



**HAL**  
open science

# Modélisation géométrique et mécanique pour les systèmes mécatroniques

Mariem Miladi Chaabane

► **To cite this version:**

Mariem Miladi Chaabane. Modélisation géométrique et mécanique pour les systèmes mécatroniques. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2014. Français. NNT : 2014ECAP0004 . tel-01087264

**HAL Id: tel-01087264**

**<https://theses.hal.science/tel-01087264>**

Submitted on 25 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse

Présentée par

**Mariem MILADI CHAABANE**

pour l'obtention de

**GRADE DE DOCTEUR**

**Spécialité : Génie Mécanique**

**Laboratoire d'accueil : U2MP à Tunis / LISMMA à France**

---

## **Modélisation géométrique et mécanique pour les systèmes mécatroniques**

---

Soutenue le Mercredi 15 janvier 2014 devant un jury composé de :

---

<b>M. HADDAR Mohamed</b>	<b>Professeur des universités, ENIS, Tunisie</b>	
<b>M. RIVIERE Alain</b>	<b>Professeur des universités, SUPMECA, France</b>	
<b>M. CHOUCANE Mnaouar</b>	<b>Professeur des universités, ENIS, Tunisie</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mme. PRELLE Christine</b>	<b>Professeur des universités, UTC, France</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. KARRA Chafik</b>	<b>Professeur des universités, IPEIS, Tunisie</b>	
<b>M. GIAVITTO Jean-Louis</b>	<b>Professeur des universités, IRCAM, France</b>	
<b>M. CHOLEY Jean Yves</b>	<b>Maître de Conférences, SUPMECA, France</b>	
<b>M. PLATEAUX Régis</b>	<b>Maître de Conférences, SUPMECA, France</b>	
<b>M. SPICHER Antoine</b>	<b>Maître de Conférences, Faculté des Sciences et Technologie, France</b>	
<b>M. DUGOWSON Stéphane</b>	<b>Maître de Conférences, SUPMECA, France</b>	



## Remerciement

Le travail de recherche exposé dans ce mémoire de thèse a été réalisé en cotutelle entre l'Unité de Mécanique, Modélisation et Productique (U2MP) à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS - Tunisie) et le Laboratoire d'Ingénierie des Structures Mécaniques et des Matériaux (LISMMA) à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris (Supméca – France).

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et toute ma reconnaissance à mes deux directeurs de thèse **Monsieur Mohamed HADDAR**, Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, et **Monsieur Alain RIVIERE**, Professeur des universités à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour avoir assuré la direction de mes travaux et pour la qualité de leur encadrement, leurs conseils et la confiance qu'ils m'ont accordée.

Je tiens à exprimer mes remerciements à mes encadreur **Monsieur Chafik KARRA**, Professeur des universités à l'Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax, et **Monsieur Jean-Yves CHOLEY**, Maître de Conférences à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour la qualité de leur encadrement ainsi que pour leurs précieux conseils. En particulier je tiens à remercier mon encadreur **Monsieur Régis PLATEAUX**, Maître de Conférences à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour ses conseils scientifiques, l'encouragement et la confiance qu'il m'a accordé ainsi que pour les discussions scientifiques et les échanges qui nous ont permis de mieux appréhender le sujet de la thèse.

Je remercie **Monsieur CHOUCANE Mnaouar**, Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, ainsi que **Madame PRELLE Christine**, Professeur des universités à l'Université de Technologie de Compiègne, d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à **Monsieur GLAVITTO Jean-Louis**, Professeur des universités à l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/ Musique, à **Monsieur SPICHER Antoine**, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et Technologie, ainsi qu'à **Monsieur DUGOWSON Stéphane**, Maître de Conférences à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, pour avoir accepté de prendre part au jury.

Finalement, je tiens à remercier du fond du cœur ma famille sans qui je ne serais jamais arrivée là.



# Sommaire

<i>Introduction générale</i> .....	1
<b>I. Etude bibliographique</b> .....	4
<b>1. Partie 1 : Généralité sur les systèmes mécatroniques</b> .....	5
1.1. Historique .....	5
1.2. Définitions liées à la mécatronique .....	5
1.3. Différentes applications de la mécatronique .....	8
1.4. Conception des systèmes mécatroniques.....	9
1.5. Les différents niveaux de représentation .....	11
1.6. Panorama des outils de conception mécatronique .....	12
<b>2. Partie 2 : Outil de modélisation mathématique</b> .....	14
2.1. Les graphes .....	14
2.1.1. Définition .....	14
2.1.2. Représentation des graphes .....	16
2.2. Les complexes simpliciaux .....	17
2.2.1. Simplexe.....	18
2.2.2. Complexe Simplicial .....	18
2.2.3. Complexe Simplicial abstrait .....	19
2.3. Les complexes cellulaires.....	19
2.3.1. Les cellules.....	20
2.3.2. Les complexes cellulaires.....	20
2.3.3. Les complexes cellulaires abstraits .....	20
2.4. Les complexes de chaîne et de cochaîne .....	21
2.4.1. Complexe de chaîne .....	22
2.4.2. Les complexes de cochaîne .....	23
<b>3. Conclusion</b> .....	24
<b>II. Approche topologique pour la modélisation des systèmes méca(tro)niques</b> .....	25
<b>1. Apport de la topologie pour la modélisation des systèmes multi physiques</b> .....	26
1.1. Intérêt de la théorie des graphes.....	26
1.1.1. Analogie inverse et analogie directe .....	28
1.1.2. Loi de Kirchhoff généralisée .....	28
1.2. Graphe topologique KBR.....	30
<b>2. Essais précédents : langage MODELICA</b> .....	37
<b>3. Notre approche topologique</b> .....	39
3.1. Langage MGS.....	40
3.1.1. Les collections topologiques .....	41
3.1.2. Les transformations .....	44
3.1.3. Quelques applications .....	45
3.2. Démarche générique de l'application des collections topologiques et leurs transformations dans la modélisation .....	47

<b>4. Conclusion.....</b>	<b>53</b>
<b>III. Modélisation des structures de barres et de poutres par une approche topologique....</b>	<b>54</b>
<b>1. Treillis à N barres à structure pyramidale .....</b>	<b>55</b>
<b>1.1. Description du système étudié.....</b>	<b>55</b>
<b>1.2. Graphe topologique KBR.....</b>	<b>56</b>
<b>1.3. Modélisation dans MGS .....</b>	<b>59</b>
<b>1.4. Cas particuliers .....</b>	<b>61</b>
1.4.1. Cas 1 : Treillis à trois barres.....	62
1.4.2. Cas 2 :Treillis à quatre barres.....	69
<b>2. Généralisation aux structures de poutres et de barres.....</b>	<b>71</b>
<b>2.1. Bref aperçu sur les structures de barres et de poutres.....</b>	<b>71</b>
2.1.1. Structures de barres .....	71
2.1.2. Structures de poutres .....	74
<b>2.2. Modélisation topologique des structures de barres.....</b>	<b>77</b>
2.2.1. Graphe KBR.....	77
2.2.2. Modélisation MGS .....	79
2.2.3. Exemple de structure de barres : Treillis à deux barres.....	81
<b>2.3. Modélisation topologique des structures de poutres.....</b>	<b>85</b>
2.3.1. Graphe KBR.....	85
2.3.2. Modélisation MGS .....	86
2.3.3. Application1 :Structure de poutres planes: portique .....	86
2.3.4. Application 2: ossature spatiale.....	91
<b>3. Conclusion.....</b>	<b>93</b>
<b>IV. Application dans le cas des systèmes mécatroniques.....</b>	<b>94</b>
<b>1. Structures piézoélectriques.....</b>	<b>95</b>
<b>1.1. Bref aperçu sur la piézoélectricité .....</b>	<b>95</b>
1.1.1. Effets piézoélectriques .....	95
1.1.2. Piézoélectricité linéaire .....	96
1.1.3. Modes de couplage électromécanique.....	97
<b>1.2. Application 1 : Stack piézoélectrique à n-éléments.....</b>	<b>98</b>
1.2.1. Description .....	98
1.2.2. Graphe topologique KBR.....	99
1.2.3. Modélisation MGS .....	102
1.2.4. Cas particulier et résultats numériques.....	103
<b>1.3. Application 2 : treillis piézoélectrique plan .....</b>	<b>107</b>
1.3.1. Description .....	107
1.3.2. Graphe topologique KBR.....	107
1.3.3. Modélisation MGS .....	108
1.3.4. Résultats Numériques.....	110
<b>2. Etude dynamique d'un réducteur simple étage à denture droite par une approche topologique.....</b>	<b>113</b>
<b>2.1. Description du système étudié.....</b>	<b>113</b>
2.1.1. Modélisation des deux arbres .....	113
2.1.2. Modélisation de l'engrenage (Pignon/roue).....	115
2.1.3. Modélisation du moteur à courant continu .....	116

---

<b>2.2.</b>	<b>Modélisation du système couplé basée sur la méthode des éléments finis MEF .....</b>	<b>117</b>
<b>2.3.</b>	<b>Graphe KBR.....</b>	<b>118</b>
2.3.1.	Graphe KBR du moteur.....	118
2.3.2.	Graphe KBR de l'arbre moteur et récepteur : poutre 3D.....	122
2.3.3.	Graphe KBR de l'engrenage .....	123
2.3.4.	Graphe KBR du système couplé .....	124
<b>2.4.</b>	<b>Modélisation MODELICA .....</b>	<b>126</b>
<b>2.5.</b>	<b>Modélisation MGS .....</b>	<b>127</b>
<b>2.6.</b>	<b>Résultats de simulation.....</b>	<b>129</b>
<b>3.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>132</b>
	<i>Conclusion générale.....</i>	<i>133</i>
	<i>Annexe 1 : Equation de mouvement de l'engrenage (roue/pignon) .....</i>	<i>135</i>
	<i>Annexe 2 : Variation de la raideur d'engrènement.....</i>	<i>137</i>
	<i>Références bibliographiques.....</i>	<i>139</i>

## Table des illustrations

<b>Figure 1.</b> <i>Pluridisciplinarité de la mécatronique</i> .....	7
<b>Figure 2.</b> <i>Les différents domaines d'application des systèmes mécatroniques</i> .....	9
<b>Figure 3.</b> <i>Intégration croissante de la mécanique et de l'électronique [Plateaux, 2011]</i> .....	10
<b>Figure 4.</b> <i>Cycle de conception en V des systèmes mécatroniques</i> .....	11
<b>Figure 5.</b> <i>Les outils et méthodologies les plus utilisés pour le pré-dimensionnement en conception mécatronique</i> .....	13
<b>Figure 6.</b> <i>Exemple d'un graphe non orienté</i> .....	15
<b>Figure 7.</b> <i>Exemple d'un multi graphe non orienté</i> .....	15
<b>Figure 8.</b> <i>Exemple d'un graphe orienté</i> .....	16
<b>Figure 9.</b> <i>Exemple de graphe (a) matrice d'adjacence associée (b) matrice d'incidence associée</i> .....	17
<b>Figure 10.</b> <i>Exemple de n-simplexe</i> .....	18
<b>Figure 11.</b> <i>Exemple de complexe simplicial</i> .....	19
<b>Figure 12.</b> <i>Contre exemple de complexe simplicial</i> .....	19
<b>Figure 13.</b> <i>Exemples de k cellules</i> .....	20
<b>Figure 14.</b> <i>Exemple de complexe cellulaire abstrait de dimension 2</i> .....	21
<b>Figure 15.</b> <i>Tore et bouteille de Klein : à gauche, un complexe cellulaire représentant un tore, à droite une bouteille de Klein ; les traits clairs correspondent aux 2-cellules. Au centre, les deux complexes partagent le même graphe d'incidence mais correspondent à deux objets topologiquement différents [Spicher, 2006].</i> .....	21
<b>Figure 16.</b> <i>Exemple de complexe cellulaire et son complexe de chaîne lié par une relation de bord</i> .....	22
<b>Figure 17.</b> <i>Calcul de bord pour un complexe de chaîne dans <math>C(K, \mathbb{Z}, \partial)</math></i> .....	22
<b>Figure 18.</b> <i>Exemple de complexe de chaîne et de cochaîne</i> .....	23
<b>Figure 19.</b> <i>Graphe équivalent au problème des sept ponts</i> .....	26
<b>Figure 20.</b> <i>Mesure réalisée sur un élément quelconque</i> .....	27
<b>Figure 21.</b> <i>Loi des nœuds généralisée</i> .....	29
<b>Figure 22.</b> <i>Loi des mailles généralisée</i> .....	29
<b>Figure 23.</b> <i>Loi de déformation élastique pour un ressort</i> .....	30
<b>Figure 24.</b> <i>Graphe topologique KBR</i> .....	31
<b>Figure 25.</b> <i>Présentation de graphe KBR sous forme de complexes de chaînes et de cochaînes</i> .....	31
<b>Figure 26.</b> <i>Le graphe topologique KBR basé sur l'analogie inverse dans le cas d'un ressort en traction et une résistance électrique</i> .....	33
<b>Figure 27.</b> <i>Circuit électrique</i> .....	34
<b>Figure 28.</b> <i>Le graphe d'interconnexion et la matrice d'incidence associés au circuit électrique</i> .....	34
<b>Figure 29.</b> <i>Graphe topologique du réseau électrique</i> .....	35
<b>Figure 30.</b> <i>De la géométrie dans la topologie dans le cas du treillis</i> .....	37
<b>Figure 31.</b> <i>Résistance électrique et le code MODELICA associé</i> .....	38
<b>Figure 32.</b> <i>Déclaration des variables traversant la broche (a) graphisme associé (b) code associé</i> .....	38
<b>Figure 33.</b> <i>Assemblage de résistances électrique (a) graphique (b) code Modelica (c) code mis à plat</i> .....	39
<b>Figure 34.</b> <i>Exemple de collection topologique et son complexe cellulaire associé</i> .....	41
<b>Figure 35.</b> <i>Exemple de séquence</i> .....	42
<b>Figure 36.</b> <i>Exemple de collection topologique telque la relation <math>\partial \circ \partial = 0</math> n'est pas vérifiée</i> .42	

<b>Figure 37.</b> Différents types de collections topologiques dans MGS.....	43
<b>Figure 38.</b> Exemple de chaîne abstraite et code MGS associé.....	44
<b>Figure 39.</b> Exemple de transformation : calcul factorielle .....	45
<b>Figure 40.</b> Insertion d'un sommet.....	45
<b>Figure 41.</b> Modélisation déclarative d'un processus semblable à la neurulation [the MGS home page].....	46
<b>Figure 42.</b> Les colonies de fourmis cherchent de la nourriture dans MGS [the MGS home page].....	46
<b>Figure 43.</b> Le principe de subdivision de la surface en utilisant les collections topologiques et les patches [The MGS home page] .....	46
<b>Figure 44.</b> Les étapes de l'application des collections topologiques et leurs transformations dans la modélisation.....	47
<b>Figure 45.</b> Système Bâti/Ressort .....	48
<b>Figure 46.</b> Déclaration de ressort sous forme de complexe cellulaire.....	49
<b>Figure 47.</b> Déclaration de ressort sous forme de collection topologique .....	50
<b>Figure 48.</b> Résultats de simulations (a) déplacement du nœud libre (b) Réaction à l'appui ..	52
<b>Figure 49.</b> Ressort (a) Modèle MODELICA (b) erreur de calcul du déplacement (c) erreur du calcul de la réaction à l'appui .....	52
<b>Figure 50.</b> Comparaison entre les équations générées par MODELICA et MGS .....	53
<b>Figure 51.</b> Structure du treillis à N barres .....	55
<b>Figure 52.</b> Déplacement du nœud $V_0$ .....	56
<b>Figure 53.</b> Treillis (a) graphe topologique (b) matrice d'incidence transposé.....	57
<b>Figure 54.</b> Graphe topologique primal des déplacements .....	57
<b>Figure 55.</b> Graphe topologique dual des forces .....	58
<b>Figure 56.</b> Graphe topologique KBR du treillis à N barres (déplacement/force).....	59
<b>Figure 57.</b> Représentation du treillis sous forme de complexe cellulaire .....	60
<b>Figure 58.</b> Structure du treillis à trois barres .....	62
<b>Figure 59.</b> (a) graphe topologique (b) Matrice d'incidence .....	63
<b>Figure 60.</b> Graphe topologique du treillis à trois barres .....	64
<b>Figure 61.</b> Présentation du treillis à trois barres sous forme de complexe cellulaire .....	65
<b>Figure 62.</b> (a) liaison rotule (b) barre (c) force .....	66
<b>Figure 63.</b> Code MODELICA mis à plat pour la fixation .....	66
<b>Figure 64.</b> Schéma du treillis à trois barres dans MODELICA .....	67
<b>Figure 65.</b> Modélisation du treillis à trois barres dans RDM6 .....	68
<b>Figure 66.</b> Déformation du treillis à trois barres .....	68
<b>Figure 67.</b> Treillis à quatre barres .....	69
<b>Figure 68.</b> Élément de barre 2D.....	72
<b>Figure 69.</b> Élément de barre 3D.....	72
<b>Figure 70.</b> Equilibre d'une barre .....	73
<b>Figure 71.</b> Equilibre d'un nœud.....	73
<b>Figure 72.</b> Equilibre d'un nœud soumis à une force extérieure .....	74
<b>Figure 73.</b> Élément de poutre 2D .....	74
<b>Figure 74.</b> Élément de poutre 3D .....	75
<b>Figure 75.</b> Equilibre d'une structure de poutres (a) équilibre d'une poutre (b) Equilibre d'un nœud .....	76
<b>Figure 76.</b> Élément de barre (a) graphe topologique (b) matrice d'incidence .....	77
<b>Figure 77.</b> Graphe KBR d'un élément de barre .....	77
<b>Figure 78.</b> Graphe KBR d'une structure de barres .....	79
<b>Figure 79.</b> Exemple d'une structure de barres et sa présentation sous forme de complexe cellulaire.....	80

<b>Figure 80.</b> Application des collections topologiques et leurs transformations pour la modélisation d'une structure de barres .....	81
<b>Figure 81.</b> Treillis à deux barres .....	81
<b>Figure 82.</b> Treillis à deux barres (a) graphe topologique (b) matrice d'incidence .....	82
<b>Figure 83.</b> Graphe topologique KBR du treillis à deux barres .....	82
<b>Figure 84.</b> Application des collections topologiques et leurs transformations pour la modélisation d'une structure de poutres .....	86
<b>Figure 85.</b> Portique .....	87
<b>Figure 86.</b> Présentation du portique sous forme de collection topologique .....	89
<b>Figure 87.</b> Ossature spatiale constituée de deux poutres .....	91
<b>Figure 88.</b> Effet piézoélectrique direct .....	96
<b>Figure 89.</b> Effet piézoélectrique inverse .....	96
<b>Figure 90.</b> Principaux modes de vibrations d'une céramique piézoélectrique .....	97
<b>Figure 91.</b> (a) Stacks piézoélectrique (b) élément d'un stack piézoélectrique .....	98
<b>Figure 92.</b> Graphe linéaire pour un élément piézoélectrique .....	100
<b>Figure 93.</b> Graphe topologique KBR pour un élément piézoélectrique .....	100
<b>Figure 94.</b> Stack piézoélectrique à n éléments piézoélectriques (a) Graphe linéaire (b) matrice d'incidence .....	101
<b>Figure 95.</b> Graphe topologique KBR pour un stack piézoélectrique n éléments piézoélectriques .....	101
<b>Figure 96.</b> Les différentes étapes de modélisation d'un élément piézoélectrique en appliquant les collections topologiques et les transformations .....	103
<b>Figure 97.</b> Treillis piézoélectrique plan à trois barres .....	107
<b>Figure 97.</b> Treillis piézoélectrique à trois barres (a) graphe linéaire (b) matrice d'incidence .....	107
<b>Figure 99.</b> Graphe KBR pour le treillis piézoélectrique .....	108
<b>Figure 100.</b> Les différentes étapes de modélisation du treillis piézoélectrique en appliquant les collections topologiques et les transformations .....	110
<b>Figure 101.</b> Etude de l'effet piézoélectrique du treillis .....	111
<b>Figure 102.</b> (a) SOLID5 (b) LINK8 (c) modélisation du treillis piézoélectrique .....	111
<b>Figure 103.</b> Réducteur simple étage à denture droite .....	113
<b>Figure 104.</b> Élément de poutre à deux nœuds et à six degré de liberté .....	114
<b>Figure 105.</b> Engrenage (modèle dynamique proposé par Gregory et al.) (Gregory et al., 1962) .....	115
<b>Figure 106.</b> Schéma équivalent d'un moteur électrique .....	116
<b>Figure 107.</b> Graphe topologique d'un moteur à courant continu .....	118
<b>Figure 108.</b> Graphe KBR d'une résistance .....	119
<b>Figure 109.</b> Graphe KBR d'une inductance .....	119
<b>Figure 110.</b> Graphe KBR d'une FEM .....	120
<b>Figure 111.</b> Graphe KBR d'une inertie .....	121
<b>Figure 112.</b> Graphe KBR d'un frottement .....	121
<b>Figure 113.</b> Graphe KBR du moteur à courant continu .....	122
<b>Figure 114.</b> Graphe KBR d'un élément de poutre 3D .....	123
<b>Figure 115.</b> Graphe KBR de l'engrenage .....	123
<b>Figure 116.</b> Graphe linéaire du réducteur .....	124
<b>Figure 117.</b> Réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides .....	125
<b>Figure 118.</b> Graphe linéaire du réducteur .....	125
<b>Figure 119.</b> Réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides .....	126
<b>Figure 120.</b> Modèle MODELICA du réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides .....	127

---

<b>Figure 121.</b> <i>Modèle MODELICA du réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides</i> .....	127
<b>Figure 122.</b> <i>Modélisation du réducteur par les collections topologiques et leurs transformations</i> .....	128
<b>Figure 123.</b> <i>Le courant dans le moteur</i> .....	130
<b>Figure 124.</b> <i>Couple moteur</i> .....	130
<b>Figure 125.</b> <i>Variation de la raideur d'engrènement</i> .....	131
<b>Figure 126.</b> <i>Rotation arbre moteur (a) arbre rigide (b) arbre non rigide</i> .....	131
<b>Figure 127.</b> <i>Rotation de l'arbre récepteur (a) arbre rigide (b) arbre non rigide</i> .....	132
<b>Figure 128.</b> <i>Erreur de transmission</i> .....	132

# Introduction générale

---

- *Problématique*

Aujourd'hui grâce au développement technologique et à cause des consommateurs de plus en plus exigeants quant au confort, assistance, prix,..., de nouveaux systèmes, dit systèmes mécatroniques, sont apparus. Ces systèmes se caractérisent par rapport aux systèmes mécaniques ordinaires, par leurs caractères multi-domaines et multi-physiques avec un haut niveau d'intégration de l'électronique, mécanique, automatique et informatique. Dans ce contexte, de nombreuses méthodologies et outils de conception ont été développés pour la modélisation des différents domaines de la mécatronique. Alors, les industriels cherchent à passer de plusieurs modèles à un modèle générique de représentation de toutes les physiques d'un système mécatronique. Cette approche doit assurer une intégration multi-physique plus importante.

Cette thèse se focalise alors sur l'application d'une démarche de modélisation unifiée pour les systèmes complexes (méca(tro)nique ou multi-physique). Cette approche doit être capable de répondre aux exigences des consommateurs et des industriels.

- *Méthodologie*

La topologie peut être vue comme une base d'unification pour la modélisation. En effet, une même structure topologique peut présenter plusieurs physiques. Alors nous sommes intéressés à adopter une approche topologique pour la modélisation. Cette approche doit être capable de dissocier la topologie (loi d'interconnexion) et le comportement (la physique) du système étudié. L'application de cette approche est basée sur le langage MGS, une abréviation de « Modèle Général de Système ». La structure de données de base du langage MGS est la collection topologique qui est un ensemble de positions structurées selon une certaine topologie et décorées par des valeurs. Les collections topologiques permettent la représentation de l'état d'un système dynamique et elles sont manipulées par les transformations. Une transformation est une fonction définie par cas sous la forme de règles de réécriture s'appuyant sur la notion de voisinage, contrairement aux langages orientés objets qui décrivent les constituants structurels d'un système avant de définir leurs interactions. Dans MGS, on commence par définir la structure topologique c'est-à-dire les lois

d'interconnexions des différents constituants d'un système puis on définit le comportement local de chacun de ces constituants.

Dans notre approche topologique, les collections topologiques sont alors utilisées pour présenter la topologie du système (c'est à dire la loi d'interconnexion de ces différents composants) et les transformations pour spécifier la loi de comportement locale de chacun de ses composants. Cette approche nous permettra ainsi de :

- avoir des modèles génériques locaux permettant l'optimisation du comportement du système global ;
- tenir compte de la structure topologique ;
- permettre la simplification du modèle.

Ces différents points seront traités et illustrés avec plus d'explication dans les différentes parties de cette thèse.

- ***Organisation***

Ce document se décompose comme suit :

*Chapitre 1*

Le premier chapitre, consacré à l'établissement du cadre général de ce travail de thèse, est composé de deux parties. La première partie de ce chapitre est dédiée à l'introduction des systèmes mécatroniques. Après avoir décrit l'historique et présenté les différentes définitions des systèmes mécatroniques, la conception de ces systèmes est abordée d'une manière très générale. Cette partie se termine par une présentation des outils CAO les plus utilisés dans la conception des systèmes mécatroniques. La deuxième partie de ce chapitre est dédiée à la présentation des outils de modélisation mathématiques issue de la topologie algébrique et qui ont été l'origine du développement des notions de collections topologiques et de transformations. Cette partie inclut les différentes définitions en relation avec la théorie des graphes, les complexes simpliciaux, les complexes cellulaires ainsi que les complexes de chaînes et de cochaînes.

## *Chapitre 2*

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de l'approche topologique adoptée dans cette thèse. Ce chapitre contient un état de l'art présentant l'apport de la topologie dans la modélisation des systèmes multi-physiques ainsi que la démarche générique de l'application des collections topologiques dans la modélisation. Cette démarche est détaillée dans le cas d'un ressort en traction.

## *Chapitre 3*

Le troisième chapitre est consacré à l'application de cette approche topologique pour la modélisation des structures de barres et de poutres. Tout d'abord, nous avons appliqué cette approche dans le cas particulier d'un treillis à structure pyramidale constitué de  $n$  barres. Ensuite, nous l'avons appliquée aux structures de barres planes et spatiales. Finalement, nous avons généralisé cette approche dans le cas des structures de poutres planes et spatiales.

Pour valider cette approche, plusieurs cas sont étudiés (treillis à trois barres, portique, ossature spatiale,...). Les différents résultats obtenus sont comparés par rapport à ceux obtenus par le logiciel RDM6 et/ ou par MODELICA.

## *Chapitre 4*

Dans le quatrième chapitre, l'application des collections topologiques et leurs transformations est étendue à la modélisation de systèmes mécaniques plus complexes. Deux cas sont étudiés : le premier est l'application de cette approche topologique aux structures piézoélectriques (stack piézoélectrique et treillis piézoélectrique) et le deuxième cas est l'application à la modélisation d'un réducteur simple étage à denture droite. Pour les différents cas étudiés, nous avons commencé par la détermination du graphe topologique KBR du système à partir des graphes topologique KBR de ces différents composants. Puis, nous avons présenté les principales étapes de modélisation en utilisant le langage MGS : les collections topologiques sont utilisées pour spécifier la loi d'interconnexion entre ces différentes composantes et les transformations sont utilisées pour spécifier la loi de comportement locale de chaque composant. A la fin, les résultats obtenus sont comparés par rapport à ceux obtenus par le logiciel de calcul et d'analyse par la méthode des éléments finis ANSYS dans le cas des structures piézoélectriques et par le langage MODELICA dans le cas du réducteur simple étage à denture droite.

# I. Etude bibliographique

## Sommaire

<b>1. Partie 1 : Généralité sur les systèmes mécatroniques.....</b>	<b>5</b>
1.1. Historique .....	5
1.2. Définitions liées à la mécatronique .....	5
1.3. Différentes applications de la mécatronique .....	8
1.4. Conception des systèmes mécatroniques.....	9
1.5. Les différents niveaux de représentation .....	11
1.6. Panorama des outils de conception mécatronique .....	12
<b>2. Partie 2 : Outil de modélisation mathématique .....</b>	<b>14</b>
2.1. Les graphes.....	14
2.1.1. Définition .....	14
2.1.2. Représentation des graphes .....	16
2.2. Les complexes simpliciaux .....	17
2.2.1. Simplexe.....	18
2.2.2. Complexe Simplicial .....	18
2.2.3. Complexe Simplicial abstrait .....	19
2.3. Les complexes cellulaires.....	19
2.3.1. Les cellules.....	20
2.3.2. Les complexes cellulaires.....	20
2.3.3. Les complexes cellulaires abstraits .....	20
2.4. Les complexes de chaîne et de cochaîne .....	21
2.4.1. Complexe de chaîne .....	22
2.4.2. Les complexes de cochaîne .....	23
<b>3. Conclusion .....</b>	<b>24</b>

## Résumé

Ce chapitre est consacré à l'établissement du cadre général de ce travail de thèse et il est composé de deux parties.

La première partie est dédiée à l'introduction des systèmes mécatroniques. Après avoir décrit l'historique et présenté les différentes définitions des systèmes mécatroniques, la conception de ces systèmes est abordée d'une manière très générale. Cette partie se termine par une présentation des outils CAO les plus utilisés pour la conception des systèmes mécatroniques.

La deuxième partie est dédiée à la présentation des outils de modélisation mathématiques issue de la topologie algébrique et qui ont été à l'origine du développement des notions de collections topologiques et de transformations. Dans cette partie, nous commençons par présenter les outils fondamentaux de la topologie algébriques. Ensuite, nous présentons les différentes définitions en relation avec la théorie des graphes et les complexes simpliciaux. Les complexes simpliciaux généralisent les concepts de graphes aux dimensions supérieures et ils sont aussi étendus pour pouvoir utiliser des éléments de base plus généraux appelés les complexes cellulaires. Les complexes cellulaires étendent les complexes simpliciaux pour ne plus considérer uniquement des simplexes mais des cellules quelconques. Un complexe cellulaire permet la représentation discrète d'un espace à travers un ensemble de cellules topologiques organisées suivant une relation de voisinage appelée relation d'incidence. Le complexe cellulaire fournit la description de la structure du système. En décorant cet espace par des valeurs, on aboutit aux notions de chaîne et de cochaîne topologique. Ces notions sont aussi issues de la topologie algébrique et permettent d'associer des éléments d'un groupe mathématique aux cellules d'un complexe.

## 1. Partie 1 : Généralité sur les systèmes mécatroniques

### 1.1. Historique

Avant 1950, les machines sont essentiellement des ensembles électromécaniques. Dans les années cinquante, les semi-conducteurs sont développés avec l'apparition de l'électronique de puissance et de commande. Dans les années 1960-70, les calculateurs sont apparus permettant ainsi la conception de systèmes de contrôle des machines par logiciel. Ces calculateurs sont plus fiables, plus flexibles et plus performants puisqu'ils sont programmables.

En 1969, le terme mécatronique (construit à partir de la fusion des mots mécanique et électrique) a été utilisé pour la première fois, par l'ingénieur Japonais TETSURO MORI [MORI, 1969] de la compagnie japonaise YASKAWA Electric Corporation pour désigner le contrôle des moteurs électriques par ordinateur [Yaskawa Electric Corporation]. Le terme « mechatronics » (en Anglais) a été déposé comme marque internationale par cette entreprise en 1969, (marque enregistrée en 1971) [Japan Trade Mark Kohhoku, 1971]. Le mot ayant une portée générale et étant utilisé de plus en plus largement dans le jargon technique, YASKAWA abandonna ses droits en 1982.

Au milieu des années 80, la mécatronique se définissait alors comme une discipline transverse de l'électronique et de la mécanique (mécanique au sens large incluant l'hydraulique, la thermique, etc.). Les années 1990 ont vu un développement important de l'utilisation du terme avec de très nombreuses propositions de définitions et une évolution sensible de son périmètre et de son sens. La mécatronique n'est plus simplement à l'interface de ces deux domaines et inclut bien d'autres disciplines comme celles issues des technologies de l'information (acquisition de données, commande, intelligence artificielle,...).

### 1.2. Définitions liées à la mécatronique

De nombreuses définitions peuvent être trouvées dans la littérature technique et scientifique.

Parmi ces définitions, on peut citer :

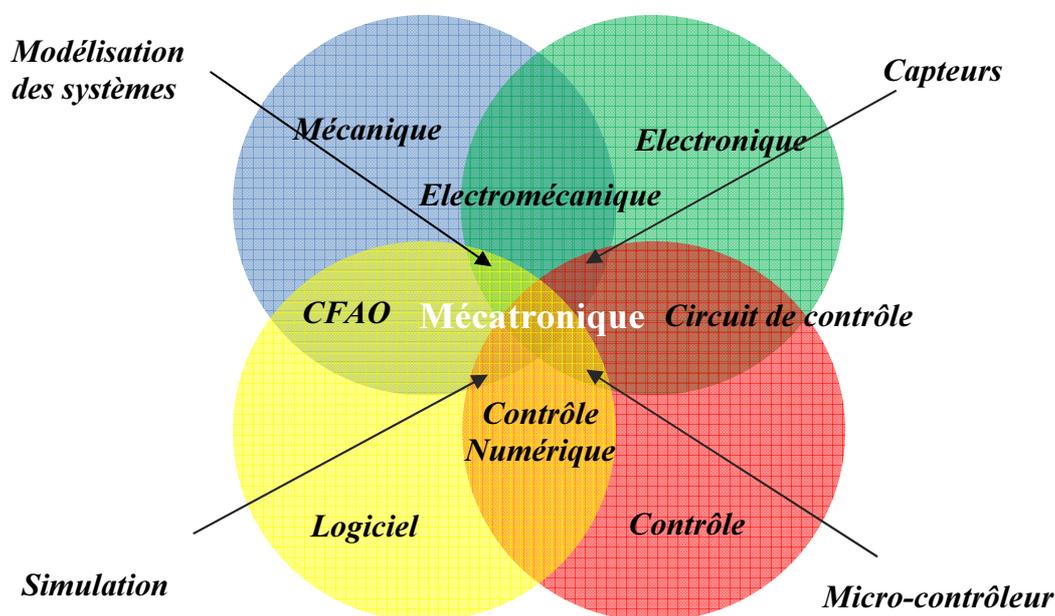
- la définition du journal «International Mechatronics», parue pour la première fois en 1991: «Mechatronics in its fundamental form can be regarded as the fusion of mechanical and electrical disciplines in modern engineering process. It is a relatively new concept to the design of systems, devices and products aimed at achieving an optimal balance between basic mechanical structures and its overall control»;

- la définition du journal «International IEEE Transactions on Mechatronics», créée en 1996: «Mechatronics is the synergetic combination of mechanical engineering with electronics and intelligent computer control in the design and manufacturing of industrial products and process»;
- la définition choisie par le IFAC «Technical Committee on Mechatronic Systems», fondé en 2000: «Many technical processes and products in the area of mechanics with electronics and information processing. This integration is between the components (hardware) and the information-driven function (software), resulting in integrated systems called mechatronic system»;
- la définition du petit Larousse qui est introduite pour la première fois dans son édition 2005: « Technique industrielle consistant à utiliser simultanément et en symbiose, la mécanique, l'électronique, l'automatisme et l'informatique pour la conception et la fabrication de nouveaux produits »;
- la définition proposée par le Comité Consultatif de Recherche Industrielle et de Développement de la Communauté Européenne (Industrial Research and Development Advistory Comittee of the European Community) : «La mécatronique est la combinaison synergique de l'ingénierie mécanique de précision, de la commande électronique et du système informatique dans la conception des produits et des processus de fabrication»;
- la définition publiée en novembre 2008 par la norme française de vocabulaire dédiée à la mécatronique NF E01-010 [AFNOR 2008]. La mécatronique est définie comme : «Une démarche visant l'intégration en synergie de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'informatique dans la conception et la fabrication d'un produit en vue d'augmenter et/ou d'optimiser sa fonctionnalité». Dans cette définition, le mot informatique est compris au sens large intégrant notamment traitement de l'information et communication en plus le mot fonctionnalité est pris au sens large et inclut la notion de valeur ajoutée; l'objectif de la mécatronique est l'obtention d'une valeur ajoutée supérieure à la simple somme des valeurs ajoutées des fonctions prises séparément.

D'une manière générale toutes les définitions de la mécatronique mettent en évidence les aspects suivants:

- la pluridisciplinarité: la mécatronique est la "science" qui regroupe l'électronique, la mécanique, l'hydraulique, l'informatique, etc. (Figure 1);

- la simultanéité : la mécatronique caractérise l'utilisation simultanée et en étroite symbiose des techniques du génie mécanique, de l'électronique, de l'automatique et de l'informatique pour concevoir et fabriquer de nouveaux produits plus performants;
- la compacité : la mécatronique regroupe l'ensemble des disciplines nécessaires à la conception de produits industriels plus compacts;
- la performance, la fiabilité et la miniaturisation: l'association des techniques de la mécanique et de l'électronique permet l'évolution des produits vers plus de performance et de fiabilité. Les fonctions mécatroniques miniaturisées et obtenues à faible coût rendent les appareils qui les incorporent plus complexes à concevoir mais plus faciles d'emploi.



**Figure 1.** *Pluridisciplinarité de la mécatronique*

Selon la norme NF E01-010 l'intégration mécatronique se fait suivant à la fois une dimension fonctionnelle et une dimension physique:

- intégration physique : interpénétration des supports mécaniques et électroniques (qui embarquent les fonctions automatique et informatique) ;
- intégration fonctionnelle : apport de fonctions de détection, de communication, de traitement de l'information et de rétroaction aux fonctions mécaniques de base.

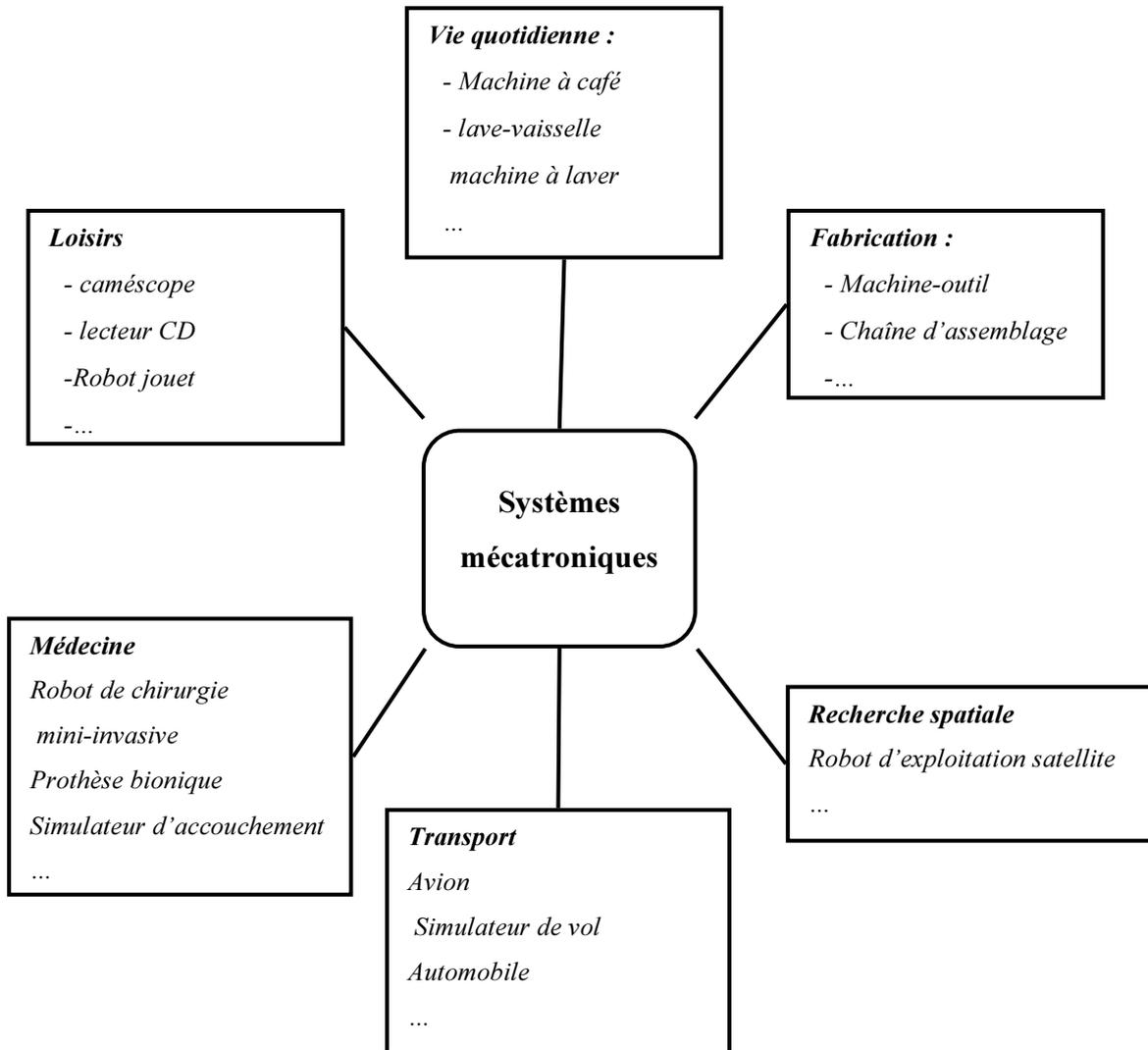
Suivant leurs niveaux d'intégration physique et d'intégration fonctionnelle, on distingue également les composants mécatroniques présentant une intégration faible ou moyenne des produits mécatroniques présentant une intégration physique et fonctionnelle élevée :

- produit mécatronique : un produit mécatronique est un produit ayant la capacité de traiter l'information, de percevoir son milieu environnant, de communiquer et d'agir sur son milieu. Il présente ainsi un niveau complet d'intégration mécatronique, du point de vue fonctionnel et physique. Suivant les domaines d'activité, le terme «produit mécatronique» recouvre les notions de système, sous-ensemble autonome, équipement de production, etc ;
- composant mécatronique : un composant mécatronique est un produit mécatronique présentant un niveau partiel d'intégration mécatronique, du point de vue fonctionnel et physique, associant mécanique et électronique et permettant le traitement de l'information.

Dans la suite, nous utilisons le terme « système mécatronique » pour désigner à la fois les produits mécatroniques et les composants mécatroniques.

### ***1.3. Différentes applications de la mécatronique***

De nos jours, de nombreux systèmes mécatroniques nous entourent aussi bien dans notre vie quotidienne (lave-vaisselle, machine à café,...) que dans le monde industriel (chaîne d'assemblage, machine-outil,...). Dans la figure 2, nous présentons un bref aperçu sur quelques applications des systèmes mécatroniques dans différents domaines tel que transport, loisir, fabrication, ...

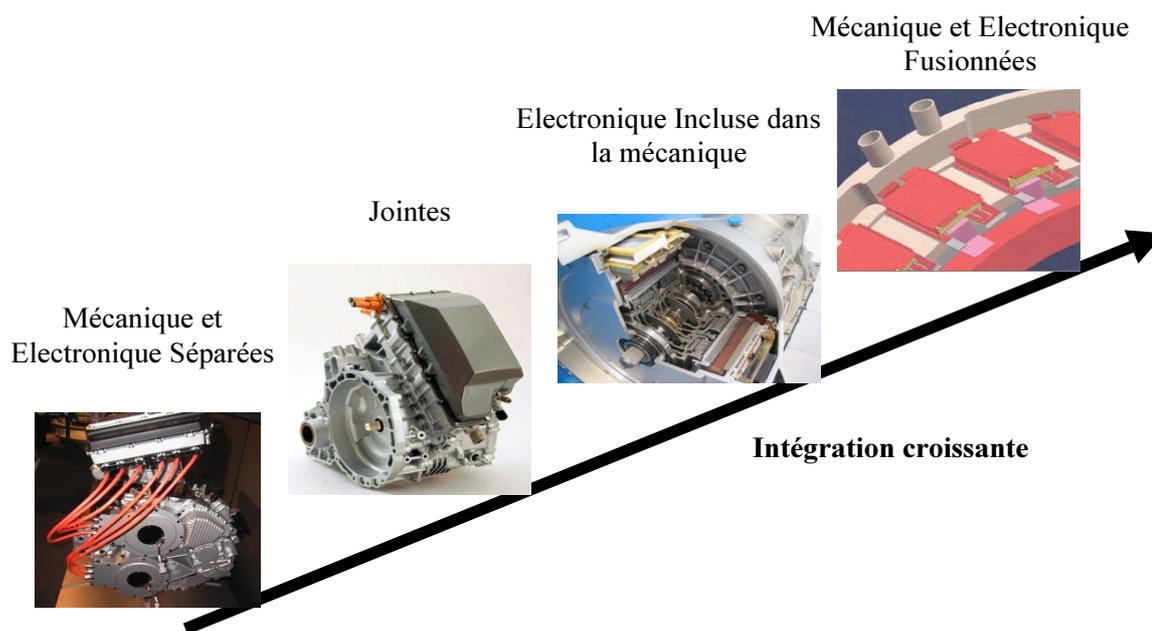


**Figure 2.** Les différents domaines d'application des systèmes mécatroniques

#### 1.4. Conception des systèmes mécatroniques

L'ancienne stratégie de conception des systèmes peut être divisée en deux étapes. La première partie concerne la décomposition séquentielle du cycle de vie du produit (conception du produit, le processus de fabrication, la distribution du produit, la maintenance du produit...). La deuxième partie concerne le découpage du produit en sous-systèmes appelés aussi « métier » (mécanismes, motorisation, capteurs, énergie, commande...). Cette démarche n'est plus compatible avec ce qu'imposent les marchés actuels (qualité accrue, coût réduit, délais de conception et de fabrication réduits, miniaturisation et intégration, maintenance plus aisée, recyclage, mondialisation des marchés...). D'où le besoin d'une nouvelle démarche de conception « mécatronique » des systèmes complexes permettant une optimisation du produit [Choley, 2006] [Plateaux, et al., 2009] [Combastel, 2009] [Yannou, et al., 2008]. Cette

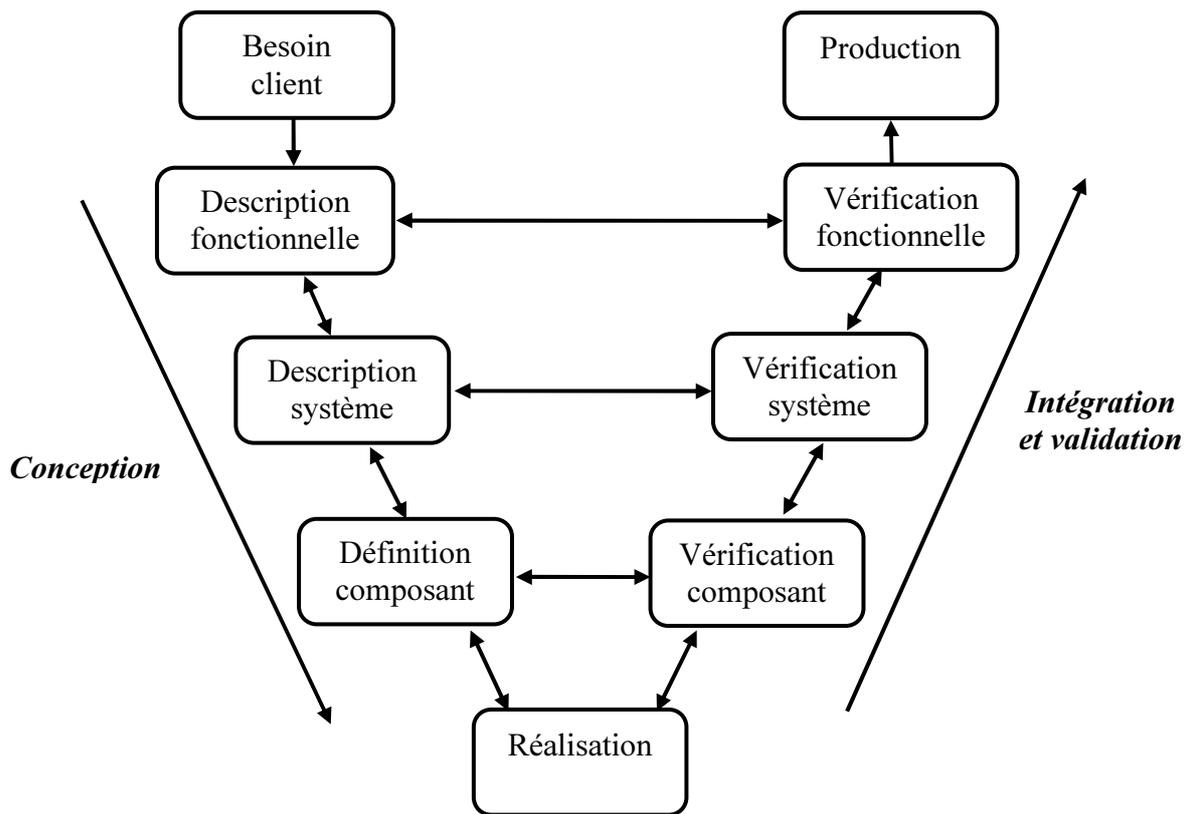
nouvelle démarche de modélisation doit assurer le passage d'une conception des composants séparés à un système mécatronique fusionné (figure 3). Elle est principalement développée dans le cadre du pôle de compétitivité Mo'veo avec le projet Outils de Modélisation Mécatronique (O2M). Ce projet est lancé en 2007 et il a comme objectif la création d'un environnement intégré permettant d'assurer le couplage de l'ingénierie système avec la modélisation multi-domaines ainsi que le pré-dimensionnement de la mécatronique automobile [Choley, et al., 2009].



