnelles.

Néanmoins, [28] établit également que lorsque  $\kappa \leq 1$  il n'existe aucune telle mesure invariante, ce qui ne donne aucune information sur les éventuelles transience et récurrence directionnelles.

Au cours de ma thèse, je me suis intéressée à ce cas sous-balistique. J'ai introduit une accélération de la marche, qui m'a permis de contourner l'obstacle de la non-existence de mesure invariante pour le processus vu de la particule. Les résultats obtenus vont être détaillés dans ce qui suit, les preuves complètes peuvent être trouvées dans [8] ou dans le chapitre 4.

### 2.5.1 Une marche accélérée

Dans le cas  $\kappa \leq 1$ , l'absence de mesure invariante pour le processus vu de la particule provient du fait que la marche passe trop de temps sur les pièges. Pour résoudre ce problème, on introduit une accélération de la marche, telle que la marche va d'autant plus vite qu'elle est sur un piège fort. On peut alors trouver une mesure invariante pour le processus vu de la particule associé à la marche accélérée. Cela permet ensuite d'obtenir des résultats de récurrence et transience directionnelles pour la marche initiale.

Pour pouvoir définir rigoureusement notre fonction d'accélération, on a besoin de commencer par poser quelques notations. Soit  $\sigma = (e^1, \dots, e^n)$  un chemin orienté, c.-à-d. une suite d'arêtes orientées  $e^i \in E$  qui vérifient  $\bar{e}^i = \underline{e}^{i+1}$  pour tout  $i$ . On note  $\omega_\sigma = \prod_{i=1}^n \omega(e^i)$  la probabilité d'emprunter ce chemin. Dans la suite de ce chapitre, pour être cohérents avec les notations du chapitre 4 issu de l'article [8], on notera  $Z_n$  la marche aléatoire non accélérée en environnement de Dirichlet dont on souhaite connaître les transiences directionnelles, et  $X_t$  la marche accélérée en temps continu.

Soit  $\Lambda$  un ensemble de sommets contenant 0, fini et connexe. On définit notre fonction d'accélération au point  $x \in \mathbb{Z}^d$  comme suit :

$$\gamma^\omega(x) = \frac{1}{\sum \omega_\sigma},$$

où l'on somme sur tous les chemins finis  $\sigma$  sans boucle, partants de  $x$  et arrêtés juste après être sortis de  $x + \Lambda$ .

Soit  $X_t$  la chaîne de Markov en temps continu définie par  $X_0 = Z_0$  et les taux de saut  $\gamma^\omega(x)\omega(x, y)$  pour sauter de  $x$  en  $y$ . Alors  $Z_n = X_{t_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $t_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma^\omega(Z_k)} E_k$  (les  $E_i$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1). La marche  $X_t$  est donc bien une version accélérée de la marche  $Z_n$  : les deux marches passent par exactement les mêmes sommets, dans exactement le même ordre. Seul le temps passé en chaque sommet diffère.

On va maintenant introduire un équivalent de  $\kappa$  pour la marche accélérée :

$$\kappa^\Lambda := \min \left\{ \sum_{e \in \partial_+(K)} \alpha_e \text{ où } K \subset \mathbb{Z}^d \text{ fini et connexe, } 0 \in K \text{ et } \partial\Lambda \cap K \neq \emptyset \right\}$$

où l'on note  $\partial_+(K) = \{e \in E, \underline{e} \in K, \bar{e} \notin K\}$  l'ensemble des arêtes sortantes de  $K$ , et  $\partial\Lambda = \{x \in \Lambda | \exists y \sim x \text{ such that } y \notin \Lambda\}$  la frontière de  $\Lambda$ .

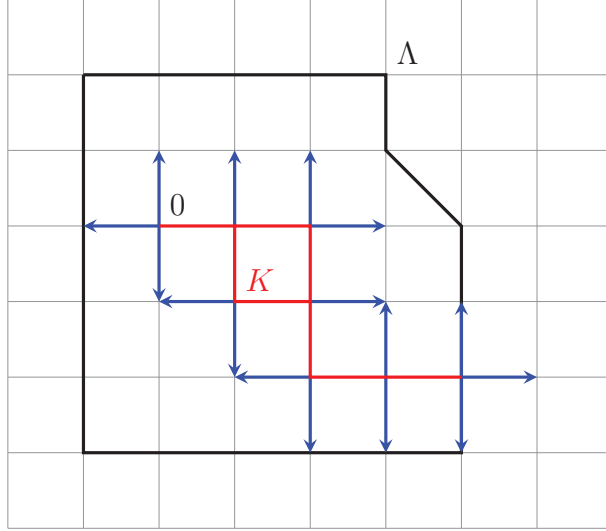


FIGURE 2.4 – Construction de  $\kappa^\Lambda$

Il est intéressant de noter qu'on peut avoir  $\kappa^\Lambda$  aussi grand que voulu à condition de choisir un ensemble  $\Lambda$  assez grand.

Soit  $\omega_0 \in \Omega$ . On note  $\bar{\omega}_t$  le processus vu de la particule associé à la marche accélérée  $X_t$ . Sous  $P_0^{\omega_0}$ , c'est un processus de Markov sur l'espace d'états  $\Omega$ , et son générateur  $R$  est donné pour toute fonction  $f$  bornée et mesurable par

$$Rf(\omega) = \sum_{i=1}^{2d} \gamma^\omega(0) \omega(0, e_i) (f(\tau_{e_i} \omega) - f(\omega)).$$

Le résultat clé de [8] est le théorème suivant :

**Théorème 6** (Théorème 2.1 de [8], théorème 26 du chapitre 4). *Soit  $d \geq 3$  et  $\Lambda$  un sous-ensemble fini et connexe de  $\mathbb{Z}^d$ . Soit  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  la loi de l'environnement de Dirichlet associé aux poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ .*

*Si  $\kappa^\Lambda > 1$ , alors il existe une unique probabilité  $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$  sur l'ensemble d'états  $\Omega$ , absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  et invariante par le générateur  $R$ . De plus,  $\frac{d\mathbb{Q}^{(\alpha)}}{d\mathbb{P}^{(\alpha)}}$  est dans  $L_p(\mathbb{P}^{(\alpha)})$  pour tout  $1 \leq p < \kappa^\Lambda$ .*

Comme on a déjà signalé que  $\kappa^\Lambda$  pouvait être aussi grand que voulu à condition d'avoir choisi un ensemble  $\Lambda$  assez grand, le théorème précédent donne que pour toutes valeurs des poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , on peut trouver une marche accélérée qui possède une mesure invariante vue de la particule.

La mesure invariante ainsi obtenue permet ensuite d'obtenir une loi des grands nombres pour  $X_t$ . Soit  $d_\alpha = E_0^{(\alpha)}[Z_1] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i} \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i e_i$  le drift de la marche après le premier pas.

**Théorème 7** (Théorème 2.4 de [8], théorème 29 du chapitre 4). *Soit  $d \geq 3$ , on suppose que  $\kappa^\Lambda > 1$ .*

*i) Si  $d_\alpha = 0$ , alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t} = 0, \quad P_0^{(\alpha)} p.s.,$$

*et  $\forall i = 1 \dots d$ ,*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = +\infty, \quad P_0^{(\alpha)} p.s..$$

*ii) Si  $d_\alpha \neq 0$ , alors  $\exists v \neq 0$  tel que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t} = v, \quad P_0^{(\alpha)} p.s.,$$

*et  $\forall i = 1 \dots d$  tel que  $d_\alpha \cdot e_i \neq 0$ , on a*

$$(d_\alpha \cdot e_i)(v \cdot e_i) > 0,$$

*alors que si  $d_\alpha \cdot e_i = 0$ ,*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = +\infty, \quad P_0^{(\alpha)} p.s..$$

### 2.5.2 Retour à la marche initiale

Les résultats obtenus pour la marche accélérée  $X_t$  permettent de mieux comprendre la marche initiale  $Z_n$ .

Comme les deux marches suivent exactement les mêmes trajectoires, la loi des grands nombres avec transience et récurrence directionnelles pour  $X_t$  permet d'obtenir directement les résultats de transience et récurrence directionnelles souhaités pour  $Z_n$  :

**Corollaire 8** (Corollaire 2.5 et remarque 2.7 de [8], corollaire 30 et remarque 34 du chapitre 4). *Soit  $d \geq 3$ , et soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$*

i) Si  $d_\alpha \cdot l = 0$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = -\infty, \limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = +\infty, P_0^{(\alpha)} p.s..$$

ii) Si  $d_\alpha \cdot l > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = +\infty, P_0^{(\alpha)} p.s..$$

iii) Si  $d_\alpha \cdot l < 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = -\infty, P_0^{(\alpha)} p.s..$$

On obtient ainsi une caractérisation complète des récurrence et transience directionnelles dans le cas  $d \geq 3$ .

Les résultats obtenus pour les marches accélérées permettent de plus de résoudre le problème de la loi du 0 – 1 de Kalikow dans le cas particulier des environnements de Dirichlet pour  $d \geq 3$ . Les cas  $d = 1$  et  $d = 2$  étant déjà connus dans un cadre plus général ([17] et [50]), on obtient :

**Corollaire 9** (Loi du 0 – 1 de Kalikow dans le cas Dirichlet, corollaire 2.6 de [8], corollaire 31 du chapitre 4). *Soit  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  la loi de l'environnement de Dirichlet sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , associé aux poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , et  $Z_n$  la marche aléatoire en environnement de Dirichlet associée. Alors, pour tout  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on se trouve dans un des cas suivants :*

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = -\infty, \limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = +\infty, P_0^{(\alpha)} p.s.,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = -\infty, P_0^{(\alpha)} p.s.,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = +\infty, P_0^{(\alpha)} p.s..$

Enfin, dans le cas sous-balistique transient, on obtient l'accélération minimale nécessaire pour avoir une loi des grands nombres avec vitesse non nulle pour  $X_t$ . Cette connaissance permet de déterminer le degré polynomial de l'éloignement de la position de la marche initiale  $Z_n$  par rapport à l'origine.

**Théorème 10** (Théorème 2.8 et remarque 2.7 de [8], théorème 33 et remarque 34 du chapitre 4). *Soit  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  la loi de l'environnement de Dirichlet sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ , associé aux poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , et  $Z_n$  la marche aléatoire en environnement de Dirichlet associée. On suppose qu'on a :*

$$\kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) \leq 1.$$

*Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  tel que  $d_\alpha \cdot l > 0$ . On a alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(Z_n \cdot l)}{\log(n)} = \kappa \text{ en } \mathbb{P}^{(\alpha)}\text{-probabilité.}$$

### 2.5.3 Idée générale des preuves

#### Preuve du théorème 6

On va donner ici les grandes idées de la preuve du théorème 6.

Les deux outils principaux que l'on va utiliser sont l'environnement retourné, et des techniques de flots. Rappelons que l'on cherche à montrer l'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  pour le processus vu de la particule  $\bar{\omega}_t$ .

On commence par faire une approximation de  $\mathbb{Z}^d$  par un tore  $T_N$  périodique de grande taille  $N$ , muni d'un environnement  $\omega \in \Omega_N$ , tiré selon la loi de Dirichlet  $\mathbb{P}_N^{(\alpha)}$ . Comme le tore est un graphe fini, on peut trouver une probabilité invariante  $\pi_N^\omega$  pour la marche initiale non accélérée sur  $T_N$ . On en déduit une autre probabilité  $\tilde{\pi}_N^\omega$ , invariante pour la marche accélérée sur  $T_N$ , définie comme :

$$\tilde{\pi}_N^\omega(y) := \frac{\frac{\pi_N^\omega(y)}{\gamma^\omega(y)}}{\sum_{x \in T_N} \frac{\pi_N^\omega(x)}{\gamma^\omega(x)}}.$$

On peut alors construire la mesure  $f_N \mathbb{P}_N^{(\alpha)}$ , où  $f_N(\omega) = N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0)$ , qui est une probabilité invariante pour  $\bar{\omega}_t$  sur  $\Omega_N$ . Il suffit de borner  $\mathbb{E}^{(\alpha)} [(f_N)^p]$  uniformément en  $N$ , pour tout  $p < \kappa^\Lambda$ , pour obtenir le résultat du théorème 6.

Soit  $p < \kappa^\Lambda$ , on commence par majorer cette espérance en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, puis en remplaçant  $\gamma^\omega(0)$  par sa définition :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(\alpha)} [(f_N)^p] &\leq \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\tilde{\pi}_N^\omega(0)}{\tilde{\pi}_N^\omega(x)} \right)^{p/N^d} \right] \\ &= \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\pi_N^\omega(0) \gamma^\omega(x)}{\pi_N^\omega(x) \gamma^\omega(0)} \right)^{p/N^d} \right] \\ &\leq \sum_{\sigma: 0 \rightarrow \Lambda^c} \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right] \end{aligned}$$

où la somme est effectuée sur les chemins simples (sans boucles) et où  $C > 0$  est une constante finie. On peut alors introduire les environnements retournés, pour remplacer les termes en  $\frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)}$  par des termes en  $\frac{\tilde{\omega}(x,0)}{\tilde{\omega}(0,x)}$ . Par le résultat de retournement du temps pour les environnements de Dirichlet, on sait que l'environnement retourné  $\tilde{\omega}(x, y)$  suit également une loi de Dirichlet, de paramètres  $\tilde{\alpha}(x, y) = \alpha(y, x)$  pour tous  $(y, x) \in E_N$ .

Soit  $\theta_N^\sigma : E_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction sur les arêtes qui vérifie la condition de divergence

$$\operatorname{div}(\theta_N^\sigma) = \frac{p}{N^d} \sum_{x \in T_N} (\delta_0 - \delta_x),$$

où l'opérateur divergence est défini pour tout  $\theta : E_N \rightarrow \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in T_N$  par  $\operatorname{div}(\theta)(x) := \sum_{e \in E_N, e=x} \theta(e) - \sum_{e \in E_N, \bar{e}=x} \theta(e)$ .

On définit alors  $\check{\theta}_N^\sigma$  comme  $\check{\theta}_N^\sigma(x, y) = \theta_N^\sigma(y, x)$ , ce qui permet d'écrire

$$\prod_{x \in T_N} \left( \frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} = \frac{\prod_{e \in E_N} \check{\omega}(e)^{\check{\theta}_N^\sigma(e)}}{\prod_{e \in E_N} \omega(e)^{\theta_N^\sigma(e)}} =: \frac{\check{\omega}^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega^{\theta_N^\sigma}},$$

et qui nous donne :

$$\mathbb{E}^{(\alpha)} [f_N^p] \leq C \sum_{\sigma: 0 \rightarrow \Lambda^c} \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \frac{\check{\omega}^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega^{\theta_N^\sigma}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right].$$

L'inégalité de Hölder permet de borner ce terme tout en séparant les termes en  $\omega$  des termes en  $\check{\omega}$  :

$$\mathbb{E}^{(\alpha)} [f_N^p] \leq C \sum_{\sigma} \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \omega^{-q\theta_N^\sigma} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}^{(\check{\alpha})} \left[ \omega^{r\check{\theta}_N^\sigma} \right]^{\frac{1}{r}}.$$

avec  $r$  et  $q$  des réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$  et qui vérifient  $pq < \kappa^\Lambda$ . On rappelle que  $\omega$  et  $\check{\omega}$  suivent des lois de Dirichlet i.i.d. dont on connaît les paramètres, l'indépendance des environnements permet alors de calculer explicitement ces espérances.

C'est à ce moment qu'on utilise le facteur lié à l'accélération :  $\omega^{-q\theta_N^\sigma}$  est d'espérance finie si et seulement si  $\alpha(e) - q\theta_N^\sigma(e) > 0$  pour toutes les arêtes  $e$ . Le facteur  $\gamma^\omega$  permet de conserver cette intégrabilité sous des conditions plus faibles : il suffit d'avoir  $\alpha(e) + pq\mathbb{1}_{e \in \sigma} - \beta_N - q\theta_N^\sigma(e) > 0$ , où  $\beta_N$  est une fonction qui peut être rendue aussi petite que voulue pour des  $N$  assez grands.

On obtient alors par développement de Taylor sur les fonctions gamma la borne suivante :

$$\mathbb{E}^{(\alpha)} [f_N^p] \leq \exp \left( c \sum \theta_N(e)^2 \right).$$

Il ne reste plus qu'à montrer qu'on peut trouver des fonctions  $\theta_N^\sigma$  positives, d'énergie finie, satisfaisant la condition de divergence  $\text{div}(\theta_N^\sigma) = \frac{p}{N^d} \sum_{x \in T_N} (\delta_0 - \delta_x)$  et vérifiant  $\alpha(e) + pq\mathbb{1}_{e \in \sigma} - \beta_N - q\theta_N^\sigma(e) > 0$ .

Pour cela, on utilise le théorème suivant, qui est une version généralisée du théorème du max-flow min-cut (voir [21] pour une introduction générale aux techniques de flots), et qui donne également des bornes sur la norme de  $\theta_N^\sigma$  :

**Proposition 11** (Proposition 1 de [28]). *Soit  $G = (V, E)$  un graphe fini et orienté. Soit  $(c(e))_{e \in E}$  un ensemble de réels positifs, que l'on appellera capacités. Soit  $x_0$  un sommet de  $V$ , et  $(p_x)_{x \in V}$  un ensemble de réels positifs. Il existe une fonction positive  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie*

$$\text{div } \theta = \sum_{x \in V} p_x (\delta_{x_0} - \delta_x),$$

$$\forall e \in E, \theta(e) \leq c(e),$$

si et seulement si pour tout sous-ensemble  $K \subset V$  contenant  $x_0$  on a

$$c(\partial_+ K) \geq \sum_{x \in K^c} p_x,$$

avec  $\partial_+ K = \{e \in E, \underline{e} \in K, \bar{e} \in K^c\}$  et  $c(\partial_+ K) = \sum_{e \in \partial_+ K} c(e)$ . Le résultat reste vrai si on restreint cette dernière condition aux sous-ensembles  $K$  pour lesquels tout sommet  $y \in K$  peut être atteint depuis 0 en empruntant un chemin orienté dans  $K$ .

Pour des  $\sigma$  et  $N$  fixés, on pose :

$$\alpha^{(\sigma)}(e) = \begin{cases} \alpha(e) + \kappa^\Lambda & \text{si } e \in \sigma \\ \alpha(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors  $m((\alpha^{(\sigma)}(e))_{e \in E_N}) \geq \kappa^\Lambda$  :

- Si le min-cut contient un  $e \in \sigma$  c'est direct.
- Sinon, comme  $0 \in \sigma$  le min-cut est de la forme  $S = \partial_+(K)$  avec  $\sigma \subset K$  et  $K$  un ensemble de sommets fini et connexe. La définition de  $\kappa^\Lambda$  donne directement  $m((\alpha^{(\sigma)}(e))_{e \in E_N}) \geq \kappa^\Lambda$ .

En utilisant les conductances  $c(e) = \frac{p}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e)$ , la proposition 11 donne pour tout  $N \geq N_0$  assez grand une fonction  $\theta_N^\sigma$  satisfaisant la condition de divergence, telle que  $\theta_N^\sigma(e) \leq \frac{p}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e)$  et telle qu'on ait une borne uniforme en  $N$  sur  $\|\theta_N^\sigma\|_2^2$ . Cela termine la preuve de l'existence d'une mesure invariante pour le graphe  $\mathbb{Z}^d$ .

**Preuve du théorème 10**

Le premier pas dans la preuve du théorème 10 est de montrer le résultat suivant sur les temps d'atteinte :

**Théorème 12.** *Soit  $d \geq 3$ , et  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  la loi d'un environnement de Dirichlet de paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  sur  $\mathbb{Z}^d$ . On note  $Z_n$  la marche aléatoire en environnement de Dirichlet associée, et on suppose que*

$$\kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) \leq 1.$$

*Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  telle que  $d_\alpha \cdot l \neq 0$ . Soit  $T_n^{l,Z} = \inf_i \{i \in \mathbb{N} | Z_i \cdot l \geq n\}$  le temps d'atteinte du niveau  $n$  dans la direction  $l$  pour la marche non accélérée  $Z_n$ . On a alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(T_n^{l,Z})}{\log(n)} = \frac{1}{\kappa} \text{ en } \mathbb{P}^{(\alpha)}\text{-probabilité.}$$

*Démonstration.* La preuve du théorème 12 s'effectue en deux temps : on établit une borne supérieure, puis une borne inférieure. L'introduction de la marche accélérée n'est nécessaire que pour la preuve de la borne supérieure.

*Borne supérieure :*

Pour un  $\Lambda$  tel que  $\kappa^\Lambda > 1$ , on pose  $A(t) = \int_0^t \gamma^\omega(X_s) ds$ . La marche en temps continu  $X_{A^{-1}(t)}$  est la chaîne de Markov dont le taux de saut de  $x$  à  $y$  est  $\omega(x, y)$ , elle a donc asymptotiquement le même comportement que  $Z_n$ . On se ramène donc à montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(A(T_n^{l,X}))}{\log(n)} \leq \frac{1}{\kappa},$$

où  $T_n^{l,X} = \inf_t \{t \in \mathbb{R}_+ | X_t \cdot l \geq n\}$ .

Pour obtenir cette inégalité, on commence par montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, \kappa[$  et pour tout  $\beta > \alpha$ ,  $\frac{A(t)}{t^\alpha} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$  en  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ -probabilité. Pour cela, on utilise des bornes qui majorent la probabilité que la marche accélérée  $X_t$  s'éloigne d'une grande distance pendant une durée finie fixée. On a également besoin de l'intégrabilité de la fonction d'accélération  $\gamma^\omega(x)$ , qui s'avère être la même que celle de la fonction de Green tuée  $G^{\omega, \Lambda}(x, x)$  et qui s'obtient en adaptant directement les techniques de Tournier dans [45].

Pour  $t = T_n^{l,X}$ , cela signifie que  $\frac{A(T_n^{l,X})}{(T_n^{l,X})^\alpha} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$  en  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ -probabilité. Comme on a fixé un  $\Lambda$  tel que  $\kappa^\Lambda > 1$  on peut utiliser la loi des grands

nombre pour la marche accélérée (le théorème 7), ce qui donne

$$\frac{A(T_n^{l,X})}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sim \frac{A(T_n^{l,X})}{(T_n^{l,X})^{\frac{1}{\alpha}}} (v \cdot l)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

en  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ -probabilité, pour tout  $\alpha < \kappa$ . On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(A(T_n^{l,X}))}{\log(n)} \leq \frac{1}{\kappa}$ , ce qui achève la preuve de la borne supérieure.

*Borne inférieure :*

La preuve de la borne inférieure est calquée sur celle de Tournier pour la proposition 12 de [45]. Comme  $\kappa \leq 1$ , on peut se ramener au cas où  $\alpha_1 + \alpha_{-1} \geq 2 \sum_{j=1}^{2d} \alpha_j - 1$ . On montre alors que pour tout  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , pour tout  $\alpha > \kappa$ ,  $\frac{T_{2n}^{l,Z}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$   $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  p.s.. La même chose étant vraie pour  $(T_{2n+1}^{l,Z})$ , cela permet de conclure.

Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . On introduit les temps de sortie

$$\Theta_0 := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n \notin \{Z_0, Z_0 + e_1\}\}$$

(en remplaçant le signe plus par un signe moins dans le cas où  $l = -e_1$ ), et pour  $k \geq 1$ ,

$$\Theta_k := \Theta_0 \circ \tau_{T_{2k}^{l,Z}}$$

(où  $\tau$  est le shift temporel). Par convention, on pose  $\Theta_k = \infty$  si  $T_{2k}^{l,Z} = \infty$ .

En utilisant la propriété de Markov, l'invariance par translation de  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  et une certaine indépendance (obtenue en considérant les  $T_{2n}^{l,Z}$  à la place des  $T_n^{l,Z}$ ), on montre que pour tout  $\alpha > \kappa$ , borner

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)} \left( \liminf_k \frac{\Theta_0 + \dots + \Theta_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty \right)$$

se ramène à borner

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \liminf_k \frac{\hat{\Theta}_0 + \dots + \hat{\Theta}_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty \right),$$

où les  $\hat{\Theta}$  sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi que  $\Theta_0$ .

On peut alors utiliser le théorème limite pour les lois stables (voir par exemple [14]), qui donne la convergence de  $\frac{\Theta_0 + \dots + \Theta_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}}$  vers une variable aléatoire de distribution non dégénérée. Et donc :

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)} \left( \liminf_k \frac{\Theta_0 + \dots + \Theta_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty \right) = 0.$$

Comme  $T_{2k}^{l,Z} \geq \Theta_0 + \dots + \Theta_{k-1}$ , cela donne  $\frac{T_{2n}^{l,Z}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$   $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  p.s. pour tout  $\alpha > \kappa$ . Ce qui termine la preuve de la borne inférieure.  $\square$

Un argument d'inversion permet ensuite de passer des temps d'atteinte d'un niveau à l'éloignement de la marche pendant une certaine durée, ce qui conclut la preuve du théorème 10.

## CHAPITRE 3

---

### Conditions de balisticité

---

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux conditions qui assurent l'existence d'une loi des grands nombres avec vitesse positive, ou d'un principe d'invariance.

### 3.1 Temps de renouvellement et balisticité

Les conditions de balisticité qui vont être présentées dans la suite font appel à la notion de temps de renouvellement. On va donc commencer par les définir et présenter certaines de leurs propriétés. Dans ce chapitre, on se place dans le cas général d'une marche aléatoire en milieu aléatoire i.i.d..

#### 3.1.1 Définition des temps de renouvellement

Soit  $l$  une direction fixée, dans laquelle la marche aléatoire en milieu aléatoire est transiente. Les temps de renouvellement sont des instants  $\tau_i$  à partir desquels on ne revient pas en arrière dans la direction  $l$  (c.-à-d.  $X_{\tau_i+t} \cdot l \geq X_{\tau_i} \cdot l$  pour tout  $t \geq 0$ ), et tels que la marche n'est encore jamais passée au-delà de  $X_{\tau_i}$  dans la direction  $l$  (c.-à-d.  $X_t \cdot l \leq X_{\tau_i} \cdot l$  pour tout  $t < \tau_i$ ). Ils ont été introduits notamment par Sznitman et Zerner dans [38]. On va détailler ici la manière dont ils sont construits.

Pour  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  une direction choisie, et  $u \geq 0$ , on définit le temps d'atteinte :

$$T_u^l := \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l \geq u\}.$$

Soit  $a > 0$ . On pose

$$D^l := \min\{n \geq 0 : X_n \cdot l < X_0 \cdot l\}.$$

Soit

$$S_0 := 0,$$

$$M_0 := X_0 \cdot l,$$

$$S_1 := T_{M_0+a}^l,$$

$$R_1 := D^l \circ \theta_{S_1} + S_1 = \inf\{n \geq S_1 : X_n \cdot l < X_{S_1} \cdot l\},$$

$$M_1 := \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_1\},$$

où  $\{\theta_n : n \geq 1\}$  représente le décalage temporel sur  $\mathbb{Z}^{d^{\mathbb{N}}}$ . La variable aléatoire  $S_1$  correspond au temps mis par la marche pour dépasser  $X_0 \cdot l + a$  dans la direction  $l$ ,  $R_1$  correspond au premier instant après  $S_1$  où on redescend en dessous de  $X_0 \cdot l + a$  dans la direction  $l$ , et  $M_1$  correspond à la plus grande excursion (le plus grand éloignement dans la direction  $l$ ) effectuée avant  $R_1$ .

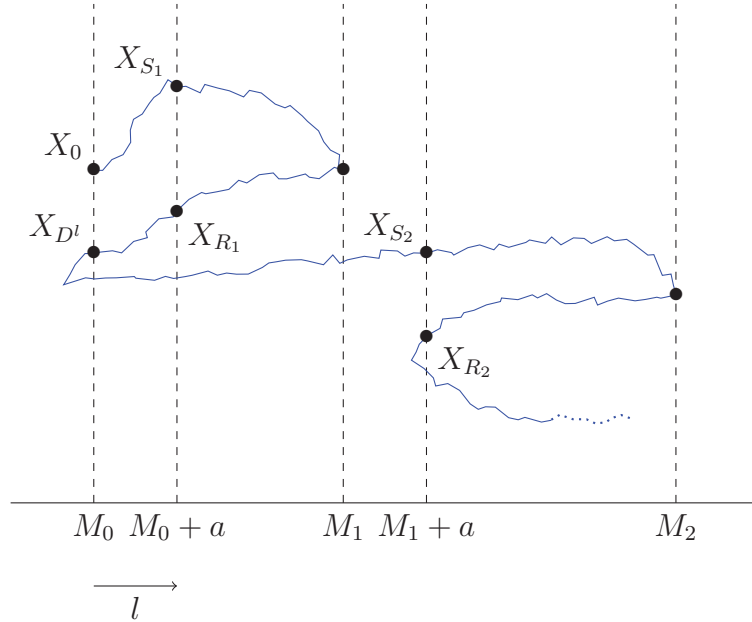


FIGURE 3.1 – Construction des temps de renouvellement

On définit ensuite récursivement, pour  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &:= T_{M_k+a}^l, \\ R_{k+1} &:= D^l \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1}, \\ M_{k+1} &:= \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Le premier temps de renouvellement est alors défini comme

$$\tau_1 := \min\{k \geq 1 : S_k < \infty, R_k = \infty\}.$$

Puis on définit les autres temps de renouvellement récursivement. À partir de la construction au rang  $n$ , on définit le  $(n+1)$ ième temps de renouvellement  $\tau_{n+1}$  comme  $\tau_1(X) + \tau_n(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1})$ . On peut aussi écrire  $\tau_1^l, \tau_2^l, \dots$  pour souligner la dépendance en la direction  $l$ .

On définit la nouvelle probabilité  $Q_0(\cdot) := P_0(\cdot | \tau_1 < \infty)$ . Le résultat suivant est classique en ce qui concerne les temps de renouvellement, et s'avère très utile.

**Théorème 13** (Sznitman et Zerner, corollaire 1.5 de [38]). *Sous  $Q_0$ , les variables  $(X_{\tau_1}, \tau_1), (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$  sont indépendantes. De plus,  $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$  sont distribuées sous  $Q_0$  comme  $(X_{\tau_1}, \tau_1)$  sous  $P_0(\cdot | D^l = \infty)$ .*

### 3.1.2 Loi des grands nombres et principe d'invariance

Certaines conditions d'intégrabilité sur ces temps de renouvellement permettent d'obtenir une loi des grands nombres et un principe d'invariance annealed :

**Théorème 14** (Sznitman et Zerner [38], Zerner [48], Sznitman [34]). *On considère une marche aléatoire en environnement aléatoire elliptique i.i.d.. Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on suppose qu'il existe un voisinage  $V$  de  $l$  tel que pour tout  $l' \in V$ , la marche aléatoire est transiente dans la direction  $l'$ . Alors il existe un  $v$  déterministe tel que  $P_0$ -p.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v.$$

De plus, on a :

- a) Si  $E_0(\tau_1) < \infty$ , la marche est balistique et  $v \neq 0$ .
- b) Si  $E_0(\tau_1^2) < \infty$ ,

$$\varepsilon^{1/2} (X_{[\varepsilon^{-1}n]} - [\varepsilon^{-1}n]v)$$

converge en loi sous  $P_0$  vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.

Il est également possible d'obtenir un principe d'invariance quenched, sous des hypothèses plus restrictives en ce qui concerne les moments des temps de renouvellement :

**Théorème 15** (Rassoul-Agha et Seppäläinen [26]). *Soit  $d \geq 2$ , on considère une marche aléatoire  $X_n$  en environnement aléatoire elliptique i.i.d.. Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on suppose que la marche est transiente dans la direction  $l$  et on définit  $\tau_1$  comme le temps de renouvellement correspondant à cette direction. On suppose de plus que*

$$E_0(\tau_1^p) < \infty,$$

*pour un  $p > 176d$ . Alors on a  $\mathbb{P}$ -p.s. que*

$$B^n(t) := \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}}$$

*converge en loi sous  $P_{0,\omega}$  vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.*

**Théorème 16** (Berger et Zeitouni [4]). *Soit  $d \geq 2$ , on considère une marche aléatoire  $X_n$  en environnement aléatoire uniformément elliptique i.i.d.. Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on suppose que la marche est transiente dans la direction  $l$  et on définit  $\tau_1$  comme le temps de renouvellement correspondant à cette direction. On suppose de plus que*

$$E_0(\tau_1^p) < \infty,$$

*pour un  $p \geq 2$  si  $d \geq 4$ ,  $p \geq 40$  si  $d = 2$  ou  $3$ . Alors on a  $\mathbb{P}$ -p.s. que*

$$B^n(t) := \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}}$$

*converge en loi sous  $P_{0,\omega}$  vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.*

On peut noter que les conditions d'intégrabilité de Berger et Zeitouni sont meilleures que celles de Rassoul-Agha et Seppäläinen. Néanmoins, leur environnement doit être uniformément elliptique, ce qui est plus contraignant.

Les conditions d'intégrabilité des  $\tau_i$  étant difficiles à vérifier explicitement, on va s'intéresser par la suite à des conditions plus générales qui impliquent qu'on a une intégrabilité suffisante pour appliquer les théorèmes précédents.

## 3.2 Condition de Kalikow

La condition de Kalikow est une condition de balisticité introduite par Kalikow dans [17]. Son expression nécessite l'introduction d'une nouvelle marche, appelée marche auxiliaire.

### 3.2.1 Marche auxiliaire de Kalikow

On commence par présenter la marche auxiliaire introduite par Kalikow. Soit  $U$  un sous-ensemble connexe de  $\mathbb{Z}^d$ . On note  $\partial U$  la frontière de  $U$ , c.-à-d.  $\partial U := \{z \in \mathbb{Z}^d \setminus U \text{ t.q. } \exists x \in U \text{ avec } \|z - x\|_1 = 1\}$ .

Pour tout  $z \in U$  et  $z' \in U \cup \partial U$ , et pour tout environnement  $\omega \in \Omega$ , on rappelle que la fonction de Green de la marche aléatoire en environnement  $\omega$  tuée hors de  $U$  est définie par :

$$G_U^\omega(z, z') = E_z^\omega \left( \sum_{k=0}^{T_U} \mathbb{1}_{\{X_k = z'\}} \right)$$

avec  $T_U = \inf\{k | X_k \in \mathbb{Z}^d \setminus U\}$ .

Cette fonction permet de définir les probabilités de transition de Kalikow : pour tout  $z_0, z \in U$ ,

$$\hat{\omega}_{U, z_0}(z, z + e_i) = \frac{\mathbb{E}(G_U^\omega(z_0, z)\omega(z, z + e_i))}{\mathbb{E}(G_U^\omega(z_0, z))},$$

et pour  $z \in \partial U$ ,

$$\hat{\omega}_{U, z_0}(z, z) = 1.$$

Ces probabilités de transition sont bien définies dès que  $G_U^\omega(z_0, z)$  est intégrable sous  $\mathbb{P}$ .

On note  $\hat{P}_{z_0, U}$  la loi de la chaîne de Markov associée partant de  $z_0 \in U \cup \partial U$ . C'est cette marche que l'on appelle marche auxiliaire de Kalikow. Elle est particulièrement intéressante grâce au résultat suivant :

**Proposition 17** (Proposition 1 de [17]). *Si  $\hat{P}_{z_0, U}(T_U < \infty) = 1$ , alors  $P_{z_0}(T_U < \infty) = 1$  et  $X_{T_U}$  ont la même distribution sous les lois  $\hat{P}_{z_0, U}$  et  $P_{z_0}$ .*

### 3.2.2 Définition de la condition de Kalikow

On peut maintenant définir la condition de Kalikow en utilisant la marche auxiliaire.

