

Séparation Intégrale Quadratique et Applications en Commande Robuste

Dimitri Peaucelle

▶ **To cite this version:**

Dimitri Peaucelle. Séparation Intégrale Quadratique et Applications en Commande Robuste. Automatique. Universite Toulouse III Paul Sabatier, 2014. tel-01102186

HAL Id: tel-01102186
https://hal.science/tel-01102186

Submitted on 14 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Séparation Intégrale Quadratique et Applications en Commande Robuste

Dimitri Peaucelle

Habilitation à diriger des recherches
de l'Université de Toulouse

Soutenue le 5 décembre 2014

Jury constitué de
Patrick Danès (président),
Philippe Chevrel, Yann Le Gorrec, Gérard Scorletti (rapporteurs),
et Denis Arzelier.

Remerciements

à Philippe Chevrel, Yann le Gorrec et Gérard Scorletti d'avoir accepté de rapporter sur ce manuscrit, pour leur lecture attentive et leurs commentaires intéressants et fort plaisants,

à Patrick Danès qui a présidé le jury et à Denis Arzelier qui a joué le rôle du "parrain" pour cette habilitation,

aux collègues du LAAS et d'ailleurs qui m'ont épaulé dans cet exercice imposé,

aux copains qui rendent la vie agréable,

à Eve, je t'aime.

Introduction

Il y a tellement d'autres choses. Et pourtant, je me concentrerai sur une seule : la séparation intégrale quadratique. Ce manuscrit n'est pas un résumé de mes travaux de recherche effectués cette dernière quinzaine années.

Un exercice intéressant aurait été de reconstituer la cohérence entre toutes mes publications. Voire de parler des résultats qui sont aux interstices. Ceux qui s'obtiennent par combinaison de résultats existants et que l'on garde pour soi pour ne pas lasser les reviewers. Une autre piste aurait été de retracer mon activité de développement de logiciels. Ce serait d'ailleurs une entrée judicieuse pour parler des interstices qui, s'ils ne sont pas publiés, sont en partie codés. Mais j'ai bien essayé d'écrire une documentation technique en 2002 [191] et l'exercice n'est pas épanouissant. Un autre cheminement de pensée aurait pu être celui des applications. J'ai eu la très grande chance de pouvoir confronter mes résultats théoriques à des cas industriels. Cela à donné lieu à de nombreux rapports techniques [5, 6, 7, 8, 10, 9, 14, 11, 13, 12, 16, 17, 15, 170, 171, 21, 193, 173, 170, 171] et même une loi de commande testée par mon doctorat Razvan Luzi en conditions réelles sur un satellite [132]. J'aurai aussi pu parler d'autres activités professionnels telles que l'enseignement [22, 20, 47, 163, 164, 23, 24, 168, 166, 167, 169, 186, 172], mais j'ai choisi une autre voie.

Je souhaite profiter de l'exercice imposé de l'habilitation à diriger des recherches pour entrer dans les détails techniques d'une méthodologie sur laquelle je travaille depuis des années. Une approche théorique que je nomme la séparation intégrale quadratique (IQS). Je reviendrai en détail sur cette approche tout au cours du manuscrit. Mais, succinctement, elle permet d'unifier dans une méthodologie unique nombre de résultats existants et d'en générer de nouveaux, sans avoir à recourir à des manipulations mathématiques que l'on pourrait qualifier d'astuces de calcul. L'approche IQS permet par l'étude des équations caractérisant les systèmes, de générer de façon systématique, informatisable, des conditions, testables numériquement, prouvant un grand nombre de propriétés. Par la suite, les tests numériques en question seront exclusivement ceux de la programmation semi-définie (SDP) [148] et les conditions seront des inégalités matricielles linéaires (LMI), [38, 60].

Les contributions pour lesquelles je suis le plus reconnu, ou du moins le plus cité, ont trait à une technique publiée en 2000, l'année de ma thèse, [178]. Elle est inspirée de deux articles parus l'année précédente [150, 152] et consiste à faire apparaître des degrés de liberté nouveaux dans des formules mathématiques existantes. De par sa simplicité et son efficacité, la technique a été très souvent reprise. Parmi les auteurs l'ayant exploitée très tôt, je tiens à mentionner Yoshio Ebihara [55, 56] avec lequel une coopération s'est nouée et continue jusqu'à ce jour. Nous avons longtemps eu différentes appréciations sur la technique. Quand j'insis-

tais sur la création de variables additionnelles, lui se focalisait sur l'accroissement des tailles des contraintes (*"dilated LMI"*). Cependant, l'un comme l'autre, nous étions persuadés que l'approche ne pouvait se résumer à une astuce technique issue du lemme d'élimination, ou du lemme de Finsler, [224]. Prochainement paraîtra aux éditions Springer un ouvrage co-écrit avec Yoshio Ebihara et Denis Arzelier, entièrement consacré à cette approche que nous nommerons dorénavant l'approche par S-variables en hommage à la S-procédure de Yakubovitch [255]. Pour en résumer à grands traits les caractéristiques, l'approche par S-variables est bien adaptée à l'analyse robuste des systèmes avec incertitudes de type polytopique, ainsi qu'à la synthèse de correcteurs devant respecter certaines contraintes. L'approche par S-variables permet de réduire le pessimisme de conditions d'analyse existantes au prix d'une augmentation de la complexité numérique. Dans le livre [58] nous illustrons le compromis entre réduction du pessimisme et accroissement de la complexité, mais surtout nous donnons les clés pour comprendre les raisons fondamentales des améliorations, et décrivons les méthodologies à mettre en oeuvre en terme de programmation pour limiter au mieux la complexité. Ces méthodologies de programmation sont une version améliorée de [165] et ont été codées de façon systématique dans R-RoMulOC [196]. A noter que l'article [165] expose également comment combiner les S-variables avec la séparation intégrale quadratique dont ce manuscrit d'habilitation à diriger des recherches fait l'objet. J'avais initialement prévu de consacrer une partie du manuscrit à cette combinaison S-variables versus séparation intégrale quadratique, mais pour ne pas compliquer le document ce chapitre a finalement été supprimé.

Si j'évoque ainsi longuement l'approche par S-variables, c'est que ce cadre de travail a mis en évidence certains avantages des représentations par équations implicites, autrement dit, des modèles descripteurs. Dès [48] on peut noter que les S-variables et modèles descripteurs sont des outils mathématiques s'associant sans difficulté. C'est sous le nom de *"descriptor approach"* qu'Emilia Fridman fait référence à la méthode [82, 83]. Mais mieux que cela, dans un des tout premiers résultats se rapportant aux S-variables dû à Alexandro Trofino [243] (étendu par la suite dans [46] et plus récemment dans [244]), on découvre que cette combinaison S-variables et systèmes descripteurs permet d'aborder les représentations polynomiales, voire rationnelles, comme si les modèles étaient affines. Ce résultat se retrouve également dans [136, 37]. A peu de frais, nombre de problèmes considérés comme complexes se réduisent au cas le plus simple. Une justification de ces résultats est à trouver dans le lien entre S-variables et la technique des sommes-de-carrés pour les polynômes positifs [194]. D'ailleurs, comme pour les représentations par sommes-de-carrés, la technique permet de construire des suites de relaxations au pessimisme garanti pour être décroissant. En résumé, les éléments de la suite de relaxations sont obtenus en appliquant l'approche par S-variables à des modèles (nécessairement descripteurs) incorporant un nombre croissant de dérivées des mêmes équations différentielles. L'idée de base proposée dans [190] a été généralisée dans [59, 185, 57]. Elle a égalent permis de construire des résultats forts pour les systèmes discrets périodiques, dans le cadre de la thèse de Christophe Farges que j'ai co-encadrée avec Denis Arzelier [65], résultats par la suite étendus aux systèmes discrets périodiques à mémoire dans la thèse de Jean-François Tregouët [234] (co-encadrée elle aussi avec Denis Arzelier). Un exposé complet et détaillé de la technique employée est donné dans l'ouvrage à paraître [58]. A la lecture de ce résumé des résultats de l'approche par S-variables, on pourrait se dire que les modèles affines descripteurs sont la clé de toutes choses. Que les représentations linéaires-fractionnaires (LFT) [261, 51],

aussi appelées formes M-Delta ou formes standard, et communément admises pour représenter des polynômes et des fractions rationnelles, n'ont plus d'utilité. Mon postulat est qu'une telle affirmation est bien évidement fausse. Cependant, il convient de remettre au goût du jour les techniques classiques dédiées aux LFT, et en particulier de les adapter elles aussi au cas des systèmes descripteurs. C'est le principal objectif de ce manuscrit.

A ce stade de l'introduction, il est utile de préciser les grandes lignes de mon projet de recherche. Projet que je décris dans mes rapports au comité national de la recherche scientifique et que je remets au goût du jour au fur et à mesure de l'avancée des connaissances. Mon domaine scientifique de départ est la commande robuste des systèmes linéaires incertains invariants dans le temps (LTI). Or, depuis les travaux de Lur'e, il est admis que la modélisation incertaine est une façon d'aborder certains systèmes non-linéaires. Incertitudes bornées en norme et non-linéarités de secteur sont deux facettes d'une même pièce qui, du point de vue des résultats théoriques, se traduit par une contrainte H_∞ ou le critère du cercle. Mon projet de recherche est d'aborder les systèmes non-linéaires et variants dans le temps avec les méthodologies issues de la commande robuste. Pour ce faire, le cadre de travail de la modélisation LFT [51] est à mon sens le mieux adapté. D'autant qu'il rend compte par construction du principe central de la commande automatique à savoir la boucle fermée. Ce qui suit concernant mes travaux en commande adaptative en est une illustration.

Depuis 2004, dans le cadre de coopérations bilatérales co-financées par le CNRS en France et alternativement par l'académie des sciences et le fond pour la recherche de base en Russie, je me suis intéressé à la commande adaptative directe. Cette structure de commande, non-linéaire par construction, et dont les principes ont été élaborés il y a maintenant quarante ans [80, 81, 128, 146, 79, 125], n'avait pas été analysée avec les techniques modernes de la commande robuste. Non que la robustesse n'ait été abordée, c'est même une question centrale de beaucoup de travaux en commande adaptative [29, 73, 101, 104, 107, 123, 145, 153, 204, 245, 105, 126]. Mais l'étude de la commande adaptative n'a quasiment pas été envisagée avec les outils techniques que sont les LMI et la programmation semi-définie (hormis [253, 32, 33]), ni avec le point de vue de garantir avec des tests numériques réalisables que, pour des ensembles d'incertitudes donnés, les performances des systèmes bouclés sont guaranties. Nombre de travaux en robustesse de la commande adaptative concluent que sous certaines hypothèses, souvent non vérifiables en pratique, la stabilité est assurée pour toute incertitude, même non-bornée. Dans ce domaine, ma contribution a été d'exploiter les liens entre commande adaptative directe et passivité, propriété équivalente à la robustesse vis-à-vis d'incertitudes positives réelles et pour laquelle existent des formulations LMI bien connues. Ainsi, dans le cas de la stabilisation de systèmes linéaires, les hypothèses classiques telles que la condition pour le système à être à hyper minimum de phase, sont non seulement testables numériquement par LMI [188], mais en plus correspondent à un cas où la synthèse de correcteurs par retour de sortie statique est un problème LMI. C'est à dire que dans le cas le plus simple, systèmes LTI sans incertitude, non seulement la synthèse de lois non-linéaires adaptatives classiques peut être systématisée, mais elle peut tout aussi bien être remplacée par une loi de commande linéaire bien plus simple et aisément calculable. Pour des cas plus complexes, par exemple pour le cas de systèmes avec incertitudes, rien d'aussi affirmatif ne peut être conclu. Mais les travaux effectués avec mes collègues ont permis de construire des conditions LMI pour la synthèse de commandes adaptatives avec guaranties de robustesse [189, 192]. Une autre contribution a été de concevoir la

commande adaptative dans le but de limiter la saturation d'actionneurs. Contrairement au point de vu originel de la commande adaptative de type gradient qui fait d'autant plus croître les gains de rétroaction que l'erreur de sortie est grande, nous avons proposé dans [133] de faire l'inverse. La loi adaptative que nous avons proposée abaisse le gain de commande quand le système est loin de son fonctionnement nominal, tout en gardant une commande aggressive et précise au voisinage de l'équilibre souhaité. Outre le principe de cette loi, la contribution a été de donner des conditions LMI pour sa synthèse, avec pour seule hypothèse de départ qu'il existe une loi LTI stabilisante au voisinage de l'équilibre. Cette hypothèse relâche fortement les conditions de passivité, au-delà des conditions proposées par Itzhak Barkana [30, 120].

Ces travaux en commande adaptative illustrent que le point de vu de la commande robuste peut conduire à des résultats nouveaux pour les systèmes non-linéaires. Mais plus encore, à l'issue de la thèse de Razvan Luzi [132], thèse consacrée aux structures de commande variant dans le temps pour la commande en attitude de satellite, la commande adaptative présentée ci-dessus a été réalisée et appliquée en janvier 2014 en conditions opérationnelles sur le satellite PICARD alors encore en orbite [131]. L'étape essentielle qui a permis d'aller jusqu'à ce stade de développement a été la validation de la loi de commande. Cette validation a été faite avec les outils classiques de la commande robuste, à savoir les conditions LMI d'analyse robuste d'une forme LFT, ou M-Delta, où les incertitudes représentaient les gains adaptatifs de la loi de commande (voir [132] pour les détails) [1]. Même s'il s'agissait ici d'une étape d'analyse relativement pessimiste, cet exemple montre l'intérêt de prolonger l'étude des systèmes modélisés par des LFT, c'est-à-dire par une boucle d'interconnexion entre un système LTI connu et un opérateur incertain, en particulier quand l'opérateur incertain inclut des non-linéarités.

La théorie de la séparation intégrale quadratique (IQS) se place dans la lignée des travaux autour du lemme borné réel (cas de l'analyse de stabilité d'une boucle entre un système LTI et un opérateur borné non structuré) et de la μ-analyse [52, 208, 51, 261, 54, 53, 63, 154] (cas où l'opérateur incertain est borné et structuré). Elle emprunte fortement aux résultats dits des IQC (contraintes intégrales quadratiques) [115, 117, 84, 140, 64, 116, 118, 139, 217, 248], aux résultats temporairement dénommés *full-block S-procedure* [49, 210, 50, 212] ou encore à [61, 223, 180, 18, 162, 175] sous d'autres noms. Mais à l'origine de l'approche IQS, et de son appellation, on trouve le livre de Safonov [207] qui propose un cadre théorique très général pour les systèmes linéaires ou non, décrits par une boucle d'interconnection de deux opérateurs. Le résultat central dit de *séparation topologique* traite du *bien posé* de la boucle d'interconnexion, et la garantie à la condition de l'existence d'une fonction réalisant la séparation topologique entre le graph d'un des systèmes et le graph inverse de l'autre. Comme exposé par la suite, ce résultat peut être vu comme une variante (ou une généralisation) de la théorie de Lyapunov [134] qui garantie la *stabilité* à la condition de l'existence d'une fonction, dite de Lyapunov, définie positive et dont la dérivée le long des trajectoires est définie négative. Comme pour le théorème de Lyapunov, la séparation topologique est un résultat tellement général qu'il ne se décline en conditions numériquement exploitables que dans des cas particuliers. Pour les systèmes LTI, les conditions de Lyapunov se réduisent en la recherche de fonctions quadratiques contraintes par des LMI. Identiquement, comme démontré dans [108, 109], pour ces mêmes systèmes LTI avec

1. On peut noter que l'on retrouve là, sous une autre forme, une structure classique pour l'analyse de la fragilité d'une loi de commande, où les incertitudes portent sur les gains du correcteur. Voir [15, 170, 176, 69, 68, 71, 179, 72, 177] pour des articles auxquels j'ai contribué portant sur ce sujet

incertitudes paramétriques, la condition de séparation topologique se réduit en la recherche de séparateurs quadratiques contraints par des LMI. Dans ce manuscrit, le résultat central formule un cas plus général où la séparation topologique se réduit en la recherche de séparateurs définis par l'intégrale d'une forme quadratique (d'où le terme *séparation intégrale quadratique*) et contraints par des LMI et des IQC. Des conditions, pessimistes en général, sont proposées pour convertir les IQC en LMI et ainsi rendre les conditions numériquement exploitables.

De tous les résultats cités dans le paragraphe précédent, peu abordent de front le cas des systèmes non-linaires. Plus précisément, les non-linéarités sont traitées en général en les englobant dans des opérateurs incertains et donc avec pessimisme. Les résultats les plus aboutis permettant d'aborder la question avec le moins de pessimisme sont probablement ceux du cadre de travail des IQC, avec par exemple les travaux de [64] pour les systèmes LTI avec saturations. Mais, à ma connaissance, aucune condition numériquement exploitable ne traite dans ce cadre du problème essentiel pour les systèmes non-linaires, à savoir que la stabilité des points d'équilibre ne peut être que locale. Notre travail sur l'approche IQS permet de lever, au moins partiellement, cette difficulté. Dans [182] nous avons proposé une méthode en ce sens (dans un objectif initial autre, celui de donner une interprétation IQS de critères de performances autres que la norme H_∞). Dans [195] la méthode a été employée pour la stabilité locale des systèmes linéaires avec saturation. Ces résultats sont repris dans ce manuscrit et décrits avec plus de détail. Ils sont à mon avis essentiels pour aller plus avant dans l'étude des systèmes non-linéaires par les outils de la commande robuste.

Outre que le formalisme IQS est adapté aux systèmes, linéaires ou non, représentés par une boucle interconnexion (représentation LFT), son intérêt en comparaison d'autres approches, et ce même pour des problèmes identiques, est de produire des résultats sous forme LMI de façon systématique. Ce que j'entends par là, c'est qu'une grande partie des manipulations mathématiques qui s'apparentent souvent à des astuces de calcul (compléments de Schur, opération de congruence etc.) deviennent inutiles. Le résultat est directement sous forme LMI et se construit de façon systématique en sélectionnant des structures de séparateurs quadratiques dans une bibliothèque. Le processus est informatisable et d'ailleurs une version de test d'un code informatique existe (version ROMUALD de R-RoMulOC [196]). Initialement le manuscrit prévoyait un chapitre dédié à la description de cette boîte à outils Matlab. Le code est encore en cours de finalisation alors que les pressions pour soutenir l'habilitation sont fortes, c'est pourquoi ce chapitre a finalement été retiré.

Le côté systématique de la construction des résultats LMI par l'approche IQS a un autre avantage. Il permet d'appliquer la stratégie d'augmentation des systèmes dynamiques précédemment exposée pour l'approche par S-variables, au cas des systèmes bouclés. Comme pour les S-variables, la stratégie conduit à des suites de conditions LMI au pessimisme décroissant. La méthode généralise le résultat de [112] où les deux premier éléments de la suite sont proposés. De plus, comme la construction des LMI est systématique, la seule difficulté mathématique qui demeure est celle de manipuler les équations décrivant le système. Dans le cas de systèmes avec incertitudes paramétriques constantes, les manipulations de modèle consistent à inclure l'information que les dérivées successives des incertitudes sont toutes nulles. Si les incertitudes varient dans le temps, l'incorporation de dérivées d'ordre supérieur des signaux fait apparaître les dérivées des incertitudes, information exploitable par l'approche IQS dès lors que les dérivées sont contraintes (bornées, positives, etc.). La même méthodologie appliquée

aux systèmes à retard permet d'exploiter les connaissances sur le développement en série de l'opérateur retard. A noter sur ce sujet les travaux de Frédéric Gouaisbaut et ses collègues [91, 92, 181, 93, 94, 87, 89, 3, 86, 4, 88]. L'un de ces papiers auquel j'ai participé, version étendue de [93], n'a fait l'objet que d'un rapport technique. Quelques éléments de ce rapport sont donnés à la fin du manuscrit pour illustrer la séparation quadratique dans le cadre des systèmes à retards.

Rappelons ici que la séparation topologique peut être vue comme une variante de la théorie de Lyapunov. De ce fait, il est naturel que les résultats LMI issus de l'approche IQS combinée à la stratégie d'augmentation des systèmes, aient des interpretations en terme de fonctions de Lyapunov. Appliqués aux systèmes incertains, les résultats IQS correspondent à des fonctions de Lyapunov quadratiques dépendant des incertitudes de façon polynomiale, voire de façon rationnelle. Pour le cas d'incertitudes scalaires, ces résultats sont comparables à ceux de [36], avec un niveau de complexité mathématique bien moindre. Pour le cas de systèmes à retards, le raisonnement conduit à des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii d'un nouveau type, fonctionnelles dépendentes d'un nombre croissant d'intégrales de l'état. Pour les systèmes avec zone-mortes ou saturation, les fonctions de Lyapunov implicites sont du type quadratique par morceau. Dans le cas général, elle sont définies de façon implicite et ne sauraient être imaginées intuitivement.

Le manuscrit est décomposé en cinq chapitres.

Le premier est dédié à des préliminaires mathématiques qui sont principalement des rappels de notations. A noter cependant quelques différences avec ce qui est usuellement considéré dans la littérature. Les signaux sont définis de manière générique en tant que fonctions du temps (continu ou discret), ou de la fréquence, ou de la variable de Laplace et à valeurs matricielles. Cette généralisation permet par la suite de formuler la théorie de la séparation intégrale quadratique indépendamment du type de modélisation des systèmes. Une autre originalité vient de la définition d'un opérateur s'apparentant à la racine carré du Dirac. Cet opérateur est essentiel pour traiter de performances impulsion-à-norme (qui correspond à la norme H_2 pour les systèmes linéaires) et impulsion-à-pic, mais permet surtout de tenir compte des conditions initiales sur les systèmes. Enfin, le chapitre se conclut sur la définition des systèmes sous forme implicite. La formulation se différencie des représentations des systèmes descripteurs les plus couramment rencontrées dans la littérature par le fait que l'on ne force pas la partie descripteur à être carrée.

Le second chapitre est à vocation pédagogique. Il vise à montrer sur quelques exemples simples les liens entre la théorie de la séparation topologique et certains résultats classiques de la littérature. C'est dans ce chapitre que se fait le lien entre bien posé d'une boucle d'interconnexion et stabilité, entre existence d'un séparateur et existence d'une fonction de Lyapunov, entre séparation topologique et critère du cercle. Le cas des systèmes linéaires est considéré avec attention, car dans ce cas la séparation topologique se réduit à la recherche d'un séparateur quadratique et ce résultat est en lien avec les IQC, la S-procédure, ou encore le calcul de la valeur singulière structurée μ.

Le chapitre qui suit expose le résultat théorique central à savoir la séparation intégrale quadratique pour une boucle d'interconnexion composée d'un opérateur et d'une transformation linéaire implicite. Le théorème formule les hypothèses sous lesquelles le bien posé est garanti sans pessimisme (conditions nécessaires et suffisantes) par l'existence d'un séparateur intégral

quadratique contraint par une LMI et une IQC. Une seconde partie du chapitre détaille les méthodes pour convertir la contrainte IQC en contraintes LMI. Cette conversion est en général pessimiste (conditions suffisantes pas forcément nécessaires) et peut potentiellement conduire à des conditions numériquement problématiques (degrés de liberté inutiles). Ces aspects sont discutés et les problèmes numériques évités autant que possible.

Après ce chapitre sur le bien posé d'interconnexions abstraites, le résultat de séparation intégrale quadratique est décliné dans le chapitre 4 pour des exemples classiques de l'analyse de stabilité et de performance de systèmes linéaires. Les performances traitées sont la performance norme-à-norme (coût H_∞ dans le contexte des systèmes LTI), la performance impulsion-à-norme (coût H_2 dans le contexte des systèmes LTI) et la performance impulsion-à-pic. Les résultats LMI sont grande en partie nouveaux pour ce qui est des systèmes descripteurs et très classiques pour les systèmes usuels. Trois autres exemples d'application sont également présentés, à savoir : la localisation des pôles dans une région convexe du plan complexe ; la performance H_∞ sur une bande de fréquence ; le calcul de la valeur singulière structurée μ et sa variante *skew-*μ.

Le cinquième et dernier chapitre aborde la réduction du pessimisme. A la manière des techniques dites de sommes-des-carrés, qui produisent des suites de conditions au pessimisme décroissant par le biais de représentations polynomiales de degrés plus élevé, on montre que le pessimisme des résultats IQS se réduit par le biais de représentations des systèmes d'ordre plus élevé. Cette technique pour réduire le pessimisme est tout d'abord illustrée pour le cas de systèmes LTI avec incertitudes paramétriques. Des résultats utilisant cette technique obtenus sur un exemple de satellite sont rappelés. Une caractéristique essentielle de la technique est qu'elle est équivalente à la recherche de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres sans que cela se traduise par des manipulations mathématiques complexes. L'extension aux systèmes avec incertitudes variant dans le temps est relativement triviale. Plus complexe est le cas des systèmes avec saturations. Dans ce cas, la technique permet de rechercher des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux pour la stabilité locale d'un point d'équilibre.

Le manuscrit se clôt pour finir par des conclusions et des perspectives.

Table des matières

Introduction **3**

1 Préliminaires mathématiques **15**

1.1 Matrices 16

1.1.1 Ensembles 16

1.1.2 Notations 16

1.1.3 Inégalités matricielles 17

1.2 Signaux 18

1.2.1 Signaux à temps continu 18

1.2.2 Signaux à temps discret 19

1.2.3 Représentations génériques des signaux et IQC 19

1.3 Opérateurs 20

1.3.1 Opérateurs sur les signaux à temps continu 20

1.3.1.1 Opérateur de Dirac 20

1.3.1.2 Racine carrée du Dirac 21

1.3.1.3 Opérateur troncature 21

1.3.1.4 Intégrateurs 22

1.3.2 Opérateurs sur les signaux à temps discret 23

1.3.3 Opérateurs incertains 24

1.3.3.1 Opérateurs bornés en norme 25

1.3.3.2 Opérateurs passifs 25

1.3.3.3 Opérateurs impulsion bornée 26

1.3.3.4 Incertitudes dissipatives structurées 26

1.3.4 Zone-morte 28

1.4 Systèmes dynamiques 30

1.4.1 Systèmes linéaires usuels 30
1.4.2 Systèmes descripteurs 30

2 Séparation topologique et commande robuste 35
2.1 Bien-Posé et Séparation Topologique 35
2.2 Séparation Topologique et Lyapunov 38
2.3 Séparation Topologique et Dissipativité 39
2.4 Le problème de Lur'e 40
2.5 Cas des systèmes LTI 41
2.6 Séparation Quadratique et IQC 45
2.7 Séparateurs quadratiques et S-procédure 46
2.8 Séparateurs quadratiques et le calcul de la valeur singulière structurée 49
2.9 Motivations pour la séparation intégrale quadratique 51

3 Séparation Intégrale Quadratique pour les applications implicites 53
3.1 Bien-posé pour les applications implicites 54
3.2 Résultat Central de Séparation Intégrale Quadratique 56
3.3 Séparateur construit à partir de séparateurs élémentaires 59
3.3.1 Préliminaires 59
3.3.2 Combinaison linéaire d'opérateurs élémentaires 60
3.3.3 Combinaison linéaire de séparateurs élémentaires 61
3.3.4 Construction des séparateurs élémentaires 62
3.3.5 Séparateurs pour les intégrateurs 64
3.3.5.1 Séparateurs pour l'intégrateur avec conditions initiales nulles 64
3.3.5.2 Séparateurs pour l'intégrateur avec conditions initiales non nulles 65
3.3.5.3 Séparateurs pour l'intégrateur avec conditions finales 66
3.3.6 Séparateurs pour les systèmes décrits par l'opérateur avance 66
3.3.7 Séparateurs pour les systèmes décrits par l'opérateur variation 67
3.3.8 Séparateurs pour les opérateurs incertains 68
3.3.8.1 Séparateurs pour les opérateurs bornés en norme 68
3.3.8.2 Séparateurs pour les opérateurs passifs 69
3.3.8.3 Séparateurs pour l'opérateur impulsion bornée 70

3.3.8.4 Séparateurs pour des incertitudes dissipatives structurées . . 71
3.4 Résultats sous forme LMI 74

4 IQS pour l'analyse des systèmes 77
4.1 IQS pour l'analyse de performances 78
4.1.1 Stabilité asymptotique globale 78
4.1.2 Performance norme-à-norme 81
4.1.3 Performance impulsion-à-norme 84
4.1.4 Performance impulsion-à-pic 89
4.2 IQS pour les systèmes à temps discret 92
4.2.1 Systèmes décrits par l'opérateur avance 93
4.2.1.1 Stabilité globale 93
4.2.1.2 Performance norme-à-norme 93
4.2.1.3 Performance impulsion-à-norme 94
4.2.1.4 Performance impulsion-à-pic 96
4.2.2 Systèmes décrits par l'opérateur variation 99
4.2.2.1 Stabilité globale 99
4.2.2.2 Performance norme-à-norme 100
4.2.2.3 Performance impulsion-à-norme 100
4.2.2.4 Performance impulsion-à-pic 101
4.3 Problèmes avec incertitudes dissipatives structurées 103
4.3.1 Localisation de pôles 103
4.3.2 Performance H_∞ sur une bande de fréquence 104
4.3.3 Calcul de μ et skew-μ 104

5 Réduction du pessimisme 107
5.1 Stabilité robuste des systèmes LTI 108
5.1.1 Enoncé pessimiste 108
5.1.2 Augmentation d'ordre un 109
5.1.3 Augmentation d'ordre supérieur 111
5.1.4 Exemple : Analyse robuste du contrôle d'attitude d'un satellite 113
5.2 Gain L_2 des systèmes avec zone morte 118
5.2.1 Exposé du problème 118

5.2.2 Informations sur la dérivée des opérateurs incertains 120
5.2.3 Exemple numérique 123
5.3 Régions d'attraction des systèmes avec saturation 125
5.3.1 Satellite un axe avec saturation 126
5.3.2 Performance impulsion-à-pic pour l'analyse d'ensembles invariants . . 127
5.3.3 Réduction du pessimisme avec les informations sur la dérivée 129
5.3.4 Preuves de stabilité 133
5.4 Stabilité des systèmes à retard 134

Conclusions et Perspectives **139**

Bibliographie **145**

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Ce chapitre regroupe les notations mathématiques principales utilisées dans ce document. Il est aussi l'occasion de rassembler des notions et ainsi alléger le propos du corps principal du document de certains éléments techniques. Même pour un lecteur spécialiste, il est recommandé d'y prêter une petite attention. En effet, les notations contiennent quelques originalités. Les signaux sont par exemple par défaut à valeurs matricielles, une notation unique est adoptée pour les temps continu et discret, un opérateur racine carrée du Dirac est proposé, les systèmes sont par défaut sous forme descripteur qui n'est pas celle classiquement utilisée dans la littérature.

Plus précisément le chapitre se décompose comme suit : En premier, nous exposons quelques notations/propriétés des matrices. Les matrices sont les éléments de base dont des sous-cas sont les vecteurs (matrices avec nombre de colonnes égal à 1) ou les scalaires (matrices à une ligne, une colonne). C'est dans cette section que sont définies les inégalités matricielles linéaires, outil principal pour la formulation des résultats théoriques. La seconde section est consacrée aux signaux. Ils sont définis comme des fonctions du temps (continu ou discret) et à valeurs matricielles. La troisième section est consacrée aux opérateurs entre signaux. On retrouve dans cette section les matrices en tant qu'applications linéaires. On y trouve également des opérateurs fondamentaux tels que les intégrateurs ou les sommateurs, mais également des classes d'opérateurs incertains utilisés dans le cadre de travail de la commande robuste. La quatrième et dernière section est consacrée à la définition des systèmes linéaires incertains et porte l'accent sur la définition des systèmes descripteurs. Le Chapitre 4 fournira par la suite les résultats d'analyse pour ces systèmes descripteurs.

1.1 Matrices

1.1.1 Ensembles

$\boldsymbol{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
$\boldsymbol{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
$\boldsymbol{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls.
$\boldsymbol{C}$ est l'ensemble des nombres complexes et j est le nombre imaginaire pur tel que $\mathrm{j}^2 = -1$.
j$\boldsymbol{R}$ est l'ensemble des nombres imaginaires purs.
$\boldsymbol{C}_+$ est l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est positive ou nulle.
$\boldsymbol{R}^{m\times p}$ et $\boldsymbol{C}^{m\times p}$ sont respectivement les ensembles de matrices réelles et complexes de dimensions m lignes, p colonnes.

1.1.2 Notations

$\Re(A)$ est la partie réelle de A, $\Im(A)$ sa partie imaginaire.
$\mathrm{conj}(A) = \Re(A) - \mathrm{j}\Im(A)$ est la matrice conjuguée de la matrice complexe A.
A^T est la matrice transposée.
La transposée conjuguée est notée $A^* = \mathrm{conj}(A^T)$.
Les matrices sont dites Hermitiennes si $A = A^*$ et symétriques si $A = A^T$.
Dans certaines formules, pour abréger les notations, on utilise l'expression suivante $A^{\mathcal{H}}$ pour désigner la matrice Hermitienne $A^{\mathcal{H}} = A + A^*$.

$\mathbf{1}_n$ et $\mathbf{0}_{m,p}$ sont respectivement les matrices identité de dimension n et zéro de dimensions m par p. La plupart du temps les dimensions de ces matrices sont omises car elles peuvent se déduire du contexte. Si l'une des deux notations peut se déduire du contexte on utilisera les notations $\mathbf{0}_{\bullet,p}$ ou $\mathbf{0}_{m,\bullet}$ pour le signifier et ainsi éviter d'alourdir les notations. Ainsi, par exemple

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{\bullet,m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{n,m} \end{array}\right].$$

On autorise également les notations suivantes $\mathbf{0}_{m,0}$ et $\mathbf{0}_{0,p}$ qui sont les matrices nulles respectivement de dimensions m lignes (et zéro colonnes), p colonnes (et zéro lignes). Si $A \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$ alors $\mathbf{0}_{0,m}A = \mathbf{0}_{0,p}$ et $A\mathbf{0}_{p,0} = \mathbf{0}_{m,0}$. Cette notation permet également de définir des matrices par bloc telles de $\left[\begin{array}{cc} A & B \end{array}\right]$ qui, si $A \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ et $B = \mathbf{0}_{n,0}$, devient

$$\left[\begin{array}{cc} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A & \mathbf{0}_{n,0} \end{array}\right] = A.$$

A^+ est la pseudo-inverse de A.
Quand la matrice est carrée et non singulière, A^{-1} est son inverse.

$A^\perp$ et A° sont des matrices de rang plein dont les colonnes décrivent respectivement le noyau et l'image de A. $A^\perp$ en particulier est telle quel $AA^\perp = \mathbf{0}$.
Si $A \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$ est une matrice de rang r alors $A^\perp \in \boldsymbol{C}^{p\times(p-r)}$ et $A^\circ \in \boldsymbol{C}^{m,r}$.
Dans l'outil Matlab© $A^\perp$ est donnée par la commande `null(A)`, A° est donnée par la commande `orth(A)`.

Le calcul de $A^\perp$ et A° peut se faire par décomposition en valeurs singulières :

$$A = \left[\begin{array}{cc} U_1 & U_2 \end{array}\right] \text{diag}(S, \mathbf{0}) \left[\begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array}\right]^*$$

en prenant $A^\perp = V_2$ et $A^\circ = U_1$.
Pour une matrice $A \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$ on remarque que les colonnes de $\left[\begin{array}{cc} A^\perp & A^{*\circ} \end{array}\right]$ forment une base de $\boldsymbol{C}^p$ tandis que les colonnes de $\left[\begin{array}{cc} A^{*\perp} & A^\circ \end{array}\right]$ forment une base de $\boldsymbol{C}^m$. Un exemple de calcul de ces matrices est comme suit

$$\begin{array}{lll} A = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_m & \mathbf{0}_{m,p-m} \end{array}\right] & A^\perp = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{m,p-m} \\ \mathbf{1}_{p-m} \end{array}\right] & A^\circ = \mathbf{1}_m \\ A^* = \left[\begin{array}{c} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{0}_{p-m,m} \end{array}\right] & A^{*\perp} = \mathbf{0}_{m,0} & A^{*\circ} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{0}_{p-m,m} \end{array}\right] \end{array}$$

On remarque que $\mathbf{0}_{0,m}^\perp = \mathbf{1}_m$ et on a les propriétés suivantes pour des matrices de rang plein :

— Si A est de rang plein en lignes alors $AA^+ = \mathbf{1}_m$, $A^\circ = \mathbf{1}_m$, $A^{*\perp} = \mathbf{0}_{p,0}$ et $A^{*\circ} = A^*$;
— Si A est de rang plein en colonnes alors $A^+A = \mathbf{1}_p$, $A^\perp = \mathbf{0}_{p,0}$, $A^\circ = A$ et $A^{*\circ} = \mathbf{1}$.

Pour alléger certaines formules les matrices bloc-diagonales sont écrites comme suit :

$$\text{diag}\left(\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}\right) = \text{diag}\left(\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right) = \left[\begin{array}{ccc} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C \end{array}\right].$$

$A \otimes B \in \boldsymbol{C}^{m_A m_B \times p_A p_B}$ est le produit de Kronecker entre les matrices $A \in \boldsymbol{C}^{m_A \times p_A}$ et $B \in \boldsymbol{C}^{m_B \times p_B}$ dont le principe est illustré ci-dessous dans le cas d'une matrice $A \in \boldsymbol{C}^{3,\times 2}$

$$\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right] \otimes B = \left[\begin{array}{cc} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \\ a_{31}B & a_{32}B \end{array}\right].$$

On rappelle que pour des matrices de dimensions appropriées $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$.
L'écriture suivante est fréquemment utilisée pour désigner des matrices diagonales par bloc avec des blocs répétés :

$$\mathbf{1}_2 \otimes A = \left[\begin{array}{cc} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{array}\right] = \text{diag}\left(\begin{array}{c} A \\ A \end{array}\right).$$

$\|A\|$ désigne la norme spectrale $\|A\|^2 = \overline{\lambda}(A^*A)$ où $\overline{\lambda}$ est la valeur propre maximale.

$\|A\|_F$ désigne la norme de Frobenius $\|A\|_F^2 = \text{Tr}(A^*A)$ où Tr est l'opérateur trace.

1.1.3 Inégalités matricielles

Pour les matrices Hermitiennes $A > (\geq) B$ signifie que $A - B$ est (semi-)définie positive.

Par construction on a $A^*A \geq 0$, $A^{\perp *}A^\perp > \mathbf{0}$ et $A^{\circ *}A^\circ > \mathbf{0}$.

Remarquons que si $A = A_R + \mathrm{j}A_I$ est à valeurs complexes, dire qu'elle est Hermitienne implique que $A_R = A_R^T$ et $A_I = -A_I^T$. De plus, l'inégalité $A > \mathbf{0}$ se réécrit comme une inégalité matricielle à valeurs réelles :

$$A > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc} A_R & A_I \\ -A_I & A_R \end{array} \right] > \mathbf{0}.$$

On remarque également que si $A > \mathbf{0}$ alors conj$(A) > \mathbf{0}$.

diag $\left(\begin{array}{cc} A & B \end{array} \right) > \mathbf{0}$ correspond aux contraintes $A > \mathbf{0}$, $B > \mathbf{0}$ satisfaites simultanément. De plus, pour deux matrices définies positives $A > \mathbf{0}$, $B > \mathbf{0}$ leur produit de Kronecker est défini positif $A \otimes B > \mathbf{0}$.

On dit qu'une contrainte $\mathcal{L}(X, Y, \dots) > \mathbf{0}$ est une inégalité matricielle linéaire (**LMI**) si les variables de décision $X, Y, \dots$ entrent de façon affine dans la définition de la matrice $\mathcal{L}$. Les variables de décision sont la plupart du temps elles-même des matrices. On parle de **problème LMI** quand un résultat est formulé sous la forme de la recherche d'une solution à un ensemble fini de contraintes LMI (qui peuvent également inclure des égalités matricielles linéaires). Le problème est dit **faisable** s'il existe au moins une solution à l'ensemble des contraintes. Un **problème d'optimisation LMI** est celui de la minimisation d'un critère linéaire sous contraintes LMI. Ces problèmes LMI sont convexes et peuvent se résoudre en temps polynomial [148, 38]. L'outil YALMIP [129, 130] permet de coder très simplement les LMI dans l'environnement MATLAB©. Il permet d'accéder à de nombreux solveurs dont SeDuMi [225] et SDPT3 [233] qui sont ceux employés pour les résultats numériques de ce document.

1.2 Signaux

1.2.1 Signaux à temps continu

$L_2^{m\times p}[\boldsymbol{R}_+]$ est l'ensemble des distributions $t \in \boldsymbol{R}_+ \mapsto f(t) \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$ bornées vis à vis de la norme suivante :

$$\|f\| = \left(\mathrm{Tr} \left(\int_0^\infty f^*(t) f(t) dt \right) \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_F^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Le produit scalaire associé à cette norme est donné par :

$$< f | g > = \Re \left(\mathrm{Tr} \left(\int_0^\infty f^*(t) g(t) dt \right) \right).$$

On définit également le produit scalaire et la norme tronqués :

$$< f | g >_{\bar{t}} = \Re \left(\mathrm{Tr} \left(\int_0^{\bar{t}} f^*(t) g(t) dt \right) \right) \quad , \quad \|f\|_{\bar{t}} = < f | f >_{\bar{t}}^{1/2}.$$

Le terme **signal** à temps continu désigne dans ce document toute distribution f telle que pour tout $\bar{t}$ sa norme tronquée $\|f\|_{\bar{t}}$ est bornée. L'espace des signaux est noté $L_{2e}^{m\times p}[\boldsymbol{R}_+]$ et $L_2^{m\times p}[\boldsymbol{R}_+]$ est le sous-ensemble des signaux bornés.

Dans certains cas, les signaux à temps continu bornés seront représentés par leur transformée fréquentielle de Fourier $\mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R} \mapsto \hat{f}(\mathrm{j}\omega) = \int_0^\infty e^{-\mathrm{j}\omega t} f(t)dt \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$ ou encore par leur transformée de Laplace $s \in \boldsymbol{C} \mapsto \hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$. On notera $L_2^{m\times p}[\mathrm{j}\boldsymbol{R}]$ les signaux dans leur représentation fréquentielle et $L_2^{m\times p}[\boldsymbol{C}]$ les signaux dans leur représentation de Laplace. Les normes et produits scalaires respectent alors la relation de Parseval :

$$< f|g > = < \hat{f}|\hat{g} > = \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^*(\mathrm{j}\omega)\hat{g}(\mathrm{j}\omega)d\omega\right)\right) \quad , \quad \|\hat{f}\| = < \hat{f}|\hat{f} >^{1/2}.$$

On définit là aussi le produit scalaire et la norme tronqués :

$$< \hat{f}|\hat{g} >_{\bar{\omega}} = \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\int_{-\bar{\omega}}^{+\bar{\omega}} \hat{f}^*(\mathrm{j}\omega)\hat{g}(\mathrm{j}\omega)d\omega\right)\right) \quad , \quad \|\hat{f}\|_{\bar{\omega}} = < \hat{f}|\hat{f} >_{\bar{\omega}}^{1/2}.$$

1.2.2 Signaux à temps discret

$L_2^{m\times p}[\boldsymbol{N}]$ est l'ensemble des suites $k \in \boldsymbol{N} \mapsto f_k \in \boldsymbol{C}^{m\times p}$ bornées vis à vis de la norme suivante :

$$\|f\| = \left(\mathrm{Tr}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k^* f_k\right)\right)^{1/2} < \infty.$$

avec le produit scalaire associé :

$$< f|g > = \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k^* g_k\right)\right)$$

On définit là encore le produit scalaire et la norme tronqués :

$$< f|g >_{\bar{k}} = \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\sum_{k=0}^{\bar{k}} f_k^* g_k\right)\right) \quad , \quad \|f\|_{\bar{k}} = < f|f >_{\bar{k}}^{1/2}.$$

Le terme **signal** à temps discret désigne toute suite f telle que pour tout $\bar{k}$ sa norme tronquée $\|f\|_{\bar{k}}$ est bornée. L'espace des signaux est noté $L_{2e}^{m\times p}[\boldsymbol{N}]$ et $L_2^{m\times p}[\boldsymbol{N}]$ est le sous-ensemble des signaux bornés.

1.2.3 Représentations génériques des signaux et IQC

Dans leur majorité, les résultats présentés dans ce document sont indépendants de la représentation temporelle (temps continu ou discret) ou fréquentielle. Pour cette raison, et pour garder le maximum de généralité, la variable t, k, $\mathrm{j}\omega$ ou s sera remplacée par la notation $\varsigma \in \boldsymbol{\Sigma}$.

On a donc $\varsigma = t$, $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{R}_+$ pour les signaux à temps continu, $\varsigma = k$, $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{N}$ pour les signaux à temps discret, $\varsigma = \mathrm{j}\omega$, $\mathbf{\Sigma} = \mathrm{j}\boldsymbol{R}$ pour les représentations fréquentielles, $\varsigma = s$, $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{C}$ pour les représentations de Laplace.

Pour un signal borné $f \in L_2^{m\times p}[\mathbf{\Sigma}]$ et une fonction $\Theta : \mathbf{\Sigma} \to \boldsymbol{C}^{m\times m}$ à valeurs Hermitiennes ($\Theta(\varsigma) = \Theta^*(\varsigma)$), on appelle $\langle f|\Theta f\rangle$ une forme intégrale quadratique définie par Θ. On parlera également de contrainte intégrale quadratique (IQC) sur f et définie par Θ en désignant la contrainte inégalité suivante :

$$\langle f|\Theta f\rangle \leq 0. \tag{1.1}$$

Pour alléger les notations, quand il n'y a pas de confusion sur les dimensions, $L_2^{m\times p}$ et $L_{2e}^{m\times p}$ sont notés plus simplement L_2 et L_{2e}.

1.3 Opérateurs

Par opérateur on entend une fonction transformant des signaux en signaux : $L_{2e}^{m_1\times p_1}[\mathbf{\Sigma}] \mapsto L_{2e}^{m_2\times p_2}[\mathbf{\Sigma}]$. Les opérateurs utilisés dans ce document sont principalement des opérateurs linéaires, mais pas uniquement.

La principale classe d'opérateurs est celle des applications linéaires $L_{2e}^{m_1\times p}[\mathbf{\Sigma}] \mapsto L_{2e}^{m_2\times p}[\mathbf{\Sigma}]$:

$$g(\varsigma) = A(\varsigma)f(\varsigma)$$

où A est une fonction à valeurs matricielles $\varsigma \in \mathbf{\Sigma} \to A(\varsigma) \in \boldsymbol{C}^{m_2\times m_1}$. En complément de ces applications linéaires usuelles on considère également le cas plus général d'applications linéaires implicites de la forme :

$$E(\varsigma)g(\varsigma) = A(\varsigma)f(\varsigma)$$

où E est également à valeurs matricielles, pas nécessairement carrée ni de rang plein. Dans de nombreux cas nous considérons E et A indépendantes de ς. Mais les applications linéaires variant dans le temps (avec $\varsigma = t$) ou les matrices de transfert (avec $\varsigma = s$) sont également abordées.

Outre les applications linéaires, nous détaillons dans ce qui suit certains opérateurs importants employés dans la suite du document.

1.3.1 Opérateurs sur les signaux à temps continu

1.3.1.1 Opérateur de Dirac

L'opérateur de Dirac est noté δ_θ. Il est défini comme un opérateur linéaire sur les signaux $x \mapsto \delta_\theta x$ tel que :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [\delta_\theta x](\tau)d\tau = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [\,\theta_1\ \ \theta_2\,] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet opérateur de Dirac s'écrit également comme le produit avec la distribution de Dirac $[\delta_\theta x](t) = \delta(t-\theta)x(t)$ où le signal δ se définit comme la limite d'une suite de fonctions continues. Parmi ces suites de fonctions on retiendra la suivante (voir par exemple la définition de *delta function* dans `http://mathworld.wolfram.com/`) :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon/\pi}{t^2 + \epsilon^2}.$$

On remarque que le Dirac est abusivement appelé opérateur car son image n'est pas dans L_{2e}. En effet si $x \in L_{2e}$ et $x(\theta) \neq 0$ alors $\|\delta_\theta x\|_{\bar{t}} = +\infty$ pour tout $\bar{t} \geq \theta$.

1.3.1.2 Racine carrée du Dirac

De façon similaire à l'opérateur de Dirac, nous définissons sa racine carrée, notée φ_θ. C'est un opérateur linéaire sur les signaux $x \mapsto \varphi_\theta x$ tel que :

$$< \varphi_{\theta_1} y | \varphi_{\theta_2} x >_{\bar{t}} = \begin{cases} y^*(\theta)x(\theta) & \text{si } \theta_1 = \theta_2 = \theta \leq \bar{t} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet opérateur s'écrit également comme le produit du signal avec le signal φ : $[\varphi_\theta x](t) = \varphi(t-\theta)x(t)$ où le signal φ se définit comme la limite de la suite de fonctions continues :

$$\varphi(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sqrt{\epsilon/\pi}}{t + \mathrm{j}\epsilon}.$$

On remarque que si $x \in L_2$ alors $\varphi_\theta x$ est également dans L_2 : $\|\varphi_\theta x\| = \|x(\theta)\|_F < +\infty$. La racine carrée du Dirac φ est un opérateur de L_2 dans L_2. Son image est une distribution. Cet opérateur est utilisé dans la suite pour représenter les conditions initiales et finales d'un système sous la forme d'un signal de L_2.