**Figure 3.** *Intégration croissante de la mécanique et de l'électronique [Plateaux, 2011]*

La conception d'un système mécatronique doit se réaliser à travers une démarche itérative constituée d'allers-retours entre la définition fonctionnelle du produit (besoin et exigence du client) et sa définition multi-physique. Cette conception se présente sous la forme d'un cycle en V [AFNOR, 2009].

Le cycle de conception en V est présenté par la figure 4. Ce cycle est construit de deux branches principales : la branche descendante correspond aux différentes phases de spécification et de conception tandis que la phase ascendante correspond à des tâches d'intégration et de validation des travaux de conception par étape. Ainsi, chaque étape ne peut être réalisée que si l'étape précédente est terminée, ce qui améliore la conception et diminue les risques de défaillance.



**Figure 4.** Cycle de conception en V des systèmes mécatroniques

### 1.5. Les différents niveaux de représentation

Dans le cycle de conception en V trois niveaux de représentation sont mis en œuvre pour la description d'un système mécatronique :

- niveau fonctionnel : c'est à ce niveau que l'analyse fonctionnelle complète du système est réalisée en définissant sa fonction globale et en établissant le graphe des interacteurs ainsi que la liste des fonctions mécatroniques du système. A ce niveau, la description du modèle se fait souvent sous forme textuelle (cahier des charges fonctionnel) ; elle peut aussi utiliser des langages « orienté objet » comme UML [Eynard, et al., 2004] ou SysML [SysML, 2006] [Kadima, 2009] ;
- niveau système (niveau logique, réseau,...): c'est à ce niveau que les relations entre les différentes fonctions mécatroniques sont définies en indiquant les liens structurels (de positionnement, de géométrie, d'assemblage,...), les liens temporels, les flux d'énergie, les flux d'informations .... A ce niveau, la description du modèle peut se faire sous forme de graphe des liaisons (Bond Graph), de blocs diagrammes, ou de « modèles multiports » (« port based model »). La description peut aussi recourir à des

langages informatiques comme MODELICA ou VHDL-AMS notamment pour les parties électroniques ;

- niveau composant (niveau physique géométrique,...): c'est à ce niveau que pour chaque fonction mécatronique, le mécanisme agissant, les capteurs, la motorisation l'électronique de commande, l'électronique de puissance ainsi que la stratégie de contrôle à commande informatique, sont identifiés. Aussi à ce niveau les technologies les plus adaptées économiquement et fonctionnellement pour chaque fonction sont choisies. A ce niveau, la description du modèle peut se faire sous forme de dessins, graphiques, notes de calcul, organigrammes ou format de fichier d'échanges de données.

### 1.6. Panorama des outils de conception mécatronique

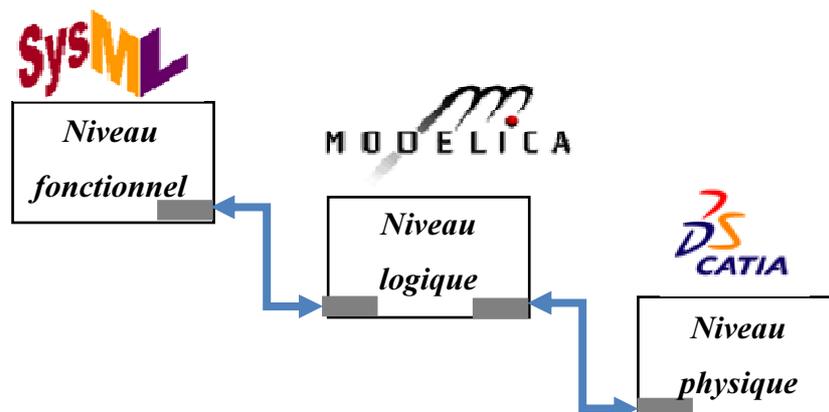
Les outils de conception mécatronique doivent permettre l'appréhension des différents domaines de la mécatronique. Dans le tableau 1, nous présentons quelques outils selon les domaines (mécanique, électronique, informatique et automatique) et le niveau de modélisation (niveau fonctionnel, niveau système et niveau composants).

**Tableau 1.** *Quelques outils pour la modélisation mécatronique [Choley, 2008]*

	Niveau fonctionnel	Niveau logique	Niveau physique
<b>Mécanique</b>	SysML SADT APTE FAST	Modelica Matlab Simulink Bond Graphs VHDL-AMS ADAMS	CATIA Solidworks ...
<b>Electronique</b>		Modelica Matlab-Simulink Bond Graphs VHDL-AMS Spice	Cadence Mentor Graphic ...
<b>Informatique, Automatique</b>	UML SysMI	Modelica AUTOSTAR Matlab-simulink ...	Autosar-Modelisar dSPACE (M) ...

Parmi les outils les plus utilisés pour le pré-dimensionnement en conception mécatronique, nous trouvons (figure 5) : SysML pour l'analyse fonctionnelle, Modelica pour la simulation multi-physique et CATIA V6 pour la maquette numérique intégrée [Hadj-Amor, 2008].

Des études ont été menées pour intégrer des modules SysML à Modelica [Turki, 2008] (et Modelica à Sysml [Pop, et al., 2007]) et Modelica dans Catia V6.



**Figure 5.** Les outils et méthodologies les plus utilisés pour le pré-dimensionnement en conception mécatronique

### ***SYSML pour le niveau fonctionnel***

SYSML est un langage de modélisation orienté objet permettant d'analyser, spécifier, concevoir et vérifier les systèmes complexes et il comporte des diagrammes permettant de spécifier le comportement, la structure, les exigences, et les paramètres du système. Ce langage génère un code XML permettant l'interfaçage avec MODELICA, Matlab et Scilab. Il permet de définir la structure du système, de formaliser les exigences fonctionnelles et les contraintes non fonctionnelles, de définir les paramètres du système ainsi que les contraintes sur et entre ces paramètres, de caractériser le comportement du système et de vérifier la cohérence globale de la modélisation.

### ***MODELICA pour le niveau système***

En 1987, Elmqvist pose dans sa thèse les bases du langage Modelica (DYnamic MOdeling LAnguage) [Elmqvist, 1987].

L'établissement d'un modèle Modelica peut être par schéma bloc, par Modelica Text ou bien, par schéma bloc et Modelica Text. Les modèles écrits avec Modelica nécessitent des outils logiciels pour les simuler, comme Open Modelica qui est un environnement open source développé par l'Université de Linköping en Suède pour la compilation et la simulation du langage Modelica.

D'après Fritzon [Fritzon, 2009], les quatre aspects les plus importants du langage Modelica sont :

- Il permet de décrire les comportements discrets, continus et hybrides de systèmes mécatroniques ;
- Il est un langage orienté objet avec un concept de classe générale qui englobe les classes facilitant ainsi la réutilisation des composants ;
- Il est acausal et par conséquent les équations de comportement du système sont écrites directement sans avoir besoin de modifier le jeu d'équations en termes d'affectation ;
- Il fournit une modélisation multi domaine. Les modèles de composants correspondant aux objets physiques de plusieurs domaines différents, électrique, mécanique, thermodynamique, hydraulique et biologique. Des applications de contrôle peuvent être décrits et connectés ;
- Il permet la création des modèles de composants, avec des constructions pour connecter ces composants.

### ***Catia V6 pour le niveau physique***

Dassault Systèmes, qui est l'un des premiers fournisseurs mondiaux de solutions 3D et de gestion du cycle de vie des produits, a placé la modélisation des systèmes embarqués au cœur de CATIA. En 2006, la modélisation de systèmes complexes au sein de CATIA est introduite par l'acquisition de Dynasim par Dassault Systèmes afin d'inclure la suite Dymola au sein du module CATIA Systems.

## **2. Partie 2 : Outil de modélisation mathématique**

Les différentes notions présentées dans cette partie sont issues des références suivantes [Whitehead, 1949], [Spanier, 1966], [Isgoston, 1976], [Munkeres, 1984], [Hatcher, 2002], [Klette, 2000], [Sigward, 2002] et [Maquin, 2003].

### ***2.1. Les graphes***

#### ***2.1.1. Définition***

##### **2.1.1.1. Graphe non orienté**

#### ***Graphe simple***

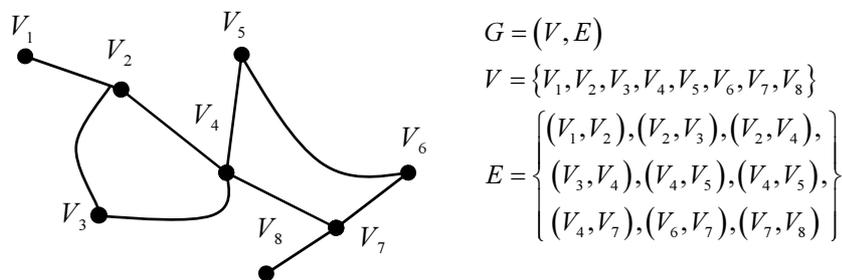
Un graphe simple  $G = (X, a)$  est un couple formé de:

- un ensemble fini  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dont les éléments sont appelés les sommets du graphe ;
- un ensemble  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  qui est un sous-ensemble de  $P_2(X) = X \times X$ , dont les éléments sont appelés les arêtes.

$a = (x, y) \in A$ , signifie que  $a$  est l'arête de  $G$  d'extrémités  $x$  et  $y$ . Les sommets  $x$  et  $y$  sont alors adjacents dans  $G$ .

Graphiquement, les sommets sont représentés par des points et l'arête par un trait reliant les deux sommets. La forme ou la longueur des traits n'a aucune importance : on tient compte que des relations d'incidence.

La figure 6 présente un exemple d'un graphe non orienté constitué de 8 sommets et 9 arêtes.



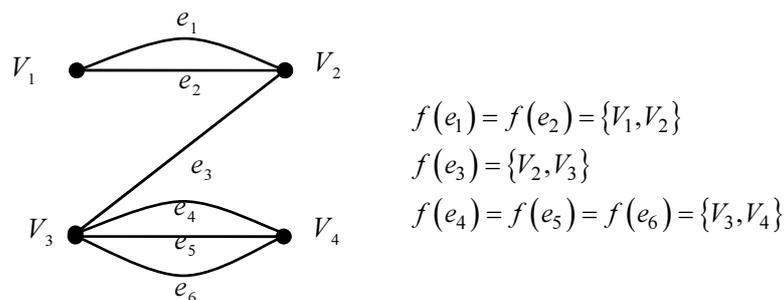
**Figure 6.** Exemple d'un graphe non orienté

### Graphe multiple ou Multi graphe

Un multi graphe est un triplet  $G = (X, A, f)$  formé de :

- un ensemble  $X$  de sommets ;
- un ensemble  $A$  d'arêtes (abstrait) ;
- une application  $f$  de  $A$  dans  $P_2(X) \cup P_1(X)$ .

Un multi graphe peut inclure des arêtes multiples entre deux sommets donnés ainsi que des boucles multiples en un sommet. La figure 7 présente un exemple d'un multi graphe non orienté.



**Figure 7.** Exemple d'un multi graphe non orienté

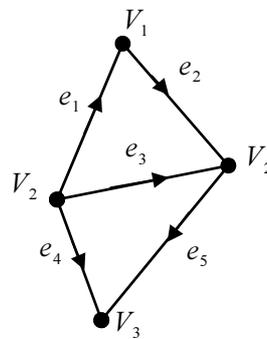
### 2.1.1.2. Graphe orienté

#### *Graphe simple orienté*

Un graphe simple orienté est un couple  $G = (V, E)$  formé de :

- un ensemble  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  de sommets ;
- un ensemble  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  d'arcs. Cet ensemble est une partie du produit cartésien  $V \times V$ .

$a = (x, y) \in G$  signifie que  $x$  est l'extrémité initiale de  $a$  et  $y$  l'extrémité finale de  $a$ . La figure 8 présente un exemple d'un graphe simple orienté. Dans ce graphe, pour l'arc  $e_1$ , son extrémité initiale est  $V_1$  et son extrémité finale est  $V_2$ .



**Figure 8.** Exemple d'un graphe orienté

#### *Multigraphe orienté*

Un multigraphe orienté  $G = (V, E, \alpha, \omega)$  est formé de :

- un ensemble  $V$  de sommets ;
- un ensemble  $E$  d'arcs ;
- deux fonctions  $\alpha : E \rightarrow V$  et  $\omega : E \rightarrow V$  qui à chaque arc  $e$  appartenant à  $E$  associent son origine  $\alpha(e)$  et son extrémité  $\omega(e)$ .

### 2.1.2. Représentation des graphes

Les graphes peuvent être représentés par une matrice d'adjacence ou par une matrice d'incidence.

### 2.1.2.1. Matrice d'adjacence

Pour un graphe comportant  $n$  sommets, chaque arc peut être considéré comme un lien entre deux sommets. Alors, la matrice d'adjacence est égale à la matrice  $U = (U_{ij})$  de dimension  $n \times n$  telle que :

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 2.1.2.2. Matrice d'incidence

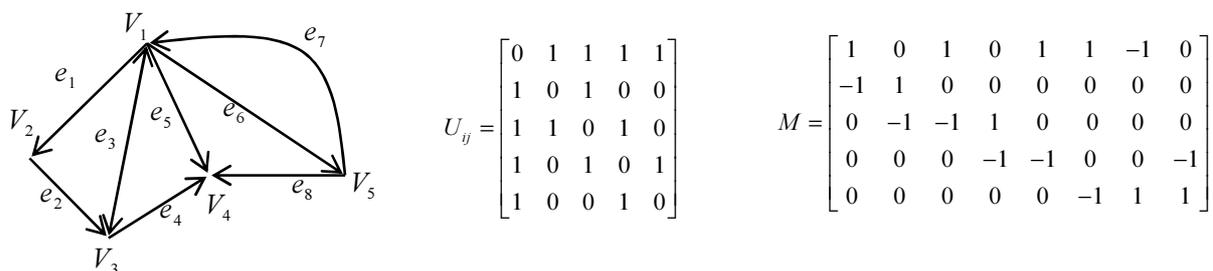
Pour un graphe orienté sans boucle comportant  $n$  sommets et  $m$  arcs, la matrice d'incidence permet de définir la relation d'incidence entre les arêtes et les sommets et elle est égale à la matrice  $M = (m_{ij})$  de dimension  $n \times m$  donnée par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité initiale de } a_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité terminale de } a_j \\ 0 & \text{si } x_i \text{ n'est pas une extrémité de } a_j \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté sans boucle comportant  $n$  sommets et  $m$  arcs, la matrice d'incidence est donnée par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est une extrémité de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La figure 9 présente un exemple d'un graphe orienté et sa matrice d'adjacence (figure 9 (a)) ainsi que sa matrice d'incidence (figure 9 (b)).



**Figure 9.** Exemple de graphe (a) matrice d'adjacence associée (b) matrice d'incidence associée

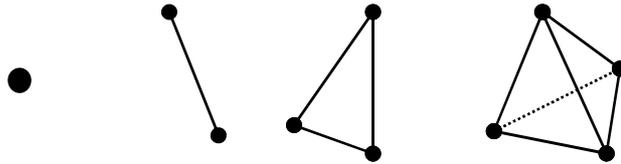
## 2.2. Les complexes simpliciaux

Les complexes simpliciaux sont des objets algébriques qui généralisent le concept de graphe aux dimensions supérieures.

### 2.2.1. Simplexe

Un simplexe de dimension  $n$ , noté  $n$ -simplexe, est l'enveloppe convexe d'un ensemble de  $n+1$  points de  $\mathbb{C}^n$  affinement indépendants.

Par cette définition, un simplexe doit avoir une géométrie linéaire. La figure 10 présente quelque exemple de  $n$ -simplexe : un 0-simplexe est un sommet, un 1-simplexe un segment, un 2-simplexe un triangle et un 3-simplexe est un tétraèdre.



**Figure 10.** Exemple de  $n$ -simplexe

Pour deux simplexes  $s_1$  et  $s_2$ , on a :

- $s_1$  est une coface de  $s_2$  si  $s_2$  est une face de  $s_1$  ;
- $s_1$  et  $s_2$  sont incidents si l'un est une face de l'autre ;
- $s_1$  et  $s_2$  sont adjacents s'il existe un simplexe qui est une face de  $s_1$  et  $s_2$ .

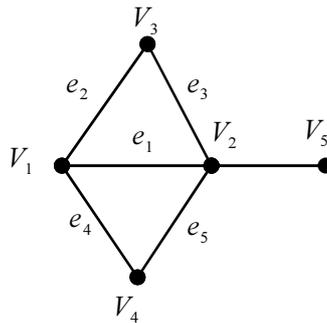
### 2.2.2. Complexe Simplicial

Un complexe simplicial dans  $\mathbb{C}^n$  noté  $K$  est une collection de simplexes vérifiant :

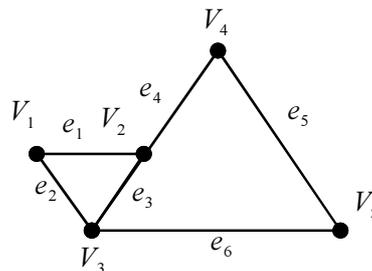
- $\forall s \in K$ , toutes les faces de  $s$  appartiennent à  $K$  ;
- l'intersection de deux simplexes  $s_1$  et  $s_2$  de  $K$  est soit vide, soit une de leurs face commune c'est-à-dire une face de  $s_1$  et une face de  $s_2$ .

Par cette définition, un complexe simplicial ne doit pas présenter de multi-incidence puisque dans ce cas l'intersection n'est pas une face commune des deux simplexes.

La figure 11 présente un exemple de complexe simplicial et la figure 12 présente un contre-exemple de complexe simplicial puisque l'intersection des deux triangles n'est pas une face commune.



**Figure 11.** Exemple de complexe simplicial



**Figure 12.** Contre exemple de complexe simplicial

### 2.2.3. Complexe Simplicial abstrait

Un complexe simplicial abstrait défini sur un ensemble de sommets  $S$  est une famille  $K$  d'ensembles sur  $S$ , telle que  $\forall A \in K, \text{ et } \forall B \subseteq A, \text{ alors } B \in K$ .

Chaque élément  $A$  de  $K$  est un simplexe. Un sous-ensemble de  $A$  étant une *face* de  $A$ , cette définition peut se reformuler en disant que chaque face de chaque simplexe appartient au complexe. La dimension d'une face  $A$  est  $|A|-1$ . La dimension du complexe est la plus grande dimension d'un simplexe de  $K$ . Un simplexe est dit principal s'il n'est la face d'aucun simplexe du complexe.

La réalisation géométrique d'un complexe simplicial abstrait est un complexe simplicial.

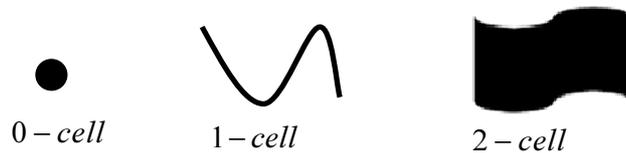
### 2.3. Les complexes cellulaires

Les complexes simpliciaux sont étendus pour ne plus considérer uniquement des simplexes mais des cellules quelconques donnant ainsi naissance aux complexes cellulaires.

Par rapport aux complexes simpliciaux abstraits, il faut ajouter la notion de dimension qui était avant implicite de par la nature régulière des simplexes, et expliciter la relation de face entre les cellules.

### 2.3.1. Les cellules

Soit  $X$  un espace de Hausdorff<sup>1</sup>, l'ensemble  $C \subset X$  est une  $k$ -cellule topologique ouverte si  $C$  est homéomorphe<sup>2</sup> à l'intérieur de la  $k$ -boule ouverte  $B^k = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$ . L'entier  $k$  est appelé dimension de la cellule de  $C$  (Figure 13).



**Figure 13.** Exemples de  $k$  cellules

### 2.3.2. Les complexes cellulaires

Un complexe cellulaire  $K$  est un ensemble de cellules collées les unes aux autres de façon appropriée tel que :

- le bord d'une cellule de  $K$  est une union finie de cellule appartenant à  $K$  ;
- l'intersection de deux cellules de  $K$  est soit une autre cellule de  $K$ , soit le vide.

### 2.3.3. Les complexes cellulaires abstraits

Un complexe cellulaire abstrait  $K(C, \leq, \dim)$  est donné par :

- un ensemble de cellules noté  $C$  ;
- une relation d'ordre partiel sur  $C$  notée  $\leq$  ;
- une fonction de  $C$  dans  $\mathbb{N}$  notée  $\dim$ , vérifiant  $\forall c_1 \in C, \forall c_2 \in C$  et  $c_1 \neq c_2 \Rightarrow \dim(c_1) < \dim(c_2)$ .

La relation d'ordre partiel  $\leq$  permet de définir la notion d'incidence et d'adjacence. Deux cellules sont incidentes si l'une est la face de l'autre et deux cellules  $c_1$  et  $c_2$  sont adjacentes si  $\dim(c_1) = \dim(c_2)$  et  $\exists f \in C$ , telle que  $f$  est une face de  $c_1$  et une face de  $c_2$ .

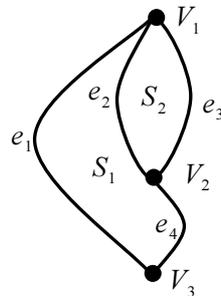
Par exemple, un arc  $e_1$  avec ces deux sommets  $V_1$  et  $V_2$  est dénoté

$$K = (\{V_1, V_2, e_1\}, \{V_1 \leq e_1, V_2 \leq e_1\}, \{V_1 \rightarrow 0, V_2 \rightarrow 0, e_1 \rightarrow 1\}).$$

<sup>1</sup> Espace de Hausdorff : appelé aussi espace séparé : lorsque deux points distincts quelconques admettent des voisinages disjoints

<sup>2</sup> Les homéomorphismes sont les isomorphismes de la catégorie des espaces topologiques

La dimension d'un complexe cellulaire abstrait est la plus grande dimension de l'une de ces cellules. La figure 14 présente un exemple de complexe cellulaire abstrait de dimension 2 composé de deux 2-cellules ( $S_1, S_2$ ), de quatre 1-cellules ( $e_1, e_2, e_3, e_4$ ) et de trois 0-cellules ( $V_1, V_2, V_3$ ).

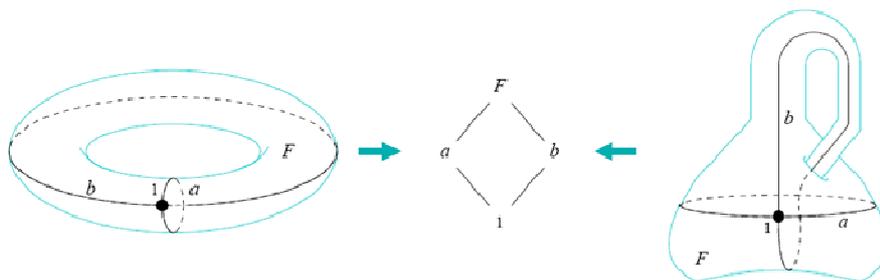


**Figure 14.** Exemple de complexe cellulaire abstrait de dimension 2

#### 2.4. Les complexes de chaîne et de cochaîne

Un complexe cellulaire abstrait ne peut pas représenter toutes les façons dont les cellules topologiques peuvent être connectées. En effet, comme présenté dans la figure 15, deux complexes topologiquement différents peuvent avoir le même graphe d'incidence. Alors, il faut préciser l'orientation des cellules. D'où la notion de chaîne topologique qui permet la description de l'organisation des cellules incidentes.

Informellement, une chaîne topologique est définie comme un ensemble de cellules muni d'une structure de groupe abélien, qui décrit comment les cellules sont assemblées, et d'un opérateur de bord, qui permet de fournir une chaîne en décrivant le bord<sup>3</sup> d'une cellule.



**Figure 15.** Tore et bouteille de Klein : à gauche, un complexe cellulaire représentant un tore, à droite une bouteille de Klein ; les traits clairs correspondent aux 2-cellules. Au centre, les deux complexes partagent le même graphe d'incidence mais correspondent à deux objets topologiquement différents [Spicher, 2006].

<sup>3</sup> Les cellules incidentes de dimension inférieure.

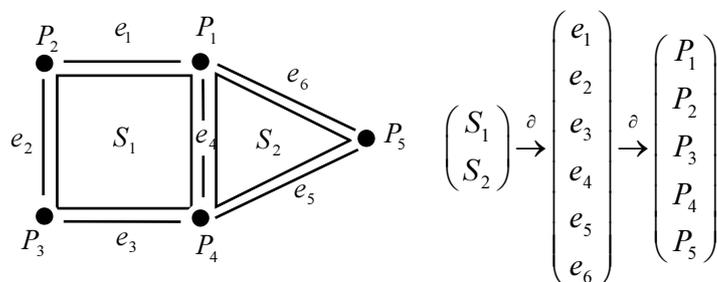
2.4.1. Complexe de chaîne

Soient  $K$  un complexe cellulaire abstrait de dimension  $n$ ,  $G$  un groupe abélien et  $p$  un entier. L'ensemble  $C_p(K, G)$  dénote l'ensemble des  $p$ -chaîne de dimension  $p$  du complexe  $K$  à valeur dans  $G$ .

Un complexe de chaîne  $C(K, G, \partial)$  est une suite  $(C_p(K, G), \partial_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de groupes abéliens et d'homomorphisme  $\partial_p : C_p(K, G) \rightarrow C_{p-1}(K, G)$ .

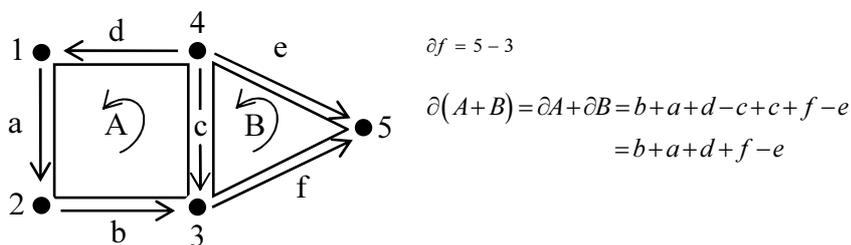
L'homomorphisme  $\partial_p$  est appelé l'opérateur de bord tel que :  $\partial_p \partial_{p+1} = 0$ .

La figure 16 présente un exemple de complexe cellulaire et son complexe de chaîne lié par une relation de bord.



**Figure 16.** Exemple de complexe cellulaire et son complexe de chaîne lié par une relation de bord

A chaque cellule est associé non pas une variable mais un ensemble de grandeurs respectant les règles de groupe. La figure 17 présente un exemple de complexe de chaîne dans  $C(K, \mathbb{Z}, \partial)$ . En utilisant les coefficients positif ou négatif, on exprime l'orientation des cellules. Par exemple :



**Figure 17.** Calcul de bord pour un complexe de chaîne dans  $C(K, \mathbb{Z}, \partial)$ .

Les complexes de chaînes  $C(K, G, \partial)$  définis précédemment permettent d'associer un élément d'un groupe abélien quelconque  $G$  aux cellules topologiques. On peut aussi définir les complexes de chaînes permettant d'associer des éléments d'un ensemble arbitraire de

valeur Val aux cellules topologiques notées  $C(K, Abel(Val), \partial)$ . Le groupe  $Abel(Val)$  a une structure plus riche que Val et il permet d'associer à une cellule topologique un multi-ensemble généralisé.

On considère l'exemple du complexe de chaîne présenté par la figure 19 mais en décorant les cellules par des réelle. On obtient alors le complexe de chaîne noté  $C(K, Abel(\mathbb{R}), \partial)$ .

Par exemple si on associe à A la valeur 4.1 et à B la valeur. Alors pour la chaîne  $4.1A + 3B$ . L'opérateur permet le transport des valeurs de A et B vers leurs faces tel que :

$$\begin{aligned} \partial(4.1A + 3B) &= 4.1b + 4.1a + 4.1d - 4.1c + 3c + 3f + 3e \\ &= 4.1b + 4.1a + 4.1d + 1.1c + 3f + 3e \end{aligned}$$

L'opérateur de bord  $\partial$  permet le transport des valeurs des p-cellules aux p-1 cellules c'est-à-dire transmet les valeurs des cellules vers leurs faces de dimension inférieure.

Pour définir le transport dans une chaîne des valeurs des cellules vers leurs cofaces, on définit les complexes de cochaîne adjoint aux complexes de chaîne.

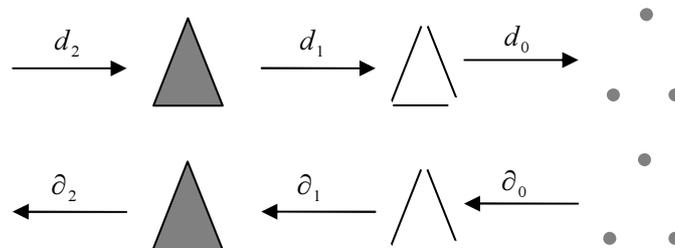
### 2.4.2. Les complexes de cochaîne

Soient  $K$  un complexe cellulaire abstrait de dimension  $n$ , un entier  $p \leq n$ ,  $G$  et  $G'$  deux groupes abéliens arbitraire. L'ensemble  $C^p(K, G, G')$  dénote l'ensemble des homomorphismes de  $C_p(K, G)$  dans  $G'$  appelés les p-cochaîne sur  $C_p(K, G)$  à valeur dans  $G'$ .

Un complexe de cochaîne  $C(K, G, G', d)$  est une suite  $(C_p(K, G, G'), \partial_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de groupes abéliens et d'homomorphisme  $d_p : C^p(K, G, G') \rightarrow C^{p+1}(K, G, G')$ .

L'homomorphisme  $d_p$  est appelé l'opérateur de cobord tel que :  $d_p d_{p+1} = 0$ .

La figure 18 présente un exemple de complexe de chaînes et de cochaînes.



**Figure 18.** Exemple de complexe de chaîne et de cochaîne

Les complexes de chaînes construisent alors avec leurs complexes de cochaîne adjoints le diagramme suivant :

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{d} C^p(K, G, G') \xrightarrow{d} C^{p+1}(K, G, G') \xrightarrow{d} \dots \\ \dots &\xleftarrow{\partial} C_p(K, G, G') \xleftarrow{\partial} C_{p-1}(K, G, G') \xleftarrow{\partial} \dots \end{aligned}$$

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par une généralité sur les systèmes mécatroniques (historique, définitions, différentes applications et conception). Puis, nous avons présenté les outils de modélisation mathématiques (les graphes, les complexes simpliciaux, les complexes cellulaires et les complexes de chaînes et de cochaînes) qui ont été l'origine du développement des notions de collections topologiques appliquées dans cette thèse pour la modélisation des systèmes méca(tro)niques. Ces notions sont présentées dans le chapitre suivant.

En résumant, les complexes simpliciaux généralisent les notions de graphes aux dimensions supérieures pour ne plus considérer uniquement des arcs et des nœuds. Les complexes cellulaires généralisent les notions de complexes simpliciaux afin d'avoir des cellules quelconques puisqu'un simplexe doit avoir nécessairement une géométrie linéaire et finalement les complexes de chaînes (ou de cochaînes) permettent de décrire l'organisation et d'associer des éléments d'un groupe mathématique aux cellules d'un complexe cellulaire en vérifiant la relation  $\partial_p \partial_{p+1} = 0$  (ou  $d_p d_{p+1} = 0$  pour les cochaînes).

# II. Approche topologique pour la modélisation des systèmes méca(tro)niques

## Sommaire

<b>1. Apport de la topologie pour la modélisation des systèmes multi physiques .....</b>	<b>26</b>
<b>1.1. Intérêt de la théorie des graphes .....</b>	<b>26</b>
1.1.1. Analogie inverse et analogie directe .....	28
1.1.2. Loi de Kirchhoff généralisée.....	28
<b>1.2. Graphe topologique KBR .....</b>	<b>30</b>
<b>2. Essais précédents : langage MODELICA .....</b>	<b>37</b>
<b>3. Notre approche topologique.....</b>	<b>39</b>
<b>3.1. Langage MGS .....</b>	<b>40</b>
3.1.1. Les collections topologiques.....	41
3.1.2. Les transformations.....	44
3.1.3. Quelques applications .....	45
<b>3.2. Démarche générique de l'application des collections topologiques et leurs transformations dans la modélisation.....</b>	<b>47</b>
<b>4. Conclusion.....</b>	<b>53</b>

## Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons un état de l'art sur l'apport de la topologie dans la modélisation des systèmes multi-physiques ainsi que l'approche générique développée par Plateaux dans sa thèse intitulée « Continuité et cohérence d'une modélisation des systèmes mécatroniques basée(s) sur une structure topologique ». Cette approche est basée sur le graphe topologique nommé KBR en l'honneur de leurs créateurs Kron, Branin et Roth et elle est appliquée par le langage de modélisation MODELICA. Ce langage est par nature objet et utilise les notions de flux et de potentielle. Par contre, sa nature topologique se limite au 0 et 1 complexes et il associe la topologie et la physique dans le même modèle. Alors, afin de résoudre les limitations de MODELICA, nous présentons notre approche topologique basée sur les notions de collection topologiques et les transformations en appliquant le langage MGS. Cette approche topologique permet de dissocier la topologie et la physique du système étudié : les collections topologiques sont utilisées pour présenter la loi d'interconnexion du système et les transformations pour spécifier sa loi de comportement. Pour illustrer cette approche, nous l'avons détaillée dans le cas d'un ressort en traction.

## 1. Apport de la topologie pour la modélisation des systèmes multi physiques

L'application d'une approche topologique pour la modélisation de systèmes mécaniques a été l'objet de plusieurs travaux de recherche. Par exemple : Björke a étudié le cas d'un treillis à trois barres tout en révélant à sa structure topologique de la géométrie [Björke, 1995]. Plus tard, Plateaux reprend le même exemple en modifiant la relation de la force / allongement dans les barres et améliore ainsi l'approche proposée par Björke puisqu'elle entraîne une fusion de la structure topologique et la géométrie du treillis [Plateaux 2011] [Plateaux et al. 2007], Shai [Shai, 2001a, 2001b, 2001c] a élaboré une Représentation Combinatoire (CR) basée sur la théorie des graphes et la théorie des matroïdes et il l'a appliqué à différents domaines de l'ingénierie en particulier pour l'analyse des structures de barres, Egli (Egli 2000) a décrit un cadre général pour la spécification et la manipulation des systèmes tels que les systèmes masse-ressort et les particules fluides en se basant sur les chaînes topologiques et Tonti (Tonti, 2003) a décrit les lois physiques de la topologie algébrique en utilisant des complexes cellulaires.

### 1.1. Intérêt de la théorie des graphes

On fait remonter la théorie des graphes au problème dit «Des ponts de Königsberg» (Kaliningrad) (figure 7). Ce problème est résolu par Leonhard Euler en 1736 [Euler, 1741] et il s'énonce comme suit : est-il possible, en partant d'une zone de la ville, de retourner dans la même zone en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?

Dans la figure 19, on présente le graphe équivalent du problème des sept ponts. Dans cette figure les villes sont présentées par les nœuds  $\{A, B, C, D\}$  et les ponts par les arcs  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ .

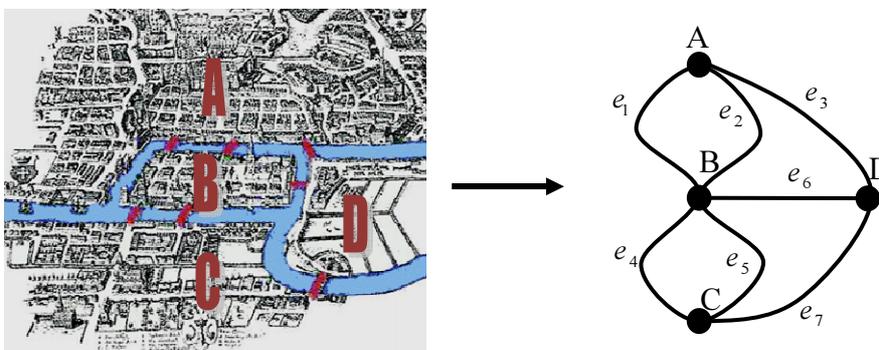
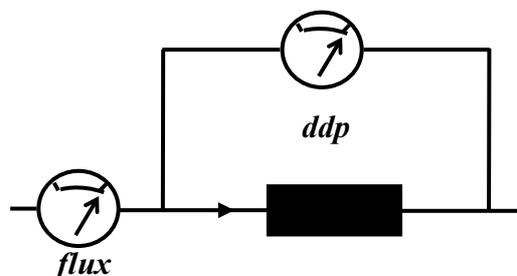


Figure 19. Graphe équivalent au problème des sept ponts

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments. Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Depuis les années 1930, la théorie des graphes connaît des développements très importants, tant sur le plan théorique que sur celui des applications : réseaux routiers, réseaux de communication, circuits électriques. Le graphe linéaire fut étendu à la modélisation des systèmes physiques et devient une branche des mathématiques dédiée à l'étude de la topologie des systèmes (graphe topologique).

Les graphes linéaires offrent la possibilité de modéliser des systèmes multidimensionnels en combinant les relations topologiques avec les équations constitutives des composants individuels [Sass, 2004]. Kron [Kron, 1963] avait appelé cette technique qui consiste en la décomposition d'un problème en composants indépendants les « diakoptics » et il l'avait appliquée au réseau électrique ainsi qu'aux systèmes électromécaniques. La démarche générique de la modélisation nécessite l'identification des composants individuels et de leurs équations constitutives. Ces équations sont généralement obtenues par mesure des variables de type flux (through) et différence de potentiel (ddp) (across) (Figure 20); les variables de type flux sont mesurées par un instrument en série avec le composant, tandis que les variables de type différence de potentiel sont obtenues à partir d'un instrument en parallèle avec le composant. Par exemple, dans le cas d'une résistance, on mesure l'intensité par un ampèremètre placé en série avec la résistance et on mesure la tension par un voltmètre placé en parallèle avec la résistance. Ces variables peuvent être des scalaires, des vecteurs, ou des matrices respectant la loi de Kirchhoff généralisée. En déterminant les équations constitutives des différents composants, les modèles de ces composants sont combinés suivant la structure topologique du système physique.



**Figure 20.** Mesure réalisée sur un élément quelconque

En se basant sur les travaux de Kron [Kron, 1942] qui ont été validés mathématiquement par Roth sur les réseaux et les machines électriques [Roth, 1955], Branin utilise la même structure topologique pour décrire les grandeurs physiques des systèmes multi-physiques [Branin, 1966]. Plus tard, Björke reprend ces travaux en proposant une approche appliquée aux systèmes de production [Björke, 1995].

### 1.1.1. Analogie inverse et analogie directe

Le graphe topologique peut être vu comme une base d'unification entre les différents physiques d'un système multi-physique (ou mécatronique). En effet, en utilisant l'analogie inverse proposée par Firestone [Firestone, 1933] (tableau 2), on remarque que contrairement à l'analogie directe (tableau 3) qui relie des structures topologiques différentes (série/parallèle), l'analogie inverse permet l'unification structurelle attendue (série/ série ou parallèle/parallèle).

**Tableau 2.** *Analogie conventionnelle*

<b>Loi de comportement</b>	
<b>Mécanique</b>	<b>Electrique</b>
Masse $m$	Inductance $L$
Frottement visqueux $f$	Résistance linéaire $R$
Souplesse	Capacité $C$
<b>Variables</b>	
Force $F$ ( <i>flux</i> )	Différence de potentiel $\Delta V$ ( <i>ddp</i> )
Déplacement $x$ ( <i>ddp</i> )	Quantité d'électricité $Q$ ( <i>flux</i> )
Vitesse de déplacement $v$ ( <i>ddp</i> )	Intensité $I$ ( <i>through</i> )

**Tableau 3.** *Analogie préservant la topologie du système multi-physique (analogie utilisé pour les graphes linéaire)*

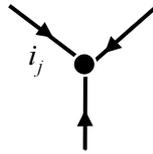
<b>Loi de comportement</b>	
<b>Mécanique</b>	<b>Electrique</b>
Masse $m$	Capacité ( $C$ )
Frottement visqueux $f$	Résistance linéaire $R$
Souplesse	Inductance $L$
<b>Variables</b>	
Force $F$ ( <i>flux</i> )	Intensité $I$ ( <i>flux</i> )
Déplacement $x$ ( <i>ddp</i> )	Différence de potentiel $\Delta V$ ( <i>ddp</i> )

### 1.1.2. Loi de Kirchhoff généralisée

- Loi des nœuds généralisée

La somme des  $n$  variables de type flux  $i_j$  des  $n$  arcs connectés à un nœud est nulle (figure 21) :

$$\sum_{j=1}^m i_j = 0 \quad (1)$$



**Figure 21.** Loi des nœuds généralisée

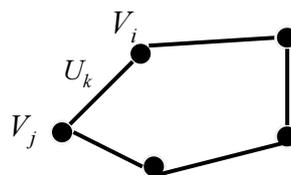
En électricité, la loi des nœuds généralisée se traduit par la somme des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des intensités qui en sortent.

En mécanique, la loi d'équilibre des forces est liée aussi à la topologie du système. Ainsi, la loi des nœuds généralisée se traduit par la somme des forces égale à zéro.

- Loi des mailles généralisée

La somme des  $n$  variables de type différence de potentiels  $U_k$  (ddp) générant un boucle est nulle (figure 22) :

$$\sum_{\text{boucle}}^m U_k = 0 \quad (2)$$



**Figure 22.** Loi des mailles généralisée

En électricité la loi des mailles généralisée se traduit par la somme des tensions générant une boucle est nulle.

- Loi de comportement généralisée

La loi de comportement en électricité  $U = Z * i$  avec  $Z$  représente l'impédance électrique complexe est généralisable aux tenseurs mettant en relation les variables de type « flux » et les variables de type « différence de potentiels ».

Par exemple prenant un cas simple de la déformation élastique dans le cas d'un ressort (Figure 23). La force  $\vec{F}$  est considérée comme une variable de type flux et l'allongement  $\Delta l$  comme une variable de type différence de potentiels. La loi de comportement est  $F = k\Delta l$  avec  $\Delta l$  représente la variation de la longueur du ressort. D'où l'analogie entre les deux domaines  $F \Leftrightarrow U$ ;  $k \Leftrightarrow Z$ ;  $\Delta l \Leftrightarrow i$ .

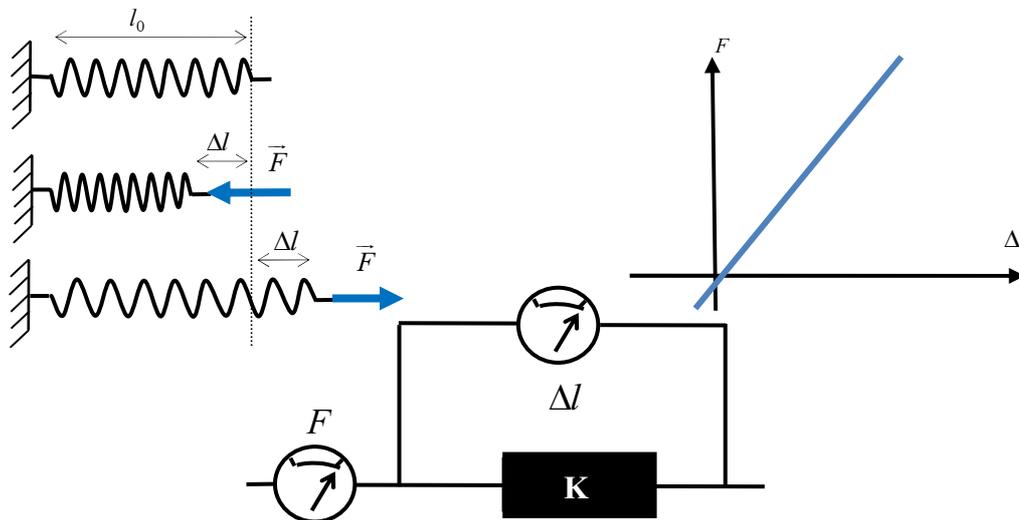


Figure 23. Loi de déformation élastique pour un ressort

## 1.2. Graphe topologique KBR

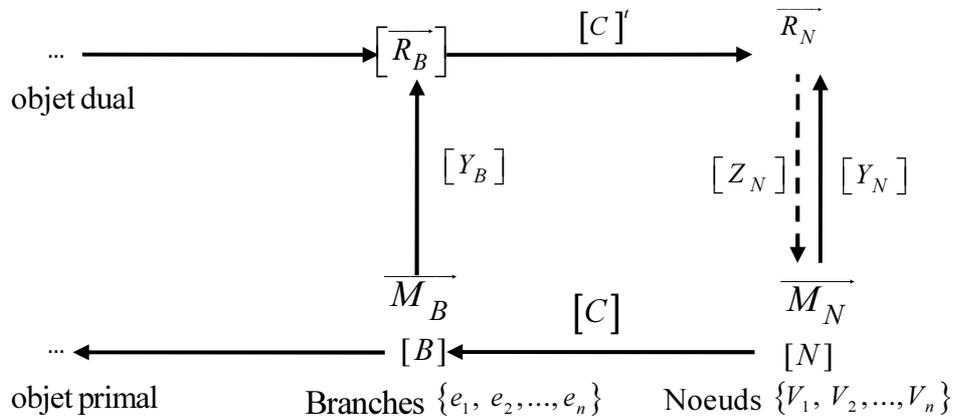
### Description

En se basant sur les travaux de Kron, Branin et Roth décrits précédemment, Plateaux a appliqué le graphe topologique nommé KBR en l'honneur de leurs créateurs [Plateaux, 2011]. Ce diagramme permet d'obtenir n'importe quelles relations entre ces éléments suivant les spécifications et inconnues du système étudié. Aussi, il permet la distinction entre la structure topologique du système étudié et la physique qu'il lui est associé.

