



**HAL**  
open science

## Groupe de Brauer des espaces homogènes à stabilisateur non connexe et applications arithmétiques

Giancarlo Lucchini Arteche

► **To cite this version:**

Giancarlo Lucchini Arteche. Groupe de Brauer des espaces homogènes à stabilisateur non connexe et applications arithmétiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112207 . tel-01077808

**HAL Id: tel-01077808**

**<https://theses.hal.science/tel-01077808>**

Submitted on 27 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

par

Giancarlo LUCCHINI ARTECHE

Spécialité : Mathématiques

École doctorale : 142 – Mathématiques de la région Paris-Sud

## Groupe de Brauer des espaces homogènes à stabilisateur non connexe et applications arithmétiques

Soutenue le 29 septembre 2014 devant la Commission d'examen:

- |                               |                      |
|-------------------------------|----------------------|
| M. Michel BRION               | (Examineur)          |
| M. Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE | (Président du jury)  |
| M. Philippe GILLE             | (Rapporteur)         |
| M. David HARARI               | (Directeur de thèse) |
| M. Boris KUNYAVSKIĬ           | (Rapporteur)         |
| M. Jean-Pierre TIGNOL         | (Examineur)          |



Thèse préparée au  
**Département de Mathématiques d'Orsay**  
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425  
Université Paris-Sud 11  
91 405 Orsay CEDEX

## Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse au groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes à stabilisateur non connexe et à ses applications arithmétiques. On développe notamment différentes formules de nature algébrique et/ou arithmétique permettant de calculer explicitement, tant sur un corps fini que sur un corps de caractéristique 0, la partie algébrique du groupe de Brauer non ramifié d'un espace homogène  $G \backslash G'$  sous un groupe linéaire  $G'$  semi-simple simplement connexe à stabilisateur fini  $G$ , le tout en donnant des exemples de calculs que l'on peut faire avec ces formules. Pour ce faire, on démontre au préalable (à l'aide d'un théorème de Gabber sur les altérations) un résultat décrivant la partie de torsion première à  $p$  du groupe de Brauer non ramifié d'une variété  $V$  lisse et géométriquement intègre sur un corps fini ou sur un corps global de caractéristique  $p$  au moyen de l'évaluation des éléments de  $\text{Br } V$  sur ses points locaux. Les formules pour un stabilisateur fini sont ensuite généralisées au cas d'un stabilisateur  $G$  *quelconque* via une réduction de la cohomologie galoisienne du groupe  $G$  à celle d'un certain sous-quotient fini.

Enfin, pour  $K$  un corps global et  $G$  un  $K$ -groupe fini résoluble, on démontre sous certaines hypothèses sur une extension déployant  $G$  que l'espace homogène  $V := G \backslash G'$  avec  $G'$  un  $K$ -groupe semi-simple simplement connexe vérifie l'approximation faible (ces hypothèses assurant la nullité du groupe de Brauer non ramifié algébrique). On utilise une version plus précise de ce résultat pour démontrer ensuite le principe de Hasse pour des espaces homogènes  $X$  sous un  $K$ -groupe  $G'$  semi-simple simplement connexe à stabilisateur géométrique  $\bar{G}$  fini et résoluble, sous certaines hypothèses sur le  $K$ -lien  $(\bar{G}, \kappa)$  défini par  $X$ .

**Mots-clefs** : Groupe de Brauer, espaces homogènes, cohomologie galoisienne, groupes finis, approximation faible, principe de Hasse.

---

## THE BRAUER GROUP OF HOMOGENEOUS SPACES WITH NON CONNECTED STABILIZER AND ARITHMETICAL APPLICATIONS

### Abstract

This thesis studies the unramified Brauer group of homogeneous spaces with non connected stabilizer and its arithmetic applications. In particular, we develop different formulas of algebraic and/or arithmetic nature allowing an explicit calculation, both over a finite field and over a field of characteristic 0, of the algebraic part of the unramified Brauer group of a homogeneous space  $G \backslash G'$  under a semisimple simply connected linear group  $G'$  with finite stabilizer  $G$ . We also give examples of the calculations that can be done with these formulas. For achieving this goal, we prove beforehand (using a theorem of Gabber on alterations) a result describing the prime-to- $p$  torsion part of the unramified Brauer group of a smooth and geometrically integral variety  $V$  over a global field of characteristic  $p$  or over a finite field by evaluating the elements of  $\text{Br } V$  at its local points. The formulas for finite stabilizers are later generalised to the case where the stabilizer  $G$  is *any* linear algebraic group using a reduction of the Galois cohomology of the group  $G$  to that of a certain finite subquotient.

Finally, for a global field  $K$  and a finite solvable  $K$ -group  $G$ , we show under certain hypotheses concerning the extension splitting  $G$  that the homogeneous space  $V := G \backslash G'$  with  $G'$  a semi-simple simply connected  $K$ -group has the weak approximation property (the hypotheses ensuring the triviality of the unramified algebraic Brauer group). We use then a more precise version of this result to prove the Hasse principle for homogeneous spaces  $X$  under a semi-simple simply connected  $K$ -group  $G'$  with finite solvable geometric stabilizer  $\bar{G}$ , under certain hypotheses concerning the  $K$ -kernel (or  $K$ -lien)  $(\bar{G}, \kappa)$  defined by  $X$ .

**Keywords** : Brauer group, homogeneous spaces, Galois cohomology, finite groups, weak approximation, Hasse principle.



## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier David Harari, mon directeur, sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Il est remarquable qu'il soit toujours arrivé à se donner le temps de discuter avec moi tout en faisant des tas de démarches administratives. Et cela sans compter le temps qu'il dédie aux autres doctorants (en tant que directeur de l'école doctorale) ainsi qu'à sa propre recherche. Pendant ces trois ans (et demi, si l'on compte le M2), il m'a appris à faire de la recherche par moi-même et à rédiger mes idées et résultats comme il se doit, en particulier quand il ne comprenait pas grand chose à ce que je lui racontais! (Ce qui est probablement plus ma faute que la sienne.) Il mérite toute mon admiration et j'espère en particulier d'être capable un jour de gérer mon temps aussi bien que lui.

Qu'ils soient remerciés aussi mes deux rapporteurs de thèse, Boris Kunyavskiï et Philippe Gille, pour l'immense travail qu'ils ont effectué en lisant en détail les plus de 100 pages qui suivent. Ils ont encouragé ma recherche depuis le début en s'intéressant à chaque texte qui en est issu et en les commentant de façon très juste. Philippe Gille a notamment été d'une aide précieuse dans la rédaction de mon quatrième article (le chapitre 3 de ce texte).

Je remercie ensuite les autres membres du jury, Jean-Louis Colliot-Thélène, Michel Brion et Jean-Pierre Tignol, pour être présents le jour de ma soutenance. Merci en particulier aux deux derniers d'être venus de leurs villes respectives rien que pour cet événement. D'autre part, Jean-Louis Colliot-Thélène mérite toute ma gratitude pour plusieurs discussions fort intéressantes qu'on a eu pendant mon séjour à Orsay. Sans ses idées, pas mal de mes résultats auraient pris un temps infiniment plus grand à être trouvés (et prouvés).

Merci aussi à tous les autres chercheurs qui se sont intéressés, soit-il juste un peu, à ma recherche. Je pense notamment à Cyril Demarche et Mathieu Florence, excellents organisateurs du séminaire Variétés Rationnelles (que je suis religieusement), mais aussi à Alena Pirutka, Olivier Wittenberg, Cristián González, Mikhail Borovoi et Alexei Skorobogatov. Cyril m'a notamment donné la clé pour plusieurs résultats de cette thèse et Olivier a été l'un des premiers à me suggérer la possibilité de travailler avec David pour ma thèse. Je les remercie particulièrement.

À Orsay il y a plein d'autres gens que je me dois de remercier. Commençons par Valérie Lavigne, qui a toujours su répondre de façon claire, précise et surtout rapide à tout problème ou démarche administrative qui s'est présentée depuis mon entrée en M2 il y a cinq ans. Il y a aussi les gens avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner pendant mes années de monitorat. Je pense notamment à Laurent Clozel, Pierre Lorenzon et María Paula Gómez. Enfin, il y a bien sûr les doctorants, ces personnes avec qui on partage la plupart du temps et sans lesquelles ces trois ans de thèse auraient été insupportables. Pour toutes les pauses cafés, déjeuners et bières post-boulot partagées, merci à Arthur, Simon, Lucie, Olivier (avec Cyrielle), Tristan, Clément, Vincent, Corentin, Ramon, Diego, Arno, Martin et tant d'autres que j'oublie...

Je me permets maintenant de remercier aussi des gens qui m'ont accompagné d'une façon ou d'une autre pendant mon séjour en France (qui compte déjà six ans!). Merci par exemple aux personnes qui, comme moi, se sont toujours intéressées à la vulgarisation des mathématiques, et

que j'ai eu le plaisir de cotoyer, que ce soit au congrès Math en Jeans, au TFJM<sup>2</sup>, ou à Parimaths (anciennement le club de maths d'Orsay). Je pense notamment à Matthieu, Joon, Guilhem, Roxane, Igor, Bernardo, Pierre-Antoine et Vincent. Mais il y en a certainement d'autres...

Merci aussi à la Fondation Cartier pour l'art contemporain, avec qui j'ai eu l'honneur et le plaisir d'organiser l'exposition *Mathématiques, un dépaysement soudain* juste avant le début de ma thèse. Merci en particulier aux protagonistes : Jean-Pierre Bourguignon, Cédric Villani, Don Zagier, Misha Gromov, Nicole El Karoui, Alain Connes, Sir Michael Atiyah, Pierre-Yves Oudeyer, Jean-Michel Alberola, David Lynch, Takeshi Kitano, Hiroshi Sugimoto, Patti Smith, Beatriz Milhazes, Raymond Depardon et Claudine Nougaret. Et merci bien évidemment à toute l'équipe (actuelle et d'alors) : Hervé, Michel, Thomas, Adeline, Nolwen, Pierre-Edouard, David ( $\times 2$ ), Marie, Lucile, Camille ( $\times 2$ ), Daphné, Pauline, Sophie, Ursula, Isabelle ( $\times 2$ ), Vania, Matthieu, Emma, Sonia, Grazia, Leanne, Corinne, Alanna, Zoé, Fabienne, Aideen, Ronnie, Mélanie et j'en oublie certainement encore... Vous avez certainement retardé un peu ma thèse (et alors vous devriez vous en excuser auprès de mon directeur), mais c'était un tout petit prix à payer à côté de l'énorme aventure qu'on a vécue ensemble.

Un énorme merci par ailleurs à Pierre Pansu, qui a été celui qui a mentionné mon nom à la Fondation Cartier. Mais sans se contenter de cela, il a toujours veillé à ce que mon séjour en France soit plus agréable (que ce soit au niveau du logement, du travail et que sais-je d'autre). Merci infiniment d'ailleurs à Frédéric Paulin et Laurence Vincent pour avoir joué aussi ce rôle de parent adoptif pendant mes premières années en France.

Avant de conclure, on ne peut pas oublier les différentes amitiés qui sont issues de ces années et qui m'ont aidé pendant mon temps libre à oublier complètement les maths... Enfin, pas tout à fait car il y en a plein qui sont bien des matheux, comme Giovanni, Javier, Lorenzo, Archibald, Gwenaël, Tatiana, Miquel et Li (et plein de doctorants d'Orsay, bien entendu). Mais il y en a aussi des non matheux, comme Mélanie, Jonathan, Noémie, Myriam, Abdel, Carlos, Mihai, Sassan, Michael et Marta. Et bien sûr, last but not the least, ma petite communauté latino-américaine (avec des intrus!) : Carolina, Quelly, Daniel, Lorena, Luz, Juan Carlos, Florencia, Andrés, María, Jonas, Fátima, Federico, Juan et Valentina (avec Ludo). Merci infiniment à vous tous pour votre compagnie!

Merci enfin aux deux chiliens responsables de mon arrivée ici en France : Jorge Soto et Nicolás Libedinsky. Sans leur intervention, qui sait ce qu'il serait advenu de ce jeune mathématicien enthousiaste qui pourtant ne faisait que la fête tous les jours pendant ses années de licence au campus de Juan Gómez Millas.

Mes derniers mots en français sont pour celle qui m'accompagne tous les jours : Carolina, l'amour de ma vie, que j'ai dû aller chercher au Chili et qui est restée avec moi depuis plus de quatre ans déjà. Mille fois merci pour ton amour inconditionnel. J'espère que ces quatre ans deviendront quarante et bien plus, que ce soit en France, au Chili, ou n'importe où dans le monde.

Por último, cambio de lengua para agradecer en español a mi familia entera, pero particularmente a mis viejos, Leo y Keka, quienes nunca dudaron en apoyarme en cada una de las decisiones importantes de mi vida, aunque fuese a regañadientes (es más, eso hace su apoyo aún más apreciable).

Muchas gracias a todos, por todo ☺.

Et pour remercier encore plus les courageux non-matheux (et matheux d'autres domaines) qui vont se taper une heure d'exposé incompréhensible, voici un petit jeu pour vous entretenir. Tous les prénoms dans les paragraphes ci-dessus sont à trouver (à l'exception des profs... un peu de respect quand-même!)

T	N	E	C	N	I	V	D	R	A	U	O	D	E	E	R	R	E	I	P	E
N	N	L	A	A	D	E	L	I	N	E	H	O	F	A	B	I	E	N	N	E
J	O	L	I	V	I	E	R	D	I	S	A	B	E	L	L	E	I	I	A	O
A	L	E	N	A	E	A	E	O	T	A	P	E	D	E	V	F	O	W	L	D
I	W	B	C	K	M	E	L	A	N	I	E	C	F	G	A	T	U	K	A	R
L	E	U	Q	I	M	O	L	Q	E	N	R	O	X	A	N	E	J	L	N	A
E	N	Y	N	Z	A	N	E	P	L	O	I	B	Q	A	I	D	E	E	N	N
A	H	C	A	R	O	L	I	N	A	S	G	E	E	H	A	M	E	A	A	R
N	L	R	Q	O	A	O	R	R	V	C	O	R	T	N	Y	A	E	A	I	E
E	U	W	J	L	I	R	Y	C	T	L	R	T	P	O	S	D	N	Z	Z	B
W	C	L	A	O	C	E	C	S	U	E	A	I	R	J	L	M	I	H	A	I
G	I	O	V	A	N	N	I	E	I	M	E	O	N	A	A	M	L	E	R	M
X	L	R	I	S	E	A	V	P	I	E	A	G	B	R	N	I	U	N	G	J
L	E	E	E	R	R	U	S	T	V	N	W	I	T	X	K	C	A	K	J	O
E	T	N	R	N	O	B	A	T	S	T	H	I	R	E	N	H	P	A	D	R
H	U	Z	O	X	L	F	C	L	E	C	N	D	E	Y	T	A	F	L	I	G
C	Y	O	S	V	F	E	D	E	R	I	C	O	L	A	M	E	G	A	M	E
I	O	S	I	Q	N	K	I	A	D	E	D	L	N	R	V	L	G	N	H	L
M	S	A	M	O	H	T	J	N	N	L	E	O	Z	T	E	I	R	A	M	S
A	O	S	O	L	R	A	C	N	A	U	J	H	U	H	R	D	F	I	L	A
T	P	S	N	Z	A	L	I	E	Q	D	R	C	L	U	C	I	E	T	E	L
H	H	A	X	A	M	R	K	Y	I	O	H	B	E	R	A	V	S	A	D	O
I	I	N	P	C	O	R	E	N	T	I	N	G	T	U	R	A	D	T	B	C
E	E	Q	P	C	N	M	K	C	A	M	I	L	L	E	Z	D	C	B	A	I
U	R	S	U	L	A	N	A	T	R	A	M	E	H	L	I	U	G	E	A	N



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
I Contexte arithmétique : principe de Hasse, approximation faible et obstruction de Brauer-Manin . . . . .	11
II Le groupe de Brauer non ramifié et autres variantes . . . . .	15
III Espaces homogènes et leurs propriétés arithmétiques . . . . .	19
IV Le cas des stabilisateurs non connexes . . . . .	23
V Déroulé de la thèse . . . . .	25
<b>1 Groupe de Brauer non ramifié en caractéristique positive</b>	<b>28</b>
1.1 Introduction . . . . .	28
1.2 Résultats principaux . . . . .	29
1.3 Résultats préliminaires . . . . .	30
1.4 Démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4 . . . . .	39
1.A Appendice : “Rigidité” du groupe de Brauer non ramifié algébrique . . . . .	43
<b>2 Groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes : le cas des stabilisateurs finis</b>	<b>47</b>
2.1 Introduction . . . . .	47
2.2 Notations et conventions . . . . .	48
2.3 Préliminaires . . . . .	50
2.4 Une formule cohomologique sur un corps fini . . . . .	51
2.5 Une formule algébrique sur un corps fini . . . . .	54
2.6 Une formule algébrique sur un corps de caractéristique 0 . . . . .	61
2.7 Une formule cohomologique sur un corps local . . . . .	69
2.8 Application des résultats : calcul explicite de certains $\text{Br}_{\text{nr,al}}$ . . . . .	73

2.9	Application des résultats : obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible	81
<b>3</b>	<b>Groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes : le cas des stabilisateurs quelconques</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction	85
3.2	Notations et rappels préliminaires	88
3.3	Formules sur un corps fini	89
3.4	Formule sur un corps de caractéristique 0	92
3.5	Existence de sous-groupes finis	99
3.6	Application : obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible	104
3.A	Appendice : Une remarque de Colliot-Thélène	107
<b>4</b>	<b>Approximation faible et principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble</b>	<b>110</b>
4.1	Introduction	110
4.2	Préliminaires	113
4.3	Approximation faible pour des stabilisateurs résolubles	117
4.4	Principe de Hasse pour des stabilisateurs résolubles	122
	<b>Bibliographie</b>	<b>126</b>

# Introduction

## I Contexte arithmétique : principe de Hasse, approximation faible et obstruction de Brauer-Manin

Soit  $k$  un corps global, i.e. une extension finie de  $\mathbb{Q}$  ou le corps de fonctions d'une courbe  $C$  sur un corps fini. Soit  $\Omega_k$  l'ensemble des places de  $k$  et soit  $k_v$  le complété de  $k$  par rapport à une place  $v \in \Omega_k$ . On rappelle que, dans le cas où  $k = \mathbb{Q}$ , ces places correspondent aux nombres premiers et à la place réelle, notée souvent  $v = \infty$ , et les complétés respectifs sont les corps  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p$  d'une part et le corps des nombres réels  $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$  d'autre part.<sup>1</sup> Soit enfin  $V$  une variété algébrique définie sur  $k$ , i.e. un  $k$ -schéma séparé de type fini, ou moins formellement une variété définie par des équations polynomiales. Une des questions les plus naturelles que l'on peut se poser concernant une telle variété est si elle a ou pas des points rationnels, i.e. si les équations qui la définissent admettent des solutions sur le corps  $k$  ou pas. La question en soi est très difficile en général, ce qui a fait que l'on se concentre d'abord sur la question plus simple de savoir si, pour chaque place  $v$  de  $k$ , la variété  $V$  admet des points sur le complété  $k_v$ . Le fait que ces corps soient complets par rapport à une valeur absolue permet l'application d'outils issus de l'analyse pour trancher la question de l'existence de solutions aux équations de façon algorithmique, donc en particulier calculable en temps fini.

Il est évident que l'existence de  $k_v$ -points sur  $V$  pour tous les complétés de  $k$  est une condition nécessaire pour l'existence d'un point rationnel. Il est alors naturel de se demander si cette condition est aussi suffisante. Une famille de variétés pour laquelle la réponse à cette question est positive est dite vérifier le *principe de Hasse*, en l'honneur du mathématicien allemand qui démontra dans sa thèse de 1921 la validité de ce principe pour les hypersurfaces quadratiques sur un corps de nombres (le même résultat avait par ailleurs déjà été obtenu par Minkowski dans le cas particulier où  $k = \mathbb{Q}$  dans les années 1890, cf. [Ser70, IV.§3.2]). Plus formellement, on a :

**Définition 0.1.** Soit  $\mathcal{F}$  une famille de variétés algébriques sur  $k$ . On dit que le *principe de Hasse* est valable pour  $\mathcal{F}$  si

$$\prod_{v \in \Omega_k} V(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow V(k) \neq \emptyset, \quad \forall V \in \mathcal{F}.$$

Supposons maintenant que l'on se donne une variété  $V$  pour laquelle on a déjà trouvé des points rationnels. Une deuxième question intéressante à se poser est celle de la distribution des

---

1. Dans le cadre plus général d'un corps de nombres, ces complétés sont des extensions finies des précédents et, dans le cas des corps globaux de caractéristique positive, ces complétés s'obtiennent en prenant le corps des fractions du complété de l'anneau local par rapport à son idéal maximal en chaque point de la courbe  $C$ .

points rationnels par rapport aux points dans les complétés. Cette question est motivée par le cas particulier de la droite affine  $\mathbb{A}_k^1$ , pour laquelle on sait que l'ensemble des  $k$ -points est dense dans celui des  $k_v$ -points pour la topologie naturelle induite par le corps  $k_v$ . On a mieux encore : pour tout ensemble fini  $S$  de places  $v$  de  $k$ , l'ensemble des  $k$ -points est dense dans le produit des ensembles des  $k_v$ -points pour  $v \in S$  (cf. [Cas67, §6]). Ceci revient à dire que, pour toute famille  $(x_v)_{v \in S}$  de  $k_v$ -points de la droite, il existe un point rationnel  $x$  qui est aussi proche que l'on veut de *chacun* des points  $x_v$  en même temps. En général, une variété  $V$  vérifiant cette propriété est dite vérifier l'*approximation faible*. Encore une fois, plus formellement :

**Définition 0.2.** Soit  $V$  une variété algébrique sur  $k$  telle que  $V(k) \neq \emptyset$ . On dit que  $V$  vérifie l'approximation faible si, pour tout ensemble fini  $S \subset \Omega_k$ , le plongement diagonal

$$V(k) \hookrightarrow \prod_{v \in S} V(k_v),$$

est à image dense, l'ensemble de droite étant muni de la topologie produit et les ensembles  $V(k_v)$  de la topologie  $v$ -adique. On remarque qu'il est équivalent de dire que le plongement diagonal

$$V(k) \hookrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} V(k_v),$$

est à image dense.

Il est bien connu depuis plus de 80 ans qu'il existe des variétés ne vérifiant pas le principe de Hasse (l'exemple le plus classique étant donné par Selmer dans [Sel51] et correspondant à la courbe projective définie par l'équation homogène  $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ ), ainsi que des variétés ayant des  $k$ -points mais ne vérifiant pas l'approximation faible. La nouvelle question à se poser à ce sujet est donc bien entendu la raison de ces défauts, i.e. la recherche d'*obstructions* à ces propriétés dépendant de la nature des variétés que l'on étudie. Une telle obstruction de nature très générale a été trouvée par Manin en 1970 (cf. [Man71]) et est connue aujourd'hui comme l'*obstruction de Brauer-Manin* car elle utilise le groupe de Brauer de la variété  $V$  en question.

On rappelle que le groupe de Brauer d'un corps  $k$  est défini via les  $k$ -algèbres centrales simples et classifie les  $k$ -algèbres à division à centre  $k$ . La notion d'algèbre centrale simple se généralise à celle d'algèbre d'Azumaya pour les anneaux locaux et celle-ci permet de définir le groupe de Brauer d'un anneau local de façon analogue à celui des corps. À partir de cette généralisation, Grothendieck a pu définir la notion de faisceau d'algèbres d'Azumaya pour un  $k$ -schéma  $V$ , pour ensuite définir le *groupe de Brauer de  $V$* , noté aujourd'hui  $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}V$ , de façon analogue (cf. [Gro68a]).

D'autre part, il est bien connu en cohomologie galoisienne que, pour un corps  $k$  donné, on a un isomorphisme canonique de groupes  $\mathrm{Br} k \rightarrow H^2(k, \mathbb{G}_m)$ . La cohomologie étale étant la généralisation naturelle de la cohomologie galoisienne au contexte des schémas, il est naturel aussi de vouloir définir le groupe de Brauer d'une variété comme le groupe  $H_{\mathrm{ét}}^2(V, \mathbb{G}_m)$ . C'est en fait le sous-groupe de torsion de ce dernier qui a reçu finalement le nom de *groupe de Brauer cohomologique* de  $V$  et la notation  $\mathrm{Br} V$ . Il est connu aujourd'hui que  $H_{\mathrm{ét}}^2(V, \mathbb{G}_m)$  contient toujours le groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}V$  comme un sous-groupe et, ce dernier étant toujours de torsion, on a en fait  $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}V \subset \mathrm{Br} V$ . Cette dernière inclusion est par ailleurs une égalité dans le cas des variétés quasi-projectives sur un corps (cf. [dJ13]), et encore une égalité avec le groupe  $H_{\mathrm{ét}}^2(V, \mathbb{G}_m)$  tout

entier lorsque  $V$  est régulière car dans ce cas  $H_{\text{ét}}^2(V, \mathbb{G}_m)$  est de torsion.

Cela étant dit, rappelons en quoi consiste l'obstruction de Brauer-Manin. Il est d'abord facile de voir, par functorialité du groupe de Brauer (laquelle découle de celle du  $H^2$ ), que pour une  $k$ -variété  $V$  on a un accouplement, dit de Brauer-Manin,

$$\text{Br } V \times V(S) \rightarrow \text{Br } S, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha(x),$$

pour tout  $k$ -schéma  $S$ . En effet, un  $S$ -point  $x$  correspond à un morphisme  $S \rightarrow V$ , lequel induit un morphisme de groupes  $\text{Br } V \rightarrow \text{Br } S$  dont l'image de  $\alpha$  définit  $\alpha(x)$ . Lorsque  $k$  est un corps de nombres, on peut considérer cet accouplement pour  $S = \text{Spec } k_v$  pour chaque complété  $k_v$  de  $k$ , obtenant ainsi des accouplements

$$\text{Br } V \times V(k_v) \rightarrow \text{Br } k_v \xrightarrow{\text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (0.1)$$

où  $\text{inv}_v$  est l'isomorphisme donné par la théorie du corps de classes locale pour les places non archimédiennes (cf. [NSW08, Cor. 7.1.4]) et l'(unique) inclusion de  $\text{Br } k_v$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  pour les places archimédiennes (pour lesquelles  $\text{Br } k_v$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si  $k_v \cong \mathbb{R}$  et trivial si  $k_v \cong \mathbb{C}$ ). Puis, en considérant tous ces accouplements simultanément, on obtient l'accouplement

$$\text{Br } V \times V(\mathbf{A}_k) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (\alpha, (x_v)_{v \in \Omega_k}) \mapsto \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\alpha(x_v)), \quad (0.2)$$

où  $\mathbf{A}_k$  désigne l'anneau des adèles de  $k$  et  $\alpha(x_v)$  est définie pour chaque  $v$  par l'accouplement (0.1). La somme définissant l'accouplement est bien définie. En effet, pour  $S$  un ensemble fini de places de  $k$  soit  $\mathcal{O}_{k,S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $k$ , i.e. l'anneau obtenu à partir de l'anneau  $\mathcal{O}_k$  des entiers de  $k$  en permettant la division par les premiers divisant les places dans  $S$ . On sait alors que, pour un élément  $\alpha \in \text{Br } V$ , il existe un ensemble fini  $S \subset \Omega_k$  et un modèle lisse  $\mathcal{V}$  de  $V$  sur  $\mathcal{O}_{k,S}$  tel que  $\alpha$  se relève en un élément de  $\text{Br } \mathcal{V}$ . Si l'on note alors  $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $k_v$  et  $\kappa_v$  son corps résiduel pour chaque place  $v$ , on sait que pour un point adélique  $(x_v)_{v \in \Omega_k} \in V(\mathbf{A}_k)$  on a que  $x_v$  provient d'un  $\mathcal{O}_v$ -point pour presque toute place  $v \in \Omega_k$  (i.e. pour toute place sauf pour un nombre fini). L'application  $\text{Br } V \rightarrow \text{Br } k_v$  définie par  $x_v$  se factorise alors par  $\text{Br}(\text{Spec } \mathcal{O}_v) = \text{Br } \mathcal{O}_v = \text{Br } \kappa_v = 0$  (cf. [Gro68a, Cor. 6.2] et [Ser94, II.§3]) pour presque toute place. Cela nous dit que la somme, a priori infinie, est en fait une somme finie et donc elle est bien convergente.

Rappelons enfin le théorème suivant (cf. [NSW08, Thm. 8.1.17]) :

**Théorème 0.3** (Brauer-Hasse-Noether). *Soit  $k$  un corps global. On a alors la suite exacte*

$$0 \rightarrow \text{Br } k \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} \text{Br } k_v \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Soit maintenant  $V$  une  $k$ -variété et  $\alpha \in \text{Br } V$ . Notons abusivement  $\text{ev}_\alpha$  les applications  $V(k) \rightarrow \text{Br } k$  et  $V(\mathbf{A}_k) \rightarrow \bigoplus_{\Omega_k} \text{Br } k_v$  obtenues à partir des accouplements (0.1) et (0.2) en évaluant en  $\alpha$ . On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} V(k) & \hookrightarrow & V(\mathbf{A}_k) & & & & \\ \text{ev}_\alpha \downarrow & & \text{ev}_\alpha \downarrow & \searrow \text{BM}_\alpha & & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br } k & \longrightarrow & \bigoplus_{\Omega_k} \text{Br } k_v & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{array}$$

L'application  $\text{BM}_\alpha$  du diagramme est définie tout simplement comme la composition des deux autres flèches et l'on peut montrer qu'elle est localement constante pour la topologie adélique (cf. [San81, Lem. 6.2]). De ce diagramme on déduit alors que, pour toute famille  $(x_v)_{\Omega_k} \in V(\mathbf{A}_k)$  provenant de  $V(k)$ , on a  $\text{BM}_\alpha((x_v)_{\Omega_k}) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . On peut alors définir, pour tout sous-groupe  $B$  de  $\text{Br } V$ , l'ensemble

$$V(\mathbf{A}_k)^B := \{(x_v) \in V(\mathbf{A}_k) \mid \text{BM}_\alpha((x_v)_{\Omega_k}) = 0, \forall \alpha \in B\},$$

et noter que l'on a toujours

$$\overline{V(k)} \subset V(\mathbf{A}_k)^B \subset V(\mathbf{A}_k),$$

où  $\overline{V(k)}$  désigne l'adhérence de  $V(k)$  dans  $V(\mathbf{A}_k)$ .

Si l'on considère maintenant l'ensemble  $V(k_\Omega) := \prod_{v \in \Omega_k} V(k_v)$  au lieu de  $V(\mathbf{A}_k)$ , on peut donner les mêmes définitions et obtenir le même diagramme commutatif à condition de ne considérer qu'un sous-groupe  $B$  de  $\text{Br } V$  tel que, pour tout  $\alpha \in B$  et pour presque toute place  $v \in \Omega_k$ , on ait  $\alpha(x_v) = 0 \in \text{Br } k_v$  pour tout  $k_v$ -point  $x_v \in V(k_v)$ , de façon à ce que  $\text{ev}_\alpha : V(k_\Omega) \rightarrow \bigoplus_{\Omega_k} \text{Br } k_v$  soit bien définie pour  $\alpha \in B$ . On obtient alors les inclusions

$$\overline{V(k)} \subset V(k_\Omega)^B \subset V(k_\Omega).$$

*Remarque.*

On verra dans la section suivante que les sous-groupes  $B$  vérifiant l'hypothèse ci-dessus correspondent précisément à ceux qui sont contenus dans le *groupe de Brauer non ramifié*  $\text{Br}_{\text{nr}} V \subset \text{Br } V$ . La définition de ce dernier sera donnée dans la suite.

**Définition 0.4** (Manin, Colliot-Thélène-Sansuc). Soit  $V$  une  $k$ -variété et  $B$  un sous-groupe de  $\text{Br } V$  comme ci-dessus. On dit qu'il y a *obstruction de Brauer-Manin* au principe de Hasse associée à  $B$  si  $V(k_\Omega) \neq \emptyset$  et  $V(k_\Omega)^B = \emptyset$  (ce qui entraîne  $V(k) = \emptyset$ ).

De même, on dit qu'il y a *obstruction de Brauer-Manin* à l'approximation faible associée à  $B$  si l'adhérence  $\overline{V(k)}$  de  $V(k)$  dans  $V(k_\Omega)$  est différente de  $V(k_\Omega)$ , mais que l'on a l'égalité  $\overline{V(k)} = V(k_\Omega)^B$ .

Remarquons en passant que, d'après le théorème 0.3, l'accouplement (0.2) est trivial sur l'image de  $\text{Br } k$  dans  $\text{Br } V$ , ce qui nous permet de définir l'obstruction de Brauer-Manin aussi pour des quotients  $B/\text{Im}[\text{Br } k \rightarrow \text{Br } V]$ , donc notamment pour le "groupe de Brauer algébrique", cf. la section II.

Une fois que cette obstruction a été présentée par Manin, elle a permis par la suite de rendre compte de tous les contre-exemples connus tant au principe de Hasse qu'à l'approximation faible, à cela près qu'elle n'est pas capable de distinguer deux points locaux sur une place archimédienne qui se trouvent dans la même composante connexe, ce qui a fait rapidement apparaître des contre-exemples à l'approximation faible aux places archimédiennes n'étant pas expliqués par cette obstruction. Par conséquent, on s'intéresse depuis à la question (abusivement appelée toujours d'approximation faible) de savoir si  $V(k)$  est dense dans le produit  $\prod_{\Omega_k} V(k_v)'$ , où  $V(k_v)'$  représente l'ensemble des composantes connexes de  $V(k_v)$  pour  $v$  archimédienne et  $V(k_v) = V(k_v)'$  pour  $v$  non archimédienne.

Pourtant, en 1999, Skorobogatov a exhibé dans [Sko99] un exemple de surface algébrique  $V$  dont le défaut du principe de Hasse n'était pas expliqué par cette obstruction, i.e. telle que

$V(k) = \emptyset$  alors que  $V(k_\Omega)^{\text{Br } V} \neq \emptyset$ . De tels contre-exemples pour l'approximation faible (même sous sa nouvelle définition) ont ensuite été construits par Harari dans [Har00]. Les deux ont par ailleurs développé ensemble une nouvelle obstruction plus générale, dite *de la descente*, qui rendait compte de ce défaut en faisant intervenir la cohomologie non abélienne (cf. [HaS02]). Quelques années plus tard, Poonen a exposé de son côté une deuxième généralisation de l'obstruction de Brauer-Manin, dite obstruction (de Brauer-Manin) *étale* (cf. [Poo10]), laquelle était déjà dans [Sko99] et s'est trouvée par la suite être équivalente à celle de la descente (cf. [Dem09] et [Sko09]). Dans le même article, Poonen donnait de plus un exemple de variété algébrique (de dimension 3) ne vérifiant pas le principe de Hasse et dont le défaut n'était même pas expliqué par cette généralisation.

Depuis, plusieurs autres contre-exemples n'étant pas expliqués par ces obstructions ont été trouvés pour le principe de Hasse : pour ce qui est de l'obstruction de Brauer-Manin originelle, outre [Sko99] on peut citer notamment les constructions de Basile et Skorobogatov dans [BS03], tandis que pour les obstructions de la descente et de Brauer-Manin étale, on a en particulier les travaux de Harpaz et Skorobogatov [Hps], ainsi que ceux encore plus récents de Colliot-Thélène, Pál et Skorobogatov [CTPS13]. Ces derniers affirment par ailleurs qu'il devrait être facile de construire de tels contre-exemples aussi pour l'approximation faible.

Tel est l'état actuel des recherches dans ce domaine. Remarquons cependant que la non universalité de l'obstruction de Brauer-Manin ne la rend pas pour autant inintéressante : il suffirait d'énoncer la quantité de familles pour lesquelles cette obstruction s'est en fait avérée être la seule, tant au principe de Hasse qu'à l'approximation faible. Mais contentons nous pour l'instant, à titre d'exemple, de rappeler la conjecture suivante de Colliot-Thélène (cf. [CT03]) :

**Conjecture 0.5** (Colliot-Thélène). Soit  $V$  une variété projective, lisse et géométriquement rationnellement connexe (i.e. telle que toute paire de points géométriques de  $V$  peut être reliée par une courbe isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  contenue dans  $V$ ). Alors l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible. En d'autres mots, on a  $\overline{V(k)} = V(k_\Omega)^{\text{Br } V}$ .

## II Le groupe de Brauer non ramifié et autres variantes

On a vu dans la section précédente que le groupe de Brauer est un outil fondamental pour étudier les propriétés arithmétiques des  $k$  variétés pour  $k$  un corps global. On a aussi vu qu'il faut considérer des sous-groupes du groupe de Brauer dont les éléments vérifient une "forte" annulation vis-à-vis des  $k_v$ -points de la variété pour les différents complétés  $k_v$  de  $k$ . Dans cette section on introduit, entre autres, une variante de ce groupe qui vérifie bien cette propriété.

On rappelle d'abord que pour toute  $k$ -variété  $V$  lisse, géométriquement intègre et telle que  $V(k) \neq \emptyset$  on a des inclusions

$$\text{Br } k \subset \text{Br } V \subset \text{Br } k(V), \quad (0.3)$$

où  $k(V)$  représente le corps de fonctions de  $V$  (cela peut se voir facilement via la définition "Azumayesque" de  $\text{Br } V$ ). La functorialité du groupe de Brauer nous dit alors que pour tout ouvert  $U \subset V$  le morphisme canonique  $\text{Br } V \rightarrow \text{Br } U$  est une inclusion. Si l'on pense au

contraire à des variétés  $X$  munies d'une immersion ouverte  $V \hookrightarrow X$ , on aura que le groupe  $\text{Br } X$  correspond à un sous-groupe de  $\text{Br } V$ . On a alors

$$\text{Br } k \subset \cdots \subset \text{Br } X \subset \text{Br } V \subset \text{Br } U \subset \cdots \subset \text{Br } k(V), \quad (0.4)$$

et l'on peut voir le groupe  $\text{Br } k(V)$  comme la réunion des  $\text{Br } U$  pour  $U$  un ouvert de  $V$ . Si l'on essaie de faire le raisonnement analogue dans l'autre sens, i.e. de prendre l'intersection des  $\text{Br } X$  pour les variétés  $X$  contenant  $V$  comme un ouvert, il n'est pas donné que l'on trouvera le groupe  $\text{Br } k$  (ou, dans le cas où  $V(k) = \emptyset$ , l'image de  $\text{Br } k$  dans  $\text{Br } V$ ). En effet, les inclusions du côté gauche doivent s'arrêter lorsqu'on considère une compactification de la variété  $V$ , i.e. une variété  $X$  propre contenant  $V$  comme un ouvert. Le sous-groupe  $\text{Br } X \subset \text{Br } V$  ainsi obtenu dépendrait a priori du choix de la compactification. Mais il se trouve que, lorsqu'on a accès à une compactification *lisse*, la partie de torsion première à la caractéristique de  $k$  de ce sous-groupe est en fait indépendante du choix de la compactification et devient alors un invariant birationnel très important. Pour comprendre cela, commençons par une définition purement birationnelle :

**Définition 0.6.** Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$  et  $V$  une  $k$ -variété géométriquement intègre. On définit le *groupe de Brauer non ramifié*  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  comme le sous-groupe des éléments  $\alpha \in \text{Br } k(V)$  vérifiant la propriété suivante :

Pour tout anneau de valuation discrète  $k \subset A \subset k(V)$  de corps de fractions  $k(V)$ , on a

$$\alpha \in \text{Im}[\text{Br } A \rightarrow \text{Br } k(V)],$$

où le morphisme  $\text{Br } A \rightarrow \text{Br } k(V)$  est induit par le morphisme canonique  $\text{Spec } k(V) \rightarrow \text{Spec } A$ .

Remarquons que pour toute variété lisse et géométriquement intègre  $V$ , si l'on note  $V^{(1)}$  l'ensemble des points de codimension 1 de  $V$ , on retrouve des anneaux de valuation discrète  $k \subset A \subset k(V)$  de corps de fractions  $k(V)$  tout simplement en considérant l'anneau local  $\mathcal{O}_{V,x}$  pour  $x \in V^{(1)}$ . On voit aussi facilement que, plus notre variété est "complète", plus on trouve d'anneaux de cette façon. D'un autre côté, si  $X$  est une variété propre (i.e. complète), le critère valuatif de propreté nous dit que l'on peut voir tout tel anneau de valuation discrète  $A$  comme "provenant" d'un point  $x \in X$  (pas forcément de codimension 1), au sens où l'on aura un morphisme  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$  donnant une factorisation

$$\text{Br } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \text{Br } A \rightarrow \text{Br } k(X). \quad (0.5)$$

En effet, la donnée d'un tel anneau correspond à celle d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A & \longrightarrow & \text{Spec } k, \end{array}$$

et le critère valuatif de propreté nous assure alors l'existence d'un morphisme  $\text{Spec } A \rightarrow X$ . Le point  $x \in X$  donnant la factorisation (0.5) ci-dessus correspondrait alors à l'image du point spécial de  $\text{Spec } A$  dans  $X$ . Ainsi, un élément de  $\text{Br } X$  appartient à l'image de  $\text{Br } A \rightarrow \text{Br } k(X)$  pour tout  $A$  via le morphisme canonique  $\text{Br } X \rightarrow \text{Br } \mathcal{O}_{X,x}$  et les flèches (0.5), ce qui nous dit que pour toute compactification lisse  $X$  d'une variété  $V$  on a

$$\text{Br } X \subset \text{Br}_{\text{nr}} X = \text{Br}_{\text{nr}} V.$$

On en déduit en passant que, pour vérifier qu'un élément  $\alpha \in \text{Br } k(V)$  n'appartient au groupe  $\text{Br}_{\text{nr}} V$ , il suffit de trouver  $x \in X$  tel que  $\alpha \notin \text{Im}[\text{Br } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \text{Br } k(V)]$  (moyennant, bien entendu, l'existence d'un tel modèle propre et lisse). On verra dans les lignes qui suivent qu'il suffit même de regarder les points  $x \in X^{(1)}$ , du moins pour  $\alpha$  d'ordre premier à  $p$ .

En effet, considérons maintenant un élément  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr}} V$  et soit  $x \in X^{(1)}$ . Alors par définition  $\alpha \in \text{Im}[\text{Br } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \text{Br } k(V)]$  et il est facile de voir qu'il existe un ouvert  $U_x$  de  $X$ , contenant  $x$ , tel que  $\alpha$  provient de  $\text{Br } U_x$ . En recollant deux à deux ces différents ouverts et avec l'aide de la suite exacte de Mayer-Vietoris on apprend qu'il existe un ouvert  $U_0 \subset X$ , réunion des  $U_x$  pour  $x \in X^{(1)}$ , tel que  $\alpha$  provient de  $\text{Br } U_0$ . On n'a pas encore montré que  $\alpha \in \text{Br } X$ , mais on a le résultat suivant, dû à Grothendieck (cf. [Gro68b, Cor. 6.2]) :

**Théorème 0.7** (Pureté du groupe de Brauer). *Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ ,  $V$  une  $k$ -variété lisse et géométriquement intègre,  $Y \subset V$  une sous-variété fermée de codimension au moins 2 et  $U := V \setminus Y$  l'ouvert complémentaire. Alors*

$$\text{Br } V\{p'\} = \text{Br } U\{p'\},$$

où  $\{p'\}$  veut dire que l'on considère la partie de torsion première à  $p$ .

Ainsi, puisque  $U_0$  contient tous les points de codimension 1, on voit que  $\text{Br } U_0\{p'\} = \text{Br } X\{p'\}$ , ce qui nous dit que  $\alpha$  provient de  $\text{Br } X$  dès que son ordre est premier à  $p$ . Autrement dit, on a l'égalité

$$\text{Br}_{\text{nr}} V\{p'\} = \text{Br}_{\text{nr}} X\{p'\} = \text{Br } X\{p'\}, \quad (0.6)$$

ou encore, la torsion première à  $p$  du groupe de Brauer non ramifié  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  se calcule en trouvant une compactification lisse de  $V$ . On conclut par ailleurs que la torsion première à  $p$  du groupe de Brauer est, comme on l'avait annoncé, un invariant birationnel des variétés propres et lisses et il correspond alors à l'intersection des  $\text{Br } X$  que l'on avait évoquée dans les inclusions (0.4).

Dans le cadre des corps globaux, qui est celui qui nous concerne dans cette thèse, cette propriété du groupe de Brauer non ramifié permet une description "arithmétique" du groupe  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  via le théorème suivant, démontré par Harari dans sa thèse (cf. [Har94, Thm. 2.1.1]) :

**Théorème 0.8** (Harari). *Soient  $k$  un corps de nombres et  $X$  une  $k$ -variété géométriquement intègre, projective et lisse. Soient  $\alpha$  un élément de  $\text{Br } k(X)$  qui n'est pas dans  $\text{Br } X$  et  $U$  un ouvert de Zariski non vide de  $X$  tel que  $\alpha \in \text{Br } U$ . Alors, il existe un ensemble infini  $I$  (de densité non nulle) de places  $v$  de  $k$  telles que la flèche  $U(k_v) \rightarrow \text{Br } k_v$  induite par  $\alpha$  prenne une valeur non nulle.*

Remarquons immédiatement que la réciproque de ce théorème est facile à établir : en effet, il est bien connu que, pour un élément  $\alpha \in \text{Br } X$ , il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $k$  et un modèle propre et lisse  $\mathcal{X}$  de  $X$  sur  $\mathcal{O}_{k,S}$  tel que  $\alpha$  se relève en un élément de  $\text{Br } \mathcal{X}$ . Le critère valuatif de pureté nous permet alors de relever tout  $k_v$ -point de  $X$  en un  $\mathcal{O}_v$ -point de  $\mathcal{X}$  dès que  $v \notin S$ . En particulier, on voit que l'application  $X(k_v) \rightarrow \text{Br } k_v$  induite par  $\alpha$  se factorise par  $\text{Br } \mathcal{O}_v = 0$  pour  $v \notin S$ , ce qui nous dit que cette application est triviale (i.e. constante de valeur nulle) pour toute place  $v$  en dehors de  $S$ .

Si l'on considère alors une variété  $V$  qui n'est pas propre, ce résultat appliqué à une compactification lisse de  $V$  nous permet de décrire le groupe de Brauer non ramifié  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V$  de la façon suivante :

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V = \{\alpha \in \mathrm{Br}V \mid \exists S_\alpha \subset \Omega_k \text{ fini, } \alpha(x_v) = 0, \forall x_v \in V(k_v), \forall v \in \Omega_k \setminus S_\alpha\}.$$

Cela nous montre par ailleurs que c'est précisément pour ce sous-groupe de  $\mathrm{Br}V$  que l'obstruction de Brauer-Manin introduite dans la section précédente est bien définie. De plus, puisqu'on est en caractéristique 0, l'existence d'une telle compactification lisse est assurée par le théorème d'Hironaka. Cependant, il est bien connu que ladite existence est une question toujours ouverte (et d'ailleurs très difficile) en caractéristique positive, ce qui rend beaucoup plus difficile la recherche d'une description arithmétique analogue pour les corps globaux de caractéristique  $p > 0$ .

Néanmoins, un théorème récent de Gabber (cf. [ILO12, X, Thm. 2.1]), qui précise un résultat de de Jong sur les altérations, s'est trouvé être le bon substitut du théorème d'Hironaka. Grâce à ce résultat, Borovoi, Demarche et Harari ont pu démontrer le sens "facile" que l'on vient d'établir ci-dessus, à savoir que pour une variété  $V$  sur un corps global  $k$  de caractéristique  $p > 0$ , tout élément  $\alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V\{p'\}$  est tel que, pour presque toute place  $v$  de  $k$  (i.e. pour toute place sauf une quantité finie), l'application  $V(k_v) \rightarrow \mathrm{Br}k_v$  induite par  $\alpha$  est constante et égale à 0 (cf. [BDH13, Prop. 4.2]).

L'un des objectifs de cette thèse a été d'essayer de trouver une réciproque de cette proposition, à savoir que tout élément  $\alpha \in \mathrm{Br}V\{p'\}$  n'appartenant pas à  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V$  doit vérifier une propriété semblable à celle établie dans le théorème 0.8 ci-dessus. Le résultat obtenu, bien que pas tout à fait équivalent à celui de Harari à cause de la présence d'extensions inséparables, est assez satisfaisant et sa démonstration constitue l'objectif principal du chapitre 1.

Rappelons pour conclure cette section deux autres variantes importantes du groupe de Brauer de notre variété  $V$  : ce sont sa partie *géométrique* et sa partie *algébrique*. Pour les définir, on définit d'abord les sous-groupes suivants de  $\mathrm{Br}V$  :

$$\mathrm{Br}_0V := \mathrm{Im}[\mathrm{Br}k \rightarrow \mathrm{Br}V] \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_1V := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}V \rightarrow \mathrm{Br}V_{\bar{k}}],$$

où les morphismes considérés sont ceux induits respectivement par le morphisme structurel  $V \rightarrow \mathrm{Spec}k$  et le morphisme  $V_{\bar{k}} \rightarrow V$  induit par le changement de base de  $k$  à  $\bar{k}$ . On définit alors le *groupe de Brauer géométrique* de  $V$  comme le quotient  $\mathrm{Br}V/\mathrm{Br}_1V$  et le *groupe de Brauer algébrique* de  $V$  comme le quotient  $\mathrm{Br}_1V/\mathrm{Br}_0V$ , que l'on notera  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  dans la suite. On voit alors que  $\mathrm{Br}V$  admet une suite de décomposition formée de sa partie géométrique, de sa partie algébrique et de ce qu'on pourrait appeler sa partie "arithmétique", i.e.  $\mathrm{Br}_0V$ .

Ces groupes admettent des variantes non ramifiées. Les inclusions (0.4) et ce qui a été fait ci-dessus nous disent en effet que l'on a toujours  $\mathrm{Br}_0V \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V$  et alors cela a bien un sens de définir le *groupe de Brauer non ramifié algébrique* de  $V$  comme le quotient

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V := (\mathrm{Br}_1V \cap \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V)/\mathrm{Br}_0V.$$

Par ailleurs, vue l'égalité (0.6) établie ci-dessus, on aurait pu aussi définir ce dernier groupe comme le groupe de Brauer algébrique d'une compactification lisse de  $V$ , du moins en caractéristique 0. Cet invariant joue un rôle essentiel dans l'étude de l'obstruction de Brauer-Manin dans le cadre des espaces homogènes, qui est la famille de variétés avec laquelle nous travaillons principalement dans cette thèse et qui fait l'objet de la section suivante.

### III Espaces homogènes et leurs propriétés arithmétiques

Les espaces homogènes sont en deux mots des variétés algébriques munies d'une action transitive (dans un sens à définir plus précisément) d'un groupe algébrique. La famille des groupes algébriques se divise pour sa part en deux grandes familles : celle des groupes *linéaires* (ou *affines*), et celle des *variétés abéliennes* (qui sont, par opposition, des variétés *projectives*). Cette division est justifiée par un théorème qui dit que tout groupe algébrique admet un quotient qui est une variété abélienne et dont le noyau du morphisme de projection est un groupe algébrique linéaire, du moins lorsque le corps de base  $k$  est parfait, cf. par exemple [Con02].

Dans cette thèse, on s'intéresse aux espaces homogènes sous des groupes algébriques linéaires connexes. Pour des rappels généraux sur ces groupes, on renvoie à [Spr98], [Bor91], [Hum75], [Wat79]. On rappelle néanmoins que tout  $k$ -groupe algébrique linéaire  $G$  admet, du moins en caractéristique 0, une décomposition en quatre morceaux : une partie *unipotente*, une partie *semisimple*, une partie *torique* et une partie *finie*.<sup>2</sup> En effet, si l'on introduit les notations suivantes :

- $G^\circ$  la composante connexe de l'élément neutre de  $G$  (c'est un sous-groupe connexe et distingué) ;
- $F := G/G^\circ$  le groupe des composantes connexes de  $G$  (c'est un groupe fini) ;
- $R_u(G)$  le radical unipotent de  $G^\circ$  (c'est un sous-groupe unipotent et distingué) ;
- $G^{\text{red}} := G^\circ/R_u(G)$  (c'est un groupe réductif) ;
- $D(G)$  le sous-groupe dérivé de  $G$  ;
- $G^{\text{ss}} := D(G^{\text{red}})$  (c'est un groupe semi-simple) ;
- $G^{\text{tor}} := G^{\text{red}}/G^{\text{ss}}$  (c'est un tore, et l'abélianisé de  $G^{\text{red}}$ ) ;

on a alors les suites exactes courtes,

$$1 \rightarrow G^\circ \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow R_u(G) \rightarrow G^\circ \rightarrow G^{\text{red}} \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow G^{\text{ss}} \rightarrow G^{\text{red}} \rightarrow G^{\text{tor}} \rightarrow 1.$$

Pour les espaces homogènes, on rappelle ici leur définition :

**Définition 0.9.** Soit  $k$  un corps. Un  $k$ -groupe algébrique  $G$  est un schéma en groupes de type fini sur  $k$ . Pour un tel groupe on note  $e : \text{Spec } k \rightarrow G$  le point correspondant à l'élément neutre et  $m : G \times_k G \rightarrow G$  le morphisme de multiplication.

Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique et  $V$  une  $k$ -variété. On définit une  $k$ -action (à gauche) de  $G$  sur  $V$  comme un  $k$ -morphisme  $a : G \times_k V \rightarrow V$  tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times_k G \times_k V & \xrightarrow{\text{id}_G \times a} & G \times_k V \\ \downarrow m \times \text{id}_V & & \downarrow a \\ G \times_k V & \xrightarrow{a} & V. \end{array}$$

2. En caractéristique positive la définition du radical unipotent, et donc du morceau unipotent de  $G$ , pose des problèmes techniques, mais on peut toujours définir les autres trois morceaux en se réduisant au cas des groupes réductifs

On remarque qu'un tel morphisme induit une action de  $G(K)$  sur  $V(K)$  au sens classique des groupes pour tout corps  $K/k$ .

Soit maintenant  $G$  un  $k$ -groupe algébrique lisse et  $V$  une  $k$ -variété lisse munie d'une action de  $G$ . On dit que  $V$  est un  $(k)$ -espace homogène sous  $G$  si l'action induite au niveau des  $\bar{k}$ -points est transitive, i.e. si l'action de  $G(\bar{k})$  sur  $V(\bar{k})$  n'a qu'une seule orbite. On dit qu'elle est un espace principal homogène (ou un *torseur*) sous  $G$  si de plus le stabilisateur (schématique) de tout point de  $V(\bar{k})$  est trivial.

Comme on aurait pu s'attendre, dans le cadre des propriétés arithmétiques que l'on a présentées dans la section I, ce sont les espaces principaux homogènes qui ont été étudiés d'abord étant donnée la nullité de leur stabilisateur. La meilleure présentation que l'on puisse trouver des résultats dans ce contexte est celle de Sansuc dans [San81], à cela près qu'il ne traite que le cas de la caractéristique 0 et qu'il faut ajouter dans ses énoncés (et démonstrations) un résultat qui n'allait être démontré par Chernousov que huit ans plus tard (plus de détails dans la suite).

Pour commencer, on rappelle deux faits classiques des espaces principaux homogènes sous un  $k$ -groupe algébrique lisse  $G$ . D'abord, ils sont classifiés par un ensemble de cohomologie galoisienne noté  $H^1(k, G)$  qui jouit de certaines des propriétés fonctorielles (mais surtout pas toutes!) des groupes de cohomologie galoisienne classiques  $H^1(k, A)$  pour  $A$  un  $k$ -groupe algébrique abélien. Pour la définition de cet ensemble et son lien avec les espaces homogènes, on renvoie à [Ser94, I.§5, III.§1]. Deuxièmement,

**Proposition 0.10.** *Soit  $V$  un espace principal homogène sous le  $k$ -groupe lisse  $G$ . Alors  $V(k) \neq \emptyset$  si et seulement si  $V$  est  $k$ -isomorphe à  $G$ . Dans ce cas, l'action  $a : G \times_k V \rightarrow V$  correspond au morphisme de multiplication  $m : G \times_k G \rightarrow G$ .*

Ainsi, il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme d'espace principal homogène sous  $G$  qui contient des  $k$ -points. Cette classe constitue alors un élément distingué  $E_{k,G} \in H^1(k, G)$  et fait de ce dernier un ensemble pointé. Soit maintenant  $k$  un corps global. Le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes peut alors être décrit de la façon suivante. Pour toute place  $v$  de  $k$ , le changement de base induit une application de localisation  $H^1(k, G) \rightarrow H^1(k_v, G)$  qui envoie  $E_{k,G}$  sur  $E_{k_v,G}$ . On peut alors considérer le morphisme d'ensembles pointés diagonal

$$h : H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G),$$

où l'ensemble produit admet  $E_{\Omega_k, G} := (E_{k_v, G})_{v \in \Omega_k}$  comme élément distingué, puis définir le sous-ensemble

$$\text{III}^1(k, G) := \text{Ker}(h) := h^{-1}(E_{\Omega_k, G}),$$

et voir que la vérification du principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous  $G$  se ramène à l'affirmation suivante :

$$\text{III}^1(k, G) = \{E_{k,G}\}.$$

D'autre part, la proposition 0.10 nous dit aussi que, en ce qui concerne l'approximation faible pour les espaces principaux homogènes, la question ne se pose que pour le groupe lui-même en tant que variété algébrique.

Cela nous mène aux premiers grands théorèmes dans ce sujet. Notons que, étant donnée la décomposition d'un  $k$ -groupe algébrique linéaire *connexe* en ses trois morceaux (à savoir, semi-simple, tore et unipotent), il semble naturel de se poser ces questions arithmétiques d'abord dans chacun des trois cas réduits. Et ce d'autant plus que les groupes semisimples et les tores sont connexes par définition (et il en va de même pour les unipotents en caractéristique 0). On a dans ce sens les réponses suivantes :

**Théorème 0.11** (Harder, Kneser, Chernousov, Bruhat, Tits). *Soit  $k$  un corps global de caractéristique  $p \geq 0$ ,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire semi-simple et simplement connexe. Alors, pour toute place non archimédienne  $v$  de  $k$  on a*

$$H^1(k_v, G) = \{E_{G,k_v}\}, \quad (0.7)$$

ainsi qu'une bijection

$$H^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \prod_{\Omega_k} H^1(k_v, G). \quad (0.8)$$

D'après ce qui a été remarqué ci-dessus, ce théorème nous dit que le principe de Hasse est vérifié pour les espaces principaux homogènes sous un groupe semi-simple simplement connexe. Rappelons par ailleurs que les facteurs directs de ces groupes sont classifiés via leurs algèbres de Lie associées, qui se divisent en quatre familles infinies ( $A_n$  pour  $n \geq 1$ ,  $B_n$  pour  $n \geq 2$ ,  $C_n$  pour  $n \geq 3$ ,  $D_n$  pour  $n \geq 4$ ) et cinq cas particuliers ( $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ ). La démonstration de ce théorème est totalement dépendante de cette classification car elle a été faite cas par cas. Kneser a traité l'équation (0.7) dans le cas où  $p = 0$  pour chacune des familles dans [Kne65a] et [Kne65b], puis Harder a traité la bijection (0.8) aussi dans le cas où  $p = 0$  pour toutes les familles sauf pour le cas  $E_8$  dans [Hrd65] et [Hrd66]. Ce dernier cas a été traité une vingtaine d'années plus tard par Chernousov dans [Che89]. En caractéristique  $p$ , c'est Harder qui a traité l'équation (0.8) dans [Hrd75] (il a en fait démontré la trivialité de l'ensemble de gauche), tandis que Bruhat et Tits ont traité l'équation (0.7) en toute généralité dans [BT87].

Le principe de Hasse ayant été établi dans ce cas, on pouvait se demander si les groupes en question vérifient l'approximation faible. Une preuve de ce fait en caractéristique 0, dépendante par contre du principe de Hasse ci-dessus, a été donnée par Kneser dans [Kne66b]. Cela veut dire que l'approximation faible pour le cas  $E_8$  n'a été établie que lorsque Chernousov a publié son résultat. Le cas de caractéristique positive a été traité par ailleurs par Prasad dans [Pra77] et il est remarquable que sa preuve, à différence de celle de Kneser, ne dépend pas du principe de Hasse.

Enfin, le cas des espaces principaux homogènes sous un groupe semi-simple non simplement connexe se ramène à celui des espaces homogènes sous un groupe semi-simple simplement connexe à stabilisateur fini abélien via le revêtement universel du groupe  $G$  en question (cf. la section IV ci-dessous). Ce dernier peut se traiter via la cohomologie galoisienne des groupes finis abéliens (théorie essentiellement due à Tate, cf. par exemple [Ser94, II.5-6]) et est inclus dans le théorème de Sansuc énoncé un peu plus bas (théorème 0.13).

Laissons donc de côté le cas des groupes semi-simples et passons aux tores. Dans ce cas, il est possible d'exhiber des espaces principaux homogènes ayant des points partout localement et n'ayant pas de points globaux (ces contre-exemples remontent même aux travaux de Hasse dans les années 1930). En d'autres mots, le principe de Hasse n'est pas vérifié pour les espaces

principaux homogènes sous un tore. Il est aussi possible d'exhiber des tores ne vérifiant pas l'approximation faible. Néanmoins, Voskresenskii a pu montrer dans [Vos70] le résultat suivant :

**Théorème 0.12** (Voskresenskii). *Soit  $T$  un tore algébrique sur un corps de nombres  $k$ . Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous  $T$  est la seule obstruction. Aussi, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour  $T$ .*

*Remarque.*

Bien entendu, au départ ce théorème n'a pas du tout été énoncé comme ci-dessus : il suffit de remarquer qu'il a été publié la même année que celle où Manin a introduit son obstruction ! La traduction du résultat de Voskresenskii dans le langage de l'obstruction de Brauer-Manin est donnée par exemple dans [San81].