**Définition 1** (Condition de Kalikow). *La condition de Kalikow est vérifiée dans la direction  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\inf_{U, x \in U} \sum_{i=1}^{2d} (l \cdot e_i) \hat{\omega}_{U, z_0}(x, x + e_i) \geq \varepsilon,$$

où  $U$  doit être un sous-ensemble connexe de  $\mathbb{Z}^d$  contenant  $z_0$ .

La condition de Kalikow implique que  $E_0(\tau_1 | D^l = \infty) < \infty$  (voir par exemple le théorème 2.3 de [38]), et permet donc d'obtenir une loi des grands nombres avec vitesse positive par le théorème 14.

### 3.2.3 Cas particulier des environnements de Dirichlet

Dans le cas des environnements de Dirichlet (voir le chapitre 2 pour une présentation de ces environnements), on a besoin de s'assurer de l'intégrabilité de la fonction de Green tuée pour pouvoir définir la marche auxiliaire de Kalikow. Les résultats de [45] nous assurent que l'intégrabilité est suffisante si et seulement si  $\kappa = 2 \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i - \max_{i \in [1,d]} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) > 1$ . On se place donc dans ce cadre.

Certaines conditions sur les poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  permettent alors de garantir que la condition de Kalikow est vérifiée :

**Proposition 18** (Enriquez et Sabot [16], Tournier [45]). *Soit une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  en environnement de Dirichlet, de poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ . Si  $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{i+d}| > 1$ , alors la marche vérifie la condition de Kalikow.*

Cependant, on ne peut rien dire dans le cas où  $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{i+d}| \leq 1$ , donc ce n'est pas une caractérisation complète de la condition de Kalikow pour les environnements de Dirichlet. Le résultat est intéressant notamment pour le cas  $d = 2$  où les résultats de balisticité de [28] (également détaillés dans le chapitre 2) ne s'appliquent pas.

## 3.3 Énoncé des résultats du chapitre 6

On commence par présenter les conditions de balisticité  $(T)_\gamma, (T), (T')$  introduites par Sznitman dans [34] et [36], qui sont plus générales que la condition de Kalikow. La condition de Kalikow implique notamment  $(T')$ , et il est proposé dans [36] un exemple de marche qui vérifie  $(T')$ , mais pas la condition de Kalikow.

### 3.3.1 Conditions $(T)_\gamma, (T), (T')$

**Définition 2** ( $(T)_\gamma$ , [36]). *Soit  $\gamma \in ]0, 1]$  et  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Une marche aléatoire en environnement aléatoire vérifie la condition  $(T)_\gamma$  dans la direction  $l$  si l'environnement est elliptique, i.e.d. et vérifie*

- (i)  $P_0(\lim_n X_n \cdot l = \infty) = 1$  (la marche est transiente dans la direction  $l$ ),  
et

(ii)  $E_0 \left( \exp \left( c \sup_{0 \leq n \leq \tau_1} \|X_n\|_2^\gamma \right) \right) < \infty$  pour un  $c > 0$ ,

où  $\tau_1$  est le temps de renouvellement défini précédemment.

Le problème de cette définition est qu'on a besoin d'avoir déjà des informations sur les temps de renouvellement pour vérifier si  $(T)_\gamma$  est satisfaite. Mais il existe une autre définition équivalente de la condition  $(T)_\gamma$ . Pour  $L > 0$  et  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on définit la tranche

$$U_{l,L} := \{x \in \mathbb{Z}^d : -L \leq x \cdot l \leq L\}.$$

La condition  $(T)_\gamma$  peut s'exprimer en fonction de la probabilité de sortir par le « mauvais côté » de cette tranche.

**Définition 3** (Définition équivalente de  $(T)_\gamma$ , [11, 36]). *Soit  $\gamma \in ]0, 1]$  et  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Une marche aléatoire en environnement aléatoire vérifie la condition  $(T)_\gamma$  dans la direction  $l$  si et seulement si il existe un voisinage  $V \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  de  $l$  tel que pour tout  $l' \in V$ ,*

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\gamma} \log P_0 \left( X_{T_{U_{l,L}}} \cdot l' < 0 \right) < 0.$$

À partir de la condition  $(T)_\gamma$ , on peut définir les conditions de balisticité  $(T)$  et  $(T')$ .

**Définition 4** ( $(T)$ ,  $(T')$ , [36]). *Une marche aléatoire en environnement aléatoire vérifie la condition  $(T)$  dans la direction  $l$  si elle vérifie  $(T)_\gamma$  pour  $\gamma = 1$  dans la direction  $l$ .*

*Une marche aléatoire en environnement aléatoire vérifie la condition  $(T')$  dans la direction  $l$  si elle vérifie  $(T)_\gamma$  pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$  dans la direction  $l$ .*

Il est direct que pour une direction  $l$  donnée,  $(T)$  implique  $(T')$ , qui implique lui-même  $(T)_\gamma$  pour  $0 < \gamma < 1$ .

L'un des intérêts des conditions  $(T)$  et  $(T')$  est qu'elles nous donnent des informations sur les queues de distribution des temps de renouvellement :

**Proposition 19** (Théorème 3.4 de [35]). *On se place en dimension  $d \geq 2$ . Si  $(T)$  est vérifiée dans la direction  $l$ , alors on a pour tout  $\alpha < \frac{2}{d+1}$  :*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (\log u)^{-\alpha} \log P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

Des résultats semblables ont été montrés pour  $(T')$  (proposition 3.1 de [36]). Cela nous permet d'appliquer les théorèmes 14, 15 et 16, et donc d'obtenir une loi des grands nombres et un principe d'invariance.

### 3.3.2 Résultat principal du chapitre 6

Une partie de mon travail de thèse a été consacrée à affaiblir les hypothèses sur  $E_0(\tau_1^p)$  contenues dans les théorèmes 15 et 16, en supposant en contrepartie que la condition (T) est vérifiée. On obtient l'énoncé suivant, que l'on retrouvera dans le chapitre 6 :

**Théorème 20** (Théorème 1.1 de [10], théorème principal du chapitre 6). *Soit  $d \geq 2$ , on considère une marche aléatoire  $X_n$  en environnement aléatoire elliptique i.i.d.. Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on suppose que la marche est transiente dans la direction  $l$  et on définit  $\tau_1$  comme le temps de renouvellement correspondant à cette direction. On suppose de plus que la condition (T) est satisfaite et qu'il existe  $p > 2$  tel que*

$$E_0(\tau_1^p) < \infty.$$

*On a alors  $\mathbb{P}$ -p.s. que*

$$B^n(t) := \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}}$$

*converge en loi sous  $P_{0,\omega}$  vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.*

Ce théorème nous permet d'obtenir un principe d'invariance quenched dans certains cas non couverts par les hypothèses des théorèmes 15 et 16. Des exemples concernant les environnements de Dirichlet seront donnés dans la suite de ce chapitre.

## 3.4 Énoncé des résultats du chapitre 5

La condition de Kalikow, et les conditions  $(T)_\gamma$ ,  $(T)$ ,  $(T')$  ont l'inconvénient d'être difficiles à vérifier explicitement pour un environnement donné. Dans [3], Berger, Drewitz et Ramírez ont introduit une nouvelle condition de balisticité, la condition polynomiale  $(P)_M$ , qu'il est possible de vérifier en considérant une seule boîte de taille finie. On va présenter cette nouvelle condition.

### 3.4.1 Condition polynomiale $(P)_M$

On commence par introduire quelques notations. Pour  $L, \tilde{L} > 0$  et  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on construit la boîte

$$B_{l,L,\tilde{L}} := R \left( ] - L, L[ \times ] - \tilde{L}, \tilde{L}[^{d-1} \right) \cap \mathbb{Z}^d,$$

où  $R$  est la rotation de  $\mathbb{R}^d$  qui vérifie  $R(e_1) = l$ .

**Définition 5** ( $(P)_M$ , [3, 11]). Soit  $M \geq 1$  et  $L \geq 2$ , on dit que la condition polynomiale  $(P)_M$  est satisfaite dans la direction  $l$  pour une boîte de taille  $L$  (on notera aussi  $(P)_M|l$ ) s'il existe  $\tilde{L} \leq 70L^3$  tel que

$$P_0 \left( X_{T_{B_{l,L,\tilde{L}}}} \cdot l < L \right) \leq \frac{1}{L^M}.$$

Dans [3], Berger, Drewitz et Ramírez montrent que toute marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  dans un environnement i.i.d. uniformément elliptique (c.-à-d. tel que  $\forall x \sim y, \omega(x, y) \geq c$  avec  $c > 0$ ) qui satisfait  $(P)_M$  pour un  $M \geq 15d + 5$  et un  $L \geq \exp(100 + 4dc)$  est nécessairement balistique. Mais la situation est plus complexe dans le cas elliptique, mais non uniformément elliptique. En effet, il existe des marches aléatoires elliptiques qui sont transientes, mais pas balistiques dans une direction donnée (voir par exemple Sabot et Tournier [30] et Bouchet [8] dans le cas des environnements de Dirichlet). Pour traiter le cas non-uniformément elliptique, il est nécessaire d'introduire des conditions d'ellipticité supplémentaires.

### 3.4.2 Conditions d'ellipticité

Des conditions d'ellipticité ont été introduites par Campos et Ramírez dans [11] pour étendre les résultats précédents au cas des environnements qui ne sont pas uniformément elliptiques. Pour présenter ces conditions, on commence par introduire quelques notations.

Soit  $\beta \geq 0$ . On pose

$$\eta_\beta := \max_{e \in U} \mathbb{E} \left( \frac{1}{\omega(0, e)^\beta} \right)$$

et

$$\bar{\beta} := \sup\{\beta \geq 0 : \eta_\beta < \infty\}.$$

On aura aussi besoin de la constante

$$c_0 := \frac{2}{3} 3^{120d^4 + 3000d(\log \eta_{\bar{\beta}/2})^2}.$$

Dans le reste de cette section, quand on supposera qu'on a la condition  $(P)_M$ , il faudra comprendre que la condition  $(P)_M$  est vérifiée pour une boîte de taille  $L \geq c_0$ .

On va maintenant définir la première condition d'ellipticité introduite dans [11].

**Définition 6** (Condition d'ellipticité  $(E)_\beta$ ). Soit  $\beta \geq 0$ . On dit que la loi de l'environnement satisfait la condition d'ellipticité  $(E)_\beta$  si pour tout  $e \in U$  on a

$$\bar{\beta} > \beta.$$

Cette condition nous permet de faire le lien avec la condition  $(T')$  de Sznitman définie précédemment :

**Théorème 21** (Théorème 1.1 de [11]). On considère une marche aléatoire en environnement i.i.d. de dimension  $d \geq 2$ . Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $M \geq 15d+5$ . Si l'environnement satisfait la condition d'ellipticité  $(E)_0$ , alors la condition  $(P)_M|l$  est équivalente à  $(T')|l$ .

Par ailleurs, on dit qu'il existe une direction asymptotique si la limite

$$\hat{v} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\|X_n\|_2}$$

existe  $P_0$ -p.s. La condition polynomiale  $(P)_M$  implique l'existence d'une direction asymptotique (voir par exemple Simenhaus [31]). Dès qu'une direction asymptotique existe, on peut définir le demi-espace

$$H_{\hat{v}} := \{l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : l \cdot \hat{v} \geq 0\}.$$

Ces notions nous permettent d'introduire la deuxième condition d'ellipticité de [11] :

**Définition 7** (Condition d'ellipticité  $(E')_\beta$ ). Soit  $\beta > 0$ . On dit que la loi de l'environnement satisfait la condition d'ellipticité  $(E')_\beta$  s'il existe un  $\{\beta(e) : e \in U\} \in ]0, \infty[^{2d}$  qui vérifie

$$\kappa(\{\beta(e) : e \in U\}) := 2 \sum_{e'} \beta(e') - \sup_{e \in U} (\beta(e) + \beta(-e)) > \beta \quad (3.4.1)$$

et tel que pour tout  $e \in U$ ,

$$\mathbb{E} \left( e^{\sum_{e' \neq e} \beta(e') \log \frac{1}{\omega(0, e')}} \right) < \infty. \quad (3.4.2)$$

De plus, on dit que la condition d'ellipticité  $(E')_\beta$  est satisfaite dans la direction asymptotique s'il existe un  $\{\beta(e) : e \in U\}$  satisfaisant les deux conditions précédentes et tel qu'il existe un  $\beta_1 > 0$  tel que  $\beta(e) = \beta_1$  pour  $e \in H_{\hat{v}}$  et  $\beta(e) \leq \beta_1$  pour  $e \notin H_{\hat{v}}$ .

Cette condition  $(E')_\beta$  permet d'énoncer le résultat suivant sur l'intégrabilité des temps de renouvellement :

**Théorème 22** (Proposition 5.1 de [11]). *Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\beta > 0$  et  $M \geq 15d + 5$ . On suppose que la condition  $(P)_M|l$  est satisfaite dans la direction asymptotique et qu'on a  $(E')_\beta$ . Alors*

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} (\log u)^{-1} \log P_0(\tau_1^{\hat{v}} > u) \leq -\beta.$$

Cela nous permet d'appliquer les théorèmes 14, 15, 16 et 20 quand les hypothèses d'ellipticité sont suffisantes.

### 3.4.3 Résultat principal du chapitre 5

Une partie de mon travail de thèse a été consacrée à améliorer le théorème 22 en supprimant l'hypothèse relative à la direction asymptotique. On obtient l'énoncé suivant, que l'on retrouvera dans le chapitre 5 :

**Théorème 23** (Théorème 1 de [9], théorème principal du chapitre 5). *Soit  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\beta > 0$  et  $M \geq 15d + 5$ . On suppose que la condition  $(P)_M|l$  est satisfaite, et qu'on a  $(E')_\beta$ . Alors*

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} (\log u)^{-1} \log P_0(\tau_1^{\hat{v}} > u) \leq -\beta.$$

Il est intéressant de noter que les hypothèses du théorème 23 sont optimales pour les environnements vérifiant les conditions suivantes sur les queues de distribution de la loi de l'environnement : il existe des  $(\beta_e)_{e \in U}$  positifs et une constante  $C > 1$  tels que pour tout  $e \in U$ , pour tous  $(t_{e'})_{e' \in U \setminus \{e\}}$  qui vérifient  $0 \leq t_{e'} \leq 1$ ,

$$C^{-1} \prod_{e' \in U, e' \neq e} t_{e'}^{\beta_{e'}} \leq \mathbb{P}(\omega(0, e') \leq t_{e'}, \forall e' \in U, e' \neq e) \leq C \prod_{e' \in U, e' \neq e} t_{e'}^{\beta_{e'}}.$$

Les environnements de Dirichlet sont notamment un exemple d'environnements qui satisfont à cette condition.

### 3.4.4 Quelques exemples

La condition  $(P)_M$  étant explicite, on peut trouver facilement plusieurs exemples d'environnements qui la satisfont. Les quelques cas particuliers suivants sont aussi issus de mon travail de thèse. Ils sont détaillés dans [9] et dans le chapitre 5.

Le premier exemple concerne le cas d'environnements  $\omega$  vérifiant une relation de proportionnalité entre  $\omega(0, e_1)$  et  $\omega(0, e_{d+1})$ .

**Théorème 24** (Théorème 4 de [9], théorème 53 du chapitre 5). *Soit  $\mathbb{P}$  une loi elliptique, sous laquelle on tire un environnement  $\omega$  i.i.d.. On suppose qu'il existe  $r > 1$  tel que  $\omega(0, e_1) = r\omega(0, e_{1+d})$ . Alors, la condition polynomiale  $(P)_M|_{e_1}$  est satisfaite pour un  $M \geq 15d + 5$ .*

Ce théorème couvre en particulier le cas d'un environnement introduit par Campos et Ramírez dans [11]. Cet environnement est un exemple d'environnement qui vérifie  $(P)_M|_l$ , dans lequel la marche aléatoire est transiente selon  $l$ , mais pas balistique. Il est défini comme suit : soit  $\varphi$  une variable aléatoire à valeurs dans  $]0, 1/4[$  telle que l'espérance de  $\varphi^{-1/2}$  est infinie, et telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'espérance de  $\varphi^{-(1/2-\varepsilon)}$  est finie. On pose  $X_x$  des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $1/2$ . L'environnement est alors  $\omega$  tel que pour tout  $x$ ,  $\omega(x, x + e_1) = 2\varphi$ ,  $\omega(x, x - e_1) = \varphi$ ,  $\omega(x, x + e_2) = X_x\varphi + (1 - X_x)(1 - 4\varphi)$  et  $\omega(x, x - e_2) = X_x(1 - 4\varphi) + (1 - X_x)\varphi$ .

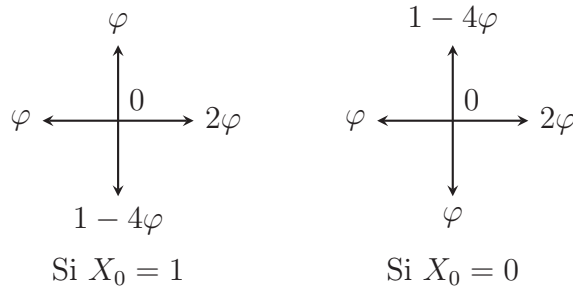


FIGURE 3.2 – Environnement particulier de Campos et Ramírez

Le deuxième exemple concerne le cas d'environnements de Dirichlet dont les poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  vérifient certaines conditions.

**Théorème 25** (Théorème 5 de [9], théorème 56 du chapitre 5). *Soit des constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \alpha_{d+2}, \dots, \alpha_{2d}$  strictement positives. Alors on peut trouver  $\varepsilon \in ]0, 1[$  dépendant uniquement de ces valeurs tel que pour tout  $0 < \alpha_{d+1} \leq \varepsilon$ , la marche aléatoire en environnement de Dirichlet de paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  vérifie la condition polynomiale  $(P)_M|_{e_1}$  pour un  $M \geq 15d + 5$ .*

Ce résultat complète en partie la proposition 18, qui donne la condition de Kalikow (et donc la condition  $(P)_M$ ) quand  $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{i+d}| > 1$ . On obtient ainsi la condition  $(P)_M$  (mais a priori pas la condition de Kalikow) dans des cas qui n'avaient pas été traités jusqu'ici. Néanmoins, la caractérisation de la condition  $(P)_M$  pour le cas des environnements de Dirichlet reste incomplète.

Dans le cas des environnements de Dirichlet, on peut également remarquer que la condition d'ellipticité  $(E')_\beta$  est vérifiée si et seulement si  $\kappa =$

$2 \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i - \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) > \beta$ . En effet,  $\frac{1}{\omega(0, e_i)^\beta}$  est intégrable si et seulement si  $\alpha_i > \beta$ .

Ces résultats nous permettent donc de trouver des poids  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  pour lesquels l'environnement de Dirichlet respecte les hypothèses du théorème 23. Cela nous donne l'intégrabilité des temps de renouvellement, et nous permet d'appliquer ensuite les théorèmes 14, 15 et 20 pour obtenir une loi des grands nombre et des principes d'invariance annealed et quenched. On peut d'ailleurs noter que dans ce cas particulier des environnements de Dirichlet, notre nouveau théorème 20 (le résultat principal du chapitre 6) impose des hypothèses bien moins contraignantes que le théorème 15 pour obtenir le principe d'invariance quenched (la borne sur  $\kappa$  devient notamment la même que pour obtenir le principe d'invariance annealed, ce qui laisse penser qu'on ne pourra pas l'améliorer davantage).



## CHAPTER 4

---

### Sub-ballistic random walk in Dirichlet environment

---

*Abstract.* We consider random walks in Dirichlet environment (RWDE) on  $\mathbb{Z}^d$ , for  $d \geq 3$ , in the sub-ballistic case. We associate to any parameter  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  of the Dirichlet law a time-change to accelerate the walk. We prove that the continuous-time accelerated walk has an absolutely continuous invariant probability measure for the environment viewed from the particle. This allows to characterize directional transience for the initial RWDE. It solves as a corollary the problem of Kalikow's 0 – 1 law in the Dirichlet case in any dimension. Furthermore, we find the polynomial order of the magnitude of the original walk's displacement.

#### 4.1 Introduction

The behaviour of random walks in random environment (RWRE) is fairly well understood in the case of dimension 1 (see Solomon ([33]), Kesten, Kozlov, Spitzer ([19]) and Sinai ([32])). In the multidimensional case, some results are available under ballisticity conditions (we refer to [47] and [6] for an overview of progress in this direction), or in the case of small perturbations. But some simple questions remain unanswered. For example, there is no general characterization of recurrence, Kalikow's 0 – 1 law is known only for  $d \leq 2$  ([50]).

Random walks in Dirichlet environment (RWDE) is the special case when the transition probabilities at each site are chosen as i.i.d. Dirichlet random

variables. RWDE are interesting because of the analytical simplifications they offer, and because of their link with reinforced random walks. Indeed, the annealed law of a RWDE corresponds to the law of a linearly directed-edge reinforced random walk ([15], [24]). This model first appeared in [24] in relation with edge reinforced random walks on trees. It was then studied on  $\mathbb{Z} \times G$  ([18]), and on  $\mathbb{Z}^d$  ([16],[45],[27],[28],[30]).

We are interested in RWDE on  $\mathbb{Z}^d$  for  $d \geq 3$ . A condition on the weights ensures that the mean time spent in finite boxes is finite. Under this condition, it was proved ([28]) that there exists an invariant probability measure for the environment viewed from the particle, absolutely continuous with respect to the law of the environment. Using [30], this gives some criteria on ballisticity.

In this paper, we focus on the case when the condition on the weights is not satisfied. Then the mean time spent in finite boxes is infinite, and there is no absolutely continuous invariant probability measure ([28]). The law of large numbers gives a zero speed. To overcome this difficulty, we construct a time-change that accelerates the walk, such that the accelerated walk spends a finite mean time in finite boxes. An absolutely continuous invariant probability measure then exists. With ergodic results, it gives a characterization of the directional recurrence in the sub-ballistic case. As a corollary, it solves the problem of Kalikow's 0 – 1 law in the Dirichlet case (the case  $d = 2$  has been treated in [50]).

Besides, in the directionally transient case, we show a law of large numbers with positive speed for our accelerated walk. This gives the polynomial order of the magnitude of the original walk's displacement, and could be a first step towards a limit theorem for the original RWDE.

## 4.2 Definitions and statement of the results

Let  $(e_1, \dots, e_d)$  be the canonical basis of  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ , and set  $e_j = -e_{j-d}$ , for  $j \in [d+1, 2d]$ . The set  $\{e_1, \dots, e_{2d}\}$  is the set of unit vectors of  $\mathbb{Z}^d$ . We denote by  $\|z\| = \sum_{i=1}^d |z_i|$  the  $L_1$ -norm of  $z \in \mathbb{Z}^d$ , and write  $x \sim y$  if  $\|y - x\| = 1$ . We consider the set of directed edges

$$E = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2, x \sim y\}.$$

Let  $\Omega$  be the set of all possible environments on  $\mathbb{Z}^d$ :

$$\Omega = \{\omega = (\omega(x, y))_{x \sim y} \in ]0, 1]^E \text{ such that } \forall x \in \mathbb{Z}^d, \sum_{i=1}^{2d} \omega(x, x + e_i) = 1\}.$$

For each  $\omega \in \Omega$ , we run a Markov chain  $Z_n$  on  $\mathbb{Z}^d$  defined by the following transition probabilities:  $\forall(x, y) \in \mathbb{Z}^d, \forall i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ ,

$$P_x^\omega(Z_{n+1} = y + e_i | Z_n = y) = \omega(y, y + e_i).$$

We are interested in random iid Dirichlet environments. Given a family of positive weights  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , a random iid Dirichlet environment is  $\omega \in \Omega$  constructed by choosing independently at each site  $x \in \mathbb{Z}^d$  the values of  $(\omega(x, x + e_i))_{i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket}$  according to a Dirichlet law with parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  that is with density:

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{2d} \Gamma(\alpha_i)} \left(\prod_{i=1}^{2d} x_i^{\alpha_i-1}\right) dx_1 \dots dx_{2d-1}$$

on the simplex

$$\{(x_1, \dots, x_{2d}) \in ]0, 1]^{2d}, \sum_{i=1}^{2d} x_i = 1\}.$$

Here  $\Gamma$  denotes the Gamma function

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

and  $dx_1 \dots dx_{2d-1}$  represents the image of the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^{2d-1}$  by the application  $(x_1, \dots, x_{2d-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{2d-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{2d-1})$ . Obviously, the law does not depend on the specific role of  $x_{2d}$ . We denote by  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  the law obtained on  $\Omega$  this way, by  $\mathbb{E}^{(\alpha)}$  the expectation with respect to  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ , and by  $\mathbb{P}_x^{(\alpha)}[\cdot] = \mathbb{E}^{(\alpha)}[P_x^\omega(\cdot)]$  the annealed law of the process starting at  $x$ .

In [28], it was proved that when

$$\kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) > 1,$$

there exists an invariant probability measure for the environment viewed from the particle, absolutely continuous with respect to  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ . This leads to a complete description of ballistic regimes and directional transience. However, when  $\kappa \leq 1$ , such an invariant probability does not exist, and we only know that the walk is sub-ballistic. In this paper, we focus on the case  $\kappa \leq 1$ . We prove the existence of an invariant probability measure for an accelerated walk. This allows to characterize recurrence in each direction for the initial walk.

Let  $\sigma = (e^1, \dots, e^n)$  be a directed path. By directed path, we mean a sequence of directed edges  $e^i$  such that  $\bar{e^i} = e^{i+1}$  for all  $i$  ( $\underline{e}$  and  $\bar{e}$  are the head and tail of the edge  $e$ ). We note  $\omega_\sigma = \prod_{i=1}^n \omega(e^i)$ . Let  $\Lambda$  be a finite connected set of vertices containing 0. Our accelerating function is:

$$\gamma^\omega(x) = \frac{1}{\sum \omega_\sigma}, \quad (4.2.1)$$

where the sum is on all  $\sigma$  finite simple (each vertex is visited at most once) paths starting from  $x$ , going out of  $x + \Lambda$ , and stopped just after exiting  $x + \Lambda$ . Let  $X_t$  be the continuous-time Markov chain whose jump rate from  $x$  to  $y$  is  $\gamma^\omega(x)\omega(x, y)$ , with  $X_0 = 0$ . Then  $Z_n = X_{t_n}$ , for  $t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma^\omega(Z_k)} E_k$ , where the  $E_i$  are independent exponentially distributed random variables with rate parameters 1:  $X_t$  is an accelerated version of the walk  $Z_n$ .

We note  $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  the shift on the environment defined by:  $\tau_x \omega(y, z) = \omega(x + y, x + z)$ , and call process seen from the particle the process defined by  $\bar{\omega}_t = \tau_{X_t} \omega$ . Under  $P_0^{\omega_0}$  ( $\omega_0 \in \Omega$ ),  $\bar{\omega}_t$  is a Markov process on state space  $\Omega$ , his generator  $R$  is given by

$$Rf(\omega) = \sum_{i=1}^{2d} \gamma^\omega(0) \omega(0, e_i) (f(\tau_{e_i} \omega) - f(\omega)),$$

for all bounded measurable functions  $f$  on  $\Omega$ . Invariant probability measures absolutely continuous with respect to the law of the environment are a classical tool to study processes viewed from the particle. The following theorem provides one for our accelerated walk.

**Theorem 26.** *Let  $d \geq 3$  and  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  be the law of the Dirichlet environment for the weights  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ . Let  $\kappa^\Lambda > 0$  be defined by*

$$\kappa^\Lambda = \min \left\{ \sum_{e \in \partial_+(K)} \alpha_e, K \text{ connected set of vertices}, 0 \in K \text{ and } \partial\Lambda \cap K \neq \emptyset \right\}$$

where  $\partial_+(K) = \{e \in E, \underline{e} \in K, \bar{e} \notin K\}$  and  $\partial\Lambda = \{x \in \Lambda | \exists y \sim x \text{ such that } y \notin \Lambda\}$ . If  $\kappa^\Lambda > 1$ , there exists a unique probability measure  $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$  on  $\Omega$  that is absolutely continuous with respect to  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  and invariant for the generator  $R$ . Furthermore,  $\frac{d\mathbb{Q}^{(\alpha)}}{d\mathbb{P}^{(\alpha)}}$  is in  $L_p(\mathbb{P}^{(\alpha)})$  for all  $1 \leq p < \kappa^\Lambda$ .

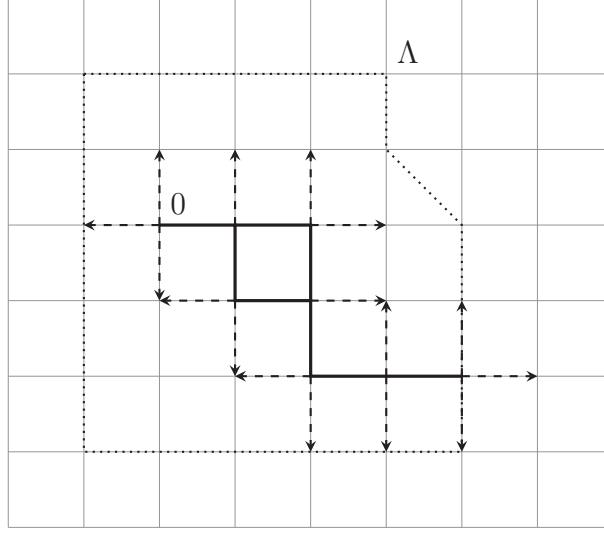


Figure:  $\sum_{e \in \partial_+(K)} \alpha_e$  (dashed arrows) for an arbitrary  $K$  (thick lines).

**Remark 27.** If  $\Lambda$  is a box of radius  $R_\Lambda$ , the formula is explicit:

$$\kappa^\Lambda = \min_{i_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left( \alpha_{i_0} + \alpha_{i_0+d} + (R_\Lambda + 1) \sum_{i \neq i_0} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) \right).$$

**Remark 28.**  $\kappa^\Lambda$  can be made as big as we want by taking the set  $\Lambda$  big enough. Then for each  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , there exists an acceleration function such that the accelerated walk verifies theorem 26.

Let  $d_\alpha = \mathbb{E}_0^{(\alpha)}[Z_1] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i} \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i e_i$  be the drift after the first jump.

**Theorem 29.** Let  $d \geq 3$ ,

i) If  $\kappa^\Lambda > 1$  and  $d_\alpha = 0$ , then

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t} = 0, \quad \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s.},$$

and  $\forall i = 1 \dots d$ ,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = +\infty, \quad \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s.}.$$

ii) If  $\kappa^\Lambda > 1$  and  $d_\alpha \neq 0$ , then  $\exists v \neq 0$  such that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t} = v, \quad \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s.},$$

and  $\forall i = 1 \dots d$  such that  $d_\alpha \cdot e_i \neq 0$ , we have

$$(d_\alpha \cdot e_i)(v \cdot e_i) > 0,$$

whereas if  $d_\alpha \cdot e_i = 0$ ,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = -\infty, \limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t \cdot e_i = +\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s..$$

As  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  and  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  go through exactly the same vertices in the same order, and as the two processes stay a finite time on each vertex without exploding, recurrence and transience for the original walk  $Z_n \cdot e_i$  follow from those of  $X_t \cdot e_i$ .

**Corollary 30.** *Let  $d \geq 3$ , for  $i = 1, \dots, d$*

*i) If  $d_\alpha \cdot e_i = 0$ ,*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot e_i = -\infty, \limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot e_i = +\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s..$$

*ii) If  $d_\alpha \cdot e_i > 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot e_i = +\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s..$$

*iii) If  $d_\alpha \cdot e_i < 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot e_i = -\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s..$$

The proof of theorem 29 allows besides to solve the problem of Kalikow's 0 – 1 law in the Dirichlet case.

**Corollary 31** (Kalikow's 0 – 1 law in the Dirichlet case). *Let  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  be the law of the Dirichlet environment on  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , for the weights  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , and  $Z_n$  the associated random walk in Dirichlet environment. Then for all  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , we are in one of the following cases:*

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = -\infty, \limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = +\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s.,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = -\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s.,$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n \cdot l = +\infty, \mathbb{P}_0^{(\alpha)} a.s..$

**Remark 32.** *Theorem 29 also gives the existence of a deterministic asymptotic direction  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$  a.s. when  $d \geq 3$  and  $d_\alpha \neq 0$ . As I was finishing this article, Tournier informed me about the existence of a more general version of theorem 1 of [30]. Using this result instead of [30] in the proof of theorem 29 allows to show that the asymptotic direction is  $\frac{d_\alpha}{|d_\alpha|}$ , see [44] for details.*

In the transient sub-ballistic case, we also obtain the polynomial order of the magnitude of the walk's displacement:

**Theorem 33.** *Let  $d \geq 3$ ,  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  be the law of the Dirichlet environment with parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  on  $\mathbb{Z}^d$ , and  $Z_n$  the associated random walk in Dirichlet environment. We suppose that*

$$\kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) \leq 1.$$

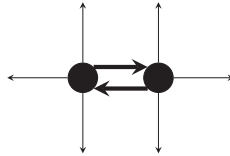
*Let  $l \in \{e_1, \dots, e_{2d}\}$  be such that  $d_\alpha \cdot l > 0$ . Then*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(Z_n \cdot l)}{\log(n)} = \kappa \text{ in } \mathbb{P}^{(\alpha)}\text{-probability.}$$

**Remark 34.** *The directional transience shown in [44] should also enable to extend the results of theorem 29, corollary 30 and theorem 33 from  $(e_i)_{i=1, \dots, 2d}$  to any  $l \in \mathbb{R}^d$  such that  $d_\alpha \cdot l > 0$ .*

### 4.3 Outline of the proofs

All the difficulties compared to [28] come from the presence of some big traps in the sub-ballistic case. When the parameters  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$  are small, the Dirichlet environment is very disordered. As the environment is not uniformly elliptic, it creates finite sets of edges where a lot of time is spent. The walk is trapped on those edges. The simplest example of trap is the case of two opposite edges with high probabilities:



To deal with the traps, we introduce an accelerated walk  $X_t$ , with the jump rates  $\gamma^\omega(x)\omega(x, y)$  from  $x$  to  $y$ , which moves faster in strong traps. We choose the accelerating function  $\gamma^\omega(x) = \frac{1}{\sum \omega_\sigma}$  defined in (4.2.1), where we sum on some paths exiting a box  $x + \Lambda$ . It "kills" all the traps of size smaller than  $|\Lambda|$ , and for  $\Lambda$  big enough the walk  $X_t$  becomes ballistic.

To prove theorems 26 and 29, we try to adapt the proofs of [28] to the accelerated walk  $X_t$ . First we need an invariant measure absolutely continuous with respect to  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  for the process seen from the particle  $\bar{\omega}_t$ . For this we

approximate  $\mathbb{Z}^d$  by a periodic torus of large size  $N$ . As the torus is a finite graph, there exists an invariant probability  $\tilde{\pi}_N^\omega$  for  $X_t$ , and  $N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0) \mathbb{P}_N^{(\alpha)}$  is an invariant probability for  $\bar{\omega}_t$ . We are then reduced to find a bound for  $\mathbb{E}^{(\alpha)} [(N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0))^p]$ , uniformly in  $N$ , for  $p < \kappa^\Lambda$ .