Cette racine carrée du Dirac est nouvelle dans le contexte de la commande robuste (nous l'avons proposé dans [182]). Dans d'autres contextes des auteurs ont également eu le besoin de la définir, par exemple [39] dans le cadre des équations du champ électromagnétique. Les fondements mathématiques sont à chercher par exemple dans [95] ou encore dans l'algèbre de Colombeau [45]. La question revient comme pour notre cas dès lors que l'on exprime des phénomènes sous la forme de produits de distributions.

1.3.1.3 Opérateur troncature

En complément de la racine carrée du Dirac, nous définissons maintenant l'opérateur troncature. L'opérateur troncature $\mathcal{T}_\theta$ est un opérateur linéaire tel que :

$$[\mathcal{T}_\theta x](t) = \begin{cases} x(t) & \forall t \in [0\ ,\ \theta] \\ = 0 & \forall t > \theta. \end{cases} \tag{1.2}$$

Par définition un opérateur F est dit causal si pour tout $\theta \in \boldsymbol{R}_+$ on a $\mathcal{T}_\theta F = \mathcal{T}_\theta F \mathcal{T}_\theta$.

1.3.1.4 Intégrateurs

Les systèmes dynamiques à temps continu sont représentés classiquement dans l'espace d'état par des équations différentielles impliquant un état x et sa dérivée $\dot{x}$. Cette dérivée n'étant pas définie en tout point, en particulier si l'on considère la réponse de systèmes à des entrées impulsionnelles, cette notation est au sens des distributions. x et $\dot{x}$ sont deux signaux tels que $\dot{x}$ est intégrable, et reliés entre eux par l'opération d'intégration :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau$$

Pour le cas des signaux x à conditions initiales nulles on notera $\mathcal{I}$ l'intégrale telle que $\mathcal{I}\dot{x} = x$ qui vérifie :

$$[\mathcal{I}\dot{x}](t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau = x(t). \tag{1.3}$$

Dans le cas des signaux représentés par leur transformée de Laplace (et toujours en supposant les conditions initiales nulles) cette relation s'écrit également :

$$[\mathcal{I}\dot{x}](s) = s^{-1}\dot{x}(s) = x(s).$$

De façon à étendre cette définition de l'intégration en tant qu'opérateur sur des signaux de L_2 au cas des signaux à conditions initiales non nulles, il est nécessaire de définir ces conditions initiales en tant que signal de L_2. Pour cela nous faisons appel à l'opérateur racine carrée du Dirac. L'intégrateur est alors un opérateur sur le vecteur constitué de $\varphi_0 x$ et de $\dot{x}$ tel que $\mathcal{I}_I \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = x$ et qui vérifie :

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_I \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \dot{x} \end{pmatrix}](t) &= \int_0^t \varphi_0(\tau)[\varphi_0 x](\tau) + \dot{x}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \delta(\tau)x(\tau) + \dot{x}(\tau) d\tau \\ &= x(0) + (x(t) - x(0)) = x(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si l'intégrateur est appliqué cette fois à la troncature de la dérivée, on trouve :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_I \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\theta \dot{x} \end{pmatrix} \end{bmatrix} (t) = x(t) = \mathcal{T}_\theta x(t) \ , \quad \forall t \in [\, 0 \ \ \theta \,]$$
$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_I \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\theta \dot{x} \end{pmatrix} \end{bmatrix} (t) = x(\theta) \ , \quad \forall t > \theta \, .$$

De façon à exprimer la valeur de l'état à l'instant final θ comme un signal de L_2 on considère le signal $\varphi_\theta x$ et on défini l'intégrateur avec conditions initiales et finales comme suit :

$$\mathcal{I}_F \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\theta \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta x \\ \varphi_\theta x \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

1.3.2 Opérateurs sur les signaux à temps discret

Les résultats décrits dans ce document le sont principalement pour le cas des systèmes décrits par des signaux à temps continu, mais se généralisent aisément au cas des systèmes décrits par des signaux à temps discret. Cette généralisation passe par l'application des résultats en remplaçant les opérateurs sur les signaux à temps continu par des opérateurs analogues dans le cas discret. Deux classes de systèmes à temps discret sont considérées.

Dans le premier cas, dit cas des systèmes à temps discret **décrits par l'opérateur avance**, l'opérateur dérivation $\dot{x}$ est remplacé par :

$$[\vartheta x]_k = x_{k+1},$$

l'opérateur de Dirac et sa racine carrée se confondent et se définissent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\varphi_\kappa x]_{k\neq\kappa} = 0 \\ [\varphi_\kappa x]_\kappa = x_\kappa \end{array} \right.$$

l'opérateur troncature est tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{T}_\kappa x]_{k<\kappa} = x_k \\ [\mathcal{T}_\kappa x]_{k\geq\kappa} = 0 \end{array} \right.$$

l'opérateur intégration avec conditions initiales nulles est remplacé par le sommateur suivant :

$$[\mathcal{I}\vartheta x]_\kappa = \sum_{k=0}^{\kappa-1}([\vartheta x]_k - x_k) = \sum_{k=0}^{\kappa-1}(x_{k+1} - x_k) = x_\kappa - x_0 = x_\kappa$$

l'intégrateur avec conditions initiales non nulles devient :

$$[\mathcal{I}_I \left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \vartheta x \end{array} \right)]_\kappa = \sum_{k=0}^{\kappa-1}([\varphi_0 x]_k + [\vartheta x]_k - x_k) = x_0 + \sum_{k=0}^{\kappa-1}(x_{k+1} - x_k) = x_\kappa$$

et enfin, pour les signaux tronqués on a :

$$[\mathcal{I}_F \left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\kappa \vartheta x \end{array} \right)] = \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}_\kappa x \\ \varphi_\kappa x \end{array} \right).$$

Le cas des systèmes à temps discret décrits par l'opérateur avance est le plus courant dans la littérature. Sans doute pour la simplicité des formules qui en découlent. Cependant, depuis les articles de Middleton et Goodwin [142, 85] il a été établi que, pour la discrétisation de systèmes continus [149, 201], comme pour l'implémentation de lois discrètes [142, 147], l'opérateur variation est préférable. Plus récemment [143] a également établi que la représentation par opérateur variation est préférable pour ce qui est de la fiabilité numérique des LMI qui en découlent. Et pourtant on trouve très peu de résultats LMI pour les systèmes discrets représentés par ces opérateurs. L'approche de ce manuscrit permet de dériver toutes ces LMI avec la même simplicité que pour l'opérateur avance. A noter une alternative dans [99] qui propose d'aborder les systèmes décrits par l'opérateur variation sous la forme de systèmes descripteurs

avec opérateur avance. Cette alternative est également exploitable dans le cadre générique des résultats de ce document.

Le second cas considéré est donc celui dit des systèmes à temps discret **décrits par l'opérateur variation**, l'opérateur dérivation est remplacé par son approximation au premier ordre

$$[\vartheta x]_k = (x_{k+1} - x_k)/T_s$$

où T_s est la période d'échantillonnage. L'opérateur racine carrée du Dirac est alors tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\varphi_\kappa x]_{k\neq\kappa} = 0 \\ [\varphi_\kappa x]_\kappa = \frac{1}{T_s} x_\kappa \end{array} \right.$$

l'opérateur troncature est inchangé

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{T}_\kappa x]_{k<\kappa} = x_k \\ [\mathcal{T}_\kappa x]_{k\geq\kappa} = 0 \end{array} \right.$$

l'opérateur intégration avec conditions initiales nulles est remplacé par le sommateur suivant :

$$[\mathcal{I}\vartheta x]_\kappa = T_s \sum_{k=0}^{\kappa-1} [\vartheta x]_k = \sum_{k=0}^{\kappa-1} (x_{k+1} - x_k) = x_\kappa - x_0 = x_\kappa$$

l'intégrateur avec conditions initiales non nulles devient

$$[\mathcal{I}_I \left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \vartheta x \end{array} \right)]_\kappa = T_s \sum_{k=0}^{\kappa-1} ([\varphi_0 x]_k + [\vartheta x]_k) = x_0 + \sum_{k=0}^{\kappa-1} (x_{k+1} - x_k) = x_\kappa$$

et enfin, pour les signaux tronqués on a :

$$[\mathcal{I}_F \left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\kappa \vartheta x \end{array} \right)] = \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}_\kappa x \\ \varphi_\kappa x \end{array} \right).$$

1.3.3 Opérateurs incertains

Les opérateurs qui suivent sont incertains au sens où ils se définissent comme étant des éléments d'ensembles d'opérateurs avec des propriétés communes. Ils permettent de représenter le caractère incertain des données mais, comme nous allons le voir dans le Chapitre 4, ils peuvent avoir d'autres interprétations. Dans ce qui suit nous détaillons un cas relativement classique d'incertitudes matricielles que l'on retrouve sous différentes formes dans [219, 162, 110]. D'autres formes d'incertitudes existent également telles que des incertitudes vectorielles dans [220] ou encore des incertitudes polytopiques [109]. Elles ne sont pas abordées ici mais les résultats qui y sont exposés peuvent être appliqués dans le cadre IQS sans difficulté majeure.

1.3.3.1 Opérateurs bornés en norme

La première classe d'opérateurs incertains (et sans doute la plus connue) est celle des opérateurs bornés en norme. Ils se définissent par le fait que la norme du signal de sortie est bornée par un multiple de la norme du signal d'entrée : $\|v\| \leq \frac{1}{\gamma}\|g\|$ pour faire simple (mais attention, la définition n'est pas exactement celle-là).

Plus précisément et en ne se restreignant pas aux signaux bornés, on définit l'ensemble des opérateurs bornés en norme comme suit :

$$\boldsymbol{\nabla}_{n2n} = \left\{ \ \nabla_{n2n} \ : \ v = \nabla_{n2n} g \ , \ \forall \epsilon \ , \ \exists \bar{\varsigma}_2 \ : \ \forall \bar{\varsigma} > \bar{\varsigma}_2 \ , \ \|v\|_{\bar{\varsigma}}^2 \leq (\frac{1}{\gamma^2} + \epsilon)\|g\|_{\bar{\varsigma}}^2 \right\}. \tag{1.6}$$

Cet ensemble contient des opérateurs linéaires ou non. Les opérateurs linéaires indépendants de ς de cet ensemble sont les matrices à valeurs complexes $\nabla_{n2n} \in \boldsymbol{C}^{m \times p}$ de norme spectrale bornée $\|\nabla_{n2n}\| \leq \frac{1}{\gamma}$.

On remarque que, pour $\gamma = 1$, l'ensemble contient l'opérateur retard $v(t) = g(t-h)$ avec $h \geq 0$. En effet :

$$\forall \bar{t} > 0 \ , \ \|v\|_{\bar{t}}^2 = \int_0^{\bar{t}} g^*(t-h)g(t-h)dt = \|g\|_{\bar{t}}^2 - \int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}} g^*(t)g(t)dt \leq \|g\|_{\bar{t}}^2.$$

Par contre, il ne contient pas l'opérateur non-causal avance $v(t) = g(t+h)$ avec $h \geq 0$. En effet, si on définit le signal comme étant nul jusqu'à l'instant $\bar{t}$ (*i.e.* $g(t \leq \bar{t}) = 0$) on a

$$\|v\|_{\bar{t}}^2 = \int_0^{\bar{t}} g^*(t+h)g(t+h)dt = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+h} g^*(t)g(t)dt$$

qui ne peut être borné par $\epsilon\|g\|_{\bar{t}}^2 = 0$. Ces deux opérateurs sont très différents, même si dans les deux cas on a $\|v\| = \|g\|$ pour tout signal $g \in L_2$.

Cette remarque permet de mettre en avant que l'ensemble des opérateurs bornés en norme que nous définissons ici ne se limitent pas aux opérateurs causaux. Pour autant, ils n'incluent pas tous les opérateurs non-causaux et de norme bornée au sens de $\forall g \in L_2 \ , \ \|v\| \leq \frac{1}{\gamma}\|g\|$.

1.3.3.2 Opérateurs passifs

Une autre classe importante d'opérateurs incertains est celle des opérateurs passifs. Ils se définissent par le fait que le produit scalaire des signaux entrée/sortie est positif :

$$\boldsymbol{\nabla}_p = \{ \ \nabla_p \ : \ v = \nabla_p g \ , \ \forall \bar{\varsigma} \ , \ < v | g >_{\bar{\varsigma}} \geq 0 \ \}. \tag{1.7}$$

Là encore cet ensemble contient des opérateurs linéaires ou non. Ils peuvent s'interpréter au sens que la sortie va "dans le même sens que l'entrée". Les opérateurs linéaires de cet ensemble sont les matrices à partie réelle semi-définie positive $\nabla_p + \nabla_p^* \geq \mathbf{0}$. On parle aussi d'opérateurs positifs réels.

1.3.3.3 Opérateurs impulsion bornée

L'opérateur qui suit est une proposition récente. C'est lui aussi un opérateur qui n'est pas nécessairement linéaire. La sortie de cet opérateur est définie comme un proportionnel de la racine carrée du Dirac à l'instant initial $\theta = 0$ et dont le coefficient de proportionnalité est borné par la norme L_2 du signal d'entrée :

$$\boldsymbol{\nabla}_{i2n} = \left\{ \ \nabla_{i2n} \ : \ v = \nabla_{i2n} g \ , \ v = \alpha\varphi_0 \ , \ \alpha \in \boldsymbol{C} \ , \ |\alpha| \leq \frac{1}{\gamma}\|g\| \ \right\}. \tag{1.8}$$

Par construction, cet opérateur n'est pas causal. Pris isolément, les éléments de $\boldsymbol{\nabla}_{i2n}$ n'ont pas de réalité physique mais cet ensemble sera utilisé par la suite, pour caractériser des propriétés causales pour les systèmes.

1.3.3.4 Incertitudes dissipatives structurées

Définition 1 *Un matrice incertaine Δ est dite $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$-structurée et $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$-dissipative si elle appartient à l'ensemble défini par les contraines égalité et inégalité suivantes*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^* & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} = \mathbf{0} \, ,$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2^* & \Psi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \, .$$

Cette définition peut s'étendre à des ensembles décrits par plusieurs contraintes égalité et inégalité. Volontairement, pour ne pas trop alourdir le propos, et parce que cette définition est bien suffisante pour ce que nous allons considérer, nous restreignons ces ensembles à l'intersection de deux contraintes, une de chaque type.

Les ensembles décrits par ces équations sont dans le cas scalaire des droites et cercles pour ce qui est des contraintes égalité, des demi-plans et des disques pour ce qui est des contraintes inégalités. Si Δ est un vecteur, les contraintes sont des ellipsoïdes et des paraboloïdes elliptiques (leur intérieur dans le cas des inégalités). Dans le cas où Δ est une matrice, on parle par analogie d'ellipsoïdes de matrices (et leurs intérieurs). Des exemples de tels ensembles sont donnés ci-dessous.

Matrices de norme spectrale bornée. Les matrices telles que $\|\Delta\| \leq \frac{1}{\gamma}$ (et qui font partie de l'ensemble des opérateurs bornés en norme) sont $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$-structurées, $\{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \gamma^2\mathbf{1}\}$-dissipatives.

Matrices positives réelles. Les matrices telles que $\Delta + \Delta^* \geq \mathbf{0}$ (et qui font partie de l'ensemble des opérateurs passifs) sont $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$-structurées, $\{\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$-dissipatives.

Localisation de pôle. Dire qu'un nombre complexe est $\{0, 0, 0\}$-structuré, $\{r_1, r_2, r_3\}$-dissipatif signifie qu'il appartient à une région du plan complexe délimitée par une droite (si $r_3 = 0$) ou un cercle (intérieur ou extérieur du cercle).

Dans la suite nous nous intéresserons à la localisation des pôles λ d'un système dans des régions ouvertes du plan complexe, décrites par une équation du second ordre :

$$r_1\lambda\lambda^* + r_2^*\lambda + r_2\lambda^* + r_3 > 0. \tag{1.9}$$

Ces régions sont par exemple :
- partie réelle inférieure à α : $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 2\alpha$;
- partie imaginaire inférieure à $\bar{\omega}$: $r_1 = 0, r_2 = -\mathrm{j}, r_3 = 2\bar{\omega}$;
- dessous d'une droite passant par le point α et faisant un angle ψ avec l'axe imaginaire : $r_1 = 0, r_2 = -e^{\mathrm{j}\psi}, r_3 = \alpha e^{-\mathrm{j}\psi} + \alpha^* e^{\mathrm{j}\psi}$;
- disque centré en α et de rayon r : $r_1 = -1, r_2 = \alpha, r_3 = r^2 - \alpha^*\alpha$.

Pour ces problèmes de localisation de pôle nous définissons des incertitudes $\frac{1}{\lambda}$ appartenant à la contraposée de la région

$$r_1 + r_2^*\frac{1}{\lambda^*} + r_2\frac{1}{\lambda} + r_3\frac{1}{\lambda\lambda^*} \leq 0,$$

c'est-à-dire des incertitudes $\{r_1, r_2, r_3\}$-dissipatives (et non structurées).

Spécifications pour des bandes de fréquences. Dire qu'un nombre complexe est
$$\{p_1, p_2, p_3\}\text{-structuré, } \{r_1, r_2, r_3\}\text{-dissipatif}$$
signifie qu'il appartient à l'intersection d'une droite (si $p_3 = 0$) ou un cercle, avec un demi-plan (si $r_3 = 0$) ou un disque. Ainsi $(\mathrm{j}\omega)^{-1}$ est sur l'axe imaginaire et est borné en fréquence $\omega \in [\ \underline{\omega}\ \ \overline{\omega}\ ]$ s'il est $\{0, 1, 0\}$-structuré, $\{2, -\mathrm{j}(\underline{\omega} + \overline{\omega}), 2\underline{\omega}\overline{\omega}\}$-dissipatif. $(\mathrm{j}\omega)^{-1}$ est sur l'axe imaginaire et couvre les hautes fréquences $\omega \geq \underline{\omega} \geq 0$ s'il est $\{0, 1, 0\}$-structuré, $\{0, -\mathrm{j}\underline{\omega}, 2\underline{\omega}^2\}$-dissipatif. $e^{-\mathrm{j}\omega}$ est sur le cercle unité et borné en fréquence $\omega \in [\ \underline{\omega}\ \ \overline{\omega}\ ]$ s'il est $\{-1, 0, 1\}$-structuré, $\{2\cos\frac{\overline{\omega}-\underline{\omega}}{2}, -e^{\mathrm{j}\frac{\overline{\omega}+\underline{\omega}}{2}}, 0\}$-dissipatif.

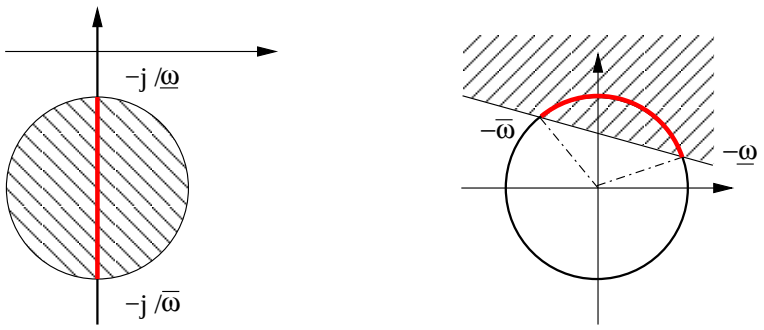


FIGURE 1.1 – Bandes de fréquences comme intersections d'une courbe et un domaine

Incertitudes scalaires réelles. La définition ci-dessus s'étend par une simple rotation pour décrire des incertitudes δ réelles définies dans un intervalle $\delta \in [\underline{\delta}\ \ \overline{\delta}]$. Elles sont alors $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurées, $\{2\underline{\delta}\overline{\delta}, -(\underline{\delta} + \overline{\delta}), 2\}$-dissipatives.

1.3.4 Zone-morte

Les outils théoriques que nous développons prennent leur origine dans l'étude de la robustesse des systèmes linéaires. Cependant, nous allons également voir qu'ils permettent d'aborder l'étude de systèmes non-linéaires, ou du moins de systèmes avec des non-linéarités isolées. Nous nous concentrons plus particulièrement sur l'une d'elle : la zone-morte, définie comme suit.

$$w = \mathrm{dz}(z) : \begin{cases} w = z + 1 & \text{si } z \leq -1 \\ w = 0 & \text{si } |z| \leq 1 \\ w = z - 1 & \text{si } z \geq 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

Une représentation graphique de cette fonction est donnée dans la Figure 1.2.

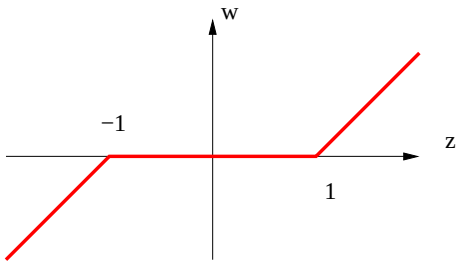


FIGURE 1.2 – Opérateur zone-morte

Cette fonction non-linéaire est particulièrement utilisée dans la littérature, entre autre pour modéliser des saturations : $\mathrm{sat}(z) = z - \mathrm{dz}(z)$. Une représentation graphique de la fonction saturation est donnée dans la Figure 1.3.

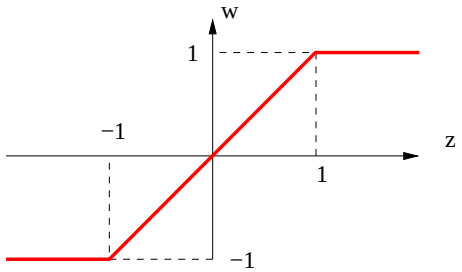


FIGURE 1.3 – Opérateur saturation

Ici la zone-morte et la saturation sont définies en les supposant symétriques et avec des seuils de valeur 1. Il est trivialement possible de définir des zones-mortes symétriques avec d'autres seuils $z_s > 0$ en considérant la fonction $z_s \mathrm{dz}(z/z_s)$. Nous n'abordons pas le cas de zones-mortes dissymétriques.

Inclusion de la zone-morte dans un opérateur incertain. Les techniques que nous utilisons sont issues de la commande robuste. Pour cette raison, la zone-morte est par la suite abordée en l'incluant dans une famille d'opérateurs incertains bornés. La stratégie est de démontrer la stabilité (ou la performance) d'un système vis-à-vis de tous les opérateurs bornés et d'en déduire

de façon pessimiste, que la propriété est également satisfaite pour tout élément de la famille, donc pour la zone-morte. Deux types de choix d'opérateurs bornés seront effectués.

Le premier suppose qu'aucune information n'est connue sur le signal z. Dans ce cas, la seule information (en termes de bornes sur le gain de l'opérateur) est que la zone-morte est inclue dans les réalisations de l'opérateur incertain $\nabla_{[0\ 1]}$ tel que

$$w(t) = \nabla_{[0\ 1]}(t)z(t) \ \ , \ \ 0 \leq \nabla_{[0\ 1]}(t) \leq 1 \ \ \forall t \geq 0.$$

$\nabla_{[0\ 1]}$ est une incertitude, variant dans le temps, $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurée, $\{0, -1, 2\}$-dissipative.

Le second type d'opérateur incertain que nous considérerons sera sous l'hypothèse que z est un signal borné tel que $|z| \leq \bar{z}$ où $\bar{z} \leq 1$. Dans ce cas, comme l'indique la Figure 1.4, il est possible d'inclure la zone-morte dans un secteur plus réduit et de définir l'opérateur $\nabla_{[0\ (\bar{z}-1)/\bar{z}]}$ tel que

$$w(t) = \nabla_{[0\ (\bar{z}-1)/\bar{z}]}(t)z(t) \ \ , \ \ 0 \leq \nabla_{[0\ (\bar{z}-1)/\bar{z}]}(t) \leq \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}} \ \ \forall t \geq 0.$$

$\nabla_{[0\ (\bar{z}-1)/\bar{z}]}$ est une incertitude, variant dans le temps, $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurée, $\{0, \frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}, 2\}$-dissipative.

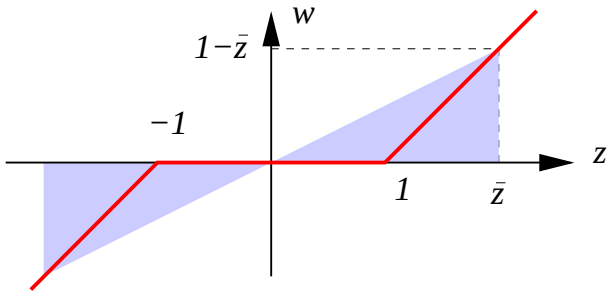


FIGURE 1.4 – Opérateur zone-morte en tant qu'élément des opérateurs bornés dans un secteur

Dérivées de la zone-morte. Les signaux sont définis dans ce document au sens des distributions. En cela, il est possible de définir les dérivées du signal $w = \mathrm{dz}(z)$ qui ont comme propriétés que $w = \mathcal{I}\dot{w}$, $\dot{w} = \mathcal{I}\ddot{w}$, etc. Etant donné la définition de la fonction zone-morte, on définit comme suit la fonction $\dot{\mathrm{dz}}$ entre les signaux $\dot{w}$, $\dot{z}$ et z :

$$\dot{w} = \dot{\mathrm{dz}}(\dot{z}, z) : \begin{cases} \dot{w} = 0 & \text{si } |z| \leq 1 \\ \dot{w} = \dot{z} & \text{si } |z| > 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

La façon d'aborder cet opérateur non-linéaire se fait dans la suite de ce document en l'incluant comme réalisation particulière d'un opérateur incertain. A la différence de l'opérateur zone-morte, cet opérateur relatif aux dérivées ne prend que deux valeurs possibles. $\dot{\mathrm{dz}}$ est inclus dans l'incertitude temps-variant suivante

$$\dot{w}(t) = \nabla_{\{0,1\}}(t)\dot{z}(t) \ \ : \ \ \nabla_{\{0,1\}}(t) \in \{\ 0\ ,\ 1\ \} \ \ \forall t \geq 0.$$

1.4 Systèmes dynamiques

1.4.1 Systèmes linéaires usuels

Les représentations dans l'espace d'état des systèmes se font à l'aide d'une application linéaire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \vartheta x \ \{\updownarrow n\} \\ z_\Delta \ \{\updownarrow p_\Delta\} \\ g \ \{\updownarrow p_g\} \\ y \ \{\updownarrow p_y\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_v & B_u \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta v} & D_{\Delta u} \\ C_g & D_{g\Delta} & D_{gv} & D_{gu} \\ C_y & D_{y\Delta} & D_{yv} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \ \{\updownarrow n\} \\ w_\Delta \ \{\updownarrow m_\Delta\} \\ v \ \{\updownarrow m_v\} \\ u \ \{\updownarrow m_y\} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

La notation $x \ \{\updownarrow \ n\}$ est utilisée pour indiquer de façon compacte que le vecteur x est composé de n lignes. Il peut être à valeurs réelles ou complexes tout comme les matrices définissant le système.

Même si nous allons nous concentrer sur l'étude des systèmes à temps continu, les modèles sont indifféremment à temps continu ou discret. Ainsi ϑ est au choix

- l'opérateur dérivée : $[\vartheta x](t) = \dot{x}(t)$ (dans le cas de systèmes à temps continu)
- l'opérateur avance : $[\vartheta x]_k = x_{k+1}$ (dans le cas de systèmes à temps discret décrits par l'opérateur avance)
- l'opérateur variation : $[\vartheta x]_k = (x_{k+1} - x_k)/T_s$ (dans le cas de systèmes à temps discret décrits en termes de variations, et où T_s est la période d'échantillonnage)

Si x est l'état du système, les autres vecteurs de sorties/entrées sont :

- z_Δ/w_Δ sont des signaux exogènes utilisés par la suite pour définir des modèles LFT à l'aide d'un bouclage $w_\Delta = \Delta z_\Delta$ avec une matrice Δ d'opérateurs incertains.
- g/v sont des signaux dits "de performance". Ils sont utilisés pour spécifier des caractéristiques entrées/sorties au système. Ils permettent ainsi par exemple de considérer les effets de perturbations v sur un ensemble de variables g.
- y/u sont les signaux physiques correspondant aux actionneurs/capteurs disponibles pour réaliser une commande.

Les systèmes considérés par la suite sont le plus souvent invariants dans le temps (LTI), mais le cas où les matrices définissant le système sont variantes dans le temps (LTV) sera également abordé.

1.4.2 Systèmes descripteurs

Les systèmes descripteurs se définissent le plus souvent dans la littérature sous la forme $E\dot{x} = Ax + B_u u$. Mais de façon plus générale, cela revient à introduire une matrice multipliant

à gauche le vecteur image de l'équation (1.12).

$$\begin{matrix}\{p_x\updownarrow\}\\ \{p_\Delta\updownarrow\}\\ \{p_g\updownarrow\}\\ \{p_y\updownarrow\}\end{matrix}\overbrace{\begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi}\\ E_{\Delta x} & E_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{\Delta\pi}\\ E_{gx} & E_{g\Delta} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi}\\ E_{yx} & E_{y\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & E_{y\pi}\end{bmatrix}}^{\mathcal{E}}\begin{pmatrix}\vartheta x\ \{\updownarrow n\}\\ z_\Delta\ \{\updownarrow p_\Delta\}\\ g\ \{\updownarrow p_g\}\\ y\ \{\updownarrow p_y\}\\ \pi\ \{\updownarrow p_\pi\}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_v & B_u\\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta v} & D_{\Delta u}\\ C_g & D_{g\Delta} & D_{gv} & D_{gu}\\ C_y & D_{y\Delta} & D_{yv} & D_{yu}\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}x\ \{\updownarrow n\}\\ w_\Delta\ \{\updownarrow m_\Delta\}\\ v\ \{\updownarrow m_v\}\\ u\ \{\updownarrow m_y\}\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Dans la définition que nous adoptons pour les systèmes descripteurs, nous faisons les choix suivants :

— Nous allons considérer, ce qui est assez légitime, que g et y sont des sorties pures. Elles ne participent pas aux dynamiques ni aux autres mesures. Elles n'influent pas l'une sur l'autre non plus. Elles s'expriment comme des fonctions explicites. D'où la forme des deux colonnes de la matrice $\mathcal{E}$ composées de matrices nulles et de l'identité.

— Par définition la matrice $E_{\Delta\Delta}$ est carrée et par hypothèse elle est inversible. En effet dans le cadre d'un bouclage avec $w_\Delta = \Delta z_\Delta$ la matrice $E_{\Delta\Delta} - \Delta D_{\Delta\Delta}$ doit être inversible pour toutes les incertitudes (dont l'incertitude nulle). Le modèle fractionnaire incertain est décrit par les équations suivantes

$$\begin{bmatrix} E_{xx}(\Delta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi}(\Delta)\\ E_{gx}(\Delta) & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi}(\Delta)\\ E_{yx}(\Delta) & \mathbf{0} & \mathbf{1} & E_{y\pi}(\Delta)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\vartheta x\\ g\\ y\\ \pi\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(\Delta) & B_v(\Delta) & B_u(\Delta)\\ C_g(\Delta) & D_{gv}(\Delta) & D_{gu}(\Delta)\\ C_y(\Delta) & D_{yv}(\Delta) & D_{yu}(\Delta)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\\ u\end{pmatrix}$$

où les matrices sont des combinaisons linéaires

$$\begin{bmatrix} E_{xx}(\Delta) & E_{x\pi}(\Delta)\\ E_{gx}(\Delta) & E_{g\pi}(\Delta)\\ E_{yx}(\Delta) & E_{y\pi}(\Delta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi}\\ E_{gx} & E_{g\pi}\\ E_{yx} & E_{y\pi}\end{bmatrix} + M(\Delta)\begin{bmatrix} E_{\Delta x} & E_{\Delta\pi}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A(\Delta) & B_v(\Delta) & B_u(\Delta)\\ C_g(\Delta) & D_{gv}(\Delta) & D_{gu}(\Delta)\\ C_y(\Delta) & D_{yv}(\Delta) & D_{yu}(\Delta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_v & B_u\\ C_g & D_{gv} & D_{gu}\\ C_y & D_{yv} & D_{yu}\end{bmatrix} + M(\Delta)\begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta x} & D_{\Delta\pi}\end{bmatrix}$$

vis-à-vis de la matrice rationnelle

$$M(\Delta) = \left(\begin{bmatrix} E_{x\Delta}\\ E_{g\Delta}\\ E_{y\Delta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta\\ D_{g\Delta}\\ D_{y\Delta}\end{bmatrix}\Delta\right)(E_{\Delta\Delta} - \Delta D_{\Delta\Delta})^{-1}.$$

— Le caractère descripteur réside en partie dans l'introduction de signaux exogènes π n'ayant pas de dynamique propre, mais réalisant un couplage avec les autres signaux décrivant le système et ses performances. Comme nous le verrons plus loin, ces signaux π peuvent par exemple être utilisés pour une modélisation affine d'incertitudes paramétriques entrant de façon rationnelle dans un modèle LTI usuel.

— L'introduction du vecteur π induit sans surprise que des équations supplémentaires définissent les relations à ce vecteur π. C'est ainsi que p_x peut ne pas être égal à n.

On peut noter que la définition que nous donnons des systèmes descripteurs est plus générale que le cas le plus couramment traité dans la littérature, à savoir le cas où $p_x = n$ et :

$$\begin{array}{lll} E_{xx} = E & E_{x\Delta} = \mathbf{0}_{n,p_\Delta} & E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0} \\ E_{\Delta x} = \mathbf{0}_{p_\Delta,n} & E_{\Delta\Delta} = \mathbf{1}_{p_\Delta} & E_{p_\Delta\pi} = \mathbf{0}_{p_\Delta,0} \\ E_{gx} = \mathbf{0}_{p_g,n} & E_{g\Delta} = \mathbf{0}_{p_g,p_\Delta} & E_{p_g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0} \\ E_{yx} = \mathbf{0}_{p_y,n} & E_{y\Delta} = \mathbf{0}_{p_y,p_\Delta} & E_{p_y\pi} = \mathbf{0}_{p_y,0} \end{array} \tag{1.14}$$

Comme ce cas est probablement le plus connu, nous lui porterons une attention particulière dans la suite et nous y ferons référence sous l'appellation **système descripteur classique**.

Pour l'étude des systèmes descripteurs classiques, la majorité des travaux de recherche font appel à un changement de base qui conduit le système sous forme dite de Weierstrass. Ce changement de base est tel que

$$E = U \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad , \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^{-1} x = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Les équations du système s'écrivent alors

$$\begin{aligned} U \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \vartheta\hat{x}_1 - AV_2\hat{x}_2 &= AV_1\hat{x}_1 + B_\Delta w_\Delta + B_v v + B_u u \\ z_\Delta - C_\Delta V_2\hat{x}_2 &= C_\Delta V_1\hat{x}_1 + D_{\Delta\Delta} w_\Delta + D_{\Delta v} v + D_{\Delta u} u \\ g - C_g V_2\hat{x}_2 &= C_g V_1\hat{x}_1 + D_{g\Delta} w_\Delta + D_{gv} v + D_{gu} u \\ y - C_y V_2\hat{x}_2 &= C_y V_1\hat{x}_1 + D_{y\Delta} w_\Delta + D_{yv} v + D_{yu} u \end{aligned}$$

où l'on remarque que le signal $\hat{x}_2$ a exactement le rôle du signal π de la notation (1.13) et où la matrice $E_{xx} = U \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ n'est pas carrée. La formulation que nous proposons inclut donc les représentations classiques mais permet aussi de les réécrire sous d'autres formes qui exhibent la structure induite par le noyau non vide de E.

L'autre intérêt de la forme plus générale que nous considérons tient en une plus grande flexibilité de représentation de systèmes incertains. Pour s'en convaincre, prenons l'exemple très simple suivant :

$$(1 + \delta_1)\dot{x} = (-1 + \delta_2)x.$$

Sa représentation sous forme descripteur est directe en posant $w_{\Delta 1} = \delta_1(-\dot{x})$ et $w_{\Delta 2} = \delta_2 x$:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la forme LFT usuelle, il suffit dans ces équations de remplacer dans la seconde ligne $\dot{x}$ par sa valeur ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Cependant, cette formulation usuelle ajoute de la complexité car elle repose en réalité sur la factorisation suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} = \left(-1 + \tfrac{\delta_1+\delta_2}{1+\delta_1}\right) x &= \left(-1 + \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\delta_2}{1+\delta_1} \\ 1 \end{bmatrix}\right) x \\ &= \left(-1 + \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\delta_1 & \delta_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) x\end{aligned}$$

qui est avouons-le non triviale.

Chapitre 2

Séparation topologique et commande robuste

L'analyse des systèmes descripteurs définis dans le chapitre précédent est menée dans le Chapitre 4 en se plaçant dans le cadre de travail dit de Séparation Topologique. Ce cadre de travail a été formalisé par Safonov dans les années 80 [207]. S'il est particulièrement adapté à l'analyse robuste des systèmes, ce cadre de travail est à notre avis malheureusement mal connu. Deux raisons expliquent le peu d'emploi de ce cadre de travail. L'une d'elles est que le cadre de travail de la théorie de Lyapunov permet de résoudre dans le domaine temporel bon nombre de problèmes tout aussi simplement qu'avec la Séparation Topologique. Une autre raison est le fort développement du cadre de travail des IQC (contraintes intégrales quadratiques) et celui de la valeur singulière structurée μ, qui sont très adaptés aux problèmes formulés dans le domaine fréquentiel.

Dans ce chapitre, nous montrons que ces différents cadres de travail sont intimement liés. La Séparation Topologique peut même se voir comme un moyen de faire le lien entre théorie de Lyapunov et IQC. Notre démarche est de réinterpréter certains résultats classiques de l'Automatique sous l'angle de la Séparation Topologique. Nous le faisons sans entrer dans tous les détails mathématiques pour ne pas alourdir le propos. Le Chapitre 3 qui suit est lui consacré à un exposé rigoureux de la contribution centrale de ce document, à savoir la Séparation Intégrale Quadratique.

2.1 Bien-Posé et Séparation Topologique

La Séparation Topologique s'intéresse au problème très général de bien-posé du schéma de la Figure 2.1. Dans ce schéma w et z sont les signaux internes de l'interconnexion entre deux opérateurs G et F. Ces deux opérateurs sont sous forme implicite, mais formellement, w est définie comme l'image de z par l'opérateur G et z est l'image de w par l'opérateur F. Aux signaux internes s'ajoutent les signaux $\bar{w}$ et $\bar{z}$ qui viennent perturber les équations $G(z,w)=0$ et $F(w,z)=0$. Le problème de bien-posé est de déterminer si les signaux internes sont bornés. Pour ne pas alourdir les notations, on omet les dimensions des différents signaux (la notation

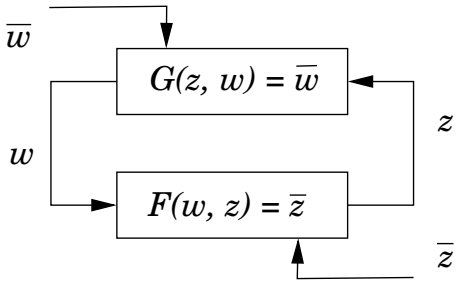


FIGURE 2.1 – Interconnexion de deux opérateurs avec entrées de perturbation

$w \in L_2$ est utilisée comme abréviation de $w \in L_2^{m\times p}[\mathbf{\Sigma}]$).

Définition 2 *L'interconnexion entre les opérateurs G et F de la Figure 2.1 est dite bien-posée si pour toutes perturbations bornées $(\bar{w}, \bar{z}) \in L_2 \times L_2$, les signaux internes sont bornés $(w, z) \in L_2 \times L_2$:*

$$\exists\gamma \quad : \quad \forall(\bar{w}, \bar{z}) \in L_2 \times L_2 \ , \ \left\| \begin{array}{c} w - w_0 \\ z - z_0 \end{array} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{array}{c} \bar{w} \\ \bar{z} \end{array} \right\| \tag{2.1}$$

où (w_0, z_0) est solution aux équations sans perturbations $G(z, w) = 0$, $F(w, z) = 0$.

Remarque 1 *La définition du bien-posé que nous adoptons suit celle de [109]. Elle se distingue de celle donnée par exemple dans [140] où le "bien-posé" désigne le fait que les signaux sont définis de façon unique et le fait qu'ils soient bornés est désigné sous le terme "stabilité". [207, 257, 229], adoptent également le terme de "stabilité" ou "stabilité à gain fini" pour la propriété (2.1) et évacuent la question de l'unicité des signaux. Nous choisissons volontairement de ne pas adopter le terme de "stabilité" même si ce choix est critiquable. En effet nous préférons conserver le terme "stabilité" à sa définition au sens de Lyapunov pour les systèmes dynamiques. Bien entendu, comme nous allons le voir d'ici peu, le "bien-posé" d'une boucle (signaux bornés) est intimement lié à la stabilité des systèmes.*

Pour illustrer la définition du bien-posé, prenons deux applications linéaires :

$$G(z, w) = A_1 z - w \ , \ \ F(w, z) = A_2 w - z.$$

Le schéma d'interconnexion implique alors que w et z sont respectivement solutions des équations suivantes

$$(A_1A_2 - \mathbf{1})w = A_1\bar{z} + \bar{w} \ , \ \ (A_2A_1 - \mathbf{1})z = A_2\bar{w} + \bar{z}.$$

w est donc unique si et seulement si la matrice $A_1A_2 - \mathbf{1}$ est non singulière (A_1A_2 n'a pas de valeur propre égale à 1) et on trouve $w = (A_1A_2 - \mathbf{1})^{-1}(A_1\bar{z} + \bar{w})$ qui est borné. Dans le cas contraire w appartient à un sous-espace et peut prendre des valeurs non-bornées. Si w est unique on déduit également que $z = A_2w - \bar{z}$ est également unique et borné.

Le théorème qui suit reprend le théorème 2.1 dans [207] qui généralise les résultats de [257]. On trouve également une réécriture de ce résultat très général dans [229]. La réécriture ci-dessous est une simplification de la véritable formulation. Elle se veut plus simple à lire et

évite de redéfinir de nombreux concept mathématiques (fonctions de classe K, voisinages, gains des opérateurs non-linéaires, etc.). Le lecteur est invité à consulter la formulation exacte dans [207].

Théorème 1 *L'interconnexion entre les opérateurs G et F de la Figure 2.1 est bien-posée si et seulement si il existe un séparateur topologique $\theta : L_2 \times L_2 \to \boldsymbol{R}$ et trois fonctions positives strictement croissantes $\phi_1 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ et $\phi_2 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ nulles en zéro ($\phi_1(0) = 0$, $\phi_2(0) = 0$) telles que*

$$\begin{array}{l} \mathcal{G}^I(\bar{w}) = \{(w,z) \ : \ G(z,w) = \bar{w}\} \subset \{(w,z) \ : \ \theta(w,z) \leq \phi_2(||\bar{w}||)\} \\ \mathcal{F}(\bar{z}) = \{(w,z) \ : \ F(w,z) = \bar{z}\} \subset \{(w,z) \ : \ \theta(w,z) > -\phi_1(||\bar{z}||)\}. \end{array} \tag{2.2}$$

On dit alors que θ sépare le graphe de F noté $\mathcal{F}$, du graphe inverse de G noté $\mathcal{G}^I$.

Pour l'exemple des deux applications linéaires traité ci-dessus, un séparateur solution du théorème est le suivant

$$\theta(w,z) = \begin{pmatrix} w^* & z^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -A_1 \\ -A_1^* & A_1^* A_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

En effet, pour les signaux de $\mathcal{G}^I$ (*i.e.* $G(z,w) = A_1 z - w = \bar{w}$) on trouve

$$\theta(w,z) = \bar{w}^* \bar{w} = \|\bar{w}\|^2 = \phi_2(\|\bar{w}\|).$$

Pour les signaux de $\mathcal{F}$ (*i.e.* $F(w,z) = A_2 w - z = \bar{z}$) on trouve

$$\begin{array}{rl} \theta(w,z) = & (w^*(A_2^* A_1^* - \mathbf{1}) - \bar{z}^* A_1^*)((A_1 A_2 - \mathbf{1})w - A_1 \bar{z}) \\ & = \|(A_1 A_2 - \mathbf{1})w - A_1 \bar{z}\|^2 \\ & \geq \|(A_1 A_2 - \mathbf{1})w\|^2 - \|A_1 \bar{z}\|^2 > -\|A_1 \bar{z}\|^2 = -\phi_1(\|\bar{z}\|) \end{array}$$

car le terme $\|(A_1 A_2 - \mathbf{1})w\|$ est strictement positif pour tout w non nul dès lors que l'interconnexion est bien-posée ($A_1 A_2 - 1$ non singulière).

Remarque 2 *Rigoureusement la preuve de séparation topologique nécessite de trouver les fonctions ϕ_1 et ϕ_2. On peut aussi remarquer que pour des signaux de perturbation nuls $(\bar{w}, \bar{z}) = (0,0)$ la condition de séparation quadratique se résume à montrer*

$$\begin{array}{l} \mathcal{G}^I(0) = \{(w,z) \ : \ G(z,w) = 0\} \subset \{(w,z) \ : \ \theta(w,z) \leq 0\} \\ \mathcal{F}(0) = \{(w,z) \ : \ F(w,z) = 0\} \subset \{(w,z) \ : \ \theta(w,z) > 0\} \end{array}$$

c'est-à-dire que le séparateur est négatif ou nul sur le graphe inverse de G et strictement positif sur le graphe de F (pour des signaux (w,z) non nuls). Par souci de simplifier le propos, on se contentera dans la suite de ce chapitre de ces conditions simplifiées.

2.2 Séparation Topologique et Lyapunov

Nous allons maintenant aborder le lien entre Séparation Topologique telle qu'énoncée dans la section précédente et la théorie de Lyapunov. Pour cela, nous allons considérer le problème de la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre $x = 0$ d'un système dynamique décrit par une équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x,t)$. De façon à faire le lien avec la Séparation Topologique nous réécrivons le système sous la forme suivante :

$$\overbrace{\int_0^t z(\tau)d\tau - w(t)}^{G(z=\dot{x},w=x)} = \bar{w}(t) \ , \ \overbrace{f(w,t) - z(t)}^{F(w,z)} = \bar{z}(t) \tag{2.3}$$

où G est l'opérateur intégration à conditions initiales nulles et $-\bar{w}$ joue le rôle des conditions initiales ; F est une fonction dépendant du temps et $\bar{z}$ un vecteur de perturbations.

Par définition, $x = 0$ est un point d'équilibre si pour des conditions initiales nulles ($\bar{w} = 0$) et en l'absence de perturbations ($\bar{z} = 0$), la seule solution aux équations (2.3) est $(w,z) = (x,\dot{x}) = (0,0)$. Cette propriété est incluse dans la propriété de bien-posé donnée par (2.1). En effet pour $(\bar{w},\bar{z}) = (0,0)$, si le système est bien-posé on trouve $(w,z) = (w_0,z_0) = (0,0)$.

Par définition, $x = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable si pour $\bar{z} = 0$ et toute condition initiale $\bar{w}$ bornée, l'état du système x est lui aussi borné (et donc à fortiori sa dérivée). On retrouve précisément là la définition du bien-posé des signaux internes $(z = \dot{x}, w = x)$.

Ainsi la définition de la stabilité globale de l'équilibre $x = 0$ de $\dot{x}(t) = f(x,t)$ et le problème du bien-posé de la boucle (2.3) coïncident. Dans le cadre de travail de la théorie de Lyapunov, la propriété est équivalente à l'existence d'une fonction $V(x,t)$ telle que $V(0,t) = 0$, il existe une fonction positive ϕ telle que $\phi(\|x(t)\|) \geq V(x,t) \geq 0$ pour tout x et la dérivée est négative $\dot{V}(x,\dot{x},t) < 0$ le long des trajectoires $\dot{x}(t) = f(x,t)$. Cette fonction de Lyapunov V permet de définir un séparateur topologique prouvant le bien-posé de la boucle (2.3) :

$$\theta(w,z) = \int_0^\infty -\dot{V}(w,z,t)dt$$

On trouve en effet que pour les signaux de $\mathcal{G}^I(x_0)$ (*i.e.* $w = x$, $z = \dot{x}$, $x(0) = x_0$) on a

$$\begin{aligned}\theta(x,\dot{x}) = \int_0^\infty -\frac{\partial V}{\partial x}(x,\dot{x},t)\frac{dx}{dt}(t)dt &= \int_0^\infty -dV \\ &= V(x(0),0) - \lim_{\bar{t}\to\infty} V(x(\bar{t}),\bar{t}) \leq V(x_0,0) \leq \phi(\|x_0\|)\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la première condition de (2.2) avec $\phi_2 = \phi$. Pour les signaux de $\mathcal{F}$ (*i.e.* $z(t) = f(w,t)$) on a trivialement $\theta(w,z) > 0$, car c'est l'intégrale d'une fonction ($-\dot{V}(w,z,t) = -\dot{V}(x,f(x,t),t)$) positive à chaque instant.