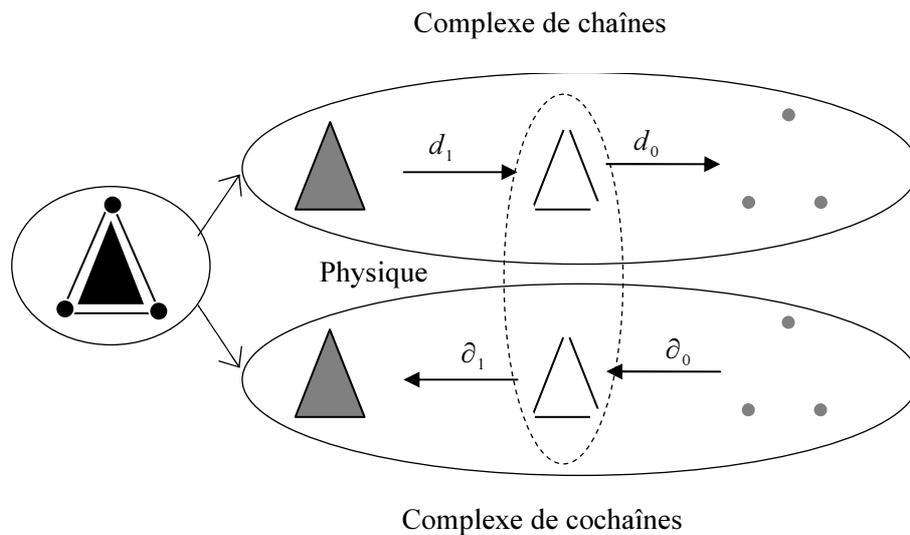
Dans un premier temps, la démarche générique de l'application du graphe topologique KBR consiste à associer une première structure topologique au système étudié. Cette structure topologique est décomposée en nœuds, arcs et mailles. A cette première structure sont également associées deux autres structures connectées dites complexe de chaînes et de cochaînes. Dans un second temps, à ces structures topologique est associée une algèbre ce qui s'agit en termes de topologie algébrique de la description des relations de complexes de chaînes et de cochaînes. Ces relations permettent de décrire les connexions, de spécifier des lois d'équilibre et de comportement. Le graphe KBR permet alors de mettre en relation les complexes de chaînes et de cochaînes à travers des lois de comportement.

La figure 24 montre le graphe topologique KBR. En effet, on peut aller encore à gauche pour faire apparaître des surfaces, des volumes.... selon les spécifications du problème.

La figure 25 présente la description du graphe KBR sous forme de complexes de chaînes et de cochaînes.



**Figure 24.** Graphe topologique KBR



**Figure 25.** Présentation de graphe KBR sous forme de complexes de chaînes et de cochaînes

Dans la figure 24, on a :

$[N]$ : matrice colonne représentant les nœuds ;

$[B]$ : matrice colonne représentant les branches.

A ces deux types d'entités topologiques sont associés les paramètres géométriques et physiques en relation avec le comportement du système à étudier.

$[C]$ : matrice d'incidence branches/nœuds vérifiant l'équation suivante :  $[B] = [C][N]$

Cette matrice permet le passage des variables associées aux nœuds aux variables associées aux branches.

Dans le cas des structures géométriques, on peut associer à  $[N]$  et  $[B]$  n'importe quel multi vecteur respectivement  $\overline{M}_N$  et  $\overline{M}_B$ , vérifiant la relation de passage par la matrice d'incidence  $[C]$ .

En s'appuyant sur la dualité algébrique des paramètres, les relations tensorielles et métriques sont ajoutées à travers la matrices d'admittance  $[Y]$  ou d'impédance  $[Z]$ . Ces matrices permettent d'exprimer les relations physiques et les contraintes géométriques qui interviennent entre les différents éléments du graphe c'est à dire l'objet primal et l'objet dual tel que déplacement/force et intensité/tension.

L'existence de la matrice  $[Z_N]$  est soumise à la condition que la matrice  $[Y_N]$  soit inversible.

Le graphe topologique KBR crée des perspectives intéressantes pour la modélisation des systèmes mécaniques complexes ou mécatroniques, en particulier lorsque la même présentation conduit à des modélisations différentes. Par conséquent, en se basant sur l'analogie inverse, le graphe topologique KBR peut être utilisé comme une base d'unification pour la modélisation des systèmes multi-physiques.

Par exemple, nous considérons le graphe linéaire présenté dans la figure 26. Ce graphe est composé de deux nœuds notés  $P_1$  et  $P_2$  et un seul arc noté  $e_1$  orienté de  $P_1$  à  $P_2$ . La matrice d'incidence associée à ce graphe est  $[C] = [1 \quad -1]$ . En s'appuyant sur l'analogie inverse, ce graphe peut présenter par exemple un ressort de traction dans le domaine de la mécanique ou une résistance électrique dans le domaine de l'électrique.

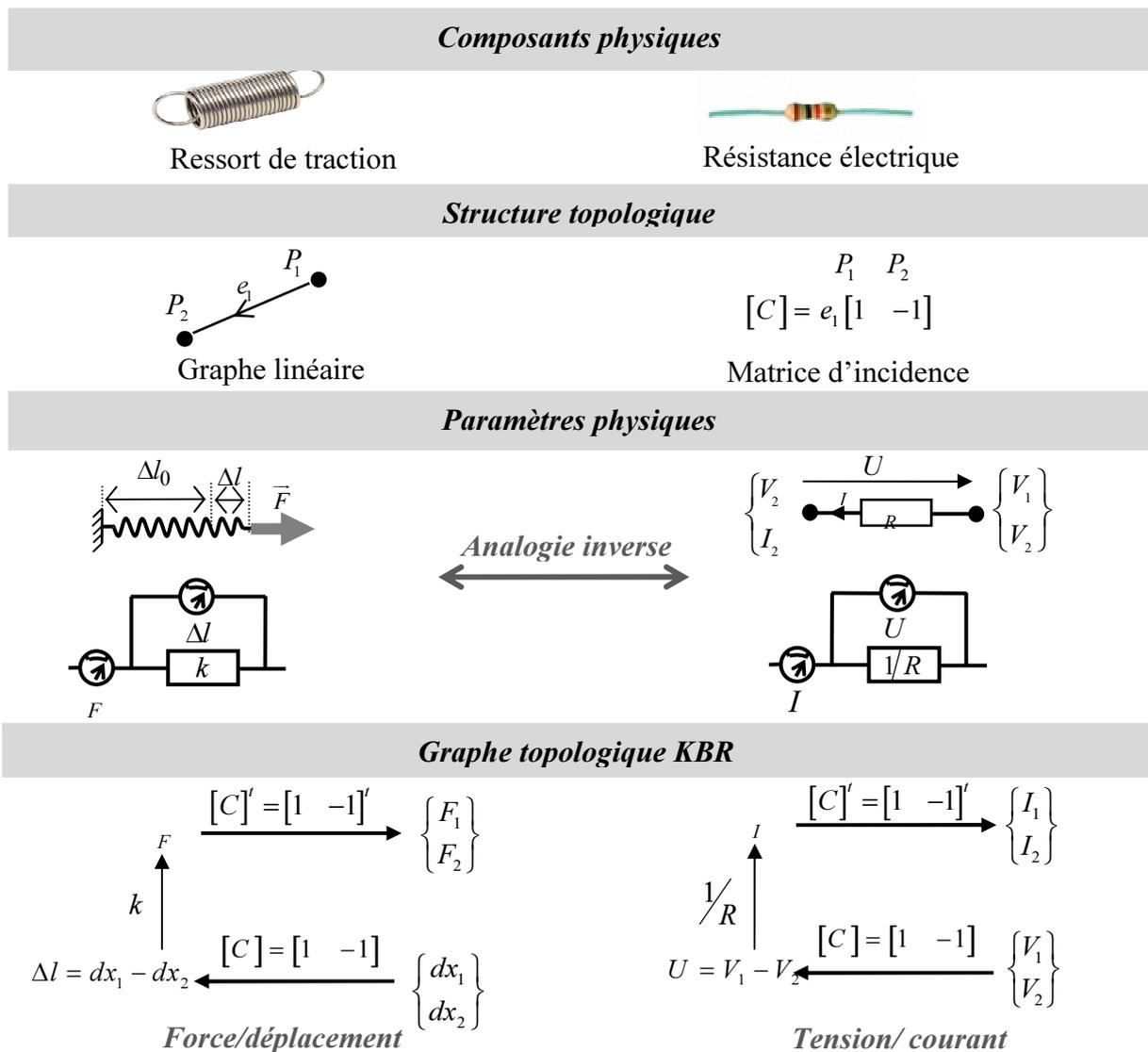
Pour le ressort, nous associons le vecteur de déplacement aux nœuds  $\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix}$ . La matrice

d'incidence appliquée aux nœuds fournit le déplacement du ressort  $\Delta l = dx_1 - dx_2$ . La

transition à l'espace dual correspond aux forces associées aux nœuds  $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$  et l'arc  $F$ . Cette

transition se fait en appliquant la matrice d'admittance  $[Y] = [k]$  ce qui permet d'exprimer la loi de comportement du ressort  $F = k\Delta l$ .

Pour la résistance électrique, nous associons le vecteur de tension aux nœuds  $\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix}$ . La matrice d'incidence appliquée aux nœuds fournit la tension de la résistance  $U = V_1 - V_2$ . La transition à l'espace dual correspond aux courants associés aux nœuds  $\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$  et a l'arc  $I$ . Cette transition est effectuée en appliquant la matrice d'admittance  $[Y] = \begin{bmatrix} 1/R \end{bmatrix}$  ce qui permet l'expression de la loi de comportement de la résistance électrique  $I = 1/R U$ .

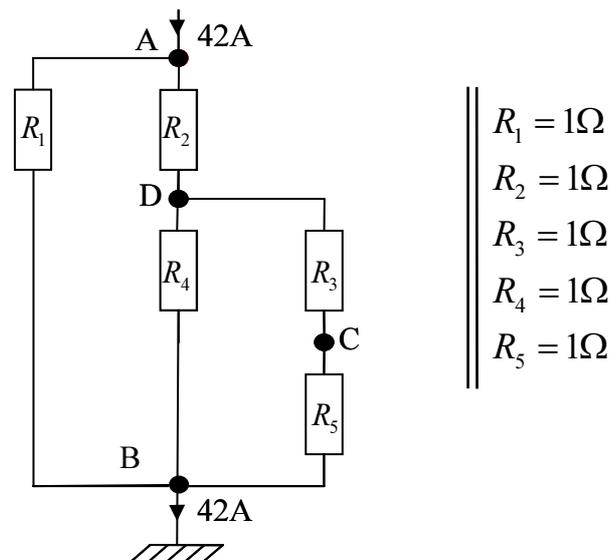


**Figure 26.** Le graphe topologique KBR basé sur l'analogie inverse dans le cas d'un ressort en traction et une résistance électrique

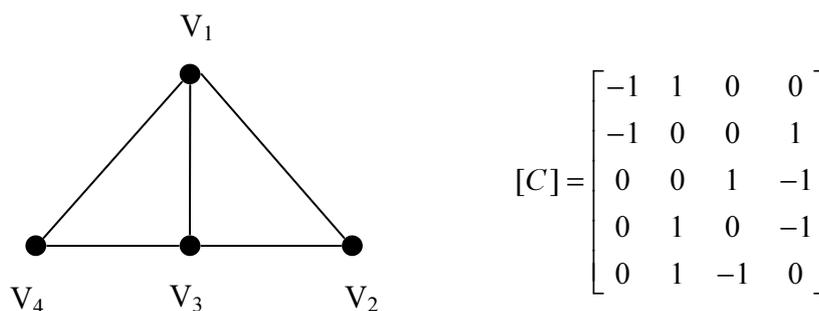
**Exemple : Réseau électrique**

Nous considérons l'exemple du réseau électrique traité par Björke [Björke 1995]. Ce réseau électrique est présenté par la figure 27 et il est alimenté par un courant électrique de 42 ampères. Nous définissons les potentiels de tous les nœuds du circuit par rapport à B qui est relié au potentiel 0V.

Le graphe d'interconnexion du réseau électrique ainsi que sa matrice d'incidence sont présentés par la figure 28. Dans le graphe d'interconnexion l'orientation des branches est arbitraire.



**Figure 27.** Circuit électrique



**Figure 28.** Le graphe d'interconnexion et la matrice d'incidence associés au circuit électrique

Dans l'approche classique, nous commençons par calculer la résistance équivalente du réseau électrique. Ensuite, de proche en proche, nous déterminons les tensions et intensités pour chaque branche. Cependant, en changeant l'emplacement de la source du courant la résolution

du problème devient plus complexe et nous devons refaire le calcul. Par exemple, en plaçant la source de courant en C le circuit électrique présente une structure de pont et aucune résistance n'est en parallèle ou en série et par conséquent la résolution devient plus difficile.

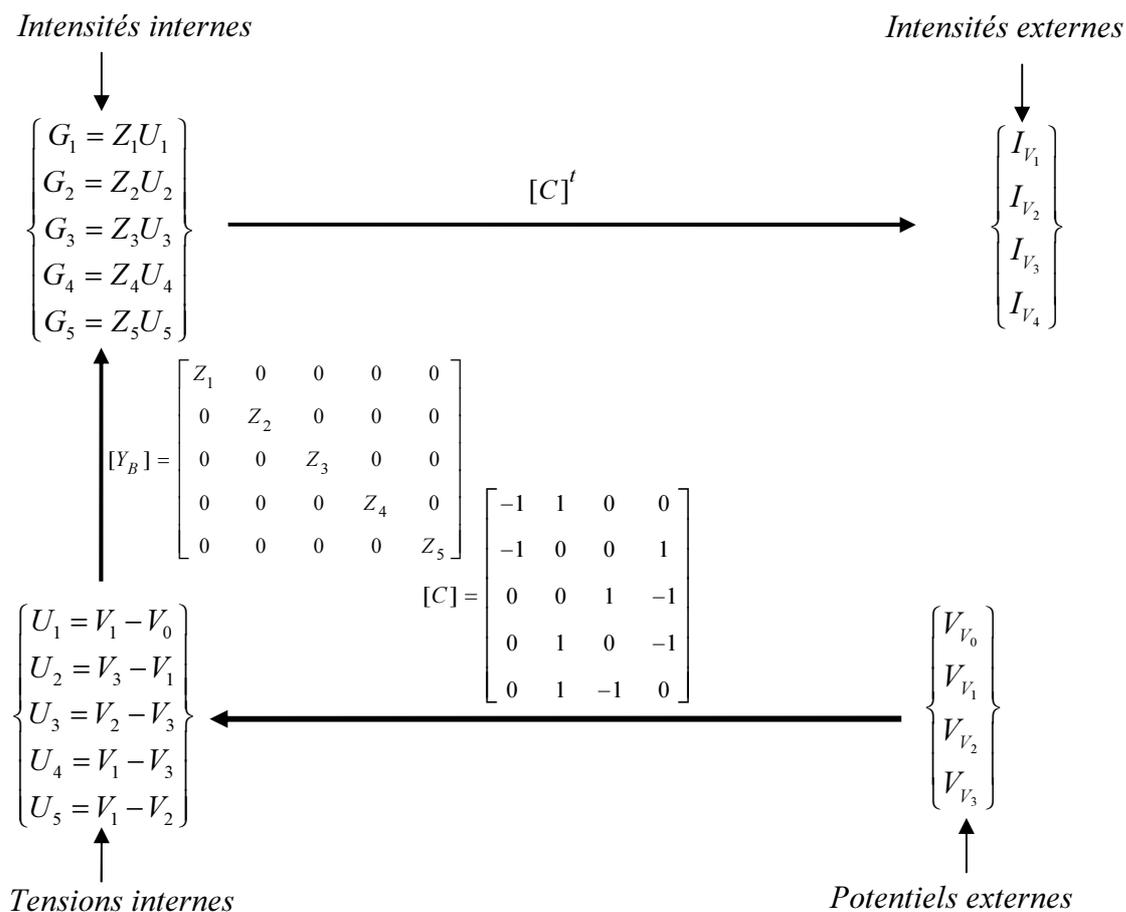
Dans notre approche topologique, la structure topologique du réseau électrique est invariante et nous pouvons placer la source de courant dans n'importe quel nœud suivant le cas étudié.

Afin de montrer la généralité de cette approche topologique, nous utilisons l'impédance  $Z$  qui peut présenter une résistance, une capacité ou une inductance. Ainsi, la matrice d'incidence qui assure le passage des nœuds aux arcs s'écrit sous la forme suivante :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix}$$

Dans le cas étudié les composantes de cette matrice sont les inverses des résistances.

Le graphe KBR du réseau électrique est présenté par la figure 29 [Plateaux, 2007].

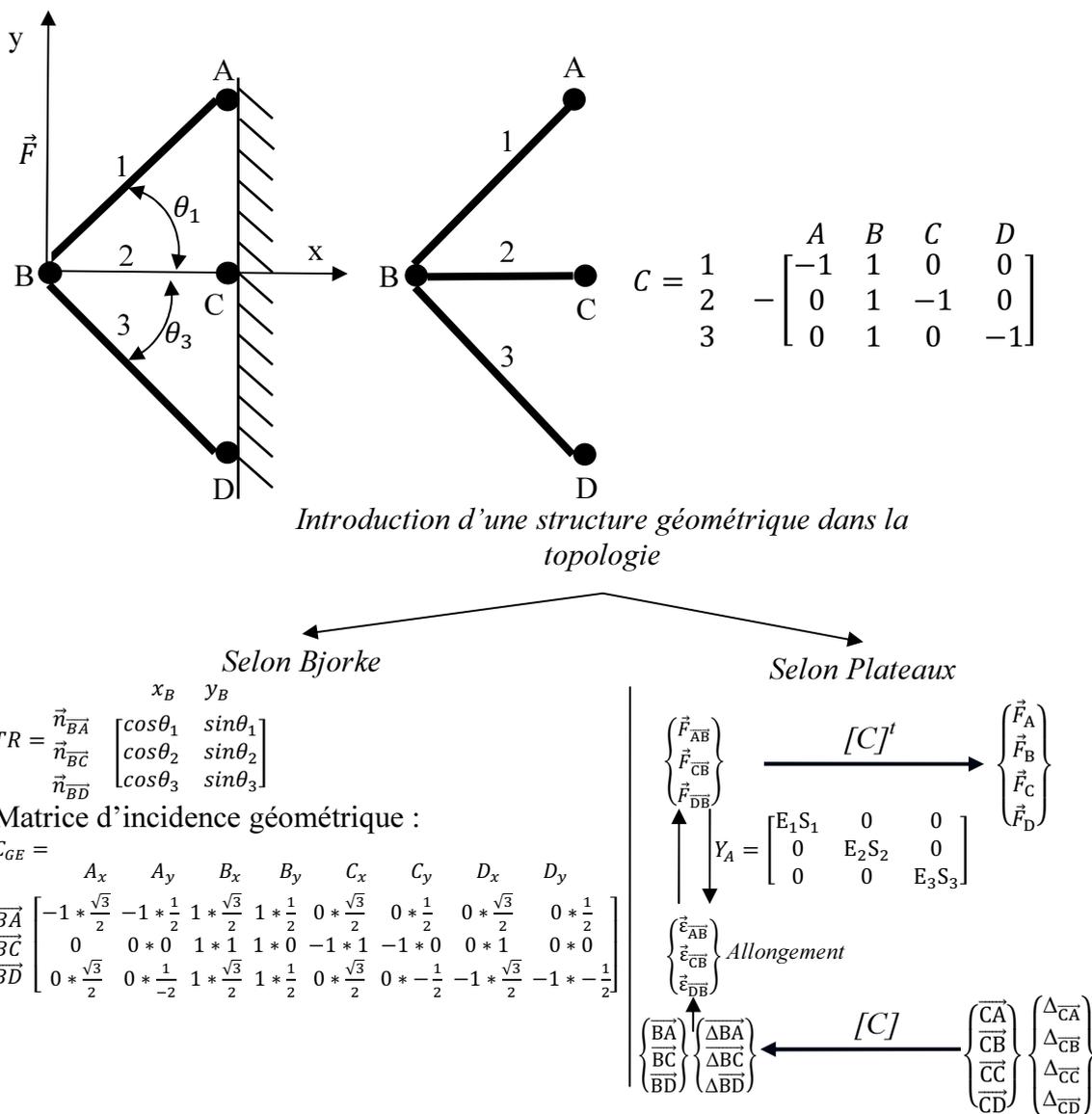


**Figure 29.** Graphe topologique du réseau électrique

Ce graphe nous permet de déterminer les tensions internes  $\{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5\}'$  à partir des 4 potentiels externes  $\{V_{V_1} \ V_{V_2} \ V_{V_3} \ V_{V_4}\}'$  appliqués aux nœuds du réseau électrique. Ce passage est assuré par la matrice d'incidence  $[C]$ . Le tenseur de conductance  $[Y]$  permet de passer des tensions internes aux intensités internes  $\{I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4 \ I_5\}'$ . La matrice d'incidence transposée  $[C]'$  permet d'exprimer en fonction des intensités internes, les intensités externes appliquées aux nœuds  $\{I_{V_1} \ I_{V_2} \ I_{V_3} \ I_{V_4}\}'$ .

### ***De la géométrie dans la topologie***

Pour les structures électriques la répartition spatiale de ces composantes n'a aucune influence sur les tensions et les intensités. En effet la géométrie des structures électriques n'a aucune influence sur la loi des mailles et des nœuds. Ainsi les variables électriques sont définies en  $nD/0D$  avec  $nD$  représente l'espace mathématique des solutions et  $0D$  représente l'espace géométrique qui est nul pour une structure électrique. Or la plupart des phénomènes physiques s'appuient sur la structure géométrique de ces différents constituants. Dans ce cas, la géométrie doit être alors prise en compte lors de la résolution de ces structures. Par exemple, prenant le cas du treillis mécanique traité par Björke [Björke, 1995]. Ce treillis est présenté par la figure 29. Dans la résolution Björke fait apparaître une matrice supplémentaire  $TR$ . Les éléments de cette matrice correspondent aux directions des branches. Plus tard, Plateaux [Plateaux et al, 2007] reprend le même exemple en améliorant la solution proposée par Björke puisqu'elle entraîne une fusion entre la structure topologique du treillis et son support géométrique et il fait apparaître distinctement la géométrie nominale et les variations de position des nœuds (figure 30).



**Figure 30.** De la géométrie dans la topologie dans le cas du treillis

## 2. Essais précédents : langage MODELICA

Afin d'appliquer cette approche topologique basée sur le graphe topologique KBR pour la conception des systèmes mécatroniques, Plateaux a proposé une démarche de conception [Plateaux et al., 2009] basée sur le langage Modelica [Elmqvist, 1978] [Modelica, 2010] au sein de l'environnement Dymola.

En effet, le langage orienté objet Modelica tient compte des connexions topologiques : deux objets connectés échangent leurs variables par l'écriture d'une égalité terme à terme. Aussi, dans la plupart des objets créés dans Modelica, les relations sont acausales et par conséquent les deux équations  $I=U/R$  et  $U=RI$  sont équivalentes. En effet, l'équation  $I=U/R$  ne signifie

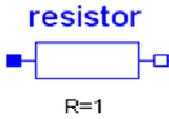
pas l'affectation de la valeur  $U/R$  à  $I$  et l'équation  $U=RI$  ne signifie pas l'affectation de la valeur  $RI$  à  $U$ .

Dans Modelica, chaque système peut être constitué d'un ensemble connecté d'objets et chaque objet apporte ses propres données et loi de comportement. Ces différents composants sont ainsi connectés par les grandeurs duales qui les caractérisent par exemple force/vitesse, tension/intensité et pression/débit.

Prenant l'exemple d'une résistance électrique (figure 31), cet élément est caractérisé dans Modelica par deux connecteurs permettant le passage de deux types de données : une traversant la résistance de type flux (*through*) qui est l'intensité du courant et l'autre de type différence de potentiels (*across*) qui est la tension.

```

model Resistance "Résistance"
  parameter Modelica.SIunits.Resistance R=1 "valeur de la Résistance";
  SI.Voltage v "Différence de potentiels (ddp) entre deux pins (= p.v - n.v)";
  SI.Current i "Courant entrant dans la pin p et ressortant par la pin n";
  PositivePin p "Broche positive (potentiel p.v > n.v pour une ddp v)";
  NegativePin n "Broche négative ";
  equation
    v = p.v - n.v;      => across
    0 = p.i + n.i;      => through
    i = p.i;            => orientation de la branche
    v = R*i;            => loi de comportement
  end Resistance;
  
```



**Figure 31.** Résistance électrique et le code MODELICA associé

Les échanges de la résistance avec d'autre objet sont réalisés via les connecteurs pin (figure 32 a). Pour une résistance électrique ou plus généralement pour un composant électrique quelconque, le connecteur comporte deux variables duales (potentiel /intensité). Dans MODELICA, la déclaration d'une variable de type flux se diffère de la déclaration d'une variable de type ddp par l'utilisation du mot clé « *flow* » (figure 32 b).

```

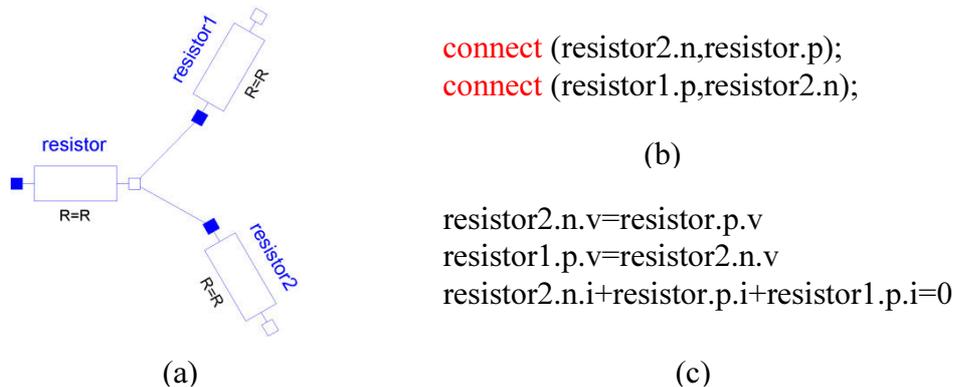
name
  connector Pin "Broche d'un composant électrique"
  Modelica.SIunits.Voltage v "Potentiel à la broche"
  flow Modelica.SIunits.Current i "courant circulant par la broche"
  end Pin;
  
```

(a) (b)

**Figure 32.** Déclaration des variables traversant la broche (a) graphisme associé (b) code associé

Finalement, pour construire un réseau électrique de  $n$  résistances ou plus généralement  $n$  composants électriques, l'assemblage des composants est géré par le mot clé *connect* (). Ce

mot clé permet de respecter les lois de Kirchhoff (figure 33 (b)). Ainsi, toutes les variables de type potentiel c'est à dire les tensions seront identiques aux nœuds de connexion et la somme de toutes les variables déclarées avec flow c'est à dire les intensités du courant sera nulle en ce nœud. L'utilisation de *connect ()* dans le cas d'un réseau électrique (Figure 33(a)) constitué de trois résistances est équivalente au code donnée par la figure 33(b) et la figure 33(c).



**Figure 33.** Assemblage de résistances électrique (a) graphique (b) code Modelica (c) code mis à plat

Par contre le langage MODELICA présente quelques inconvénients. En effet, la nature topologique du langage MODELICA est limitée aux 0 et 1 simplexes (seulement représentation des 1-simplexes) et l'accès aux dimensions supérieures peut se faire que via des transformations en un 0-simplexe (Plateaux, 2011). Aussi, MODELICA associe la topologie et le comportement ce qui limite la généralité du modèle étudié. Prenant l'exemple de la résistance électrique présentée par la figure 19, nous remarquons clairement que nous associons la topologie et le comportement du système dans le même modèle. Alors que dans notre approche nous cherchons à dissocier la topologie et le comportement afin d'avoir un modèle générique à laquelle nous pouvons ajouter les paramètres physiques et géométriques et les lois de comportement qui nous intéressent. Aussi, le langage MODELICA ne permet pas la modélisation des systèmes dynamiques à structure dynamique (Plateaux, 2011). La modélisation peut être effectuée indirectement pour des éléments spécifiés et en décrivant les changements qui peuvent être causés par leurs changements de topologie comme dans le cas d'un interrupteur pour lequel il existe deux positions ouverte ou fermée.

### 3. Notre approche topologique

Vues les limites du langage MODELICA, nous nous sommes intéressés dans ce travail à adopter une approche topologique permettant de dissocier la topologie / comportement du

système étudié pour avoir un modèle générique local permettant l'optimisation du comportement du système en fonction du global.

Comme langage permettant l'application de cette approche topologique, nous avons appliqué le langage MGS (Modèle Général de Simulation).

### *3.1. Langage MGS*

MGS est un projet de recherche de l'IBISC (Laboratory for Computer Science, Integrative Biology and Complex Systems) de l'université d'Evry [the MGS home page] [Spicher 2006] [Cohen 2004] [Giavitto et al 2002] [Spicher and Michel 2007]. Ce projet poursuit deux objectifs complémentaires. D'une part, l'étude et le développement de l'apport de notions de nature topologique dans les langages de programmation et d'autre part, l'application de ces notions à la conception de nouvelles structures de données et de contrôle pour la simulation de systèmes dynamiques à structure dynamique en particulier dans le domaine de la biologie et de la morphogénèse. En plus d'éléments de base comme les constantes scalaires, les variables, les fonctions, les structures de contrôles, les fonctions systèmes,..., MGS intègre de nouveaux types de valeurs appelés les collections topologiques et leurs transformations.

Les collections topologiques et leurs transformations offrent un cadre uniforme pour spécifier et manipuler des structures de données et ils apportent une nouvelle notion de réécriture.

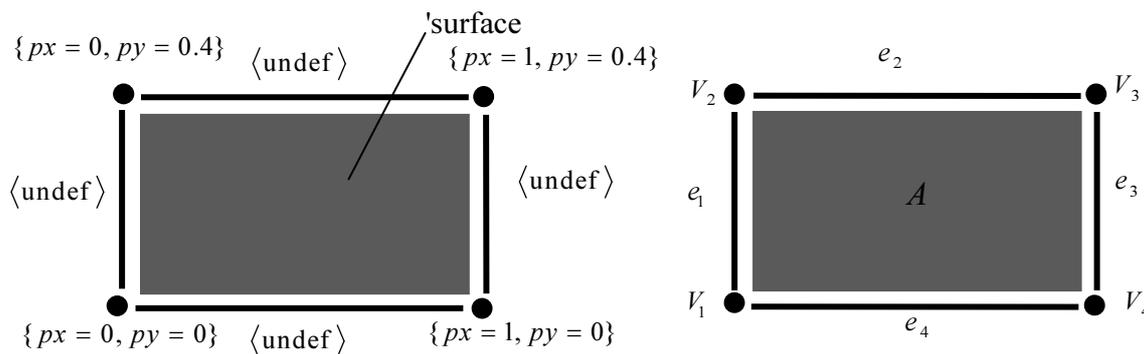
Le langage MGS permet :

- la prise en compte des relations topologiques dans un langage de programmation ;
- la simplification de la modélisation des systèmes complexes à structure dynamique : le système est décrit par un ensemble d'interactions locales entre des entités plus élémentaires ;
- la séparation de la topologie et la physique : la structure topologique est indépendante du comportement.

Une collection topologique représente l'état d'un système dynamique c'est-à-dire l'interconnexion entre ces différents éléments et une transformation représente l'évolution de la collection topologique c'est-à-dire la loi de comportement des différents éléments du système.

### 3.1.1. Les collections topologiques

Une collection topologique est une structure de données dont l'organisation est fondée sur un complexe cellulaire abstrait décoré par des valeurs. La figure 34 présente un exemple de collection topologique et son complexe cellulaire associé. Ce complexe cellulaire est constitué de quatre sommets notés  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ , quatre arcs notés  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  et une seule surface notée  $\{A\}$ . Par exemple, les faces de  $e_1$  sont  $\{V_1, V_2\}$ , les faces de  $\{A\}$  sont  $\{V_1, V_2, V_3, V_4, e_1, e_2, e_3, e_4\}$  et les cofaces de  $V_2$  sont  $\{e_1, e_2\}$ .



**Figure 34.** Exemple de collection topologique et son complexe cellulaire associé

La définition d'une collection topologique nécessite deux complexes de chaînes l'un pour associer les éléments d'un groupe abélien  $G$  pour le calcul du bord et l'autre pour associer les éléments d'un groupe abélien  $Abel(Val)$  pour associer des valeurs arbitraires aux cellules. Ces deux complexes de chaînes peuvent être combinés à travers l'utilisation du groupe abélien  $Abel_G(Val)$  qui dénote l'ensemble des fonctions totales de  $Val$  dans  $G$ .

**Définition des collections topologiques** [Spicher, 2006] : un type de collection topologique est un quintuplet  $T(K, G, \partial, Val, pred)$  tel que :

- $K$  est un complexe cellulaire abstrait de dimension finie ;
- $C(K, G, \partial)$  est un complexe de chaînes, appelé la forme des collections de type  $T$  ;
- $Val$  est un ensemble arbitraire de valeurs ;
- $pred$  est un prédicat désignant un sous-ensemble de  $C(K, Abel_G(Val))$ .

Une collection topologique est un couple  $(T, c)$  où  $T$  est un type de collection topologique  $T(K, G, \partial, Val, pred)$  et  $c$  est une chaîne de  $C(K, Abel_G(Val))$  telle que  $pred(c)$  est vrai.

Pour illustrer cette définition, nous considérons les séquences qui sont des collections topologiques de dimension 1. La figure 35 présente un exemple de séquence. La topologie d'une séquence est un graphe linéaire. Pour ce type de collection on a :

- *le complexe*  $K$  : les sommets sont représentés par des entiers  $i$  et les arcs par les couples de  $\{(i, i+1), i \in \mathbb{N}\}$  où les faces de chaque arc  $(i, i+1)$  sont les sommets  $i$  et

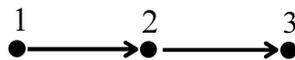
$$i+1 : \begin{cases} K_0 = i \\ K_1 = \{(i, i+1), i \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

- *la forme*  $C(K, G, \partial)$  : le complexe  $K$  est orienté de gauche à droite. Le groupe utilisé pour calculer les bords est  $\mathbb{Z}$  auquel est associé l'opérateur de bord défini par

$$\begin{cases} \partial_0(i) = 0 \\ \partial_1(i, i+1) = i+1 - C_{(K, \mathbb{Z})}i \end{cases}$$

- *le prédicat*  $pred$  : le sous ensemble  $(K, Abel_{\mathbb{Z}}(Val))$  est défini de telle sorte que seuls les sommets sont décorés et à partir d'un certain rang, les sommets ne sont plus décorés. Soit  $l \in (K, Abel_{\mathbb{Z}}(Val))$ , le prédicat est défini par

$$pred(l) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \begin{cases} \forall i < n \in \mathbb{N}, \exists v \in Val, l(i) = 1.v \\ \forall i \geq n \in \mathbb{N}, l(i) = 0_{Abel_{\mathbb{Z}}(Val)} \\ \forall i \in \mathbb{N}, l((i, i+1)) = 0_{Abel_{\mathbb{Z}}(Val)} \end{cases}$$



**Figure 35.** Exemple de séquence

Dans la définition des collections topologiques, la relation  $\partial \circ \partial = 0$  n'est pas exigée (figure 36).



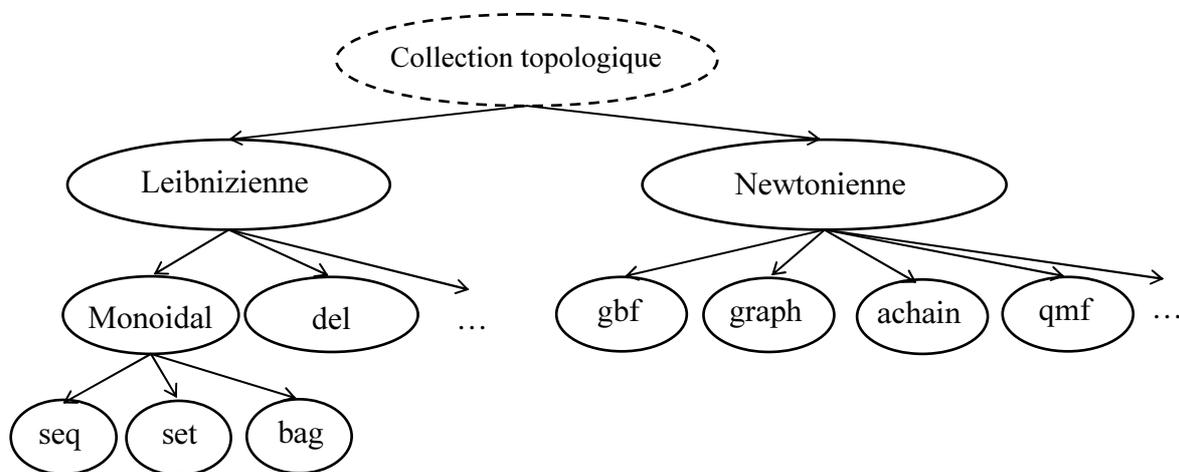
**Figure 36.** Exemple de collection topologique telle que la relation  $\partial \circ \partial = 0$  n'est pas vérifiée

Les lecteurs intéressés peuvent se référer à Spicher qui présente dans sa thèse intitulée « Transformation de collections topologiques de dimension arbitraire : Application à la

modélisation de systèmes dynamiques », une reformulation mathématique des collections topologiques [Spicher, 2006].

Dans MGS, il existe plusieurs types de collections topologiques (figure 37) qui peuvent être décomposés en deux catégories :

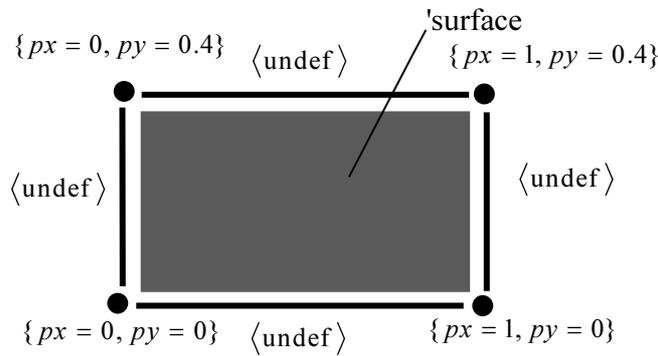
- collection Leibnizienne : l'espace est défini à partir des éléments qu'il contient et de leurs positions relatives les uns par rapport aux autres ;
- collection Newtonienne : l'espace est défini comme un objet ayant une existence propre sur lequel d'autres objets sont placés et se déplacent. Dans ces collections, les positions existent indépendamment de leur décoration. La valeur spéciale `<undef>` est associée aux positions non décorées.



**Figure 37.** Différents types de collections topologiques dans MGS

Dans cette thèse, nous nous intéresserons à l'application des collections Newtoniennes pour la modélisation et plus précisément, nous nous intéresserons à l'utilisation des collections topologiques de types chaîne abstraite. La figure 38 présente un exemple de chaîne abstraite et le code MGS associé. Pour ce type de collection topologique, la topologie est définie de façon explicite par la création de nouvelles cellules. Ces cellules sont ensuite décorées en utilisant les opérateurs de somme et de produit. Pour parcourir les cellules d'une chaîne abstraite notée  $c$ , on a les fonctions suivantes :

- $faces(c)$  : fournit la liste des faces de  $c$  ;
- $cofaces(c)$  : fournit la liste des cofaces de  $c$  ;
- $icells(c)$  : fournit la liste des cellules incidentes à  $c$  ;
- $pcells(c,p)$  : fournit la liste des  $p$ -voisines de  $c$ .



```

V1 := add_acell(0,seq : (), seq : ());;
V2 := add_acell(0,seq : (), seq : ());;
V3 := add_acell(0,seq : (), seq : ());;
V4 := add_acell(0,seq : (), seq : ());;
e1 := add_acell(1,(V1,V2),seq : ());;
e2 := add_acell(1,(V2,V3),seq : ());;
e3 := add_acell(1,(V3,V4),seq : ());;
e4 := add_acell(1,(V4,V1),seq : ());;
f := add_acell(2,(e1,e2,e3,e4),seq : ());;
  {px = 0, py = 0}*V1
+ {px = 0, py = 0.4}*V2
+ {px = 1, py = 0.4}*V3
+ {px = 1, py = 0}*V4
+ 'surface'* f::

```

**Figure 38.** Exemple de chaîne abstraite et code MGS associé

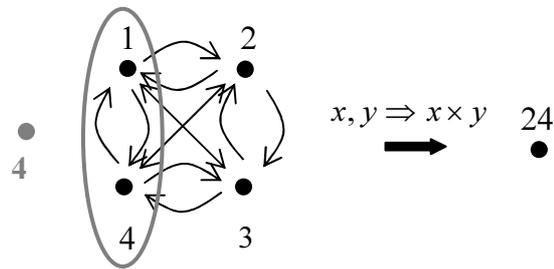
### 3.1.2. Les transformations

Les transformations permettent de manipuler les structures de données représentées par le langage MGS. Elles sont définies par un ensemble de règles de réécritures de la forme  $m_i \Rightarrow e_i$ . La partie gauche de la règle  $m_i$  est appelée motif et la partie droite  $e_i$  est l'expression qui remplace les instances de  $m_i$ . Lorsqu'une règle est appliquée sur une collection topologique, les sous-collections respectant ce motif sont remplacées par la collection topologique calculée par l'évaluation de l'expression. Ainsi le principe de l'application d'une transformation à une collection topologique se résume en trois étapes. Soit  $C$  une collection topologique (Cohen, 2004). Ses étapes se résument comme suit :

- des sous-collections de  $C$  sont sélectionnées selon le motif ;
- pour chaque sous-collection  $A$  sélectionnée, une nouvelle sous-collection  $A_0$  est calculée à partir de  $A$  ;
- les sous-collections calculées viennent se substituer aux sous-collections sélectionnées.

Par exemple la fonction factorielle est usuellement définie par une fonction récursive qui connaissant la factorielle de  $(n-1)$ , la factorielle de  $n$  est calculée. Cette démarche impose une dépendance entre  $fact(n-1)$  et  $fact(n)$  ainsi que l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées. Or ce calcul ne nécessite pas cet ordre  $fact(n) = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$ . Dans MGS, la fonction factorielle consiste alors à choisir deux nombres et les remplacer par leur produit.

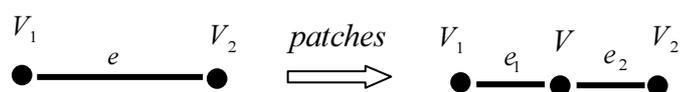
Ceci s'exprime par la transformation  $x, y \Rightarrow x \times y$ . Cette règle est appliquée jusqu'à atteindre un point fixe (figure 39).



**Figure 39.** Exemple de transformation : calcul factorielle

Parmi les transformations fournis par MGS, on a :

- fonctions définies par cas ;
- réécriture locale de sous-collection,
- les transformations de chemins : ils permettent la mise à jour des valeurs associées aux cellules ;
- les patches : ils sont destinés à modifier la structure topologique des cellules. La figure 40 présente un exemple de patches. Cette transformation permet d'insérer un nouveau sommet sur un arc: un arc  $e$  dont les faces sont  $V_1$  et  $V_2$ , est filtré et remplacé par deux nouveaux arcs  $e_1$  et  $e_2$  et un nouveau sommet  $V$ , l'arc  $e_1$  est bordé par les sommets  $V_1$  et  $V$ , et l'arc  $e_2$  est bordé par les sommets  $V$  et  $V_2$ .

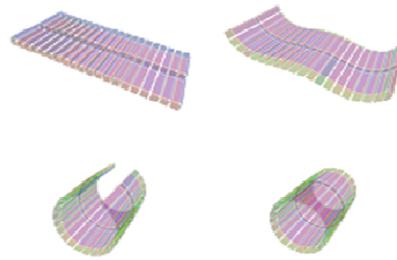


**Figure 40.** Insertion d'un sommet

### 3.1.3. Quelques applications

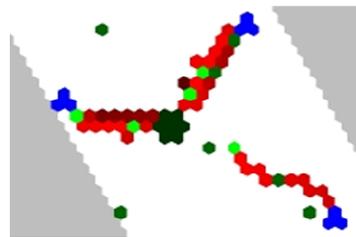
Parmi les applications qui sont réalisées en MGS, nous pouvons citer [the MGS home page] :

- modélisation déclarative d'un processus semblable à la neurulation (figure 41) : le processus de neurulation consiste en une modification topologique de la région dorsale de l'embryon (le plan neural se plie pour former le tube neurale). La transformation topologique sous-jacente correspond au passage d'un plan à un tube ;



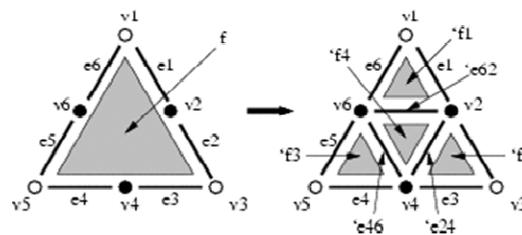
**Figure 41.** *Modélisation déclarative d'un processus semblable à la neurulation [the MGS home page]*

- les colonies de fourmis cherchent de la nourriture dans MGS (figure 42): dans ce projet, une colonie de fourmis cherche de la nourriture. Le comportement des fourmis suit un ensemble de règles décrites dans MSG ;



**Figure 42.** *Les colonies de fourmis cherchent de la nourriture dans MGS [the MGS home page]*

- subdivision de la surface (figure 43): dans cet exemple, les patches sont appliqués pour décrire un algorithme de subdivision de surface en se basant sur les algorithmes de subdivision de maillage triangulaire, qui consiste à diviser chaque triangle en quatre triangles coplanaires (subdivision polyédrale).