This is bounded by  $\mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\tilde{\pi}_N^\omega(0)}{\tilde{\pi}_N^\omega(x)} \right)^{p/N^d} \right]$  thanks to the arithmetico-geometrical inequality. We then use lemma 1 of [28] which tells that the time-reversed environment  $\tilde{\omega}$  still follows i.i.d. Dirichlet laws of known parameters. We therefore rewrite the previous expectation as  $\mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \frac{\tilde{\omega}^{\theta_N}}{\omega^{\theta_N}} (\gamma^\omega(0))^{\frac{p}{N^d} - p} *** \right]$  where  $\theta_N$  can be any positive function that follows some divergence conditions and \*\*\* are extra-terms made precise in the proof (see expression 4.4.4) unnecessary for this heuristic approach.

At this point, Holder's inequality allows to bound this expectation by

$$\mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \omega^{-q\theta_N} (\gamma^\omega(0))^{\frac{pq}{N^d} - pq} *** \right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \tilde{\omega}^{r\theta_N} \right]^{\frac{1}{r}}$$

where  $\omega$  and  $\tilde{\omega}$  follow i.i.d. Dirichlet laws of known parameters. This is where the acceleration factor comes useful:  $\omega^{-q\theta_N}$  has finite expectation only when  $\alpha(e) - q\theta_N(e) > 0$  for all edges  $e$ . The  $\gamma^\omega$  factors allow to keep this integrability under weaker conditions.

A Taylor expansion then gives  $\mathbb{E}^{(\alpha)} [(N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0))^p] \leq \exp(c \sum \theta_N(e)^2)$ . It only remains to show there exists  $\theta_N$  of finite energy satisfying the divergence condition. For this, we use a theorem of the type max-flow min-cut, in a generalized version that also gives a bound on the norm of the flow.

It proves the existence of the invariant measure for the graph  $\mathbb{Z}^d$ . We conclude the proof of theorem 29 by proving its ergodicity and applying Birkhoff's ergodic theorem. The other results are corollaries.

## 4.4 Proof of theorem 26

We first give some definitions and notations. Let  $G = (V, E)$  be an oriented graph. For  $e \in E$ , we note  $\underline{e}$  the tail of the edge, and  $\bar{e}$  his head, such that  $e = (\underline{e}, \bar{e})$ . The divergence operator is:  $\text{div} : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^V$  such that:  $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\text{div}(\theta)(x) = \sum_{e \in E, \underline{e}=x} \theta(e) - \sum_{e \in E, \bar{e}=x} \theta(e).$$

For  $N \in \mathbb{N}^*$ , we set  $T_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$  the  $d$ -dimensional torus of size  $N$ . We note  $G_N = (T_N, E_N)$  the directed graph obtained by projection of  $(\mathbb{Z}^d, E)$  on

the torus  $T_N$ . Let  $\Omega_N$  be the space of elliptic random environments on the torus:

$$\Omega_N = \{\omega = (\omega(x, y))_{x \sim y} \in ]0, 1]^{E_N} \text{ such that } \forall x \in T_N, \sum_{i=1}^{2d} \omega(x, x + e_i) = 1\}.$$

We denote by  $\mathbb{P}_N^{(\alpha)}$  the law on the environment obtained by choosing independently for each  $x \in T_N$  the exit probabilities of  $x$  according to a Dirichlet law with parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ .

For  $\omega \in \Omega_N$ , we note  $\pi_N^\omega$  the unique (because of ellipticity) invariant probability measure of  $Z_n^\omega$  on the torus in the environment  $\omega$ . Then  $\left(\frac{\pi_N^\omega(x)}{\gamma^\omega(x)}\right)_{x \in T_N}$  is an invariant measure for  $X_t^\omega$  on the torus in the environment  $\omega$ , and

$$\tilde{\pi}_N^\omega(y) := \frac{\frac{\pi_N^\omega(y)}{\gamma^\omega(y)}}{\sum_{x \in T_N} \frac{\pi_N^\omega(x)}{\gamma^\omega(x)}}$$

is the associated invariant probability. Define

$$f_N(\omega) := N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0) \text{ and } \mathbb{Q}_N^{(\alpha)} := f_N \mathbb{P}_N^{(\alpha)},$$

then, thanks to translation invariance,  $\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}$  is an invariant probability measure on  $\Omega_N$  for the generator  $R$  of the accelerated process seen from the particle.

*Proof.* Let  $f$  be a bounded measurable function on  $\Omega_N$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_N} Rf(\omega) d\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}(\omega) \\ &= \int_{\Omega_N} \sum_{i=1}^{2d} \gamma^\omega(0) \omega(0, e_i) (f(\tau_{e_i} \omega) - f(\omega)) d\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{2d} \int_{\Omega_N} \gamma^\omega(0) \omega(0, e_i) f(\tau_{e_i} \omega) N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0) d\mathbb{P}_N^{(\alpha)}(\omega) \\ & \quad - \int_{\Omega_N} \gamma^\omega(0) f(\omega) d\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}(\omega) \end{aligned}$$

Using first translation invariance, then the definition of  $\tilde{\pi}_N^\omega$  and the fact that

$\pi_N^\omega$  is a probability measure, we get:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{2d} \int_{\Omega_N} \gamma^\omega(0) \omega(0, e_i) f(\tau_{e_i} \omega) N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0) d\mathbb{P}_N^{(\alpha)}(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{2d} \int_{\Omega_N} \gamma^\omega(e_i) \omega(e_i, 0) f(\omega) N^d \tilde{\pi}_N^\omega(e_i) d\mathbb{P}_N^{(\alpha)}(\omega) \\
&= \int_{\Omega_N} \sum_{i=1}^{2d} \omega(e_i, 0) \frac{\pi_N^\omega(e_i)}{\sum_{x \in T_N} \frac{\pi_N^\omega(x)}{\gamma^\omega(x)}} f(\omega) N^d d\mathbb{P}_N^{(\alpha)}(\omega) \\
&= \int_{\Omega_N} \frac{\pi_N^\omega(0)}{\sum_{x \in T_N} \frac{\pi_N^\omega(x)}{\gamma^\omega(x)}} f(\omega) N^d d\mathbb{P}_N^{(\alpha)}(\omega) \\
&= \int_{\Omega_N} \gamma^\omega(0) f(\omega) d\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}(\omega)
\end{aligned}$$

It gives  $\int_{\Omega_N} Rf(\omega) d\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}(\omega) = 0$ , and proves that  $\mathbb{Q}_N^{(\alpha)}$  is an invariant probability measure for  $R$ .  $\square$

We can now reduce theorem 26 to the following lemma.

**Lemma 35.**  $\forall p \in [1, \kappa^\Lambda[$ ,

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|f_N\|_{L_p(\mathbb{P}_N^{(\alpha)})} < +\infty.$$

Once this lemma is proved, the proof of theorem 26 follows easily, we refer to [28], pages 5, 6, where the situation is exactly the same, or to [6], pages 11 and 18, 19.

*Proof of lemma 35.* This proof is divided in two main steps. First we introduce the "time-reversed environment" and prepare the application of the "time reversal invariance" (lemma 1 of [27], or proposition 1 of [30]). Then we apply this invariance, and use a lemma of the type "max-flow min-cut problem".

### Step 1:

Let  $(\omega(x, y))_{x \sim y}$  be in  $\Omega_N$ . The time-reversed environment is defined by:  $\forall (x, y) \in T_N^2$ ,  $x \sim y$ ,

$$\tilde{\omega}(x, y) = \omega(y, x) \frac{\pi_N^\omega(y)}{\pi_N^\omega(x)}.$$

We know that:  $\forall x \in T_N$ ,

$$\sum_{\underline{e}=x} \alpha(e) = \sum_{\bar{e}=x} \alpha(e) = \sum_{j=1}^{2d} \alpha_j,$$

then  $\text{div}(\alpha)(x) = 0$ . We can therefore apply lemma 1 of [27] which gives: if  $(\omega(x, y))$  is distributed according to  $\mathbb{P}_N^{(\alpha)}$ , then  $(\check{\omega}(x, y))$  is distributed according to  $\mathbb{P}_N^{(\check{\alpha})}$ , where  $\forall (x, y) \in E_N^2$ ,

$$\check{\alpha}(x, y) = \alpha(y, x).$$

Let  $p$  be a real,  $1 < p < \kappa^\Lambda$ . We have:

$$(f_N(\omega))^p = (N^d \tilde{\pi}_N^\omega(0))^p.$$

Introducing the immediate fact that

$$1 = \sum_{x \in T_N} \tilde{\pi}_N^\omega(x),$$

it gives:

$$(f_N(\omega))^p = \left( \frac{\tilde{\pi}_N^\omega(0) \times N^d}{\sum_{x \in T_N} \tilde{\pi}_N^\omega(x)} \right)^p$$

we can then use the arithmetico-geometric inequality:

$$\begin{aligned} (f_N(\omega))^p &\leq \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\tilde{\pi}_N^\omega(0)}{\tilde{\pi}_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \\ &= \prod_{x \in T_N} \left( \left( \frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \left( \frac{\gamma^\omega(x)}{\gamma^\omega(0)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \right) \end{aligned}$$

For  $N$  big enough and  $x \neq 0$ , the " $\gamma^\omega(x)$ " term will have few effects on the integrability of  $(f_N(\omega))^p$ , as it is set to the small enough power  $\frac{p}{N^d}$ . On the contrary, the " $\gamma^\omega(0)$ " term is set to the power  $\frac{p}{N^d} - p$ , and will therefore be small when 0 is in a trap: it is the key to the integrability computation for the accelerated walk. We thus need to give now some bounds for  $\gamma^\omega(0)$ ,

whereas  $\gamma^\omega(x)^{\frac{p}{N^d}}$  will be dealt with later.

$$\begin{aligned}
(f_N(\omega))^p &\leq \left( \frac{1}{\gamma^\omega(0)} \right)^{p - \frac{p}{N^d}} \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \\
&= \left( \sum_{\sigma: 0 \rightarrow \Lambda^c} \omega_\sigma \right)^{p - \frac{p}{N^d}} \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \\
&\leq C \sum_{\sigma: 0 \rightarrow \Lambda^c} \left( (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \prod_{x \in T_N} \left( \frac{\pi_N^\omega(0)}{\pi_N^\omega(x)} \right)^{\frac{p}{N^d}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right)
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

where  $C = (\#\{\sigma : 0 \rightarrow \Lambda^c\})^{p - \frac{p}{N^d}}$  and the sums on  $\sigma$  correspond to the sums on simple paths.

Take  $\theta_N^\sigma : E_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ , and define  $\check{\theta}_N^\sigma$  by:  $\forall x \sim y, \check{\theta}_N^\sigma(x, y) = \theta_N^\sigma(y, x)$ . It is clear that

$$\frac{\check{\omega}_N^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega_N^{\theta_N^\sigma}} = \pi_N^{\text{div}(\theta_N^\sigma)} \tag{4.4.2}$$

where by  $\lambda^\beta$  we mean  $\prod_{e \in E_N} \lambda(e)^{\beta(e)}$  (resp.  $\prod_{x \in T_N} \lambda(x)^{\beta(x)}$ ) for any couple of functions  $\lambda, \beta$  on  $E_N$  (resp.  $T_N$ ). Therefore, if we choose for all  $\sigma : 0 \rightarrow \Lambda^c$  simple path a  $\theta_N^\sigma : E_N \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that

$$\text{div}(\theta_N^\sigma) = \frac{p}{N^d} \sum_{x \in T_N} (\delta_0 - \delta_x), \tag{4.4.3}$$

(4.4.1) and (4.4.2) give us

$$f_N^p \leq C \sum_{\sigma: 0 \rightarrow \Lambda^c} \left( (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \frac{\check{\omega}_N^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega_N^{\theta_N^\sigma}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right).$$

Note that we choose a  $\theta_N^\sigma$  for each term of the sum, they can be different as long as (4.4.3) is satisfied. As the sum is finite, we only have to show that for all  $\sigma : 0 \rightarrow \Lambda^c$  simple path we can find  $(\theta_N^\sigma)_{N \in \mathbb{N}}$  such that for all  $N$ ,  $\theta_N^\sigma$  satisfies (4.4.3) and:

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \frac{\check{\omega}_N^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega_N^{\theta_N^\sigma}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right] < \infty. \tag{4.4.4}$$

**Step 2:**

Take  $p > 1$ . We first construct for all  $\sigma : 0 \rightarrow \Lambda^c$  simple path a sequence  $(\theta_N^\sigma)_{N \in \mathbb{N}}$  that satisfies (4.4.3), and then we show that it satisfies (4.4.4) too.

**Construction of  $(\theta_N^\sigma)_{N \in \mathbb{N}}$ .** We want to use lemma 2 of [28], which is a result of type max-flow min-cut (see for example [21], section 3.1, for a general description of the max-flow min-cut problem), with a  $L_2$  bound. We first recall some definitions and notions on the matter. In the infinite graph  $G = (\mathbb{Z}^d, E)$ , a cut-set between  $x \in \mathbb{Z}^d$  and  $\infty$  is a subset  $S$  of  $E$  such that any infinite simple directed path (i.e. an infinite directed path that does not go twice through the same vertex) starting from  $x$  must necessarily go through one edge in  $S$ . A cut-set which is minimal for inclusion is necessarily of the form:

$$S = \partial_+(A) = \{e \in E, \underline{e} \in A, \bar{e} \in A^c\} \quad (4.4.5)$$

where  $A$  is a finite subset of  $\mathbb{Z}^d$  containing  $x$  and such that any  $y \in A$  can be reached by a directed path in  $A$  starting from  $x$ . Let  $(c(e))_{e \in E}$  be a family of non-negative reals, called the capacities. The minimal cut-set sum between 0 and  $\infty$  is defined by:

$$m((c(e))_{e \in E}) = \inf\{c(S), S \text{ a cut-set separating } 0 \text{ and } \infty\}$$

where  $c(S) = \sum_{e \in S} c(e)$ . Remark that the infimum can be taken only on minimal cut-sets, i.e. cut-sets of the form (4.4.5).

In our case, we set  $\sigma$  an arbitrary simple path from 0 to  $\Lambda^c$ . Set  $N \in \mathbb{N}$ , we define:

$$\alpha^{(\sigma)}(e) = \begin{cases} \alpha(e) + \kappa^\Lambda & \text{if } e \in \sigma \\ \alpha(e) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then  $m((\alpha^{(\sigma)}(e))_{e \in E_N}) \geq \kappa^\Lambda$ . Indeed:

- If some  $e \in \sigma$  is in the min-cut, it is obvious.
- Otherwise, as  $0 \in \sigma$  the min-cut is of the form  $S = \partial_+(K)$  with  $\sigma \subset K$  and  $K$  a finite connected set of vertices. The definition of  $\kappa^\Lambda$  in theorem 26 gives directly  $m((\alpha^{(\sigma)}(e))_{e \in E_N}) \geq \kappa^\Lambda$ .

Lemma 2 of [28] states:

**Lemma 36** (Lemma 2 of [28]). *Let  $C'$  and  $C''$  be two reals such that  $0 < C' < C'' < \infty$ . There exists a finite constant  $c_1 > 0$  and an integer  $N_0 > 0$  depending only on  $C', C'', d$  such that for all sequence  $(c_e)_{e \in E}$  such that*

$$\forall e \in E, \quad C' < c_e < C'',$$

and for all integer  $N > N_0$ , there exists a function  $\theta_N : E_N \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that:

$$\operatorname{div}(\theta_N) = m((c)) \frac{1}{N^d} \sum_{x \in T_N} (\delta_0 - \delta_x),$$

$$\|\theta_N\|_2^2 = \sum_{e \in E_N} \theta_N(e)^2 < c_1,$$

and such that

$$\theta_N(e) \leq c(e), \quad \forall e \in E_N,$$

when we identify  $E_N$  with the edges of  $E$  such that  $\underline{e} \in [-N/2, N/2]^d$ .

**Remark 37.** The first part of the lemma (without the  $L_2$  bound) is an extension of the classical max-flow min-cut theorem on finite directed graphs. We add for all  $x$  a directed edge  $(x, \delta)$ , where  $\delta$  is a new cemetery point, and give a capacity of  $1/N^d$  to all those new edges. Then we apply the classical theorem with source 0 and sink  $\delta$  to get the result. The second part of the lemma is more complicated (see [28] for the proof).

With  $c(e) = \frac{p}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e)$ , it gives here that for all  $N \geq N_0$  there is a function  $\theta_N^\sigma$  satisfying (4.4.3), such that  $\theta_N^\sigma(e) \leq \frac{p}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e)$  and such that  $\|\theta_N^\sigma\|_2^2$  is uniformly bounded in  $N$ .

**Preliminary computations about (4.4.4).** Let  $q$  and  $r$  be positive reals such that  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$  and  $pq < \kappa^\Lambda$ . Using in a first time Hölder's inequality and then the time-reversed environment (lemma 1 of [27]), we obtain:

$$\mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \frac{\check{\omega}^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega^{\theta_N^\sigma}} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right] \quad (4.4.6)$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \omega^{-q\theta_N^\sigma} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ \check{\omega}^{r\check{\theta}_N^\sigma} \right]^{\frac{1}{r}} \\ &= \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \omega^{-q\theta_N^\sigma} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}^{(\check{\alpha})} \left[ \omega^{r\theta_N^\sigma} \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Define  $\alpha(x) = \sum_{e=x} \alpha(e)$ ,  $\theta_N^\sigma(x) = \sum_{e=x} \theta_N^\sigma(e)$ . For all  $x \in T_N$ , we have  $\alpha(x) = \check{\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{2d} \alpha_i$ , we thus note  $\alpha_0 = \sum_{i=0}^{2d} \alpha_i$ . In order to simplify

notations, we note  $d\lambda_\Omega = \prod_{e \in \tilde{E}_N} d\omega(e)$ , where we obtain  $\tilde{E}_N$  from  $E_N$  by removing for each  $x$  one arbitrary edge leaving  $x$ . We can now compute the first expectation in (4.4.7):

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \omega^{-q\theta_N^\sigma} \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \right] \\
&= \int (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \left( \prod_{e \in E_N} \omega(e)^{\alpha(e) - 1 - q\theta_N^\sigma(e)} \right) \prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \frac{\prod_x \Gamma(\alpha_x)}{\prod_e \Gamma(\alpha_e)} d\lambda_\Omega \\
&= \int \frac{(\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \left( \prod_{e \in E_N} \omega(e)^{\alpha(e) - 1 - q\theta_N^\sigma(e)} \right) \prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_x)}{\prod_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} \left( \sum_{\sigma: x \rightarrow (x+\Lambda)^c} \omega_\sigma \right)^{\frac{pq}{N^d}} \prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha_e)} d\lambda_\Omega \\
& \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \omega^{-q\theta_N^\sigma} \prod_{x \in T_N} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \right] \\
&\leq \int \frac{(\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \left( \prod_{e \in E_N} \omega(e)^{\alpha(e) - 1 - q\theta_N^\sigma(e)} \right) \left( \prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_x) \right)}{\left( \prod_{x \in T_N, x \neq 0} \omega_{\sigma_x}^{\frac{pq}{N^d}} \right) \left( \prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha_e) \right)} d\lambda_\Omega
\end{aligned}$$

where  $\sigma_x$  is an arbitrarily chosen simple path in the preceding sum. Then

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{pq - \frac{pq}{N^d}} \omega^{-q\theta_N^\sigma} \prod_{x \in T_N} (\gamma^\omega(x))^{\frac{pq}{N^d}} \right] \\
&\leq \frac{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0) \prod_{e \in E_N} \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha_e) \prod_{x \in T_N} \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))}
\end{aligned}$$

with

$$\beta^\sigma(x) = \sum_{x=\underline{e}} \beta^\sigma(e)$$

and

$$\beta^\sigma(e) = \alpha(e) + pq \left(1 - \frac{1}{N^d}\right) \mathbb{1}_{e \in \sigma} - \sum_{x \in T_N, x \neq 0} \frac{pq}{N^d} \mathbb{1}_{e \in \sigma_x}.$$

As  $\Lambda$  is finite, an edge can be in only a finite number of  $\sigma_x$ . We have then for all  $e$ ,  $\sum_{x \in T_N, x \neq 0} \frac{pq}{N^d} \mathbb{1}_{e \in \sigma_x} < +\infty$ . This proves that  $\beta^\sigma$  is well defined and takes only finite values.

The second expectation in (4.4.7) is easy to compute:

$$\mathbb{E}^{(\check{\alpha})}(\omega^{r\check{\theta}_N^\sigma}) = \frac{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e)) \prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0)}{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0 + r\check{\theta}_N^\sigma(x)) \prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha(e))}.$$

We did not check that the previous expressions are well defined: we need to prove that for the given  $\theta_N^\sigma$ , the arguments of the Gamma functions are positive. As it is a bit tedious, we delay this checking to the next point in the proof.

We now have that  $\mathbb{E}^{(\alpha)} \left[ (\omega_\sigma)^{p - \frac{p}{N^d}} \frac{\check{\omega}_N^{\check{\theta}_N^\sigma}}{\omega_N^{\theta_N^\sigma}} \prod_{x \in T_N} (\gamma^\omega(x))^{\frac{p}{N^d}} \right]$  is smaller than:

$$\left( \frac{\prod_x \Gamma(\alpha_0) \prod_e \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))}{\prod_e \Gamma(\alpha_e) \prod_x \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \frac{\prod_e \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e)) \prod_x \Gamma(\alpha_0)}{\prod_x \Gamma(\alpha_0 + r\check{\theta}_N^\sigma(x)) \prod_e \Gamma(\alpha(e))} \right)^{\frac{1}{r}}$$

We are reduced to prove that  $\forall \sigma : 0 \rightarrow \Lambda^c$  simple path,

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{\prod_x \Gamma(\alpha_0)}{\prod_e \Gamma(\alpha_e)} \left( \frac{\prod_e \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))}{\prod_x \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \frac{\prod_e \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e))}{\prod_x \Gamma(\alpha_0 + r\check{\theta}_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{r}} < +\infty \quad (4.4.8)$$

**Checking that the previous Gamma functions were well defined.**

As for all  $e \in E_N$   $\alpha(e) > 0$  and  $\theta_N^\sigma(e) \geq 0$ , the result is straightforward except for  $\Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))$  and  $\Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))$ . By construction of  $\theta_N^\sigma$ , we know that  $\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e) \geq \beta^\sigma(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e)$ . Then we just have to check the positivity of this second expression. Take  $e \in E_N$ :

– If  $e \in \sigma$ , then

$$\begin{aligned} & \beta^\sigma(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e) \\ &= \alpha(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} (\alpha(e) + \kappa^\Lambda) + pq - \frac{pq}{N^d} - \sum_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} \frac{pq}{N^d} \mathbb{1}_{e \in \sigma_x} \\ &= \alpha(e) \left(1 - \frac{pq}{\kappa^\Lambda}\right) - \frac{pq}{N^d} \left(1 + \sum_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} \mathbb{1}_{e \in \sigma_x}\right) \end{aligned}$$

As we assumed  $pq < \kappa^\Lambda$  and  $\kappa^\Lambda > 1$ ,  $\alpha(e) \left(1 - \frac{pq}{\kappa^\Lambda}\right) > 0$ . The second term can be made as small as needed by choosing  $N$  big enough. Then  $\beta^\sigma(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e) > 0$  for  $N$  big enough.

– If  $e \notin \sigma$ , then

$$\begin{aligned} \beta^\sigma(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e) &= \alpha(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha(e) - \sum_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} \frac{pq}{N^d} \mathbb{1}_{e \in \sigma_x} \\ &\geq \alpha(e) \left(1 - \frac{pq}{\kappa^\Lambda}\right) - (\sharp \Lambda) \frac{pq}{N^d} \end{aligned}$$

As before, by choosing  $N$  big enough we make sure that it is positive.

Remark that for  $N$  big enough,  $\min_{i=1 \dots 2d} \alpha_i \left(1 - \frac{pq}{\kappa^\Lambda}\right) - (\sharp \Lambda) \frac{pq}{N^d}$  is also positive, and it is a uniform lower bound of  $\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e)$ , for all  $e \notin \sigma$ .

**Proof of (4.4.8).** As  $\sigma$  is a finite path, the above tells us that there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $\forall e \in \sigma$ :

$$\varepsilon \leq \beta^\sigma(e) - \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha^{(\sigma)}(e) = \alpha(e) \left(1 - \frac{pq}{\kappa^\Lambda}\right) - \frac{pq}{N^d} \left(1 + \sum_{\substack{x \in T_N \\ x \neq 0}} \mathbb{1}_{e \in \sigma_x}\right) \leq \alpha(e),$$

and the same is true for  $\alpha(x)$  by summing on  $e$ . Define:

$$\begin{aligned} A_1^\sigma &= \left( \frac{\prod_{x \in e \in \sigma} \Gamma(\alpha_0)}{\prod_{e \in \sigma} \Gamma(\alpha(e))} \frac{\prod_{e \in \sigma} \sup_{[\varepsilon, \max_i \alpha_i]} \Gamma(s)}{\prod_{x \in e \in \sigma} \inf_{[\varepsilon, \max_i \alpha_i]} \Gamma(s)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ A_2^\sigma &= \left( \frac{\prod_{x \in e \in \sigma} \Gamma(\alpha_0)}{\prod_{e \in \sigma} \Gamma(\alpha(e))} \frac{\prod_{e \in \sigma} \sup_{[\alpha(e), \alpha(e)(1+r)+r\kappa^\Lambda]} \Gamma(s)}{\prod_{x \in e \in \sigma} \inf_{[\alpha(e), \alpha(e)(1+r)+r\kappa^\Lambda]} \Gamma(s)} \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

We have then, for any fixed  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0)}{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha_e)} \left( \frac{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \frac{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0 + r\check{\theta}_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq A_1^\sigma A_2^\sigma \frac{\prod_{e \notin \sigma} \Gamma(\alpha_0)}{\prod_{e \notin \sigma} \Gamma(\alpha_e)} \left( \frac{\prod_{e \notin \sigma} \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{x \notin \sigma} \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \frac{\prod_{e \notin \sigma} \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{x \notin \sigma} \Gamma(\alpha_0 + r\check{\theta}_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq A_1^\sigma A_2^\sigma \exp \left( \sum_{\substack{e \in E_N \\ e \notin \sigma}} \nu(\alpha(e), \theta_N^\sigma(e), \beta^\sigma(e)) - \sum_{\substack{x \in T_N \\ x \notin \sigma}} \tilde{\nu}(\alpha_0, \theta_N^\sigma(x), \beta^\sigma(x)) \right) \end{aligned}$$

with:

$$\begin{aligned} & \nu(\alpha(e), \theta_N^\sigma(e), \beta^\sigma(e)) \\ &= \frac{1}{r} \ln \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e)) + \frac{1}{q} \ln \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e)) - \ln \Gamma(\alpha(e)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \tilde{\nu}(\alpha_0, \theta_N^\sigma(x), \beta^\sigma(x)) \\ &= \frac{1}{r} \ln \Gamma(\alpha_0 + r\theta_N^\sigma(x) + \frac{pr}{N^d}) + \frac{1}{q} \ln \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x)) - \ln \Gamma(\alpha_0) \end{aligned}$$

( $\frac{pr}{N^d}$  comes from the fact that  $\forall x \neq 0, \theta_N^\sigma(x) - \check{\theta}_N^\sigma(x) = \text{div}(\theta_N^\sigma)(x) = -\frac{p}{N^d}$ ). We set  $\underline{\alpha} = \min_{i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket} \alpha_i$  and  $\bar{\alpha} = \max_{i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket} \alpha_i$ . Then for all  $e \in E_N$ ,  $\underline{\alpha} \leq \alpha(e) \leq \bar{\alpha}$ , for all  $e \notin \sigma$ ,  $q\theta_N^\sigma(e) \leq \frac{pq}{\kappa^\Lambda} \alpha(e)$  and  $pq < \kappa^\Lambda$ . Taylor's inequality gives:  $\forall e \notin \sigma, \forall x \notin \sigma$ ,

$$\begin{cases} |\nu(\alpha(e), \theta_N^\sigma(e), \beta^\sigma(e))| \leq C_1 (\theta_N^\sigma(e)^2 + \frac{pq}{N^d}) \\ |\tilde{\nu}(\alpha_0, \theta_N^\sigma(x), \beta^\sigma(x))| \leq C_2 (\theta_N^\sigma(x)^2 + \frac{p}{N^d} + \frac{pq}{N^d}) \end{cases}$$

with  $C_1$  and  $C_2$  positive constants. Then we can find a constant  $C_3 > 0$  independent of  $N \geq N_0$  such that:

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0)}{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha_e)} \left( \frac{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\beta^\sigma(e) - q\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\beta^\sigma(x) - q\theta_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \frac{\prod_{e \in E_N} \Gamma(\alpha(e) + r\theta_N^\sigma(e))}{\prod_{x \in T_N} \Gamma(\alpha_0 + r\check{\theta}_N^\sigma(x))} \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \exp \left( C_3 \left( \sum_{e \in E_N} \theta_N^\sigma(e)^2 + \sum_{x \in T_N} \theta_N^\sigma(x)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

As seen before with the  $L_2$  bound part of lemma 2 of [28], this is bounded by a finite constant independent of  $N$ . It follows that the supremum on  $N$  is finite too. This concludes the argument for any fixed  $\sigma$  and proves (4.4.8). This proves the lemma.  $\square$

## 4.5 Proof of theorem 29 and corollary 31

To obtain results on the initial random walk  $Z_n$ , we need some estimates on our acceleration function  $\gamma^\omega$ . In particular, we will need the following lemma:

**Lemma 38.** *Let  $\Lambda$  be an arbitrary finite connected set of vertices containing 0. For all  $x \in \mathbb{Z}^d$  and  $s < \kappa$ ,*

$$\mathbb{E}^{(\alpha)}((\gamma^\omega(x))^s) < +\infty.$$

As its proof is quite computational, we defer it to the appendix. Remark that it is nevertheless quite easy to get a weaker bound:  $\gamma^\omega(0) = \frac{1}{\sum \omega_\sigma} \leq \frac{1}{\omega_{\sigma_1}}$ , where the sum is on all  $\sigma$  finite simple paths from 0 to  $\Lambda^c$ , and where  $\sigma_1$  is the path from 0 to  $\Lambda^c$  going only through edges  $(ne_1, (n+1)e_1)$ . Then  $\mathbb{E}^{(\alpha)}(\gamma^\omega(0)^\lambda) \leq \mathbb{E}^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\omega_{\sigma_1}}^\lambda\right) < +\infty$  for all  $\lambda < \alpha_1$ . This weaker bound suffices for the proof of theorem 29, but lemma 38 is fully needed in the proof of theorem 33. Also remark that this lemma is the only result involving  $\gamma^\omega$  where we do not need  $\kappa^\Lambda > 1$ . This is of little importance as the assumption  $\kappa^\Lambda > 1$  is needed otherwise in the proof of theorem 33.

Theorem 29 is based on classical results on ergodic stationary sequences, see [14] pages 342 – 344. We need another preliminary lemma.

**Lemma 39.**  *$\mathbb{Q}^{(\alpha)}$  is ergodic and equivalent to  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ . Set  $\Delta_i = X_i - X_{i-1}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , then  $\Delta_i$  is stationary and ergodic under  $\mathbb{Q}^{(\alpha)}[P_0^\omega(\cdot)]$ .*

*Proof.* The proof of the first point is easily adapted from chapter 2 of [6], by replacing the discrete process by the continuous process: we use the continuous martingales convergence theorems, and the continuous version of Birkhoff's theorem (see for example [20], pages 9 – 11).

For the second point, as  $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$  is an invariant probability for  $\bar{\omega}_t$ , it is straightforward that  $\Delta_i$  is stationary. It remains to prove ergodicity. Set  $A \subset (\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$  a measurable set such that  $\forall t, \theta_t^{-1}(A) = A$  with  $\theta_t$  the time-shift. We note

$$r(x, \omega) = P_x^\omega((\Delta_i \in A)) \text{ and } r(\omega) = r(0, \omega).$$

We have  $\forall \omega \in \Omega$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(X_n, \omega) = \mathbb{1}_A((\Delta_i)), \quad P_x^\omega \text{ a.s..} \quad (4.5.1)$$

Indeed, setting  $\mathcal{F}_n = \sigma((X_t)_{t \leq n})$  gives:

$$P_x^\omega((\Delta_i) \in A | \mathcal{F}_n) = P_x^\omega((\Delta_{i+n}) \in A | \mathcal{F}_n) = P_{X_n}^\omega((\Delta_i) \in A) = r(X_n, \omega),$$

then  $r(X_n, \omega)$  is a (closed) bounded martingale and we have the wanted limit (4.5.1) by a.s. convergence, as  $\mathbb{1}_A((\Delta_i))$  is  $\mathcal{F}_\infty$ -measurable. Remark that  $r(X_n, \omega) = r(\bar{\omega}_n)$ . The application of Birkhoff's ergodic theorem ([14], page 337) for the time-shift of size 1 gives

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(X_k, \omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}}(r(\omega)), \quad P_0^\omega \text{ a.s..}$$

Comparing with (4.5.1), it implies that  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}}(r(\omega)) \in \{0, 1\}$ .  $\square$

**Lemma 40.** *Let  $D(l, n) = \max_{t \in [0, 1]} |(X_{n+t} - X_n) \cdot l|$  be the maximum distance travelled by the walk in direction  $l = e_1, \dots, e_{2d}$ , during a time  $[n, n+1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Choose  $R_\Lambda$  such that  $\Lambda$  is included in the ball  $B(0, R_\Lambda)$ . Then*

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(D(l, n) \geq 2kR_\Lambda) \leq \frac{C_1^k}{\Gamma(C_2 k)}$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are positive constants depending only on the parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ .

*Proof.* Let  $N$  be the number of visits of 0 before exiting  $\Lambda$ . The random variable  $N$  follows a geometric law of parameter  $p_N := \frac{1}{G^{\omega, \Lambda}(0, 0)}$  the inverse of the Green function killed at the exit time of  $\Lambda$ . We note  $T$  the total time spent on 0 before exiting  $\Lambda$ ,  $T = \frac{1}{\gamma^\omega(0)} \sum_{i=1}^N E_i$ , where the  $E_i$  are independent exponential random variables of parameter 1. Set  $\varepsilon > 0$ .

$$P^\omega(T \leq \varepsilon | N) = P^\omega\left(\sum_{i=1}^N E_i \leq \gamma^\omega(0)\varepsilon | N\right) = e^{-\gamma^\omega(0)\varepsilon} \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(\gamma^\omega(0)\varepsilon)^k}{k!}.$$

Then

$$\begin{aligned} P^\omega(T \leq \varepsilon) &= e^{-\gamma^\omega(0)\varepsilon} E^\omega\left(\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(\gamma^\omega(0)\varepsilon)^k}{k!}\right) \\ &= e^{-\gamma^\omega(0)\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\gamma^\omega(0)\varepsilon)^k}{k!} p_N (1 - p_N)^{n-1} \\ &= e^{-\gamma^\omega(0)\varepsilon} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \frac{(\gamma^\omega(0)\varepsilon)^k}{k!} p_N (1 - p_N)^{n-1} \\ &= e^{-\gamma^\omega(0)\varepsilon} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\gamma^\omega(0)\varepsilon)^k}{k!} p_N \frac{1 - (1 - p_N)^k}{p_N} \\ &= 1 - e^{-p_N \gamma^\omega(0)\varepsilon} = 1 - e^{-\frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0, 0)} \varepsilon} \end{aligned}$$

For all  $a > 0$ , let  $0 < \lambda < \kappa$ ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^{(\alpha)}(T \leq \varepsilon) \\
&= \mathbb{E}^{(\alpha)} \left( 1 - e^{-\frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \varepsilon} \right) \\
&= \mathbb{E}^{(\alpha)} \left( \left( 1 - e^{-\frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \varepsilon} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \geq a \right\}} \right) \\
&\quad + \mathbb{E}^{(\alpha)} \left( \left( 1 - e^{-\frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \varepsilon} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} < a \right\}} \right) \\
&\leq \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \geq a \right) + \mathbb{E}^{(\alpha)} \left( \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \varepsilon \mathbb{1}_{\left\{ \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} < a \right\}} \right) \\
&\leq \mathbb{P}^{(\alpha)}(\gamma^\omega(0) \geq a) + \mathbb{E}^{(\alpha)} \left( \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} \varepsilon \mathbb{1}_{\left\{ \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} < a \right\}} \right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}^{(\alpha)}(\gamma^\omega(0)^\lambda)}{a^\lambda} + a \varepsilon \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \frac{\gamma^\omega(0)}{G^{\omega, \Lambda}(0,0)} < a \right)
\end{aligned}$$

As  $\lambda < \kappa$ , lemma 38 gives:

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(T \leq \varepsilon) \leq \frac{C}{a^\lambda} + a \varepsilon$$

with  $C$  a positive constant independent of  $a$ . Then for  $a = \varepsilon^{-\frac{1}{\lambda+1}}$  we have:

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(T \leq \varepsilon) \leq (C + 1) \varepsilon^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}.$$

If  $D(l, n) \geq 2kR_\Lambda$ , the walk went through at least  $k$  distinct sets  $X_t + \Lambda$  of empty intersection. The time spent in such a set is bigger than the time spent on one point in the set, and those times are independent in disjoint sets (because the environments in the sets are independent). We get (for  $T_1, \dots, T_k$  i.i.d. of same law as  $T$ ):

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^{(\alpha)}(D(l, n) \geq 2kR_\Lambda) \\
&\leq \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \text{ such that } \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \leq 1 \text{ and } T_1 = \varepsilon_1, \dots, T_k = \varepsilon_k \right) \\
&\leq \int_{\sum \varepsilon_i \leq 1} (C + 1)^k \left( \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^k \prod_{i=1}^k \varepsilon_i^{\frac{\lambda}{\lambda+1}-1} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_k \\
&= (C + 1)^k \left( \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^k \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{\lambda+1})^k}{\Gamma(k\frac{\lambda}{\lambda+1} + 1)} \\
&\leq \frac{((C + 1)\Gamma(\frac{\lambda}{\lambda+1} + 1))^k}{\Gamma(k\frac{\lambda}{\lambda+1})}
\end{aligned}$$

This concludes the proof of the lemma.  $\square$

We can now prove theorem 29: lemma 39 allows to use Birkhoff's ergodic theorem to the  $\Delta_i$  and get the result for discrete times, lemma 40 extends this result to the continuous walk.

*Proof of theorem 29.* Lemma 39 gives that the sequence  $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  is stationary and ergodic under  $\mathbb{Q}^{(\alpha)}(P_0^\omega(.))$ . We apply Birkhoff's ergodic theorem to the  $\Delta_i$  to get a law of large numbers:

$$\frac{X_k}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}}[E_0^\omega(X_1)] , \mathbb{Q}_0^{(\alpha)} \text{ a.s. and thus } \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s. .}$$

If  $d_\alpha \cdot e_i = 0$ , the symmetry of the law of the environment gives

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}}[E_0^\omega(X_1)] \cdot e_i = 0.$$

Then  $\frac{X_k}{k} \rightarrow 0$  when  $d_\alpha = 0$ . Furthermore theorem 6.3.2 of [14] gives that the processes  $X_k$  is directionally recurrent when  $d_\alpha \cdot e_i = 0$ . As  $X_t$  stays only a finite time on each vertex before the next jump, directional recurrence for  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  implies directional recurrence for  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  (the probability to come back to 0 after a finite time is 1).

For  $l \in \mathbb{R}^d$ , we note  $A_l = \{X_{t_k} \cdot l \rightarrow \infty\}$ , where  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  are the jump times. If  $l \neq 0$  and if  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(A_l) > 0$ , Kalikow's 0-1 law ([17], [50] proposition 3) gives  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(A_l \cup A_{-l}) = 1$ . Suppose that  $d_\alpha \cdot e_i > 0$  then ([30])  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(A_{e_i}) > 0$ , this implies that  $(X_{t_k} \cdot e_i)_{k \in \mathbb{N}}$  visits 0 a finite number of times  $\mathbb{Q}_0^{(\alpha)}$  a.s.. Then  $(X_k \cdot e_i)_{k \in \mathbb{N}}$  visits 0 a finite number of times  $\mathbb{Q}_0^{(\alpha)}$  a.s. (as  $X_t$  stays only a finite time on each vertex). Theorem 6.3.2 of [14] and Birkhoff's ergodic theorem give then:  $E^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}}(E^\omega(X_1)) \cdot e_i > 0$ .

We now consider the limit for the continuous-time walk. For  $t > 0$ , we set  $k = \lfloor t \rfloor$ . Then for all  $i = 1, \dots, 2d$ ,

$$X_k \cdot e_i - D(e_i, k) \leq X_t \cdot e_i \leq X_k \cdot e_i + D(e_i, k).$$

Then

$$\frac{X_k \cdot e_i}{k-1} - \frac{D(e_i, k)}{k-1} \leq \frac{X_t \cdot e_i}{t} \leq \frac{X_k \cdot e_i}{k} + \frac{D(e_i, k)}{k}.$$

Lemma 40 gives: for  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \left| \frac{D(e_i, k)}{k} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_1^{\frac{k\varepsilon}{2R_\Lambda}}}{\Gamma\left(\frac{C_2 k \varepsilon}{2R_\Lambda}\right)} < +\infty.$$

Then by Borel-Cantelli's lemma,  $\frac{D(e_i, k)}{k} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$  a.s. . It gives

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{X_k}{k} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}} [E_0^\omega(X_1)] , \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s..}$$

This gives the directional transience in the case  $d_\alpha \cdot e_i > 0$ , and finishes the proof.  $\square$

*Proof of corollary 31.* We prove as in the proof of theorem 29 that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{X_k}{k} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}} [E_0^\omega(X_1)] , \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s..} \quad (4.5.2)$$

We still note  $A_l = \{X_{t_k} \cdot l \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}\}$ . Suppose that  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(A_l) > 0$ . Then  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(A_l \cup A_{-l}) = 1$  ([17], [50] proposition 3). It allows to find a finite interval  $I$  of  $\mathbb{R}$ , of positive measure, containing 0 and such that  $(X_{t_k} \cdot l)_{k \in \mathbb{N}}$  goes a finite number of times in  $I$ ,  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$  a.s. and thus  $\mathbb{Q}_0^{(\alpha)}$  a.s.. As before, it implies that  $(X_k \cdot l)_{k \in \mathbb{N}}$  goes a finite number of times in  $I$ ,  $\mathbb{Q}_0^{(\alpha)}$  a.s.. We can then apply the theorem of [2] to  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (obtained via the extension of  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  to  $t \in \mathbb{R}$ ) to get  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}} [E_0^\omega(X_1 \cdot l)] \neq 0$ . We then deduce from (4.5.2) that:  $X_t \cdot l \rightarrow_{t \rightarrow \infty} +\infty$   $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$  a.s. if  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(\alpha)}} [E_0^\omega(X_1 \cdot l)] > 0$ ,  $X_t \cdot l \rightarrow_{t \rightarrow \infty} -\infty$   $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$  a.s. else-wise.

As  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  and  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  go through exactly the same vertices in the same order, and as the two processes stay a finite time on each vertex, without exploding (see lemma 40), recurrence and transience for  $Z_n \cdot l$  follows from those of  $X_t \cdot l$ . This gives as a consequence Kalikow's 0 – 1 law in the  $d \geq 3$  Dirichlet case.

The 0 – 1 law is true in the general case of random walks in random environments for  $d = 1$  and  $d = 2$  (see respectively Solomon ([33]) and Zerner and Merkl ([50])), it concludes the proof.  $\square$

## 4.6 Proof of theorem 33

To prove the result, we need a preliminary theorem on the polynomial order of the hitting times of the walk.

**Theorem 41.** *Let  $d \geq 3$ ,  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  be the law of the Dirichlet environment with parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$  on  $\mathbb{Z}^d$ , and  $Z_n$  the associated random walk in Dirichlet environment. We suppose that*

$$\kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) \leq 1.$$

Let  $l \in \{e_1, \dots, e_{2d}\}$  be such that  $d_\alpha \cdot l \neq 0$ . Let  $T_n^{l,Z} = \inf_i \{i \in \mathbb{N} | Z_i \cdot l \geq n\}$  be the hitting time of the level  $n$  in direction  $l$ , for the non-accelerated walk  $Z$ . Then:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(T_n^{l,Z})}{\log(n)} = \frac{1}{\kappa} \text{ in } \mathbb{P}^{(\alpha)}\text{-probability.}$$

The proof of this preliminary theorem consists of two bounds. The upper bound is a consequence of theorem 29 and therefore needs an accelerated walk with  $\kappa^\Lambda > 1$ . The lower bound does not make use of an accelerated walk at all.

*Proof. Upper bound*

For  $\Lambda$  such that  $\kappa^\Lambda > 1$ , we define  $A(t) = \int_0^t \gamma^\omega(X_s) ds$ . Then  $X_{A^{-1}(t)}$  is the continuous-time Markov chain whose jump rate from  $x$  to  $y$  is  $\omega(x, y)$ . This Markov chain has asymptotically the same behaviour as  $Z_n$ , then we only have to prove that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(A(T_n^{l,X}))}{\log(n)} \leq \frac{1}{\kappa},$$

with  $T_n^{l,X} = \inf_t \{t \in \mathbb{R}_+ | X_t \cdot l \geq n\}$ .

Set  $0 < \alpha < \kappa$ , and take  $\beta$  such that  $\alpha < \beta < \kappa$ . Using first Markov's inequality and then the inequality  $(\sum_{i=1}^j \lambda_i)^\varepsilon \leq \sum_{i=1}^j (\lambda_i)^\varepsilon$  for  $\varepsilon < 1$  gives:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \frac{A(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \geq x \right) &\leq \frac{1}{x^\beta t^{\frac{\beta}{\alpha}}} \mathbb{E} \left( \left( \int_0^t \gamma^\omega(X_s) ds \right)^\beta \right) \\ &\leq \frac{1}{x^\beta t^{\frac{\beta}{\alpha}}} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{\lceil t \rceil} \left( \int_{i-1}^i \gamma^\omega(X_s) ds \right)^\beta \right) \\ &= \frac{1}{x^\beta t^{\frac{\beta}{\alpha}}} \sum_{i=1}^{\lceil t \rceil} \mathbb{E} \left( \left( \int_{i-1}^i \gamma^\omega(X_s) ds \right)^\beta \right) \end{aligned}$$

where  $\lceil t \rceil$  represents the upper integer part of  $t$ . Let

$$D_i = \max_{l \in \{e_1, \dots, e_{2d}\}} (D(l, i))$$

(cf. lemma 40 for the definition of  $D(l, i)$ ). Splitting the expectation depend-

ing on the value of  $D_i$  gives:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \left( \int_{i-1}^i \gamma^\omega(X_s) ds \right)^\beta \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{D_i=k\}} \left( \int_{i-1}^i \gamma^\omega(X_s) ds \right)^\beta \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{D_i=k\}} \left( \sum_{x \in B(X_i, k)} \gamma^\omega(x) \right)^\beta \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{D_i=k\}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E} \left( \left( \sum_{x \in B(X_i, k)} \gamma^\omega(x) \right)^{q\beta} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

where  $B(X_i, k) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \max_{j=1, \dots, 2d} |(X_i - x) \cdot e_j| \leq k\}$ , and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . For the last Hölder's inequality, we chose  $q > 1$  such that  $q\beta < \kappa$ .

In the following,  $c$ ,  $C_1$  and  $C_2$  will be finite constants, that can change from line to line. As  $\mathbb{P}(D_i = k) \leq \mathbb{P}(D_i \geq k) \leq \frac{C_1^k}{\Gamma(C_2 k)}$  by lemma 40 and  $q\beta < 1$  we get:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \left( \int_{i-1}^i \gamma^\omega(X_s) ds \right)^\beta \right) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_1^{\frac{k}{p}}}{\Gamma(C_2 k)^{\frac{1}{p}}} \mathbb{E} \left( \left( \sum_{x \in B(X_i, k)} \gamma^\omega(x) \right)^{q\beta} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} c \frac{C_1^k}{\Gamma(C_2 k)^{\frac{1}{p}}} \sum_{x \in B(X_i, k)} \mathbb{E} \left( \gamma^\omega(x)^{q\beta} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

As the Dirichlet laws are iid, the value of the expectation is independent of  $x$ . Lemma 38 then gives a uniform finite bound for all  $x$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \frac{A(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \geq x \right) &\leq \frac{1}{x^\beta t^{\frac{\beta}{\alpha}}} \sum_{i=1}^{\lceil t \rceil} \sum_{k=0}^{+\infty} c \frac{C_1^k}{\Gamma(C_2 k)^{\frac{1}{p}}} \sum_{x \in B(X_i, k)} 1 \\
&= \frac{1}{x^\beta t^{\frac{\beta}{\alpha}}} \sum_{i=1}^{\lceil t \rceil} \sum_{k=0}^{+\infty} c \frac{C_1^k}{\Gamma(C_2 k)^{\frac{1}{p}}} (2k+1)^d \\
&\leq \frac{\lceil t \rceil}{x^\beta t^{\frac{\beta}{\alpha}}} \sum_{k=0}^{+\infty} c k^d \frac{C_1^k}{\Gamma(C_2 k)^{\frac{1}{p}}} \\
&\leq c \frac{t^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}{x^\beta}
\end{aligned}$$

As  $\beta > \alpha$ , it implies that  $\frac{A(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$  in  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ -probability, for all  $\alpha < \kappa$ . Then,  $\frac{A(T_n^{l,X})}{(T_n^{l,X})^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$  in  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ -probability. As we chose  $\kappa^\Lambda > 1$ , we can apply theorem 29 that gives

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t \cdot l}{t} = v \cdot l \neq 0, \quad \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \text{ a.s..}$$

Then  $\frac{X_{T_n^{l,X}}}{T_n^{l,X}} \rightarrow v \cdot l$  and  $T_n^{l,X} \sim \frac{n}{v \cdot l}$ . It implies that

$$\frac{A(T_n^{l,X})}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sim \frac{A(T_n^{l,X})}{(T_n^{l,X})^{\frac{1}{\alpha}}} (v \cdot l)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

in  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ -probability, for all  $\alpha < \kappa$ . It gives  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(A(T_n^{l,X}))}{\log(n)} \leq \frac{1}{\kappa}$  and concludes the proof of the upper bound.

#### Lower bound

This proof follows the lines of the proof of proposition 12 in [45]. As  $\kappa \leq 1$ , we can assume that  $\alpha_1 + \alpha_{-1} \geq 2 \sum_{j=1}^{2d} \alpha_j - 1$ . We prove that, for every  $l \in \{e_1, \dots, e_{2d}\}$ , for every  $\alpha > \kappa$ ,  $\frac{T_{2n}^{l,Z}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$   $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  a.s.. The same being true for  $(T_{2n+1}^{l,Z})$ , this is sufficient to conclude.

Set  $l \in \{e_1, \dots, e_{2d}\}$ . We introduce the exit times

$$\Theta_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n \notin \{Z_0, Z_0 + e_1\}\}$$

(with a minus sign instead of the plus if  $l = -e_1$ ), and for  $k \geq 1$ ,

$$\Theta_k = \Theta_0 \circ \tau_{T_{2k}^{l,Z}}$$

(where  $\tau$  is the time-shift). We use the convention that  $\Theta_k = \infty$  if  $T_{2k}^{l,Z} = \infty$ . The only dependence between the times  $\Theta_k$  is that  $\Theta_j = \infty$  implies  $\Theta_k = \infty$  for all  $k \geq j$ . The "2" in  $T_{2k}^{l,Z}$  causes indeed  $\Theta_k$  to depend only on  $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid x \cdot l \in \{2k, 2k+1\}\}$  which are disjoint parts of the environment.

For  $t_0, \dots, t_k \in N$ , one has, using the Markov property at time  $T_{2k}^{l,Z}$ , the independence and the translation invariance of  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 = t_0, \dots, \Theta_k = t_k) \\ &= \mathbb{P}_0^{(\alpha)}\left(\Theta_0 = t_0, \dots, \Theta_{k-1} = t_{k-1}, \Theta_k = t_k, T_{2k}^{l,Z} < \infty\right) \\ &\leq \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 = t_0, \dots, \Theta_{k-1} = t_{k-1}) \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 = t_k) \\ &\leq \dots \leq \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 = t_0) \dots \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 = t_{k-1}) \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 = t_k) \\ &= \mathbb{P}^{(\alpha)}\left(\hat{\Theta}_0 = t_0, \dots, \hat{\Theta}_k = t_k\right) \end{aligned}$$

where, under  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ , the random variables  $\hat{\Theta}_k$  are independent and have the same distribution as  $\Theta_0$ . From this, we deduce that for all  $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ,

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)}((\Theta_k) \in A) \leq \mathbb{P}^{(\alpha)}((\hat{\Theta}_k) \in A).$$

In particular, for  $\alpha > \kappa$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \left( \liminf_k \frac{\Theta_0 + \cdots + \Theta_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty \right) \\ & \leq \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \liminf_k \frac{\hat{\Theta}_0 + \cdots + \hat{\Theta}_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty \right). \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

In order to bound this probability, we compute the tail of the distribution of  $\Theta_0$  using Stirling's formula:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(\Theta_0 \geq n) &= \mathbb{E} \left( \omega(0, e_1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \omega(e_1, 0)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_0)^2}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_{-1})} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil) \Gamma(\alpha_{-1} + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{\Gamma(\alpha_0 + \lceil \frac{n}{2} \rceil) \Gamma(\alpha_0 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} \\ &\sim_{n \rightarrow \infty} c n^{\alpha_1 + \alpha_{-1} - 2\alpha_0} = c n^{-\kappa} \end{aligned}$$

with  $c$  a constant. We can then use the limit theorem for stable laws (see for example [14]) that gives:

$$\frac{\hat{\Theta}_0 + \cdots + \hat{\Theta}_{k-1}}{k^{\frac{1}{\kappa}}} \Rightarrow Y$$

where  $Y$  has a non-degenerate distribution. Then for  $\alpha > \kappa$ ,

$$\frac{\hat{\Theta}_0 + \cdots + \hat{\Theta}_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow \infty.$$

(4.6.1) then gives  $\mathbb{P}_0^{(\alpha)} \left( \liminf_k \frac{\Theta_0 + \cdots + \Theta_{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty \right) = 0$ .

As  $T_{2k}^{l,Z} \geq \Theta_0 + \cdots + \Theta_{k-1}$ , it gives  $\frac{T_{2n}^{l,Z}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$   $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  a.s. as wanted, for all  $\alpha > \kappa$ . It gives  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(T_n^{l,Z})}{\log(n)} \geq \frac{1}{\kappa}$  and concludes the proof of the lower bound.  $\square$

Using an inversion argument, we can now prove theorem 33.

*Proof of theorem 33.* We note  $\overline{Z}_n = \max_{i \leq n} Z_i \cdot l$ . As  $\overline{Z}_n \geq m \Leftrightarrow T_m^{l,Z} \leq n$ , theorem 41 gives that for any  $\varepsilon > 0$  we have, for  $n$  big enough,

$$n^{\kappa-\varepsilon} \leq \overline{Z}_n \leq n^{\kappa+\varepsilon} \text{ in } \mathbb{P}^{(\alpha)}\text{-probability.}$$

As  $Z_n \cdot l$  is transient, we can introduce renewal times  $\tau_i$  for the direction  $l$  (see [6] or [47] p71 for a detailed construction) such that  $\tau_i < +\infty$   $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  a.s., for all  $i$ . Then

$$0 \leq \overline{Z_n} - Z_n \cdot l \leq \max_{i=0, \dots, n-1} (Z_{\tau_{i+1}} - Z_{\tau_i}) \cdot l \text{ for } n \geq \tau_1.$$

When the walk  $Z_n \cdot l$  discovers a new vertex in direction  $l$ , there is a positive probability that this vertex will be the next  $Z_{\tau_i}$ . As the vertices have i.i.d. exit probabilities under  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ , this probability is independent of the newly discovered vertex, and is independent of the path that lead to this vertex. Then  $(Z_{\tau_{i+1}} - Z_{\tau_i}) \cdot l$  follows a geometric law of parameter  $\mathbb{P}^{(\alpha)}(Z_0 = Z_{\tau_1})$ , for all  $i \in \mathbb{N}$ . This means that we can find  $C$  and  $c$  two positive constants such that for all  $n$ ,  $\mathbb{P}^{(\alpha)}((Z_{\tau_{i+1}} - Z_{\tau_i}) \cdot l \geq n) \leq Ce^{-cn}$ .

Borel Cantelli's lemma then gives that, for  $n$  big enough,

$$\max_{i=0, \dots, n-1} (Z_{\tau_{i+1}} - Z_{\tau_i}) \cdot l \leq (\log n)^2 \quad \mathbb{P}^{(\alpha)} \text{ a.s..}$$

As  $\tau_1 < \infty$ , it gives

$$n^{\kappa-\varepsilon} \leq Z_n \cdot l \leq n^{\kappa+\varepsilon} \text{ in } \mathbb{P}^{(\alpha)}\text{-probability.}$$

Taking the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gives  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(Z_n \cdot l)}{\log(n)} = \kappa$  and concludes the proof.  $\square$

## 4.7 Appendix: Proof of lemma 38

The proof that follows is largely inspired by the article [45] by Tournier. His result can however not be directly applied here, as  $\gamma^\omega(x) \geq G^{\omega, \Lambda}(x, x)$ , and some of the paths he considered are not necessarily simple paths. To adapt the proof to our case, we need an additional assumption on the graph (some symmetry property for the edges), which simplifies the proof (the construction of the set  $C(\omega)$  is quite shorter).

To prove the result, we consider the case of finite directed graphs with a cemetery vertex. A vertex  $\delta$  is said to be a cemetery vertex when no edge exits  $\delta$ , and every vertex is connected to  $\delta$  through a directed path. We furthermore suppose that the graphs have no multiple edges, no elementary loop (consisting of one edge starting and ending at the same point), and that if  $(x, y) \in E$  and  $y \neq \delta$ , then  $(y, x) \in E$ .

We need a definition of  $\gamma^\omega(x)$  for those graphs. Let  $G = (V \cup \{\delta\}, E)$  be a finite directed graph,  $(\alpha(e))_{e \in E}$  be a family of positive real numbers,  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  be the corresponding Dirichlet distribution, and  $(Z_n)$  the associated random

walk in Dirichlet environment. We need the following stopping times: the hitting times

$$H_x = \inf\{n \geq 0 | Z_n = x\}$$

and

$$\tilde{H}_x = \inf\{n \geq 1 | Z_n = x\}$$

for  $x \in G$ , the exit time

$$T_A = \inf\{n \geq 0 | Z_n \notin A\}$$

for  $A \subset V$ , and the time of the first loop

$$L = \inf\{n \geq 1 | \exists n_0 < n \text{ such that } Z_n = Z_{n_0}\}.$$

For  $x$  in such a  $G$ , we define:

$$\gamma^\omega(x) = \frac{1}{P_x^\omega(H_\delta < \tilde{H}_x \wedge L)} = \frac{1}{\sum_{\sigma: x \rightarrow \delta} \omega_\sigma}.$$

where we sum on simple paths from  $x$  to  $\delta$ . In the following, we denote by 0 an arbitrary fixed vertex in  $G$ . We use the notations  $\underline{A} = \{\underline{e} | e \in A\}$  and  $\overline{A} = \{\bar{e} | e \in A\}$  for  $A \subset E$ , and we call strongly connected a subset  $A$  of  $E$  such that for all  $x, y \in \overline{A} \cup \underline{A}$ , there is a path in  $A$  from  $x$  to  $y$ . Remark that if  $A$  is strongly connected, then  $\overline{A} = \underline{A}$ .

For the new function  $\gamma^\omega$  on  $G$ , we get the following result

**Theorem 42.** *Let  $G = (V \cup \{\delta\}, E)$  be a finite directed graph, where  $\delta$  is a cemetery vertex. We furthermore suppose that  $G$  has no multiple edges, no elementary loop, and that if  $(x, y) \in E$  and  $y \neq \delta$ , then  $(y, x) \in E$ . Let  $(\alpha(e))_{e \in E}$  be a family of positive real numbers, and  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$  be the corresponding Dirichlet distribution. Let  $0 \in V$ . There exist  $c, C, r > 0$  such that, for  $t$  large enough,*

$$\mathbb{P}^{(\alpha)}(\gamma^\omega(0) > t) \leq C \frac{(\ln t)^r}{t^{\min_A \beta_A}}$$

where the minimum is taken over all strongly connected subsets  $A$  of  $E$  such that  $0 \in \underline{A}$ , and  $\beta_A = \sum_{e \in \partial_+ \underline{A}} \alpha(e)$ , (we recall that  $\partial_+(K) = \{e \in E, \underline{e} \in K, \bar{e} \notin K\}$ ).

In  $\mathbb{Z}^d$ , we can identify  $\Lambda^c$  (where  $\Lambda$  is the subset involved in the construction of  $\gamma^\omega$ ) with a cemetery vertex  $\delta$ . We obtain a graph where the two definitions of  $\gamma^\omega$  coincide, and that verifies the hypothesis of theorem 42. Among the strongly connected subsets  $A$  of edges such that  $\underline{A}$  contains a given  $x$ , the ones minimizing the "exit sum"  $\beta_A$  are made of only two edges  $(x, x + e_i)$  and  $(x + e_i, x)$ ,  $i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket$ . Then  $\min_A \beta_A = \kappa = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d})$ . It proves lemma 38.

*Proof of theorem 42.* This proof is based on the proof of the "upper bound" in [45]. We need lower bounds on the probability to reach  $\delta$  by a simple path. We construct a random subset  $C(\omega)$  where a weaker ellipticity condition holds. Quotienting by this subset allows to get a lower bound for the equivalent of  $P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L)$  in the quotient graph. Proceeding by induction then allows to conclude.

We proceed by induction on the number of edges of  $G$ . More precisely, we prove:

**Proposition 43.** *Let  $n \in \mathbb{N}^*$ . Let  $G = (V \cup \{\delta\}, E)$  be a directed graph possessing at most  $n$  edges, and such that every vertex is connected to  $\delta$  by a directed path. We furthermore suppose that  $G$  has no multiple edges, no elementary loop, and that if  $(x, y) \in E$  and  $y \neq \delta$ , then  $(y, x) \in E$ . Let  $(\alpha(e))_{e \in E}$  be positive real numbers. Then, for every vertex  $0 \in V$ , there exist real numbers  $C, r > 0$  such that, for small  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon \right) \leq C \varepsilon^\beta (-\ln \varepsilon)^r$$

where  $\beta = \min\{\beta_A | A \text{ is a strongly connected subset of } V \text{ and } 0 \in \underline{A}\}$ .

As  $\gamma^\omega(0) = \frac{1}{P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L)}$ , this proposition suffices to prove the result. The following is devoted to its proof.

Initialization: if  $|E| = 1$ , the only edge links  $0$  to  $\delta$ , then  $P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) = 1$  and the property is true.

If  $|E| = 2$ , the only possible edges link  $0$  to  $\delta$ , and another vertex  $x$  to  $\delta$ , then  $P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) = 1$  and the property is true.

Let  $n \in \mathbb{N}^*$ . We suppose the induction hypothesis to be true at rank  $n$ . Let  $G = (V \cup \{\delta\}, E)$  be a directed graph with  $n + 1$  edges, and such that every vertex is connected to  $\delta$  by a directed path. We furthermore suppose that  $G$  has no multiple edges, no elementary loop, and that if  $(x, y) \in E$  and  $y \neq \delta$ , then  $(y, x) \in E$ . Let  $(\alpha(e))_{e \in E}$  be positive real numbers. To get a "weak ellipticity condition", we introduce the random subset  $C(\omega)$  of  $E$  constructed as follows:

**Construction of  $C(\omega)$ .** Let  $\omega \in \Omega$ . Let  $x$  be chosen for  $\omega(0, x)$  to be a maximizer on all  $\omega(0, y)$ ,  $y \sim 0$ . If  $x \neq \delta$ , we set

$$C(\omega) = \{(0, x); (x, 0)\}.$$

If  $x = \delta$ , we set  $C(\omega) = \{(0, \delta)\}$ . Remark that  $C(\omega)$  is well defined as soon as  $x$  is uniquely defined, which means almost surely, as there is always a directed path heading to  $\delta$ .

The support of the distribution of  $\omega \rightarrow C(\omega)$  writes as a disjoint union  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_\delta$  depending whether  $x = \delta$  or not. For  $C \in \mathcal{C}$ , we define the event

$$\mathcal{E}_C = \{C(\omega) = C\}.$$

As  $\mathcal{C}$  is finite, it is sufficient to prove the upper bound separately on all events  $\mathcal{E}_C$ . If  $C \in \mathcal{C}_\delta$ , on  $\mathcal{E}_C$ ,  $P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \geq P_0^\omega(Z_1 = \delta) \geq \frac{1}{|E|}$  by construction of  $C(\omega)$ . Then we have for small  $\varepsilon > 0$ :

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon, \mathcal{E}_C \right) = 0$$

In the following, we will therefore work on  $\mathcal{E}_C$ , when  $C \in \mathcal{C}_0$  (ie when  $x \neq \delta$ ). In this case,  $C$  is strongly connected.

**Quotienting procedure.**

**Definition 8.** *If  $A$  is a strongly connected subset of edges of a graph  $G = (V, E)$ , the quotient graph of  $G$  obtained by contracting  $A \subset E$  to the vertex  $\tilde{a}$  is the graph  $\tilde{G}$  deduced from  $G$  by deleting the edges of  $A$ , replacing all the vertices of  $A$  by one new vertex  $\tilde{a}$ , and modifying the endpoints of the edges of  $E \setminus A$  accordingly. Thus the set of edges of  $\tilde{G}$  is naturally in bijection with  $E \setminus A$  and can be thought of as a subset of  $E$ .*

In our case, we consider the quotient graph  $\tilde{G}$  obtained by contracting  $C(\omega)$ , which is a strongly connected subset of  $E$ , to a new vertex  $\tilde{0}$ . We need to define the associated quotient environment  $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ . For every edge in  $\tilde{E}$ , if  $e \notin \partial_+ \underline{C}$  then  $\tilde{\omega}(e) = \omega(e)$ , and if  $e \in \partial_+ \underline{C}$ ,  $\tilde{\omega}(e) = \frac{\omega(e)}{\Sigma}$ , where  $\Sigma = \sum_{e \in \partial_+ \underline{C}} \omega(e)$ .

This environment allows us to bound  $\gamma^\omega(0)$  using the similar quantity in  $\tilde{G}$ . Notice that, from 0, one way for the walk to reach  $\delta$  without coming back to 0 and without making loops consists in exiting  $C$  without coming back to 0, and then reaching  $\delta$  without coming back to  $\underline{C}$  (0 or  $x$ ) and without making loops. Then, for  $\omega \in \mathcal{E}_C$ ,

$$\begin{aligned} & P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \\ & \geq P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) + P_0^\omega(Z_1 = x, H_\delta < 1 + (\tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) \circ \tau_1) \\ & = P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) + P_0^\omega(Z_1 = x) P_x^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) \\ & \geq P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) + \frac{1}{|E|} P_x^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) \\ & \geq \frac{1}{|E|} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) + P_x^\omega(H_\delta < \tilde{H}_{\underline{C}} \wedge L) \right) \\ & = \frac{1}{|E|} \Sigma P_{\tilde{0}}^{\tilde{\omega}}(H_\delta < \tilde{H}_{\tilde{0}} \wedge L) \end{aligned}$$

where we used the Markov property, the construction of  $C$ ,  $\frac{1}{|E|} \leq 1$ , and the definition of the quotient. Finally, we have

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon, \mathcal{E}_C \right) \leq \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \Sigma P_0^{\tilde{\omega}}(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq |E|\varepsilon, \mathcal{E}_C \right). \quad (4.7.1)$$

**Back to Dirichlet environment.** Under  $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ ,  $\tilde{\omega}$  does not follow a Dirichlet distribution because of the normalization. But we can reduce to the Dirichlet situation with the following lemma (which is a particular case of lemma 9 in [45]).

**Lemma 44.** *Let  $(\omega_i^{(0)})_{1 \leq i \leq n_0}, (\omega_i^{(x)})_{1 \leq i \leq n_x}$  be the exit probabilities out of 0 and  $x$  for  $\omega \in \Omega$ , they are independent random variables following Dirichlet laws of respective parameters  $(\alpha_i^{(0)})_{1 \leq i \leq n_0}, (\alpha_i^{(x)})_{1 \leq i \leq n_x}$ . Let  $\Sigma = \sum_{e \in \partial_+ C} \omega(e)$  and  $\beta_C = \sum_{e \in \partial_+ C} \alpha(e)$ . There exists positive constants  $c, c'$  such that, for every  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \Sigma P_0^{\tilde{\omega}}(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon \right) \leq c \tilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)} \left( \tilde{\Sigma} P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon \right),$$

where  $\tilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)}$  is the Dirichlet distribution of parameter  $(\alpha(e))_{e \in \tilde{E}}$  on  $\tilde{\Omega}$ ,  $\omega$  is the canonical random variable on  $\tilde{\Omega}$ , and, under  $\tilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)}$ ,  $\tilde{\Sigma}$  is a positive bounded random variable independent of  $\omega$  and such that, for all  $\varepsilon > 0$ ,  $\tilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)}(\tilde{\Sigma} \leq \varepsilon) \leq c' \varepsilon^{\beta_C}$ .

Remark that the symmetry property we imposed on the edges is important here: if there was no edge from  $x$  to 0, the probability for a walk in  $\tilde{G}$  to exit  $\tilde{0}$  through one of the edges exiting  $x$  in  $G$  would necessarily be bigger than  $\frac{1}{2}$ . Then asymptotically, it could not be bounded by Dirichlet variables.

This lemma and (4.7.1) give:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon, \mathcal{E}_C \right) \\ & \leq \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \Sigma P_0^{\tilde{\omega}}(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq |E|\varepsilon, \mathcal{E}_C \right) \\ & \leq \mathbb{P}^{(\alpha)} \left( \Sigma P_0^{\tilde{\omega}}(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq |E|\varepsilon \right) \\ & \leq c \tilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)} \left( \tilde{\Sigma} P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq |E|\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

**Induction.** Inequality (4.7.2) relates the same quantities in  $G$  and  $\tilde{G}$ , allowing to complete the induction argument.

The edges in  $C$  do not appear in  $\tilde{G}$  any more:  $\tilde{G}$  has  $n - 2$  edges. In order to apply the induction hypothesis, we need to check that each vertex is connected to  $\delta$ . This results directly from the same property for  $G$ . If

$(x, y) \in \tilde{E}$  and  $y \neq \delta$ , then  $(x, y) \notin C(\omega)$  and  $(y, x) \notin C(\omega)$ . As only the edges of  $C(\omega)$  disappeared, then  $(y, x) \in \tilde{E}$ .  $\tilde{G}$  has no elementary loop. Indeed  $G$  has none, and the quotienting only merges the vertices of  $\underline{C}$ , whose joining edges are those of  $C$ , deleted in the construction. It only remains to prove that  $\tilde{G}$  has no multiple edges. It is not necessarily the case (quotienting may have created multiple edges), but it is possible to reduce to this case, using the additivity property of the Dirichlet distribution.