Le cas des groupes unipotents est, pour sa part, beaucoup plus simple : on sait que pour tout corps  $k$  de caractéristique 0 l'ensemble  $H^1(k, G)$  est trivial si  $G$  est un groupe unipotent (cf. par exemple [Ser94, III.§2 Prop. 6]). Cela nous dit immédiatement que le principe de Hasse est une question triviale dans ce cas car tout espace principal homogène sous  $U$  sur un corps de nombres aura automatiquement des points globaux. De plus, il est aussi bien connu qu'un tel groupe est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}_k^n$  en tant que variété (cf. par exemple [Spr98, Cor. 14.2.7]) et que  $\mathbb{A}_k^n$  vérifie l'approximation faible (cela étant un corollaire facile du cas de la droite affine).

Toujours dans le cas d'un corps de nombres  $k$ , i.e. dans le cas de caractéristique 0, c'est Sansuc qui a su recoller les morceaux ci-dessus dans [San81] pour démontrer :

**Théorème 0.13** (Sansuc). *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe sur un corps de nombres  $k$ . Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous  $G$  est la seule obstruction. Aussi, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour  $G$ .*

De même que pour Kneser, la démonstration de Sansuc était dépendante du principe de Hasse pour les groupes semi-simples simplement connexes (théorème 0.11) et ne tenait donc pas compte des groupes dont la partie semi-simple contenait des facteurs du type  $E_8$ . Bien entendu, une fois publié le résultat de Chernousov, la preuve de Sansuc est devenue valable en toute généralité.

Passons enfin au cas des espaces homogènes plus généraux, i.e. admettant des stabilisateurs non triviaux. Les travaux les plus approfondis à ce sujet ont été faits par Borovoi dans les années 1990, toujours en caractéristique 0 (cf. [Brv90], [Brv91], [Brv92], [Brv93]). Ces travaux, mis ensemble avec ce qui avait été fait avant lui et que l'on a évoqué ci-dessus, ont abouti dans [Brv96] au résultat suivant :

**Théorème 0.14** (Borovoi). *Soit  $k$  un corps de nombres,  $G'$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire connexe,  $V$  un espace homogène sous  $G'$ ,  $x \in V(\bar{k})$  et  $\bar{G}$  le sous- $\bar{k}$ -groupe de  $G'_k$  correspondant au stabilisateur de  $x$ . Soit  $\bar{G}^{\text{ssu}} := \text{Ker}[\bar{G}^\circ \rightarrow \bar{G}^{\text{tor}}]$  (cf. les notations en début de section). On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

- $\bar{G}$  est connexe.

–  $\bar{G}/\bar{G}^{\text{ssu}}$  est abélien, donc de type multiplicatif, et  $G'^{\text{ss}}$  est simplement connexe. Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour  $V$  est la seule obstruction. Aussi, si  $V(k) \neq \emptyset$ , l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour  $V$ . De plus, dans les deux cas, il suffit de considérer l'obstruction associée au groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$ .

Dans le même esprit que les résultats précédents, ce théorème de Borovoi se démontre en regardant les différents morceaux, et du groupe ambiant  $G'$ , et du stabilisateur  $\bar{G}$ . Dans le cas où ce dernier est connexe, on retrouve les trois morceaux déjà rencontrés : semi-simple, tore et unipotent. On voit alors que c'est le morceau *fini* qui vient compliquer les choses au niveau du stabilisateur et que dans ce cas on ne peut avancer que si cette partie correspond à un groupe abélien (et qui se comporte “très bien” par rapport à  $\bar{G}^{\text{tor}}$ ).

Si l'on se propose de démontrer que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les espaces homogènes, c'est donc le cas des stabilisateurs non connexes qui reste à établir pour fermer la question. On remarquera en passant que cette question est légitime, conformément à la conjecture 0.5 ci-dessus, car tout espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe est une variété unirationnelle, donc rationnellement connexe (cela découle de la rationalité des groupes algébriques linéaires sur  $\bar{k}$ , cf. [Bor91, Cor. 14.14]).

D'autre part, Borovoi a conjecturé qu'il doit exister des espaces homogènes à stabilisateur fini ne vérifiant pas l'approximation faible aux places réelles, et cela même pour  $k = \mathbb{Q}$ . Il y a de fortes raisons pour croire qu'un tel contre-exemple ne serait pas expliqué par l'obstruction de Brauer-Manin (cf. dans ce sens la section 2.9 dans cette thèse), ce qui reviendrait à nier la conjecture de Colliot-Thélène à nouveau. Tout cela montre que la difficulté du sujet fait que même les experts ne sont pas d'accord sur le résultat à chercher.

*Remarque.*

Des résultats analogues à ceux présentés dans cette section pour la caractéristique 0 peuvent être obtenus facilement aussi en caractéristique positive lorsqu'on se restreint à étudier des éléments d'ordre premier à  $p$  des différentes variantes du groupe de Brauer (et d'autres groupes finis) impliquées dans les démonstrations. Une preuve complète des mêmes résultats est pourtant toujours à espérer. Des travaux récents de González-Avilés vont dans cette direction, du moins dans le cas des groupes réductifs (cf. notamment [GA09] et [GA12]).

## IV Le cas des stabilisateurs non connexes

Considérons maintenant des espaces homogènes à stabilisateur non connexe. Étant donné que tout groupe algébrique linéaire est composé d'une partie connexe et d'un quotient fini, il semble naturel de traiter d'abord le cas des stabilisateurs finis, en espérant ensuite pouvoir recoller les morceaux comme cela a été fait tout au long de cette histoire. Ensuite, toujours dans l'esprit de simplifier les questions pour commencer, on pourrait se demander ce qui se passe dans ce cadre lorsque le groupe ambiant (i.e.  $G'$ ) est respectivement un tore, un groupe unipotent ou un groupe semi-simple.

Dans le premier cas, on a affaire à un groupe  $G'$  abélien, auquel cas peu importe la nature du stabilisateur  $\bar{G}$ , il sera toujours un sous-groupe abélien (et défini sur  $k$ ) et le quotient sera

toujours un tore. Un tel espace homogène est alors un espace principal homogène sous le tore quotient et l'étude de ce dernier rentre dans la théorie développée par Voskresenskii (ou par González-Avilés en caractéristique  $p$ ). On sait alors que l'obstruction de Brauer-Manin suffit dans ce cas.

Le cas de  $G'$  unipotent rentre pour sa part dans la théorie de Borovoi en caractéristique zéro. En effet, on sait qu'un groupe unipotent admet une suite de décomposition dont tous les sous-quotients sont isomorphes au groupe additif  $\mathbb{G}_a$  (cf. par exemple [Spr98, Lem. 14.1.1]). Cela implique facilement que la partie finie du stabilisateur ne peut être que triviale car  $\mathbb{G}_a$  n'a pas de sous-groupe fini non trivial. Cette partie de la théorie de Borovoi avait par ailleurs été travaillée avant lui par Douai dans sa thèse (cf. [Dou76]). Ce cas pose par contre beaucoup de problèmes en caractéristique positive à cause de l'apparition de  $p$ -groupes finis dans la décomposition des groupes unipotents. Mais si l'on se restreint, toujours pour simplifier, au cas des stabilisateurs finis  $G$  d'ordre premier à  $p$ , le cas des groupes ambiants unipotents n'offre aucune difficulté non plus.

C'est donc le cas des groupes ambiants semi-simples qu'il faut étudier en détail d'abord. Or, si l'on considère un  $k$ -groupe fini  $G$  plongé dans un groupe  $G'$  semi-simple et si l'on note  $\rho : \tilde{G}' \rightarrow G'$  son revêtement universel, il est aisé de voir que l'on a un isomorphisme canonique entre les variétés  $\tilde{V} := \rho^{-1}(G) \backslash \tilde{G}'$  et  $V := G \backslash G'$  induit par  $\rho$ . Le noyau de  $\rho$  étant fini et central, le groupe  $\rho^{-1}(G)$  est alors un groupe fini et une extension centrale de  $G$ . Ainsi, on voit que l'on peut se restreindre à étudier le cas des groupes ambiants semi-simples simplement connexes, dont on connaît assez bien les espaces principaux homogènes maintenant. De plus, on remarque aussi que dans ce changement de groupe ambiant le stabilisateur reste nilpotent (resp. résoluble) s'il l'était avant la réduction. L'un des avantages de cette restriction est qu'avec des groupes ambiants semi-simples simplement connexes la question de l'approximation faible se réduit à une question de surjectivité d'une certaine application en cohomologie galoisienne (souvent non abélienne, cf. l'introduction du chapitre 4).

C'est toujours dans l'esprit de diviser nos groupes en morceaux qu'on mentionne par ailleurs dans le dernier paragraphe des groupes finis nilpotents, ou plus généralement résolubles. En effet, ces groupes sont précisément ceux qui admettent une suite de décomposition en groupes abéliens, ce qui permet d'envisager de les étudier puisque le cas des groupes abéliens est bien compris, comme on l'a déjà dit, grâce à la cohomologie galoisienne des groupes finis abéliens et aux très forts résultats connus dans ce domaine (dualité locale, suite exacte de Poitou-Tate, etc.). Dans ce contexte, il faut mentionner les travaux de Harari (cf. [Har07]) autour de l'approximation faible pour des quotients  $\mathrm{SL}_n/G$  avec  $G$  un groupe fini constant. Il a notamment montré que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible était la seule pour de tels quotients lorsque  $G$  est construit à partir d'extensions scindées de groupes abéliens. Après lui, Demarche a étudié plus profondément le groupe de Brauer non ramifié algébrique de ces espaces homogènes (cf. [Dem10]). Il a notamment établi certains cas où ce groupe est trivial, exhibant ainsi des familles d'espaces homogènes pour lesquelles on s'attendrait à ce qu'elles vérifient l'approximation faible.

Pourtant, cette attente ne tenait pas compte d'un résultat tout récent qui nous a été communiqué par Neftin, où il exhibe des espaces homogènes de ce genre ne vérifiant pas l'approximation faible et pour lesquels on peut vérifier la nullité du groupe de Brauer non ramifié algébrique (cf. [Nef13]). Toujours est-il que l'on peut expliquer ce défaut via une obstruction

“transcendante” (ou “géométrique”), i.e. via la partie géométrique du groupe de Brauer non ramifié, et donc la conjecture 0.5 de Colliot-Thélène n’a pas encore été réfutée. Il est pourtant remarquable que, par opposition aux espaces homogènes étudiés par Borovoi, ceux ayant un stabilisateur fini non abélien soient tels que la partie algébrique du groupe de Brauer ne suffit pas toujours pour expliquer le défaut d’approximation faible. Cela montre que le problème est d’une difficulté nettement plus grande que celui déjà résolu.

Ces recherches récentes demandent alors une étude plus approfondie du groupe de Brauer non ramifié, tant algébrique que géométrique, des espaces homogènes à stabilisateur fini  $G$  sous un groupe semi-simple simplement connexe. Bogomolov s’est occupé dans [Bog87] et [Bog89] de la partie géométrique de ce groupe et Colliot-Thélène a récemment étendu ces résultats au groupe de Brauer non ramifié tout entier (cf. [CT14]), étendant ainsi d’un côté les travaux de Bogomolov et en même temps ceux de Harari et Demarche. Il est à remarquer cependant que tous ces travaux se concentrent sur les groupes finis *constants*. L’un des objectifs de cette thèse a été d’attaquer le cas des groupes finis quelconques, essayant donc de généraliser encore ce qui a été fait précédemment.

## V Déroulé de la thèse

Cette thèse est composée de quatre chapitres :

Le chapitre 1 est dédié à l’étude du groupe de Brauer non ramifié sur un corps global de caractéristique positive. On démontre notamment l’analogie du résultat de Harari (théorème 0.8) en caractéristique positive pour ensuite donner, à l’aide du résultat de Gabber sur les altérations mentionné dans la section II, un théorème qui donne une description arithmétique du groupe de Brauer non ramifié sur ces corps globaux (cf. la section 1.2). Les mêmes techniques nous permettent par la suite d’étudier le groupe de Brauer non ramifié de variétés définies sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$ , via le changement de base de  $\mathbb{F}_q$  à  $\mathbb{F}_q(t)$ .

Dans le chapitre 2, on s’intéresse au groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes à stabilisateur fini, le groupe ambiant étant toujours un groupe semi-simple simplement connexe, de façon cohérente avec les justifications données ci-dessus. Ici, on oublie pour un instant les applications arithmétiques et l’on cherche à trouver une formule qui marche sur n’importe quel corps de caractéristique 0. Pour ce faire, on utilise une méthode développée par Colliot-Thélène et Kunyavskii dans [CTK98] pour étudier le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  pour des espaces principaux homogènes  $V$ . La même méthode a été ensuite utilisée par Borovoi, Demarche et Harari dans [BDH13] pour des espaces homogènes à stabilisateur de type “ssumult”, cas qui contient précisément les stabilisateurs pour lesquels la théorie de Borovoi autour de l’obstruction de Brauer-Manin marche bien.

Cette méthode, qui passe curieusement d’abord par le cas d’un corps de base *fini*, fait que le résultat que l’on a trouvé dans le chapitre précédent devienne crucial pour réussir dans cette démarche. En effet, par opposition à ce qui se passe dans les cas étudiés par Colliot-Thélène et Kunyavskii et par Borovoi, Demarche et Harari, les espaces homogènes à stabilisateur fini sur un corps fini peuvent avoir un groupe de Brauer non ramifié algébrique non trivial, comme cela

est montré dans la section 2.8.1. On développe alors préalablement une formule pour calculer  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  explicitement dans ce cas.

À partir de cela, on obtient une formule permettant de calculer le groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes à stabilisateur fini sur un corps de caractéristique 0. Outre l'application évidente du calcul explicite de ce groupe, tant sur un corps fini que sur un corps de caractéristique 0, on utilise ces formules pour en trouver une autre plus précise sur un corps local, ou encore pour établir la nullité de  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  dans certains cas (généralisant ainsi les résultats de Demarche dans [Dem10]), et pour établir des liens entre l'obstruction de Brauer-Manin et l'approximation réelle (ceci est en lien direct avec les raisons que l'on évoquait à la fin de la section III pour croire que Borovoi nie en un certain sens la conjecture de Colliot-Thélène).

Le chapitre 3 est une continuation naturelle de ce qui a été fait dans le chapitre 2. On étend en effet les formules développées dans ce dernier aux espaces homogènes (toujours sous un groupe semi-simple simplement connexe) à stabilisateur *quelconque*, montrant ainsi encore une fois que la philosophie d'étudier les différents morceaux du stabilisateur pour ensuite les recoller porte ses fruits. Le résultat clé de ce chapitre est un théorème d'existence de sous-quotients finis d'un groupe algébrique non connexe "contenant toute l'information", ce qui permet de ramener le calcul du groupe de Brauer non ramifié au cas des stabilisateurs finis. Une fois cette existence établie dans la section 3.5, les formules analogues à celles du chapitre 2 n'en sont qu'une conséquence formelle.

Il est important de remarquer ici que la moitié de ce travail est due à Chernousov, Gille et Reichstein qui ont montré dans [CGR08] que, une fois que l'on a un sous-groupe fini, on peut en construire un autre qui sera celui "contenant toute l'information".

Enfin, le chapitre 4 laisse de côté le groupe de Brauer et s'intéresse directement aux questions d'approximation faible et principe de Hasse. Ici, on prend une famille d'espaces homogènes dont le stabilisateur est fini et vérifie de bonnes hypothèses, ce qui permet grâce aux formules développées dans le chapitre 2 d'assurer qu'ils auront un groupe de Brauer non ramifié algébrique trivial, et on montre par une "chasse au diagramme non abélienne" que l'on a la propriété de surjectivité au niveau de la cohomologie galoisienne. Cela se traduit en l'approximation faible pour les espaces homogènes en question. Ce résultat permet par la suite de démontrer le principe de Hasse pour une famille semblable d'espaces homogènes.

Ce chapitre doit son existence notamment aux travaux de Neukirch dans [Neu79], où il établit les mêmes résultats de surjectivité en cohomologie galoisienne, mais dans le cas restreint des groupes finis constants. Cette restriction de sa part s'explique en partie par le fait qu'il étudie dans cet article le problème beaucoup plus général du plongement, plus relié au problème de Galois inverse et qui n'a donc pas de lien direct a priori avec l'approximation faible (en effet, Neukirch ne mentionne jamais l'approximation faible dans son article). Sa preuve, à première vue beaucoup plus technique, s'est trouvée enfin être de la même nature que celle présentée ici, mais elle ne profite pas du langage de la cohomologie galoisienne non abélienne. C'est surtout cet outil qui permet de comprendre les subtilités issues du fait de traiter des groupes finis non constants. En effet, on pourrait même envisager de trouver une généralisation du "Main Theorem" de [Neu79], mais puisque cette généralisation du problème du plongement n'a pas d'interprétation intéressante en termes de théorie de Galois, il ne semble pas pour l'instant

utile de le faire.

N'ayant pas plus à mentionner, je n'ai qu'à vous souhaiter une bonne lecture!<sup>3</sup>

---

3. Et beaucoup de courage! 😊

# Chapitre 1

## Groupe de Brauer non ramifié en caractéristique positive

### 1.1 Introduction

Dans [Har94], Harari démontre le résultat suivant, lequel était déjà apparu (sous une forme quantitative plus précise) dans le cas de l'espace projectif chez Serre pour les éléments de 2-torsion du groupe de Brauer (cf. [Ser90]) :

**Théorème 1.1** (Théorème 2.1.1 de [Har94]). *Soient  $K$  un corps de nombres et  $X$  une  $K$ -variété géométriquement intègre, projective et lisse, dont on note  $K(X)$  le corps de fonctions. Soient  $\alpha$  un élément de  $\text{Br}(K(X))$  qui n'est pas dans  $\text{Br} X$  et  $U$  un ouvert de Zariski non vide de  $X$  tel que  $\alpha \in \text{Br} U$ . Alors, il existe un ensemble infini (de densité non nulle)  $I$  de places  $v$  de  $K$  telles que, si l'on note  $K_v$  le complété de  $K$  par rapport à  $v$ , la flèche  $U(K_v) \rightarrow \text{Br} K_v$  induite par  $\alpha$  prenne une valeur non nulle.*

Il est bien connu qu'il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $K$  tel que, si l'on note  $\mathcal{O}_{K,S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ , il existe un modèle propre et lisse  $\mathcal{X}$  de  $X$  sur  $\mathcal{O}_{K,S}$  avec un ouvert  $\mathcal{U}$ , dont la fibre générique correspond à  $U$ , tel que  $\alpha$  se relève en un élément de  $\text{Br} \mathcal{U}$ . Le critère valuatif de propreté nous permet alors de relever tout  $K_v$ -point de  $\mathcal{X}$  en un  $\mathcal{O}_v$ -point de  $\mathcal{X}$  dès que  $v \notin S$ . En particulier, on voit que l'application  $U(K_v) \rightarrow \text{Br} K_v$  induite par  $\alpha$  se factorise par  $\text{Br} \mathcal{O}_v = 0$  dès que le  $K_v$ -point de  $U$  se relève en un  $\mathcal{O}_v$ -point de  $\mathcal{U}$ , ce qui nous dit que cette application atteint la valeur nulle pour presque toute place (i.e. pour toute place à l'exception d'un nombre fini d'entre elles). De plus, on obtient une réciproque du résultat qui dit que pour tout élément  $\alpha$  de  $\text{Br} X$  et pour presque toute place  $v$  de  $K$  l'application  $X(K_v) \rightarrow \text{Br} K_v$  induite par  $\alpha$  est triviale. Si l'on considère alors une variété  $V$  qui n'est pas propre, ce résultat appliqué à une compactification lisse de  $V$  nous permet de décrire le groupe de Brauer non ramifié  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  d'après le théorème de pureté de Grothendieck (cf. le théorème 0.7 ci-dessus et l'égalité (0.6) qui en découle, cf. aussi [CT95, Prop. 4.2.3]).

Soit maintenant  $K$  un corps global de caractéristique  $p > 0$ , i.e. le corps de fonctions d'une courbe  $C$  sur un corps fini. La preuve du théorème de Harari est totalement adaptable à ce cas, sauf pour le fait que la preuve se base sur le théorème de pureté de Grothendieck, lequel

n'est valable a priori en caractéristique positive que sur la partie de torsion première à  $p$  du groupe de Brauer. On peut alors démontrer le résultat ci-dessous en suivant presque mot pour mot la preuve de Harari :

**Théorème 1.2.** *Soit  $K$  un corps global de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $X$  une  $K$ -variété propre, lisse et géométriquement intègre dont on note  $K(X)$  le corps de fonctions. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  et  $\alpha \in \text{Br } U \subset \text{Br}(K(X))$  un élément d'ordre  $n$  premier à  $p$  tel que  $\alpha \notin \text{Br } X$ . Alors il existe un ensemble infini (de densité non nulle)  $I$  de places  $v$  de  $K$  telles que l'application  $U(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$  induite par  $\alpha$  soit non triviale.*

Si l'on considère maintenant une  $K$ -variété  $V$  qui n'est pas propre, il n'est pas a priori évident que l'on puisse utiliser ce résultat pour décrire le groupe  $\text{Br}_{\text{nr}} V\{p'\}$ , où  $\{p'\}$  veut dire que l'on prend les éléments de torsion première à  $p$ , car on ne dispose pas d'équivalent en caractéristique positive au théorème d'Hironaka sur la résolution des singularités, donc l'existence d'une compactification lisse de  $V$  n'est pas assurée. Cependant, grâce à un résultat de Gabber qui précise le théorème de de Jong sur les altérations (cf. [ILO12, X, Thm. 2.1]), Borovoi, Demarche et Harari ont récemment démontré le sens "facile" de cette description (cf. [BDH13, Prop. 4.2]), i.e. que pour tout élément  $\alpha$  de  $\text{Br}_{\text{nr}} V\{p'\}$  et pour presque toute place  $v$  de  $K$  l'application  $V(K_v) \rightarrow \text{Br } K_v$  induite par  $\alpha$  est triviale.

En utilisant le même résultat de Gabber, on peut montrer une version affaiblie de la réciproque, ainsi qu'une version analogue pour les corps finis.

## 1.2 Résultats principaux

La version affaiblie annoncée pour les corps globaux correspond au résultat suivant.

**Théorème 1.3.** *Soient  $K$  un corps global de caractéristique  $p$  et  $V$  une  $K$ -variété lisse et géométriquement intègre. Soit  $\alpha \in \text{Br } V$  un élément d'ordre  $n$  premier à  $p$ . Alors  $\alpha$  appartient à  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  si et seulement si, pour presque toute place  $v$  de  $K$ , l'application  $V(L) \rightarrow \text{Br } L$  induite par  $\alpha$  est nulle pour toute extension  $L/K_v$  finie et purement inséparable.*

*Remarque.*

L'auteur ignore si cette version affaiblie du résultat est optimale ou pas, i.e. s'il suffit de regarder les  $K_v$ -points et non pas les  $L$ -points pour toute extension  $L/K_v$  purement inséparable. La démonstration actuelle ne laisse aucune piste sur comment arriver à un tel résultat.

Il est cependant important de remarquer que ce défaut n'est en général pas gênant au moment des applications, comme on le verra dans les chapitres suivants.

Notre démarche sera d'abord de démontrer le résultat admettant l'existence d'une compactification lisse, ce qui revient à démontrer le théorème de Harari en caractéristique positive. Pour cela, on suit les pas de la preuve donnée par Harari en faisant tout simplement les modifications nécessaires pour que certains résultats utilisés restent vrais en caractéristique positive et pour  $X$  propre au lieu de projective. Puis, on généralise ce résultat ayant aussi recours au théorème de Gabber. La subtilité du résultat vient de ce que l'on joue avec des corps imparfaits, donc avec des extensions inséparables.

Enfin, en utilisant les mêmes techniques, on obtient un critère similaire pour le groupe de Brauer non ramifié d'une variété définie sur un corps fini.

**Théorème 1.4.** *Soient  $k = \mathbb{F}_q$  avec  $q$  une puissance de  $p$  et  $V$  une  $k$ -variété lisse et géométriquement intègre. Soit  $\alpha \in \text{Br } V$  un élément d'ordre  $n$  premier à  $p$ . Alors  $\alpha$  appartient à  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  si et seulement si, pour toute extension finie  $L$  de  $k$ , l'application  $V(L((t))) \rightarrow \text{Br } L((t))$  induite par  $\alpha$  est nulle.*

### 1.3 Résultats préliminaires

On démontre dans cette section le théorème 1.2, ainsi que quelques résultats élémentaires sur les extensions inséparables qui nous seront utiles dans la démonstration du théorème 1.3.

#### 1.3.1 Démonstration du théorème 1.2

On commence avec une proposition nous permettant de passer à un modèle entier de la situation tout en gardant l'information disant que  $\alpha$  est "ramifié" (i.e. n'appartient pas à  $\text{Br } X$ ). Pour un ensemble fini  $S$  de places de  $K$ , on note  $\mathcal{O}_{K,S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ .

**Proposition 1.5.** *Soit  $X$  une  $K$ -variété propre, lisse et géométriquement intègre et soit  $\alpha \in \text{Br } K(X)$  un élément d'ordre  $n$  premier à  $p$  qui n'est pas dans  $\text{Br } X$ . Alors il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $K$  et un modèle propre lisse  $\mathcal{X}$  de  $X$  sur  $\mathcal{O}_{K,S}$ , un ouvert affine non vide  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{X}$  et un fermé  $\mathcal{B}$  intègre de codimension 1 de  $\mathcal{V}$ , lisse sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$ , tels que :*

- Si  $\mathcal{U}$  désigne le complémentaire de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{V}$ , on a  $\alpha \in \text{Br } \mathcal{U}$ .
- Le résidu  $\mathcal{I}$  de  $\alpha$  au point générique de  $\mathcal{B}$  est un élément non nul de  $H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* On sait qu'il existe toujours un ensemble fini  $S$  de places de  $K$  tel que  $X$  admette un modèle propre lisse  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{O}_{K,S}$  à fibres géométriquement intègres et que  $\alpha$  s'étend alors en un élément de  $\text{Br } \mathcal{U}$  pour un certain ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{X}$ . On note toujours  $\alpha$  cet élément.

Soient  $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_r$  les composantes irréductibles (donc intègres si on les considère avec leur structure réduite) du complémentaire de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{X}$ . Quitte à réduire  $\mathcal{U}$ , on peut supposer qu'elles sont toutes de codimension 1 et, quitte à élargir  $S$ , on peut supposer qu'elles ne sont pas des diviseurs verticaux (i.e. elles ne correspondent pas à la fibre d'un point point fermé de  $\text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$  dans  $\mathcal{X}$ ). Les  $\mathcal{Z}_i$  étant alors des diviseurs, ils ont un anneau à valuation discrète associé dont le corps de fractions est le corps de fonctions de  $\mathcal{X}$  et dont le corps résiduel  $\kappa_i$  correspond au corps résiduel du point générique du diviseur. On considère alors les applications de résidu

$$\delta_i : H^2(K(\mathcal{X}), \mu_n) \rightarrow H^1(\kappa_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

D'après le théorème de pureté de Grothendieck (c.f. [CT95, Prop. 2.1.8 et 4.2.3]), on sait qu'au moins l'un des  $\delta_i(\alpha)$  est non nul puisque,  $\alpha$  appartenant à  $\text{Br } \mathcal{U}$ , il s'annule pour toute application résidu provenant d'un diviseur qui croise  $\mathcal{U}$ .

Prenons un  $i_0$  tel que  $\mathcal{I} := \delta_{i_0}(\alpha) \in H^1(\kappa_{i_0}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  soit non nul. On sait qu'il existe un ouvert non vide et lisse  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{Z}_{i_0}$  tel que  $\mathcal{I} \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Quitte à réduire cet ouvert, on peut supposer qu'il ne rencontre pas les autres  $\mathcal{Z}_i$ . Soit alors  $\mathcal{V}$  l'ouvert  $\mathcal{U} \cup \mathcal{B}$  de  $\mathcal{X}$ . Quitte à réduire encore  $\mathcal{B}$ , on peut supposer que  $\mathcal{V}$  est affine, ce qui conclut.  $\square$

Ayant condensé l'information sur  $\alpha$  dans l'élément  $\mathcal{I} \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , il s'agit maintenant de voir ce qu'on obtient de  $\mathcal{I}$  lorsqu'on se donne un  $K_v$ -point  $P_v$  de  $\mathcal{U}$  pour une place  $v$  de  $K$ . Si l'on note  $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $K_v$  et  $\kappa_v$  son corps résiduel, on sait que, si  $v \notin S$ ,  $P_v$  peut toujours être relevé en un  $\mathcal{O}_v$ -point  $\mathcal{P}_v$ , induisant donc un  $\kappa_v$ -point  $P(v)$ . Or, on dispose de l'application résidu

$$\delta_v : H^2(K_v, \mu_n) \rightarrow H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

On verra alors que l'image de  $\alpha(P_v)$  par  $\delta_v$  est étroitement reliée à la fibre en  $P(v)$  de  $\mathcal{I}$ .

**Lemme 1.6.** *Soit  $\mathcal{W} = \text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$  un ouvert non vide de  $C$ . Soient  $\mathcal{V} = \text{Spec } R$  un  $\mathcal{O}_{K,S}$ -schéma affine et  $t \in R$  un élément tel que le schéma  $\mathcal{B} = \text{Spec } R/t$  soit un sous-schéma fermé intègre et régulier (de codimension 1) de  $\mathcal{V}$ . On note  $R_{(t)}$  le localisé de  $R$  par rapport à l'idéal  $(t)$  et  $R_t$  le localisé de  $R$  par rapport à la partie multiplicative  $\{t^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . On a dans ce cas  $\mathcal{V} \setminus \mathcal{B} = \text{Spec } R_t$ . On note enfin  $F$  le corps de fractions de  $R$  et  $\kappa$  le corps résiduel de  $R_{(t)}$  (qui est aussi le corps de fractions de  $R/t$ ).*

*Soit  $\alpha \in \text{Br } R_t \subset \text{Br } F$  un élément de  $n$ -torsion avec  $n$  premier à la caractéristique de  $K$  et soit  $\chi_t$  l'image de  $\alpha$  par l'application résidu*

$$\delta_t : H^2(F, \mu_n) \rightarrow H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

*On suppose que  $\chi_t$  est dans  $H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Alors, il existe un ouvert  $\omega$  de  $\mathcal{V}$  d'intersection non vide avec  $\mathcal{B}$  vérifiant la propriété suivante :*

*Pour tout  $\mathcal{O}_v$ -point  $s$  de  $\omega \subset \mathcal{V}$ , si l'on note  $e$  la valuation de l'image de  $t$  par le morphisme  $R \rightarrow \mathcal{O}_v$  induit par  $s$  et si l'on suppose que  $0 < e < \infty$ , alors on a*

$$\delta_v(s_1^*(\alpha)) = es_2^*(\chi_t),$$

*où  $s_1 : \text{Spec } K_v \rightarrow \text{Spec } R_t = \mathcal{V} \setminus \mathcal{B}$  et  $s_2 : \text{Spec } \kappa_v \rightarrow \text{Spec } R/t = \mathcal{B}$  sont les morphismes induits par  $s$  (qui sont bien définis d'après l'hypothèse sur  $e$ ) et où  $s_1^* : \text{Br } R_t \rightarrow \text{Br } K_v$  et  $s_2^* : H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  sont les flèches naturelles induites par  $s_1$  et  $s_2$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer que l'on peut supposer que  $R$  est complet pour la topologie définie par l'idéal  $(t)$ . Soit  $\hat{R}$  le complété de  $R$  par rapport à cette topologie et soit  $\hat{\mathcal{V}} = \text{Spec } \hat{R}$ . Puisque l'anneau  $\mathcal{O}_v$  est complet, tout  $\mathcal{O}_v$ -point de  $\mathcal{V}$  se factorise par  $\hat{\mathcal{V}}$ .

Supposons donc que l'on a trouvé un ouvert  $\hat{\omega}$  de  $\hat{\mathcal{V}}$  vérifiant la propriété de l'énoncé par rapport au sous-schéma fermé  $\hat{\mathcal{B}} = \text{Spec } \hat{R}/t$ . Le fermé complémentaire de  $\hat{\omega}$  est une réunion finie de sous-schémas affines  $\text{Spec } R_i$  de  $\hat{\mathcal{V}}$  et la restriction de l'application  $p : \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$  à chacun d'eux peut être vue comme un morphisme d'anneaux  $R \rightarrow R_i$ . La proposition 6.F de [Mat70] nous dit alors que l'image de ce fermé dans  $\mathcal{V}$  est une intersection de constructibles ne contenant pas le point générique de  $\mathcal{V}$ , donc elle est incluse dans un fermé strict de  $\mathcal{V}$ . On peut alors définir un ouvert  $\omega$  de  $\mathcal{V}$  comme le complémentaire de ce fermé. L'image réciproque de  $\omega$  par  $p$  est alors clairement contenue dans  $\hat{\omega}$  et l'intersection de  $\omega$  avec  $\mathcal{B}$  est non vide (on applique le même raisonnement à  $\hat{\omega} \cap \hat{\mathcal{B}}$ ). Il est clair alors que  $\omega$  vérifie la propriété de l'énoncé.

Cela étant démontré, on voit que l'on a  $R = \varprojlim R/t^n$ , ce qui nous permet de relever  $\chi_t \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  en un élément  $\chi \in H^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , que l'on peut regarder alors aussi comme

un élément de  $H^1(\text{Spec } R_{(t)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  ou encore de  $H^1(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Le diagramme commutatif suivant explique ces affirmations et d'autres qui apparaîtront plus tard.

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\text{Spec } R_{(t)}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
\downarrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\
H^1(\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & & H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
\downarrow s_1^* & \searrow s^* & \searrow s_2^* & & \\
H^1(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longleftarrow & H^1(\mathcal{O}_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
\chi & \longrightarrow & \chi & \longrightarrow & \chi \\
\downarrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\
\chi & & \chi t & \longrightarrow & \chi t \\
\downarrow & \searrow & \searrow & & \searrow \\
\chi_1 = s_1^*(\chi) & \longleftarrow & s^*(\chi) & \longrightarrow & \chi_2 = s_2^*(\chi t)
\end{array}$$

Considérons alors le cup-produit  $\beta = \chi \cup t$ , où  $t$  est vu comme un élément de  $H^1(F, \mu_n) = F^*/(F^*)^n$ . On a  $\beta \in H^2(F, \mu_n) \subset \text{Br } F$ . D'après [CTO89, Prop. 1.3], on a que  $\delta_t(\beta) = \chi_t$ , donc  $\delta_t(\beta - \alpha) = 0$ . De la suite exacte dans [CTO89, Prop. 1.1] appliquée à l'anneau de valuation discrète  $R_{(t)}$  on en déduit que  $\beta - \alpha$  vient de  $\text{Br } R_{(t)}$ . Puisque  $\text{Spec } R_{(t)}$  est formé des points génériques de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{B}$ , ceci nous dit qu'il existe un ouvert  $\omega$  de  $\mathcal{V}$  contenant le point générique de  $\mathcal{B}$  (donc d'intersection non vide avec  $\mathcal{B}$ ) tel que  $\beta - \alpha$  soit dans  $\text{Br } \omega$ . Ainsi, si  $s$  est un  $\mathcal{O}_v$ -point de  $\omega$  tel que la valuation de l'image de  $t$  est strictement positive, on aura  $s_1^*(\beta - \alpha) \in \text{Br } \mathcal{O}_v$ , donc en particulier  $\delta_v(s_1^*(\beta - \alpha)) = 0$  puisque  $\text{Br } \mathcal{O}_v$  est nul. On voit alors qu'il suffit de démontrer l'égalité de l'énoncé pour  $\beta$  au lieu de  $\alpha$ .

En regardant maintenant  $\chi$  comme un élément de  $H^1(\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  et  $t$  comme un élément de  $H^1(\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}, \mu_n) = R_t^*/(R_t^*)^n$ , on définit  $\chi_1 = s_1^*(\chi)$  et  $t_1 = s_1^*(t)$ . On a alors  $s_1^*(\beta) = \chi_1 \cup t_1$ . Or, puisque  $\chi$  provient originellement de  $H^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , on voit que  $\chi_1$  provient lui de  $H^1(\mathcal{O}_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  (c'est en fait  $s^*(\chi)$ , c.f. le diagramme ci-dessus). Toujours par la proposition 1.3 de [CTO89], on a que  $\delta_v(\chi_1 \cup t_1) = e\chi_2$ , où  $\chi_2$  est l'image de  $s^*(\chi)$  dans  $H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Or, le diagramme nous dit que  $\chi_2 = s_2^*(\chi t)$ , donc on trouve finalement que  $\delta_v(s_1^*(\beta)) = \delta_v(\chi_1 \cup t_1) = es_2^*(\chi t)$ , ce qui conclut.  $\square$

**Corollaire 1.7.** *Soient  $K$ ,  $X$  et  $\alpha$  comme dans la proposition 1.5 et soient  $S$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{V} = \text{Spec } R$ ,  $\mathcal{B} = \text{Spec } R/t$ ,  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{B} = \text{Spec } R_t$  et  $\mathcal{I}$  les objets ainsi obtenus. Alors, il existe un ouvert  $\omega$  de  $\mathcal{V}$  d'intersection non vide avec  $\mathcal{B}$  vérifiant la propriété suivante :*

*Pour tout  $K_v$ -point  $P_v$  dans  $\mathcal{U}$  correspondant à un  $\mathcal{O}_v$ -point  $\mathcal{P}_v$  dans  $\omega \subset \mathcal{V}$  et induisant donc un  $\kappa_v$ -point  $P(v)$  aussi dans  $\mathcal{V}$ , si l'on note  $e$  la valuation de l'image de  $t$  par le morphisme  $R \rightarrow \mathcal{O}_v$  correspondant à  $\mathcal{P}_v$ , alors*

1. *Si  $P(v) \notin \mathcal{B}(\kappa_v)$ , alors  $\delta_v(\alpha(P_v)) = 0$ .*
2. *Si  $P(v) \in \mathcal{B}(\kappa_v)$ , alors  $\delta_v(\alpha(P_v)) = e\mathcal{I}_v$ , où  $\mathcal{I}_v \in H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est l'élément obtenu en prenant la fibre en  $P(v)$  de  $\mathcal{I} \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Si  $P(v)$  est dans  $\mathcal{U}(\kappa_v)$ , alors  $\mathcal{P}_v$  est totalement à valeurs dans  $\mathcal{U}$ , ce qui entraîne que  $\alpha(P_v)$  correspond en fait à l'élément  $\alpha(P_v) \in \text{Br } \mathcal{O}_v$  et est donc nul puisque  $\text{Br } \mathcal{O}_v$  est trivial.

Maintenant, si  $P(v)$  est dans  $\mathcal{B}(\kappa_v)$ , l'ouvert  $\omega$  est bien donné par le lemme 1.6. En effet, la proposition 1.5 est faite pour que ces objets vérifient les hypothèses du lemme. Les flèches  $s_1^*$  et  $s_2^*$  du lemme correspondent ici aux flèches associées aux points  $P_v$  et  $P(v)$ , donc  $s_1^*(\alpha)$  correspond bien à  $\alpha(P_v)$  et  $s_2^*(\chi_t)$  correspond lui à  $\mathcal{I}_v$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

Ayant cette description du résidu de  $\alpha(P_v)$  pour un  $K_v$ -point  $P_v$  donné, il s'agit maintenant de trouver une infinité de  $K_v$ -points tels que le résidu correspondant est non trivial, car cela veut dire en particulier que  $\alpha(P_v)$  est non nul. Or, puisque le groupe  $H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  classe les  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -torseurs sur  $\mathcal{B}$ , le résidu  $\mathcal{I}$  correspond à un revêtement cyclique non trivial de  $\mathcal{B}$ . De même,  $\mathcal{I}_v$  correspondra à la spécialisation de ce revêtement et on a intérêt à ce qu'il reste non trivial. La proposition suivante va dans ce sens et nous permet alors de conclure l'argument au facteur  $e$  près, dont on s'occupera ensuite.

**Proposition 1.8.** *Soit  $K$  un corps global de caractéristique  $p$  et  $\mathcal{W} = \text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$  un ouvert non vide de  $C$ . Soit  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$  un morphisme dominant tel que la fibre générique  $B$  soit une  $K$ -variété intègre. Soit  $\rho : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}$  un revêtement étale, connexe, cyclique, de degré  $m \geq 2$  de  $\mathcal{B}$ . On dispose, pour presque toute place  $v$  de  $K$  (i.e. pour toute place sauf une quantité finie), des réductions respectives  $\mathcal{B}_v = \mathcal{B} \times_{\mathcal{W}} \kappa_v$  et  $\mathcal{Y}_v = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \kappa_v$  au dessus du corps résiduel  $\kappa_v$ .*

*Alors, il existe un ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $\mathcal{B}$  et un ensemble infini  $I$  de places  $v$  de  $K$  tels que, en notant  $\mathcal{U}_2 = \rho^{-1}(\mathcal{U}_1)$ , on ait :*

1. *Pour toute place  $v$  de  $I$ , le revêtement étale  $\rho_v : (\mathcal{U}_2)_v \rightarrow (\mathcal{U}_1)_v$  reste connexe.*
2. *Si  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $\mathcal{U}_1$ , sa réduction  $\Omega_v$  au-dessus de  $\kappa_v$  admet, pour presque toute place  $v$  de  $I$ , un  $\kappa_v$ -point  $P(v)$  vérifiant : l'action de  $\Gamma_v = \text{Gal}(\bar{\kappa}_v/\kappa_v)$  sur les  $\bar{\kappa}_v$ -points de  $\mathcal{Y}$  au-dessus de  $P(v)$  n'est pas triviale.*

*Démonstration. Cas 1 :  $\mathcal{B}$  est géométriquement intègre.* Dans ce cas on peut poser  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{B}$  et  $\mathcal{U}_2 = \mathcal{Y}$ . En effet, soit  $Y$  la fibre générique de  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{W}$  et soient  $K(B)$ ,  $K(Y)$  les corps des fonctions de  $B$  et  $Y$  respectivement. Soient  $L$  et  $L'$  les fermetures intégrales respectives de  $K$  dans  $K(B)$  et  $K(Y)$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est géométriquement intègre, on a  $L = K$ , tandis que  $L'/K$  est une extension cyclique (triviale si  $\mathcal{Y}$  est géométriquement intègre). Le théorème de Čebotarev nous dit qu'il existe un ensemble infini  $I$  de places  $v$  de  $K$  qui restent inertes pour cette extension. Pour ces places, si l'on note  $w$  la seule place au-dessus de  $v$ , le revêtement étale  $\rho_v : \mathcal{Y}_v \rightarrow \mathcal{B}_v$  se factorise par  $\mathcal{B}_w := \mathcal{B}_v \times_{\kappa_v} \kappa_w$ . Il est évident que, dès que l'extension  $L'/K$  est non triviale, la fibre d'un  $\kappa_v$ -point dans  $\mathcal{B}_w$  admet une action non triviale de  $\Gamma_v$ . En particulier, la fibre de  $\rho_v$  au dessus d'un tel point admet aussi une action non triviale de  $\Gamma_v$ .

Soit alors  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathcal{B}$ . Démontrons qu'il existe un  $\kappa_v$ -point sur  $\Omega_v$  pour presque toute place  $v$  de  $I$ . Le lemme de Chow nous dit qu'il existe une variété  $\mathcal{B}'$  projective sur  $\mathcal{W}$  et un  $\mathcal{W}$ -morphisme  $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  induisant un isomorphisme sur un ouvert non vide de  $\mathcal{B}$ . Alors, quitte à restreindre  $\Omega$ , on peut supposer qu'il correspond à un ouvert de  $\mathcal{B}'$ . On rappelle alors le théorème classique,

**Théorème 1.9** (Lang-Weil). *Il existe une constante  $C(n, r, d)$  telle que, pour tout corps fini  $k$  de cardinal  $q$  et toute sous-variété fermée  $X$  géométriquement intègre de  $\mathbb{P}_k^n$  de degré  $d$  et dimension  $r$ , on ait :*

$$|\#X(k) - q^r| < C(n, r, d)q^{r-\frac{1}{2}}.$$

Pour une place  $v$ , notons  $q_v$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa_v$ . Comme le fermé complémentaire  $F_v$  de  $\Omega_v$  dans  $\mathcal{B}'_v$  est de dimension strictement inférieure à celle de  $\Omega_v$ , le théorème de Lang-Weil nous dit que, pour  $q_v$  assez grand, le quotient  $\#\Omega_v(\kappa_v)/q_v^r$  (où  $r$  est la dimension de  $\mathcal{B}'_v$ , donc de  $\Omega_v$ ) sera aussi proche de 1 qu'on le voudra. En effet, on a

$$\left| \frac{\#\Omega_v(\kappa_v)}{q_v^r} - 1 \right| = \left| \frac{\#\mathcal{B}'_v(\kappa_v) - \#F_v(\kappa_v)}{q_v^r} - 1 \right|,$$

et  $\#\mathcal{B}'_v(\kappa_v)/q_v^r$  tend vers 1, tandis que  $\#F_v(\kappa_v)/q_v^r$  tend vers 0 (lorsque  $q_v$  tend vers l'infini). Il est clair alors qu'il existe un  $\kappa_v$ -point sur  $\Omega_v$  dès que  $q_v$  est assez grand, donc pour presque toute place  $v$  dans  $I$ .

Reste à voir le cas où l'extension  $L'/K$  est triviale. Ceci veut dire que  $\mathcal{Y}$  est géométriquement intègre. Soit alors  $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ . C'est un revêtement étale de  $\mathcal{B}'$ , donc en particulier une variété projective sur  $\mathcal{W}$ . Le même argument que l'on a donné pour  $\Omega_v$  marche alors pour  $\rho_v^{-1}(\Omega_v) \subset \mathcal{Y}'$  (qui est aussi de dimension  $r$ ), i.e. le quotient  $\#\rho_v^{-1}(\Omega_v)(\kappa_v)/q_v^r$  tend vers 1. On voit alors que, toujours pour  $q_v$  assez grand, on a

$$\left| \frac{\#\rho_v^{-1}(\Omega_v)(\kappa_v) - \#\Omega_v(\kappa_v)}{\#\Omega_v(\kappa_v)} \right| = \left| \frac{\#\rho_v^{-1}(\Omega_v)(\kappa_v)}{q^r} \frac{q^r}{\#\Omega_v(\kappa_v)} - 1 \right| < \varepsilon < m - 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\#\rho_v^{-1}(\Omega_v)(\kappa_v) < m \cdot \#\Omega_v(\kappa_v).$$

Puisqu'un  $\kappa_v$ -point de  $\Omega_v$  a au plus  $m$   $\kappa_v$ -points au-dessus de lui, on voit que, lorsque  $q_v$  est assez grand, il existe un  $\kappa_v$ -point de  $\Omega_v$  tel que la fibre de  $\rho_v$  en  $P(v)$  a des  $\bar{\kappa}_v$ -points sur lesquels l'action de  $\Gamma_v$  est non triviale. On voit alors que dans ce cas on peut même prendre comme  $I$  l'ensemble de toutes les places de  $K$ .

**Cas 2 : situation générale.** Supposons maintenant que  $\mathcal{B}$  n'est pas géométriquement intègre. On sait qu'il existe un ouvert  $U_1$  de  $B$  tel que la flèche  $U_1 \rightarrow \text{Spec } K$  se factorise par  $\text{Spec } L$ .  $U_1$  est alors un  $L$ -schéma géométriquement intègre. On sait alors qu'il existe un ouvert non vide  $\mathcal{W}_L$  de  $\text{Spec } \mathcal{O}_L$  sur  $\mathcal{W}$  tel que la flèche  $\mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{W}$  se factorise par un morphisme  $\mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{W}_L$  dont la fibre générique est  $U_1 \rightarrow \text{Spec } L$ . On pose alors  $\mathcal{U}_2 = \rho^{-1}(\mathcal{U}_1)$ . D'après le cas 1, on sait qu'il existe un ensemble infini  $I_L$  de places  $w$  de  $L$  telles que  $(\mathcal{U}_2)_w \rightarrow (\mathcal{U}_1)_w$  soit un revêtement étale connexe et, pour tout ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathcal{U}_1$  et pour presque toute  $w$ ,  $\Omega_w$  admette un  $\kappa_w$ -point dont la fibre par  $\rho_w$  admet une action non triviale de  $\Gamma_w = \text{Gal}(\bar{\kappa}_w/\kappa_w)$ .

Il suffit alors de démontrer que  $I_L$  (qui correspond aux places inertes pour l'extension  $L'/L$ ) admet un sous-ensemble infini  $I'$  tel que, pour tout  $w \in I'$ , la restriction  $v$  de  $w$  à  $K$  est telle que  $\kappa_v = \kappa_w$ . En effet, dans ce cas le revêtement  $(\mathcal{U}_2)_w \rightarrow (\mathcal{U}_1)_w$  correspond au revêtement  $(\mathcal{U}_2)_v \rightarrow (\mathcal{U}_1)_v$  et les  $\kappa_w$  points de  $\Omega_w$  correspondent à des  $\kappa_v$ -points de  $\Omega_v$  dont l'action de  $\Gamma_v = \Gamma_w$  sur leur fibre par  $\rho_v$  sera non triviale. Enfin, il est évident que l'ensemble  $I$  des  $v$  ainsi obtenus est infini car toute place  $v$  de  $K$  n'a qu'un nombre fini de places  $w$  de  $L$  en-dessus. Or,

le théorème de Čebotarev nous dit que l'ensemble de places inertes pour l'extension  $L'/L$  est de densité non nulle et le lemme 1.10 ci-dessous nous dit que l'ensemble de places de  $L$  ayant le même corps résiduel que la place induite respectivement sur  $K$  a une densité égale à 1, ce qui nous dit que  $I'$  a une densité non nulle et il est alors forcément infini, ce qui nous permet de conclure.  $\square$

**Lemme 1.10.** *Soit  $L/K$  une extension finie et séparable de corps globaux. Soit  $I$  l'ensemble des places  $w$  de  $L$  telles que, si l'on note  $v$  la place induite sur  $K$ , on a  $\kappa_w = \kappa_v$ . Alors  $I$  a une densité  $\delta(I)$  égale à 1.*

*Démonstration.* Soit  $P_K$  l'ensemble des places de  $K$  qui sont totalement décomposées pour l'extension  $L/K$ . Il est un fait connu que la densité  $\delta(P_K)$  de  $P_K$  est supérieure ou égale à  $1/n$ , où  $n = [L : K]$ . Soit  $P_L$  l'ensemble de places de  $L$  qui sont en dessus d'une place dans  $P_K$ . Il suffit alors de démontrer que l'on a  $\delta(P_L) = 1$ , puisque  $P_L \subset I$ . En effet, on a bien  $\kappa_w = \kappa_v$  pour  $w \in P_L$  et  $v = w|_K$ .

Si l'on note  $N(v)$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa_v$ , la densité  $\delta(P_L)$  est donnée par la formule

$$\delta(P_L) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{w \in P_L} N(w)^{-s}}{-\log(s-1)},$$

c.f. par exemple [Ros02, Chap. 9]. Puisque pour toute place  $v \in P_K$  il existe  $n$  places  $w \in P_L$  au-dessus de  $v$  et qu'elles vérifient  $N(w) = N(v)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta(P_L) &= \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{w \in P_L} N(w)^{-s}}{-\log(s-1)} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{v \in P_K} nN(v)^{-s}}{-\log(s-1)} = \\ &= n \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{v \in P_K} N(v)^{-s}}{-\log(s-1)} = n\delta(P_K) \geq n \frac{1}{n} = 1, \end{aligned}$$

ce qui conclut.  $\square$

En mettant ensemble tout ce qu'on a fait, on donne enfin la démonstration complète du résultat.

*Démonstration du Théorème 1.2.* Soit  $X$  une  $K$ -variété propre, lisse et géométriquement intègre. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  et  $\alpha \in \text{Br } U \subset \text{Br } K(X)$  un élément d'ordre  $n$  premier à  $p$  tel que  $\alpha \notin \text{Br } X$ . La proposition 1.5 nous donne un modèle propre lisse  $\mathcal{X}$  de  $X$  sur un ouvert non vide  $\mathcal{W} = \text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$  de  $C$ , un ouvert affine non vide  $\mathcal{V} = \text{Spec } R$  de  $\mathcal{X}$  et un fermé  $\mathcal{B} = \text{Spec } R/t$  de  $\mathcal{V}$  intègre, lisse et de codimension 1, tels que  $\alpha \in \text{Br } \mathcal{U}$ , où  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{B} = \text{Spec } R_t$ , et le résidu  $\mathcal{I}$  de  $\alpha$  au point générique de  $\mathcal{B}$  est un élément non nul de  $H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .

En appliquant le corollaire 1.7, on trouve un ouvert  $\omega$  de  $\mathcal{V}$  (et, quitte à réduire  $\mathcal{V}$ , on peut supposer que  $\omega = \mathcal{V}$ ) sur lequel on peut calculer le résidu de  $\alpha(P_v)$  dans  $H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  pour un  $K_v$  point  $P_v$  de  $\mathcal{U}$ . D'après cette formule, il s'agit de trouver, pour une infinité de places  $v$  de  $K$ , un  $\kappa_v$  point  $P(v)$  de  $\mathcal{B}$  tel que la fibre  $\mathcal{I}_v \in H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  de  $\mathcal{I}$  en  $P(v)$  soit non nulle, puis de relever  $P(v)$  en un  $\mathcal{O}_v$ -point  $\mathcal{P}_v$  de  $\mathcal{V}$  induisant un  $K_v$ -point  $P_v$  de  $\mathcal{U}$  et tel que la valuation  $e$  de l'image de  $t$  par le morphisme  $R \rightarrow \mathcal{O}_v$  induit par  $\mathcal{P}_v$  soit 1. Ainsi, on aura que

$\delta_v(\alpha(P_v)) = e\mathcal{I}_v = \mathcal{I}_v \neq 0$  et alors  $\alpha(P_v)$  sera forcément non nul, ce qui conclut l'argument.

Puisque  $\mathcal{I}$  est un élément non nul de  $H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  et que cet ensemble classe les  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -torseurs sur  $\mathcal{B}$ , on sait que  $\mathcal{I}$  correspond à un revêtement étale cyclique non trivial  $\rho_0 : \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{B}$  de degré  $n$ . Le fait que  $\rho_0$  soit non trivial se traduit par le fait qu'il se factorise par un sous-revêtement étale, connexe, cyclique et non trivial  $\rho : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}$  de degré  $m$  divisant  $n$  (il suffit en effet de prendre une des composantes connexes de  $\mathcal{Y}_0$ , laquelle ne peut pas être isomorphe à  $\mathcal{B}$ , car dans ce cas  $\rho_0$  correspondrait à l'élément trivial de  $H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ). Comme  $\mathcal{B}$  est intègre, la proposition 1.8 nous dit qu'il existe une infinité de places  $v$  de  $K$  telles qu'il existe un  $\kappa_v$ -point  $P(v)$  de  $\mathcal{B}$  tel que l'action du groupe de Galois  $\Gamma_v = \text{Gal}(\bar{\kappa}_v/\kappa_v)$  sur la fibre de  $\rho$  au-dessus de  $P(v)$  est non triviale, donc aussi sur la fibre de  $\rho_0$ . Or, cette fibre n'est rien d'autre que le spectre d'une  $\kappa_v$ -algèbre étale  $A_v$  de degré  $n$  et l'action non triviale de  $\Gamma_v$  sur  $A_v$  entraîne qu'il ne s'agit pas de l'algèbre  $\kappa_v^n$ .  $A_v$  correspond alors à un élément non trivial  $\mathcal{J}_v$  de  $H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , qui est l'ensemble qui classe les  $\kappa_v$ -algèbres étales galoisiennes de groupe de Galois  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Or, l'image  $\mathcal{I}_v$  de  $\mathcal{I}$  par l'application

$$H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\kappa_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

induite par  $P(v)$  est précisément l'élément  $\mathcal{J}_v \neq 0$ .

Finalement, il s'agit de relever le  $\kappa_v$ -point ainsi obtenu en un  $K_v$ -point bien choisi. Fixons une uniformisante  $\pi_v$  de  $\mathcal{O}_v$  et posons  $\mathcal{B}_v := \text{Spec}(R_v/(t - \pi_v))$ , où  $R_v = R \otimes_{\mathcal{O}_{K,S}} \mathcal{O}_v$ . Alors les  $\kappa_v$ -fibres du  $\mathcal{O}_v$ -schéma  $\mathcal{B}_v$  et de  $\mathcal{B}$  sont isomorphes (cela revient à démontrer que  $R_v/(t - \pi_v) \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa_v \cong R/t \otimes_{\mathcal{O}_{K,S}} \kappa_v$ ). D'après le lemme de Hensel (c.f. [SGA3II, XI, Cor. 1.11]), on peut relever  $P(v)$  en un  $\mathcal{O}_v$ -point de  $\mathcal{B}_v$ , ce qui revient à un morphisme  $R_v/(t - \pi_v) \rightarrow \mathcal{O}_v$  induisant un morphisme  $R \rightarrow \mathcal{O}_v$  (i.e. un  $\mathcal{O}_v$ -point  $\mathcal{P}_v$  de  $\mathcal{V}$ ) où il est clair que la valuation  $e$  de l'image de  $t$  est 1. Le  $K_v$ -point  $P_v$  de  $\mathcal{V}$  ainsi induit convient alors.  $\square$

### 1.3.2 Quelques résultats sur les extensions inséparables

L'étude du groupe de Brauer non ramifié dans le cadre général en caractéristique positive (i.e. sans forcément avoir le droit à une compactification lisse) entraîne l'étude des résidus, donc des anneaux  $A$  de valuation discrète sur le corps de fonctions  $K = k(V)$  de la variété  $V$  considérée, cf. [CT95]. Le théorème de Gabber [ILO12, X, Thm. 2.1] nous permet de nous ramener au cas où l'on a une compactification lisse, mais au prix de considérer une extension finie (souvent inséparable) de  $K$ . Les résultats suivants, qui seront utilisés dans la preuve des théorèmes 1.3 et 1.4, nous montrent que l'on ne perd pas d'information par un tel changement de base.

**Proposition 1.11.** *Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de corps de fractions  $K$  de caractéristique  $p$  (on suppose  $A \neq K$ ). Soit  $L/K$  une extension finie purement inséparable et soit  $B$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $L$ . Alors  $B$  est un anneau de valuation discrète et les degrés résiduel et de ramification  $f$  et  $e$  de l'extension  $B/A$  vérifient  $ef \mid [L : K]$ .*

*Démonstration.* Puisque  $L/K$  est purement inséparable, elle se décompose en une suite d'extensions radicielles d'ordre  $p$ . La multiplicativité des degrés  $e$  et  $f$  étant un fait classique, il est facile de voir que l'on peut se restreindre au cas où  $[L : K] = p$ . Soit alors  $x_0 \in K$  tel que

$L = K(x_0^{1/p})$  et, en notant  $v$  la valuation sur  $A$ , soit  $\pi \in A$  tel que  $v(\pi) = 1$ . Alors, quitte à multiplier  $x_0$  par une puissance convenable de  $\pi^p$ , on peut supposer  $x_0 \in A$ .

Supposons d'abord que  $(v(x_0), p) = 1$ . Il existe alors un entier  $n \geq 0$  premier à  $p$  tel que  $v(x_0^n) \equiv 1 \pmod{p}$ . Alors, quitte à changer  $x_0$  par  $x_0^n$  divisé par une puissance convenable de  $\pi^p$  (élément dont la racine  $p$ -ième engendre toujours l'extension  $L/K$ ), on peut supposer que  $v(x_0) = 1$ . On peut alors définir une valuation discrète  $w$  sur  $L$  par la formule suivante.

Pour  $b = a_0 + a_1x_0^{1/p} + \cdots + a_{p-1}x_0^{(p-1)/p} \in L$ , on pose

$$w(b) = \min_{0 \leq i \leq p-1} \{pv(a_i) + i\}.$$

C'est un exercice facile de vérifier que cette formule définit bien une valuation discrète sur  $L$  qui est d'ailleurs la seule valuation telle que  $w(x) = pv(x)$  pour  $x \in K$ . On voit aussi aisément que l'anneau de valuation correspondant à  $w$  est  $A[x_0^{1/p}]$ . Une fois cela admis, il est évident que l'on a  $B = A[x_0^{1/p}]$ , car tout élément  $b \in L \setminus K$  a un polynôme minimal de la forme  $x^p - a$ , avec  $a \in K$ , et alors  $w(b) \geq 0 \Leftrightarrow v(a) \geq 0$ . Dans ce cas, puisque  $B$  est un  $A$ -module de type fini, la théorie classique (cf. [Ser68, I.4]) nous dit que l'on a  $ef = p$  (et donc, plus précisément, on a  $e = p$  et  $f = 1$ ).

Supposons maintenant qu'il n'existe pas d'élément  $x_0$  engendrant  $L/K$  tel que  $(v(x_0), p) = 1$ . Quitte à diviser encore une fois par une puissance convenable de  $\pi^p$ , on peut supposer que l'on a  $v(x_0) = 0$ . On affirme que  $B$  est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal  $\pi B$ , donc d'uniformisante  $\pi$ .