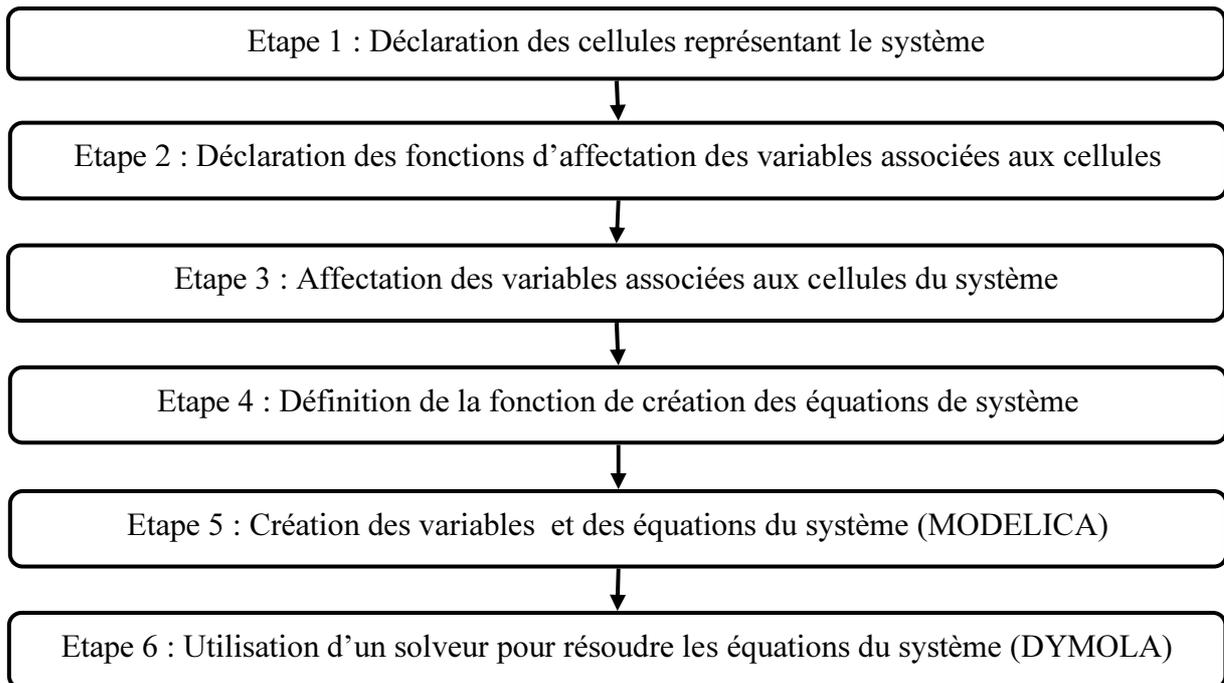


**Figure 43.** *Le principe de subdivision de la surface en utilisant les collections topologiques et les patches [The MGS home page]*

### 3.2. Démarche générique de l'application des collections topologiques et leurs transformations dans la modélisation

Dans notre approche topologique, nous nous sommes intéressés à utiliser les collections topologique pour présenter la topologie du système étudié (loi d'interconnexion) et les transformations pour spécifier sa loi de comportement.

Les différentes étapes de l'application de cette approche sont présentées par la figure 44.

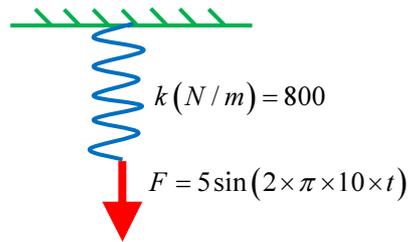


**Figure 44.** Les étapes de l'application des collections topologiques et leurs transformations dans la modélisation

La démarche générique consiste à représenter le système étudié par un complexe cellulaire abstrait auquel nous affectons les variables d'intérêt. Ces variables sont définies par des fonctions d'affectation (Etape 1, 2 et 3). Une fois terminée l'écriture du système sous forme de collection topologique, nous spécifions les lois de comportements locales des différents composants du système étudié à travers les transformations (étapes 4). La génération des équations se fait ainsi en balayant toutes les cellules représentant le système. Les équations sont écrites au format MODELICA et nous utilisons DYMOLA comme solveur (étapes 5 et 6).

#### **Exemple : ressort en traction**

Pour illustrer cette approche, nous considérons comme exemple un ressort en traction/compression soumis à une force  $F$  (figure 45).



**Figure 45.** *Système Bâti/Ressort*

*Etape 1 : Déclaration des cellules représentant le système (figure 46)*

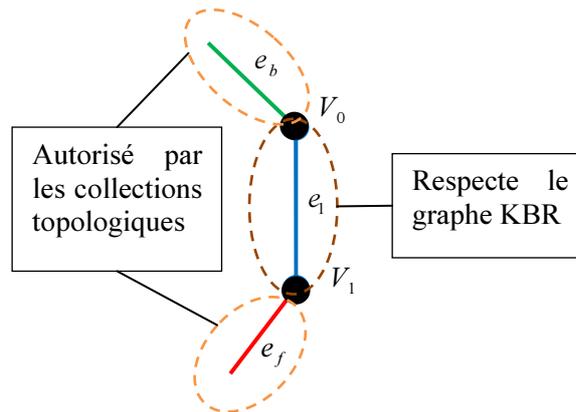
Tout d'abord, nous commençons par définir les cellules représentant le système. Nous utilisons uniquement les cellules de dimension 0 et 1. Les cellules de dimension 0 représentent les nœuds notés  $P_1$  et  $P_2$  et les cellules de dimension 1 représentent le ressort noté  $e_1$ , la force notée  $e_f$  et le support noté  $e_b$ . L'arc représentant le ressort diffère par rapport aux autres arcs représentant la force et le support du fait qu'il est limité par deux nœuds. La figure 46 montre une présentation du ressort sous forme de complexe cellulaire.

```
v0 := new_vertex();
v1 := new_vertex();

e1 := new_edge(v0,v1);
eb1 := new_acell(1,v0::seq(),seq());
ef := new_acell(1,v1::seq(),seq());
```

```
/1/:[dim=0; face=; coface=]
/2/:[dim=0; face=; coface=]
/3/:[dim=1; face=/1/2/; coface=]
/4/:[dim=1; face=/1/; coface=]
/5/:[dim=1; face=/2/; coface=]
```

Il est clair que dans la modélisation basée sur les collections topologiques, nous tenons compte de tous les éléments du ressort étudié. Alors que pour le graphe topologique KBR, (voir figure 26 page 33), la force et le bâti sont vus comme extérieurs au système étudié. En effet dans le graphe d'interconnexion n'apparaissent que l'arc correspondant au ressort et les nœuds correspondant à ces extrémités.



**Figure 46.** Déclaration de ressort sous forme de complexe cellulaire

*Etape 2 : Déclaration des fonctions d'affectation des variables associées aux cellules*

Ensuite, nous déclarons les fonctions d'affectation des variables telles que le déplacement et la rigidité du ressort.

```

fun make_rigidite(K_) = { K_ = K_ };;
fun unkwn_rigidite(id) = make_rigidite("K_" + id);;

fun make_allongement(dl_) = { dl_ = dl_ };;
fun unkwn_allongement(id) = make_allongement("dl_" + id);;

fun make_forcei(F_i) = { F_i = F_i };;
fun unkwn_forcei(id) = make_forcei("Fi_" + id);;
fun make_forcej(F_j) = { F_j = F_j };;
fun unkwn_forcej(id) = make_forcej("Fj_" + id);;

fun make_deplacement(Pd_) = { Pd_ = Pd_ };;
fun unkwn_deplacement(id) = make_deplacement("Pd" + id);;

```

*Etape 3 : Affectation des variables associées aux cellules du système*

Puis, ces variables sont associées aux cellules correspondantes. La figure 47 montre une présentation du ressort sous forme de collection topologique.

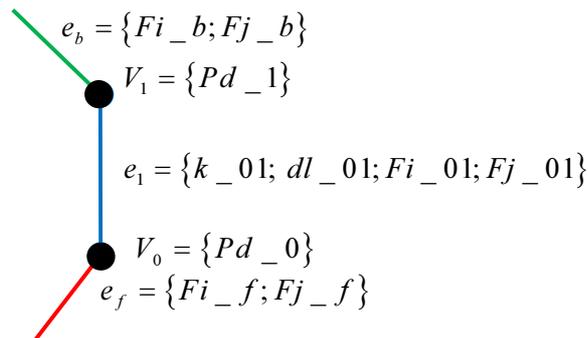
```

system :=
({id = 0} + unkwn_deplacement(0)) * v0 +
({id = 1} + unkwn_deplacement(1)) * v1 +

({vi = 0, vj = 1} + unkwn_forcei("01") + unkwn_forcej("01") + unkwn_allongement("01")
+ unkwn_rigidite("01")) * e1 +
({vi = 1, vj = `None} + unkwn_forcei("f") + unkwn_forcej("f")) * ef +
({vi = `None, vj = 1} + unkwn_forcei("b1") + unkwn_forcej("b1")) * eb
;;

```

```
'achain: {
  < 'Pd = Pd0, 'id = 0
  >
  @ /1/: [dim=0; face=; coface=/4/3/1,
  < 'Pd = Pd1, 'id = 1
  >
  @ /2/: [dim=0; face=; coface=/5/3/1,
  < 'F_i = Fi_01, 'F_j = Fj_01, 'K_ = K_01, 'dl_ = dl_01, 'vi = 0,
  'vj = 1
  >
  @ /3/: [dim=1; face=/1/2/; coface=1,
  < 'F_i = Fi_b1, 'F_j = Fj_b1, 'vi = 'None, 'vj = 1
  >
  @ /4/: [dim=1; face=/1/; coface=1,
  < 'F_i = Fi_f, 'F_j = Fj_f, 'vi = 1, 'vj = 'None
  >
  @ /5/: [dim=1; face=/2/; coface=1
  >
  }
}
```



**Figure 47.** Déclaration de ressort sous forme de collection topologique

#### Etape 4 : Définition de la fonction de création des équations de système

Par la suite, nous définissons la fonction « création des équations du système ». Dans cette étape, on doit prendre en compte que le système va être résolu en utilisant DYMOLA et par conséquent il doit être écrit au format MODELICA. Donc, on définit deux fonctions. La première fonction est « fun-make-var (sys) » pour déclarer les variables et la seconde est « fun-make-eq (sys) » pour générer les équations du système.

La génération du système d'équations est réalisée en balayant l'ensemble des cellules représentant le système « fold\_indexed » et en définissant la loi de comportement locale de chaque cellule en fonction de sa dimension « switch dimension (c) ». Pour les 0-cellules, on a  $\sum_{j=1}^N \vec{F}_j = \vec{0}$  (équation d'équilibre du nœud) où  $\vec{F}_j$  représente la force normale de chaque arc voisin au nœud et  $N$  le nombre d'arcs concourants au nœud. Pour les 1-cellules, si la cellule de dimension 1 est limitée par un seul nœud ( $\text{size}(lv) == 1$ ) c'est dire qu'elle représente le support ou la force, alors on a  $\vec{F}_i + \vec{F}_j = \vec{0}$  (équation d'équilibre d'un arc), sinon (la cellule de dimension 1 est limitée par deux nœuds), c'est qu'elle représente le ressort, alors, en plus de l'équation de l'équilibre d'un arc, on ajoute l'équation décrivant la loi de comportement locale du ressort  $\vec{F}_i = k \Delta l$ .

```
fun make_var (sys) = ("model ressort \n\n" +
```

```

fun make_eq(sys) = ("equation\n\n" +
  fold_indexed((\c.\v.\acc. (
    switch dimension(c)
    case 0: (
      let le = cofaces(c) in
      let lv = map((\e.(sys.(e))),le) in
      fold((\ev.\acc. (
        if (v.id == ev.vi)
        then ev.F_i + " + " + acc
        else ev.F_j + " + " + acc fi
      )), "0 = 0;\n",lv) +
      "\n\n"
    )
    case 1: (
      let lf = faces(c) in
      let lv = map((\v.(sys.(v))),lf) in
      v.F_i + " + " + v.F_j + " = 0;\n" +
      if (size(lv) == 2) then (
        v.F_j + " = " + v.K_ + " * (" + lv.(0).Pd + " - " + lv.(1).Pd
          + ");\n" +
        ) else "" fi +
      "\n\n"
    )
  endswitch + acc
  )), "", sys)
  + " end ressort ;"
  );

```

$$\sum_{j=1}^N \bar{F}_j = \bar{0}$$

$$\bar{F}_i + \bar{F}_j = \bar{0}$$

$$\bar{F}_i = k \bar{\Delta l}$$

Etape 5 : Création des variables et des équations du système : format MODELICA

```

make_eq(system);;
out1:= make_eq(system);;
"equationressort.txt" << out1;;

make_var (system);;
out2:= make_var(system);;
"variableressort.txt" << out2;;

```

Enfin, les équations du système sont créées et enregistrées au format MODELICA dans un fichier texte, puis résolues en utilisant Dymola.

```

model ressort
  Real Fi_f;
  Real Fj_f;
  Real Fi_b;
  Real Fj_b;
  Real Fi_01;
  Real Fj_01;
  Real K_01;
  Real Pd1;
  Real Pd0;
  equation
  Pd0=0; K_01=800; Fi_f=5*sin(2*Modelica.Constant.pi*10*time) //initial conditions
  Fi_f + Fj_f = 0; // Arc e(1 -> `None);
  Fi_b1 + Fj_b1 = 0; // Arc e(`None -> 1);
  // Arc e(0 -> 1);
  Fi_01 + Fj_01 = 0;
  Fj_01=K_01*(Pd0-Pd1);
  Fi_f + Fj_01 + 0 = 0; // Noeud v1;
  Fj_b1 + Fi_01 + 0 = 0; // Noeud v0;
end ressort ;

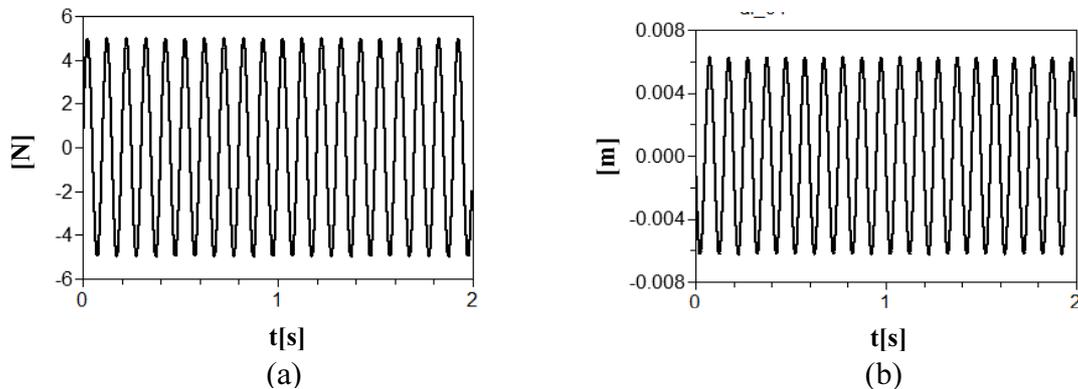
```

Etape 6 : Utilisation d'un solveur pour résoudre les équations du système (DYMOLA)

Pour la résolution, on prend les valeurs suivantes  $k = 800 \text{ N/m}$  et  $F = 5 \sin(2 \times \pi \times 10 \times t)$ .

Les résultats de simulation sont présentés par la figure 48.

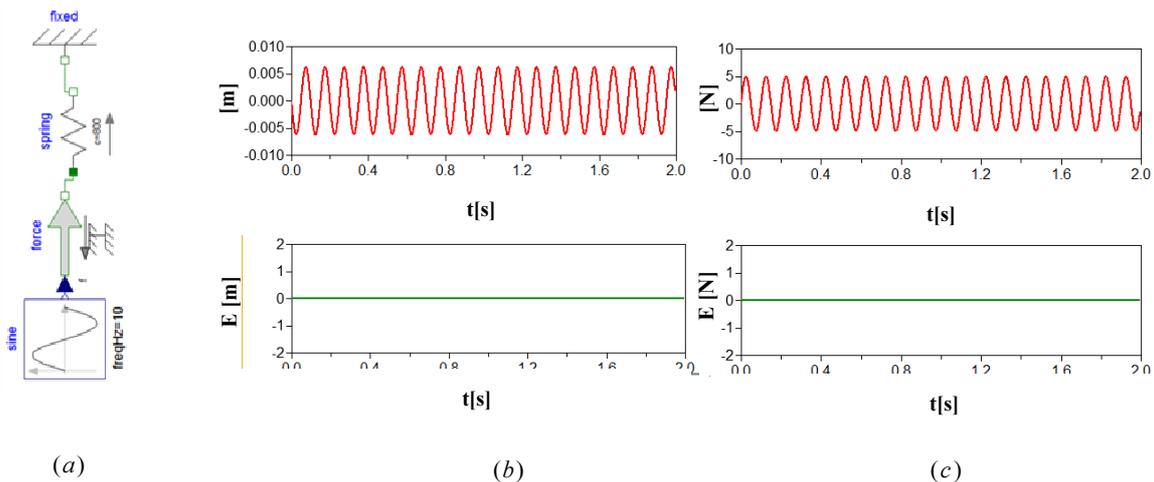
La figure 48 (a) présente le déplacement du nœud libre et la figure 48 (b) présente la réaction à l'appui.



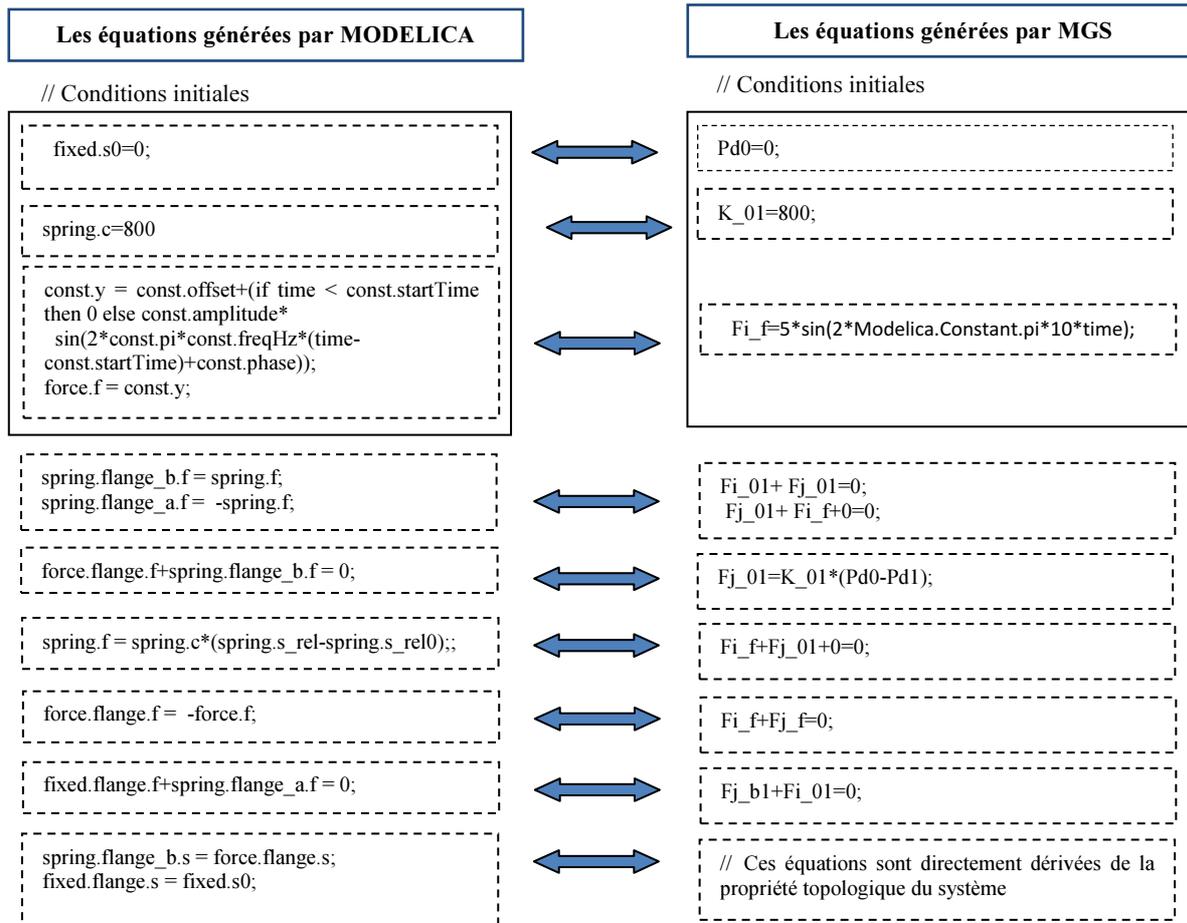
**Figure 48.** Résultats de simulations (a) déplacement du nœud libre (b) Réaction à l'appui

Afin de valider les résultats obtenus en utilisant le langage MGS, nous avons comparé ces résultats avec ceux obtenus par le langage MODELICA.

La figure 49 (a) montre le modèle MODELICA du ressort soumis à une charge externe ainsi que la différence entre les résultats obtenus par MGS et les résultats obtenus par Modelica (figure 49 (b) et figure 49 (c)). Nous avons constaté que l'erreur est nulle. En effet, nous avons utilisé le même solveur qui est DYMOLA avec la même précision pour toutes les variables et nous avons les mêmes équations (les équations ne diffèrent que par la façon dont ils sont déclarés) (figure 50).



**Figure 49.** Ressort (a) Modèle MODELICA (b) erreur de calcul du déplacement (c) erreur du calcul de la réaction à l'appui



**Figure 50.** Comparaison entre les équations générées par MODELICA et MGS

#### 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'apport de la topologie pour la modélisation des systèmes complexes en décrivant l'approche topologique développée par Plateaux qui est basée sur le graphe topologique KBR. Ensuite, nous avons présenté notre approche topologique. Cette approche topologique est basée sur les collections topologiques et leurs transformations. Les différentes étapes de modélisation sont présentées et illustrées dans le cas d'un ressort en traction soumis à une force extérieure. Cette approche topologique permet de tenir compte de la structure topologique du système étudié. En effet le système est décrit par un ensemble d'interactions locales entre des entités plus élémentaires permettant ainsi la séparation de la topologie et la physique et l'optimisation du comportement global du système en fonction de ses éléments locaux. Dans le chapitre suivant, les collections topologiques sont appliquées pour la modélisation des structures de barres et de poutres.

# III. Modélisation des structures de barres et de poutres par une approche topologique

## Sommaire

<b>1. Treillis à <math>N</math> barres à structure pyramidale.....</b>	<b>55</b>
<b>1.1. Description du système étudié.....</b>	<b>55</b>
<b>1.2. Graphe topologique KBR.....</b>	<b>56</b>
<b>1.3. Modélisation dans MGS .....</b>	<b>59</b>
<b>1.4. Cas particuliers .....</b>	<b>61</b>
1.4.1. Cas 1 : Treillis à trois barres.....	62
1.4.2. Cas 2 : Treillis à quatre barres.....	69
<b>2. Généralisation aux structures de poutres et de barres .....</b>	<b>71</b>
<b>2.1. Bref aperçu sur les structures de barres et de poutres .....</b>	<b>71</b>
2.1.1. Structures de barres .....	71
2.1.2. Structures de poutres .....	74
<b>2.2. Modélisation topologique des structures de barres.....</b>	<b>77</b>
2.2.1. Graphe KBR.....	77
2.2.2. Modélisation MGS .....	79
2.2.3. Exemple de structure de barres : Treillis à deux barres.....	81
<b>2.3. Modélisation topologique des structures de poutres.....</b>	<b>85</b>
2.3.1. Graphe KBR.....	85
2.3.2. Modélisation MGS .....	86
2.3.3. Application1 :Structure de poutres planes: portique .....	86
2.3.4. Application 2: ossature spatiale.....	91
<b>3. Conclusion .....</b>	<b>93</b>

## Résumé

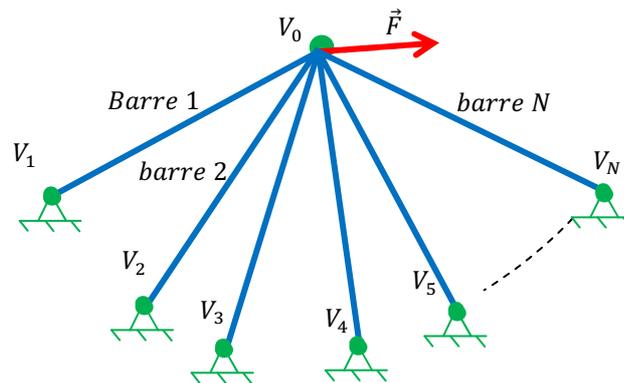
Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à appliquer les collections topologiques et les transformations pour la modélisation des structures de barres et de poutres. L'avantage de l'application des collections topologiques et leurs transformations pour la modélisation des structures de barres et de poutres par rapport aux autres approches est que nous déclarons la loi de comportement locale des barres ou des poutres (physique) indépendamment du nombre et de la manière dont elles sont connectées entre elles (topologie).

Dans ce chapitre, nous commençons par l'application de cette approche dans le cas particulier d'un treillis à structure pyramidale constitué de  $n$  barres. Ensuite, nous l'appliquons aux structures de barres planes et spatiales. Finalement, nous généralisons cette approche dans le cas des structures de poutres planes et spatiales. Pour valider cette approche, plusieurs cas sont étudiés. Les différents résultats obtenus sont comparés par rapport à ceux obtenus par le logiciel RDM6 et/ ou MODELICA en calculant l'erreur donnée par  $E = |R_{MGS} - R|$  avec  $R_{MGS}$  représente les résultats obtenus par le langage MGS et  $R$  les résultats obtenus par MODELICA ou RDM6.

## 1. Treillis à N barres à structure pyramidale

### 1.1. Description du système étudié

Dans cette section, nous considérons un treillis à structure pyramidal composé de N barres. Chaque barre est connectée en une extrémité, l'autre extrémité  $V_0$  étant libre. Ce treillis est soumis à une force extérieure  $\vec{F}$  en  $V_0$  (figure (51)).



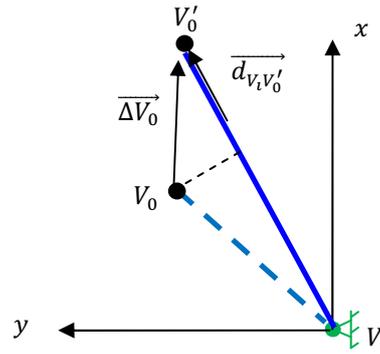
**Figure 51.** Structure du treillis à N barres

Lors de la résolution, nous pouvons avoir deux approches. La première approche est classique de type analyse où pour une structure et des contraintes mécaniques données, nous recherchons les réactions aux appuis. La deuxième approche est orientée synthèse. Connaissant les contraintes géométriques et la topologie de treillis, nous recherchons les inconnues permettant de remplir les conditions de fonctionnement définies dans la définition des exigences.

Dans la modélisation, nous avons utilisé l'équation de compatibilité des déformations. La figure 52 présente un déplacement arbitraire du nœud  $V_0$ , un vecteur  $\overline{\Delta V_0}$  à trois composants  $x, y, z$  représentant le déplacement de  $V_0$ .

On a  $\overline{\Delta V_i V_0} = \overline{\Delta V_0} - \overline{\Delta V_i}$  or le déplacement du nœud  $V_i$  est nul (nœud articulé à un support rigide) alors on peut écrire :

$$\overline{\Delta V_i V_0} = \overline{\Delta V_0}$$



**Figure 52.** Déplacement du nœud  $V_0$

En prenant  $\vec{d}_{V_i V'_0} = \frac{\overrightarrow{V_i V'_0} + \overrightarrow{\Delta V_0}}{\|\overrightarrow{V_i V'_0} + \overrightarrow{\Delta V_0}\|}$  un vecteur unitaire dirigé comme le montre la figure 51 le

long de la barre dans la direction positive de l'extension. A l'état d'équilibre, la relation force-déformation s'écrit comme suit:

$$F_i = k_i \cdot \delta_i \quad (3)$$

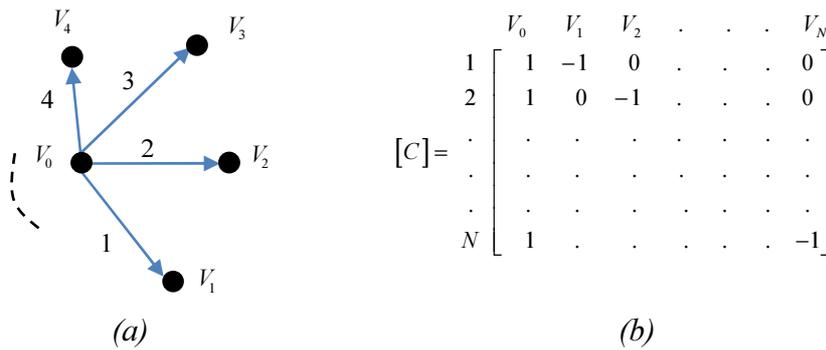
Où  $k_i = \frac{E_i A_i}{\|\overrightarrow{V_i V_0}\|}$  est la rigidité de la barre  $i$

et

$$\delta_i = \overrightarrow{\Delta V_i V_0} \cdot \frac{\overrightarrow{V_i V_0} + \overrightarrow{\Delta V_0}}{\|\overrightarrow{V_i V_0} + \overrightarrow{\Delta V_0}\|} \text{ est l'élongation de la barre à l'état d'équilibre.}$$

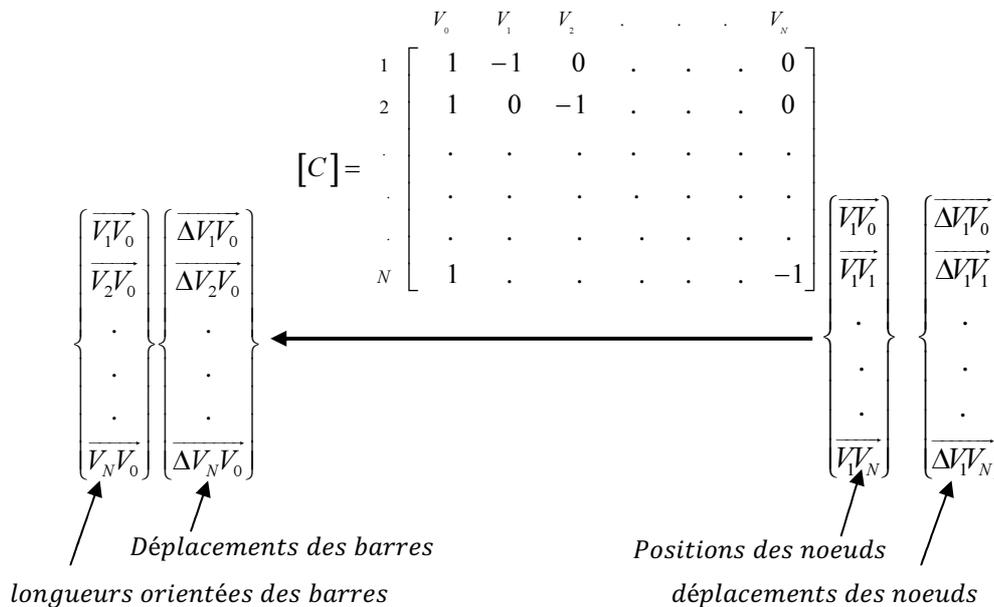
### 1.2. Graphe topologique KBR

Pour établir le graphe KBR du treillis, nous commençons par déterminer son graphe topologique (figure 53 (a)) où n'apparaissent que les nœuds correspondant aux rotules et les branches correspondant aux barres (la force et le bâti sont vus comme extérieurs au système étudié). A partir de ce graphe, nous déterminons la matrice d'incidence transposée qui définit le passage des nœuds aux branches (figure 53 (b)).



**Figure 53.** Treillis (a) graphe topologique (b) matrice d'incidence transposé

Ensuite, nous associons deux vecteurs pour chaque entité topologique. Pour les branches nous associons deux vecteurs, l'un représentant le déplacement des barres et l'autre représentant la longueur et l'orientation des barres. Pour les nœuds nous associons deux vecteurs l'un présentant la position des nœuds et l'autre présentant le déplacement des nœuds (figure 54).



**Figure 54.** Graphe topologique primal des déplacements

Le passage à l'espace dual pour ce treillis correspond aux forces associées aux branches et aux nœuds. Le passage des forces intérieures aux forces extérieures appliquées aux nœuds se fait grâce à la matrice d'incidence transposée (Figure 55).



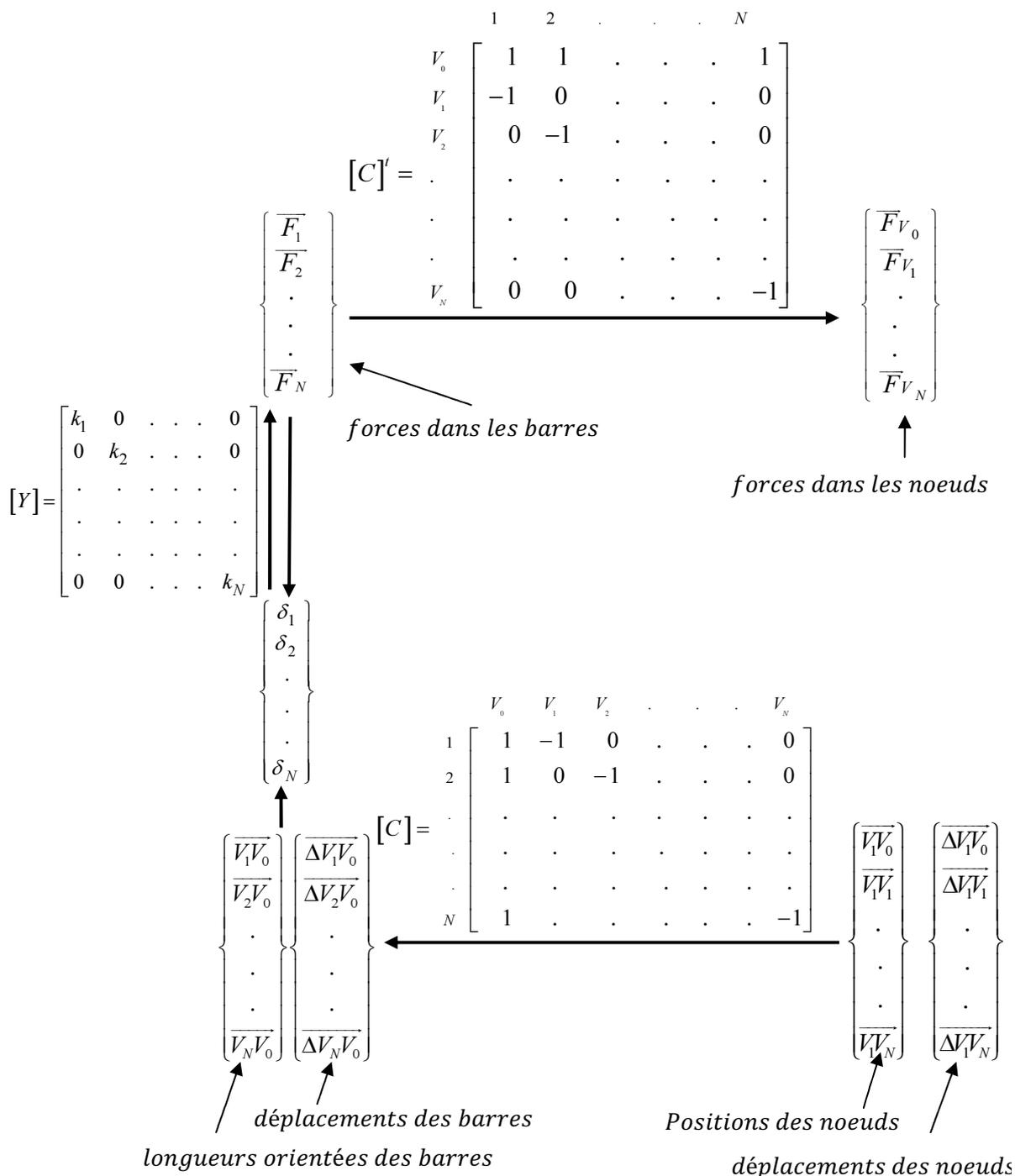


Figure 56. Graphe topologique KBR du treillis à  $N$  barres (déplacement/force)

### 1.3. Modélisation dans MGS

Tout d'abord, nous commençons par la déclaration des cellules représentant le système (figure 57). Nous utilisons uniquement les cellules de dimension 0 et 1.

- déclaration des nœuds du système: on définit les  $N+1$  nœuds.

```
vi := new_vertex() ; (with i = 0 ... N)
```

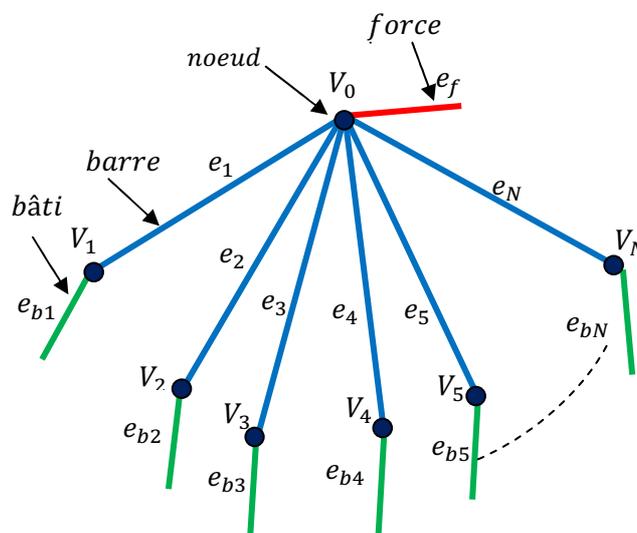
- déclaration des arcs du système : on distingue 3 types d'arcs :
  - les arcs représentant le bâti notés  $e_{bi}$  avec  $i = 1 \dots N$  ;
  - les arcs représentant les barres notés  $e_i$  avec  $i = 1 \dots N$  ;
  - l'arc représentant la force noté  $e_f$ .

```
ebi := new_acell(1,vi::seq(),seq()) ;
```

```
ei := new_edge(vi,v0) ;
```

```
ef := new_acell(1,v0::seq(),seq()) ;
```

La barre diffère du bâti et de la force du fait qu'elle est limitée par deux nœuds.



**Figure 57.** Représentation du treillis sous forme de complexe cellulaire

Ensuite, nous définissons les six fonctions d'affectation des variables (déplacement et force) comme suit :

- deux fonctions d'affectation pour les nœuds suivant que la position des nœuds à l'équilibre est connue ou non :
  - fun make\_pos : si à l'état d'équilibre, le déplacement du nœud est connu ;
  - fun unkwn\_pos : si à l'état d'équilibre, le déplacement du nœud est inconnu.
- Quatre fonctions d'affectations pour les arcs suivant que la force aux extrémités  $i$  ou  $j$  des arcs est connue ou non :
  - fun make\_forcei : si à l'état d'équilibre, la valeur de la force à l'extrémité  $i$  de l'arc est connue ;
  - fun unkwn\_forcei : si à l'état d'équilibre, la valeur de la force à l'extrémité  $i$  de l'arc est inconnue ;

- *fun make\_forcej* : si à l'état d'équilibre, la valeur de la force à l'extrémité  $j$  de l'arc est connue ;
- *fun unkwn\_forcej* : si à l'état d'équilibre, la valeur de la force à l'extrémité  $j$  de l'arc est inconnue.

Après avoir défini ces fonctions d'affectation, nous définissons notre système. Cette étape dépend essentiellement des données et des inconnues de système et varie d'un exemple à un autre contrairement aux fonctions d'affectation qui sont indépendantes du système étudié.

Enfin, on génère le système d'équations du treillis en tenant compte que ce dernier doit être écrit en un format exécutable par d'autres logiciels. Dans notre cas, les équations sont écrites au format du MODELICA et on utilise DYMOLA comme solveur. On distingue deux fonctions:

- fonction de création des variables inconnues du treillis (*fun make\_var(sys)*): cette fonction permet de balayer toutes les cellules du système en testant si les variables qui lui sont associées sont connues ou inconnues. Si les variables sont inconnues, on les récupère ;
- fonction de création des équations du système (*fun make\_eq(sys)*): cette fonction permet la génération des équations du système en balayant toutes les cellules représentant le système :
  - si les cellules sont de dimension 1 i.e. elles représentent des arcs : ces arcs peuvent représenter une force ou un bâti dans ce cas on se limite à l'équation 1 sinon c'est à dire l'arc représente une barre, on ajoute la relation liant la force et la déformation (équation 4) ;
  - Si les cellules sont de dimension 0 c'est-à-dire elles représentent des nœuds, on somme les forces induites pour chaque arc incident à ce nœud (équations 2 et 3).

Ces étapes sont les mêmes dans les différents exemples du treillis à structure pyramidale. La différence est seulement au niveau de la déclaration des cellules représentant le système (étape 1) ainsi que les paramètres qui lui sont associées (étapes 3) car ces deux étapes varient suivant la géométrie et les données du treillis (coordonnées, matériaux, longueur, section,...).

#### **1.4. Cas particuliers**

Dans cette partie, nous étudions deux cas particuliers du treillis à structure pyramidale. Le premier cas est un treillis à trois barres dont le but est de valider l'approche topologique et le

deuxième cas est un treillis à quatre barres dont le but est de démontrer l'aspect générique de cette nouvelle approche topologique qui nous permet de prendre en compte de la structure dynamique du système étudié.

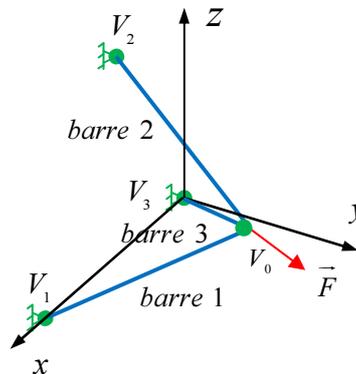
#### 1.4.1. Cas 1 : Treillis à trois barres

##### 1.4.1.1. Description

La figure 58 montre un treillis à trois barres avec une force,  $\vec{F} = [-1000; 20000; 0]$ , agissant sur le treillis en  $V_0$ . Le treillis est constitué de trois barres qui sont étiquetées barre 1, barre 2 et barre 3 comme le montre la figure 58. Les barres ont respectivement des sections  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  avec  $A_1 = A_2 = A_3 = 10^{-4} m^2$ .

Comme il a été indiqué précédemment, toutes les barres sont reliées par des liaisons rotules (pas de moments).

A l'état initial, nous associons un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  au point  $V_3$ . Toutes les forces et tous les déplacements seront exprimés dans ce repère.



**Figure 58.** Structure du treillis à trois barres

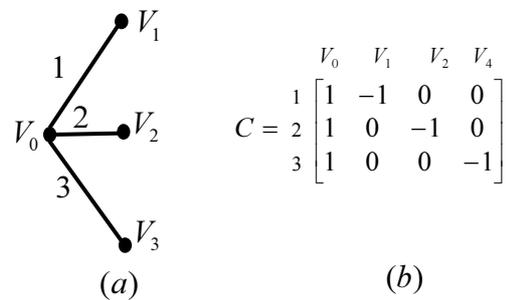
Les valeurs de  $k$  du treillis sont les valeurs de rigidité de chaque barre avec  $E = 2.1 \cdot 10^{11} Pa$ . Le tableau 4 montre les coordonnées des nœuds (extraites d'un modèle CAO CATIA) ainsi que les propriétés des barres. On s'intéresse alors à déterminer les réactions aux appuis en  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  ainsi que le déplacement en  $V_0$ .

**Tableau 4.** Propriétés du treillis à 3-barres

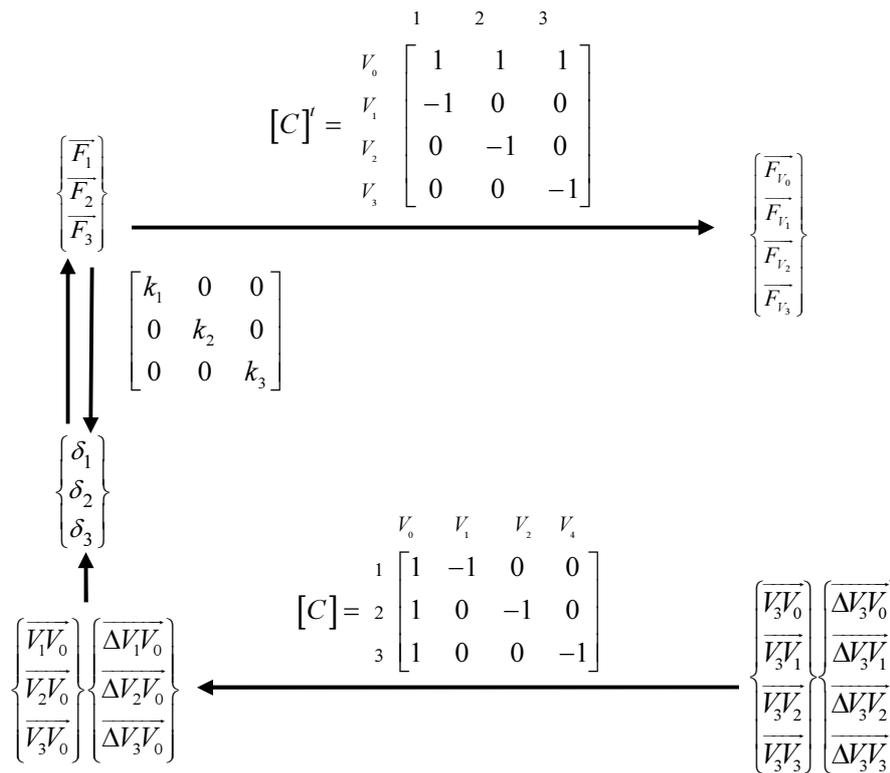
Coordonnées des nœuds en $m$			
Nœuds	$X$	$Y$	$Z$
$V_0$	0.070710678	0.08	0.04
$V_1$	0.141421	0	0
$V_2$	0.070710678	0	0.122474
$V_3$	0	0	0
Propriétés des barres			
Barres	Section ( $A_i$ ) en $m^2$	longueur ( $L_i$ ) en $m$	$k$ ( $k_i$ )
Barre 1	$A_1 = 10^{-4}$	$L_1 = 0.114372$	$A_1 E_1 / L_1 = 1.83611 \cdot 10^8$
Barre 2	$A_2 = 10^{-4}$	$L_2 = 0.114184$	$A_2 E_2 / L_2 = 1.83914 \cdot 10^8$
Barre 3	$A_3 = 10^{-4}$	$L_3 = 0.114372$	$A_3 E_3 / L_3 = 1.83611 \cdot 10^8$

## 1.4.1.2. Graphe topologique KBR

A partir du graphe topologique donné par la figure 59.a, nous déterminons la matrice d'incidence associée au treillis à trois barres (Figure 59.b).

**Figure 59.** (a) graphe topologique (b) Matrice d'incidence

Ayant choisi le nœud  $V_3$  comme un point de référence, nous associons un vecteur position à chaque nœud. La matrice d'incidence appliquée à ces nœuds fournit la longueur ainsi que l'orientation des barres. De la même manière pour les déplacements des nœuds et des barres. La figure 60 présente le graphe topologique KBR du treillis à trois barres.



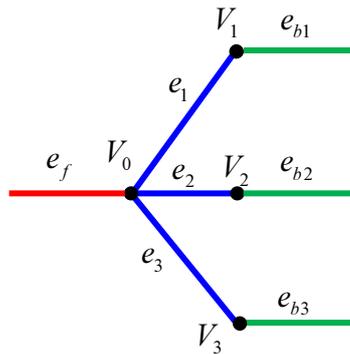
**Figure 60.** Graphe topologique du treillis à trois barres

#### 1.4.1.3. Modélisation dans MGS

Comme indiqué précédemment, les étapes de modélisation sont les mêmes que celles décrites précédemment. La différence se situe au niveau de la déclaration des cellules représentant le système et les paramètres qui lui sont associés.

Nous commençons par la déclaration des cellules représentant le système (figure 61). Nous utilisons les cellules de dimension 0 et 1.