The induction hypothesis applied to  $\tilde{G}$  and  $\tilde{0}$  then gives, for small  $\varepsilon > 0$ ,

$$\tilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon \right) \leq c'' \varepsilon^{\tilde{\beta}} (-\ln \varepsilon)^r, \quad (4.7.3)$$

where  $c'' > 0$ ,  $r > 0$  and  $\tilde{\beta}$  is the exponent " $\beta$ " from the statement of the induction hypothesis corresponding to the graph  $\tilde{G}$ .

This inequality, associated with (4.7.2) and the following simple lemma (also see [45] for the proof of the lemma) then allows to carry out the induction:

**Lemma 45.** *If  $X$  and  $Y$  are independent positive bounded random variables such that, for some real numbers  $\alpha_X, \alpha_Y, r > 0$ ,*

- there exists  $C > 0$  such that  $P(X < \varepsilon) \leq C\varepsilon^{\alpha_X}$  for all  $\varepsilon > 0$  (or equivalently for small  $\varepsilon$ );*
- there exists  $C' > 0$  such that  $P(Y < \varepsilon) \leq C'\varepsilon^{\alpha_Y}(-\ln \varepsilon)^r$  for small  $\varepsilon > 0$ ;*

*then there exists a constant  $C'' > 0$  such that, for small  $\varepsilon > 0$ ,*

$$P(XY \leq \varepsilon) \leq C'' \varepsilon^{\alpha_X \wedge \alpha_Y} (-\ln \varepsilon)^{r+1}$$

*(and  $r + 1$  can be replaced by  $r$  if  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ ).*

We get from this lemma, (4.7.2) and (4.7.3) some constants  $c, r > 0$  such that, for small  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon, \mathcal{E}_C \right) \leq c \varepsilon^{\beta_C \wedge \tilde{\beta}} (-\ln \varepsilon)^{r+1}.$$

It remains to prove that  $\tilde{\beta} \geq \beta$ , where  $\beta$  is the exponent defined in the induction hypothesis relative to  $G$  and  $0$ . Let  $\tilde{A}$  be a strongly connected subset of  $\tilde{E}$  such that  $\tilde{0} \in \tilde{A}$ . Set  $A = \tilde{A} \cup C \subset E$ . In view of the definition of  $\tilde{E}$ , every edge exiting  $\tilde{A}$  corresponds to an edge exiting  $A$ , and vice-versa (the only edges deleted in the quotient procedure are those of  $C$ ). Thus, recalling that the weights of the edges are preserved in the quotient,  $\beta_{\tilde{A}} = \beta_A$ . Moreover,  $\tilde{0} \in \tilde{A}$  and  $A$  is strongly connected, so that  $\beta_A \geq \beta$ . As a consequence,  $\tilde{\beta} \geq \beta$  as announced.

Then  $\beta_C \wedge \tilde{\beta} \geq \beta_C \wedge \beta = \beta$  because  $C$  is strongly connected, and  $0 \in \underline{C}$ . It gives, for small  $\varepsilon > 0$ :

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} \left( P_0^\omega(H_\delta < \tilde{H}_0 \wedge L) \leq \varepsilon, \mathcal{E}_C \right) \leq c\varepsilon^\beta (-\ln \varepsilon)^{r+1}.$$

Summing on all events  $\mathcal{E}_C, C \in \mathcal{C}$  concludes the induction and the proof.  $\square$

## Acknowledgements

I would like to thank Christophe Sabot for helpful discussions and suggestions. This work was supported by the ANR project MEMEMO2

## CHAPTER 5

---

### Sharp ellipticity conditions for ballistic behavior of random walks in random environment

---

*Abstract.* We sharpen the ellipticity criteria for random walks in i.i.d. random environments introduced by Campos and Ramírez which ensure ballistic behavior. Furthermore, we construct new examples of random environments for which the walk satisfies the polynomial ballisticity criteria of Berger, Drewitz and Ramírez. As a corollary we can exhibit a new range of values for the parameters of Dirichlet random environments in dimension  $d = 2$  under which the corresponding random walk is ballistic.

The results of this chapter are a joint work with Alejandro F. Ramírez and Christophe Sabot.

### 5.1 Introduction

We continue the study initiated in [11] sharpening the ellipticity criteria which ensure ballistic behavior of random walks in random environment. Furthermore, we apply our results to exhibit a new class of ballistic random walks in Dirichlet random environments in dimensions  $d = 2$ .

For  $x \in \mathbb{R}^d$ , denote by  $|x|_1$  and  $|x|_2$  its  $L_1$  and  $L_2$  norm respectively. Call  $U := \{e \in \mathbb{Z}^d : |e|_1 = 1\} = \{e_1, \dots, e_{2d}\}$  the canonical vectors with the

convention that  $e_{d+i} = -e_i$  for  $1 \leq i \leq d$ . We set

$$\mathcal{P} := \left\{ p(e) : p(e) \geq 0, \sum_{e \in U} p(e) = 1 \right\}.$$

An environment is an element  $\omega := \{\omega(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$  of the environment space  $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$ . We denote the components of  $\omega(x)$  by  $\omega(x, e)$ .

The random walk in the environment  $\omega$  starting from  $x$  is the Markov chain  $\{X_n : n \geq 0\}$  in  $\mathbb{Z}^d$  with law  $P_{x,\omega}$  defined by the condition

$$P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1$$

and the transition probabilities

$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = x + e | X_n = x) = \omega(x, e)$$

for each  $x \in \mathbb{Z}^d$  and  $e \in U$ .

Let  $\mathbb{P}$  be a probability measure defined on the environment space  $\Omega$  endowed with its Borel  $\sigma$ -algebra. We choose  $\{\omega(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$  i.i.d. under  $\mathbb{P}$ . We call  $P_{x,\omega}$  the quenched law of the random walk in random environment (RWRE) starting from  $x$ , and  $P_x := \int P_{x,\omega} d\mathbb{P}$  the averaged or annealed law of the RWRE starting from  $x$ .

The law  $\mathbb{P}$  is said to be elliptic if for every  $x \in \mathbb{Z}^d$  and  $e \in U$ ,

$$\mathbb{P}(\omega(x, e) > 0) = 1.$$

We say that  $\mathbb{P}$  is uniformly elliptic if there exists a constant  $\gamma > 0$  such that for every  $x \in \mathbb{Z}^d$  and  $e \in U$ ,

$$\mathbb{P}(\omega(x, e) \geq \gamma) = 1.$$

Given  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  we say that the RWRE is transient in direction  $l$  if

$$P_0(A_l) = 1,$$

with

$$A_l := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot l = \infty \right\}.$$

Furthermore, it is ballistic in direction  $l$  if  $P_0$ -a.s.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot l}{n} > 0.$$

Given  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , we denote its outer boundary by

$$\partial\Lambda := \{x \notin \Lambda : |x - y|_1 = 1 \text{ for some } y \in \Lambda\}.$$

We denote any nearest neighbour path with  $n$  steps joining two points  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  by  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , where  $x_1 = x$  and  $x_n = y$ .

### 5.1.1 Polynomial condition, ellipticity condition

In [3], Berger, Drewitz and Ramírez introduced a polynomial ballisticity condition within the uniformly elliptic context, which was later extended to the elliptic case by Campos and Ramírez in [11], that will be of interest for our results. This condition is effective, in the sense that it can a priori be verified explicitly for a given environment.

To define it, we need for each  $L, \tilde{L} > 0$  and  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  to consider the box

$$B_{l,L,\tilde{L}} := R \left( (-L, L) \times (-\tilde{L}, \tilde{L})^{d-1} \right) \cap \mathbb{Z}^d,$$

where  $R$  is a rotation of  $\mathbb{R}^d$  that verifies  $R(e_1) = l$ .

For each subset  $A \subset \mathbb{Z}^d$  we note the first exit time from the set  $A$  as

$$T_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \notin A\}.$$

**Definition 9.** *Given  $M \geq 1$  and  $L \geq 2$ , we say that condition  $(P)_M$  in direction  $l$  is satisfied on a box of size  $L$  (also written as  $(P)_M|l$ ) if there exists an  $\tilde{L} \leq 70L^3$  such that one has the following upper bound for the probability that the walk does not exit the box  $B_{l,L,\tilde{L}}$  through its front side :*

$$P_0(X_{T_{B_{l,L,\tilde{L}}}} \cdot l < L) \leq \frac{1}{L^M}.$$

This condition has proven useful in the uniformly elliptic case. Indeed,  $(P)_M$  for  $M \geq 15d + 5$  implies ballisticity (see [3]).

For non uniformly elliptic environments in dimensions  $d \geq 2$ , there exist elliptic random walks which are transient in a given direction but not ballistic in that direction (see for example Sabot-Tournier [30], Bouchet [8]). In [11], Campos and Ramírez introduced ellipticity criteria on the law of the environment which ensure ballisticity if condition  $(P)_M$  is satisfied for  $M \geq 15d + 5$ . In this article we will sharpen this ellipticity criteria.

Define  $\eta_\alpha := \max_{e \in U} \mathbb{E} \left( \frac{1}{\omega(0,e)^\alpha} \right)$ ,  $\bar{\alpha} := \sup\{\alpha \geq 0 : \eta_\alpha < \infty\}$ . We need the constant  $c_0 := \frac{2}{3} 3^{120d^4 + 3000d(\log \eta_{\bar{\alpha}/2})^2}$  : throughout the rest of this paper, whenever we assume that the polynomial condition  $(P)_M$  is satisfied, it will be understood that this happens on a box of size  $L \geq c_0$ .

Let us first recall the ellipticity condition of [11]. The polynomial condition  $(P)_M$  implies the existence of an asymptotic direction (see for example Simenhaus [31]): there exists  $\hat{v} \in \mathbb{S}^{d-1}$  such that  $P_0$ -a.s.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{|X_n|_2} = \hat{v}.$$

We call  $\hat{v}$  the asymptotic direction. Under  $(P)_M$  we can then define the half space

$$H_{\hat{v}} := \{l \in \mathbb{R}^d : l \cdot \hat{v} \geq 0\}.$$

**Definition 10.** Let  $\beta > 0$ . We say that the law of the environment satisfies the ellipticity condition  $(E')_\beta$  if there exists an  $\{\alpha(e) : e \in U\} \in (0, \infty)^{2d}$  such that

$$\kappa(\{\alpha(e) : e \in U\}) := 2 \sum_{e'} \alpha(e') - \sup_{e \in U} (\alpha(e) + \alpha(-e)) > \beta \quad (5.1.1)$$

and for every  $e \in U$

$$\mathbb{E} \left( e^{\sum_{e' \neq e} \alpha(e') \log \frac{1}{\omega(0, e')}} \right) < \infty. \quad (5.1.2)$$

Furthermore, when  $\hat{v}$  exists, we say that the ellipticity condition  $(E')_\beta$  is satisfied towards the asymptotic direction if there exists an  $\{\alpha(e) : e \in U\}$  satisfying (5.1.1) and (5.1.2) and such that there exists  $\alpha_1 > 0$  that satisfies  $\alpha(e) = \alpha_1$  for  $e \in H_{\hat{v}} \cap U$  while  $\alpha(e) \leq \alpha_1$  for  $e \in U \setminus H_{\hat{v}}$ .

**Remark 46.** Replacing (5.1.2) by  $\mathbb{E} \left( e^{\sum_{e'} \alpha(e') \log \frac{1}{\omega(0, e')}} \right) < \infty$  gives an equivalent condition. The direct implication is straightforward. And since  $1 \leq \sum_{e \in U} \mathbb{1}_{\{\omega(0, e) \geq \frac{1}{2d}\}}$ , we get

$$\mathbb{E} \left( e^{\sum_{e'} \alpha(e') \log \frac{1}{\omega(0, e')}} \right) \leq \sum_{e \in U} e^{\alpha(e) \log(2d)} \mathbb{E} \left( e^{\sum_{e' \neq e} \alpha(e') \log \frac{1}{\omega(0, e')}} \right).$$

This gives the reverse implication.

**Remark 47.** The results of [11] still hold (with no changes in the proofs) if we replace the previous definition of  $\eta_\alpha$  by

$$\eta_\alpha := \max_{e \in H_{\hat{v}}} \mathbb{E} \left( \frac{1}{\omega(0, e)^\alpha} \right).$$

It means that the constant  $c_0$  in the definition of condition  $(P)_M$  depends only of the integrability towards the asymptotic direction.

But knowing the existence of  $\hat{v}$  does not mean that we know its value. In most cases,  $\hat{v}$  is found to be inaccessible. A notable exception is the result of Tournier ([44]) that gives the value of  $\hat{v}$  in the case of random walks in Dirichlet environments.

### 5.1.2 Ballisticity results

Our main results are a generalization of theorems 1.2 and 1.3 of [11] where we remove the "towards the asymptotic direction" condition of Theorems 1.2 and 1.3 of [11].

Let  $\tau_1^{\hat{v}}$  be the first renewal time in the direction  $\hat{v}$ , its precise definition is recalled in the next section. We prove the following tail estimate on renewal times, which improves proposition 5.1 of [11].

**Theorem 48.** *Let  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $\beta > 0$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that  $(P)_M|l$  is satisfied and that  $(E')_\beta$  holds (cf. (5.1.1), (5.1.2)). Then*

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} (\log u)^{-1} \log P_0(\tau_1^{\hat{v}} > u) \leq -\beta.$$

The condition  $(E'_\beta)$  is sharp in a sense that is made precise in remark 51 below.

Together with previous results of Sznitman, Zerner, Seppäläinen and Rassoul-Agha, cf [38, 48, 34, 26], it implies the following

**Theorem 49** (Law of large numbers). *Consider a random walk in an i.i.d. environment in dimensions  $d \geq 2$ . Let  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that the random walk satisfies condition  $(P)_M|l$  and the ellipticity condition  $(E')_1$ . Then the random walk is ballistic in direction  $l$  and there is a  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $v \neq 0$  such that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v, \quad P_0 - a.s.$$

**Theorem 50** (Central limit theorems). *Consider a random walk in an i.i.d. environment in dimensions  $d \geq 2$ . Let  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that the random walk satisfies condition  $(P)_M|l$ .*

a) (Annealed central limit theorem) *If  $(E')_2$  is satisfied then*

$$\varepsilon^{1/2}(X_{[\varepsilon^{-1}n]} - [\varepsilon^{-1}n]v)$$

*converges in law under  $P_0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  to a Brownian motion with non-degenerate covariance matrix.*

b) (Quenched central limit theorem) *If  $(E')_{176d}$  is satisfied, then  $\mathbb{P}$ -a.s. we have that*

$$\varepsilon^{1/2}(X_{[\varepsilon^{-1}n]} - [\varepsilon^{-1}n]v)$$

*converges in law under  $P_{0,\omega}$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  to a Brownian motion with non-degenerate covariance matrix.*

Removing the "towards the asymptotic direction" is a real improvement: in section 5.1.3, we will give some examples of environments (in the class of Dirichlet environments) that satisfy  $(E'_\beta)$  but not towards the asymptotic direction. For those environments, our new theorems allows to prove a LLN or CLT. Furthermore, our final goal would be to get a ballisticity condition that depends only locally on the environment (i.e. a condition that depends only on the law of the environment at one point). Condition  $(E')_\beta$  is local, whereas  $(E')_\beta$  towards the asymptotic dimension is not: removing the "towards the asymptotic direction" is then a first step in this direction. Ideally, we would also need to get rid of condition  $(P)_M|l$ , that is not local either. This is a much more difficult problem, not solved even in the uniformly elliptic case.

**Remark 51.** *The condition of theorem 48 is sharp under the following assumption on the tail behavior of the environment at one site: there exists some  $(\beta_e)_{e \in U}$ ,  $\beta_e \geq 0$ , and a positive constant  $C > 1$  such that for all  $e \in U$*

$$C^{-1} \prod_{e' \in U, e' \neq e} t_{e'}^{\beta_{e'}} \leq \mathbb{P}(\omega(0, e') \leq t_{e'}, \forall e' \in U, e' \neq e) \leq C \prod_{e' \in U, e' \neq e} t_{e'}^{\beta_{e'}}$$

for all  $(t_{e'})_{e' \in U \setminus \{e\}}$ ,  $0 \leq t_{e'} \leq 1$ . Dirichlet environment (cf the next section) is a typical example of environment that satisfies this condition. Indeed, in this case we easily see that  $(E')_\beta$  is satisfied if and only if  $\beta < 2 \sum_{e'} \beta(e') - \sup_{e \in U} (\beta(e) + \beta(-e))$ . On the other hand if  $\beta \geq 2 \sum_{e'} \beta(e') - \sup_{e \in U} (\beta(e) + \beta(-e))$  then  $\mathbb{E}((\tau_1^\beta)^\beta) = \infty$ . Indeed, consider a direction  $e_0$  which realizes the maximum in  $\sup_{e \in U} (\beta(e) + \beta(-e))$  and set  $K = \{0, e_0\}$ . We denote by  $\partial_+ K$  the set of edges that exit the set  $K$ , which is composed of the edges  $\{(0, e)\}_{e \neq e_0}$  and  $\{(e_0, e)\}_{e \neq -e_0}$ . For small  $t > 0$ , under the condition that  $\omega(x, y) \leq t$  for all  $(x, y) \in \partial_+ K$  we have  $P_{0, \omega}(T_K \geq n) \geq (1 - (2d - 1)t)^n$ . Hence,

$$\begin{aligned} P_0(T_K \geq n) &\geq (1 - (2d - 1)/n)^n \mathbb{P}(\omega(x, y) \leq 1/n, \forall (x, y) \in \partial_+ K) \\ &\geq (1 - (2d - 1)/n)^n C^{-1} n^{-((\sum_{e'} \beta(e')) - (\beta(e_0) + \beta(-e_0)))} \end{aligned}$$

which implies that  $E_0(T_K^\beta) = \infty$ . Since  $T_K$  is clearly a lower bound for the first renewal time it gives the result.

**Remark 52.** Theorem 1.1 of [11] states that for i.i.d. environments in dimensions  $d \geq 2$  satisfying the ellipticity condition  $(E')_0$ , the polynomial condition  $(P)_M|l$  (for  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  and  $M \geq 15d + 5$ ) is equivalent to Sznitman's condition  $(T')|l$  (see for example [35] for the definition). We can therefore replace  $(P)_M|l$  by  $(T')|l$  in the statements of Theorems 49 and 50.

### 5.1.3 New examples of random walks satisfying $(P)_M$

In this article we also introduce new examples of RWRE in environments which are not uniformly elliptic and which satisfy the polynomial condition  $(P)_M$  for  $M \geq 15d + 5$ . In subsection 5.1.3 we prove the polynomial condition for a subset of marginal nestling random walks, including a particular environment introduced by Campos and Ramírez in [11]. In subsection 5.1.3, we prove the polynomial condition for a class of random walks in Dirichlet random environments which do not necessarily satisfy Kalikow's condition.

#### Example within the class of marginal nestling random walks

Following Sznitman [34], we say that a law  $\mathbb{P}$  on  $\Omega$  is *marginal nestling* if the convex hull  $K_o$  of the support of the law of

$$d(0, \omega) := \sum_{e \in U} \omega(0, e)e$$

is such that  $0 \in \partial K_o$ . We will prove in section 5.4 that a certain subset of the marginal nestling laws satisfies the polynomial condition.

**Theorem 53.** *Consider an elliptic law  $\mathbb{P}$  under which  $\{\omega(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$  are i.i.d. Assume that there exists an  $r > 1$  such that  $\omega(0, e_1) = r\omega(0, e_{1+d})$ . Then the polynomial condition  $(P)_M|_{e_1}$  is satisfied for some  $M \geq 15d + 5$ .*

**Remark 54.** *This theorem is valid for all i.i.d. elliptic environments satisfying  $\omega(0, e_1) = r\omega(0, e_{1+d})$ , including uniformly elliptic environments. However, the environments are marginal nestling only in the non-uniformly elliptic case.*

The above result includes an example suggested in [11], by Campos and Ramírez, of an environment which satisfies the polynomial condition and for which the random walk is directionally transient but not ballistic. They showed that on this environment,  $(E')_\alpha$  is satisfied for  $\alpha$  smaller but arbitrarily close to 1, and that the walk is transient but not ballistic in a given direction. The proof that this environment satisfies the polynomial condition was left for a future work.

Let us define the environment introduced in [11]. Let  $\varphi$  be any random variable taking values on the interval  $(0, 1/4)$  and such that the expected value of  $\varphi^{-1/2}$  is infinite, while for every  $\varepsilon > 0$ , the expected value of  $\varphi^{-(1/2-\varepsilon)}$  is finite. Let  $X$  be a Bernoulli random variable of parameter  $1/2$ . We now define  $\omega(0, e_1) = 2\varphi$ ,  $\omega(0, -e_1) = \varphi$ ,  $\omega(0, e_2) = X\varphi + (1 - X)(1 - 4\varphi)$  and  $\omega(0, -e_2) = X(1 - 4\varphi) + (1 - X)\varphi$ .

For every  $\varepsilon > 0$  this environment satisfies  $(E')_{1-\varepsilon}$ : traps can appear because the random walk can get caught on two edges of the type  $(x, e_2), (x + e_2, -e_2)$ . Furthermore, it is transient in direction  $e_1$  but not ballistic in that direction.

### Examples within the class of Dirichlet random environments

Random Walks in Dirichlet Environment (RWDE) are interesting because of the analytical simplifications they offer, and because of their link with reinforced random walks. Indeed, the annealed law of a RWDE corresponds to the law of a linearly directed-edge reinforced random walk ([15], [24]).

Given a family of positive weights  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$ , a random i.i.d. Dirichlet environment is a law on  $\Omega$  constructed by choosing independently at each site  $x \in \mathbb{Z}^d$  the values of  $(\omega(x, e_i))_{i \in \llbracket 1, 2d \rrbracket}$  according to a Dirichlet law with parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$ . That is, at each site we choose independently a law with density

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2d} \beta_i\right)}{\prod_{i=1}^{2d} \Gamma(\beta_i)} \left( \prod_{i=1}^{2d} x_i^{\beta_i-1} \right) dx_1 \dots dx_{2d-1}$$

on the simplex  $\{(x_1, \dots, x_{2d}) \in ]0, 1]^{2d}, \sum_{i=1}^{2d} x_i = 1\}$ . Here  $\Gamma$  denotes the Gamma function  $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt$ , and  $dx_1 \dots dx_{2d-1}$  represents the image of the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^{2d-1}$  by the application  $(x_1, \dots, x_{2d-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{2d-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{2d-1})$ . Obviously, the law does not depend on the specific role of  $x_{2d}$ .

**Remark 55.** *Given a Dirichlet law of parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$ , the ellipticity condition  $(E')_\beta$  is satisfied if and only if*

$$\kappa((\beta_1, \dots, \beta_{2d})) = 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \beta_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\beta_i + \beta_{i+d}) > \beta.$$

*As stated in remark 51, this ellipticity condition is optimal to get theorem 48 in the case of Dirichlet environments. Remark that for Dirichlet environments,  $(E')_\beta$  is much sharper than  $(E')_\beta$  towards the asymptotic direction. Indeed,  $(E')_\beta$  is satisfied towards the asymptotic direction  $\hat{v}$  if and only if we also have the existence of a constant  $c > 0$  such that for all  $i$ ,  $\beta_i \leq c$ , and for all  $i$  such that  $e_i \cdot \hat{v} \geq 0$ ,  $\beta_i = c$ . The result of Tournier ([44]) gives us the value of  $\hat{v}$  in terms of the  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$ . But there are many obvious cases when we do not need to find  $\hat{v}$  to notice that  $(E')_\beta$  is not satisfied toward the asymptotic direction, for example when we cannot find  $d$  of the  $\beta_i$  with the same value.*

In the case of RWDE, it has been proved that Kalikow's condition, and thus the  $(T')$  condition, is satisfied whenever

$$\max_{1 \leq i \leq d} |\beta_i - \beta_{i+d}| > 1 \quad (5.1.3)$$

(see Enriquez and Sabot in [16] and Tournier in [45]). The characterization of Kalikow's condition in terms of the parameters of a RWDE remains an open question. On the other hand, we believe that for RWDE condition  $(T')$  is satisfied if and only if  $\max_{1 \leq i \leq d} |\beta_i - \beta_{i+d}| > 0$ . Nevertheless, in this article we are able to prove the following result.

**Theorem 56.** *Let  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d, \beta_{d+2}, \dots, \beta_{2d}$  be some fixed positive numbers. Then, there exists an  $\varepsilon \in (0, 1)$  depending on these numbers such that if  $\beta_{1+d}$  is chosen so that  $\beta_{1+d} \leq \varepsilon$ , the Random Walk in Dirichlet Environment with parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$  satisfies condition  $(P)_M|e_1$  for  $M \geq 15d + 5$ .*

Theorem 56 gives as a corollary new examples of RWDE which are ballistic in dimension  $d = 2$  since they do not correspond to ranges of the parameters satisfying condition 5.1.3 of Tournier [45] and Sabot and Enriquez [16]. Indeed, by Theorem 49, if

$$\sum_{i=1}^{2d} \beta_i - \sup_{1 \leq i \leq d} (\beta_i + \beta_{i+d}) > 1$$

and one of the parameters  $\{\beta_i : 1 \leq i \leq d\}$  is small enough, the walk is ballistic.

**Remark 57.** *In dimension  $d \geq 3$ , in [28, 8], precise conditions on the existence of an invariant measure viewed from the particle absolutely continuous with respect to the law have been given ; this allows to characterize parameters for which there is ballisticsity, but it fails to give information on the  $(T')$  condition and on the tails of renewal times. It also fails to give a CLT.*

Theorem 50 then gives us annealed CLTs for Dirichlet laws when the parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$  satisfy  $\sum_{i=1}^{2d} \beta_i - \sup_{1 \leq i \leq d} (\beta_i + \beta_{i+d}) > 2$  along with condition (5.1.3) or the hypothesis of theorem 56.

**Remark 58.** *For the Dirichlet laws in dimension  $d = 2$  with parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_4)$  satisfying  $\sum_{i=1}^4 \beta_i - \sup_{1 \leq i \leq 2} (\beta_i + \beta_{i+d}) > 1$ , with one of the parameters  $\{\beta_i : 1 \leq i \leq 4\}$  small enough, but for which there are no vector  $v$  and constant  $c$  such that for all  $i$ ,  $\beta_i \leq c$ , and for all  $i$  such that  $e_i \cdot v \geq 0$ ,  $\beta_i = c$ , our theorem 49 gives the ballisticsity when the results of [11] would not have been enough.*

For the Dirichlet laws in dimension  $d \geq 2$  with parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_{2d})$  satisfying  $\sum_{i=1}^{2d} \beta_i - \sup_{1 \leq i \leq d} (\beta_i + \beta_{i+d}) > 2$ , with condition (5.1.3) or the hypothesis of theorem 56, but for which there are no vector  $v$  and constant  $c$  such that for all  $i$ ,  $\beta_i \leq c$ , and for all  $i$  such that  $e_i \cdot v \geq 0$ ,  $\beta_i = c$ , our theorem 50 gives the annealed CLT when the results of [11] would not have been enough.

This illustrates the relevance of having removed the "toward the asymptotic direction" hypothesis in theorem 48.

## 5.2 First tools for the proofs

In this section we will introduce some tools that will prove necessary for the proof of theorem 48.

### 5.2.1 Regeneration times

The proofs in [11] are based on finding bounds on the regeneration times. We thus begin by giving the definition and some results about the regeneration times with respect to a direction  $l$ .

We define  $\{\theta_n : n \geq 1\}$  as the canonical time shift on  $\mathbb{Z}^{d\mathbb{N}}$ . For  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  and  $u \geq 0$ , we define the time

$$T_u^l := \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l \geq u\}.$$

Set

$$a > 2\sqrt{d} \tag{5.2.1}$$

and

$$D^l := \min\{n \geq 0 : X_n \cdot l < X_0 \cdot l\}.$$

We define

$$\begin{aligned} S_0 &:= 0, & M_0 &:= X_0 \cdot l, \\ S_1 &:= T_{M_0+a}^l, & R_1 &:= D^l \circ \theta_{S_1} + S_1, \\ M_1 &:= \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_1\}, \end{aligned}$$

and recursively for  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &:= T_{M_k+a}^l, & R_{k+1} &:= D^l \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1}, \\ M_{k+1} &:= \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_{k+1}\}. \end{aligned}$$

The first regeneration time is then defined as

$$\tau_1 := \min\{k \geq 1 : S_k < \infty, R_k = \infty\}.$$

We can now define recursively in  $n$  the  $(n + 1)$ -th regeneration time  $\tau_{n+1}$  as  $\tau_1(X_{\cdot}) + \tau_n(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1})$ . We will occasionally write  $\tau_1^l, \tau_2^l, \dots$  to emphasize the dependence on the chosen direction.

**Remark 59.** *The condition (5.2.1) on  $a$  is only necessary to prove the non-degeneracy of the covariance matrix of part (a) of theorem 50.*

It is a standard fact (see for example Sznitman and Zerner [38]) to show that the sequence  $((\tau_1, X_{(\tau_1+\cdot)\wedge\tau_2} - X_{\tau_1}), (\tau_2 - \tau_1, X_{(\tau_2+\cdot)\wedge\tau_3} - X_{\tau_2}), \dots)$  is independent and (except for its first term) i.i.d.. Its law is the same as the law of  $\tau_1$  with respect to the conditional probability measure  $P_0(\cdot | D^l = \infty)$ .

Those regeneration times are particularly useful to us because of the two following theorems :

**Theorem 60** (Sznitman and Zerner [38], Zerner [48], Sznitman [34]). *Consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Let  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  and assume that there is a neighbourhood  $V$  of  $l$  such that for every  $l' \in V$  the random walk is transient in the direction  $l'$ . Then there is a deterministic  $v$  such that  $P_0$ -a.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v.$$

Furthermore, the following are satisfied.

- a) If  $E_0(\tau_1) < \infty$ , the walk is ballistic and  $v \neq 0$ .
- b) If  $E_0(\tau_1^2) < \infty$ ,

$$\varepsilon^{1/2} (X_{[\varepsilon^{-1}n]} - [\varepsilon^{-1}n]v)$$

converges in law under  $P_0$  to a Brownian motion with non-degenerate covariance matrix.

**Theorem 61** (Rassoul-Agha and Seppäläinen [26]). *Consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Take  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$  and let  $\tau_1$  be the corresponding regeneration time. Assume that*

$$E_0(\tau_1^p) < \infty,$$

for some  $p > 176d$ . Then  $\mathbb{P}$ -a.s. we have that

$$\varepsilon^{1/2} (X_{[\varepsilon^{-1}n]} - [\varepsilon^{-1}n]v)$$

converges in law under  $P_{0,\omega}$  to a Brownian motion with non-degenerate covariance matrix.

### 5.2.2 Atypical Quenched Exit Estimate

The proof of theorem 48 is based on an atypical quenched exit estimate proved in [11]. We will also need this result, and thus recall it in this section. Let us first introduce some notations.

Without loss of generality, we can assume that  $e_1$  is contained in the open half-space defined by the asymptotic direction so that

$$\hat{v} \cdot e_1 > 0.$$

We define the hyperplane :

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot e_1 = 0\}.$$

Let  $P := P_{\hat{v}}$  be the projection on the asymptotic direction along the hyperplane  $H$  defined for  $z \in \mathbb{Z}^d$  by

$$P(z) := \left( \frac{z \cdot e_1}{\hat{v} \cdot e_1} \right) \hat{v},$$

and  $Q := Q_l$  be the projection of  $z$  on  $H$  along  $\hat{v}$  so that

$$Q(z) := z - P(z).$$

Now, for  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\beta > 0$ ,  $\rho > 0$  and  $L > 0$ , we define the tilted boxes with respect to the asymptotic direction  $\hat{v}$  by :

$$B_{\beta,L}(x) := \{y \in \mathbb{Z}^d \text{ s.t. } -L^\beta < (y-x) \cdot e_1 < L \text{ and } \|Q(y-x)\|_\infty < \rho L^\beta\} \quad (5.2.2)$$

and their front boundary by

$$\partial^+ B_{\beta,L}(x) := \{y \in \partial B_{\beta,L}(x) \text{ s.t. } (y-x) \cdot e_1 = L\}.$$

We have :

**Proposition 62** (Atypical Quenched Exit Estimate, proposition 4.1 of [11]). *Set  $\alpha > 0$  such that  $\eta_\alpha := \sup_{e \in U} \mathbb{E} \left( \left( \frac{1}{\omega(0,e)} \right)^\alpha \right) < \infty$ . Take  $M \geq 15d + 5$  such that  $(P)_M|l$  is satisfied. Let  $\beta_0 \in (1/2, 1)$ ,  $\beta \in (\frac{\beta_0+1}{2}, 1)$  and  $\zeta \in (0, \beta_0)$ . Then, for each  $\gamma > 0$  we have that*

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} L^{-g(\beta_0, \beta, \zeta)} \log \mathbb{P} \left( P_{0,\omega} \left( X_{T_{B_{\beta,L}(0)}} \in \partial^+ B_{\beta,L}(0) \right) \leq e^{-\gamma L^\beta} \right) < 0,$$

where

$$g(\beta_0, \beta, \zeta) := \min\{\beta + \zeta, 3\beta - 2 + (d-1)(\beta - \beta_0)\}.$$

### 5.2.3 Some results on flows

The main tools that enables us to improve the results of [11] is the use of flows and max-flow-min-cut theorems. We need some definitions and properties that we will detail in this section. In the following we consider a finite directed graph  $G = (V, E)$ , where  $V$  is the set of vertices and  $E$  is the set of edges. For all  $e \in E$ , we denote by  $\underline{e}$  and  $\bar{e}$  the vertices that are the head and tail of the edge  $e$  (the edge  $e$  goes from  $\underline{e}$  to  $\bar{e}$ ).

**Definition 11.** *We consider a finite directed graph  $G = (V, E)$ . A flow from a set  $A \subset V$  to a set  $Z \subset V$  is a non-negative function  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that :*

- $\forall x \in (A \cup Z)^c, \text{div } \theta(x) = 0.$
- $\forall x \in A, \text{div } \theta(x) \geq 0.$
- $\forall x \in Z, \text{div } \theta(x) \leq 0.$

where the divergence operator is  $\text{div} : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^V$  such that for all  $x \in V$ ,

$$\text{div } \theta(x) = \sum_{e \in E, \underline{e}=x} \theta(e) - \sum_{e \in E, \bar{e}=x} \theta(e).$$

A unit flow from  $A$  to  $Z$  is a flow such that  $\sum_{x \in A} \text{div } \theta(x) = 1$ . (Then we have also  $\sum_{x \in Z} \text{div } \theta(x) = -1$  ).

We will need the following generalized version of the max-flow-min-cut theorem :

**Proposition 63** (proposition 1 of [28]). *Let  $G = (V, E)$  be a finite directed graph. Let  $(c(e))_{e \in E}$  be a set of non-negative reals (called capacities). Let  $x_0$  be a vertex and  $(p_x)_{x \in V}$  be a set of non-negative reals. There exists a non-negative function  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that*

$$\text{div } \theta = \sum_{x \in V} p_x (\delta_{x_0} - \delta_x), \quad (5.2.3)$$

$$\forall e \in E, \theta(e) \leq c(e), \quad (5.2.4)$$

if and only if for all subset  $K \subset V$  containing  $x_0$  we have

$$c(\partial_+ K) \geq \sum_{x \in K^c} p_x, \quad (5.2.5)$$

where  $\partial_+ K = \{e \in E, \underline{e} \in K, \bar{e} \in K^c\}$  and  $c(\partial_+ K) = \sum_{e \in \partial_+ K} c(e)$ . The same is true if we restrict the condition (5.2.5) to the subsets  $K$  such that any  $y \in K$  can be reached from 0 following a directed path in  $K$ .