Pour montrer cela, on montre d'abord que  $\pi B$  est le seul idéal maximal de  $B$ , i.e. que l'on a  $B^* = B \setminus \pi B$ . En effet, soit  $b$  un élément dans  $B \setminus \pi B$ . Si  $b \in A$ , on sait alors qu'il appartient à  $A \setminus \pi A = A^*$  et il est donc inversible. Sinon, on sait que  $b^p \in A$  et que  $v(b^p) \equiv 0 \pmod{p}$  par hypothèse. Or, si  $v(b^p) \geq p$ , on peut écrire  $b^p = \pi^p a$  avec  $a \in A$ , ce qui nous dit que  $b = \pi a^{1/p}$  et, puisque clairement  $a^{1/p} \in B$ , on trouve que  $b \in \pi B$ , ce qui est absurde. Finalement, on a que  $v(b^p) = 0$ , ce qui entraîne que  $v(b^{-p}) = -v(b^p) = 0$  et alors  $b^{-p} \in A$ , nous donnant enfin que  $b^{-1} \in B$  et alors  $b \in B^*$ . On en déduit que  $B$  est un anneau local, intègre, différent de  $L$  et d'idéal maximal principal. D'après [Bou64, VI.3, Prop. 9], il suffit pour conclure de démontrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi^n B = 0$ . Or, cela est très simple : soit  $b \in B$  un élément non nul. Alors  $b^p \in A$  et il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\pi^{-np} b^p \notin A$ . On voit alors que  $\pi^{-n} b \notin B$ , ce qui est la même chose que  $b \notin \pi^n B$ .

Il suffit alors pour conclure de noter que dans ce cas on a clairement  $e = 1$ , tandis que  $f = 1$  ou  $p$ , dépendant de la nature de  $x_0$  dans le corps résiduel de  $A$ . Dans tous les cas, on a bien  $ef \mid [L : K]$ . ☺

*Remarque.*

Ce résultat peut aussi être obtenu à partir de la démonstration de [Liu02, Chap. 4, Prop. 1.31].

**Corollaire 1.12.** *Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de corps de fractions  $K$  de caractéristique  $p$ . Soit  $\ell \neq p$  un nombre premier et soit  $L/K$  une extension de degré premier à  $\ell$ . Alors il existe un anneau de valuation discrète  $B \supset A$  de corps de fractions  $L$ , contenant la fermeture intégrale de  $A$  dans  $L$  et tel que les degrés résiduel et de ramification  $f$  et  $e$  de l'extension  $B/A$  vérifient  $(ef, \ell) = 1$ .*

*Démonstration.* Considérons la sous-extension séparable maximale  $K'/K$  de  $L/K$ . Soit  $A'$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K'$  et soient  $P_i$  les idéaux premiers au-dessus de l'idéal maximal de  $A$ . On sait que  $\sum e_i f_i = [K' : K]$  et que ce degré est premier à  $\ell$ . Il existe alors un  $i_0$  tel que  $(e_{i_0} f_{i_0}, \ell) = 1$ . En localisant  $A'$  en l'idéal  $P_{i_0}$ , on obtient un anneau de valuation discrète  $A'_{i_0}$  de corps de fractions  $K'$ . La proposition précédente nous dit alors que la fermeture intégrale  $B$  de  $A'_{i_0}$  dans  $L$  est un anneau de valuation discrète de corps de fractions  $L$  et tel que les degrés  $e'$  et  $f'$  de l'extension  $B/A'_{i_0}$  vérifient  $e' f' = p^\alpha$  pour un certain entier positif  $\alpha$ . La multiplicativité des degrés nous dit alors que l'on a  $ef = e_{i_0} f_{i_0} e' f'$  pour l'extension  $B/A$ , ce qui est bien un nombre premier à  $\ell$  d'après ce qui a été dit ci-dessus. Il est enfin évident que  $B$  contient la fermeture intégrale de  $A$ , car il contient celle de  $A'_{i_0} \supset A$ .  $\square$

**Proposition 1.13.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $K^{\text{al}}$  une clôture algébrique de  $K$  et  $L/K$  une extension finie purement inséparable dans  $K^{\text{al}}$ . Soient  $\Gamma_L$  et  $\Gamma_K$  les groupes de Galois absolus respectifs de  $L$  et  $K$  (par rapport aux clôtures séparables respectives dans  $K^{\text{al}}$ ). Alors le morphisme naturel  $\pi : \Gamma_L \rightarrow \Gamma_K$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Puisque  $L/K$  est purement inséparable, on sait qu'elle correspond à une suite d'extensions radicielles de degré  $p$ . Il est évident alors qu'il suffit de démontrer la proposition pour  $L = K(\alpha^{1/p})$  pour certain  $\alpha \in K$ .

Soit  $\bar{L}$  la clôture séparable de  $L$  dans  $K^{\text{al}}$ . Il est facile de voir qu'elle contient la clôture séparable  $\bar{K}$  de  $K$  dans  $K^{\text{al}}$ . Soit alors  $\sigma \in \Gamma_K = \text{Aut}_K(\bar{K})$ . Pour montrer la surjectivité de  $\pi$ , il s'agit d'étendre  $\sigma$  en un automorphisme  $\sigma_L$  de  $\bar{L}$  fixant  $L$ . Soit donc  $\beta \in \bar{L} \setminus \bar{K}$  et soit  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in L[x]$  son polynôme minimal. On voit alors que  $\beta^p \in \bar{K}$ . En effet,  $P(\beta) = 0$  entraîne

$$P(\beta)^p = \sum_{i=0}^n a_i^p \beta^{pi} = \sum_{i=0}^n a_i^p (\beta^p)^i = Q(\beta^p) = 0,$$

et on voit que les coefficients de  $Q$  sont dans  $K$ , car  $a_i \in L = K[\alpha^{1/p}]$  donne clairement  $a_i^p \in K$ . On pose alors

$$\sigma_L(\beta) := \sigma(\beta^p)^{1/p} \quad \text{pour tout } \beta \in \bar{L}.$$

Il est facile de voir que  $\sigma_L(\beta)$  est uniquement défini (il n'existe qu'une racine  $p$ -ième en caractéristique  $p$ ) et que  $\sigma_L$  est bien un morphisme de corps dont la restriction à  $\bar{K}$  coïncide avec  $\sigma$ . Il suffit alors de montrer que  $\sigma(\beta^p)^{1/p} \in \bar{L}$  et que  $\sigma_L$  fixe  $L$ . Or, on a

$$P(\sigma_L(\beta))^p = \sum_{i=0}^n a_i^p \sigma_L(\beta)^{pi} = \sum_{i=0}^n a_i^p \sigma(\beta^p)^i = Q(\sigma(\beta^p)),$$

et  $\sigma(\beta^p)$  et  $\beta^p$  ont forcément le même polynôme minimal, d'où  $P(\sigma_L(\beta))^p = Q(\beta^p) = 0$  et alors  $P(\sigma_L(\beta)) = 0$ , ce qui nous dit que  $\sigma_L(\beta) \in \bar{L}$ . De plus, pour  $\beta \in L$ , on a  $P(x) = x - \beta$  et alors  $P(\sigma_L(\beta)) = 0$  entraîne clairement que  $\sigma_L(\beta) = \beta$ .

Pour l'injectivité, soit  $\sigma \in \Gamma_L$  un automorphisme fixant  $\bar{K}$  et soit  $\beta \in \bar{L} \setminus \bar{K}$ . On a déjà montré que  $\beta^p \in \bar{K}$ , d'où  $\sigma(\beta)^p = \sigma(\beta^p) = \beta^p$  et alors  $\sigma(\beta) = \beta$  par l'unicité des racines  $p$ -ièmes en caractéristique  $p$ , ce qui conclut.  $\square$

**Corollaire 1.14.** *Soit  $K$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et soit  $L/K$  une extension finie purement inséparable. Soit  $G$  un  $K$ -groupe fini étale (ou plus généralement, tel que  $G(\bar{K}) = G(\bar{L})$ ). Alors le morphisme de restriction en cohomologie galoisienne (ou étale)*

$$H^1(K, G) \rightarrow H^1(L, G),$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* En effet, puisque le morphisme  $\Gamma_L \rightarrow \Gamma_K$  est un isomorphisme compatible avec l'action sur  $G(\bar{K}) = G(\bar{L})$ , le morphisme  $H^1(\Gamma_K, G(\bar{K})) \rightarrow H^1(\Gamma_L, G(\bar{L}))$  est un isomorphisme du point de vue de la cohomologie de groupes profinis, d'où le résultat.  $\square$

## 1.4 Démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4

Ayant démontré le théorème 1.2 valable pour les variétés propres, le théorème 1.3 est alors démontré dans le cas où  $V$  admettrait une compactification lisse  $X$ . On démontre ensuite le cas général en donnant la preuve de Borovoi, Demarche et Harari pour le sens “facile”, puis en généralisant le théorème 1.2 à l'aide du théorème de Gabber pour l'autre sens.

*Démonstration du théorème 1.3.* Puisque le groupe de Brauer est de torsion, on sait qu'il est la somme directe de ses composantes  $\ell$ -primaires avec  $\ell$  un nombre premier. Il suffit alors de démontrer l'énoncé pour un élément  $\alpha \in \text{Br } V_K\{\ell\}$  pour un nombre premier  $\ell \neq p$  donné, i.e. on peut supposer que l'ordre de  $\alpha$  est  $\ell^m$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ .

Le théorème de Nagata (cf. [Con07], [Del10]) nous dit qu'il existe une  $K$ -compactification  $X$  de  $V$  qui n'est pas forcément lisse, i.e. une  $K$ -variété propre  $X$  munie d'une  $K$ -immersion ouverte  $V \hookrightarrow X$ . Le théorème de Gabber nous dit alors qu'il existe une extension finie de corps  $K'/K$  de degré premier à  $\ell$  et une  $\ell'$ -altération  $X' \rightarrow X_{K'}$ , i.e. un morphisme propre, surjectif et génériquement fini de degré premier à  $\ell$ , avec  $X'$  une  $K'$ -variété lisse. On en déduit que  $X'$  est propre et lisse sur  $K'$ . De plus, on peut supposer que  $X'$  est géométriquement intègre. En effet, quitte à prendre une composante connexe de  $X'$  dominant  $X$  (bien choisie pour que le degré générique reste premier à  $\ell$ ), on peut supposer qu'elle est connexe. Il suffit alors de noter que la factorisation de Stein assure l'existence d'une factorisation  $X' \rightarrow \text{Spec } K'' \rightarrow \text{Spec } K'$  telle que  $X'$  est géométriquement connexe sur  $K''$ , donc quitte à changer  $K'$  par  $K''$  (extension qui reste de degré premier à  $\ell$  car  $[K'' : K']$  divise  $[K'(X') : K'(X)]$ ), on a que  $X'$  est géométriquement intègre sur  $K'$  car elle est lisse et géométriquement connexe. On a alors le diagramme commutatif suivant, où les carrés sont cartésiens et les flèches  $\hookrightarrow$  représentent des immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc} V' \hookrightarrow & X' & \\ \downarrow & \downarrow & \\ V_{K'} \hookrightarrow & X_{K'} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ V \hookrightarrow & X & \end{array} \quad (1.4.1)$$

Supposons que  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr}} V$ . Alors, la functorialité du groupe de Brauer non ramifié par rapport aux morphismes dominants (qui découle facilement de la définition de  $\text{Br}_{\text{nr}} V = \text{Br}_{\text{nr}}(k(V)/k)$  et de [CT95, Prop. 3.3.1 et §3.6]) nous dit que  $\alpha' \in \text{Br}_{\text{nr}} V' = \text{Br } X'$  (cf. [CT95, Prop. 4.2.3] pour cette égalité), où  $\alpha'$  est l'image de  $\alpha$  induite par le morphisme dominant  $V' \rightarrow V$  donné par le diagramme (1.4.1). De plus, on sait qu'il existe un ensemble fini de places  $S$  de  $K$  tel que, en notant  $\mathcal{O}_{K,S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ , on peut regarder  $\alpha'$  comme un élément de  $\text{Br } \mathcal{X}'$ , où  $\mathcal{X}'$  est un modèle propre de  $X'$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{K',S'}$ , la fermeture intégrale de  $\mathcal{O}_{K,S}$  dans  $K'$ . Plus généralement, et quitte à retrécir encore  $S$ , on peut supposer que l'on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{V}' & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{V}_{\mathcal{O}_{K',S'}} & \longrightarrow & \mathcal{X}_{\mathcal{O}_{K',S'}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{X}
 \end{array} \tag{1.4.2}$$

où  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{X}$  sont définies sur  $\mathcal{O}_{K,S}$  et  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{X}'$  sur  $\mathcal{O}_{K',S'}$ . On remarque que le diagramme (1.4.1) s'obtient en prenant les fibres génériques du diagramme (1.4.2).

Le morphisme  $V' \rightarrow V$  donné par le diagramme (1.4.1) étant génériquement fini, on sait qu'il existe un ouvert  $U \subset V$  sur lequel le morphisme  $U' = U \times_V V' \rightarrow U$  est fini de degré premier à  $\ell$ . Soit alors  $v$  une place de  $K$  et  $P$  un  $L$ -point de  $U$  pour une extension finie purement inséparable  $L/K_v$ . Il existe une extension finie  $L'$  de  $L$  de degré premier à  $\ell$  et un  $L'$ -point  $P'$  de  $V'$  relevant  $P$ . On sait alors que l'élément  $\alpha'(P') \in \text{Br } L'$  correspond à la restriction de  $\alpha(P) \in \text{Br } L$ . Or, puisque  $\mathcal{X}'$  est propre sur  $\mathcal{O}_{K',S'}$ , on a que, dès que  $v \notin S$ , le  $L'$ -point  $P'$  s'étend en un  $\mathcal{O}_{L'}$ -point  $\mathcal{P}'$ . On en déduit que  $\alpha'(P')$  provient en fait de  $\text{Br } \mathcal{O}_{L'} = 0$  et est donc nul. Il suffit de noter maintenant que, puisque  $[L' : L]$  est premier à  $\ell$ , la restriction  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \text{Br } L \rightarrow \text{Br } L' \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  induit un isomorphisme sur la partie  $\ell$ -primaire, car elle correspond à la multiplication par  $[L' : L]$  sur  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (et cela même pour des extensions inséparables). On a alors que  $\alpha(P) = 0$  si  $v$  n'est pas dans  $S$ .

Pour conclure dans ce sens, on rappelle que l'accouplement  $\text{Br } V_{K_v} \times V(L) \rightarrow \text{Br } L$  est continu pour la topologie  $v$ -adique sur  $V(L)$  (où l'on note toujours  $v$  l'extension unique de la valuation de  $K_v$  à  $L$ ), donc l'annulation de  $\alpha(P)$  sur l'ouvert  $U(L)$  de  $V(L)$  entraîne l'annulation partout car,  $U$  étant un ouvert non vide de la variété lisse  $V$ , le théorème des fonctions implicites nous dit que  $U(L)$  est dense dans  $V(L)$ .

L'un des sens ayant déjà été démontré, on se concentre maintenant sur le cas où  $\alpha \notin \text{Br}_{\text{nr}} V$ . Il faut alors trouver une infinité de places  $v$  de  $K$ , des extensions purement inséparables  $L/K_v$  et des  $L$ -points  $P$  de  $V$  tels que  $\alpha(P) \neq 0$ . On rappelle par ailleurs que  $\alpha$  est d'ordre  $\ell^m$  pour un certain  $\ell \neq p$  premier et  $m \geq 1$ .

Puisque  $\alpha \notin \text{Br}_{\text{nr}} V$ , on sait qu'il existe un anneau de valuation discrète  $A$  de corps de fractions  $K(V)$  et corps résiduel  $\kappa \supset K$  tel que l'image de  $\alpha$  par l'application résidu

$$H^2(K(V), \mu_{\ell^m}) \rightarrow H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}),$$

est non nulle, cf. par exemple [CT95, §2]. Le corollaire 1.12 nous dit qu'il existe un anneau de

valuation discrète  $A' \supset A$  de corps de fractions  $K'(V')$  et corps résiduel  $\kappa'$  tel que, si l'on note  $f = [\kappa' : \kappa]$  et  $e$  l'indice de ramification de  $A'/A$ , on a  $(ef, \ell) = 1$ . De plus, on a que  $\kappa' \supset K'$ , car  $A'$  contient la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K'(V')$  et  $K \subset A$ . Or, d'après [CT95, Prop. 3.3.1], on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(K(V), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow e_{A'/A} \cdot \text{Res} \\ H^2(K'(V'), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}). \end{array}$$

L'argument suivant nous dit alors que l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$  est non nulle : Soit  $\kappa_1$  la sous-extension séparable maximale de  $\kappa'/\kappa$ . On a alors la factorisation suivante de la flèche verticale de droite :

$$H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{e \cdot \text{Res}} H^1(\kappa_1, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}).$$

Le corollaire 1.14 nous dit que la flèche de droite est un isomorphisme, tandis que pour la flèche de gauche on a que  $e[\kappa_1 : \kappa] | ef$  et alors le morphisme est injectif par l'argument classique de restriction-corestriction (lequel a un sens vu que  $\kappa_1/\kappa$  est séparable et que  $ef$  est premier à  $\ell$ ). En particulier, on voit que  $\alpha' \in \text{Br } V'$  n'est pas dans  $\text{Br}_{\text{nr}} V' = \text{Br } X'$ .

Le théorème 1.2 nous donne enfin un ensemble infini  $I'$  de places  $w$  de  $K'$  telles qu'il existe un  $K'_w$ -point  $P'_w$  de  $V'$  tel que  $\alpha'(P'_w) \neq 0$ . Ce  $K'_w$ -point induit évidemment un  $K'_w$ -point  $Q'_w$  de  $V_{K'}$ , donc de  $V$ , tel que  $\alpha(Q'_w) \neq 0$ . Considérons alors la sous-extension séparable maximale  $K \subset K_1 \subset K'$ . L'ensemble  $I'$ , qui est de densité non nulle, induit par restriction un ensemble  $I_1$  de places de  $K_1$  de densité non nulle. Le lemme 1.10 nous assure que la densité de l'ensemble  $I_2$  des places de  $K_1$  ayant même corps résiduel que la place qu'elles induisent sur  $K$  est égale à 1. On voit alors que le sous-ensemble  $I$  de  $\Omega_K$  formé des places induites par celles dans  $I_1 \cap I_2 \subset \Omega_{K_1}$  est de densité non nulle, donc infini. De plus, quitte à enlever les places ramifiées pour l'extension  $K_1/K$  (qui forment un ensemble fini), on peut supposer que l'extension  $K'_w/K_v$  est purement inséparable car elle est alors décomposable en une suite d'extensions radicielles de degré  $p$ , tout comme  $K'/K_1$ . Les  $K'_w$ -points  $Q'_w$  conviennent alors.  $\square$

On démontre enfin le résultat sur un corps fini, ce que l'on fait en reprenant les arguments que l'on a donné dans la démonstration ci-dessus.

*Démonstration du théorème 1.4.* De même que dans la preuve précédente, on se restreint au cas où l'ordre de  $\alpha$  est  $\ell^m$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ . Toujours par les mêmes arguments, les théorèmes de Nagata et Gabber nous assurent l'existence d'une extension finie de corps  $k'/k$  de degré premier à  $\ell$  et d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V' \hookrightarrow X' & & (1.4.3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{k'} \hookrightarrow X_{k'} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \hookrightarrow X & & \end{array}$$

où  $X$  est propre sur  $k$ ,  $X'$  est propre et lisse sur  $k'$  et la flèche  $X' \rightarrow X_{k'}$  est un morphisme propre, surjectif et génériquement fini de degré premier à  $\ell$ . De plus, les carrés du diagramme sont cartésiens.

En notant alors  $K = k(t)$ ,  $\mathcal{O}_K = k[t]$ ,  $K' = k'(t)$  et  $\mathcal{O}_{K'} = k'[t]$ , le diagramme (1.4.3) induit par changement de base le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}' & \hookrightarrow & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_{\mathcal{O}_{K'}} & \hookrightarrow & \mathcal{X}_{\mathcal{O}_{K'}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V} & \hookrightarrow & \mathcal{X} \end{array} \quad (1.4.4)$$

où  $\mathcal{V} := V \times_k \mathcal{O}_K$ ,  $\mathcal{X} := X \times_k \mathcal{O}_K$ ,  $\mathcal{V}' := V' \times_{k'} \mathcal{O}_{K'}$  et  $\mathcal{X}' := X' \times_{k'} \mathcal{O}_{K'}$ . En particulier,  $\mathcal{X}'$  est propre et lisse sur  $\mathcal{O}_{K'}$ .

Supposons que  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr}} V$ . Alors, par functorialité du groupe de Brauer non ramifié par rapport aux morphismes dominants, on peut regarder  $\alpha$  comme un élément de  $\text{Br}_{\text{nr}} \mathcal{V}$ , lequel, toujours par functorialité, induit un élément  $\alpha' \in \text{Br}_{\text{nr}} \mathcal{V}' = \text{Br} \mathcal{X}'$ . Le même argument que l'on a donné dans la preuve précédente pour toute place en dehors de  $S$  marche ici pour toute place  $v$  de  $K$  provenant d'un polynôme irréductible  $P$  dans  $\mathcal{O}_K = k[t]$ , i.e. l'application  $V(K_v) \rightarrow \text{Br} K_v$  induite par  $\alpha$  est nulle pour toute telle place  $v$ , ce qui conclut dans ce sens car, pour toute extension finie  $k'/k$  engendrée par un polynôme irréductible  $P$ , le corps  $K_v$  correspondant est isomorphe à  $k'((t))$ .

Supposons donc que  $\alpha \notin \text{Br}_{\text{nr}} V$ . Il existe alors un anneau de valuation discrète  $A$  de corps de fractions  $k(V)$  et corps résiduel  $\kappa \supset k$  tel que l'image de  $\alpha$  par l'application résidu

$$H^2(k(V), \mu_{\ell^m}) \rightarrow H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}),$$

est non nulle. Soit  $B = A(t)$  : c'est un anneau de valuation discrète de corps de fractions  $K(V)$  et corps résiduel  $\kappa(t)$  tel que l'indice de ramification de l'extension  $B/A$  est égal à 1. En effet, on rappelle que, si l'on note  $v_B$  la valuation associée à  $B$ , cet indice est défini comme l'indice du groupe  $v_B(k(V)^*)$  dans  $v_B(K(V)^*) \cong \mathbb{Z}$ . Sinon, on peut aussi remarquer que  $B$  n'est rien d'autre que le localisé de l'anneau  $A[t]$  en l'idéal premier  $\pi A[t]$ , où  $\pi$  est une uniformisante de  $A$ . Le corollaire 1.12 nous dit alors qu'il existe un anneau de valuation discrète  $B' \supset B$  de corps de fractions  $K'(V')$  et corps résiduel  $\kappa'$  tel que, si l'on note  $f = [\kappa' : \kappa(t)]$  et  $e$  l'indice de ramification de  $B'/B$ , on a  $(ef, \ell) = 1$ . De plus,  $B'$  contient la fermeture intégrale de  $B$  dans  $K'(V')$  et  $K \subset B$ , donc on a  $\kappa' \supset K'$ . Alors, d'après [CT95, Prop. 3.3.1], on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(k(V), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{Inf} & & \downarrow \text{Inf} \\ H^2(K(V), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa(t), \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow e\text{-Res} \\ H^2(K'(V'), \mu_{\ell^m}) & \longrightarrow & H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}). \end{array}$$

On remarque que les flèches verticales en haut sont bien des applications d'inflation. En effet, on a  $K(V) = k(V)(t)$ , d'où  $\Gamma_{k(V)}$  s'identifie avec le groupe  $\Gamma_{\bar{k}(V)(t)/K(V)}$ , lequel correspond à un quotient de  $\Gamma_{K(V)}$ . On en a de même pour  $\kappa$  et  $\kappa(t)$ .

Soit alors  $\kappa_1$  la sous-extension séparable maximale de  $\kappa'/\kappa(t)$ . On a alors la factorisation suivante des flèches verticales à droite :

$$H^1(\kappa, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(\kappa(t), \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \xrightarrow{e\text{-Res}} H^1(\kappa_1, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}).$$

Les applications d'inflation étant toujours injectives au niveau du  $H^1$ , on sait que la flèche de gauche est injective. Puis, le corollaire 1.14 nous dit que la flèche de droite est un isomorphisme. Enfin, pour la flèche du milieu on a que  $e[\kappa_1 : \kappa(t)]$  divise  $ef$  et alors le morphisme est injectif par l'argument classique de restriction-corestriction (lequel a bien un sens vu que  $\kappa_1/\kappa(t)$  est séparable). En particulier, on voit que l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(\kappa', \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z})$  est non nulle et alors que l'image  $\alpha' \in \text{Br } V'$  de  $\alpha$  n'est pas dans  $\text{Br}_{\text{nr}} V' = \text{Br } X'$ .

Enfin, d'après le théorème 1.2, il existe un ensemble infini  $I'$  de places  $w$  de  $K'$  telles qu'il existe un  $K'_w$ -point  $P'_w$  de  $V'$  tel que  $\alpha'(P'_w) \neq 0$ . En prenant une quelconque de ces places, on a  $K'_w \cong L((t'))$  pour une certaine extension finie  $L/k$ , d'où l'on voit que, si  $Q$  est le  $L((t'))$ -point de  $V$  induit par  $P'_w$ , alors  $\alpha(Q) = \alpha'(P'_w) \neq 0 \in \text{Br } L((t'))$ , ce qui conclut.  $\square$

## 1.A Appendice : “Rigidité” du groupe de Brauer non ramifié algébrique

Cet appendice se concentre sur les variétés  $V$  lisses et séparablement rationnellement connexes (donc en particulier sur les variétés séparablement unirationnelles, comme c'est le cas pour les espaces homogènes étudiés dans les chapitres suivants de ce texte). Pour ces variétés, dont une définition est donnée dans [Kol96, IV, Def. 3.2.3], on montre un résultat de “rigidité” du groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$ . Ce résultat, qui suppose l'existence d'une compactification lisse de  $V$ , était initialement prévu pour obtenir une formule comme celle du théorème 1.4 via changement de base à un corps global (corps pour lequel le théorème 1.2 nous donne déjà une telle formule pour les variétés propres), mais le théorème de Gabber utilisé dans les démonstrations ci-dessus nous a permis de nous débarrasser de cette hypothèse. On présente néanmoins ce résultat dans l'espoir qu'il puisse être utile pour d'autres recherches, car il ne semble pas sans intérêt.

*Remarque.*

La définition d'une variété séparablement rationnellement connexe est indépendante du corps de base (cf. [Kol96, IV, Rem. 3.2.4]). En particulier, cette propriété peut se vérifier sur une clôture algébrique du corps de base. Une variété  $V$  lisse et séparablement rationnellement connexe est par ailleurs toujours géométriquement intègre.

On suppose ici que  $k$  est un corps *parfait* de caractéristique  $p$ , donc par exemple un corps fini. Pour un corps  $K$  pas forcément parfait, on notera  $K^{\text{al}}$  sa clôture algébrique (on réserve alors la notation  $\bar{K}$  pour la clôture séparable). On a alors le résultat suivant pour le groupe de Picard.

**Théorème 1.15.** *Soit  $X$  une  $k$ -variété propre, lisse et séparablement rationnellement connexe. Soit  $K$  une extension de  $k$ . Alors le changement de base de  $k$  à  $K$  induit un isomorphisme  $\text{Pic } X_{\bar{k}} \xrightarrow{\sim} \text{Pic } X_{\bar{K}}$ . Ce sont des groupes abéliens de type fini et sans  $\ell$ -torsion pour tout nombre premier  $\ell \neq p$ .*

L'égalité de ces groupes de Picard donne un peu d'espoir sur l'existence d'une égalité entre les groupes de Brauer non ramifié algébrique de  $V$  et  $V_K$ , compte tenu de la formule suivante pour une compactification lisse  $X$  de  $V$  vérifiant  $X(k) \neq \emptyset$  (cf. [San81, Lem. 6.3]) :

$$\text{Br}_{\text{al}}X \xrightarrow{\sim} H^1(k, \text{Pic } X_{\bar{k}}).$$

C'est effectivement le résultat que l'on trouve en ajoutant l'hypothèse que  $k$  soit algébriquement fermé dans  $K$ . Remarquons que, sans cette hypothèse, il est difficile d'espérer un tel comportement : il suffit de penser à une extension algébrique séparable  $K/k$  déployant  $\text{Pic } X_{\bar{k}}$ . Le groupe  $H^1(K, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  est alors trivial (du moins en dehors de la  $p$ -partie) alors que  $H^1(k, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  n'a aucune raison de l'être.

**Théorème 1.16.** *Soit  $V$  une  $k$ -variété telle que  $V(k) \neq \emptyset$ . On suppose que  $V$  admet une compactification lisse  $X$  que l'on suppose en plus séparablement rationnellement connexe (par exemple, lorsque  $V$  est séparablement unirrationnelle). Soit  $K$  une extension de  $k$  telle que  $k$  est algébriquement fermé dans  $K$ . Alors le morphisme  $\text{Br}_1V \hookrightarrow \text{Br}_1V_K$  induit par le changement de base de  $k$  à  $K$  induit un isomorphisme entre les groupes de Brauer non ramifié algébrique*

$$\text{Br}_{\text{nr,al}}V\{p'\} = \text{Br}_{\text{al}}X\{p'\} \subset \text{Br}_{\text{al}}V \quad \text{et} \quad \text{Br}_{\text{nr,al}}V_K\{p'\} = \text{Br}_{\text{al}}X_K\{p'\} \subset \text{Br}_{\text{al}}V_K.$$

*Démonstration du Théorème 1.15.* Soit  $L = \bar{k}$  ou  $\bar{K}$ . Montrons d'abord que le groupe  $\text{Pic } X_L$  est sans  $\ell$ -torsion pour tout  $\ell \neq p$ . La théorie de Kummer nous donne la suite exacte suivante (voir par exemple [Mil80, III.4])

$$0 \rightarrow H^1(X_L, \mu_\ell) \rightarrow \text{Pic } X_L \xrightarrow{\ell} \text{Pic } X_L.$$

En notant que  $L$  est séparablement clos, on voit que  $H^1(X_L, \mu_\ell) = H^1(X_L, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ , car les faisceaux  $\mu_\ell$  et  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  sont isomorphes. De plus, le théorème de changement de base propre (cf. [Mil80, IV, Cor. 2.3]) nous dit que  $H^1(X_L, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = H^1(X_{L^{\text{al}}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ , où  $L^{\text{al}}$  est une clôture algébrique de  $L$ . Ce dernier groupe classe les  $X_{L^{\text{al}}}$ -torseurs sous  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  (cf. [Mil80, III, 4.6 et 4.8]).

Il suffit alors de montrer que  $H^1(X_{L^{\text{al}}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$  pour avoir  $(\text{Pic } X_L)[\ell] = 0$ . En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un torseur non trivial, i.e. non isomorphe au torseur correspondant à  $\ell$  copies disjointes de  $X_{L^{\text{al}}}$  avec l'action évidente de  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ . Ce torseur  $Y \rightarrow X_{L^{\text{al}}}$  est alors forcément connexe, car la quantité de composantes connexes doit diviser  $\ell$  et si  $Y$  était formé de  $\ell$  composantes, elles seraient toutes forcément isomorphes à  $X_L$  et  $Y$  serait un torseur trivial. On voit alors que  $Y$  est un revêtement étale connexe cyclique d'ordre  $\ell$  de  $X_L$ , ce qui entraîne l'existence d'un élément non trivial dans  $\pi^1(X_{L^{\text{al}}})$ . Or, ce dernier groupe est nul d'après un résultat de Kollár (cf. [Deb03, Cor. 3.6]) puisque  $X$  est séparablement rationnellement connexe.

Intéressons-nous maintenant au schéma  $\underline{\text{Pic}} X_k$  (cf. [BLR90, 8.1] pour la construction et notamment [BLR90, 8.2, Thm. 3] pour le cas sur un corps). Par définition de ce schéma, le groupe  $\text{Pic } X_L$  correspond alors à  $\underline{\text{Pic}} X_k(L)$ . D'après [BLR90, 8.4, Thm. 3], on sait que le sous-schéma  $\underline{\text{Pic}}^0 X_k$  correspondant à sa composante connexe neutre est un schéma en groupes propre, bien que pas forcément réduit. Si l'on considère la variété réduite  $(\underline{\text{Pic}}^0 X_k)_{\text{red}}$  associée à  $\underline{\text{Pic}}^0 X_k$ , alors le fait que  $k$  soit parfait nous dit qu'il s'agit d'un  $k$ -schéma en groupes propre, connexe et réduit, cf [SGA3I, VI<sub>A</sub>, 0.2]. De plus, on voit bien que l'on a  $(\underline{\text{Pic}} X_k)_{\text{red}}(L) = \underline{\text{Pic}} X_k(L)$  (cf. par exemple [Hrt77, II, Exer. 2.3(c)]) car le spectre d'un corps est toujours un schéma réduit.

Comme  $k$  est supposé parfait, toute  $k$ -variété réduite est géométriquement réduite. La variété  $(\underline{\text{Pic}}^0 X_k)_{\text{red}}$  étant donc un  $k$ -schéma en groupes géométriquement réduit, on déduit qu'elle est lisse sur  $k$ , ce qui nous dit qu'il s'agit d'une variété abélienne vérifiant en plus que  $(\underline{\text{Pic}}^0 X_k)_{\text{red}}(L)$  est sans  $\ell$ -torsion puisqu'il correspond à un sous-groupe de  $\underline{\text{Pic}} X_k(L) = \text{Pic } X_L$ . Le résultat classique correspondant à la dernière proposition dans [Mum70, II.6] nous dit que cette variété est alors de dimension 0, donc triviale. On voit alors que le sous-groupe  $\underline{\text{Pic}}^0 X_k(L)$  est trivial (bien que le schéma  $\underline{\text{Pic}}^0 X_k$  pourrait ne pas l'être).

Cela étant démontré, on voit donc que l'on a  $\text{Pic } X_L = \text{NS } X_L$ , où  $\text{NS } X_L$  désigne le groupe de Néron-Severi de  $X_L$ .<sup>1</sup> De plus, comme le schéma  $\underline{\text{NS}} X_k$  est étale sur  $k$  (cf. [SGA3I, VI<sub>A</sub>, 5.5]), on voit que  $\text{NS } X_L = \underline{\text{NS}} X_k(L) = \underline{\text{NS}} X_k(L^{\text{al}}) = \text{NS } X_{L^{\text{al}}}$ . Or, ce groupe étant invariant par extension de corps algébriquement clos (cf. [MP12, Prop. 3.1]), on trouve que

$$\text{Pic } X_{\bar{k}} = \text{NS } X_{\bar{k}} = \text{NS } X_{k^{\text{al}}} = \text{NS } X_{K^{\text{al}}} = \text{NS } X_{\bar{K}} = \text{Pic } X_{\bar{K}}.$$

Enfin, il est un fait connu que le groupe de Néron-Severi est finiment engendré (cf. par exemple le corollaire 2 au théorème 3 de [Mum70, IV.19] pour le cas sur un corps algébriquement clos, ce qui suffit bien dans ce cas d'après les dernières égalités).  $\square$

*Démonstration du Théorème 1.16.* Notons d'abord que l'on a  $\Gamma_k = \Gamma_K / \Gamma_{\bar{k}K}$ . On a la suite de restriction-inflation correspondante à ce quotient pour le  $\Gamma_K$ -module  $\text{Pic } X_{\bar{K}}$  :

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_k, (\text{Pic } X_{\bar{K}})^{\Gamma_{\bar{k}K}}) \rightarrow H^1(\Gamma_K, \text{Pic } X_{\bar{K}}) \rightarrow H^1(\Gamma_{\bar{k}K}, \text{Pic } X_{\bar{K}}). \quad (1.A.1)$$

D'autre part, il est évident que le morphisme de changement de base  $\text{Pic } X_{\bar{k}} \rightarrow \text{Pic } X_{\bar{K}}$  se factorise par

$$\text{Pic } X_{\bar{k}} \rightarrow (\text{Pic } X_{\bar{K}})^{\Gamma_{\bar{k}K}} \rightarrow \text{Pic } X_{\bar{K}}.$$

Or, le théorème 1.15 nous dit que la composition des deux flèches est un isomorphisme, et puisque la deuxième flèche est une injection, chacune des flèches est aussi un isomorphisme. En particulier, on voit que  $\text{Pic } X_{\bar{K}}$  est invariant par  $\Gamma_{\bar{k}K}$ .

On trouve alors l'isomorphisme canonique

$$H^1(\Gamma_k, \text{Pic } X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma_k, (\text{Pic } X_{\bar{K}})^{\Gamma_{\bar{k}K}}),$$

1. On rappelle que le groupe de Néron-Severi  $\text{NS } X$  est défini comme le quotient  $\text{Pic } X / \text{Pic}^0 X$ . Le schéma de Néron-Severi est par ailleurs défini de façon analogue.

ce qui fait que la suite (1.A.1) devient

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_k, \text{Pic } X_{\bar{k}}) \rightarrow H^1(\Gamma_K, \text{Pic } X_{\bar{K}}) \rightarrow H^1(\Gamma_{\bar{k}K}, \text{Pic } X_{\bar{K}}).$$

D’autre part, le fait que  $\text{Pic } X_{\bar{K}}$  soit  $\Gamma_{\bar{k}K}$ -invariant nous dit que

$$H^1(\Gamma_{\bar{k}K}, \text{Pic } X_{\bar{K}}) = \text{Hom}(\Gamma_{\bar{k}K}, \text{Pic } X_{\bar{K}}).$$

Le théorème 1.15 nous dit aussi que le groupe  $\text{Pic } X_{\bar{K}}$  est sans  $\ell$ -torsion pour tout  $\ell \neq p$ . Le groupe  $\Gamma_{\bar{k}K}$  étant profini, on voit que  $\text{Hom}(\Gamma_{\bar{k}K}, \text{Pic } X_{\bar{K}})$  est un  $p$ -groupe. Finalement, puisque les groupes de la suite sont de torsion, on peut considérer leur partie de torsion première à  $p$ . On retrouve alors

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_k, \text{Pic } X_{\bar{k}})\{p'\} \rightarrow H^1(\Gamma_K, \text{Pic } X_{\bar{K}})\{p'\} \rightarrow 0.$$

On réécrit enfin cet isomorphisme comme

$$0 \rightarrow \text{Br}_{\text{nr,al}} V\{p'\} \rightarrow \text{Br}_{\text{nr,al}} V_K\{p'\} \rightarrow 0,$$

ce qui conclut. ☺

## Chapitre 2

# Groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes : le cas des stabilisateurs finis

### 2.1 Introduction

Le groupe de Brauer  $\text{Br } V$  d'une variété  $V$  sur un corps  $k$  est un invariant cohomologique qui permet, via certains de ses sous-quotients, de répondre parfois par la négative à la question de la rationalité de la variété  $V$ , ainsi que, dans le cas où  $k$  est un corps global, à des questions de nature arithmétique telles que le principe de Hasse et l'approximation faible via l'obstruction de Brauer-Manin. Ces deux raisons suffisent en elles mêmes pour justifier une étude approfondie de ce groupe et de ses sous-quotients, notamment de sa partie *non ramifiée*  $\text{Br}_{\text{nr}} V$ , de sa partie *algébrique*  $\text{Br}_{\text{al}} V$ , ou encore de la partie *non ramifiée algébrique*  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$ .

Dans le cadre des variétés  $V$  qui sont des *espaces homogènes* sous un groupe algébrique linéaire connexe  $G'$ , les travaux les plus approfondis sont ceux présentés par Borovoi, Demarche et Harari dans [BDH13]. Ils ont développé notamment, en suivant une méthode présentée par Colliot-Thélène et Kunyavskii dans [CTK98] pour les espaces principaux homogènes, des formules de nature algébrique pour le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  lorsque le stabilisateur de la variété est de type “ssumult”, cas qui contient notamment les stabilisateurs connexes et les stabilisateurs de type multiplicatif. Or, malgré la vaste généralité de ces résultats, le cas des espaces homogènes à stabilisateur fini semble échapper à leurs méthodes dès que le stabilisateur en question est un groupe non abélien. Le but de ce chapitre est donc de traiter ce cas particulier. Le chapitre suivant traitera par la suite le cas général d'un stabilisateur non connexe quelconque à partir des résultats obtenus dans ce chapitre.

En nous inspirant de la même méthode de Colliot-Thélène et Kunyavskii et en suivant le même chemin que Borovoi, Demarche et Harari (qui consiste à traiter d'abord le cas des corps finis pour ensuite traiter le cas d'un corps quelconque de caractéristique 0), on obtient des formules explicites pour le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  d'un espace homogène  $V = G \backslash G'$  sous un groupe  $G'$  semi-simple et simplement connexe à stabilisateur fini  $G$ .

Le chemin pour arriver à ces formules est relativement détourné. Il faut d’abord traiter le cas des variétés sur un corps fini, ce qu’on a fait dans le chapitre précédent. En effet, le théorème 1.4 caractérise les éléments non ramifiés de  $\mathrm{Br} V$ , où  $V$  est une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps fini, via l’évaluation de ces éléments sur les “points locaux” de  $V$ . À partir de ce résultat, on trouve les résultats principaux de ce chapitre : on se concentre sur les espaces homogènes  $V$  sous un groupe  $G'$  semi-simple simplement connexe à stabilisateur fini sur différents corps de base  $k$  et on donne dans l’ordre :

- §2.4 : une formule cohomologique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  sur un corps fini ;
- §2.5 : une formule algébrique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  sur un corps fini ;
- §2.6 : une formule algébrique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  sur un corps de caractéristique 0 ;
- §2.7 : une formule cohomologique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  sur un corps local, sous quelques hypothèses supplémentaires.

Ici, et dans toute la suite du texte, on entend par formule cohomologique (resp. algébrique) une formule dépendant des théorèmes de dualité en cohomologie galoisienne pour des corps locaux (resp. une formule dépendant de la structure de groupe algébrique du stabilisateur).

Enfin, les sections 2.8 et 2.9 sont consacrées aux applications des différents résultats. On donne d’abord, via les formules algébriques, des résultats de trivialité du groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  sur un corps fini, puis sur un corps de caractéristique 0 (propositions 2.28, 2.30, 2.31, 2.35 et 2.36), dont certains étaient déjà connus auparavant. On montre aussi avec un exemple que ces formules se prêtent à des calculs totalement explicites et faisables à la main pour des petits groupes (propositions 2.32 et 2.37). Ces calculs permettent de montrer notamment que  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  est en général plus grand que les groupes de type “ $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1$ ”, lesquels suffisent pour décrire le groupe de Brauer non ramifié algébrique dans le cas des stabilisateurs connexes ou abéliens (cf. [BDH13]). Cette différence essentielle par rapport aux travaux de Colliot-Thélène, Kunyavskiĭ, Borovoi, Demarche et Harari est due au fait que, sur un corps fini et dans notre contexte des stabilisateurs finis, le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  n’a aucune raison d’être trivial (par opposition aux autres cas, cf. [BDH13, Thm. 7.5] et [CTK98, Prop. 1] et comparer avec la proposition 2.32 ci-dessous).

En un deuxième temps, on donne une application arithmétique de ces formules, notamment de leur relation avec l’obstruction de Brauer-Manin. Dans ce sens on a pu montrer que cette obstruction “ne voit pas” les places réelles d’un corps de nombres (proposition 2.38).

## 2.2 Notations et conventions

Dans tout ce chapitre,  $k, K, L$  représentent des corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Pour un corps  $k$ , on note toujours  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$  et  $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$  le groupe de Galois absolu. Dans le cas des corps finis,  $q$  représente toujours le cardinal du corps et il s’agit donc d’une puissance de  $p$ . Dans le cas des corps globaux, i.e. des corps de nombres et des corps de fonctions d’une courbe sur un corps fini, on note  $\Omega_k$  l’ensemble des places de  $k$ , lesquelles sont notées  $v, w$ , et l’on note  $k_v, k_w$ , etc. les complétés de ces corps par rapport à ces places. Par “corps local”, on entend précisément une telle complétion dès qu’elle est non archimédienne, i.e. une extension finie du corps  $\mathbb{Q}_\ell$  dans le cas de caractéristique 0 ou bien un corps de la forme  $k((t))$  avec  $k$  un corps fini dans le cas de caractéristique  $p > 0$ .

On note  $V$  une  $k$ -variété, laquelle, sauf mention du contraire, est toujours supposée lisse et géométriquement intègre. On notera  $X$  une  $k$ -compactification de  $V$  (que l'on supposera lisse aussi, à défaut de la mention du contraire), i.e. une  $k$ -variété propre munie d'une  $k$ -immersion ouverte  $V \hookrightarrow X$ .<sup>1</sup> On réserve la notation  $G'$  pour un  $k$ -groupe semi-simple simplement connexe (par exemple  $\mathrm{SL}_n$ ) et  $G$  pour un  $k$ -groupe fini, souvent plongé dans  $G'$ . On supposera dans tout l'exposé que l'ordre du groupe  $G$  (à savoir, le degré du morphisme structural  $G \rightarrow \mathrm{Spec} k$ ) est premier à la caractéristique  $p$  du corps  $k$ . Ainsi, le groupe  $G$  est toujours supposé lisse et en particulier le cardinal de  $G(\bar{k})$  est toujours premier à  $p$ . La  $k$ -variété  $V := G \backslash G'$  est lisse et géométriquement intègre et correspond à un espace homogène sous  $G'$  (cf. [SGA3I, VI<sub>B</sub>, Prop. 9.2]).

Pour une extension de corps  $K/k$  et pour  $V$  une  $k$ -variété, on note  $V_K := V \times_k K$  la  $K$ -variété obtenue par changement de base. Pour toute variété  $V$ , on note  $H^i(V, \cdot)$  les groupes de cohomologie étale et  $H^i(k, \cdot)$  les groupes de cohomologie galoisienne classiques (qui coïncident avec les groupes de cohomologie étale pour  $V = \mathrm{Spec} k$ ). Pour  $i = 1$ , on peut aussi définir des ensembles de cohomologie non abélienne, lesquels seront toujours notés  $H^1(V, \cdot)$  et  $H^1(k, \cdot)$  comme dans le cas abélien (ces deux ensembles coïncident aussi pour  $V = \mathrm{Spec} k$ ). Si l'on écrit  $\mathbb{G}_m$  pour le groupe multiplicatif, le groupe de Brauer  $\mathrm{Br} V$  est défini comme le sous-groupe de torsion du groupe  $H^2(V, \mathbb{G}_m)$ . Pour  $n > 1$  premier à  $p$ , on note  $\mu_n$  le groupe algébrique (fini et lisse) des racines  $n$ -ièmes de l'unité. La  $n$ -torsion du groupe de Brauer  $\mathrm{Br} V$  est alors donnée par un quotient de  $H^2(V, \mu_n)$ . On note aussi  $\mu$  la limite inductive des  $\mu_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et l'on note donc  $\mu\{p'\}$  le groupe des racines de l'unité d'ordre premier à  $p$ , cf. ci-dessous.

On utilise la lettre  $\ell$  pour des nombres premiers différents de la caractéristique  $p$ . Pour un groupe abélien  $A$ , on note  $A\{\ell\}$  les éléments de torsion  $\ell$ -primaire de  $A$  et  $A\{p'\}$  les éléments de torsion première à  $p$ . Pour la définition du groupe de Brauer non ramifié  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} V$  d'une  $k$ -variété  $V$ , on renvoie à [CT95] ou encore à [CTS07]. On se limite à rappeler que, lorsque l'on dispose d'une compactification lisse  $X$  de  $V$ , on a l'égalité  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} V\{p'\} = \mathrm{Br} X\{p'\}$ , où  $p$  correspond à la caractéristique du corps  $k$  (ce sont des applications du théorème de pureté de Grothendieck, cf. [CT95, Prop. 4.2.3]). Le groupe de Brauer algébrique est défini comme

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}} V := \frac{\mathrm{Ker}[\mathrm{Br} V \rightarrow \mathrm{Br} V_{\bar{k}}]}{\mathrm{Im}[\mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} V]}.$$

On note aussi  $\mathrm{Br}_1 V := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br} V \rightarrow \mathrm{Br} V_{\bar{k}}]$ , d'où  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}} V = \mathrm{Br}_1 V / \mathrm{Br} k$  lorsqu'on note par abus  $\mathrm{Br} k$  sa propre image dans  $\mathrm{Br} V$ . Le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$  est alors tout simplement l'image de  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} V \cap \mathrm{Br}_1 V$  dans  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}} V$  par la projection naturelle.

On fait enfin les conventions de notation suivantes. Pour  $G$  un  $k$ -groupe fini et pour tout groupe profini  $\Delta$  agissant sur  $G(\bar{k})$  (en particulier pour  $\Gamma_k$  ou  $\Gamma_{k_v}$  pour  $v$  une place de  $k$  si  $k$  est un corps global), on note

$$H^i(\Delta, G) := H^i(\Delta, G(\bar{k})) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(\Delta, G) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta, G(\bar{k})).$$

De plus, la notation  $b \in G$  veut toujours dire  $b \in G(\bar{k})$ . On rappelle aussi que les groupes  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^i(k, G)$  pour  $G$  abélien sont définis comme les éléments  $\alpha \in H^i(k, G)$  tels que, pour tout sous-groupe pro-cyclique  $\gamma$  de  $\Gamma_k$ , on a que la restriction  $\alpha_\gamma \in H^i(\gamma, G)$  de  $\alpha$  est triviale.<sup>2</sup>

1. On rappelle que l'existence d'une compactification lisse est assurée en caractéristique 0 via le théorème d'Hironaka, tandis qu'en caractéristique positive la dite existence est une question toujours ouverte.

2. Pour un corps global on peut aussi définir les groupes (ou ensembles)  $\mathrm{III}_\omega^i(k, G)$ , lesquels sont définis

## 2.3 Préliminaires

On rappelle que, pour une  $k$ -variété  $V$  vérifiant  $V(k) \neq \emptyset$  et  $\bar{k}[V]^*/\bar{k}^* = 1$ , le groupe de Brauer algébrique  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  admet une description en termes du groupe de Picard géométrique  $\mathrm{Pic} V_{\bar{k}}$ . En effet, le lemme 6.3 de [San81] nous dit que l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic} V_{\bar{k}}). \quad (2.3.1)$$

Supposons maintenant qu'il existe une  $k$ -compactification lisse  $X$  de  $V$ . On a un isomorphisme similaire pour la variété  $X$ . En effet, il suffit de noter que  $X$  est propre et géométriquement intègre pour avoir  $\bar{k}[X]^*/\bar{k}^* = 1$ , et il est évident que  $X(k) \neq \emptyset$  dès que  $V(k) \neq \emptyset$ , donc on a aussi

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}X \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}}). \quad (2.3.2)$$

On rappelle que, d'après le théorème de pureté de Grothendieck, le groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}X\{p'\}$  correspond à la partie non ramifiée (et de torsion première à  $p$ ) du groupe de Brauer algébrique de  $V$  (cf. [CT95, Prop. 4.2.3]), que l'on notera  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V\{p'\}$ .

Soit maintenant  $G$  un  $k$ -groupe fini lisse que l'on plonge dans  $G'$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, par exemple  $G' = \mathrm{SL}_n$ . Soit  $V := G \backslash G'$  la  $k$ -variété quotient. Le groupe  $G'$  étant semi-simple, on a que  $\bar{k}[G']^*/\bar{k}^* = 1$  (c'est le lemme de Rosenlicht, cf. [San81, Lem. 6.5]). Ceci nous dit que  $\bar{k}[V]^*/\bar{k}^* = 1$ , puisque toute fonction inversible sur  $V_{\bar{k}}$  donne une fonction inversible sur  $G'_{\bar{k}}$ . On en déduit que l'on a la description du groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  donnée par l'isomorphisme (2.3.1) ci-dessus.

Il est intéressant de remarquer que cette description ne dépend point du plongement  $G \hookrightarrow G'$  choisi. En effet, dans cette situation, la cohomologie de Čech non abélienne associée au toseur  $G'_{\bar{k}} \rightarrow V_{\bar{k}}$  nous donne une suite exacte d'ensembles pointés (cf. [Sko01, Lem. 2.2.2])

$$0 \rightarrow \check{H}^1(G'_{\bar{k}}/V_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow \check{H}^1(V_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow \check{H}^0(G'_{\bar{k}}/V_{\bar{k}}, \check{\mathcal{H}}^1(\mathbb{G}_m)), \quad (2.3.3)$$

où  $\check{\mathcal{H}}^1(\mathbb{G}_m)$  correspond au préfaisceau (étale)  $U \mapsto \check{H}^1(U, \mathbb{G}_m)$ . Le même lemme nous dit que  $\check{H}^1(G'_{\bar{k}}/V_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)$  correspond à l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes

$$f : G' \times G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

satisfaisant la condition de cocycle  $f(y, s)f(ys, s') = f(y, ss')$ ;  $f$  étant équivalent à  $f'$  si

$$f'(y, s) = g(y)f(y, s)g(ys)^{-1},$$

pour un morphisme  $g : G'_{\bar{k}} \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Or, puisque  $\bar{k}[G']^*/\bar{k}^* = 1$ , il est facile de voir que  $f(y, s)$  ne dépend que de  $s$  et qu'alors  $\check{H}^1(G'_{\bar{k}}/V_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)$  s'identifie avec l'ensemble des morphismes  $g : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ , i.e. au  $\Gamma_k$ -module des caractères de  $G$ , que l'on notera  $M$  dans la suite. On rappelle que c'est le dual de Cartier de  $G^{\mathrm{ab}}$ , l'abélianisé de  $G$ .

De plus, en rappelant que  $\check{H}^1(V_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m) = H^1(V_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)$  (cf. [Mil80, III, Cor. 2.10]), on peut réécrire la suite exacte (2.3.3) comme

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathrm{Pic} V_{\bar{k}} \rightarrow \mathrm{Pic} G'_{\bar{k}}.$$

comme les éléments  $\alpha \in H^i(k, G)$  dont l'image dans  $H^i(k_v, G)$  est triviale pour presque toute place  $v \in \Omega_k$  (i.e. pour toute place sauf un nombre fini). Le théorème de Čebotarev permet de démontrer facilement que les groupes (resp. ensembles)  $\mathrm{III}_{\omega}^i$  et  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^i$  coïncident, cf. [San81, §1].

Or,  $G'$  étant en plus simplement connexe, on a  $\text{Pic } G'_k = 0$  (cf. [San81, Lem. 6.9(iv)]). On a alors trouvé un isomorphisme<sup>3</sup>

$$\lambda : M \xrightarrow{\sim} \text{Pic } V_{\bar{k}}. \quad (2.3.4)$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme de groupes (et de  $\Gamma_k$ -modules), il suffit de regarder la même situation pour le  $G^{\text{ab}}$ -torseur  $Z := G^{\text{der}} \backslash G' \rightarrow V$ , où  $G^{\text{der}}$  est le sous-groupe dérivé de  $G$ . On y retrouve la même application, mais dans le cas de la cohomologie de Čech abélienne (cf. [Sko01, 2.2]). On remarque en plus que cet isomorphisme correspond au *type* du toseur  $Z \rightarrow V$ . En effet, ceci découle de la définition du type dans [Sko01, Def. 2.3.2] et de ce qui est remarqué juste après. On en déduit que  $Z \rightarrow V$  est un toseur universel.

On voit alors que  $\text{Br}_{\text{al}} V = H^1(k, \text{Pic } V_{\bar{k}})$  ne dépend que de  $G$ , et même plus précisément de son abélianisé. De plus, puisque dans tout ce chapitre on ne considérera que des groupes  $G$  d'ordre premier à  $p$  (qui sont d'ailleurs toujours lisses),  $M$  et par suite  $\text{Br}_{\text{al}} V$  n'auront pas non plus de  $p$ -torsion, ce qui nous permet d'utiliser la notation  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  au lieu de  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V \{p'\}$ .

## 2.4 Une formule cohomologique sur un corps fini

Soit maintenant  $k$  le corps fini  $\mathbb{F}_q$  avec  $q$  une puissance de  $p > 0$ . On veut étudier les espaces homogènes  $V = G \backslash G'$  comme ci-dessus sur ce corps de base particulier. Comme on vient de l'annoncer, on supposera désormais que l'ordre de  $G$  est premier à  $p$ . Sous cette hypothèse et grâce au théorème 1.4 on peut donner une formule cohomologique permettant de calculer le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$ .

Rappelons que, lorsque l'ordre de  $G$  est premier à  $p$ , le cup-produit nous donne l'accouplement parfait suivant (cf. [NSW08, Thm. 7.2.6])

$$H^1(k((t)), M) \times H^1(k((t)), G^{\text{ab}}) \rightarrow H^2(k((t)), \mathbb{G}_m) = \text{Br } k((t)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En utilisant cet accouplement, le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  admet la description cohomologique suivante :

**Théorème 2.1.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini d'ordre premier à  $q$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Soit  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}} V$  avec  $H^1(k, M)$  comme ci-dessus, le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, M)$  vérifiant la propriété suivante :*

*Pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , l'image  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(k'((t)), M)$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k'((t)), G) \rightarrow H^1(k'((t)), G^{\text{ab}})]$ .*

Ce résultat découle de façon évidente de la proposition suivante et du théorème 1.4.

**Proposition 2.2.** *Soient  $K$  un corps local de caractéristique  $p \geq 0$ ,  $G$  un  $K$ -groupe fini d'ordre premier à  $p$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Soit  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . Soit enfin  $\alpha \in \text{Br}_{\text{al}} V$ . En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}} V$  avec  $H^1(K, M)$ , il existe une préimage  $\alpha_1 \in \text{Br}_1 V$  de  $\alpha$  telle que l'application  $V(K) \rightarrow \text{Br } K$  induite par  $\alpha_1$  est triviale si et seulement si  $\alpha$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$ .*

3. Cet isomorphisme peut aussi être obtenu (et de façon plus simple) à partir de [Ray70, Prop. VII.1.5].

Pour démontrer cet énoncé, on utilise la proposition suivante.

**Proposition 2.3.** *Soient  $K$  un corps quelconque,  $V$  une  $K$ -variété,  $\pi : V \rightarrow K$  le morphisme structural,  $M$  un  $\Gamma_K$ -module de type fini dont la torsion est d'ordre premier à la caractéristique de  $K$ ,  $S$  son  $K$ -groupe dual (qui est donc de type multiplicatif et lisse sur  $K$ ),  $\lambda \in \text{Hom}_K(M, \text{Pic } V_{\bar{K}})$  et  $r : \text{Br}_1 V \rightarrow H^1(K, \text{Pic } V_{\bar{K}})$  le morphisme issu de la suite spectrale de Hochschild-Serre*

$$H^p(\Gamma_K, H^q(V_{\bar{K}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathbb{G}_m).$$

Supposons qu'il existe un  $V$ -torseur  $T$  sous  $S$  de type  $\lambda$ . Alors pour tout  $\alpha \in H^1(K, M)$  on a

$$r(\pi^*(\alpha) \cup [T]) = \lambda_*(\alpha) \in H^1(K, \text{Pic } V_{\bar{K}}).$$

*Démonstration.* Cette proposition correspond au théorème 4.1.1 de [Sko01], à cela près qu'il considère un corps  $K$  de caractéristique 0, ce qui lui donne immédiatement la lissité de  $S$  sans aucune hypothèse sur l'ordre de la torsion de  $M$ . Suivant alors la preuve dans [Sko01] on note que, puisque  $S$  est lisse sur  $K$ , on a  $\text{Ext}_V^n(\pi^*M, \mathbb{G}_m) = H^n(V, S)$  (cf. [Sko01, Lem. 2.3.7]). D'autre part, on a des isomorphismes canoniques  $\text{Ext}_V^n(\mathbb{Z}, \pi^*M) = H^n(V, \pi^*M)$  et des accouplements de Yoneda

$$H^1(V, \pi^*M) \times \text{Ext}_V^n(\pi^*M, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^{n+1}(V, \mathbb{G}_m),$$

et

$$H^1(K, M) \times \text{Ext}_K^n(M, \text{Pic } V_{\bar{K}}) \rightarrow H^{n+1}(K, \text{Pic } V_{\bar{K}}).$$

On démontre d'abord que la flèche

$$\text{Ext}_V^1(\pi^*M, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\pi^*(\alpha) \cup \cdot} H^2(V, \mathbb{G}_m) = \text{Br } V,$$

est à valeurs dans  $\text{Br}_1 V$ , puis que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(V, S) & = & \text{Ext}_V^1(\pi^*M, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\text{type}} \text{Hom}_K(M, \text{Pic } V_{\bar{K}}) \\ & & \pi^*(\alpha) \cup \cdot \downarrow \qquad \qquad \qquad \alpha \cup \cdot \downarrow \\ & & \text{Br}_1 V \xrightarrow{r} H^1(K, \text{Pic } V_{\bar{K}}). \end{array}$$

En notant alors que la deuxième flèche verticale envoie  $\lambda$  en  $\lambda_*(\alpha)$ , la proposition est démontrée. Pour la démonstration des deux affirmations manquantes, on renvoie à la preuve dans [Sko01, p. 64-68], car elle est assez technique et la caractéristique du corps  $K$  n'y intervient pas. ☺

*Démonstration de la Proposition 2.2.* Remarquons d'abord que l'isomorphisme (2.3.1) vient précisément du morphisme  $r : \text{Br}_1 V \rightarrow H^1(K, \text{Pic } V_{\bar{K}})$  de la suite spectrale de Hochschild-Serre, cf. [San81, Lem. 6.3]. D'autre part, on sait que  $Z \rightarrow V$  est universel, i.e. le morphisme (2.3.4)  $\lambda : M \rightarrow \text{Pic } V_{\bar{K}}$  est aussi un isomorphisme, ce qui fait que l'on a

$$\text{Br}_1 V \xrightarrow{\quad} \text{Br}_{\text{al}} V \xrightarrow{\sim} H^1(K, \text{Pic } V_{\bar{K}}) \xleftarrow[\lambda_*]{\sim} H^1(K, M).$$

La proposition 2.3 nous dit alors que l'image de l'élément  $\pi^*(\alpha) \cup [Z] \in \text{Br}_1 V$  dans  $\text{Br}_{\text{al}} V$  correspond à  $\alpha \in H^1(K, M)$ .