On constate que la propriété $V(x,t) > 0$ correspond au fait que le séparateur est négatif pour les solutions de l'opération intégration $x = \int \dot{x}$ et la propriété $\dot{V}(x,\dot{x},t) < 0$ correspond

au fait que le séparateur est positif pour les solutions de $F(w,z)=0$. Le résultat de séparation topologique est ainsi intimement relié à la théorie de Lyapunov. La différence essentielle est que la recherche d'une fonction de Lyapunov est remplacée par la recherche du séparateur θ, sans qu'il apparaisse à ce stade que cette recherche soit plus aisée.

2.3 Séparation Topologique et Dissipativité

Le fait de se placer dans le cadre de la séparation topologique a comme conséquence principale qu'il devient alors naturel de manipuler des systèmes représentés par des boucles telles que les représentations LFT. Sans se limiter au cas linéaire, le cadre de la séparation topologique permet naturellement de considérer la stabilité d'un système non-linéaire bouclé par un opérateur incertain borné en norme (voir page 25) :

$$\dot{x} = f_1(x, w_\Delta, t) \ , \ z_\Delta = f_2(x, w_\Delta, t) \ , \ w_\Delta = \Delta z_\Delta \ : \ \Delta \in \mathbf{\nabla}_{n2n}.$$

Dans ce cas, en posant $z = \left(\begin{array}{cc} \dot{x}^* & z_\Delta^* \end{array} \right)^*$ et $w = \left(\begin{array}{cc} x^* & w_\Delta^* \end{array} \right)^*$, la boucle (2.3) est constituée d'un opérateur G regroupant l'intégrateur et l'incertitude

$$G\,(z,\ w) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{array} \right] z - w,$$

et d'une fonction non-linéaire F regroupant les deux équations du système :

$$F\,(w,\ z) = \left(\begin{array}{c} f_1(x, w_\Delta, t) \\ f_2(x, w_\Delta, t) \end{array} \right) - z.$$

En supposant que V est une fonction de Lyapunov pour le système sans incertitude, le choix suivant de séparateur topologique vient naturellement

$$\theta(w,z) = \int_0^\infty -\dot{V}(x, \dot{x}, t)dt + \tau(\|w_\Delta\|^2 - \frac{1}{\gamma^2}\|z_\Delta\|^2)$$

avec $\tau > 0$. Cette fonction est trivialement négative sur $\mathcal{G}^I$. Elle permet de prouver la stabilité robuste s'il existe un τ tel que le séparateur est positif sur $\mathcal{F}$. Si un tel τ existe, on prouve alors la stabilité robuste avec V fonction de Lyapunov pour toutes les incertitudes $\Delta \in \mathbf{\nabla}_{n2n}$.

Le cas que nous venons de considérer se généralise aisément à la stabilité d'un système non-linéaire bouclé par un opérateur incertain quelconque, dès lors que les signaux w_Δ et z_Δ appartenant à $w_\Delta = \Delta z_\Delta$ sont contraints au travers d'une fonction à valeurs réelles $h(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t)$ par une inégalité de la forme :

$$\int_0^{\bar{t}} h(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t)dt \leq 0 \qquad \forall \bar{t} \geq 0.$$

Dans la terminologie proposée par Willems [250], l'opérateur Δ est alors dit dissipatif avec $h_1 = -h$ comme *"supply rate"* (taux d'alimentation) et une *"storage function"* (fonction d'accumulation) nulle [1].

Du point de vue de la séparation topologique, le bien-posé de la boucle formée par F et G sera démontré par des séparateurs topologiques de la forme

$$\theta(w,z) = \int_0^\infty \Big(-\dot{V}(x,\dot{x},t) + h(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t) \Big)\, dt$$

où V a comme précédemment les caractéristiques d'une fonction de Lyapunov. La condition de positivité du séparateur topologique sur les trajectoires du système $(\mathcal{F})$ implique que la condition suivante

$$\int_0^{\bar{t}} \Big(-\dot{V}(x,\dot{x},t) + h(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t) \Big)\, dt > 0$$

est satisfaite pour $\bar{t}$ suffisamment grand. Cette condition s'écrit aussi

$$V(x(0),0) + \int_0^{\bar{t}} h(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t) dt > V(x(\bar{t}), \bar{t}).$$

Cette propriété vue du système dynamique $\dot{x} = f_1(x, w_\Delta, t)$, $z_\Delta = f_2(x, w_\Delta, t)$ dont l'état est x, les entrées sont w_Δ et les sorties sont z_Δ, signifie qu'il est dissipatif avec $h_2(z_\Delta(t), w_\Delta(t), t) = h(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t)$ comme taux d'alimentation et V comme fonction de stockage. On retrouve ainsi le résultat classique de Willems [250] selon lequel une interconnexion de deux systèmes (ici $w_\Delta = \Delta z_\Delta$ bouclé avec $\dot{x} = f_1(x, w_\Delta, t)$, $z_\Delta = f_2(x, w_\Delta, t)$) est stable s'ils sont dissipatifs avec des taux d'accumulation satisfaisants $h_1(w_\Delta(t), z_\Delta(t), t) = -h_2(z_\Delta(t), w_\Delta(t), t)$.

2.4 Le problème de Lur'e

La séparation topologique est par définition adaptée à l'analyse de systèmes bouclés. Le problème de Lur'e est de cette classe. Il considère un système à une entrée et une sortie, LTI, représenté par sa fonction de transfert $F(\hat{w}, \hat{z}) = T\hat{w} - \hat{z}$, où $\hat{w}(s)$ et $\hat{z}(s)$ sont les transformées de Laplace de $w(t)$ et $z(t)$. Ce système est bouclé avec un opérateur non-linéaire et éventuellement variant dans le temps, de gain borné dans un secteur :

$$G(z,w) = \psi(z) - w \quad , \quad \frac{\psi(z,t)}{z(t)} \in [\, -k_2,\ -k_1\,] \quad k_2 > k_1.$$

1. La fonction d'accumulation est une fonction de l'état du système. N'ayant fait aucune hypothèse sur l'existence de dynamiques dans le "système" Δ, la fonction d'accumulation est naturellement nulle.

L'appartenance de $\frac{\psi(z,t)}{z(t)}$ au segment $[\ -k_2,\ -k_1\ ]$ s'écrit également sous forme d'une inégalité quadratique comme suit :

$$\begin{pmatrix} z(t) & \psi(z,t) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1k_2 & \frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ \frac{1}{2}(k_1+k_2) & 1 \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{pmatrix} z(t) \\ \psi(z,t) \end{pmatrix} \leq 0$$

qui, si elle est vraie pout tout $t \in \boldsymbol{R}_+$, reste vraie quand on en prend l'intégrale. On en déduit donc l'IQC suivante

$$\theta(\hat{w},\hat{z}) = \left\langle \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0$$

satisfaite pour tous les signaux du graphe inverse $\mathcal{G}^I(0)$. On tient là une candidate à la séparation topologique. La boucle sera bien-posée si $\theta(\hat{w},\hat{z}) > 0$ pour les éléments non nuls du graphe $\mathcal{F}(0)$ ce qui est garanti si pour tout $s \in \boldsymbol{C}_+$:

$$\begin{bmatrix} T^*(s) & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} T(s) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0$$

c'est-à-dire si

$$\left(T(s) + \frac{1}{2}(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})\right)^* \left(T(s) + \frac{1}{2}(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})\right) > \frac{1}{4}(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2})^2.$$

Graphiquement, cela revient à dire que l'image de $\boldsymbol{C}_+$ par $T(s)$ est à l'extérieur du disque de diamètre l'intervalle $[\ -1/k_1,\ -1/k_2\ ]$. C'est exactement le critère du cercle : la stabilité est obtenue en traçant $T(\mathrm{j}\omega)$ pour $\omega \in \boldsymbol{R}$ et ensuite en déterminant, en fonction du nombre de pôles instables de T, de quel côté se trouve $T(s)$ pour $s \in \boldsymbol{C}_+$ [2]. Graphiquement le graphe $\mathcal{F}(0)$ est représenté par la fonction de transfert $\frac{\hat{z}(s)}{\hat{w}(s)} = T(s)$ et le graphe inverse $\mathcal{G}^I(0)$ est représenté par $\frac{z(t)}{\psi(z,t)} \in [\ -\frac{1}{k_1},\ -\frac{1}{k_2}\ ]$. Le cercle représente le séparateur quadratique qui réalise la séparation topologique. Un exemple d'application du critère du cercle est représenté sur la Figure 2.2. La partie grisée correspond à l'image de $\boldsymbol{C}_+$ par $T(s)$.

2.5 Cas des systèmes LTI

Nous nous intéressons maintenant au cas des systèmes linéaires. Il est établi que les fonctions de Lyapunov sont alors à rechercher parmi les formes quadratiques, et ce, sans perte de généralité. Ceci s'étend à la séparation topologique. Ce résultat fort est dû à Iwasaki et Hara [109]. Nous le reformulons ci-après en employant les notations de ce document.

Théorème 2 *[109] Dans le cas où $G(z,w) = \Delta z - w$ est une incertitude appartenant à un ensemble convexe $\Delta \in \boldsymbol{\Delta} \subset \boldsymbol{C}^{m\times p}$ et où $F(w,z) = \mathcal{A}w - z$ est une application linéaire*

2. Il suffit pour cela de déterminer si pour une valeur de l'intervalle $k \in [\ -k_2,\ -k_1\ ]$ la boucle fermée est stable.

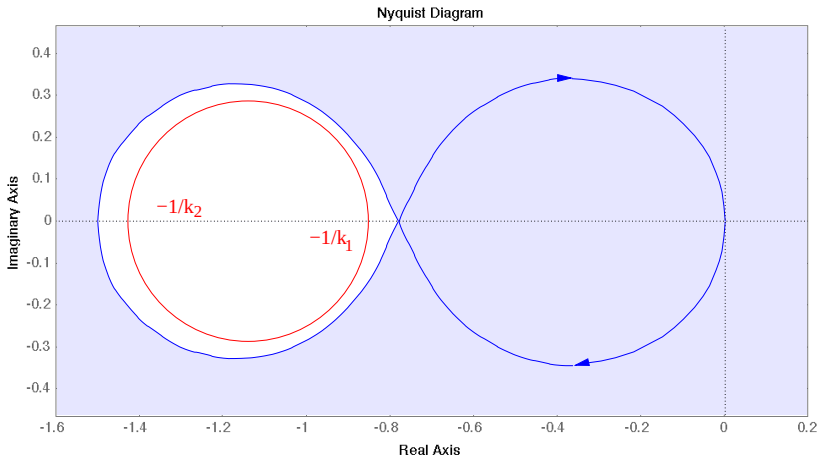


FIGURE 2.2 – Illustration du critère du cercle pour $T(s) = \frac{-(s-0.1)(s+1.5)}{(s+1)(s+2)(s-0.05)}$

($\mathcal{A} \in \boldsymbol{C}^{p\times m}$), la boucle de la Figure 2.1 est bien-posée **si et seulement si** *il existe une matrice Hermitienne Θ vérifiant les conditions suivantes*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta^* \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} &\leq \mathbf{0} \ , \ \forall \Delta \in \boldsymbol{\Delta} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{A}^* & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} &> \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

La suffisance de ce théorème est simple à établir en prenant comme séparateur topologique la forme intégrale quadratique suivante :

$$\theta(w,z) = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle . \tag{2.5}$$

Pour cette raison, le Théorème 2 est nommé théorème de **séparation quadratique** : le séparateur est construit sur la base d'une forme quadratique. En se restreignant aux incertitudes matricielles, la formule (2.4) ne fait intervenir que des inégalités matricielles, sans intégrale. Ceci explique qu'il n'est pas explicitement fait référence à la forme intégrale du séparateur topologique. Dans le Chapitre 3, le résultat sera généralisé aux opérateurs incertains. Il fera intervenir des contraintes intégrales quadratiques. On parlera dès lors de **séparation intégrale quadratique** (IQS).

Un exemple simple d'application du Théorème 2 est le problème de stabilité d'un système linéaire $\dot{x} = Ax$. Il s'agit alors de montrer que la matrice $s\mathbf{1} - A$ est non singulière pour tout $s \in \boldsymbol{C}^+$, ou, de façon équivalente, de montrer que $s^{-1}A - \mathbf{1}$ est non singulière pour tout $s^{-1} \in \boldsymbol{C}^+$. Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent le Théorème 1, cela revient au problème de bien-posé de la boucle de la Figure 2.1 où

$$G(z,w) = s^{-1}z - w \ , \ F(w,z) = Aw - z.$$

Le Théorème 2 s'applique alors en prenant

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{array} \right] \ : \ P = P^* > 0$$

qui vérifie trivialement

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & s^{-*}\mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ s^{-1}\mathbf{1} \end{array} \right] = -2\Re(s^{-1})P \leq \mathbf{0} \ , \ \forall s^{-1} \in \boldsymbol{C}^+.$$

La seconde condition de (2.4) devient alors

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{A}^* & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{array} \right] = -(A^*P + PA) > \mathbf{0}$$

c'est-à-dire l'inégalité classique de Lyapunov. On remarque également que $s^{-1}\mathbf{1}$ n'est rien d'autre que l'intégrateur. Le résultat est cohérent avec ceux de la section précédente et la fonction de Lyapunov est quadratique $V(x) = x^*Px$.

Le Théorème 2 est en réalité un corollaire dans l'article d'Iwasaki et Hara [109]. Le théorème dont il est issu est reproduit ci-dessous et envisage le cas des application linéaires variant dans le temps quand $\varsigma = t$ ou $= k$ ou dépendant des fréquences quand $\varsigma = \omega$.

Théorème 3 *[109] Dans le cas où $G(z, w) = \Delta z - w$ est une incertitude appartenant à un ensemble convexe $\Delta \in \boldsymbol{\Delta} \subset \boldsymbol{C}^{m\times p}$ et où $F(w, z) = \mathcal{A}w - z$ est défini par une fonction à valeurs matricielles ($\mathcal{A} : \boldsymbol{\Sigma} \to \boldsymbol{C}^{p\times m}$), la boucle de la Figure 2.1 est bien-posée* **si et seulement si** *il existe trois scalaires positifs $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ et $\Theta : \boldsymbol{\Sigma} \to \boldsymbol{C}^{(m+p)\times(m+p)}$, Hermitienne, vérifiant les conditions suivantes pour tout $\varsigma \in \boldsymbol{\Sigma}$:*

$$\begin{array}{l} \|\mathcal{A}(\varsigma)\| \leq \alpha_1 \\ \|\Theta(\varsigma)\| \leq \alpha_2 \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array} \right] \Theta(\varsigma) \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \ , \ \forall \Delta \in \boldsymbol{\Delta} \\ \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A}^*(\varsigma) & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta(\varsigma) \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}(\varsigma) \\ \mathbf{1} \end{array} \right] > \alpha_3 \mathbf{1}. \end{array} \tag{2.6}$$

La première condition impose que $\mathcal{A}$ doit être bornée pour que la boucle puisse être bien-posée. La seconde condition indique que le séparateur est défini par une fonction bornée. Le résultat de séparation topologique des deux dernières conditions est obtenu pour la même forme intégrale quadratique que précédemment (2.5).

Un exemple d'application de ce résultat concerne la borne supérieure de la norme H_∞ d'une matrice de transfert $T(\mathrm{j}\omega)$ où l'on cherche à monter que γ vérifie $T^*(\mathrm{j}\omega)T(\mathrm{j}\omega) < \gamma^2\mathbf{1}$, $\forall \mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$. Cette condition sur γ peut, sans perte de généralité, s'écrire comme l'existence de deux scalaires $\alpha_3 > 0$, $\tau > 0$ tels que

$$\left[\begin{array}{cc} T^*(\mathrm{j}\omega) & \mathbf{1} \end{array} \right] \overbrace{\left[\begin{array}{cc} -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right]}^{\Theta_1} \left[\begin{array}{c} T(\mathrm{j}\omega) \\ \mathbf{1} \end{array} \right] = \tau(\gamma^2\mathbf{1} - T^*(\mathrm{j}\omega)T(\mathrm{j}\omega)) > \alpha_3\mathbf{1} \ , \ \forall \mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}. \tag{2.7}$$

On reconnaît là la dernière inégalité de (2.6). En remarquant que Θ_1 vérifie également la condition suivante

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array}\right] \Theta_1 \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array}\right] = \tau(\gamma^2 \Delta^* \Delta - \mathbf{1}) \leq \mathbf{0} \ , \ \forall \Delta \ : \ \Delta^* \Delta \leq \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{1}$$

le Théorème 3 donne le résultat classique reliant la norme H_∞ à un problème de robustesse d'une boucle impliquant une incertitude bornée en norme :

Corollaire 1 *$\|T\|_\infty < \gamma$ si et seulement si la boucle formée des opérateurs suivants*

$$G_1(z_1, w_1) = \Delta z_1 - w_1 \ , \ F_1(w_1, z_1) = T(\mathrm{j}\omega) w_1 - z_1 \tag{2.8}$$

est bien-posée pour tout $\mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$ *et toute incertitude bornée en norme* $\Delta^* \Delta \leq \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{1}$.

Soient (A, B, C, D) les matrices définissant une représentation d'état de $T(\mathrm{j}\omega)$:

$$T(\mathrm{j}\omega) = D + C(\mathrm{j}\omega \mathbf{1} - A)^{-1} B.$$

Avec ces notations, la boucle formée des opérateurs (2.8) peut aussi s'écrire comme une boucle formée des opérateurs suivants :

$$G_2(z, w) = \left[\begin{array}{cc} (\mathrm{j}\omega)^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{array}\right] z - w \ , \ F_2(w, z) = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right] w - z \tag{2.9}$$

où $\mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$ et $\Delta^* \Delta \leq \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{1}$. Un séparateur quadratique pour ces "incertitudes" est

$$\Theta_2 = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]^T + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] \Theta_1 \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]^T$$

avec $P = P^*$. En appliquant le Théorème 2, le bien-posé de la boucle constituée des opérateurs (2.9) est garanti par la LMI

$$\left[\begin{array}{cc} A & B \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]^* \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A & B \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] < -\Theta = \left[\begin{array}{cc} C & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]^* \Theta_1 \left[\begin{array}{cc} C & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]. \tag{2.10}$$

Or, si on remarque que la condition (2.7) s'écrit aussi

$$\left[\begin{array}{c} (\mathrm{j}\omega \mathbf{1} - A)^{-1} B \\ \mathbf{1} \end{array}\right]^* \Theta \left[\begin{array}{c} (\mathrm{j}\omega \mathbf{1} - A)^{-1} B \\ \mathbf{1} \end{array}\right] < -\alpha_3 \mathbf{1} \tag{2.11}$$

le raisonnement ci-dessus abouti au lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) [202].

Corollaire 2 *(KYP-lemma) Pour des matrices A, B et Θ données, l'existence d'un scalaire α_3 tel que (2.11) est satisfaite pour tout* $\mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$*, est une condition équivalente à l'existence d'une solution $P = P^*$ à :*

$$\left[\begin{array}{cc} A & B \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]^* \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A & B \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] + \Theta < \mathbf{0}. \tag{2.12}$$

En développant les produit matriciels, on constate également que la condition (2.10) s'écrit

$$\left[\begin{array}{cc} A^*P + PA + \tau C^*C & PB + \tau C^*D \\ B^*P + \tau D^*C & \tau D^*D - \tau\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] < \mathbf{0}$$

que l'on reconnaît être la LMI classique pour l'analyse de la norme H_∞ d'un système décrit dans l'espace d'état par les matrices (A, B, C, D). A une nuance près. En général on prend $P > \mathbf{0}$ définie positive. La nuance vient du choix d'avoir fait la séparation quadratique vis-à-vis de $\mathrm{j}\omega$: la norme H_∞ est une condition sur la matrice de transfert $T(s)$ qui peut être stable ou non. Si $T(s)$ est stable, alors A est Hurwitz stable et P est nécessairement définie positive. Une autre façon de considérer ce même résultat est d'observer que si P est définie positive, alors la séparation quadratique n'est plus vis-à-vis des seules fréquences $(\mathrm{j}\omega)^{-1} \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$ mais est réalisée vis-à-vis de toute variable de Laplace du plan complexe droit $s^{-1} \in \boldsymbol{C}_+$. La propriété de bien-posé de la boucle implique donc que les signaux internes, dont la transformée de Laplace de l'état $\hat{x}(s)$, sont uniques et bornés pour tout $s \in \boldsymbol{C}^+$. De par les propriétés de la transformée de Laplace, cette propriété implique que les signaux temporels, donc $x(t)$, sont tous bornés. On retrouve là la stabilité du système dynamique.

2.6 Séparation Quadratique et IQC

Dans la section précédente, Δ est une incertitude, c'est-à-dire une matrice appartenant à un ensemble. Un cas plus général considéré dans le cadre de travail des Contraintes Intégrales Quadratiques (IQC) est le cas où Δ est un opérateur (linéaire ou non) pour lequel on fait les hypothèses suivantes [140] :

Hypothèse 1 *L'opérateur Δ satisfait les conditions suivantes :*
- *il est borné et causal (voir discussion de la section 1.3.3.1)*
- *l'IQC suivante est satisfaite pour tout $\tau \in [0\ ,\ 1]$ et tout $w = \Delta(z)$*

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \hat{z} \\ \tau\hat{w} \end{array} \right) \middle| \Pi \left(\begin{array}{c} \hat{z} \\ \tau\hat{w} \end{array} \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \hat{z}(\mathrm{j}\omega) \\ \tau\hat{w}(\mathrm{j}\omega) \end{array} \right)^* \Pi(\mathrm{j}\omega) \left(\begin{array}{c} \hat{z}(\mathrm{j}\omega) \\ \tau\hat{w}(\mathrm{j}\omega) \end{array} \right) d\omega \geq 0 \quad (2.13)$$

où $\hat{z}$ et $\hat{w}$ sont les transformées de Laplace de z et w respectivement.

Avec ces hypothèses, le résultat de stabilité proposé dans [140] est le suivant :

Théorème 4 *(IQC) La boucle fermée constituée de l'opérateur $G(z, w) = \Delta(z) - w$ et d'un système linéaire stable $F(w, z) = T(s)\hat{w}(s) - \hat{z}(s)$ est bien-posée*[3] *si $(\mathbf{1} - \tau T\Delta)$ est un opérateur dont l'inverse est causal pour tout $\tau \in [0\ ,\ 1]$ et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\left[\begin{array}{cc} T^*(\mathrm{j}\omega) & \mathbf{1} \end{array} \right] \Pi(\mathrm{j}\omega) \left[\begin{array}{c} T(\mathrm{j}\omega) \\ \mathbf{1} \end{array} \right] \leq \epsilon\mathbf{1} \ , \ \forall \mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}. \quad (2.14)$$

3. Au sens donné à cette notion dans ce document (voir Remarque 1)

Sans difficulté majeure on constate que le résultat ainsi défini est un résultat de séparation topologique où le séparateur est

$$\theta(w,z) = \left\langle \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \middle| (-\Pi) \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

C'est un séparateur sous forme de l'intégrale d'une forme quadratique. Ce type de séparateur est appelé séparateur intégral quadratique (IQS) dans la suite.

Un exemple classique d'application du Théorème 4 est pour le cas où Δ est un opérateur causal borné en norme : $\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} \|z\|$ si $w = \Delta(z)$. Dans ce cas Π peut être choisie comme suit :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

La condition du Théorème 4 est alors

$$\begin{bmatrix} T^*(\mathrm{j}\omega) & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Pi(\mathrm{j}\omega) \begin{bmatrix} T(\mathrm{j}\omega) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = T^*(\mathrm{j}\omega)T(\mathrm{j}\omega) - \gamma^2 \mathbf{1} \leq \epsilon$$

c'est-à-dire que $\|T\| < \gamma$. Ce résultat n'est rien d'autre que l'implication *i)⇒ii)* du théorème du petit gain. L'implication inverse se déduit du Corollaire 1.

Théorème 5 *(Petit gain) Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

i) T est une matrice de transfert stable telle que $\|T\|_\infty < \gamma$;

ii) la boucle fermée constituée de $G(z,w) = \Delta(z) - w$ et $F(w,z) = Tw - z$ est bien-posée pour tout opérateur causal borné en norme tel que $\|\Delta(z)\| \leq \frac{1}{\gamma}\|z\|$.

Le cas du théorème du petit gain illustre que, même s'il est formulé comme une simple implication, le résultat IQC du Théorème 4 est parfois non-pessimiste. En comparaison du Théorème 3 qui est formulé en termes de conditions nécessaires et suffisantes, la principale différence est que le théorème 4 est formulé pour une matrice Π fixée. La réduction du pessimisme tient dans le fait de pouvoir décrire la plus grande classe possible de séparateurs. Dans ce qui suit, certaines techniques classiques pour décrire des séparateurs sont rappelées.

A noter que le lien entre théorème du petit gain et séparation topologique qui est fait ici dans le cas des systèmes linéaires, a été étudié en détail dans [229] pour le cas d'une boucle comprenant deux opérateurs non-linéaires.

2.7 Séparateurs quadratiques et S-procédure

Dans les résultats exposés jusqu'ici on trouve deux type de contraintes. Un premier type de contrainte (dernière contrainte dans (2.6), contrainte (2.14)) est du type LMI, éventuellement à tester pour toute valeurs d'un paramètre scalaire. L'autre type de contrainte (troisième contrainte dans (2.6), contrainte (2.13)) doit être satisfaite pour tout Δ appartenant à un ensemble de matrices, d'opérateurs, etc. Autant le premier type de contrainte est relativement simple à tester, autant le second est plus complexe de manière générale.

Considérons un exemple, le plus facile en réalité. Supposons que l'ensemble d'incertitudes $\mathbf{\Delta}$ est défini par une forme quadratique (incertitude dissipative, voir page 26)

$$\mathbf{\Delta} = \left\{ \Delta \ : \ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2^* & \Psi_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \right\}.$$

Un cas particulier de cela est $\Psi_1 = -\mathbf{1}$, $\Psi_2 = \mathbf{0}$, $\Psi_3 = \gamma^2\mathbf{1}$ auquel cas il s'agit de matrices de gain borné $\|\Delta\| \leq \frac{1}{\gamma}$. Pour aborder le Théorème 3 de séparation quadratique, il convient de rechercher une matrice Θ telle que

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \ , \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \tag{2.15}$$

Pour ce cas, l'ensemble des Θ est exactement décrit par

$$\exists \tau > 0 \ , \ \Theta \leq \tau \left[\begin{array}{cc} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2^* & \Psi_3 \end{array} \right].$$

Ce résultat est connu pour être la S-procédure.

Lemme 1 *(S-procedure) [256] S'il existe des scalaires $\tau_j \geq 0$ tels que*

$$Q_0(z) \leq \sum_{j=1\ldots\bar{j}} \tau_j Q_j(z) \ , \ \forall z \in Z$$

alors

$$Q_0(z) \leq 0 \ , \ \forall z \in \{ \ Q_1(z) \geq 0 \ , \ \ldots \ , \ Q_{\bar{j}}(z) \geq 0 \ \}.$$

Dans le cas qui nous concerne Z est un espace vectoriel réel ou complexe (suivant que Δ est contrainte à être réelle ou pas) et les fonctions Q_0, Q_j sont des formes quadratiques. Dans ce cas, [254] démontre que la S-procédure est sans pessimisme (les deux conditions du lemme sont équivalentes) si :

— $\bar{j} = 1$ quand Z est un espace vectoriel à valeurs réelles ;

— $\bar{j} \leq 2$ quand Z est un espace vectoriel à valeurs complexes.

De plus, pour $\bar{j}$ au-delà de ces valeurs, le résultat peut être pessimiste. Il existe des exemples tels que les conditions ne sont pas équivalentes.

On peut remarquer que la S-procédure (aussi appelée S-lemma) est un résultat purement mathématique. Il est d'ailleurs étudié en tant que tel dans la littérature [200]. Il a cependant dès le départ été employé pour aborder des questions de stabilité des systèmes bouclés et se trouve de façon implicite dans les travaux de Lur'e (voir [127] pour un tour d'horizon sur la stabilité absolue). La S-procédure est ailleurs considérée comme l'outil central pour l'obtention de conditions sous forme LMI [38]. La S-procédure répond à la question de comment choisir un séparateur quadratique pour les problèmes que nous avons formulés jusqu'ici et qui sont formulés par la suite. Son pessimisme, ou non-pessimisme, indique si les conditions LMI construites répondent exactement aux problèmes formulés ou pas.

Nous avons vu ci-dessus le cas de la S-procédure relative à des incertitudes matricielles contraintes par une forme quadratique. On trouve également quelques généralisations de ces

résultats et qui ont été nommés *full-bloc S-procedure* dans [49, 50]. Nous en détaillons quelques uns des plus utilisés dans la littérature. La présentation adoptée vis à à respecter au maximum les résultats les plus récents dans le domaine, en particulier [110, 111, 215].

D-scaling Si les incertitudes sont scalaires complexes contraintes par une inégalité sur une forme quadratique

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{ \Delta = \delta \mathbf{1} \ , \ \delta \in \boldsymbol{C} \ : \ \left[\begin{array}{cc} 1 & \delta^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2^* & \psi_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \delta \end{array} \right] \leq 0 \right\}.$$

alors les matrices Θ telles que (2.15) sont exactement décrites par

$$\Theta \leq \left[\begin{array}{cc} \psi_1 D & \psi_2 D \\ \psi_2^* D^* & \psi_3 D \end{array} \right] \ , \ D = D^* > \mathbf{0}.$$

Un exemple de ce D-scaling (le cas originel en fait) est le cas des incertitudes bornées en module : $|\delta| \leq \bar{\delta}$. On a alors $\psi_1 = -1$, $\psi_2 = 0$ et $\psi_3 = \bar{\delta}^{-2}$ ce qui donne le D-scaling suivant

$$\Theta \leq \left[\begin{array}{cc} -D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\delta}^{-2} D \end{array} \right] \ , \ D = D^* > \mathbf{0}$$

Un autre exemple est celui des incertitudes situées dans le demi-plan droit : $\delta \in \boldsymbol{C}_+$. Comme on l'a vu plus haut, cela correspond au cas de l'opérateur de Laplace quand il opère sur des signaux stables $s^{-1} \in \boldsymbol{C}_+$. On a alors $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = -1$ et $\psi_3 = 0$. Le D-scaling s'écrit

$$\Theta \leq \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ P = D = D^* > \mathbf{0}$$

où on reconnait P la matrice de Lyapunov dans les exemples qui ont précédé.

G-scaling Si on considère maintenant des incertitudes scalaires complexes contraintes par une égalité

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{ \Delta = \delta \mathbf{1} \ , \ \delta \in \boldsymbol{C} \ : \ \left[\begin{array}{cc} 1 & \delta^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2^* & \phi_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \delta \end{array} \right] = 0 \right\}.$$

alors les matrices Θ telles que (2.15) sont exactement décrites par

$$\Theta \leq \left[\begin{array}{cc} \phi_1 G & \phi_2 G \\ \phi_2^* G^* & \phi_3 G \end{array} \right] \ , \ G = G^*.$$

La différence avec le D-scaling est que G n'est pas contrainte à être définie positive.

L'exemple le plus connu de ce G-scaling n'est autre que le lemme KYP. En effet dire que $\delta = \mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$ correspond à prendre $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = -1$, $\phi_3 = 0$ et donne le G-scalling

$$\Theta \leq \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ P = G = G^*.$$

L'autre exemple, non moins connu car c'est lui qui donne le nom au G-scaling, est le cas des incertitudes réelles $\delta \in \boldsymbol{R}$, *i.e.* $\delta = \delta^*$. Cela revient à prendre $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \mathrm{j}$, $\phi_3 = 0$ et le G-scaling est

$$\Theta \leq \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathrm{j}G \\ -\mathrm{j}G & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ G = G^*$$

qui, si on se restreint à des séparateurs à valeurs réelles (ce qui est le cas quand les systèmes sont à valeurs réelles), alors le G-scaling prend la forme classique suivante

$$\Theta \leq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{G} \\ -\hat{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \ , \ \hat{G} = -\hat{G}^T.$$

où $\hat{G}$ est la partie réelle de jG et est donc anti-symmétrique.

DG-scaling Par simple combinaison de deux résultats précédents, il est possible de considérer des incertitudes scalaires complexes contraintes par une égalité et une inégalité

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{ \Delta = \delta \mathbf{1} \ , \ \delta \in \boldsymbol{C} \ : \ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & \delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2^* & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & \delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2^* & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix} \leq 0 \end{array} \right\}.$$

alors les matrices Θ telles que (2.15) sont exactement décrites par

$$\Theta \leq \begin{bmatrix} \phi_1 G + \psi_1 D & \phi_2 G + \psi_2 D \\ \phi_2^* G^* + \psi_2^* D^* & \phi_3 G + \psi_3 D \end{bmatrix} \ , \ G = G^* \ , \ D = D^* > \mathbf{0}.$$

Le résultat est là encore sans pessimisme et on peut en trouver une preuve élégante exploitant la dualité des contraintes LMI dans [215].

Appliqué par exemple aux incertitudes réelles $\delta \in \boldsymbol{R}$ bornées en valeur absolue $|\delta| \leq \bar{\delta}$, et en se restreignant aux séparateurs à valeurs réelles, on a le DG-scaling classique

$$\Theta \leq \begin{bmatrix} -D & \hat{G} \\ -\hat{G} & \bar{\delta}^{-2} D \end{bmatrix} \ , \ \hat{G} = -\hat{G}^T \ , \ D = D^T > \mathbf{0}.$$

2.8 Séparateurs quadratiques et le calcul de la valeur singulière structurée

Pour conclure ce chapitre dédié à l'interprétation de résultats de commande robuste en termes de séparation topologique, cette dernière section est consacrée au problème dit de valeur singulière structurée. Proposé simultanément par [53] et [208], le problème se formule comme suit (voir aussi [63, 154]) : bien-posé d'une boucle entre une matrice de transfert d'un système stable $F(w,z) = T(s)\hat{w}(s) - \hat{z}(s)$ et un opérateur incertain $G(z,w) = \Delta(s)\hat{z}(s) - \hat{w}(s)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2 *Δ est un opérateur bloc diagonal de la forme suivante*

$$\Delta(s) = \mathrm{diag}\left(\delta_1 \mathbf{1}, \cdots, \delta_{n_r} \mathbf{1}, \ q_1(s)\mathbf{1}, \cdots, q_{n_c}(s)\mathbf{1}, \ \Delta_1(s), \cdots, \Delta_{n_f}(s)\right)$$

constitué de

- *n_r blocs réels répétés avec $\delta_j \in \boldsymbol{R}$, $|\delta_j| \leq \frac{1}{\gamma}$*

- *n_c blocs LTI scalaires répétés, causaux, stables, bornés en norme* $\|q_j\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$
- *n_f blocs LTI matriciels, causaux, stables, bornés en norme* $\|\Delta_j\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$.

A la différence du théorème du petit gain (Théorème 5) l'incertitude est cette fois-ci structurée. La condition $\|T\|_\infty = \max_{\mathrm{j}\omega\in\mathrm{j}\boldsymbol{R}} \|T(\mathrm{j}\omega)\| < \gamma$ est une condition suffisante de bien-posé de la boucle, mais comme elle ne tient pas compte de la structure de l'incertitude, ce n'est pas une condition nécessaire et suffisante. De façon à formuler une condition analogue tenant compte de la structure, la théorie de μ-analyse introduit la valeur singulière structurée :

$$\mu_{\boldsymbol{\nabla}}(T(\mathrm{j}\omega)) = \min \hat{\gamma} \quad : \quad \det(\mathbf{1} - T(\mathrm{j}\omega)\nabla) \neq 0 \ , \ \nabla \in \boldsymbol{\nabla} \tag{2.16}$$

où $\boldsymbol{\nabla}$ est un ensemble de matrices structurées bornées

$$\nabla = \mathrm{diag}\left(\delta_1\mathbf{1}, \cdots, \delta_{n_r}\mathbf{1}, \ q_1\mathbf{1}, \cdots, q_{n_c}\mathbf{1}, \ \Delta_1, \cdots, \Delta_{n_f}\right)$$

constitué de

- n_r blocs scalaires réels répétés avec $\delta_j \in \boldsymbol{R}$, $|\delta_j| \leq \frac{1}{\hat{\gamma}}$
- n_c blocs scalaires complexes répétés $\delta_j \in \boldsymbol{C}$, $|q_j| \leq \frac{1}{\hat{\gamma}}$
- n_f blocs matriciels bornés en norme $\|\Delta_j\| \leq \frac{1}{\hat{\gamma}}$.

Le résultat analogue au théorème du petit gain est comme suit, [232]

Théorème 6 *(μ-analyse) Les deux conditions suivantes sont respectivement optimistes et pessimistes*

i) Si $\max_{\mathrm{j}\omega} \mu_{\boldsymbol{\nabla}}(T(\mathrm{j}\omega)) < \gamma$ *alors la boucle fermée est bien-posée pour tout* $\Delta(s)$ *vérifiant l'Hypothèse 2 ;*

ii) S'il existe ω *tel que* $\mu_{\boldsymbol{\nabla}}(T(\mathrm{j}\omega)) > \gamma$ *alors il existe* $\Delta(s)$ *vérifiant l'Hypothèse 2 qui rend la boucle mal-posée.*

Ce résultat indique que l'analyse du bien-posé de la boucle impliquant des opérateurs dynamiques $\Delta(s)$ peut se faire par l'analyse de boucles n'impliquant que des matrices ∇ (montrer que $\mu_{\boldsymbol{\nabla}}(T(\mathrm{j}\omega)) \leq \hat{\gamma}$ est équivalent à prouver le bien-posé d'une boucle entre les applications linéaires $T(\mathrm{j}\omega)$ et $\nabla \in \boldsymbol{\nabla}$). Une difficulté majeure est de réaliser un balayage des fréquences ω. L'autre difficulté est de calculer $\mu_{\boldsymbol{\nabla}}(T(\mathrm{j}\omega))$ pour une fréquence donnée. Ceci se fait classiquement en appliquant les résultats décrits dans la section précédente 2.7.

Corollaire 3 $\mu_{\boldsymbol{\nabla}}(T) \leq \hat{\gamma}$ *s'il existe un séparateur quadratique, défini par une matrice* Θ*, tel que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & T^* \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^* & \Theta_3 \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ T \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

structurée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \mathrm{diag}\left(-D_1, \cdots, -D_{n_r}, -\hat{D}_1, \cdots, -\hat{D}_{n_c}, -\tau_1\mathbf{1}, \cdots, -\tau_{n_f}\mathbf{1}\right) \\
\Theta_2 &= \mathrm{diag}\left(\mathrm{j}G_1, \cdots, \mathrm{j}G_{n_r}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\right) \\
\Theta_3 &= \mathrm{diag}\left(\hat{\gamma}^2 D_1, \cdots, \hat{\gamma}^2 D_{n_r}, \hat{\gamma}^2 \hat{D}_1, \cdots, \hat{\gamma}^2 \hat{D}_{n_c}, \tau_1\hat{\gamma}^2\mathbf{1}, \cdots, \tau_{n_f}\hat{\gamma}^2\mathbf{1}\right)
\end{aligned}$$

où les différentes matrices sont de dimensions compatibles avec la structure des incertitudes données dans l'Hypothèse 2 et contraintes par

$$D_j = D_j^* > \mathbf{0} \ , \ G_j = G_j^* \ , \ \hat{D}_j = \hat{D}_j^* > \mathbf{0} \ , \ \tau_j > 0.$$

Le corollaire est une application de la S-procédure (D-scaling et DG-scaling pour les blocs scalaires et scalaires réels) pour de multiples contraintes simultanément. Par défaut, le résultat est pessimiste. On sait, d'après les résultats de la section 2.7, qu'il est non pessimiste quand l'incertitude ne comporte qu'un seul bloc. De façon plus précise, l'article [141] indique que le corollaire est non pessimiste si

$$2(n_r + n_c) + n_f \leq 3.$$

Ce résultat améliore les conditions énoncées dans [254] mais reste décevant, au sens que la contrainte est extrêmement restrictive (pas plus d'un bloc scalaire répété). A cela il faut ajouter que le calcul de la valeur singulière structurée doit se faire pour toutes les fréquences. En pratique on peut parfois se contenter de faire le calcul sur un nombre fini de fréquences, au risque de ne pas observer un pic intervenant à une fréquence (ce qui est possible car la valeur singulière structurée peut être discontinue en présence de blocs scalaires réels).

2.9 Motivations pour la séparation intégrale quadratique

Les dernières conclusions concernant le calcul de la valeur singulière structurée montrent qu'un problème encore largement ouvert est celui du pessimisme. Ce pessimisme est lié à la capacité de décrire des séparateurs topologiques pour des classes d'opérateurs données. Les sources de pessimisme sont de trois ordres.

La première source de pessimisme vient du choix de la classe de fonctions utilisée pour décrire le séparateur topologique. Les résultats de séparation quadratique décrits dans la section 2.5 indiquent que les séparateurs peuvent être recherchés sans pessimisme parmi les formes quadratiques, quand la boucle est constituée de systèmes linéaires et d'incertitudes paramétriques. Les résultats du cadre de travail des IQC décrits dans la section 2.6 montrent qu'en augmentant cette classe de séparateurs aux intégrales quadratiques, les techniques s'étendent au cas de boucles avec des opérateurs qui peuvent être non-linéaires, respectant certaines hypothèses, dont la causalité. A notre connaissance ces résultats ne permettent pas de conclure quant au pessimisme du choix de forme de séparateur. Un des objectifs du chapitre suivant est de formuler des hypothèses les moins restrictives possibles sur le problème de bien-posé de boucle, qui permette de conclure que le choix de séparateurs sous forme intégrale quadratique est nécessaire et suffisant.

La seconde source de pessimisme vient de la difficulté à rechercher un séparateur dans une classe de fonctions (par exemple parmi les formes intégrales quadratiques). Les résultats concernant la valeur singulière structurée décrits dans la section 2.8 illustrent ce point. Des améliorations cependant existent pour le cas de paramètres réels répétés (voir [215]). Ils empruntent à des techniques spécifiques à l'analyse de polynômes positifs : théorème de Pólya pour des incertitudes décrites sur des polytopes ; décompositions en sommes-de-carrés pour des

incertitudes décrites sur ensembles semi-algébriques. Il n'en reste pas moins que les résultats ne couvrent pas toutes les classes d'opérateurs envisageables. En particulier les techniques existantes ne prennent pas en compte la séparation vis-à-vis d'opérateurs non-causaux ou d'opérateurs en mesure de représenter les conditions initiales des systèmes. De fait, cela limite les résultats existants à l'analyse de performances de type norme induite L_2 ou passivité (et variantes) et ne permet d'assurer que la stabilité globale d'un système non-linéaire. Un second objectif du chapitre suivant, est de proposer des séparateurs topologiques pour les opérateurs permettant de résoudre des questions d'analyse de performance à des conditions initiales non-nulles (inclue le problème H_2 mais aussi le problème de borner le pic des réponses impulsionnelles). Les problèmes d'analyse de performance en tant que tels sont formulés et résolus dans le Chapitre 4.

La troisième source de pessimisme vient de la prise en compte de comportements dynamiques des opérateurs. Dans le formalisme des IQC cette question est abordée en recherchant des matrices $\Pi(\mathrm{j}\omega)$ dépendant de la fréquence. Elles sont classiquement construites sur la base de combinaisons linéaires de matrices de transfert stables [217], sans qu'il soit possible de connaître a priori quels types de matrices stables choisir. Cette approche limite le champ d'application aux systèmes décrits par des représentations fréquentielles et donc ne permet pas de prendre en compte des comportements temporels tels que des spécifications sur les conditions initiales. Une alternative, développée dans le cadre de la séparation quadratique [112], consiste à enrichir la représentation des systèmes en complétant l'équation différentielle de sa dérivée. Cette opération introduit dans le modèle une information sur la dérivée (donc sur la dynamique) des opérateurs incertains. Il est montré que cette information conduit à des conditions au pessimisme réduit. Le prix à payer pour obtenir les résultats est que le problème se formule alors en termes de modèles descripteurs de la forme $E\dot{x} = Ax + Bu$ où E et A ne sont pas nécessairement carrées. En découle un troisième objectif pour du chapitre suivant : celui de proposer des résultats de séparation topologique pouvant inclure le cas des systèmes descripteurs. Une conséquence de ces résultats s'illustre en termes de réduction du pessimisme vis-à-vis des aspects dynamiques des opérateurs incertains (le Chapitre 5 est consacré à cette question), mais de manière plus générale le Chapitre 4 produit, dans la nouvelle approche, des résultats originaux pour l'analyse des systèmes descripteurs.

Chapitre 3

Séparation Intégrale Quadratique pour les applications implicites

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé et formalisé un certain nombre de relations entre la séparation topologique et d'autres travaux théoriques en commande robuste. Dans ce qui suit, nous exposons la contribution principale de notre travail. Elle consiste à relâcher un certain nombre des hypothèses formulées par Iwasaki et Hara [109] tout en conservant la forme LMI des résultats de séparation quadratique finaux.

La principale des hypothèses relâchées est que nous nous intéressons aux applications linéaires implicites : $F(w, z) = \mathcal{A}w - \mathcal{E}z$. L'étude d'une boucle d'interconnexion (Figure 2.1) avec une application linéaire implicite a été pour la première fois formulée pas Iwasaki et Hara dans [112] mais se limitait à une forme particulière d'application implicite où $\mathcal{E}$ était de rang plein en colonne et bloc-diagonale. Nous étendons ces résultats avec le souhait de pouvoir inclure dans les résultats, l'analyse robuste de systèmes descripteurs (tels que décrits en Section 1.4.2). Outre que cela étend les résultats à de nouvelles représentations des systèmes, nous montrons que cela permet de construire de nouveaux résultats LMI moins pessimistes pour l'analyse robuste des systèmes. Cette conséquence avait été remarquée dans [112], nous la systématisons et l'étendons dans le Chapitre 5.

La seconde contribution de notre travail est que nous relâchons les hypothèses sur les opérateurs incertains impliqués dans la boucle : $G(z, w) = \nabla z - w$. Nous ne nous limitons pas aux opérateurs linéaires et, comme dans la théorie des IQC [140], nous les autorisons à êtres non-linéaires et variants dans le temps. De plus, nous incluons dans ces opérateurs de nouveaux types d'opérateurs non-causaux décrits dans le premier chapitre (Section 1.3). Cette extension permet de traiter dans un cadre de travail unique, et pour la première fois à notre connaissance, des problèmes de stabilité et de performances entrées-sorties. Le Chapitre 4 est consacré à ces résultats.

L'organisation de ce Chapitre est comme suit. En premier nous formulons le résultat central de ce document : le résultat de Séparation Intégrale Quadratique. Puis, nous commentons sur la difficulté de construire le séparateur pour les opérateurs envisagés. Finalement, nous exposons comment sur la base du théorème central, il est possible de formuler des résultats LMI.

3.1 Bien-posé pour les applications implicites

Soit le système interconnecté de la Figure 2.1 tel que

$$\begin{array}{l} G(z,w) = [\nabla z](\varsigma) - w(\varsigma) = \bar{w}(\varsigma), \\ F(w,z) = \mathcal{A}(\varsigma)w(\varsigma) - \mathcal{E}(\varsigma)z(\varsigma) = \bar{z}(\varsigma) \end{array} \tag{3.1}$$

avec les notations suivantes :

— w et z sont les signaux décrivant le système ;
— $\bar{w}$ et $\bar{z}$ sont des perturbations ;
— $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ sont des matrices, pas nécessairement carrées, ni de rang plein ;
— ∇ est un opérateur éventuellement non causal, éventuellement incertain, défini par son appartenance à un ensemble $\nabla \in \boldsymbol{\nabla}$;
— $\varsigma \in \boldsymbol{\Sigma}$ est indifféremment : $t \in \boldsymbol{R}_+$, le temps dans le cas des systèmes à temps continu ; $k \in \boldsymbol{N}$, dans le cas des systèmes à temps discret ; ou encore $\mathrm{j}\omega \in \mathrm{j}\boldsymbol{R}$, la fréquence dans le cas de représentations fréquentielles ; $s \in \boldsymbol{C}_+$, la variable de Laplace.