We will give here an idea of the proof, that explains why we call this result a generalized version of the classical max-flow-min-cut theorem. The complete proof can be found in [28].

*Idea of the proof.* If  $\theta$  satisfies (5.2.3) and (5.2.4) then

$$\sum_{e, \underline{e} \in K, \bar{e} \in K^c} \theta(e) - \sum_{e, \bar{e} \in K, \underline{e} \in K^c} \theta(e) = \sum_{x \in K} \operatorname{div} \theta(x) = \sum_{x \in K^c} p_x.$$

It implies (5.2.5) by (5.2.4) and positivity of  $\theta$ .

The reversed implication is an easy consequence of the classical max-flow min-cut theorem on finite directed graphs (see for example [21] section 3.1). If  $(c(e))_{e \in E}$  satisfies (5.2.5), we consider the new graph  $\tilde{G} = (V \cup \{\delta\}, \tilde{E})$ , where

$$\tilde{E} = E \cup \{(x, \delta), x \in V\}.$$

We define a new set of capacities  $(\tilde{c}(e))_{e \in \tilde{E}}$  where  $c(e) = \tilde{c}(e)$  for  $e \in E$  and  $\tilde{c}((x, \delta)) = p_x$ . The strategy is to apply the max-flow min-cut theorem with capacities  $\tilde{c}$  and with source  $x_0$  and sink  $\delta$ . It gives a flow  $\tilde{\theta}$  on  $\tilde{G}$  between  $x_0$  and  $\delta$  with strength  $\sum_{x \in V} p_x$  and such that  $\tilde{\theta} \leq \tilde{c}$ . The function  $\theta$  obtained by restriction of  $\tilde{\theta}$  to  $E$  satisfies (5.2.4) and (5.2.3).  $\square$

For the proof of theorem 48, we will consider the oriented graph  $(\mathbb{Z}^d, E_{\mathbb{Z}^d})$  where  $E_{\mathbb{Z}^d} := \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \text{ s.t. } |x - y|_1 = 1\}$ . This graph is not finite, but we will only consider flows with compact support ( $\theta(e) = 0$  for all  $e$  except in a finite subset of  $E_{\mathbb{Z}^d}$ ). We can then proceed as if the graph were finite, and use the previous definition and proposition.

### 5.3 Proof of theorem 48

Let  $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $\beta > 0$  and  $M \geq 15d + 5$ . Assume that  $(P)_M|l$  is satisfied and that  $(E')_\beta$  holds.

Let us take a rotation  $\hat{R}$  such that  $\hat{R}(e_1) = \hat{v}$ . We fix  $\beta' \in (\frac{5}{6}, 1)$ ,  $M > 0$  and for simplicity we will write  $\tau_1$  instead of  $\tau_1^{\hat{v}}$ .

For  $u > 0$ , take

$$L = L(u) := \left( \frac{1}{4M\sqrt{d}} \right)^{\frac{1}{\beta'}} (\log u)^{\frac{1}{\beta'}},$$

$$C_L := \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \frac{-L}{2(\hat{v} \cdot e_1)} \leq x \cdot \hat{R}(e_i) \leq \frac{L}{2(\hat{v} \cdot e_1)}, \text{ for } 0 \leq i \leq 2d \right\}$$

Following the proof of proposition 5.1 in [11], we write

$$P_0(\tau_1 > u) \leq P_0\left(\tau_1 > u, T_{C_{L(u)}} \leq \tau_1\right) + \mathbb{E}\left(F_1^c, P_{0,\omega}\left(T_{C_{L(u)}} > u\right)\right) + \mathbb{P}(F_1),$$

with

$$F_1 := \left\{ \omega \in \Omega : t_\omega(C_{L(u)}) > \frac{u}{(\log u)^{\frac{1}{\beta'}}} \right\}$$

and

$$t_\omega(A) := \inf \left\{ n \geq 0 : \sup_x P_{x,\omega}(T_A > n) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

As in [11], the term  $P_0\left(\tau_1 > u, T_{C_{L(u)}} \leq \tau_1\right)$  is bounded thanks to condition  $(P)_M|l$ , and the term  $\mathbb{E}\left(F_1^c, P_{0,\omega}\left(T_{C_{L(u)}} > u\right)\right)$  is bounded thanks to the strong Markov property. This part of the original proof is not modified, so we will not give more details here. It gives the existence for every  $\gamma \in (\beta', 1)$  of a constant  $c > 0$  such that :

$$P_0(\tau_1 > u) \leq \frac{e^{-cL^\gamma(u)}}{c} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lfloor (\log u)^{\frac{1}{\beta'}} \right\rfloor} + \mathbb{P}(F_1).$$

It only remains to show that we can find a constant  $C > 0$  such that  $\mathbb{P}(F_1) \leq Cu^{-\beta}$  for  $u$  big enough.

For each  $\omega \in \Omega$ , still as in [11], there exists  $x_0 \in C_{L(u)}$  such that

$$P_{x_0,\omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq \frac{2|C_{L(u)}|}{t_\omega(C_{L(u)})}$$

where for  $y \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\tilde{H}_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}$ . It gives

$$\mathbb{P}(F_1) \leq \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega \mid \exists x_0 \in C_{L(u)} \text{ s.t. } P_{x_0,\omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq \frac{2(\log u)^{\frac{1}{\beta'}}}{u} |C_{L(u)}|\right).$$

We define for each point  $x \in C_{L(u)}$  a point  $y_x$ , closest from  $x + 2\frac{L^{\beta'}}{\hat{v} \cdot e_1}\hat{v}$ . To bound  $\mathbb{P}(F_1)$ , we will need paths that go from  $x$  to  $y_x$  with probability big enough and the atypical quenched exit estimate (proposition 62).

Define :

$$N := \frac{|\hat{v}| \log u}{2M\sqrt{d}(\hat{v} \cdot e_1)}.$$

It is straightforward that

$$N - 1 \leq |y_x - x|_1 \leq N + 1.$$

The following of the proof will be developed in three parts : first we will construct unit flows  $\theta_{i,x}$  going from  $\{x, x+e_i\}$  to  $\{y_x, y_x+e_i\}$ , for all  $x \in C_{L(u)}$ . Then we will construct paths with those flows, and use the atypical quenched exit estimate to bound  $\mathbb{P}(F_1)$  in the case that those paths are big enough. We will conclude by bounding the probability that the paths are not big enough.

### 5.3.1 Construction of the flows $\theta_{i,x}$

We consider the oriented graph  $(\mathbb{Z}^d, E_{\mathbb{Z}^d})$  where

$$E_{\mathbb{Z}^d} := \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \text{ s.t. } |x - y|_1 = 1\}.$$

We want to construct unit flows  $\theta_{i,x}$  going from  $\{x, x+e_i\}$  to  $\{y_x, y_x+e_i\}$ , for all  $x \in C_{L(u)}$ . But there are additional constraints, as we will need them to construct paths that have a probability big enough. The aim of this section is to prove the following proposition :

**Proposition 64.** *For all  $x \in C_{L(u)}$ , for all  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$  positive constants, there exists  $2d$  unit flows  $\theta_{i,x} : E_{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , respectively going from  $\{x, x+e_i\}$  to  $\{y_x, y_x+e_i\}$ , such that :*

$$\forall e \in E_{\mathbb{Z}^d}, \theta_{i,x}(e) \leq \frac{\alpha(e)}{\kappa_i}, \quad (5.3.1)$$

where  $\kappa_i := 2 \sum_{j=1}^{2d} \alpha_j - (\alpha_i + \alpha_{i+d})$ , and  $\alpha(e) := \alpha_i$  for  $e$  of the type  $(z, e_i)$ .

Furthermore, we can construct  $\theta_{i,x}$  with a compact support, and in a way that allows to find  $\gamma$  and  $S \subset E_{\mathbb{Z}^d}$ ,  $|S|$  independent of  $u$ , such that  $\theta_{i,x}(e)\kappa_i \leq \gamma < \alpha(e)$  for all  $e \in S^c$ .

We will construct the  $\theta_{i,x}$  to prove their existences. For this we need three steps. Let  $B(x, R)$  be the box of  $\mathbb{Z}^d$  of center  $x$  and radius  $R$ , and  $B_i(x, R)$  be the same box, where the vertices  $x$  and  $x+e_i$  are merged (and we suppress the edge between them). We note  $E_{B(x,R)} := \{(x, y) \in E_{\mathbb{Z}^d} \cap (B(x, R))^2\}$  and  $E_{B_i(x,R)} := \{(x, y) \in E_{\mathbb{Z}^d} \cap (B_i(x, R))^2\}$  the corresponding sets of edges. We will construct a unit flow in the graph  $(B_i(x, R), E_{B_i(x,R)})$  from  $\{x, x+e_i\}$  to  $B_i(x, R)^c$ , a unit flow in the graph  $(B_i(y_x, R), E_{B_i(y_x,R)})$  from  $B_i(y_x, R)^c$  to  $\{y_x, y_x+e_i\}$ , and then connect them. At each step, we will ensure that condition 5.3.1 is fulfilled.

**First step :** construction of a unit flow from  $\{x, x+e_i\}$  to  $B_i(x, R)^c$  :

**Lemma 65.** Set  $x \in C_{L(u)}$ , and  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$  positive constants. If  $R \geq \frac{\max_i \kappa_i}{\min_j \alpha_j}$ , there exists  $2d$  unit flows  $\theta_{i,x} : E_{B_i(x,R)} \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that :

$$\operatorname{div} \theta_{i,x} = \sum_{z \in \partial B_i(x,R)} \frac{1}{|\partial B_i(x,R)|} (\delta_x - \delta_z)$$

and

$$\forall e \in E_{B_i(x,R)}, \theta_{i,x}(e) \leq \frac{\alpha(e)}{\kappa_i}$$

where  $\partial B_i(x,R) = \{z \in B_i(x,R) \text{ that has a neighbour in } B_i(x,R)^c\}$ .

The divergence condition ensures that the flow will be a unit flow, that it goes from  $x$ , and that it leaves  $B_i(x,R)$  uniformly on the boundary of the box.

*Proof.* The result is a simple application of proposition 63. We fix  $x \in C_{L(u)}$  and  $i$  between 1 and  $2d$ . Define  $p_z = \frac{1}{|\partial B_i(x,R)|}$  if  $z \in \partial B_i(x,R)$ ,  $p_z = 0$  if  $z \notin \partial B_i(x,R)$ .

To prove the result we only have to check that  $\forall K \subset B_i(x,R)$  containing  $x$ ,  $\sum_{e \in \partial_+ K} \frac{\alpha(e)}{\kappa_i} \geq \sum_{z \notin K} p_z$ , where  $\partial_+ K = \{e \in E_{B_i(x,R)} \text{ s.t. } \underline{e} \in K \text{ and } \bar{e} \notin K\}$ .

We have two cases to examine:

- If  $K \cap \partial B_i(x,R) = \emptyset$ ,  $\sum_{z \notin K} p_z = 1$ . We then need  $\sum_{e \in \partial_+ K} \alpha(e) \geq \kappa_i$ . For  $K = \{x\}$ ,  $\sum_{e \in \partial_+ K} \alpha(e) = \kappa_i$  as we merged  $x$  and  $x + e_i$ . For bigger  $K$ , we consider for all  $j \neq i$  the paths  $(x + ne_j)_{n \in \mathbb{N}}$  and for all  $j \neq i + d$  the paths  $(x + e_i + ne_j)_{n \in \mathbb{N}}$ . They intersect the boundary of  $K$  in  $2d + 1$  different points, and the exit directions give us the corresponding  $\alpha_j$ , that sum to  $\kappa_i$ . It gives that  $\sum_{e \in \partial_+ K} \alpha(e) \geq \kappa_i$ .
- If  $K \cap \partial B_i(x,R) \neq \emptyset$ ,  $\sum_{z \notin K} p_z < 1$ . As  $K$  contains a path from  $x$  to  $\partial B_i(x,R)$ ,  $\sum_{e \in \partial_+ K} \frac{\alpha(e)}{\kappa_i} \geq \frac{R \min_j (\alpha_j + \alpha_{j+d})}{\kappa_i}$ . It is bigger than 1 thanks to the hypothesis on  $R$ . It gives the result.

□

**Second step :** by the same way, we construct a flow  $\theta_{i,x} : E_{B_i(y_x,R)} \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that

$$\operatorname{div} \theta_{i,x} = \sum_{z \in \partial B_i(y_x,R)} \frac{1}{|\partial B_i(y_x,R)|} (\delta_z - \delta_{y_x}).$$

and

$$\forall e \in E_{B_i(y_x,R)}, \theta_{i,x}(e) \leq \frac{\alpha(e)}{\kappa_i}.$$

**Third step :** we will join the flows on  $E_{B_i(x,R)}$  and  $E_{B_i(y_x,R)}$  with simple paths, to get a flow on  $E_{\mathbb{Z}^d}$ . Take  $R \geq \frac{\max_i \kappa_i}{\min_j \alpha_j}$ , and make sure that  $\frac{1}{|\partial B(x,R)|} <$

$\frac{\alpha(e)}{\kappa_i}$  for all  $e \in E_{\mathbb{Z}^d}$  (always possible by taking  $R$  big enough,  $R$  depends only on the  $\alpha_i$  and the dimension).

We can find  $\partial B(x, R)$  simple paths  $\pi_j \subset E_{\mathbb{Z}^d}$  satisfying :

- $\forall j$ ,  $\pi_j$  connects a point of  $\partial B(x, R)$  to a point of  $\partial B(y_x, R)$ .
- $\forall j$ ,  $\pi_j$  stays outside of  $B(x, R)$  and  $B(y_x, R)$ , except from the departure and arrival points.
- If two paths intersect, they perform jumps in different direction after the intersection (no edge is used by two paths). If  $(x, e_i)$  is in a path, then  $(x + e_i, -e_i)$  is not in any path.
- The number of steps of each path is close to  $N$  : there exists constants  $K_1$  and  $K_2$  independent of  $u$  such that the length of  $\pi_j$  is smaller than  $K_1 N + K_2$ .

(For example we can use the paths  $\pi^{(i,j)}$  p45 of [11], and make them exit the ball  $B(x, R)$  instead of  $\{x, x + e_i\}$ ).

For all  $i$ ,  $\partial B_i(x, R) = \partial B(x, R)$  and  $\partial B_i(y_x, R) = \partial B(y_x, R)$  as soon as  $R > 1$ . By construction,  $-\operatorname{div} \theta_{i,x}(z_1) = \operatorname{div} \theta_{i,x}(z_2) = \frac{1}{|\partial B(x, R)|}$  for any  $z_1 \in \partial B_i(x, R)$  and  $z_2 \in \partial B_i(y_x, R)$ . We can then join the flows of the first two steps by defining a flow  $\theta_{i,x}(e) = \frac{1}{|\partial B(y_x, R)|}$  for all  $e \in \pi_j$  (and 0 on all the other edges of  $E_{\mathbb{Z}^d}$ ).

We have thus constructed a unit flow  $\theta_{i,x}$  on  $E_{\mathbb{Z}^d}$ , from  $\{x, x + e_i\}$  to  $\{y_x, y_x + e_i\}$ , satisfying (5.3.1) ( (5.3.1) is satisfied on  $E_{B_i(x, R)}$  and  $E_{B_i(y_x, R)}$  as  $R \geq \frac{\max_i \kappa_i}{\min_j \alpha_j}$  thanks to lemma 65, and outside those balls as  $\frac{1}{|\partial B(x, R)|} < \frac{\alpha(e)}{\kappa_i}$  for all  $e \in E_{\mathbb{Z}^d}$ ). It concludes the proof of the first part of proposition 64.

As  $\theta_{i,x}(e) = 0$  out of the finite set  $E_{B_i(x, R)} \cup E_{B_i(y_x, R)} \cup \{e \in \pi_j, 1 \leq j \leq \partial B(x, R)\}$ , the flow has a compact support. And as we made sure that  $\frac{1}{|\partial B(x, R)|} < \frac{\alpha(e)}{\kappa_i}$ , we can take  $S = B(x, R) \cup B(y_x, R)$  and  $\gamma = \frac{\kappa_i}{|\partial B(x, R)|}$  to conclude the proof.

### 5.3.2 Bounds for $\mathbb{P}(F_1)$

We apply proposition 64 for the  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}$  of the definition of  $(E')_\beta$  (see (5.1.1) and (5.1.2)). It gives flows  $\theta_{i,x}$  on  $E_{\mathbb{Z}^d}$ , constructed as in the previous section.

We can decompose a given  $\theta_{i,x}$  (for  $i$  and  $x$  fixed) in a finite set of weighted paths, each path starting from  $x$  or  $x + e_i$  and arriving to  $y_x$  or  $y_x + e_i$ . It suffices to choose a path  $\sigma$  where the flow is always positive, to give it a weight  $p_\sigma := \min_{e \in \sigma} \theta_{i,x}(e) > 0$  and to iterate with the new flow  $\theta(e) := \theta_{i,x}(e) - p_\sigma \mathbb{1}_{e \in \sigma}$ .

The weight  $p_\sigma$  of a path  $\sigma$  then satisfies : for all  $e \in E_{\mathbb{Z}^d}$ ,  $\theta_{i,x}(e) = \sum_{\sigma \text{ containing } e} p_\sigma$ . As  $\theta_{i,x}$  is a unit flow we get  $\sum_{\sigma \text{ path of } \theta_{i,x}} p_\sigma = 1$ . We will

use those weights in the next section, to prove that those paths are "big enough" with high probability.

We now introduce :

$$F_{2,i} = \left\{ \omega \in \Omega \text{ s.t. } \forall x \in C_{L(u)}, \forall \sigma \text{ path of } \theta_{i,x}, \omega_\sigma := \prod_{e \in \sigma} \omega_e \geq u^{\frac{1}{M}-1} \right\}$$

and

$$F_2 = \bigcap_{i=1}^{2d} F_{2,i}.$$

Define

$$F_3 := \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists x_0 \in C_{L(u)} : P_{x_0, \omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq \frac{2(\log u)^{\frac{1}{\beta'}} |C_{L(u)}|}{u}, F_2 \right\}$$

we get immediately :

$$\mathbb{P}(F_1) \leq \mathbb{P}(F_3) + \mathbb{P}(F_2^c).$$

It gives two new terms to bound. We start by bounding  $\mathbb{P}(F_3)$ . For this we will use the same method as in [11] : on the event  $F_3$ , for all  $1 \leq i \leq 2d$  we can use a path  $\sigma$  of  $\theta_{i,x}$  to join  $x$  or  $x + e_i$  to  $y_x$  or  $y_x + e_i$ . It gives :

$$\begin{aligned} \omega(x_0, e_i) u^{\frac{1}{M}-1} \inf_{z \in \{y_{x_0}, y_{x_0} + e_i\}} P_{z, \omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0}) &\leq P_{x_0, \omega}(T_{C_{L(u)}} < \tilde{H}_{x_0}) \\ &\leq \frac{2(\log u)^{\frac{1}{\beta'}}}{u} |C_{L(u)}| \end{aligned}$$

where the factor  $\omega(x_0, e_i)$  corresponds to the probability of jumping from  $x$  to  $x + e_i$ , in the case where the path  $\sigma$  starts from  $x + e_i$ .

As  $\sum_{i=1}^{2d} \omega(x_0, e_i) = 1$ , it gives

$$u^{\frac{1}{M}-1} \inf_{z \in V(y_{x_0})} P_{z, \omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0}) \leq \frac{4d(\log u)^{\frac{1}{\beta'}}}{u} |C_{L(u)}|,$$

where  $V(y_{x_0}) := \{y_{x_0}, (y_{x_0} + e_i)_{i=1, \dots, 2d}\}$ .

In particular, on  $F_3$ , we can see that for  $u$  large enough  $V(y_{x_0}) \subset C_{L(u)}$ . As a result, on  $F_3$ , we have for  $u$  large enough

$$\begin{aligned} \inf_{z \in V(y_{x_0})} P_{z, \omega}(X_{T_z + U_{\beta', L}} \cdot e_1 > z \cdot e_1) &\leq \inf_{z \in V(y_{x_0})} P_{z, \omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0}) \\ &\leq \frac{1}{u^{\frac{1}{2M}}} = e^{-2\sqrt{d}L(u)^{\beta'}} \end{aligned}$$

where

$$U_{\beta', L} := \{x \in \mathbb{Z}^d : -L^{\beta'} < x \cdot e_1 < L\}.$$

From this and using the translation invariance of the measure  $\mathbb{P}$ , we conclude that :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \exists x_0 \in C_{L(u)} \mid P_{x_0, \omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq \frac{4d(\log u)^{\frac{1}{\beta'}}}{u} |C_{L(u)}|, F_2 \right) \\ \leq \mathbb{P} \left( \exists x_0 \in C_{L(u)} \mid \inf_{z \in V(y_{x_0})} P_{z, \omega}(X_{T_z + U_{\beta', L}} \cdot e_1 > z \cdot e_1) \leq e^{-2\sqrt{d}L(u)^{\beta'}} \right) \\ \leq (2d+1) |C_{L(u)}| \mathbb{P} \left( P_{0, \omega}(X_{T_{U_{\beta', L}(u)}} \cdot e_1 > 0) \leq e^{-2\sqrt{d}L(u)^{\beta'}} \right) \\ \leq (2d+1) |C_{L(u)}| \mathbb{P} \left( P_{0, \omega}(X_{T_{B_{\beta', L}(u)}} \cdot e_1 > 0) \leq e^{-2\sqrt{d}L(u)^{\beta'}} \right), \end{aligned}$$

where the titled box  $B_{\beta', L(u)}$  is defined as in (5.2.2).

We conclude with the atypical quenched exit estimate (proposition 62) : there exists a constant  $c > 0$  such that for each  $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$  one has :

$$\mathbb{P}(F_3) \leq \frac{1}{c} e^{-cL(u)^{g(\beta_0, \beta', \zeta)}},$$

where  $g(\beta_0, \beta', \zeta)$  is defined as in proposition 62.

Note that for each  $\beta' \in (\frac{5}{6}, 1)$  there exists a  $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, \beta)$  such that for every  $\zeta \in (0, \frac{1}{2})$  one has  $g(\beta_0, \beta', \zeta) > \beta'$ . Therefore, replacing  $L$  by its value, we proved that there exists  $c > 0$  such that :

$$\mathbb{P}(F_3) \leq cu^{-\beta}.$$

### 5.3.3 Bound for $\mathbb{P}(F_2^c)$

To conclude the bound for  $\mathbb{P}(F_1)$  and the proof of theorem 48, it only remains to control  $\mathbb{P}(F_2^c)$ . It is in this section that we will use the conditions that were imposed on  $\theta_{i,x}$  during the construction of the flows.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_2^c) &\leq \sum_{i=1}^{2d} \mathbb{P}(F_{2,i}^c) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2d} \sum_{x \in C_{L(u)}} \mathbb{P}(\forall \sigma \text{ path of } \theta_{i,x}, \omega_\sigma \leq u^{\frac{1}{M}-1}) \end{aligned}$$

As  $\theta_{i,x}$  is a unit flow, if  $\forall \sigma$  path of  $\theta_{i,x}$ ,  $\omega_\sigma \leq u^{\frac{1}{M}-1}$  then :

$$\sum_{\sigma \text{ path of } \theta_{i,x}} p_\sigma \omega_\sigma \leq u^{\frac{1}{M}-1} \sum_{\sigma \text{ path of } \theta_{i,x}} p_\sigma = u^{\frac{1}{M}-1}.$$

Jensen's inequality then gives :

$$\prod_{\sigma \text{ path of } \theta_{i,x}} \omega_\sigma^{p_\sigma} = \prod_{e \in E_{\mathbb{Z}^d}} \omega_e^{\theta_{i,x}(e)} \leq u^{\frac{1}{M}-1}.$$

It allows to write :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_2^c) &\leq \sum_{i=1}^{2d} \sum_{x \in C_L(u)} \mathbb{P} \left( \prod_{e \in E_{\mathbb{Z}^d}} \omega_e^{\theta_{i,x}(e)} \leq u^{\frac{1}{M}-1} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2d} \sum_{x \in C_L(u)} \frac{\mathbb{E} \left( \prod_{e \in E_{\mathbb{Z}^d}} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right)}{u^{-\kappa_i(\frac{1}{M}-1)}} \end{aligned}$$

We will use the integrability given by the flows to bound the expectations. The independence of the environment gives (for  $i$  and  $x$  fixed) :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left( \prod_e \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right) \\ &= \prod_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=z} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right) \\ &= \prod_{z \in S} \mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=z} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right) \prod_{z \notin S} \mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=z} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right) \end{aligned}$$

where we recall that  $S = B(x, R) \cup B(y_x, R)$ .

As  $\theta_{i,x}$  satisfies (5.3.1), the ellipticity condition  $(E')_\beta$  gives that each of the expectations  $\mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=z} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right)$  are finite.

By construction  $|S|$  is finite and does not depend on  $u$ :

$$\prod_{z \in S} \mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=z} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right)$$

is a finite constant independent on  $u$ .

It remains to deal with the case of  $z \notin S$ . As we chose  $R$  to get  $\theta_{i,x}(e)\kappa_i < \gamma$  for the edges outside  $S$ , and thanks to the bounds on the number of edges with positive flow (there is a finite number of paths, and each path has a bounded length), we have :

$$\prod_{z \notin S} \mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=z} \omega_e^{-\kappa_i \theta_{i,x}(e)} \right) \leq \mathbb{E} \left( \prod_{e \text{ s.t. } \underline{e}=0} \omega_e^{-\gamma} \right)^{c_1 N + c_2},$$

where  $c_1$  and  $c_2$  are positive constants, independent of  $u$ . Then, putting all of those bounds together,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_2^c) &\leq \sum_{i=1}^{2d} \sum_{x \in C_L(u)} C_1 C_2^{C_3 N} u^{\kappa_i(\frac{1}{M}-1)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{2d} \sum_{x \in C_L(u)} C_4 u^{\frac{C_5 + \kappa_i}{M} - \kappa_i} \\ &\leq C_6 (\log u)^{C_7} u^{\frac{C_8}{M} - \min_i \kappa_i} \end{aligned}$$

where all the constants  $C_i$  are positive and do not depend on  $u$ . As remark 52 tells us that we can choose  $M$  as large as we want, we can get  $\frac{C_8}{M}$  as small as we want.

Then we can find a constant  $C > 0$  such that  $\mathbb{P}(F_2^c) \leq C u^{-\beta}$  for  $u$  big enough. It concludes the proof.

## 5.4 New examples of random walks satisfying $(P)_M$

### 5.4.1 Proof of Theorem 53

Consider the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$  for  $\tilde{L} = 70L^3$ . We want to find some  $L > c_0$  such that

$$P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right) \leq \frac{1}{L^M},$$

for some  $M \geq 15d + 5$ . We first decompose this probability according to whether the exit point of the random walk from the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$  is on the

bottom or on one of the sides of the box, so that,

$$\begin{aligned} & P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right) \\ &= P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 = -L \right) + P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L} \right) \\ &\quad + P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = -\tilde{L} \right). \end{aligned}$$

We will first bound the probability to exit through the sides. We do the computations for  $P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L} \right)$  but the other term can be dealt with in the same way. Suppose that  $X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L}$ , and define  $n_0, \dots, n_{\tilde{L}-1}$  the finite hitting times of new levels in direction  $e_2$  as follows :

$$n_k := \inf \{ n \geq 0 \text{ s.t. } X_n \cdot e_2 \geq k \}.$$

To simplify notation define  $\varphi(x) := \omega(x, e_{1+d})$ . We now choose a constant  $1 > \delta > 0$ , and we will call "good point" any  $x \in \mathbb{Z}^2$  such that  $\varphi(x) > \delta$ . We define  $p := \mathbb{P}(\varphi(x) > \delta)$ . Note that  $p$  does not depend on  $x$  since the environment is i.i.d., so that it depends only on  $\delta$  and the law of  $\varphi$ .

We now introduce the event that a great number of the  $X_{n_k}$  are good points :

$$C_1 := \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L} \text{ and at least } \frac{p}{2} \tilde{L} \text{ of the } (X_{n_k})_{1 \leq k \leq \tilde{L}-1} \text{ are good} \right\}.$$

We get immediately

$$P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L} \right) = P_0(C_1) + P_0 \left( \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L} \right\} \cap (C_1^c) \right).$$

By construction of the  $X_{n_k}$  and independence of the environment, and with  $Z$  an independent random variable following a binomial law of parameters  $p$  and  $\tilde{L}$ , we can bound the second term of the sum :

$$\begin{aligned} P_0 \left( \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L} \right\} \cap (C_1^c) \right) &\leq P \left( Z \leq \frac{p}{2} \tilde{L} \right) \\ &\leq \exp \left( -2 \frac{(p\tilde{L} - p\tilde{L}/2)^2}{\tilde{L}} \right) \\ &= \exp \left( -\frac{p^2 \tilde{L}}{2} \right) \end{aligned}$$

where the last inequality is Hoeffding's inequality.

It only remains to bound  $P_0(C_1)$ . For that, we introduce the following new event

$$C_2 := \left\{ C_1 \text{ and } X_{n_k+1} - X_{n_k} = e_1 \text{ for at least } \frac{\delta p}{4} \tilde{L} \text{ of the good } X_{n_k} \right\},$$

that states that the walk goes often in direction  $e_1$  just after reaching a  $X_{n_k}$  that is a good point.

We can then write

$$P_0(C_1) = P_0(C_2) + P_0(C_1 \cap (C_2^c)).$$

To bound  $P_0(C_1 \cap (C_2^c))$ , we use the uniform bound " $\varphi(x) > \delta$ " for good points that gives us that  $\omega(x, e_1) > r\delta$  on those points. And we get  $Z'$  an independent random variable following a binomial law of parameters  $r\delta$  and  $\frac{p}{2}\tilde{L}$ :

$$\begin{aligned} P_0(C_1 \cap (C_2^c)) &\leq P\left(Z' \leq \frac{\delta p}{4} \tilde{L}\right) \\ &\leq \exp\left(-p\delta^2 \tilde{L} \left(r - \frac{1}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

It only remains to bound  $P_0(C_2)$ . Set  $n^+$  (respectively  $n^-$ ) the total number of jumps in direction  $e_1$  (respectively  $-e_1$ ) before exiting the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$ . We will need a third new event

$$C_3 := \left\{ n^+ \geq \frac{1+r}{r} n^- \right\},$$

that allows us to write

$$P_0(C_2) = P_0(C_2 \cap C_3) + P_0(C_2 \cap (C_3^c)).$$

First notice that for  $L$  big enough,  $C_2 \cap C_3 = \emptyset$ . Indeed,  $C_1$  implies that we exit the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$  by the side " $x \cdot e_2 = \tilde{L}$ ". Now, since the vertical displacement of the walk before exiting the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$  is  $n^+ - n^-$ , on the event  $C_3$  we know that this displacement is at least equal to  $\frac{1}{1+r} n^+$ . Therefore, since on  $C_2$  the walk makes at least  $\frac{\delta p}{4} \tilde{L} = \frac{35\delta p}{2} L^3$  moves in the direction  $e_1$ , on  $C_2 \cap C_3$  its vertical displacement before exiting the box is at least  $\frac{35\delta p}{2(1+r)} L^3$ . Since on  $C_2 \cap C_3$  the walk exits the box by the " $x \cdot e_2 = \tilde{L}$ " side we see that for  $L$  larger than  $L_1 := \sqrt{\frac{2(1+r)}{35\delta p}}$  the event  $C_2 \cap C_3$  is empty.

We now want to bound  $P_0(C_2 \cap (C_3^c))$ .

$$\begin{aligned} P_0(C_2 \cap (C_3^c)) &\leq P_0\left(n^+ \geq \frac{\delta p}{4} \tilde{L} \text{ and } n^+ < \frac{1+r}{r} n^-\right) \\ &\leq P_0\left(n^+ + n^- \geq \frac{\delta p}{4} \tilde{L} \text{ and } (n^+ + n^-) \frac{r}{1+2r} < n^-\right). \end{aligned}$$

Now note that whenever we go through a vertical edge from a point  $x$ , the law of the environment tells us that it is an edge  $(x, e_1)$  with probability  $\frac{r}{1+r}$ , and  $(x, -e_1)$  with probability  $\frac{1}{1+r}$ . Then, defining  $Z''$  as a random variable following a binomial law of parameters  $\frac{1}{1+r}$  and  $\frac{p\delta}{4} \tilde{L}$ , we have the bound :

$$\begin{aligned} P_0(C_2 \cap (C_3^c)) &\leq P\left(Z'' \geq \frac{r}{1+2r} \frac{p\delta}{4} \tilde{L}\right) \\ &\leq \exp\left(-4p\delta \tilde{L} \left(\frac{r}{r+1} + \frac{r}{1+2r} - \frac{1}{4p\delta \tilde{L}}\right)^2\right), \end{aligned}$$

where we need  $1 \leq \frac{rp\delta \tilde{L}}{4} \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r}\right)$  to apply Hoeffding's inequality in the last inequality. We can find  $L_2$  such that this is true for  $L \geq L_2$ .

Choose  $M \geq 15d + 5$ . By putting all of our previous bounds together, we finally get, for all  $L \geq L_2$ ,

$$\begin{aligned} &P_0\left(X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{p^2 \tilde{L}}{2}\right) + \exp\left(-p\delta^2 \tilde{L} \left(r - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &\quad + \exp\left(-4p\delta \tilde{L} \left(\frac{r}{r+1} + \frac{r}{1+2r} - \frac{1}{4p\delta \tilde{L}}\right)^2\right), \end{aligned}$$

where we recall that  $\tilde{L} = 70L^3$ ,  $\delta > 0$  and  $p = \mathbb{P}(\varphi(x) > \delta)$ . Then, for any choice of  $\delta$ , we can find  $L_3 \geq \max(c_0, L_1, L_2)$  such that for all  $L \geq L_3$ ,

$$P_0\left(X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = \tilde{L}\right) + P_0\left(X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_2 = -\tilde{L}\right) \leq \frac{1}{2L^M}.$$

We now only need to bound  $P_0\left(X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 = -L\right)$  to prove  $(P)_M|_{e_1}$ . We will use again the notations  $n^+$  (respectively  $n^-$ ) for the total number of jumps in direction  $e_1$  (respectively  $-e_1$ ) before exiting the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$ . Suppose that  $X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 = -L$ . Then necessarily  $n^+ < n^-$ , which gives

$n^+ < \frac{n^+ + n^-}{2}$ . As  $n^+$  conditioned to  $n^+ + n^-$  follows a binomial law of parameters  $\frac{r}{1+r}$  and  $n^+ + n^-$ , Hoeffding's inequality gives the bound :

$$P_0 \left( n^+ < \frac{n^+ + n^-}{2} \mid n^+ + n^- \right) \leq \exp \left( -2(n^+ + n^-) \left( \frac{r}{1+r} - \frac{1}{2} \right)^2 \right).$$

But  $X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 = -L$  also gives that necessarily,  $n^- \geq L$ . Then

$$\begin{aligned} P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 = -L \right) &\leq P_0 \left( n^+ < \frac{n^+ + n^-}{2} \text{ and } n^- \geq L \right) \\ &\leq \sum_{m=L}^{\infty} \exp \left( -2m \left( \frac{r}{1+r} - \frac{1}{2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Therefore we can find  $L_4 \geq L_3$  such that for all  $L \geq L_4$ ,

$$P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 = -L \right) \leq \frac{1}{2L^M},$$

from where we conclude that for all  $L \geq L_4$ ,

$$P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right) \leq \frac{1}{L^M}.$$

### 5.4.2 Proof of Theorem 56

A classical representation of Dirichlet distributions involves independent Gamma random variables: if  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  are independent Gamma random variables with parameters  $\beta_1, \dots, \beta_N$ , then  $\frac{\gamma_1}{\sum \gamma_i}, \dots, \frac{\gamma_N}{\sum \gamma_i}$  is a Dirichlet random variable with parameters  $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ . We get a restriction property as an easy consequence of this representation (see [46], pages 179-182) : for  $J$  a non-empty subset of  $\{1, \dots, N\}$ , the random variable  $\left( \frac{x_j}{\sum_{i \in J} x_i} \right)_{j \in J}$  follows a Dirichlet law with parameters  $(\beta_j)_{j \in J}$  and is independent of  $\sum_{i \in J} x_i$ . This property will be useful in the following.