Pour un  $K$ -point  $P : \text{Spec } K \rightarrow V$ , notons  $[Z](P) \in H^1(K, G^{\text{ab}})$  la classe du  $K$ -torseur  $Z \times_V K$  sous  $G^{\text{ab}}$ . De même, notons  $[G'](P)$  la classe du  $K$ -torseur  $G' \times_V K$  sous  $G$ . On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 ([G'], P) & \in & H^1(V, G) \times V(K) & \longrightarrow & H^1(K, G) & \ni & [G'](P) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 ([Z], P) & \in & H^1(V, G^{\text{ab}}) \times V(K) & \longrightarrow & H^1(K, G^{\text{ab}}) & \ni & [Z](P) \\
 \downarrow & & \downarrow \pi^*(\alpha) \cup \cdot & & \downarrow \alpha \cup \cdot & & \downarrow \\
 (\pi^*(\alpha) \cup [Z], P) & \in & \text{Br}_1 V \times V(K) & \longrightarrow & \text{Br } K & \ni & \alpha \cup [Z](P).
 \end{array}$$

Si l'on considère alors la suite exacte de cohomologie galoisienne non abélienne suivante (voir par exemple [Ser94, I.5.4, Prop. 36])

$$G'(K) \rightarrow V(K) \xrightarrow{\delta} H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G'),$$

on sait par la définition de  $\delta$  que  $\delta(P) = [G'](P)$ . Comme  $G'$  est simplement connexe, on sait que  $H^1(K, G') = 0$  (cf. [BT87, 4.7]), ce qui nous dit que l'application  $\delta$  est surjective. On voit alors que l'ensemble des  $[Z](P)$  pour  $P$  parcourant  $V(K)$  est  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$  tout entier. On en déduit que, si  $\alpha$  est orthogonale à  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$ , alors l'application  $V(K) \rightarrow \text{Br } K$  induite par  $\pi^*(\alpha) \cup [Z] \in \text{Br}_1 V$  est triviale. Dans le sens inverse, si  $\alpha$  n'est pas orthogonale à  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$ , alors l'application induite par  $\pi^*(\alpha) \cup [Z]$  n'est clairement pas triviale, donc en particulier pas constante (car la classe triviale appartient toujours à  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$  et donc l'élément trivial de  $\text{Br } K$  est toujours atteint). On voit aussitôt que celle induite par une autre préimage  $\alpha_1 \in \text{Br}_1 V$  de  $\alpha$  ne l'est pas non plus (ni constante, ni triviale), car il s'agit d'une translation de la première par  $\beta \in \text{Br } K$ , où  $\beta$  est l'élément tel que  $\alpha_1 = \pi^*(\alpha) \cup [Z] + \beta$ .  $\square$

*Remarques.*

**1.** Vu l'énoncé de la proposition 2.3, il est facile de voir que le théorème 2.1 s'étend à un stabilisateur *quelconque* à composante connexe neutre réductive, à cela près que l'on doit toujours demander que la torsion du groupe  $G^{\text{ab}}$  soit d'ordre premier à  $q$ . En effet, la preuve de la proposition 2.2 ne fait pas du tout mention de la finitude de  $G$  et, dans ce cas plus général, le groupe  $G^{\text{ab}}$  est un groupe de type multiplicatif lisse dont le dual n'a pas de  $p$ -torsion, donc la proposition 2.3 reste valable.

**2.** Il est facile de voir que, de façon analogue au théorème 2.1, la proposition 2.3 appliquée au théorème 1.3 nous donne immédiatement le résultat suivant, dont la preuve avait été promise dans [LA13] et dont l'analogue en caractéristique 0 (et pour  $G' = \text{SL}_n$ ) avait été montré par Harari dans [Har07, Prop. 4] :

**Théorème 2.4.** *Soient  $K$  un corps global de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $K$ -groupe algébrique fini d'ordre premier à  $p$  plongé dans un  $K$ -groupe  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G'/G$ . Soient  $G^{\text{ab}}$  l'abélianisé de  $G$  et  $M = \hat{G}^{\text{ab}}$  son groupe des caractères. Alors le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  s'identifie au sous-groupe de  $H^1(K, M)$  constitué des éléments  $\alpha$  ayant la propriété suivante :*

*Pour presque toute place  $v$  de  $K$ , la restriction  $\alpha_v$  de  $\alpha$  dans  $H^1(K_v, M)$  est orthogonale (pour l'accouplement local donné par le cup-produit) au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(K_v, G) \rightarrow H^1(K_v, G^{\text{ab}})]$  de  $H^1(K, G^{\text{ab}})$ .*

## 2.5 Une formule algébrique sur un corps fini

On garde les notations de la section précédente, donc  $k$  est toujours un corps fini de cardinal  $q$ . On rappelle aussi les conventions faites dans la section 2.2 : pour tout groupe profini  $\Delta$  agissant sur  $G(\bar{k})$  (par exemple  $\Delta = \Gamma_{k((t))}$ ) on note

$$H^i(\Delta, G) := H^i(\Delta, G(\bar{k})) \quad \text{et} \quad \text{Hom}(\Delta, G) := \text{Hom}_{\text{cont}}(\Delta, G(\bar{k})).$$

De plus, la notation  $b \in G$  veut toujours dire  $b \in G(\bar{k})$ . On fait de même pour  $G^{\text{ab}}$ ,  $M$ , etc.

Les théorèmes 1.4 et 2.1 nous donnent des formules pour le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  correspondant à la  $k$ -variété  $V = G \setminus G'$  qui regardent ce qui se passe au niveau des corps locaux  $k'((t))$  avec  $k'$  une extension finie de  $k$  et profitent de leurs propriétés arithmétiques. Dans cette section on en déduit une formule algébrique qui ne dépend que du corps de base  $k$  en déformant peu à peu la formule cohomologique (théorème 2.1).

**Définition 2.5.** Soit  $G$  un groupe fini de cardinal premier à  $q$ . Soit  $s \in \Gamma_k$  l'élément correspondant au  $q$ -Frobenius (i.e. l'application  $\bar{k} \rightarrow \bar{k} : x \mapsto x^q$ ). On définit une application bijective  $\varphi_q : G(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k})$  par la formule

$$\varphi_q(b) = s^{-1}b^q.$$

On remarque que l'action de  $s^{-1}$  et l'élévation à la  $q$ -ième puissance commutent, donc la notation n'est pas abusive. L'application induite par  $\varphi_q$  sur  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$  est un automorphisme que l'on note toujours  $\varphi_q$  par abus. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\varphi_q^n$  le  $n$ -ième itéré de  $\varphi_q$ .

Pour tout  $b \in G$ , on définit  $n_b$  comme le plus petit entier  $n_b > 0$  tel que  $\varphi_q^{n_b}(b)$  soit conjugué à  $b$ . On remarque qu'un tel  $n_b$  existe toujours d'après la finitude de  $G(\bar{k})$  et le fait que  $\varphi_q$  est bijective. On définit alors l'application  $q$ -norme  $N_q : G(\bar{k}) \rightarrow G^{\text{ab}}(\bar{k})$  comme le produit

$$N_q(b) = \prod_{i=0}^{n_b-1} \overline{\varphi_q^i(b)} = \prod_{i=0}^{n_b-1} \varphi_q^i(\bar{b}),$$

où " $\overline{\quad}$ " représente la projection naturelle de  $G(\bar{k})$  sur  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$ .

Avec ces définitions, on peut énoncer la formule algébrique de la façon suivante.

**Théorème 2.6.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini d'ordre premier à  $q$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \setminus G'$ . Soit  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, M)$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, M)$  tels que pour  $a \in Z^1(k, M)$  un cocycle (quelconque) représentant  $\alpha$ , on a

$$a_s(N_q(b)) = 1 \quad \forall b \in G.$$

On remarque que la formule a bien un sens. En effet,  $a_s$  est un élément de  $M$ , donc on peut l'évaluer en  $N_q(b) \in G^{\text{ab}}$ , ce qui donne un élément dans  $\mu\{q'\}$ .

### 2.5.1 Démonstration du théorème 2.6

D'après le théorème 2.1, on a intérêt à étudier l'application  $H^1(K_1, G) \rightarrow H^1(K_1, G^{\text{ab}})$  pour  $K_1 = k((t)) = \mathbb{F}_q((t))$ , ainsi que les applications  $H^1(K_n, G) \rightarrow H^1(K_n, G^{\text{ab}})$  pour  $K_n =$

$\mathbb{F}_{q^n}((t))$ . Soit alors  $S \subset \Gamma_{K_n} \subset \Gamma_{K_1}$  le sous-groupe de ramification sauvage et considérons le quotient  $D_n := \Gamma_{K_n}/S$  pour tout  $n \geq 1$ . On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$0 \rightarrow H^1(D_n, G) \rightarrow H^1(\Gamma_{K_n}, G) \rightarrow H^1(S, G),$$

mais puisque  $G$  est un  $k$ -groupe fini, on a  $G(\bar{k}) = G(\bar{K}_n)$  et alors  $S$  agit trivialement sur  $G(\bar{K}_n)$ , donc  $H^1(S, G)$  correspond aux morphismes  $S \rightarrow G$  à conjugaison près. On voit alors que  $H^1(S, G) = 0$ , car  $S$  est un pro- $p$ -groupe et  $G$  n'a pas de  $p$ -sous-groupe non trivial. On a exactement la même situation pour  $G^{\text{ab}}$ , donc on voit que l'on a  $H^1(D_n, G) = H^1(K_n, G)$  et de même pour  $G^{\text{ab}}$  et  $M$  et on peut alors se restreindre à étudier les applications  $H^1(D_n, G) \rightarrow H^1(D_n, G^{\text{ab}})$  pour  $n \geq 1$ .

On rappelle que  $D_n$  est un groupe profini engendré par deux générateurs  $\sigma_n$  et  $\tau$  avec la relation  $\sigma_n \tau \sigma_n^{-1} = \tau^{q^n}$  (cf. [NSW08, Thm. 7.5.3]). On remarque par ailleurs que l'inclusion naturelle  $\Gamma_{K_n} \subset \Gamma_{K_1}$  donne  $\sigma_n = \sigma_1^n$  et que  $D_n$  correspond au groupe de Galois de l'extension modérément ramifiée maximale de  $K_n = \mathbb{F}_{q^n}((t))$ . Si de plus on considère le sous-groupe fermé

$$T := \langle \tau \rangle \subset D_n$$

et les quotients

$$\Gamma_n := D_n/T \cong \langle \sigma^n \rangle,$$

on voit que  $\Gamma_n$  correspond au groupe de Galois de  $\bar{\mathbb{F}}_{q^n}((t))/\mathbb{F}_{q^n}((t))$  (i.e. de l'extension non ramifiée maximale de  $K_n$ ) lequel est isomorphe au groupe de Galois de  $\mathbb{F}_{q^n}$ . En particulier on a un isomorphisme canonique  $\Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_k$  qui envoie la classe de  $\sigma_1$  dans  $\Gamma_1$  sur le Frobenius  $s$  et alors on a canoniquement  $H^1(k, M) \cong H^1(\Gamma_1, M)$ . Il est facile aussi de voir à partir de la présentation de  $D_n$  que  $\Gamma_n \cong \hat{\mathbb{Z}}$ , tandis que  $T \cong \mathbb{Z}_{p'} := \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$  et que l'on a une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow T \rightarrow D_n \rightarrow \Gamma_n \rightarrow 1.$$

De ce fait, on se permet de noter désormais abusivement  $\sigma$  tant le générateur de  $\Gamma_1$  que l'élément  $\sigma_1 \in D_1$ . On a alors que  $\sigma^n$  est le générateur de  $\Gamma_n$  pour tout  $n$ . Enfin, comme  $G$  est défini sur  $k$ , on sait que  $\tau$  agit trivialement sur  $G(\bar{k}) = G(\bar{K}_1)$ , donc en particulier on a une action de  $\Gamma_1$  sur  $G(\bar{k})$  qui coïncide avec l'action de  $\Gamma_k$ , i.e. on a  ${}^\sigma b = {}^s b$  pour tout  $b \in G$  et en particulier,

$$\varphi_q(b) = {}^{s^{-1}} b^q = {}^{\sigma^{-1}} b^q, \quad \text{pour tout } b \in G.$$

Soit maintenant  $\alpha \in H^1(k, M) = H^1(\Gamma_1, M)$ . Le théorème 2.1 nous dit qu'il faut étudier le comportement de l'image  $\alpha_n$  de  $\alpha$  dans  $H^1(\Gamma_n, M) \subset H^1(D_n, M)$  par rapport au groupe  $H^1(D_n, G^{\text{ab}})$ . En effet, d'après les égalités ci-dessus, on voit que l'on a un accouplement parfait

$$H^1(D_n, M) \times H^1(D_n, G^{\text{ab}}) \rightarrow H^2(D_n, \mu\{q'\}) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (2.5.1)$$

issu de l'accouplement local classique. Soit alors  $\beta \in H^1(D_n, G^{\text{ab}})$  que l'on suppose d'abord comme provenant de  $H^1(\Gamma_n, G^{\text{ab}})$ . On peut donc considérer le cup-produit  $\alpha_n \cup \beta \in H^2(\Gamma_n, \mu\{q'\})$ . Or,  $\Gamma_n$  est un groupe de dimension cohomologique 1 car il est isomorphe à  $\hat{\mathbb{Z}}$ , donc on a  $H^2(\Gamma_n, \mu\{q'\}) = 0$ . La compatibilité du cup-produit avec l'inflation nous dit alors que  $\alpha_n$  est orthogonal à tout le sous-groupe  $H^1(\Gamma_n, G^{\text{ab}})$  de  $H^1(D_n, G^{\text{ab}})$ . De plus, la suite exacte des premiers termes de la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^p(\Gamma_n, H^q(T, G^{\text{ab}})) \Rightarrow H^{p+q}(D_n, G^{\text{ab}}),$$

qui est

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_n, (G^{\text{ab}})^T) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(D_n, G^{\text{ab}}) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n} \rightarrow H^2(\Gamma_n, (G^{\text{ab}})^T),$$

peut être réécrite comme

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_n, G^{\text{ab}}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(D_n, G^{\text{ab}}) \xrightarrow{\text{Res}} \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n} \rightarrow 0,$$

car  $T$  agit trivialement sur  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$  et  $\text{cd}(\Gamma_n) = 1$ . De cette suite, et du fait que  $H^1(\Gamma_n, M)$  est orthogonal à  $H^1(\Gamma_n, G^{\text{ab}})$ , on déduit que l'on a un accouplement

$$H^1(\Gamma_n, M) \times \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n} \rightarrow H^2(D_n, \mu\{q'\}) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (2.5.2)$$

qui nous dit que c'est l'image de  $H^1(D_n, G)$  dans  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n}$  que l'on doit étudier. On donne alors quelques définitions qui nous aideront à décrire cette image.

**Définition 2.7.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'un élément  $\mathfrak{b} \in G^{\text{ab}}$  est  $(q, n)$ -relevable s'il existe  $b \in G$  relevant  $\mathfrak{b}$  tel que  $\varphi_q^n(b)$  soit conjugué à  $b$ . On remarque que ceci entraîne en particulier que  $\varphi_q^n(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ .

On note  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n}$  le sous-groupe de  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$  des éléments invariants par  $\varphi_q^n$  et  $G_{q,n}^{\text{ab}} \subset (G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n}$  l'ensemble des éléments  $(q, n)$ -relevables. On remarque que  $\mathfrak{b} \in G^{\text{ab}}$  est  $\varphi_q^n$ -invariant si et seulement s'il vérifie  $\sigma^n \mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{q^n}$ .

On a un isomorphisme évident  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}}) \xrightarrow{\sim} G^{\text{ab}}(\bar{k})$  qui à un morphisme lui associe l'image de  $\tau$ . On peut alors vérifier facilement que l'image de  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n}$  dans  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$  pour cet isomorphisme correspond au sous-groupe  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n}$ . On voit alors que pour tout  $n$  l'accouplement (2.5.2) devient

$$H^1(\Gamma_n, M) \times (G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n} \rightarrow H^2(D_n, \mu\{q'\}) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (2.5.3)$$

On peut alors énoncer un résultat équivalent au théorème 2.1 qui utilise cet accouplement.

**Proposition 2.8.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini d'ordre premier à  $q$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Soit  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}} V$  avec  $H^1(\Gamma_1, M)$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(\Gamma_1, M)$  vérifiant la propriété suivante :

Pour tout  $n \geq 1$ , l'image  $\alpha_n$  de  $\alpha$  dans  $H^1(\Gamma_n, M)$  est orthogonale à  $G_{q,n}^{\text{ab}}$  pour l'accouplement (2.5.3) donné ci-dessus.

*Démonstration.* Il est facile de voir qu'un cocycle  $b \in Z^1(D_n, G)$  représentant une classe de  $H^1(D_n, G)$  est défini par ses images  $b_{\sigma^n}$  et  $b_\tau$  et qu'elles sont soumises à la seule relation

$$b_{\sigma^n \tau \sigma^{-n}} = b_{\tau q^n},$$

ce qui, sachant que  $\tau$  agit trivialement sur  $G(\bar{k})$ , se traduit par

$$b_{\sigma^n}^{\sigma^n} b_\tau b_{\sigma^n}^{-1} = b_\tau^{q^n}.$$

On en déduit qu'un morphisme dans  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}})$  appartient à l'image de  $H^1(D_n, G)$  si et seulement si l'image de  $\tau$  est  $(q, n)$ -relevable, ce qui nous dit que  $\alpha$  est orthogonale à  $G_{q,n}^{\text{ab}}$  si

et seulement si elle est orthogonale à  $\text{Im}[H^1(D_n, G) \rightarrow \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n}]$  pour l'accouplement (2.5.2), ce qui est le cas si et seulement si elle est orthogonale à  $\text{Im}[H^1(D_n, G) \rightarrow H^1(D_n, G^{\text{ab}})]$  pour l'accouplement (2.5.1).

Il suffit alors de noter que, pour toute extension finie  $k'/k$  il existe  $n \geq 1$  tel que  $k'((t)) \cong K_n$  et que l'accouplement (2.5.1) provient bien de l'accouplement classique

$$H^1(K_n, M) \times H^1(K_n, G^{\text{ab}}) \rightarrow H^2(K_n, \mathbb{G}_m) = \text{Br } K_n \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le théorème 2.1 nous permet alors de conclure. ☺

Soient maintenant  $\alpha \in H^1(\Gamma_1, M)$ ,  $a \in Z^1(\Gamma_1, M)$  un cocycle représentant  $\alpha$ ,  $\mathfrak{b} \in (G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n}$  et, par abus de notation, on note  $\mathfrak{b}$  aussi le cocycle dans  $Z^1(D_n, G^{\text{ab}})$  tel que  $\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}_{\sigma^n} = 1$ . Ce cocycle représente une classe  $\beta \in H^1(D_n, G^{\text{ab}})$  dont l'image dans  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_n}$  est précisément le morphisme envoyant  $\tau$  en  $\mathfrak{b}$ , ce qui justifie l'abus. On veut analyser le 2-cocycle  $a \cup \mathfrak{b} \in Z^2(D_n, \mu\{q'\})$  obtenu par l'accouplement (2.5.3) ci-dessus.

**Lemme 2.9.** *On a la formule*

$$(a \cup \mathfrak{b})_{\sigma^{ns_1}\tau^{t_1}, \sigma^{ns_2}\tau^{t_2}} = [a_{\sigma^n}(\mathfrak{b})]^{q^{n(s_1+s_2)}s_1t_2} \in \mu\{q'\}.$$

*Démonstration.* En tant qu'élément de  $Z^1(D_n, M)$ , on sait que  $a$  vérifie

$$\begin{aligned} a_{\sigma^{ns}} &= \prod_{i=0}^{s-1} \sigma^{ni} a_{\sigma^n}, & s \geq 1, \\ a_{\sigma^{-ns}} &= \prod_{i=1}^s \sigma^{-ni} a_{\sigma^n}^{-1}, & s \geq 1, \\ a_{\tau^t} &= 1, & t \in \mathbb{Z}, \\ a_{\sigma^{ns}\tau^t} &= a_{\sigma^{ns}} \sigma^{ns} a_{\tau^t} = a_{\sigma^{ns}}, & s, t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait par définition que  $\mathfrak{b}$  vérifie

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{\sigma^{ns}} &= 1, & s \in \mathbb{Z}, \\ \mathfrak{b}_{\tau^t} &= \mathfrak{b}_\tau^t = \mathfrak{b}^t, & t \in \mathbb{Z}, \\ \mathfrak{b}_{\sigma^{ns}\tau^t} &= \mathfrak{b}_{\sigma^{ns}} \sigma^{ns} \mathfrak{b}_{\tau^t} = \sigma^{ns} \mathfrak{b}^t = \mathfrak{b}^{q^{ns}t}, & s, t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En rappelant alors que la formule générale du cup-produit est

$$(a \cup \mathfrak{b})_{x,y} = a_x \otimes {}^x \mathfrak{b}_y,$$

il est facile de voir que le 2-cocycle  $a \cup \mathbf{b} \in Z^2(D_n, \mu\{q'\})$  est défini par la formule

$$\begin{aligned}
(a \cup \mathbf{b})_{\sigma^{n s_1} \tau^{t_1}, \sigma^{n s_2} \tau^{t_2}} &= a_{\sigma^{n s_1}}(\sigma^{n s_1} \tau^{t_1} \mathbf{b}^{q^{n s_2} t_2}) \\
&= [a_{\sigma^{n s_1}}(\sigma^{n s_1} \mathbf{b})]^{q^{n s_2} t_2} \\
&= \prod_{i=0}^{s_1-1} [(\sigma^{n i} a_{\sigma^n})(\sigma^{n s_1} \mathbf{b})]^{q^{n s_2} t_2} \\
&= \prod_{i=0}^{s_1-1} [\sigma^{n i} (a_{\sigma^n}(\sigma^{n(s_1-i)} \mathbf{b}))]^{q^{n s_2} t_2} \\
&= \prod_{i=0}^{s_1-1} [a_{\sigma^n}(\mathbf{b}^{q^{n(s_1-i)}})]^{q^{n(i+s_2)} t_2} \\
&= \prod_{i=0}^{s_1-1} [a_{\sigma^n}(\mathbf{b})]^{q^{n(s_1+s_2)} t_2} \\
&= [a_{\sigma^n}(\mathbf{b})]^{q^{n(s_1+s_2)} s_1 t_2} \in \mu\{q'\},
\end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $\sigma$  agit sur  $M = \text{Hom}(G^{\text{ab}}, \mu\{q'\})$  via  $(\sigma a)(\mathbf{b}) = \sigma(a(\sigma^{-1} \mathbf{b}))$  pour  $a \in M$  et  $\mathbf{b} \in G^{\text{ab}}$  (cf. par exemple [Ser68, IX.3]) et que  $\sigma$  agit sur  $\mu\{q'\} = \overline{\mathbb{F}}_q^*$  via le Frobenius, i.e. par élévation à la  $q$ -ième puissance. On a par ailleurs utilisé dans le calcul la formule de  $a_{\sigma^{n s_1}}$  pour  $s_1 \geq 1$ , mais un calcul similaire donne la même formule pour tout  $s_1 \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

On voit alors que la classe de  $a \cup \mathbf{b}$  dans  $H^2(D_n, \mu\{q'\})$  est décrite par l'élément  $a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) \in \mu\{q'\}$ , et l'inverse est vrai dans le sens suivant.

**Lemme 2.10.** *Soient  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\beta$  comme ci-dessus. Alors la classe  $\alpha_n \cup \beta \in H^2(D_n, \mu\{q'\})$  est nulle si et seulement si  $a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) = 1$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) = 1$ . La formule du lemme 2.9 nous dit alors immédiatement que l'on a  $(a \cup \mathbf{b})_{x,y} = 1$  pour toute paire  $(x, y) \in D_n^2$ , donc on a bien  $\alpha_n \cup \beta = 0$ .

Supposons maintenant que  $\alpha_n \cup \beta = 0$ . Il existe alors une fonction continue  $c : D_n \rightarrow \mu\{q'\}$  telle que pour toute paire  $(x, y) \in D_n^2$ , on a l'égalité

$$(a \cup \mathbf{b})_{x,y} = c_x^x c_y c_{xy}^{-1}.$$

Montrons que  $(a \cup \mathbf{b})_{\sigma^n, \tau} = 1$ . On a d'abord, d'après le calcul de  $a \cup \mathbf{b}$  dans le lemme 2.9,

$$\begin{aligned}
c_\tau c_{\tau^t} c_{\tau^{t+1}}^{-1} = (a \cup \mathbf{b})_{\tau, \tau^t} = 1 &\Rightarrow c_{\tau^{t+1}} = c_\tau c_{\tau^t} = \dots = c_\tau^{t+1}, \\
c_{\tau^{q^n}} c_{\sigma^n} c_{\tau^{q^n} \sigma^n}^{-1} = (a \cup \mathbf{b})_{\tau^{q^n}, \sigma^n} = 1 &\Rightarrow c_{\sigma^n \tau} = c_{\tau^{q^n} \sigma^n} = c_{\tau^{q^n}} c_{\sigma^n},
\end{aligned}$$

car  $\tau$  agit trivialement et  $\sigma^n \tau \sigma^{-n} = \tau^{q^n}$ . On calcule alors  $(a \cup \mathbf{b})_{\sigma^n, \tau} \in \mu\{q'\}$  :

$$(a \cup \mathbf{b})_{\sigma^n, \tau} = c_{\sigma^n}^{\sigma^n} c_\tau c_{\sigma^n \tau}^{-1} = c_{\sigma^n} c_\tau^{q^n} (c_{\tau^{q^n}} c_{\sigma^n})^{-1} = c_{\sigma^n} c_\tau^{q^n} (c_\tau^{q^n} c_{\sigma^n})^{-1} = 1.$$

On conclut que  $a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) = 1$ , car on a  $(a \cup \mathbf{b})_{\sigma^n, \tau} = a_{\sigma^n}(\mathbf{b})^{q^n}$  et  $\mu\{q'\}$  est  $q$ -divisible.  $\square$

Ce lemme nous dit que l'on peut oublier l'accouplement plutôt artificiel

$$H^1(\Gamma_n, M) \times (G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n} \rightarrow H^2(D_n, \mu\{q'\}) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et nous concentrer sur l'accouplement plus naturel

$$M \times (G^{\text{ab}})^{\varphi_q^n} \rightarrow \mu\{q'\} \subset \bar{k}^*.$$

**Lemme 2.11.** Pour  $\alpha \in H^1(\Gamma_1, M)$ ,  $a \in Z^1(\Gamma_1, M)$  représentant  $\alpha$  et  $\mathbf{b} \in G^{\text{ab}}$  on a

$$a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_q^i(\mathbf{b}) \right),$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* C'est un calcul explicite :

$$\begin{aligned} a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) &= \prod_{i=0}^{n-1} (\sigma^i a_{\sigma})(\mathbf{b}) = \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(a_{\sigma}(\sigma^{-i}\mathbf{b})) = \prod_{i=0}^{n-1} [a_{\sigma}(\sigma^{-i}\mathbf{b})]^{q^i} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} a_{\sigma}(\sigma^{-i}\mathbf{b}^{q^i}) = \prod_{i=0}^{n-1} a_{\sigma}(\varphi_q^i(\mathbf{b})) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_q^i(\mathbf{b}) \right). \end{aligned}$$

☺

C'est ce dernier lemme qui nous permet d'introduire la  $q$ -norme dans les calculs et de terminer la démonstration du théorème.

*Fin de la preuve du théorème 2.6.* Soit  $\alpha \in H^1(\Gamma_1, M)$  correspondant à un élément non ramifié. La proposition 2.8 nous dit alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n$  est orthogonal à  $G_{q,n}^{\text{ab}}$ . Soit  $b \in G$ . On a alors de façon évidente que  $\bar{b} \in G_{q,n_b}^{\text{ab}}$ . Les lemmes 2.11 et 2.10 nous disent alors que  $a_{\sigma}(N_q(b)) = a_{\sigma^{n_b}}(\bar{b}) = 1$ .

En sens inverse, soit  $a \in Z^1(\Gamma_1, M)$  tel que  $a_{\sigma}(N_q(b)) = 1$  pour tout  $b \in G$  et soit  $\alpha$  la classe de  $a$  dans  $H^1(\Gamma_1, M)$ . Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{b} \in G_{q,n}^{\text{ab}}$  et  $b \in G$  une préimage de  $\mathbf{b}$ . Il est facile de voir que  $n_b$  divise  $n$  et alors, d'après le lemme 2.11, on a

$$\begin{aligned} a_{\sigma^n}(\mathbf{b}) &= a_{\sigma^{n_b}}(\mathbf{b}) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_b-1} \varphi_q^i(\mathbf{b}) \right) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_b-1} \prod_{j=0}^l \varphi_q^{j n_b + i}(\mathbf{b}) \right) = \\ &= a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_b-1} \prod_{j=0}^l \varphi_q^i(\mathbf{b}) \right) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_b-1} \varphi_q^i(\mathbf{b})^l \right) = a_{\sigma}(N_q(b))^l = 1, \end{aligned}$$

car on rappelle que  $\varphi_q^{n_b}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ . Le lemme 2.10 nous dit alors que  $\alpha_n$  est orthogonal à  $\mathbf{b}$  pour l'accouplement (2.5.3) et la proposition 2.8 nous dit donc que  $\alpha$  correspond à un élément non ramifié.

Il suffit alors pour conclure de rappeler que  $\Gamma_k$  (resp.  $H^1(k, M)$ ) est canoniquement isomorphe à  $\Gamma_1$  (resp.  $H^1(\Gamma_1, M)$ ) et que  $\sigma$  est envoyé sur  $s$  (le  $q$ -Frobenius) par cet isomorphisme.

☺

### 2.5.2 Une formulation plus pratique du théorème 2.6

On conclut cette section en donnant encore un accouplement qui rendra plus simples quelques calculs que l'on se propose de faire plus tard et qui aidera peut-être le lecteur à voir pourquoi on a la liberté de choisir le cocycle  $a$  représentant la classe  $\alpha \in H^1(k, M)$  dans le théorème 2.6.

On a déjà remarqué qu'un cocycle  $a \in Z^1(k, M)$  est uniquement défini par l'image du Frobenius. De plus, il est facile de voir que tout élément de  $M$  peut être une telle image. On a alors un isomorphisme  $M \xrightarrow{\sim} Z^1(k, M)$  qui induit par composition un morphisme surjectif  $M \rightarrow H^1(k, M)$ .

Étudions le noyau de ce morphisme. Un cocycle  $a \in Z^1(k, M)$  est cohomologue au cocycle trivial si et seulement s'il existe  $c \in M$  tel que

$$a_x = c^x c^{-1} \quad \forall x \in \Gamma_k.$$

On voit alors qu'en particulier on doit avoir  $a_s = c^s c^{-1}$ . On en déduit que le noyau du morphisme  $M \rightarrow H^1(k, M)$  est le sous-groupe  $N_0$  des éléments de la forme  $c^s c^{-1}$  avec  $c \in M$ . On a alors un isomorphisme

$$M_0 := M/N_0 \xrightarrow{\sim} H^1(k, M).$$

En notant  $N_q(G)$  l'image de  $G$  dans  $G^{\text{ab}}$  par l'application  $q$ -norme (qui n'a aucune raison d'être un sous-groupe), on voit que l'accouplement utilisé dans le théorème 2.6 revient alors à l'accouplement

$$M_0 \times N_q(G) \rightarrow \mu\{q'\},$$

induit par l'accouplement évident  $M \times G^{\text{ab}} \rightarrow \mu\{q'\}$  et que le groupe de Brauer non ramifié algébrique correspond au noyau à gauche de cet accouplement. La liberté qu'on a pour choisir un représentant  $a \in M$  d'un élément  $\mathfrak{a} \in M_0$  pour faire cet accouplement-ci explique la liberté de choix que l'on a dans le théorème 2.6.

Démontrons donc que cet accouplement est bien défini : il suffit de montrer que  $N_q(G)$  est orthogonal à  $N_0$ , ce qu'on fait en remarquant que l'on a trivialement  $N_q(G) \subset (G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  et en notant que l'on a :

**Lemme 2.12.**  $N_0$  est l'orthogonal de  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  pour l'accouplement

$$M \times G^{\text{ab}} \rightarrow \mu\{q'\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{b} \in G^{\text{ab}}$ . Comme l'accouplement est parfait, on sait que l'on a les équiva-

lences suivantes

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b} \perp N_0 &\Leftrightarrow \forall c \in M, \quad (c^s c^{-1})(\mathfrak{b}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall c \in M, \quad c(\mathfrak{b})[(^s c)(\mathfrak{b})]^{-1} = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall c \in M, \quad c(\mathfrak{b})^s [c(^s \mathfrak{b})]^{-1} = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall c \in M, \quad c(\mathfrak{b})c(^s \mathfrak{b})^{-q} = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall c \in M, \quad c(\mathfrak{b}^{s^{-1}} \mathfrak{b}^{-q}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall c \in M, \quad c(\mathfrak{b} \varphi_q(\mathfrak{b})^{-1}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{b} \varphi_q(\mathfrak{b})^{-1} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{b} \in (G^{\text{ab}})^{\varphi_q}.
\end{aligned}$$



Puisque l'accouplement entre  $G^{\text{ab}}$  et  $M$  est parfait, on peut déduire du lemme que l'accouplement entre  $M_0$  et  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  l'est aussi. Le groupe de Brauer non ramifié algébrique correspond alors dans cette formulation au sous-groupe de  $M_0$  qui est orthogonal à  $N_q(G)$ , ce qui est la même chose que l'orthogonal du sous-groupe  $\mathcal{N}_q(G)$  de  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  engendré par  $N_q(G)$ . On voit aussitôt que, avec cette formulation,

**Proposition 2.13.** *Le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  est isomorphe à  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}/\mathcal{N}_q(G)$  en tant que groupe abélien.*

*Démonstration.* En effet, il suffit de noter que  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}/\mathcal{N}_q(G)$  correspond au dual de l'orthogonal de  $\mathcal{N}_q(G)$  pour l'accouplement parfait  $M_0 \times (G^{\text{ab}})^{\varphi_q} \rightarrow \mu\{q'\}$  et que ce dernier groupe est isomorphe au groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  d'après le théorème 2.6. Ces trois groupes sont donc isomorphes en tant que groupes abéliens. 

En particulier, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 2.14.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe tel que  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  est engendré par les  $q$ -normes. Alors on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V = 0$  pour  $V = G \setminus G'$ .* 

## 2.6 Une formule algébrique sur un corps de caractéristique 0

Dans toute cette section,  $k$  représente un corps de caractéristique 0. On retrouve ici une formule pour le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  où  $V = G \setminus G'$  en nous ramenant au cas des corps finis et en utilisant la formule développée dans la section précédente. Cette méthode a déjà été utilisée par Colliot-Thélène et Kunyavskiĭ (cf. [CTK98]) dans le cas des espaces principaux homogènes, i.e. lorsque  $G$  est trivial, et par Borovoi, Demarche et Harari (cf. [BDH13]) dans le cas où  $G$  est connexe ou abélien (ou encore plus généralement de type “ssumult”) et avec des groupes  $G'$  plus généraux.

Notre formule sera d'une nature un peu différente car, dans les deux cas cités, il se trouve que le groupe de Brauer non ramifié algébrique est toujours nul sur un corps fini, ce qui rend les calculs beaucoup plus simples. Dans les sections qui suivent, on montrera qu'il n'en est pas

du tout ainsi dans le cas où  $G$  est fini et non abélien. La formule qu'on obtient ressemblera donc à celle que l'on a donnée pour les corps finis. Elle s'appuie notamment sur l'accouplement naturel  $M \times G^{\text{ab}} \rightarrow \mu_n$ , où  $n$  est l'exposant de  $G$ .

On commence avec quelques définitions analogues à celles données dans la section 2.5. Dans toute cette section,  $n$  représente l'exposant du  $k$ -groupe fini  $G$ . On fixe aussi désormais une racine primitive  $n$ -ième de l'unité  $\zeta_n \in \bar{k}$ .

**Définition 2.15.** On définit le morphisme  $q : \Gamma_k \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  par la formule suivante :

$$\forall \sigma \in \Gamma_k, \quad \sigma \zeta_n = \zeta_n^{q(\sigma)}.$$

C'est le caractère cyclotomique modulo  $n$ , cf. [NSW08, Def. 7.3.6].

On définit ensuite, pour tout  $\sigma \in \Gamma_k$ , l'application  $\varphi_\sigma : G(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k})$  par la formule

$$\varphi_\sigma(b) = \sigma^{-1} b^{q(\sigma)},$$

et on note abusivement  $\varphi_\sigma$  aussi l'application induite sur  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$  qui en est un automorphisme. On remarque par ailleurs que l'action de  $\sigma^{-1}$  et l'élévation à la  $q(\sigma)$ -ième puissance commutent, donc la notation n'est pas abusive.

Enfin, pour  $\sigma \in \Gamma_k$  et  $b \in G$ , on définit  $n_{\sigma,b}$  comme le plus petit entier  $> 0$  tel que  $\varphi_\sigma^{n_{\sigma,b}}(b)$  soit conjugué à  $b$ . On définit alors l'application  $\sigma$ -norme  $N_\sigma : G(\bar{k}) \rightarrow G^{\text{ab}}(\bar{k})$  par la formule suivante :

$$N_\sigma(b) := \prod_{i=0}^{n_{\sigma,b}-1} \overline{\varphi_\sigma^i(b)} = \prod_{i=0}^{n_{\sigma,b}-1} \varphi_\sigma^i(\bar{b}).$$

Avec ces définitions, on peut énoncer la formule pour  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$ .

**Théorème 2.16.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Soit enfin  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, M)$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, M)$  tels que pour  $a \in Z^1(k, M)$  un cocycle (quelconque) représentant  $\alpha$ , on a*

$$a_\sigma(N_\sigma(b)) = 1 \quad \forall b \in G, \forall \sigma \in \Gamma_k. \quad (2.6.1)$$

*Remarque.*

Il est important de noter que cette formule ne dépend que du stabilisateur  $G$ . En particulier, elle ne dépend point du groupe ambiant  $G'$  tant qu'il s'agit d'un groupe semi-simple et simplement connexe. Cette remarque peut par ailleurs être généralisée à *tout* le groupe de Brauer non ramifié  $\text{Br}_{\text{nr}}V$  et pour un stabilisateur  $G$  *quelconque*, comme nous l'a fait remarquer Colliot-Thélène (cf. [CT12]).

Ceci ne veut pas pourtant dire que toutes ces variétés aient des chances d'être birationnelles ou encore stablement birationnelles. En effet, il suffit de penser au cas où  $G = \{1\}$  : il existe des exemples de groupes algébriques  $G'$  semi-simples simplement connexes rationnels, comme  $\text{SL}_n$ , et d'autres dans la même famille  $(A_n)$  qui ne sont même pas stablement rationnels (cf. [Mer95]).

D'un autre côté, le lemme sans nom (cf. [CTS07, Cor. 3.9]) nous dit par exemple que lorsque le groupe ambiant  $G'$  est  $\text{SL}_n$ , alors les variétés quotient obtenues pour deux plongements différents de  $G$  sont stablement birationnelles. Il serait intéressant de savoir s'il en est de même pour d'autres groupes  $G'$ .

### 2.6.1 Démonstration du théorème 2.16

Puisque la caractéristique de  $k$  est 0, le théorème d'Hironaka nous permet de trouver une  $k$ -compactification lisse  $X$  de  $V$  que l'on fixe pour toute la suite. On rappelle que de la même façon que l'on identifie  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  avec  $H^1(k, M)$ , on peut identifier  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}}V = \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}X$  avec  $H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$ . Soit  $\gamma$  un sous-groupe fermé pro-cyclique de  $\Gamma_k$ . Il est évident par functorialité de la restriction que si un élément  $\alpha \in H^1(k, M)$  provient de  $H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$ , alors son image dans  $H^1(\gamma, M)$  provient de  $H^1(\gamma, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$ . Lorsqu'on considère tous les sous-groupes pro-cycliques de  $\Gamma_k$  ensemble, on a l'affirmation réciproque au sens suivant.

**Lemme 2.17.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Soit  $X$  une  $k$ -compactification lisse de  $V$ . Soit enfin  $M$  le groupe des caractères de  $G$  et  $\alpha \in H^1(k, M)$ . Supposons que pour tout sous-groupe pro-cyclique  $\gamma$  de  $\Gamma_k$ , l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(\gamma, M)$  provient de  $H^1(\gamma, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$ . Alors  $\alpha$  provient de  $H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$ .*

*Remarque.*

Ce lemme nous dit en particulier que l'on a toujours l'inclusion  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M) \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}}V$ . Dans les sections qui suivent on montrera que cette inclusion peut en fait être stricte, par opposition au cas des espaces homogènes à stabilisateur connexe ou abélien, cf. [BDH13]. On généralise ainsi le résultat de Demarche dans [Dem10, §6], valable pour  $k$  un corps de nombres.

*Démonstration.* Soit  $\mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}$  le sous-groupe de  $\mathrm{Div} X_{\bar{k}}$  des diviseurs à support dans le complémentaire de  $V$  dans  $X$ . C'est un  $\Gamma_k$ -module de permutation. En effet, le complémentaire de  $V$  étant un fermé strict de  $X$ , il contient un nombre fini de diviseurs que le groupe  $\Gamma_k$  permute, a priori, de façon non triviale.

Puisque  $X_{\bar{k}}$  et  $V_{\bar{k}}$  sont des variétés intègres et lisses, on a la suite exacte classique (cf. par exemple [Hrt77, II, 6.5 et 6.16])

$$\mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}} \rightarrow \mathrm{Pic} X_{\bar{k}} \rightarrow \mathrm{Pic} V_{\bar{k}} \rightarrow 0.$$

En ajoutant un 0 à gauche de cette suite, il se trouve qu'elle est en fait aussi exacte à gauche. En effet, soit  $D \in \mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}$  tel que son image dans  $\mathrm{Pic} X_{\bar{k}}$  est nulle. Il existe alors une fonction  $f \in \bar{k}(X)$  telle que  $\mathrm{div}(f) = D$ , où  $\mathrm{div}$  est l'application diviseur  $\bar{k}(X) \rightarrow \mathrm{Div} X_{\bar{k}}$ . Comme  $D$  est à support dans  $X_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}$ , on a que  $f$  est inversible sur  $V_{\bar{k}}$ , i.e.  $f \in \bar{k}[V]^* = \bar{k}^*$  (cf. la section 2.3). Donc  $f$  est une constante et  $D = 0$ , ce qui montre l'injectivité.

De cette suite on déduit la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \rightarrow H^1(\Gamma_k, \mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}) \rightarrow H^1(\Gamma_k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}}) \rightarrow H^1(\Gamma_k, \mathrm{Pic} V_{\bar{k}}) \rightarrow H^2(\Gamma_k, \mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}) \rightarrow \cdots$$

Or,  $\mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}$  étant un module de permutation, on a  $H^1(\Gamma_k, \mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}) = 0$ . En effet, en utilisant le lemme de Shapiro on peut se restreindre à démontrer que  $H^1(H_i, \mathbb{Z}) = 0$  pour certains sous-groupes ouverts  $H_i$  de  $\Gamma_k$ , ce qui est évident, car  $\Gamma_k$  (et par conséquent,  $H_i$ ) est un groupe profini et  $\mathbb{Z}$  est sans torsion. La suite devient alors

$$0 \rightarrow H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}}) \rightarrow H^1(k, M) \rightarrow H^2(k, \mathrm{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}).$$

Pour tout sous-groupe fermé pro-cyclique  $\gamma$  de  $\Gamma_k$  on peut considérer alors les applications de

restriction et obtenir le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic } X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & H^1(k, M) & \longrightarrow & H^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & H^1(\gamma, M) & \longrightarrow & H^2(\gamma, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}). \end{array}$$

Avec ce diagramme, on voit que l'affirmation du lemme découle de la nullité du groupe  $\text{III}_{\text{cyc}}^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$  qui est défini comme le sous-groupe de  $H^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$  des éléments dont la restriction à tout sous-groupe pro-cyclique de  $\Gamma_k$  est triviale. En effet, si l'image de  $\alpha$  provient de  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  pour tout  $\gamma$ , alors son image dans  $H^2(\gamma, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$  est nulle pour tout  $\gamma$ , ce qui nous dit que l'image de  $\alpha$  dans  $H^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$  est en fait dans  $\text{III}_{\text{cyc}}^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$  et est donc nulle, ce qui nous dit que  $\alpha$  provient de  $H^1(k, \text{Pic } X_{\bar{k}})$ .

Montrons donc que  $\text{III}_{\text{cyc}}^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}) = 0$ . Puisque  $\text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}$  est un module de permutation, on sait (toujours d'après le lemme de Shapiro) qu'il existe des sous-groupes ouverts  $H_i$  de  $\Gamma_k$  tel que l'on a

$$H^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}}) \cong \bigoplus_i H^2(H_i, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_i H^1(H_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigoplus_i \text{Hom}(H_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Si l'on considère alors un morphisme non trivial  $\phi$  dans  $H^1(H_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  et un élément  $\sigma \in H_i$  tel que son image par  $\phi$  soit non nulle, on voit que la restriction de  $\phi$  au sous-groupe fermé pro-cyclique engendré par  $\sigma$  est non nulle. La compatibilité de la restriction avec les suites exactes longues et avec l'isomorphisme de Shapiro nous dit alors que pour tout élément non nul  $\beta$  de  $H^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$  il existe un sous-groupe fermé pro-cyclique  $\gamma$  de  $\Gamma_k$  tel que la restriction de  $\beta$  à  $\gamma$  est non nulle, ce qui entraîne la nullité de  $\text{III}_{\text{cyc}}^2(k, \text{Div}_{\infty} X_{\bar{k}})$ .  $\square$

Soient maintenant  $\alpha \in H^1(k, M)$ ,  $\sigma \in \Gamma_k$  et  $\gamma$  le sous-groupe fermé pro-cyclique engendré par  $\sigma$ . Compte tenu de ce lemme, on voit facilement que pour démontrer le théorème 2.16 il suffit de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 2.18.** *Avec les notations ci-dessus, la restriction  $\alpha' \in H^1(\gamma, M)$  de  $\alpha$  provient de  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  si et seulement si, pour  $a \in Z^1(k, M)$  un cocycle représentant  $\alpha$ , on a*

$$a_{\sigma}(N_{\sigma}(b)) = 1 \quad \forall b \in G.$$

En effet, on peut voir que la restriction  $\alpha'$  est clairement représentée par le cocycle  $a|_{\gamma} \in Z^1(\gamma, M)$  et donc  $a_{\sigma}$  n'est rien d'autre que  $(a|_{\gamma})_{\sigma}$ . La démarche consistera alors à trouver un corps fini  $\mathbb{F}$  tel que l'on puisse regarder  $G$  et  $M$  comme des  $\mathbb{F}$ -groupes dont l'action du Frobenius coïncide avec celle de  $\sigma$ . On aura alors des morphismes canoniques  $H^1(\gamma, M) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, M)$  et  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } X_{\bar{\mathbb{F}}})$  et des égalités  $\varphi_{q_0} = \varphi_{\sigma}$  et  $N_{q_0} = N_{\sigma}$ , où  $q_0$  est le cardinal de  $\mathbb{F}$ . Le résultat découlera alors du théorème 2.6.

Pour ce faire, on suit la démarche de Colliot-Thélène et Kunyavskiï, laquelle est explicitée en détails dans l'article de Borovoi, Demarche et Harari et que l'on reproduit ici (étapes 1 et 2).

**Étape 1 : Restriction au cas où  $k$  est de type fini sur  $\mathbb{Q}$**  Soit  $\tilde{k}$  une extension finie galoisienne de  $k$  déployant  $\text{Pic } X_{\tilde{k}}$  et contenant  $\zeta_n$  et posons  $\tilde{\Gamma} = \text{Gal}(\tilde{k}/k)$ . Puisque  $V$  est clairement  $k$ -unirationnelle, le groupe  $\text{Pic } X_{\tilde{k}}$  est sans torsion (théorème 1.15) et donc égal à son groupe de Néron-Severi  $\text{NS } X_{\tilde{k}}$ . De plus, puisque le groupe (profini) de Galois de  $\tilde{k}$  agit trivialement sur  $\text{Pic } X_{\tilde{k}}$ , on a que  $H^1(\tilde{k}, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) = 0$ , ce qui entraîne que  $H^1(k, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) = H^1(\tilde{\Gamma}, \text{Pic } X_{\tilde{k}})$  par la suite de restriction-inflation. Si l'on note  $\tilde{\gamma}$  l'image de  $\gamma$  dans  $\tilde{\Gamma}$ , on voit que l'on a aussi  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) = H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } X_{\tilde{k}})$ .

Écrivons  $\tilde{k} = k[t]/P(t)$  pour un certain polynôme irréductible  $P \in k[t]$ . Comme tous les morphismes considérés sont de type fini, on sait qu'il existe un corps  $k_0 \subset k$  de type fini sur  $\mathbb{Q}$  sur lequel  $G, G', V, X$  et les plongements  $G \hookrightarrow G'$  et  $V \hookrightarrow X$  sont définis. De plus, on peut supposer que  $X$  admet un  $k_0$ -point : l'image de l'élément neutre  $e \in G'$  par la projection  $G' \rightarrow V$  (le groupe  $G'$ , et en particulier  $e$ , sont définis sur un corps de nombres). Enfin, quitte à agrandir  $k_0$ , on peut supposer que  $P \in k_0[t]$  et que  $\tilde{k}_0 := k_0[t]/P(t)$  est une extension galoisienne qui déploie  $\text{Pic } X_{\tilde{k}}$ . En effet, si  $a$  est une racine de  $P$  telle que  $\tilde{k} = k[a]$  et  $\tilde{k}_0 = k_0[a]$  et si  $a_1$  est un conjugué de  $a$ , alors on a  $a_1 = P_1(a)$  pour un certain polynôme  $P_1 \in k[t]$ , car  $a_1 \in \tilde{k} = k[a]$ . Il suffit alors de demander que  $k_0$  contienne les coefficients de  $P_1$  pour tout conjugué  $a_1$  de  $a$  pour que  $\tilde{k}_0/k_0$  soit galoisienne. Le fait qu'elle déploie  $\text{Pic } X_{\tilde{k}_0}$  est évident. Avec ces suppositions, on a un isomorphisme canonique entre  $\tilde{\Gamma}$  et  $\text{Gal}(\tilde{k}_0/k_0)$  et des isomorphismes

$$\text{Pic } X_{\tilde{k}_0} \xrightarrow{\sim} \text{Pic } X_{\tilde{k}_0} \xrightarrow{\sim} \text{Pic } X_{\tilde{k}} \xleftarrow{\sim} \text{Pic } X_{\tilde{k}}.$$

En effet, les isomorphismes à gauche et à droite découlent du lemme 6.3 de [San81], tandis que celui du milieu découle de l'invariance du groupe de Néron-Severi par changement de base algébriquement clos, cf. [MP12, Prop. 3.1] (cf. aussi le théorème 1.15). On trouve alors finalement l'isomorphisme

$$H^1(\text{Gal}(\tilde{k}_0/k_0), \text{Pic } X_{\tilde{k}_0}) \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{\Gamma}, \text{Pic } X_{\tilde{k}}),$$

ce qui nous dit que l'on peut supposer  $k = k_0$  et  $\tilde{k} = \tilde{k}_0$ .

**Étape 2 : Réduction au cas d'un corps fini** Puisque maintenant  $k$  est de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , on sait que l'on peut trouver :

1. Un anneau intègre et régulier  $A$  de type fini sur  $\mathbb{Z}$  et de corps de fractions  $k$ , tel que la fermeture intégrale  $\tilde{A}$  dans  $\tilde{k}$  soit finie, étale et galoisienne sur  $A$  de groupe de Galois  $\tilde{\Gamma}$ .
2. Des  $A$ -schémas  $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{V}$  et  $\mathcal{X}$  de type fini, de fibres génériques respectives  $G, G', V$  et  $X$  et tels que :
  - $\mathcal{G}'$  est un  $A$ -schéma en groupes semi-simple simplement connexe (au sens de [SGA3III, XIX.2.7, XXII.4.3.3]) et  $\mathcal{G}$  est un sous- $A$ -schéma en groupes fini et lisse de  $\mathcal{G}'$  ;
  - $\mathcal{V} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$  est lisse sur  $A$ ,  $\mathcal{X}$  est propre et lisse sur  $A$  et on a une  $A$ -immersion ouverte  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X}$  étendant  $V \hookrightarrow X$  ;
  - pour tout point  $x$  de  $\text{Spec } A$  de corps résiduel  $\kappa_x$ , la fibre  $\mathcal{X}_x \subset \mathcal{X}$  est une compactification lisse de  $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{V}$  sur  $\kappa_x$ .

En notant que  $X$  est unirationnelle et que  $k$  est un corps de caractéristique 0, on a  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . Alors, comme la dimension des groupes de cohomologie est une fonction semi-continue supérieurement (cf. [Hrt77, III, Thm. 12.8]), on peut supposer, quitte à restreindre

encore  $\text{Spec } A$ , que  $H^1(\mathcal{X}_x, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_x}) = H^2(\mathcal{X}_x, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_x}) = 0$  pour tout point  $x$  de  $\text{Spec } A$ . Alors, d'après [Gro62, Cor. 2.7], on trouve des isomorphismes de spécialisation

$$\text{Pic } X \xrightarrow{\sim} \text{Pic } \mathcal{X}_x,$$

pour tout point  $x \in \text{Spec } A$ . De même, quitte à réduire encore  $\text{Spec } A$ , on trouve des isomorphismes

$$\text{Pic } X_{\tilde{k}} \xrightarrow{\sim} \text{Pic } \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{x}}$$

pour tout point  $\tilde{x} \in \text{Spec } \tilde{A}$ , où  $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_A \tilde{A}$ , et on en a de même pour tout sous-anneau  $\tilde{A}^\Delta$  de  $\tilde{A}$  correspondant aux éléments invariants par un sous-groupe  $\Delta$  de  $\tilde{\Gamma}$  (il suffit de considérer toute la situation sur le sous-corps  $\tilde{k}^\Delta \subset \tilde{k}$  des invariants par  $\Delta$ ). De cela on déduit que ces isomorphismes sont d'ailleurs compatibles avec les actions galoisiennes correspondantes.

Si l'on considère alors le sous-anneau  $A_1 := \tilde{A}^{\tilde{\gamma}}$  des éléments  $\tilde{\gamma}$ -invariants de  $\tilde{A}$ , on a que le morphisme  $\rho : \text{Spec } \tilde{A} \rightarrow \text{Spec } A_1$  est un revêtement étale cyclique de groupe de Galois  $\tilde{\gamma}$  avec  $\tilde{A}$  et  $A_1$  des anneaux intègres, réguliers et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . La version géométrique du théorème de Čebotarev (cf. [Ser65, Thm. 7]) nous dit alors qu'il existe une infinité de points fermés  $x_1$  de  $\text{Spec } A_1$  tels que la fibre en  $x_1$  de  $\rho$  soit un point fermé  $\tilde{x}$  de  $\text{Spec } \tilde{A}$ . Ceci veut dire que si l'on note  $\mathbb{F}$  le corps résiduel en  $x_1$  et  $\mathbb{E}$  le corps résiduel en  $\tilde{x}$ , on a une extension de corps résiduels  $\mathbb{E}/\mathbb{F}$  de groupe de Galois  $\tilde{\gamma}$  et par suite, en notant  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \times_A A_1$  et  $Y$  la  $\mathbb{F}$ -variété  $(\mathcal{X}_1)_{x_1}$ , un isomorphisme

$$H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } Y_{\mathbb{E}}).$$

De plus, toujours d'après le lemme 6.3 de [San81], on a que  $\text{Pic } Y_{\mathbb{E}} \cong \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}$  car  $\text{Pic } Y_{\mathbb{F}}$  est déployé sur  $\mathbb{E}$  d'après la compatibilité des actions galoisiennes évoquée ci-dessus.

Pour résumer, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) &\cong H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) \cong H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) \\ &\cong H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } Y_{\mathbb{E}}) \cong H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) \cong H^1(\gamma, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}). \end{aligned}$$

En particulier, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\tilde{k}}) &\hookrightarrow & H^1(\gamma, M) \\ \downarrow \sim & & \parallel \\ H^1(\gamma, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) &\hookrightarrow & H^1(\gamma, M) \end{array} \quad (2.6.2)$$

où  $M = M(\tilde{k}) = M(\mathbb{F})$  représente le groupe des caractères (géométriques) de  $G$  (ou encore  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}_{x_1}$ ). On rappelle que, puisque  $G$  est fini (donc a fortiori  $M$  aussi), les points géométriques de  $M$  sont invariants par changement de base. L'action de  $\gamma$  sur  $M(\tilde{k})$  et sur  $M(\mathbb{F})$  étant induite par celle sur  $\text{Pic } X_{\tilde{k}}$  et sur  $\text{Pic } X_{\mathbb{F}}$  respectivement, on voit qu'il s'agit bien de la même action.

Considérons le morphisme surjectif  $f : \Gamma_{\mathbb{F}} \rightarrow \gamma$  induit par l'extension  $\mathbb{E}/\mathbb{F}$  qui envoie le Frobenius  $s$  sur  $\sigma$  (c'est un isomorphisme dès que l'ordre de  $\sigma$  n'est pas fini). Cela nous donne des morphismes canoniques d'inflation

$$H^1(\gamma, M) \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, M) \quad \text{et} \quad H^1(\gamma, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) = \text{Br}_{\text{al}} Y,$$

où l'action de  $\Gamma_{\mathbb{F}}$  sur  $M$  correspond bien entendu à celle induite par  $f$  (il en va de même par ailleurs pour l'action sur  $G(\bar{k}) = \mathcal{G}_{x_1}(\bar{\mathbb{F}})$ ). La première flèche est injective (car d'inflation) et la deuxième flèche est un isomorphisme d'après la suite de restriction-inflation car on a déjà vu que  $\text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}}$  est sans torsion et déployé par  $\mathbb{E}$ . En mettant ensemble ces morphismes avec le diagramme (2.6.2) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}}) & \hookrightarrow & H^1(\gamma, M) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}}) & \hookrightarrow & H^1(\mathbb{F}, M) \end{array} \quad (2.6.3)$$

Enfin, puisque  $Y$  est une compactification lisse d'un  $\mathbb{F}$ -espace homogène sous  $\mathcal{G}'_{x_1}$  à stabilisateur fini  $\mathcal{G}_{x_1}$  et que l'on peut toujours choisir  $x_1$  de façon que l'ordre de  $\mathcal{G}_{x_1}$  soit premier au cardinal de  $\mathbb{F}$ , on a enfin le droit d'utiliser le théorème 2.6.

**Étape 3 : Fin de la preuve, utilisation du théorème 2.6** Reprenons alors un élément  $\alpha \in H^1(k, M)$ ,  $a \in Z^1(k, M)$  représentant  $\alpha$ ,  $\sigma \in \Gamma_k$  et  $\gamma$  le sous-groupe pro-cyclique de  $\Gamma_k$  engendré par  $\sigma$  comme dans la proposition 2.18. D'après le diagramme commutatif (2.6.3), la restriction  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(\gamma, M)$  provient de  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  si et seulement si son image  $\tilde{\alpha} \in H^1(\mathbb{F}, M)$  provient de  $H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}}) = \text{Br}_{\text{al}} Y$ . Considérons les cocycles  $a' = a|_{\gamma}$  et  $\tilde{a} = a' \circ f$ , qui représentent respectivement  $\alpha'$  et  $\tilde{\alpha}$ . On voit alors grâce au théorème 2.6 que  $\tilde{\alpha}$  provient de  $H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}})$  si et seulement si

$$\tilde{a}_s(N_{q_0}(b)) = 1 \quad \forall b \in G,$$

où  $q_0$  est le cardinal de  $\mathbb{F}$ . Or, on a clairement

$$\tilde{a}_s(N_{q_0}(b)) = a'_\sigma(N_{q_0}(b)) = a_\sigma(N_{q_0}(b)),$$

d'où l'on voit qu'il suffit de démontrer que  $N_{q_0} = N_\sigma$  pour conclure.

D'après la définition de  $N_{q_0}$  et de  $N_\sigma$ , il suffit en fait de démontrer l'égalité  $\varphi_{q_0} = \varphi_\sigma$ . Et d'après la définition de ces applications, tout ce qu'il faut démontrer est que

$$q(\sigma) \equiv q_0 \pmod{n}, \quad \text{ou encore} \quad \zeta_n^{q_0} = \zeta_n^{q(\sigma)},$$

où l'on rappelle que  $n$  est l'exposant de  $G$ . Or, cela est vrai de façon évidente, car  $\sigma$  agit sur  $\mu_n$  de la même façon que le Frobenius de  $\mathbb{F}$  (on rappelle que  $\mu_n \subset \bar{k}$  par hypothèse), lequel envoie  $\zeta_n$  en  $\zeta_n^{q_0}$  par définition, d'où

$$\zeta_n^{q(\sigma)} = \sigma \zeta_n = {}^s \zeta_n = \zeta_n^{q_0}.$$

Ceci conclut donc la démonstration de la proposition 2.18 et par conséquent celle du théorème 2.16.