Hypothèse 3 *$\mathcal{E}$ admet une factorisation sous la forme suivante $\mathcal{E}(\varsigma) = \mathcal{E}_1(\varsigma)\mathcal{E}_2$ où $\mathcal{E}_2$ est constante et $\mathcal{E}_1$ est bornée et strictement de rang plein en colonne :*

$$\begin{array}{l} \exists \kappa_{\mathcal{E}1} > 0 \ : \ \forall \varsigma \in \boldsymbol{\Sigma} \ , \ \|\mathcal{E}_1(\varsigma)\| \leq \kappa_{\mathcal{E}1} \\ \exists \kappa_{\mathcal{E}2} > 0 \ : \ \forall \varsigma \in \boldsymbol{\Sigma} \ , \ \mathcal{E}_1^*(\varsigma)\mathcal{E}_1(\varsigma) \geq \kappa_{\mathcal{E}2}\mathbf{1} \end{array} .$$

Cette hypothèse impose que le noyau de $\mathcal{E}$ est entièrement décrit par $\mathcal{E}_2$ et qu'il est invariant dans le temps. Même asymptotiquement cette propriété doit rester vraie. La propriété implique que la pseudo-inverse $\mathcal{E}_1^+ = (\mathcal{E}_1^*\mathcal{E}_1)^{-1}\mathcal{E}_1$ est bornée ($\|\mathcal{E}_1^+(\varsigma)\| \leq \frac{\kappa_{\mathcal{E}1}}{\kappa_{\mathcal{E}2}}$) et que l'image par la pseudo-inverse d'un vecteur de norme bornée est strictement non nulle ($\|\mathcal{E}_1^+ z\| \geq \frac{\sqrt{\kappa_{\mathcal{E}2}}}{\kappa_{\mathcal{E}1}^2}\|z\|$).

Hypothèse 4 *La matrice $\mathcal{A}$ est bornée :*

$$\exists \kappa_{\mathcal{A}} > 0 \ : \ \forall \varsigma \in \boldsymbol{\Sigma} \ , \ \|\mathcal{A}(\varsigma)\| \leq \kappa_{\mathcal{A}}.$$

Cette hypothèse technique est utilisée dans la preuve de la nécessité du résultat qui suit. On notera qu'elle n'intervient pas dans la preuve de la suffisance. En pratique, les résultats exposés dans ce document ne s'intéressent qu'à des cas où $\mathcal{A}$ est bornée, le plus souvent constante.

Hypothèse 5 *L'ensemble $\boldsymbol{\nabla}$ est tel que pour tout $\nabla \in \boldsymbol{\nabla}$ et tout couple de signaux (z_1, z_2), il existe $\tilde{\nabla} \in \boldsymbol{\nabla}$ tel que*

$$\nabla z_1 - \nabla z_2 = \tilde{\nabla}(z_1 - z_2) \tag{3.2}$$

L'Hypothèse 5 est trivialement satisfaite si les éléments de $\boldsymbol{\nabla}$ sont des opérateurs linéaires. C'est le cas des opérateurs définis dans le Chapitre 1. Mais, l'hypothèse ne restreint pas les résultats aux opérateurs linéaires. Les opérateurs non-linéaires sont cependant en général pris en compte de façon pessimiste dans ce cadre de travail. L'exemple qui suit illustre ce pessimisme.

Soit l'opérateur non-linéaire scalaire suivant

$$\psi_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha} \; : \; \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{R} & \rightarrow \boldsymbol{R} \\ z < -\alpha & \mapsto \gamma_2 z \\ |z| \leq \alpha & \mapsto \gamma_1 z \\ z > +\alpha & \mapsto \gamma_2 z \end{array} \right. . \tag{3.3}$$

Il fait trivialement partie de l'ensemble d'opérateurs à gains bornés dans un secteur défini comme suit

$$\psi_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha} \in \boldsymbol{\nabla}_{\gamma_1,\gamma_2} = \left\{ \nabla \;\; : \;\; \min\{\gamma_1,\gamma_2\} \leq \left| \frac{[\nabla z](\varsigma)}{z(\varsigma)} \right| \leq \max\{\gamma_1,\gamma_2\} \;\; \forall \varsigma \right\}.$$

Cet ensemble contient tout opérateur à valeurs complexes ou réelles, linéaire ou non, invariant dans le temps ou non, etc. mais dont le gain est borné dans le secteur défini par γ_1 et γ_2. L'ensemble $\boldsymbol{\nabla}_{\gamma_1,\gamma_2}$ satisfait l'Hypothèse 5. Ainsi, si l'on prouve le bien-posé de la boucle pour tout opérateur de $\boldsymbol{\nabla}_{\gamma_1,\gamma_2}$, alors le bien-posé sera prouvé pour $\psi_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha}$. Inversement par contre, si la boucle n'est pas bien-posée pour tout opérateur de $\boldsymbol{\nabla}_{\gamma_1,\gamma_2}$, cela n'indique rien quant au bien-posé pour l'opérateur spécifique $\psi_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha}$.

Le système interconnecté (3.1) est dit bien-posé si pour tout opérateur incertain $\nabla \in \boldsymbol{\nabla}$ et pour toute perturbation bornée, les signaux caractérisant le système sont uniques et bornés. Plus précisément, considérons la décomposition de z dans la base $\left[\begin{array}{cc} {\mathcal{E}_2}^{\perp} & {\mathcal{E}_2}^{*\circ} \end{array} \right]$, *i.e.* $z = {\mathcal{E}_2}^{\perp} z_{\perp} + {\mathcal{E}_2}^{*\circ} z_{\circ}$. Le système interconnecté s'écrit alors avec les équations suivantes

$$\begin{array}{l} \nabla \mathcal{E}_2^{*\circ} z_{\circ} - w = \bar{w} - \nabla \mathcal{E}_2^{\perp} z_{\perp} \\ \mathcal{A} w - \mathcal{E} \mathcal{E}_2^{*\circ} z_{\circ} = \bar{z} \; . \end{array}$$

Sous cette forme, on constate que $\nabla \mathcal{E}_2 z_{\perp}$ joue un rôle analogue au signal externe $\bar{w}$, supposé quelconque. Il ne caractérise donc pas le système. La définition du bien-posé consiste de ce fait en la condition que les signaux w et $z_{\circ}$ sont uniques et bornés, car ce sont eux exclusivement qui caractérisent le système. Si à la donnée de $(\bar{z}, \bar{w})$ les signaux $(z_{\circ}, w)$ sont démontrés uniques et bornés, alors $z_{\perp}$ est une solution, éventuellement non unique, de $\nabla \mathcal{E}_2^{\perp} z_{\perp} = \nabla \mathcal{E}_2^{*\circ} z_{\circ} + \bar{w} - w$.

Comme $\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2^{*\circ}$ est par construction de rang plein en colonne, $z_{\circ}$ est borné si et seulement si $\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2^{*\circ} z_{\circ} = \mathcal{E}_2 z$ est borné. Le signal $z_{\circ}$ est dès lors remplacé par $\mathcal{E}_2 z$ dans la définition ci-après.

Définition 3 *Le système interconnecté (3.1) est dit bien-posé si pour tous signaux externes $(\bar{w}, \bar{z})$ bornés dans L_{2e} et tout opérateur incertain $\nabla \in \boldsymbol{\nabla}$ les signaux internes $(w, \mathcal{E}_2 z)$ sont uniques et bornés dans L_{2e} :*

$$\exists \bar{\gamma} > 0 \;\; : \;\; \begin{array}{c} \forall \left(\begin{array}{c} \bar{z} \\ \bar{w} \end{array} \right) \in L_{2e} \\ \forall \nabla \in \boldsymbol{\nabla} \end{array} \;\; , \;\; \exists \bar{\varsigma}_1 \; : \; \forall \bar{\varsigma} \geq \bar{\varsigma}_1 \;\; , \;\; \left\| \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ w \end{array} \right\|_{\bar{\varsigma}} \leq \bar{\gamma} \left\| \begin{array}{c} \bar{z} \\ \bar{w} \end{array} \right\|_{\bar{\varsigma}} \tag{3.4}$$

Pour des perturbations $\bar{z}$ et $\bar{w}$ de L_2 la condition de bien-posé s'écrit plus simplement

$$\left\| \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ w \end{array} \right\| \leq \bar{\gamma} \left\| \begin{array}{c} \bar{z} \\ \bar{w} \end{array} \right\| .$$

3.2 Résultat Central de Séparation Intégrale Quadratique

Théorème 7 *Le système interconnecté (3.1) est bien-posé si et seulement si il existe une matrice Hermitienne variant dans le temps $\Theta(\varsigma)$ bornée sur $\mathbf{\Sigma}$ et un scalaire positif $\mu > 0$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma}\ ,\ \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} (\Theta(\varsigma) - \mu \mathbf{1}) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} \geq \mathbf{0} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \\ \forall z \in L_{2e} \\ \forall \nabla \in \mathbf{\nabla} \end{array} , \exists \bar{\varsigma}_2 \ :\ \forall \bar{\varsigma} \geq \bar{\varsigma}_2\ , \left\langle \left(\begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{array} \right) \middle| \Theta \left(\begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{array} \right) \right\rangle_{\bar{\varsigma}} \leq \epsilon \left\| \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{array} \right\|^2_{\bar{\varsigma}} \tag{3.6}$$

Le résultat du Théorème 7 est en lien direct avec la théorie de la séparation topologique décrite dans le chapitre précédent, et plus précisément relève du sous cas de séparation de type "secteur" du Théorème 2.2 dans [207]. En cela il est de la même classe de résultats que [257] où la séparation est réalisée par des produits scalaires pondérés (ici par la matrice Θ) et qui définissent des secteurs coniques. En référence à cette théorie, nous disons que Θ définit un séparateur topologique pour le système interconnecté. Ce séparateur topologique est sous forme d'une intégrale quadratique. Nous dirons donc pour plus de précision que Θ définit un **séparateur intégral quadratique (IQS)**. Θ définit un IQS si elle satisfait simultanément les conditions (3.5) et (3.6). Nous dirons par contre que Θ est candidate à la séparation quadratique intégrale, **IQS-candidate**, si elle satisfait la condition (3.6). La section suivante donne une méthode pour écrire sous forme LMI, de façon parfois pessimiste, qu'une matrice est IQS-candidate. Le problème de bien-posé pourra alors être résolu en recherchant parmi les IQS-candidates une matrice Θ solution de (3.5).

La preuve du théorème se fait en trois parties. Premièrement (*preuve A*) on montre que si les signaux $(w, \mathcal{E}_2 z)$ sont bornés tels que (3.4), alors ils sont uniques. Ensuite (*preuve B* de la suffisance) on montre que les conditions du théorème impliquent (3.4). Finalement (*preuve C* de nécessité) on montre que les conditions de bien-posé (3.4) impliquent l'existence du séparateur Θ du théorème.

Preuve A: Supposons que (3.4) est satisfaite et que les signaux internes ne sont pas uniques. Soit donc, pour $(\nabla, \bar{w}, \bar{z})$ donné, deux solutions (w_1, z_1) et (w_2, z_2). Par soustraction on a

$$\begin{array}{c} \nabla z_1 - \nabla z_2 - (w_1 - w_2) = 0\ , \\ \mathcal{A}(w_1 - w_2) - \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 (z_1 - z_2) = 0 \end{array}$$

ce qui d'après l'Hypothèse 5 implique l'existence de $\tilde{\nabla} \in \mathbf{\nabla}$ telle que

$$\begin{array}{c} \tilde{\nabla}(z_1 - z_2) - (w_1 - w_2) = 0\ , \\ \mathcal{A}(w_1 - w_2) - \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 (z_1 - z_2) = 0 \end{array}$$

c'est-à-dire que les signaux $w = w_1 - w_2$ et $z = z_1 - z_2$ sont solution pour au moins une réalisation de l'opérateur $\tilde{\nabla}$ et pour des perturbations $(\bar{w}, \bar{z})$ nulles. D'après (3.4), les signaux $(w, \mathcal{E}_2 z)$ sont donc nuls. c'est-à-dire $w_1 = w_2$ et $\mathcal{E}_2 z_1 = \mathcal{E}_2 z_2$. On voit ainsi que l'Hypothèse 5

est essentielle pour garantir l'unicité des signaux internes. Elle remplace ici l'hypothèse classique sur le fait que les fonctions impliquées dans un système non-linéaire sont Lipschitz [122]. ■

Preuve B: Supposons les conditions du Théorème 7 satisfaites. La condition (3.5) implique en termes de signaux que

$$\begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix}^* (\Theta(\varsigma) - \hat{\mu}\mathbf{1}) \begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{3.7}$$

pour tout signaux $(v(\varsigma), w(\varsigma))$ solution de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix} = 0.$$

Sachant que $\mathcal{E}_1$ est strictement de rang plein en colonne (Hypothèse 3) on trouve pour w solution de (3.1) que $v = \mathcal{E}_1^+ \mathcal{A} w = \mathcal{E}_2 z + \mathcal{E}_1^+ \bar{z}$. Ainsi (3.7) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z(\varsigma) + \mathcal{E}_1^+(\varsigma)\bar{z}(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix}^* (\Theta(\varsigma) - \hat{\mu}\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z(\varsigma) + \mathcal{E}_1^+(\varsigma)\bar{z}(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

et est valide pour tout ς. En prenant l'intégrale de cette expression jusqu'à une valeur $\overline{\varsigma} > 0$ quelconque on a :

$$\forall \overline{\varsigma} \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z + \mathcal{E}_1^+ \bar{z} \\ w \end{pmatrix} \middle| (\Theta - \hat{\mu}\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z + \mathcal{E}_1^+ \bar{z} \\ w \end{pmatrix} \right\rangle_{\overline{\varsigma}} \geq 0. \tag{3.8}$$

Intéressons nous maintenant à la condition (3.6). En prenant $\epsilon = \frac{\hat{\mu}}{2}$ on obtient que :

$$\exists \bar{\varsigma}_2 \ : \ \forall \overline{\varsigma} \geq \bar{\varsigma}_2 \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\overline{\varsigma}} \leq \frac{\hat{\mu}}{2} \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{matrix} \right\|_{\overline{\varsigma}}.$$

Pour les signaux de la boucle, $\nabla z = w + \bar{w}$, ceci s'écrit :

$$\exists \bar{\varsigma}_2 \ : \ \forall \overline{\varsigma} \geq \bar{\varsigma}_2 \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ w + \bar{w} \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ w + \bar{w} \end{pmatrix} \right\rangle_{\overline{\varsigma}} \leq \frac{\hat{\mu}}{2} \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_2 z \\ w + \bar{w} \end{matrix} \right\|_{\overline{\varsigma}}^2. \tag{3.9}$$

En soustrayant la condition (3.8) à (3.9) on obtient l'expression suivante

$$\forall \overline{\varsigma} \geq \overline{\varsigma}_2 \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ w \\ \hline \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \frac{\hat{\mu}}{2}\mathbf{1} & M_1 \\ M_1^* & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ w \\ \hline \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \right\rangle_{\overline{\varsigma}} \leq 0 \tag{3.10}$$

où les matrices $(M_1(\varsigma), M_2(\varsigma))$ sont données par

$$\begin{aligned} M_1(\varsigma) &= (\Theta(\varsigma) - \tfrac{\hat{\mu}}{2}\mathbf{1})N_2 - (\Theta(\varsigma) - \hat{\mu}\mathbf{1})N_1(\varsigma) \\ M_2(\varsigma) &= N_2^*(\Theta(\varsigma) - \tfrac{\hat{\mu}}{2}\mathbf{1})N_2 + N_1^*(\varsigma)(\Theta(\varsigma) - \hat{\mu}\mathbf{1})N_1(\varsigma) \end{aligned}$$

avec $(N_1(\varsigma), N_2)$ de dimensions appropriées avec la structure suivante

$$N_1(\varsigma) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^+(\varsigma) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \ , \ N_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} .$$

On note que comme $\mathcal{E}_1^+$ et Θ sont bornées, M_1 et M_2 sont elles aussi bornées. Aussi pour tout $\tilde{\mu}$ quelconque tel que $\frac{\hat{\mu}}{2} > \tilde{\mu} > 0$ il existe un scalaire $\tilde{\gamma}$ tel que

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma} \ , \ \tilde{\gamma}\mathbf{1} > (\frac{\hat{\mu}}{2} - \tilde{\mu})^{-1} M_1^*(\varsigma) M_1(\varsigma) - M_2(\varsigma).$$

Par complément de Schur cette inégalité implique

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma} \ , \ \begin{bmatrix} \tilde{\mu}\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\gamma}\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{\hat{\mu}}{2}\mathbf{1} & M_1(\varsigma) \\ M_1^*(\varsigma) & M_2(\varsigma) \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

En combinant (3.11) et (3.10) on trouve

$$\forall \overline{\varsigma} \geq \overline{\varsigma}_2 \ , \ \tilde{\mu} \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_2 z \\ w \end{matrix} \right\|_{\overline{\varsigma}} \leq \tilde{\gamma} \left\| \begin{matrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{matrix} \right\|_{\overline{\varsigma}}$$

ce qui démontre (3.4) en prenant $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}/\tilde{\mu}$ et $\overline{\varsigma}_1 = \overline{\varsigma}_2$. ■

Preuve C: Supposons que la condition de bien-posé (3.4) est satisfaite. Du fait de l'Hypothèse 3, en prenant $\hat{\gamma} > \max\{1, \frac{\sqrt{\kappa_{\mathcal{E}2}}}{\kappa_{\mathcal{E}1}^2}\}\bar{\gamma}$, la condition de bien-posé (3.4) implique

$$\exists \hat{\gamma} \ : \ \begin{matrix} \forall \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in L_{2e} \ , \\ \forall \nabla \in \mathbf{\nabla} \end{matrix} \ \exists \bar{\varsigma}_1 \ : \ \forall \overline{\varsigma} \geq \bar{\varsigma}_1 \ , \ \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_2 z \\ w \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}} \leq \hat{\gamma} \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_1^+ \bar{z} \\ \bar{w} \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}}.$$

La condition reste vraie pour tout $\gamma \geq \hat{\gamma}$. Sachant que le système interconnecté (3.1) est tel que $\mathcal{E}_1^+ \bar{z} = \mathcal{E}_1^+ \mathcal{A} w - \mathcal{E}_2 z$ et $\bar{w} = \nabla z - w$ l'inégalité ci-dessus s'écrit aussi après réarrangement des différents termes :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{1} - \gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \gamma S \\ \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & \gamma\mathbf{1} \\ \gamma S^* & \gamma\mathbf{1} & \mathbf{1} - \gamma(S^*S + \mathbf{1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle_{\overline{\varsigma}} \leq 0 \tag{3.12}$$

où $S(\varsigma) = \mathcal{E}_1^+(\varsigma)\mathcal{A}(\varsigma)$. Les Hypothèses 3 et 4 font que $S(\varsigma)$ est bornée sur $\mathbf{\Sigma}$. Prenons maintenant γ suffisamment grand ($\gamma \geq \max\{2, \hat{\gamma}\}$) tel que $Q(\varsigma) = \gamma(S^*(\varsigma)S(\varsigma) + \mathbf{1}) - \mathbf{1}$ est strictement définie positive : $Q(\varsigma) \geq \mathbf{1}$. Dès lors $Q^{-1}(\varsigma)$ est définie pour tout ς et est bornée : $\|Q^{-1}(\varsigma)\| \leq 1$. La condition (3.12) étant vraie pour tout (w, z) elle l'est en particulier pour $w = \gamma Q^{-1}(S^*\mathcal{E}_2 + \nabla)z$ ce qui s'écrit

$$\forall \overline{\varsigma} \geq \overline{\varsigma}_1 \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\overline{\varsigma}} \leq 0$$

où la matrice $\Theta(\varsigma)$ est donnée par

$$\Theta(\varsigma) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} - \gamma\mathbf{1} + \gamma^2 S(\varsigma) Q^{-1}(\varsigma) S(\varsigma) & \gamma^2 S(\varsigma) Q^{-1}(\varsigma) \\ \gamma^2 Q^{-1}(\varsigma) S^*(\varsigma) & -\gamma\mathbf{1} + \gamma^2 Q^{-1}(\varsigma) \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Ainsi la condition (3.6) est démontrée pour tout $\epsilon \geq 0$. De plus, sachant que S et Q^{-1} sont bornées, Θ est bornée. Reste à démontrer (3.5). Pour cela il faut trouver $\mu > 0$ tel qu'avec ce choix de Θ on ait pour tout $\varsigma \in \mathbf{\Sigma}$

$$\begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix}^* \Theta(\varsigma) \begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix} \geq \mu \begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix}$$

quand les vecteurs $(v(\varsigma), w(\varsigma))$ sont solutions de $\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v(\varsigma) \\ w(\varsigma) \end{pmatrix} = 0$. Prenons $v(\varsigma) = \mathcal{E}_1^+(\varsigma)\mathcal{A}(\varsigma)w(t) = S(\varsigma)w(\varsigma)$. Dans ce cas (la dépendance vis-à-vis de ς est retirée pour ne pas alourdir les expressions) on a

$$\begin{pmatrix} v = Sw \\ w \end{pmatrix}^* \Theta \begin{pmatrix} v = Sw \\ w \end{pmatrix} = w^* \left(S^*S - \gamma S^*S + \gamma^2 S^*SQ^{-1}S^*S + \gamma^2 S^*SQ^{-1} + \gamma^2 Q^{-1}S^*S - \gamma \mathbf{1} - \gamma^2 Q^{-1}\right) w$$

ce qui, en rappelant que $\gamma S^*S = Q + \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1}$, donne :

$$\begin{pmatrix} v = Sw \\ w \end{pmatrix}^* \Theta \begin{pmatrix} v = Sw \\ w \end{pmatrix} = w^* \left(S^*S + \mathbf{1} + Q^{-1}\right) w \geq \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

La condition (3.5) est satisfaite avec $\mu = 1$. ■

Remarque 3 *La formule* (3.13) *indique que sans perte de généralité :*

- *La matrice du séparateur Θ peut être choisie constante quand les données du problème $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ sont constantes ;*
- *La matrice du séparateur Θ peut être choisie à valeurs réelles quand les données du problème $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ sont à valeurs réelles.*

Le résultat du Théorème 7 est très général et potentiellement applicable à des résultats autres qu'en analyse des systèmes linéaires incertains. C'est cependant sur ceux-là que nous concentrerons notre attention dans le chapitre suivant avec une série de corollaires du Théorème 7. Mais avant cela nous allons prolonger les discussions très générales sur les conditions du théorème.

3.3 Séparateur construit à partir de séparateurs élémentaires

3.3.1 Préliminaires

Le but de cette section est de décrire de façon exacte ou approchée les matrices Θ solutions de (3.6). Ces matrices sont appelées IQS-candidates car candidates à définir un séparateur intégral quadratique.

Définition 4 *Pour une matrice $\mathcal{E}_2$ et un ensemble $\boldsymbol{\nabla}$ d'opérateurs donnés, l'ensemble des IQS-candidates est :*

$$\mathbf{\Theta} = \left\{ \Theta \;:\; \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \\ \forall z \in L_{2e} \\ \forall \nabla \in \boldsymbol{\nabla} \end{array} , \exists \bar{\varsigma}_2 \,:\, \forall \bar{\varsigma} \geq \bar{\varsigma}_2 \,, \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}} \leq \epsilon \left\| \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{array} \right\|_{\bar{\varsigma}}^2 \right\}$$

Comme nous le verrons par la suite, il est en général impossible de décrire de façon exacte cet ensemble $\mathbf{\Theta}$ et nous nous contentons de sous-ensembles. Cependant, il convient de noter que certaines restrictions sur l'ensemble $\mathbf{\Theta}$ ne sont pas pessimistes, voire sont préférables d'un point de vue numérique. C'est l'objet de la remarque suivante.

Remarque 4 *Si Θ est une IQS-candidate, que $\breve{\Theta} > 0$ est une matrice définie positive et que la matrice $\Theta - \breve{\Theta}$ définit un IQS pour le problème, alors Θ définit un IQS pour le problème.*

En effet, si $\Theta - \breve{\Theta}$ définit un IQS pour le problème c'est qu'elle satisfait

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} (\Theta(\varsigma) - \breve{\Theta}(\varsigma) - \mu\mathbf{1}) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} \geq \mathbf{0}.$$

Dans ce cas on a

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} (\Theta(\varsigma) - \mu\mathbf{1}) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} \\ \qquad \geq \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} \breve{\Theta}(\varsigma) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Donc, sous ces hypothèses, Θ définit elle aussi un IQS pour le problème.

Ainsi on constate que même si la matrice $\breve{\Theta} > \mathbf{0}$ permet de décrire un ensemble plus grand d'IQS-candidates, elle n'apporte pas de degré de liberté utile au problème du bien-posé. C'est pourquoi nous nous efforçons autant que possible par la suite, de décrire l'ensemble $\mathbf{\Theta}$ des IQS-candidates en supprimant tout degré de liberté inutile du type de celui décrit par $\breve{\Theta}$.

3.3.2 Combinaison linéaire d'opérateurs élémentaires

L'hypothèse principale que nous formulons est que l'interconnexion (3.1) a été construite de façon que ∇ soit une combinaison linéaire d'opérateurs élémentaires $\nabla_{j=1\ldots\bar{\jmath}}$ indépendants deux à deux. Cette combinaison linéaire est supposée constante (n'évolue pas dans le temps) et exprimée comme suit :

$$\nabla = \sum_{j=1}^{\bar{\jmath}} J_j \nabla_j K_j \tag{3.14}$$

où chaque bloc est indépendant des autres et appartient à un ensemble $\mathbf{\nabla}_j$, et où les matrices $J_{j=1\ldots\bar{\jmath}}$ sont orthonormales :

$$J_{j_1}^* J_{j_2} = \mathbf{0} \quad \text{si } j_1 \neq j_2 \quad , \quad J_j^* J_j = \mathbf{1} \, .$$

Cette représentation est inspirée de [214]. Elle comprend entre autre le cas d'un opérateur ∇ formé d'une matrice bloc-diagonale des blocs élémentaires ∇_j et de colonnes de zéros :

$$\nabla = \left[\begin{array}{ccc} \nabla_1 & \cdots & \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \nabla_{\bar{\jmath}} \quad \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Cette structure est trivialement contenue dans la représentation générale. Il suffit de prendre les matrices J_j et K_j sous la forme suivante $J_j = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]^T$, $K_j = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]$ avec les dimensions appropriées.

La structure bloc-diagonale est classique dans le cadre de travail des représentation linéaires de fractions rationnelles (LFT, [262]). Les manipulations qui conduisent à ce type de représentations sont détaillées dans [135]. Ici nous avons introduit la possibilité pour ∇ de contenir des colonnes de zéro. Cette propriété permet entre autres de considérer des formes implicites très générales où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ ne sont pas carrées.

On définit comme suit les deux matrices F_{1j} et F_{2j} :

$$F_{1j}^* = ((\mathbf{1} - K_j^* K_j)\mathcal{E}_2^*)^\perp \quad , \quad F_{2j} = F_{1j}\mathcal{E}_2 K_j^* \ .$$

$\mathcal{E}_2$ est une matrice constante (Hypothèse 3) et la structure (3.14) n'évolue pas en fonction de ς (J_j et K_j sont des matrices constantes) ; de ce fait, F_{1j} et F_{2j} sont des matrices constantes.

Dans le cas où $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$ (interconnexion sans caractère descripteur) et si les matrices K_j sont telles que $K_j K_j^* = \mathbf{1}$ (ce qui est le cas le plus usuel) alors on a $F_{1j} = K_j$ et $F_{2j} = \mathbf{1}$.

Définition 5 *Pour un ensemble d'opérateurs incertains $\mathbf{\nabla}_j$ et une matrice F_{2j} donnée, on définit l'ensemble suivant des IQS-candidates pour l'opérateur élémentaire ∇_j*

$$\mathbf{\Theta}_j(F_{2j}) = \left\{ \Theta_j \ : \begin{array}{l} \forall \epsilon_j > 0 \\ \forall z_j \in L_{2e} \\ \forall \nabla_j \in \mathbf{\nabla}_j \end{array} , \exists \bar{\varsigma}_{2j} \ : \ \forall \bar{\varsigma}_j \geq \bar{\varsigma}_{2j} \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \middle| \Theta_j \begin{pmatrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}_j} \leq \epsilon_j \left\| \begin{array}{c} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{array} \right\|_{\bar{\varsigma}_j} \right\} . \tag{3.15}$$

La définition peut paraître complexe. Cependant, comme nous le verrons par la suite, dans la plupart des cas nous recherchons des IQS-candidates élémentaires telles que

$$\begin{array}{l} \forall z_j \in L_{2e} \\ \forall \nabla_j \in \mathbf{\nabla}_j \end{array} , \exists \bar{\varsigma}_{2j} \ : \ \forall \bar{\varsigma}_j \geq \bar{\varsigma}_{2j} \ , \ \left\langle \begin{pmatrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \middle| \Theta_j \begin{pmatrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}_j} \leq 0$$

qui appartiennent trivialement à l'ensemble décrit par (3.15).

3.3.3 Combinaison linéaire de séparateurs élémentaires

Théorème 8
Si $\Theta_j \in \mathbf{\Theta}_j(F_{2j})$ définissent des IQS pour les opérateurs élémentaires, alors la matrice :

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\bar{j}} \begin{bmatrix} F_{1j}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_j \end{bmatrix} \Theta_j \begin{bmatrix} F_{1j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_j^* \end{bmatrix} . \tag{3.16}$$

est une IQS-candidate ($\Theta \in \mathbf{\Theta}$).

Preuve : Pour commencer remarquons que

$$\mathcal{E}_2^* F_{1j}^* = (\mathbf{1} - K_j^* K_j)\mathcal{E}_2^* F_{1j}^* + K_j^* K_j \mathcal{E}_2^* F_{1j}^*$$

Par définition de F_{1j} le premier terme s'annule et donc par définition de F_{2j} on a $F_{1j}\mathcal{E}_2 = F_{2j}K_j$. De ce fait, l'équation (3.16) implique

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}} = \sum_{j=1}^{\bar{\jmath}} \left\langle \begin{pmatrix} F_{2j}K_j z \\ J_i^* \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta_j \begin{pmatrix} F_{2j}K_j z \\ J_j^* \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}}.$$

Or, en remarquant que $J_j^*\nabla = \nabla_j K_j$ (du fait que les J_j sont orthonormaux), et en prenant $z_j = K_j z$, on a pour chaque terme de la somme

$$\left\langle \begin{pmatrix} F_{2j}K_j z \\ J_i^* \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta_j \begin{pmatrix} F_{2j}K_j z \\ J_j^* \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}} = \left\langle \begin{pmatrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}}.$$

Donc pour tout $\bar{\varsigma} \geq \max_{j=1\ldots\bar{\jmath}} \bar{\varsigma}_{2j}$ on a

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \middle| \Theta \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}} \leq \sum_{j=1}^{\bar{\jmath}} \epsilon_j \left\| \begin{matrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}}.$$

Pour finir il suffit de prendre les ϵ_j tels que

$$\sum_{j=1}^{\bar{\jmath}} \epsilon_j \left\| \begin{matrix} F_{2j} z_j \\ \nabla_j z_j \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}} \leq \epsilon \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}}$$

ce qui est toujours possible indépendamment de $\bar{\varsigma}$ car $\mathcal{E}_2$ et F_{2j} sont constantes et que z_j et ∇_j sont des composantes de z et ∇. ■

3.3.4 Construction des séparateurs élémentaires

Donner une description pour les ensembles $\mathbf{\Theta}_i(F_{2j})$ est un problème en soi. Cependant, pour une grande variété d'ensembles d'opérateurs $\mathbf{\nabla}_j$ la littérature fournit des descriptions des ensembles $\mathbf{\Theta}_j(\mathbf{1})$. Une question intermédiaire est dès lors, connaissant une représentation de $\mathbf{\Theta}_j(\mathbf{1})$, de caractériser $\mathbf{\Theta}_j(F_{2j})$ pour $F_{2j} \neq \mathbf{1}$. Une première réponse à cette question est donnée par le lemme suivant

Lemme 2

$$\left\{ \Theta_j \ : \ \begin{bmatrix} F_{2j}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta_j \begin{bmatrix} F_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \leq \hat{\Theta}_j \ , \ \hat{\Theta}_j \in \mathbf{\Theta}_j(\mathbf{1}) \right\} \subset \mathbf{\Theta}_j(F_{2j}). \tag{3.17}$$

Preuve : Si la condition suivante est satisfaite

$$\begin{bmatrix} F_{2j}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta_j \begin{bmatrix} F_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \leq \hat{\Theta}_j$$

en prenant $\hat{\epsilon}_j$ tel que $\epsilon_j F_{2j}^* F_{2j} \leq \hat{\epsilon}_j \mathbf{1}$ on obtient que

$$\forall \epsilon_j \ , \ \exists \tilde{\epsilon}_j \ : \ \begin{bmatrix} F_{2j}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} (\Theta_j - \epsilon_j) \begin{bmatrix} F_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \leq \hat{\Theta}_j - \hat{\epsilon}_j.$$

On en déduit alors que pour tout signaux $z_j \in L_{2e}$, tout opérateur $\nabla_j \in \boldsymbol{\nabla}_j$ et tout $\bar{\varsigma}_j$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} F_{2j}z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \middle| \Theta_j \begin{pmatrix} F_{2j}z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}_j} - \epsilon_j \left\| \begin{matrix} F_{2j}z_j \\ \nabla_j z_j \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}_j}$$
$$\leq \left\langle \begin{pmatrix} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \middle| \hat{\Theta}_j \begin{pmatrix} z_j \\ \nabla_j z_j \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{\varsigma}_j} - \hat{\epsilon}_j \left\| \begin{matrix} z_j \\ \nabla_j z_j \end{matrix} \right\|_{\bar{\varsigma}_j}.$$

Par définition de $\hat{\Theta}_j \in \boldsymbol{\Theta}_j(\mathbf{1})$, le terme de droite est négatif pour $\bar{\varsigma}_j$ suffisamment grand ce qui permet de conclure. ■

A ce stade, la condition 3.17 est une condition suffisante pour construire les IQS-candidates quand $F_{2j} \neq \mathbf{1}$. Nous conjecturons que cette condition est nécessaire et suffisante, mais la nécessité reste à démontrer. En rappelant la Remarque 4, on constate également que la condition 3.17 conduit inévitablement à sur-paramétrer $\boldsymbol{\Theta}_j(F_{2j})$. Aussi nous produisons ci-dessous, pour des situations particulières, des façons de réduire le nombre de variables de décision.

A- La matrice F_{2j} est de rang plein en colonne, alors à la donnée de $\boldsymbol{\Theta}_j(\mathbf{1})$ les IQS-candidates sont décrites par

$$\left\{ \Theta_j = \begin{bmatrix} F_{2j}^{+*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \hat{\Theta}_j \begin{bmatrix} F_{2j}^{+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \ , \ \hat{\Theta}_j \in \boldsymbol{\Theta}_j(\mathbf{1}) \right\} \subset \boldsymbol{\Theta}_j(F_{2j}). \tag{3.18}$$

B- La matrice F_{2j} est sous la forme suivante $F_{2j} = H_j \otimes \hat{F}_{2j}$ où H_j est de rang plein en colonne, et l'ensemble $\boldsymbol{\Theta}_j(\mathbf{1})$ est décrit par des contraintes de la forme suivante

$$\hat{\Theta}_j = \begin{bmatrix} \Upsilon_{1j} \otimes \hat{P}_j & \Upsilon_{2j} \otimes \hat{P}_j \\ \Upsilon_{2j}^* \otimes \hat{P}_j & \Upsilon_{3j} \otimes \hat{P}_j \end{bmatrix} \ , \ \hat{P}_j = \hat{P}_j^* \geq \mathbf{0}.$$

Dans ce cas, le choix suivant d'IQS-candidates est approprié

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_j = \begin{bmatrix} (H_j^{+*}\Upsilon_{1j}H_j^{+}) \otimes P_j & (H_j^{+*}\Upsilon_{2j}) \otimes (P_j\hat{F}_{2j} + \hat{F}_{2j}^{*\perp}Y_j) \\ (\Upsilon_{2j}^* H_j^{+}) \otimes (P_j\hat{F}_{2j} + \hat{F}_{2j}^{*\perp}Y_j)^* & \Upsilon_{3j} \otimes (\hat{F}_{2j}^* P_j \hat{F}_{2j}) \end{bmatrix}, \\ \hat{F}_{2j}^* P_j \hat{F}_{2j} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \subset \boldsymbol{\Theta}_j(F_{2j}). \tag{3.19}$$

Pour s'en persuader il suffit de remarquer que $H_j^{+}H_j = \mathbf{1}$ car H_j est de rang plein en colonne ce qui donne

$$\begin{bmatrix} H_j^* \otimes \hat{F}_{2j}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta_j \begin{bmatrix} H_j \otimes \hat{F}_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \hat{\Theta}_j$$

où $\hat{P}_j = \hat{F}_{2j}^* P_j \hat{F}_{2j}$. Les termes dépendants de Y disparaissent du fait que $\hat{F}_{2j}^* \hat{F}_{2j}^{*\perp} = \mathbf{0}$. La matrice Y est une variable totalement libre qui exploite les degrés de liberté relatifs au noyau de F_{2j} (qui est par construction une composante du noyau de $\mathcal{E}_2^*$). Contrairement à ce qui pourrait sembler au premier abord, la formulation qui suit

$$\Theta_j = \begin{bmatrix} (H_j^{+*}\Upsilon_{1j}H_j^{+}) \otimes (\hat{P}_j + \left\{ \hat{F}_{2j}^{*\perp}Y_{1j} \right\}^{\mathcal{H}}) & (H_j^{+*}\Upsilon_{2j}) \otimes (\hat{P}_j\hat{F}_{2j} + \hat{F}_{2j}^{*\perp}Y_{2j}) \\ (\Upsilon_{2j}^* H_j^{+}) \otimes (\hat{P}_j\hat{F}_{2j} + \hat{F}_{2j}^{*\perp}Y_{2j})^* & \Upsilon_{3j} \otimes (\hat{F}_{2j}^* \hat{P}_j \hat{F}_{2j}) \end{bmatrix},$$

qui est aussi valide, et qui a une matrice libre Y_{1j} supplémentaire, n'apporte pas de degrés de liberté utiles. En effet, si on prend $P_j = \hat{P}_j + \{\hat{F}_{2j}^{*\perp} Y_{1j}\}^{\mathcal{H}}$ et $Y_j = Y_{2j} - Y_{1j}\hat{F}_{2j}$ alors on a une IQS-candidate de la forme (3.19) sans perte de généralité.

Remarque 5 *On notera que si la factorisation $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ est faite de façon à avoir $\mathcal{E}_2$ de rang plein en ligne, alors les matrices F_{2j}^* seront de rang plein en colonne. Dans ce cas $F_{2j}^{*\perp}$ sont nulles et le nombre de variables des LMI est réduit (pas de variable Y_j). Ce type de factorisation sera donc à privilégier pour des raisons numériques.*

3.3.5 Séparateurs pour les intégrateurs

3.3.5.1 Séparateurs pour l'intégrateur avec conditions initiales nulles

Rappelons que l'intégrateur avec conditions initiales nulles est défini comme suit $[\mathcal{I}\dot{x}] = x$. Pour cet opérateur $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mathbf{1})$ est connu quand on se restreint aux IQS-candidates constantes :

$$\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mathbf{1}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ P \geq \mathbf{0} \right\}.$$

En appliquant les résultats de (3.19), et en tenant compte du Lemme 15, on trouve donc que

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -PF_{2\mathcal{I}} - F_{2\bar{\mathcal{I}}}^{*\perp} Y \\ -F_{2\mathcal{I}}^* P - Y^* F_{2\bar{\mathcal{I}}}^{*\perp *} & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ F_{2\mathcal{I}}^* P F_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}}(F_{2\mathcal{I}})$. Mais on se limite là à des séparateurs constants. Le lemme suivant donne la formulation générale pour le cas variant dans le temps.

Lemme 3 *L'ensemble suivant*

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -PF_{2\mathcal{I}} - F_{2\bar{\mathcal{I}}}^{*\perp} Y \\ -F_{2\mathcal{I}}^* P - Y^* F_{2\bar{\mathcal{I}}}^{*\perp *} & -F_{2\mathcal{I}}^* \dot{P} F_{2\mathcal{I}} \end{array} \right] \ , \quad \exists \bar{t}_2 \ : \ \forall t \geq \bar{t}_2 \ , \ F_{2\mathcal{I}}^* P(t) F_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}}(F_{2\mathcal{I}})$.

En anticipant légèrement sur la suite, remarquons que la matrice P permet de définir une fonction de Lyapunov quadratique. Elle est sans surprise variante dans le temps quand les systèmes considérés sont variants dans le temps. Il peut au premier abord paraître surprenant de contraindre cette fonction de Lyapunov à n'être définie-positive que pour de grandes valeurs de t mais, comme la stabilité asymptotique n'interdit pas des divergences finies avant la convergence finale, la contrainte s'explique pleinement.

Preuve : Posons $\hat{P} = F_{2\mathcal{I}}^* P F_{2\mathcal{I}}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ \mathcal{I}\dot{x} \end{pmatrix} \middle| \Theta_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ \mathcal{I}\dot{x} \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{t}} &= \left\langle \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ x \end{pmatrix} \middle| \Theta_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ x \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{t}} \\
&= \int_0^{\bar{t}} \begin{pmatrix} \dot{x}^*(t)F_{2\mathcal{I}}^* & x^*(t) \end{pmatrix} \Theta_{\mathcal{I}}(t) \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{\bar{t}} -\dot{x}^*(t)\hat{P}(t)x(t) - x^*(t)\hat{P}(t)\dot{x}(t) - x^*(t)\dot{\hat{P}}(t)x(t)dt \\
&= -\left[x^*(\bar{t})\hat{P}(\bar{t})x(\bar{t}) - x^*(0)\hat{P}(0)x(0)\right].
\end{aligned}$$

Les conditions initiales sur x étant nulles on a donc

$$\left\langle \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ \mathcal{I}\dot{x} \end{pmatrix} \middle| \Theta_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} F_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ \mathcal{I}\dot{x} \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{t}} = -x^*(\bar{t})\hat{P}(\bar{t})x(\bar{t}) \leq 0.$$

pour tout $\bar{t} \geq \bar{t}_2$. ■

3.3.5.2 Séparateurs pour l'intégrateur avec conditions initiales non nulles

L'intégrateur avec conditions initiales non nulles est défini comme suit

$$\mathcal{I}_I \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = x.$$

La preuve du Lemme 3 nous indique naturellement le résultat suivant.

Lemme 4 *L'ensemble suivant*

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}_I} = \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P\hat{F}_{2\mathcal{I}} - \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y \\ \mathbf{0} & -\hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P - Y^* \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp *} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* \dot{P} \hat{F}_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix}, \ \exists \bar{t}_2 : \ \forall t \geq \bar{t}_2, \ \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P(t) \hat{F}_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}_I}(\mathbf{1}_2 \otimes \hat{F}_{2\mathcal{I}})$.

Preuve : On définit $\hat{P}$ comme précédemment et l'on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} \hat{F}_{2\mathcal{I}}\varphi_0 x \\ \hat{F}_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ x \end{pmatrix} \middle| \Theta_{\mathcal{I}_I} \begin{pmatrix} \hat{F}_{2\mathcal{I}}\varphi_0 x \\ \hat{F}_{2\mathcal{I}}\dot{x} \\ x \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{t}} \\
&\quad = \int_0^{\bar{t}} -\delta(t)x^*(t)\hat{P}(t)x(t) - \dot{x}^*(t)\hat{P}(t)x(t) - x^*(t)\hat{P}(t)\dot{x}(t) - x^*(t)\dot{\hat{P}}(t)x(t)dt \\
&\quad = -x^*(0)\hat{P}(0)x(0) - \left[x^*(\bar{t})\hat{P}(\bar{t})x(\bar{t}) - x^*(0)\hat{P}(0)x(0)\right] \\
&\quad = -x^*(\bar{t})\hat{P}(\bar{t})x(\bar{t}) \leq 0
\end{aligned}$$

pour tout $\bar{t} \geq \bar{t}_2$. ■

3.3.5.3 Séparateurs pour l'intégrateur avec conditions finales

L'intégrateur appliqué à la dérivée tronquée à l'instant θ a pour image le signal tronqué ainsi que les conditions finales en θ. Il s'écrit

$$\mathcal{I}_F \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\theta \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta x \\ \varphi_\theta x \end{pmatrix}.$$

La preuve du Lemme 4 nous indique naturellement le résultat suivant.

Lemme 5 *L'ensemble suivant*

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}_F} = \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P\hat{F}_{2\mathcal{I}} - \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*} P - Y^* \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*} \dot{P} \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*} P \hat{F}_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix} \right\}$$

décrit un sous ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}_I}(H \otimes \hat{F}_{2\mathcal{I}})$ *où* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Preuve : On définit $\hat{P}$ comme précédemment et l'on a pour tout $\bar{t} \geq \theta$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} \hat{F}_{2\mathcal{I}} \varphi_0 x \\ \hat{F}_{2\mathcal{I}} \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ 0 \\ \mathcal{T}_\theta x \\ \varphi_\theta x \end{pmatrix} \middle| \Theta_{\mathcal{I}_F} \begin{pmatrix} \hat{F}_{2\mathcal{I}} \varphi_0 x \\ \hat{F}_{2\mathcal{I}} \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ 0 \\ \mathcal{T}_\theta x \\ \varphi_\theta x \end{pmatrix} \right\rangle_{\bar{t}} \\
&\qquad = \int_0^{\bar{t}} \begin{pmatrix} -\delta(t) x^*(t) \hat{P}(t) x(t) - \mathcal{T}_\theta \dot{x}^*(t) \hat{P}(t) \mathcal{T}_\theta x(t) - \mathcal{T}_\theta x^*(t) \hat{P}(t) \mathcal{T}_\theta \dot{x}(t) \\ -\mathcal{T}_\theta x^*(t) \dot{\hat{P}}(t) \mathcal{T}_\theta x(t) + \delta(t-\theta) x^*(t) P(t) x(t) \end{pmatrix} dt \\
&\qquad = -x^*(0) \hat{P}(0) x(0) + x^*(\theta) \hat{P}(\theta) x(\theta) \\
&\qquad\qquad + \int_0^{\theta} -\dot{x}^*(\tau) \hat{P}(\tau) x(\tau) - x^*(\tau) \hat{P}(\tau) \dot{x}(\tau) - x^*(\tau) \dot{\hat{P}}(\tau) x(\tau) d\tau \\
&\qquad = -x^*(0) \hat{P}(0) x(0) + x^*(\theta) \hat{P}(\theta) x(\theta) - \Big[x^*(\theta) \hat{P}(\theta) x(\theta) - x^*(0) \hat{P}(0) x(0) \Big] = 0.
\end{aligned}$$

On remarque qu'aucune restriction n'est faite sur $\hat{P}$. ■

3.3.6 Séparateurs pour les systèmes décrits par l'opérateur avance

Les séparateurs précédents sont donnés dans le cas où les systèmes sont décrits par des équations différentielles, c'est-à-dire pour $[\vartheta x](t) = \dot{x}(t)$. Pour étendre les résultats aux systèmes

à temps discret, il convient principalement de remplacer cet opérateur par l'opérateur avance $[\vartheta x]_k = x_{k+1}$ et en conséquence de redéfinir les IQS-candidates.

Sans en donner la preuve car les arguments sont très similaires à ceux présentés pour le cas des systèmes à temps continu, voici les IQS-candidates pour le cas des systèmes discrets décrits par l'opérateur avance, $[\vartheta x]_k = x_{k+1}$:

Lemme 6 *L'ensemble suivant*

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I},k} = \begin{bmatrix} -P_{k+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{2\mathcal{I}}^* P_k F_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix} \ , \quad \exists \bar{k} : \ \forall k \geq \bar{k}, \ F_{2\mathcal{I}}^* P_k F_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}}(F_{2\mathcal{I}})$.

L'ensemble suivant

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}_I,k} = \begin{bmatrix} -P_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_{k+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P_k \hat{F}_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix} \ , \quad \exists \bar{k} : \ \forall k \geq \bar{k}, \ \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P_k \hat{F}_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}_I}(\mathbf{1}_2 \otimes \hat{F}_{2\mathcal{I}})$.

L'ensemble suivant

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}_F,k} = \begin{bmatrix} -P_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_{k+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P_k \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P_k \hat{F}_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix} \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}_F}(H \otimes \hat{F}_{2\mathcal{I}})$ *où* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.3.7 Séparateurs pour les systèmes décrits par l'opérateur variation

Voici maintenant les IQS-candidates pour le cas des systèmes discrets décrits par l'opérateur variation, $[\vartheta x]_k = (x_{k+1} - x_k)/T_s$:

Lemme 7 *L'ensemble suivant*

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I},k} = \begin{bmatrix} -T_s P_{k+1} & -P_{k+1} F_{2\mathcal{I}} - F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y_k \\ -F_{2\mathcal{I}}^* P_{k+1} - Y_k^* F_{2\mathcal{I}}^{*\perp *} & \frac{1}{T_s} F_{2\mathcal{I}}^* (P_k - P_{k+1}) F_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix}, \ \exists \bar{k} : \ \forall k \geq \bar{k}, \ F_{2\mathcal{I}}^* P_k F_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}}(F_{2\mathcal{I}})$.