We consider the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$  for  $\tilde{L} = 70L^3$ , and want to find some  $L > c_0$  such that  $P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}}} \cdot e_1 < L \right) \leq \frac{1}{L^M}$  to prove  $(P)_M|e_1$ .

Let  $l_i := \{x \in \mathbb{Z}^d \text{ s.t. } x \cdot e_1 = i\}$  and  $t_i := \inf\{n \geq 0 : X_n \in l_i, X_{n+1} \notin l_i\}$ . We first consider the events that, when the walk arrives on  $l_i$  for the first time, it gets out of it by an edge in direction  $e_1$  (the alternative being getting out by an edge in direction  $-e_1$ ) :

$$G_{1,i} := \{X_{t_i+1} - X_{t_i} = e_1\}.$$

At the point  $X_{t_i}$ , we know that the walk will go either to  $X_{t_i} + e_1$  or to  $X_{t_i} - e_1$ . Thanks to the restriction property of the Dirichlet laws, we know that  $\frac{\omega(X_{t_i}, e_1)}{\omega(X_{t_i}, e_1) + \omega(X_{t_i}, -e_1)}$  follows a beta law of parameters  $(\beta_1, \beta_1 + \beta_{1+d})$  and is independent of the previous trajectory of the walk on  $l_i$ . Then

$$P_0(G_{1,i}) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_{1+d}}.$$

Now define

$$G_1 := \bigcap_{i=0}^{L-1} G_{1,i},$$

and note that

$$P_0(G_1^c) \leq L \frac{\beta_{1+d}}{\beta_1 + \beta_{1+d}}.$$

We can now write

$$\begin{aligned} & P_0 \left( X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right) \\ & \leq P_0 \left( \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right\} \cap G_1 \right) + P_0(G_1^c) \\ & \leq P_0 \left( \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right\} \cap G_1 \right) + L \frac{\beta_{1+d}}{\beta_1 + \beta_{1+d}}, \end{aligned}$$

and we only need to bound the first term of this sum. If  $G_1$  is satisfied, the walk cannot get out of the box  $B_{e_1, L, \tilde{L}}$  by the "lower boundary":

$$\{x \in \mathbb{Z}^d \text{ s.t. } x \cdot e_1 = -L\}.$$

Then the walk has to get out by one of the  $2d - 2$  "side boundaries" :

$$\begin{aligned} & P_0 \left( \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_1 < L \right\} \cap G_1 \right) \\ & = P_0 \left( \bigcup_{j=2}^d \left\{ X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_j = \pm \tilde{L} \right\} \cap G_1 \right). \end{aligned}$$

On the event  $\bigcup_{j=1}^d \{X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}} \cdot e_j = \pm \tilde{L}\}$  define  $n_0, \dots, n_{\tilde{L}-1}$  as the finite hitting times of new levels in any direction perpendicular to  $e_1$  as follows :

$$n_k := \inf \{n \geq 0 \text{ s.t. } \sup_{2 \leq j \leq d} |X_n \cdot e_j| \geq k\}.$$

Let now  $p = \frac{\beta_1}{1 + \sum_{i \neq 1+d} \beta_i}$  and consider the event

$$G_3 := \left\{ G_1 \text{ and } X_{n_k+1} - X_{n_k} = e_1 \text{ for at least } \frac{p}{2} \tilde{L} \text{ of the points } X_{n_k} \right\}.$$

Suppose  $\beta_{1+d} \leq 1$ , then  $p \leq \mathbb{E}(\omega(0, e_1))$ . Consider now a random variable  $Z$  with a binomial law of parameters  $p$  and  $\tilde{L}$ . Using Hoeffding's inequality, we see that

$$P(G_3^c) \leq P\left(Z \leq \frac{p\tilde{L}}{2}\right) \leq \exp\left(-\frac{p^2}{2}\tilde{L}\right).$$

But clearly  $G_1 \cap G_3 = \emptyset$  for  $L \geq L_0 := \sqrt{\frac{1}{35p}}$ . Therefore we have in this case

$$P_0\left(\bigcup_{j=2}^d \left\{X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}}} \cdot e_j = \pm \tilde{L}\right\} \cap G_1\right) \leq \exp\left(-\frac{p^2}{2}\tilde{L}\right).$$

Putting the previous bounds together, we finally get for all  $L \geq L_0$  :

$$P_0\left(X_{T_{B_{e_1, L, \tilde{L}}}}} \cdot e_1 < L\right) \leq L \frac{\beta_{1+d}}{\beta_1 + \beta_{1+d}} + \exp\left(-\frac{p^2}{2}\tilde{L}\right).$$

Let now  $L_1$  be such that for all  $L \geq L_1$

$$\exp\left(-\frac{p^2}{2}\tilde{L}\right) \leq \frac{1}{2L^M}.$$

Take now  $L_2 := \max\{c_0, L_0, L_1\}$  and then choose  $\beta_{1+d} (\leq 1)$  so that

$$L_2 \frac{\beta_{1+d}}{\beta_1 + \beta_{1+d}} \leq \frac{1}{2L_2^M}.$$

We then conclude that for this choice of  $\beta_{1+d}$  there exists an  $L \geq c_0$  such that

$$P_0\left(X_{T_{B_{e_1, L_2, \tilde{L}}}}} \cdot e_1 < L\right) \leq \frac{1}{L^M}.$$

## Acknowledgements

The authors would like to thank Alexander Drewitz for pointing out the ideas of the proof of Theorem 53. This work was partially supported by Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico grant 1100746 and by the ANR project MEMEMO2

## CHAPTER 6

---

### Quenched central limit theorem for ballistic RWRE: sharp integrability condition

---

*Abstract.* We consider weakly elliptic RWRE, in the ballistic regime. Under the additional assumption (T), we sharpen the integrability condition of the works of Rassoul-Agha and Seppäläinen and Berger and Zeitouni, which ensures the existence of a quenched functional central limit theorem. We obtain the condition  $\mathbb{E}(\tau_1^{2+\varepsilon}) < +\infty$  on the regeneration times.

The results of this chapter are a joint work with Christophe Sabot and Renato Soares dos Santos.

### 6.1 Introduction

This paper is concerned with multidimensional weakly elliptic random walks in random environment (RWRE) in the ballistic regime.

For  $d \geq 2$ , under the assumption that the RWRE is transient in a direction and under some moments conditions on the regeneration times, the RWRE satisfies a law of large numbers with non degenerate velocity (when  $\mathbb{E}_0[\tau_1] < \infty$ , see Sznitman and Zerner in [38] and Zerner in [48]) and an annealed functional central limit theorem (when  $\mathbb{E}_0[\tau_1^2] < \infty$ , see Sznitman in [34, 35]).

In [26] and [4], Rassoul-Agha and Seppäläinen and Berger and Zeitouni also prove a quenched functional central limit theorem, under conditions including  $\mathbb{E}_0[\tau_1^{176d+\varepsilon}] < \infty$  for any  $\varepsilon > 0$  or  $\mathbb{E}_0[\tau_1^{40}] < \infty$ . In this article,

we improve those moments assumptions up to  $\mathbb{E}_0 [\tau_1^{2+\varepsilon}] < \infty$  for any  $\varepsilon > 0$  under an additional assumption: condition (T) (first introduced by Sznitman in [35, 36]). For Dirichlet environments, it considerably improves the range of validity of the Quenched CLT, cf section 6.2.

Define  $\mathcal{P} := \{(p_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} : p_z \geq 0, \sum_z p_z = 1\}$  the simplex of all probability vectors on  $\mathbb{Z}^d$ . We call environment any element  $\omega := \{\omega_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$  of the environment space  $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$ . It allows to define the random walk in the environment  $\omega$  starting from  $x$  as the Markov chain  $\{X_n : n \geq 0\}$  in  $\mathbb{Z}^d$  with law  $P_{x,\omega}$  such that  $P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1$  and

$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \omega_{x, y-x}$$

for each  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ .

Let  $\mathbb{P}$  be an i.i.d product measure defined on the environment space  $\Omega$ . It means that  $\{\omega_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$  are i.i.d. under  $\mathbb{P}$ . We call  $P_{x,\omega}$  the quenched law of the random walk in random environment starting from  $x$ , and  $\mathbb{P}_x := \int P_{x,\omega} d\mathbb{P}$  the averaged or annealed law. We note  $E_{x,\omega}$  and  $\mathbb{E}_x$  the corresponding expectations.

Given  $v_\star \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  we say that the random walk in random environment is transient in direction  $v_\star$  if

$$\mathbb{P}_0 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot v_\star = \infty \right) = 1. \quad (6.1.1)$$

In the following, we assume the existence of  $v_\star$  such that the random walk in random environment satisfies (6.1.1). It allows to define some regeneration times  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , that satisfy  $\sup_{n < \tau_i} X_n \cdot v_\star < X_{\tau_i} \cdot v_\star = \inf_{n \geq \tau_i} X_n \cdot v_\star$ . Those times were first introduced by Sznitman and Zerner in [38], where their construction is detailed.

We will also assume the following conditions:

**Condition (S).** The walk has bounded steps: there exists a finite, deterministic and positive constant  $r_0$  such that  $\mathbb{P}(\omega_{0,z} = 0) = 1$  for all  $|z| > r_0$ .

**Condition (R).** We consider  $\mathcal{J} := \{z : \mathbb{E}(\omega_{0,z}) > 0\}$  the set of admissible steps under  $\mathbb{P}$ . This set satisfies  $\mathcal{J} \not\subset \mathbb{R}u$ , for all  $u \in \mathbb{R}^d$ . Furthermore,  $\mathbb{P}(\exists z : \omega_{0,0} + \omega_{0,z} = 1) < 1$ .

**Condition (M)<sub>p</sub>.** The walk is transient in direction  $v_\star$  and:

$$\sup \{\gamma \geq 0 : \mathbb{E}_0 [\tau_1^\gamma] < +\infty\} > p$$

Conditions (S) and (R) are exactly as stated in the article [26] of Rassoul-Agha and Seppäläinen. They are easily satisfied, for example in the case of nearest-neighbor random walks in elliptic environments (when  $\omega_{y,z} > 0$  for

all  $x, y$  such that  $|y - x| = 1$ ). Rassoul-Agha and Seppäläinen also assume condition  $(M)_{176d}$ , they call it condition  $(M)$  in [26].

Assuming transience,  $(S)$ ,  $(R)$  and  $(M)_1$  is enough to imply a law of large numbers with positive speed  $v \neq 0$  (see Sznitman and Zerner [38] and Zerner [48]):

$$\mathbb{P}_0 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \right) = 1.$$

We can now define the process  $(B_t^{(n)})_{t \geq 0}$  such that for all  $t \geq 0$ ,

$$B_t^{(n)} = \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}} \quad (6.1.2)$$

where  $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$  stands for the integer part of  $x$ . If we replace  $(M)_1$  by  $(M)_2$ , we also get an annealed functional central limit theorem (see Sznitman [34, 35]).

The aim of this article will be to prove a quenched functional central limit theorem for  $(B_t^{(n)})_{t \geq 0}$ . Rassoul-Agha and Seppäläinen proved in [26] that we get such a theorem for  $d \geq 2$  under the transience assumption, conditions  $(S)$ ,  $(R)$  and  $(M)_{176d}$ . Another result is shown by Berger and Zeitouni in [4], they consider the case  $d \geq 2$  under assumptions of uniform ellipticity and nearest-neighbor jumps. In the cases where we have a law of large number with positive speed and an annealed functional central limit theorem, they also get a quenched functional central limit theorem. They however need some assumptions on the integrability of the regeneration times:  $\mathbb{E}_0[\tau_1^\gamma] < \infty$ , where the value for  $\gamma$  depends on the dimension (they need  $\gamma \geq 2$  for  $d \geq 5$ ,  $\gamma > 8$  for  $d = 4$ , and  $\gamma \geq 40$  for  $d = 1, 2$ ).

To improve those conditions on the integrability of the regeneration times, we assume an additional condition: the condition  $(T)$ , introduced by Sznitman in [35, 36]:

**Condition  $(T)$ .** The walk is transient in direction  $v_*$  and we can find  $c > 0$  such that:

$$\mathbb{E}_0 \left[ \exp \left( c \sup_{1 \leq n \leq \tau_1} \|X_n\| \right) \right] < \infty. \quad (T)$$

Our result is the following:

**Theorem 66** (Quenched Functional Central Limit Theorem). *Set  $d \geq 2$ . We consider a random walk in a random i.i.d. product environment. We assume that there is a direction  $v_* \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  where the transience condition (6.1.1) holds, and we note  $\tau_i$  the corresponding regeneration times. Suppose that the walk satisfies conditions  $(S)$ ,  $(R)$ ,  $(M)_2$  and  $(T)$ . Then  $\mathbb{P}$ -a.s., the process  $B_t^{(n)}$  converges in law (as  $n \rightarrow \infty$ ) under  $P_{0,\omega}$  to a Brownian motion with non-degenerate covariance matrix.*

Our proof of this theorem is based on some techniques used by Berger and Zeitouni in [4], and by Rassoul-Agha and Seppäläinen in [26]. The key differences compared to [4] and [26] are in the following two steps:

- We improve the key estimate of section 4 of [4] in (6.4.3) and (6.4.4) to take full advantage of condition (T).
- As in section 7 of [26] we construct a walk at joint regeneration times (slightly modified). Condition (T) is used to get better estimates on the number of intersections.

Note that all examples where an annealed functional central limit theorem has been proved satisfy condition (T).

**Remark 67.** *In the hypothesis of theorem 66, we believe we can replace condition (T) by:  $\forall p, \mathbb{E}_0 [(\sup_{1 \leq n \leq \tau_1} \|X_n\|)^p] < \infty$ . We wrote the proof in the case of condition (T) for matters of simplicity.*

*We also believe that those two conditions are equivalent, but there is no proof of this up to now. Theorem 1.1 in [11] proves the equivalence between condition (T) and a polynomial condition, but it requires some ellipticity assumptions that are much stronger than condition (R).*

## 6.2 An illustration: Dirichlet environments

In this section, we consider a particular case, for which our theorem 66 significantly increases the understanding of the behavior: the case of random walks in random Dirichlet environments. Those walks are particularly interesting because they offer analytical simplifications, and because they are linked with reinforced random walks. Indeed, the annealed law of a random walk in Dirichlet environment corresponds exactly to the law of a linearly directed-edge reinforced random walk ([15], [24]).

In the following, we consider a nearest neighbor walk on  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , and we note  $e_1, \dots, e_{2d}$  the canonical vectors with the convention  $e_{d+i} = -e_i$  for  $1 \leq i \leq d$ .

Given a set of positive real weights  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ , a random i.i.d. Dirichlet environment is a law on  $\Omega$  constructed by choosing independently at each site  $x \in \mathbb{Z}^d$  the values of  $(\omega_{x,e_i})_{i \in [1,2d]}$  according to a Dirichlet law with parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ . It means that at each site we choose independently a law with density

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{2d} \Gamma(\alpha_i)} \left( \prod_{i=1}^{2d} x_i^{\alpha_i-1} \right) dx_1 \dots dx_{2d-1}$$

on the simplex  $\{(x_1, \dots, x_{2d}) \in ]0, 1]^{2d}, \sum_{i=1}^{2d} x_i = 1\}$ . Here  $\Gamma$  stands for

the usual Gamma function  $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt$ , and  $dx_1 \dots dx_{2d-1}$  represents the image of the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^{2d-1}$  by the application  $(x_1, \dots, x_{2d-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{2d-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{2d-1})$ . It is straightforward that the law does not depend on the specific role of  $x_{2d}$ . Remark that Dirichlet environments are not uniformly elliptic: we can find no positive  $c$  such that  $\mathbb{P}(\omega_{0,e_i} \geq c) = 1$ .

Set a Dirichlet law with fixed parameters  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ . The main theorem of [9] gives us that if we assume  $(T)$ , condition  $(M)_p$  is satisfied whenever

$$\kappa := 2 \left( \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \right) - \max_{i=1, \dots, d} (\alpha_i + \alpha_{i+d}) > p.$$

Theorem 66 then gives us a quenched functional central limit theorem for Dirichlet environments as soon as the walk is transient, condition  $(T)$  is satisfied and  $\kappa > 2$ . This is a real improvements compared to the results of [4] (that did not apply as the Dirichlet environment is not uniformly elliptic) or [26] (that required  $\kappa > 176d$ ).

The only additional hypothesis needed for theorem 66 that was not needed for [26] is condition  $(T)$ , and in the case of random walks in Dirichlet environments it is known to be satisfied whenever

$$\max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i - \alpha_{i+d}| > 1 \quad (6.2.1)$$

(see Enriquez and Sabot in [16] and Tournier in [45]). The complete characterization of  $(T)$  in terms of the parameters of the Dirichlet law remains an open question, but we believe condition  $(T)$  should be satisfied if and only if  $\max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i - \alpha_{i+d}| > 0$ . We thus expect to get a quenched functional central limit theorem as soon as  $\kappa > 2$  and the walk is non-symmetric.

Also note that in dimension  $d \geq 3$ ,  $\kappa > 1$  implies the existence of an absolutely continuous invariant probability measure for the environment viewed from the particle (see Sabot [28]), which gives directly condition  $(M)_1$  in the non-symmetric case. But it gives no information on  $(M)_p$  for other  $p < \kappa$ .

### 6.3 First steps to prove theorem 66

To prove theorem 66, we will use the method of Bolthausen and Sznitman. For this we need to check the hypothesis of lemma 4.1 of [5]. Fix  $T > 0$  and  $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  a bounded function that is 1-Lipschitz, such that for all  $f, g \in C([0, T], \mathbb{R})$ ,  $|F(f) - F(g)| \leq \sup_{x \in [0, T]} \{f(x) - g(x)\}$ .

Set  $W^{(n)}$  the polygonal interpolation of  $\frac{k}{n} \rightarrow B_{\frac{k}{n}}^{(n)}, k \geq 0$ . We are reduced to derive a polynomially decaying bound on  $\text{Var}_{\mathbb{P}} \left( E_{0,\omega}(F(W^{(n)})) \right) = \left\| \mathbb{E}_0 [F(W^{(n)})|\omega] - \mathbb{E}_0 [F(W^{(n)})] \right\|_2^2$ .

We will check this by proving the two following results: let  $Q_n$  be the number of intersections of two independent copies of the walk  $X$  in the same random environment  $\omega$  up to time  $n$ ,

**Theorem 68.** *Set  $d \geq 2$ . We consider a random walk in a random i.i.d. product environment. Assume that the walk is transient and satisfies conditions  $(S), (R), (M)_2, (T)$ .*

*Set  $\gamma > 2$  such that  $\mathbb{E}_0 [\tau_1^\gamma] < +\infty$ , then for any  $\delta \in (0, 1)$ , we can find a finite positive constant  $C$  such that  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\left\| \mathbb{E}_0 [F(W^{(n)})|\omega] - \mathbb{E}_0 [F(W^{(n)})] \right\|_2^2 \leq C \left( n^{-\delta(\gamma-2)/4} + n^{-(1-\delta)} \mathbb{E}_0 [Q_n] \right). \quad (6.3.1)$$

**Theorem 69.** *Set  $d \geq 2$ . We consider a random walk in a random i.i.d. product environment. Assume that the walk is transient and satisfies conditions  $(S), (R), (T)$ . Then for all  $0 < \eta < \frac{1}{2}$ , we can find a constant  $0 < C_\eta < \infty$  depending only on  $\eta$  such that for all  $n \geq 1$ ,*

$$\mathbb{E}_0 [Q_n] \leq C_\eta n^{1-\eta}.$$

Taking for example  $\delta = \frac{1}{8}$  and  $\eta = \frac{1}{4}$ , theorems 68 and 69 give us the desired polynomially decaying bound, and thus prove theorem 66.

## 6.4 Proof of theorem 68

For this proof, we need one of the parameters used in the construction of the regeneration times in direction  $v_\star$ . We will then recall rapidly this construction. We define  $\{\theta_n : n \geq 1\}$  the canonical time shift on  $(\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$ , and for  $u \geq 0$ :  $T_u^{v_\star} := \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot v_\star \geq u\}$ .

Choose  $a_0 > 0$  and set  $D^{v_\star} := \min\{n \geq 0 : X_n \cdot v_\star < X_0 \cdot v_\star\}$ . We will use  $a_0 = 1$  in the following for simplicity. We define

$$S_0 := 0, \quad M_0 := X_0 \cdot v_\star,$$

$$S_1 := T_{M_0+1}^{v_\star}, \quad R_1 := D^{v_\star} \circ \theta_{S_1} + S_1, \quad M_1 := \sup\{X_n \cdot v_\star : 0 \leq n \leq R_1\},$$

and then we iterate for all  $k \geq 1$ ,

$$S_{k+1} := T_{M_k+1}^{v_\star}, \quad R_{k+1} := D^{v_\star} \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1},$$

$$M_{k+1} := \sup\{X_n \cdot v_\star : 0 \leq n \leq R_{k+1}\}.$$

We can now define the regeneration times as  $\tau_1 := \min\{k \geq 1 : S_k < \infty, R_k = \infty\}$  and for all  $n \geq 1$   $\tau_{n+1} := \tau_1(X) + \tau_n(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1})$ .

In the following, we will need the constant  $a_0 = 1$  that we chose in this construction.

We now come to prove theorem 68. Recall that  $F$  is a 1-Lipschitz function, and that by assumption (S) the walk  $X$  has its steps bounded by  $r_0 \in \mathbb{N}$ . We define for all  $k$ :

$$\mathcal{G}_k^{(n)} := \sigma\{\omega_x : \|x\|_\infty \leq r_0 n \text{ and } x \cdot v_\star < k\},$$

and

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(n)} &:= \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \middle| \mathcal{G}_1^{(n)} \right] - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \right], \\ \Delta_k^{(n)} &:= \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \middle| \mathcal{G}_k^{(n)} \right] - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \middle| \mathcal{G}_{k-1}^{(n)} \right], \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

The  $\Delta_k^{(n)}$  are martingale increments and, since  $X$  has bounded steps, we can find some constant  $c_0 \in \mathbb{N}$  such that:

$$\mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \middle| \omega \right] - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \right] = \sum_{k=1}^{c_0 n} \Delta_k^{(n)}.$$

By martingale property,

$$\left\| \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \middle| \omega \right] - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \right] \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{c_0 n} \left\| \Delta_k^{(n)} \right\|_2^2,$$

it means we only need to study the  $L^2$  norm of  $\Delta_k^{(n)}$ .

To that end, let  $h_k = T_{k-1}^{v_\star}$  be the hitting time of the level  $k-1$  in direction  $v_\star$  and let  $\hat{\tau}_k$  be the second regeneration time strictly larger than  $h_k$ . We do not take the first regeneration time because we need to make sure that  $(X_{\hat{\tau}_k} - X_{h_k}) \cdot v_\star \geq 1$ . As for all  $i$   $(X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) \cdot v_\star \geq 1$ , taking the second regeneration times ensures this.

Define  $W^{(n,k)}$  as the analogous of  $W^{(n)}$  for the path obtained by concatenation of  $(X_i)_{0 \leq i \leq h_k}$  with  $(X_{\hat{\tau}_k+i} - X_{\hat{\tau}_k})_{i \geq 1}$ . Note that, since  $X$  has bounded steps,

$$\sup_{t \geq 0} \left| W_t^{(n)} - W_t^{(n,k)} \right| \leq \frac{r_0 |\hat{\tau}_k - h_k|}{\sqrt{n}}. \quad (6.4.1)$$

Moreover, as  $(X_{\hat{\tau}_k} - X_{h_k}) \cdot v_\star \geq 1$ ,  $W^{(n,k)}$  is independent of  $\sigma(\omega_x : k-1 \leq x \cdot v_\star < k)$ , and hence

$$\Delta_k^{(n)} = \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}) \middle| \mathcal{G}_k^{(n)} \right] - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}) \middle| \mathcal{G}_{k-1}^{(n)} \right] \quad \text{a.s.} \quad (6.4.2)$$

Next, fix  $M_n > 0$  and partition on the event  $A_k^{(n)} := \{\hat{\tau}_k - h_k \leq M_n\}$  and its complement. Using the Lipschitz property of  $F$  and (6.4.1)–(6.4.2), we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[ |\Delta_k^{(n)}|^2 \right] &\leq \left\| \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)} \middle| \mathcal{G}_k^{(n)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)} \middle| \mathcal{G}_{k-1}^{(n)} \right] \right\|_2^2 \\ &\quad + r_0 \mathbb{E}_0 \left[ \frac{|\hat{\tau}_k - h_k|^2}{n}, \hat{\tau}_k - h_k > M_n \right]. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Now we sum (6.4.3) on  $k$ . To control the sum on  $k$  of the second terms in (6.4.3), let  $\check{\tau}_k$  be the largest regeneration time smaller than  $h_k$  and fix  $\chi \in (2, \gamma)$ . Using  $\hat{\tau}_{c_0 n} \leq \tau_{c_0 n+1}$ , Hölder's inequality and  $(M)_2$ –(T), we write

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{c_0 n} \mathbb{E}_0 \left[ \frac{|\hat{\tau}_k - h_k|^2}{n}, \hat{\tau}_k - h_k > M_n \right] \\ &\leq \frac{M_n^{2-\chi}}{n} \sum_{k=1}^{c_0 n} \mathbb{E}_0 [|\hat{\tau}_k - h_k|^\chi] \\ &\leq \frac{M_n^{2-\chi}}{n} \sum_{k=1}^{c_0 n} \mathbb{E}_0 [|\hat{\tau}_k - \check{\tau}_k|^\chi] \\ &\leq \frac{M_n^{2-\chi}}{n} \sum_{k=1}^{c_0 n} \mathbb{E}_0 [|\tau_{k+1} - \tau_{k-1}|^\chi |X_{\tau_k} - X_{\tau_{k-1}}| \cdot v_\star] \\ &\leq c_0 M_n^{2-\chi} \mathbb{E}_0 [\tau_2^\gamma]^{X/\gamma} \mathbb{E}_0 \left[ \|X_{\tau_1}\|^{\frac{\gamma}{\gamma-\chi}} \right]^{\frac{\gamma-\chi}{\gamma}} \\ &\leq c_0 M_n^{2-\chi} \mathbb{E}_0 [2(\tau_2 - \tau_1)^\gamma + 2\tau_1^\gamma]^{X/\gamma} \mathbb{E}_0 \left[ \|X_{\tau_1}\|^{\frac{\gamma}{\gamma-\chi}} \right]^{\frac{\gamma-\chi}{\gamma}} \\ &\leq C M_n^{2-\chi}. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Set

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_k^{(n)} &:= \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)} \middle| \mathcal{G}_k^{(n)} \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)} \middle| \mathcal{G}_{k-1}^{(n)} \right]. \end{aligned}$$

To control the sum on  $k$  of the first terms in (6.4.3), means to control the sum of the  $\tilde{\Delta}_k^{(n)}$ . We decompose it as follows. Let

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{(n)} &:= \{x : \|x\|_\infty \leq r_0 n \text{ and } x \cdot v_\star < 1\}, \\ \mathcal{H}_k^{(n)} &:= \{x : \|x\|_\infty \leq r_0 n \text{ and } k-1 \leq x \cdot v_\star < k\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Write  $\mathcal{H}_k^{(n)} = \{z_1, \dots, z_N\}$  where  $N := |\mathcal{H}_k^{(n)}|$ , and let

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{k,0}^{(n)} &:= \mathcal{G}_{k-1}^{(n)}, \\ \mathcal{G}_{k,j}^{(n)} &:= \mathcal{G}_{k-1}^{(n)} \vee \sigma\{\omega_{z_i} : i \leq j\}, \quad j = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

We have

$$\tilde{\Delta}_k^{(n)} = \sum_{j=1}^N \tilde{\Delta}_{k,j}^{(n)}$$

where

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{k,j}^{(n)} &:= \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)} \middle| \mathcal{G}_{k,j}^{(n)} \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)} \middle| \mathcal{G}_{k,j-1}^{(n)} \right]\end{aligned}\tag{6.4.5}$$

are still martingale increments. Thus

$$\|\tilde{\Delta}_k^{(n)}\|_2^2 := \sum_{j=1}^N \|\tilde{\Delta}_{k,j}^{(n)}\|_2^2.\tag{6.4.6}$$

Let  $h_z$  be the hitting time of the point  $z \in \mathbb{Z}^d$ . Observe that, on the event  $\{h_{z_j} > n\}$ , the integrands in (6.4.5) do not depend on  $\omega_{z_j}$ . Hence

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{k,j}^{(n)} &= \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)}, h_{z_j} \leq n \middle| \mathcal{G}_{k,j}^{(n)} \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) - F(W^{(n,k)}), A_k^{(n)}, h_{z_j} \leq n \middle| \mathcal{G}_{k,j-1}^{(n)} \right].\end{aligned}$$

By the Lipschitz property of  $F$ , (6.4.1) and the definition of  $A_k^{(n)}$ , we have

$$|\tilde{\Delta}_{k,j}^{(n)}| \leq r_0 \frac{M_n}{\sqrt{n}} \left( \mathbb{P}_0 \left( h_{z_j} \leq n \middle| \mathcal{G}_{k,j}^{(n)} \right) + \mathbb{P}_0 \left( h_{z_j} \leq n \middle| \mathcal{G}_{k,j-1}^{(n)} \right) \right),$$

and thus, by the Cauchy-Schwartz inequality,

$$\|\tilde{\Delta}_{k,j}^{(n)}\|_2^2 \leq 2r_0^2 \frac{M_n^2}{n} \mathbb{E}_0 \left[ \mathbb{P}_0 \left( h_{z_j} \leq n \middle| \omega \right)^2 \right].\tag{6.4.7}$$

From (6.4.3), (6.4.4), (6.4.6) and (6.4.7), we conclude that

$$\begin{aligned}& \left\| \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \middle| \omega \right] - \mathbb{E}_0 \left[ F(W^{(n)}) \right] \right\|_2^2 \\ & \leq Cr_0 M_n^{2-\chi} + 2r_0^2 \frac{M_n^2}{n} \sum_{k=1}^{c_0 n} \sum_{z \in \mathcal{H}_k^{(n)}} \mathbb{E}_0 \left[ \mathbb{P}_0 \left( h_z \leq n \middle| \omega \right)^2 \right] \\ & = Cr_0 M_n^{2-\chi} + 2r_0^2 \frac{M_n^2}{n} \mathbb{E}_0 [Q_n].\end{aligned}$$

where we recall that  $Q_n$  is the number of intersections of two independent copies of the walk  $X$  in the same random environment  $\omega$  up to time  $n$ .

Taking  $\chi = 1 + \gamma/2$  and  $M_n = n^{\delta/2}$ , we obtain theorem 68.

## 6.5 Proof of theorem 69

We want to bound  $\mathbb{E}_0[Q_n]$ , where  $Q_n$  represents the number of intersections of two independent copies of  $X$  in the same random environment  $\omega$  up to time  $n$ . We note  $X$  and  $\tilde{X}$  the two independent walks driven by a common environment, then

$$\mathbb{E}_0[Q_n] = \mathbb{E}_{0,0} \left[ |X_{[0,n)} \cap \tilde{X}_{[0,n)}| \right].$$

In this section, we will reduce to  $v_\star = e_i$  for convenience. This is possible because we will not make use of the  $(M_2)$  hypothesis, and because the (T) hypothesis still holds for all  $e_i$  such that  $v_\star \cdot e_i > 0$  thanks to the following result:

**Proposition 70** (Theorem 2.4 of [11]). *Consider a RWRE in an elliptic i.i.d. environment. Let  $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Then the following are equivalent.*

- (i) *Condition (T) is satisfied in direction  $l$ .*
- (ii) *There is an asymptotic direction  $v$  such that  $l \cdot v > 0$  and for every  $l'$  such that  $l' \cdot v > 0$  one has that (T) is satisfied in direction  $l'$ .*

*Proof.* This result appears as theorem 2.4 of [11]. It is primarily a consequence of theorem 1 of [31], that gives the existence of an asymptotic direction under (T), and of theorem 1.1 of [36]. Theorem 1.1 of [36] is stated in the uniformly elliptic case, but the proof does not depend on it.  $\square$

We define the backtracking times  $\beta$  and  $\tilde{\beta}$  for the walks  $X$  and  $\tilde{X}$  as  $\beta = \inf\{n \geq 1 : X_n \cdot v_\star < X_0 \cdot v_\star\}$  and  $\tilde{\beta} = \inf\{n \geq 1 : \tilde{X}_n \cdot v_\star < \tilde{X}_0 \cdot v_\star\}$ . When the walks are on a common level, their difference lies in the hyperplane  $\mathbb{V}_d = \{z \in \mathbb{Z}^d : z \cdot v_\star = 0\}$ .

### 6.5.1 Construction of joint regeneration times

Lemma 7.1 of [26] gives us that from a common level, there is a uniform positive probability  $\eta$  for simultaneously never backtracking:

**Lemma 71** (Lemma 7.1 of [26]). *Assume  $v_\star$  transience and the bounded step hypothesis (S). Then*

$$\eta = \inf_{x-y \in \mathbb{V}_d} \mathbb{P}_{x,y}(\beta \wedge \tilde{\beta} = \infty) > 0.$$

We now introduce some additional notations. Set  $\gamma_l = \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot v_\star \geq l\}$  and  $\tilde{\gamma}_l = \inf\{n \geq 0 : \tilde{X}_n \cdot v_\star \geq l\}$  the reaching times of level  $l$  in direction  $v_\star$ .

Let  $h$  be the following greatest common divisor:

$$h := \gcd\{l \geq 0 : \mathbb{P}(\exists n : X_n \cdot v_\star = l) > 0\}. \quad (6.5.1)$$

Following the steps of [26], we get the following bound on joint fresh levels of two walks reached without backtracking:

**Lemma 72** (Lemma 7.4 of [26]). *There exists a finite  $l_2$  such that we can find a constant  $c > 0$  satisfying: uniformly over all  $x$  and  $y$  such that  $x \cdot v_\star, y \cdot v_\star \in [0, r_0|v_\star|] \cap h\mathbb{Z}$ ,*

$$\mathbb{P}_{x,y} \left( \exists i : ih \in [0, l_2 h], X_{\gamma_{ih}} \cdot v_\star = \tilde{X}_{\tilde{\gamma}_{ih}} \cdot v_\star = ih, \beta > \gamma_{ih}, \tilde{\beta} > \tilde{\gamma}_{ih} \right) \geq c.$$

We denote by  $\tau_k$  and  $\tilde{\tau}_k$  the regeneration times in direction  $v_\star$  for the walks  $X$  and  $\tilde{X}$  (see [38] for their explicit construction). We will now define the joint regeneration level of the two walks. For this, we cannot use the construction of [26], because it would not give a condition similar to condition (T) for the joint regeneration times, and we need such a condition later in the proof.