- déclaration des nœuds du système : on définit quatre nœuds  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  ;
- déclaration des arcs du système : on définit sept arcs :
  - $(e_1, e_2, e_3)$  pour représenter les barres ;
  - $e_f$  pour représenter la force ;
  - $(e_{b1}, e_{b2}, e_{b3})$  pour représenter le bâti.



**Figure 61.** Présentation du treillis à trois barres sous forme de complexe cellulaire

Puis, nous définissons notre système en affectant les paramètres aux cellules correspondantes.

#### 1.4.1.4. Résultats numériques et validation

Afin de résoudre le système d'équations obtenu par le langage MGS et qui est écrit au format MODELICA, nous utilisons DYMOLA comme solveur.

Les différents résultats obtenus par MGS sont donnés dans le tableau 5.

**Tableau 5.** Les résultats de simulation du treillis à trois barres en utilisant le langage MGS (les collections topologiques et les transformations)

	Valeurs	Commentaires
$F_{i_{b3}}$	[5379.89;6086.65;3119.41]	
$F_{j_{b3}}$	[-5379.89;-6086.65;-3119.41]	Réaction à l'appui (barre 3)
$F_{i_{b2}}$	[0;6695.3;-6818.66]	
$F_{j_{b2}}$	[0;-6695.3;6818.66]	Réaction à l'appui (barre 2)
$F_{i_{b1}}$	[-6379.89;7218.05;3699.25]	
$F_{j_{b1}}$	[6379.89;-7218.05;-3699.25]	Réaction à l'appui (barre 1)
$F_{i_{31}}$	[5379.89;6086.65;3119.41]	
$F_{j_{31}}$	[-5379.89;-6086.65;-3119.41]	
$F_{i_{21}}$	[0;6695.3;-6818.66]	
$F_{j_{21}}$	[0;-6695.3;6818.66]	
$F_{i_{01}}$	[-6379.89;7218.05;3699.25]	
$F_{j_{01}}$	[6379.89;-7218.05;-3699.25]	
$F_{i_f}$	[-1000;20000;0]	Force extérieure
$F_{j_f}$	[1000;-20000;0]	
$T_{01}$	10319.3	Force normale dans la barre 1 (extension)

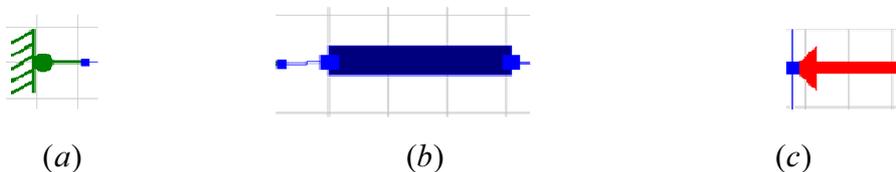
$T_{21}$	9556.2	Force normale dans la barre 2 (extension)
$T_{31}$	8701.77	Force normale dans la barre 3 (extension)
$dp_1$	$[-7.12452 \cdot 10^{-6}; 7.4089 \cdot 10^{-5}; -7.24163 \cdot 10^{-8}]$	Déplacement du nœud $V_0$
$P_1$	$[0.0707036; 0.0800741; 0.0409999]$	Coordonnées du nœud $V_0$ à l'équilibre

Afin de valider les résultats de simulation du treillis à trois barres en appliquant les notions des collections topologiques et des transformations, nous avons utilisé deux méthodes. La première méthode est basée sur une approche topologique en appliquant le langage MODELICA. La seconde est basée sur la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel de calcul des structures RDM6.

Nous supposons que la valeur de la force ainsi que la géométrie initiale du treillis sont connues et nous cherchons le déplacement nodal en  $V_0$ , les réactions en  $V_i$  ( $i=1\dots 3$ ) et les efforts normaux dans les barres du treillis.

- Modélisation par MODELICA

Pour la modélisation dans MODELICA, nous commençons par définir les composantes principales du treillis (fixation, force et barre) (figure 62).



**Figure 62.** (a) liaison rotule (b) barre (c) force

Comme exemple nous présentons dans la figure 63 le code MODELICA mis à plat pour la fixation.

Figure 63 shows the MODELICA code for a pin joint. To the left of the code is a small diagram of a pin joint, identical to the one in Figure 62(a).

```

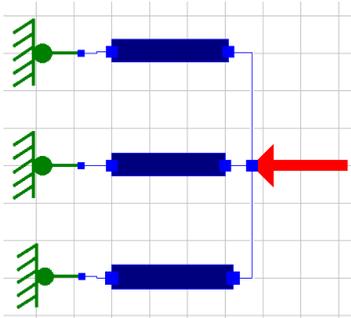
model Treillis.Liaison.Fixation
parameter Real p[3](unit = "m") = {0, 0, 0};
Real frame.p[3](unit = "m");
Real frame.f[3](unit = "N");
equation
frame.p = p;
-frame.f = 0*frame.f;
end Treillis.Liaison.Fixation;

```

**Figure 63.** Code MODELICA mis à plat pour la fixation

Pour le modèle de la barre déformée en traction compression, nous introduisons les paramètres (longueur, hauteur, surface,...), les variables et les équations d'équilibre des forces (équations 1, 2 et 3) et des déformations (équation 4).

Après avoir défini ces composants, nous les assemblons par les connecteurs (figure 64) et nous passons au mode de simulation qui permet de visualiser les différents paramètres et variables du problème.



**Figure 64.** Schéma du treillis à trois barres dans MODELICA

Le tableau 6 montre les différents résultats obtenus par la résolution du système d'équations généré à partir des composants MODELICA ainsi que l'erreur calculée par rapport aux résultats obtenus par la résolution du système d'équations généré par MGS.

En comparant les résultats obtenus par le langage MODELICA basé sur le graphe topologique KBR et ceux obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et les transformations, nous remarquons que les résultats sont très proches. Nous nous limitons à présenter l'erreur absolue puisque l'erreur relative est très faible.

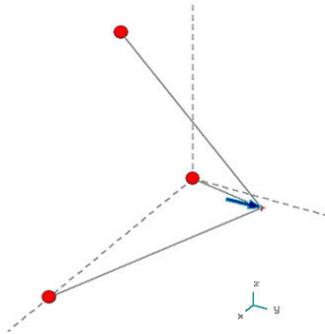
**Tableau 6.** Les résultats de simulation du treillis à trois barres en appliquant le langage MODELICA (graphe topologique KBR)

<b>Réactions aux appuis (N)</b>		
	<b>Résultats</b>	<b>Erreurs</b>
<b>Barre 1</b>	[6379.89;-7218.05;-3699.25]	[0;0;0]
<b>Barre 2</b>	[0;-6695.3;6818.66]	[0;0;0]
<b>Barre 3</b>	[-5379.89;-6086.65;-3119.41]	[0;0;0]
<b>Déplacement nodale (m)</b>		
	<b>Résultats</b>	<b>Erreurs</b>
<b>Nœud <math>V_0</math></b>	[-7.12428 $10^{-6}$ ;7.4089110 $^{-5}$ ;-7.26461 $10^{-8}$ ]	[2.4 $10^{-10}$ ;1.0 $10^{-10}$ ;2.298 $10^{-10}$ ]
<b>Forces normaux (N)</b>		
	<b>Résultats</b>	<b>Erreurs</b>
<b>Barre 1</b>	10319.3	0

<b>Barre 2</b>	9556.21	0.01
<b>Barre 3</b>	8701.79	0.02

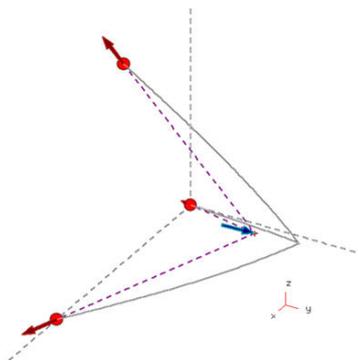
- Modélisation dans RDM6

En utilisant le logiciel de calcul de structure par la méthode des éléments finis RDM6, module 'frame' (Module d'analyse statique et dynamique de treillis plans ou tridimensionnels), nous modélisons le treillis à trois barres (figure 65).



**Figure 65.** Modélisation du treillis à trois barres dans RDM6

En sélectionnant la méthode de calcul statique, nous déterminons les différentes inconnues du système (tableau 7). La figure 66 montre la déformation du treillis à trois barres.



**Figure 66.** Déformation du treillis à trois barres

**Tableau 7.** Résultats de simulation de treillis à trois barres en utilisant RDM6 (méthode des éléments finis)

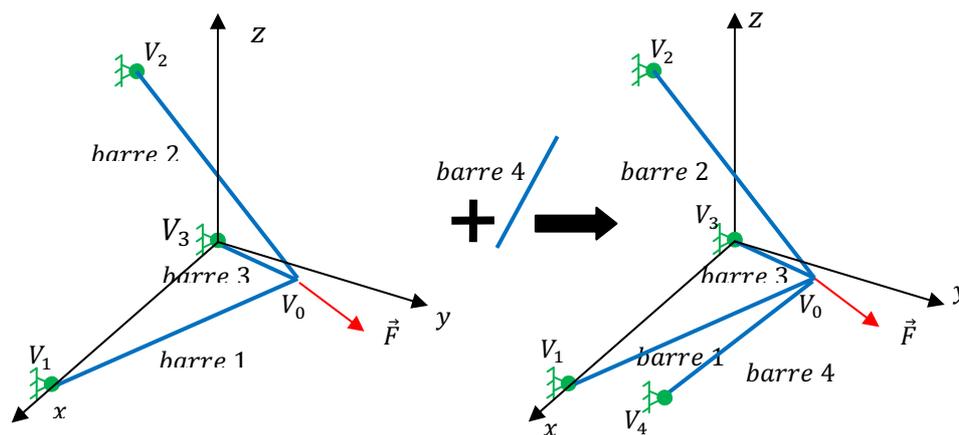
<b>Réaction aux appuis (N)</b>		
	<b>Résultats</b>	<b>Erreurs</b>
<b>Barre1</b>	[6379.7;-7218.1;-3699.1]	[0.19;0.05;0.15]
<b>Barre 2</b>	[0;-6695.3;6818.4]	[0;0;0.26]
<b>Barre 3</b>	[-5379.7;-6086.6 ;-3119.3]	[0.19;0.05;0.11]
<b>Déplacement nodales</b>		
	<b>Résultats</b>	<b>Erreurs</b>
<b>Nœud V<sub>0</sub></b>	[-7.1242 10 <sup>-6</sup> ;7.4088 10 <sup>-5</sup> ;-7.2648 10 <sup>-8</sup> ]	[ 3.2 10 <sup>-10</sup> ;1 10 <sup>-9</sup> ;2.317 10 <sup>-10</sup> ]

<b>Efforts normaux (N)</b>		
	Résultats	Erreurs
<b>Barre 1</b>	10319.1	0.2
<b>Barre 2</b>	9556	0.2
<b>Barre 3</b>	8701.6	0.17

En comparant les résultats obtenus par le logiciel RDM6 basé sur la méthode des éléments finis et ceux obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et transformations, nous remarquons que les résultats sont très proches. Par contre, nous remarquons que les erreurs calculés dans cette partie ont augmenté par rapport aux erreurs calculées entre les résultats obtenus suite à la résolution du système d'équation généré par MGS et celui généré par MODELICA (voir tableau 6). En effet, pour la modélisation dans MGS et dans MODELICA, nous avons utilisé les mêmes équations. Aussi, pour la résolution, nous avons utilisé le même solveur qui est DYMOLA.

#### 1.4.2. Cas 2 : Treillis à quatre barres

Le but de l'étude du cas du treillis à quatre barres est de montrer l'aspect générique de cette nouvelle approche qui nous permet de prendre en compte de la structure dynamique du système étudié. En effet le passage de treillis à trois barres au treillis à quatre barres se fait uniquement par l'addition des cellules représentant la quatrième barre et le bâti auquel elle est liée ainsi que les variables qui sont associées à ces cellules (figure 67).



**Figure 67.** Treillis à quatre barres

Les nouvelles propriétés du treillis à quatre barres par rapport à celles du treillis à trois barres, sont données dans le tableau 8.

**Tableau 8.** Propriétés liées à l'ajout de la quatrième barre

Cordonnées du nœud V4 en m			
	X	Y	Z
V4	0.070710678	0	-0.04
Propriété de la barre 4			
	surface ( $A_i$ ) en $m^2$	longueur ( $L_i$ ) en m	$k$ ( $k_i$ )
Barre 4	$A_4 = 10^{-4}$		

Le tableau 9 montre les résultats des simulations en appliquant notre nouvelle approche ainsi que l'erreur par rapport aux résultats obtenus par MODELICA et RDM6.

**Tableau 9.** Résultats des simulations pour le treillis à quatre barres

	MGS	E (MGS/MODELICA)	E(RDM6/MGS)
<b>Réactions aux appuis en <math>N</math></b>			
<b>Barre 1</b>	[4403.45;-4981.96;-2553.26]	[0;0.01;0]	[0.15;0.04;0.06]
<b>Barre 2</b>	[0;-7796.32;7939.97]	[0;0;0.01]	[0;0.02;0.27]
<b>Barre 3</b>	[-3403.45;-3850.57;-1973.41]	[0;0;0.01]	[0.15;0.03;0.11]
<b>Barre 4</b>	[0;-3371.15;-3413.3]	[0;0;0.01]	[0;0.05;0.1]
<b>Effort normal en <math>N</math></b>			
<b>Barre 1</b>	7122.46	0.02	0.16
<b>Barre 2</b>	11127.7	0	0.2
<b>Barre 3</b>	5504.96	0.02	0.06
<b>Barre 4</b>	4797.42	0.01	0.12
<b>Déplacement nodal en m</b>			
<b>Nœud <math>V_0</math></b>	$[-7.12 \cdot 10^{-6}; 6.1610^{-5}; -2.42 \cdot 10^{-5}]$	$[1.6 \cdot 10^{-10}; 1 \cdot 10^{-10}; 1.9 \cdot 10^{-10}]$	$[1.42 \cdot 10^{-5}; 3.110^{-9}; 2 \cdot 10^{-7}]$

En comparant les résultats obtenus par le logiciel RDM6 basé sur la méthode des éléments finis et ceux obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et les transformations, nous remarquons que les résultats sont très proches (de même pour MODELICA).

## 2. Généralisation aux structures de poutres et de barres

### 2.1. Bref aperçu sur les structures de barres et de poutres

Dans cette partie ne sont mises en évidence que les notions importantes utiles à la compréhension du reste du chapitre. Ces différentes notions sont issues des références suivantes : [Liu et Quesk, 2003] et [Batoz et Dhett, 1990].

On note :

$\{\overline{\tau}_p\}_l$  : le vecteur de charges équivalentes exprimé dans le repère local,

$\{\overline{\Delta P}\}_l$  : le vecteur de déplacement des nœuds exprimé dans le repère local,

$[K]_l$  : la matrice de rigidité exprimée dans le repère local.

La relation de comportement force / déplacement peut s'exprimer dans le repère local comme suit :

$$\{\overline{\tau}_p\}_l = [K]_l \{\overline{\Delta P}\}_l \quad (4)$$

Pour le passage du repère global au repère local, on utilise la matrice de transformation notée  $[T]$ . Alors, la relation de comportement force / déplacement peut s'exprimer dans le repère global comme suit :

$$\{\overline{\tau}_p\}_g = [K]_g \{\overline{\Delta P}\}_g \quad (5)$$

avec

$\{\overline{\Delta P}\}_g$  le vecteur de déplacement des nœuds exprimé dans le repère global et donné par:

$$\{\overline{\Delta P}\}_g = [T] \{\overline{\Delta P}\}_l \quad (6)$$

$\{\overline{\tau}_p\}_g$  le vecteur de charges équivalentes exprimé dans le repère global et donné par:

$$\{\overline{\tau}_p\}_g = [T] \{\overline{\tau}_p\}_l \quad (7)$$

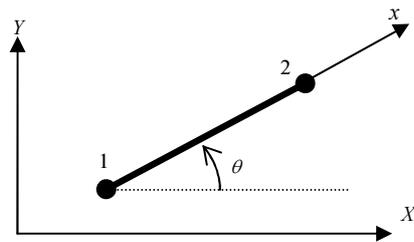
$[K]_g$  la matrice de rigidité exprimée dans le repère global et donnée par:

$$[K]_g = [T]^T [K]_l [T] \quad (8)$$

#### 2.1.1. Structures de barres

##### 2.1.1.1. Élément de barre

- Élément de barre 2D (figure 68)



*Cosinus directeur*

$$l_x = \cos(x, X), \quad m_x = \cos(x, Y)$$

**Figure 68.** Élément de barre 2D

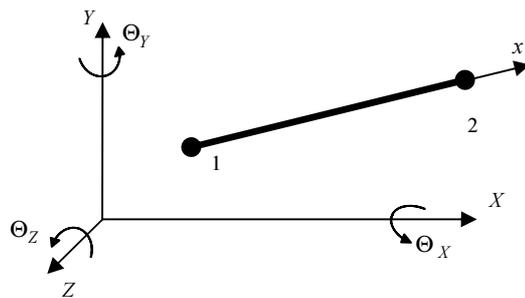
$$\{\overline{\Delta P}\}_1 = \begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{(o,\bar{u})}; \quad \{\overline{\tau}_p\}_1 = \begin{Bmatrix} \tau_{p1} \\ \tau_{p2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix}; \quad [K]_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (9)$$

L: longueur de la barre ; A: section droite de la barre; E: Module d'Young

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_x & m_x \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\{\overline{\Delta P}\}_g = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}; \quad \{\overline{\tau}_p\}_g = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

- Élément de barre 3D (figure 69)



*Cosinus directeur*

$$l_x = \cos(x, X)$$

$$m_x = \cos(x, Y)$$

$$n_x = \cos(x, Z)$$

**Figure 69.** Élément de barre 3D

$$\{\overline{\Delta P}\}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{(o,\bar{u})}; \quad \{\overline{\tau}\}_1 = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix}; \quad [K]_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & n_x \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\{\overline{\Delta P}\}_g = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix}; \{\overline{\tau}_p\}_g = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

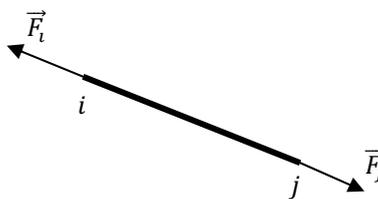
### 2.1.1.2. Equations d'équilibres

Pour étudier l'équilibre d'un treillis, nous étudions l'équilibre de chaque barre et de chaque nœud.

- Equilibre des barres

La barre n'est sollicitée que par deux forces à ses extrémités notées i et j (figure 70). On a alors :

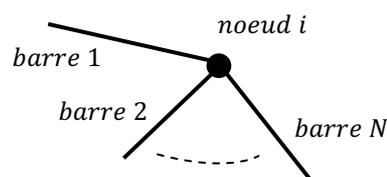
$$\vec{F}_i + \vec{F}_j = \vec{0} \quad (15)$$



**Figure 70.** Equilibre d'une barre

- Equilibre des nœuds

La complexité d'une structure de barre ne provient pas de la complexité de ses éléments (les barres) mais plutôt de la complexité de l'arrangement des barres entre elles. C'est pourquoi pour étudier l'équilibre d'une structure de barres, on étudie l'équilibre de chacun de ses nœuds. Comme le montre la figure 71, cet équilibre fait intervenir les efforts normaux de chacune des barres connectées au nœud isolé.



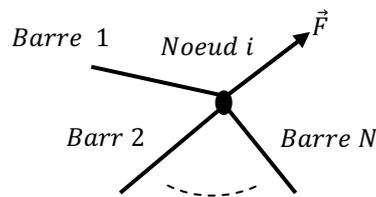
**Figure 71.** Equilibre d'un nœud

Soit  $N$  le nombre des barres concourantes au nœud  $i$ , pour que le nœud soit en équilibre, il faut que :

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_j = \vec{0} \quad (16)$$

Si le nœud est soumis à une force extérieure (figure 72), l'équilibre fait intervenir les composantes de cette force. Alors, l'équilibre du nœud s'écrit :

$$\vec{F} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_j = \vec{0} \quad (17)$$



**Figure 72.** Equilibre d'un nœud soumis à une force extérieure

### 2.1.1.3. Conditions aux limites

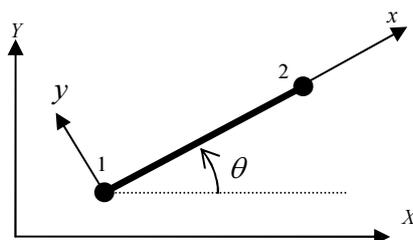
Il existe différents types de conditions aux limites :

- appui fixe :  $U = V = W = 0$  ;
- appui roulant dans la direction X :  $U \neq 0; V = W = 0$  ;
- appui roulant dans la direction Y :  $V \neq 0; U = W = 0$  ;
- appui roulant dans la direction Z :  $W \neq 0; V = U = 0$ .

### 2.1.2. Structures de poutres

#### 2.1.2.1. Elément de poutre

- Elément de poutre 2D (figure 73)



#### *Cosinus directeur*

$$l_x = \cos(x, X), \quad m_x = \cos(x, Y),$$

$$l_y = \cos(y, X), \quad m_y = \cos(y, Y),$$

**Figure 73.** Elément de poutre 2D

$$\{\overline{\Delta P}\}_1 = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (18)$$

$$\{\overline{\tau_p}\}_1 = \{Fx_1 \quad Fy_1 \quad M_1 \quad Fx_2 \quad Fy_2 \quad M_2\}^T \quad (19)$$

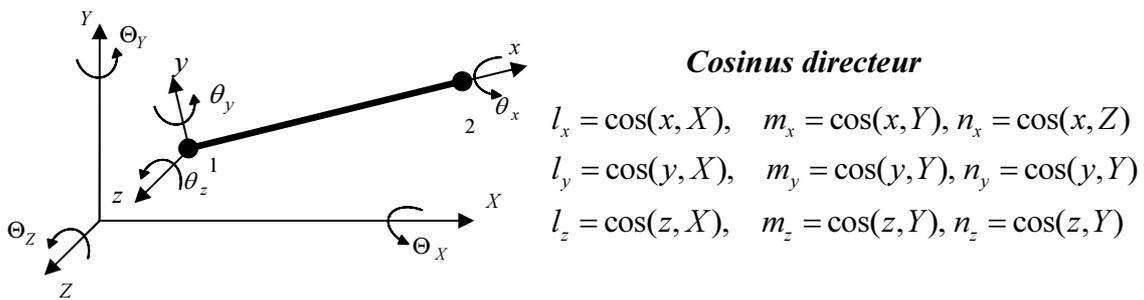
$$[K]_1 = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_2] & [0] \\ [0] & [T_2] \end{bmatrix}; [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 \\ l_y & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\{\overline{\Delta P}\}_g = \{U_1 \quad V_1 \quad \Theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \Theta_2\}^T \quad (22)$$

$$\{\overline{\tau_p}\}_g = \{Fx_1 \quad Fy_1 \quad M_1 \quad Fx_2 \quad Fy_2 \quad M_2\}^T \quad (23)$$

- Élément de poutre 3D (figure 74)



**Figure 74.** Élément de poutre 3D

$$\{\overline{\Delta P}\}_1 = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\}^T \quad (24)$$

$$\{\overline{\tau_p}\}_1 = \{Fx_1 \quad Fy_1 \quad Fz_1 \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad Fx_2 \quad Fy_2 \quad Fz_2 \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2}\}^T \quad (25)$$

$$[K]_l = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ & & & & & & \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & & & & & & \frac{6EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (26)$$

sy.

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_3] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [T_3] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_3] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_3] \end{bmatrix}; [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [T_3] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\{\overline{\Delta P}\}_g = \{U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \Theta_{X1} \quad \Theta_{Y1} \quad \Theta_{Z1} \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \Theta_{X2} \quad \Theta_{Y2} \quad \Theta_{Z2}\}^T \quad (28)$$

$$\{\overline{\tau_p}\}_g = \{F_{X1} \quad F_{Y1} \quad F_{Z1} \quad M_{X1} \quad M_{Y1} \quad M_{Z1} \quad F_{X2} \quad F_{Y2} \quad F_{Z2} \quad M_{X2} \quad M_{Y2} \quad M_{Z2}\}^T \quad (29)$$

### 2.1.2.2. Equilibre des structures de poutres

Pour étudier l'équilibre d'une structure de poutres, nous étudions l'équilibre de chaque poutre et de chaque nœud (Figure 75).



**Figure 75.** Equilibre d'une structure de poutres (a) équilibre d'une poutre (b) Equilibre d'un nœud

$$\text{Equilibre d'une poutre : } \begin{cases} \overline{F}_i + \overline{F}_j = \vec{0} \\ \overline{M}_i + \overline{M}_j + \overline{F}_j \wedge \overline{L}_{ij} = \vec{0} \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{Équilibre d'un nœud : } \begin{cases} \sum_{j=1}^N \overline{F}_j = \vec{0} \\ \sum_{j=1}^N \overline{M}_j = \vec{0} \end{cases} \quad (31)$$

avec  $N$  le nombre des poutres concourantes au nœud  $i$ .

## 2.2. Modélisation topologique des structures de barres

### 2.2.1. Graphe KBR

Le graphe topologique d'un élément de barre ainsi que la matrice d'incidence associée sont présentés par la figure 76.



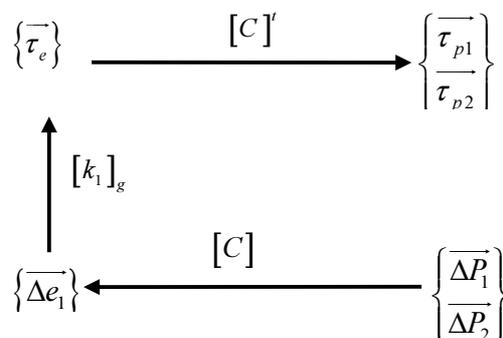
**Figure 76.** Élément de barre (a) graphe topologique (b) matrice d'incidence

Nous associons le vecteur de déplacement  $\begin{Bmatrix} \overline{\Delta P}_i \\ \overline{\Delta P}_j \end{Bmatrix}$  aux nœuds  $P_i$  et  $P_j$ . La matrice d'incidence

appliquée aux nœuds fournit le déplacement de la barre  $\overline{\Delta e} = \overline{\Delta P}_i - \overline{\Delta P}_j$ . La transition à

l'espace dual correspond aux forces associées aux nœuds  $\begin{Bmatrix} \overline{\tau}_{P_i} \\ \overline{\tau}_{P_j} \end{Bmatrix}$  et à l'arc  $\{\overline{\tau}_e\}$ . Cette

transition se fait en appliquant la matrice d'admittance  $[k_1]_g$  permettant d'exprimer la loi de comportement force/ déplacement de la barre. Alors, nous obtenons le graphe KBR d'un élément de barre. Ce graphe est donné par la figure 77.



**Figure 77.** Graphe KBR d'un élément de barre

Dans le cas d'une barre 2D, la matrice d'admittance est donnée par :

$$[k_1]_g = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ l_x l_y & l_y^2 \end{bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \text{ avec } c = \cos(\theta) \text{ et } s = \sin(\theta) \text{ (voir figure 68 p. 72)}$$

Dans le cas d'une barre 3D, la matrice d'admittance est donnée par :

$$[k_1]_g = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_m l_x & l_n l_x \\ l_x l_m & l_m^2 & l_n l_m \\ l_x l_n & l_m l_n & l_n^2 \end{bmatrix}$$

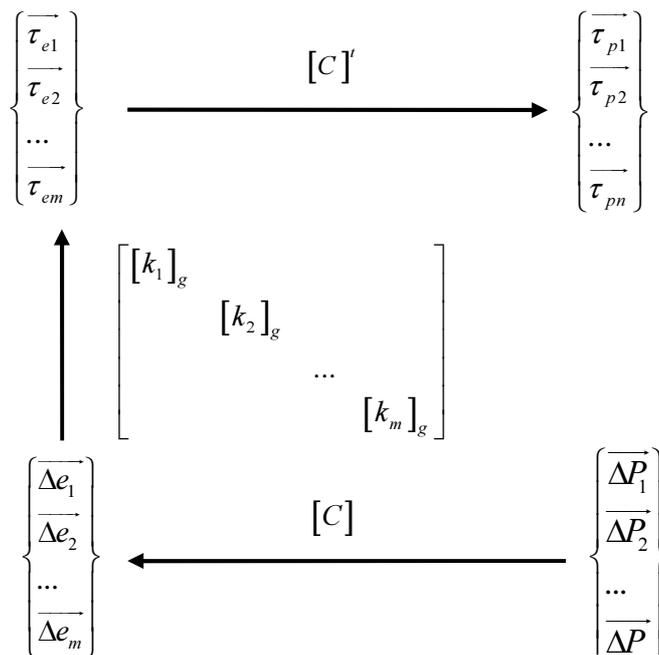
**Mise en évidence de la relation entre la force et le déplacement de l'élément de barre 2D :**

$$\{\overline{\tau}_e\} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \{\overline{\Delta e}_1\}$$

On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\tau}_{p1} \\ \overline{\tau}_{p2} \end{array} \right\} &= [C]^t \{\overline{\tau}_e\} \\ &= [C]^t [k_1]_g \{\overline{\Delta e}_1\} \\ &= [C]^t [k_1]_g [C] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Delta P}_1 \\ \overline{\Delta P}_2 \end{array} \right\} \\ &= [K]_g \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Delta P}_1 \\ \overline{\Delta P}_2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dans le cas général, le graphe KBR d'une structure constituée de m barres et n nœuds est présenté par la figure 78.



**Figure 78.** Graphe KBR d'une structure de barres

avec

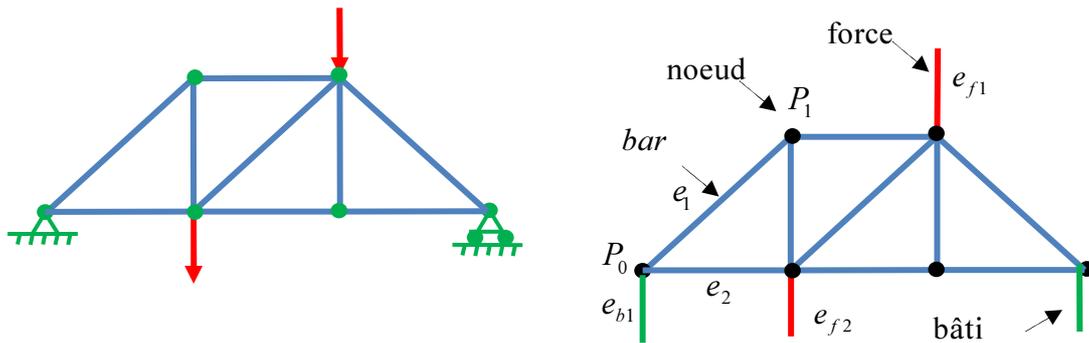
$\overline{\Delta e_i}$  et  $\{\overline{\tau_{ei}}\}$  représentent respectivement le vecteur déplacement et le vecteur des forces intérieures de la barre  $i(i=1,\dots,m)$  ;

$\overline{\Delta P_j}$  et  $\{\overline{\tau_{pj}}\}$  représentent respectivement le vecteur déplacement et le vecteur des forces au nœud  $j(j=1,\dots,n)$ .

### 2.2.2. Modélisation MGS

Pour la modélisation dans MGS, nous commençons par la déclaration des cellules représentant la structure de barres étudiée. Nous utilisons les cellules de dimension 0 et 1. Les cellules de dimension 1 sont utilisées pour définir les nœuds. Les cellules de dimension 1 sont utilisées pour définir les fixations (bâti), les forces extérieures et les barres. La figure 79 présente un exemple de structure de barres et sa présentation sous forme de complexe cellulaire. La barre diffère du bâti et de la force de fait qu'elle est limitée par deux nœuds.

Ensuite, nous définissons les fonctions d'affectations des variables (déplacement et force) et nous les affectons aux cellules correspondantes.

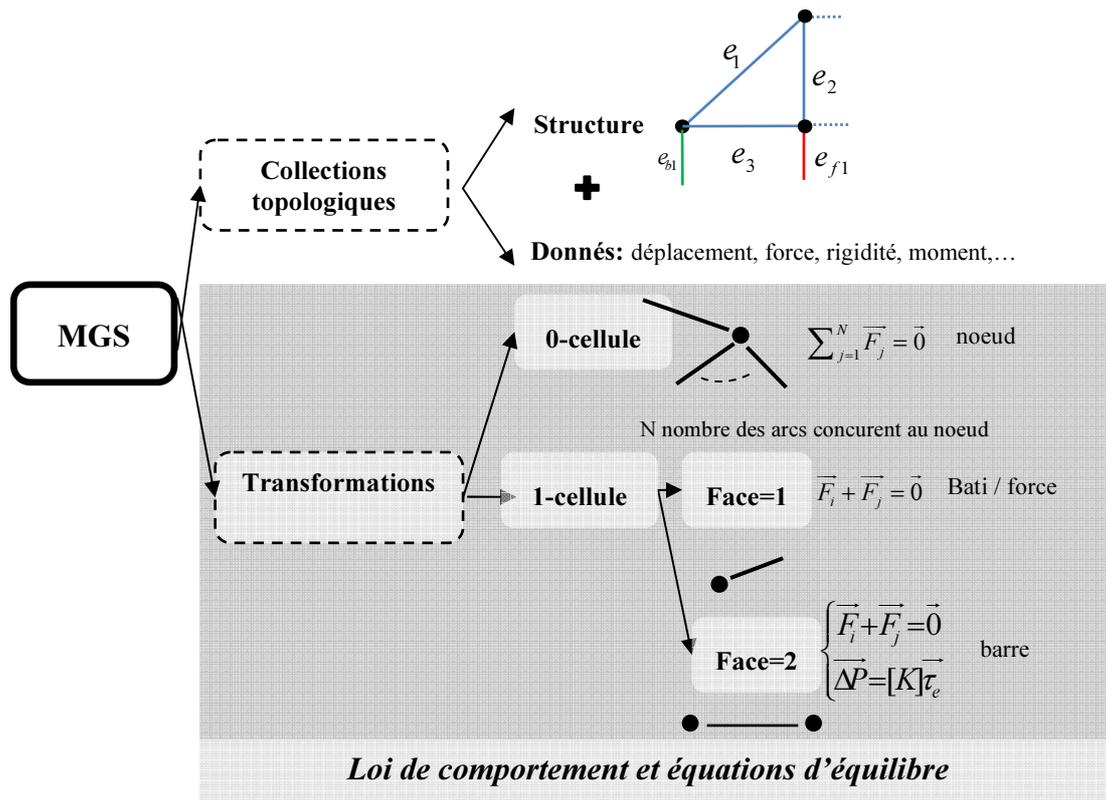


**Figure 79.** Exemple d'une structure de barres et sa présentation sous forme de complexe cellulaire

Enfin, nous générons le système d'équations de la structure étudiée en tenant compte que ce dernier va être résolu par DYMOLA. On distingue deux fonctions:

- fonction de création des variables de la structure de barres étudiée : cette fonction permet la déclaration des variables en balayant toutes les cellules du système.
- fonction de création des équations du système: cette fonction permet la génération des équations du système en balayant toutes les cellules représentant le système :
  - si les cellules sont de dimension 1 c'est-à-dire elles représentent des arcs : ces arcs peuvent présenter une force ou un bâti dans ce cas on se limite à l'équation 15 (p.73) sinon c'est à dire l'arc représente une barre, on ajoute la relation liant la force et la déformation (équation 4 p.71) ;
  - si les cellules sont de dimension 0 c'est-à-dire elles représentent des nœuds, on somme les forces induites pour chaque arc incident à ce nœud (équation 16 p. 74 et équation 17 p.74).

Ces étapes sont les même dans les différents exemples de structure de barres. La différence est seulement au niveau de la déclaration des cellules représentant le système (selon le nombre des barres, des forces et des fixations). La figure 80 présente ces différentes étapes.

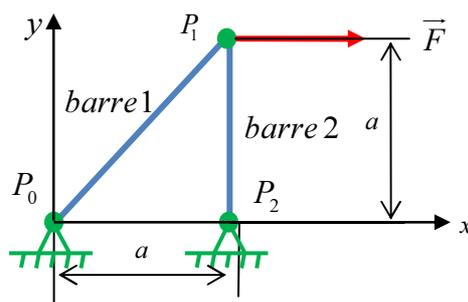


**Figure 80.** Application des collections topologiques et leurs transformations pour la modélisation d'une structure de barres

2.2.3. Exemple de structure de barres : Treillis à deux barres

2.2.3.1. Description

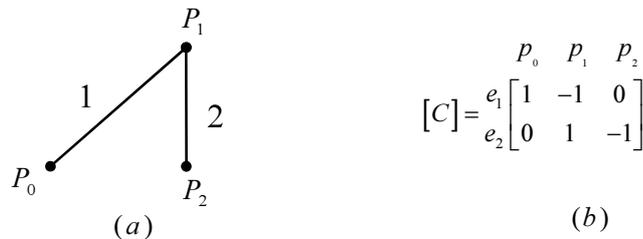
Comme exemple, nous considérons un treillis à deux barres articulé à un support rigide en  $P_0$  et  $P_2$  et soumis à une charge externe  $\vec{F}$  en  $P_1$  comme indiquée sur la figure 81. On suppose que les deux barres sont du même matériau (module d'Young  $E$ ), de même longueur et de même section droite  $A$ . Nous nous intéressons à déterminer le déplacement du nœud  $P_1$ , les réactions aux appuis en  $P_0$  et  $P_2$  et les efforts normaux des deux barres.



**Figure 81.** Treillis à deux barres

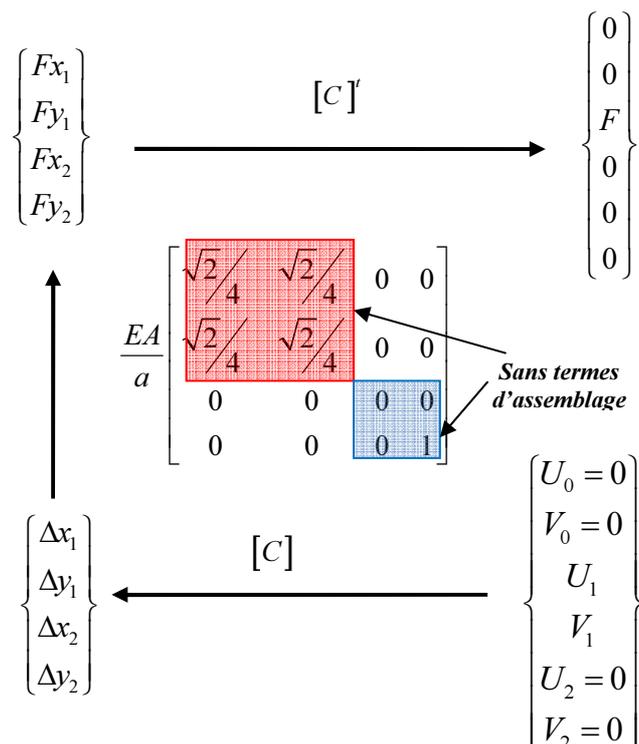
2.2.3.2. Graphe KBR

Le graphe topologique du treillis à deux barres dans lequel il apparaît seulement les nœuds correspondant aux articulations et les arcs correspondant aux barres est présenté par la figure 82 (a). De ce graphe, nous déterminons la matrice d'incidence du treillis (Figure 82 (b)) qui définit le passage des nœuds aux arcs.



**Figure 82.** Treillis à deux barres (a) graphe topologique (b) matrice d'incidence

Le graphe topologique KBR du treillis à deux barres est donné par la figure 83. Nous remarquons bien qu'il n'y a pas de termes d'assemblage dans la matrice d'admittance.



**Figure 83.** Graphe topologique KBR du treillis à deux barres

2.2.3.3. Approche analytique en utilisant la méthode des déplacements

Les paramètres du treillis à deux barres sont donnés dans le tableau 10.

**Tableau 10.** Les paramètres du treillis à deux barres

barre $i$	$\theta_i$	$L_i$	$\cos(\theta_i)$	$\sin(\theta_i)$
1	45	$a \times \frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	90	$a$	0	1

Calcul de la matrice de rigidité des deux barres

Pour la barre 1:

$$[K_1]_g = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Pour la barre 2:

$$[K_2]_g = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La structure est composée de trois nœuds pour chaque nœud deux degrés de liberté  $U_i$  et  $V_i$  alors la taille de la matrice de rigidité globale est  $3 \times 2 = 6$ . La relation de comportement force/déplacement du treillis à deux barres s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} Fx_0 \\ Fy_0 \\ F \\ 0 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 = 0 \\ V_0 = 0 \\ U_1 \\ V_1 \\ U_2 = 0 \\ V_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Avec  $Fx_0, Fy_0, Fx_1, Fy_1$  représentent les réactions aux appuis exprimées dans le repère global.

Par la méthode d'élimination, la matrice de rigidité peut être réduite à  $2 \times 2$  et on obtient alors:

$$\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 & 1 + \sqrt{2}/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}$$

A partir de cette équation, on peut calculer le déplacement en  $P_1$ . En déterminant ce déplacement, on détermine les réactions aux appuis.

#### 2.2.3.4. Résultats des simulations

Caractéristiques identiques aux deux barres :

Module d'Young :  $E = 200GPa$ , section droite:  $A = 0.003m^2$ .

Le treillis est soumis à une force extérieure:  $\vec{F} = [100000; 0]$ .

Les coordonnées des nœuds dans le repère global sont données dans le tableau 11.

**Tableau 11.** *Coordonnées des nœuds*

	$x$	$y$
$P_0$	0	0
$P_1$	3	3
$P_2$	3	0

Le tableau 12 présente les différents résultats obtenus en appliquant le langage MGS ainsi que ceux obtenus par la méthode des déplacements. Nous constatons que les résultats sont identiques.

**Tableau 12.** *Résultats des simulations*

	<b>Méthode des déplacements</b>	<b>Langage MGS</b>	<b>Erreur</b>
<b>Réactions aux appuis (N)</b>			
$P_0$	$[-100000; -100000]$	$[-100000; -100000]$	$[0; 0]$
$P_2$	$[0; 100000]$	$[0; 100000]$	$[0; 0]$
<b>Efforts normaux (N)</b>			
Barre 1	141421	141421	0
Barre 2	-10000	-10000	0
<b>Déplacement nodale (m)</b>			
$P_1$	$[0.019; -0.005]$	$[0.019; -0.005]$	$[0; 0]$

### 2.3. Modélisation topologique des structures de poutres

#### 2.3.1. Graphe KBR

Pour les structures de poutres, nous ne pouvons pas présenter le graphe KBR. En effet, pour assurer le passage des forces intérieures aux forces nodales pour une poutre, nous devons intégrer dans la matrice d'incidence, en plus des relations d'incidences, des paramètres géométriques propres à la poutre étudiée. Ceci est dû à la présence du moment.

Pour une poutre 2D, la matrice d'incidence est donnée par :

$$[C]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} & [0]_{1 \times 1} \\ [V_L]_{1 \times 2} & [0]_{1 \times 2} \\ [0]_{2 \times 2} & [0]_{1 \times 1} \\ [V_L]_{1 \times 2} & [0]_{1 \times 2} \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

$$\text{avec } [V_L]_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{L_Y}{2} & -\frac{L_X}{2} \end{bmatrix}$$

Pour une poutre 3D, la matrice d'incidence est donnée par :

$$[C]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [V_L]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [V_L]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{12 \times 6}$$

avec :

$$[V_L]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_X}{2} & -\frac{L_Y}{2} \\ -\frac{L_Z}{2} & 0 & \frac{L_X}{2} \\ \frac{L_Y}{2} & -\frac{L_Y}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Modélisation MGS

Les étapes de modélisation sont les mêmes que celles présentées dans le cas des structures de barres (pages 79-81). On doit seulement modifier les équations utilisées lors de la résolution par ceux correspondant aux structures de poutres (équation 30 p. 76 et équation 31 p.77). La figure 84 résume ces différentes étapes.

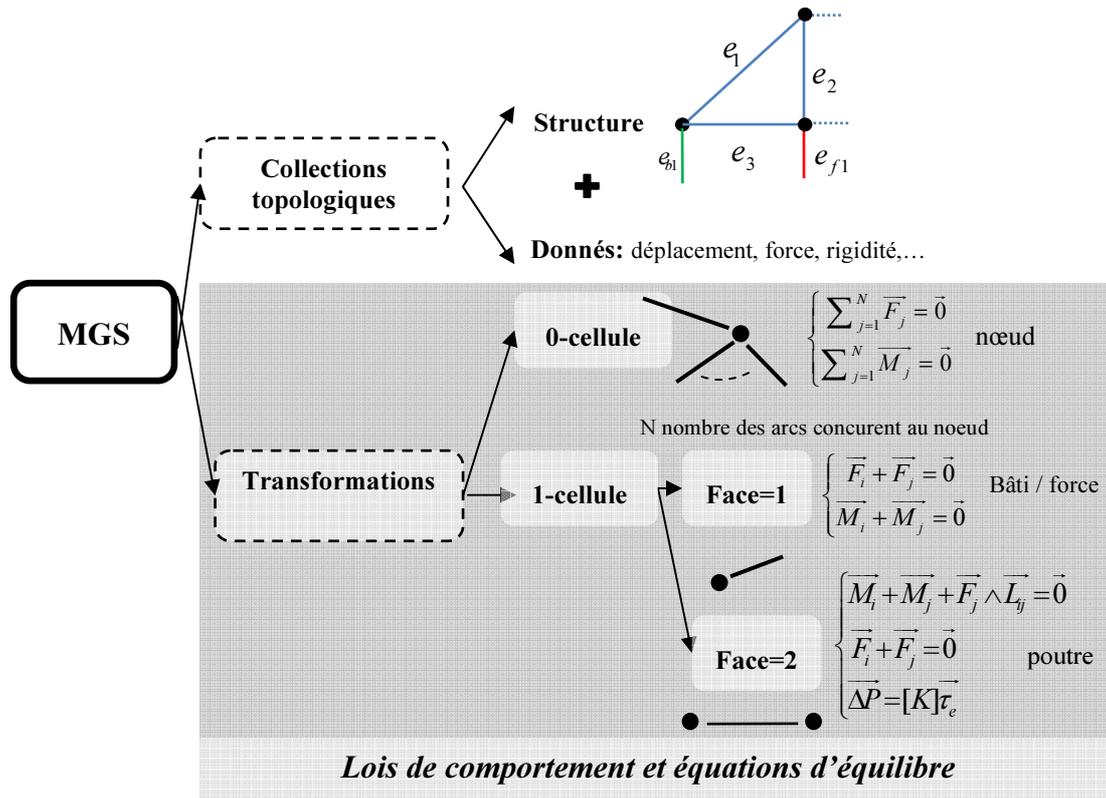


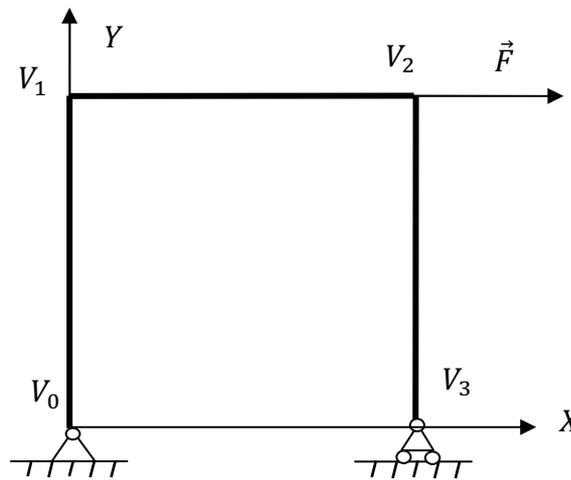
Figure 84. Application des collections topologiques et leurs transformations pour la modélisation d'une structure de poutres

2.3.3. Application 1 : Structure de poutres planes: portique

2.3.3.1. Description

Nous considérons le portique présenté par la figure 85 composé de trois barres et relié à l'extérieur par un simple appui en  $V_3$  et une articulation en  $V_0$ . Le portique est soumis à une force extérieure  $\vec{F} = [2000; 0]$  en  $V_2$ .