## 2.6.2 Applications et simplifications du théorème 2.16

La formule, telle qu'elle est donnée dans le théorème 2.16, n'est pas pratique pour faire des calculs. En effet, il suffit de noter tout simplement que  $\Gamma_k$  est en général un groupe infini. Or, il se trouve que, comme on pourrait s'y attendre, il suffit de se restreindre à un quotient de  $\Gamma_k$  donné par une extension finie bien précise. Le résultat est le suivant :

**Proposition 2.19.** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.16, soient  $L \supset k$  une extension finie galoisienne de  $k$  déployant  $G$ ,  $n = \exp(G)$  et  $\zeta_n \in \bar{k}$  une racine primitive  $n$ -ième de l'unité. Alors, pour tout élément  $\sigma \in \Gamma_{L(\zeta_n)} \subset \Gamma_k$  et pour tout  $b \in G$  on a  $N_\sigma(b) = \bar{b}$ .*

*En particulier, un cocycle  $a \in Z^1(k, M)$  vérifiant l'égalité (2.6.1) est forcément trivial sur  $\Gamma_{L(\zeta_n)}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \Gamma_{L(\zeta_n)}$ , alors il est évident que  $\sigma$  fixe  $\zeta_n$ , ce qui nous dit que  $q(\sigma) = 1$ . De plus, puisque  $L$  déploie  $G$ ,  $\sigma$  agit de façon triviale sur  $G(\bar{k})$ . On a alors que  $\varphi_\sigma$  se réduit à l'identité et alors  $N_\sigma$  correspond à la projection  $G \rightarrow G^{\text{ab}}$ .

On voit alors que pour un cocycle  $a \in Z^1(k, M)$  vérifiant l'égalité (2.6.1), on a  $a_\sigma(\mathfrak{b}) = 1$  pour tout  $\mathfrak{b} \in G^{\text{ab}}$ , ce qui nous dit que  $a_\sigma = 1$ . 

De cette proposition et du théorème 2.16 on déduit aussitôt que

**Corollaire 2.20.** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.16, on a*

$$\text{Br}_{\text{nr,al}} V \subset H^1(L(\zeta_n)/k, M).$$



Ce corollaire nous dit que le groupe de Brauer est au moins calculable en temps fini.

*Remarque.*

Avec le but de réduire le temps de ces calculs (en particulier pour pouvoir les faire à la main), il est possible de démontrer que sous les mêmes hypothèses du théorème, pour  $\sigma, \tau \in \Gamma_k$ , on a

$$a_\sigma(N_\sigma(b)) = a_\tau(N_\tau(b)) = 1 \quad \forall b \in G \quad \Rightarrow \quad a_{\sigma\tau}(N_{\sigma\tau}(b)) = 1 \quad \forall b \in G,$$

dès que ces deux éléments *commutent entre eux* et que leur produit n'est pas d'ordre fini.<sup>4</sup> De là on déduit par exemple que, lorsque  $L(\zeta_n)/k$  est une extension abélienne, il suffit de vérifier la propriété (2.6.1) pour une famille de générateurs de  $\Gamma_{L(\zeta_n)/k}$ . On fera attention par contre au fait qu'il n'est pas vrai en général que, pour  $\sigma, \tau \in \Gamma_k$  *quelconques* on ait cette propriété. En particulier, on ne peut pas restreindre les calculs à un sous-ensemble engendrant  $\Gamma_{L(\zeta_n)/k}$  lorsque ce groupe n'est pas abélien.

Pour terminer cette section, on remarque que les calculs que l'on a faits à la fin de la section précédente sont tout à fait applicables aux applications  $\varphi_\sigma$  et  $N_\sigma$ . En effet, notons toujours  $\gamma$  le sous-groupe pro-cyclique engendré par  $\sigma \in \Gamma_k$  et soit

$$M_\sigma := \{c \in M : \exists a \in Z^1(\gamma, M), a_\sigma = c\}.$$

(Ce groupe coïncide avec  $M$  tout entier lorsque l'ordre de  $\sigma$  est infini). Il est facile alors de voir que l'on a une application surjective  $M_\sigma \rightarrow H^1(\gamma, M)$  dont le noyau correspond aux éléments de la forme  $c^\sigma c^{-1}$  avec  $c \in M$ . On peut montrer tout aussi facilement que ce noyau est l'orthogonal de  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}$  (cf. le lemme 2.12) et en particulier que, si l'on note  $\mathcal{N}_\sigma(G)$  le sous-groupe de  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}$  engendré par l'image de  $N_\sigma$ , alors le groupe  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  est isomorphe à  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma} / \mathcal{N}_\sigma$  (cf. la proposition 2.13). On obtient alors les corollaires suivants du théorème 2.16.

4. Le théorème d'Artin-Schreier nous dit par ailleurs que, à conjugaison près, il y a au plus un seul élément d'ordre fini dans  $\Gamma_k$  dont l'ordre est 2 et qui correspondrait à une "conjugaison complexe".

**Corollaire 2.21.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe et  $L \supset k$  une extension déployant  $G$  telle que  $L(\zeta_n)/k$  est une extension cyclique (un tel corps  $L$  existe par exemple lorsque  $G$  est un  $p$ -groupe constant avec  $p$  impair ou bien lorsque  $k = \mathbb{R}$ ). Alors  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V \cong (G^{\mathrm{ab}})^{\varphi_\sigma} / \mathcal{N}_\sigma$ , où  $\sigma$  est le générateur du groupe  $\Gamma_{L(\zeta_n)/k}$ . 

**Corollaire 2.22.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe tel que  $(G^{\mathrm{ab}})^{\varphi_\sigma}$  est engendré par les  $\sigma$ -normes pour tout  $\sigma \in \Gamma_k$  et soit  $V = G \setminus G'$  avec  $G'$  semi-simple simplement connexe. Alors  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V = \mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M)$ .

On rappelle que  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M)$  est le sous-groupe de  $H^1(k, M)$  des éléments dont la restriction à  $H^1(\gamma, M)$  est nulle pour tout sous-groupe fermé pro-cyclique  $\gamma$  de  $\Gamma_k$ . On voit rapidement alors du lemme 2.17 que l'on a toujours  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M) \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$ . En effet, on sait que  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V = H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$  et il est évident que, pour  $\alpha \in \mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M)$ , on a que son image dans  $H^1(\gamma, M)$  provient de  $H^1(\gamma, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$  car elle est nulle.

*Démonstration.* En effet, un tel groupe  $G$  vérifie que  $H^1(\gamma, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}}) = 0$  pour tout sous-groupe pro-cyclique de  $\Gamma_k$ . Le lemme 2.17 nous permet alors de conclure. 

## 2.7 Une formule cohomologique sur un corps local

La version du théorème 1.4 pour un corps de nombres  $k$ , mise au point par Harari dans [Har94], nous dit que pour comprendre le groupe de Brauer non ramifié d'une  $k$ -variété  $V$ , il faut comprendre comment le groupe de Brauer se comporte par rapport aux points locaux. Il est alors intéressant de se demander, pour une variété  $V$  définie sur un corps local, quelle est la dépendance du groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V$  vis-à-vis de ses points.

La proposition 2.2 nous a permis de comprendre ce comportement à partir de la cohomologie galoisienne des  $k$ -groupes  $G$ ,  $G^{\mathrm{ab}}$  et  $M$  dans le cas où  $V$  est un espace homogène à stabilisateur fini, bien que seulement pour la partie algébrique de  $\mathrm{Br}V$ . Soit donc  $K$  un corps local de caractéristique 0, i.e. une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . On peut alors essayer d'obtenir une description du "comportement cohomologique" des éléments du groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  pour une  $K$ -variété  $V$  à partir de la formule développée dans la section précédente. Ainsi, toujours grâce à la proposition 2.2, on aura une description de la dépendance du groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  vis-à-vis des  $K$ -points de  $V$ .

On dira qu'un  $K$ -groupe fini  $G$  est *non ramifié* s'il est déployé par une extension non ramifiée de  $K$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.23.** Soit  $G$  un  $K$ -groupe fini non ramifié d'ordre premier à la caractéristique résiduelle, plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \setminus G'$ . Alors  $\alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  appartient à  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  si et seulement s'il existe une préimage  $\alpha_1 \in \mathrm{Br}_1V$  de  $\alpha$  telle que, pour toute extension finie non ramifiée  $K'$  de  $K$ , l'application  $V(K') \rightarrow \mathrm{Br}K'$  induite par  $\alpha_1$  est nulle.

Or, comme on vient de l'avancer, la proposition 2.2 nous dit que ce résultat est équivalent au résultat suivant.

**Proposition 2.24.** *Soit  $G$  un  $K$ -groupe fini non ramifié d'ordre premier à la caractéristique résiduelle, plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Soit  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . En identifiant alors  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(K, M)$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(K, M)$  vérifiant la propriété suivante.*

*Propriété (\*) : Pour toute extension finie non ramifiée  $K'$  de  $K$ , l'image  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(K', M)$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(K', G) \rightarrow H^1(K', G^{\text{ab}})]$ .*

*Remarque.*

Des résultats semblables peuvent être retrouvés dans le cas des corps locaux de caractéristique positive via le théorème 2.1 à l'aide du théorème 1.16, moyennant l'existence d'une certaine compactification lisse  $X$  de  $V$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \text{Br}_{\text{al}}V = H^1(K, M)$ . Il s'agit de montrer que  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}}V$  si et seulement si cette classe vérifie la propriété (\*). Il y a deux cas possibles :

**Cas 1 :**  $\alpha \notin H_{\text{nr}}^1(K, M)$

Soit  $L/K$  une extension finie non ramifiée déployant  $G$  et soit  $n = \exp(G)$ . Le corollaire 2.20 nous dit que l'on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H^1(L(\zeta_n)/K, M)$ . Or, comme le cardinal de  $G$  est premier à  $p$ , on sait que l'extension  $L(\zeta_n)/K$  est non ramifiée, donc on a en particulier que  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H_{\text{nr}}^1(K, M)$ .

Si alors  $\alpha \notin H_{\text{nr}}^1(K, M)$ , d'après ce qui précède, on a que  $\alpha \notin \text{Br}_{\text{nr,al}}V$  et il faut alors démontrer que  $\alpha$  ne vérifie pas la propriété (\*). Or, puisque  $H_{\text{nr}}^1(K, M)^\perp = H_{\text{nr}}^1(K, G^{\text{ab}})$  pour la dualité locale, on voit immédiatement qu'il existe  $\beta \in H_{\text{nr}}^1(K, G^{\text{ab}})$  tel que  $\alpha \cup \beta \neq 0$ . D'autre part, en remarquant que les ensembles  $H_{\text{nr}}^1$  sont isomorphes aux ensembles de cohomologie sur le corps résiduel de  $K$  et qu'un tel corps est de dimension cohomologique 1, il est facile de voir que l'application  $H_{\text{nr}}^1(K, G) \rightarrow H_{\text{nr}}^1(K, G^{\text{ab}})$  est surjective (cf. par exemple [Ser94, III.2.4, Cor. 2]), d'où l'on tire que  $\alpha$  n'est pas orthogonal à  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$ .

**Cas 2 :**  $\alpha \in H_{\text{nr}}^1(K, M)$

Pour traiter ce cas on rappelle que, de même que pour les corps locaux de caractéristique  $p$  dans la section 2.5, le sous-groupe de ramification sauvage  $S \subset \Gamma_K$  ne joue pas de rôle dans la cohomologie galoisienne des groupes  $G$ ,  $G^{\text{ab}}$  et  $M$  puisque leur ordre est premier à  $p$  et  $S$  est un pro- $p$ -groupe. Autrement dit, si l'on pose  $D = \Gamma_K/S$ , on a  $H^1(K, G) = H^1(D, G)$ . De plus, d'après [NSW08, Thm. 7.5.3], on sait que  $D$  est un groupe profini à deux générateurs  $\sigma, \tau$  avec la seule relation  $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{q_0}$ , où  $q_0$  est le cardinal du corps résiduel de  $K$ . On sait aussi que l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow T \rightarrow D \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow 1,$$

où  $T$  est le sous-groupe profini engendré par  $\tau$  et correspond au groupe de ramification modérée, tandis que  $\Gamma_1$  correspond au groupe de Galois de l'extension non ramifiée maximale  $K^{\text{nr}}/K$  ainsi qu'au groupe de Galois absolu du corps résiduel de  $K$ . Il est engendré par l'image de  $\sigma$ , laquelle correspond au  $q_0$ -Frobenius sur le corps résiduel et que l'on note toujours  $\sigma$  par abus. De même, si l'on note  $D_m$  le sous-groupe fermé d'indice  $m$  de  $D$  engendré par  $\sigma^m$  et  $\tau$ , et aussi  $\Gamma_m$  le quotient  $D_m/T$ , on voit que l'on a les égalités

$$H^1(K_m, G) = H^1(D_m, G) \quad \text{et} \quad H_{\text{nr}}^1(K_m, G) = H^1(\Gamma_m, G),$$

où  $K_m$  est la seule extension non ramifiée de  $K$  de degré  $m$ . Il est par ailleurs évident qu'il en va de même pour  $M$  et  $G^{\text{ab}}$ .

**Lemme 2.25.** *Il existe, pour tout  $m \geq 1$ , un accouplement parfait*

$$H^1(\Gamma_m, M) \times \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m} \rightarrow H^2(K_m, \mu_n) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

induit par la dualité locale. De plus, un élément  $\alpha \in H_{\text{nr}}^1(K, M) = H^1(\Gamma_1, M) \subset H^1(K, M)$  vérifie la propriété (\*) si et seulement si, pour tout  $m \geq 1$ , son image  $\alpha_m$  dans  $H^1(K_m, M)$  est orthogonale à  $\text{Im}[H^1(D_m, G) \rightarrow \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m}]$ .

*Démonstration.* On rappelle que la suite des premiers termes issue de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour ce quotient est la suivante :

$$1 \rightarrow H^1(\Gamma_m, G^{\text{ab}}) \rightarrow H^1(D_m, G^{\text{ab}}) \rightarrow \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m} \rightarrow 1.$$

En effet,  $H^1(T, G^{\text{ab}}) = \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})$  et on sait que  $H^2(\Gamma_m, M)$  (qui correspondrait au quatrième terme de la suite à 5 termes) est nul car la dimension cohomologique de  $\Gamma_m \cong \hat{\mathbb{Z}}$  est 1. L'égalité  $H_{\text{nr}}^1(K_m, M) = H_{\text{nr}}^1(K_m, G^{\text{ab}})^\perp$  pour la dualité locale nous dit alors que l'on a l'accouplement parfait induit par la dualité locale

$$H^1(\Gamma_m, M) \times \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m} \rightarrow H^2(K_m, \mu_n) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et il est évident, par la compatibilité de ces deux accouplements, que  $\alpha_m \in H^1(\Gamma_m, M)$  est orthogonale à  $\text{Im}[H^1(K_m, G) \rightarrow H^1(K_m, G^{\text{ab}})]$  pour la dualité locale si et seulement si il est orthogonale à  $\text{Im}[H^1(D_m, G) \rightarrow \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m}]$  pour l'accouplement ci-dessus. La deuxième affirmation du lemme en découle car les  $K_m$  correspondent à toutes les extensions non ramifiées de  $K$ . ☺

On remarque maintenant que l'application  $q : \Gamma_K \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  se factorise par  $\Gamma_1$ , ce qui nous dit que  $q(\sigma)$  a bien un sens. De plus, puisque  $\sigma$  agit précisément comme le  $q_0$ -Frobenius, il est facile de voir que l'on a  $q(\sigma) = q_0$ , d'où l'on se permet de noter tout simplement  $q$  au lieu de  $q_0$  ou de  $q(\sigma)$ , pour ne pas alourdir les notations. Il est par ailleurs évident aussi que l'on a  $q(\sigma^m) = q^m$  et on fait donc le même raccourci de notation. Ceci nous permet de faire l'analogie de ce qu'on a fait dans le cas des corps finis. En effet, l'application  $\varphi_\sigma$  n'est alors rien d'autre que l'application  $\varphi_q$  utilisée dans le cas des corps finis et de même on aura  $\varphi_{\sigma^m} = \varphi_q^m$  et  $N_\sigma = N_q$ .

Cela étant dit, on peut rappeler la définition d'un élément  $(q, m)$ -relevable (définition 2.7) : c'est un élément  $\mathfrak{b} \in G^{\text{ab}}$  tel qu'il existe  $b \in G$  relevant  $\mathfrak{b}$  et tel que  $\varphi_q^m(b)$  soit conjugué à  $b$ . Puisque ceci entraîne en particulier que  $\varphi_q^m(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ , on note  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q^m}$  le sous-groupe de  $G^{\text{ab}}(\bar{K})$  des éléments invariants par  $\varphi_q^m$  et  $G_{q,m}^{\text{ab}} \subset (G^{\text{ab}})^{\varphi_q^m}$  l'ensemble des éléments  $(q, m)$ -relevables.

De même que dans le cas des corps finis (cf. section 2.5), on a un isomorphisme évident  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}}) \xrightarrow{\sim} G^{\text{ab}}(\bar{K})$  qui à un morphisme lui associe l'image de  $\tau$ . Ce morphisme identifie  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m}$  avec  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q^m}$ . Aussi, en suivant la preuve de la proposition 2.8, on voit que l'image de  $H^1(D_m, G)$  dans  $\text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m}$  est identifiée avec  $G_{q,m}^{\text{ab}}$ . Puis, les calculs faits dans les lemmes 2.9 et 2.10 nous disent que, pour tout  $m$ , l'orthogonalité de  $\alpha_m$  avec  $\text{Im}[H^1(D_m, G) \rightarrow \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m}]$  est équivalente avec l'orthogonalité de  $a_{\sigma^m}$  avec  $G_{q,m}^{\text{ab}}$ , où  $a$

est un cocycle représentant  $\alpha$ .

Tout cela étant dit, on peut enfin terminer la démonstration de la proposition 2.24.

Dans un premier temps, si  $\alpha \in H_{\text{nr}}^1(K, M)$  vérifie la propriété (\*), on sait d'après les lemmes 2.25, 2.11 et ce qui précède, que pour un cocycle  $a$  représentant  $\alpha$  on a

$$a_{\sigma^m}(\mathfrak{b}) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{m-1} \varphi_q^i(\mathfrak{b}) \right) = 1,$$

pour tout  $\mathfrak{b} \in G_{q,m}^{\text{ab}}$  et tout  $m \in \mathbb{N}$ . En particulier, on a  $a_{\sigma}(N_q(b)) = 1$  pour tout  $b \in G$ , ce qui suffit pour établir que  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V$  d'après la remarque après le corollaire 2.20.

Dans le sens inverse, si  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V$  est représenté par  $a \in Z^1(\Gamma_1, M)$ , on a  $a_{\sigma}(N_q(b)) = 1$  pour tout  $b \in G$ . Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{b} \in G_{q,m}^{\text{ab}}$  et  $b \in G$  une préimage de  $\mathfrak{b}$ . Il est facile de voir que  $n_{\sigma,b}$  divise  $m$  et alors, d'après le lemme 2.11, on a

$$\begin{aligned} a_{\sigma^m}(\mathfrak{b}) &= a_{\sigma^{ln_{\sigma,b}}}(\mathfrak{b}) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{ln_{\sigma,b}-1} \varphi_q^i(\mathfrak{b}) \right) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_{\sigma,b}-1} \prod_{j=0}^l \varphi_q^{jn_{\sigma,b}+i}(\mathfrak{b}) \right) = \\ &= a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_{\sigma,b}-1} \prod_{j=0}^l \varphi_q^i(\mathfrak{b}) \right) = a_{\sigma} \left( \prod_{i=0}^{n_{\sigma,b}-1} \varphi_q^i(\mathfrak{b})^l \right) = a_{\sigma}(N_q(b))^l = 1, \end{aligned}$$

car on rappelle que  $\varphi_q^{n_{\sigma,b}}(\mathfrak{b}) = \varphi_{\sigma}^{n_{\sigma,b}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ . Le lemme 2.10 nous dit alors que  $\alpha_m$  est orthogonal à tout  $\mathfrak{b} \in G_{q,m}^{\text{ab}} \cong \text{Hom}(T, G^{\text{ab}})^{\Gamma_m}$ , d'où l'orthogonalité de  $\alpha_m$  avec  $\text{Im}[H^1(K_m, G) \rightarrow H^1(K_m, G^{\text{ab}})]$  via le lemme 2.25.  $\square$

*Remarque.*

Il est bien nécessaire de considérer les extensions non ramifiées de  $K$  et non seulement  $K$  tout seul. En effet, demander seulement l'orthogonalité de  $\alpha \in H^1(K, M)$  avec  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$  revient à demander seulement l'orthogonalité de  $a_{\sigma}$  avec  $G_{q,1}^{\text{ab}}$ , alors que l'ensemble  $N_{\sigma}(G) \subset (G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  est a priori beaucoup plus grand : pour un élément  $b \in G$  tel que  $\varphi_q^m(b)$  est conjugué à  $b$ , on ne sait pas a priori si le produit  $b_0 := \prod_{i=0}^{m-1} \varphi_q^i(b)$  est tel que  $\varphi_q(b_0)$  est conjugué à  $b_0$ , d'où le fait que la  $\sigma$ -norme de  $b$  n'a aucune raison a priori d'être  $(q, 1)$ -relevable.

Si l'on peut objecter que le fait d'avoir  $N_{\sigma}(G) \supsetneq G_{q,1}^{\text{ab}}$  n'entraîne pas pour autant que les groupes qu'ils engendrent soient différents, il suffit de remarquer que l'on peut construire des exemples explicites (comme ceux donnés dans la proposition 2.37) où le groupe engendré par  $N_{\sigma}(G)$  est strictement plus grand que celui engendré par  $G_{q,1}^{\text{ab}}$ .

Pour finir, on donne un corollaire de la proposition 2.24 dans le cas abélien.

**Corollaire 2.26.** *Soit  $G$  un  $K$ -groupe fini abélien non ramifié, d'ordre premier à la caractéristique résiduelle, plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \backslash G'$ . Alors le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  de  $V$  est trivial.*

*Démonstration.* Puisque dans ce cas  $G = G^{\text{ab}}$ , il est évident que  $\text{Im}[H^1(K, G) \rightarrow H^1(K, G^{\text{ab}})]$  correspond au groupe  $H^1(K, G)$  tout entier. Ainsi, on voit qu'un élément  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H^1(K, M)$  doit être orthogonal à tout le groupe  $H^1(K, G)$ . L'accouplement étant parfait, on voit que  $\alpha$  doit être nul.  $\square$

*Remarque.*

Ce résultat n'est pas, à notre connaissance, facile à démontrer avec ce qui était déjà connu dans le cas abélien. En effet, vue la preuve de la proposition 2.24, on peut se rendre compte qu'un élément clé de cette démonstration est le corollaire 2.20, lequel nous permet de déduire l'inclusion  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H_{\text{nr}}^1(K, M)$ . Une fois cette inclusion admise, le résultat découle facilement de l'égalité (déjà connue)  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V = \text{III}_{\text{cyc}}^1(K, M)$ , mais on ne voit pas une voie "facile" pour démontrer cette inclusion, même dans le cas abélien.

## 2.8 Application des résultats : calcul explicite de certains $\text{Br}_{\text{nr,al}}$

Il s'agit dans cette section de calculer explicitement quelques groupes de Brauer non ramifiés algébriques pour montrer l'utilité des formules développées dans les sections précédentes.

Tant sur un corps fini que sur un corps de caractéristique 0, il est intéressant de comprendre quand deux espaces homogènes a priori différents en leur structure peuvent avoir un même groupe de Brauer non ramifié algébrique. On a déjà remarqué dans la section 2.3 que ce groupe ne dépend que du stabilisateur, mais on peut aller encore un peu plus loin. En effet, on peut imaginer des espaces homogènes qui, vis-à-vis de notre formule, se comportent de la même façon tout en étant essentiellement différents. La définition qui suit va donc dans ce sens.

Pour un  $k$ -groupe fini  $G$  avec  $k$  un corps quelconque, on peut considérer le morphisme  $\kappa_G : \Gamma_k \rightarrow \text{Out}(G(\bar{k}))$  induit par sa structure sous-jacente de  $\Gamma_k$ -groupe, où l'on rappelle que  $\text{Out}(G(\bar{k})) := \text{Aut}(G(\bar{k}))/\text{Int}(G(\bar{k}))$  est le groupe des automorphismes extérieurs de  $G(\bar{k})$ . Si l'on a un deuxième  $k$ -groupe  $H$  et un  $\bar{k}$ -isomorphisme  $f : G_{\bar{k}} \rightarrow H_{\bar{k}}$ , il induit les isomorphismes de groupes abstraits

$$\begin{aligned} f_1 : G(\bar{k}) &\xrightarrow{\sim} H(\bar{k}), \\ f_2 : \text{Aut}(G(\bar{k})) &\xrightarrow{\sim} \text{Aut}(H(\bar{k})) : \phi \mapsto f_1 \circ \phi \circ f_1^{-1}, \\ f_3 : \text{Out}(G(\bar{k})) &\xrightarrow{\sim} \text{Out}(H(\bar{k})) : \bar{\phi} \mapsto \overline{f_2(\phi)}. \end{aligned}$$

**Définition 2.27.** Soient  $G$  et  $H$  des  $k$ -groupes finis avec  $k$  un corps quelconque et soient  $\kappa_G$  et  $\kappa_H$  les morphismes induits comme ci-dessus. Le  $k$ -groupe  $H$  est dit *ext-isomorphe* à  $G$  s'il existe un  $\bar{k}$ -isomorphisme  $f : G_{\bar{k}} \rightarrow H_{\bar{k}}$  (induisant les isomorphismes  $f_1, f_2$  et  $f_3$  ci-dessus) tel que  $\kappa_H = f_3 \circ \kappa_G$ .

On dit qu'un groupe fini  $G$  est *ext-constant* s'il est ext-isomorphe à un groupe constant ou, de façon équivalente, si  $\Gamma_k$  agit sur  $G(\bar{k})$  par automorphismes intérieurs.

On démontrera par la suite que deux  $k$ -groupes ext-isomorphes  $G$  et  $H$  se comportent effectivement de la même façon par rapport aux formules développées dans la section précédente, tant sur un corps fini que sur un corps de caractéristique 0. En particulier, à chaque fois qu'on aura un groupe  $G$  ext-constant, on pourra supposer qu'il est constant pour calculer

le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  d'un espace homogène  $V$  sous  $G'$  semi-simple simplement connexe à stabilisateur  $G$ . On en déduit par exemple que si  $G(\bar{k})$  est le groupe  $S_n$  des permutations de  $n$  éléments, avec  $n \neq 6$ , on pourra toujours supposer qu'il est constant (on rappelle que  $S_n$  n'a pas d'automorphisme extérieur pour  $n \neq 6$ ).

### 2.8.1 Cas d'un corps fini

On revient aux notations de la section 2.5. En particulier, on note  $k = \mathbb{F}_q$ . Dans cette section, le groupe  $G$  sera toujours supposé d'ordre premier à  $q = p^r$ , donc il sera toujours lisse.

La similitude entre les formules 2.6 et 2.16, ou encore le fait que la formule cohomologique (théorème 2.1) soit de nature arithmétique, de même que celle sur un corps de nombres (cf. [Har07, Prop. 4]) ou sur un corps global de caractéristique positive (cf. théorème 2.4), permettent de s'attendre à quelques similitudes au niveau du groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}$  entre les  $k$ -variétés et ses analogues sur les corps globaux. Ces similitudes se montrent en effet avec les résultats qui suivent, lesquels ont été inspirés des travaux de Demarche dans le cas d'un corps de nombres (cf. [Dem10]).

Il est déjà connu depuis quelque temps que le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  s'annule lorsque  $V = G \backslash G'$  avec  $G$  abélien (cf. par exemple [BDH13, Thm. 7.5]). On commence donc en retrouvant ce résultat avec notre formule.

**Proposition 2.28.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe abélien d'ordre premier à  $p$  que l'on plonge dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. Soit  $V = G \backslash G'$ . Alors on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V = 0$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2.14, il suffit de démontrer que  $N_q(G)$  engendre tout le groupe  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$ . Or cela est évident puisque, comme  $G = G^{\text{ab}}$ , la  $q$ -norme  $N_q(b)$  d'un élément  $b \in G$  qui est déjà dans  $G^{\varphi_q} = (G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  est tout simplement  $b$  lui-même par définition de  $N_q(b)$ .  $\square$

On démontre maintenant que deux groupes ext-isomorphes se comportent en effet de la même façon vis-à-vis de notre formule.

**Proposition 2.29.** *Soient  $G$  et  $H$  deux  $k$ -groupes finis ext-isomorphes d'ordre premier à  $p$  plongés respectivement dans  $G'$  et  $H'$ , des  $k$ -groupes semi-simples simplement connexes, et soient  $V = G \backslash G'$  et  $W = H \backslash H'$ . Alors on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V \cong \text{Br}_{\text{nr,al}}W$ .*

*Démonstration.* Soit  $f : G_{\bar{k}} \rightarrow H_{\bar{k}}$  un  $\bar{k}$ -isomorphisme tel que  $\kappa_H = f_3 \circ \kappa_G$ . Il induit alors un  $\bar{k}$ -isomorphisme  $f^{\text{ab}} : G_{\bar{k}}^{\text{ab}} \rightarrow H_{\bar{k}}^{\text{ab}}$  qui est en fait défini sur  $k$  car  $\kappa_H = f_3 \circ \kappa_G$  entraîne  $\kappa_{H^{\text{ab}}} = f_3^{\text{ab}} \circ \kappa_{G^{\text{ab}}} = f_2^{\text{ab}} \circ \kappa_{G^{\text{ab}}}$  (on rappelle que  $\text{Aut}(G^{\text{ab}}(\bar{k})) = \text{Out}(G^{\text{ab}}(\bar{k}))$  et on en a de même pour  $H^{\text{ab}}$ ) et alors  $f_1^{\text{ab}}$  est un isomorphisme de  $\Gamma_k$ -modules. Si l'on note alors  $M$  et  $N$  les groupes des caractères de  $G$  et  $H$  respectivement, on a un  $\Gamma_k$ -isomorphisme  $N \xrightarrow{\sim} M$  induisant un isomorphisme  $f_*^{\text{ab}} : H^1(k, N) \xrightarrow{\sim} H^1(k, M)$ .

Il suffit alors de considérer la formule du théorème 2.6. Soient  $\varphi_{G,q}$  et  $\varphi_{H,q}$  les applications respectives définissant les  $q$ -normes respectives sur  $G(\bar{k})$  et  $H(\bar{k})$ . On a

$$\varphi_{H,q} = f_1 \circ \text{int}(b_1) \circ \varphi_{G,q} \circ f_1^{-1}$$

pour un certain  $b_1 \in G$ , d'où il est facile de voir que, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\varphi_{H,q}^m = f_1 \circ \text{int}(b_m) \circ \varphi_{G,q}^m \circ f_1^{-1},$$

pour certain  $b_m \in G$ . En particulier,

$$\varphi_{H,q} = f_1^{\text{ab}} \circ \varphi_{G,q} \circ (f_1^{\text{ab}})^{-1},$$

lorsqu'on considère leurs restrictions aux abélianisés. Enfin, de ce qui précède, on voit facilement que pour tout  $b \in G$  et pour tout  $m \geq 1$ ,  $\varphi_{G,q}^m(b)$  est conjugué à  $b$  si et seulement si  $\varphi_{H,q}^m(f_1(b))$  est conjugué à  $f_1(b)$  aussi. On voit alors que l'on a

$$N_{H,q} = f_1^{\text{ab}} \circ N_{G,q} \circ f_1^{-1},$$

où  $N_{H,q}$  et  $N_{G,q}$  sont les  $q$ -normes respectives, et la formule du théorème 2.6 donne alors le même groupe de Brauer non ramifié algébrique pour les variétés  $V$  et  $W$ .  $\square$

La proposition 2.29 nous dit que, comme on l'avait annoncé, à chaque fois qu'on aura un groupe  $G$  ext-constant dans les calculs qui suivent, on pourra supposer qu'il est constant dans la démonstration. Cela étant dit, on montre les deux résultats suivants, inspirés des travaux de Demarche sur des groupes constants sur un corps de nombres (cf. [Dem10, §3, Cor. 1 et §5, Thm. 5]).

**Proposition 2.30.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini ext-constant d'ordre premier à  $p$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \setminus G'$ . On suppose que  $n = \exp(G)$  divise  $q - 1$ , alors  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V = 0$ .*

*Démonstration.* On se réduit tout de suite au cas où  $G$  est constant grâce à la proposition 2.29. Si l'exposant de  $G$  divise  $q - 1$ , alors  $b^q = b$  pour tout élément  $b \in G$ . On voit en particulier que l'application  $\varphi_q$  est l'identité, ce qui nous dit que la  $q$ -norme correspond forcément à la projection de  $G$  sur  $G^{\text{ab}}$ . Le résultat en découle compte tenu de la formule du théorème 2.6.  $\square$

**Proposition 2.31.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini d'ordre premier à  $p$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et soit  $V = G \setminus G'$ . Soit  $L/k$  l'extension correspondant au noyau du morphisme  $\kappa : \Gamma_k \rightarrow \text{Out}(G(\bar{k}))$  induit par  $G$  et soit  $m = [L : k]$ . On suppose que  $n = \exp(G)$  est premier à  $q^m - 1$ . Alors  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $s$  le  $q$ -Frobenius. Puisque  $s^m \in \Gamma_L$ , on sait qu'il agit par automorphisme intérieur sur  $G(\bar{k})$ , donc trivialement sur  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$ . Soit alors  $\mathfrak{b} \in (G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$ . On a

$$\mathfrak{b}^{q^m} = s^m \mathfrak{b}^{q^m} = \varphi_q^m(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b},$$

ce qui nous dit que l'ordre de  $\mathfrak{b}$  divise  $q^m - 1$ . Or, l'ordre de  $\mathfrak{b}$  divise aussi forcément  $n$ . On en déduit que l'ordre de cet élément est forcément 1 et donc on a  $\mathfrak{b} = 1$ . Il est alors évident que les  $q$ -normes engendrent  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$  car il est trivial, d'où l'on déduit que  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V = 0$  d'après le corollaire 2.14.  $\square$

On a dit au début de la section 2.6 qu'il existe des exemples de groupes  $G$  sur  $k = \mathbb{F}_q$  tels que le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  soit non nul. Les propositions 2.31 et 2.30 nous disent que, si l'on

s'attend à trouver ce genre de groupes parmi les groupes ext-constants, on doit chercher dans le cas où seulement un diviseur propre (et non trivial) de l'exposant de  $G$  divise  $q - 1$ . C'est effectivement ce qu'on fait pour construire enfin de tels groupes, toujours inspirés d'un exemple de Demarche (cf. [Dem10, §6, Prop. 1]) : on aura  $n = \exp(G) = \ell^{2m}$  et  $(n, q - 1) = \ell^m$  pour un certain nombre premier  $\ell$ .

**Proposition 2.32.** *Soit  $k = \mathbb{F}_q$  avec  $q$  une puissance de  $p$ . Soit  $\ell \neq 2$  un nombre premier tel que  $q - 1 = \ell^m u$  avec  $(\ell, u) = 1$  et  $m \geq 1$ . Soit*

$$G := \langle x, y, z : x^{\ell^{2m}} = y^{\ell^{2m}} = z^{\ell^{2m}} = 1; [x, y] = z^{-\ell^m}, [x, z] = [y, z] = 1 \rangle,$$

où  $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ . On regarde  $G$  comme un  $k$ -groupe constant et l'on note  $V$  la variété  $G \backslash G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. Alors on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V \cong \mathbb{Z}/\ell^{\lceil m/2 \rceil} \mathbb{Z}$ , où  $\lceil m/2 \rceil$  désigne le plus petit entier supérieur ou égal à  $m/2$ .

*Remarques.*

1. Le groupe  $G$  donné dans l'énoncé peut aussi être vu comme le produit semi direct

$$(C_{\ell^{2m}} \times C_{\ell^{2m}}) \rtimes C_{\ell^{2m}},$$

où  $C_{\ell^{2m}}$  désigne le groupe cyclique de cardinal  $\ell^{2m}$ , défini comme suit : si l'on note  $x, z$  et  $y$  des générateurs respectifs des trois groupes  $C_{\ell^{2m}}$  apparaissant dans ce produit, l'action de  $y$  sur  $\langle x \rangle \times \langle z \rangle$  est donnée par

$$y \cdot x = xz^{\ell^m} \quad \text{et} \quad y \cdot z = z.$$

2. Lorsque  $\ell = 2$  (par exemple, lorsque  $q = 3$ ), le groupe  $G$  donne aussi un espace homogène  $V$  à groupe de Brauer non ramifié algébrique non trivial. Si l'on a évité de considérer ce cas, c'est tout simplement parce que les calculs sont un peu plus compliqués.

3. On rappelle que la proposition 2.29 nous permettrait d'avoir une action non triviale du Frobenius sur  $G$  (mais "ext-triviale" quand-même) et d'obtenir le même résultat.

Avant de commencer la démonstration, on donne tout ce qu'il faut savoir sur  $G$ . Soient  $Z$  le centre de  $G$  et  $G^{\text{der}}$  le sous-groupe dérivé de  $G$ . En rappelant que  $\varphi_q(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^q = \mathfrak{b}^{u\ell^m+1}$  pour  $\mathfrak{b} \in G^{\text{ab}}$ , il est facile de voir que l'on a

$$\begin{aligned} Z &= \langle x^{\ell^m}, y^{\ell^m}, z \rangle, \\ G^{\text{der}} &= \langle z^{\ell^m} \rangle \cong C_{\ell^m}, \\ G^{\text{ab}} &= \langle x, y, z \rangle / \langle z^{\ell^m} \rangle \cong C_{\ell^{2m}} \times C_{\ell^{2m}} \times C_{\ell^m}, \\ (G^{\text{ab}})^{\varphi_q} &= \langle \bar{x}^{\ell^m}, \bar{y}^{\ell^m}, \bar{z} \rangle \cong C_{\ell^{2m}}^{\ell^m} \times C_{\ell^{2m}}^{\ell^m} \times C_{\ell^m}. \end{aligned}$$

On remarque enfin que les seules formules qu'il faut garder à l'esprit pour suivre le calcul suivant, sont

$$q = u\ell^m + 1 \quad \text{et} \quad y^s x^r = x^r y^s z^{rs\ell^m},$$

et que  $x^{\ell^m}$ ,  $y^{\ell^m}$  et  $z$  appartiennent au centre de  $G$ .

*Démonstration.* Comme le groupe  $G$  est constant, on a  $\varphi_q(b) = b^q$ . On voit alors que l'on a, pour  $b = x^r y^s z^t \in G$ ,

$$\begin{aligned}\varphi_q^n(b) &= (x^r y^s z^t)^{q^n} \\ &= x^{q^n r} y^{q^n s} z^{q^n t} z^{\frac{q^n(q^n-1)}{2} r s \ell^m} \\ &= x^{q^n r} y^{q^n s} z^{q^n t} \\ &= x^{(n\ell^m+1)r} y^{(n\ell^m+1)s} z^{(n\ell^m+1)t} \\ &= x^r y^s z^t x^{rn\ell^m} y^{sn\ell^m} z^{tn\ell^m} \\ &= b \cdot x^{rn\ell^m} y^{sn\ell^m} z^{tn\ell^m},\end{aligned}$$

où l'on remarque que dans le passage de la deuxième à la troisième ligne on a utilisé le fait que  $\ell^m$  divise  $q-1$ , donc aussi  $q^n-1$ , et que  $z^{\ell^{2m}} = 1$ .

Calculons d'autre part ce qui se passe lorsqu'on conjugue un élément de  $G$ . Soit  $c = x^{r'} y^{s'} z^{t'} \in G$ , alors

$$\begin{aligned}cbc^{-1} &= (x^{r'} y^{s'} z^{t'}) x^r y^s z^t (x^{r'} y^{s'} z^{t'})^{-1} \\ &= x^{r'} y^{s'} z^{t'} x^r y^s z^t z^{-t'} y^{-s'} x^{-r'} \\ &= x^{r'} y^{s'} x^r y^s y^{-s'} x^{-r'} z^t \\ &= x^r y^s z^t z^{(rs'-r's)\ell^m} \\ &= b \cdot z^{(rs'-r's)\ell^m}.\end{aligned}$$

On voit alors que, pour avoir  $\varphi_q^n(b) = cbc^{-1}$ , il faut et il suffit que  $rnu$  et  $snu$  soient des multiples de  $\ell^m$  et que  $tnu$  soit congru à  $rs' - r's$  modulo  $\ell^m$ . Or, puisque  $(\ell, u) = 1$ , cela se résume en

$$rn \equiv sn \equiv 0 \pmod{\ell^m} \quad \text{et} \quad tnu \equiv rs' - r's \pmod{\ell^m}. \quad (2.8.1)$$

Supposant ces égalités vérifiées pour un  $n$  minimal (i.e. pour  $n = n_b$ ), on peut calculer la  $q$ -norme de  $b$ . On a

$$\begin{aligned}N_q(b) &= \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_q^i(\bar{b}) = \prod_{i=0}^{n-1} \overline{\varphi_q^i(b)} = \prod_{i=0}^{n-1} \bar{b} x^{ri u \ell^m} y^{si u \ell^m} z^{ti u \ell^m} \\ &= \bar{b}^n \bar{x}^{r \frac{n(n-1)}{2} u \ell^m} \bar{y}^{s \frac{n(n-1)}{2} u \ell^m} \bar{z}^{t \frac{n(n-1)}{2} u \ell^m} = \bar{b}^n,\end{aligned}$$

d'après les congruences (2.8.1) et le fait que  $\bar{z}^{\ell^m} = 1$  et  $\ell \neq 2$ .

Sachant donc que  $N_q(b) = \bar{x}^{n_b r} \bar{y}^{n_b s} \bar{z}^{n_b t}$ , les congruences (2.8.1) nous disent que, pour tout  $b \in G$ ,  $N_q(b)$  appartient au sous-groupe  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q} \cong C_{\ell^{2m}}^{\ell^m} \times C_{\ell^{2m}}^{\ell^m} \times C_{\ell^m}$  de  $G^{\text{ab}}$  (chose évidente à priori d'après la théorie, mais plutôt rassurante lorsqu'on fait ces calculs). De plus, si l'on note  $e$  la valuation  $\ell$ -adique de  $n_b$  on voit, toujours grâce aux congruences (2.8.1), que

$$\ell^e | n_b t, \quad \ell^{m-e} | r \quad \text{et} \quad \ell^{m-e} | s.$$

On en déduit que  $\ell^{m-e} | (rs' - r's)$  et donc finalement que  $\ell^{\max\{m-e, e\}} | n_b t$ . Ceci nous dit que  $N_q(b)$  appartient au sous-groupe  $H \cong C_{\ell^{2m}}^{\ell^m} \times C_{\ell^{2m}}^{\ell^m} \times C_{\ell^m}^{\ell^{\lfloor m/2 \rfloor}}$  de  $G^{\text{ab}}$  pour tout  $b \in G$ .

On démontre maintenant que l'image  $N_q(G)$  dans  $G^{\text{ab}}$  engendre  $H$ . On considère les éléments  $b_1 = x$ ,  $b_2 = y$  et  $b_3 = x^{\ell^{\lfloor m/2 \rfloor}} y^{\ell^{\lfloor m/2 \rfloor}} z$  de  $G$  et on calcule ses  $q$ -normes.

Pour  $b_1$  on a  $r = 1$  et  $s = t = 0$ , ce qui entraîne  $\ell^m | n_{b_1}$  et on voit rapidement que  $n_{b_1} = \ell^m$  car il vérifie bien les congruences (2.8.1) lorsqu'on pose  $s' = 0$ . On a alors  $N_q(b_1) = \bar{x}^{\ell^m}$ . Un calcul similaire donne aussi  $N_q(b_2) = \bar{y}^{\ell^m}$ .

Pour  $b_3$ , on a  $r = s = \ell^{\lfloor m/2 \rfloor}$  et  $t = 1$ , ce qui entraîne  $\ell^{\lfloor m/2 \rfloor} | n_{b_3}$  et on voit qu'en posant  $r' = 0$ ,  $s' = u\ell^{\lfloor m/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor}$  et  $n = \ell^{\lfloor m/2 \rfloor}$ , les congruences (2.8.1) sont bien vérifiées. On a alors  $n_{b_3} = \ell^{\lfloor m/2 \rfloor}$  et  $N_q(b_3) = \bar{x}^{\ell^m} \bar{y}^{\ell^m} \bar{z}^{\ell^{\lfloor m/2 \rfloor}}$ .

On voit alors que  $N_q(G)$  engendre bien le sous-groupe  $H$  de  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q}$ . Donc, d'après la proposition 2.13, le groupe de Brauer non ramifié algébrique de la variété  $V = G \backslash G'$  est isomorphe, en tant que groupe abélien, à  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_q} / H \cong C_{\ell^m} / C_{\ell^m}^{\ell^{\lfloor m/2 \rfloor}} \cong \mathbb{Z} / \ell^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbb{Z}$ .  $\square$

## 2.8.2 Cas d'un corps de caractéristique 0

Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. On retrouve ici les résultats analogues à ceux que l'on vient de démontrer pour un corps fini. On retrouve en particulier une généralisation des résultats de Demarche dans [Dem10], car  $k$  représente ici un corps arbitraire, donc en particulier cela pourrait être un corps de nombres.

On commence encore une fois avec le cas des groupes abéliens (cas qui est déjà connu, cf. par exemple [BDH13, Thm. 8.1]). On note toujours  $n = \exp(G)$  et  $\zeta_n$  est une racine primitive  $n$ -ième de l'unité.

**Proposition 2.33.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini abélien que l'on plonge dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. Soit  $V = G \backslash G'$ . Alors on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V = \text{III}_{\text{cyc}}^1(k, M)$ .*

*De plus, si  $L$  est une extension déployant  $G$  et telle que  $L(\zeta_n)/k$  soit une extension cyclique, alors  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V = 0$  (un tel corps  $L$  existe par exemple lorsque  $G$  est un  $p$ -groupe constant avec  $p$  impair ou lorsque  $k = \mathbb{R}$ ).*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2.22, il suffit de démontrer que  $N_\sigma(G)$  engendre tout le groupe  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_k$ . Or cela est évident encore une fois puisque, comme  $G = G^{\text{ab}}$ , la  $\sigma$ -norme  $N_\sigma(b)$  d'un élément  $b \in G$  qui est déjà dans  $G^{\varphi_\sigma} = (G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}$  est tout simplement  $b$  lui-même par définition de  $N_\sigma$ .

Pour la deuxième affirmation, le corollaire 2.21 nous dit qu'il suffit de montrer que, si  $\sigma$  est un générateur du groupe de Galois  $\Gamma_{L(\zeta_n)/k}$ , alors  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma} = N_\sigma(G)$ . Or, c'est précisément ce que l'on vient de démontrer pour tout élément de  $\Gamma_k$ .  $\square$

On démontre aussi dans ce cas que deux groupes ext-isomorphes au sens de la définition 2.27 se comportent effectivement de la même façon vis-à-vis de notre formule.

**Proposition 2.34.** *Soient  $G$  et  $H$  deux  $k$ -groupes finis ext-isomorphes plongés respectivement dans  $G'$  et  $H'$ , des  $k$ -groupes semi-simples simplement connexes, et soient  $V = G \backslash G'$  et  $W =$*

$H \setminus H'$ . Alors on a  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V \cong \mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}W$ .

*Démonstration.* Soit  $f : G_{\bar{k}} \rightarrow H_{\bar{k}}$  un  $\bar{k}$ -isomorphisme tel que  $\kappa_H = f_3 \circ \kappa_G$ . Il induit alors un  $\bar{k}$ -isomorphisme  $f^{\mathrm{ab}} : G_{\bar{k}}^{\mathrm{ab}} \rightarrow H_{\bar{k}}^{\mathrm{ab}}$  qui est en fait défini sur  $k$  car  $\kappa_H = f_3 \circ \kappa_G$  entraîne  $\kappa_{H^{\mathrm{ab}}} = f_3^{\mathrm{ab}} \circ \kappa_{G^{\mathrm{ab}}} = f_2^{\mathrm{ab}} \circ \kappa_{G^{\mathrm{ab}}}$  (on rappelle que  $\mathrm{Aut}(G^{\mathrm{ab}}(\bar{k})) = \mathrm{Out}(G^{\mathrm{ab}}(\bar{k}))$ ) et on en a de même pour  $H^{\mathrm{ab}}$ ) et alors  $f_1^{\mathrm{ab}}$  est un isomorphisme de  $\Gamma_k$ -modules. Si l'on note alors  $M$  et  $N$  les groupes des caractères de  $G$  et  $H$  respectivement, on a un isomorphisme  $N \xrightarrow{\sim} M$  induisant un isomorphisme  $f_*^{\mathrm{ab}} : H^1(k, N) \xrightarrow{\sim} H^1(k, M)$ .

Il suffit alors de considérer la formule du théorème 2.16. Soit  $\sigma \in \Gamma_k$  et soient  $\varphi_{G,\sigma}$  et  $\varphi_{H,\sigma}$  les applications définissant les  $\sigma$ -normes respectives sur  $G(\bar{k})$  et  $H(\bar{k})$ . On a

$$\varphi_{H,\sigma} = f_1 \circ \mathrm{int}(b_{\sigma,1}) \circ \varphi_{G,\sigma} \circ f_1^{-1},$$

pour un certain  $b_{\sigma,1} \in G$ , d'où il est facile de voir que, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\varphi_{H,\sigma}^m = f_1 \circ \mathrm{int}(b_{\sigma,m}) \circ \varphi_{G,\sigma}^m \circ f_1^{-1}.$$

pour certain  $b_{\sigma,m} \in G$ . En particulier,

$$\varphi_{H,\sigma} = f_1^{\mathrm{ab}} \circ \varphi_{G,\sigma} \circ (f_1^{\mathrm{ab}})^{-1},$$

lorsqu'on considère leurs restrictions aux abélianisés. Enfin, de ce qui précède, on voit facilement que pour tout élément  $b \in G(\bar{k})$  et pour tout  $m \geq 1$ ,  $\varphi_{G,\sigma}^m(b)$  est conjugué à  $b$  si et seulement si  $\varphi_{H,\sigma}^m(f_1(b))$  est conjugué à  $f_1(b)$  aussi. On voit alors que l'on a

$$N_{H,\sigma} = f_1^{\mathrm{ab}} \circ N_{G,\sigma} \circ f_1^{-1},$$

où  $N_{H,\sigma}$  et  $N_{G,\sigma}$  sont les  $q$ -normes respectives, et la formule du théorème 2.16 donne alors le même groupe de Brauer non ramifié algébrique pour les variétés  $V$  et  $W$ .  $\square$

On démontre maintenant les analogues en caractéristique 0 des propositions 2.30 et 2.31, généralisant donc les résultats de Demarche dans [Dem10].

**Proposition 2.35.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini ext-constant plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe,  $V = G \setminus G'$ . Soit  $\mu(k)$  l'ensemble des racines de l'unité dans  $k$  et soit  $m(k)$  le cardinal de  $\mu(k)$ . On suppose que  $n = \exp(G)$  divise  $m(k)$ . Alors  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V = 0$ .*

*Démonstration.* On se réduit tout de suite au cas où  $G$  est constant grâce à la proposition 2.34. Le corollaire 2.20 nous dit alors que  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V \subset H^1(k(\zeta_n)/k, M)$ . Or, puisque  $n$  divise  $m(k)$ , on a alors  $\zeta_n \in k$ , ce qui nous dit que  $H^1(k(\zeta_n)/k, M) = 0$ .  $\square$

*Remarque.*

Cette proposition a toujours un sens lorsque  $\mu(k)$  est infini : il suffit de considérer  $m(k)$  comme un nombre *surnaturel* (cf. [Ser94, I.1.3]). On voit en particulier que si  $k$  contient toutes les racines de l'unité, alors pour tout groupe ext-constant  $G$  on a  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V = 0$ .

**Proposition 2.36.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe fini. On suppose qu'il existe une extension finie  $L/k$  déployant  $G$  et telle que, si l'on note  $\mu(L)$  l'ensemble des racines de l'unité dans  $L$  et  $m(L)$  le cardinal de  $\mu(L)$ , alors  $n = \exp(G)$  est premier à  $m(L)$ . Alors, pour tout  $k$ -groupe  $H$  ext-isomorphe à  $G$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe, si l'on note  $V = H \backslash G'$ , on a  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V = 0$ .*

*Démonstration.* Il est clair qu'il suffit de montrer la proposition pour  $H = G$ . Le corollaire 2.20 nous dit que  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  est contenu dans  $H^1(L(\zeta_n)/k, M)$ . On considère alors la suite exacte de restriction-inflation suivante :

$$0 \rightarrow H^1(L/k, M^{\Gamma_{L(\zeta_n)/L}}) \rightarrow H^1(L(\zeta_n)/k, M) \rightarrow H^1(L(\zeta_n)/L, M).$$

Puisque  $L$  déploie  $G$ , on a que  $G^{\text{ab}}(\bar{k})$  est un  $\Gamma_{L(\zeta_n)/L}$ -module avec action triviale, ce qui fait de  $M$  un  $\Gamma_{L(\zeta_n)/L}$ -module de la forme  $\bigoplus_i \mu_{n_i}$ , avec  $\mu_{n_i} \subset \mu_n$ . Il est facile de voir alors que  $M^{\Gamma_{L(\zeta_n)/L}} = 0$ , car  $\mu_n \cap L = \{1\}$ . Ainsi, on a que  $H^1(L/k, M^{\Gamma_{L(\zeta_n)/L}}) = 0$  et il suffit alors de démontrer que, pour  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V$ , son image dans  $H^1(L(\zeta_n)/L, M)$  est triviale.

Écrivons  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  avec  $p_i \neq p_j$ . Puisque  $m(L)$  est forcément pair (car  $-1 \in L$ ), on a que tous les  $p_i$  sont impairs car  $m(L)$  est premier à  $n$ . Le groupe  $\Gamma_{L(\zeta_n)/L}$  est alors isomorphe au produit direct des groupes  $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\mathbb{Z}$ . Soient  $\sigma_i$  des générateurs respectifs de ces composantes de  $\Gamma_{L(\zeta_n)/L}$ . Il est facile de voir alors que l'on a

$$q(\sigma_i) \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}, \quad \forall j \neq i \quad \text{et} \quad q(\sigma_i) \equiv s_i \pmod{p_i^{\alpha_i}},$$

où  $s_i$  est un générateur du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\mathbb{Z}$  et  $q$  est le morphisme défini au début de la section 2.6.

Soit donc  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V$  et soit  $a \in Z^1(\Gamma_{L(\zeta_n)/L}, M)$  un cocycle représentant l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(L(\zeta_n)/L, M)$ . Il s'agit de montrer qu'il existe  $c_0 \in M$  tel que  $a_\sigma = c_0^\sigma c_0^{-1}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_{L(\zeta_n)/L}$ . Or, il est évident qu'il suffit de vérifier cela pour les  $\sigma_i$  car ils engendrent le groupe  $\Gamma_{L(\zeta_n)/L}$ . Considérons alors  $a_{\sigma_i}$ , qui par hypothèse vérifie que

$$a_{\sigma_i}(N_{\sigma_i}(b)) = 1, \quad \forall b \in G.$$

Considérons d'abord un  $b \in G$  d'ordre premier à  $p_i$ . Alors, d'après les propriétés de  $q(\sigma_i)$  ci-dessus, on a  $\varphi_{\sigma_i}(b) = b^{q(\sigma_i)} = b$ , ce qui veut dire que l'on a  $N_{\sigma_i}(b) = \bar{b}$ . On voit alors que  $a_{\sigma_i}$  est orthogonal à toute la  $p_j$ -partie de  $G^{\text{ab}}$  pour tout  $j \neq i$ , i.e.  $a_{\sigma_i} \in M\{p_i\}$ .

Soit  $c \in M\{p_i\}$ . Puisque  $G$  (et par conséquent  $G^{\text{ab}}$ ) est constant en tant que  $\Gamma_{L(\zeta_n)/L}$ -groupe, on a

$$\sigma_i c = c^{q(\sigma_i)} = c^{s_i} \quad \text{et} \quad \sigma_j c = c^{q(\sigma_j)} = c, \quad \forall j \neq i.$$

Puisque  $s_i$  est un générateur du groupe cyclique  $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^*$ , on sait qu'il n'est pas congru à 1 mod  $p_i$ , car l'ordre d'un tel élément divise  $p_i^{\alpha_i-1}$ . On a alors que  $s_i - 1$  est premier à  $p_i$ , donc en particulier il existe  $c_i \in M\{p_i\}$  tel que  $c_i^{s_i-1} = a_{\sigma_i}^{-1}$  et alors

$$c_i^{\sigma_i} c_i^{-1} = c_i c_i^{-s_i} = c_i^{1-s_i} = a_{\sigma_i}.$$

De plus, puisque  $c_i \in M\{p_i\}$ , on a aussi, pour  $j \neq i$ ,

$$c_i^{\sigma_j} c_i^{-1} = c_i c_i^{-1} = 1.$$

Soit alors  $c_0 = \prod_{i=1}^r c_i \in M$ . On voit facilement que l'on a, pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,

$$a_{\sigma_i} = c_0^{\sigma_i} c_0^{-1},$$

ce qui conclut. ☺

Enfin, on reprend une généralisation de l'exemple de Demarche [Dem10, §6, Prop. 1], qui était originellement un contre-exemple à la formule  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V = \text{III}_{\text{cyc}}^1(k, M)$  sur un corps de nombres,<sup>5</sup> on calcule son groupe de Brauer et on démontre que l'on a aussi en général  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V \supsetneq \text{III}_{\text{cyc}}^1(k, M)$ .

**Proposition 2.37.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique 0 et soit  $\ell \neq 2$  un nombre premier tel que la valuation  $\ell$ -adique du cardinal de  $\mu(k)$  soit  $m \geq 1$ . Soit*

$$G := \langle x, y, z : x^{\ell^{2m}} = y^{\ell^{2m}} = z^{\ell^{2m}} = 1; [x, y] = z^{-\ell^m}, [x, z] = [y, z] = 1 \rangle,$$

où  $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ . On regarde  $G$  comme un  $k$ -groupe constant et l'on note  $V$  la variété  $G \backslash G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. Soit enfin  $M$  le groupe des caractères de  $G$ . Alors on a

$$\text{Br}_{\text{nr,al}}V \cong \mathbb{Z}/\ell^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \text{III}_{\text{cyc}}^1(k, M) = 0.$$

*Démonstration.* Puisque  $G$  est un  $\ell$ -groupe constant avec  $\ell$  impair, le corollaire 2.21 nous dit que le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  est isomorphe à  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma} / \mathcal{N}_\sigma$ , où  $\sigma$  est le générateur du groupe  $\Gamma_{k(\zeta_{\ell^{2m}})/k}$  et  $\mathcal{N}_\sigma$  est le sous-groupe de  $G^{\text{ab}}$  engendré par les  $\sigma$ -normes. Il suffit alors de calculer ce quotient.

Puisque  $\sigma$  est d'ordre  $\ell^m$  et qu'il fixe  $\zeta_{\ell^m}$  (car  $\zeta_{\ell^m} \in k$ ), on sait que l'on doit avoir

$$q(\sigma) \equiv u\ell^m + 1 \pmod{\ell^{2m}},$$

pour un certain  $u$  avec  $(u, \ell) = 1$ . On a alors que  $\varphi_\sigma(b) = b^{q(\sigma)} = b^{u\ell^m + 1}$  pour  $b \in G$ . On remarque alors que l'on est *exactement* dans la même situation que dans la proposition 2.32, à cela près que l'on note  $\varphi_\sigma$ ,  $n_{\sigma, b}$  et  $N_\sigma$  au lieu de  $\varphi_q$ ,  $n_b$  et  $N_q$ . Le calcul déjà fait nous dit alors que  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V \cong \mathbb{Z}/\ell^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbb{Z}$ .

Pour démontrer finalement que  $\text{III}_{\text{cyc}}^1(k, M) = 0$ , il suffit de noter qu'il est contenu dans  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  et donc dans  $H^1(k(\zeta_{\ell^{2m}})/k, M)$  d'après le corollaire 2.20. Un élément qui s'annule en toute restriction à un sous-groupe pro-cyclique s'annule forcément dans  $H^1(k(\zeta_{\ell^{2m}})/k, M)$ , puisque  $k(\zeta_{\ell^{2m}})/k$  est une extension cyclique. ☺

## 2.9 Application des résultats : obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible

Soit  $V$  une variété sur un corps de nombres  $k$ . On définit le groupe  $B_\omega V$  comme le sous-groupe de  $\text{Br}_{\text{al}}V$  des éléments  $\alpha$  tels que sa restriction  $\alpha_v$  à  $\text{Br}_{\text{al}}V_{k_v}$  est nulle pour presque toute

<sup>5</sup> Dans son article Demarche compare les groupes  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  et  $\text{III}_\omega^1(k, M)$ , mais on a déjà remarqué que  $\text{III}_\omega^1(k, M)$  et  $\text{III}_{\text{cyc}}^1(k, M)$  désignent le même sous-groupe de  $H^1(k, M)$  pour un corps de nombres.

place de  $k$ , ou bien, si l'on rappelle l'identification de  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  avec  $H^1(k, M)$  pour un espace homogène à stabilisateur fini, comme le sous-groupe  $\mathrm{III}_{\omega}^1(k, M)$  de  $H^1(k, M)$  des éléments qui s'annulent en presque toute localisation  $H^1(k_v, M)$ .