L'ensemble suivant

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}_I,k} = \begin{bmatrix} -P_{k+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -T_s P_{k+1} & -P_{k+1} \hat{F}_{2\mathcal{I}} - \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y_k \\ \mathbf{0} & -\hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P_{k+1} - Y_k^* \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp *} & \frac{1}{T_s} \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* (P_k - P_{k+1}) \hat{F}_{2\mathcal{I}} \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \exists \bar{k} : \ \forall k \geq \bar{k}, \ \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P_k \hat{F}_{2\mathcal{I}} \geq \mathbf{0} \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}_I}(\mathbf{1}_2 \otimes \hat{F}_{2\mathcal{I}})$.

L'ensemble suivant

$$\left\{ \Theta_{\mathcal{I}_F,k} = \left[\begin{array}{ccccc} -P_{k+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -T_s P_{k+1} & \mathbf{0} & -P_{k+1}\hat{F}_{2\mathcal{I}} - \hat{F}^{*\perp}_{2\mathcal{I}} Y_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{F}^*_{2\mathcal{I}} P_{k+1} - Y_k^* \hat{F}^{*\perp *}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \frac{1}{T_s}\hat{F}^*_{2\mathcal{I}}(P_k - P_{k+1})\hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}^*_{2\mathcal{I}} P_{k+1} \hat{F}_{2\mathcal{I}} \end{array} \right] \right\}$$

décrit un sous-ensemble de $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{I}_F}(H \otimes \hat{F}_{2\mathcal{I}})$ *où* $H = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$.

On peut remarquer que si T_s tend vers zéro, *i.e.* l'opérateur variation tend vers la dérivée. Les séparateurs se comportent de même et tendent vers les séparateurs pour les intégrateurs à temps continu.

3.3.8 Séparateurs pour les opérateurs incertains

3.3.8.1 Séparateurs pour les opérateurs bornés en norme

L'ensemble des opérateurs bornés en norme est défini par (1.6) :

$$\mathbf{\nabla}_{n2n} = \left\{ \nabla_{n2n} \ : \ v = \nabla_{n2n} g \ , \ \forall \epsilon \ , \ \exists \bar{\varsigma}_2 \ : \ \forall \bar{\varsigma} > \bar{\varsigma}_2 \ , \ \|v\|^2_{\bar{\varsigma}} \leq (\frac{1}{\gamma^2} + \epsilon)\|g\|^2_{\bar{\varsigma}} \right\}.$$

Les IQS-candidates de $\mathbf{\Theta}_{n2n}(\mathbf{1})$ sont connues et sont

$$\mathbf{\Theta}_{n2n}(\mathbf{1}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

Pour s'en assurer il suffit d'écrire

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \middle| \left[\begin{array}{cc} -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \right\rangle_{\bar{\varsigma}} = \tau(\gamma^2 \|v\|_{\bar{\varsigma}}{}^2 - \|g\|_{\bar{\varsigma}}{}^2).$$

Pour tout $\hat{\epsilon}$, l'appartenance de l'opérateur à $\mathbf{\nabla}_{n2n}$ implique en prenant $\epsilon \leq \frac{\hat{\epsilon}}{\tau\gamma^2}$, qu'il existe $\bar{\varsigma}_2$ tel que

$$\forall \bar{\varsigma} > \bar{\varsigma}_2 \ , \ \left\langle \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \middle| \left[\begin{array}{cc} -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \right\rangle_{\bar{\varsigma}} \leq \hat{\epsilon}\|g\|^2_{\bar{\varsigma}} \leq \hat{\epsilon} \left\| \begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right\|^2_{\bar{\varsigma}}.$$

La condition (3.15) est donc bien satisfaite.

D'après (3.17) les IQS-candidates de $\mathbf{\Theta}_{n2n}(F_{2n2n})$ sont à rechercher parmi les matrices telles que

$$\left\{ \Theta \ : \ \left[\begin{array}{cc} F^*_{2n2n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{cc} F_{2n2n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{cc} -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0 \right\}$$

où l'on remarque que la relation suivant doit être satisfaite :

$$\left[\begin{array}{cc} F_{2n2n}^{*} & \mathbf{0} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} F_{2n2n} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \leq -\tau \mathbf{1} < \mathbf{0}.$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si F_{2n2n} est de rang plein en colonne. On en déduit le résultat suivant en appliquant le résultat (3.18)

Lemme 8 *Si F_{2n2n} est de rang plein en colonne alors $\mathbf{\Theta}_{n2n}(F_{2n2n})$ contient les IQS-candidates suivantes*

$$\left\{ \Theta_{n2n} = \left[\begin{array}{cc} -\tau F_{2n2n}^{+*} F_{2n2n}^{+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \tau \mathbf{1} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

3.3.8.2 Séparateurs pour les opérateurs passifs

L'ensemble des opérateurs passifs est défini par (1.7) :

$$\mathbf{\nabla}_p = \{ \ \nabla_p \ : \ v = \nabla_p g \ , \ < v | g > \geq 0 \ \}.$$

Les IQS-candidates de $\mathbf{\Theta}_p(\mathbf{1})$ sont connues et sont exactement

$$\mathbf{\Theta}_p(\mathbf{1}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\tau \mathbf{1} \\ -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

Pour s'en assurer il suffit d'écrire

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \middle| \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\tau \mathbf{1} \\ -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \right\rangle = -2\tau < v | g >$$

qui est bien négative pour les signaux opérés par les opérateurs de $\mathbf{\nabla}_p$. D'après (3.17) les IQS-candidates de $\mathbf{\Theta}_p(F_{2p})$ sont donc à rechercher parmi les matrices telles que

$$\left\{ \Theta \ : \ \left[\begin{array}{cc} F_{2p}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{cc} F_{2p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\tau \mathbf{1} \\ -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

Comme pour le cas des opérateurs bornés en norme, nous allons montrer que l'existence d'une telle IQS-candidate nécessite que F_{2p} soit de rang plein en colonne. Nous procédons par contradiction. Supposons que le noyau de F_{2p} est non vide et soit $g \neq 0$ un vecteur du noyau. Prenons un scalaire $\beta > 0$. D'après (3.17) l'IQS-candidate doit satisfaire pour tout $\beta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c} g \\ \beta g \end{array} \right)^{*} \left[\begin{array}{cc} F_{2p}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{cc} F_{2p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} g \\ \beta g \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} g \\ \beta g \end{array} \right)^{*} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\tau \mathbf{1} \\ -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} g \\ \beta g \end{array} \right)$$

qui, comme g est dans le noyau de F_{2p} s'écrit :

$$\beta^2 g^{*} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \right] g \leq -2\tau \beta g^{*} g$$

ou encore

$$g^* \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \right] g \leq -\frac{2\tau}{\beta} g^* g.$$

Pour $\tau > 0$ et $g^* g \neq 0$ fixés, cette relation doit être satisfaite pour tout $\beta > 0$ ce qui est impossible (le côté droit de l'inégalité tend vers $-\infty$ quand $\beta \to 0$). Il ne peut donc y avoir de vecteur $g \neq 0$ dans le noyau de F_{2p}. Cette matrice doit donc être de rang plein en colonne et on en déduit le résultat suivant en appliquant le résultat (3.18).

Lemme 9 *Si F_{2p} est de rang plein en colonne alors $\mathbf{\Theta}_p(F_{2p})$ contient les IQS-candidates suivantes*

$$\left\{ \Theta_p = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\tau F^{+*}_{2n2n} \\ -\tau F^{+}_{2n2n} & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

3.3.8.3 Séparateurs pour l'opérateur impulsion bornée

Soit l'opérateur impulsion bornée défini par (1.8) :

$$\mathbf{\nabla}_{i2n} = \left\{ \ \nabla_{i2n} \ : \ v = \nabla_{i2n} g \ , \ v = \alpha \varphi_0 \ , \ \alpha \in \boldsymbol{C} \ , \ |\alpha| \leq \frac{1}{\gamma} \|g\| \ \right\}.$$

Les IQS-candidates de $\mathbf{\Theta}_{i2n}(\mathbf{1})$ sont comme suit

$$\mathbf{\Theta}_{i2n}(\mathbf{1}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} \right] \ , \ \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau \gamma^2 \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

Pour s'en assurer il suffit d'écrire

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \middle| \left[\begin{array}{cc} -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} g \\ v \end{array} \right) \right\rangle = -\tau \|g\|^2 + \alpha^2 \|\delta_0 Q\|^2 = -\tau \|g\|^2 + \alpha^2 \mathrm{Tr}\, Q$$

qui est bien négative étant donné les conditions sur Q et sur α pour les signaux opérés par les opérateurs de $\mathbf{\nabla}_{i2n}$. D'après (3.17) les IQS-candidates de $\mathbf{\Theta}_{n2n}(F_{2i2n})$ sont donc à rechercher parmi les matrices telles que

$$\left\{ \Theta \ : \ \left[\begin{array}{cc} F^*_{2i2n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{cc} F_{2i2n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{cc} -\tau \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} \right] \ , \ \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau \gamma^2 \ , \ \tau > 0 \right\}$$

où l'on remarque que la relation suivant doit être satisfaite :

$$\left[\begin{array}{cc} F^*_{2i2n} & \mathbf{0} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c} F_{2i2n} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \leq -\tau \mathbf{1} < \mathbf{0}.$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si F_{2i2n} est de rang plein en colonne. On en déduit le résultat suivant en appliquant le résultat (3.18)

Lemme 10 *Si F_{2i2n} est de rang plein en colonne alors $\mathbf{\Theta}_{i2n}(F_{2i2n})$ contient les IQS-candidates suivantes*

$$\left\{ \Theta_{i2n} = \left[\begin{array}{cc} -\tau F^{+*}_{2i2n} F^{+}_{2i2n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} \right] \ , \ \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau \gamma^2 \ , \ \tau > 0 \right\}.$$

3.3.8.4 Séparateurs pour des incertitudes dissipatives structurées

Les incertitudes $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$-structurées et $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$-dissipatives sont données par la Définition 1. Nous allons rechercher les séparateurs pour le cas où ces incertitudes seraient répétées r fois sur la diagonale de l'opérateur incertain :

$$\boldsymbol{\nabla}_{sd} = \left\{ \mathbf{1}_r \otimes \Delta \ : \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^* & \Phi_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array}\right] = \mathbf{0}\,, \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2^* & \Psi_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array}\right] \leq \mathbf{0}\,. \end{array} \right\}$$

Les IQS-candidates de $\boldsymbol{\Theta}_{sd}(\mathbf{1})$ sont comme suit

$$\boldsymbol{\Theta}_{sd}(\mathbf{1}) = \left\{ \hat{\Theta}_{sd} = \left[\begin{array}{cc} R \otimes \Phi_1 & R \otimes \Phi_2 \\ R \otimes \Phi_2^* & R \otimes \Phi_3 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} P \otimes \Psi_1 & P \otimes \Psi_2 \\ P \otimes \Psi_2^* & P \otimes \Psi_3 \end{array}\right] \ , \quad \begin{array}{l} R = R^*, \\ P = P^* \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}.$$

Pour s'en assurer il suffit d'écrire

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{1}_r \otimes \Delta^* \end{array}\right] \hat{\Theta}_{sd} \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}_r \otimes \Delta \end{array}\right] \\ = R \otimes \left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^* & \Phi_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array}\right] \right) + P \otimes \left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \Delta^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2^* & \Psi_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta \end{array}\right] \right) \end{array}$$

qui est bien négative pour tout R et pour P définie positive, quand Δ est dans $\boldsymbol{\nabla}_{sd}$.

Nous allons maintenant décrire $\boldsymbol{\Theta}_{sd}(F_{2sd})$ pour le cas où $F_{2sd} = \hat{F}_{2sd} \otimes \tilde{F}_{2sd}$ avec les dimensions appropriées : $\hat{F}_{2sd} \in \boldsymbol{C}^{r \times r}$. Pour les mêmes raisons que dans le cas des opérateurs bornés en norme et des opérateurs passifs les IQS-candidates n'existent que si $\tilde{F}_{2sd}$ est de rang plein en colonne. La démonstration qui est bien plus complexe, et qui suppose que l'ensemble d'incertitudes structurées dissipatives est non dégénéré, est omise. Pour ce qui est de $\hat{F}_{2sd}$ on retrouve des propriétés similaires à ce que nous avons vu pour le cas des intégrateurs (condition (3.19)).

Lemme 11 *Si $\tilde{F}_{2sd}$ est de rang plein en colonne alors $\boldsymbol{\Theta}_{sd}(\hat{F}_{2sd} \otimes \tilde{F}_{2sd})$ contient les IQS-candidates suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{sd} = \\ \left[\begin{array}{cc} R \otimes (\tilde{F}_{2sd}^{+*} \Phi_1 \tilde{F}_{2sd}^{+}) & (R\hat{F}_{2sd} + \hat{F}_{2sd}^{*\perp} Y_R) \otimes (\tilde{F}_{2sd}^{+*} \Phi_2) \\ (R\hat{F}_{2sd} + \hat{F}_{2sd}^{*\perp} Y_R)^* \otimes (\Phi_2^* \tilde{F}_{2sd}^{+}) & (\hat{F}_{2sd}^* R \hat{F}_{2sd}) \otimes \Phi_3 \end{array}\right] \\ + \left[\begin{array}{cc} P \otimes (\tilde{F}_{2sd}^{+*} \Psi_1 \tilde{F}_{2sd}^{+}) & (P\hat{F}_{2sd} + \hat{F}_{2sd}^{*\perp} Y_P) \otimes (\tilde{F}_{2sd}^{+*} \Psi_2) \\ (P\hat{F}_{2sd} + \hat{F}_{2sd}^{*\perp} Y_P)^* \otimes (\Psi_2^* \tilde{F}_{2sd}^{+}) & (\hat{F}_{2sd}^* P \hat{F}_{2sd}) \otimes \Psi_3 \end{array}\right] \end{array} \ , \quad \begin{array}{l} R = R^*, \\ Y_R, \\ P = P^* \geq \mathbf{0}, \\ Y_P \end{array} \right\}.$$

Cette formule est complexe, nous allons donc la préciser dans certains cas du Chapitre 1 (voir page 26 et pages suivantes).

Matrices de norme spectrale bornée.
Les matrices telles que $\|\Delta\| \leq \frac{1}{\gamma}$ sont $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$-structurées, $\{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \gamma^2 \mathbf{1}\}$-dissipatives. Dans le

cas où elles ne sont pas répétées $r = 1$, on prend sans perte de généralité $\hat{F}_{2sd} = 1$, $\tilde{F}_{2sd} = F_{2sd}$ et on note $P = \tau \in \boldsymbol{R}$. Les IQS-candidates sont alors

$$\left[\begin{array}{cc} -\tau F_{2sd}^{+*} F_{2sd}^{+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] \ , \ \tau > 0$$

qui sont sans surprise les mêmes IQS-candidates que pour les opérateurs bornés en norme.

Scalaires répétés.
Pour un nombre complexe s qui est $\{p_1, p_2, p_3\}$-structuré, $\{r_1, r_2, r_3\}$-dissipatif et répété, la matrice d'incertitude s'écrit $\mathbf{1} \otimes s = s\mathbf{1}$. On prend sans perte de généralité $\tilde{F}_{2sd} = \mathbf{1}$ et $\hat{F}_{2sd} = F_{2sd}$. Les IQS-candidates sont alors

$$\Theta_{sd} = \left[\begin{array}{cc} p_1 R + r_1 P & (p_2 R + r_2 P) F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp}(p_2 Y_R + r_2 Y_P) \\ (p_2 R + r_2 P) F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp}(p_2 Y_R + r_2 Y_P)^* & F_{2sd}^{*}(p_3 R + r_3 P) F_{2sd} \end{array} \right]$$

avec $R = R^*$ et $P = P^* \geq \mathbf{0}$.

Un premier sous-cas de scalaire répété est le placement de pôle en-dessous d'une droite passant par le point α et faisant un angle ψ avec l'axe imaginaire. Le problème implique alors un scalaire répété $\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}$ qui est $\{0, -e^{\mathrm{j}\psi}, \alpha e^{-\mathrm{j}\psi} + \alpha^* e^{\mathrm{j}\psi}\}$-dissipatif. Dans ce cas l'IQS-candidate est

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -e^{\mathrm{j}\psi}(P F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y_P) \\ -e^{-\mathrm{j}\psi}(P F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y_P)^* & (\alpha e^{-\mathrm{j}\psi} + \alpha^* e^{\mathrm{j}\psi}) P \end{array} \right], \ P = P^* \geq \mathbf{0}.$$

Un autre sous-cas est quand on veut spécifier des contraintes sur une bande de fréquence. Alors $s = (\mathrm{j}\omega)^{-1}$ est sur l'axe imaginaire et est borné en fréquence $\omega \in [\ \underline{\omega}\ \ \overline{\omega}\ ]$. Il est $\{0, 1, 0\}$-structuré, $\{2, -\mathrm{j}(\underline{\omega} + \overline{\omega}), 2\underline{\omega}\overline{\omega}\}$-dissipatif. La matrice incertaine avec ce scalaire répété est $s\mathbf{1}$ et les IQS-candidates sont

$$\left[\begin{array}{cc} 2P & (R - \mathrm{j}(\underline{\omega} + \overline{\omega})P) F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y \\ ((R - \mathrm{j}(\underline{\omega} + \overline{\omega})P) F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y)^* & 2\underline{\omega}\overline{\omega} F_{2sd}^{*} P F_{2sd} \end{array} \right], \begin{array}{l} R = R^* \\ P = P^* \geq \mathbf{0} \end{array}$$

où $Y = Y_R + \mathrm{j}(\underline{\omega} + \overline{\omega}) Y_P$ est libre sans perte de généralité.

Un troisième-sous cas est celui des incertitudes scalaires δ réelles définies dans un intervalle $\delta \in [\underline{\delta}\ \ \overline{\delta}]$. Elles sont alors $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurées, $\{2\underline{\delta}\overline{\delta}, -(\underline{\delta} + \overline{\delta}), 2\}$-dissipatives. Les IQS-candidates pour ces incertitudes répétées $\delta\mathbf{1}$ sont

$$\left[\begin{array}{cc} 2\underline{\delta}\overline{\delta} P & (\mathrm{j}R - (\underline{\delta} + \overline{\delta})P) F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y \\ (-\mathrm{j}R - (\underline{\delta} + \overline{\delta})P) F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y)^* & 2F_{2sd}^{*} P F_{2sd} \end{array} \right], \begin{array}{l} R = R^* \\ P = P^* \geq \mathbf{0} \end{array}$$

où $Y = \mathrm{j}Y_R - (\underline{\delta} + \overline{\delta}) Y_P$ est libre sans perte de généralité.

Les trois derniers séparateurs sont à valeurs complexes. Or, d'après la Remarque 3, si les données du problème (les matrices $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$) sont à valeurs réelles, les séparateurs peuvent être choisis à valeurs réelles. Ainsi, les séparateurs à valeurs complexes sont valides vis-à-vis du problème considéré mais apportent une augmentation de la complexité qui pourrait être levée. C'est l'objet du lemme suivant pour le cas de domaines symétriques par rapport à l'ensemble des valeurs réelles.

Lemme 12 *Si les données du problème (les matrices $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$) sont réelles et que $\boldsymbol{\nabla}$ est tel que pour tout $\nabla \in \boldsymbol{\nabla}$ sa conjuguée est elle-même dans l'ensemble* $\mathrm{conj}(\nabla) \in \boldsymbol{\nabla}$*, alors, pour tout Θ définissant un IQS, sa partie réelle $\Re(\Theta)$ définit également un IQS pour le problème.*

Preuve : Supposons que Θ définit un IQS, c'est-à-dire que les conditions (3.5) et (3.6) sont satisfaites. Supposons de plus que les données du problèmes (les matrices $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$) sont réelles. Dans ce cas, en prenant la conjuguée des conditions (3.5) et (3.6) on trouve :

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} (\mathrm{conj}(\Theta(\varsigma)) - \mu \mathbf{1}) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} \geq \mathbf{0} \ , \ \forall \varsigma \in \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathcal{E}_2 \mathrm{conj}(z) \\ \mathrm{conj}(\nabla)\mathrm{conj}(z) \end{array} \right) \middle| \mathrm{conj}(\Theta) \left(\begin{array}{c} \mathcal{E}_2 \mathrm{conj}(z) \\ \mathrm{conj}(\nabla)\mathrm{conj}(z) \end{array} \right) \right\rangle \leq 0 \ , \quad \begin{array}{c} \forall z \in L_2 \\ \forall \nabla \in \boldsymbol{\nabla} \end{array} \ .$$

L_2 et $\boldsymbol{\nabla}$ sont symétriques par rapport à l'ensemble des valeurs réelles, ainsi la dernière condition s'écrit également

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{array} \right) \middle| \mathrm{conj}(\Theta) \left(\begin{array}{c} \mathcal{E}_2 z \\ \nabla z \end{array} \right) \right\rangle \leq 0 \ , \quad \begin{array}{c} \forall z \in L_2 \\ \forall \nabla \in \boldsymbol{\nabla} \end{array} \ .$$

On en déduit que $\frac{1}{2}(\Theta + \mathrm{conj}(\Theta)) = \Re(\Theta)$ satisfait les conditions (3.5) et (3.6). ■

Les situations quand $\boldsymbol{\nabla}$ est symétrique par rapport à l'ensemble des valeurs réelles sont par exemple les incertitudes $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$-structurées, $\{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \gamma^2 \mathbf{1}\}$-dissipatives pour lesquelles les IQS-candidates sont réelles dès lors que $\mathcal{E}_2$ est réelle. Un autre exemple moins trivial est celui des incertitudes $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurées, $\{2\underline{\delta}\overline{\delta}, -(\underline{\delta} + \overline{\delta}), 2\}$-dissipatives répétées. Dans ce cas la partie réelle de Θ s'écrit comme suit

$$\left[\begin{array}{cc} 2\underline{\delta}\overline{\delta} P_R & (-R_I - (\underline{\delta} + \overline{\delta})P_R)F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y_R \\ ((-R_I - (\underline{\delta} + \overline{\delta})P_R)F_{2sd} + F_{2sd}^{*\perp} Y_R)^T & 2F_{2sd}^* P_R F_{2sd} \end{array}\right], \begin{array}{l} R_I = -R_I^T \\ P_R = P_R^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

où l'on retrouve une matrice symétrique P_R et une matrice anti-symétrique R_I. Ce résultat est exactement celui bien connu des DG-scalings.

Sur la base de la preuve du Lemme 12 il est également possible d'écrire les résultats suivants.

Lemme 13 *Si Θ définit un IQS et que les données du problème (les matrices $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$) sont réelles alors le bien-posé est également prouvé pour tous les opérateurs de l'union des deux domaines $\boldsymbol{\nabla} \cup \mathrm{conj}(\boldsymbol{\nabla})$ où* $\mathrm{conj}(\boldsymbol{\nabla}) = \{ \mathrm{conj}(\nabla) \ : \ \nabla \in \boldsymbol{\nabla} \}$.

Ce résultat indique que si le bien-posé est démontré vis-à-vis de l'ensemble des incertitudes $\{0, -e^{\mathrm{j}\psi}, \alpha e^{-\mathrm{j}\psi} + \alpha^* e^{\mathrm{j}\psi}\}$-dissipatives, et que les données sont réelles, alors le bien-posé est également garanti pour les incertitudes $\{0, -e^{-\mathrm{j}\psi}, \alpha e^{-\mathrm{j}\psi} + \alpha^* e^{\mathrm{j}\psi}\}$-dissipatives. C'est donc une condition de bien-posé vis-à-vis de l'extérieur d'un cône du plan complexe comme illustré sur la figure 3.1. On verra par la suite que ceci permet de démontrer que les pôles d'un système sont tous localisés dans ce cône.

Lemme 14 *Si Θ_1 et Θ_2 définissent respectivement un IQS vis-à-vis des l'ensembles incertains $\boldsymbol{\Theta}_1$ et $\boldsymbol{\Theta}_2$, alors $\Theta_1 + \Theta_2$ définit un IQS vis-à-vis de leur intersection $\boldsymbol{\Theta}_1 \cap \boldsymbol{\Theta}_2$.*

Ce lemme permet aisément d'étendre les résultats exposés à des incertitudes décrites par plus d'une contrainte égalité et une contrainte inégalité telles que dans la Définition 1.

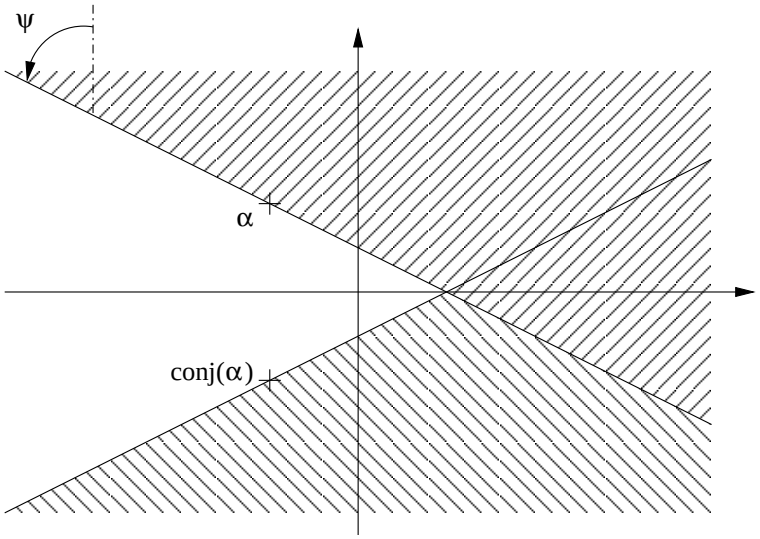


FIGURE 3.1 – Cône comme intersection de deux demis-plans

3.4 Résultats sous forme LMI

Il convient de remarquer que la condition (3.5) n'est pas numériquement exploitable tant que l'on conserve le quantificateur $\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma}$. Cependant, le problème peut se résoudre dans les cas suivants :

A- $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ (et donc Θ) sont indépendants de ς. C'est ce cas qui sera principalement envisagé par la suite (mais pas uniquement). Il convient alors de trouver un séparateur Θ solution d'une LMI définie par une inégalité stricte :

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}.$$

B- $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ prennent un nombre fini de valeurs paramétrées par un ensemble fini $\{\varsigma_1 \ldots \varsigma_{\bar{1}}\}$. Il convient alors de chercher pour chacune de ces valeurs un séparateur. Là aussi l'inégalité (3.5) se réduit à une inégalité stricte car les inégalités sont à satisfaire pour un ensemble fini de valeurs :

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} \Theta(\varsigma) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0} \quad \forall \varsigma \in \{\varsigma_1 \ldots \varsigma_{\bar{1}}\}.$$

Cette situation correspond au cas classique du calcul de la valeur singulière structurée μ où $\varsigma = \mathrm{j}\omega$, et à défaut de calculer une borne supérieure de μ sur toutes les fréquences, l'on se contente d'un nombre fini de fréquences $\omega_1, \ldots \omega_{\bar{1}}$.

C- $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp}$ est un polynôme de degré fini en ς. Il est alors envisageable de chercher $\Theta(\varsigma)$ sous forme polynomiale et de reformuler (3.5) sous forme de contraintes LMI en dimension finie à l'aide de techniques dites de sommes-de-carrés (voir [98, 161, 43, 216]). Cette technique se généralise à des polynômes trigonométriques (quand les données sont périodiques par exemple), ou encore à des fractions rationnelles. Dans le cas polynomial une alternative aux sommes-de-carrés est d'appliquer des résultats reposant sur le théorème de Polyà (voir [215]).

Concernant la condition (3.6) pour que Θ soit IQS-candidate, elle n'est en général pas réductible à des LMI en nombre fini. Cependant, pour les opérateurs qui constituent ∇ dans ce document nous avons vu dans la section précédente qu'il est possible d'en donner une formulation (en général pessimiste). Cette formulation est schématiquement toujours sous la forme suivante

$$\left\{ \Theta_j(X_{1j}, X_{2j}, \dots), \quad F_{2j}^* X_{1j} F_{2j} \geq \mathbf{0} \right\} \subset \mathbf{\Theta}_j$$

où $\Theta_j(X_{1j}, X_{2j} \dots)$ est linéaire vis-à-vis des variables de décision $X_{\bullet j}$. Ainsi le problème général de bien-posé pourra être résolu (avec pessimisme) à condition de résoudre un problème du type

$$\mathcal{LMI}(X_1, \dots, X_{\bar{l}}, Y) < \mathbf{0} \ , \ F_l^* X_l F_l \geq \mathbf{0} \ \ \forall l = 1 \dots \bar{l}. \tag{3.20}$$

Cependant, numériquement, les contraintes semi-définies ($\geq \mathbf{0}$) sont plus complexes à résoudre pour les solveurs que les contraintes définies strictes ($> \mathbf{0}$). C'est pour cela que le résultat suivant est fourni et sera utilisé par la suite.

Lemme 15 *Soit le problème LMI de la forme (3.20) où $\mathcal{LMI}$ regroupe éventuellement plusieurs contraintes LMI strictes (définies positives ou définies négatives) et où X_1,..., $X_{\bar{l}}$ et Y peuvent être composées de plusieurs variables mais sont indépendantes entres elles. Ce problème LMI est faisable si et seulement si il existe une solution à ce second problème LMI composé exclusivement de contraintes strictes*

$$\mathcal{LMI}(X_1, \dots, X_{\bar{l}}, Y) < \mathbf{0} \ , \ (F_l F_l^{*\circ})^* X_l (F_l F_l^{*\circ}) > \mathbf{0} \ \ \forall l = 1 \dots \bar{l}. \tag{3.21}$$

Preuve : Soit $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{\bar{l}}, \hat{Y})$ une solution au problème (3.20). Pour tout signaux z_l on a que $z_l^* F_l^* \hat{X}_l F_l z_l \geq 0$ est vérifié. Ces vecteurs z_l peuvent être décomposés dans les bases $\begin{bmatrix} F_l^{\perp} & F_l^{*\circ} \end{bmatrix}$ sous la forme $z_l = F_l^{\perp} z_{\perp l} + F^{*\circ} z_{\circ l}$. Il en résulte que

$$z_l^* F_l^* \hat{X}_l F_l z_l = z_{\circ l}^* (F_l F_l^{*\circ})^* \hat{X}_l (F_l F_l^{*\circ}) z_{\circ l} \geq 0.$$

Les contraintes $F_l^* X_l F_l \geq \mathbf{0}$ et $(F_l F_l^{*\circ})^* X_l (F_l F_l^{*\circ}) \geq \mathbf{0}$ sont donc équivalentes ce qui est suffisant pour démontrer que (3.20) est vraie quand (3.21) est vérifiée. Reste à établir l'inverse.

La contrainte

$$\mathcal{LMI}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{\bar{l}}, \hat{Y}) < \mathbf{0}$$

définit un ouvert. Donc pour des scalaires $\epsilon_l > 0$ suffisamment petits, la contrainte reste valide ($\mathcal{LMI}(X_1, \dots, X_{\bar{l}}, Y) < \mathbf{0}$) pour $X_l = \hat{X}_l - \epsilon_l \mathbf{1}$ et $Y = \hat{Y}$. Cette solution est donc telle que

$$(F_l F_l^{*\circ})^* X_l (F_l F_l^{*\circ}) \geq \epsilon_l (F_l F_l^{*\circ})^* (F_l F_l^{*\circ}) > \mathbf{0}$$

qui sont toutes définies positives car $F_l F_l^{*\circ}$ est par définition de rang plein en colonne. ■

Grâce au Lemme 15 on a un outil générique pour éviter des problèmes numériques dus à des contraintes sous forme semi-définie. Il sera systématiquement pris en compte dans la suite quand on formulera les LMI construites pour une problème particulier.

Chapitre 4

IQS pour l'analyse des systèmes

Les résultats de séparation intégrale quadratique du chapitre précédent sont maintenant appliqués à l'analyse des systèmes dynamiques. Comme le résultat de séparation intégrale quadratique s'applique aux problèmes définis avec des applications linéaires implicites, il permet de formuler des conditions d'analyse pour les systèmes descripteurs. Ces conditions sont en grande partie nouvelles, même si sur des cas particuliers on retrouve des conditions connues de la littérature.

Une grande partie du chapitre est dédiée au cas le plus simple de systèmes sans incertitude pour lesquels on recherche à faire l'analyse de stabilité ou de performances. Une originalité est que, contrairement à la littérature existante, les critères de performance sont tous reformulés en terme de bien-posé d'une boucle. Ce type de résultat est très connu pour ce qui est de l'équivalence entre norme H_∞ et robustesse vis-à-vis d'un bouclage avec une incertitude bornée en norme (théorème du petit gain page 46). Le cas de la norme H_2 et des performances impulsion-à-pic est un résultat plus surprenant, d'autant qu'il implique dans sa formulation de bien-posé équivalente des opérateurs non-causaux. Ce type de résultat est à notre connaissance totalement absent du formalisme IQC, même si on trouve une tentative en ce sens pour le calcul de la norme H_2 dans [217].

La fin du chapitre illustre sur le cas classiquement considéré en μ-analyse comment, avec exactement la même démarche, on obtient les conditions de stabilité ou performances robustes. Ces résultats s'appliquent aux systèmes de type LFT qui sont les seuls considérés dans ce manuscrit. Pour les systèmes polytopiques, le lecteur est invité à voir [58] où est également abordé le cas des systèmes descripteurs par l'approche par S-variables. Ces résultats généralisent ceux de [74, 41, 209, 27, 28].

4.1 IQS pour l'analyse de performances

Dans cette section nous considérons des systèmes LTI sans incertitudes et montrons comment un certain nombre de problèmes d'analyse de performances des systèmes dynamiques s'interprètent dans le cadre de la théorie de séparation intégrale quadratique. La généralisation au cas incertain et/ou temps variant de ces résultats est relativement aisée et sera étudiée séparément sur des cas particuliers.

Pour commencer, le propos est développé pour les systèmes à temps continu. Dans la section suivante nous montrons comment ces mêmes résultats se formulent pour le cas des systèmes à temps discret.

4.1.1 Stabilité asymptotique globale

Soit le système sous forme descripteur suivant

$$E_{xx}\dot{x}(t) + E_{x\pi}\pi(t) = Ax(t). \tag{4.1}$$

L'étude des systèmes descripteurs [249] commence par la définition des réponses du système qui peuvent comporter des phénomènes impulsionnels. Ces phénomènes impulsionnels se définissent comme des solutions du type Dirac en réponse à des conditions initiales $x(0^-)$ non nulles. Par exemple, s'il existe une solution à

$$E_{xx}x_{o1} + E_{x\pi}\pi_{o1} = 0 \ , \ x_{o1} = -x(0^-)$$

alors le signal impulsionnel $\pi(t) = \pi_{o1}\delta(t)$ est tel que $\dot{x}(t) = x_{o1}\delta(t)$ et $x(t)$ est identiquement nul pour tout $t \geq 0$. Cette solution n'est pas en soi considérée comme un mode impulsionnel. Le système descripteur fonctionne alors comme une mise à zéro d'une partie des conditions initiales de façon à ce que des relations algébriques entre x et π soient vérifiées. Si par contre il existe une solution au système linéaire

$$E_{xx}x_{o2} + E_{x\pi}\pi_{o2} = Ax_{o1}$$

alors $x(t) = x_{o2}\delta(t)$, $\dot{x}(t) = x_{o1}\delta(t) + x_{o2}\delta^{(1)}(t)$ est solution des équations différentielles. C'est une solution non identiquement nulle et qui comprend une composante impulsionnelle sur $x(t)$. On parle alors de mode impulsionnel. D'autres modes impulsionnels avec des dérivées croissantes du Dirac sont les solutions éventuelles aux équations récurrentes

$$E_{xx}x_{o\iota} + E_{x\pi}\pi_{o\iota} = Ax_{o(\iota-1)}$$

Ces modes sont non souhaités en pratique. Ils existent du fait de la propagation de x_{o1} au travers des équations du système. La question de la stabilité du système descripteur est de montrer qu'il n'y a pas de mode impulsionnel en plus de démontrer que l'état $x(t)$ converge vers zéro en réponse à des conditions initiales non-nulles.

Conformément à l'analyse menée dans la section 2.2, le problème de stabilité conduit à considérer le bien-posé de la boucle suivante

$$G(\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \pi \end{pmatrix}, x) = \int_0^t \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(\tau) \\ \pi(\tau) \end{pmatrix} d\tau - x(t) = \bar{w}(t) \ ,$$
$$F(x, \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \pi \end{pmatrix}) = Ax(t) - \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix} = \bar{z}(t).$$

Proposition 1 *Si la boucle (3.1) avec les notations suivantes :*

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi} \end{bmatrix}, \ \mathcal{A} = A, \ \nabla = \mathcal{I} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

est bien-posée, alors le système (4.1) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : Pour commencer on procède à la factorisation $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ avec $\mathcal{E}_1$ de rang plein en colonne. Par construction, les signaux potentiellement à l'origine de modes impulsionnels sont solutions de $\mathcal{E}_2 \begin{pmatrix} x_{o1} & \pi_{o1} \end{pmatrix}^* = 0$. Les modes impulsionnels sont tels que $\|x\| = \infty$ en réponse à $x_{o1} \neq 0$ alors même qu'il n'y a pas de perturbation $\bar{w} = 0$, $\bar{z} = 0$. La propriété de bien-posé (3.4) implique $\|x\| = 0$ quand $\bar{w} = 0$ et $\bar{z} = 0$. Elle permet donc de conclure qu'il n'y a pas de mode impulsionnel.

Reste à montrer que les modes sont asymptotiquement stables. Pour cela considérons $\bar{w}(t) = -x_0$. Dans ce cas l'opérateur $G(\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \pi \end{pmatrix}, x) = -x_0$ est exactement l'intégrateur avec conditions initiales non-nulles. La condition de bien-posé (3.4) avec $\bar{z} = 0$ implique que pour tout $\bar{t}$ suffisamment grand on a :

$$\|x\|_{\bar{t}} \leq \left\| \begin{matrix} \mathcal{E}_2 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \pi \end{pmatrix} \\ x \end{matrix} \right\|_{\bar{t}} \leq \bar{\gamma} \left\| \begin{matrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{matrix} \right\|_{\bar{t}} = \bar{\gamma}\bar{t}\|x_0\|.$$

L'état du système ne peut donc pas contenir de mode instable (modes tels que $\|x\|_{\bar{t}}$ diverge exponentiellement en fonction de $\bar{t}$).

Supposons maintenant qu'il existe un mode en limite de stabilité tel que $x(t) = e^{\mathrm{j}\omega t}x_0$ pour une condition initiale x_0 dans le sous-espace correspondant à ce mode. Maintenant, en plus de cette condition initiale non nulle $\bar{w}(t) = x_0$, considérons une entrée de perturbation constante $\bar{z}(t) = Ax_0$. La solution du système linéaire est alors de la forme $x(t) = (1+\alpha t)e^{\mathrm{j}\omega t}$. La norme tronquée de ce signal $\|x\|_{\bar{t}}$ diverge à la vitesse de $\bar{t}^{3/2}$ alors même que $\bar{z}$ et $\bar{w}$ ont une norme tronquée linéaire en $\bar{t}$. La condition de bien-posé (3.4) n'est donc pas satisfaite pour ces modes en limite de stabilité.

On remarque que pour montrer la stabilité asymptotique, on utilise une forme de réciproque du résultat disant qu'un système exponentiellement stable est entrées/état stable. Ici à l'inverse le système est non divergent pour toute entrée bornée et on en conclut la convergence asymptotique (donc exponentielle car le système est linéaire). ■

Le problème de bien-posé de la Proposition 1 entre parfaitement dans le cadre de la séparation intégrale quadratique du Théorème 7 avec

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{cc} E_{xx} & E_{x\pi} \end{array}\right], \ \mathcal{A} = A, \ \nabla = \mathcal{I}\left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

et où $\mathcal{I}$ est l'opérateur d'intégration. Reprenant les notations du chapitre précédent on fait les factorisations suivantes : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ avec $\mathcal{E}_1$ de rang plein en colonne, $\mathcal{E}_2 = \left[\begin{array}{cc} E_{2xx} & E_{2x\pi} \end{array}\right]$ et

$$\nabla = J_{\mathcal{I}}\mathcal{I}K_{\mathcal{I}} \ : \ J_{\mathcal{I}} = \mathbf{1}, \ K_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Avec ces notations on trouve

$$F^*_{1\mathcal{I}} = ((\mathbf{1} - K^*_{\mathcal{I}}K_{\mathcal{I}})\mathcal{E}^*_2)^{\perp} = E^{*\perp}_{2x\pi} \quad , \quad F_{2\mathcal{I}} = F_{1\mathcal{I}}\mathcal{E}_2K^*_{\mathcal{I}} = E^{*\perp *}_{2x\pi}E_{2xx}. \tag{4.2}$$

Les IQS-candidates pour l'intégarteur sont données par le Lemme 3, aussi tous les éléments sont réunis pour appliquer le résultat central du Théorème 7.

Corollaire 4 *La stabilité asymptotique globale du système $E_{xx}\dot{x}(t) + E_{x\pi}\pi(t) = Ax(t)$ est garantie s'il existe des matrices $P = P^*$ et Y solution des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F^{*\circ}_{2\mathcal{I}})^*P(F_{2\mathcal{I}}F^{*\circ}_{2\mathcal{I}}) > \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *}\left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -E^{*\perp}_{2x\pi}(PF_{2\mathcal{I}} + F^{*\perp}_{2\mathcal{I}}Y) \\ -(PF_{2\mathcal{I}} + F^{*\perp}_{2\mathcal{I}}Y)^*E^{*\perp *}_{2x\pi} & \mathbf{0} \end{array}\right]\right)\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

Nous allons maintenant voir comment ce résultat se particularise.

Cas des systèmes usuels $\dot{x} = Ax$ Pour ces systèmes on a $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ qui se factorise trivialement avec $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{2x} = \mathbf{1}$. On trouve alors $E_{2x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$ et $E^{*\perp}_{2x\pi} = \mathbf{1}_n$. On en déduit $F_{1\mathcal{I}} = \mathbf{1}$ et $F_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1}$. Très simplement on trouve que $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$ et les conditions du Corollaire 4 s'écrivent :

$$P > \mathbf{0}, \ \ A^*P + PA < \mathbf{0}.$$

Naturellement, ce sont les conditions LMI de stabilité asymptotique globale issues du cadre de la théorie de Lyapunov.

Cas des systèmes descripteurs les plus courants $E\dot{x} = Ax$ **avec** E **carrée.** Alors on a $\mathcal{E} = E$ dont nous allons considérer deux factorisations possibles.

- En faisant la factorisation suivante $\mathcal{E} = E = E_2$, $E_1 = \mathbf{1}$ à la première étape, on trouve là encore $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} A \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$ et les conditions

$$(EE^{*\circ})^*P(EE^{*\circ}) > \mathbf{0}, \ \ A^*\left(PE + E^{*\perp}Y\right) + \left(PE + E^{*\perp}Y\right)^*A < \mathbf{0}$$

On retrouve ces mêmes conditions (avec quelques nuances près) dans [246, 106, 40, 42]. Dans [40] il est démontré qu'elles sont nécessaires et suffisantes pour démontrer la stabilité de $E\dot{x} = Ax$. Du fait du Lemme 15 les conditions s'écrivent aussi

$$E^*PE \geq \mathbf{0}, \;\; A^*\left(PE + E^{*\perp}Y\right) + \left(PE + E^{*\perp}Y\right)^* A < \mathbf{0}$$

ce qui correspond exactement aux conditions classiques [137]

$$E^*\breve{P}^* = \breve{P}E \geq \mathbf{0}, \;\; A^*\breve{P}^* + \breve{P}A < \mathbf{0}$$

quand on prend $\breve{P}^* = PE + E^{*\perp}Y$. La différence notable avec les conditions classiques est que seules des inégalités strictes sont impliquées dans la nouvelle formulation.

- Si l'on factorise en $E = E_1E_2$ où E_1 est de rang plein en colonne et $\mathcal{E}_2 = E_2 = E_{2xx}$ est de rang plein en ligne. On trouve alors $E_{2x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$ et $E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}_n$. On en déduit $F_{1\mathcal{I}} = \mathbf{1}$ et $F_{2\mathcal{I}} = E_2$. Les conditions du Corollaire 4 s'écrivent :

$$(E_2E_2^{*\circ})^*P(E_2E_2^{*\circ}) > \mathbf{0}, \;\; \left[\begin{array}{cc} E_1 & -A \end{array}\right]^{\perp *} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & PE_2 \\ E_2^*P & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} E_1 & -A \end{array}\right]^{\perp} < \mathbf{0}.$$

On notera qu'il n'y a pas de variable Y car E_2 est choisie de rang plein en ligne. A condition de faire la factorisation $E = E_1E_2$ avec E_2 de rang plein en ligne, on trouve donc sous cette forme une condition LMI avec moins de variables de décision.
Du fait du Lemme 15 les conditions sont équivalentes à

$$E_2^*PE_2 \geq \mathbf{0}, \;\; \left[\begin{array}{cc} E_1 & -A \end{array}\right]^{\perp *} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & PE_2 \\ E_2^*P & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} E_1 & -A \end{array}\right]^{\perp} < \mathbf{0}.$$

D'autre part, on peut montrer que

$$\left[\begin{array}{cc} E_1 & -A \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} E_1^+A \\ \mathbf{1} \end{array}\right] \breve{A} \quad \text{où} \quad \breve{A} = [(E_1E_1^+ - \mathbf{1})A]^{\perp}.$$

En utilisant cette formulation et comme E_1 est de rang plein en colonne ($E_1^+E_1 = \mathbf{1}$) on trouve les conditions suivantes

$$E^*XE \geq \mathbf{0}, \;\; \breve{A}^*(A^*XE + E^*XA)\breve{A} < \mathbf{0}.$$

où $X = E_1^{+*}PE_1^+$. A notre connaissance cette formulation est nouvelle. Pour autant elle n'est pas très utile car difficilement exploitable pour des questions de robustesse ou pour de la synthèse du fait de la complexité à calculer $\breve{A}$.

4.1.2 Performance norme-à-norme

Soit maintenant le système descripteur défini par

$$\begin{array}{l} E_{xx}\dot{x}(t) \qquad\quad + E_{x\pi}\pi(t) = Ax(t) + B_v v(t) \\ E_{gx}\dot{x}(t) + g(t) + E_{g\pi}\pi(t) = C_g x(t) + D_{gv}v(t) \end{array} \tag{4.3}$$

Nous nous intéressons à la performance norme-à-norme de ce système (aussi appelée norme induite L_2 et qui est équivalente à la norme H_∞ dans le cas des systèmes LTI). Nous souhaitons garantir que, pour des conditions initiales nulles, la norme du vecteur de sortie g est bornée quand la norme du vecteur d'entrée v est bornée. Mathématiquement, nous allons écrire ce critère comme la recherche d'une borne strictement supérieure γ telle que les signaux du système vérifient :

$$\|g\| < \gamma\|v\| \ , \ \forall v \neq 0 \ , \ v \in L_2.$$

La proposition qui suit permet de relier cette performance à un problème de bien-posé où interviennent les opérateurs bornés en norme (1.6) dont on rappelle la définition :

$$\boldsymbol{\nabla}_{n2n} = \left\{ \ \nabla_{n2n} \ : \ v = \nabla_{n2n} g \ , \ \forall \epsilon \ , \ \exists \bar{\varsigma}_2 \ : \ \forall \bar{\varsigma} > \bar{\varsigma}_2 \ , \ \|v\|_{\bar{\varsigma}}^2 \leq (\frac{1}{\gamma^2} + \epsilon)\|g\|_{\bar{\varsigma}}^2 \right\}.$$

La proposition est en quelque sorte une reformulation du théorème du petit gain (Théorème 5).

Proposition 2 *Si la boucle (3.1) avec les notations suivantes :*

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & \mathbf{0} & E_{x\pi} \\ E_{gx} & \mathbf{1} & E_{g\pi} \end{bmatrix}, \ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B_v \\ C_g & D_{gv} \end{bmatrix}, \ \nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{n2n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

est bien-posée, alors le système (4.3) est globalement asymptotiquement stable et sa performance norme-à-norme est inférieure à γ.

Preuve : La boucle est bien-posée pour tout opérateur ∇_{n2n} donc en particulier pour l'opérateur nul. Cette propriété implique que le système linéaire est asyptotiquement stable comme démontré en sous-section précédente. La stabilité asymptotique de l'état du système implique de plus que, pour tout signal d'entrée borné $v \in L_2$, la sortie est elle aussi bornée $g \in L_2$. Nous allons maintenant montrer que le rapport des normes est nécessairement tel que $\|g\| < \gamma\|v\|$.