Les trois poutres ont la même section droite  $A = 0.01 \text{ m}^2$  et le même module d'Young  $E = 200 \text{ GPa}$ .



**Figure 85.** Portique

A l'état initial, nous associons le repère  $(O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  au nœud  $V_0$ . Les coordonnées des nœuds exprimées par rapport à ce repère sont présentées dans le tableau 13.

**Tableau 13.** Coordonnées des nœuds

	$X$	$Y$
$V_0$	0	0
$V_1$	0	4
$V_2$	4	4
$V_3$	4	0

### 2.3.3.2. Approche classique de modélisation en utilisant la méthode des déplacements

Les propriétés des barres sont présentées dans le tableau 14. ( $L = 4$ ).

**Tableau 14.** Propriétés des barres

	$L_i(m)$	$l_x$	$m_x$	$l_y$	$m_y$
<b>Barre 1</b>	$L$	0	1	-1	0
<b>Barre 2</b>	$L$	1	0	0	1
<b>Barre 3</b>	$L$	0	-1	1	0

Le nombre total de degrés de liberté de la structure est 12 puisque la structure est composée de quatre nœuds et que chaque nœud a trois degrés de liberté.

$$\{\overline{\Delta P}\}_{g(\text{portique})} = \{U_0 \quad V_0 \quad \Theta_0 \quad U_1 \quad V_1 \quad \Theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \Theta_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad \Theta_3\}^T$$

$$\{\overline{\Delta \tau}\}_{g(\text{portique})} = \{Fx_0 \quad Fy_0 \quad M_0 \quad Fx_1 \quad Fy_1 \quad M_1 \quad Fx_2 \quad Fy_2 \quad M_2 \quad Fx_3 \quad Fy_3 \quad M_3\}^T$$

Après avoir calculé la matrice de rigidité exprimée dans le repère global pour chaque poutre  $[K]_{g(\text{bar1})}$ ,  $[K]_{g(\text{bar2})}$  and  $[K]_{g(\text{bar3})}$  (Equation 8 p. 71 et équation 20 p. 75), on les assemble.

La matrice de rigidité exprimée dans le repère global du portique s'écrit alors sous la forme suivante:

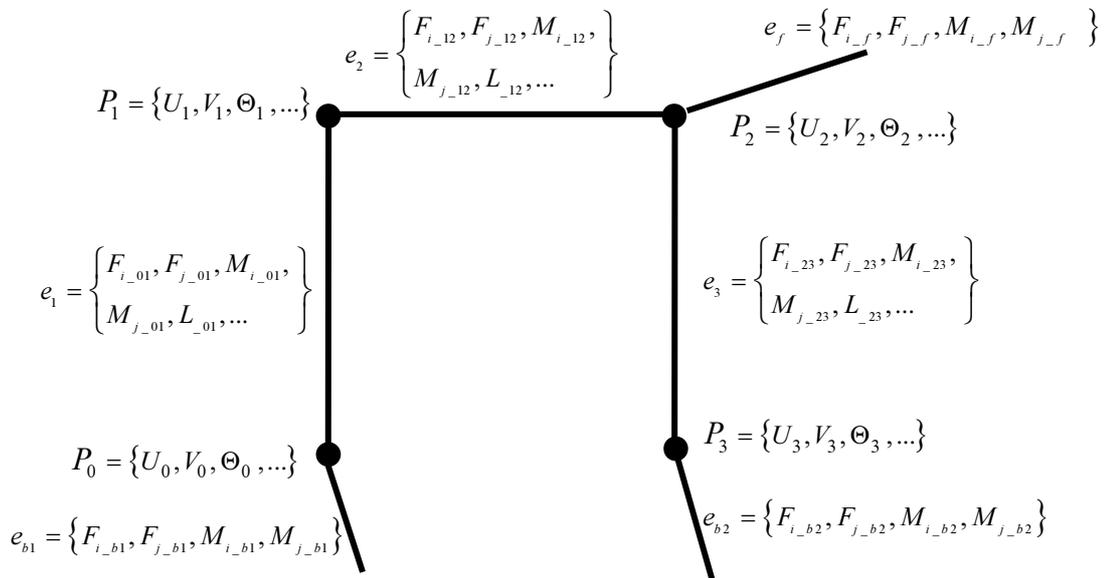
$$[K]_{g(\text{portique})} = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & -k_4 & -k_2 & 0 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & 0 & k_3 & k_4 & 0 & \frac{k_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_4 & k_2+k_1 & 0+0 & k_4+0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0+0 & k_1+k_2 & 0+k_4 & 0 & -k_2 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & 0 & \frac{k_3}{2} & k_4+0 & 0+k_4 & k_3+k_3 & 0 & -k_4 & \frac{k_3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & k_1+k_2 & 0+0 & 0+k_4 & -k_2 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 & -k_4 & 0+0 & k_2+k_1 & -k_4+0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & \frac{k_3}{2} & 0+k_4 & -k_4+0 & k_3+k_3 & -k_4 & 0 & \frac{k_3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & -k_4 & k_2 & 0 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & \frac{k_3}{2} & -k_4 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } k_1 = \frac{EA}{L} ; k_2 = \frac{12EI}{L^3} ; k_3 = \frac{4EI}{L} ; k_4 = \frac{6EI}{L^2}$$

Les éléments sélectionnés dans la matrice de rigidité globale correspondant aux termes d'assemblage. En utilisant la relation force / déplacement donnée par l'équation 5 (page 70) nous calculons le déplacement de chaque nœud. Ensuite, nous calculons les réactions aux appuis ainsi que les efforts normaux des barres de portique.

## 2.3.3.3. Approche topologique en utilisant les collections topologiques et les transformations

Comme indiqué précédemment, nous définissons seulement les cellules représentant la structure ainsi que les variables avec lesquelles elles sont associées. Une présentation de portique sous forme de collection topologique est donnée par la figure 86.



**Figure 86.** Présentation du portique sous forme de collection topologique

Les équations obtenues par le langage MGS sont générées en balayant toutes les cellules représentant le système par exemple :

$$\text{Pour le nœud V2 : } \begin{cases} \overrightarrow{F_{i_{-23}}} + \overrightarrow{F_{j_{-12}}} + \overrightarrow{F_{i_{-f}}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{i_{-23}}} + \overrightarrow{M_{j_{-23}}} + \overrightarrow{M_{i_{-f}}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Pour la poutre 3 : } \begin{cases} \overrightarrow{F_{i_{-23}}} + \overrightarrow{F_{j_{-23}}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{i_{-23}}} + \overrightarrow{M_{j_{-23}}} + \overrightarrow{F_{j_{-23}}} \wedge \overrightarrow{L_{-23}} = 0 \\ \begin{bmatrix} \overrightarrow{F_{i_{-23}}} \\ \overrightarrow{M_{i_{-23}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & k_4 & -k_2 & 0 & k_4 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ k_4 & 0 & k_3 & -k_4 & 0 & \frac{k_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Theta_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Nous pouvons clairement voir que nous considérons le portique comme des éléments locaux (nœuds, poutres, forces et bâtis) et qu'il n'y a pas de terme d'assemblage.

## 2.3.3.4. Résultats des simulations

Les tableaux 15, 16 et 17 montrent respectivement les déplacements nodaux  $\{U \ V \ \Theta\}$ , les réactions aux appuis  $\{R_x \ R_y \ M_z\}$ , les efforts résultants aux extrémités de chaque poutre :  $\{N \ T_y \ Mf_z\}$  avec  $N$  : effort normal  $T_y$  : force de cisaillement et  $Mf_z$  : Moment de flexion.

**Tableau 15.** Les déplacements nodaux du portique ( $m, m, rad$ )

$V_0$	<b>MGS</b>	$\{0 \ 0 \ -1.524 \cdot 10^{-2}\}$
	<b>RDM6</b>	$\{0 \ 0 \ -1.524 \cdot 10^{-2}\}$
$V_1$	<b>MGS</b>	$\{4.8769 \cdot 10^{-2} \ 3.809 \cdot 10^{-6} \ -6.097 \cdot 10^{-3}\}$
	<b>RDM6</b>	$\{4.877 \cdot 10^{-2} \ 3.810 \cdot 10^{-6} \ -6.097 \cdot 10^{-3}\}$
$V_2$	<b>MGS</b>	$\{4.877 \cdot 10^{-2} \ -3.809 \cdot 10^{-6} \ 3.04510^{-3}\}$
	<b>RDM6</b>	$\{4.876 \cdot 10^{-2} \ -3.810 \cdot 10^{-6} \ 3.04610^{-3}\}$
$V_3$	<b>MGS</b>	$\{6.0956 \cdot 10^{-2} \ 0 \ 3.0457 \cdot 10^{-3}\}$
	<b>RDM6</b>	$\{6.096 \cdot 10^{-2} \ 0 \ 3.046 \cdot 10^{-3}\}$

**Tableau 16.** Les réactions aux appuis du portique ( $N, N.m$ )

<b>en <math>V_0</math></b>	<b>MGS</b>	$\{-2000 \ -2000 \ 0\}$
	<b>RDM6</b>	$\{-2000 \ -2000 \ 0\}$
<b>en <math>V_3</math></b>	<b>MGS</b>	$\{0 \ 2000 \ 0\}$
	<b>RDM6</b>	$\{0 \ 2000 \ 0\}$

**Tableau 17.** Les efforts aux extrémités de chaque poutre du portique ( $N, N.m$ )

<b>poutre 1</b>	<b>MGS</b>	0 $\{2000 \ -2000 \ 0\}$
		1 $\{2000 \ -2000 \ 8000\}$

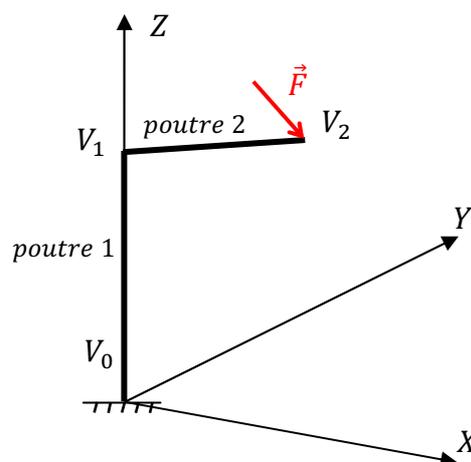
	<b>RDM6</b>	0 {2000 -2000 0} 1 {2000 -2000 8000}
<b>poutre 2</b>	<b>MGS</b>	1 {2000 2000 8000} 2 {2000 2000 0}
	<b>RDM6</b>	1 {2000 2000 8000} 2 {2000 2000 0}
<b>poutre 3</b>	<b>MGS</b>	2 {-2000 0 0} 3 {-2000 0 0}
	<b>RDM6</b>	2 {-2000 0 0} 3 {-2000 0 0}

Nous pouvons clairement voir que les résultats obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et les transformations sont similaires à ceux obtenus par le logiciel RDM6 basé sur la méthode des éléments finis.

#### 2.3.4. Application 2: ossature spatiale

##### 2.3.4.1. Description

Nous considérons l'ossature spatiale représentée sur la figure 87. Cette ossature est constituée de deux poutres de même section droite  $A=0.01\text{ m}^2$  et de même module d'Young  $E = 200\text{ GPa}$  et elle est soumise à une force extérieure  $\vec{F} = [0 \quad -1000 \quad 1000]$  en  $V_2$ .



**Figure 87.** Ossature spatiale constituée de deux poutres

A l'état initial, nous associons le repère  $(O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  au nœud  $V_0$ . Les coordonnées des nœuds exprimées dans ce repère sont présentées dans le tableau 18.

**Tableau 18.** *Coordonnées des nœuds*

	$X$	$Y$	$Z$
$V_0$	0	0	0
$V_1$	0	0	4
$V_2$	2	2	4

### 2.3.4.2. Résultats des simulations

Les tableaux 19, 20 et 21 montrent respectivement les déplacements nodaux  $\{U \ V \ W \ \Theta_x \ \Theta_y \ \Theta_z\}$ , les réactions aux appuis  $\{R_x \ R_y \ R_z \ M_x \ M_y \ M_z\}$ , les efforts résultantes aux extrémités de chaque poutres :  $\{N \ T_y \ T_z \ Mt \ Mf_y \ Mf_z\}$  avec  $N$  : effort normal,  $(T_y \ T_z)$  : force de cisaillement,  $(T_y \ T_z)$  : moment de torsion et  $(Mf_y \ Mf_z)$  : moment de flexion.

**Tableau 19.** *Les déplacements nodaux (m,rad)*

$V_1$	<b>MGS</b>	$\{9.14286 \ 10^{-3} \ 2.13333 \ 10^{-2} \ -1.90476 \ 10^{-10} \ -9.14286 \ 10^{-3} \ 4.57143 \ 10^{-3} \ 7.04541 \ 10^{-3}\}$
	<b>RDM6</b>	$\{9.143 \ 10^{-3} \ 2.133 \ 10^{-2} \ -1.905 \ 10^{-10} \ -9.143 \ 10^{-3} \ 4.571 \ 10^{-3} \ 7.046 \ 10^{-3}\}$
$V_2$	<b>MGS</b>	$\{-7.10227 \ 10^{-3} \ 3.75798 \ 10^{-2} \ -3.17405 \ 10^{-2} \ -1.07591 \ 10^{-2} \ 6.18767 \ 10^{-3} \ 8.66165 \ 10^{-3}\}$
	<b>RDM6</b>	$\{-7.103 \ 10^{-3} \ 3.758 \ 10^{-2} \ -3.174 \ 10^{-2} \ -1.076 \ 10^{-2} \ 6.188 \ 10^{-3} \ 8.662 \ 10^{-3}\}$

**Tableau 20.** *La réaction à l'appui (N, N.m)*

en $V_0$	<b>MGS</b>	$\{0 \ -1000 \ 1000 \ 6000 \ -2000 \ -2000\}$
	<b>RDM6</b>	$\{0 \ -1000 \ 1000 \ 6000 \ -2000 \ -2000\}$

**Tableau 21.** Les efforts aux extrémités de chaque poutre ( $N, N.m$ )

<b>poutre 1</b>	<b>MGS</b>	0 $\{-1000 \ 0 \ -1000 \ 2000 \ 6000 \ -2000\}$ 1 $\{-1000 \ 0 \ -1000 \ 2000 \ 2000 \ -2000\}$
	<b>RDM6</b>	0 $\{-1000 \ 0 \ -1000 \ 2000 \ 6000 \ -2000\}$ 1 $\{-1000 \ 0 \ -1000 \ 2000 \ 2000 \ -2000\}$
<b>poutre 2</b>	<b>MGS</b>	1 $\{707.107 \ -1000 \ -707.107 \ 0 \ 2000 \ -2828.43\}$ 2 $\{707.107 \ -1000 \ -707.107 \ 0 \ 0 \ 0\}$
	<b>RDM6</b>	1 $\{707.1 \ -1000 \ -707.1 \ 0 \ 2000 \ -2828.4\}$ 2 $\{707.1 \ -1000 \ -707.1 \ 0 \ 0 \ 0\}$

Nous pouvons clairement voir que les résultats obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et les transformations sont très proches à ceux obtenus par le logiciel RDM6 basé sur la méthode des éléments finis.

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, les collections topologiques sont appliquées dans le cas particulier d'un treillis à n barres à structures pyramidale puis dans le cas général des structures de barres et de poutres. L'avantage de cette approche est qu'elle est applicable indépendamment de nombres de barres ou de poutres, des forces ou des moments appliqués à la structure ainsi que des différents types de fixations. En effet dans notre approche topologique, nous considérons ces différents constituants (barre, poutre, force, moment et fixation) comme des éléments locaux. Alors pour étudier une structure quelconque de barres ou de poutres, il suffit de spécifier sa topologie c'est-à-dire la loi d'interconnexion de ces différents éléments.

# IV. Application dans le cas des systèmes mécatroniques

## Sommaire

<b>1. Structures piézoélectriques.....</b>	<b>95</b>
<b>1.1. Bref aperçu sur la piézoélectricité .....</b>	<b>95</b>
1.1.1. Effets piézoélectriques .....	95
1.1.2. Piézoélectricité linéaire .....	96
1.1.3. Modes de couplage électromécanique.....	97
<b>1.2. Exemple 1 : Stack piézoélectrique à n-éléments.....</b>	<b>98</b>
1.2.1. Description .....	98
1.2.2. Graphe topologique KBR.....	99
1.2.3. Modélisation MGS .....	102
1.2.4. Cas particulier et résultats numériques.....	103
<b>1.3. Application 2 : treillis piézoélectrique plan .....</b>	<b>107</b>
1.3.1. Description .....	107
1.3.2. Graphe topologique KBR.....	107
1.3.3. Modélisation MGS .....	108
1.3.4. Résultats Numériques.....	110
<b>2. Etude dynamique d'un réducteur simple étage à denture droite par une approche topologique</b>	<b>113</b>
<b>2.1. Description du système étudié.....</b>	<b>113</b>
2.1.1. Modélisation des deux arbres .....	113
2.1.2. Modélisation de l'engrenage (Pignon/roue) .....	115
2.1.3. Modélisation du moteur à courant continu .....	116
<b>2.2. Modélisation du système couplé basée sur la méthode des éléments finis MEF .....</b>	<b>117</b>
<b>2.3. Graphe KBR.....</b>	<b>118</b>
2.3.1. Graphe KBR du moteur.....	118
2.3.2. Graphe KBR de l'arbre moteur et récepteur : poutre 3D.....	122
2.3.3. Graphe KBR de l'engrenage .....	123
2.3.4. Graphe KBR du système couplé .....	124
<b>2.4. Modélisation MODELICA .....</b>	<b>126</b>
<b>2.5. Modélisation MGS .....</b>	<b>127</b>
<b>2.6. Résultats de simulation.....</b>	<b>129</b>
<b>3. Conclusion .....</b>	<b>132</b>

## Résumé

Dans ce chapitre, l'application des collections topologiques et de leurs transformations est étendue à la modélisation d'éléments de base de systèmes mécatroniques. Deux cas sont étudiés : le premier est l'application de cette approche topologique aux structures piézoélectrique (stack piézoélectrique et treillis piézoélectrique) et le deuxième cas est l'application de cette approche topologique à la modélisation d'un réducteur simple étage à denture droite.

Pour les différents cas étudiés, Nous commençons par la détermination du graphe topologique KBR du système à partir des graphes topologiques KBR de ces différents composants. Puis, nous présentons les principales étapes de modélisation en utilisant le langage MGS : les collections topologiques sont utilisées pour spécifier la loi d'interconnexion entre ces différents composants et les transformations sont utilisées pour spécifier la loi de comportement locale de chaque composant. A la fin, les résultats obtenus sont comparés par rapport à ceux obtenus par le logiciel de calcul et d'analyse par la méthode des éléments finis ANSYS dans le cas des structures piézoélectriques et par le langage MODELICA dans le cas du réducteur simple étage à denture droite.

## 1. Structures piézoélectriques

### 1.1. Bref aperçu sur la piézoélectricité

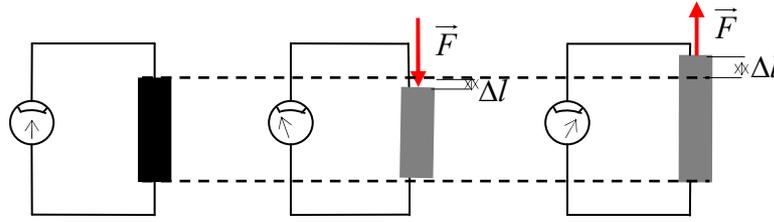
Les premières théories de l'effet piézoélectrique direct sont dues aux travaux de Pierre et Jacques Curie présentés en 1880 sur les cristaux présentant une structure asymétrique. D'après le premier principe de la thermodynamique, Gabriel Lippman a montré en 1881 l'existence de l'effet indirect. Cet effet est mis en évidence de manière expérimentale par les frères Curie en 1882.

Aujourd'hui, le phénomène de la piézoélectricité est largement étudié en mécanique pour ses applications en mécanique des capteurs, en asservissement mécanique et dans plusieurs autres applications telles que la récupération d'énergie, la diminution de vibrations....

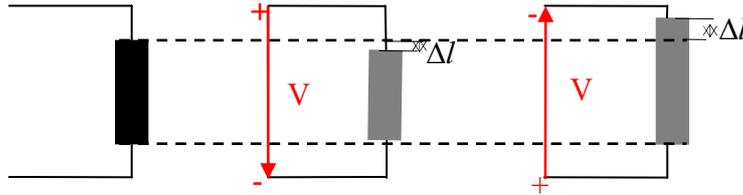
Dans la suite de cette section, nous présentons un bref aperçu sur le phénomène de la piézoélectricité. Nous procédons d'abord à un rappel de l'effet piézoélectrique. Ensuite, les équations linéaires couplées d'un milieu piézoélectrique sont présentées. Finalement, nous présentons les différents modes de couplage piézoélectrique.

#### 1.1.1. Effets piézoélectriques

Le phénomène de la piézoélectricité est l'aptitude de certains matériaux tels que le quartz, la céramique de titano-zirconate de Plomb (PZT) et le polyfluorure de vinylidène de se charger électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique. Ce phénomène est spontané et il est dû à la structure cristalline de ces matériaux et il s'explique comme suit : l'application d'une action mécanique sur un volume piézoélectrique conduit à l'interruption de l'équilibre électrostatique dû au déplacement des centres de charges positives et négatives et par conséquent, l'apparition d'une polarisation. Cet effet est l'effet piézoélectrique direct (figure 88). Il existe corrélativement un effet piézoélectrique inverse qui se caractérise par une déformation mécanique lorsqu'un champ électrique est appliqué sur un volume piézoélectrique (figure 89).



**Figure 88.** Effet piézoélectrique direct



**Figure 89.** Effet piézoélectrique inverse

### 1.1.2. Piézoélectricité linéaire

La loi de comportement linéaire d'un matériau piézoélectrique simultanément soumis à une déformation mécanique et une polarisation électrique peut s'écrire sous la forme suivante [IEEE standard of piezoelectricity, 1988] [Boucher et al, 1981] :

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [c^E] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} = [e] \{\varepsilon\} + [\epsilon^S] \{E\} \end{cases} \quad (32)$$

Les grandeurs qui entrent en jeu sont:

- $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}\}$  le vecteur des contraintes, exprimé en  $(N/m^2)$  ;
- $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{12}\}$  le vecteur des déformations, sans dimension  $(m/m)$  ;
- $\{E\} = \{E_1 \ E_2 \ E_3\}$  le vecteur du champ électrique, exprimé en  $(V/m)$  ;
- $\{D\} = \{D_1 \ D_2 \ D_3\}$  le vecteur du déplacement électrique, exprimé en  $(C/m^2)$  ;
- $[c^E]$  la matrice de rigidité mécanique à champ électrique constant  $(Pa)$  ;
- $[e]$  la matrice des constantes piézoélectriques, exprimée en  $(N/m/V)$  et  $[e]^T$  est la matrice transposée ;

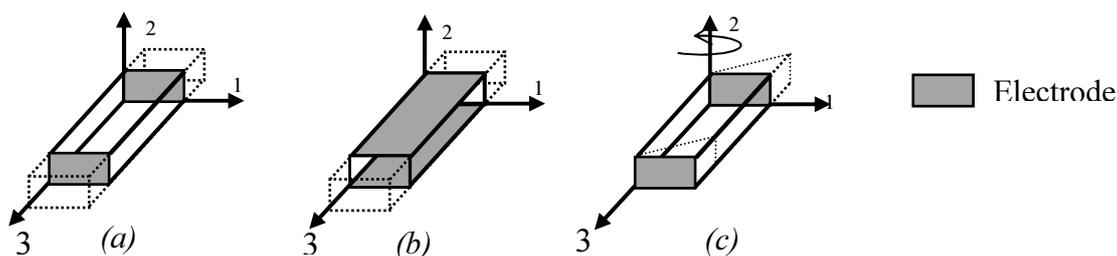
- $[\epsilon^S]$  la matrice des permittivités ou constantes diélectriques, à déformation nulle, exprimée en  $(F/m)$ .

### 1.1.3. Modes de couplage électromécanique

Il existe différents modes de couplage d'un matériau piézoélectrique. Ces modes dépendent des dimensions géométriques et de la direction du champ. Le couplage entre la direction du champ électrique et la direction de déformations peut se faire selon plusieurs directions qui peuvent être classés selon trois modes principaux : longitudinal, transversal et de cisaillement. La figure 90 présente ces principaux modes dans le cas d'un barreau parallélépipédique de céramique piézoélectrique. Le barreau parallélépipédique est référencé par un trièdre  $(O, x_1, x_2, x_3)$  :

- le mode longitudinal (mode 33) se traduit par une variation de longueur suivant l'axe 3, lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant ce même axe au moyen des électrodes placées sur les faces perpendiculaires à cet axe;
- le mode transversal (mode 31 ou 32) conduit, de même, à une variation de longueur suivant l'axe 3 lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant l'axe 2 ou 1;
- le mode de cisaillement (mode 15) conduit à une déformation de cisaillement autour de l'axe 2 lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant l'axe 3.

Le mode longitudinal est le plus intéressant en termes de couplage et doit donc être privilégié chaque fois que c'est possible.

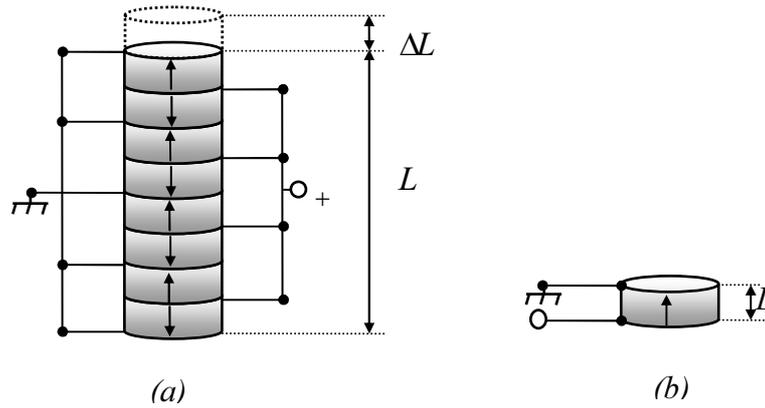


**Figure 90.** Principaux modes de vibrations d'une céramique piézoélectrique

## 1.2. Application 1 : Stack piézoélectrique à $n$ -éléments

### 1.2.1. Description

Un stack piézoélectrique (figure 91 (a)) est obtenu par un empilement de céramiques piézoélectriques isolées les unes des autres et connectées électriquement en parallèle dans une armature adéquate, permettant d'augmenter linéairement l'allongement total tout en nécessitant une tension d'alimentation faible. La direction de polarisation de chaque élément est parallèle à la direction selon laquelle l'allongement et/ou la force doivent être développés.



**Figure 91.** (a) Stacks piézoélectrique (b) élément d'un stack piézoélectrique

Lorsque l'on applique une tension entre les électrodes, chaque élément piézoélectrique (figure 91(b)) se déplace le long de la direction de polarisation selon le mode 3. Alors, la loi de comportement pour un élément piézoélectrique peut s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{3i} \\ D_{3i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{33i}^E & -e_{33i} \\ e_{33i} & \epsilon_{33i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{3i} \\ E_{3i} \end{pmatrix} \quad (33)$$

avec  $i = 0 \dots n$  et  $n$  le nombre d'éléments du stack piézoélectrique.

Pour des petits déplacements, le champ électrique  $E_{3i}$  peut s'exprimer en fonction de la tension appliquée entre deux électrodes  $U_i$  :

$$E_{3i} = \frac{U_i}{L_i} \quad (34)$$

avec  $L_i$  la longueur d'un élément piézoélectrique.

En faisant l'hypothèse d'un régime statique, le vecteur contrainte est donné par :

$$F_i = \iint_{A_i} \sigma_{3i} dA_i = \sigma_{3i} A_i \quad (35)$$

Donc, on peut écrire :

$$\sigma_{3i} = \frac{F_i}{A_i} \quad (36)$$

avec  $A_i$  section de l'élément piézoélectrique.

La charge électrique d'un élément d'un stack piézoélectrique est donnée par :

$$Q_i = \iint_{A_i} D_{3i} dA_i = D_{3i} A_i \quad (37)$$

Or, on a

$$I_i = \frac{dQ_i}{dt} \quad (38)$$

Alors,

$$I_i = \frac{d(A_i D_{3i})}{dt} \quad (39)$$

En utilisant, la transformée de Laplace, l'équation 39 s'écrit :

$$I_i = p A_i D_{3i} \quad (40)$$

avec  $p$  la variable de Laplace

Ainsi, on peut écrire la loi de comportement pour un élément d'un stack piézoélectrique comme suit:

$$\begin{pmatrix} I_i \\ F_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & \frac{A_i}{L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{33i} & e_{33i} \\ -e_{33i} & C_{33i}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_i \\ \Delta L_i \end{pmatrix} \quad (41)$$

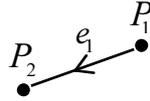
$$\text{On note : } [K]_{\text{piezi}} = \begin{bmatrix} \frac{pA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & \frac{A_i}{L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{33i} & e_{33i} \\ -e_{33i} & C_{33i}^E \end{bmatrix}$$

### 1.2.2. Graphe topologique KBR

#### 1.2.2.1. Pour un élément piézoélectrique

Nous commençons par déterminer le graphe linéaire pour un élément de stack piézoélectrique (figure 92). La matrice d'incidence s'écrit alors :

$$[C] = [1 \quad -1]$$



**Figure 92.** Graphe linéaire pour un élément piézoélectrique

A cette structure topologique, nous associons le vecteur  $\{\overline{\Delta P}_{P_i}\}_{piez} = \begin{Bmatrix} Z_{P_i} \\ V_{P_i} \end{Bmatrix}$ ;  $i = 1, 2$  aux nœuds,

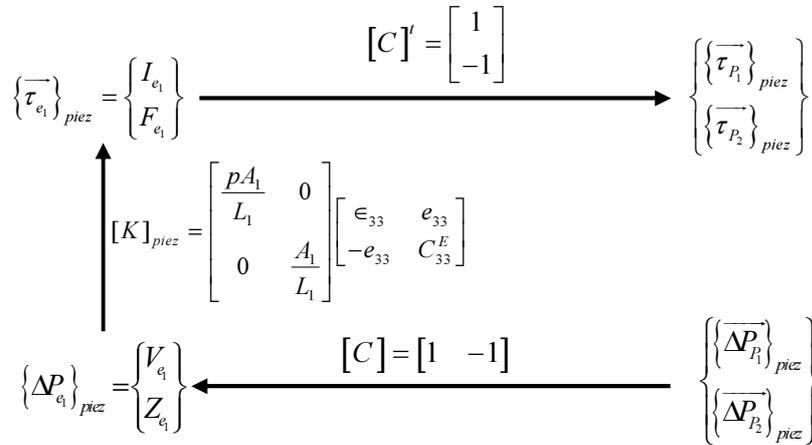
où  $Z_i$  et  $V_i$  représentent respectivement le déplacement le long de l'axe  $z$  et la tension au nœud  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ). La matrice d'incidence appliquée aux nœuds permet de fournir la tension

$$V_{e_1} = V_1 - V_2 \text{ et le déplacement } Z_{e_1} = Z_{P_1} - Z_{P_2} \text{ de l'élément piézoélectrique } \{\Delta e_1\}_{piez} = \begin{Bmatrix} V_{e_1} \\ Z_{e_1} \end{Bmatrix}.$$

Le passage à l'espace dual correspond aux forces et courants associés aux nœuds  $\begin{Bmatrix} \{\overline{\tau}_{P_1}\}_{piez} \\ \{\overline{\tau}_{P_2}\}_{piez} \end{Bmatrix}$

et l'arc  $\{\overline{\tau}_{e_1}\}_{piez} = \begin{Bmatrix} I_{e_1} \\ F_{e_1} \end{Bmatrix}$ . En ajoutant la loi de comportement piézoélectrique, nous obtenons

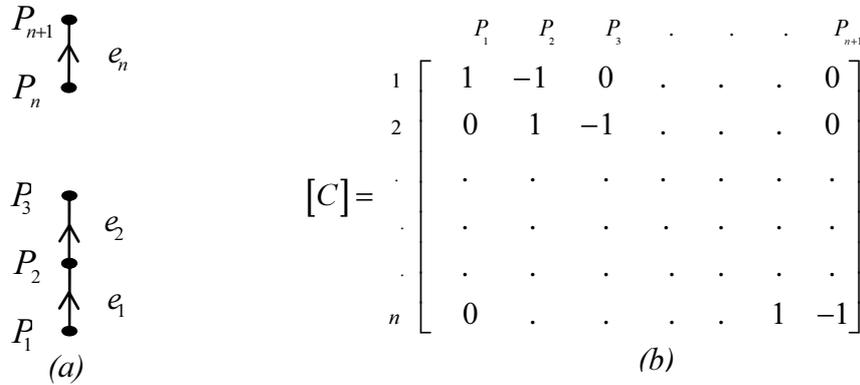
alors le graphe KBR pour un élément piézoélectrique de type stack (figure 93).



**Figure 93.** Graphe topologique KBR pour un élément piézoélectrique

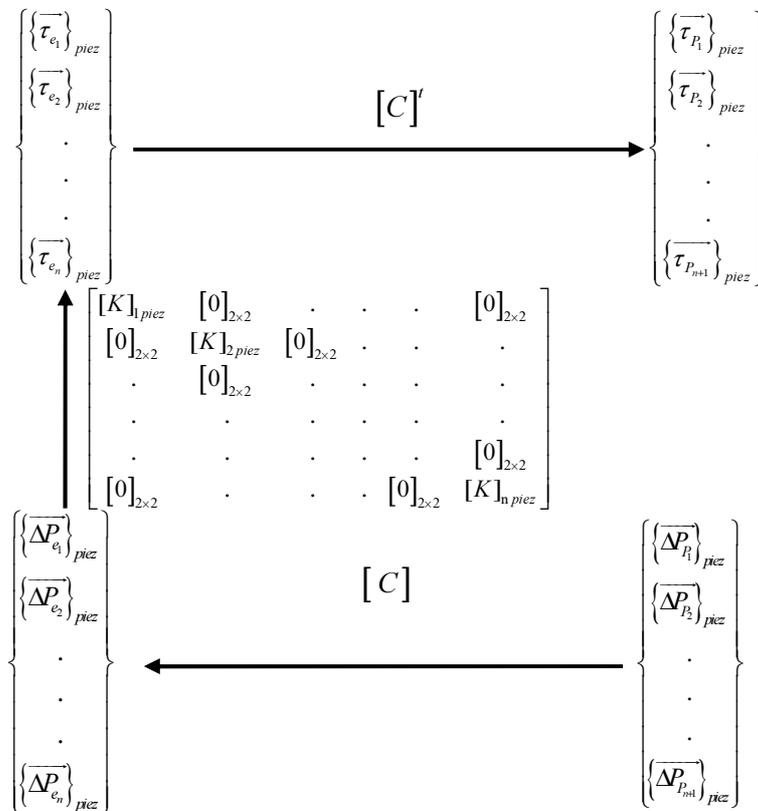
1.2.2.2. Pour un stack piézoélectrique à n éléments piézoélectriques

Le graphe linéaire correspondant à un stack piézoélectrique à n éléments piézoélectriques se compose de n+1 nœuds et n arcs (figure 94(a)). La matrice d'incidence associée à ce graphe est donnée par la figure 94(b).



**Figure 94.** Stack piézoélectrique à n éléments piézoélectriques (a) Graphe linéaire (b) matrice d'incidence

En se basant sur le graphe topologique KBR d'un élément d'un stack piézoélectrique, nous déterminons celui d'un stack piézoélectrique à n éléments (figure 95).



**Figure 95.** Graphe topologique KBR pour un stack piézoélectrique n éléments piézoélectriques

### 1.2.3. Modélisation MGS

#### 1.2.3.1. Pour un élément piézoélectrique

La figure 96 présente les différentes étapes de modélisation d'un élément piézoélectrique en appliquant les collections topologiques et les transformations. Tout d'abord, nous commençons par définir les cellules représentant l'élément piézoélectrique. Nous utilisons seulement les cellules de dimension 0 et 1.

- 0-cellules représentent les nœuds notés  $P_1$  et  $P_2$  ;
- 1-cellules peuvent représenter :
  - L'élément piézoélectrique noté  $e_{p1}$  ;
  - Les deux masses électriques notées  $e_{m1}$  et  $e_{m2}$  (l'une des deux nœuds est connecté à la masse et l'autre à un potentiel particulier) ;
  - Le bâti noté  $e_{b1}$ .

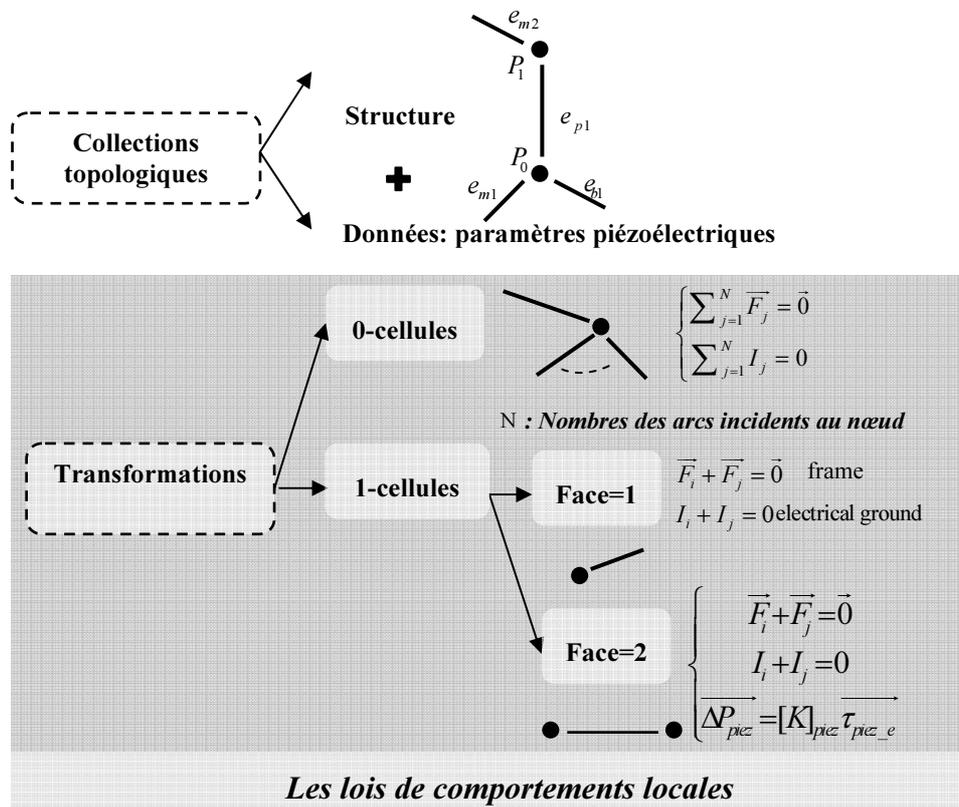
La cellule de dimension 1 représentant l'élément piézoélectrique diffère de celles représentant le bâti ou la masse électrique du fait qu'elle est limitée par deux nœuds.

Ensuite, nous définissons les fonctions d'affectation des variables piézoélectriques et nous les associons aux cellules correspondantes. Enfin, nous générons le système d'équations de l'élément piézoélectrique en tenant compte que ce dernier doit être écrit en un format qui peut être exécutable par d'autres logiciels. Dans notre cas, les équations sont écrites au format du MODELICA et nous utilisons DYMOLA comme solveur. La génération des équations décrivant le comportement de l'élément piézoélectrique, se fait en balayant toutes les cellules et en définissant la loi de comportement locale de chaque cellule comme suit :

- pour les 0-cellules, on a  $\sum_{j=1}^N \vec{F}_j = \vec{0}$  et / ou  $\sum_{j=1}^N I_j = 0$  avec  $\vec{F}_j$  et  $I_j$  qui représentent respectivement la force normale et le courant électrique de chaque arc connecté au nœud isolé et  $N$  le nombre d'arcs incidents au nœud ;
- pour les 1-cellules, elles peuvent représenter ( $i$  et  $j$  désignent les extrémités de l'arc) :
  - l'élément piézoélectrique :

$$\blacksquare \begin{cases} \vec{F}_i + \vec{F}_j = \vec{0} \\ I_i + I_j = 0 \\ \overrightarrow{\Delta P_{piez}} = [K]_{piez} \overrightarrow{\tau_{piez\_e}} \end{cases}$$

- Le bâti :
  - $\vec{F}_i + \vec{F}_j = \vec{0}$
- la masse électrique :
  - $I_i + I_j = 0$



**Figure 96.** Les différentes étapes de modélisation d'un élément piézoélectrique en appliquant les collections topologiques et les transformations

1.2.3.2. Pour un stack piézoélectrique à n éléments piézoélectriques

Les étapes de modélisation d'un stack piézoélectrique à n éléments piézoélectriques sont les mêmes qu'un seul élément piézoélectrique. La seule différence est au niveau de la déclaration des cellules représentant le stack étudié car cette étape dépend du nombre d'éléments c'est à dire de la structure topologique du stack.

1.2.4. Cas particulier et résultats numériques

Pour valider notre approche, nous considérons un cas simplifié d'un stack piézoélectrique constitué de 3-éléments d'épaisseur 0.02mm et de section  $A = 0.25E-5 m^2$ .

Les propriétés du matériau piézoélectrique sont [Boucher et al. 1981] :  $C_{33}^E = 11.5 \cdot 10^{10} N/m^2$ ,  $e_{33} = 14.1 C/m^2$   $\epsilon_{33} = 5.83834510^{-9} F/m$ .

Afin de valider les résultats obtenus en utilisant les notions des collections topologiques et des transformations, nous comparons les résultats obtenus par le langage MGS par rapport à ceux obtenus par ANSYS. L'élément fini « SOLID 5 » est pris de la bibliothèque ANSYS pour modéliser l'élément piézoélectrique. Les nœuds de cet élément ont six degrés de liberté qui sont les déplacements suivant les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , l'intensité du potentiel électrique, l'intensité du champ magnétique et de la température. Cet élément est donc multi-physique.

Puisque nous voulons étudier la piézoélectricité linéaire, on s'intéresse seulement aux déplacements et au potentiel électrique.

Les tableaux suivants présentent les différents résultats obtenus en appliquant MGS ainsi que ceux obtenus par ANSYS pour  $U = 1000 V$ .

**Tableau 22.** Courants aux arcs ( $A$ )

	MGS	ANSYS
$e_1$	0.946236E-08	0.946236E-08
$e_2$	0.946236E-08	0.946236E-08
$e_3$	0.946236E-08	0.946236E-08

**Tableau 23.** Déplacement des nœuds ( $m$ )

	MGS	ANSYS
$P_1$	0	0
$P_2$	-0.122609E-06	-0.12261E-06
$P_3$	-0.245217E-06	-0.24522E-06
$P_4$	-0.367826E-06	-0.36783E-06

En comparant les résultats obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et les transformations et ceux obtenus par le logiciel ANSYS basé sur la méthode des éléments finis, nous remarquons que les résultats sont très proches.

Aussi, nous remarquons que l'allongement total du stack piézoélectrique est égal à 3 fois l'allongement d'un seul élément soit  $-0.367826E-06$ .

Alors, nous pouvons considérer un stack piézoélectrique constitué de  $n$  éléments piézoélectriques ayant les mêmes propriétés physiques et géométriques comme un seul élément dont la loi de comportement locale s'écrit comme suit:

$$\begin{pmatrix} I_{stack} \\ F_{stack} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{A}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\epsilon_{33} & e_{33} \\ -e_{33} & \frac{1}{n}C_{33}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_{stack} \\ \Delta L_{stack} \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\text{On note: } [K]_{stack} = \begin{bmatrix} \frac{pA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{A}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\epsilon_{33} & e_{33} \\ -e_{33} & \frac{1}{n}C_{33}^E \end{bmatrix}$$

Avec  $A$  et  $L$  respectivement la section et la longueur d'un élément du stack piézoélectrique ;

$n$  : le nombre des éléments du stack piézoélectrique.

#### **Mise en évidence de la relation donnée par l'équation 41 :**

On suppose que les différents éléments du stack piézoélectrique ont le même matériau ( $\epsilon_{33_e}$ ,  $e_{33_e}$  et  $C_{33_e}^E$ ), la même section  $A_{e_i} = A_e$  et la même longueur  $L_{e_i} = L_e$ .

Les  $n$  céramiques piézoélectriques sont connectées électriquement en parallèle alors on a :

$$\begin{aligned} I_{stack} &= I_{e_1} + I_{e_2} + \dots + I_{e_n} \\ \Delta V_{e_i} &= \Delta V_{e_1} = \Delta V_{e_2} = \dots = \Delta V_{e_n} \end{aligned}$$

Aussi les stacks sont liés mécaniquement en série alors :

$$\begin{aligned} F_{stack} &= F_{e_1} = F_{e_2} = \dots = F_{e_n} \\ \Delta L_{stack} &= \Delta L_{e_1} + \Delta L_{e_2} + \dots + \Delta L_{e_n} \end{aligned}$$

Pour un élément du stack piézoélectrique, la loi de comportement piézoélectrique s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} I_{e_i} \\ F_{e_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} & 0 \\ 0 & \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{33_{e_i}} & e_{33_{e_i}} \\ -e_{33_{e_i}} & C_{33_{e_i}}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta V_{e_i} \\ \Delta L_{e_i} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} I_{e_i} \\ F_{e_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} & 0 \\ 0 & \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{33e_i} & e_{33e_i} \\ -e_{33e_i} & C_{33e_i}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta V_{e_i} \\ \Delta L_{e_i} \end{Bmatrix}$$

$$I_{e_i} = p \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} \epsilon_{33e_i} \Delta V_{e_i} + p \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} e_{33e_i} \Delta L_{e_i}$$

$$F_{e_i} = -\frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} e_{33e_i} \Delta V_{e_i} + \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} C_{33e_i}^E \Delta L_{e_i}$$

On a  $F_{e_i} = F_{e_1} = F_{e_2} = \dots = F_{e_n}$

avec :

$$F_{e_1} = -\frac{A_{e_1}}{L_{e_1}} e_{33e_1} \Delta V_{e_1} + \frac{A_{e_1}}{L_{e_1}} C_{33e_1}^E \Delta L_{e_1}$$

$$F_{e_2} = -\frac{A_{e_2}}{L_{e_2}} e_{33e_2} \Delta V_{e_2} + \frac{A_{e_2}}{L_{e_2}} C_{33e_2}^E \Delta L_{e_2}$$

$$F_{e_n} = -\frac{A_{e_n}}{L_{e_n}} e_{33e_n} \Delta V_{e_n} + \frac{A_{e_n}}{L_{e_n}} C_{33e_n}^E \Delta L_{e_n}$$

alors

$$n \times F_{e_i} = -n \times \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} e_{33e_i} \Delta V_{e_i} + \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} C_{33e_i}^E (\Delta L_{e_1} + \Delta L_{e_2} + \Delta L_{e_3} + \dots + \Delta L_{e_n})$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \Rightarrow \Delta L_{e_1} + \Delta L_{e_2} + \Delta L_{e_3} + \dots + \Delta L_{e_n} &= n \times \left( F_{e_i} + \frac{A_{e_i}}{L_{e_i}} e_{33e_i} \Delta V_{e_i} \right) \\ &= n \times \Delta L_{e_i} \end{aligned}$$

De même, on montre que :  $I_{stack} = n I_{e_i}$

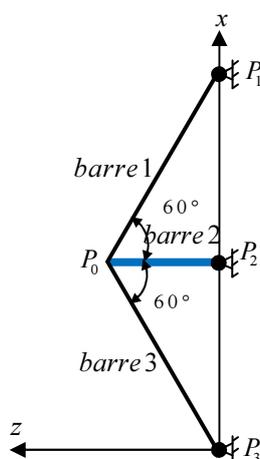
$$\text{D'où la relation suivante : } \begin{Bmatrix} I_{stack} \\ F_{stack} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pA_e}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{A_e}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\epsilon_{33} & e_{33} \\ -e_{33} & \frac{1}{n} C_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_{stack} \\ \Delta L_{stack} \end{Bmatrix}$$

### 1.3. Application 2 : treillis piézoélectrique plan

#### 1.3.1. Description

Nous considérons un treillis plan composé de 3 barres articulées à un support rigide en  $P_1, P_2$  et  $P_3$  comme présenté dans la figure 97. Ce treillis a une seule barre piézoélectrique qui est la barre 2.