Plus généralement, pour un  $\Gamma_k$ -module de type fini  $M$  avec  $k$  un corps quelconque, on a déjà défini  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M)$  comme le sous-groupe de  $H^1(k, M)$  des éléments dont la restriction à  $H^1(\gamma, M)$  est nulle pour tout sous-groupe fermé pro-cyclique  $\gamma$  de  $\Gamma_k$ . Le théorème de Čebotarev nous permet de démontrer facilement que, lorsque  $k$  est un corps global, on a  $\mathrm{III}_{\mathrm{cyc}}^1(k, M) = \mathrm{III}_{\omega}^1(k, M)$ , cf. par exemple [San81, §1].

L'intérêt du sous-groupe  $\mathrm{E}_{\omega}V$  (ou  $\mathrm{III}_{\omega}^1(k, M)$  dans ce contexte) est que dans le cas où  $V$  est un espace homogène sur un groupe algébrique connexe à stabilisateur connexe ou abélien sur un corps de nombres, Borovoi a démontré que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible associée à ce sous-groupe était la seule, cf. [Brv96, Cor. 2.5]. De plus, on peut démontrer que pour ces variétés on a l'égalité  $\mathrm{E}_{\omega}V = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}}V$  (c'est ce qu'on a fait dans la proposition 2.33 pour le cas où  $G$  est abélien, cf. [BDH13, Thm. 8.1] pour le cas général). La question de savoir si cette obstruction est la seule reste cependant ouverte pour les espaces homogènes à stabilisateur fini non abélien et il n'y a pas d'accord parmi les experts sur ce qu'on devrait s'attendre comme réponse.

Dans cette section on donne un exemple de ce que les formules développées ont à nous dire sur l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible dans ce cas toujours ouvert.

La formule (2.6.1) devient très simple lorsque  $k = \mathbb{R}$ . Ceci nous permet de démontrer que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible associée au sous-groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}}$  ne prend pas en compte ce qui se passe aux places réelles. En effet, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.38.** *Soient  $k = \mathbb{R}$ ,  $G$  un  $k$ -groupe fini plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et  $V = G \backslash G'$ . En identifiant  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  avec  $H^1(k, M)$ , tout élément  $\alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}}V$  est orthogonal au sous-ensemble  $\mathrm{Im}[H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G^{\mathrm{ab}})]$  de  $H^1(k, G^{\mathrm{ab}})$ .*

*Remarque.*

Ce résultat nous dit en particulier que pour  $k$  un corps de nombres,  $G$  un  $k$ -groupe fini plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et  $V = G \backslash G'$ , si l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}}$  s'avère être la seule pour  $V$ , alors  $V$  vérifie l'approximation réelle (i.e. l'approximation faible en l'ensemble  $S = \Omega_{\infty}$  des places réelles de  $k$ ), comme il sera explicité dans le corollaire qui suit. Pris dans l'autre sens, ceci veut dire aussi qu'un espace homogène à stabilisateur fini ne vérifiant pas l'approximation réelle fournirait un exemple de variété où l'obstruction de Brauer-Manin algébrique n'est pas la seule.

*Démonstration de la proposition 2.38.* Soit  $\sigma$  l'élément non nul de  $\Gamma_k$ . Il est facile de voir que l'on a les isomorphismes d'ensembles pointés (resp. groupes)

$$\begin{aligned} Z^1(k, G) &\xrightarrow{\sim} G^{\varphi_{\sigma}}, & b &\mapsto b_{\sigma} \\ Z^1(k, G^{\mathrm{ab}}) &\xrightarrow{\sim} (G^{\mathrm{ab}})^{\varphi_{\sigma}}, & \mathfrak{b} &\mapsto \mathfrak{b}_{\sigma}. \end{aligned}$$

Soit  $g \in G^{\varphi_{\sigma}}$ . Puisque  $\varphi_{\sigma}(g) = g$ , on a que  $N_{\sigma}(g) = \bar{g} \in G^{\mathrm{ab}}$ . En particulier, on voit que l'image de  $N_{\sigma}$  contient l'image de  $Z^1(k, G)$  dans  $Z^1(k, G^{\mathrm{ab}})$ .

Soit alors  $\beta \in H^1(k, G^{\text{ab}})$  un élément dans  $\text{Im}[H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G^{\text{ab}})]$ . On sait que l'on peut représenter  $\beta$  par un cocycle  $\mathbf{b}$  tel que  $\mathbf{b}_\sigma \in N_\sigma(G)$ . Pour  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}}V$ , soit  $a \in Z^1(k, M)$  un cocycle représentant  $\alpha$ . On sait alors d'après le théorème 2.16 que l'on a  $a_\sigma(\mathbf{b}_\sigma) = 1$ . D'autre part, on sait que  $\alpha \cup \beta \in H^2(k, \mu_n) \subset \text{Br } k$  est représenté par un cocycle  $c$  tel que

$$c_{\sigma,\sigma} = a_\sigma({}^\sigma \mathbf{b}_\sigma) = a_\sigma(\mathbf{b}_\sigma^{-1}) = (a_\sigma(\mathbf{b}_\sigma))^{-1} = 1.$$

(On rappelle que  $\mathbf{b}_\sigma \in (G^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}$  et alors  ${}^\sigma \mathbf{b}_\sigma = \mathbf{b}_\sigma^{-1}$ .) Il est clair alors que  $\alpha \cup \beta$  est nul, ce qui nous dit que  $\alpha$  est orthogonal au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G^{\text{ab}})]$  de  $H^1(k, G^{\text{ab}})$ .  $\square$

Soit maintenant  $k$  un corps de nombres et  $V = G \setminus G'$  comme toujours. Ce dernier résultat, joint au théorème 2.23 (ou plutôt à son équivalent cohomologique, proposition 2.24), nous permet de cerner un peu mieux l'ensemble  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr,al}}}$  des familles des points dans  $\prod_{\Omega_k} V(k_v)$  qui sont orthogonales au groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  (cf. la section I de l'introduction de cette thèse ou encore [Sko01, §5.2] pour une définition), comme le montre le résultat suivant :

**Corollaire 2.39.** *Soit  $k$  un corps de nombres,  $G$  un  $k$ -groupe fini déployé par  $L/k$  plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et  $V = G \setminus G'$ . Soit enfin  $S$  la réunion (finie) de l'ensemble des places non archimédiennes ramifiées pour l'extension  $L/k$  avec l'ensemble des places divisant l'ordre de  $G$  et soit  $T = \Omega_k \setminus S$ . Alors la projection*

$$\left( \prod_{\Omega_k} V(k_v) \right)^{\text{Br}_{\text{nr,al}}} \rightarrow \prod_{v \in T} V(k_v),$$

est surjective.

Enfin, si l'on note  $\Omega_\infty$  l'ensemble des places archimédiennes de  $k$  et l'on remarque que  $\Omega_\infty \subset T$ , on obtient en particulier :

**Corollaire 2.40.** *Sous les hypothèses du corollaire 2.39, si l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}$  est la seule pour  $V$ , alors  $V$  vérifie l'approximation réelle. En d'autres mots, si  $V(k)$  est dense dans  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr,al}}}$ , alors  $V(k)$  est dense dans  $\prod_{\Omega_\infty} V(k_v)$ , où  $\Omega_\infty$  désigne l'ensemble des places archimédiennes de  $k$ .*  $\square$

*Démonstration du corollaire 2.39.* Il suffit de noter que d'après la formule de compatibilité donnée dans la proposition 2.3, l'ensemble  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr,al}}}$  est l'ensemble de familles de points  $(P_v)_{\Omega_k}$  telles que

$$\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\alpha_v \cup [Z](P_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \forall \alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H^1(k, M),$$

où  $\text{inv}_v$  est l'application canonique  $\text{Br } k_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  donnée par la théorie du corps de classes et  $[Z](P_v) \in H^1(k_v, G^{\text{ab}})$  est la classe du  $k_v$ -torseur sous  $G^{\text{ab}}$  obtenu à partir du toseur  $Z = G^{\text{der}} \setminus G' \rightarrow V$  sous  $G^{\text{ab}}$  et du  $k_v$ -point  $P_v \in V(k_v)$  (cf. la section 2.3 pour la définition de  $Z$  et la preuve de la proposition 2.2 pour comprendre l'usage qu'on fait ici de la formule de compatibilité). En effet, on voit alors immédiatement à partir des propositions 2.38 et 2.24 qu'on a  $\alpha_v \cup [Z](P_v) = 0$  pour toute place  $v \in T$ , car pour toute telle place non archimédienne on a que  $G$  est non ramifié en tant que  $k_v$ -groupe et son cardinal est premier à la caractéristique résiduelle. Il est alors évident que pour  $(\beta_v)_T \in \prod_{v \in T} V(k_v)$ , l'élément  $(0)_S \times (\beta_v)_T \in \prod_{\Omega_k} V(k_v)$  appartient à  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr,al}}}$ , ce qui conclut.  $\square$

*Remarque.*

Si ce résultat nous dit que le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V_{\mathbb{R}}$  ne joue pas de rôle dans l'obstruction de Brauer-Manin, il est important de remarquer qu'il n'y a aucune raison pour qu'il soit trivial. En effet, le corollaire 2.21 nous dit que  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V_{\mathbb{R}}$  est isomorphe à  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_{\sigma}}/\mathcal{N}_{\sigma}$ , où  $\sigma$  est l'élément non nul de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{N}_{\sigma}$  est le sous-groupe engendré par l'image de la  $\sigma$ -norme  $N_{\sigma}$ , et l'on peut trouver des exemples analogues à ceux donnés dans la proposition 2.37 pour lesquels ce quotient serait non trivial. Par ailleurs, on voudrait voir dans l'énoncé de la proposition 2.38 une formule cohomologique pour le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V_{\mathbb{R}}$  analogue à celle trouvée pour les corps locaux (proposition 2.24). Pourtant, si l'on regarde de près le raisonnement qui mène au corollaire 2.21 et la preuve de la proposition 2.38, on voit que cela serait équivalent à affirmer que le sous-groupe  $\mathcal{N}_{\sigma}$  de  $(G^{\text{ab}})^{\varphi_{\sigma}}$  est le même que celui engendré par l'image de  $G^{\varphi_{\sigma}}$ , ce qui n'est pas forcément le cas en général, même si l'on a toujours de façon évidente  $G^{\varphi_{\sigma}} \subset N_{\sigma}(G)$ .

## Chapitre 3

# Groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes : le cas des stabilisateurs quelconques

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a donné plusieurs formules permettant de calculer le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  d'un espace homogène  $V = G \backslash G'$  sous un  $k$ -groupe algébrique  $G'$  semi-simple simplement connexe à stabilisateur fini  $G$  pour  $k$  un corps fini ou bien quelconque de caractéristique 0. Ces travaux étaient un complément naturel à ceux de Borovoi, Demarche et Harari dans [BDH13], texte qui donne des formules pour le même groupe pour des espaces homogènes (avec des groupes ambiants plus généraux) à stabilisateur de type “ssumult”, cas qui contient notamment celui des groupes connexes et des groupes commutatifs. Or, une fois traité le cas des stabilisateurs finis, qui sont parmi les groupes non connexes et non commutatifs les plus simples que l'on puisse imaginer, la question naturelle à se poser est dans quelle mesure on peut étendre ces formules au cas d'un stabilisateur *quelconque*, étant donné que tout groupe algébrique linéaire est une extension d'un groupe fini par un groupe connexe. L'objectif de ce chapitre est précisément la réalisation de cette démarche.

Pour arriver à un tel but, on s'est inspiré d'un contre-exemple aux formules de Borovoi, Demarche et Harari, fourni par eux-mêmes dans [BDH13, Prop. 8.4]. Ce résultat montre que l'on peut obtenir des groupes qui ne sont pas de type “ssumult” pour lesquels la formule qu'ils ont développée ne marche plus. Or, cet exemple consiste tout simplement en la donnée d'un groupe fini non abélien ne vérifiant pas leur formule (et dans le chapitre précédent on a bien montré qu'il en est ainsi pour certains groupes finis non abéliens), puis d'un sous-groupe abélien de celui-ci que l'on plonge dans un tore, obtenant ainsi une extension non triviale d'un groupe fini par un tore. Le fait que le groupe de Brauer non ramifié algébrique d'un espace homogène avec un tel stabilisateur soit le même que celui d'un espace homogène avec le stabilisateur fini dont ils sont partis suggère le principe technique suivant :

*Pour un espace homogène  $V = G \backslash G'$  à stabilisateur  $G$  non connexe, toute l'information concernant le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  est contenue dans un sous-*

groupe fini de  $G$ , extension du groupe des composantes connexes de  $G$  par un sous-groupe fini de  $G^\circ$ , la composante connexe neutre de  $G$ .

Ainsi, on est d'abord amené à résoudre :

1. la question de l'existence de tels sous-groupes ;
2. la question de savoir si effectivement ils "contiennent toute l'information".

La première question, laquelle avait déjà été posée par Chernousov, Gille et Reichstein dans [CGR08, Rem. 3.8], est traitée d'une façon satisfaisante dans ce chapitre. On montre en effet le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** [Proposition 3.15]

Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire, extension d'un groupe fini  $F$  d'ordre  $n$  premier à  $p$  par un tore  $T$  déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$ , aussi premier à  $p$ . Alors il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H$  de  $G$  et un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & {}_{nd}T & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \longrightarrow 1, \end{array}$$

où  ${}_{nd}T$  désigne le sous-groupe de  $nd$ -torsion de  $T$ .

Si l'on répond à la question seulement pour les extensions d'un groupe fini par un tore, il faut remarquer que cela suffit pour notre objectif car, de même que chez [BDH13], la partie unipotente et la partie semi-simple du stabilisateur ne jouent aucun rôle dans les formules (d'où le fait de se concentrer sur les groupes de type multiplicatif chez [BDH13]). Ainsi, ce sera le quotient  $G^{\text{torf}}$  (cf. les notations ci-dessous) et notamment un sous-groupe fini de celui-ci (donc un sous-quotient fini de  $G$ ) qui portera toute l'information et sera donc utilisé pour calculer le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$ .

La réponse à la deuxième question est donnée par un corollaire évident de la proposition 3.1 de [CGR08], que l'on peut énoncer comme suit :

**Proposition 3.2.** Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire, extension d'un groupe fini  $F$  d'ordre  $n$  premier à  $p$  par un tore  $T$  déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$ , aussi premier à  $p$ . Soit enfin  $m = nd$ . On suppose qu'il existe un sous-groupe fini  $H_0$  de  $G$  tel que la composée  $H_0 \rightarrow G \rightarrow F$  est surjective et l'on note  $H$  le  $k$ -sous-groupe fini de  $G$  engendré par  $H_0$  et par  $\phi_m^{-1}(H_0 \cap T)$ , où  $\phi_m$  représente la multiplication par  $m$  dans  $T$ .

Alors, pour tout corps  $k' \supset k$ , l'application naturelle  $H^1(k', H) \rightarrow H^1(k', G)$  est surjective.

La surjectivité de l'application  $H_0 \rightarrow F$  est bien entendu au niveau des  $\bar{k}$ -points. Autrement dit, on peut voir  $F$  comme un quotient de  $H_0$ . On remarque par ailleurs qu'il est facile de vérifier que le sous-groupe  $H$  ci-dessus est bien un groupe fini. En effet, pour  $h_0 \in H_0$  et  $h_1 \in H_1 := \phi_m^{-1}(H_0 \cap T)$ , on a  $h_0 h_1 h_0^{-1} \in H_1$ , ce qui montre que l'on peut écrire tout élément  $h$  de  $H$  comme un produit  $h = h_0 h_1$  avec  $h_0 \in H_0$  et  $h_1 \in H_1$ . Ces deux sous-groupes étant finis, la finitude de  $H$  en découle.

*Remarque.*

Cette proposition, ou encore la proposition 3.1 de [CGR08], est un avatar (et une partie importante de la démonstration) du théorème 1.2 du même article. Ce dernier théorème vise notamment à généraliser un autre résultat des mêmes auteurs (cf. [CGR06, Thm. 1.1]), lequel généralise pour sa part un résultat de Galitskiĭ assurant l’existence des *quasi-sections* (cf. [Gal92] ou [CGR06, Thm. 4.2]). En effet, les résultats de Chernousov, Gille et Reichstein peuvent être interprétés dans le langage des  $(G, H)$ -*sections* (cf. [CGR06, Thm. 1.1’]), notion due à Katsylo (cf. [Kat83]). Sous cette traduction, on peut prouver facilement le résultat de Galitskiĭ, ainsi que le “lemme sans nom” (cf. [CGR06, Lem. 4.4] ou encore [CTS07, Cor. 3.9]), dont la version la plus ancienne semble se trouver dans [BgKa85]. Pour un survol de ces notions, on renvoie à [Pop94].

Lorsqu’on associe cette proposition de nature cohomologique à la formule cohomologique dans 2.1, on est capable de suivre la démarche faite dans le chapitre 2 pour obtenir, dans l’ordre,

- une formule cohomologique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$  sur un corps fini (Théorème 3.4) ;
- une formule algébrique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$  sur un corps fini (Théorème 3.6) ;
- une formule algébrique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$  sur un corps de caractéristique 0 (Théorème 3.9) ;
- une formule cohomologique pour  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$  sur un corps local de caractéristique 0, sous quelques hypothèses supplémentaires (Proposition 3.13).

Ici, de même que dans le chapitre 2, on entend par formule cohomologique (resp. algébrique) une formule dépendant des théorèmes de dualité en cohomologie galoisienne pour des corps locaux (resp. une formule dépendant de la structure de groupe algébrique du stabilisateur).

La composition de ce chapitre est donc la suivante. Dans la section 3.2, on fixe toutes les notations et l’on donne quelques rappels préliminaires, tous déjà mentionnés dans le chapitre 2. Les résultats sur un corps fini, modulo l’existence d’un “bon” sous-quotient fini, sont donnés dans la section 3.3. La section 3.4 fait de même pour les corps de caractéristique 0. On a décidé de présenter ces résultats avant ceux d’existence parce que, dans beaucoup d’exemples de groupes algébriques linéaires non connexes, il est possible de trouver des sous-groupes finis explicites avec lesquels on peut faire les calculs, rendant ainsi inutile la proposition 3.1. Dans la section 3.5 on démontre la proposition 3.1 et l’on énonce à nouveau les résultats précédents (théorèmes 3.18 et 3.19) dans le cas où l’on n’aurait pas accès immédiat à des “bons” sous-quotients finis. On profite aussi pour donner une généralisation (corollaire 3.17) d’un des résultats de Chernousov, Gille et Reichstein, à savoir leur corollaire 1.4 dans [CGR08], que l’on rend valable sur un corps quelconque (alors que leur résultat ne vaut que sur un corps algébriquement clos). Enfin, dans la section 3.6, on donne un exemple d’application de ces résultats. Il s’agit de l’obstruction de Brauer-Manin associée au groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}, \mathrm{al}} V$ , pour laquelle on montre qu’elle “ne voit pas les places réelles”, tout comme dans la section 2.9 dans le cas des stabilisateurs finis.

Ce chapitre a aussi une section en appendice où l’on présente une petite amélioration d’une remarque non publiée faite par Colliot-Thélène (cf. [CT12]) concernant le groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes sous un groupe semi-simple simplement connexe. Le résultat en question est notamment utilisé dans la preuve du théorème 3.9 pour se ramener au cas où le stabilisateur a une composante connexe neutre réductive.

### 3.2 Notations et rappels préliminaires

Dans tout ce chapitre,  $k, k'$  et  $L$  représentent des corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Pour un corps  $k$ , on note toujours  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$  et  $\Gamma_k := \text{Gal}(\bar{k}/k)$  le groupe de Galois absolu. Dans le cas des corps finis,  $q$  représente toujours le cardinal du corps et il s'agit donc d'une puissance de  $p$ .

On note  $V$  une  $k$ -variété, laquelle est toujours supposée lisse et géométriquement intègre. On notera  $X$  une  $k$ -compactification de  $V$  (aussi supposée lisse), i.e. une  $k$ -variété propre munie d'une  $k$ -immersion ouverte  $V \hookrightarrow X$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire dont la composante connexe neutre est toujours supposée réductive lorsque  $k$  est de caractéristique positive. Pour un tel groupe, on note

- $D(G)$  le sous-groupe dérivé de  $G$ ;
- $G^{\text{ab}} = G/D(G)$  l'abélianisé de  $G$ ;
- $\hat{G} = \hat{G}^{\text{ab}}$  le  $\Gamma_k$ -module des caractères de  $G$ ;
- $G^\circ$  la composante connexe de l'élément neutre de  $G$ ;
- $F = G/G^\circ$  le groupe des composantes connexes de  $G$  (c'est un groupe fini);
- $R_{\text{u}}(G)$  le radical unipotent de  $G^\circ$  (c'est un groupe unipotent, trivial en caractéristique positive d'après notre hypothèse);
- $G^{\text{red}} = G^\circ/R_{\text{u}}(G)$  (c'est un groupe réductif);
- $G^{\text{tor}}$  l'abélianisé de  $G^{\text{red}}$  (c'est un tore);
- $G^{\text{torf}} = G/\text{Ker}[G^\circ \twoheadrightarrow G^{\text{tor}}]$  (c'est une extension de  $F$  par  $G^{\text{tor}}$ ).

On remarque que le sous-groupe  $R_{\text{u}}(G)$  est caractéristique dans  $G$ , ce qui nous dit que  $\text{Ker}[G^\circ \twoheadrightarrow G^{\text{tor}}]$  est bien distingué dans  $G$  et donc que le quotient  $G^{\text{torf}}$  est bien défini. Enfin, on supposera partout que l'ordre du groupe  $F$  (à savoir, le degré du morphisme structural  $F \rightarrow \text{Spec } k$ ) est premier à la caractéristique  $p$  du corps  $k$ . Le cardinal de  $F(\bar{k})$  est ainsi supposé toujours premier à  $p$ . On regardera souvent le  $k$ -groupe  $G$  comme immergé dans un  $k$ -groupe semi-simple simplement connexe (par exemple  $\text{SL}_n$ ), pour lequel on réserve la notation  $G'$ . La lissité de  $G'$  nous dit par ailleurs que la  $k$ -variété  $V := G \setminus G'$  est lisse et géométriquement intègre (cf. [SGA3I, VI<sub>B</sub>, Prop. 9.2]) et correspond à un espace homogène sous  $G'$ .

Pour une extension de corps  $L/k$  et pour  $V$  une  $k$ -variété, on note  $V_L := V \times_k L$  la  $L$ -variété obtenue par changement de base. Pour toute variété  $V$ , on note  $H^i(V, \cdot)$  les groupes de cohomologie étale et  $H^i(k, \cdot)$  les groupes de cohomologie galoisienne classiques (qui coïncident avec les groupes de cohomologie étale pour  $V = \text{Spec } k$ ). Pour  $i = 1$ , on peut aussi définir des ensembles de cohomologie non abélienne, lesquels seront toujours notés  $H^1(V, \cdot)$  et  $H^1(k, \cdot)$  comme dans le cas abélien (ces deux ensembles coïncident aussi pour  $V = \text{Spec } k$ ). Si l'on écrit  $\mathbb{G}_{\text{m}}$  pour le groupe multiplicatif, le groupe de Brauer  $\text{Br } V$  est défini comme le sous-groupe de torsion du groupe  $H^2(V, \mathbb{G}_{\text{m}})$ . Pour  $n > 1$  premier à  $p$ , on note  $\mu_n$  le groupe algébrique (fini et lisse) des racines  $n$ -ièmes de l'unité. La  $n$ -torsion du groupe de Brauer  $\text{Br } V$  est alors donnée par un quotient de  $H^2(V, \mu_n)$ . On note aussi, pour un groupe  $A$  abélien et de torsion (par exemple  $\text{Br } V$ ),  $A\{p'\}$  son sous-groupe de torsion première à  $p$ . Pour les tores, on utilise la notation  ${}_n T$  pour désigner leur  $n$ -torsion.

Passons aux rappels. Pour la définition du groupe de Brauer non ramifié  $\text{Br}_{\text{nr}} V$  d'une  $k$ -variété  $V$ , on renvoie à [CT95] ou encore à [CTS07]. On se limite à rappeler que, lorsque l'on dispose d'une compactification lisse  $X$  de  $V$ , on a l'égalité  $\text{Br}_{\text{nr}} V\{p'\} = \text{Br } X\{p'\}$ , où  $p$

correspond à la caractéristique du corps  $k$ , (ce sont des applications du théorème de pureté de Grothendieck, cf. [CT95, Prop. 4.2.3]). Le groupe de Brauer algébrique est défini comme

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V := \frac{\mathrm{Ker}[\mathrm{Br} V \rightarrow \mathrm{Br} V_{\bar{k}}]}{\mathrm{Im}[\mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} V]}.$$

On note aussi  $\mathrm{Br}_1V := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br} V \rightarrow \mathrm{Br} V_{\bar{k}}]$  d'où  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V = \mathrm{Br}_1V/\mathrm{Br} k$  lorsqu'on note par abus  $\mathrm{Br} k$  sa propre image dans  $\mathrm{Br} V$ . Le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  est alors l'image de  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V \cap \mathrm{Br}_1V$  dans  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  par la projection naturelle.

On rappelle que pour une  $k$ -variété  $V$  vérifiant  $V(k) \neq \emptyset$  et  $\bar{k}[V]^*/\bar{k}^* = 1$ , le groupe de Brauer algébrique  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  admet une description en termes du groupe de Picard géométrique  $\mathrm{Pic} V_{\bar{k}}$  (cf. la section 2.3) :

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic} V_{\bar{k}}). \quad (3.2.1)$$

De plus, on a de même pour une  $k$ -compactification lisse  $X$  de  $V$  :

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}X \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}}). \quad (3.2.2)$$

Enfin, d'après ce qui a été dit ci-dessus,  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}X\{p'\}$  correspond à la partie non ramifiée (et de torsion première à  $p$ ) du groupe de Brauer algébrique de  $V$  que l'on note  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V\{p'\}$ .

Soit maintenant  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire lisse plongé dans  $G'$  un  $k$ -groupe algébrique semi-simple simplement connexe et soit  $V := G \backslash G'$  la  $k$ -variété quotient. Le groupe  $G'$  étant semi-simple, on a que  $\bar{k}[G']^*/\bar{k}^* = 1$  (c'est le lemme de Rosenlicht, cf. [San81, Lem. 6.5]). Ceci nous dit que  $\bar{k}[V]^*/\bar{k}^* = 1$ , puisque toute fonction inversible sur  $V_{\bar{k}}$  donne une fonction inversible sur  $G'_{\bar{k}}$ . On en déduit que l'on a la description du groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  donnée par l'isomorphisme (3.2.1) ci-dessus. On conclut cette section en rappelant (cf. toujours la section 2.3) que  $\mathrm{Pic} V_{\bar{k}} = \hat{G} = \hat{G}^{\mathrm{ab}}$ , d'où l'on voit que  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V = H^1(k, \mathrm{Pic} V_{\bar{k}})$  ne dépend que de  $G$ , et même plus précisément de son abélianisé. De plus, puisque dans tout ce texte les groupes finis sont d'ordre premier à  $p$ , le groupe  $\hat{G}^{\mathrm{ab}}$  n'aura pas de  $p$ -torsion. Alors, dès que les extensions déployant la partie torique de  $G^{\mathrm{ab}}$  seront d'ordre premier à  $p$ , le groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  n'aura pas non plus de  $p$ -torsion. On se permettra alors dans ces cas d'utiliser la notation  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V$  au lieu de  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V\{p'\}$ .

### 3.3 Formules sur un corps fini

Soit maintenant  $k$  un corps fini de cardinal  $q$  une puissance de  $p$ , soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire à composante connexe neutre  $G^\circ$  réductive et soit  $F = G/G^\circ$ . On rappelle que, lorsque l'ordre de  $F$  est premier à  $p$ , le cup-produit nous donne l'accouplement parfait suivant (cf. [NSW08, Thm. 7.2.9])

$$H^1(k((t)), \hat{G}^{\mathrm{ab}}) \times H^1(k((t)), G^{\mathrm{ab}}) \rightarrow H^2(k((t)), \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br} k((t)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

D'autre part, en considérant la remarque à la fin de la section 2.4, on sait que l'on peut compter sur le résultat suivant :

**Proposition 3.3.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire à composante connexe neutre  $G^\circ$  réductive et tel que  $F = G/G^\circ$  est d'ordre  $n$  premier à  $q$ . Soit  $V = G \backslash G'$  pour un plongement*

de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  comme dans l'équation (3.2.1), le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V\{p'\}$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})\{p'\}$  vérifiant la propriété suivante :

Pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , l'image  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}})$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k'((t)), G) \rightarrow H^1(k'((t)), G^{\text{ab}})]$  pour l'accouplement ci-dessus.

Maintenant, si l'on se donne une inclusion  $H \hookrightarrow G^{\text{torf}}$ , on a clairement un  $k$ -morphisme induit  $H^{\text{ab}} \rightarrow G^{\text{ab}}$  car la projection  $G \rightarrow G^{\text{ab}}$  se factorise par  $G^{\text{torf}}$ . Via ce morphisme, l'accouplement ci-dessus en induit un autre (pas forcément parfait) qui lui est compatible. C'est-à-dire que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k((t)), H^{\text{ab}}) \times H^1(k((t)), \hat{G}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & \text{Br } k((t)) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^1(k((t)), G^{\text{ab}}) \times H^1(k((t)), \hat{G}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & \text{Br } k((t)). \end{array}$$

**Théorème 3.4.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire à composante connexe neutre  $G^\circ$  réductible et tel que  $F = G/G^\circ$  est d'ordre  $n$  premier à  $q$ . Soit  $V = G \setminus G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. On suppose que le tore  $G^{\text{tor}} = (G^{\text{torf}})^\circ$  est déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$  premier à  $q$  et l'on note  $m = nd$ . On suppose aussi qu'il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H_0$  de  $G^{\text{torf}}$  d'ordre premier à  $q$  tel que la composée  $H_0 \rightarrow G^{\text{torf}} \rightarrow F$  est surjective et l'on note  $H$  le sous-groupe (fini aussi) de  $G^{\text{torf}}$  engendré par  $H_0$  et par  $\phi_m^{-1}(H_0 \cap G^{\text{tor}})$ , où  $\phi_m$  désigne la multiplication par  $m$  dans  $G^{\text{tor}}$ .

Alors, en identifiant  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  vérifiant la propriété suivante :

Pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , l'image  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}})$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})]$  pour l'accouplement ci-dessus.

*Démonstration.* La proposition 3.2 nous dit que l'application  $H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), G)$  est surjective. En rappelant alors la compatibilité des accouplement ci-dessus, on voit que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(k'((t)), H) & \longrightarrow & H^1(k'((t)), H^{\text{ab}}) \times H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}}) \longrightarrow \text{Br } k'((t)) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^1(k'((t)), G) & \longrightarrow & H^1(k'((t)), G^{\text{ab}}) \times H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}}) \longrightarrow \text{Br } k'((t)). \end{array}$$

De ce diagramme il vient de façon immédiate que, pour  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le fait que son image dans  $H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}})$  soit orthogonale à l'image de  $H^1(k'((t)), G)$  dans  $H^1(k'((t)), G^{\text{ab}})$  est équivalent au fait d'être orthogonale à l'image de  $H^1(k'((t)), H)$  dans  $H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})$  pour le deuxième accouplement. La proposition 3.3 nous permet alors de conclure.  $\square$

De ce théorème, et grâce aux méthodes développées dans la section 2.5, on déduit une formule algébrique pour le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$ . Pour ce faire, on rappelle des définitions données dans cette section.

**Définition 3.5.** Soit  $H$  un  $k$ -groupe fini d'ordre premier à  $q$ . Soit  $s \in \Gamma_k$  l'élément correspondant au  $q$ -Frobenius (i.e. l'application  $\bar{k} \rightarrow \bar{k} : x \mapsto x^q$ ). On définit une application bijective  $\varphi_{q,H} : H(\bar{k}) \rightarrow H(\bar{k})$  par la formule

$$\varphi_{q,H}(b) = s^{-1}b^q.$$

Elle sera notée  $\varphi_q$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambigüité sur le groupe  $H$ . On remarque par ailleurs que l'action de  $s^{-1}$  et l'élévation à la  $q$ -ième puissance commutent, donc la notation n'est pas abusive. L'application induite par  $\varphi_q$  sur  $H^{\text{ab}}(\bar{k})$  est un automorphisme que l'on note toujours  $\varphi_q$  par abus.

Pour tout  $b \in H(\bar{k})$ , on définit  $n_b$  comme le plus petit entier strictement positif tel que  $\varphi_q^{n_b}(b)$  soit conjugué à  $b$ . On définit alors l'application  $q$ -norme  $N_{q,H} : H(\bar{k}) \rightarrow H^{\text{ab}}(\bar{k})$  comme le produit

$$N_{q,H}(b) = \prod_{i=0}^{n_b-1} \overline{\varphi_q^i(b)} = \prod_{i=0}^{n_b-1} \varphi_q^i(\bar{b}),$$

où " $\overline{\quad}$ " représente la projection naturelle de  $H(\bar{k})$  sur  $H^{\text{ab}}(\bar{k})$ . De même, elle sera notée  $N_q$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambigüité sur le groupe  $H$ .

Avec ces définitions, on peut énoncer la formule algébrique de la façon suivante.

**Théorème 3.6.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire à composante connexe neutre  $G^\circ$  réductible et tel que  $F = G/G^\circ$  est d'ordre  $n$  premier à  $q$ . Soit  $V = G \setminus G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. On suppose que le tore  $G^{\text{tor}} = (G^{\text{torf}})^\circ$  est déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$  premier à  $q$  et l'on note  $m = nd$ . On suppose aussi qu'il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H_0$  de  $G^{\text{torf}}$  d'ordre premier à  $q$  tel que la composée  $H_0 \rightarrow G^{\text{torf}} \rightarrow F$  est surjective et l'on note  $H$  le sous-groupe (fini aussi) de  $G^{\text{torf}}$  engendré par  $H_0$  et par  $\phi_m^{-1}(H_0 \cap G^{\text{tor}})$ , où  $\phi_m$  désigne la multiplication par  $m$  dans  $G^{\text{tor}}$ .

Alors, en identifiant  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  tels que, pour  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  un cocycle (quelconque) représentant  $\alpha$ , on a

$$a_s(N_{q,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}).$$

On remarque que la formule a bien un sens. En effet,  $a_s$  est un élément de  $\hat{G}^{\text{ab}}$ , donc on peut l'évaluer en  $N_q(b) \in H^{\text{ab}}(\bar{k})$  en poussant cet élément dans  $G^{\text{ab}}$ , ce qui donne un élément dans  $\mu_h$ , où  $h$  est l'exposant de  $H$ .

*Démonstration.* Il s'agit de démontrer que la propriété cohomologique du théorème 3.4 est équivalente à celle de l'énoncé ci-dessus. Autrement dit, il suffit de montrer que, pour  $\alpha = [a] \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , si l'on note  $r'(\alpha)$  sa restriction à  $H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}})$ , alors on a

$$\begin{aligned} r'(\alpha) \perp \text{Im}[H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})] \quad \forall k'/k \text{ finie} \\ \Updownarrow \\ a_s(N_{q,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}). \end{aligned}$$

Démontrons alors cette équivalence. L'application  $H^{\text{ab}} \rightarrow G^{\text{ab}}$  nous donne une application duale  $\hat{G}^{\text{ab}} \rightarrow \hat{H}^{\text{ab}}$ . L'accouplement entre  $\hat{G}^{\text{ab}}$  et  $H^{\text{ab}}$  que l'on a utilisé pour énoncer le théorème 3.4

est évidemment compatible avec celui (naturel) entre  $\hat{H}^{\text{ab}}$  et  $H^{\text{ab}}$ . Il en est par conséquent de même au niveau du cup produit des  $H^1$ . Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(k((t)), H^{\text{ab}}) \times H^1(k((t)), \hat{G}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & \text{Br } k((t)) \\ \parallel & & \parallel \\ H^1(k((t)), H^{\text{ab}}) \times H^1(k((t)), \hat{H}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & \text{Br } k((t)). \end{array}$$

Si l'on note alors  $a_H$  l'image de  $a$  dans  $Z^1(k, \hat{H}^{\text{ab}})$ ,  $\alpha_H = [a_H]$  et  $r'_H$  la restriction  $H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}}) \rightarrow H^1(k'((t)), \hat{H}^{\text{ab}})$ , il est évident que l'on a les deux équivalences suivantes :

$$\begin{array}{c} r'_H(\alpha_H) \perp \text{Im}[H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})] \quad \forall k'/k \text{ finie} \\ \Downarrow \\ r'(\alpha) \perp \text{Im}[H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})] \quad \forall k'/k \text{ finie,} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} (a_H)_s(N_{q,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}) \\ \Downarrow \\ a_s(N_{q,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}). \end{array}$$

On voit alors qu'il suffit de démontrer

$$\begin{array}{c} r'_H(\alpha_H) \perp \text{Im}[H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})] \quad \forall k'/k \text{ finie} \\ \Downarrow \\ (a_H)_s(N_{q,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}). \end{array}$$

Or, cette dernière équivalence découle des théorèmes 2.1 et 2.6, lesquels calculent tous les deux le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}W$  pour  $W = H \setminus H'$  avec  $H'$  semi-simple simplement connexe, le premier avec la formule du dessus, le deuxième avec la formule en dessous.  $\square$

On conclut cette section en notant que les théorèmes 3.4 et 3.6 nous permettent de comparer explicitement le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  avec le groupe de Brauer non ramifié algébrique d'un espace homogène à stabilisateur fini. En effet, soient  $G, G', H_0$  et  $H$  comme dans l'énoncé des théorèmes 3.4 et 3.6. Considérons une inclusion  $H \hookrightarrow H'$  avec  $H'$  semi-simple simplement connexe et posons  $W = H \setminus H'$ . On sait déjà que le groupe  $\text{Br}_{\text{al}}W$  s'identifie à  $H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}})$ . En appliquant alors ces théorèmes au calcul de  $\text{Br}_{\text{nr,al}}W$  en prenant le groupe  $H$  tout entier comme son sous-groupe fini (cas où  $H^{\text{torf}} = H$  et  $H^{\text{tor}} = 1$ ), on voit que l'on a de façon évidente le corollaire suivant.

**Corollaire 3.7.** *Soit  $\alpha_H$  l'image de  $\alpha \in \text{Br}_{\text{al}}V = H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  dans  $H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}}) = \text{Br}_{\text{al}}W$ . Alors  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}}V$  si et seulement si  $\alpha_H \in \text{Br}_{\text{nr,al}}W$ . En particulier, on a  $\text{Ker}[H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}}) \rightarrow H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}})] \subset \text{Br}_{\text{nr,al}}V$ .*  $\square$

### 3.4 Formule sur un corps de caractéristique 0

Dans toute cette section,  $k$  désigne un corps de caractéristique 0. De la même façon que dans le chapitre précédent, on retrouve ici une formule pour le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  où  $V = G \setminus G'$

en nous ramenant au cas des corps finis et en utilisant la formule développée dans la section précédente. On rappelle que cette méthode a déjà été utilisée par Colliot-Thélène et Kunyavskii (cf. [CTK98]) dans le cas des espaces principaux homogènes, i.e. lorsque  $G$  est trivial, et par Borovoi, Demarche et Harari (cf. [BDH13]) dans le cas où  $G$  est connexe ou commutatif (ou encore plus généralement de type “ssumult”) et avec des groupes  $G'$  plus généraux.

On commence en rappelant quelques définitions analogues à celles données dans la section 3.3.

**Définition 3.8.** Soit  $H$  un  $k$ -groupe fini d'exposant  $h$ . Soit  $\zeta_h \in \bar{k}$  une racine primitive  $h$ -ième de l'unité. On définit le morphisme  $q : \Gamma_k \rightarrow (\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^*$  par la formule suivante :

$$\forall \sigma \in \Gamma_k, \quad \sigma \zeta_h = \zeta_h^{q(\sigma)}.$$

C'est le caractère cyclotomique modulo  $h$ , cf. [NSW08, Def. 7.3.6].

On définit ensuite, pour tout  $\sigma \in \Gamma_k$ , l'application  $\varphi_{\sigma, H} : H(\bar{k}) \rightarrow H(\bar{k})$  par la formule

$$\varphi_{\sigma, H}(b) = \sigma^{-1} b^{q(\sigma)},$$

laquelle sera notée  $\varphi_\sigma$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur le groupe  $H$ . On note abusivement  $\varphi_\sigma$  aussi l'application induite sur  $H^{\text{ab}}(\bar{k})$  qui en est un automorphisme. On remarque par ailleurs que l'action de  $\sigma^{-1}$  et l'élévation à la  $q(\sigma)$ -ième puissance commutent, donc la notation n'est pas abusive.

Enfin, pour  $\sigma \in \Gamma_k$  et  $b \in H(\bar{k})$ , on définit  $n_{\sigma, b}$  comme le plus petit entier strictement positif tel que  $\varphi_\sigma^{n_{\sigma, b}}(b)$  soit conjugué à  $b$ . On définit alors l'application  $\sigma$ -norme  $N_{\sigma, H} : H(\bar{k}) \rightarrow H^{\text{ab}}(\bar{k})$  par la formule suivante :

$$N_{\sigma, H}(b) := \prod_{i=0}^{n_{\sigma, b}-1} \overline{\varphi_\sigma^i(b)} = \prod_{i=0}^{n_{\sigma, b}-1} \varphi_\sigma^i(\bar{b}).$$

De même,  $N_{\sigma, H}$  sera notée  $N_\sigma$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur le groupe  $H$ .

Avec ces définitions, on peut énoncer la formule pour  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$ .

**Théorème 3.9.** Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire et soit  $V = G \backslash G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. Soit  $L/k$  une extension déployant le tore  $G^{\text{tor}} = (G^{\text{torf}})^\circ$ . On note  $d$  le degré de cette extension,  $n$  l'ordre du groupe fini  $F = G/G^\circ$  et  $m = nd$ . On suppose aussi qu'il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H_0$  de  $G^{\text{torf}}$  tel que la composée  $H_0 \rightarrow G^{\text{torf}} \rightarrow F$  est surjective et l'on note  $H$  le sous-groupe (fini aussi) de  $G^{\text{torf}}$  engendré par  $H_0$  et par  $\phi_m^{-1}(H_0 \cap G^{\text{tor}})$ , où  $\phi_m$  désigne la multiplication par  $m$  dans  $G^{\text{tor}}$ .

Alors, en identifiant  $\text{Br}_{\text{al}} V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  tels que, pour  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  un cocycle (quelconque) représentant  $\alpha$ , on a

$$a_\sigma(N_{\sigma, H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}), \forall \sigma \in \Gamma_k. \quad (3.4.1)$$

On commence en remarquant que la proposition 3.25 dans l'appendice, issue d'une remarque faite par Colliot-Thélène, nous dit que l'on peut se restreindre au cas où la composante

connexe neutre  $G^\circ$  de  $G$  est réductive. En effet, cette proposition nous dit que, si l'on plonge le quotient  $G_0 = G/R_u(G)$  dans un autre groupe  $G'_0$  semi-simple simplement connexe et que l'on note  $W = G_0 \setminus G'_0$ , alors le groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}V$  est isomorphe au groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}W$ . D'autre part, il est évident que l'on a  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V \cong \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}W$  car ils sont tous les deux isomorphes à  $H^1(k, \hat{G}^{\mathrm{ab}})$  puisque  $\hat{G}^{\mathrm{ab}} = \hat{G} = \hat{G}_0$ . On en déduit l'égalité  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V \cong \mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}W$  et l'on voit alors qu'il suffit de calculer le groupe  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}W$ .

On suppose alors désormais que la composante connexe neutre  $G^\circ$  de  $G$  est réductive. Soit  $X$  une  $k$ -compactification lisse de  $V$ . On rappelle que de la même façon que l'on identifie  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\mathrm{ab}})$ , on peut identifier  $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},\mathrm{al}}V = \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}X$  avec  $H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$ . Le lemme 2.17 nous dit alors que pour démontrer le théorème 3.9 il suffit de démontrer, pour  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\mathrm{ab}})$ ,  $\sigma \in \Gamma_k$  et  $\gamma$  le sous-groupe fermé pro-cyclique engendré par  $\sigma$ , la proposition suivante :

**Proposition 3.10.** *Avec les notations ci-dessus, la restriction  $\alpha' \in H^1(\gamma, \hat{G}^{\mathrm{ab}})$  de  $\alpha$  provient de  $H^1(\gamma, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$  si et seulement si, pour  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\mathrm{ab}})$  un cocycle représentant  $\alpha$ , on a*

$$a_\sigma(N_{\sigma,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H.$$

En effet, on peut voir que la restriction  $\alpha'$  est clairement représentée par le cocycle  $a|_\gamma \in Z^1(\gamma, M)$  et donc  $a_\sigma$  n'est rien d'autre que  $(a|_\gamma)_\sigma$ . La démarche consistera alors à trouver un corps fini  $\mathbb{F}$  tel que l'on puisse regarder  $H(\bar{k})$ ,  $\hat{G}^{\mathrm{ab}}$  et  $\hat{H}^{\mathrm{ab}}$  comme des  $\Gamma_{\mathbb{F}}$ -groupes dont l'action du Frobenius coïncide avec celle de  $\sigma$ . On aura alors des morphismes canoniques  $H^1(\gamma, \hat{G}^{\mathrm{ab}}) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, \hat{G}^{\mathrm{ab}})$  et  $H^1(\gamma, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Pic} X_{\bar{\mathbb{F}}})$  et des égalités  $\varphi_{q_0,H} = \varphi_{\sigma,H}$  et  $N_{q_0,H} = N_{\sigma,H}$ , où  $q_0$  est le cardinal de  $\mathbb{F}$ . Le résultat découlera alors du théorème 3.6.

Pour ce faire, on suit la démarche de Colliot-Thélène et Kunyavskiï, laquelle a déjà été explicitée en détails dans le chapitre précédent et que l'on résume donc ici.

*Démonstration de la proposition 3.10.* La première étape consiste à se réduire au cas où  $k$  est de type fini sur  $\mathbb{Q}$ . On utilise notamment le fait que toutes les variétés et morphismes considérés sont de type fini et que le groupe de Picard  $\mathrm{Pic} X_{\bar{k}}$  est sans torsion, raison pour laquelle le groupe  $H^1(k, \mathrm{Pic} X_{\bar{k}})$  s'annule par restriction à une extension finie  $\tilde{k}/k$ . On suppose aussi pour la suite que  $\tilde{k}$  contient les racines  $h$ -ièmes de l'unité.

Ensuite, puisque  $k$  est de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , on sait que l'on peut trouver :

1. Un anneau intègre et régulier  $A$  de type fini sur  $\mathbb{Z}$  et de corps de fractions  $k$ , tel que la fermeture intégrale  $\tilde{A}$  dans  $\tilde{k}$  soit finie, étale et galoisienne sur  $A$  de groupe de Galois  $\tilde{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\tilde{k}/k)$ .
2. Des  $A$ -schémas  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{G}'$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{X}$  de type fini, de fibres génériques respectives  $G$ ,  $H_0$ ,  $H$ ,  $G'$ ,  $V$  et  $X$  et tels que :
  - $\mathcal{G}'$  est un  $A$ -schéma en groupes semi-simple simplement connexe (au sens de [SGA3III, XIX.2.7, XXII.4.3.3]),  $\mathcal{G}$  est un sous- $A$ -schéma en groupes lisse de  $\mathcal{G}'$  ;
  - $\mathcal{H}_0$  est un sous- $A$ -schéma en groupes fini et lisse de  $\mathcal{G}^{\mathrm{torf}}$  et  $\mathcal{H}$  est le sous-groupe de  $\mathcal{G}^{\mathrm{torf}}$  engendré par  $\mathcal{H}_0$  et  $\phi_m^{-1}(\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{G}^{\mathrm{tor}})$ , où  $\phi_m$  désigne la multiplication par  $m$  dans  $\mathcal{G}^{\mathrm{tor}}$ .
  - $\mathcal{V} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$  est lisse sur  $A$ ,  $\mathcal{X}$  est propre et lisse sur  $A$  et on a une  $A$ -immersion ouverte  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X}$  étendant  $V \hookrightarrow X$  ;

- pour tout point  $x$  de  $\text{Spec } A$  de corps résiduel  $\kappa_x$ , la fibre  $\mathcal{X}_x \subset \mathcal{X}$  est une compactification lisse de  $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{V}$  sur  $\kappa_x$ .

En notant que  $X$  est unirationnelle et que  $k$  est un corps de caractéristique 0, on voit que  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  et, quitte à restreindre  $\text{Spec } A$ , on peut supposer que  $H^1(\mathcal{X}_x, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_x}) = H^2(\mathcal{X}_x, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_x}) = 0$  pour tout point  $x$  de  $\text{Spec } A$ . Alors, d'après [Gro62, Cor. 2.7], on trouve des isomorphismes de spécialisation

$$\text{Pic } X \xrightarrow{\sim} \text{Pic } \mathcal{X}_x$$

pour tout point  $x \in \text{Spec } A$  et, quitte à réduire encore  $\text{Spec } A$ , des isomorphismes

$$\text{Pic } X_{\bar{k}} \xrightarrow{\sim} \text{Pic } \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{x}}$$

compatibles avec les actions galoisiennes correspondantes pour tout point  $\tilde{x} \in \text{Spec } \tilde{A}$ , où  $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_A \tilde{A}$ .

Si l'on note alors  $\tilde{\gamma}$  l'image de  $\gamma \subset \Gamma_k$  dans  $\tilde{\Gamma}$  et que l'on considère le sous-anneau  $A_1 := \tilde{A}^{\tilde{\gamma}}$  des éléments  $\tilde{\gamma}$ -invariants de  $\tilde{A}$ , le morphisme  $\rho : \text{Spec } \tilde{A} \rightarrow \text{Spec } A_1$  est un revêtement étale cyclique dont le groupe de Galois est  $\tilde{\gamma}$  et avec  $\tilde{A}$  et  $A_1$  des anneaux intègres, réguliers et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . La version géométrique du théorème de Čebotarev (cf. [Ser65, Thm. 7]) nous dit alors qu'il existe une infinité de points fermés  $x_1$  de  $\text{Spec } A_1$  tels que la fibre en  $x_1$  de  $\rho$  est un point fermé  $\tilde{x}$  de  $\text{Spec } \tilde{A}$ . Ceci veut dire que si l'on note  $\mathbb{F}$  le corps résiduel en  $x_1$  et  $\mathbb{E}$  le corps résiduel en  $\tilde{x}$ , on a une extension de corps résiduels  $\mathbb{E}/\mathbb{F}$  de groupe de Galois  $\tilde{\gamma}$  et par suite, en notant  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \times_A A_1$  et  $Y$  la  $\mathbb{F}$ -variété  $(\mathcal{X}_1)_{x_1}$ , un isomorphisme

$$H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{\gamma}, \text{Pic } Y_{\mathbb{E}}).$$

De plus, d'après le lemme 6.3(iii) de [San81], on a que  $\text{Pic } Y_{\mathbb{E}} \cong \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}$  car  $\Gamma_{\mathbb{E}}$  agit trivialement sur  $\text{Pic } Y_{\mathbb{F}}$ .

De tout cela on obtient l'isomorphisme

$$H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\gamma, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}),$$

et en particulier, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}}) & \hookrightarrow & H^1(\gamma, \hat{G}^{\text{ab}}) \\ \downarrow \sim & & \parallel \\ H^1(\gamma, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) & \hookrightarrow & H^1(\gamma, \hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}}) \end{array} \quad (3.4.2)$$

où  $\hat{G}^{\text{ab}} = \hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}}$  représente le groupe des caractères (géométriques) de  $G$  (ou encore de  $\mathcal{G}_{x_1}$ ). Par ailleurs, l'action de  $\gamma$  sur  $\hat{G}^{\text{ab}}$  et sur  $\hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}}$  étant induite par celle sur  $\text{Pic } X_{\bar{k}}$  et sur  $\text{Pic } X_{\mathbb{F}}$  respectivement, on voit qu'il s'agit bien de la même action.

Enfin, le morphisme naturel  $f : \Gamma_{\mathbb{F}} \rightarrow \gamma$  issu de cette construction nous donne les morphismes

$$H^1(\gamma, \hat{G}^{\text{ab}}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}}) \quad \text{et} \quad H^1(\gamma, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\mathbb{F}}) = \text{Br}_{\text{al}} Y,$$

où l'action de  $\Gamma_{\mathbb{F}}$  sur  $\hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}}$  correspond bien entendu à celle induite par  $f$  (il en va de même par ailleurs pour l'action sur  $G(\bar{k}) = \mathcal{G}_{x_1}(\bar{\mathbb{F}})$ ). La première flèche est en plus un isomorphisme dès que l'ordre de  $\sigma$  est infini. (car dans ce cas le morphisme  $f$  est lui-même un isomorphisme). De ces morphismes et du diagramme (3.4.2) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}}) & \hookrightarrow & H^1(\gamma, \hat{G}^{\text{ab}}) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}}) & \hookrightarrow & H^1(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}}) \end{array} \quad (3.4.3)$$

Alors, puisque d'une part  $Y$  est une compactification lisse d'un espace homogène sous le  $\mathbb{F}$ -groupe  $\mathcal{G}'_{x_1}$  à stabilisateur  $\mathcal{G}_{x_1}$  à composante connexe neutre réductive et admettant un sous-groupe fini  $\mathcal{H}_{x_1}$  de  $\mathcal{G}_{x_1}^{\text{tor}}$  avec les bonnes propriétés, et d'autre part puisque l'on peut toujours choisir  $x_1$  de façon que l'ordre de  $\mathcal{H}_{x_1}$  soit premier au cardinal de  $\mathbb{F} = \kappa_{x_1}$ , on a enfin le droit d'utiliser le théorème 3.6.

Reprenons alors un élément  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ ,  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  représentant  $\alpha$ ,  $\sigma \in \Gamma_k$  et  $\gamma$  le sous-groupe pro-cyclique de  $\Gamma_k$  engendré par  $\sigma$  comme dans la proposition 3.10. D'après le diagramme commutatif (3.4.3), la restriction  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(\gamma, \hat{G}^{\text{ab}})$  provient de  $H^1(\gamma, \text{Pic } X_{\bar{k}})$  si et seulement si son image  $\tilde{\alpha} \in H^1(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{G}}_{x_1}^{\text{ab}})$  provient de  $H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}}) = \text{Br}_{\text{al}} Y = \text{Br}_{\text{nr,al}}(\mathcal{V}_{x_1})$ . Considérons les cocycles  $a' = a|_{\gamma}$  et  $\tilde{a} = a' \circ f$ , qui représentent respectivement  $\alpha'$  et  $\tilde{\alpha}$ . On voit alors grâce au théorème 3.6 que  $\tilde{\alpha}$  provient de  $H^1(\mathbb{F}, \text{Pic } Y_{\bar{\mathbb{F}}})$  si et seulement si

$$\tilde{a}_s(N_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}}(b)) = 1 \quad \forall b \in \mathcal{G}_{x_1}(\bar{\mathbb{F}}) = G(\bar{k}),$$

où  $q_0$  est le cardinal de  $\mathbb{F}$  et  $s \in \Gamma_{\mathbb{F}}$  désigne le Frobenius. Or, on a clairement

$$\tilde{a}_s(N_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}}(b)) = a'_{\sigma}(N_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}}(b)) = a_{\sigma}(N_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}}(b)),$$

d'où l'on voit qu'il suffit de démontrer que  $N_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}} = N_{\sigma, H}$  pour conclure.

D'après la définition de  $N_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}}$  et de  $N_{\sigma, H}$ , il suffit en fait de démontrer l'égalité  $\varphi_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}} = \varphi_{\sigma, H}$ . En remarquant alors que les actions de  $\gamma$  et  $\Gamma_{\mathbb{F}}$  coïncident, les définitions respectives de  $\varphi_{q_0, \mathcal{H}_{x_1}}$  et  $\varphi_{\sigma, H}$  nous disent que tout ce qu'il faut démontrer est que

$$q(\sigma) \equiv q_0 \pmod{h}, \quad \text{ou encore} \quad \zeta_h^{q_0} = \zeta_h^{q(\sigma)},$$

où  $h$  est l'exposant de  $H$ . Or, cela est vrai de façon évidente car  $\sigma$  agit sur  $\mu_h$  de la même façon que le Frobenius de  $\mathbb{F}$  (on rappelle que  $\mu_h \subset \bar{k}$  par hypothèse), lequel envoie  $\zeta_h$  en  $\zeta_h^{q_0}$  par définition, d'où

$$\zeta_h^{q(\sigma)} = \sigma \zeta_h = {}^s \zeta_h = \zeta_h^{q_0}.$$

Ceci conclut donc la démonstration de la proposition 3.10 et par conséquent celle du théorème 3.9. ☺

On peut maintenant essayer de tirer des conséquences de la formule que l'on vient de développer. Tout comme dans la section précédente, soient  $G, G', H_0$  et  $H$  comme dans l'énoncé du théorème 2.16. Considérons une inclusion  $H \hookrightarrow H'$  avec  $H'$  semi-simple simplement connexe et posons  $W = H \setminus H'$ . Alors  $\text{Br}_{\text{al}} W$  s'identifie à  $H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}})$  et le même théorème 2.16 nous permet de calculer ce groupe, d'où l'on obtient l'analogie du corollaire 3.7.

**Corollaire 3.11.** Soit  $\alpha_H$  l'image de  $\alpha \in \text{Br}_{\text{al}}V = H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  dans  $H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}}) = \text{Br}_{\text{al}}W$ . Alors  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}}V$  si et seulement si  $\alpha_H \in \text{Br}_{\text{nr,al}}W$ . En particulier, on a  $\text{Ker}[H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}}) \rightarrow H^1(k, \hat{H}^{\text{ab}})] \subset \text{Br}_{\text{nr,al}}V$ .  $\square$

On peut ensuite démontrer que l'on peut expliciter une extension finie du corps de base  $k$  sur laquelle toutes les classes du groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  disparaissent. Cela veut dire que l'application de restriction du groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  à cette extension est triviale, ou encore que toutes les classes peuvent être retrouvées par inflation, comme il est explicité dans l'énoncé qui suit.

**Proposition 3.12.** Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.9, soient  $L/k$  une extension finie galoisienne de  $k$  déployant  $H$  et  $G^{\text{tor}}$ ,  $h$  l'exposant de  $H$  et  $\zeta_h \in \bar{k}$  une racine primitive  $h$ -ième de l'unité. Alors on a

$$\text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H^1(L(\zeta_h)/k, (\hat{G}^{\text{ab}})^{\Gamma_{L(\zeta_h)}}).$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \Gamma_{L(\zeta_h)}$ , alors il est évident que  $\sigma$  fixe  $\zeta_h$ , ce qui nous dit que  $q(\sigma) = 1$ . De plus, puisque  $L$  déploie  $H$ ,  $\sigma$  agit de façon triviale sur  $H(\bar{k})$ . On a alors que  $\varphi_\sigma$  se réduit à l'identité et alors  $N_\sigma$  correspond à la projection  $H \rightarrow H^{\text{ab}}$ .

Soient alors  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  un cocycle vérifiant l'égalité (3.4.1),  $\alpha = [a] \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  et  $\beta$  la restriction de  $\alpha$  à  $H^1(L(\zeta_h), \hat{G}^{\text{ab}})$ . Il s'agit de montrer que  $\beta = 0$ , car cela veut dire que  $\alpha$  provient par inflation de  $H^1(L(\zeta_h)/k, (\hat{G}^{\text{ab}})^{\Gamma_{L(\zeta_h)}})$ . Or, le cocycle  $b = a|_{L(\zeta_h)}$  représentant  $\beta$  vérifie  $b_\sigma(\mathfrak{b}) = 1$  pour tout  $\mathfrak{b} \in H^{\text{ab}}(\bar{k})$ , ce qui nous dit que l'image de  $b_\sigma$  dans  $\hat{H}^{\text{ab}}(\bar{k})$  est nulle. Ceci montre que l'image de  $\beta$  dans  $H^1(L(\zeta_h), \hat{H}^{\text{ab}})$  est triviale, i.e.

$$\beta \in \text{Ker}[H^1(L(\zeta_h), \hat{G}^{\text{ab}}) \rightarrow H^1(L(\zeta_h), \hat{H}^{\text{ab}})].$$

Soit maintenant  $S_G$  le noyau de l'application  $G^{\text{ab}} \rightarrow F^{\text{ab}}$ . On affirme qu'il s'agit d'un quotient de  $G^{\text{tor}}$ . En effet, on a le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & D(G^{\text{torf}}) \cap G^{\text{tor}} & \longrightarrow & D(G^{\text{torf}}) & \longrightarrow & D(F) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & G^{\text{tor}} & \longrightarrow & G^{\text{torf}} & \longrightarrow & F \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & S_G & \longrightarrow & G^{\text{ab}} & \longrightarrow & F^{\text{ab}} \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 1 & & 1. \end{array}$$

Une chasse au diagramme nous montre alors que l'application  $G^{\text{tor}} \rightarrow S_G$  est surjective, ce qui nous dit que  $S_G$  est un tore. Or, ce tore est clairement déployé par  $L$ , ce qui nous dit que  $H^1(L(\zeta_h), \hat{S}_G) = 0$ . Considérons alors le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & S_H & \longrightarrow & H^{\text{ab}} & \longrightarrow & F^{\text{ab}} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & S_G & \longrightarrow & G^{\text{ab}} & \longrightarrow & F^{\text{ab}} \longrightarrow 1, \end{array}$$

où  $S_H$  est défini comme le noyau de  $H^{\text{ab}} \rightarrow F^{\text{ab}}$ . En prenant le dual de Cartier des éléments de ce diagramme et en considérant les suites exactes longues de cohomologie associées, on trouve le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^1(L(\zeta_h), \hat{F}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & H^1(L(\zeta_h), \hat{G}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & H^1(L(\zeta_h), \hat{S}_G) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ H^0(L(\zeta_h), \hat{H}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & H^0(L(\zeta_h), \hat{S}_H) & \xrightarrow{\delta} & H^1(L(\zeta_h), \hat{F}^{\text{ab}}) & \longrightarrow & H^1(L(\zeta_h), \hat{H}^{\text{ab}}). \end{array}$$

Puisque  $\beta \in \text{Ker}[H^1(L(\zeta_h), \hat{G}^{\text{ab}}) \rightarrow H^1(L(\zeta_h), \hat{H}^{\text{ab}})]$  et  $H^1(L(\zeta_h), \hat{S}_G) = 0$ , on a que  $\beta$  provient de  $H^1(L(\zeta_h), \hat{F}^{\text{ab}})$  et que son image dans  $H^1(L(\zeta_h), \hat{H}^{\text{ab}})$  est triviale, d'où l'on sait qu'elle est dans l'image de  $\delta$ . Or, puisque  $L(\zeta_h)$  déploie clairement  $\hat{H}^{\text{ab}}$  (car elle déploie  $H$  et  $\mu_h$ ), on a que l'application  $\hat{H}^{\text{ab}}(L(\zeta_h)) \rightarrow \hat{S}_H(L(\zeta_h))$  est surjective, ce qui montre que  $\delta$  est triviale et donc que  $\beta$  l'est aussi, ce qui conclut.  $\square$

Une application immédiate du corollaire 3.11 est le résultat qui suit, donnant une formule cohomologique pour le groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  lorsque le corps de base est un corps local, i.e. une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  pour  $p$  un nombre premier, à l'image de la proposition 2.24.