Le bien-posé implique que pour des perturbations $(\bar{z}, \bar{w})$ nulles (qui décrivent les conditions initiales et autres perturbations supposées nulles dans l'énoncé du critère de performance) les seuls signaux internes possibles vérifiant les conditions sur l'opérateur ∇ sont nuls : $(z, w) = 0$. On en déduit que les seuls signaux non nuls solutions de (4.3) n'appartiennent pas au graphe de $\boldsymbol{\nabla}_{n2n}$:

$$(v, g) \neq 0 \ \Rightarrow \ (v, g) \notin \{ \ v = \nabla_{n2n} g \ : \ \nabla_{n2n} \in \boldsymbol{\nabla}_{n2n} \ \}$$

Ce qui, étant donné la définition de $\boldsymbol{\nabla}_{n2n}$, sécrit :

$$(v, g) \neq 0 \ \Rightarrow \ (v, g) \notin \{ \ \forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \bar{\varsigma} \ : \ \forall \varsigma \geq \bar{\varsigma} \ , \ \|v\|_\varsigma \leq (\frac{1}{\gamma} + \epsilon)\|g\|_\varsigma \ \}.$$

En prenant la contraposée de la propriété définissant cet ensemble on trouve

$$(v, g) \neq 0 \ \Rightarrow \ (v, g) \in \{ \ \exists \epsilon > 0 \ : \ \forall \bar{\varsigma} \ , \ \exists \varsigma \geq \bar{\varsigma} \ : \ \|v\|_\varsigma > (\frac{1}{\gamma} + \epsilon)\|g\|_\varsigma \ \}.$$

Nous allons maintenant montrer que l'intersection de cet ensemble de signaux avec les signaux bornés $(v, g) \in L_2$ implique $\|g\| < \gamma\|v\|$. La première étape est de remarquer que $\|v\| \geq \|v\|_\varsigma$ pour tout ς. Les signaux vérifient donc la condition suivante

$$\exists \epsilon > 0 \ : \ \forall \bar{\varsigma} \ , \ \exists \varsigma \geq \bar{\varsigma} \ : \ \|v\| > (\frac{1}{\gamma} + \epsilon)\|g\|_\varsigma$$

Comme $g \in L_2$ on sait que $\|g\|_\varsigma$ converge vers $\|g\|$, ce qui s'écrit :

$$\forall \tilde{\epsilon} > 0\ ,\ \exists \tilde{\varsigma}\ :\ \forall \varsigma \geq \tilde{\varsigma}\ ,\ \|g\| - \|g\|_\varsigma \leq |\|g\| - \|g\|_\varsigma| \leq \tilde{\epsilon}$$

Aussi en prenant $\tilde{\epsilon} \leq \frac{\epsilon\|g\|}{1/\gamma+\epsilon}$ et $\bar{\varsigma} \geq \tilde{\varsigma}$ on a

$$\|v\| > (\frac{1}{\gamma}+\epsilon)\|g\|_\varsigma > \frac{1}{\gamma}\|g\| + \epsilon\|g\| - (\frac{1}{\gamma}+\epsilon)\tilde{\epsilon} > \frac{1}{\gamma}\|g\|.$$

■

Reprenant les notations du chapitre précédent, on fait la factorisation :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} E_{2xx} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} \\ E_{gx} & \mathbf{1} & E_{g\pi} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_2}$$

avec E_1 de rang plein en colonne. On a également

$$\nabla = J_{\mathcal{I}}\mathcal{I}K_{\mathcal{I}} + J_{n2n}\nabla_{n2n}K_{n2n}\ :\ J_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\ J_{n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix},\ \begin{array}{l} K_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ K_{n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Avec ces notations on trouve

$$F^*_{1\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} E^{*\perp}_{2x\pi} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\quad F_{2\mathcal{I}} = E^{*\perp *}_{2x\pi}E_{2xx}\ ,\quad F^*_{1n2n} = \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^\perp,\quad F_{2n2n} = F_{1n2n}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Tous les éléments pour appliquer le Théorème 7 sont réunis (voir Lemmes 3, 8 et 15).

Corollaire 5 *Le système (4.3) a une performance norme-à-norme inférieure à γ si F_{2n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P, Y et un scalaire τ solution des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F^{*\circ}_{2\mathcal{I}})^* P (F_{2\mathcal{I}}F^{*\circ}_{2\mathcal{I}}) > \mathbf{0}\quad ,\quad \tau > 0\quad ,\quad \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp *} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E^{*\perp}_{2x\pi}(PF_{2\mathcal{I}} + F^{*\perp}_{2\mathcal{I}}Y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -(PF_{2\mathcal{I}} + F^{*\perp}_{2\mathcal{I}}Y)^* E^{*\perp *}_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{cc|cc} -\tau F^*_{1n2n}F^{+*}_{2n2n}F^+_{2n2n}F_{1n2n} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right]$$

On remarque qu'il est toujours possible de prendre $\tau = 1$ (ou bien toute autre valeur positive) sans perte de généralité. Auquel cas les conditions LMI permettent d'optimiser γ pour rechercher la plus petite borne supérieure de la performance norme-à-norme.

Nous allons maintenant voir comment le résultat se particularise.

Cas des systèmes usuels. Le cas des systèmes sans caractère descripteur est tel que $E_{xx} = \mathbf{1}$, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. On a alors $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ qui se factorise trivialement avec $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$. On trouve alors $E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}$, $F_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1}$, $F_{1n2n} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$, $F_{2n2n} = \mathbf{1}$ ainsi que $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$. Les conditions du Corollaire 5 s'écrivent :

$$P > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} A & B_v \\ \hline C_g & D_{gv} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A & B_v \\ \hline C_g & D_{gv} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] > \mathbf{0}$$

ce qui est exactement la condition classique pour le calcul de la norme H_∞, [38] :

$$P > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} A^*P + PA + \tau C_g^* C_g & PB_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ B_v^* P + \tau D_{gv}^* C_g & \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0}.$$

Cas des systèmes descripteurs les plus courants. Le cas le plus classique de systèmes descripteurs est tel que $E_{xx} = E$ est carrée, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. Plusieurs factorisations de E sont possibles, nous allons nous limiter au cas où $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$. Dans ce cas on trouve

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1} \ , \ \ F_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1} \ , \ \ F_{1n2n} = \left[\begin{array}{cc} E^{*\perp *} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] \ , \ \ F_{2n2n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$$

et $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp}$ est inchangée. Les conditions du Corollaire 5 s'écrivent :

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} A^*(PE + E^{*\perp}Y) + (PE + E^{*\perp}Y)^* A + \tau C_g^* C_g & (PE + E^{*\perp}Y)^* B_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ B_v^*(PE + E^{*\perp}Y) + \tau D_{gv}^* C_g & \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0}$$

et correspondent au résultat de [246]. De plus, le choix $\breve{P}^* = PE + E^{*\perp}Y$ conduit aux conditions

$$E^*\breve{P}^* = \breve{P}E \geq \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} A^*\breve{P}^* + \breve{P}A + \tau C_g^* C_g & \breve{P}B_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ B_v^*\breve{P}^* + \tau D_{gv}^* C_g & \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0}$$

qui sont celles proposées dans [203]. Encore une fois, l'avantage de la formulation proposée en comparaison avec [203] est que la nouvelle formulation ne comprend que des inégalités matricielles linéaires strictes, ce qui est préférable pour des questions numériques.

4.1.3 Performance impulsion-à-norme

La performance impulsion-à-norme du système (4.3) se définit, supposant des conditions initiales nulles, par une borne supérieure sur la somme des carrés des normes des sorties g en

réponse chacune à une entrée impulsionnelle sur une composante du vecteur v. Mathématiquement on peut l'écrire comme suit :

$$\|g\| < \gamma \quad \text{si} \quad v = \alpha\delta_0 \mathbf{1}_{m_v} \quad : \quad \alpha \in \boldsymbol{C} \ , \ |\alpha| \leq 1$$

où $\delta_0 \in \boldsymbol{R}$ est l'opérateur de Dirac et en définissant dans les équations (4.3) que $x \in \boldsymbol{R}^{n\times m_v}$ est un signal matriciel dont chaque colonne correspond à l'état du système en réponse à chacune des entrées impulsionnelles et $g \in \boldsymbol{R}^{p\times m_v}$ regroupe les colonnes formées des m_v réponses impulsionelles.

Une autre écriture de cette performance est obtenue en considérant la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $G = \mathcal{L}(g)$. La relation de Parseval donne alors

$$\|g\|^2 = \|G\|^2 = \text{Tr}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)G(j\omega)d\omega\right) < \gamma^2$$

ce qui n'est autre chose que la définition de la norme H_2 du système LTI. La performance impulsion-à-norme est ainsi équivalente pour les systèmes LTI à la norme H_2 des systèmes. Elle a également une interprétation en termes de borne sur la variance de la sortie z en réponse à un bruit blanc en entrée v.

La proposition qui suit permet de relier cette performance à un problème de bien-posé où interviennent les opérateurs impulsion bornée (1.8) dont on rappelle la définition :

$$\boldsymbol{\nabla}_{i2n} = \left\{ \ \nabla_{i2n} \ : \ v = \nabla_{i2n} g \ , \ v = \alpha\varphi_0 \ , \ |\alpha| \leq \frac{1}{\gamma}\|g\| \ \right\}.$$

Proposition 3 *Si les matrices du système satisfont la condition suivante*

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} E_{gx} & E_{g\pi} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} E_{xx} & E_{x\pi} \end{array}\right]^{*\circ} \left(\left[\begin{array}{cc} E_{xx} & E_{x\pi} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} E_{xx} & E_{x\pi} \end{array}\right]^{*\circ}\right)^{+} B_v = D_{gv}, \\ \left[\begin{array}{cc} E_{gx} & E_{g\pi} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} E_{xx} & E_{x\pi} \end{array}\right]^{\perp} = \mathbf{0}. \end{array} \tag{4.5}$$

et que la boucle (3.1) avec les notations suivantes :

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} \\ \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right], \ \mathcal{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} \\ C_g & \mathbf{0} \end{array}\right], \ \nabla = \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{i2n} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

est bien-posée, alors le système (4.3) est globalement asymptotiquement stable et sa performance impulsion-à-norme est inférieure à γ.

On remarque que pour les systèmes usuels ($\left[\begin{array}{cc} E_{gx} & E_{g\pi} \end{array}\right] = \mathbf{0}$) la condition (4.5) est exactement la condition classique $D_{gv} = \mathbf{0}$ nécessaire pour que la norme H_2 d'un système à temps continu soit définie.

Preuve : Remarquons que les équations (4.3) sont une description des dynamiques du système valables aux instants où la dérivée de l'état est définie. Du fait du caractère impulsionnel du

signal v les équations s'écrivent plus précisément comme suit

$$\begin{array}{llll} E_{xx}(x(0^+)-x(0^-)) & +E_{x\pi}\pi_0 & = B_v\alpha & \\ E_{xx}\dot{x}(t) & +E_{x\pi}\pi(t) & = Ax(t) \ , & \forall t>0 \\ E_{gx}(x(0^+)-x(0^-))+g_0 & +E_{g\pi}\pi_0 & = D_{gv}\alpha & \\ E_{gx}\dot{x}(t)+g(t) & +E_{g\pi}\pi(t) & = C_g x(t) \ , & \forall t>0 \end{array} \tag{4.6}$$

où $x(0^-)$ sont les conditions initiales (supposées nulles), $x(0^+)-x(0^-)=x(0^+)$ est le saut des états dû aux impulsions, $\pi_0\delta(t)+\pi(t)$ et $g_0\delta(t)+g(t)$ sont des réponses du système comprenant la réponse impulsionnelle et la réponse continue. Pour simplifier on notera $x(0^+)=x(0)$ le saut sur les conditions initiales dû aux impulsions.

Le signal impulsionnel $g_0\delta(t)$ n'étant pas de norme L_2 bornée, une condition nécessaire pour résoudre le problème est que $g_0=0$. Ceci sera satisfait si $E_{gx}x(0)+E_{g\pi}\pi_0=D_{gv}$ pour toute solution à $E_{xx}x(0)+E_{x\pi}\pi_0=B_v$. Sachant que les solutions de $E_{xx}x(0)+E_{g\pi}\pi_0=B_v$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \pi_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi} \end{bmatrix}^{*\circ} (\begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi} \end{bmatrix}^{*\circ})^{+} B_v + \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{x\pi} \end{bmatrix}^{\perp} \tilde{x}$$

où $\tilde{x}$ est quelconque, la condition pour que $g_0=0$ est exactement (4.5).

À ce stade, les équations du système peuvent s'écrire comme suit pour tout $t\geq 0$

$$\begin{array}{lll} E_{xx}x(0)\delta(t) & +E_{x\pi}\pi_0\delta(t) & = B_v\alpha\delta(t) \\ E_{xx}\dot{x}(t) & +E_{x\pi}\pi(t) & = Ax(t) \\ E_{gx}\dot{x}(t)+g(t) & +E_{g\pi}\pi(t) & = C_g x(t). \end{array} \tag{4.7}$$

avec la définition suivante de l'état $x(t)=x(0)+\int_0^t x(\tau)d\tau$. Cette écriture a l'avantage de représenter le problème avec des équations impliquant des signaux définis pour tout t, mais a le désavantage d'impliquer des signaux (le Dirac) qui ne font pas partie de L_2. Les résultats de séparation intégrale quadratique ne sont donc pas applicables sur cette représentation. Cependant, sans aucune perte d'information et donc de généralité, la première équation de (4.7) peut se réécrire en remplaçant le Dirac par sa racine carrée (voir page 21) :

$$\begin{array}{lll} E_{xx}\varphi_0 x & +E_{x\pi}\varphi_0\pi & = B_v\alpha\varphi_0 \\ E_{xx}\dot{x} & +E_{x\pi}\pi & = Ax \\ E_{gx}\dot{x}+g & +E_{g\pi}\pi & = C_g x. \end{array} \tag{4.8}$$

Cette représentation est compatible avec la définition de l'opérateur d'intégration avec conditions initiales non nulles défini en page 22

$$[\mathcal{I}_I \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \dot{x} \end{pmatrix}](t) = x(0)+\int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau = x(t).$$

Le bien-posé implique que pour des perturbations $(\bar{z},\bar{w})$ nulles (qui décrivent les conditions initiales et autres perturbations supposées nulles dans l'énoncé du critère de performance) les seuls signaux internes possibles vérifiant les conditions sur l'opérateur ∇ sont nuls : $(z,w)=0$.

On en déduit que les seuls signaux non nuls solutions de (4.3) n'appartiennent pas au graphe de $\boldsymbol{\nabla}_{i2n}$:

$$(v = \alpha\varphi_0, g) \neq 0 \;\Rightarrow\; (v = \alpha\varphi_0, g) \notin \{\, v = \nabla_{i2n} g \;:\; \nabla_{i2n} \in \boldsymbol{\nabla}_{i2n} \,\}$$

Ce qui, étant donné la définition de $\boldsymbol{\nabla}_{i2n}$, sécrit :

$$(\alpha, g) \neq 0 \;\Rightarrow\; (\alpha, g) \notin \left\{\, |\alpha| \leq \frac{1}{\gamma}\|g\| \,\right\} \;\Leftrightarrow\; (\alpha, g) \in \left\{\, |\alpha| > \frac{1}{\gamma}\|g\| \,\right\}.$$

Les seuls signaux non nuls possibles sont ceux satisfaisant la performance impulsion-à-norme. ■

Reprenant les notations du chapitre précédent on fait la factorisation

$$\mathcal{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c|cc} E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} \\ \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right]}_{\mathcal{E}_2}$$

avec E_1 de rang plein en colonne. On a également

$$\nabla = J_{\mathcal{I}}\mathcal{I}_I K_{\mathcal{I}} + J_{i2n}\nabla_{i2n}K_{i2n} \;:\; J_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\; J_{i2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix},\quad \begin{array}{r} K_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \\ K_{i2n} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]. \end{array}$$

Avec ces notations on trouve

$$F^*_{1\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} E^{*\perp}_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{*\perp}_{2x\pi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},\quad F_{2\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} E^{*\perp *}_{2x\pi}E_{2xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{*\perp *}_{2x\pi}E_{2xx} \end{bmatrix} = \mathbf{1}_2 \otimes \underbrace{E^{*\perp *}_{2x\pi}E_{2xx}}_{\hat{F}_{2\mathcal{I}}},$$

$$F^*_{1i2n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E^*_{2xx} \\ E^*_{2x\pi} \end{bmatrix}^{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^{\perp} \end{bmatrix},\quad F_{2i2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^{\perp *} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Tous les éléments pour appliquer le Théorème 7 sont réunis (voir Lemmes 4, 10 et 15).

Corollaire 6 *Le système (4.3) a une performance impulsion-à-norme inférieure à γ si la condition (4.5) est vérifiée, que F_{2i2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P, Y, Q et un scalaire τ solution des LMI suivantes :*

$$(\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}^{*\circ}_{2\mathcal{I}})^* P (\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}^{*\circ}_{2\mathcal{I}}) > \mathbf{0} \quad,\quad \tau > 0 \quad,\quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2 \quad,\quad \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp *} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccc|cc} -E^{*\perp}_{2x\pi}PE^{*\perp *}_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E^{*\perp}_{2x\pi}(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}^{*\perp}_{2\mathcal{I}}Y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}^{*\perp}_{2\mathcal{I}}Y)^* E^{*\perp *}_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{c|cc} -\tau F^*_{1i2n}F^{+*}_{2i2n}F^+_{2i2n}F_{1i2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q \end{array}\right]$$

Comme pour la performance norme-à-norme il est toujours possible de prendre $\tau = 1$ (ou bien toute autre valeur positive) sans perte de généralité. Les conditions LMI permettent alors d'optimiser γ et donc de rechercher la plus petite borne supérieure de la performance impulsion-à-norme.

Cas des systèmes usuels. Le cas des systèmes sans caractère descripteur est tel que $E_{xx} = \mathbf{1}$, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. On a alors $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ qui se factorise trivialement avec $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$. On trouve alors

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}\ ,\ \ \hat{F}_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1}\ ,\ \ F_{1i2n} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]\ ,\ \ F_{2i2n} = \mathbf{1}$$

ainsi que $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$. Les conditions du Corollaire 6 s'écrivent :

$$P > \mathbf{0}\quad ,\quad \tau > 0\quad ,\quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} \\ C_g & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]^* \left[\begin{array}{ccc|cc} -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} \\ C_g & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] > \mathbf{0}$$

ce qui est exactement la condition classique pour le calcul de la norme H_2, [38] :

$$P > \mathbf{0}\quad ,\quad \tau > 0\quad ,\quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\left[\begin{array}{cc} A^*P + PA + \tau C_g^* C_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_v^* P B_v - Q \end{array}\right] < \mathbf{0}.$$

Cas des systèmes descripteurs les plus courants. Le cas le plus classique de systèmes descripteurs est tel que $E_{xx} = E$ est carrée, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. Plusieurs factorisations de E sont possibles, nous allons nous limiter au cas où $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$. Dans ce cas on trouve

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}\ ,\ \ \hat{F}_{2\mathcal{I}} = E\ ,\ \ F_{1i2n} = \left[\begin{array}{ccc} E^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{*\perp *} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]\ ,\ \ F_{2i2n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$$

et $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp}$ est inchangée. Les conditions du Corollaire 6 donnent :

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0}\quad ,\quad \tau > 0\quad ,\quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\left[\begin{array}{cc} A^*(PE + E^{*\perp}Y) + (PE + E^{*\perp}Y)^* A + \tau C_g^* C_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_v^* P B_v - Q \end{array}\right] < \mathbf{0}.$$

Cette condition est équivalente à celle proposée dans [103, 251].

4.1.4 Performance impulsion-à-pic

La performance impulsion-à-pic du système (4.3) se définit, supposant des conditions initiales nulles, par une borne supérieure sur la norme des valeurs instantanées de la sortie g en réponse à une impulsion d'amplitude bornée sur le vecteur d'entrée v. Mathématiquement, on peut l'écrire comme suit :

$$||g(\theta)|| \leq \gamma \quad \forall \theta \geq 0 \ , \ \forall v = \delta_0 \alpha \ , \ \alpha \in \boldsymbol{C}^m \ , \ ||\alpha|| \leq 1.$$

A nouveau, les équations (4.3) sont une description des dynamiques du système valables aux instants où la dérivée de l'état est définie. Du fait du caractère impulsionnel du signal v les équations s'écrivent plus précisément comme indiqué dans (4.6). Cette représentation permet d'ailleurs de voir que la performance impulsion-à-pic a une interprétation simple en termes d'ensembles ellipsoïdaux invariants. En effet, démontrer pour un système $E_{xx}\dot{x} = Ax$ que pour toute condition initiale contenue dans l'ellipsoïde $x^*(0)Q_0x(0) \leq 1$ l'état est garanti de demeurer dans l'ellipsoïde $x^*(t)Q_1x(t) < \gamma^2$, revient à écrire la performance impulsion-à-pic avec $E_{gx} = \mathbf{0}$, $B_w = Q_0^{-1/2}$, $C_g = Q_1^{1/2}$ et $D_{gw} = \mathbf{0}$.

Pour les mêmes raisons que précédemment, pour que le signal g soit borné à $t = 0$ le système doit satisfaire la condition (4.5) et les équations se réécrivent aussi comme suit

$$\begin{array}{lll} E_{xx}\varphi_0 x & + E_{x\pi}\varphi_0\pi & = B_v\varphi_0\alpha \\ E_{xx}\dot{x} & + E_{x\pi}\pi & = Ax \\ E_{gx}\dot{x} + g & + E_{g\pi}\pi & = C_g x. \end{array}$$

De façon à faire apparaître la valeur $g(\theta)$ sous la forme du signal $\delta_\theta^{1/2}g$, signal dans L_2, les dynamiques sont tronquées à l'instant θ et les équations sont réécrites sous la forme suivante

$$\begin{array}{lll} E_{xx}\varphi_0 x & + E_{x\pi}\varphi_0\pi & = B_v\varphi_0\alpha \\ E_{xx}\mathcal{T}_\theta\dot{x} & + E_{x\pi}\mathcal{T}_\theta\pi & = A\mathcal{T}_\theta x \\ E_{xx}\varphi_\theta\dot{x} & + E_{x\pi}\varphi_\theta\pi & = A\varphi_\theta x \\ E_{gx}\varphi_\theta\dot{x} + \varphi_\theta g & + E_{g\pi}\varphi_\theta\pi & = C_g\varphi_\theta x \end{array} \tag{4.9}$$

où les signaux $\varphi_0 x$, $\mathcal{T}_\theta\dot{x}$, $\mathcal{T}_\theta x$ et $\varphi_\theta x$ sont reliés entre eux par l'intégrateur suivant $\mathcal{I}_F$ donnés dans (1.5) :

$$\mathcal{I}_F \left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \mathcal{T}_\theta\dot{x} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}_\theta x \\ \varphi_\theta x \end{array} \right).$$

Avec cette réécriture des équations, la performance impulsion-à-pic revient à démontrer que :

$$||g(\theta)|| = ||\delta_\theta^{1/2}g|| < \gamma \quad \forall \theta \geq 0 \ , \ \forall ||\varphi_0\alpha|| \leq 1$$

ou de façon plus compacte $||\delta_\theta^{1/2}g|| < \gamma||\varphi_0\alpha||$. C'est une condition du type performance norme-à-norme, mais pour les signaux forcés à être des racines carrées du Dirac. Reformulé comme un problème de bien-posé il est donc suffisant de montrer que le système d'équations (4.9) interconnecté avec $\varphi_0\alpha = \nabla_{n2n}(\delta_\theta^{1/2}g)$ est bien-posé pour tout opérateur borné en norme

$$\boldsymbol{\nabla}_{n2n} = \left\{ \ \nabla_{n2n} \ : \ v = \nabla_{n2n}g \ , \ \|v\| \leq \frac{1}{\gamma}\|g\| \ \right\}.$$

Ainsi le problème de garantir une performance impulsion-à-pic se réécrit comme le bien-posé de la boucle (3.1) avec les notations :

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{cc|c|c|ccc} E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right], \quad \mathcal{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_g & \mathbf{0} \end{array}\right],$$
$$\nabla = \left[\begin{array}{cccc} \mathcal{I}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{n2n} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Reprenant les notations du chapitre précédent on fait la factorisation

$$\mathcal{E} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c|c|ccc} E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right]}_{\mathcal{E}_2}$$

avec E_1 de rang plein en colonne. On a également

$$\nabla = J_{\mathcal{I}} \mathcal{I}_F K_{\mathcal{I}} + J_{n2n} \nabla_{n2n} K_{n2n} \ : \ J_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{array}\right], \ J_{n2n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array}\right],$$
$$K_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc|c|c|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \ K_{n2n} = \left[\begin{array}{cc|c|c|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Avec ces notations on trouve

$$F^*_{1\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_2 \otimes E^{*\perp}_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\begin{array}{c} E^*_{2xx} \\ E^*_{2x\pi} \end{array}\right]^{\perp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad F_{2\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \underbrace{E^{*\perp *}_{2x\pi} E_{2xx}}_{\hat{F}_{2\mathcal{I}}},$$
$$F^*_{1n2n} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_2 \otimes \left[\begin{array}{c} E^*_{2xx} \\ E^*_{2x\pi} \end{array}\right]^{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\begin{array}{cc} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{array}\right]^{\perp} \end{array}\right], \quad F_{2n2n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \left[\begin{array}{cc} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{array}\right]^{\perp *} \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array}\right] \end{array}\right].$$

Tous les éléments pour appliquer le Théorème 7 sont réunis (voir Lemmes 5, 8 et 15).

Corollaire 7 *Le système (4.3) a une performance impulsion-à-pic inférieure à γ si la condition (4.5) est vérifiée, que F_{2n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P, Y et un*

scalaire τ solution des LMI suivantes :

$$\tau > 0 \quad , \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & -E_{2x\pi}^{*\perp}(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|ccc} -\tau F_{1i2n}^* F_{2i2n}^{+*} F_{2i2n}^+ F_{1i2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right]$$

A nouveau on constate qu'il est toujours possible de prendre $\tau = 1$ (ou bien toute autre valeur positive) sans perte de généralité. Les conditions LMI permettent alors d'optimiser γ pour rechercher la plus petite borne supérieure de la performance impulsion-à-norme.

Contrairement aux corollaires précédents, la condition de positivité $(\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0}$ n'est pas imposée sur le matrice P. Ceci s'explique par le fait que la performance impulsion-à-pic ne nécessite pas que le système soit asymptotiquement stable. Seule la combinaison linéaire des états, g, doit être bornée. En pratique, si P satisfait $(\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0}$ en plus des contraintes du Corollaire 7, alors le système est globalement asymptotiquement stable car les conditions incluent alors celles du Corollaire 4.

Cas des systèmes usuels. Le cas des systèmes sans caractère descripteur est tel que $E_{xx} = \mathbf{1}$, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. On a alors $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ qui se factorise trivialement avec $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$. On trouve alors

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}\ , \quad \hat{F}_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1}\ , \quad F_{1n2n} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]\ , \quad F_{2n2n}^* = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

ainsi que $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$. Les conditions du Corollaire 6 s'écrivent :

$$\tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_g & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]^* \left[\begin{array}{cccc|ccc} -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tau\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_g & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] > \mathbf{0}$$

ce qui est exactement la condition classique [211] pour le calcul de la performance impulsion-à-pic :

$$\begin{array}{c} \tau > 0 \\ \text{diag}\begin{pmatrix} A^*P + PA \\ \tau C_g^* C_g - P \\ B_v^* P B_v - \gamma^2 \tau \mathbf{1} \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \end{array}$$

Cas des systèmes descripteurs les plus courants. Le cas le plus classique de systèmes descripteurs est tel que $E_{xx} = E$ est carrée, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. Plusieurs factorisations de E sont possibles, nous allons nous limiter au cas où $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$. Dans ce cas on trouve

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}\ ,\ \ \hat{F}_{2\mathcal{I}} = E\ ,\ \ F_{1n2n} = \begin{bmatrix} E^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E^{*\perp *} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\ ,\ \ F_{2i2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

et $\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^\perp$ est inchangée. Les conditions du Corollaire 6 donnent :

$$\begin{array}{c} \tau > 0 \\ \text{diag}\begin{pmatrix} A^*(PE + E^{*\perp}Y) + (PE + E^{*\perp}Y)^* A \\ \tau C_g^* C_g - E^* P E \\ B_v^* P B_v - \gamma^2 \tau \mathbf{1} \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \end{array}$$

4.2 IQS pour les systèmes à temps discret

Les résultats exposés précédemment pour le cas des systèmes à temps continu s'étendent naturellement au cas des systèmes à temps discret

$$\begin{array}{l} E_{xx}[\vartheta x]_k \qquad + E_{x\pi}\pi_k = Ax_k + B_v v_k \\ E_{gx}[\vartheta x]_k + g_k + E_{g\pi}\pi_k = C_g x_k + D_{gv} v_k. \end{array} \tag{4.10}$$

où $[\vartheta x]_k = x_{k+1}$ ou $= \frac{1}{T_s}(x_{k+1} - x_k)$ suivant que l'on considère des systèmes décrits par l'opérateur retard ou l'opérateur variation.

En termes de méthodologie, la modélisation sous forme de bien-posé de boucle s'applique avec les mêmes arguments à la différence que l'opérateur d'intégration $\mathcal{I}$ est remplacé par l'opérateur discret équivalent tel que $\mathcal{I}\vartheta x = x$ (voir sous-section 1.3.2). La théorie de la séparation intégrale quadratique s'applique de même en utilisant les IQC-candidates appropriées (voir sous-sections 3.3.6 et 3.3.7).

4.2.1 Systèmes décrits par l'opérateur avance

4.2.1.1 Stabilité globale

Corollaire 8 *La stabilité asymptotique globale du système (4.10) est garantie s'il existe une matrice P solution des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0}$$
$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \left(\left[\begin{array}{cc} -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{2\mathcal{I}}^* P F_{2\mathcal{I}} \end{array}\right] \right) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

où les diverses matrices sont définies page 80.

Systèmes usuels $x_{k+1} = Ax_k$. Avec les mêmes calculs que pour le cas des systèmes à temps continu on trouve naturellement les conditions :

$$P > \mathbf{0}, \;\; A^*PA - P < \mathbf{0}.$$

qui sont celles de la stabilité asymptotique globale issues du cadre de la théorie de Lyapunov.

Systèmes descripteurs les plus courants $Ex_{k+1} = Ax_k$ avec E carrée. La factorisation $\mathcal{E} = E = E_2$, $E_1 = \mathbf{1}$ est la plus simple et nous nous contentons de considérer celle-ci. Elle conduit avec les même calculs que pour le cas des systèmes à temps continu à

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0}, \;\; A^*PA - E^*PE < \mathbf{0}.$$

C'est exactement la condition avec inégalités strictes proposée par [258], variante de la condition antérieure [252] :

$$E^*PE \geq \mathbf{0}, \;\; A^*PA - E^*PE < \mathbf{0}.$$

4.2.1.2 Performance norme-à-norme

Corollaire 9 *Le système (4.10) a une performance norme-à-norme inférieure à γ si F_{2n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe une matrice P et un scalaire τ solution des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0} \;\; , \;\; \tau > 0 \;\; , \;\; \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc|cc} -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & F_{2\mathcal{I}}^* P F_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|cc} -\tau F_{1n2n}^* F_{2n2n}^{+*} F_{2n2n}^{+} F_{1n2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right]$$

où les diverses matrices sont définies page 83.

Systèmes usuels. Avec les mêmes calculs que pour le cas des systèmes à temps continu on trouve naturellement les conditions classiques pour la performance H_∞ des systèmes à temps discret :

$$P > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$
$$\left[\begin{array}{cc} A^*PA - P + \tau C_g^* C_g & A^*PB_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ B_v^*PA + \tau D_{gv}^* C_g & B_v^*PB_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau \mathbf{1} \end{array} \right] < \mathbf{0}.$$

Systèmes descripteurs les plus courants. A nouveau on se limite à la factorisation $\mathcal{E} = E = E_2$, $E_1 = \mathbf{1}$. Elle conduit à la condition équivalente à celle proposée dans [259, 41]

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$
$$\left[\begin{array}{cc} A^*PA - E^*PE + \tau C_g^* C_g & A^*PB_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ B_v^*PA + \tau D_{gv}^* C_g & B_v^*PB_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau \mathbf{1} \end{array} \right] < \mathbf{0}.$$

4.2.1.3 Performance impulsion-à-norme

Nous venons donc de voir que l'extension des résultats écrits pour les systèmes à temps continu au cas des systèmes à temps discret est très simple, que ce soit pour l'analyse de la stabilité des systèmes comme pour la performance norme-à-norme. Dans le cas des performances impulsion-à-norme et impulsion-à-pic, une légère différence intervient du fait que la condition (4.5) peut être relâchée. Pour le comprendre, et en conservant une cohérence avec le cas continu, définissons les impulsions comme un signal $\alpha\varphi_{-1}$ intervenant à l'instant $k = -1$. Pour $k = -1$ on a alors

$$\begin{array}{ll} E_{xx}x_0 & + E_{x\pi}\pi_{-1} = B_v\alpha \\ E_{gx}x_0 + g_{-1} & + E_{g\pi}\pi_{-1} = D_{gv}\alpha. \end{array}$$

Ainsi, comme dans le cas continu, les impulsions sont une façon de définir des conditions initiales x_0 non nulles. Pour $k \geq 0$ les équations sont celles d'un régime libre en réponse à ces conditions initiales :

$$\begin{array}{ll} E_{xx}[\vartheta x]_k & + E_{x\pi}\pi_k = Ax_k \\ E_{gx}[\vartheta x]_k + g_k & + E_{g\pi}\pi_k = C_g x_k. \end{array}$$

En reprenant la formulation des équations qui utilise la racine carrée du Dirac ces équations donnent

$$\begin{array}{llll} E_{xx}\varphi_0 x & + E_{x\pi}\varphi_{-1}\pi & = B_v v \\ E_{xx}\vartheta x & + E_{x\pi}\pi & = Ax \\ E_{gx}\varphi_0 x + \varphi_{-1}g & + E_{g\pi}\varphi_{-1}\pi & = D_{gv}v \\ E_{gx}\vartheta x + g & + E_{g\pi}\pi & = C_g x \end{array} \tag{4.11}$$

où l'entrée impulsionnelle est $v = \alpha\delta_{-1}$ et où l'on a distingué la réponse due au transfert direct $\varphi_{-1}g$, du signal engendré par les dynamiques du système g. La norme de la réponse impulsionnelle est donnée alors par $\left\| \begin{array}{c} \varphi_{-1}g \\ g \end{array} \right\|$ et le problème d'analyse de la performance impulsion-à-

norme se réécrit comme le bien-posé de la boucle (3.1) avec les notations suivantes :

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} \\ E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right], \quad \mathcal{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{gv} \\ C_g & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \nabla = \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{i2n} & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Comme les notations ont légèrement évolué, on recalcule les différentes matrices nécessaires pour appliquer le résultat de séparation intégrale quadratique :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} \\ E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right]}_{\mathcal{E}_2}$$

avec E_1 de rang plein en colonne et

$$\nabla = J_{\mathcal{I}} \mathcal{I}_I K_{\mathcal{I}} + J_{i2n} \nabla_{i2n} K_{i2n} \ : \quad K_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$
$$J_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{array}\right], \ J_{i2n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array}\right], \quad K_{i2n} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Avec ces notations on trouve

$$F^*_{1\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} E^{*\perp}_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{*\perp}_{2x\pi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad F_{2\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc} E^{*\perp *}_{2x\pi} E_{2xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{*\perp *}_{2x\pi} E_{2xx} \end{array}\right] = \mathbf{1}_2 \otimes \underbrace{E^{*\perp *}_{2x\pi} E_{2xx}}_{\hat{F}_{2\mathcal{I}}},$$

$$F^*_{1i2n} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] (\mathbf{1}_2 \otimes \left[\begin{array}{cc} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{array}\right]^{\perp}), \quad F_{2i2n} = \mathbf{1}_2 \otimes (\left[\begin{array}{cc} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{array}\right]^{\perp *} \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]) \tag{4.12}$$

ce qui permet d'écrire le corollaire du Théorème 7 suivant.

Corollaire 10 *Le système (4.10) a une performance impulsion-à-norme inférieure à γ si F_{2i2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P, Q et un scalaire τ solution des LMI suivantes :*

$$(\hat{F}_{2\mathcal{I}} \hat{F}^{*\circ}_{2\mathcal{I}})^* P (\hat{F}_{2\mathcal{I}} \hat{F}^{*\circ}_{2\mathcal{I}}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau \gamma^2 \quad , \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{cccc|cc} -E^{*\perp}_{2x\pi} P E^{*\perp *}_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -E^{*\perp}_{2x\pi} P E^{*\perp *}_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}^*_{2\mathcal{I}} P \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|cc} -\tau F^*_{1i2n} F^{+*}_{2i2n} F^+_{2i2n} F_{1i2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q \end{array}\right].$$

Systèmes usuels. Le cas des systèmes sans caractère descripteur est tel que $E_{xx} = \mathbf{1}$, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. On a alors $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ qui se factorise trivialement avec $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$. On trouve alors

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1}\ ,\ \ \hat{F}_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1}\ ,\ \ F_{1i2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\ ,\ \ F_{2i2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

ainsi que $\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$. Les conditions du Corollaire 10 prennent alors sans surprise la forme classique des LMI pour le calcul de la norme H_2 du système à temps discret :

$$P > \mathbf{0}\ \ ,\ \ \tau > 0\ \ ,\ \ \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\mathrm{diag}\begin{pmatrix} A^*PA - P + \tau C_g^* C_g \\ B_v^* P B_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - Q \end{pmatrix} < \mathbf{0}.$$

Systèmes descripteurs les plus courants. Le cas le plus classique de systèmes descripteurs est tel que $E_{xx} = E$ est carrée, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$ et en prenant la factorisation $E_1 = \mathbf{1}$ on trouve :

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0}\ \ ,\ \ \tau > 0\ \ ,\ \ \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\mathrm{diag}\begin{pmatrix} A^*PA - E^*PE + \tau C_g^* C_g \\ B_v^* P B_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - Q \end{pmatrix} < \mathbf{0}.$$

4.2.1.4 Performance impulsion-à-pic

Maintenant nous passons aux formules qui conduisent aux conditions pour la performance impulsion-à-pic. A nouveau, comme le transfert direct de l'impulsion est admissible pour les systèmes à temps discret, le ligne supplémentaire intervient dans les équations décrivant le système. De plus il convient de tenir compte que le pic maximal peut intervenir soit sur $\varphi_{-1}g$, soit sur $\varphi_\kappa g$ pour $\kappa \geq 0$. De ce fait, deux opérateurs de $\boldsymbol{\nabla}_{n2n}$ interviennent dans la modélisation. Si le bien-posé est démontré vis-à-vis des deux opérateurs simultanément alors, et ce de façon pessimiste, chaque signal $\varphi_{-1}g$ et $\varphi_\kappa g$ seront garantis être bornés. De façon compacte les équations s'écrivent

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c|ccc} E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} & \mathbf{0} \\ E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{x\pi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right],\ \ \mathcal{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_v \\ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{gv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$
$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{1n2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{2n2n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Les notations ont à nouveau légèrement évolué. On recalcule donc les différentes matrices

nécessaires pour appliquer le résultat de séparation intégrale quadratique :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c|c|c|cc|c} E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & E_{g\pi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{2x\pi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{gx} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{g\pi} \end{array}\right]}_{\mathcal{E}_2}$$

avec E_1 de rang plein en colonne ;

$$\nabla = J_{\mathcal{I}}\mathcal{I}_I K_{\mathcal{I}} + J_{1n2n}\nabla_{1n2n}K_{1n2n} + J_{2n2n}\nabla_{2n2n}K_{2n2n} \ :$$

$$J_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},\ J_{1n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\ J_{2n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad K_{\mathcal{I}} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$

$$K_{1n2n} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$

$$K_{2n2n} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Avec ces notations on trouve

$$F^*_{1\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \otimes E^{*\perp}_{2x\pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} E^*_{2xx} \\ E^*_{2x\pi} \end{bmatrix}^{\perp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad F_{2\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{E^{*\perp *}_{2x\pi} E_{2xx}}_{\hat{F}_{2\mathcal{I}}}, \tag{4.13}$$

$$F^*_{11n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \otimes \begin{bmatrix} E^*_{2xx} \\ E^*_{2x\pi} \end{bmatrix}^{\perp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$F_{21n2n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^{\perp *} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$F^*_{12n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \otimes \begin{bmatrix} E^*_{2xx} \\ E^*_{2x\pi} \end{bmatrix}^{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^{\perp} \end{bmatrix}, F_{22n2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} E^*_{2xx} & E^*_{gx} \\ E^*_{2x\pi} & E^*_{g\pi} \end{bmatrix}^{\perp *} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ce qui permet d'écrire le corollaire du Théorème 7 suivant.

Corollaire 11 *Le système (4.10) a une performance impulsion-à-pic inférieure à γ si F_{21n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe une matrice P et deux scalaires τ_1, τ_2 solution des LMI*

suivantes :

$$\tau_1 > 0 \quad , \quad \tau_2 > 0 \quad , \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccccc|cc|cc} -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*} P \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*} P \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc|cccc} -\tau_1 F_{11n2n}^{*} F_{21n2n}^{+*} F_{21n2n}^{+} F_{11n2n} - \tau_2 F_{12n2n}^{*} F_{22n2n}^{+*} F_{22n2n}^{+} F_{12n2n} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_1\gamma^2\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_2\gamma^2\mathbf{1} \end{array}\right].$$

Systèmes usuels. Le cas des systèmes sans caractère descripteur est tel que $E_{xx} = \mathbf{1}$, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$. On a alors $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ qui se factorise trivialement avec $\mathcal{E}_1 = \mathbf{1}$ et $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$. On trouve alors

$$E_{2x\pi}^{*\perp} = \mathbf{1} \ , \quad \hat{F}_{2\mathcal{I}} = \mathbf{1} \ , \quad F_{11n2n} = \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \ , \quad F_{12n2n} = \mathbf{1} \ ,$$
$$F_{12n2n} = \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] \ , \quad F_{22n2n} = \mathbf{1}$$

ainsi que $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{array}\right]$. Les conditions du Corollaire 11 prennent alors la forme LMI suivante :

$$\tau_1 > 0 \quad , \quad \tau_2 > 0$$
$$\text{diag} \left(\begin{array}{c} A^* P A - P \\ \tau_2 C_g^* C_g - P \\ \tau_1 D_{gv}^* D_{gv} - \tau_1 \gamma^2 \mathbf{1} \\ B_v^* P B_v - \tau_2 \gamma^2 \mathbf{1} \end{array} \right) < \mathbf{0}.$$

Systèmes descripteurs les plus courants. Le cas le plus classique de systèmes descripteurs est tel que $E_{xx} = E$ est carrée, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$ et en prenant la factorisation $E_1 = \mathbf{1}$ on trouve :

$$\tau_1 > 0 \quad , \quad \tau_2 > 0$$
$$\text{diag} \left(\begin{array}{c} A^* P A - E^* P E \\ \tau_2 C_g^* C_g - E^* P E \\ \tau_1 D_{gv}^* D_{gv} - \tau_1 \gamma^2 \mathbf{1} \\ B_v^* P B_v - \tau_2 \gamma^2 \mathbf{1} \end{array} \right) < \mathbf{0}.$$

On remarque qu'il est toujours possible de prendre $\tau_1 = 1$ et $\tau_2 = 1$ (ou bien toute autre valeur positive) sans perte de généralité. Auquel cas les conditions LMI permettent d'optimiser γ pour rechercher la plus petite borne supérieure de la performance impulsion-à-pic.

4.2.2 Systèmes décrits par l'opérateur variation

Nous venons d'aborder le cas des systèmes à temps discret décrits par l'opérateur avance. Si maintenant on considère des modèles décrits par l'opérateur variation $[\vartheta x]_k = (x_{k+1} - x_k)/T_s$, aucune modification n'est à apporter dans les manipulations de matrices. La seule différence avec le cas précédent est qu'il faut modifier les IQS-candidates. Les résultats sont donc donnés en suivant sans plus de détail. A noter que comme démontré dans [85, 142, 149, 201, 147, 143], les résultats par opérateur variation sont à privilégier dès que la période d'échantillonnage est petite, que ce soit pour des questions de modélisation, de réalisation des correcteur comme pour la stabilité numérique des solveurs LMI. C'est principalement dû au fait que, à mesure que T_S tend vers zéro, l'opérateur variation converge vers l'opérateur dérivée et les LMI convergent vers celles des systèmes continus.

4.2.2.1 Stabilité globale

Corollaire 12 *La stabilité asymptotique globale du système (4.10) décrit par l'opérateur variation est garantie s'il existe des matrices P et Y solutions des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp *} \left(\begin{bmatrix} -T_s E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & -E_{2x\pi}^{*\perp}(PF_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y) \\ -(PF_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > \mathbf{0}$$

où les diverses matrices sont définies page 80.

Systèmes usuels $(x_{k+1}-x_k)/T_s = Ax_k$. Avec les mêmes calculs que pour le cas des systèmes à temps continu on trouve naturellement les conditions :

$$P > \mathbf{0}, \;\; T_s A^* P A + A^* P + P A < \mathbf{0}.$$

qui sont celles de la stabilité asymptotique globale obtenues en considérant la fonction de Lyapunov $V_k = \frac{1}{T_s} x_k^T P x_k$.

Systèmes descripteurs les plus courants $E(x_{k+1} - x_k)/T_s = Ax_k$ avec E carrée. La factorisation $\mathcal{E} = E = E_2$, $E_1 = \mathbf{1}$ est la plus simple et nous nous contentons de considérer celle-ci. Elle conduit avec les même calculs que pour le cas des systèmes à temps continu à

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0}, \;\; T_s A^* P A + A^*(PE + E^{*\perp} Y) + (PE + E^{*\perp} Y)^* A < \mathbf{0}.$$

4.2.2.2 Performance norme-à-norme

Corollaire 13 *Le système (4.10) décrit par l'opérateur variation a une performance norme-à-norme inférieure à γ si F_{2n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P et Y, et un scalaire τ solution des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc|cc} -T_s E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & -E_{2x\pi}^{*\perp}(PF_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp}Y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -(PF_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp}Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{cc|cc} -\tau F_{1n2n}^* F_{2n2n}^{+*} F_{2n2n}^{+} F_{1n2n} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right]$$

où les diverses matrices sont définies page 83.

Systèmes usuels. Avec les mêmes calculs que pour le cas des systèmes à temps continu on trouve naturellement les conditions pour la performance H_∞ également proposées dans [44] :

$$P > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} T_s A^* P A + A^* P + P A + \tau C_g^* C_g & T_s A^* P B_v + P B_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ T_s B_v^* P A + B_v^* P + \tau D_{gv}^* C_g & T_s B_v^* P B_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0}.$$

Systèmes descripteurs les plus courants. A nouveau on se limite à la factorisation $\mathcal{E} = E = E_2$, $E_1 = \mathbf{1}$. Elle conduit à

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} T_s A^* P A + ((PE + E^{*\perp}Y)^* A)^{\mathcal{H}} + \tau C_g^* C_g & T_s A^* P B_v + (PE + E^{*\perp}Y)^* B_v + \tau C_g^* D_{gv} \\ T_s B_v^* P A + B_v^*(PE + E^{*\perp}Y) + \tau D_{gv}^* C_g & T_s B_v^* P B_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0}.$$

4.2.2.3 Performance impulsion-à-norme

Corollaire 14 *Le système (4.10) décrit par l'opérateur variation a une performance impulsion-à-norme inférieure à γ si F_{2i2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P, Y,*

Q et un scalaire τ solution des LMI suivantes :

$$(\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (\hat{F}_{2\mathcal{I}}\hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2 \quad , \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{cccc|cc} -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -T_s E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E_{2x\pi}^{*\perp}(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} -\tau F_{1i2n}^* F_{2i2n}^{+*} F_{2i2n}^{+} F_{1i2n} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & Q \end{array}\right]$$

où les diverses matrices sont définies page 95.

Systèmes usuels. En reprenant les mêmes calculs que dans le cas des systèmes discrets décrits par l'opérateur avance on trouve

$$P > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\mathrm{diag}\left(\begin{array}{c} T_s A^* P A + A^* P + P A + \tau C_g^* C_g \\ B_v^* P B_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - Q \end{array} \right) < \mathbf{0}.$$

Systèmes descripteurs les plus courants. Le cas le plus classique de systèmes descripteurs est tel que $E_{xx} = E$ est carrée, $E_{x\pi} = \mathbf{0}_{n,0}$, $E_{gx} = \mathbf{0}$, $E_{g\pi} = \mathbf{0}_{p_g,0}$ et en prenant la factorisation $E_1 = \mathbf{1}$ on trouve :

$$(EE^{*\circ})^* P (EE^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}\, Q \leq \tau\gamma^2$$
$$\mathrm{diag}\left(\begin{array}{c} T_s A^* P A + A^*(PE + E^{*\perp} Y) + (PE + E^{*\perp} Y)^* A + \tau C_g^* C_g \\ B_v^* P B_v + \tau D_{gv}^* D_{gv} - Q \end{array} \right) < \mathbf{0}.$$

4.2.2.4 Performance impulsion-à-pic

Corollaire 15 *Le système (4.10) a une performance impulsion-à-pic inférieure à γ si F_{21n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe deux matrices P, Y, et deux scalaires τ_1, τ_2 solutions*

des LMI suivantes :

$$\tau_1 > 0 \quad , \quad \tau_2 > 0 \quad , \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -T_s E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E_{2x\pi}^{*\perp}(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -(P\hat{F}_{2\mathcal{I}} + \hat{F}_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{F}_{2\mathcal{I}}^* P \hat{F}_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc|cccc} -\tau_1 F_{11n2n}^* F_{21n2n}^{+*} F_{21n2n}^{+} F_{11n2n} - \tau_2 F_{12n2n}^* F_{22n2n}^{+*} F_{22n2n}^{+} F_{12n2n} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_1\gamma^2\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_2\gamma^2\mathbf{1} \end{array}\right].$$

où les diverses matrices sont définies page 97.