We then adapt their method, and begin by defining some new walks. They consist mainly in a time-change of the walks  $X$  and  $\tilde{X}$ , that "stops" the walk that is the most advanced in direction  $v_\star$ , until the other walk outdistances it. Concretely, we construct the walks  $\underline{X}$  and  $\underline{\tilde{X}}$  and the times  $x_k$  and  $\tilde{x}_k$  as follows:  $\underline{X}_0 = X_0$ ,  $\underline{\tilde{X}}_0 = \tilde{X}_0$ ,  $x_0 = \tilde{x}_0 = 0$  and

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k + \mathbb{1}_{\{\max_{i \leq k} (\underline{X}_i \cdot v_\star) \leq \max_{i \leq k} (\underline{\tilde{X}}_i \cdot v_\star)\}} \\ \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{x}_k + \mathbb{1}_{\{\max_{i \leq k} (\underline{X}_i \cdot v_\star) > \max_{i \leq k} (\underline{\tilde{X}}_i \cdot v_\star)\}} \\ \underline{X}_{k+1} &= X_{x_{k+1}} \\ \underline{\tilde{X}}_{k+1} &= \tilde{X}_{\tilde{x}_{k+1}} \end{cases}.$$

Note that by construction, only one of the walks  $\underline{X}$  and  $\underline{\tilde{X}}$  moves at each step: at the  $n$ -th step, only the walk which corresponds to the smaller value between  $\max_{i \leq n} \{\underline{X}_i \cdot v_\star\}$  and  $\max_{i \leq n} \{\underline{\tilde{X}}_i \cdot v_\star\}$  moves.

We can now adapt the construction of [26] to those new walks. Set  $\underline{\gamma}_l = \inf\{n \geq 0 : \underline{X}_n \cdot v_\star \geq l\}$ ,  $\tilde{\underline{\gamma}}_l = \inf\{n \geq 0 : \underline{\tilde{X}}_n \cdot v_\star \geq l\}$ ,  $\underline{\beta} = \inf\{n \geq 1 : \underline{X}_n \cdot v_\star < \underline{X}_0 \cdot v_\star\}$  and  $\tilde{\underline{\beta}} = \inf\{n \geq 1 : \underline{\tilde{X}}_n \cdot v_\star < \underline{\tilde{X}}_0 \cdot v_\star\}$ . We suppose that  $\underline{X}$  and  $\underline{\tilde{X}}$  start on a common level  $\lambda_0 \in h\mathbb{Z}$  (where  $h$  is as in (6.5.1)). We then define

$$J = \begin{cases} \sup\{\underline{X}_i \cdot v_\star, \underline{\tilde{X}}_i \cdot v_\star : i \leq \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}\} + h & \text{if } \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}} < \infty \\ \infty & \text{if } \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}} = \infty \end{cases}$$

and

$$\lambda = \begin{cases} \inf\{l \geq J : \underline{X}_{\underline{\gamma}_l} \cdot v_\star = \underline{\tilde{X}}_{\tilde{\underline{\gamma}}_l} \cdot v_\star = l\} & \text{if } J < \infty \\ \infty & \text{if } J = \infty \end{cases}.$$

In the case  $\lambda < \infty$ ,  $\lambda$  represents the first common fresh level after one backtrack. The case  $\lambda = \infty$  means that neither walk backtracked. We then define  $\lambda_1$  the first common fresh level strictly after  $\lambda_0$ :

$$\lambda_1 := \inf\{l \geq \lambda_0 + h : \underline{X}_{\gamma_l} \cdot v_\star = \tilde{X}_{\tilde{\gamma}_l} \cdot v_\star = l\}.$$

Lemma 72 (which adapts immediately to the walks  $\underline{X}$  and  $\tilde{X}$ ) ensures that  $\lambda_1 < \infty$ .

We then construct  $\lambda_n$  recursively for  $n \geq 2$  as follows: if  $\lambda_{n-1} < +\infty$ , we set

$$\lambda_n := \lambda \circ \theta^{\gamma_{\lambda_{n-1}}, \tilde{\gamma}_{\lambda_{n-1}}}$$

where  $\theta^{m,n}$  represents the shift of sizes  $m$  and  $n$  on the pairs of paths.

For all  $n \geq 1$ , we say there is a joint regeneration at level  $\lambda_n$  if  $\lambda_{n+1} = \infty$ . It gives the following definition of the first joint regeneration level:

$$\Lambda := \sup\{\lambda_n : \lambda_n < \infty\}.$$

By construction, lemmas 71 and 72 also give that  $\Lambda < \infty$  a.s.. It allows to define the joint regeneration times for the walks  $X$  and  $\tilde{X}$ :

$$(\mu_1, \tilde{\mu}_1) = (\gamma_\Lambda, \tilde{\gamma}_\Lambda).$$

We then get recursively the sequence:

$$(\mu_{i+1}, \tilde{\mu}_{i+1}) = (\mu_i, \tilde{\mu}_i) + (\mu_1, \tilde{\mu}_1) \circ \theta^{\mu_i, \tilde{\mu}_i}.$$

**Remark 73.** We could also define the joint regeneration times  $(\mu_k, \tilde{\mu}_k)$  as  $\mu_0 = \tilde{\mu}_0 = 0$  and:

$$(\mu_{k+1}, \tilde{\mu}_{k+1}) := \inf_{n,m} \{(\tau_n, \tilde{\tau}_m) : \tau_n > \mu_k, \tilde{\tau}_m > \tilde{\mu}_k, X_{\tau_n} \cdot v_\star = \tilde{X}_{\tilde{\tau}_m} \cdot v_\star\}, \quad (6.5.2)$$

and the first joint regeneration level as:

$$\Lambda = X_{\mu_1} \cdot v_\star = \tilde{X}_{\tilde{\mu}_1} \cdot v_\star.$$

*Those two definitions are equivalent, the interest of our previous construction by stages being that it will be easier to handle in the proofs. It also appears that the first joint regeneration level corresponds to the first level for which both walks  $X$  and  $\tilde{X}$  hit this level and regenerate.*

We will now show that those joint regeneration times give us a bound similar to condition (T). This will be the aim of the two following lemmas.

**Lemma 74.** *For all  $m, p \geq 1$ , there exists a constant  $0 < C_p < \infty$  depending only on  $p$  such that:*

$$\sup_{x, y \in \mathbb{V}_d} \mathbb{P}_{x, y}(\Lambda > m) \leq C_p m^{-p}.$$

*Proof.* The proof is very similar to the proof of lemma 7.5 in [26]. We first remark that the walks  $\underline{X}$  and  $\tilde{\underline{X}}$  follow exactly the same paths as  $X$  and  $\tilde{X}$ , and therefore  $X_{\gamma_i} = \underline{X}_{\underline{\gamma}_i}$  and  $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}_i} = \tilde{\underline{X}}_{\tilde{\gamma}_i}$  for all  $i$ . It means that we can replace  $X$  and  $\tilde{X}$  by  $\underline{X}$  and  $\tilde{\underline{X}}$  with no modification of the proof.

The only difference remaining is that in [26], they need the regeneration times  $\tau_i$  and  $\tilde{\tau}_i$  to have finite  $p$ -moments (which means they need  $p \leq p_0$ ) to get the bound

$$\mathbb{P}_{z, \tilde{z}} \left( \frac{m}{2n} < M_{\beta \wedge \tilde{\beta}} + h < \infty \right) \leq C \left( \frac{n}{m} \right)^p \quad (6.5.3)$$

for all  $z \cdot v_\star = \tilde{z} \cdot v_\star = 0$ , where  $M_{\beta \wedge \tilde{\beta}} = \sup\{X_i \cdot v_\star : i \leq \beta \wedge \tilde{\beta}\}$ .

We will obtain this bound differently here, for all  $p \geq 1$  and for  $M_{\underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}} = \sup\{\underline{X}_i \cdot v_\star : i \leq \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}\}$ . This is the reason why we had to introduce the walks  $\underline{X}$  and  $\tilde{\underline{X}}$ : on the event  $\underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}} < \infty$ , thanks to our construction, we get

$$\begin{aligned} M_{\underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}} + h &= \sup\{\underline{X}_n \cdot v_\star : n \leq \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}\} + h \\ &\leq C \left( \sup_{0 \leq n \leq \tau_1} \underline{X}_n \cdot v_\star + \sup_{0 \leq n \leq \tilde{\tau}_1} \tilde{\underline{X}}_n \cdot v_\star \right) \\ &\leq C \left( \sup_{0 \leq n \leq \tau_1} \|\underline{X}_n\| + \sup_{0 \leq n \leq \tilde{\tau}_1} \|\tilde{\underline{X}}_n\| \right) \\ &= C \left( \sup_{0 \leq n \leq \tau_1} \|X_n\| + \sup_{0 \leq n \leq \tilde{\tau}_1} \|\tilde{X}_n\| \right). \end{aligned}$$

The first inequality holds because  $|\sup\{\underline{X}_n \cdot v_\star : n \leq \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}\} - \sup\{\tilde{\underline{X}}_n \cdot v_\star : n \leq \underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}}\}| \leq r_0$  by construction. Then if  $\underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}} = \underline{\beta}$ , it means  $\underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}} \leq \tau_1$  and we bound by the first term of the sum, else it means  $\underline{\beta} \wedge \tilde{\underline{\beta}} \leq \tilde{\tau}_1$  and we bound by the second term.

Markov's inequality and condition (T) then give us the equivalent of the bound (6.5.3) for all  $p \geq 1$ . It concludes the proof.  $\square$

**Lemma 75.** *For all  $p \geq 1$ ,*

$$\sup_{y \in \mathbb{V}_d} \mathbb{E}_{0, y} \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\| \right)^p \right] < \infty.$$

*Proof.* Let  $x, y \in \mathbb{V}_d$ . Set  $K$  the integer that satisfies  $\mu_1 = \tau_K$ . By the triangle inequality, we get:

$$\left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\| \right)^p \leq \left( \sum_{k=1}^K \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p.$$

Holder's inequality gives:

$$\left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\| \right)^p \leq K^{p-1} \sum_{k=1}^K \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p.$$

Then

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{0,y} \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\| \right)^p \right] \\ & \leq \mathbb{E}_{0,y} \left[ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{K=j} j^{p-1} \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p \right] \\ & = \sum_{j=1}^{+\infty} j^{p-1} \mathbb{E}_{0,y} \left[ \mathbb{1}_{K=j} \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p \right] \\ & \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j^{p-1} \mathbb{E}_{0,y} [\mathbb{1}_{K=j}^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_0 \left[ \left( \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

where we used Cauchy-Schwarz in the last inequality.

As Holder's inequality also gives

$$\left( \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p \right)^2 \leq j \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^{2p}$$

we get:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[ \left( \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^p \right)^2 \right] & \leq j \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{k=1}^j \left( \sup_{\tau_{k-1} \leq n \leq \tau_k} \|X_n\| \right)^{2p} \right] \\ & \leq C j^2 \mathbb{E}_0 \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \tau_1} \|X_n\| \right)^{2p} \right] \\ & \leq C' j^2 \end{aligned}$$

where  $C' < \infty$  thanks to condition (T) and does not depend on  $y$ .

We then obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{0,y} \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\| \right)^p \right] &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} C j^p \mathbb{E}_{0,y} [\mathbb{1}_{K=j}]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} C j^p \mathbb{P}_{0,y} [K = j]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

As  $\mu_1 = \tau_K$ , we get  $K \leq h\Lambda$ . Lemma 74 then allows us to conclude: for all  $q \geq 1$

$$\mathbb{P}_{0,y} [K = j] \leq \mathbb{P}_{0,y} [h\Lambda \geq j] \leq C_q \left(\frac{j}{h}\right)^{-q},$$

where we recall that the bound is uniform on  $y \in \mathbb{V}_d$ , and

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{0,y} \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\| \right)^p \right] &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} C j^p \left(\frac{j}{h}\right)^{-\frac{q}{2}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} C' j^{p-\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

This sum is finite for  $q$  big enough. It concludes the proof.  $\square$

### 6.5.2 Markovian structure and coupling

We will now show that for  $Y_i := \tilde{X}_{\tilde{\mu}_i} - X_{\mu_i}$ ,  $(Y_i)_{i \geq 1}$  is a Markov process. Then we will construct a coupling to control its transitions.

**Proposition 76.** *Set  $x, y \in \mathbb{V}_d$ . Under  $\mathbb{P}_{x,y}$ , the process  $(Y_i)_{i \geq 1} = (\tilde{X}_{\tilde{\mu}_i} - X_{\mu_i})_{i \geq 1}$  is a Markov chain on  $\mathbb{V}_d$ , with transition probabilities given by:*

$$q(x, y) = \mathbb{P}_{0,x} \left( \tilde{X}_{\tilde{\mu}_1} - X_{\mu_1} = y \mid \beta = \tilde{\beta} = \infty \right).$$

The Markov chain only starts from  $\tilde{X}_{\tilde{\mu}_1} - X_{\mu_1}$ , because we do not know if  $\beta = \tilde{\beta} = \infty$  after  $X_0$  and  $\tilde{X}_0$ .

*Proof.* This proposition is very close from proposition 7.7 in [26]. The proof follows exactly the same steps, as our modification of the regeneration structure preserves the independence property of the regeneration slabs.  $\square$

We now compare  $Y_i$  to a random walk obtained similarly, but with the joint regeneration times of two independent walks in independent environments (instead of in the same environment). We consider a pair of walks  $(X, \bar{X})$  of law  $\mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_z$ , with  $z \in \mathbb{V}_d$ . We denote by  $\beta$  and  $\bar{\beta}$  the backtracking times of  $X$  and  $\bar{X}$ , and we construct the joint regeneration times  $(\rho_i, \bar{\rho}_i)_{i \geq 1}$  in the same manner as we did for  $(\mu_i, \tilde{\mu}_i)_{i \geq 1}$  (the only difference being that  $(X, \tilde{X})$  were evolving in the same environment, whereas  $(X, \bar{X})$  are in independent environments). Now, set  $\bar{Y}_i := \bar{X}_{\bar{\rho}_i} - X_{\rho_i}$ .

**Proposition 77.** *The process  $(\bar{Y}_i)_{i \geq 1} = (\bar{X}_{\bar{\rho}_i} - X_{\rho_i})_{i \geq 1}$  is a Markov chain on  $\mathbb{V}_d$ , and its transition probabilities satisfy:*

$$\begin{aligned} \bar{q}(x, y) &= \mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_x (\bar{X}_{\bar{\rho}_1} - X_{\rho_1} = y | \beta = \bar{\beta} = \infty) \\ &= \mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_0 (\bar{X}_{\bar{\rho}_1} - X_{\rho_1} = y - x | \beta = \bar{\beta} = \infty) \\ &= \bar{q}(0, y - x) \\ &= \bar{q}(0, x - y). \end{aligned}$$

*Proof.* This proposition is similar to proposition 7.8 of [26]. The proof follows exactly the same steps, as our modification of the regeneration structure preserves the independence property of the regeneration slabs.  $\square$

As in lemma 7.9 of [26], this allows to prove that for all  $z, w$  such that  $q(z, w) > 0$ , we also get  $\bar{q}(z, w) > 0$ .

In the following, we will detach the notations  $Y_i$  and  $\bar{Y}_i$  from their definitions in terms of  $X, \tilde{X}, \bar{X}$ . We will then use  $(Y_i)$  and  $(\bar{Y}_i)$  to represent the canonical Markov chains of transition probabilities  $q$  and  $\bar{q}$ . This allow to construct the following coupling:

**Proposition 78.** *The probability transitions  $q(x, y)$  for  $Y$  and  $\bar{q}(x, y)$  for  $\bar{Y}$  can be coupled in such a way that, for all  $x \in \mathbb{V}_d$ ,  $x \neq 0$ , for all  $p \geq 1$*

$$\mathbb{P}_{x,x}(Y_1 \neq \bar{Y}_1) \leq C_p |x|^{-p},$$

where  $C_p$  is a finite positive constant independent of  $x$ .

*Proof.* We proceed as in the proof of proposition 7.10 in [26] and construct a coupling of three walks  $(X, \tilde{X}, \bar{X})$  such that the pair  $(X, \tilde{X})$  has distribution  $\mathbb{P}_{x,y}$  and the pair  $(X, \bar{X})$  has distribution  $\mathbb{P}_x \mathbb{P}_y$ .

For this, we take as before two independent walks  $(X, \tilde{X})$  that evolve in a common environment  $\omega$ . We take another environment  $\bar{\omega}$  independent of  $\omega$ , and construct the walk  $\bar{X}$  as follows. We set  $\bar{X}_0 = \tilde{X}_0$ , then  $\bar{X}$  moves according to the environment  $\bar{\omega}$  on the sites  $\{X_k : 0 \leq k < \infty\}$  and according

to the environment  $\omega$  on all other sites. Furthermore,  $\bar{X}$  is coupled to agree with  $\tilde{X}$  until the time  $T = \inf\{n \geq 0 : \bar{X}_n \in \{X_k : 0 \leq k < \infty\}\}$  when it hits the path of  $X$ .

The details of the construction of this coupling, and the verification that  $X$  and  $\bar{X}$  are independent works exactly as in the proof of proposition 7.10 in [26], we will then omit this part here.

We then construct the joint regeneration times as before:  $(\mu_1, \tilde{\mu}_1)$  for  $(X, \tilde{X})$  and  $(\rho_1, \bar{\rho}_1)$  for  $(X, \bar{X})$ . It allows to define the paths of the walks stopped at their respective joint regeneration times:

$$(\Gamma, \bar{\Gamma}) := \left( (X_{0, \mu_1}, \tilde{X}_{0, \tilde{\mu}_1}), (X_{0, \rho_1}, \bar{X}_{0, \bar{\rho}_1}) \right).$$

Notice that when the sets  $X_{[0, \mu_1 \vee \rho_1)}$  and  $\tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)} \cup \bar{X}_{[0, \bar{\rho}_1)}$  are disjoint, we get by construction that the paths  $\bar{X}_{0, \tilde{\mu}_1 \vee \bar{\rho}_1}$  and  $\tilde{X}_{0, \tilde{\mu}_1 \vee \bar{\rho}_1}$  are identical. This implies  $(\mu_1, \tilde{\mu}_1) = (\rho_1, \bar{\rho}_1)$  and  $(X_{\mu_1}, \tilde{X}_{\tilde{\mu}_1}) = (X_{\rho_1}, \bar{X}_{\bar{\rho}_1})$ .

The following lemma gives us an estimate on this event. This is the moment where our proof will differs substantially from the one of [26].

**Lemma 79.** *For all  $x, y$  such that  $x - y \in \mathbb{V}_d$  and  $x \neq y$ , for all  $p \geq 1$ ,*

$$\mathbb{P}_{x,y} \left( X_{[0, \mu_1 \vee \rho_1)} \cap (\tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)} \cup \bar{X}_{[0, \bar{\rho}_1)}) \neq \emptyset \right) \leq C_p |x - y|^{-p}.$$

*Proof.* We get

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{x,y} \left( X_{[0, \mu_1 \vee \rho_1)} \cap (\tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)} \cup \bar{X}_{[0, \bar{\rho}_1)}) \neq \emptyset \right) \\ & \leq \mathbb{P}_{x,y} \left( S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee S_4 > \frac{|x - y|}{2} \right) \end{aligned}$$

where we define  $S_1 = \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n - x\|$ ,  $S_2 = \sup_{0 \leq n \leq \rho_1} \|X_n - x\|$ ,  $S_3 = \sup_{0 \leq n \leq \tilde{\mu}_1} \|\tilde{X}_n - y\|$  and  $S_4 = \sup_{0 \leq n \leq \bar{\rho}_1} \|\bar{X}_n - y\|$ . Indeed, if the walk  $X$  intersects with  $\tilde{X}$ , it also intersects with  $\bar{X}$  because of the coupling. Such an intersection means that either the walk  $X$  covered more than half the initial distance before  $\mu_1 \vee \rho_1$ , or  $\tilde{X}$  and  $\bar{X}$  did before  $\tilde{\mu}_1$  respectively  $\bar{\rho}_1$ .

Lemma 75, extended to cover the case of  $(\rho_1, \bar{\rho}_1)$ , then give us the  $C_p |x - y|^{-p}$  bound. It concludes the proof of the lemma.  $\square$

This proves that for all  $p \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}_{x,y} (\Gamma \neq \bar{\Gamma}) \leq C_p |x - y|^{-p}.$$

The following of the proof (taking care of the conditioning on no backtracking) works again exactly as in the end of the proof of proposition 7.10 in [26], replacing their particular  $p_0$  by any  $p$ . We will then omit this part here.  $\square$

### 6.5.3 Bound on the number of common points

We now return to the proof of the bound of  $\mathbb{E}[Q_n]$ , where  $Q_n$  represents the number of intersections of two independent copies of  $X$  in the same random environment  $\omega$  up to time  $n$ .

The use of the joint regeneration times allow us to write:

$$\mathbb{E}_{0,0} \left[ |X_{[0,n)} \cap \tilde{X}_{[0,n)}| \right] \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{0,0} \left[ |X_{[\mu_i, \mu_{i+1})} \cap \tilde{X}_{[\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_{i+1})}| \right].$$

The term  $i = 0$  is a finite constant thanks to lemma 75. Indeed, the number of common points is bounded by the number of points  $y$  such that  $\|y\| \leq \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\|$ .

For each  $0 < i < n$ , we use the same decomposition into pairs of paths as in [26]. It gives:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{0,0} \left[ |X_{[\mu_i, \mu_{i+1})} \cap \tilde{X}_{[\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_{i+1})}| \right] \\ &= \sum_{x_1, y_1} \mathbb{P}_{0,0}(X_{\mu_i} = x_1, \tilde{X}_{\tilde{\mu}_i} = y_1) \mathbb{E}_{x_1, y_1} \left[ |X_{[0, \mu_1)} \cap \tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)}| \mid \beta = \tilde{\beta} = \infty \right]. \end{aligned}$$

We can get bounds on this conditional expectation:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{x_1, y_1} \left[ |X_{[0, \mu_1)} \cap \tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)}| \mid \beta = \tilde{\beta} = \infty \right] \\ & \leq \eta^{-1} \mathbb{E}_{x_1, y_1} \left[ |X_{[0, \mu_1)} \cap \tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)}| \right] \\ & \leq C \mathbb{E}_{x_1, y_1} \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n - X_0\| \right)^d \mathbb{1}_{X_{[0, \mu_1)} \cap \tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)} \neq \emptyset} \right] \\ & \leq C \mathbb{E}_{x_1, y_1} \left[ \left( \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n - X_0\| \right)^{2d} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_{x_1, y_1} \left[ X_{[0, \mu_1)} \cap \tilde{X}_{[0, \tilde{\mu}_1)} \neq \emptyset \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C' \left( (1 \vee |x_1 - y_1|)^{-2p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = C' (1 \vee |x_1 - y_1|)^{-p} \\ & = h_p(x_1 - y_1) \end{aligned}$$

where we used successively lemma 71, the bound on the number of common points by the number of points  $y$  such that  $\|y\| \leq \sup_{0 \leq n \leq \mu_1} \|X_n\|$ , Cauchy-Schwarz inequality and lemmas 75 and 79. On the last line, we used the definition:

$$h_p(x) := C' (1 \vee |x|)^{-p}.$$

Inserting this in the precedent equalities gives: for any  $p \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{0,0} \left[ |X_{[\mu_i, \mu_{i+1})} \cap \tilde{X}_{[\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_{i+1})}| \right] &\leq \mathbb{E}_{0,0} \left[ h(\tilde{X}_{\tilde{\mu}_i} - X_{\mu_i}) \right] \\ &= \sum_x \mathbb{P}_{0,0}(\tilde{X}_{\tilde{\mu}_1} - X_{\mu_1} = x) \sum_y q^{i-1}(x, y) h_p(y) \end{aligned}$$

where the last equality is obtained thanks to the Markov property of proposition 76.

We now want to use the following proposition:

**Proposition 80** (Theorem A.1 in [26]). *Let  $\mathbb{S}$  be a subgroup of  $\mathbb{Z}^d$ . Set  $Y = (Y_k)_{k \geq 0}$  be a Markov chain on  $\mathbb{S}$  with transition probabilities  $q(x, y)$ . Set  $\bar{Y} = (\bar{Y}_k)_{k \geq 0}$  be a symmetric random walk on  $\mathbb{S}$  with transition probabilities  $\bar{q}(x, y) = \bar{q}(y, x) = \bar{q}(0, y - x)$ .*

*We make the following assumptions:*

- (A.i) *The walk  $\bar{Y}$  has a finite third moment:  $\mathbb{E}_0(|\bar{Y}_1|^3) < \infty$ .*
- (A.ii) *Set  $U_r := \inf\{n \geq 0 : Y_n \notin [-r, r]^d\}$  the time needed for the Markov chain  $Y$  to exit a cube of size  $2r + 1$ . Then there is a constant  $0 < K < \infty$  such that for all  $r \geq 1$ ,*

$$\sup_{x \in [-r, r]^d} \mathbb{E}_x(U_r) \leq K^r.$$

- (A.iii) *Set  $Y = (Y^1, \dots, Y^d)$ . For every  $i \in \{1, \dots, d\}$ , if the one-dimensional random walk  $\bar{Y}^i$  is degenerate in the sense that  $\bar{q}(0, y) = 0$  for  $y^i \neq 0$ , then so is  $Y^i$  in the sense that  $q(x, y) = 0$  whenever  $x^i \neq y^i$ . It means that any coordinate that can move in the  $Y$  chain somewhere in space can also move in the  $\bar{Y}$  walk.*
- (A.iv) *For all  $x \neq 0$ , we can couple the transition probabilities  $q$  and  $\bar{q}$  to satisfy: for all  $p \geq 1$ ,*

$$\mathbb{P}_{x,x}(Y_1 \neq \bar{Y}_1) \leq C|x|^{-p},$$

*with  $0 < C < \infty$  independent of  $x$ .*

*Now take  $h$  a function on  $\mathbb{S}$  such that for  $p_0 \geq 1$ ,  $0 \leq h(x) \leq C(1 \vee |x|)^{-p_0}$  with  $C$  a finite positive constant.*

*Then there are constants  $0 < C < \infty$  and  $0 < \eta < \frac{1}{2}$  such that for all  $n \geq 1$  and  $z \in \mathbb{S}$ ,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_z(h(Y_k)) = \sum_y h(y) \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_z(Y_k = y) \leq Cn^{1-\eta}.$$

*Furthermore,  $1 - \eta$  can be taken arbitrarily close to  $\frac{1}{2}$  if we take  $p_0$  big enough.*

We will prove that our Markov Chains satisfy assumptions (A.i), (A.ii), (A.iii) and (A.iv) of this theorem. Assumption (A.i) follow from lemma 75, which gives for all  $p$ :  $\mathbb{E}_{0,x}(|\bar{X}_{\bar{\rho}_k}|^p) + \mathbb{E}_{0,x}(|X_{\rho_k}|^p) < \infty$ . It implies  $\mathbb{E}_0(|\bar{Y}_1|^3) < \infty$  as needed. Assumption (A.iii) follow from the fact that for all  $z, w$  such that  $q(z, w) > 0$ , we also get  $\bar{q}(z, w) > 0$ . Assumption (A.iv) is directly deduced from proposition 78.

It only remains to check assumption (A.ii). We proceed as in lemma 7.13 of [26]. Their proof (including their Appendix C) remains unchanged by our new definition of regeneration times.

As  $h_p$  also satisfies the hypothesis of this theorem (for  $p_0 = p$ ), we get constants  $0 < C < \infty$  and  $0 < \eta < \frac{1}{2}$  such that for all  $x \in \mathbb{V}_d$  and  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_y q^{i-1}(x, y) h_p(y) \leq C n^{1-\eta}.$$

The closeness of  $1 - \eta$  depends of the value of  $p$  (if it is high enough).

Taking this back to the previous inequalities, we finally get: for all  $n, p \geq 1$ , we get constants  $0 < C < \infty$  and  $0 < \eta < \frac{1}{2}$  such that

$$\mathbb{E}[Q_n] \leq C n^{1-\eta}.$$

As this result is true for any  $p \geq 1$ , the constant  $1 - \eta$  can be made as close to  $\frac{1}{2}$  as wanted.

It concludes the proof of theorem 69.

---

## Bibliographie

---

- [1] O. Angel, N. Crawford, and G. Kozma. Localization for linearly edge reinforced random walks. *Preprint*, 2012.
- [2] G. Atkinson. Recurrence of co-cycles and random walks. *J. London Math. Soc. (2)*, 13(3) :486–488, 1976.
- [3] N. Berger, A. Drewitz, and A. F. Ramírez. Effective polynomial ballisticity conditions for random walk in random environment. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2013.
- [4] N. Berger and O. Zeitouni. A quenched invariance principle for certain ballistic random walks in i.i.d. environments. In *In and out of equilibrium. 2*, volume 60 of *Progr. Probab.*, pages 137–160. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [5] E. Bolthausen and A.-S. Sznitman. On the static and dynamic points of view for certain random walks in random environment. *Methods Appl. Anal.*, 9(3) :345–375, 2002. Special issue dedicated to Daniel W. Stroock and Srinivasa S. R. Varadhan on the occasion of their 60th birthday.
- [6] E. Bolthausen and A.-S. Sznitman. *Ten lectures on random media*, volume 32 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [7] E. Bolthausen and O. Zeitouni. Multiscale analysis of exit distributions for random walks in random environments. *Probab. Theory Related Fields*, 138(3-4) :581–645, 2007.
- [8] É. Bouchet. Sub-ballistic random walk in Dirichlet environment. *Electron. J. Probab.*, 18 :no. 58, 25, 2013.

- [9] É. Bouchet, A. F. Ramírez, and C. Sabot. Sharp ellipticity conditions for ballistic behavior of random walks in random environment. *Preprint*, 2013.
- [10] É. Bouchet, C. Sabot, and R. S. dos Santos. Quenched central limit theorem for ballistic RWRE : sharp integrability condition. *Preprint*, 2014.
- [11] D. Campos and A. F. Ramírez. Ellipticity criteria for ballistic behavior of random walks in random environment. *Probability Theory and Related Fields*, pages 1–63, 2013.
- [12] A. A. Chernov. Reduplication of a multicomponent chain by the mechanism of "lightning". *Biophysica*, 12 :297–301, 1967.
- [13] D. Coppersmith and P. Diaconis. Random walks with reinforcement. *Unpublished manuscript*, 1986.
- [14] R. Durrett. *Probability : theory and examples*. Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996.
- [15] N. Enriquez and C. Sabot. Edge oriented reinforced random walks and RWRE. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :941–946, 2002.
- [16] N. Enriquez and C. Sabot. Random walks in a Dirichlet environment. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 31, 802–817, 2006.
- [17] S. A. Kalikow. Generalized random walk in a random environment. *Ann. Probab.*, 9(5) :753–768, 1981.
- [18] M. S. Keane and S. W. W. Rolles. Tubular recurrence. *Acta Math. Hungar.*, 97(3) :207–221, 2002.
- [19] H. Kesten, M. V. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. *Compositio Math.*, 30 :145–168, 1975.
- [20] U. Krengel. *Ergodic theorems*, volume 6 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985. With a supplement by Antoine Brunel.
- [21] R. Lyons and Y. Peres. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press. In preparation, 2013. Current version available at <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/>.
- [22] F. Merkl and S. W. W. Rolles. Recurrence of edge-reinforced random walk on a two-dimensional graph. *Ann. Probab.*, 37(5) :1679–1714, 2009.
- [23] K. Pearson. The Problem of the Random Walk. *Nature*, 72(1865) :294, 1905.
- [24] R. Pemantle. Phase transition in reinforced random walk and RWRE on trees. *Ann. Probab.*, 16(3) :1229–1241, 1988.

- [25] G. Pólya. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Math. Ann.*, 84(1-2) :149–160, 1921.
- [26] F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen. Almost sure functional central limit theorem for ballistic random walk in random environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(2) :373–420, 2009.
- [27] C. Sabot. Random walks in random Dirichlet environment are transient in dimension  $d \geq 3$ . *Probab. Theory Related Fields*, 151(1-2) :297–317, 2011.
- [28] C. Sabot. Random Dirichlet environment viewed from the particle in dimension  $d \geq 3$ . *Ann. Probab.*, 41(2) :722–743, 2013.
- [29] C. Sabot and P. Tarres. Edge-reinforced random walk, vertex-reinforced jump process and the supersymmetric hyperbolic sigma model. *Accepted in Journal of the European Math. Society*.
- [30] C. Sabot and L. Tournier. Reversed Dirichlet environment and directional transience of random walks in Dirichlet environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(1) :1–8, 2011.
- [31] F. Simenhaus. Asymptotic direction for random walks in random environments. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 43(6) :751–761, 2007.
- [32] Y. G. Sinaï. The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 27(2) :247–258, 1982.
- [33] F. Solomon. Random walks in a random environment. *Ann. Probability*, 3 :1–31, 1975.
- [34] A.-S. Sznitman. Slowdown estimates and central limit theorem for random walks in random environment. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2(2) :93–143, 2000.
- [35] A.-S. Sznitman. On a class of transient random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(2) :724–765, 2001.
- [36] A.-S. Sznitman. An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 122(4) :509–544, 2002.
- [37] A.-S. Sznitman and O. Zeitouni. An invariance principle for isotropic diffusions in random environment. *Invent. Math.*, 164(3) :455–567, 2006.
- [38] A.-S. Sznitman and M. Zerner. A law of large numbers for random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 27(4) :1851–1869, 1999.
- [39] P. Tarrès. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbb{Z}$  eventually gets stuck on five points. *Ann. Probab.*, 32(3B) :2650–2701, 2004.

- [40] P. Tarrès. Localization of reinforced random walks. *Preprint*, 2011.
- [41] D. E. Temkin. One-dimensional random walks in a two-component chain. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 206 :27–30, 1972.
- [42] B. Tóth. Self-interacting random motions—a survey. In *Random walks (Budapest, 1998)*, volume 9 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 349–384. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.
- [43] B. Tóth and W. Werner. The true self-repelling motion. *Probab. Theory Related Fields*, 111(3) :375–452, 1998.
- [44] L. Tournier. Asymptotic direction of random walks in dirichlet environment. *Accepted in Annales de l’Institut Henri Poincaré - Probab. Stat.*
- [45] L. Tournier. Integrability of exit times and ballisticity for random walks in Dirichlet environment. *Electron. J. Probab.*, 14 :no. 16, 431–451, 2009.
- [46] S. S. Wilks. *Mathematical statistics*. A Wiley Publication in Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.
- [47] O. Zeitouni. Random walks in random environment. In *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1837 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–312. Springer, Berlin, 2004.
- [48] M. P. W. Zerner. A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment. *Electron. Comm. Probab.*, 7 :191–197, 2002.
- [49] M. P. W. Zerner. The zero-one law for planar random walks in i.i.d. random environments revisited. *Electron. Comm. Probab.*, 12 :326–335, 2007.
- [50] M. P. W. Zerner and F. Merkl. A zero-one law for planar random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(4) :1716–1732, 2001.