On dira qu'un  $k$ -groupe fini  $G$  est *non ramifié* s'il existe une extension finie non ramifiée  $k'/k$  telle que  $G_{k'}$  est un  $k'$ -groupe fini *constant*.

**Proposition 3.13.** *Soit  $k$  un corps local de caractéristique 0 et caractéristique résiduelle  $p > 0$ ,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire et  $V = G \setminus G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. On note  $d$  le degré de l'extension déployant le tore  $G^{\text{tor}} = (G^{\text{torf}})^{\circ}$ ,  $n$  l'ordre du groupe fini  $F = G/G^{\circ}$  et  $m = nd$ . Soit  $H_0$  un  $k$ -sous-groupe fini de  $G^{\text{torf}}$  tel que la composée  $H_0 \rightarrow G^{\text{torf}} \rightarrow F$  est surjective et soit  $H$  le sous-groupe (fini aussi) de  $G^{\text{torf}}$  engendré par  $H_0$  et par  $\phi_m^{-1}(H_0 \cap G^{\text{tor}})$ , où  $\phi_m$  désigne la multiplication par  $m$  dans  $G^{\text{tor}}$ . On suppose que  $H$  est non ramifié et que son ordre est premier à  $p$ .*

En identifiant alors  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  vérifiant la propriété suivante :

Pour toute extension finie non ramifiée  $k'$  de  $k$ , l'image  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(k', \hat{G}^{\text{ab}})$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k', G) \rightarrow H^1(k', G^{\text{ab}})]$  pour l'accouplement induit par la dualité locale.

*Remarque.*

Les hypothèses sur  $H$  imposent que  $F$  soit non ramifié et d'ordre  $n$  premier à  $p$  et que  $G^{\text{tor}}$  soit déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$  premier à  $p$ . L'extension  $L/k$  n'a pas besoin par contre d'être non ramifiée, car il est possible que  $H \cap G^{\text{tor}}$  soit déployé par une extension plus petite que  $L(\zeta_n)$  et que celle-ci soit non ramifiée alors que  $L(\zeta_n)$  ne l'est pas. Il est important de remarquer par ailleurs que ces hypothèses sur  $F$  et  $G^{\text{tor}}$ , même en ajoutant le fait que  $L/k$  soit non ramifiée, ne suffisent pas a priori pour assurer que  $H$  soit non ramifié. En d'autres mots, on ne peut pas obtenir un énoncé dépendant seulement de  $G$  et de ses sous-quotients  $F$  et  $G^{\text{tor}}$ , sauf dans des cas très particuliers, comme par exemple lorsque  $G = G^{\text{tor}} \times F$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du corollaire 3.11, de la proposition 2.24 et de la proposition 3.2. En effet, les deux premiers donnent le même énoncé avec  $\text{Im}[H^1(k', H) \rightarrow$

$H^1(k', H^{\text{ab}}]$  au lieu de  $\text{Im}[H^1(k', G) \rightarrow H^1(k', G^{\text{ab}})]$  et c'est la proposition 3.2 qui nous permet de remplacer le premier par le deuxième grâce à la compatibilité des accouplements locaux.  $\square$

Enfin, ces deux dernières propositions (3.12 et 3.13) nous donnent le résultat suivant :

**Corollaire 3.14.** *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.13, à cela près qu'on suppose aussi que l'extension déployant  $G^{\text{tor}}$  est non ramifiée, on a*

$$\text{Br}_{\text{nr,al}}V \subset H_{\text{nr}}^1(k, \hat{G}^{\text{ab}}).$$

$\square$

### 3.5 Existence de sous-groupes finis

Soit maintenant  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . On a vu que pour étudier le groupe de Brauer non ramifié algébrique des espaces homogènes  $V = G \backslash G'$  pour un  $k$ -groupe  $G$  il faut étudier, dans une extension

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1,$$

d'un groupe fini  $F$  par un tore  $T$ , l'existence de sous-groupes finis  $H$  se surjectant sur  $F$ . Dans ce sens, on a la proposition suivante.

**Proposition 3.15.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire, extension d'un groupe fini  $F$  d'ordre  $n$  premier à  $p$  par un tore  $T$  déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$ , aussi premier à  $p$ . Alors il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H$  de  $G$  et un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & {}_{nd}T & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \longrightarrow 1. \end{array} \quad (3.5.1)$$

Avant de passer à la démonstration de cette proposition, voyons en quelques conséquences immédiates. La première apparaît en combinant ce résultat avec la proposition 3.2.

**Corollaire 3.16.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire, extension d'un groupe fini  $F$  d'ordre  $n$  premier à  $p$  par un tore  $T$  déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$ , aussi premier à  $p$ . Alors il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H$  de  $G$  (d'ordre  $n^3d^2$ ) tel que le diagramme suivant est commutatif et à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & {}_{n^2d^2}T & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \longrightarrow 1, \end{array} \quad (3.5.2)$$

et tel que, pour tout corps  $k' \supset k$ , l'application naturelle  $H^1(k', H) \rightarrow H^1(k', G)$  est surjective.

On peut ensuite pousser ce résultat un peu plus loin, pour obtenir une généralisation de [CGR08, Cor. 1.4], donc aussi de [CGR06, Thm. 1.1(a)].

**Corollaire 3.17.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire lisse à composante connexe neutre  $G^\circ$  réductive. Soient  $T$  un  $k$ -tore maximal de  $G^\circ$  et  $W = N_G(T)/T$  le groupe de Weyl de  $G$ . Ce dernier est un  $k$ -groupe fini dont on note  $w$  l'ordre. Soit enfin  $L/k$  une extension déployant  $T$  dont on note  $d$  le degré. On suppose que le produit  $wd$  est premier à  $p$ .*

*Alors, il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H$  de  $G$  (d'ordre  $w^3 d^2$ ) tel que, pour tout corps  $k' \supset k$ , l'application naturelle  $H^1(k', H) \rightarrow H^1(k', G)$  est surjective.*

Ici,  $N_G(T)$  désigne le normalisateur de  $T$  dans  $G$ . Rappelons par ailleurs que l'on a toujours le droit de considérer un  $k$ -tore maximal  $T$  de  $G^\circ$  d'après [SGA3II, XIV, Cor. 3.20]. On voit alors que, lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, les hypothèses n'imposent aucune contrainte sur le groupe  $G$  (à part le fait d'être à composante connexe neutre réductive).

*Démonstration.* Notons  $N = N_G(T)$ . C'est donc une extension du groupe fini  $W$  par le tore  $T$ . Le corollaire 3.16 assure alors l'existence d'un sous-groupe  $H$  d'ordre  $w^3 d^2$  tel que pour tout corps  $k' \supset k$  l'application naturelle  $H^1(k', H) \rightarrow H^1(k', N)$  est surjective.

Il suffit alors pour conclure de montrer que, pour tout corps  $k'/k$ , l'application  $H^1(k', N) \rightarrow H^1(k', G)$  est surjective. Or cela est une conséquence facile de [Ser94, III.§2.2, Lem. 1]. En effet, soit  $\alpha \in H^1(k', G)$  et soit  $a \in Z^1(k', G)$  un cocycle représentant  $\alpha$ . Le tordu  ${}_a G$  de  $G$  par le cocycle  $a$  admet un  $k'$ -tore maximal dans sa composante connexe neutre (toujours d'après [SGA3II, XIV, Cor. 3.20]) et ce tore sera toujours conjugué à  $T$  sur la clôture séparable de  $k'$  d'après [CGP10, Prop. A.2.10]. Le lemme cité nous dit alors que  $\alpha$  appartient à l'image de  $H^1(k', N) \rightarrow H^1(k', G)$ , ce qui conclut.  $\square$

Enfin, on peut expliciter les énoncés des théorèmes 3.4, 3.6 et 3.9 en enlevant l'hypothèse d'existence d'un sous-groupe fini de  $G^{\text{tor}}$ . On retrouve alors les résultats suivants.

**Théorème 3.18.** *Soient  $k$  un corps fini de cardinal  $q$  et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire à composante connexe neutre  $G^\circ$  réductive et tel que  $F = G/G^\circ$  est d'ordre  $n$  premier à  $q$ . Soit  $V = G \setminus G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. On suppose que le tore  $G^{\text{tor}} = (G^{\text{torf}})^\circ$  est déployé par une extension  $L/k$  de degré  $d$  premier à  $q$ . Alors il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H$  de  $G^{\text{torf}}$  tel que l'on a le diagramme (3.5.2) et tel que, en identifiant  $\text{Br}_{\text{al}} V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

- Pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , l'image  $\alpha'$  de  $\alpha$  dans  $H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}})$  est orthogonale au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k'((t)), H) \rightarrow H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})]$  pour l'accouplement entre  $H^1(k'((t)), \hat{G}^{\text{ab}})$  et  $H^1(k'((t)), H^{\text{ab}})$  donné par le cup produit et l'application duale  $\hat{G}^{\text{ab}} \rightarrow \hat{H}^{\text{ab}}$ .
- Pour  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  un cocycle (quelconque) représentant  $\alpha$ , on a

$$a_s(N_{q,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}),$$

où  $N_{q,H}$  désigne la  $q$ -norme sur  $H$ .

De plus, pour tout corps  $k' \supset k$ , l'application naturelle  $H^1(k', H) \rightarrow H^1(k', G^{\text{torf}})$  est surjective.  $\square$

**Théorème 3.19.** *Soient  $k$  un corps de caractéristique 0,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire et  $V = G \setminus G'$  pour un plongement de  $G$  dans  $G'$  semi-simple simplement connexe. Soit  $L/k$*

une extension déployant le tore  $G^{\text{tor}} = (G^{\text{torf}})^{\circ}$ . On note  $d$  le degré de cette extension et  $n$  l'ordre du groupe fini  $F = G/G^{\circ}$ . Alors il existe un  $k$ -sous-groupe fini  $H$  de  $G^{\text{torf}}$  tel que l'on a le diagramme (3.5.2) et tel que, en identifiant  $\text{Br}_{\text{al}}V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , le groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}}V$  de  $V$  est donné par les éléments  $\alpha \in H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  tels que, pour  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  un cocycle (quelconque) représentant  $\alpha$ , on a

$$a_{\sigma}(N_{\sigma,H}(b)) = 1 \quad \forall b \in H(\bar{k}), \forall \sigma \in \Gamma_k,$$

où  $N_{\sigma,H}$  désigne la  $\sigma$ -norme sur  $H$ . De plus, pour tout corps  $k' \supset k$ , l'application naturelle  $H^1(k', H) \rightarrow H^1(k', G^{\text{torf}})$  est surjective.  $\square$

Ces résultats ne méritant pas de démonstration, on conclut cette section avec la preuve de la proposition 3.15.

*Démonstration de la proposition 3.15.* De la suite exacte de  $k$ -groupes

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1,$$

on déduit la suite exacte de  $\Gamma_k$ -groupes

$$1 \rightarrow T(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k}) \rightarrow F(\bar{k}) \rightarrow 1,$$

et puisque  $T(\bar{k})$  est commutatif, on a une action de  $F(\bar{k})$  sur  $T(\bar{k})$  par conjugaison. Or, l'équivariance de cette action par rapport aux actions de  $\Gamma_k$  sur  $F(\bar{k})$  et  $T(\bar{k})$  induit une action continue du groupe profini  $F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  sur  $T(\bar{k})$ . En effet, tout élément  $h \in F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  s'écrit de façon unique de la forme  $h = \sigma_h f_h$  avec  $\sigma_h \in \Gamma_k$  et  $f_h \in F(\bar{k})$ , d'où l'on peut définir l'action de  $F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  sur  $T(\bar{k})$  tout simplement en posant

$$h \cdot t := \sigma_h(f_h \cdot t),$$

pour  $h \in F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  et  $t \in T(\bar{k})$ . L'équivariance des actions de  $F(\bar{k})$  et  $\Gamma_k$ , exprimée par la formule

$$\sigma(f \cdot t) = \sigma f \cdot \sigma t, \quad \forall f \in F(\bar{k}), \sigma \in \Gamma_k, t \in T(\bar{k}),$$

nous permet alors de déduire (après un petit calcul) que l'action de  $F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  est bien définie.

Considérons alors le groupe  $G(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  par rapport à l'action naturelle de  $\Gamma_k$  sur  $G(\bar{k})$ . Puisque  $T(\bar{k})$  est stable par cette action, on voit qu'il est un sous-groupe distingué de  $G(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$ , ce qui nous donne l'extension de groupes

$$1 \rightarrow T(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k \rightarrow F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k \rightarrow 1,$$

où l'action de  $F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  sur  $T(\bar{k})$  par conjugaison correspond précisément à celle décrite ci-dessus. Cette extension représente une classe  $\alpha \in H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k}))$ .<sup>1</sup> Or, on sait que la composition des flèches

$$H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(\Gamma_k, T(\bar{k})) \xrightarrow{\text{Cor}} H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})),$$

1. On remarquera que,  $F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  étant un groupe profini, on traite alors  $T(\bar{k})$  comme un  $(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k)$ -module discret. Le groupe  $G(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  a alors comme base de voisinages de l'identité les sous-groupes de la forme  $\{1\} \rtimes \Delta$  avec  $\Delta$  ouvert dans  $\Gamma_k$ . Il est alors facile de voir aussi que dans la suite exacte la flèche de gauche est continue et fermée et celle de droite est continue et ouverte, et ce sont précisément ces extensions qui sont classifiées par le groupe  $H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k}))$ , cf. [NSW08, Thm. 1.2.4].

correspond à la multiplication par  $n$  dans  $H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k}))$ . D'autre part, on voit facilement que la restriction de  $\alpha$  à  $H^2(\Gamma_k, T(\bar{k}))$  correspond à l'extension triviale  $T(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$  (on rappelle que l'extension représentant  $\alpha$  a été construite à partir du groupe  $G(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$ ), ce qui nous dit que  $n\alpha = 0$  dans  $H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k}))$ . Si l'on considère alors la suite exacte de  $F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$ -groupes

$$1 \rightarrow {}_nT(\bar{k}) \rightarrow T(\bar{k}) \xrightarrow{\cdot n} T(\bar{k}) \rightarrow 1,$$

et la suite exacte longue de cohomologie qui lui est associée,

$$H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, {}_nT(\bar{k})) \rightarrow H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) \xrightarrow{\cdot n} H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})),$$

on voit que la classe  $\alpha$  provient de  $H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, {}_nT(\bar{k}))$ .

Maintenant, considérons le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & {}_{nd}T(\bar{k}) & \xrightarrow{i} & T(\bar{k}) & \xrightarrow{\cdot nd} & T(\bar{k}) \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow i & & \parallel & & \uparrow \cdot d \\ 1 & \longrightarrow & {}_nT(\bar{k}) & \xrightarrow{i} & T(\bar{k}) & \xrightarrow{\cdot n} & T(\bar{k}) \longrightarrow 1, \end{array}$$

où  $i$  désigne les inclusions évidentes. En considérant en même temps ces groupes comme des  $(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k)$ -modules et par restriction comme des  $\Gamma_k$ -modules, on obtient un diagramme commutatif de suites exactes longues de cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^1(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, {}_{nd}T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) \\ & & \uparrow \cdot d & & \uparrow & & \parallel \\ H^1(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, {}_nT(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(\Gamma_k, T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_k, {}_{nd}T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_k, T(\bar{k})) \\ & & \uparrow \cdot d & & \uparrow & & \parallel \\ H^1(\Gamma_k, T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_k, {}_nT(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_k, T(\bar{k})) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_k, T(\bar{k})), \end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont des applications de restriction. À partir de ce qui a déjà été dit, on fait la chasse au diagramme suivante. La classe  $\alpha \in H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, T(\bar{k}))$  dont on est parti provient d'une classe  $\alpha_n \in H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, {}_nT(\bar{k}))$ , dont l'image  $\beta_n \in H^2(\Gamma_k, {}_nT(\bar{k}))$  est envoyé en 0 dans  $H^2(\Gamma_k, T(\bar{k}))$ , d'où l'on sait qu'elle provient d'une classe  $\gamma \in H^1(\Gamma_k, T(\bar{k}))$ . Or, puisque  $T$  est déployé par  $L$ , on sait que la restriction de  $\gamma$  à  $H^1(\Gamma_L, T(\bar{k}))$  est triviale et l'argument classique de restriction-corestriction nous dit alors que  $\gamma$  est de  $d$ -torsion. On voit alors que l'image de  $\gamma$  après multiplication par  $d$  est 0, ce qui nous dit que l'image  $\beta_{nd} \in H^2(\Gamma_k, {}_{nd}T(\bar{k}))$  de  $\beta_n$  est triviale. Si l'on note alors  $\alpha_{nd} \in H^2(F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k, {}_{nd}T(\bar{k}))$  l'image de  $\alpha_n$ , on voit qu'elle relève aussi  $\alpha$  et que sa restriction à  $H^2(\Gamma_k, {}_{nd}T(\bar{k}))$  est triviale. Ceci se résume dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \alpha_{nd} & \longrightarrow & \alpha \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \alpha_n & \longrightarrow & \alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ d\gamma = 0 & \longrightarrow & \beta_{nd} = 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \gamma & \longrightarrow & \beta_n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$



exacte). Or, l'action de  $\Gamma_k$  sur  $G(\bar{k})$  se définit via le morphisme naturel  $\pi : \text{SAut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G(\bar{k}))$ . On voit alors que l'on a un morphisme

$$\phi : \Gamma_k \xrightarrow{\pi \circ s} \text{Aut}(G(\bar{k})) \rightarrow \text{Aut}(H(\bar{k})).$$

Si l'on rappelle maintenant que, puisque  $\bar{H}$  est *fini*, on a  $\text{Aut}(H(\bar{k})) = \text{Aut}_{\bar{k}}(\bar{H})$  et  $\text{SAut}(\bar{H}) \cong \text{Aut}_{\bar{k}}(\bar{H}) \times \Gamma_k$  (cela découle du fait que l'on a une  $k$ -forme canonique de  $\bar{H}$  qui est le  $k$ -groupe constant associé au groupe fini abstrait  $\bar{H}(\bar{k})$ ), on voit que l'on obtient une section  $s'$  de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{Aut}_{\bar{k}}(\bar{H}) \longrightarrow \text{SAut}(\bar{H}) \longrightarrow \Gamma_k,$$

$\xleftarrow{\quad s' \quad}$

tout simplement en posant  $s' = \phi \circ \text{id}$ . Cette section correspond à la donnée d'une  $k$ -forme  $H$  de  $\bar{H}$  dont l'action de  $\Gamma_k$  induite sur les  $\bar{k}$ -points correspond précisément à celle induite par restriction de l'action de  $\Gamma_k$  sur  $G(\bar{k})$  car toutes les deux sont définies via  $\phi$ . Il est alors évident que pour tout  $\sigma \in \Gamma_k$ , l'automorphisme  $\sigma$ -semi-algébrique défini par  $\sigma$  sur  $G_{\bar{k}}$  induit bien l'automorphisme  $\sigma$ -semi-algébrique sur  $\bar{H}$  donné par  $s'(\sigma)$  et qu'alors l'inclusion  $H_{\bar{k}} \hookrightarrow G_{\bar{k}}$  provient bien d'un  $k$ -morphisme de groupes algébriques. ☺

*Remarque.*

Lorsque le corps de base est parfait et de dimension cohomologique  $\leq 1$ , comme c'est le cas des corps finis et des corps quasi-finis en caractéristique 0, on peut même démontrer que le sous-groupe fini  $H$  peut être obtenu en prenant seulement la  $n$ -torsion du tore  $T$ . En effet, on peut toujours trouver une extension

$$1 \rightarrow {}_n T(\bar{k}) \rightarrow \bar{E} \rightarrow F(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k \rightarrow 1,$$

avec une inclusion compatible dans  $G(\bar{k}) \rtimes \Gamma_k$ . En considérant alors la préimage  $\bar{H}$  de  $F(\bar{k})$  dans  $\bar{E}$ , cela nous donne l'extension

$$1 \rightarrow \bar{H} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \Gamma_k \rightarrow 1,$$

ce qui nous dit que  $\Gamma_k$  agit extérieurement sur  $\bar{H}$ . Or, puisque  $k$  est parfait et de dimension cohomologique  $\leq 1$ , le théorème dans [Spr66, 3.5] nous dit que cette action extérieure provient d'une structure de  $k$ -groupe. Cette structure n'est pas nécessairement compatible avec celle de  $G$ , mais après une chasse au diagramme et un argument de torsion on peut démontrer que, en tordant  $G$  par un cocycle dont la classe dans  $H^1(k, G)$  est *triviale*, l'inclusion de  $\bar{H}$  dans  $G_{\bar{k}}$  descend en un  $k$ -morphisme de groupes. Ensuite, en revenant en arrière par la torsion, l'image de ce  $k$ -sous-groupe du tordu correspond au sous-groupe fini voulu.

### 3.6 Application : obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible

Pour conclure ce chapitre, on donne une application de cette formule à l'obstruction de Brauer-Manin pour l'approximation faible correspondant à l'analogue de ce qui a été fait dans la section 2.9. Il s'agit de montrer que l'obstruction associée au groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  ne prend pas en compte ce qui se passe aux places réelles, ce qu'on fait en profitant du fait que sur  $\mathbb{R}$  la formule devient assez simple à raison de la petitesse de son groupe de Galois absolu.

**Proposition 3.21.** *Soient  $k = \mathbb{R}$ ,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et  $V = G \setminus G'$ . En identifiant  $\text{Br}_{\text{al}} V$  avec  $H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$ , tout élément  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V$  est orthogonal au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G^{\text{ab}})]$  de  $H^1(k, G^{\text{ab}})$ .*

*Remarque.*

Ce résultat nous dit en particulier que si l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe  $\text{Br}_{\text{nr,al}}$  s'avère être la seule pour  $V$ , alors  $V$  vérifie l'approximation réelle, comme il sera explicité dans le corollaire 3.23 ci-dessous. Pris dans l'autre sens, ceci veut dire aussi qu'un espace homogène comme ci-dessus ne vérifiant pas l'approximation réelle fournirait un exemple de variété où l'obstruction de Brauer-Manin n'est pas la seule (supposant qu'il n'y ait pas d'obstructions géométriques).

*Démonstration.* On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G^{\text{ab}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{\text{torf}} & \longrightarrow & (G^{\text{torf}})^{\text{ab}}, \end{array}$$

où l'on remarque que le noyau de la flèche verticale de droite est un groupe abélien unipotent, d'où l'isomorphisme

$$H^1(k, G^{\text{ab}}) \xrightarrow{\sim} H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}}).$$

On en déduit qu'il suffit de montrer que tout élément  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V \subset H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  est orthogonal au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k, G^{\text{torf}}) \rightarrow H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}})]$  de  $H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}})$  (on remarque que  $(G^{\text{torf}})^{\text{ab}}$  est le dual de  $\hat{G}^{\text{ab}}$  et donc cette orthogonalité a bien un sens).

Soit  $\sigma$  l'élément non nul de  $\Gamma_k$  et soit  $H$  le sous-groupe fini de  $G^{\text{torf}}$  donné par le théorème 3.19. Il est facile de voir que l'on a les isomorphismes d'ensembles pointés (resp. groupes)

$$\begin{aligned} Z^1(k, H) &\xrightarrow{\sim} H^{\varphi_\sigma}, & b &\mapsto b_\sigma \\ Z^1(k, H^{\text{ab}}) &\xrightarrow{\sim} (H^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}, & \mathfrak{b} &\mapsto \mathfrak{b}_\sigma. \end{aligned}$$

Soit  $g \in H^{\varphi_\sigma}$ . Puisque  $\varphi_\sigma(g) = g$ , on a que  $N_\sigma(g) = \bar{g} \in H^{\text{ab}}$ . En particulier, on voit que l'image de  $N_\sigma$  contient l'image de  $Z^1(k, H)$  dans  $Z^1(k, H^{\text{ab}})$ .

Soit alors  $\beta \in H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}})$  un élément dans  $\text{Im}[H^1(k, G^{\text{torf}}) \rightarrow H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}})]$ . La surjectivité de  $H^1(k, H) \rightarrow H^1(k, G^{\text{torf}})$  nous dit que l'on peut représenter  $\beta$  par un cocycle  $\mathfrak{b}$  à valeurs dans  $H^{\text{ab}}$  et tel que  $\mathfrak{b}_\sigma \in N_\sigma(H)$ . Pour  $\alpha \in \text{Br}_{\text{nr,al}} V$ , soit  $a \in Z^1(k, \hat{G}^{\text{ab}})$  un cocycle représentant  $\alpha$ . On sait alors d'après le théorème 3.19 que l'on a  $a_\sigma(\mathfrak{b}_\sigma) = 1$ . D'autre part, on sait que  $\alpha \cup \beta \in H^2(k, \mu_{n^3 d^2}) \subset \text{Br } k$  est représenté par un cocycle  $c$  tel que

$$c_{\sigma, \sigma} = a_\sigma(\sigma \mathfrak{b}_\sigma) = a_\sigma(\mathfrak{b}_\sigma^{-1}) = (a_\sigma(\mathfrak{b}_\sigma))^{-1} = 1,$$

car on rappelle que  $\mathfrak{b}_\sigma \in (H^{\text{ab}})^{\varphi_\sigma}$  et alors  $\sigma \mathfrak{b}_\sigma = \mathfrak{b}_\sigma^{-1}$ . Il est clair alors que  $\alpha \cup \beta$  est nul, ce qui nous dit que  $\alpha$  est orthogonal au sous-ensemble  $\text{Im}[H^1(k, G^{\text{torf}}) \rightarrow H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}})]$  de  $H^1(k, (G^{\text{torf}})^{\text{ab}})$ . ◻

Soit maintenant  $k$  un corps de nombres et  $V = G \setminus G'$  comme toujours. Ce dernier résultat et la proposition 3.13 nous donnent le résultat annoncé, sous la forme plus générale suivante.

**Corollaire 3.22.** *Soient  $k$  un corps de nombres,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire plongé dans  $G'$  semi-simple simplement connexe et  $V = G \setminus G'$ . Soit  $H$  le sous-groupe fini de  $G^{\text{tor}}$  donné par le théorème 3.19. Soit  $L/k$  une extension déployant  $H$ . Soit enfin  $S$  la réunion de l'ensemble des places (non archimédiennes) ramifiées pour l'extension  $L/k$  avec l'ensemble des places divisant l'ordre de  $H$  et soit  $T = \Omega_k \setminus S$ . Alors la projection*

$$\left( \prod_{\Omega_k} V(k_v) \right)^{\text{Br}_{\text{nr},\text{al}}} \rightarrow \prod_{v \in T} V(k_v),$$

*est surjective.*

On rappelle que l'ensemble  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr},\text{al}}}$  correspond aux éléments de  $\prod_{\Omega_k} V(k_v)$  qui sont orthogonaux au groupe  $\text{Br}_{\text{nr},\text{al}} V$  pour l'accouplement de Brauer-Manin (cf. la section I de l'introduction de cette thèse ou encore [Sko01, §5.2]).

*Remarque.*

Si l'on note  $d$  le degré de l'extension déployant  $G^{\text{tor}}$  et  $n$  le cardinal de  $F$ , alors les places divisant l'ordre de  $H$  sont celles qui divisent le produit  $nd$  puisque le groupe  $H$  donné par le théorème 3.19 est en fin du compte celui du corollaire 3.16. L'ensemble  $S$  est alors composé des places non archimédiennes ramifiées pour  $L/k$  et de celles au dessus d'un premier divisant  $nd$ . Par ailleurs, si l'on est obligé d'introduire le sous-groupe fini  $H$  dans l'énoncé, c'est parce qu'on n'a aucun contrôle sur l'extension déployant  $H$ . En effet, si l'on note  $k_F$  et  $k_{\text{tor}}$  les extensions déployant  $F$  et la  $n^2 d^2$ -torsion de  $G^{\text{tor}}$ , rien ne nous dit que la composée de  $k_F$  et  $k_{\text{tor}}$  déploie l'extension  $H$  de ces deux groupes finis.

Enfin, si l'on note  $\Omega_\infty$  l'ensemble des places archimédiennes de  $k$  et l'on remarque que  $\Omega_\infty \subset T$ , on obtient en particulier :

**Corollaire 3.23.** *Sous les hypothèses du corollaire 3.22, si l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe  $\text{Br}_{\text{nr},\text{al}}$  est la seule pour  $V$ , alors  $V$  vérifie l'approximation réelle. En d'autres mots, si  $V(k)$  est dense dans  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr},\text{al}}}$ , alors  $V(k)$  est dense dans  $\prod_{\Omega_\infty} V(k_v)$ , où  $\Omega_\infty$  désigne l'ensemble des places archimédiennes de  $k$ .  $\square$*

*Démonstration du corollaire 3.22.* Il suffit de noter que, tout comme dans la démonstration du corollaire 2.39, l'ensemble  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr},\text{al}}}$  est l'ensemble de familles de points  $(P_v)_{\Omega_k}$  telles que

$$\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\alpha_v \cup [Z](P_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \forall \alpha \in \text{Br}_{\text{nr},\text{al}} V \subset H^1(k, \hat{G}^{\text{ab}}),$$

où  $\text{inv}_v$  est l'application canonique  $\text{Br } k_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  donnée par la théorie du corps de classes et  $[Z](P_v) \in H^1(k, G^{\text{ab}})$  est la classe du  $k_v$ -torseur sous  $G^{\text{ab}}$  obtenu à partir du toseur  $Z = D(G) \setminus G' \rightarrow V$  sous  $G^{\text{ab}}$  et du  $k_v$ -point  $P_v \in V(k_v)$ .

En effet, on voit alors immédiatement à partir des propositions 3.21 et 3.13 qu'on a  $\alpha_v \cup [Z](P_v) = 0$  pour toute place  $v \in T$ . Pour les places archimédiennes c'est évident d'après la première de ces propositions, tandis que pour toute telle place non archimédienne on a que  $H$  est non ramifié en tant que  $k_v$ -groupe et son cardinal est premier à la caractéristique résiduelle, ce qui nous donne le droit d'utiliser la deuxième. Il est alors évident que pour  $(\beta_v)_T \in \prod_{v \in T} V(k_v)$ , l'élément  $(0)_S \times (\beta_v)_T \in \prod_{\Omega_k} V(k_v)$  appartient à  $(\prod_{\Omega_k} V(k_v))^{\text{Br}_{\text{nr},\text{al}}}$ , ce qui conclut.  $\square$

### 3.A Appendice : Une remarque de Colliot-Thélène

Pendant la rédaction de cette thèse, Colliot-Thélène nous a fait remarquer que l'on peut démontrer le résultat suivant (cf. [CT12]) :

**Proposition 3.24** (Colliot-Thélène). *Soient  $k$  un corps de caractéristique 0,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire non nécessairement connexe et  $r_i : G \hookrightarrow G'_i$  des plongements de  $G$  dans des  $k$ -groupes semi-simples simplement connexes. Alors*

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(G \setminus G'_1) \cong \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(G \setminus G'_2).$$

La démonstration de ce résultat utilise notamment le théorème 4.2 de [CTK06], mais elle ne profite pas de toute sa puissance. On modifie alors un peu ici le raisonnement de Colliot-Thélène (en suivant pourtant les mêmes lignes) pour démontrer le résultat suivant :

**Proposition 3.25.** *Soient  $k$  un corps de caractéristique 0,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire non nécessairement connexe et  $r_i : G \rightarrow G'_i$  des morphismes de groupes algébriques, à noyau simplement connexe, dans des  $k$ -groupes semi-simples simplement connexes. Alors*

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(r_1(G) \setminus G'_1) \cong \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(r_2(G) \setminus G'_2).$$

On rappelle qu'un  $k$ -groupe algébrique linéaire  $H$  est simplement connexe si et seulement s'il est une extension d'un groupe semi-simple simplement connexe par un groupe unipotent. On pourrait demander de façon équivalente que  $\bar{k}[H]^* = \bar{k}^*$  et que  $\mathrm{Pic} H_{\bar{k}} = 0$ .

On commence donc la démonstration avec le lemme suivant :

**Lemme 3.26.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. Soient  $G'$  un  $k$ -groupe semi-simple simplement connexe,  $V$  un espace homogène de  $G'$  à stabilisateur géométrique  $\bar{H}$  simplement connexe et  $X$  une  $k$ -variété projective lisse géométriquement connexe  $k$ -birationnelle à  $V$ . Alors les flèches naturelles*

$$\mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} V \quad \text{et} \quad \mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} X,$$

sont des isomorphismes.

*Démonstration.* D'après ce qui a été dit dans les rappels de la section 3.2, on a  $\bar{k}[V]^* = \bar{k}^*$  et  $\mathrm{Pic} V_{\bar{k}} = \hat{H} = 0$ , d'où la suite exacte donnée par [San81, Lem. 6.3 (i)] nous dit que  $\mathrm{Br} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_1 V$ . Il suffit alors pour avoir  $\mathrm{Br} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br} V$  de démontrer que  $\mathrm{Br} V_{\bar{k}} = 0$ , ce qui est évident d'après [San81, Prop. 6.10] et le fait que  $\mathrm{Pic} \bar{H} = 0$  et  $\mathrm{Br} G'_{\bar{k}} = 0$  car  $G'$  est semi-simple simplement connexe.

Maintenant, il existe un ouvert  $U$  non vide de  $V$  et un  $k$ -morphisme birationnel  $U \rightarrow X$ . Puisque  $X$  est projective et  $V$  lisse, on peut supposer que  $U$  contient tous les points de codimension 1 de  $V$ , donc par pureté du groupe de Brauer (cf. [CT95, Cor. 3.4.2]), la restriction  $\mathrm{Br} V \rightarrow \mathrm{Br} U$  et par suite la flèche  $\mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} U$  sont des isomorphismes. D'autre part, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br} k & \longrightarrow & \mathrm{Br} X \\ \sim \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Br} U & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k(X)), \end{array}$$

où les flèches  $\hookrightarrow$  désignent des applications injectives (cf. [CTS07, Thm. 5.11]). Il est facile alors d'en déduire que l'on a  $\text{Br } k \xrightarrow{\sim} \text{Br } X$ .  $\square$

Avec ce lemme on peut montrer la proposition suivante, où intervient enfin le théorème 4.2 de [CTK06] comme on l'avait annoncé.

**Proposition 3.27.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. Soient  $X$  et  $Y$  deux  $k$ -variétés projectives, lisses, géométriquement connexes et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant dont la fibre générique  $X_\eta/k(Y)$  est  $k(Y)$ -birationnelle à un espace homogène d'un  $k(Y)$ -groupe  $G'$  semi-simple simplement connexe à stabilisateur simplement connexe. Alors :*

1. *En tout point  $y$  de codimension 1 de  $Y$  la fibre  $X_y/k(y)$  contient une composante connexe géométriquement intègre de multiplicité 1.*
2. *L'application  $f^* : \text{Br } Y \rightarrow \text{Br } X$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Dans le cas où  $X$  contient un ouvert  $k(Y)$ -isomorphe à un espace homogène de  $G'$  à stabilisateur simplement connexe, le premier point de l'énoncé est une conséquence du théorème 4.2 de [CTK06]. En effet, il suffit de considérer l'anneau de valuation discrète  $A_y$  de corps de fractions  $k(Y)$  correspondant à  $y$  (son spectre c'est la réunion de  $\eta$  et  $y$  en tant que schéma), puis de considérer la fibre  $X_{A_y}$  sur  $A_y$ . La proposition 3.9(b) de [CT11] nous permet alors de démontrer le cas général.

Pour le deuxième point, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Br } Y & \longrightarrow & \text{Br } X & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ \text{Br } (k(Y)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Br } X_\eta & \hookrightarrow & \text{Br } (k(X)), \end{array}$$

où les flèches  $\hookrightarrow$  désignent des injections (cf. [CTS07, Thm. 5.11]) et celle d'en bas à gauche est un isomorphisme d'après le lemme 3.26. Il est facile de voir alors que pour  $\alpha \in \text{Br } X$  il existe un unique  $\beta \in \text{Br } (k(Y))$  ayant la même image que  $\alpha$  dans  $\text{Br } (k(X))$ . Il suffit alors de montrer que  $\beta \in \text{Br } Y$  pour conclure. Or, d'après [CT11, §4] et le fait que  $X_y$  admet une composante connexe géométriquement intègre de multiplicité 1, le résidu de  $\beta$  au point  $y$  (i.e. son image par l'application  $\delta_{A_y} : \text{Br } k(Y) \rightarrow H^1(k(y), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ) est trivial. Ceci étant vrai pour tout point  $y$  de  $Y$  de codimension 1, le théorème de pureté de Grothendieck (cf. [CT95, Thm. 4.1.1, Prop. 4.2.3]) nous dit que  $\beta$  provient bien de  $\text{Br } Y$ , ce qui conclut.  $\square$

Enfin, pour conclure cet appendice, on passe à la démonstration de la proposition 3.25.

*Démonstration de la proposition 3.25.* Quitte à plonger  $G$  dans un troisième groupe  $G'_3$  semi-simple simplement connexe et à comparer respectivement  $V_1$  et  $V_2$  avec  $V_3 := G \backslash G'_3$ , on peut se restreindre au cas où l'un des  $r_i$ , disons  $r_1$ , est à noyau trivial. Soit alors  $H$  le noyau de  $r_2$ . On considère le plongement  $r : G \hookrightarrow G'_1 \times G'_2$  induit par  $r_1$  et  $r_2$ . La  $k$ -variété  $V = G \backslash (G'_1 \times G'_2)$  se projette sur  $V_1 = r_1(G) \backslash G'_1$  et sur  $V_2 = r_2(G) \backslash G'_2$ . La première projection fait de  $V$  un espace principal homogène sous  $G'_2$  sur  $V_1$ , tandis que la deuxième fait de  $V$  un espace homogène sous  $G'_1$  sur  $V_2$  à stabilisateur  $r_1(H)$ , donc simplement connexe. Il existe des  $k$ -compactifications lisses  $X, X_1$  et  $X_2$  de  $V, V_1$  et  $V_2$  respectivement et des morphismes  $X \rightarrow X_1$  et  $X \rightarrow X_2$  étendant  $V \rightarrow V_1$  et  $V \rightarrow V_2$  (cf. par exemple [BrKu00, 1.2.2]). Il suffit alors d'appliquer deux

fois la proposition 3.27 pour trouver des isomorphismes  $\text{Br } X_1 \xrightarrow{\sim} \text{Br } X$  et  $\text{Br } X_2 \xrightarrow{\sim} \text{Br } X$ , ce qui conclut.  $\square$

## Chapitre 4

# Approximation faible et principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble

### 4.1 Introduction

Soit  $K$  un corps global, i.e. un corps de nombres ou le corps de fonctions d'une courbe  $C$  sur un corps fini. Dans le cadre des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes, l'approximation faible et le principe de Hasse sont deux propriétés qui ont été vérifiées, par exemple, pour les espaces principaux homogènes sous un groupe semi-simple et simplement connexe, et cela depuis déjà presque un demi-siècle. Pour les espaces homogènes à stabilisateur non trivial, ou même pour les espaces principaux homogènes sous les tores, on connaît cependant des exemples ne vérifiant pas le principe de Hasse, ainsi que des exemples ayant des points rationnels mais ne vérifiant pas l'approximation faible.

Or, depuis la mise en évidence de l'obstruction de Brauer-Manin pour le principe de Hasse et pour l'approximation faible, introduites respectivement par Manin et par Colliot-Thélène et Sansuc, on ne connaît pas d'espace homogène dont le défaut de ces propriétés ne soit pas expliqué par ces obstructions. La question naturelle à se poser alors est de savoir si cette obstruction est la seule dans les deux cas. Dans [Brv96], Borovoi a démontré que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les espaces homogènes sous un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateur connexe, ou encore à stabilisateur abélien en supposant que la partie semi-simple du groupe ambiant est simplement connexe. La question générale reste pourtant totalement ouverte.

Si l'on considère le cas "opposé" de celui des stabilisateurs connexes, i.e. celui des stabilisateurs finis, on ne connaît que quelques cas particuliers, comme le cas abélien chez Borovoi déjà mentionné, ou les travaux de Harari et Demarche sur l'approximation faible pour des quotients de la forme  $G \backslash \mathrm{SL}_n$  pour certains  $G$  finis constants et non abéliens (c.f. [Har07] et [Dem10]). Le résultat principal dans cette direction est cependant celui de Neukirch dans [Neu79], lequel a inspiré la rédaction de ce texte.

Lorsqu'on veut considérer des stabilisateurs finis, on peut le faire sous différents groupes ambiants. Or, du moins pour l'approximation faible, la question est triviale lorsqu'on considère un groupe ambiant unipotent et la réponse est déjà connue pour un groupe ambiant torique (car la question se ramène trivialement aux espaces principaux homogènes), le cas intéressant étant alors celui des groupes semi-simples. De plus, si l'on considère un  $K$ -groupe fini  $G$  plongé dans un groupe  $G'$  semi-simple et si l'on note  $\rho : \tilde{G}' \rightarrow G'$  le revêtement universel de  $G'$ , il est aisé de voir que l'on a un isomorphisme canonique entre les variétés  $\tilde{V} := \rho^{-1}(G) \backslash \tilde{G}'$  et  $V := G \backslash G'$  induit par  $\rho$ . Le noyau de  $\rho$  étant fini et central, le groupe  $\rho^{-1}(G)$  est alors un groupe fini et une extension centrale de  $G$ . Ainsi, on voit que l'on peut se restreindre à étudier le cas des groupes ambiants semi-simples simplement connexes comme il a déjà été fait par Borovoi, Demarche et Harari dans leurs travaux.

Le but de ce texte est donc de démontrer un résultat d'approximation faible pour des espaces homogènes  $V := G \backslash G'$  avec  $G'$  semi-simple simplement connexe et  $G$  fini et résoluble (i.e.  $G(\bar{K})$  étant un groupe résoluble). On démontre notamment le résultat suivant :

**Théorème 4.1** (Conséquence du théorème 4.8). *Soient  $K$  un corps global et  $G$  un  $K$ -groupe fini résoluble d'exposant  $n$  premier à la caractéristique de  $K$ . On suppose qu'il existe une extension finie galoisienne  $K'/K$  déployant  $G$  et telle que, si l'on note  $m(K')$  le cardinal de l'ensemble des racines de l'unité contenues dans  $K'$ , on a  $(m(K'), n) = 1$ . Soit  $V = G \backslash G'$  pour un  $K$ -plongement  $G \rightarrow G'$  avec  $G'$  un  $K$ -groupe semi-simple simplement connexe. Alors  $V$  vérifie l'approximation faible.*

Ce théorème améliore le résultat de Neukirch dans [Neu79], corollaire de ses travaux sur le problème du plongement, qui montre le cas particulier du théorème ci-dessus pour les groupes constants. Il simplifie aussi la démonstration de ce cas particulier car, le problème du plongement étant d'une nature différente de celle de l'approximation faible, la preuve de Neukirch devient par conséquent assez complexe. Il est aussi intéressant de remarquer que ce résultat entraîne la trivialité de l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible pour ces espaces. En fait, on peut même démontrer via la formule du théorème 2.16, ou plus explicitement via la proposition 2.36 qui en est une conséquence, que ces espaces homogènes ont un groupe de Brauer non ramifié algébrique  $\text{Br}_{\text{nr,al}} V$  trivial (cf. aussi [CT14, Cor. 5.7] pour le cas particulier où le stabilisateur  $G$  est constant).

On voit aussi que les hypothèses faites sur les racines de l'unité contenues dans le corps  $K'$  imposent que  $G$  soit toujours un groupe d'ordre impair, car tout corps global de caractéristique différente de 2 contient  $\mu_2 = \{1, -1\}$ , et en caractéristique 2 on évite de prendre des groupes d'ordre pair. On en déduit que le fait de demander que  $G$  soit résoluble est en un certain sens superflu, vu que l'on sait d'après le théorème de Feit et Thompson que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble. Ainsi, le résultat de Neukirch entraînait déjà l'approximation faible pour tout  $\mathbb{Q}$ -groupe fini  $G$  constant d'ordre impair, et la généralisation que l'on présente ici entraîne l'approximation faible, par exemple, dès que  $G$  est d'ordre impair et déployé par une extension  $K'/K$  ayant une place réelle, car dans ce cas on a bien  $\mu(K') = \mu_2$ .

On rappelle que pour toute  $K$ -variété  $V$  on a un plongement diagonal

$$V(K) \hookrightarrow \prod_{v \in \Omega_K} V(K_v),$$

de ses  $K$ -points dans le produit sur  $\Omega_K$  de ses  $K_v$ -points, où  $\Omega_K$  est l'ensemble des places de  $K$  et  $K_v$  est le complété de  $K$  par rapport à la place  $v$ . L'ensemble  $\prod_{v \in \Omega_K} V(K_v)$  peut être muni de la topologie produit, où chacun des  $V(K_v)$  est muni de la topologie  $v$ -adique. On dit alors que  $V$  vérifie l'approximation faible si l'image de l'ensemble  $V(K)$  par ce plongement est dense dans l'ensemble  $\prod_{v \in \Omega_K} V(K_v)$ . Dans le cas où  $V(K) \neq \emptyset$ , cela revient à demander que, pour tout ensemble fini  $S$  de places de  $K$ , l'ensemble  $V(K)$  soit dense dans le produit  $\prod_{v \in S} V(K_v)$ . Or, dans le cadre des espaces homogènes sous un groupe  $G'$  semi-simple simplement connexe cette propriété admet une traduction cohomologique : l'approximation faible pour la variété  $V = G \backslash G'$  considérée dans le théorème 4.1 est en fait équivalente à la surjectivité de l'application

$$H^1(K, G) \rightarrow \prod_{v \in S} H^1(K_v, G), \quad (4.1.1)$$

pour tout ensemble fini  $S$  de places de  $K$ . En effet, il suffit de considérer le diagramme commutatif à lignes exactes suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} G'(K) & \longrightarrow & V(K) & \xrightarrow{\delta} & H^1(K, G) & \longrightarrow & H^1(K, G') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in S} G'(K_v) & \longrightarrow & \prod_{v \in S} V(K_v) & \xrightarrow{\delta} & \prod_{v \in S} H^1(K_v, G) & \longrightarrow & \prod_{v \in S} H^1(K_v, G') \end{array}$$

et de rappeler que pour toute place non archimédienne on a  $H^1(K_v, G') = 1$  (cf. [Kne65a], [Kne65b], [BT87]) et que l'on a une bijection

$$H^1(K, G') \xrightarrow{\sim} \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, G'),$$

ce qui donne la nullité de  $H^1(K, G')$  dans le cas de caractéristique positive (cf. [Hrd75]), ainsi qu'une bijection

$$H^1(K, G') \xrightarrow{\sim} \prod_{v \in \Omega_\infty} H^1(K_v, G'), \quad (4.1.2)$$

dans le cas d'un corps de nombres, où  $\Omega_\infty$  représente l'ensemble fini des places archimédiennes (cf. [Hrd65], [Hrd66], [Kne66a], [Che89]). Prenant en compte que la variété  $G'$  vérifie l'approximation faible (cf. [Kne66b]) et que les applications  $\delta$  sont continues pour les topologies correspondantes (discrète pour  $V(K)$  et pour les  $H^1$ ,  $v$ -adique pour  $V(K_v)$ ), il est facile d'en déduire l'équivalence entre l'approximation aux places  $v \in S$  pour  $V$  et la surjectivité de (4.1.1).

On voit alors qu'il s'agit ici de regarder la cohomologie galoisienne non abélienne des groupes finis résolubles. Les résultats que l'on montrera par la suite se prêtent donc à des démonstrations par dévissage, i.e. il s'agira de casser le groupe  $G$  en des morceaux plus simples. Si l'on note alors  $\Gamma_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  pour une clôture séparable  $\bar{K}$  de  $K$ , l'argument de dévissage nous mène à l'étude des  $\Gamma_K$ -modules simples dont l'ordre divise le cardinal du groupe. Il faudra pourtant demander un peu plus que l'approximation faible à ces groupes pour pouvoir recoller les morceaux, l'idée à la base étant de "cacher la ramification dans de bonnes places". Dans la section 4.2 on rappelle ce qui est connu dans cette direction, et qui est essentiellement dû à Neukirch (cf. [Neu79] et [NSW08, Chap. IX]), et on montre quelques résultats supplémentaires qui nous seront utiles pour démontrer le théorème principal. La section 4.3 est consacrée à

l'énoncé et la démonstration du théorème principal. Ce résultat nous permet par la suite de démontrer un résultat autour du principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble dans la section 4.4.

**Notations** Dans toute la suite de ce texte, on notera  $\Gamma_{L/K} := \text{Gal}(L/K)$  pour toute extension galoisienne  $L/K$  et on notera  $\Gamma_K$  le groupe de Galois absolu de tout corps  $K$ , i.e. le groupe  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  avec  $\bar{K}$  une clôture séparable de  $K$ . Les groupes (ou ensembles) de cohomologie galoisienne associés à ces groupes de Galois seront notés respectivement  $H^i(L/K, \cdot)$  et  $H^i(K, \cdot)$ . Le corps  $K$  est toujours un corps global, i.e. un corps de nombres ou le corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini, dont l'ensemble des places est noté  $\Omega_K$  et dont les différents complétés sont notés  $K_v$  pour  $v \in \Omega_K$ . On écrit  $\mu(K)$  pour désigner l'ensemble des racines de l'unité contenues dans le corps  $K$  et  $m(K)$  pour désigner son cardinal. Enfin, pour tout entier  $n \geq 2$  premier à la caractéristique de  $K$ , on note  $\mu_n$  le sous-groupe de  $\bar{K}^*$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité et  $\zeta_n \in \mu_n$  un générateur de ce groupe.

On fera aussi un abus de notation en identifiant tout  $K$ -groupe  $G$  fini d'ordre premier à la caractéristique de  $K$  avec le  $\Gamma_K$ -groupe (ou module)  $G(\bar{K})$  correspondant. Ainsi, on se permettra de noter  $b \in G$  pour tout point géométrique  $b \in G(\bar{K})$  et aussi, pour tout sous-quotient  $\Delta$  de  $\Gamma_K$  dont l'action sur  $G(\bar{K})$  est bien définie, on notera

$$H^1(\Delta, G) := H^1(\Delta, G(\bar{K})) \quad \text{et} \quad \text{Hom}(\Delta, G) := \text{Hom}_{\text{cont}}(\Delta, G(\bar{K})),$$

Ceci s'appliquera notamment, dans le cas où  $K$  est un corps global, pour  $\Delta = D_v$ , où  $D_v$  correspond au quotient modérément ramifié du groupe de décomposition d'une place  $v$  de  $K$  et  $G$  est un groupe déployé par l'extension maximale modérément ramifiée. On remarque aussi que, puisque  $G$  est fini, on a  $G(\bar{K}) = G(\bar{L})$  pour tout corps  $L$  contenant  $K$ , ce qui permet par exemple l'identification de  $H^1(\Gamma_{K_v}, G(\bar{K}))$  avec  $H^1(K_v, G)$ . Ces identifications seront toujours sous-entendues dans la suite.

Pour tout  $\Gamma_K$ -module fini  $A$  d'exposant  $n$  premier à la caractéristique de  $K$ , on notera  $A^*$  le  $\Gamma_K$ -module  $\text{Hom}(A, \mu_n)$ . Pour un tel module, les groupes de Tate-Shafarevich  $\text{III}^i(K, A)$  sont définis, pour  $i = 1, 2$  en ce qui nous concerne, comme

$$\text{III}^i(K, A) := \text{Ker} \left[ H^i(K, A) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_K} H^i(K_v, A) \right].$$

On rappelle aussi que la dualité de Poitou-Tate nous donne une dualité parfaite entre  $\text{III}^2(K, A)$  et  $\text{III}^1(K, A^*)$ .

Enfin, puisque dans la suite on aura toujours recours à différents ensembles infinis de places de  $K$  qui évitent d'autres ensembles finis de places, on utilisera l'expression "presque toute place xxxxx" pour signifier "toute place xxxxx à l'exception d'une quantité finie".

## 4.2 Préliminaires

Soit  $A$  un  $\Gamma_K$ -module fini d'ordre premier à la caractéristique de  $K$  (lequel correspond aux points géométriques d'un  $K$ -groupe algébrique fini et abélien). Comme il a été évoqué dans

l'introduction, on entend par approximation faible pour  $A$  la surjectivité de l'application

$$H^1(K, A) \rightarrow \prod_{v \in S} H^1(K_v, A),$$

pour tout ensemble fini  $S$  de places de  $K$ . Neukirch a montré que, sous certaines hypothèses, on peut non seulement demander l'existence d'une classe globale  $\alpha \in H^1(K, A)$  relevant une famille locale donnée  $(\beta_v)_{v \in S} \in \prod_S H^1(K_v, A)$ , mais aussi demander qu'une telle classe  $\alpha$  ait des bonnes propriétés de ramification, dans un sens qui sera explicité par la suite. Ce résultat d'approximation "mieux que faible" a été démontré par Neukirch dans [Neu79, Thm. 1] pour les  $\Gamma_K$ -modules simples sur un corps des nombres, et une version pour des corps globaux quelconques peut être trouvée dans [NSW08, Thm. 9.3.3]. On énonce dans cette section un corollaire de la version générale que l'on utilisera pour montrer le théorème principal. Pour ce faire, on rappelle quelques définitions.

**Définition 4.2.** Soit  $K_v$  le complété d'un corps global en une place finie et soit  $G$  un  $K_v$ -groupe (resp. un  $\Gamma_{K_v}$ -module). Une classe  $\alpha \in H^1(K_v, G)$  est dite :

- *cyclique* si elle est déployée par une extension cyclique  $L_v/K_v$ , i.e. si sa restriction à  $H^1(L_v, G)$  est triviale ou, de façon équivalente, si elle provient de l'ensemble (resp. groupe)  $H^1(L_v/K_v, G^{L_v})$  par inflation ;
- *non ramifiée* si elle est déployée par l'extension non ramifiée maximale  $K_v^{\text{nr}}$  de  $K_v$ , i.e. si elle provient de l'ensemble (resp. groupe)  $H^1(K_v^{\text{nr}}/K_v, G^{\Gamma_{K_v^{\text{nr}}}})$  par inflation ;
- *ramifiée* si elle n'est pas non ramifiée ;
- *totalelement ramifiée* si elle est déployée par une extension totalelement ramifiée  $L_v/K_v$ .

*Remarque.*

Une classe non ramifiée est toujours cyclique. En effet, toute classe  $\alpha \in H^1(K_v, G)$  est déployée par une extension finie, d'où l'on sait qu'une classe  $\alpha$  provenant de  $H^1(K_v^{\text{nr}}/K_v, G)$  provient en fait de  $H^1(L_v/K_v, G)$ , où  $\Gamma_{L_v/K_v}$  correspond à un quotient fini de  $\Gamma_{K_v^{\text{nr}}/K_v} \cong \hat{\mathbb{Z}}$  et il est donc un groupe cyclique.

De plus, lorsque  $G$  est un groupe constant, il est facile de voir qu'une classe non triviale et totalelement ramifiée est forcément ramifiée.

Avec ces définitions, on peut énoncer l'analogie du résultat de Neukirch. Dans toute la suite du texte,  $\ell$  désigne un nombre premier différent de  $p$ .

**Théorème 4.3.** Soit  $K$  un corps global de caractéristique  $p \geq 0$  et soit  $A$  un  $\Gamma_K$ -module fini simple de  $\ell$ -torsion pour  $\ell \neq p$ . On suppose qu'il existe une extension finie galoisienne  $K'/K$  déployant  $A$  telle que  $\zeta_\ell \notin K'$ . Soit  $L/K'$  une extension cyclotomique (i.e. engendrée par des racines de l'unité) contenant  $\zeta_\ell$ . Soit  $S$  un ensemble fini de places de  $K$  contenant les places archimédiennes et les places divisant  $\ell$  et soit enfin  $P$  l'ensemble des places de  $K$  totalelement décomposées pour l'extension  $L/K$  n'appartenant pas à  $S$ .

Alors pour toute famille  $(\beta_v)_{v \in S} \in \prod_S H^1(K_v, A)$ , il existe un élément  $\alpha \in H^1(K, A)$  tel que, si l'on note  $\alpha_v$  l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(K_v, A)$ , on a

- pour toute place  $v \in S$ ,  $\alpha_v = \beta_v$  ;
- pour toute place  $v \notin S$ ,  $\alpha_v$  est cyclique et, si  $\alpha_v$  est ramifié, alors  $v \in P$ .

*Remarque.*

Dans l'article [Neu79], le résultat de Neukirch n'est valable qu'en caractéristique 0 et pour  $L = K'(\zeta_\ell)$ .

*Démonstration.* Le résultat découle facilement de [NSW08, Thm. 9.3.3] de la façon suivante. Soit  $\Delta$  le sous-groupe de torsion première à  $\ell$  du groupe abélien  $\Gamma_{L/K'}$  et soit  $K'_\ell := L^\Delta \subset L$ . On voit alors que  $[L : K'_\ell]$  est premier à  $\ell$  et que  $\zeta_\ell \notin K'_\ell$  car  $[K'_\ell : K']$  est une puissance de  $\ell$  et  $\zeta_\ell \notin K'$  (et l'extension  $K'(\zeta_\ell)/K'$  est de degré premier à  $\ell$ ). Les données  $(\ell, K, K'_\ell, L, \Omega_K, S)$  ci-dessus vérifient alors clairement les hypothèses demandées par [NSW08, Thm. 9.3.3] pour (dans les notations de [NSW08])  $(p, k, K, \Omega, S, T)$ .  $\square$

La même démonstration, avec les mêmes notations mais en mettant [NSW08, Thm. 9.1.15(iii)] à la place de [NSW08, Thm. 9.3.3] et  $P$  à la place de  $T$ , s'applique par ailleurs au lemme ci-dessous, dont l'analogie chez Neukirch (cf. [Neu79, Lem. 2]) est clé dans la démonstration de son théorème :

**Lemme 4.4.** *Soit  $K$  un corps global de caractéristique  $p \geq 0$  et soit  $A$  un  $\Gamma_K$ -module fini simple de  $\ell$ -torsion pour  $\ell \neq p$ . On suppose qu'il existe une extension finie galoisienne  $K'/K$  déployant  $A$  telle que  $\zeta_\ell \notin K'$ . Soit  $L/K'$  une extension cyclotomique contenant  $\zeta_\ell$ . Soit enfin  $P$  un ensemble de places de  $K$  contenant presque toutes les places totalement décomposées pour l'extension  $L/K$ . Alors le morphisme*

$$H^1(K, A^*) \rightarrow \prod_{v \in P} H^1(K_v, A^*),$$

est injectif, où  $A^* := \text{Hom}(A, \mu_\ell)$ .

*Remarque.*

On notera en passant que la simplicité de  $A$  en tant que  $\Gamma_K$ -module est équivalente à celle de  $A^*$ .

Ce lemme admet la généralisation suivante aux  $\Gamma_K$ -modules finis pas nécessairement simples dont la preuve se ramène par un argument de dévissage au cas ci-dessus.

**Proposition 4.5.** *Soit  $K$  un corps global de caractéristique  $p \geq 0$  et soit  $A$  un  $\Gamma_K$ -module fini d'exposant  $n$  premier à  $p$ . On suppose qu'il existe une extension finie galoisienne  $K'/K$  déployant  $A$  telle que, si l'on note  $\mu(K')$  l'ensemble des racines de l'unité contenues dans  $K'$  et  $m(K')$  son cardinal, alors  $(m(K'), n) = 1$ . Soit  $L/K'$  une extension cyclotomique contenant  $\zeta_n$ . Soit enfin  $P$  un ensemble de places de  $K$  contenant presque toutes les places totalement décomposées pour l'extension  $L/K$ . Alors le morphisme*

$$H^1(K, A^*) \rightarrow \prod_{v \in P} H^1(K_v, A^*),$$

est injectif, où  $A^* = \text{Hom}(A, \mu_n)$ .