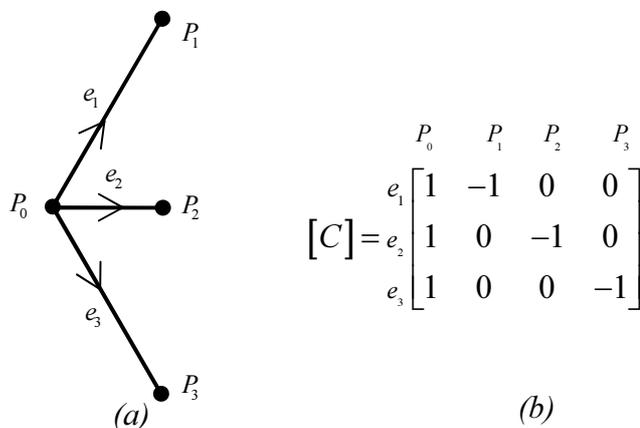
La barre piézoélectrique est un empilement piézoélectrique ayant les mêmes propriétés géométriques et physiques du stack piézoélectrique utilisé dans l'exemple précédent.



**Figure 97.** Treillis piézoélectrique plan à trois barres

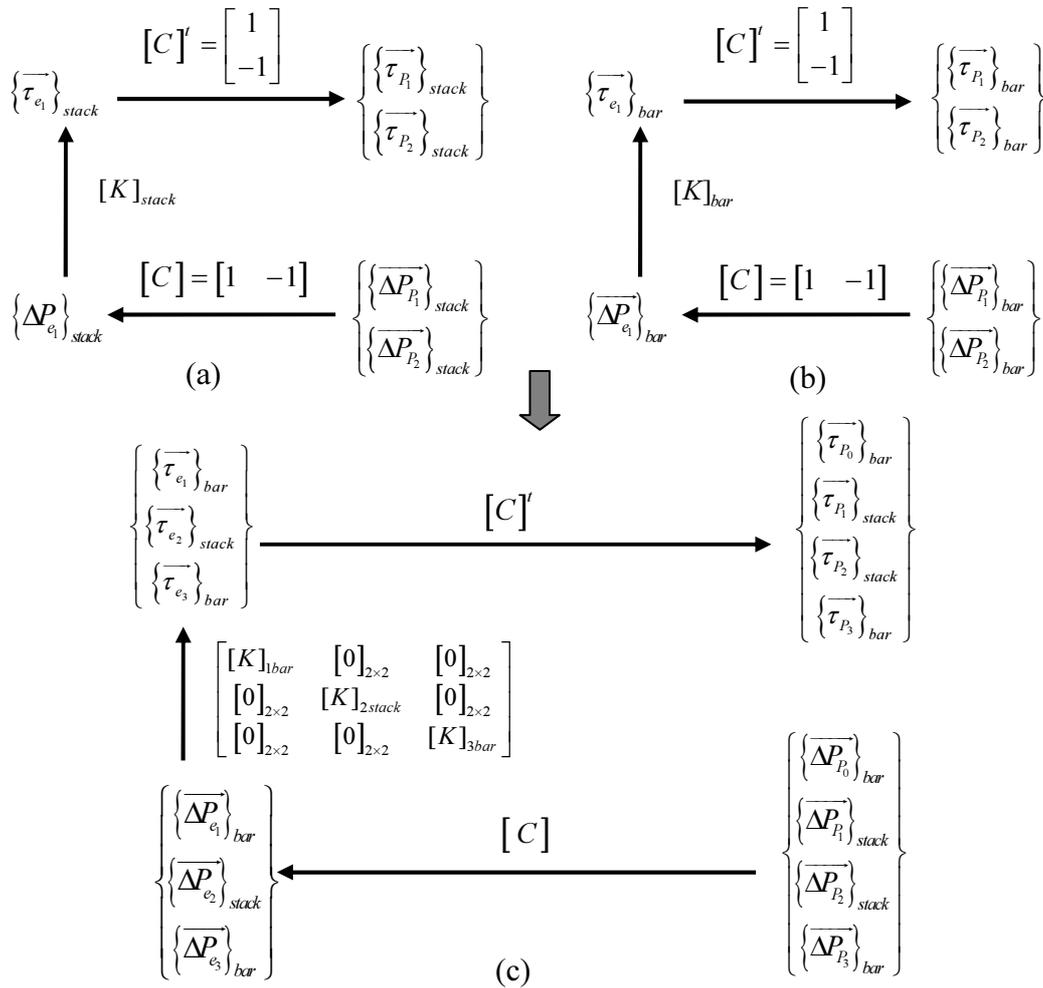
#### 1.3.2. Graphe topologique KBR

Le graphe linéaire correspondant au treillis piézoélectrique à trois barres est composé de quatre nœuds et 3 arcs (figure 98(a)). La matrice d'incidence associée à ce graphe est donnée par la figure 98 (b).



**Figure 98.** Treillis piézoélectrique à trois barres (a) graphe linéaire (b) matrice d'incidence

Après avoir déterminé le graphe KBR pour un élément de barre en traction compression (figure 99(b)) et celui d'un élément de barre piézoélectrique (figure 99 (a)). Nous déterminons le graphe KBR du treillis piézoélectrique présenté par la figure 99 (c).



**Figure 99.** Graphe KBR pour le treillis piézoélectrique

### 1.3.3. Modélisation MGS

La figure 100 présente les différentes étapes de modélisation du treillis piézoélectrique en appliquant les notions des collections topologiques et les transformations.

Tout d'abord, nous commençons par définir les cellules représentant le treillis piézoélectrique. Nous utilisons seulement les cellules de dimension 0 et 1.

- 0-cellules représentent les nœuds notés  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  ;
- 1-cellules peuvent représenter :
  - La barre piézoélectrique notée  $e_{p1}$  ;

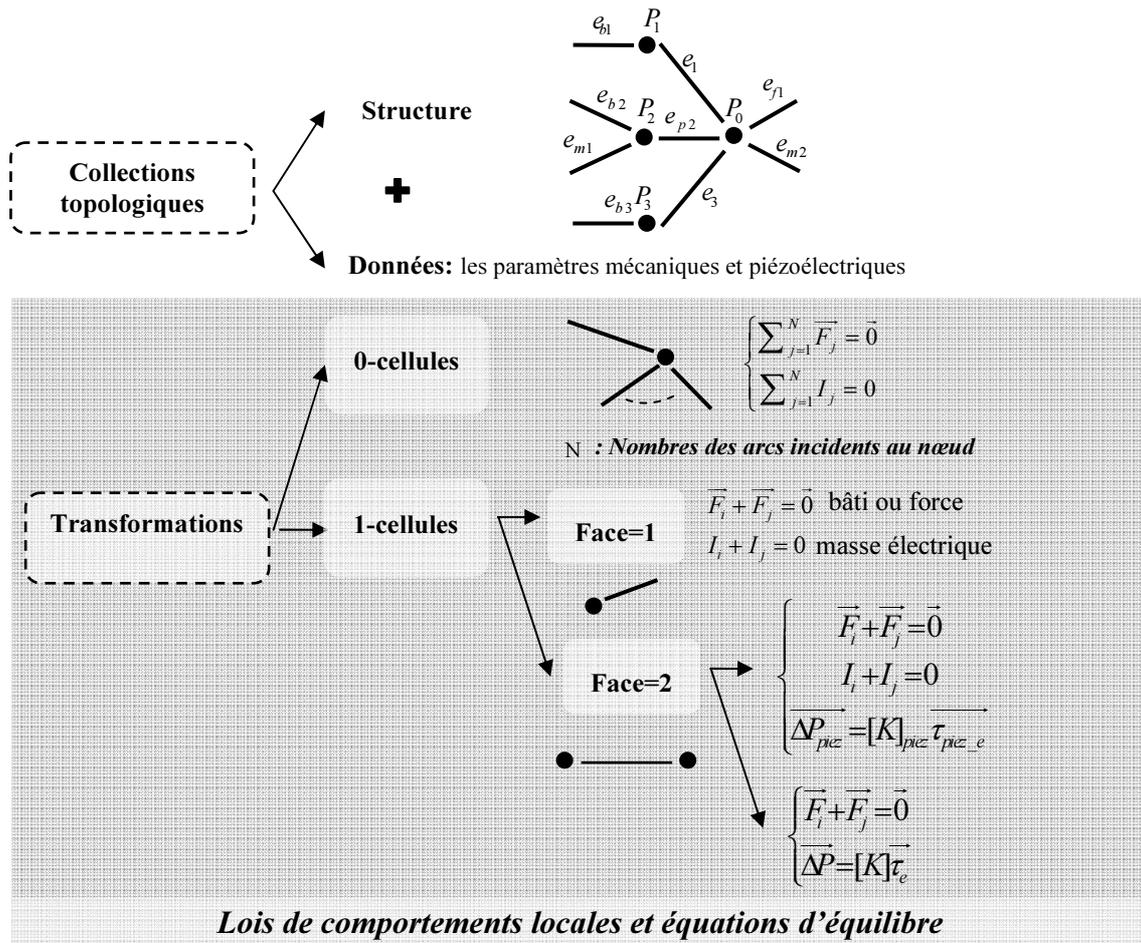
- Les deux barres notées  $e_1$  et  $e_3$  ;
- Les deux masses électriques notées  $e_{m1}$  et  $e_{m2}$  ( $P_2$  est connecté à la masse et  $P_0$  à un potentiel particulier) ;
- Les trois bâtis notés  $e_{b1}$ ,  $e_{b2}$  et  $e_{b3}$  (les trois nœuds  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont articulés à un support rigide).

Ensuite, en plus des fonctions d'affectation des variables piézoélectriques nous ajoutons les fonctions d'affectation des variables mécaniques et nous les associons aux cellules correspondantes. Enfin, nous générons le système d'équations de l'élément piézoélectrique en tenant compte que ce dernier doit être écrit en un format qui peut être exécutable par d'autres logiciels. Dans notre cas, les équations sont écrites en langage MODELICA et nous utilisons le solveur de DYMOLA. La génération des équations décrivant le comportement du treillis piézoélectrique se fait en balayant toutes les cellules et en définissant la loi de comportement locale de chaque cellule. Par rapport au stack piézoélectrique, nous ajoutons seulement la loi

de comportement locale d'un élément de barre en traction compression  $\begin{cases} \vec{F}_i + \vec{F}_j = \vec{0} \\ \Delta P = [K]_{bar} \vec{\tau}_e \end{cases}$  avec

$$[K]_{bar} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (L : \text{longueur du barre, } A : \text{section de la barre, } E : \text{module d'Young de}$$

la barre,  $c = \cos(\theta)$ ;  $s = \sin(\theta)$  ).



**Figure 100.** Les différentes étapes de modélisation du treillis piézoélectrique en appliquant les collections topologiques et les transformations

### 1.3.4. Résultats Numériques

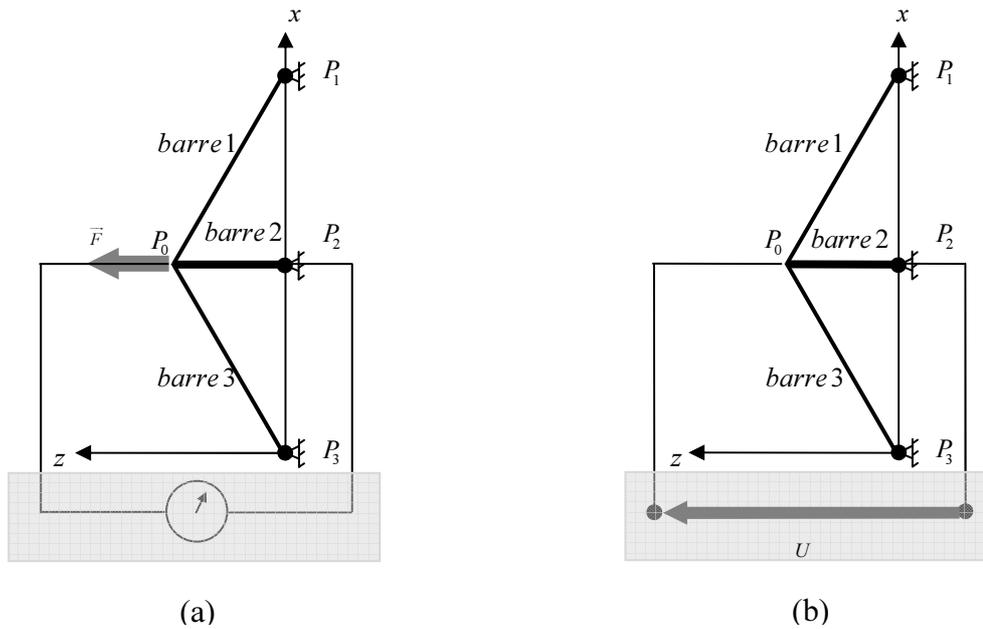
Les caractéristiques des deux barres notées barre 1 et barre 2 sont identiques:

Module d'Young :  $E_1 = E_3 = 200 \text{ GPa}$ , Section :  $A_1 = A_3 = 2.5 \text{ E} - 5 \text{ m}^2$  et la longueur  $L_1 = L_3 = 0.12 \text{ m}$ .

Pour la barre piézoélectrique, nous avons les mêmes propriétés géométriques et physiques du stack piézoélectrique utilisé dans l'application 1.

Nous nous intéressons à l'effet piézoélectrique direct et l'effet piézoélectrique inverse:

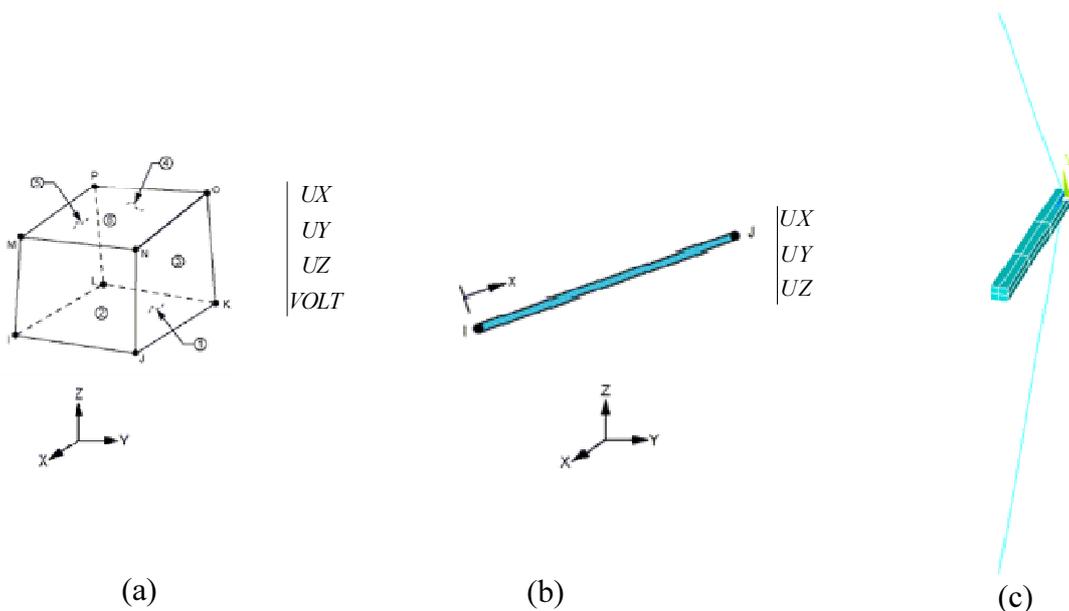
- effet piézoélectrique direct : le treillis est soumis à une force  $F = 1000 \text{ N}$  appliquée au nœud  $P_0$ . La force implique une déformation des barres alors, la barre piézoélectrique sera polarisée électriquement (figure 101(a)) ;
- effet piézoélectrique inverse : le treillis n'est pas soumis à aucune force extérieure. Les barres sont soumises à une tension  $U = 1000 \text{ V}$  (figure 101(b)).



**Figure 101.** *Etude de l'effet piézoélectrique du treillis*  
 (a) *Effet piézoélectrique direct* (b) *effet piézoélectrique inverse*

Afin de valider les résultats obtenus en utilisant les notions des collections topologiques et des transformations, nous comparons les résultats obtenus par le langage MGS par rapport à ceux obtenus par ANSYS.

Comme un élément fini, à partir de la bibliothèque d'ANSYS, l'élément « SOLID5 » est pris pour la modélisation de la barre piézoélectrique et l'élément « LINK 8 » est pris pour la modélisation des deux barres notées barre 1 et 3 (figure 102).



**Figure 102.** (a) *SOLID5* (b) *LINK8* (c) *modélisation du treillis piézoélectrique*

Les tableaux suivant présentent les différents résultats obtenus en appliquant MGS ainsi que ceux obtenus par ANSYS.

➤ *Résultats numériques pour l'effet piézoélectrique inverse*

**Tableau 24.** Courant électrique dans la barre piézoélectrique ( $A$ )

	MGS	ANSYS
<b>Barre 2</b>	0.2635443E-7	0.2635428E-07

**Tableau 25.** Déplacement du nœud  $P_0$  ( $m$ ) le long de  $z$

	MGS	ANSYS
$P_0$	0.252498 E - 6	0.25250 E - 6

**Tableau 26.** Réactions aux appuis ( $N$ )

	MGS	ANSYS
$P_1$	[4.78472 2.76307]	[4.7847 2.7631]
$P_2$	[0 -5.52615]	[0.177639E-14 -5.5261]
$P_3$	[-4.78472 2.76307]	[-4.7847 2.7631]

➤ *Résultats numériques pour l'effet piézoélectrique direct*

**Tableau 27.** Courant électrique dans la barre piézoélectrique ( $A$ )

	MGS	ANSYS
<b>Barre 2</b>	0.252498E-06	0.2524998E-06

**Tableau 28.** Déplacement du nœud  $P_0$  ( $m$ ) le long de l'axe  $z$

	MGS	ANSYS
$P_0$	0.143261E-4	0.14326E-4

**Tableau 29.** Réactions aux appuis ( $N$ )

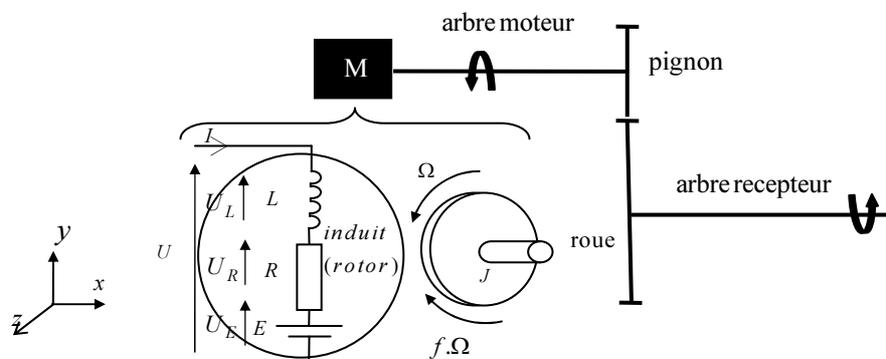
	MGS	ANSYS
$P_1$	[271.474 -156.77]	[271.47 -156.77]
$P_2$	[0 -686.46]	[0.156323E-12 -686.46]
$P_3$	[-271.474 -156.77]	[-271.47 -156.77]

En comparant les résultats obtenus par le langage MGS basé sur les collections topologiques et les transformations et ceux obtenus par le logiciel ANSYS basé sur la méthode des éléments finis, nous remarquons que les résultats sont très proches.

## 2. Etude dynamique d'un réducteur simple étage à denture droite par une approche topologique

### 2.1. Description du système étudié

Nous considérons le réducteur simple étage schématisé par la figure 103. Ce réducteur est formé par deux poutres (arbre moteur et arbre récepteur), les deux arbres sont reliés par un engrenage droit.



**Figure 103.** Réducteur simple étage à denture droite

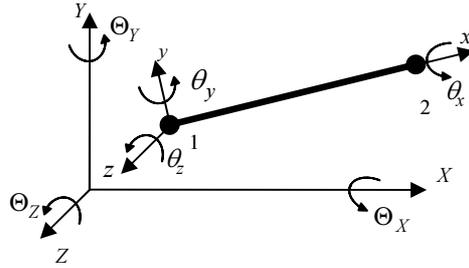
Lors de la modélisation :

- les deux arbres (arbre moteur et arbre récepteur) sont assimilés à deux poutres tridimensionnelles. Chaque élément de poutre a 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud prenant en compte les effets de traction- compression, flexion et torsion) ;
- L'engrenage est assimilé à deux cylindres rigides liés par une raideur d'engrènement. L'engrenage ne comporte qu'un seul degré de liberté de torsion.

#### 2.1.1. Modélisation des deux arbres

Les arbres sont modélisés par des éléments finis de type poutre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud.

L'élément de poutre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud est représenté par la figure 104. Nous utiliserons les expressions données par [Liu et Quesk, 2003] dans le repère local.



**Figure 104.** Élément de poutre à deux nœuds et à six degré de liberté

L'équation de mouvement d'un élément de poutre s'écrit sous la forme suivante :

$$[Mp]\ddot{q} + [Kp]q = F \quad (43)$$

$q$  est le vecteur des degrés de liberté d'un élément de poutre :

$$q = \{\overline{\Delta P}\}_1 = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\}^T \quad (44)$$

$F$  est le vecteur force d'un élément de poutre :

$$F = \{\overline{\tau_p}\}_1 = \{Fx_1 \quad Fy_1 \quad Fz_1 \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad Fx_2 \quad Fy_2 \quad Fz_2 \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2}\}^T \quad (45)$$

$[Kp]$  est la matrice de rigidité d'un élément de poutre :

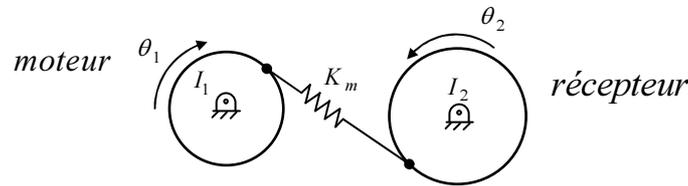
$$[Kp]_l = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 \\ \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ sy. & & & & & & \frac{6EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$[Mp]$  est la matrice de rigidité d'un élément de poutre :

$$[Mp]_i = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 78 & 0 & 0 & 0 & 22\frac{L}{2} & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & -13\frac{L}{2} \\ & & 78 & 0 & -22\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & -13\frac{L}{2} & 0 \\ & & & 70\left(\frac{L}{A}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35\left(\frac{L}{A}\right)^2 & 0 & 0 \\ & & & & 8\left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & -13\frac{L}{2} & 0 & -6\left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ & & & & & 8\left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 13\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & -6\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ & & & & & & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 78 & 0 & 0 & 0 & -22\frac{L}{2} \\ & & & & & & & & 78 & 0 & 22\frac{L}{2} & 0 \\ & & & & & & & & & 70\left(\frac{L}{A}\right)^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 8\left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 8\left(\frac{L}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

### 2.1.2. Modélisation de l'engrenage (Pignon/roue)

L'engrènement est modélisé par des ressorts linéaires agissant sur les lignes d'action (figure 105). Le pignon a un nombre de dents  $Z_1$  et un moment d'inertie  $I_1$ . La roue a un nombre de dents  $Z_2$  et un moment d'inertie  $I_2$ .



**Figure 105.** Engrenage (modèle dynamique proposé par Gregory et al.) (Gregory et al., 1962)

$\theta_1$  le déplacement angulaire du pignon et  $\theta_2$  le déplacement angulaire de la roue.

L'équation de mouvement de l'engrenage s'écrit sous la forme matricielle suivante (annexe 1) :

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{10}K(t) & s_{12}K(t) \\ s_{12}K(t) & s_{20}K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_m \\ C_r \end{pmatrix} \quad (48)$$

avec

$C_m$  le couple moteur

$C_r$  le couple récepteur

$$s_{10} = (rb_1)^2; \quad s_{20} = (rb_2)^2; \quad s_{12} = (rb_1 \cdot rb_2) \quad (49)$$

$rb_1$  et  $rb_2$  représentent respectivement le rayon de base du pignon et de la roue.

$$C_m = (rb_1/rb_2)C_r \quad (50)$$

L'erreur de transmission due à la fluctuation de la raideur d'engrènement ne comporte des composantes que selon l'axe de rotation. Ainsi l'erreur de transmission est donnée par (Harris, 1985):

$$\delta(t) = rb_1\theta_1 + rb_2\theta_2 \quad (51)$$

### 2.1.3. Modélisation du moteur à courant continu

D'après le schéma de la figure 106, un moteur à courant continu est régi par les équations physiques découlant de ses caractéristiques électriques, mécaniques et magnétiques. D'après la loi de Newton, combinée à des lois de Kirchhoff, les équations différentielles du premier ordre d'un moteur électrique s'écrivent sous la forme suivante :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (52)$$

$$e(t) = K_e \Omega(t)$$

avec

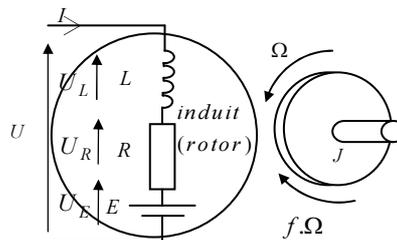
$i(t)$  : le courant traversant le moteur (A);

$u(t)$  : la tension appliquée au moteur (V);

$L$  : l'inductance des enroulements du moteur (mH);

$R$  : la résistance électrique interne du moteur (Ohm);

$e(t)$  : la force contre-électromotrice (symbolisée par un générateur).



**Figure 106.** Schéma équivalent d'un moteur électrique

D'après, le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$j \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_u - C_r \quad (53)$$

$$C_u = K_c i(t) - C_p$$

$$C_r = f \Omega(t)$$

avec

- $j$  : Moment d'inertie de l'axe du rotor ;  
 $\Omega(t)$  : Vitesse de rotation de rotor ;  
 $Cu$  : Couple moteur généré ;  
 $Cp$  : Couples de pertes ;  
 $f$  : Coefficient de frottement visqueux.

## 2.2. Modélisation du système couplé basée sur la méthode des éléments finis MEF

L'assemblage des matrices de masse et de raideur des deux arbres et de l'engrenage conduisent au système suivant :

$$[M_r]\{\ddot{q}\} + [K_r]\{q\} = \{F\} \quad (54)$$

avec :

$[M_r]$  la matrice masse du système couplé donnée par :

$$[M_r] = \begin{bmatrix} M_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{p2} + I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{p2} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$[M_{pi}]$  représente la matrice masse de la poutre  $i$ .

$[K_r]$  la matrice de rigidité du système couplé donnée par :

$$[K_r] = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{p1} + s_{10}K(t) & s_{12}K(t) & 0 \\ 0 & s_{12}K(t) & K_{p1} + s_{20}K(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p1} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$[K_{pi}]$  représente la matrice rigidité de la poutre  $i$ .

L'assemblage se fait au niveau du nœud commun entre le pignon et l'arbre moteur et au niveau du nœud commun entre la roue et l'arbre récepteur suivant le degré de liberté correspondant.

$F$  représente le vecteur des efforts extérieurs et qui contient le couple moteur et le couple récepteur. Ce vecteur est appliqué à l'arbre moteur et à l'arbre récepteur suivant le degré de liberté correspondant.

### 2.3. Graphe KBR

Le réducteur est constitué des éléments élémentaires suivants :

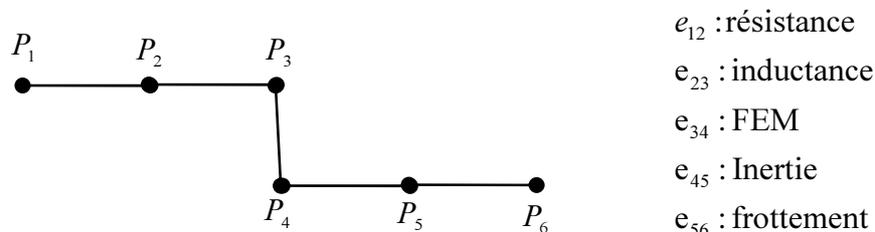
- Le moteur qui peut être décomposé en :
  - Résistance ;
  - Bobine ;
  - FEM : force électromotrice ;
  - Inertie ;
  - Frottement.
- Arbre moteur ;
- Engrenage simple étage à denture droite ;
- Arbre récepteur.

#### 2.3.1. Graphe KBR du moteur

Le moteur électrique peut être décomposé en trois parties :

- La partie électrique : constituée de la résistance et la bobine ;
- La partie électromécanique constituée de la FEM ;
- La partie mécanique intégrant l'inertie et le frottement.

Le graphe topologique présentant le moteur à courant continu est présenté par la figure 107.



**Figure 107.** Graphe topologique d'un moteur à courant continu

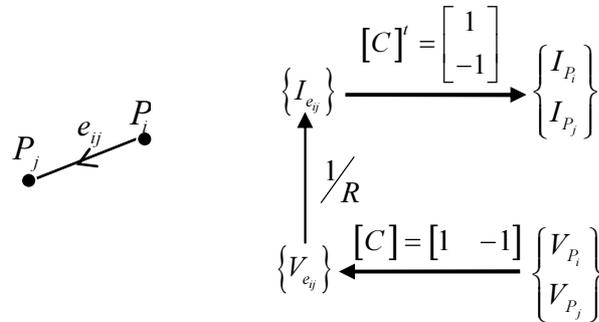
Nous déterminons le graphe KBR de chaque élément du moteur à courant continu. Les équations sont présentées dans l'espace de Laplace avec  $p$  la variable de Laplace.

- pour une résistance (figure 108) : la loi de comportement locale d'une résistance s'écrit sous la forme suivante :

$$U = RI \Rightarrow I = \frac{1}{R} U \quad (57)$$

Nous associons le vecteur  $\begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}$  aux nœuds, avec  $V_i$  et  $V_j$  représentent les potentiels aux nœuds  $P_i$  et  $P_j$ . La matrice d'incidence appliquée aux nœuds permet de fournir la tension

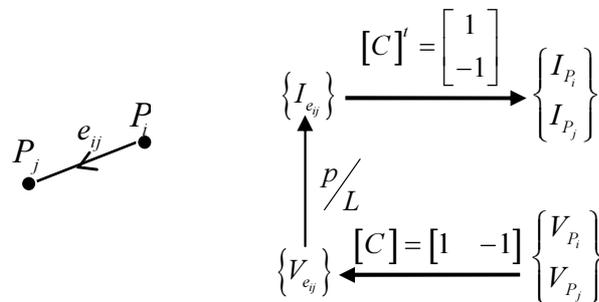
$V_{e_1} = V_1 - V_2$  à la borne de la résistance. Le passage à l'espace dual correspond au courant associé aux nœuds  $\begin{Bmatrix} I_i \\ I_j \end{Bmatrix}$  et à l'arc  $I_{e_{ij}}$ . En ajoutant la loi de comportement locale de la résistance, nous obtenons alors le graphe KBR pour une résistance.



**Figure 108.** Graphe KBR d'une résistance

- pour une bobine (figure 109) : la loi de comportement locale d'une bobine s'écrit après transformée de Laplace sous la forme suivante :

$$U = L \frac{dI}{dt} \Rightarrow U = LpI \Rightarrow I = \frac{1}{Lp} U \quad (58)$$



**Figure 109.** Graphe KBR d'une inductance

- pour une FEM (figure 110) : la loi de comportement locale d'une FEM s'écrit après transformée de Laplace sous la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{K_c} M \\ d\theta/dt = \frac{1}{K_e} U \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} I \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{pK_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ I \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Nous associons le vecteur  $\begin{Bmatrix} M_i \\ V_i \\ M_j \\ V_j \end{Bmatrix}$  aux nœuds, avec :

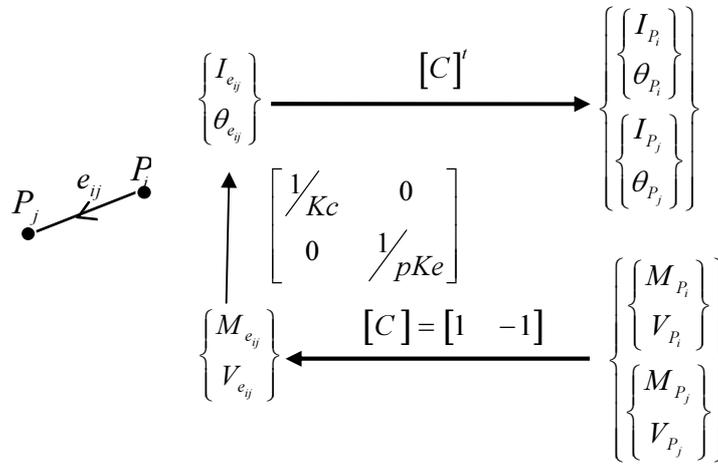
$V_i$  et  $V_j$  respectivement le potentiel aux nœuds  $P_i$  et  $P_j$  ;

$M_i$  et  $M_j$  respectivement le couple aux nœuds  $P_i$  et  $P_j$  ;

La matrice d'incidence appliquée aux nœuds permet de fournir la tension  $\{V_{e_1}\}$  ainsi que le couple  $\{M_{e_1}\}$  fournit par La FEM. Le passage à l'espace dual correspond au courant et à la

rotation associée aux nœuds  $\begin{Bmatrix} I_i \\ \theta_i \\ I_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$  et à l'arc  $\begin{Bmatrix} I_{e_{ij}} \\ M_{e_{ij}} \end{Bmatrix}$ . En ajoutant la loi de comportement

locale de la FEM, nous obtenons alors le graphe KBR pour une FEM.



**Figure 110.** Graphe KBR d'une FEM

- pour une inertie (figure 111): la loi de comportement locale d'une bobine s'écrit après transformée de Laplace sous la forme suivante :

$$d^2\theta/dt^2 = 1/J M \Rightarrow \theta = 1/p^2 J M \quad (60)$$

Nous associons le vecteur  $\begin{Bmatrix} M_{P_i} \\ M_{P_j} \end{Bmatrix}$  aux nœuds, avec  $M_{P_i}$  et  $M_{P_j}$  représentent les couples aux

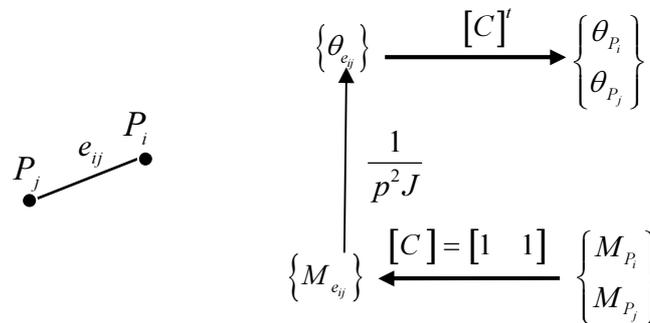
nœuds  $P_i$  et  $P_j$ . La matrice d'incidence appliquée aux nœuds permet de fournir le couple

$\{M_{e_{ij}}\}$  de l'inertie. Le passage à l'espace dual correspond à la rotation associée aux nœuds

$\begin{Bmatrix} \theta_{P_i} \\ \theta_{P_j} \end{Bmatrix}$  et à l'arc  $\{\theta_{e_{ij}}\}$ . En ajoutant la loi de comportement locale de l'inertie, nous obtenons

alors le graphe KBR pour l'inertie.

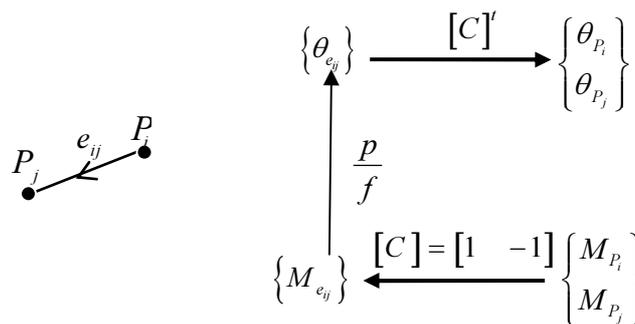
La matrice d'incidence est égale à  $[C]=[1 \ 1]$  puisque nous avons  $\{M_{e_{ij}}\} = \{M_{P_i}\} + \{M_{P_j}\}$  et  $\theta_{e_{ij}} = \theta_{P_i} = \theta_{P_j}$ .



**Figure 111.** Graphe KBR d'une inertie

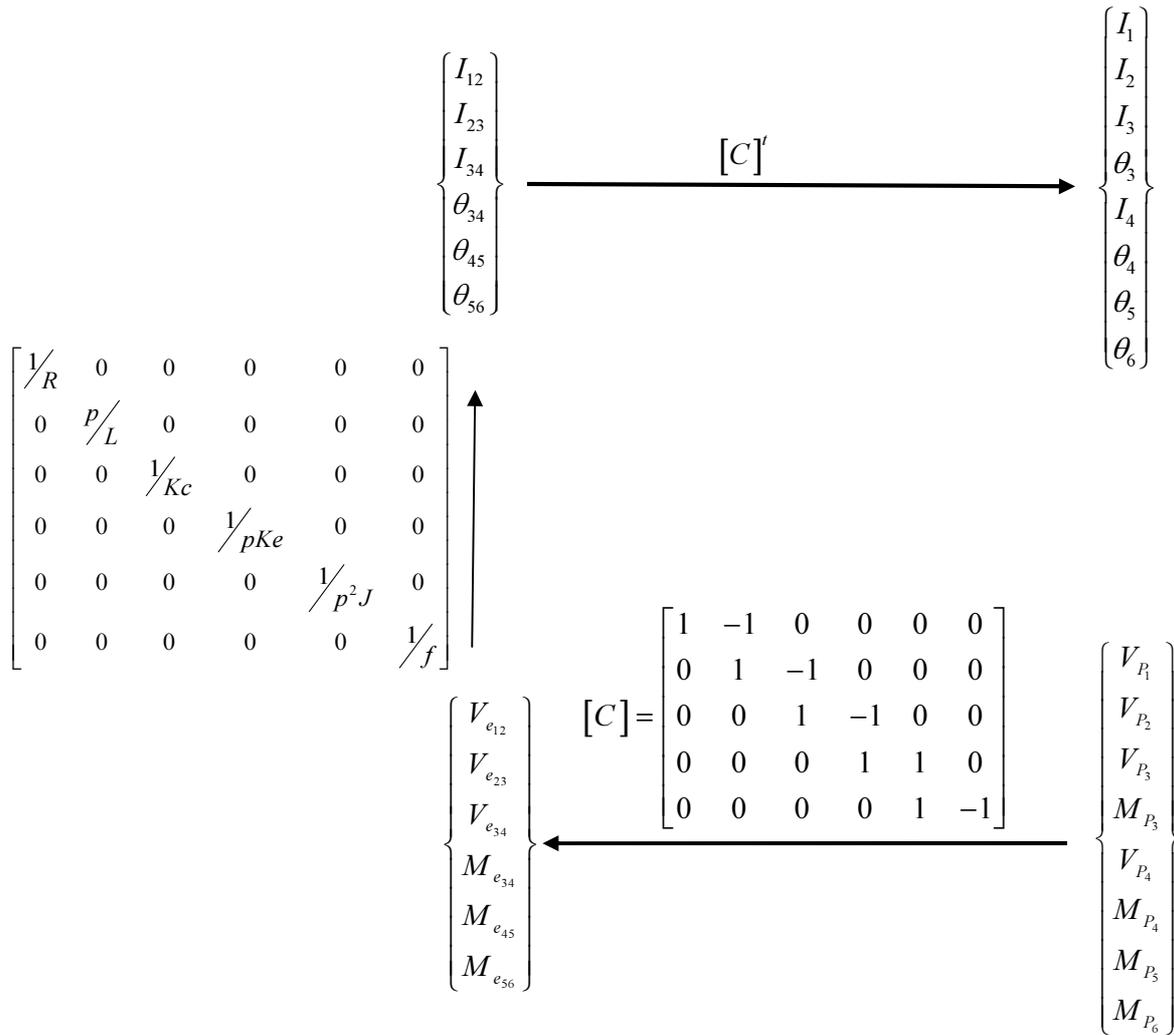
- pour le frottement (figure 112) : la loi de comportement locale d'un frottement s'écrit après transformée de Laplace sous la forme suivante :

$$d\theta/dt = fM \Rightarrow \theta = f/p M \quad (61)$$



**Figure 112.** Graphe KBR d'un frottement

A partir de ces graphes élémentaires, nous déterminons le graphe KBR du moteur à courant continu. Ce graphe est présenté par la figure 113.



**Figure 113.** Graphe KBR du moteur à courant continu

### 2.3.2. Graphe KBR de l'arbre moteur et récepteur : poutre 3D

La loi de comportement locale d'une poutre s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 [M_p] \{ \ddot{\Delta P} \} + [K_p] \{ \overline{\Delta P} \} &= \{ F \} \\
 (p^2 [M_p] + [K_p]) \{ \overline{\Delta P} \} &= \{ F \}
 \end{aligned} \tag{62}$$

La présentation du graphe KBR pour les poutres se limite aux 0 cellules (Figure 114) (présence de moments et de forces).

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} \overline{F} \\ \overline{F} \end{array} \right\}_{P_i} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \overline{F} \\ \overline{F} \end{array} \right\}_{P_j} \\
 \uparrow \\
 \left( p^2 [M'_p] + [K'_p] \right) \\
 \uparrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta P} \\ \overline{\Delta P} \end{array} \right\}_i \\
 \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta P} \\ \overline{\Delta P} \end{array} \right\}_j
 \end{array}$$

**Figure 114.** Graphe KBR d'un élément de poutre 3D

### 2.3.3. Graphe KBR de l'engrenage

La loi de comportement locale de l'engrenage s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{10}K(t) & s_{12}K(t) \\ s_{12}K(t) & s_{20}K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} p^2 I_1 & 0 \\ 0 & p^2 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{10}K(t) & s_{12}K(t) \\ s_{12}K(t) & s_{20}K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} p^2 I_1 + s_{10}K(t) & s_{12}K(t) \\ s_{12}K(t) & p^2 I_2 + s_{20}K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}
 \end{array} \quad (63)$$

De même, la présentation du graphe KBR pour l'engrenage se limite aux 0 cellules (Figure 115).

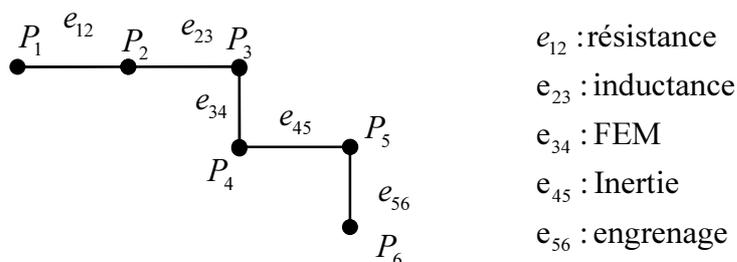
$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} M_i \\ M_j \end{array} \right\} \\
 \uparrow \\
 \begin{pmatrix} p^2 I_1 + s_{10}K(t) & s_{12}K(t) \\ s_{12}K(t) & p^2 I_2 + s_{20}K(t) \end{pmatrix} \\
 \uparrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \theta_i \\ \theta_j \end{array} \right\}
 \end{array}$$

**Figure 115.** Graphe KBR de l'engrenage

### 2.3.4. Graphe KBR du système couplé

#### 2.3.4.1. Cas 1 : Les deux arbres sont rigides

Le graphe topologique représentant le réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides est donné par la figure 116 :



**Figure 116.** Graphe linéaire du réducteur

A partir des graphes KBR élémentaires déterminés précédemment, nous déterminons le graphe KBR du réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides. Ce graphe est donné par la figure 117.

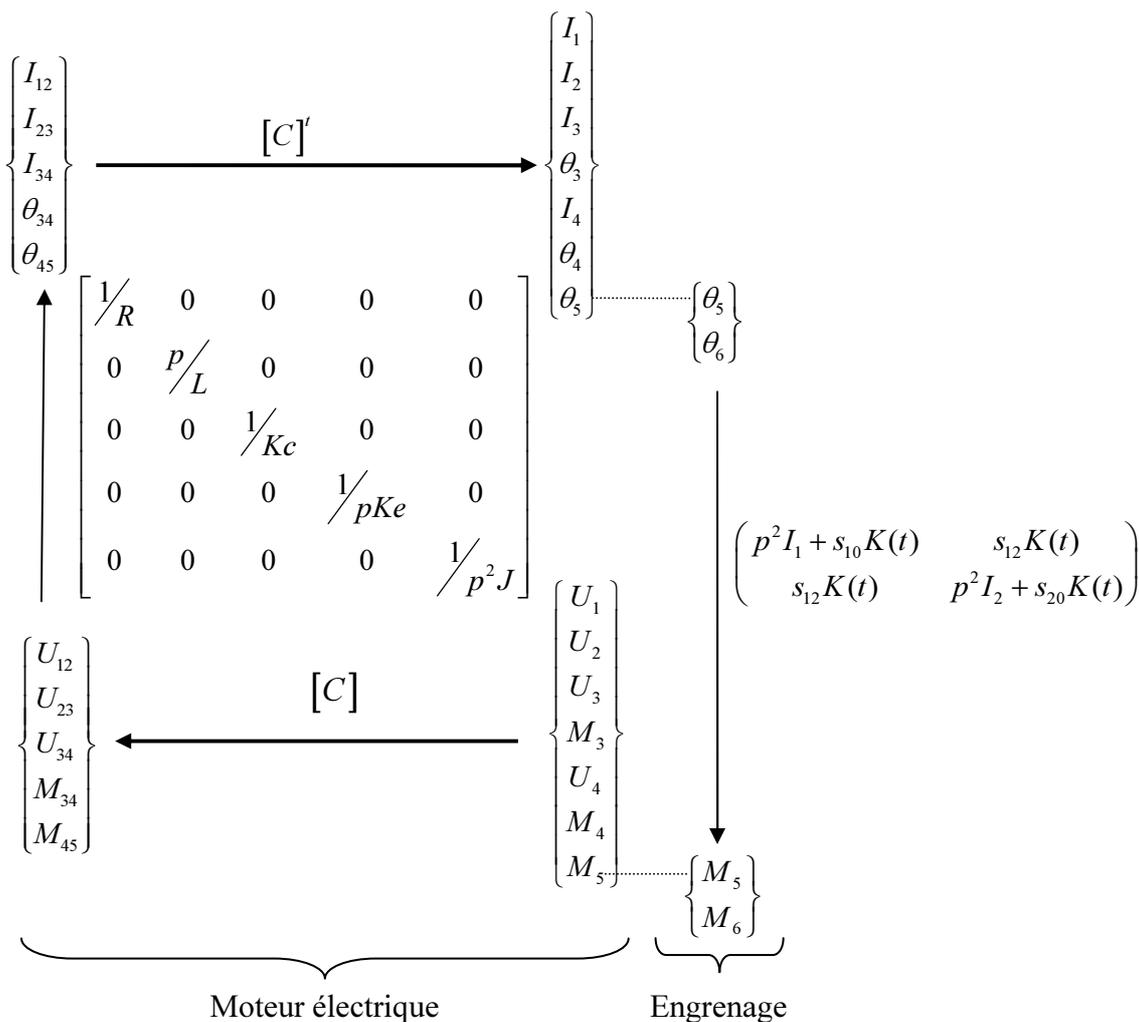


Figure 117. Réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides

2.3.4.2. Cas 2 : Les deux arbres ne sont pas rigides

Le graphe topologique représentant le réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides est donné par la figure 118.