Systèmes usuels. Avec les mêmes calculs que dans le cas des systèmes discrets décrits par l'opérateur avance on trouve :

$$\tau_1 > 0 \quad , \quad \tau_2 > 0$$

$$\text{diag}\left(\begin{array}{c} T_s A^* P A + A^* P + P A \\ \tau_2 C_g^* C_g - P \\ \tau_1 D_{gv}^* D_{gv} - \tau_1 \gamma^2 \mathbf{1} \\ B_v^* P B_v - \tau_2 \gamma^2 \mathbf{1} \end{array}\right) < \mathbf{0}.$$

Systèmes descripteurs les plus courants. En prenant comme précédemment la factorisation $E_1 = \mathbf{1}$ on trouve :

$$\tau_1 > 0 \quad , \quad \tau_2 > 0$$

$$\text{diag}\left(\begin{array}{c} T_s A^* P A + (A^*(PE + E^{*\perp} Y))^{\mathcal{H}} \\ \tau_2 C_g^* C_g - E^* P E \\ \tau_1 D_{gv}^* D_{gv} - \tau_1 \gamma^2 \mathbf{1} \\ B_v^* P B_v - \tau_2 \gamma^2 \mathbf{1} \end{array}\right) < \mathbf{0}.$$

Toutes les LMI concernant les performances de systèmes discrets décrits par l'opérateur variation sont telles que si T_s tend vers zéro, *i.e.* le système tend vers un système continu, les LMI convergent vers celles des systèmes à temps continu. Quand la période d'échantillonnage est faible $T_s \ll 1$ les LMI relatives au systèmes décrits par l'opérateur variation seront de ce fait nettement à privilégier devant celles relatives aux systèmes décrits par l'opérateur avance car numériquement mieux conditionnées.

4.3 Problèmes avec incertitudes dissipatives structurées

4.3.1 Localisation de pôles

Dans cette sous-section nous nous intéressons au résultat IQS pour prouver que tous les pôles d'un système linéaire

$$E_{xx}\vartheta x + E_{x\pi}\pi = Ax$$

appartiennent à une région du plan complexe définie par

$$r_1\lambda\lambda^* + r_2^*\lambda + \lambda^* r_2 + r_3 > 0. \tag{4.14}$$

Des exemples de telles régions sont donnés en page 27.

Par définition, les pôles sont les valeurs λ (éventuellement infinies) telles qu'il existe une solution non nulle $(x,\pi) \neq 0$ à

$$E_{xx}\lambda x + E_{x\pi}\pi = Ax$$

ou encore, en posant $\hat{x} = \lambda x$, ce sont les valeurs λ (éventuellement infinies) telles qu'il existe une solution non nulle $(\hat{x},\pi) \neq 0$ à

$$\left[\begin{array}{cc} E_{xx} & E_{x\pi} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \hat{x} \\ \pi \end{array}\right) = Ax \ , \ x = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\lambda}\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \hat{x} \\ \pi \end{array}\right).$$

On reconnaît là la structure d'une boucle telle que (3.1). L'existence d'une solution non nulle revient à dire que cette boucle n'est pas bien-posée. Le problème de localisation de pôle est donc équivalent à dire que les valeurs de λ qui rendent la boucle mal-posée sont exclusivement dans la région (1.9). La contraposée indique que le placement de pôle est équivalent au bien-posé de la boucle pour tout λ dans l'extérieur de la région. L'extérieur de la région est défini par

$$r_1\lambda\lambda^* + r_2^*\lambda + \lambda^* r_2 + r_3 \leq 0.$$

ce qui revient à dire que $\frac{1}{\lambda}$ est $\{r_1, r_2, r_3\}$-dissipative. Les IQS-candidates pour ces incertitudes sont données par le Lemme 11. ce qui permet d'écrire cet autre corollaire du Théorème 7.

Corollaire 16 *Les pôles du système $E_{xx}\dot{x}(t) + E_{x\pi}\pi(t) = Ax(t)$ sont tous dans la région définie par (4.14) s'il existe des matrices P et Y solutions des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \left(\left[\begin{array}{cc} r_1 E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & r_2 E_{2x\pi}^{*\perp}(PF_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y) \\ r_2(PF_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & r_3 F_{2\mathcal{I}}^* P F_{2\mathcal{I}} \end{array}\right] \right) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1 & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

où les matrices impliquées dans cette formule sont définies page 80.

Bien évidement ces conditions sont exactement celles de la stabilité des systèmes à temps continu quand $r_1 = r_3 = 0$ et $r_2 = -1$; celle de la stabilité des systèmes à temps discret décrits par l'opérateur avance quand $r_1 = -1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 1$; celle de la stabilité des systèmes à temps discret décrits par l'opérateur variation quand $r_1 = -T_s$, $r_2 = -1$, $r_3 = 0$. Pour le cas des systèmes descripteurs les plus courants où E est carrée, les résultats sont exactement ceux de [124].

4.3.2 Performance H_∞ sur une bande de fréquence

Nous avons considéré précédemment (page 81) le problème de performance norme-à-norme. Ce problème de performance est équivalent (pour les systèmes LTI) au problème H_∞ : montrer que le système est stable et que la norme spectrale de sa fonction de transfert est bornée pour tout $s = \mathrm{j}\omega$. On trouve également dans la littérature des problèmes similaires mais avec une norme spectrale bornée sur une bande de fréquence $\omega \in [\ \underline{\omega}\ \ \overline{\omega}\ ]$ donnée. Dans le cas des systèmes à temps continu, il s'agit alors de démonter que pour tout ω borné dans un segment et pour tout signal $v \neq 0$, les solutions des équations suivantes

$$\begin{array}{l} E_{xx}\mathrm{j}\omega x \quad\ + E_{x\pi}\pi = Ax + B_v v \\ E_{gx}\mathrm{j}\omega x + g + E_{g\pi}\pi = C_g x + D_{gv} v \end{array} \tag{4.15}$$

vérifient la condition $\|g\| < \gamma\|v\|$. En accord avec la méthodologie développée jusqu'ici, ce problème se reformule naturellement comme un problème de bien-posé de boucle avec les notations suivantes

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & \mathbf{0} & E_{x\pi} \\ E_{gx} & \mathbf{1} & E_{g\pi} \end{bmatrix},\ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B_v \\ C_g & D_{gv} \end{bmatrix},\ \nabla = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{j}\omega} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{n2n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Dire que ω appartient à l'intervalle $[\ \underline{\omega}\ \ \overline{\omega}\ ]$ est équivalent à dire que $\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ est une incertitude $\{0,1,0\}$-structurée, $\{2, \mathrm{j}(\underline{\omega}+\overline{\omega}), 2\underline{\omega}\overline{\omega}\}$-dissipative. Aussi on trouve aisément le résultat suivant.

Corollaire 17 *La matrice de transfert de v à g du système (4.3) a une norme spectrale bornée par γ pour tout $s = j\omega$ avec ω borné dans l'intervalle $[\ \underline{\omega}\ \ \overline{\omega}\ ]$ si F_{2n2n} est de rang plein en colonne et qu'il existe des matrices P, R et Y, et un scalaire τ solution des LMI suivantes :*

$$(F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ})^* P (F_{2\mathcal{I}}F_{2\mathcal{I}}^{*\circ}) > \mathbf{0} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \left[\ \mathcal{E}_1 \quad -\mathcal{A}\ \right]^{\perp *} \Theta \left[\ \mathcal{E}_1 \quad -\mathcal{A}\ \right]^{\perp} > \mathbf{0}$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc|cc} 2E_{2x\pi}^{*\perp} P E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & E_{2x\pi}^{*\perp}((R - \mathrm{j}(\underline{\omega}+\overline{\omega})P)F_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -((R - \mathrm{j}(\underline{\omega}+\overline{\omega})P)F_{2\mathcal{I}} + F_{2\mathcal{I}}^{*\perp} Y)^* E_{2x\pi}^{*\perp *} & \mathbf{0} & 2\underline{\omega}\overline{\omega} F_{2\mathcal{I}}^* P F_{2\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$
$$+ \left[\begin{array}{c|cc} -\tau F_{1n2n}^* F_{2n2n}^{+*} F_{2n2n}^{+} F_{1n2n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\tau\mathbf{1} \end{array}\right]$$

où les diverses matrices sont définies page 83.

La même démarche peut être appliquée pour les systèmes à temps discret. Dans le cas des systèmes décrits par l'opérateur avance cela revient à remplacer $j\omega$ par $e^{j\omega}$ et donc de considérer des incertitudes $\{-1,0,1\}$-structurées, $\{2\cos\frac{\overline{\omega}-\underline{\omega}}{2}, -e^{j\frac{\overline{\omega}+\underline{\omega}}{2}}, 0\}$-dissipatives (voir page 26 et suivantes).

4.3.3 Calcul de μ et skew-μ

Reformulé dans le cadre de la séparation quadratique, le problème du calcul de la valeur singulière structurée μ, [53, 208, 63, 154, 232] est un problème de bien-posé de boucle où

l'opérateur linéaire est une matrice de transfert $z = \mathcal{A}(j\omega)w$ et l'opérateur incertain est de la forme

$$\nabla = \text{diag}(\Delta_1 \cdots \Delta_{\bar{j}})$$

avec comme possibilité sur les Δ_j d'appartenir à l'une des trois catégories suivantes :

— Borné en norme, plein : Δ_j est $\{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$-dissipative ;
— Scalaire complexe borné, répété : $\Delta_j = \delta_j \mathbf{1}$ où δ_j est $\{-1, 0, 1\}$-dissipative ;
— Scalaire réel borné, répété : $\Delta_j = \delta_j \mathbf{1}$ où δ_j est $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurée, $\{-1, 0, 1\}$-dissipative.

Plus précisément, le calcul de μ vise pour chaque fréquence à minimiser $\mu(\omega)$ tel que la boucle faite de $z = 1/\mu(\omega)\mathcal{A}(\mathrm{j}\omega)w$ et l'opérateur ∇ est bien-posée. Le résultat IQS pour ce problème conduit à formuler la recherche d'une IQS-candidate $\Theta(\mathrm{j}\omega)$ (c'est-à-dire des DG-scallings [63, 141]) telle que

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{A}^*(\mathrm{j}\omega) & \mu(\omega)\mathbf{1} \end{array} \right] \Theta(\mathrm{j}\omega) \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}(\mathrm{j}\omega) \\ \mu(\omega)\mathbf{1} \end{array} \right] > \mathbf{0}.$$

Pour les types d'incertitudes concernés, le bloc en haut à gauche de Θ est semi-défini négatif tandis que le bloc en bas à droite est semi-défini positif. Ainsi $\mu(\omega) = \infty$ est solution tandis que $\mu(\omega) = 0$ ne l'est pas. Par résolutions successives de LMI, il est possible de trouver sa valeur minimale admissible. Une alternative est la fonction `mussv` de la Control toolbox de Matlab qui exploite la structure du problème.

En général les problèmes d'analyse formulés sous cette forme consistent à prouver que la valeur singulière structurée est inférieure à 1 pour toutes les fréquences : $\mu = \sup_\omega \mu(\omega) \leq 1$. Alternativement, toute valeur μ trouvée indique que la boucle sera bien-posée pour toute incertitude $k\nabla$ avec $k \leq \frac{1}{\mu}$. Cela permet de chercher un sous-ensemble d'incertitudes admissibles en maximisant son rayon.

Une version modifiée de ce problème, appelée skew-μ, consiste en la maximisation du rayon selon certaines composantes de ∇. Mettons que la minimisation se fait pour les derniers blocs de ∇, le problème se réécrit schématiquement comme suit :

$$\max_{\omega} \min_{\Theta(\mathrm{j}\omega) \in \mathbf{\Theta}} \mu(\omega) \quad : \quad \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A}^*(\mathrm{j}\omega) & \text{diag} \left(\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mu(\omega)\mathbf{1} \end{array} \right) \end{array} \right] \Theta(\mathrm{j}\omega) \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}(\mathrm{j}\omega) \\ \text{diag} \left(\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mu(\omega)\mathbf{1} \end{array} \right) \end{array} \right] > \mathbf{0}.$$

Une toolbox dédiée à ce problème a été développée par Gilles Ferreres et Jean-Marc Biannic (SMT [76]).

Les deux principales difficultés de ce problème sont :

— Le balayage sur l'ensemble des fréquences est impossible de façon exacte. En pratique on effectue un échantillonnage des fréquences mais on risque alors de rater des pics de la valeur $\mu(\omega)$, pics qui sont fréquents et peuvent être très fins dans le cas des structures flexibles. Une alternative est de garantir des niveaux de μ entre deux valeurs d'un échantillonnage. Il suffit pour cela qu'une même IQS-candidate satisfasse l'inégalité pour une valeur de μ donnée sur les intervalles de fréquence. Cette technique est utilisée dans [75, 77] avec un algorithme associé qui exploite la structure du problème. Une

alternative est de considérer ω comme une incertitude (comme c'est fait dans la sous-section précédente). Cette approche a le défaut de modifier la structure du problème, d'introduire une matrice P de grande dimension (nombre de lignes est égal à l'ordre du système) et donc d'être plus difficile à résoudre numériquement.

— L'autre difficulté est le pessimisme de l'approche. Comme nous l'avons, vu la description des IQS-candidates se fait par des sous-ensembles de candidates. Aussi le calcul donne des bornes supérieures de μ et elles peuvent être en pratique très éloignées de la valeur exacte. Ce problème est inhérent à la technique IQS et pas uniquement pour le problème de la valeur singulière structurée. Le chapitre qui suit propose une voie pour réduire le pessimisme.

Chapitre 5

Réduction du pessimisme

Le chapitre qui précède conclut sur le pessimisme des résultats quand il s'agit de résoudre des problèmes d'analyse pour des systèmes complexes (plusieurs opérateurs incertains). Le chapitre qui vient a pour objectif de donner des pistes pour réduire ce pessimisme. La voie choisie, contrairement à d'autres approches, n'est pas de partir des LMI données dans le chapitre précédent et de les triturer pour en obtenir de nouvelles, moins pessimistes. L'approche qui est suivie est de travailler sur la description du système de manière à y incorporer les informations qui s'avèrent non inclues quand sont bâtis les sous-ensembles d'IQS candidates. Cette approche conduit à construire des systèmes sous forme descripteurs, même quand le système initial ne l'est pas. Pour plus de simplicité dans les formules, nous abordons uniquement l'analyse de systèmes usuels. Les représentations implicites qui en découlent sont toutes avec une matrice $\mathcal{E}$ de rang plein en colonne. Les résultats peuvent être étendus aux systèmes descripteurs mais au coût de notations mathématiques encore plus complexes.

La technique d'augmentation des systèmes est dans un premier temps illustrée en détail pour le cas de systèmes LTI avec incertitudes paramétriques (constantes). Cet exemple le plus simple permet d'expliquer les mécanismes en oeuvre dans cette méthode. Dans un second temps la même méthode est appliquée dans le cas d'un système avec une incertitude variant dans le temps et une non-linéarité. Dans l'exemple numérique traité, la non-linéarité est non critique et la stabilité globale du système est préservée. Les conditions sont comparées en termes de pessimisme en évaluant des bornées supérieures d'une performance norme-à-norme (norme L_2 induite). La troisième section est consacrée à un exemple de système avec saturation pour lequel seule la stabilité locale peut être démontrée. Ce résultat est très spécifique car, par le biais des définitions telles que la racine carrée du Dirac et les intégrateurs sur des signaux tronqués qui ont été utilisés dans la sections précédente pour évaluer des performances impulsion-à-pic, il permet de construire des régions d'attraction des points d'équilibre. Ce premier résultat, encore fortement améliorable, ouvre la piste pour l'analyse de la stabilité locale des systèmes non-linéaire par l'approche IQS. Enfin, en quatrième section du chapitre, la même technique est illustrée pour le cas de systèmes à retard. Dans ce cas, l'opérateur sur lequel boucle le système est un opérateur de dimension infinie dont la technique d'augmentation permet de décrire la série de Taylor avec un reste borné.

5.1 Stabilité robuste des systèmes LTI

5.1.1 Enoncé pessimiste

Soit un système LTI décrit par :

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ z_\Delta \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cc} A & B_\Delta \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} x \\ w_\Delta \end{array} \right) \ , \ \left\{ \begin{array}{l} x = \mathcal{I}\dot{x} \\ w_\Delta = \Delta z_\Delta \end{array} \right. \tag{5.1}$$

où Δ est une incertitude composée de blocs élémentaires

$$\Delta = \sum_{j=2}^{\bar{j}} J_{\Delta j}(\mathbf{1}_{r_j} \otimes \Delta_j) K_{\Delta j}$$

où les matrices $J_{\Delta j}$ sont orthonormales (voir page 60). Dans un premier temps nous allons supposer que les incertitudes Δ_j représentent des paramètres constants définis comme étant $\{\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \Phi_{3j}\}$-structurés et $\{\Psi_{1j}, \Psi_{2j}, \Psi_{3j}\}$-dissipatifs (voir définition page 26). Comme on l'a vu précédemment, cette représentation permet, entre autre, de représenter des incertitudes scalaires réelles ou complexes, bornées sur des intervalles ou des arcs de cercle. La notation $\mathbf{1}_{r_j}$ signifie que chaque incertitude est répétée r_j fois dans Δ.

On s'intéresse à la stabilité robuste de ce système. En suivant la méthodologie exposée jusqu'ici cela revient à formuler le problème de bien-posé pour la boucle 3.1 avec

$$\begin{array}{c} \mathcal{E} = \mathbf{1} \ , \ \mathcal{A} = \left[\begin{array}{cc} A & B_\Delta \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{array} \right] \ , \ \nabla = \sum_{j=1}^{\bar{j}} J_j \nabla_j K_j \\ \\ \begin{array}{lll} \nabla_1 = \mathcal{I}, & J_1 = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{n,m_\Delta} \end{array} \right]^T, & K_1 = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{n,p_\Delta} \end{array} \right], \\ \nabla_{j\geq 2} = \mathbf{1}_{r_j} \otimes \Delta_j, & J_{j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{\bullet,n} & J_{\Delta j}^T \end{array} \right]^T, & K_{j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{\bullet,n} & K_{\Delta j} \end{array} \right]. \end{array} \end{array} \tag{5.2}$$

Les résultats du Chapitre 3 s'appliquent et conduisent au test LMI suivant.

Corollaire 18 *Le système (5.1) est robustement stable s'il existe une solution à la LMI suivante*

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array} \right]^{\perp *} \left(\sum_{j=1}^{\bar{j}} \left[\begin{array}{cc} K_j^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_j \end{array} \right] \Theta_j \left[\begin{array}{cc} K_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_j^T \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array} \right]^{\perp} > \mathbf{0} \tag{5.3}$$

où les matrices $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, J_j et K_j sont données par (5.2) et où les séparateurs élémentaires sont donnés par

$$\begin{array}{c} \Theta_1 = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{array} \right] \ , \ P = P^* > \mathbf{0} \\ \\ \Theta_{j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} R_j \otimes \Phi_{1j} & R_j \otimes \Phi_{2j} \\ R_j \otimes \Phi_{2j}^* & R_j \otimes \Phi_{3j} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_j \otimes \Psi_{1j} & P_j \otimes \Psi_{2j} \\ P_j \otimes \Psi_{2j}^* & P_j \otimes \Psi_{3j} \end{array} \right] \ , \ \begin{array}{l} R_j = R_j^*, \\ P_j = P_j^* > \mathbf{0}. \end{array} \end{array} \tag{5.4}$$

Les dimensions des variables de décision de ce problème sont :
- P matrice $n \times n$;
- $R_{j\geq 2}$ et $P_{j\geq 2}$ matrices $r_j \times r_j$.
Le nombre de lignes de la contrainte LMI principale est $n + m_\Delta$.
Ces quantités correspondent à la complexité numérique du problème. On les comparera par la suite aux même indicateurs de complexité numérique pour des résultats de pessimisme réduit.

La faisabilité des LMI du Corollaire 18 est une condition suffisante de stabilité robuste du système 5.1. Du fait des résultats de pessimisme commentés dans la fin du chapitre précédent, sa faisabilité est potentiellement pessimiste. La suite de cette section consiste à montrer comment générer des conditions moins pessimistes tout en faisant le moins de manipulations mathématiques possible.

5.1.2 Augmentation d'ordre un

Le premier constat à faire concernant le Corollaire 18 est qu'à aucun moment l'information sur le fait que les incertitudes sont constantes n'a été utilisée. Les conditions LMI démontrent de ce fait tout aussi bien la stabilité robuste vis-à-vis d'incertitudes variant dans le temps, même si leur dérivée est infinie (sauts entre valeurs de l'ensemble).

Une piste pour réduire le pessimisme est d'inclure l'information sur la dérivée (nulle) des incertitudes. Si on le fait directement sur le modèle cela donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ \dot{z}_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta & \mathbf{0} \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} x = \mathcal{I}\dot{x} \\ w_\Delta = \Delta z_\Delta \\ \dot{w}_\Delta = \Delta \dot{z}_\Delta \end{cases}$$

Ce système est trivialement identique à (5.1) si ce n'est l'ajout de $\dot{w}_\Delta = \Delta \dot{z}_\Delta$ qui reflète le fait que Δ est une incertitude paramétrique constante. L'équation contient également la définition de la dérivée $\dot{z}_\Delta = C_\Delta \dot{x} + D_{\Delta\Delta}\dot{w}_\Delta$. Elle ne contient par contre pas l'information que $\dot{w}_\Delta$ est la dérivée de w_Δ. Pour la même raison que $x = \mathcal{I}\dot{x}$ représente les dynamiques de x, la relation $w_\Delta = \mathcal{I}\dot{w}_\Delta$ reflète les dynamiques du signal dépendant des incertitudes. La modélisation sous forme descripteur permet d'inclure cette information dans le modèle sans difficulté et donne le modèle augmenté suivant :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w}_\Delta \\ \hline z_\Delta \\ \dot{z}_\Delta \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & \mathbf{0} & B_\Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ C_\Delta & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ \hline w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

dans lequel les opérateurs intégration et incertitude opèrent sur les signaux suivants

$$\begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} = \mathcal{I} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w}_\Delta \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 \otimes \Delta \begin{pmatrix} z_\Delta \\ \dot{z}_\Delta \end{pmatrix}$$

Par construction ce système est équivalent au précédent, si ce n'est qu'il comporte en lui l'information que Δ est composé exclusivement d'incertitudes dont la dérivée première est nulle.

Sa stabilité peut s'étudier à l'aide de la théorie IQS en construisant les conditions de bien-posé de la boucle 3.1 avec

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \ , \ \mathcal{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & \mathbf{0} & B_\Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ C_\Delta & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \ , \ \nabla = \textstyle\sum_{j=1}^{\bar{j}} J_j \nabla_j K_j$$

$$\begin{array}{lll} \nabla_1 = \mathcal{I}, & J_1 = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_{n+m_\Delta} & \mathbf{0}_{\bullet,2m_\Delta} \end{array}\right]^T, & K_1 = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1}_{n+m_\Delta} & \mathbf{0}_{\bullet,2p_\Delta} \end{array}\right], \\ \nabla_{j\geq 2} = \mathbf{1}_{2r_j} \otimes \Delta_j, & J_{j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{\bullet,n+m_\Delta} & \mathbf{1}_2 \otimes J_{\Delta j}^T \end{array}\right]^T, & K_{j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{\bullet,n+m_\Delta} & \mathbf{1}_2 \otimes K_{\Delta j} \end{array}\right]. \end{array} \tag{5.6}$$

$\mathcal{E}$ est de rang plein en colonne. Le Théorème 7 d'IQS s'applique et donne :

Corollaire 19 *Le système (5.1) est robustement stable s'il existe une solution à la LMI (5.3) où les matrices $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, J_j et K_j sont données par (5.6) et où les séparateurs élémentaires sont donnés par (5.4).*

On constate la simplicité du résultat. Les conditions sont exactement les mêmes que celles du Corollaire 18. La différence vient de la description du modèle issue de manipulations simples sur les équations du système et bien sûr des dimensions du problème à résoudre.

Les dimensions des variables de décision de ce problème sont dans le Corollaire 19 :
- P matrice $(n + m_\Delta) \times (n + m_\Delta)$;
- $R_{j\geq 2}$ et $P_{j\geq 2}$ matrices $2r_j \times 2r_j$.

Le nombre de lignes de la contrainte LMI principale est $n + 2m_\Delta$.
La complexité numérique est augmentée en comparaison du Corollaire 18. Cette augmentation de la complexité accompagne une réduction du pessimisme.

Techniquement pour montrer la réduction du pessimisme on procède comme suit. Si le Corollaire 18 admet une solution $(P_0, R_{0j\geq 2}, P_{0j\geq 2})$ alors pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on montre que le Corollaire 18 admet une solution telle que

$$P_1 = \left[\begin{array}{cc} P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{1} \end{array}\right] \ , \ R_{1j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} R_{0j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \ , \ P_{1j\geq 2} = \left[\begin{array}{cc} P_{0j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{1} \end{array}\right].$$

Les manipulations des formules ne sont pas données car sans grand intérêt.

Rappelons que les résultats IQS s'interprètent comme des résultats de type Lyapunov où la fonction de Lyapunov est construite sur la base du séparateur élémentaire utilisé vis-à-vis des dynamiques (de l'intégrateur). Dans le cas du Corollaire 18 la fonction de Lyapunov sous-jacente est donc de la forme $V_0(x) = x^T P x$ où x est le signal issu de l'opérateur intégration. Dans le cas du Corollaire 19 on trouve par contre

$$V_1(x) = \left(\begin{array}{c} x \\ w_\Delta \end{array}\right)^T P \left(\begin{array}{c} x \\ w_\Delta \end{array}\right) = x^T \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta(\mathbf{1} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} C_\Delta \end{array}\right]^T P \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \Delta(\mathbf{1} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} C_\Delta \end{array}\right] x. \tag{5.7}$$

C'est une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres. Elle est quadratique en $\Delta(\mathbf{1} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}C_\Delta$ qui est l'incertitude vue de l'équation dynamique $\dot{x} = Ax + B_\Delta w_\Delta$, $w_\Delta = \Delta(\mathbf{1} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}C_\Delta x$.

5.1.3 Augmentation d'ordre supérieur

Réduire plus encore le pessimisme revient à chercher des matrices de Lyapunov d'ordre plus élevé dans leur dépendance vis-à-vis des incertitudes. Dans le formalisme des IQS cela peut se faire en appliquant l'augmentation d'ordre du système à nouveau, c'est-à-dire en ajoutant l'information que les dérivées d'ordre supérieur de Δ sont elles aussi nulles.

A l'ordre deux on trouve le modèle suivant

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} \mathbf{1} & -A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \ddot{x} \\ \hline \dot{x} \\ \dot{w}_\Delta \\ \ddot{w}_\Delta \\ \hline z_\Delta \\ \dot{z}_\Delta \\ \ddot{z}_\Delta \end{array}\right) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_\Delta & \mathbf{0} \\ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x \\ w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \\ \hline w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \\ \ddot{w}_\Delta \end{array}\right) \tag{5.8}$$

dans lequel les opérateurs intégration et incertitude opèrent sur les signaux suivants

$$\left(\begin{array}{c} x \\ w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \end{array}\right) = \mathcal{I} \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{w}_\Delta \\ \ddot{w}_\Delta \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{c} w_\Delta \\ \dot{w}_\Delta \\ \ddot{w}_\Delta \end{array}\right) = \mathbf{1}_3 \otimes \Delta \left(\begin{array}{c} z_\Delta \\ \dot{z}_\Delta \\ \ddot{z}_\Delta \end{array}\right)$$

On notera que $\ddot{x}$ est isolé dans ce modèle et n'est pas relié à $\dot{x}$ par l'opérateur intégration. Il est traité comme un signal exogène (du type des signaux π dans la représentation (1.13)). La raison de ce choix est que l'écriture de $\ddot{x} = A\dot{x} + B_\Delta \dot{w}_\Delta$ et les différentes autres règles sur ces signaux $\dot{x}$ et $\dot{w}_\Delta$ contient en soi le fait que $\ddot{x}$ est la dérivée de $\dot{x}$. L'ajouter explicitement ne serait qu'une information redondante. On pourrait d'ailleurs retirer ce signal en écrivant que $C_\Delta \ddot{x} = C_\Delta(A\dot{x} + B_\Delta \dot{w}_\Delta)$. Nous ne le faisons pas car dans ce cas on perd la structure des données initiales. Cependant, dans les faits, c'est exactement ce qui est fait numériquement quand on calcule le noyau de $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array}\right]$ dans la formule LMI.

Par construction ce système est équivalent au précédent, si ce n'est qu'il comporte en lui l'information que Δ est composé exclusivement d'incertitudes dont les dérivées première et seconde sont nulles. Sa stabilité peut s'étudier à l'aide de la théorie IQS en construisant les

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\aleph n+\aleph m_\Delta+(\aleph+1)p_\Delta} \\ \mathbf{0}_{\aleph m_\Delta,\bullet} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,1} & \mathbf{1}_{\aleph-1} \end{bmatrix} \otimes A & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} \\ \mathbf{0}_{n+\aleph m_\Delta+p_\Delta,\bullet} & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} \\ \mathbf{1}_\aleph \otimes C_\Delta & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} \\ \mathbf{0}_{\aleph m_\Delta,\bullet} & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\aleph-1,1} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes A & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} & \begin{bmatrix} \mathbf{1}_\aleph & \mathbf{0}_{\bullet,1} \end{bmatrix} \otimes B_\Delta \\ \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,1} & \mathbf{1}_\aleph \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{m_\Delta} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{\aleph,1} \end{bmatrix} \otimes C_\Delta & \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} & \mathbf{1}_{\aleph+1} \otimes D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0}_{\bullet,\bullet} & \mathbf{1}_{\aleph m_\Delta} & \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_\aleph & \mathbf{0}_{\bullet,1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{m_\Delta} \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n+\aleph m_\Delta} & \mathbf{0}_{\bullet,(\aleph+1)m_\Delta} \end{bmatrix}^T, \quad K_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,(\aleph-1)n} & \mathbf{1}_{n+\aleph m_\Delta} & \mathbf{0}_{\bullet,(\aleph+1)p_\Delta} \end{bmatrix},$$
$$J_{j\geq 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,n+\aleph m_\Delta} & \mathbf{1}_{\aleph+1} \otimes J_{\Delta j}^T \end{bmatrix}^T, \quad K_{j\geq 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,\aleph n+\aleph m_\Delta} & \mathbf{1}_{\aleph+1} \otimes K_{\Delta j} \end{bmatrix}.$$

conditions de bien-posé de la boucle 3.1 avec

$$\mathcal{E} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} \mathbf{1} & -A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \mathcal{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_\Delta & \mathbf{0} \\ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ C_\Delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \nabla = \sum_{j=1}^{\bar{j}} J_j \nabla_j K_j$$

$$\nabla_1 = \mathcal{I}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n+2m_\Delta} & \mathbf{0}_{\bullet,3m_\Delta} \end{bmatrix}^T, \quad K_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,n} & \mathbf{1}_{n+2m_\Delta} & \mathbf{0}_{\bullet,3p_\Delta} \end{bmatrix},$$
$$\nabla_{j\geq 2} = \mathbf{1}_{3r_j} \otimes \Delta_j, \quad J_{j\geq 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,n+2m_\Delta} & \mathbf{1}_3 \otimes J_{\Delta j}^T \end{bmatrix}^T, \quad K_{j\geq 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bullet,2n+2m_\Delta} & \mathbf{1}_3 \otimes K_{\Delta j} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Les augmentations d'ordre supérieur se construisent par récurrence. Pour un ordre $\aleph \geq 1$ la formule générique des matrices définissant le problème LMI est donnée par (5.10). $\mathcal{E}$ est toujours de rang plein en colonne. Le Théorème 7 d'IQS s'applique et donne :

Corollaire 20 *Le système (5.1) est robustement stable si pour une valeur $\aleph \geq 1$ il existe une solution à la LMI (5.3) où les matrices $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$, J_j et K_j sont données par (5.10) et où les séparateurs élémentaires sont donnés par (5.4).*

Les dimensions des variables de décision de ce problème sont dans le Corollaire 20 :
- P matrice $(n + \aleph m_\Delta) \times (n + \aleph m_\Delta)$;
- $R_{j\geq 2}$ et $P_{j\geq 2}$ matrices $(\aleph + 1)r_j \times (\aleph + 1)r_j$.

Le nombre de lignes de la contrainte LMI principale est $n + (\aleph + 1)m_\Delta$.
La complexité numérique croît ainsi en fonction de $\aleph$. Le nombre de variables croît avec le carré de $\aleph m_\Delta$ ce qui rend en pratique le test numériquement impraticable même pour de faibles valeurs d'augmentation $\aleph$ si la taille des incertitudes est grande.

A mesure que $\aleph$ croît, le problème LMI devient de moins en moins pessimiste. La fonction de Lyapunov sous-jacente est une fonction de plus en plus complexe des incertitudes. On a vu précédemment la formule pour $\aleph = 1$ (5.7)). Pour $\aleph \geq 1$ la formule générale est comme suit

$$V_\aleph(x) = \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ \vdots \\ w_\Delta^{(\aleph)} \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ \vdots \\ w_\Delta^{(\aleph)} \end{pmatrix} = x^T \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ Z(\Delta) \\ \vdots \\ Z(\Delta)(A(\Delta))^{\aleph-1} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ Z(\Delta) \\ \vdots \\ Z(\Delta)(A(\Delta))^{\aleph-1} \end{bmatrix} x \tag{5.11}$$

où $Z(\Delta) = \Delta(\mathbf{1} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}C_\Delta$ et $A(\Delta) = A + B_\Delta Z(\Delta)$.

5.1.4 Exemple : Analyse robuste du contrôle d'attitude d'un satellite

La méthodologie a été appliquée sur un modèle de satellite. Les résultats détaillés ont fait l'objet de deux rapports techniques [13, 12] et d'une publication [183] qui résume les résultats. Ils sont repris ici pour illustration.

Le modèle linéaire de satellite est celui de DEMETER [197, 198, 11]. Le cas considéré est celui d'un seul axe influencé par un mode flexible. L'ordre du modèle en boucle fermée incluant le modèle de satellite, des actionneurs et de la boucle de commande est $n = 11$. Les incertitudes portent sur l'inertie du corps du satellite δJ ainsi que sur l'amortissement $\delta\zeta$ et la pulsation propre $\delta\omega$ du mode flexible. La modélisation LFT du système fait intervenir un opérateur $\Delta \in \boldsymbol{R}^{6\times 6}$ où certains des coefficients incertains sont répétés. Les incertitudes sont normalisées entre -1 et 1, l'objectif est de trouver les plus grands domaines incertains autour de zéro pour lesquels les conditions LMI garantissent la stabilité robuste. Les domaines recherchés sont de type polytopique. La méthode utilisée pour optimiser la taille des polytopes n'est pas reprise ici, on peut la trouver dans [183].

Le premier test qui a été mené se limitait à un problème à deux dimensions. δJ étant fixé, il s'agissait de trouver le plus grand polygone à quatre sommets dans l'espace $\delta\zeta, \delta\omega$ autour de zéro qui stabilise le système. Les Figures 5.1, 5.2, 5.3 illustrent graphiquement les domaines obtenus quand on applique les LMI issues de l'augmentation $\aleph = 1$. Comme les coins des polygones touchent les régions paramétriques pour lesquelles le système est instable (régions obtenues par quadrillage) ou bien les limites du domaine d'analyse, on peut conclure que les conditions LMI sont ici sans pessimisme. Ces résultats sont à comparer avec les conditions LMI sans augmentation, $\aleph = 0$. La Figure 5.4 illustre le plus grand polygone valide pour ces conditions LMI. Il est significativement plus petit (l'échelle des axes est modifiée par un facteur 10^{-2}).

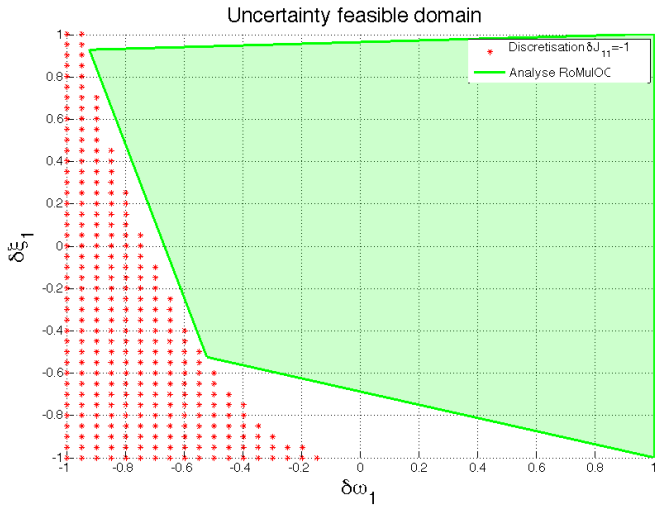


FIGURE 5.1 – Domaine d'incertitudes garanti pour être stable (vert) et valeurs instables (points rouges) obtenus pour $\delta J = -1$ avec $\aleph = 1$.

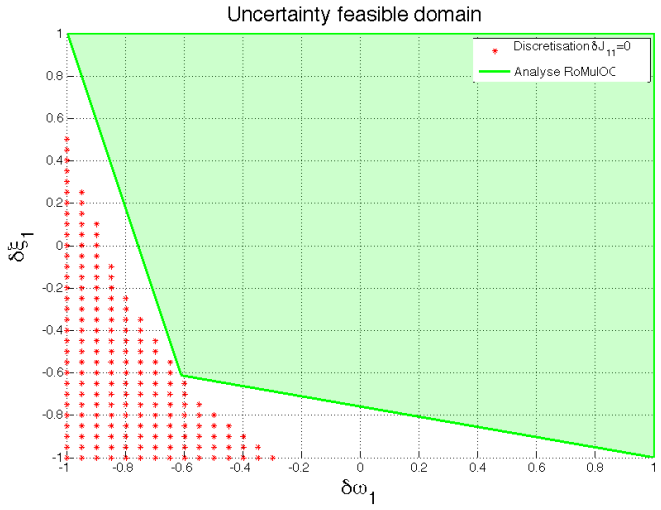


FIGURE 5.2 – Domaine d'incertitudes garanti pour être stable (vert) et valeurs instables (points rouges) obtenus pour $\delta J = 0$ avec $\aleph = 1$.

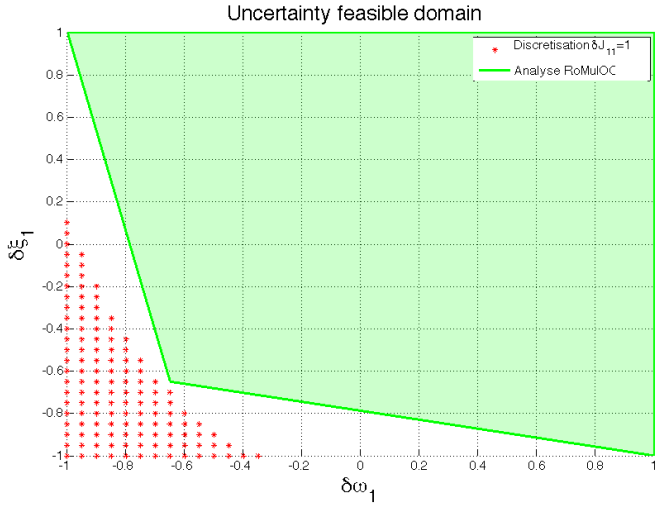


FIGURE 5.3 – Domaine d'incertitudes garanti pour être stable (vert) et valeurs instables (points rouges) obtenus pour $\delta J = 1$ avec $\aleph = 1$.

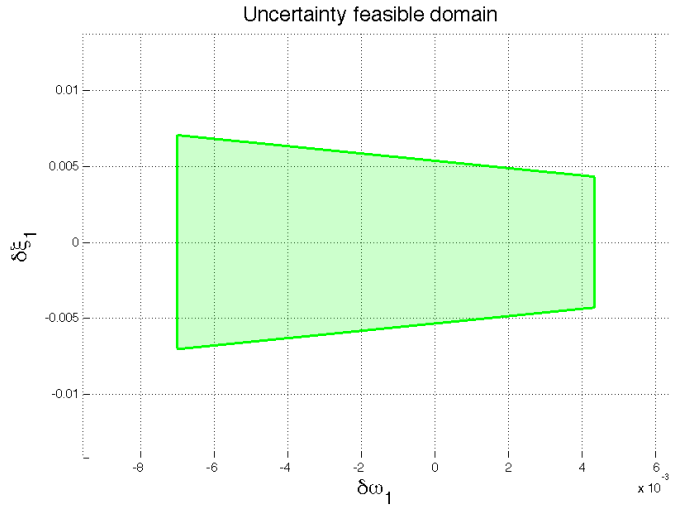


FIGURE 5.4 – Domaine d'incertitudes garanti pour être stable (vert) et valeurs instables (points rouges) obtenus pour $\delta J = 0$ avec $\aleph = 0$.

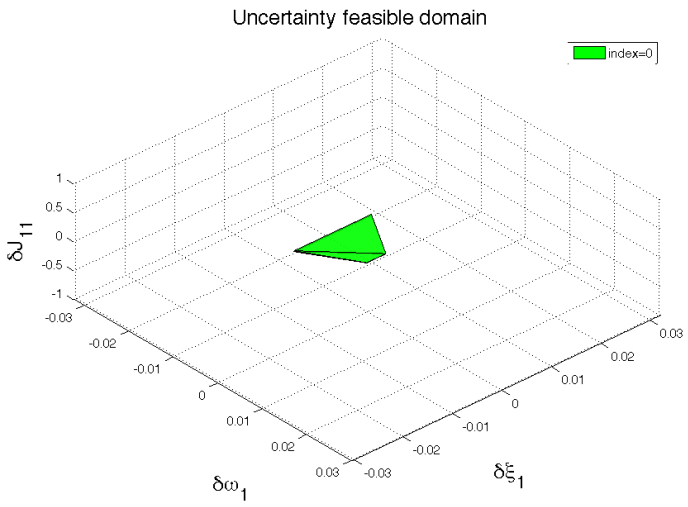


FIGURE 5.5 – Domaine 3D d'incertitudes garanti pour être stable obtenu avec $\aleph = 0$.

Le même type de résultat se retrouve dans le cas à trois dimensions où les trois paramètres incertains sont considérés simultanément. Quand on ne réalise pas d'augmentation, $\aleph = 0$, le plus grand domaine qui a pu être obtenu est représenté sur la Figure 5.5. A noter qu'il s'agit là encore d'un zoom avec un facteur 10^{-2} sur chaque axe.

Dès la première augmentation $\aleph = 1$ le domaine obtenu est augmenté très significativement, voir Figure 5.6. Contrairement au cas précédent ces conditions LMI se révèlent pessimistes. A la droite, en-dessous et au-dessus du polyèdre (et aussi un peu à gauche) se trouve une grande région pour laquelle le système est stable mais les LMI sont infaisables si on inclut ne serait-ce qu'une partie de cette région dans celle en bleu.

Pour obtenir des conditions moins pessimistes, on procède à l'augmentation suivante, $\aleph = 2$. La région faisable obtenue est donnée sur la Figure 5.7. L'amélioration est flagrante, même si la condition se révèle encore un peu pessimiste (voir le coin proche de $\delta J = 1$, $\delta\zeta = -1$ et $\delta\omega = 1$ qui n'atteint pas cette valeur faisable). A l'ordre suivant $\aleph = 3$, Figure 5.8, le polyèdre obtenu est légèrement plus grand encore et touche cette fois-ci dans tous ses coins, soit une limite du domaine d'analyse, soit la région pour laquelle le système est instable.

Bien évidement la réduction du pessimisme s'accompagne d'une augmentation de l'effort de calcul à produire. Le tableau 5.1 résume la complexité numérique induite par ces tests. A mesure que l'on procède à des augmentations, le nombre de variables et la taille des LMI grandit par un facteur de deux à trois. Comme le temps de résolution des LMI est polynomial en la taille du problème, le temps de calcul augmente par un facteur dix. A ce stade il faut préciser que pour optimiser les polyèdres on procède par résolution itératives de nombreuses LMI (les coins des polyèdres sont optimisés par bisection). Le nombre d'itérations est d'autant plus grand que les conditions LMI sont pessimistes. Ainsi entre $\aleph = 1$ et $\aleph = 2$ le temps global de calcul est quasiment identique pour un résultat bien meilleur quand $\aleph = 2$.

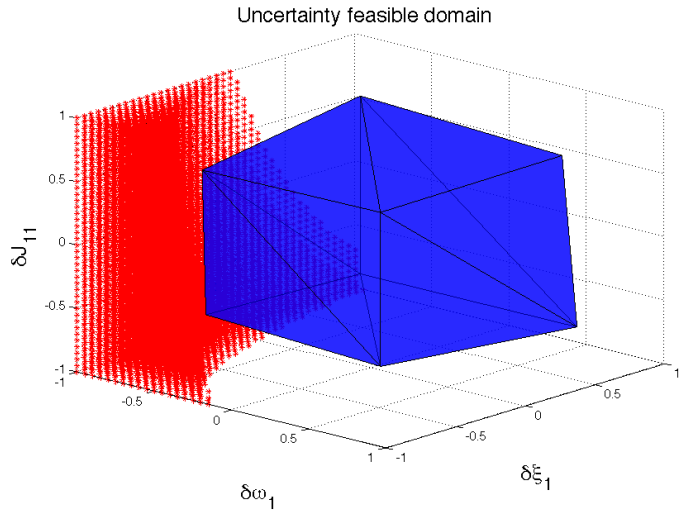


FIGURE 5.6 – Domaine 3D d'incertitudes garanti pour être stable obtenu avec $\aleph = 1$ et valeurs instables (points rouges).

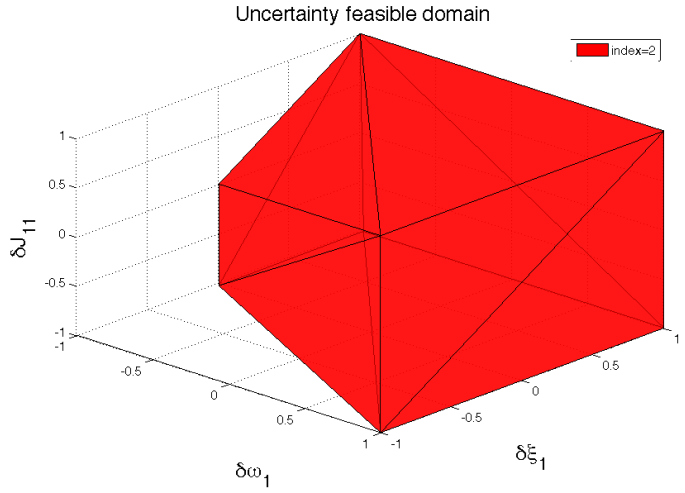


FIGURE 5.7 – Domaine 3D d'incertitudes garanti pour être stable obtenu avec $\aleph = 2$.

TABLE 5.1 – Numerical complexity and size of LMI

$\aleph$	nb vars	dim LMI	résoudre une LMI	trouver le polyèdre
0	216	949×949	0.3s	113s
1	646	2754×2754	3s	746s
2	1614	6185×6185	25s	793s
3	3024	11050×11050	204s	3859s

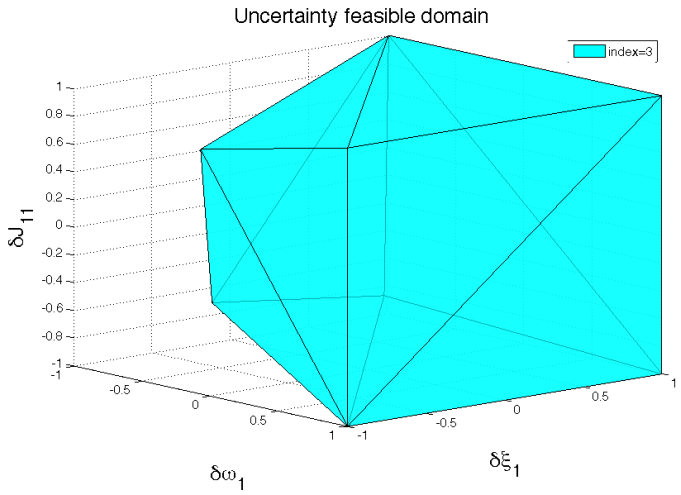


FIGURE 5.8 – Domaine 3D d'incertitudes garanti pour être stable obtenu avec $\aleph = 3$.