*Démonstration.* Il est évident d'abord que l'on peut se restreindre au cas où  $P$  n'est composé que de places totalement décomposées pour l'extension  $L/K$ . La preuve se fait alors par récurrence sur le cardinal de  $A$ , l'injectivité étant vérifiée dans le cas où  $A$  est simple d'après le lemme 4.4. Si  $A$  n'est pas simple, on sait qu'il existe un sous-module  $B$  non trivial induisant un quotient  $C = A/B$  et l'on peut supposer que  $B$  et  $C$  vérifient l'énoncé. On considère alors

le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(K, C^*) & \longrightarrow & H^1(K, A^*) & \longrightarrow & H^1(K, B^*) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{v \in P} H^1(K_v, C^*) & \longrightarrow & \prod_{v \in P} H^1(K_v, A^*) & \longrightarrow & \prod_{v \in P} H^1(K_v, B^*)
\end{array}$$

Soit alors  $\alpha \in H^1(K, A^*)$  d'image nulle dans  $\prod_P H^1(K_v, A^*)$ . On voit alors que son image dans  $\prod_P H^1(K_v, B^*)$  est nulle et par conséquent son image dans  $H^1(K, B^*)$  est nulle aussi d'après l'injectivité pour  $B^*$ . L'élément  $\alpha$  provient donc de  $H^1(K, C^*)$ . Or, puisque pour toute place  $v \in P$  on a que  $\zeta_n \in K_v$ , l'action de  $\Gamma_{K_v}$  sur les modules  $A, B, C$  et  $\mu_n$  est triviale, ce qui nous dit que les  $\Gamma_{K_v}$ -modules  $A^*, B^*$  et  $C^*$  sont déployés, d'où l'on voit qu'on a la suite exacte

$$A^* \rightarrow B^* \rightarrow H^1(K_v, C^*) \rightarrow H^1(K_v, A^*),$$

à partir de laquelle on déduit que l'application  $H^1(K_v, C^*) \rightarrow H^1(K_v, A^*)$  est injective pour toute place  $v \in P$ . On voit alors, en regardant une préimage  $\gamma$  de  $\alpha$  dans  $H^1(K, C^*)$ , que ses localisés  $\gamma_v \in H^1(K_v, C^*)$  sont triviaux pour toute place  $v \in P$  car leur image  $\alpha_v \in H^1(K_v, A^*)$  l'est aussi, d'où l'on voit que  $\gamma = \alpha = 0$  d'après l'injectivité pour  $C^*$ , ce qui conclut.  $\square$

La proposition 4.5 a une conséquence intéressante, laquelle avait déjà été remarquée par Neukirch pour le cas des  $\Gamma_K$ -modules simples (cf. [Neu79, Thm. 2]), et qui nous sera utile par la suite.

**Corollaire 4.6.** *Soient  $K$  un corps global et  $A$  un  $K$ -groupe fini abélien d'exposant  $n$  premier à la caractéristique de  $K$ . On suppose qu'il existe une extension finie galoisienne  $K'/K$  déployant  $A$  telle que  $(m(K'), n) = 1$ . Alors on a  $\text{III}^2(K, A) = 0$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 4.5, l'application

$$H^1(K, A^*) \rightarrow \prod_{v \in P} H^1(K_v, A^*),$$

est injective, d'où  $\text{III}^1(K, A^*) = 0$ . On voit aussitôt par la dualité de Poitou-Tate que  $\text{III}^2(K, A) = 0$ .  $\square$

Pour terminer cette section, on donne un lemme qui justifiera par la suite le fait de forcer la ramification à tomber dans les places  $v \in \Omega_K$  totalement décomposées pour une extension  $L/K$  comme celle de l'énoncé du théorème 4.3.

**Lemme 4.7.** *Soit  $K_v$  un corps local de caractéristique résiduelle  $p > 0$ , soit  $G$  un  $K_v$ -groupe constant d'exposant  $n$  et soit  $H$  un  $K_v$ -groupe quotient de  $G$  (qui est par conséquent constant). On suppose que  $n$  est premier à  $p$  et que  $\zeta_n \in K_v$ . Soit  $\alpha \in H^1(K_v, H)$  une classe totalement ramifiée et cyclique. Alors il existe une classe  $\beta \in H^1(K_v, G)$  totalement ramifiée et cyclique relevant  $\alpha$ , i.e.  $\alpha$  est l'image de  $\beta$  par l'application  $H^1(K_v, G) \rightarrow H^1(K_v, H)$ .*

*Démonstration.* Soit  $S_v$  le sous-groupe de  $\Gamma_{K_v}$  correspondant à la ramification sauvage. On a la suite exacte de restriction-inflation

$$0 \rightarrow H^1(D_v, G) \rightarrow H^1(K_v, G) \rightarrow H^1(S_v, G),$$

où l'on rappelle que le groupe  $D_v = \Gamma_{K_v}/S_v$  est le groupe profini engendré par deux générateurs  $\sigma_v$  et  $\tau_v$  soumis à la relation  $\sigma_v \tau_v \sigma_v^{-1} = \tau_v^{q_v}$ , où  $q_v$  est le cardinal du corps résiduel (cf. [NSW08, 7.5.3]). Le groupe  $S_v$  étant un pro- $p$ -groupe et le  $K_v$ -groupe  $G$  étant constant d'exposant  $n$  premier à  $p$ , on a que  $H^1(S_v, G) = \text{Hom}(S_v, G)/\text{conj.} = 1$ . Il en va de même pour  $H$ , donc il nous suffit d'étudier l'application  $H^1(D_v, G) \rightarrow H^1(D_v, H)$ .

La classe  $\alpha \in H^1(K_v, H)$  est alors représentée par un morphisme  $a : D_v \rightarrow H$  et son noyau définit une extension totalement ramifiée et cyclique de  $K_v$ , ce qui nous dit que l'image de  $a$  est un sous-groupe cyclique de  $H$ . Or, on sait que  $\tau_v$  engendre le sous-groupe  $I_v$  de  $D_v$  correspondant à  $\Gamma_{K^{\text{mr}}/K^{\text{nr}}}$ , où  $K^{\text{mr}}/K$  est l'extension modérément ramifiée maximale de  $K$ . Cela nous dit qu'il y a équivalence entre affirmer que  $\alpha$  est totalement ramifiée et qu'elle est représentée par un morphisme  $a$  dont l'image est engendrée par  $a(\tau_v)$ . En effet, l'image d'un tel morphisme est isomorphe au groupe cyclique  $\Gamma_{L_v/K_v}$  correspondant à l'extension  $L_v/K_v$  induite par le noyau de  $a$ . La classe  $\alpha$  est alors totalement ramifiée si et seulement si cette extension l'est, ce qui est le cas si et seulement si cette extension n'admet pas de sous-extension non ramifiée, ce qui est vrai pour sa part si et seulement si l'image  $\bar{\tau}_v$  de  $\tau_v$  dans  $\Gamma_{L_v/K_v}$  engendre tout le groupe car la sous-extension non ramifiée maximale de  $L_v/K_v$  est celle invariante par  $\bar{\tau}_v$ . Ainsi, on déduit que  $a(\tau_v)$  engendre l'image de  $a$  et l'on voit par la suite que  $a(\sigma_v) = a(\tau_v)^m$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ .

Soient maintenant  $g \in G$  une préimage de  $a(\tau_v)$  dans  $G$ . On définit le morphisme  $b : D_v \rightarrow G$  en posant  $b(\tau_v) = g$  et  $b(\sigma_v) = g^m$ . C'est un morphisme bien défini car on a

$$b(\sigma_v \tau_v \sigma_v^{-1}) = b(\sigma_v) b(\tau_v) b(\sigma_v)^{-1} = b(\tau_v)^m b(\tau_v) b(\tau_v)^{-m} = b(\tau_v)$$

et

$$b(\tau_v^{q_v}) = b(\tau_v)^{q_v} = b(\tau_v),$$

car, l'exposant de  $G$  étant  $n$ , on sait que  $b(\tau_v)^n = 1$  et, puisque  $K_v$  contient  $\zeta_n$ , on a que  $n$  divise  $q_v - 1$ . On voit alors immédiatement que la classe  $\beta$  de  $b$  dans  $H^1(K_v, G)$  relève  $\alpha$ . Il est aussi évident que  $\beta$  est totalement ramifiée et cyclique car l'image de  $b$  est égale au sous-groupe de  $G$  engendré par  $g$  et est donc engendrée par  $b(\tau_v)$ , d'où le noyau de  $b$  définit une extension cyclique de  $K_v$  qui est totalement ramifiée d'après l'argument donné dans le dernier paragraphe.  $\square$

### 4.3 Approximation faible pour des stabilisateurs résolubles

Désormais on notera  $\mu(K)$  le groupe des racines de l'unité contenues dans le corps  $K$ . On notera aussi  $m(K)$  le cardinal de  $\mu(K)$ . On rappelle qu'une extension cyclotomique  $L/K$  est une extension engendrée par des racines de l'unité.

Dans cette section, on montre le résultat principal de ce texte, qui est le suivant :

**Théorème 4.8.** *Soient  $K$  un corps global et  $G$  un  $K$ -groupe fini résoluble d'exposant  $n$  premier à la caractéristique de  $K$ . On suppose qu'il existe une extension finie galoisienne  $K'/K$*

déployant  $G$  telle que  $(m(K'), n) = 1$ . Soit  $L/K'$  une extension cyclotomique contenant  $\zeta_n$ . Soit  $S$  un ensemble fini de places de  $K$  contenant les places archimédiennes et les places  $v$  ramifiées pour  $K'/K$ . Soit enfin  $P$  l'ensemble des places de  $K$  totalement décomposées pour l'extension  $L/K$  ne divisant pas  $n$  et n'appartenant pas à  $S$ .

Alors, pour tout élément  $(\beta_v)_{v \in S}$  de  $\prod_S H^1(K_v, G)$ , il existe une classe  $\alpha \in H^1(K, G)$  telle que, si l'on note  $\alpha_v$  l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(K_v, G)$ , on a

- (i) pour toute place  $v \in S$ ,  $\alpha_v = \beta_v$ ;
- (ii) pour toute place  $v \notin S$ ,  $\alpha_v$  est cyclique et, si  $\alpha_v$  est ramifiée, alors elle est totalement ramifiée et  $v \in P$ .

En particulier, si  $V = G \backslash G'$  pour un  $K$ -plongement  $G \rightarrow G'$  avec  $G'$  un  $K$ -groupe semi-simple simplement connexe, alors  $V$  vérifie l'approximation faible.

Avant de démontrer le résultat, on montre que, dès que l'approximation faible (ou encore "mieux que faible") est vérifiée, on a un certain contrôle sur les cocycles relevant les classes locales. Ce fait, exprimé dans le lemme suivant, est d'une importance capitale dans la démonstration.

**Lemme 4.9.** Soit  $G$  un  $K$ -groupe fini d'exposant  $n$  premier à la caractéristique de  $K$  déployé par une extension galoisienne  $K'/K$ . Soient  $\ell_1, \dots, \ell_r$  des nombres premiers différents de la caractéristique de  $K$ . On suppose que  $\zeta_{\ell_i} \notin K'$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ . Supposons enfin que  $G$  vérifie l'approximation "mieux que faible" par rapport à un ensemble  $P \subset \Omega_K$ , c'est-à-dire que, pour toute donnée  $(S, (\beta_v)_{v \in S})$  comme dans le théorème 4.8, on peut trouver  $\alpha \in H^1(K_v, G)$  vérifiant les propriétés (i) et (ii).

Alors pour toute telle donnée  $(S, (\beta_v)_{v \in S})$ , il existe une extension galoisienne  $K''/K$  vérifiant

- (\*)  $K''$  contient  $K'$  et ne contient pas  $\zeta_{\ell_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ ;
- et une classe  $\alpha \in H^1(K''/K, G)$  vérifiant les propriétés (i) et (ii).

*Démonstration.* Soit  $v_i$  une place de  $K$  n'appartenant pas à  $S$  totalement décomposée en  $K'$ , mais qui reste inerte pour l'extension  $K'(\zeta_{\ell_i})/K'$ , extension qui est par ailleurs galoisienne sur  $K$ . En d'autres termes, le groupe  $\Gamma_{K'(\zeta_{\ell_i})/K}$  est une extension d'un groupe cyclique par le groupe  $\Gamma_{K'/K}$  et on demande alors que le groupe de décomposition de  $v_i$  corresponde à ce sous-groupe cyclique distingué de  $\Gamma_{K'(\zeta_{\ell_i})/K}$ . Une telle place existe en dehors de  $S$  d'après le théorème de Čebotarev.

Il suffit alors de considérer un élément  $\alpha \in H^1(K, G)$  vérifiant les propriétés (i) et (ii) et tel qu'en plus pour ses localisés  $\alpha_{v_i} \in H^1(K_{v_i}, G)$  on ait  $\alpha_{v_i} = 0$  pour  $1 \leq i \leq r$ , c'est-à-dire qu'on rajoute les  $v_i$  à l'ensemble fini  $S$ , on pose  $\beta_{v_i} = 0$  et on applique l'approximation "mieux que faible" pour l'ensemble  $S'$  réunion de  $S$  et des  $v_i$ . En effet, de cela on déduit que, si l'on note  $\alpha'$  la restriction de  $\alpha$  à  $H^1(K', G)$ , alors elle est représentée par un morphisme  $a'$  (car  $K'$  déploie  $G$ ) qui s'annule en le groupe de décomposition de  $w_i$  pour toute place  $w_i$  de  $K'$  au-dessus de  $v_i$ , car  $\alpha_{v_i} = 0$  entraîne  $\alpha'_{w_i} = 0$ . Or, puisque  $v_i$  est totalement décomposée en  $K'/K$ , on a  $\Gamma_{K_{v_i}} \subset \Gamma_{K'}$  et  $K_{v_i} \cong K'_{w_i}$  et les groupes de décomposition des différents  $w_i$  s'identifient aux sous-groupes  $\sigma \Gamma_{K_{v_i}} \sigma^{-1}$  pour  $\sigma \in \Gamma_{K'/K}$ . Ainsi, on voit que  $a'$  s'annule en  $\sigma \Gamma_{K_{v_i}} \sigma^{-1}$  pour  $\sigma \in \Gamma_{K'/K}$ .

D'autre part, si l'on note  $\Delta'$  le noyau de  $a'$ , on sait qu'il est distingué dans  $\Gamma_{K'}$ , mais pas forcément dans  $\Gamma_K$ . Soit alors  $\Delta''$  l'intersection des  $\sigma \Delta' \sigma^{-1}$  pour  $\sigma \in \Gamma_{K'/K}$ . C'est un sous-

groupe distingué de  $\Gamma_K$  et définit alors une extension finie galoisienne  $K''/K$ . Or, puisque tous les conjugués de  $\Gamma_{K_{v_i}} \subset \Gamma_K$  sont dans  $\Delta'$ , on voit qu'ils sont aussi contenus dans  $\Delta'' = \Gamma_{K''}$ . Ainsi, on voit que  $v_i$  est totalement décomposée pour l'extension  $K''/K$ , d'où l'on déduit que  $\zeta_{\ell_i} \notin K''$ . De plus, il est évident que  $\alpha$  provient de  $H^1(K''/K, G)$ , car si l'on choisit un cocycle  $a : \Gamma_K \rightarrow G(\bar{K})$  le représentant, on voit que  $a'$  n'est rien d'autre que la restriction de  $a$  à  $\Gamma_{K'} \subset \Gamma_K$  à conjugaison près et il s'annule alors en  $\Gamma_{K''} \subset \Delta'$ .

Enfin, il faut remarquer que, si la propriété (ii) n'est vérifiée a priori que pour les places  $v \notin S'$  et non pas pour les places  $v \notin S$ , il est clair que pour les places  $v \in S' \setminus S$  (i.e. pour les  $v_i$ ) on a bien que  $\alpha_v$  est non ramifié (et donc cyclique) car il est trivial par définition.  $\square$

*Remarque.*

Vue la démonstration de ce lemme, on voit qu'on a un résultat totalement analogue pour un groupe  $G$  vérifiant l'approximation faible, ou encore l'approximation très faible, i.e. l'approximation pour tout ensemble fini  $S$  de places de  $K$  en dehors d'un ensemble fini  $S_0$  fixé auparavant et dépendant de  $G$ . C'est-à-dire, par exemple, que si  $G$  est un groupe fini d'exposant premier à la caractéristique de  $K$  vérifiant l'approximation faible et déployé par une extension galoisienne  $K'/K$  telle que  $\zeta_{\ell_i} \notin K'$  pour des nombres premiers  $\ell_1, \dots, \ell_r$  donnés, alors pour tout ensemble fini  $S$  de places de  $K$  on peut relever une famille d'éléments  $(\beta_v)_{v \in S}$  dans  $\prod_S H^1(K_v, G)$  en un élément  $\alpha \in H^1(K''/K, G)$  avec  $K''$  contenant  $K'$  et ne contenant pas les  $\zeta_{\ell_i}$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

*Démonstration du théorème 4.8.* On démontre l'énoncé par récurrence sur le cardinal de  $G$ , et on fait cela en trois étapes.

**Étape 1 : Établissement de la récurrence** Pour  $i \geq 0$ , notons  $D^{i+1}(G) := [D^i(G), D^i(G)]$  le  $(i+1)$ -ème dérivé de  $D^0(G) := G$ . Ce sont des sous-groupes caractéristiques de  $G$  et, puisque  $G$  est résoluble, on sait qu'il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $D^j(G) \neq \{1\}$  et  $D^{j+1}(G) = \{1\}$ , d'où l'on déduit que  $D^j(G)$  est abélien et caractéristique dans  $G$ . Soit alors  $A$  la partie de  $\ell$ -torsion de  $D^j(G)$  pour un  $\ell$  donné divisant le cardinal de  $D^j(G)$  (et donc de  $G$ ). C'est aussi un sous-groupe caractéristique de  $G$ , car il est caractéristique dans  $D^j(G)$ . Le sous-groupe  $A$  est alors un  $\Gamma_K$ -module de  $\ell$ -torsion non trivial, ce qui nous permet de regarder  $H = G/A$  comme un  $\Gamma_K$ -groupe de cardinal strictement plus petit que celui de  $G$ .

Pour ces données, on a le diagramme commutatif à lignes exactes suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(K, A) & \longrightarrow & H^1(K, G) & \longrightarrow & H^1(K, H) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, A) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, G) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, H).
 \end{array} \tag{4.3.1}$$

Dans le cas où  $G$  serait lui-même un  $\Gamma_K$ -module de  $\ell$ -torsion (cas où l'on aurait par conséquent  $A = G$ ), il se peut que  $G$  soit simple ou qu'il ne le soit pas. Dans le premier cas, le résultat se ramène au théorème 4.3. En effet, il suffit de remarquer que, pour  $v \in P$  et  $G$  de  $\ell$ -torsion, une classe  $\alpha_v \in H^1(K_v, G)$  cyclique et ramifiée est forcément déployée par une extension totalement ramifiée, car elle correspond à un morphisme (on rappelle que pour  $v \in P$  le groupe  $G$  est constant en tant que  $\Gamma_{K_v}$ -groupe) dont l'image est isomorphe à  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  et elle est alors

déployée par une extension de degré  $\ell$ , laquelle est totalement ramifiée dès qu'elle est ramifiée

Dans le deuxième cas, on (re)définit  $A$  comme n'importe quel sous-module propre non trivial de  $G$ , ce qui assure que  $A$  sera toujours un sous- $\Gamma_K$ -module de cardinal strictement plus petit que celui de  $G$  et on peut alors supposer que l'on a le diagramme (4.3.1) et que tant  $A$  que  $H$  vérifient l'énoncé pour la même extension  $L/K$ , ainsi que pour toute autre extension vérifiant les mêmes hypothèses.

**Étape 2 : Construction d'un élément global dans  $H^1(K, G)$**  Considérons alors  $(\beta_v)_{v \in S} \in \prod_S H^1(K_v, G)$ . Soit  $(\gamma_v)_{v \in S}$  l'image de cet élément dans  $\prod_S H^1(K_v, H)$ . On peut le relever en un élément  $\gamma \in H^1(K, H)$  vérifiant la deuxième propriété de l'énoncé. De plus, le lemme 4.9 nous dit que l'on peut supposer que  $\gamma$  provient de  $H^1(K''/K, H)$  pour une certaine extension galoisienne  $K''/K$  contenant  $K'$  et ne contenant pas  $\zeta_\ell$  pour tout  $\ell$  divisant  $n$ . On obtient alors des localisations  $\gamma_v \in H^1(K_v, H)$  pour toutes les places  $v \notin S$ .

Suivant Serre (cf. [Ser94, I.5.6]), pour un cocycle  $c$  représentant  $\gamma$ , on peut associer à  $\gamma$  une classe  $\delta(\gamma) \in H^2(K, {}_cA)$ , où  ${}_cA$  est le tordu de  $A$  par le cocycle  $c$ , i.e. un module égal à  $A$  en tant que groupe mais avec l'action tordue

$$\sigma^{*c} a = c_\sigma \cdot \sigma a,$$

où  $c_\sigma \in H$  agit sur  $A$  par conjugaison. De plus, toujours d'après [Ser94, I.5.6], on sait que  $\gamma$  se relève en un élément de  $H^1(K, G)$  si et seulement si  $\delta(\gamma) = 0$ . Or, cette construction étant compatible avec la localisation, on a des classes  $\delta(\gamma_v) \in H^2(K_v, {}_cA)$  qui correspondent à  $\delta(\gamma)_v$  pour toute place  $v$  de  $K$ . Ces classes se trouvent être triviales. En effet :

Pour  $v \in S$ ,  $\gamma_v$  provient de  $\beta_v \in H^1(K_v, G)$ , d'où  $\delta(\gamma_v) = 0$  d'après ce que l'on vient de dire.

Pour  $v \notin S$ , si  $\gamma_v \in H^1(K_v^{\text{nr}}/K_v, H)$ , alors son image dans  $H^2(K_v, {}_cA)$  est en fait dans  $H^2(K_v^{\text{nr}}/K_v, {}_cA)$  et ce groupe est trivial car la dimension cohomologique de  $\text{Gal}(K_v^{\text{nr}}/K_v) \cong \hat{\mathbb{Z}}$  est 1. On voit alors par ailleurs que l'on peut relever  $\gamma_v$  en un élément  $\beta_v \in H^1(K_v^{\text{nr}}/K_v, G)$ .

Sinon, on sait que  $\alpha_v$  est totalement ramifiée et cyclique et que  $v \in P$ , donc  $K_v$  déploie  $G$  et contient  $\zeta_n$  (car  $\Gamma_{K_v} \subset \Gamma_L$ ). Le lemme 4.7 nous dit alors qu'il existe une classe  $\beta_v \in H^1(K_v, G)$  totalement ramifiée et cyclique relevant  $\gamma_v$  et donc en particulier on a  $\delta(\gamma_v) = 0$ .

En résumant, pour toute place  $v$  de  $K$ ,  $\gamma_v$  se relève en un élément  $\beta_v \in H^1(K_v, G)$  et donc  $\delta(\gamma_v) = 0$ . De plus, pour toute place  $v \notin S$  telle que  $\beta_v$  est ramifié, on a  $v \in P$  et la classe  $\beta_v$  est totalement ramifiée et cyclique. Or, puisque  $A$  est déployé par  $K'$  et que  $c$  est un cocycle que l'on peut supposer défini sur  $K''/K$ , on sait que le  $K$ -groupe  ${}_cA$  est déployé par l'extension  $K''/K$ , laquelle ne contient pas  $\zeta_\ell$  pour tout  $\ell$  divisant  $n$ . Le corollaire 4.6 nous dit alors que  $\text{III}^2(K, {}_cA) = 0$ , donc  $\delta(\gamma) = 0$  et alors  $\gamma$  provient d'un élément  $\beta_0 \in H^1(K, G)$ .

**Étape 3 : Correction de l'élément global** Puisque  $\beta_0$  s'envoie sur  $\gamma$ , on sait que pour toute place  $v$  on a que  $\beta_{0,v}$  et  $\beta_v$  ont la même image dans  $H^1(K_v, H)$ . Fixons alors un cocycle  $b_0$  représentant  $\beta_0$  et tordons le diagramme (4.3.1) par  $b_0$ . Pour un élément  $\xi$  dans un ensemble de cohomologie donné du diagramme (4.3.1), on note  $b_0\xi$  son image après torsion par  $b_0$ . On

a alors que, pour toute place  $v$  de  $K$ ,  ${}_{b_0}\gamma_v$  est trivial, d'où l'on déduit que  ${}_{b_0}\beta_v$  provient d'un élément  $\alpha'_v \in H^1(K_v, {}_{b_0}A)$ .

On remarque que, quitte à changer  $b_0$  par un cocycle cohomologue, on peut supposer qu'il relève le cocycle  $c \in Z^1(K''/K, H)$  représentant  $\gamma$ . Ceci ne veut pas dire que l'on a  $b_0 \in Z^1(K''/K, G)$ , mais au moins on sait que la restriction de  $b_0$  à  $\Gamma_{K''} \subset \Gamma_K$  correspond à un morphisme (car  $K''$  déploie  $G$ ) à valeurs dans le  $\ell$ -groupe  $A$ . Ceci nous dit que, si l'on note  $K'''/K$  l'extension galoisienne minimale déployant  $b_0$  (i.e. celle correspondant au sous-groupe de  $\Gamma_K$  dont l'image par  $b_0$  est 1), on a que le degré de  $K'''/K''$  est une puissance de  $\ell$  car le groupe  $\Gamma_{K'''}/\Gamma_{K''}$  est alors isomorphe à un sous-groupe de  $A$ . On en déduit que  $K'''$  ne contient pas  $\zeta_\ell$  car le degré de  $K'''(\zeta_\ell)/K''$  divise  $\ell - 1$  et  $\zeta_\ell \notin K''$ . Il est par ailleurs évident que  ${}_{b_0}A$  est un  $\Gamma_K$ -module déployé par  $K'''$ .

Soit alors  $S'$  la réunion de  $S$  avec l'ensemble des places  $v$  telles que  $\beta_{0,v}$  est ramifié et les places ramifiées pour l'extension  $K'''/K$ . L'hypothèse de récurrence appliquée au  $K$ -groupe  ${}_{b_0}A$  déployé par  $K'''$  nous dit alors que, si l'on note  $P' \subset P$  l'ensemble des places dans  $P$  totalement décomposées pour l'extension  $L' := LK'''/K$  et n'appartenant pas à  $S'$ , il existe une classe  $\alpha_1 \in H^1(K, {}_{b_0}A)$  telle que

- pour toute place  $v \in S'$ , on a  $\alpha_{1,v} = \alpha'_v$  ;
- pour toute place  $v \notin S'$ ,  $\alpha_{1,v}$  est cyclique et, si  $\alpha_{1,v}$  est ramifiée, alors elle est totalement ramifiée et  $v \in P'$ .

On remarque maintenant que, pour les places  $v \in P'$ , le cocycle  $b_{0,v}$  est trivial. En effet, puisque les places  $v \in P'$  sont totalement décomposées pour l'extension  $K'''/K$ , on a  $\Gamma_{K_v} \subset \Gamma_{K'''}$  et  $b_0$  s'annule en  $\Gamma_{K'''}$ . On en déduit alors que  ${}_{b_0}G$  et  $G$  sont isomorphes en tant que  $\Gamma_{K_v}$ -groupes et que la bijection donnée par la torsion par  $b_0$  se réduit à l'identité sur  $H^1(K_v, G)$ , et il en va de même donc pour  ${}_{b_0}A$  et  $A$ .

Notons  $\beta_1$  l'image de  $\alpha_1$  dans  $H^1(K, {}_{b_0}G)$ . Il suffit alors pour conclure de définir l'élément  $\alpha \in H^1(K, G)$  comme la préimage de  $\beta_1$  par la bijection donnée par la torsion par  $b_0$  (i.e.  ${}_{b_0}\alpha = \beta_1$ ). Cet élément vérifie :

- pour toute place  $v \in S'$ , on a que  $\alpha_v = \beta_v$  car  ${}_{b_0}\alpha_v = \beta_{1,v}$  est l'image de  $\alpha_{1,v} = \alpha'_v \in H^1(K_v, {}_{b_0}A)$  et  $\alpha'_v$  s'envoie en  ${}_{b_0}\beta_v \in H^1(K_v, {}_{b_0}G)$  ;
- pour toute place  $v \notin S' \cup P'$  on a que  $\alpha_v \in H^1(K_v^{\text{nr}}/K, G)$  : en effet, il suffit de remarquer que l'on a  ${}_{b_0}\alpha_v = \beta_{1,v} \in H^1(K_v^{\text{nr}}/K, {}_{b_0}G)$  car il provient de  $\alpha_{1,v} \in H^1(K_v^{\text{nr}}/K, {}_{b_0}A)$ , et que l'on a tordu par un cocycle représentant la classe  $\beta_{0,v} \in H^1(K_v^{\text{nr}}/K, G)$  (on rappelle que  $S'$  contient par définition les places où  $\beta_0$  ramifie et que la torsion est compatible avec les morphismes d'inflation) ;
- pour toute place  $v \in P'$ ,  $\alpha_v$  correspond à l'image de  $\alpha_{1,v} \in H^1(K_v, {}_{b_0}A) = H^1(K_v, A)$  car la torsion est réduite à l'identité pour ces places ;

d'où l'on voit que l'élément  $\alpha$  convient, car on a alors

- pour toute place  $v \in S$ , elle est contenue dans  $S'$  et alors  $\alpha_v = \beta_v$ .
- pour toute place  $v \notin S$ , si  $\alpha_v$  ramifie, alors elle est dans  $S' \cup P'$ , donc soit on a  $v \in S'$ , auquel cas on a aussi  $\alpha_v = \beta_v$  et alors on a bien  $v \in P$  et que  $\alpha_v$  est totalement ramifiée et cyclique d'après la construction des  $\beta_v$  ; soit on a  $v \in P' \subset P$  et alors  $\alpha_v$  correspond à l'image de la classe  $\alpha_{1,v}$ , laquelle est bien totalement ramifiée et cyclique.

□

## 4.4 Principe de Hasse pour des stabilisateurs résolubles

Dans cette section on a besoin de la notion de  $K$ -lien, ou plutôt de  $\Gamma_K$ -lien. On rappelle alors ici sa définition et quelques propriétés.

Soient  $G$  un groupe abstrait et  $\Gamma$  un groupe profini. On note  $\text{Aut}(G)$  (resp.  $\text{Int}(G)$ ) le groupe des automorphismes de  $G$  (resp. des automorphismes intérieurs). On sait que  $\text{Int}(G)$  est distingué dans  $\text{Aut}(G)$ . On note  $\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$  et  $\pi : \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Out}(G)$  la projection canonique. On munit ces trois groupes de la topologie discrète.

**Définition 4.10.** Un  $\Gamma$ -lien sur  $G$  est un homomorphisme  $\kappa : \Gamma \rightarrow \text{Out}(G)$  tel qu'il existe une application continue  $\phi : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$  relevant  $\kappa$ , i.e. tel que  $\kappa = \pi \circ \phi$ .

S'il existe un tel  $\phi$  qui soit en plus un homomorphisme de groupes (ou en d'autres termes, si  $G$  est un  $\Gamma$ -groupe via  $\phi$ ), le  $\Gamma$ -lien  $\kappa$  est dit trivial.

*Remarque.*

Lorsque  $G$  est fini, tout homomorphisme continu  $\kappa : \Gamma \rightarrow \text{Out}(G)$  admet clairement une telle application  $\phi$  le relevant, d'où l'on voit que la donnée d'un  $\Gamma$ -lien sur  $G$  correspond à la donnée du morphisme  $\kappa$ .

Pour un  $\Gamma$ -lien  $L = (G, \kappa)$ , on peut construire via des cocycles (cf. [Spr66, 1.14]) un ensemble de 2-cohomologie  $H^2(\Gamma, L)$ . Cet ensemble classe les extensions de groupes

$$1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow \Gamma \rightarrow 1,$$

telles que l'action extérieure de  $\Gamma$  sur  $G$  induite par conjugaison dans  $E$  correspond au morphisme  $\kappa : \Gamma \rightarrow \text{Out}(G)$  (cf. [Spr66, 1.15]). Dans cet ensemble, on distingue un sous-ensemble, noté  $N^2(\Gamma, L)$  et dit des classes *neutres*, formé des classes correspondant à des extensions scindées. On voit immédiatement que ces classes induisent (au moins) une structure de  $\Gamma$ -groupe sur  $G$  tout simplement par conjugaison dans  $E$  via un scindage de la suite.

Soit maintenant  $X$  un  $K$ -espace homogène sous un groupe  $G'$  semi-simple simplement connexe, soit  $x \in X(\bar{K})$  et soit  $\bar{G}$  le stabilisateur de  $x$ , que l'on suppose fini et résoluble d'exposant  $n$  premier à la caractéristique de  $K$ . Suivant Springer [Spr66, 1.20], on peut associer à  $(X, x)$  une structure de  $\Gamma_K$ -lien  $L = (\bar{G}(\bar{K}), \kappa)$  sur  $\bar{G}(\bar{K})$ , ainsi qu'une classe  $\eta(X) \in H^2(K, L) := H^2(\Gamma_K, L)$ . Toujours d'après Springer [Spr66, 1.20, 1.27] (cf. aussi [Brv93, §7.7]), on sait que la classe  $\eta(X) \in H^2(K, L)$  est neutre si et seulement s'il existe un espace principal homogène  $P$  sous  $G'$  qui est au-dessus de  $X$ , i.e. qui est muni d'un  $K$ -morphisme d'espaces homogènes  $P \rightarrow X$ .

**Proposition 4.11.** *Soit  $X$  comme ci-dessus et supposons que  $X(K) \neq \emptyset$ . Alors  $\eta(X) \in N^2(K, L)$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in X(K)$  et soit  $P := G'$  l'espace principal homogène trivial sous  $G'$ , i.e. l'action de  $G'$  sur  $P$  étant la multiplication à droite. On définit un  $K$ -morphisme  $P \rightarrow X$  en envoyant  $g \in P = G'$  dans  $x \cdot g \in X$ . Il est clair que ce morphisme est équivariant avec la  $K$ -action de  $G'$  sur  $P$ . Le morphisme ainsi défini est alors un morphisme d'espaces homogènes, ce qui nous dit que  $\eta(X) \in N^2(K, L)$  d'après ce qui a été dit ci-dessus.  $\square$

Si l'on note  $\bar{Z}$  le centre de  $\bar{G}$ , on voit clairement que l'on a un morphisme canoniquement induit  $\text{Aut}(\bar{G}(\bar{K})) \rightarrow \text{Aut}(\bar{Z}(\bar{K}))$  qui passe au quotient en un morphisme  $\text{Out}(\bar{G}(\bar{K})) \rightarrow \text{Aut}(\bar{Z}(\bar{K}))$ . Le morphisme  $\kappa$  induit alors par composition une structure de  $\Gamma_K$ -module sur  $\bar{Z}(\bar{K})$ , i.e. une  $K$ -forme  $Z$  de  $\bar{Z}$  puisqu'il s'agit d'un groupe fini (cf. aussi [Spr66, 1.16]). On peut montrer facilement que l'ensemble  $H^2(K, L)$ , dès qu'il est non vide, admet une structure d'espace principal homogène sous le groupe  $H^2(K, Z)$  (cf. [Spr66, 1.17]). De même, on peut montrer que, dès que le sous-ensemble  $N^2(K, L)$  est non vide, donc dès que le groupe  $\bar{G}(\bar{K})$  admet une structure de  $\Gamma_K$ -groupe, ou encore, dès que  $\bar{G}$  admet une  $K$ -forme  $G$ , le sous-ensemble  $N^2(K, L)$  peut être décrit par cette action de la façon suivante :

**Proposition 4.12.** *Soient  $\bar{G}$ ,  $\kappa$ ,  $L$ ,  $\bar{Z}$  et  $Z$  comme ci-dessus. Soient  $\eta \in N^2(K, L)$ ,  $\alpha \in H^2(K, L)$  et  $\xi \in H^2(K, Z)$  le seul élément tel que  $\alpha = \xi \cdot \eta$ . Soit enfin  $G$  une  $K$ -forme de  $\bar{G}$  induite par  $\eta$ . Alors  $\alpha \in N^2(K, L)$  si et seulement si  $\xi$  appartient à l'image de l'application  $H^1(K, G/Z) \xrightarrow{\delta} H^2(K, Z)$  induite par la suite exacte*

$$1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow G/Z \rightarrow 1.$$

On remarquera que la  $K$ -forme  $Z$  de  $\bar{Z}$  est bien un  $K$ -sous-groupe de la  $K$ -forme  $G$  de  $\bar{G}$ . Cela se déduit en effet immédiatement de la façon dont on a obtenu ces  $K$ -formes.

*Démonstration.* C'est la proposition 2.3 de [Brv93], à cela près que Borovoi se place sur un corps  $K$  de caractéristique 0, mais sa démonstration marche en fait sans aucun changement en caractéristique  $p$  pour des groupes finis d'ordre premier à  $p$ . □

*Remarque.*

On notera que la notion de  $K$ -lien, un peu plus technique que celle de  $\Gamma_K$ -lien et définie via le groupe de morphismes semi-algébriques  $\text{SAut}(\bar{G})$  de  $\bar{G}$ , n'est pas nécessaire dans notre cas car on a affaire à des groupes finis d'ordre premier à la caractéristique. En effet, un tel  $\bar{K}$ -groupe fini  $\bar{G}$  admet toujours une  $K$ -forme canonique (à savoir, celle de  $K$ -groupe constant) et cette forme nous dit que le groupe  $\text{SAut}(\bar{G})$  est dans ce cas isomorphe au produit direct  $\text{Aut}(\bar{G}(\bar{K})) \times \Gamma_K$  et il en va de même pour les automorphismes extérieurs. On a alors une équivalence entre  $K$ -liens sur  $\bar{G}$  et  $\Gamma_K$ -liens sur  $\bar{G}(\bar{K})$ .

Tous ces rappels étant faits, on peut passer au résultat principal de cette section, qui est le suivant.

**Théorème 4.13.** *Soit  $X$  un espace homogène sur  $G'$  à stabilisateur géométrique  $\bar{G}$  fini résoluble d'exposant  $n$  comme ci-dessus. Soit  $K'/K$  l'extension correspondant au noyau du morphisme  $\kappa : \Gamma_K \rightarrow \text{Out}(\bar{G}(\bar{K}))$  correspondant à  $(X, x)$ . On suppose que  $(m(K'), n) = 1$ , où  $m(K')$  est le cardinal de  $\mu(K')$ . Alors, si  $X(K_v) \neq \emptyset$  pour toute place  $v \in \Omega_K$ , la variété  $X$  admet un  $K$ -point, i.e.  $X(K) \neq \emptyset$ .*

*Remarque.*

Si le lien  $L$  (et par conséquent le morphisme  $\kappa$ ) dépend a priori du choix du  $\bar{K}$ -point  $x$ , l'extension  $K'$  en est en fait totalement indépendante. Cela peut se voir facilement à partir de la construction de  $\kappa$  dans [Spr66, 1.20].

La démonstration de ce "principe de Hasse" utilise de façon cruciale le théorème 4.8.

*Démonstration.* On montrera d'abord la neutralité de  $\eta(X)$ , ce qu'on fera en trois étapes.

**Étape 1 : Existence d’une classe neutre dans  $H^2(K, L)$**  Si l’on suppose que  $X(K_v) \neq \emptyset$  pour toute place  $v$  de  $K$ , la proposition 4.11 nous dit que  $\eta(X_v) = \eta(X)_v \in H^2(K_v, L)$  est neutre pour toute place  $v$  de  $K$ , où  $X_v = X \times_K K_v$ .

On rappelle maintenant que l’on a la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Int}(\bar{G}(\bar{K})) \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{K})) \xrightarrow{\pi} \text{Out}(\bar{G}(\bar{K})) \rightarrow 1,$$

et que la neutralité de  $\eta(X_v)$  correspond à l’existence d’un morphisme  $f_v : \Gamma_{K_v} \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{K}))$  relevant  $\kappa_v : \Gamma_{K_v} \rightarrow \text{Out}(\bar{G}(\bar{K}))$ , où  $\kappa_v$  est bien entendu la restriction évidente de  $\kappa : \Gamma_K \rightarrow \text{Out}(\bar{G}(\bar{K}))$ . Les hypothèses faites sur  $K'$  et le fait que  $\text{Int}(\bar{G}(\bar{K}))$  soit un groupe résoluble (en effet, il est isomorphe à  $\bar{G}(\bar{K})/\bar{Z}(\bar{K})$ ) nous permettent d’utiliser un théorème de Neukirch, à savoir le “Main Theorem” de [Neu79], lequel est valable aussi en caractéristique positive, cf. [NSW08, 9.5.5].<sup>1</sup> Ce théorème assure l’existence d’un morphisme  $f_0 : \Gamma_K \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{K}))$  relevant  $\kappa$  et induisant  $f_v$  pour un sous-ensemble fini  $S \subset \Omega_K$  que l’on peut prendre à discrétion. Ce morphisme correspond à une classe neutre  $\eta_0$  de  $H^2(K, L)$  et définit une  $K$ -forme  $G_0$  de  $\bar{G}$ .

**Étape 2 : Choix d’une “bonne” classe neutre dans  $H^2(K, L)$**  Il s’agit maintenant de faire un bon choix de l’ensemble  $S$  et des relèvements  $f_v$  de  $\kappa_v$  pour les places  $v \in S$  pour avoir un certain contrôle sur la  $K$ -forme  $G_0$ , de façon que l’on puisse appliquer par la suite le théorème principal d’approximation faible (théorème 4.8). La démarche est la même que dans le lemme 4.9 : considérons, pour chaque nombre premier  $\ell_i$  divisant  $n$ , une place  $v_i$  totalement décomposée pour l’extension  $K'/K$  et inerte pour l’extension  $L'_i = K'(\zeta_{\ell_i})/K'$ . On voit alors que  $\kappa_{v_i}$  correspond au morphisme trivial car  $\Gamma_{K_{v_i}} \subset \Gamma_{K'}$  et alors on peut supposer que  $f_{v_i}$  est aussi trivial. On définit  $S$  comme l’ensemble des places  $v_i$  que l’on vient de considérer.

Considérons alors le morphisme  $f_0 : \Gamma_K \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{K}))$  donné par le théorème de Neukirch pour ce choix particulier de  $S$  et des morphismes  $f_v$  pour  $v \in S$  et notons  $K''/K$  l’extension galoisienne correspondant au noyau de  $f_0$ . On voit donc que  $\zeta_{\ell_i} \notin K''$  pour tout  $i$ . En effet, de même que dans le lemme 4.9, on voit que si  $K''$  contenait  $\zeta_{\ell_i}$ , alors on aurait  $L'_i \subset K''$ , ou encore  $\Gamma_{K''} \subset \Gamma_{L'_i}$ , d’où l’on aurait  $\Gamma_{K_{v_i}} \not\subset \Gamma_{K''}$  car  $\Gamma_{K_{v_i}} \not\subset \Gamma_{L'_i}$  par hypothèse. De cela on voit enfin que la restriction  $f_{v_i}$  de  $f_0$  ne serait pas triviale, contredisant nos hypothèses.

Le morphisme  $f_0$  que l’on vient de construire correspond alors à une classe neutre  $\eta_0$  de  $H^2(K, L)$  et définit une  $K$ -forme  $G_0$  de  $\bar{G}$  déployée par une extension  $K''/K$  ne contenant pas  $\zeta_\ell$  pour tout nombre premier  $\ell$  divisant  $n$ .

**Étape 3 : Application du théorème principal** En rappelant alors que  $H^2(K, L)$  admet une structure d’espace principal homogène sous le groupe  $H^2(K, Z)$  (cf. le début de la section), on voit qu’il existe une classe  $\xi \in H^2(K, Z)$  telle que  $\xi \cdot \eta_0 = \eta(X)$ . La proposition 4.12 nous dit que la neutralité de  $\eta(X)$  est équivalente au fait que  $\xi$  provienne de  $H^1(K, G_0/Z)$ . Il s’agit alors de trouver une pré-image de  $\xi$  dans cet ensemble.

On sait que pour presque toute place  $v$  de  $K$  (i.e. sauf pour un nombre fini) on a  $\xi_v \in H^2(K_v^{\text{nr}}/K_v, Z) = 0$ . Soit alors  $S_0$  la réunion des places archimédiennes, des places ramifiées

1. Pour être plus précis, on utilise ce théorème pour la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Int}(\bar{G}(\bar{K})) \rightarrow E \rightarrow \text{Im}(\kappa) \rightarrow 1,$$

où  $E$  désigne la préimage de  $\text{Im}(\kappa)$  par  $\pi : \text{Aut}(\bar{G}(\bar{K})) \rightarrow \text{Out}(\bar{G}(\bar{K}))$ .

pour l'extension  $K''/K$  et de l'ensemble fini des places de  $K$  telles que  $\xi_v \neq 0$ . Pour ces places on sait, toujours d'après la proposition 4.12, que  $\xi_v$  provient d'un élément  $\psi_v \in H^1(K_v, G_0/Z)$  car les  $\eta(X_v)$  sont tous neutres.

Le théorème 4.8 nous dit alors que, si l'on note  $P$  l'ensemble des places totalement décomposées pour l'extension  $L'' = K''(\zeta_n)/K$ , ne divisant pas  $n$  et n'appartenant pas à  $S_0$ , il existe alors une classe  $\alpha \in H^1(K, G_0/Z)$  telle que

- pour toute place  $v \in S_0$ ,  $\alpha_v = \psi_v$  ;
- pour toute place  $v \notin S_0$ ,  $\alpha_v$  est cyclique et, si  $\alpha_v$  est ramifiée, alors elle est totalement ramifiée et  $v \in P$ .

On veut montrer que  $\alpha$  relève  $\xi$ , ce qui donnera par suite que  $\eta(X)$  est une classe neutre. Pour ce faire, on donne le même argument que dans l'étape 2 de la preuve du théorème 4.8 : soit  $v \notin S_0$ , on a alors la suite exacte

$$H^1(K_v, G_0) \rightarrow H^1(K_v, G_0/Z) \rightarrow H^2(K_v, Z).$$

Si  $\alpha_v$  est non ramifié, on sait que son image dans  $H^2(K_v, Z)$  est triviale car  $H^2(K_v^{\text{nr}}/K_v, Z) = 0$ . Sinon, on sait que  $v \in P$ , donc en particulier que  $\zeta_n \in K_v$  et que  $G_0$  est un  $K_v$ -groupe constant, et que  $\alpha_v$  est cyclique et totalement ramifiée. Le lemme 4.7 nous dit alors qu'il existe une classe  $\beta_v \in H^1(K_v, G_0)$  relevant  $\alpha_v$ , ce qui nous dit que l'image de  $\alpha_v$  dans  $H^2(K_v, Z)$  est nulle.

En résumant, on voit que pour toute place  $v \notin S_0$ , on a que  $\alpha_v$  provient d'un élément dans  $H^1(K_v, G_0)$  et alors que son image dans  $H^2(K_v, Z)$  est triviale, d'où l'on voit que l'image de  $\alpha_v$  dans  $H^2(K_v, Z)$  est égale à  $\xi_v$  pour toute place  $v \in \Omega_K$ . Enfin, il est facile de voir que  $Z$  est un  $K$ -groupe déployé par  $K'/K$ , ce qui nous dit qu'il vérifie les hypothèses du corollaire 4.6 et on a alors que  $\text{III}^2(K, Z) = 0$ , donc  $\alpha$  est bien un relèvement de  $\xi$ .

**Fin de la démonstration** La proposition 4.12 nous permet alors de conclure que  $\eta(X)$  est neutre, prouvant finalement l'existence d'un espace principal homogène  $P$  sous  $G'$  au-dessus de  $X$ . Dans le cas de caractéristique positive, la nullité de  $H^1(K, G')$  (cf. [Hrd75]) nous dit alors que  $X$  admet un  $K$ -point tout simplement en poussant le  $K$ -point de  $P = G'$  correspondant à l'élément neutre. Dans le cas de caractéristique 0 il faut remarquer sinon que, puisque  $n$  est premier à  $m(K')$ , il est notamment impair. Il est facile alors de voir par un argument de dévissage que, pour toute place archimédienne  $v$  de  $K$ , l'ensemble  $H^1(K_v, G_0)$  est trivial, d'où l'application

$$H^1(K, G_0) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_\infty} H^1(K_v, G_0),$$

est trivialement surjective, et il en est de même pour toute  $K$ -forme de  $\bar{G}$ . Ainsi, il suffit de suivre la démonstration de [Brv93, Lem. 7.10] en utilisant la surjectivité de l'application ci-dessus et le principe de Hasse pour le  $H^1$  des groupes semi-simples simplement connexes cité dans l'introduction pour démontrer de la même façon l'existence d'un  $K$ -point sur  $X$ , ce qui conclut. □

# Bibliographie

- [BS03] **C. L. Basile, A. Skorobogatov.** On the Hasse principle for bielliptic surfaces. In *Number theory and algebraic geometry*, volume 303 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 31–40. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [Bog87] **Fedor A. Bogomolov.** The Brauer group of quotient spaces of linear representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 51(3), 485–516, 688, 1987.
- [Bog89] **Fedor A. Bogomolov.** Brauer groups of the fields of invariants of algebraic groups. *Mat. Sb.* 180(2), 279–293, 1989.
- [BgKa85] **F. A. Bogomolov, P. I. Katsylo.** Rationality of some quotient varieties. *Mat. Sb. (N.S.)* 126(168), 584–589, 1985.
- [Bor91] **Armand Borel.** *Linear algebraic groups.* Graduate Texts in Mathematics, No. 126. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Brv90] **Mikhail Borovoi.** On weak approximation in homogeneous spaces of simply connected algebraic groups. In *Automorphic functions and their applications (Khabarovsk, 1988)*, pages 64–81. Acad. Sci. USSR Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990.
- [Brv91] **Mikhail Borovoi.** Weak approximation in homogeneous spaces of algebraic groups. *Soviet Math. Dokl.* 42(2), 247–251, 1991.
- [Brv92] **Mikhail Borovoi.** The Hasse principle for homogeneous spaces. *J. Reine Angew. Math.* 426, 179–192, 1992.
- [Brv93] **Mikhail Borovoi.** Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology. *Duke Math. J.* 72(1), 217–239, 1993.
- [Brv96] **Mikhail Borovoi.** The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer. *J. Reine Angew. Math.* 473, 181–194, 1996.
- [BDH13] **M. Borovoi, C. Demarche, D. Harari.** Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 46, 651–692, 2013.
- [BrKu00] **M. Borovoi, B. Kunyavskii.** Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group. *J. Algebra* 225(2), 804–821, 2000.
- [BLR90] **S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud.** *Néron models.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), No. 21. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Bou64] **Nicolas Bourbaki.** *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308, Hermann, Paris, 1964.

- [BT87] **F. Bruhat, J. Tits.** Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 34(3), 671–698, 1987.
- [Cas67] **John W. S. Cassels.** Global fields. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 42–84. Thompson, Washington, D.C., 1967.
- [Che89] **Vladimir Chernousov.** The Hasse principle for groups of type  $E_8$ . *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 306(5), 1059–1063, 1989.
- [CGR06] **V. Chernousov, P. Gille, Z. Reichstein.** Resolving  $G$ -torsors by abelian base extensions. *J. Algebra* 296(2), 561–581, 2006.
- [CGR08] **V. Chernousov, P. Gille, Z. Reichstein.** Reduction of structure for torsors over semilocal rings. *Manuscripta Math.* 126(4), 465–480, 2008.
- [CT95] **Jean-Louis Colliot-Thélène.** Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. In  *$K$ -theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [CT03] **Jean-Louis Colliot-Thélène.** Points rationnels sur les fibrations. In *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)*, volume 12 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 171–221. Springer, Berlin, 2003.
- [CT11] **Jean-Louis Colliot-Thélène.** Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences. In *Arithmetic geometry*, volume 2009 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–44. Springer, Berlin, 2011.
- [CT12] **Jean-Louis Colliot-Thélène.** Une remarque sur le groupe de Brauer non ramifié d’un quotient  $G/H$  avec  $G$  semi-simple simplement connexe. Preprint, 2012.  
<http://www.math.u-psud.fr/~colliot/GH25septembre12.pdf>
- [CT14] **Jean-Louis Colliot-Thélène.** Groupe de Brauer non ramifié de quotients par un groupe fini. *Proc. Amer. Math. Soc.* 142(5), 1457–1469, 2014.
- [CTK98] **J.-L. Colliot-Thélène, B. Kunyavskiĭ.** Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes de groupes linéaires. *J. Ramanujan Math. Soc.* 13(1), 37–49, 1998.
- [CTK06] **J.-L. Colliot-Thélène, B. Kunyavskiĭ.** Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d’espaces homogènes. *J. Algebraic Geom.* 15(4), 733–752, 2006.
- [CTO89] **J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren.** Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l’exemple d’Artin et Mumford. *Invent. Math.* 97(1), 141–158, 1989.
- [CTPS13] **J.-L. Colliot-Thélène, A. Pál, A. Skorobogatov.** Pathologies of the Brauer-Manin obstruction. Preprint, 2013.  
<http://arxiv.org/abs/1310.5055>
- [CTS07] **J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc.** The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group). In *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., pages 113–186. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.
- [Con02] **Brian Conrad.** A modern proof of Chevalley’s theorem on algebraic groups. *J. Ramanujan Math. Soc.* 17(1), 1–18, 2002.
- [Con07] **Brian Conrad.** Deligne’s notes on Nagata compactifications. *J. Ramanujan Math. Soc.* 22(3), 205–257, 2007.

- [CGP10] **B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad.** *Pseudo-reductive groups*. New Mathematical Monographs, No. 17. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [dJ13] **Aise J. de Jong.** A result of Gabber. Preprint, 2013.  
<http://www.math.columbia.edu/~dejong/papers/2-gabber.pdf>
- [Deb03] **Olivier Debarre.** Variétés rationnellement connexes (d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong). *Astérisque* 290, Exp. No. 905, ix, 243–266, 2003. Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002.
- [Del10] **Pierre Deligne.** Le théorème de plongement de Nagata. *Kyoto J. Math.* 50(4), 645–902, 2010.
- [Dem09] **Cyril Demarche.** Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale. *Algebra Number Theory* 3(2), 237–254, 2009.
- [Dem10] **Cyril Demarche.** Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis. *Math. Ann.* 346(4), 949–968, 2010.
- [Dou76] **Jean-Claude Douai.** 2-Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples. Thèse de l'Université de Lille I, 1976.
- [FSS98] **Y. Z. Flicker, C. Scheiderer, R. Sujatha.** Grothendieck's theorem on non-abelian  $H^2$  and local-global principles. *J. Amer. Math. Soc.* 11(3), 731–750, 1998.
- [Gal92] **L. Yu. Galitskiĭ.** On the existence of Galois sections. In *Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory*, volume 8 of *Adv. Soviet Math.*, pages 65–68. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [GA09] **Cristian D. González-Avilés.** Arithmetic duality theorems for 1-motives over function fields. *J. Reine Angew. Math.* 632, 203–231, 2009.
- [GA12] **Cristian D. González-Avilés.** Quasi-abelian crossed modules and nonabelian cohomology. *J. Algebra* 369, 235–255, 2012.
- [Gro62] **Alexander Grothendieck.** Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard : propriétés générales. In *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*, Exp. No. 236. Secrétariat mathématique, Paris, 1962.
- [Gro68a] **Alexander Grothendieck.** Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses. In *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, pages 46–66. North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [Gro68b] **Alexander Grothendieck.** Le groupe de Brauer. III. Exemples et compléments. In *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, pages 88–188. North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [Har94] **David Harari.** Méthode des fibrations et obstruction de Manin. *Duke Math. J.* 75(1), 221–260, 1994.
- [Har00] **David Harari.** Weak approximation and non-abelian fundamental groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 33(4), 467–484, 2000.
- [Har07] **David Harari.** Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini. *Bull. Soc. Math. France* 135(4), 549–564, 2007.
- [HaS02] **D. Harari, A. Skorobogatov.** Non-abelian cohomology and rational points. *Compositio Math.* 130(3), 241–273, 2002.

- [Hrd65] **Günter Harder**. Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen­gruppen. I. *Math. Z.* 90, 404–428, 1965.
- [Hrd66] **Günter Harder**. Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen­gruppen. II. *Math. Z.* 92, 396–415, 1966.
- [Hrd75] **Günter Harder**. Über die Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen. III. *J. Reine Angew. Math.* 274/275, 125–138, 1975. Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, III.
- [HpS] **Y. Harpaz, A. Skorobogatov**. Singular curves and the étale Brauer-Manin obstruction for surfaces. Preprint, to appear in *Ann. Sci. École Norm. Sup.*  
<http://arxiv.org/abs/1212.6019>
- [Hrt77] **Robin Hartshorne**. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Hum75] **James E. Humphreys**. *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [ILO12] **L. Illusie, Y. Laszlo, F. Orgogozo**. Travaux de Gabber sur l’uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. Séminaire à l’École polytechnique 2006–2008. Preprint, 2012.  
<http://arxiv.org/abs/1207.3648>
- [Kat83] **Pavel I. Katsylo**. Rationality of orbit spaces of irreducible representations of the group  $SL_2$ . *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 47(1), 26–36, 1983.
- [Kne65a] **Martin Kneser**. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über  $\mathfrak{p}$ -adischen Körpern. I. *Math. Z.* 88, 40–47, 1965.
- [Kne65b] **Martin Kneser**. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über  $\mathfrak{p}$ -adischen Körpern. II. *Math. Z.* 89, 250–272, 1965.
- [Kne66a] **Martin Kneser**. Hasse principle for  $H^1$  of simply connected groups. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 159–163. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.
- [Kne66b] **Martin Kneser**. Strong approximation. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 187–196. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.
- [Kol96] **János Kollár**. *Rational curves on algebraic varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), No. 32. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Liu02] **Qing Liu**. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, No. 6. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [LA13] **Giancarlo Lucchini Artech e**. Le groupe de Brauer non ramifi e sur un corps global de caractéristique positive. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 351(7-8), 299–302, 2013.
- [Man71] **Yuri I. Manin**. Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, pages 401–411. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [Mat70] **Hideyuki Matsumura**. *Commutative algebra*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.
- [MP12] **D. Maulik, B. Poonen**. Néron-Severi groups under specialization. *Duke Math. J.* 161(11), 2167–2206, 2012.

- [Mer95] **Alexander S. Merkurjev.** *K*-theory of simple algebras. In *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 65–83. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [Mil80] **James S. Milne.** *Étale cohomology*. Princeton Mathematical Series, No. 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [Mum70] **David Mumford.** *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Oxford University Press, London, 1970.
- [Nef13] **Danny Neftin.** The tame and wild Grunwald problems. Preprint, 2013.  
<http://www-personal.umich.edu/~neftin/tame8.pdf>
- [Neu79] **Jürgen Neukirch.** On solvable number fields. *Invent. Math.* 53(2), 135–164, 1979.
- [NSW08] **J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg.** *Cohomology of number fields*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften No. 323. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.
- [Poo10] **Bjorn Poonen.** Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers. *Ann. of Math. (2)* 171(3), 2157–2169, 2010.
- [Pop94] **Vladimir Popov.** Sections in invariant theory. In *The Sophus Lie Memorial Conference (Oslo, 1992)*, pages 315–361. Scand. Univ. Press, Oslo, 1994.
- [Pra77] **Gopal Prasad.** Strong approximation for semi-simple groups over function fields. *Ann. of Math. (2)* 105(3), 553–572, 1977.
- [Ray70] **Michel Raynaud.** *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*. Lecture Notes in Mathematics, No. 119. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [Ros02] **Michael Rosen.** *Number theory in function fields*. Graduate Texts in Mathematics, No. 210. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [San81] **Jean-Jacques Sansuc.** Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.* 327, 12–80, 1981.
- [Sel51] **Ernst S. Selmer.** The Diophantine equation  $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ . *Acta Math.* 85, 203–362, 1951.
- [SGA3I] *Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, No. 151. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [SGA3II] *Schémas en groupes. II : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, No. 152. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [SGA3III] *Schémas en groupes. III : Structure des schémas en groupes réductifs*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, No. 153. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Ser65] **Jean-Pierre Serre.** Zeta and *L* functions. In *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pages 82–92. Harper & Row, New York, 1965.
- [Ser68] **Jean-Pierre Serre.** *Corps Locaux*. Publications de l'Université de Nancago, No. 8. Hermann, Paris, deuxième édition, 1968.

- [Ser70] **Jean-Pierre Serre**. *Cours d'arithmétique*. Collection SUP : “Le Mathématicien”, No 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [Ser90] **Jean-Pierre Serre**. Spécialisation des éléments de  $\mathrm{Br}_2(\mathbf{Q}(T_1, \dots, T_n))$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 311(7), 397–402, 1990.
- [Ser94] **Jean-Pierre Serre**. *Cohomologie galoisienne*. Lecture Notes in Mathematics, No. 5. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.
- [Sko99] **Alexei Skorobogatov**. Beyond the Manin obstruction. *Invent. Math.* 135(2), 399–424, 1999.
- [Sko01] **Alexei Skorobogatov**. *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Sko09] **Alexei Skorobogatov**. Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction. *Math. Ann.* 344(3), 501–510, 2009.
- [Spr66] **Tonny A. Springer**. Nonabelian  $H^2$  in Galois cohomology. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 164–182. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.
- [Spr98] **Tonny A. Springer**. *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, No. 9. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.
- [Vos70] **Valentin E. Voskresenskiĭ**. Birational properties of linear algebraic groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 34, 3–19, 1970.
- [Wat79] **William C. Waterhouse**. *Introduction to affine group schemes*. Graduate Texts in Mathematics, No 66. Springer-Verlag, New York, 1979.