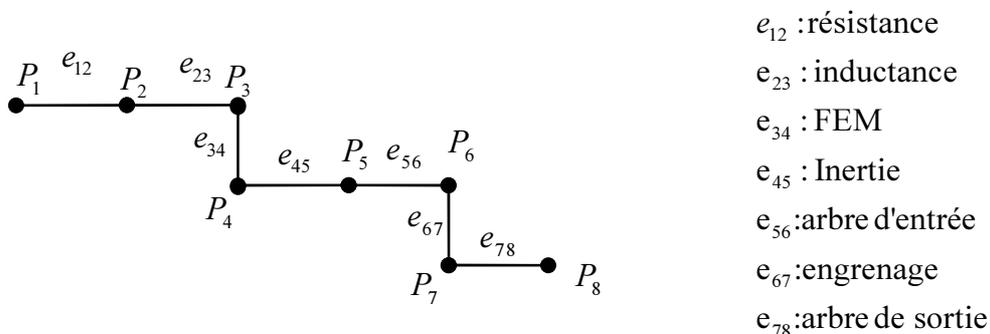
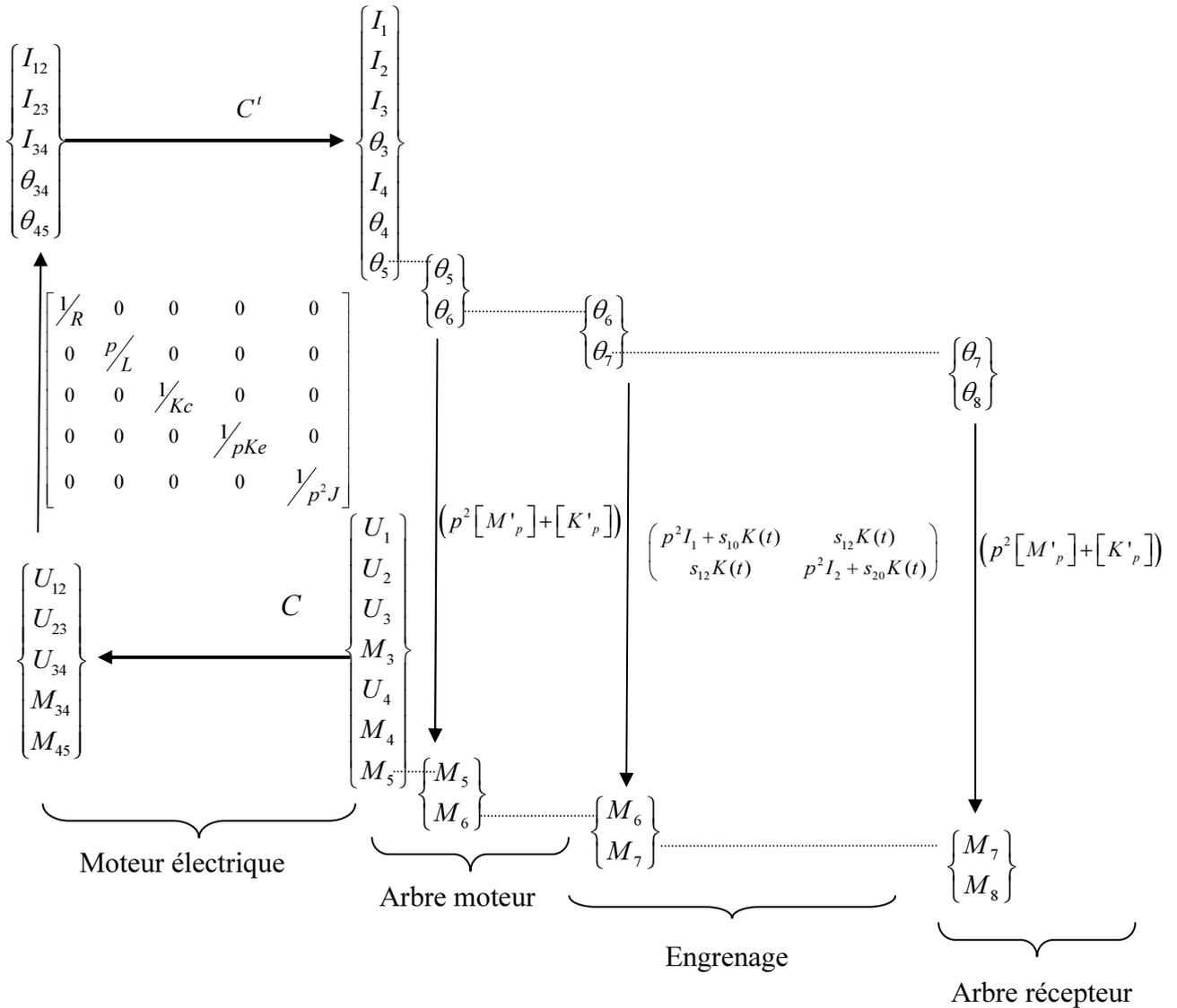


Figure 118. Graphe linéaire du réducteur

A partir des graphes KBR élémentaires déterminés précédemment, on détermine le graphe KBR du réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides. Ce graphe est donné par la figure 119.



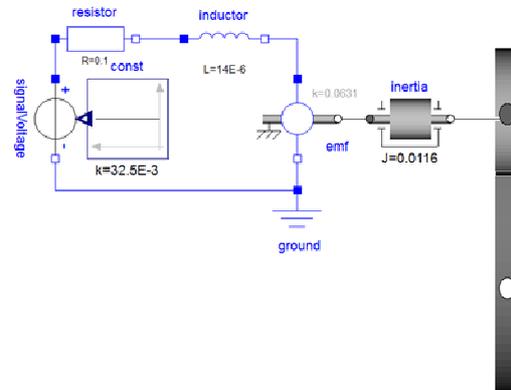
**Figure 119.** Réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides

## 2.4. Modélisation MODELICA

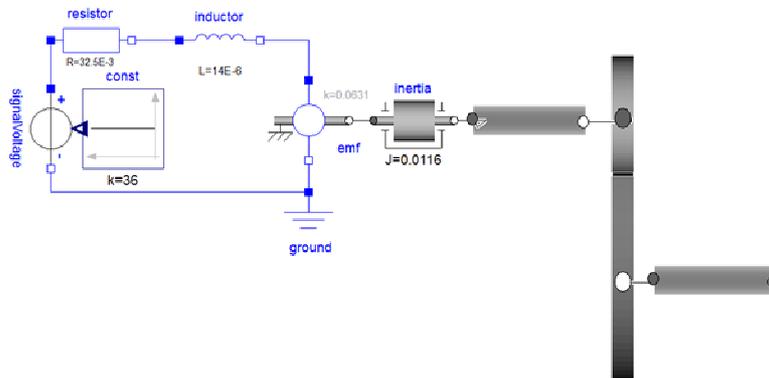
Pour la modélisation dans MODELICA, nous commençons par définir les composantes principales du réducteur non existant dans la bibliothèque MODELICA :

- Réducteur simple étage droit ;
- Arbre (poutre 3D).

La figure 120 présente le modèle MODELICA du réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides et la figure 121 présente le modèle MODELICA du réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides.



**Figure 120.** *Modèle MODELICA du réducteur dans le cas où les deux arbres sont rigides*



**Figure 121.** *Modèle MODELICA du réducteur dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides*

## 2.5. Modélisation MGS

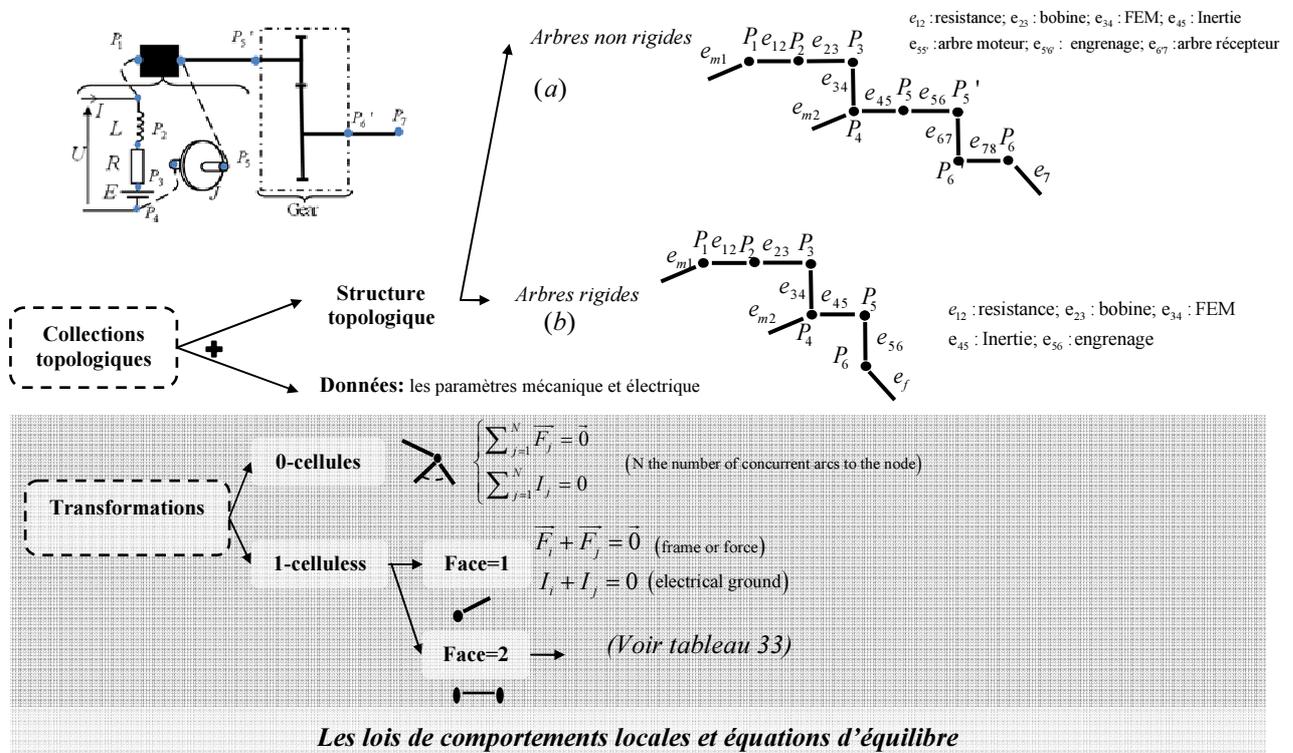
Nous utilisons les cellules de dimension 0 et 1 et nous définissons la loi de comportement locale des différents composants du réducteur.

Le tableau 30 présente un résumé des lois de comportements locales ainsi que les équations d'équilibre des différents composants du réducteur étudié. L'arbre a un seul degré de liberté qui est la rotation (arbre en torsion): les frottements sont négligés.

**Tableau 30.** Lois de comportements locales des différents composants du réducteur simple étage

	Loi de comportement locale	Equations d'équilibre
<b>résistance</b>	$I_{e_{ij}} = 1/R(V_{P_i} - V_{P_j})$	$I_{e_{ij/i}} + I_{e_{ij/j}} = 0$
<b>inductance</b>	$I_{e_{ij}} = 1/Lp(V_{P_i} - V_{P_j})$	$I_{e_{ij/i}} + I_{e_{ij/j}} = 0$
<b>FEM</b>	$I_{e_{ij}} = 1/K_c M_{e_{ij/j}}$ $\theta_{P_j} = 1/Lp(V_{P_i} - V_{P_j})$	$I_{e_{ij/i}} + I_{e_{ij/j}} = 0$ $\overline{M}_{e_{ij/i}} = \vec{0} \text{ et } \theta_{P_i} = 0$
<b>inertie</b>	$\theta_{P_i} = (1/Jp)(M_{e_{ij/i}} + M_{e_{ij/j}})$	$\theta_{P_i} = \theta_{P_j}$
<b>arbre</b> (poutre en torsion)	$\left[ \left( p^2 70 \left( \frac{I_x}{A} \right)^2 + \frac{GJ}{L} \right) \quad - \left( p^2 35 \left( \frac{I_x}{A} \right)^2 + \frac{GJ}{L} \right) \right] \begin{Bmatrix} \theta_{P_i} \\ \theta_{P_j} \end{Bmatrix} = M_{e_{ij/i}}$	$\overline{M}_{e_{ij/i}} + \overline{M}_{e_{ij/j}} = \vec{0}$
<b>engrenage</b> (pignon/ roue)	$\left[ p^2 I_1 + s_{10} K(t) \quad s_{12} K(t) \right] \begin{Bmatrix} \theta_{P_i} \\ \theta_{P_j} \end{Bmatrix} = M_{e_{ij/i}}$	$\overline{M}_{e_{ij/i}} + (Z_i/Z_j) \overline{M}_{e_{ij/j}} = \vec{0}$

Les différentes étapes de modélisation du réducteur en appliquant les collections topologiques et les transformations sont présentées par la figure 122.



**Figure 122.** Modélisation du réducteur par les collections topologiques et leurs transformations

## 2.6. Résultats de simulation

Le tableau 31 présente les paramètres géométriques de l'engrenage et le tableau 32 présente les caractéristiques des deux arbres (moteur et récepteur).

**Tableau 31.** Les paramètres caractéristiques du réducteur (Hbaieb et al.2009)

	Pignon	Roue
Nombre de dents	20	40
Masse (kg)	0.6	2.5
Moment d'inertie (kg.m <sup>2</sup> )	$2.6 \cdot 10^{-4}$	0.0045
Diamètre du cercle de base	0.05	0.11
Module (mm)	3	
Angle de pression (degré)	$\alpha = 20$	
Largeur des dents (mm)	30	
Rapport de conduite	$c = 1.6$	

**Tableau 32.** Les paramètres caractéristiques des deux arbres (moteur et récepteur)

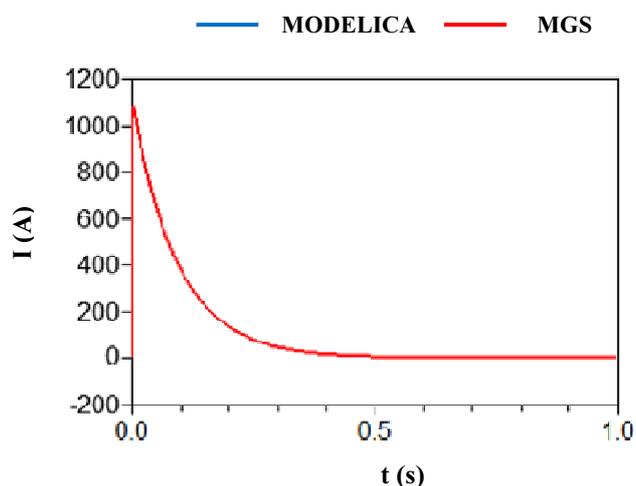
Caractéristique de l'arbre	valeur
Matériau	acier
Module d'Young ( $Mp$ )	$2 \cdot 10^{11}$
Longueur ( $m$ )	0.45
Section ( $m^2$ )	$3.84 \cdot 10^{-3}$
Coefficient de poisson	0.29
Masse volumique ( $kg / m^3$ )	7858

Ce réducteur est entraîné par un moteur électrique à courant continu dont les paramètres caractéristiques sont :  $R = 32.510^{-3} \Omega$  ;  $L = 1410^{-6} H$  ;  $I = 0.0116 kg.m^2$  ;  $K_e = 0.0631 V / rad / s$  et  $K_c = 0.0631 N.m / A$ . Les frottements sont négligés.

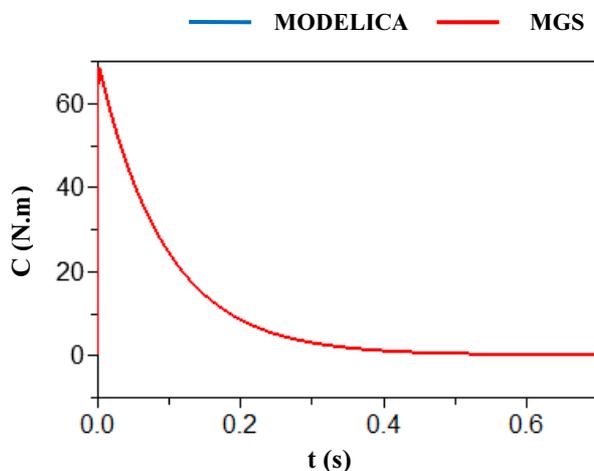
Le système est sollicité avec un échelon de tension de 36 V. nous nous sommes intéressés à déterminer le courant dans le moteur, le couple moteur et la raideur d'engrènement ainsi que la rotation de l'arbre moteur et l'arbre récepteur et l'erreur de transmission dans les cas de deux arbres rigides et en torsion.

Les résultats obtenus par MGS (en rouge) sont comparés par rapport à ceux obtenus en utilisant des objets MODELICA (en bleu). Dans les deux cas, nous constatons que les résultats obtenus sont très proches.

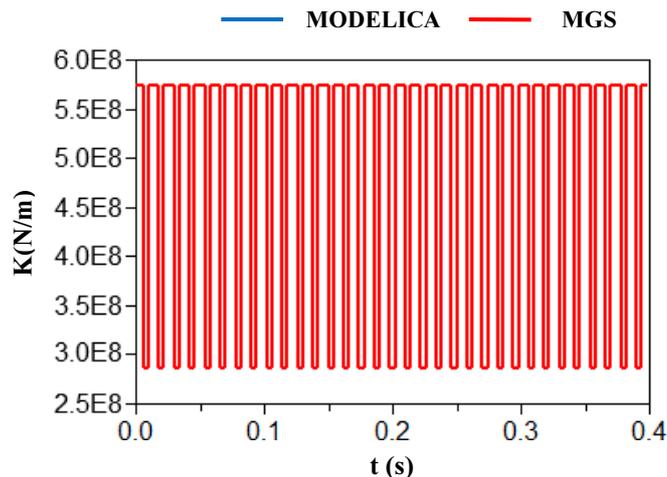
Les figures 123, 124 et 125 représentent respectivement le courant dans le moteur, le couple moteur et la variation de la raideur d'engrènement (Equation du modèle en Annexe 2) [Velex, 1988].



**Figure 123.** *Le courant dans le moteur*

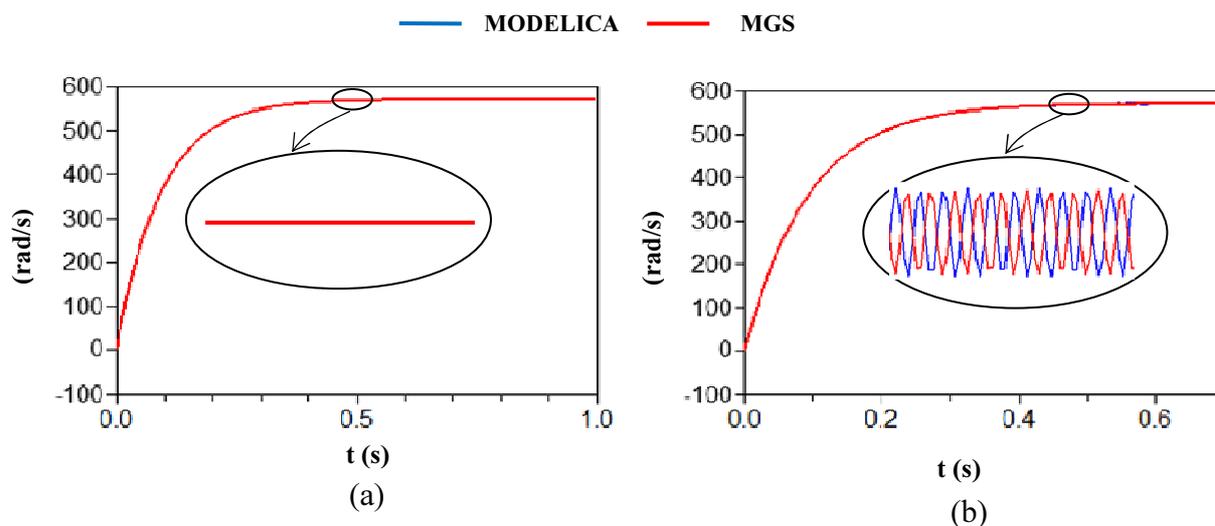


**Figure 124.** *Couple moteur*



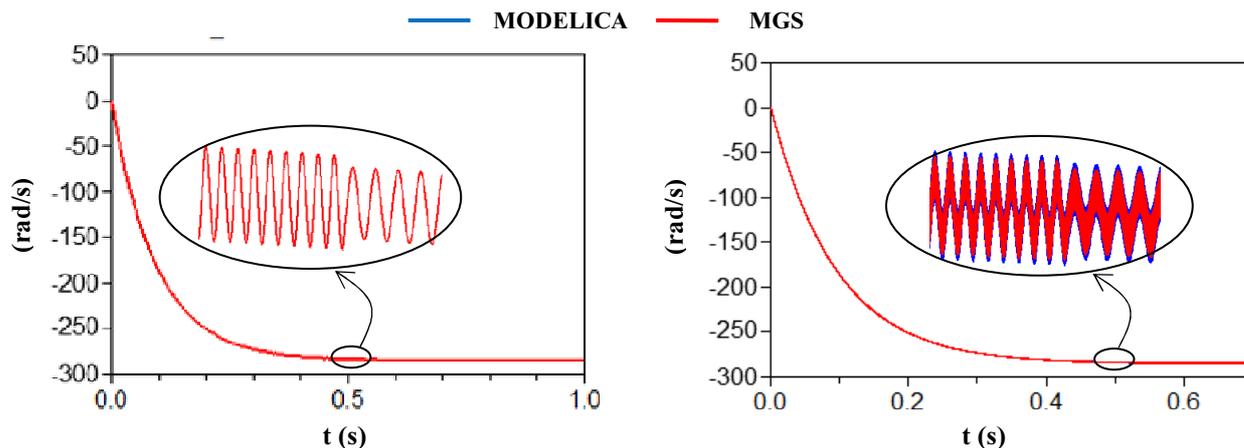
**Figure 125.** Variation de la raideur d'engrènement

La figure 126 représente la vitesse de rotation de l'arbre moteur dans le cas où les deux arbres sont rigides (figure 126 (a)) et dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides (figure 126 (b)). Au régime permanent, la vitesse de rotation est constante dans le premier cas alors qu'elle est périodique dans le deuxième cas ce qui est dû à la souplesse de l'arbre moteur.



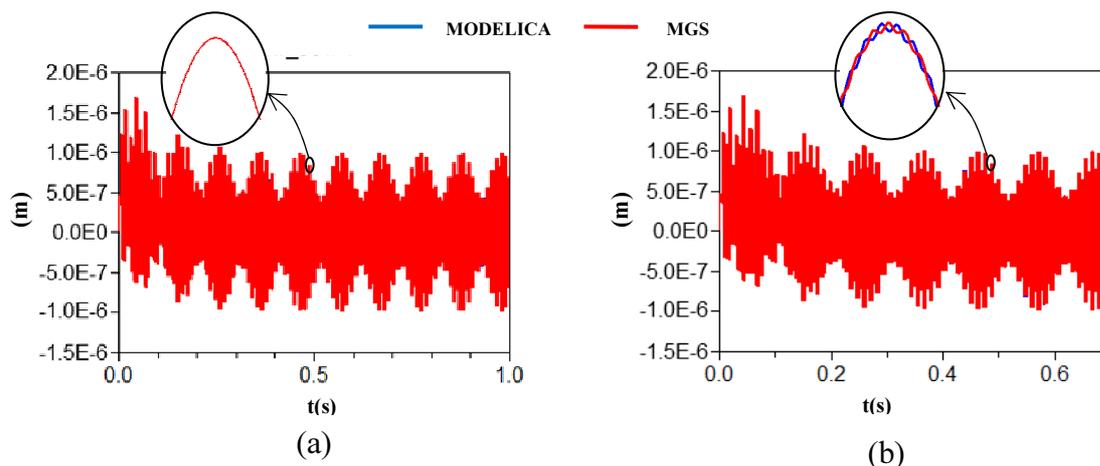
**Figure 126.** Rotation arbre moteur (a) arbre rigide (b) arbre non rigide

La figure 127 représente la vitesse de rotation de l'arbre récepteur dans le cas où les deux arbres sont rigides (figure 127 (a)) et dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides (figure 127 (b)). Dans les deux cas, nous remarquons que la vitesse de l'arbre de sortie dépend du nombre de paires de dents en contact. Cependant, par rapport au premier cas, dans le second le signal présentant la vitesse de l'arbre non rigide est modulé par le signal présentant la vitesse de l'arbre rigide ce qui est dû à la flexibilité de la structure causée par la souplesse des deux arbres.



**Figure 127.** Rotation de l'arbre récepteur (a) arbre rigide (b) arbre non rigide

Finalement, la figure 128 présente l'erreur de transmission dans le cas où les deux arbres sont rigides (figure 128 (a)) et dans le cas où les deux arbres ne sont pas rigides (figure 128(b)). Nous constatons que dans les deux cas, l'erreur de transmission est très faible et dépend de nombre de dents en contact. Par contre, dans le second cas, il apparaît des fluctuations dues à la souplesse des deux arbres.



**Figure 128.** Erreur de transmission

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, les collections topologiques sont appliquées pour la modélisation des systèmes mécaniques plus complexes (stack piézoélectrique, treillis piézoélectrique et réducteur simple étage). Les différents systèmes étudiés sont considérés comme un ensemble des éléments locaux (barre piézoélectrique, barre mécanique, résistance, bobine, ..) liés par une relation d'incidence.

---

# Conclusion générale

---

Dans ce travail nous avons présenté une nouvelle approche topologique pour la modélisation des systèmes multi-physiques. Cette approche est basée sur les notions des collections topologiques et les transformations issues de la topologie algébrique. Nous utilisons les collections topologiques pour présenter la topologie c'est-à-dire la connexion entre les différents constituants d'un système méca(tro)nique et les transformations pour spécifier sa loi de comportement. Cette approche topologique est codée sous MGS (Modèle Générale de Système).

Dans le premier chapitre, nous avons commencé par établir le cadre général de ce travail de thèse. Alors, nous avons présenté un bref aperçu des systèmes mécatroniques (historique, définition, applications et conception). Aussi, nous avons présenté les outils de modélisations qui ont été l'origine du développement des notions de collections topologiques et de transformations tel que les graphes, les complexes simpliciaux et les complexes cellulaires.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté l'approche topologique adoptée dans cette thèse. Cette approche topologique est appliquée en utilisant le langage MGS et elle est basée sur les notions des collections topologiques et leurs transformations. Les différentes étapes de l'application de cette approche topologique sont présentées. Ces étapes sont détaillées dans le cas d'un ressort en traction soumis à une force extérieure en présentant quelques codes MGS ainsi que le système d'équation générées par MGS.

Dans le troisième chapitre, nous avons appliqué cette approche topologique pour la modélisation des structures de barres et de poutres en traitant tout d'abord le cas particulier d'un treillis à structure pyramidale constitué de  $n$  barres et ensuite le cas général de structures de barres (plane et spatiale) et de poutres (plane et spatiale). Dans ce chapitre plusieurs cas sont étudiés tels que treillis à trois barres, portique et ossature spatiale. Les différents résultats sont validés par le logiciel RDM6 et/ ou par MODELICA. L'avantage de notre approche topologique dans la modélisation des structures de barres et de poutres est qu'elle est applicable indépendamment du nombre de barres ou de poutres, des forces ou des moments appliquées aux structures ainsi que du type des liaisons. En effet, nous déclarons les

lois de comportements locales de ces différents éléments et seulement la structure topologique qui varie d'un exemple à un autre.

Finalement dans le quatrième chapitre, nous avons étendu l'application des collections topologiques et leurs transformations à la modélisation des systèmes élémentaires mécatroniques. Deux cas ont été étudiés : le premier cas est l'application de cette approche topologique aux structures piézoélectriques en l'appliquant à un stack piézoélectrique et à un treillis piézoélectrique et le deuxième cas concerne à la modélisation d'un motoréducteur simple étage à denture droite. Les différents résultats sont comparés par rapport à ceux obtenus par le logiciel de calcul et d'analyse par la méthode des éléments finis ANSYS dans le cas des structures piézoélectriques et par le langage MODELICA dans le cas du réducteur simple étage à denture droite. Dans les deux cas, nous considérons le système étudié comme un ensemble d'éléments liés par une structure topologique. Cette structure topologique définit la loi d'interconnexion entre ces éléments. Chaque élément apporte sa propre loi de comportement locale et permettant ainsi l'étude du comportement du système global en fonction de local.

Ce travail s'est limité au cas des systèmes mécaniques (structure de barres et de poutres) et mécatroniques élémentaires (stack piézoélectrique, treillis piézoélectrique et motoréducteur simple étage à denture droite). Cependant, il est nécessaire de prolonger cette approche topologique pour la modélisation des systèmes intégrant tous les domaines de la mécatronique (mécanique, électromécanique, informatique et automatique). En effet les systèmes mécatroniques se caractérisent par leurs caractères multi-domaines et multi-physiques et l'application d'une approche de modélisation unifiée pour ces systèmes constitue un objectif très important. Aussi, il serait intéressant d'appliquer les transformations topologiques de type patches qui permettent le raffinement automatique.

# Annexe 1 : Equation de mouvement de l'engrenage (roue/pignon)

Les équations de mouvement de l'engrenage (pignon/roue) sont obtenues par application du formalisme de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} E_p + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} E_c - \frac{\partial}{\partial \theta_1} E_c = \frac{\partial}{\partial \theta_1} W \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} E_p + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} E_c - \frac{\partial}{\partial \theta_2} E_c = \frac{\partial}{\partial \theta_2} W \end{cases}$$

$E_p$  et  $E_p$  représentent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle,  $W$  le travail des forces :

- Energie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2} K(t) (r_{b_1} \theta_1 + r_{b_2} \theta_2)^2$$

- Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

- Travail de forces extérieures

$$W = C_m \theta_1 + C_r \theta_2$$

L'application des équations de Lagrange permet d'obtenir l'équation de mouvement du réducteur simple étage :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} E_p + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} E_c - \frac{\partial}{\partial \theta_1} E_c = \frac{\partial}{\partial \theta_1} W \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} E_p + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} E_c - \frac{\partial}{\partial \theta_2} E_c = \frac{\partial}{\partial \theta_2} W \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + K(t) r_{b_1} (r_{b_1} \theta_1 + r_{b_2} \theta_2) = C_m \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + K(t) r_{b_2} (r_{b_1} \theta_1 + r_{b_2} \theta_2) = C_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + K(t) (r_{b_1})^2 \theta_1 + K(t) (r_{b_1} r_{b_2}) = C_m \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + K(t) (r_{b_2})^2 \theta_2 + K(t) (r_{b_1} r_{b_2}) = C_r \end{cases}$$

On pose :  $s_{10} = (r_{b_1})^2$  ;  $s_{11} = (r_{b_2})^2$  ;  $s_{12} = (r_{b_1} r_{b_2})$

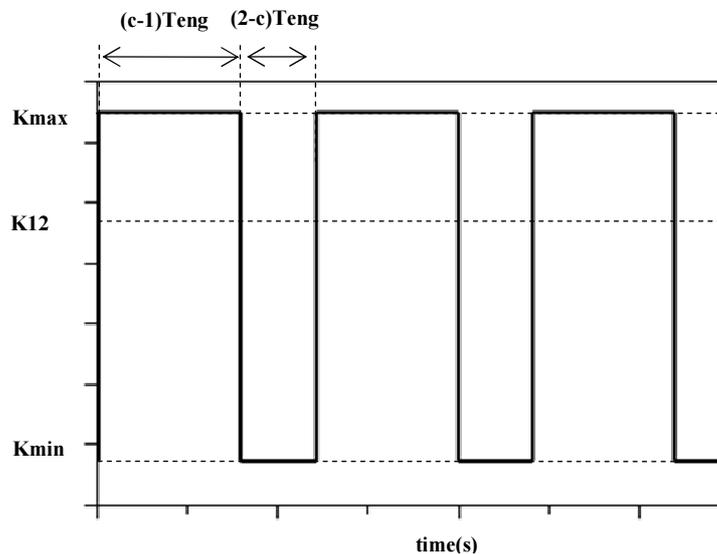
On obtient l'écriture matricielle de mouvement :

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{10}K(t) & s_{12}K(t) \\ s_{12}K(t) & s_{11}K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_m \\ C_r \end{pmatrix}$$

## Annexe 2 : Variation de la raideur d'engrènement

Dans le cas des modèles qui évoluent à une vitesse angulaire constante, la variation de la raideur d'engrènement est périodique de période égale à la période de l'engrènement et elle est donnée par  $T_{eng} = 60/N_1 Z_1$  avec  $N_1$  et  $Z_1$  représentent respectivement la vitesse angulaire et le nombre de dents du pignon.

La variation de la raideur d'engrènement est approximé comme présentée par la figure suivante :



Variation de la raideur d'engrènement  $K(t)$

Dans cette figure,  $c$  représente le rapport de conduite de la transmission (pignon-roue).  $K_{max}$ ,  $K_{min}$  et  $K_{12}$  représentent respectivement les valeurs de la rigidité maximale, minimale et moyenne.

Le développement en série de Fourier de  $K(t)$  donne :

$$K(t) = K_{12} + \frac{\Delta K}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{i} \sin(2i\pi(c-1)) \cos\left(\frac{2i\pi t}{T_{eng}} + (1 - \cos(2i\pi(c-1)))\right) \right] \sin \frac{2i\pi t}{T_{eng}}$$

avec

$$K_{12} = K_{max}(c-1) + (2-c)K_{min}$$

$$\Delta K = K_{max} - K_{min}$$

$$K_{max} = 2K_{min}$$

$$K_{12} = c K \text{ min}$$

La rigidité moyenne d'une paire de dents droites en contact est donnée par l'équation suivante (exprimée en  $N / \mu m / m$ )

$$K_{12} = b / \left( A_1 + \frac{A_2}{Z_1} + \frac{A_3}{Z_2} \right) \text{ Ou}$$

- $b$  est la largeur de denture
- $A_1, A_2, A_3$  sont constantes ( $A_1 = 0.04723, A_2 = 0.15551, A_3 = 0.25791$ ).
- *Expression de la raideur de conduite*

La raideur de conduit est donnée par:  $c = c_1 + c_2$

avec

$$c_1 = \left( 1 + (1/Z_1) \right) / \left( \pi \cos(\alpha) \left( (\sin(\alpha)/2) + \sqrt{\left( (\sin(\alpha)^2/4) + (1/(Z_1^2)) + 1/Z_1 \right)} \right) \right);$$

$$c_2 = \left( 1 + (1/Z_2) \right) / \left( \pi \cos(\alpha) \left( (\sin(\alpha)/2) + \sqrt{\left( (\sin(\alpha)^2/4) + (1/(Z_2^2)) + 1/Z_2 \right)} \right) \right);$$

$\alpha$  : angle de pression.

# Références bibliographiques

---

- Agoston, M., 1976, *Algebraic topology: a first course*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York.
- AFNOR. 2008. *NF E 01-010:2008 – Mécatronique – Vocabulaire*. novembre 2008.
- AFNOR 2009. *XP E 01-013 – Mécatronique – Cycle de vie et conception des produits*. octobre 2009.
- Batoz, J.-L. et Dhatt, G. 1990, *Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 1 solides élastiques*, vol. 2 Poutres et plaques, Hermès.
- Boucher, D., Lagier, M., Maerfeld, C., 1981, Computation of the Vibration Modes for Piezoelectric Array Transducers Using a Mixed Finite Element Perturbation Method, IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics
- Branin, F.H. Jr. 1966. The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus. 1966.
- Björke, Ø. 1995. *Manufacturing systems theory – a geometric approach to connection*. [éd.] Tapir publisher. 1995. ISBN 82-519-1413-2.
- Choley, J-Y. 2006. Mécatronique : une nouvelle démarche de conception des systèmes complexes. *Technologies et Formations*. Delagrave Editions S.A., October 2006, 127, pp. 29-35.
- Choley, J-Y., Penas, O. et Iizuka, B. 2009. *Définition du CDC type d'un produit mécatronique*", *Projet Outils de Modélisation Mécatronique*. s.l. : Pôle Mov'eo, 2009.
- Choley, J.Y., 2008, La mécanique devient ... mécatronique, Les lundis de la Mécanique – Mécatronique et capteurs : évolutions et perspectives – Mantes-la-Jolie
- Combastel C., Raka S. 2009. *Méthodologie de Pré-Dimensionnement*", *Projet Outils de Modélisation Mécatronique*. s.l. : Pôle Mov'eo, 2009.
- Cohen, J., 2004, *Intégration des collections topologiques et des transformations dans un langage fonctionnel*. PhD thesis, University of Evry Val d'Essonne, 2004.
- Euler, L. 1741. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. St. Pétersbourg : Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 1741. pp. 128-140. Vol. 8.
- Eynard, B., et al. 2004. UML based specifications of PDM product structure and workflow. *Computers in Industry*. 2004, Vol. 55, (3), pp. 301–316.
- Elmqvist, H. 1978. *A structured model language for large continuous systems*. Thèse, Institute of Technology. Lund : s.n., 1978. Suède.

- Fritzson, P. 2009. Introduction to Object-Oriented Modeling and Simulation with OpenModelica. *IDA - The Department of Computer and Information Science*. [En ligne] 2009.  
<http://www.ida.liu.se/~pelab/modelica/OpenModelica/Documents/ModelicaTutorialFritzson.pdf>.
- Firestone, F. 1933. *A New Analogy Between Mechanical and Electrical Systems*. Melville : Journal of the Acoustical Society of America, 1933. pp. 249-267. Vol. 4. doi:10.1121/1.1915605.
- Giavitto, J.-L. , Godin, C. , Michel O., Prusinkiewicz P., 2002, *Modelling and Simulation of biological process in the context of genomics*, chapter “Computational Models for Integrative and Developmental Biology”, Hermes.
- Hatcher, A., 2002, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, disponible sur <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- IEEE standard of piezoelectricity, 1988, *Standards Committee of the IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society, USA*
- Japan Trade Mark Kohhoku, 1971, Class 9, Shou 46-32713, 46-32714, Jan. 1971.
- Kron, G, 1963, *Diakoptics; the piecewise solution of large-scale systems*. London : MacDonald
- Klette, R., 2000, *Cell complexes through time*, In *Proc. Vision Geometry IX*, pages 134–145, San Diego, CA, USA.
- Kadima, H. 2009. *SysML : un profil UML2 pour l'ingénierie système*. s.l. : Ellipses marketing, 2009.
- Liu, G. R. and Quek, S., 2003, *The Finite Element Method: A Practical Course*, Boston: Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Maquin, D., 2003, *Eléments de Théorie des Graphes et Programmation Linéaire*, disponible sur <http://cours.ensem.inpl-nancy.fr/cours-dm/graphes/Graphesnew.pdf>
- Munkres J.R., 1984, *Elements of Algebraic Topology*. Perseus Books.
- Modelica. Modeling of Complex Physical Systems. *Modelica*. [En ligne] <http://www.modelica.org/>.
- Modelica Association. Modeling of Complex Physical Systems. *Modelica*. [En ligne] <http://www.modelica.org/>.
- Mori, T., 1969, “Mechatronics,” Yasakawa Internal Trademark Application Memo 21.131.01
- Plateaux, R., Penas, O., Rivière, A., Choley, J.-Y., 2007, *A need for the definition of a topological structure for the complex systems modelling*, Conception et Production Intégrées CPI'2007 – Rabat, Maroc.
- Plateaux, R., 2011, *Continuité et cohérence d'une modélisation des systèmes mécatroniques basée(s) sur une structure topologique*, PhD thesis, Institut Supérieur de Mécanique de Paris

- Plateaux, R., et al. 2009. *Towards an Integrated Mechatronic Design Process*. ICM. Malaga : IEEE, 2009. DOI : 10.1109/ICMECH.2009.4957237.
- Pop, A., Akhvlediani, D. and Fritzson, P. *Towards Unified System Modeling with the ModelicaML UML Profile*: Proceedings of the 1st International Workshop on Equation-Based Object-Oriented Languages and Tools.
- Roth, J. P. 1955. An Application of Algebraic Topology to Numerical Analysis: On the Existence of a Solution to the Network Problem. *Proc. Nat. Acad. Sciences*. 1955, Vol. 41, pp. 518-521.
- Roth, J.P. 1955. The Validity of Kron's Method of Tearing. *Proc. National Acad. Sciences*. 1955, Vol. 41, pp. 599-600.
- Spanier, E. H., 1966, *Algebraic topology*, Springer.
- Shai, O., 2001a, *Combinatorial Representations in Structural Analysis*. Computing in Civil Engineering , Vol. 15, No. 3, pp. 193-207.
- Shai, O., 2001b, *Deriving Structural Theorems and Methods Using Tellegen's Theorem and Combinatorial*. International Journal of solids and Structures , Vol. 38, pp. 8037-8052.
- Shai, O., 2001c, The Multidisciplinary Combinatorial Approach and its Applications in Engineering. AIEDAM - AI for Engineering Design, Analysis and Manufacturing , Vol. 15, No. 2, pp.109-144.
- SysML. 2006. System modeling language (SysML) specification. Version 1.0 , Draft. OMG document ad/2006-03-01. *SysML*. [En ligne] 2006. <http://www.sysml.org/>  
<http://www.omgsysml.org/>.
- Sass, L. 2004. *Symbolic Modeling of Electromechanical Multibody Systems*. Louvain : s.n., 2004. Thèse de l'Université catholique de Louvain. hdl: <http://hdl.handle.net/2078.1/5194>.
- Spicher, A., Michel, O., 2007, *Declarative modeling of a neurulation-like process*, *BioSystems*, 87, 281-288.
- Spicher A., 2006, Transformation de collections topologiques de dimension arbitraire. Application à la modélisation de systèmes dynamiques, PhD thesis, University of Evry.
- Sigward, E., 2002, *Introduction à la théorie des graphes*, disponible sur <http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes/Graphes.pdf>
- The MGS home page, web page <http://www.ibisc.univ-evry.fr/~mgs/>
- Turki, S. 2008. *Ingénierie système guidée par les modèles : Application du standard IEEE 15288, de l'architecture MDA et du langage SysML à la conception des systèmes mécatroniques*. s.l. : Université du Sud Toulon-Var, 2008.
- Whitehead, J. H. C., 1949, *Combinatorial homotopy. I*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 55, 1949,p. 213-245

- Yannou, B., Jankovic, M. et Nguyen Van, T. 2008. Diversité industrielle de déploiement des projets de conception. [éd.] Lavoisier. *La conception industrielle de produits (volume2) - Spécifications, déploiement et maîtrise des performances*. s.l. : Hermès, 2008.
- Yaskawa Electric Corporation, 1915, est une entreprise japonaise créée en 1915 et dont le siège se trouve dans la ville de Kitakyushu, Prefecture de Fukuoka (<http://www.yaskawa.co.jp/en>).
- Velex P. Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles. Thèse de doctorat. Institut National de Sciences Appliquées de Lyon : Villeurbanne. 1988.P 188.
- HARRIS S. L. Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears. Institution of Mechanical Engineering, Vol. 172, p. 87-1 12.1958
- HBAIEB R., CHAARI F., FAKHFAKH T., HADDAR M., Investigation of influence of load and velocity on dynamic response of a single stage spur gear system derived by an electric motor, 3ième Congrès International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques CMSM'2009.
- R. Gregory, S. Harris, R. Munro, Dynamic behaviour of spur gears, Applied Me-chanics Group 178 (8) (1962) 207-221.

## **Résumé :**

Cette thèse se focalise sur l'application d'une approche topologique pour la modélisation des systèmes mécatroniques. Cette approche permet de dissocier la topologie et la physique afin d'avoir un modèle unifié de représentation de toute la physique d'un système mécatronique.

L'approche topologique développée est codée sous le langage MGS (Modèle Général de Système). Ce langage intègre de nouveaux types de valeurs appelées les collections topologiques. Les collections topologiques permettent la représentation de l'état d'un système dynamique et elles sont manipulées par des transformations. Dans cette approche, les collections topologiques sont utilisées pour présenter la topologie du système à étudier c'est à dire la loi d'interconnexion de ses différents composants et les transformations pour spécifier la loi de comportement locale de chacune de ces composantes. Cette approche topologique est appliquée tout d'abord aux structures de barres planes et spatiales et elle est généralisée par la suite aux structures de poutres planes et spatiales. Finalement, elle est étendue à la modélisation des systèmes mécaniques plus complexes en étudiant le cas des structures piézoélectriques (stack piézoélectrique et treillis piézoélectrique) et le cas d'un réducteur simple étage à denture droite.

Etant donné les bons résultats obtenus, il serait intéressant d'étendre ce travail aux systèmes mécatroniques plus complexes en intégrant l'informatique et l'automatique.

*Mots-clés :* systèmes mécatroniques, approche topologique, collections topologiques, transformations, graphe KBR, langage MGS.

## **Abstract :**

This thesis focuses on the application of a topological approach for the modeling of mechatronic systems. This approach makes it possible to separate the topology and the physics in order to have a unified representation model for all the physics of mechatronic systems.

The developed topological approach is coded in the MGS language (General System Model). This language includes new types of values called topological collections. Topological collections allow the representation of the state of a dynamic system and they are manipulated by transformations. In this approach, the topological collections are used to present the topology of the studied system that is to say the interconnection law of its components and transformations are used to specify the local behavior law of each of these components. First of all, this topological approach is applied to planar and space bar structures and then generalized to planar and space beam structures. Finally, it is extended to the modeling of complex mechanical systems by studying the case of piezoelectric structures (piezoelectric stack and piezoelectric truss structure) and the case of a single stage spur gear.

Since this work achieved good reliable results, it would be interesting to extend this approach to more complex mechatronic systems by integrating computers and automatic.

*Keywords:* mechatronic systems, topological approach, topological collections, transformations, KBR graph, MGS language.