5.2 Gain L_2 des systèmes avec zone morte

5.2.1 Exposé du problème

Nous allons présenter les résultats de cette section en se concentrant sur un exemple de problème avec zone-morte particulier. Le souhait est d'être illustratif, la même méthodologie pouvant se décliner dans bien d'autres cas. L'exemple considéré est un problème d'analyse de performance norme-à-norme pour un système avec une non-linéarité scalaire de type zone morte et un paramètre incertain scalaire. On suppose que le problème est sous forme LFT comme suit (on se limite à un cas sans caractère descripteur pour plus de clarté) :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}\ \{\updownarrow n\} \\ z_1\ \{\updownarrow 1\} \\ z_2\ \{\updownarrow m_2\} \\ g\ \{\updownarrow p_g\} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & B_v \\ C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{1v} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{2v} \\ C_g & D_{g1} & D_{g2} & D_{gv} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x\ \{\updownarrow n\} \\ w_1\ \{\updownarrow 1\} \\ w_2\ \{\updownarrow m_2\} \\ v\ \{\updownarrow m_v\} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Les opérateurs entre les signaux w et z sont tels que

$$w_1 = \mathrm{dz}(z_1) \quad , \quad \begin{cases} w_2 = \delta_2 z_2 \\ \delta_2 \in [-1\ \ 1] \end{cases}$$

où la fonction non-linéaire zone-morte (dz) est celle définie par (1.10). L'objectif est de minimiser la performance norme-à-norme du transfert v à g (on ne parle pas de performance H_∞ car nous sommes en présence d'un système non linéaire).

Le système est ici sous forme LFT. Pour le formuler explicitement en fonction de δ_2 et des non-linéarités du système, on pose les matrices rationnelles en δ_2 suivantes (la matrice $\mathbf{1} - \delta_2 D_{22}$

est supposée non-singulière pour tout $\delta_2 \in [-1\ \ 1]$) :

$$\begin{bmatrix} A(\delta_2) & B_1(\delta_2) & B_v(\delta_2) \\ C_1(\delta_2) & D_{11}(\delta_2) & D_{1v}(\delta_2) \\ C_g(\delta_2) & D_{g1}(\delta_2) & D_{gv}(\delta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_v \\ C_1 & D_{11} & D_{1v} \\ C_g & D_{g1} & D_{gv} \end{bmatrix} + \delta_2 \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ D_{g2} \end{bmatrix} (\mathbf{1} - \delta_2 D_{22})^{-1} \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} & D_{2v} \end{bmatrix}$$

et on suppose $1 - D_{11} > 0$ (sinon la boucle algébrique impliquant la zone morte n'est pas définie). Avec ces notations le système non-linéaire incertain représenté par la LFT s'exprime aussi comme suit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(\delta_2) & (1 - D_{11}(\delta_2))^{-1} B_1(\delta_2) & B_v(\delta_2) \\ C_g(\delta_2) & (1 - D_{11}(\delta_2))^{-1} D_{g1}(\delta_2) & D_{gv}(\delta_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mathrm{dz}\,(C_1(\delta_2)x + D_{1v}(\delta_2)v) \\ v \end{pmatrix}.$$

En appliquant le cadre de travail IQS, le problème de performance norme-à-norme avec un opérateur zone morte et une incertitude scalaire sera résolu si le bien-posé est démontré pour la boucle constituée de $z = \mathcal{A}w$ et de l'opérateur

$$\nabla = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \mathcal{I} & \nabla_{[0\ 1]} & \delta_2 \mathbf{1}_{m_2} & \nabla_{n2n} \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{I}$ l'opérateur intégration avec conditions initiales nulles, $\nabla_{[0\ 1]}$ une incertitude scalaire comprise dans $[0\,1]$ c'est-à-dire $\{0, \mathrm{j}, 0\}$-structurée, $\{0, -1, 2\}$-dissipative, δ_2 est $\{0, j, 0\}$-structurée, $\{-1, 0, 1\}$-dissipative et ∇_{n2n} peut être vu comme une incertitude $\{-1, \mathbf{0}, \gamma^2 1\}$-dissipative (au sens où ils partagent les mêmes IQS-candidates). Le Théorème 7 avec les IQS-candidates réelles associées aux opérateurs incertains donne les conditions du corollaire suivant.

Corollaire 21 *La performance norme-à-norme du système incertain avec zone morte ci-dessus est garantie d'être inférieure à γ s'il existe une solution aux LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -p_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -R_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -p_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2p_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \qquad (5.13)$$

où les variables de décision sont : $P_{\mathcal{I}} > \mathbf{0}$ carrée symétrique avec n lignes ; $p_1 > 0$ scalaire ; $P_2 > \mathbf{0}$ et $R_2 = -R_2^T$ carrées avec m_2 lignes.

On notera que le scalaire τ qui apparaît dans les IQS-candidates vis-à-vis de ∇_{n2n} est fixé à 1 de manière à permettre l'optimisation selon γ^2.

Le résultat ainsi formulé est clairement pessimiste. Ce pessimisme vient d'une part de la description des IQS-candidates qui, on l'a vu, ne couvre qu'un sous-ensemble de toutes les IQS-candidates. D'autre part, dans la démarche adoptée, la zone morte a été remplacée par un opérateur incertain quelconque borné entre 0 et 1, ce qui est une description fortement simpliste. Finalement, l'incertitude δ_2 est elle aussi décrite de façon pessimiste car à aucun moment on n'a intégré d'information sur ses dynamiques. Que ce paramètre soit constant ou bien à variations très rapides on peut pourtant s'attendre à des performances différentes.

5.2.2 Informations sur la dérivée des opérateurs incertains

De façon à répondre aux questions de pessimisme, l'idée que nous suivons est d'ajouter dans la boucle de bien-posé les équations concernant les dérivées de z_1 et z_2 :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= C_1\dot{x} + D_{11}\dot{w}_1 + D_{12}\dot{w}_2 + D_{1v}\dot{v}\\ \dot{z}_2 &= C_2\dot{x} + D_{21}\dot{w}_1 + D_{22}\dot{w}_2 + D_{2v}\dot{v}.\end{aligned}$$

Malheureusement, ces signaux ne sont pas définis car $\dot{v}$ est totalement libre. Aussi nous procédons différemment. Dans un premier temps, en remarquant que δ_2 est un opérateur linéaire, nous réécrivons le bouclage LFT avec les variables additionnelles suivantes

$$w_2 = w_{21} + w_{22}\ ,\quad \begin{aligned}w_{21} &= \delta_2 z_{21}\\ w_{22} &= \delta_2 z_{22}\end{aligned}\quad ,\quad \begin{aligned}z_{21} &= C_2 x + D_{21}w_1 + D_{22}w_{21}\\ z_{22} &= D_{22}w_{22} + D_{2v}v.\end{aligned}$$

Il devient alors possible de réaliser le calcul de la dérivée de z_{21} ce qui conduit à

$$\dot{z}_{21} = C_2\dot{x} + D_{21}\dot{w}_1 + D_{22}\dot{w}_{21}.$$

Nous allons utiliser ce signal pour tenir compte dans les données du problème, du fait que le scalaire incertain δ_2 est borné en vitesse : $\dot{\delta}_2 \in [\underline{\delta}_{2,1}\ \ \overline{\delta}_{2,1}]$. Dans ce cas on a

$$\dot{w}_{21} = \delta_2\dot{z}_{21} + \dot{\delta}_2 z_{21}$$

qui est exploitable dans les équations.

La tendance serait d'appliquer la même procédure avec la zone-morte, à la différence que dans ce cas : $\mathrm{dz}(z_{11} + z_{12}) \neq \mathrm{dz}(z_{11}) + \mathrm{dz}(z_{12})$. Il est dès lors impossible de procéder à la séparation en deux termes de la contribution de l'état et de la perturbation v dans le signal entrant de la zone morte. Aussi, il n'est possible de tenir compte de la dérivée selon cet opérateur que dans le cas où $D_{12} = \mathbf{0}$ et $D_{1v} = \mathbf{0}$. Cela revient à supposer que les perturbations n'entrent pas directement dans la zone morte, et ce pour tout incertitude ($D_{1v}(\delta_2) = \mathbf{0}$). Nous supposons que c'est le cas.

Cette hypothèse faite, il convient de considérer l'opérateur entre $\dot{z}_1$ et $\dot{w}_1$. Cette analyse est menée en page 29 où l'on définit $\dot{w}_1 = \dot{\mathrm{dz}}(\dot{z}_1, z_1)$ qui est une fonction incluse dans l'opérateur

$$\dot{w}_1 = \nabla_{\{0,1\}}\dot{z}_1\ \ ,\ \ \nabla_{\{0,1\}}(t) \in \{\ 0\ ,\ 1\ \}.$$

$$
\overbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccccccc}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-C_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right]}^{\varepsilon}
\left(\begin{array}{c}
\dot{x} \\ \dot{w}_1 \\ \dot{w}_{21} \\ \hline \dot{z}_1 \\ z_1 \\ \dot{z}_{21} \\ z_{21} \\ z_{22} \\ g
\end{array}\right)
$$

$$
= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccccccc}
A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_2 & B_2 & B_v \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{21} & \mathbf{0} & D_{22} & D_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
C_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{22} & D_{2v} \\
C_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{g1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{g2} & D_{g2} & D_{gv} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right]}_{\mathcal{A}}
\left(\begin{array}{c}
x \\ w_1 \\ w_{21} \\ \hline \dot{w}_1 \\ w_1 \\ \dot{\delta}_2 z_{21} \\ \delta_2 \dot{z}_{21} \\ w_{21} \\ w_{22} \\ v
\end{array}\right)
\tag{5.14}
$$

Toute matrice $\Theta_{\{0,1\}}$ telle que

$$
\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right] \Theta_{\{0,1\}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] \leq 0 \ , \ \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \Theta_{\{0,1\}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] \leq 0.
$$

est trivialement IQS-candidate pour cet opérateur.

A ce stade les équations décrivant le système et les dérivées des signaux considérés sont données par (5.14) où l'on a volontairement ajouté quatre équations redondantes concernant les signaux $\dot{w}_1$ et $\dot{w}_{21}$ de façon à inclure l'information selon laquelle ces signaux sont des dérivées :

$$
\left(\begin{array}{c} x \\ w_1 \\ w_{21} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathcal{I}\dot{x} \\ \mathcal{I}\dot{w}_1 \\ \mathcal{I}\dot{w}_{21} \end{array}\right) = \mathcal{I} \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{w}_1 \\ \dot{w}_{21} \end{array}\right).
$$

Les signaux $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_{21}$ sont quant à eux des combinaisons linéaires des signaux impliqués dans l'opérateur intégration ci-dessus. Aussi, il serait redondant d'écrire que leur intégrales sont respectivement z_1 et z_{21}. C'est pourquoi cette information n'est pas intégrée aux équations.

Ainsi, le problème de performance norme-à-norme robuste, intégrant les informations disponibles sur les dérivées des signaux w_1 et w_{21}, est inclus dans un problème de bien-posé de

boucle entre l'application linéaire implicite (5.15) et l'opérateur suivant

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{\{0,1\}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{[0\ 1]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\delta}_2\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_2\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_2\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_2\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{n2n} \end{bmatrix}$$

Il s'exprime sous la forme suivante

$$\nabla = J_{\mathcal{I}}\mathcal{I}K_{\mathcal{I}} + J_{1,1}\nabla_{\{0,1\}}K_{1,1} + J_1\nabla_{[0\ 1]}K_1 + J_{2,1}(\dot{\delta}_2\mathbf{1}_{m_2})K_{2,1} + J_2(\delta_2\mathbf{1}_{3m_2})K_2 + J_{n2n}\nabla_{n2n}K_{n2n}$$

avec les matrices J_j qui sont bien orthonormales comme exigé dans (3.14). On remarque que la matrice $\mathcal{E}$ est de rang plein en colonne. Donc on peut prendre $\mathcal{E}_2 = \mathbf{1}$ et pour chaque opérateur on trouve $F_{1j} = K_j$ et $F_{2j} = \mathbf{1}$. Le résultat IQS du Théorème 7 s'applique et donne le corollaire suivant.

Corollaire 22 *Dans le cas où l'incertitude est bornée en vitesse $\dot{\delta}_2 \in [\underline{\delta}_{2,1}\ \overline{\delta}_{2,1}]$ et que $\begin{bmatrix} D_{12} & D_{1v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, la performance norme-à-norme du système incertain avec zone morte défini par (5.12) est garantie d'être inférieure à γ s'il existe une solution aux LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp T} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{bmatrix}^{\perp} > \mathbf{0} \tag{5.15}$$

où les matrices $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ sont données par (5.14) et avec les IQS-candidates

$$\begin{aligned} \Theta = &\begin{bmatrix} K_{\mathcal{I}}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\mathcal{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P_{\mathcal{I},1} \\ -P_{\mathcal{I},1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\mathcal{I}}^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_{1,1}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{1,1} \end{bmatrix} \Theta_{\{0,1\}} \begin{bmatrix} K_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{1,1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -p_1 \\ -p_1 & 2p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_1^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_{2,1}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\underline{\delta}_{2,1}\overline{\delta}_{2,1}P_{2,1} & -R_{2,1} - (\underline{\delta}_{2,1} + \overline{\delta}_{2,1})P_{2,1} \\ R_{2,1} - (\underline{\delta}_{2,1} + \overline{\delta}_{2,1})P_{2,1} & 2P_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{2,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{2,1}^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_2^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_{2,0} & -R_{2,0} \\ R_{2,0} & P_{2,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_{n2n}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{n2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{n2n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{n2n}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.16}$$

paramétrées par les variables de décision suivantes : $P_{\mathcal{I},1} > \mathbf{0}$ carrée avec $n + 1 + m_2$ lignes ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Theta_{\{0,1\}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0\ ,\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Theta_{\{0,1\}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0$$

où $\Theta_{\{0,1\}}$ est carrée avec 2 lignes ; $p_1 > 0$ est scalaire ; $P_{2,1} > \mathbf{0}$ et $R_{2,1} = -R_{2,1}^T$ sont carrées avec m_2 lignes ; $P_{2,0} > \mathbf{0}$ et $R_{2,0} = -R_{2,0}^T$ sont carrées avec $3m_2$ lignes.

Le fait d'avoir appliqué le résultat IQS sur le système augmenté des dérivées premières de z_1 et z_2 conduit à des conditions LMI de taille plus grande. Potentiellement, ces conditions sont moins pessimistes car elles incorporent des informations sur les dérivées des opérateurs. De plus, par des manipulations assez triviales, il est simple de voir que si (5.13) est satisfaite, alors (5.15) le sera aussi pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit et

$$P_{\mathcal{I},1} = \text{diag}\begin{pmatrix} P_{\mathcal{I}} \\ \epsilon \\ \epsilon\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \Theta_{\{0,1\}} = \mathbf{0}, \quad P_{2,1} = \epsilon\mathbf{1}, \quad R_{2,1} = \mathbf{0}, \quad P_{2,0} = \text{diag}\begin{pmatrix} \epsilon\mathbf{1} \\ P_2 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, l'exemple qui suit montre que la réduction du pessimisme est réelle.

Avant cela, remarquons la chose suivante : le résultat IQS est nécessairement en lien avec une fonction de Lyapunov. Cette fonction de Lyapunov est paramétrée par la partie du séparateur qui réalise la séparation quadratique vis-à-vis de l'intégrateur (c'est-à-dire vis-à-vis du caractère dynamique du système). De façon compacte cette fonction de Lyapunov s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ w_1 \\ w_{21} \end{pmatrix}^T P_{\mathcal{I},1} \begin{pmatrix} x \\ w_1 \\ w_{21} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

et la condition (5.15) démontre que sa dérivée est négative le long des trajectoires décrites par (5.14) et connaissant les propriétés des différents opérateurs impliqués. Pour connaître la formule exacte de la fonction de Lyapunov en tant que fonction de l'état x, de la fonction zone-morte et de δ_2, il convient de faire le calcul de la formule explicite de la forme rationnelle issue de la LFT (5.12). Ce calcul donne [1]

$$\begin{aligned} w_1 &= (1 - D_{11})^{-1}\text{dz}\left(C_1 x\right), \\ w_{21} &= \delta_2(\mathbf{1} - \delta_2 D_{22})^{-1}\left(C_2 x + D_{21} w_1\right). \end{aligned}$$

La formule exacte de la fonction de Lyapunov qui en découle est, avouons-le, non triviale. On ne l'aurait probablement pas adoptée d'emblée.

5.2.3 Exemple numérique

Nous allons maintenant tester les résultats des Corollaires 21 et 22 sur un exemple académique. Il s'agit d'un modèle du second ordre de pulsation propre $\omega_n = 1$ et d'amortissement $0.5+0.3\delta_2$ inconnu borné ($\delta_2 \in [-1\ 1]$) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2(0.5 + 0.3\delta_2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

On suppose ce système commandé par un retour d'état saturé (la saturation est égale à l'opérateur identité moins une zone morte)

$$u = Kx - \text{dz}(Kx)\ ,\ K = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix}$$

1. Le calcul se fait en fonction du signe de w_1. Si $w_1 = 0$ c'est que $z_1 = C_1 x$ et que $|C_1 x| \leq 1$, la formule est valide. Si $w_1 > 0$ c'est que $w_1 = C_1 x + D_{11} w_1 - 1$, donc $w_1 = (1 - D_{11})^{-1}(C_1 x - 1)$ ce qui correspond bien à la formule quand $C_1 x > 1$. Idem pour le cas où $w_1 < 0$.

dans lequel le gain de retour d'état est choisi pour placer les pôles du système sans incertitudes ($\delta_2 = 0$) en -2. On s'intéresse à la performance norme-à-norme de ce système pour une perturbation en entrée du système v et en mesurant son influence sur la première composante de l'état (si le système était linéaire on parlerait de norme H_∞). Le système bouclé par la zone morte et l'incertitude s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ g \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -1 & -0.6 & 1 \\ \hline -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w_1 = \mathrm{dz}(z_1) \\ w_2 = \delta_2 z_2 \\ v \end{pmatrix}.$$

Les résultats des corollaires pour ce système sont donnés dans le Tableau 5.2. Pour comparaison on a également appliqué le Corrolaire 21 en retirant la zone-morte. Une borne garantie sur la performance norme-à-norme (performance H_∞ vu que le système est linéaire dans ce cas) est alors de 0.2941. Il se trouve que cette norme H_∞ est atteinte pour $\delta_2 = -1$. La valeur obtenue par le Corollaire 21 est donc sans pessimisme. Pour le système linéaire, il est donc inutile de rechercher des résultats moins pessimistes en utilisant des informations sur la dérivée du paramètre incertain.

Par contre, sur le système non-linéaire, l'information sur la dérivée de δ_2 conduit à des résultats moins pessimistes. Le Corollaire 22 produit des bornes supérieures sur la performance norme-à-norme plus faibles que la borne obtenue avec le Corollaire Corollaire 21. Plus la norme de la dérivée de l'incertitude est supposée faible, meilleure est la performance garantie. La réduction du pessimisme est liée à l'emploi d'une fonction de Lyapunov dépendant de la zone morte comme décrit en (5.17). Un tracé de cette fonction pour les états proches de zéro est donné dans la figure 5.9. On y observe nettement le changement de courbure quadratique quand l'état entre ou sort de la zone morte. Les équipotentielles de Lyapunov obtenues ne sont pas des ellipses mais elliptiques par morceaux.

Borne sur $\lvert\dot{\delta}_2\rvert$	∞	10	1	0.1	0.01	nb.var
Corollaire 21	12.0494					6
Corollaire 21 sans dz	0.2941					5
Corollaire 22		12.0486	11.0102	10.5342	10.4904	25

TABLE 5.2 – Performances norme-à-norme garanties

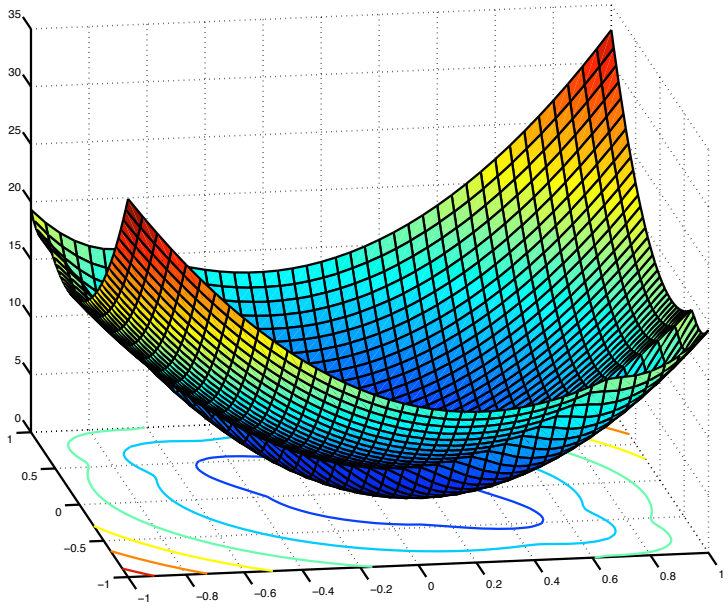


FIGURE 5.9 – Potentiel de Lyapunov $V(x)$ pour la fonction de Lyapunov (5.17) calculée pour $|\dot{\delta}_2| \leq 10$ et tracée pour $\delta_2 = 0$

5.3 Régions d'attraction des systèmes avec saturation

La présente section reprend les premiers résultats visant à résoudre des questions de stabilité locale de systèmes non-linéaires dans le cadre IQS. Ces résultats ont été publiés dans [195] et sont présentés sous l'angle d'une application : le contrôle d'attitude d'un lanceur dans sa phase balistique. Le problème à résoudre est de trouver des régions de conditions initiales pour lesquelles la convergence à l'origine du système est garantie en présence de saturations sur les actionneurs. Concrètement pour le lanceur, cela revient à étudier les conditions initiales créées à la séparation d'un étage du lanceur.

Estimer des régions d'attraction est un problème très étudié et essentiel pour les systèmes non-linéaires. Pour autant il n'est pas entièrement résolu. Même pour un système linéaire soumis à de simples saturations sur la commande, la caractérisation exacte des régions d'attraction de l'origine est une question difficile [206, 205, 121]. La région d'attraction peut être non-convexe, ouverte et non bornée. Une approximation peut éventuellement être obtenue par des campagnes de simulations intensives, mais sa visualisation est quasiment impossible pour des systèmes avec plus de 3 états. Il est dès lors utile de trouver des approximations des régions d'attractions décrites par des formules analytiques telles que des polytopes, des ellipsoïdes ou des régions décrites par des contraintes semi-algébriques. De nombreux résultats dans ce sens ont été développés dans le formalisme de Lyapunov, les régions étant décrites par des courbes de niveau de fonctions de Lyapunov quadratiques, polytopiques, quadratiques par morceaux, etc. [34, 114, 102, 119, 1, 78, 227] ou plus récemment par une approche duale par le problème généralisé des moments [97]. Ces travaux nombreux et très poussés pourraient cependant être améliorés en termes de prise en compte de la robustesse et de performance avec les outils très génériques de l'approche IQC ou IQS. Malheureusement les quelques résultats dans le forma-

lisme IQC qui traitent de saturation le font en s'intéressant à la stabilité globale [140, 139, 247]. A l'exception de [64, 138] on ne trouve pas de résultat pour la stabilité locale dans ce contexte. Même si le mode de pensée des auteurs de [221] est celui des IQC, c'est à la Lyapunov que les résultats sont exposés. Ce qui suit est une réponse à l'analyse par les IQS de la stabilité locale de systèmes avec saturations. Elle est formalisée en utilisant explicitement les conditions initiales et finales d'une trajectoire, de la même façon que cela a été fait pour les performances impulsion-à-pic dans le Chapitre 4.

5.3.1 Satellite un axe avec saturation

Soit le problème de commande d'attitude d'un axe d'un objet dans l'espace (satellite ou lanceur en phase balistique). En première approximation l'objet est décrit par un double intégrateur $I\ddot{\theta} = T$. La commande (roues à inerties, tuyères, autres) est en première approximation un couple T réalisable à une saturation près $T = u - \overline{T}\mathrm{dz}(\frac{1}{\overline{T}}u)$, où $\overline{T}$ est le niveau de la saturation. En négligeant les questions d'estimation des vitesses et les dynamiques des capteurs, la loi de commande est du type retour d'état (proportionnel-dérivée) : $u = -K_P\theta - K_D\dot{\theta}$. Dans le cadre d'une étude avec ASTRIUM-ST et l'ESA sur des modèles de lanceur, les données numériques sont $I = 20\,000$, $K_P = 1\,800$, $K_D = 14\,400$ et $\bar{T} = 240$. Cela conduit au modèle numérique suivant :

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ z_1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -0.09 & -0.72 & 0.012 \\ \hline 7.5 & 60 & 0 \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x \\ w_1 \end{array}\right)$$

où $w_1 = \mathrm{dz}(z_1)$.

Contrairement à l'exemple de la section précédente où le système en boucle ouverte était stable, le double intégrateur est cette fois-ci instable. De ce fait on sait que le système commandé ne peut être globalement asymptotiquement stable. La question est de déterminer des domaines de conditions initiales pour lesquelles les trajectoires convergent vers le point d'équilibre. C'est un problème d'invariance de domaines dans l'espace d'état. Il peut donc être abordé par la performance impulsion-à-pic.

La raison pour laquelle le système en boucle fermée ne peut être stable pour toute condition initiale est que si on remplace la zone morte par un gain unitaire (ce qui est le cas asymptotiquement quand z_1 est proche de l'infini), la boucle fermée est instable. On ne peut donc prouver la stabilité comme précédemment en englobant la zone morte par un opérateur de gain entre 0 et 1. Il faut tenir compte du fait que le gain équivalent à la zone morte est strictement inférieur à 1 quand z_1 est proche de zéro. Plus précisément, pour tout $|z_1| \leq \bar{z}_1$ la zone morte est telle que $0 \leq \frac{w_1}{z_1} \leq \frac{\bar{z}_1 - 1}{\bar{z}_1}$. Pour utiliser cette information, il convient de démontrer que z_1 reste dans $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ au cours du temps. La démarche que nous adoptons est de considérer des conditions initiales sur l'état (équivalentes à une entrée impulsionnelle) telles que $|z_1(0)| < \bar{z}_1$, de supposer que tant que $t < \theta$ on a toujours $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ (donc que la zone morte est de gain borné dans $[0 \ \ \frac{\bar{z}_1 - 1}{\bar{z}_1}]$) et de démonter que sous ces conditions $|z_1(\theta)| < \bar{z}_1$. Si cette inégalité est vraie pour tout θ, la propriété est démontrée.

5.3.2 Performance impulsion-à-pic pour l'analyse d'ensembles invariants

Soit le problème de performance impulsion-à-pic pour un système avec zone morte qui suit [2] :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_v \\ C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_1 \\ v \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

que l'on réécrit comme un problème de bien-posé en utilisant la méthodologie décrite dans le chapitre précédent. La boucle dont on analyse le bien-posé est composée de l'application linéaire

$$\left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \hline \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ \hline \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \varphi_\theta g \end{array}\right) = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_v \\ \hline A & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \hline C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}_\theta x \\ \hline \varphi_\theta x \\ \hline \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \varphi_0 \alpha \end{array}\right) \tag{5.19}$$

bouclée avec l'opérateur

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{T}_\theta x \\ \hline \varphi_\theta x \\ \hline \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \varphi_0 \alpha \end{array}\right) = \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathrm{dz} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{n2n} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \varphi_0 x \\ \hline \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ \hline \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \varphi_\theta g \end{array}\right).$$

L'objectif est de donner des conditions montrant que $|z_1(\theta)| < \bar{z}_1$ sous les hypothèses que
— les conditions initiales sont bornées dans un ellipsoïde $x^T(0)Q_0x(0) \leq 1$,
— le signal z_1 est borné $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ pour tout $t \leq \theta$.
Si cette propriété est indépendante de θ on prouvera alors que toutes les trajectoires du système initiées dans l'ellipsoïde de conditions initiales vérifient $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ pour tout t.

En suivant le raisonnement fait dans la sous-section 4.1.4 l'hypothèse sur les conditions initiales revient à considérer la performance impulsion-à-pic avec $B_v = Q_0^{-1/2}$. Ou bien, de façon équivalente, de prendre $B_v = \mathbf{1}$ et de remplacer l'opérateur ∇_{n2n} par l'opérateur suivant : $Q_0^{-1/2}\varphi_0\alpha = [Q_0^{-1/2}\nabla_{n2n}]\varphi_\theta g$.

L'objectif $|z_1(\theta)| < \bar{z}_1$ s'écrit également $\|\varphi_\theta z_1\| < \bar{z}_1$. Dans le cadre de la performance impulsion-à-pic cela revient à prendre $g = z_1$ ($C_g = C_1$) et $\gamma = \bar{z}_1$. Les IQS-candidates pour l'opérateur $Q_0^{-1/2}\varphi_0\alpha = [Q_0^{-1/2}\nabla_{n2n}]\varphi_\theta g$ sont comme suit :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \varphi_\theta g \\ Q_0^{-1/2}\varphi_0\alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{z}_1^2 Q_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\theta g \\ Q_0^{-1/2}\varphi_0\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = -z_1^2(\theta) + \bar{z}_1^2\alpha^T\alpha \leq -z_1^2(\theta) + \bar{z}_1 \leq 0.$$

L'hypothèse $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ pour tout $t \leq \theta$ implique $|\mathcal{T}_\theta z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ et donc que $\nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]}$ est un opérateur de gain borné entre 0 et $\frac{\bar{z}_1-1}{\bar{z}_1}$. L'hypothèse sur $\nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]}$ fait que les IQS-

2. On suppose ici D_{11} et D_{g1} nulles pour simplifier les conditions. Les résultats peuvent être obtenus dans un cas plus général sans trop de difficultés.

candidates pour ce bloc sont comme suit :

$$\begin{array}{l} p_1 > 0 \\ \mathcal{T}_\theta w_1 = \nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]} \mathcal{T}_\theta z_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \mathcal{T}_\theta w_1 \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} p_1 \\ \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} p_1 & 2p_1 \end{bmatrix}}_{\Theta_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \mathcal{T}_\theta w_1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0$$

Ainsi nous avons reformulé la propriété que toutes les trajectoires du système initiées dans l'ellipsoïde $x^T(0)Q_0x \leq 1$ vérifient $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ pour tout t, comme un problème de bien-posé de la boucle composée de l'application linéaire

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \hline \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ \hline \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \hline \varphi_\theta g \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ A & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ \hline C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta x \\ \hline \varphi_\theta x \\ \hline \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \hline Q_0^{-1/2} \varphi_0 \alpha \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

et de l'opérateur suivant

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta x \\ \hline \varphi_\theta x \\ \hline \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \hline Q_0^{-1/2} \varphi_0 \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_0^{-1/2} \nabla_{n2n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 x \\ \hline \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ \hline \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \hline \varphi_\theta g \end{pmatrix}.$$

Le résultat IQS du Théorème 7 s'applique et donne le corollaire suivant.

Corollaire 23 *Pour toute condition initiale telle que $x^T(0)Q_0x(0) \leq 1$ les dynamiques du système*

$$\dot{x} = Ax + B_1 \mathrm{dz}(C_1 x) \tag{5.21}$$

sont telles que $|C_1x(t)| \leq \bar{z}_1$ pour tout $t \geq 0$ s'il existe une solution aux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{5.22}$$

où la matrice $\mathcal{A}$ est donnée par (5.20) et avec les IQS-candidates

$$\Theta = \left[\begin{array}{cccc||cccc} -P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & p_1 \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline\hline \mathbf{0} & -P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & p_1 \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2p_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{z}_1^2 Q_0 \end{array}\right] \tag{5.23}$$

paramétrées par les variables de décision suivantes : $P_{\mathcal{I}}$ carrée avec n lignes ; $p_1 > 0$ scalaire.

En développant la formule (5.22) pour Θ donné par (5.23) on trouve les conditions suivantes

$$\left[\begin{array}{cc} A^TP + PA & PB_1 + p_1\frac{\bar{z}_1-1}{\bar{z}_1}C_1^T \\ B_1^TP + p_1\frac{\bar{z}_1-1}{\bar{z}_1}C_1 & -2p_1 \end{array} \right] < \mathbf{0} \ , \ C_1^TC_1 < P \ , \ P < \bar{z}_1^2 Q_0. \tag{5.24}$$

Ou encore, en posant $\tilde{P} = \bar{z}_1^{-2}P$ et $\tilde{p}_1 = \bar{z}_1^{-2}p_1$:

$$\left[\begin{array}{cc} A^T\tilde{P} + \tilde{P}A & \tilde{P}B_1 + \tilde{p}_1\frac{\bar{z}_1-1}{\bar{z}_1}C_1^T \\ B_1^T\tilde{P} + \tilde{p}_1\frac{\bar{z}_1-1}{\bar{z}_1}C_1 & -2\tilde{p}_1 \end{array} \right] < \mathbf{0} \ , \ C_1^TC_1 < \bar{z}_1^2\tilde{P} \ , \ \tilde{P} < Q_0. \tag{5.25}$$

Ces conditions sont identiques aux conditions classiques proposées dans [199, 100, 155]. Comme énoncé plusieurs fois dans ce document, $\tilde{P}$ définit une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T\tilde{P}x$. La condition $\tilde{P} < Q_0$ indique que les conditions initiales $x^T(0)Q_0x(0) \leq 1$ sont telles que l'état initial est dans l'intérieur de l'équipotentielle $V(x) = 1$. La première LMI de (5.25) montre quant à elle que l'équipotentielle est contractante. Une des raisons du pessimisme de ce résultat est qu'il donne des domaines de conditions initiales (relatifs à des équipotentielles de Lyapunov) du type ellipsoïdaux. Comme on l'a vu dans la section précédente concernant la stabilité globale en présence d'une zone-morte, ce pessimisme peut être réduit en introduisant des informations sur la dérivée du signal z_1. La réduction du pessimisme s'accompagne de fonctions de Lyapunov ellipsoïdales par morceaux.

5.3.3 Réduction du pessimisme avec les informations sur la dérivée

Comme dans la section précédente, la stratégie adoptée est d'ajouter aux équations décrivant le système, l'information sur la dérivée de z_1 :

$$\mathcal{T}_\theta\dot{z}_1 = C_1\mathcal{T}_\theta\dot{x} \ , \ \mathcal{T}_\theta\dot{w}_1 = \nabla_{\{0,1\}}\mathcal{T}_\theta\dot{z}_1 \ , \ \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \varphi_\theta w_1 \end{array} \right) = \mathcal{I}_F \left(\begin{array}{c} \varphi_0 w_1 \\ \mathcal{T}_\theta\dot{w}_1 \end{array} \right).$$

Ces équations font apparaître explicitement deux signaux $\varphi_0 w_1$ et $\varphi_\theta w_1$ qui n'intervenaient pas dans les équations jusqu'ici.

Le second de ces deux signaux impose d'ajouter aux équations la condition $\varphi_\theta w_1 = \varphi_\theta[\mathrm{dz}(z_1)]$. En remarquant que $\varphi_\theta[\mathrm{dz}(z_1)]$ ne dépend que de la valeur de z_1 à l'instant θ, on réécrit cette condition sous la forme $\varphi_\theta w_1 = \nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1],\theta}\varphi_\theta z_1$. En ayant fait l'hypothèse que $|z_1(t)| \leq \bar{z}_1$ pour tout $t \leq \theta$ il est aisé de constater que pour tout $p_2 > 0$ on a :

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \varphi_\theta z_1 \\ \varphi_\theta w_1 \end{array} \right) \middle| \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1}p_2 \\ \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1}p_2 & 2p_2 \end{array} \right]}_{\Theta_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1],\theta}} \left(\begin{array}{c} \varphi_\theta z_1 \\ \varphi_\theta w_1 \end{array} \right) \right\rangle \leq 0$$

Ce choix d'IQS-candidate pour $\nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1],\theta}$ est utilisé dans la suite.

Venons en maintenant au signal $\varphi_0 w_1$. Nous avons remarqué dans la section précédente que les fonctions de Lyapunov implicites relatives au système augmenté des informations sur la dérivée, sont quadratiques en x et w_1. Si les équipotentielles de Lyapunov sont fonction de ces

$$
\overbrace{\left[\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right]}^{\varepsilon}
\left(\begin{array}{c}
\varphi_0 x \\ \varphi_0 w_1 \\ \mathcal{T}_\theta \dot{x} \\ \mathcal{T}_\theta \dot{w}_1 \\ \hline \mathcal{T}_\theta z_1 \\ \hline \varphi_\theta z_1 \\ \hline \mathcal{T}_\theta \dot{z}_1 \\ \hline \varphi_\theta g
\end{array}\right)
$$

$$
= \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] \\
A & B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right]}_{\mathcal{A}}
\left(\begin{array}{c}
\mathcal{T}_\theta x \\ \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \varphi_\theta x \\ \varphi_\theta w_1 \\ \hline \mathcal{T}_\theta w_1 \\ \hline \varphi_\theta w_1 \\ \hline \mathcal{T}_\theta \dot{w}_1 \\ \hline Q_{0,1}\varphi_0 \alpha
\end{array}\right)
\tag{5.27}
$$

deux signaux, il devient possible de représenter les conditions initiales sous-cette même forme. Nous allons donc considérer des conditions initiales contraintes dans un domaine tel que

$$
\left(\begin{array}{cc} x^T(0) & w_1^T(0) \end{array}\right) Q_{0,1} \left(\begin{array}{c} x(0) \\ w_1(0) \end{array}\right) \leq 1 \ , \ \ w_1(0) = \mathrm{dz}(C_1 x(0)) \tag{5.26}
$$

où $Q_{0,1}$ est définie positive.

Le problème de performance impulsion-à-pic augmenté de l'information sur la dérivé, se formule donc comme le bien-posé de boucle impliquant l'application linéaire (5.27) bouclée avec l'opérateur incertain

$$
\nabla = \left[\begin{array}{ccccc}
\mathcal{I}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1],\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{\{0,1\}} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_{0,1}\nabla_{n2n}
\end{array}\right]
$$

Le résultat IQS du Théorème 7 s'applique et donne le corollaire suivant.

Corollaire 24 *Pour toute condition initiale telle que (5.26) les dynamiques du système (5.21) sont telles que* $|C_1 x(t)| \leq \bar{z}_1$ *pour tout* $t \geq 0$ *s'il existe une solution aux LMI suivantes*

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp T} \Theta \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} > \mathbf{0} \tag{5.28}$$

où les matrices $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{A}$ *sont données par (5.27) et avec les IQS-candidates*

$$\Theta = \left[\begin{array}{c||c} \begin{array}{c} \textit{diag} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} -P_{\mathcal{I},1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \theta_{1\{0,1\}} \\ -\mathbf{1} \end{array}\right] \end{array} & \begin{array}{c} \textit{diag} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -P_{\mathcal{I},1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \\ p_1 \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} \\ p_2 \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} \\ \theta_{2\{0,1\}} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array} \\ \hline\hline \begin{array}{c} \textit{diag} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -P_{\mathcal{I},1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \\ p_1 \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} \\ p_2 \frac{1-\bar{z}_1}{\bar{z}_1} \\ \theta_{2\{0,1\}} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array} & \begin{array}{c} \textit{diag} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{\mathcal{I},1} \end{array}\right] \\ 2p_1 \\ 2p_2 \\ \theta_{3\{0,1\}} \\ \bar{z}_1^2 Q_{0,1} \end{array}\right] \end{array} \end{array}\right] \tag{5.29}$$

paramétrées par les variables de décision suivantes : $P_{\mathcal{I},1}$ *carrée avec* $n+1$ *lignes ;* $p_1 > 0$*,* $p_2 > 0$ *et*

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \theta_{1\{0,1\}} & \theta_{2\{0,1\}} \\ \theta_{2\{0,1\}} & \theta_{3\{0,1\}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] \leq 0 \ , \ \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \theta_{1\{0,1\}} & \theta_{2\{0,1\}} \\ \theta_{2\{0,1\}} & \theta_{3\{0,1\}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] \leq 0.$$

Pour les besoins de la comparaison avec les résultats du Corollaire 23, nous développons la condition (5.28). En posant $P_{\mathcal{I},1} = \left[\begin{array}{cc} P_{\mathcal{I},11} & P_{\mathcal{I},12} \\ P_{\mathcal{I},12}^T & P_{\mathcal{I},13} \end{array}\right]$, et après quelques calculs, la condition (5.28) est exactement :

$$\left[\begin{array}{ccc} A^T P_{\mathcal{I},11} + P_{\mathcal{I},11} A - \theta_{1\{0,1\}} A^T C_1^T C_1 A & * & * \\ P_{\mathcal{I},12}^T A + B_1^T P_{\mathcal{I},11} + p_1 \frac{\bar{z}_1 - 1}{\bar{z}_1} C_1 & B_1^T P_{\mathcal{I},12} + P_{\mathcal{I},12}^T B_1 - 2p_1 & * \\ P_{\mathcal{I},12}^T A - \theta_{2\{0,1\}} C_1 A & P_{\mathcal{I},12}^T B_1 & -\theta_{3\{0,1\}} \end{array}\right] < \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc} C_1^T C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] < \left[\begin{array}{cc} P_{\mathcal{I},11} & * \\ P_{\mathcal{I},12}^T - p_2 \frac{\bar{z}_1 - 1}{\bar{z}_1} C_1 & P_{\mathcal{I},13} + 2p_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} P_{\mathcal{I},11} & P_{\mathcal{I},12} \\ P_{\mathcal{I},12}^T & P_{\mathcal{I},13} \end{array}\right] < \bar{z}_1^2 Q_{0,1}$$

Ces formules montrent que les résultats du Corollaire 24 sont moins pessimistes que ceux du Corollaire 23. En effet, il est aisé de montrer que les conditions du Corollaire 23 impliquent l'existence de $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que les matrices suivantes sont solution des conditions du Corollaire 24 :

$$\left[\begin{array}{cc} P_{\mathcal{I},11} & P_{\mathcal{I},12} \\ P_{\mathcal{I},12}^T & P_{\mathcal{I},13} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} P_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon \end{array}\right] \ , \ p_2 = 0 \ , \ \begin{array}{c} \theta_{2,\{0,1\}} = 0 \\ -\theta_{1,\{0,1\}} = \theta_{3,\{0,1\}} = \epsilon \end{array} \ , \ Q_{0,1} = \left[\begin{array}{cc} Q_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon \frac{1+\epsilon}{\bar{z}_1^2} \end{array}\right].$$

Pour tester la réduction du pessimisme, les deux corollaires sont appliqués pour l'exemple de lanceur. Avec comme objectif de maximiser les régions d'attraction les LMI sont résolues avec les critères heuristiques suivants :

— Minimisation de Tr(Q) pour le Corollaire 23 ;

— Minimisation de $\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{20}\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ C \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ C \end{bmatrix}\right)$ pour le Corollaire 24, c'est-à-dire un compromis entre les deux termes quadratiques définissant la région.

Ces objectifs on l'intérêt d'être linéaires. Ils corespondent à la somme des longueurs des semi-axes des ellipsoïdes. Une autre heuristique serait de maximiser les volumes des ellipsoïdes en minimisant le determinant de Q (problème convexe mais pas LMI).

Les problèmes LMI sont résolus pour différentes valeurs de $\bar{z}_1$. Pour des valeurs inférieures à $\bar{z}_1 = 4$ les deux corollaires produisent quasiment les mêmes régions d'attraction. Pour $\bar{z}_1 = 4$ ces régions sont données dans la Figure 5.10, en bleu la région obtenue par le Corollaire 23, en rouge celle obtenue par le Corollaire 24. Les droites en trait plein sont les limites de la zone où le système est linéaire ($|Cx| \leq 1$). Les lignes en pointillé sont les limites que doivent respecter les trajectoires $|z_1| \leq \bar{z}_1 = 4$.

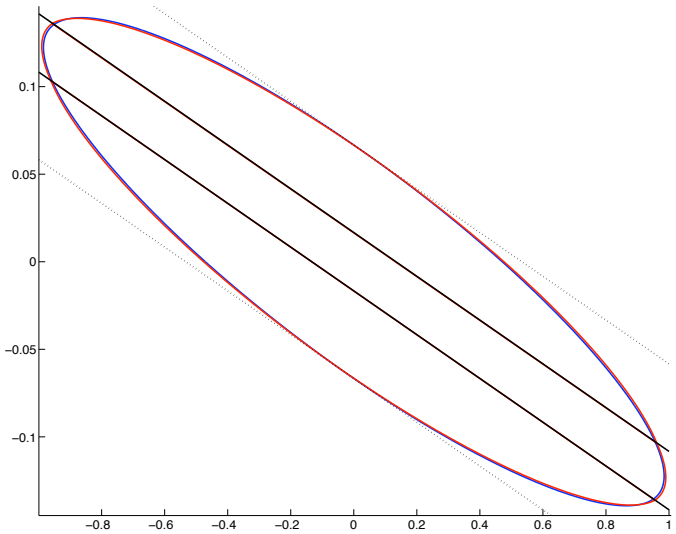


FIGURE 5.10 – Régions d'attraction obtenues pour $\bar{z}_1 = 4$ représentés dans le plan de phase.

Pour des valeurs $\bar{z}_1 \geq 4$ les deux corollaires donnent des résultats qui diffèrent. Pour $\bar{z}_1 = 8$ les régions obtenues sont tracées dans la Figure 5.11. La courbe en rouge est quadratique par morceaux.

Les LMI sont faisables jusqu'à $\bar{z}_1 = 11.5$. Pour $\bar{z}_1 \geq 12$ les deux corollaires donnent des conditions infaisables. Cependant, les résultats de [226] permettent de conclure que pour l'exemple considéré (stabilisation par retour d'état d'un double intégrateur) toute condition initiale bornée converge vers l'origine. Ce fait permet de conclure que les conditions LMI proposées sont pessimistes. Des pistes pour réduire plus avant le pessimisme sont envisagées dans le chapitre final consacré aux conclusions et perspectives de ce travail.

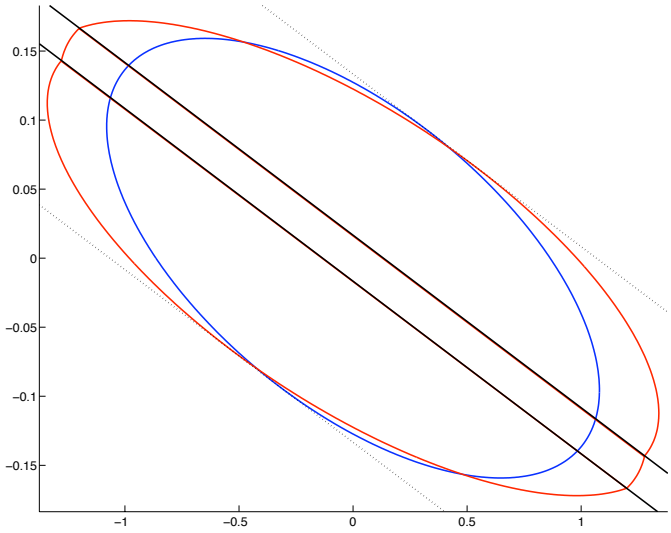


FIGURE 5.11 – Régions d'attraction obtenues pour $\bar{z}_1 = 8$ représentés dans le plan de phase.

La réduction du pessimisme entre les deux corollaires est au détriment de la complexité numérique. Le Tableau 5.3 illustre cette augmentation de la complexité

	nb. var.	*dim. LMI*
Corollaire 23	$n(n+1)+1$	$3n+1$
Corollaire 24	$(n+1)(n+2)+5$	$3n+4$

TABLE 5.3 – Dimension des problèmes LMI où n est l'ordre du système

5.3.4 Preuves de stabilité

A ce stade, il a été démontré que les trajectoires partant des domaines ellipsoïdaux (ou ellipsoïdaux par morceaux) restent confinés dans une région où $|z_1| \leq \bar{z}_1$. L'étape suivante consiste à prouver que si c'est le cas, alors les trajectoires convergent à l'origine. C'est-à-dire que les domaines sont des régions d'attraction du point d'équilibre. Ce problème est en réalité similaire à ce qui a été traité dans la section précédente. Il se ramène à une question de bien-posé de la boucle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \hat{w} \end{pmatrix}}_{w} \quad , \quad \nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{[0\ (\bar{z}_1-1)/\bar{z}_1]} \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

Le théorème de séparation intégrale quadratique s'applique et donne :

Corollaire 25 *Soit $\mathcal{A}$ donné par (5.30), s'il existe $P > \mathbf{0}$ et $p_1 > 0$ telles que la LMI suivante est faisable*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}^T \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & p_1\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}} \\ \hline -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & p_1\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}} & \mathbf{0} & 2p_1 \end{array}\right]}_{\Theta} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{5.31}$$

alors toute condition initiale garantissant $|C_1 x(t)| \leq \bar{z}_1$ le long des trajectoires de $\dot{x} = Ax + Bdz(C_1 x)$, l'état x converge asymptotiquement à l'origine.

Dans le cas du modèle de lanceur la LMI est vérifiée pour tout $1 \leq \bar{z}_1 < \infty$. Les régions obtenues précédemment sont donc des régions d'attraction.

5.4 Stabilité des systèmes à retard

Parmi les applications de la séparation intégrale quadratique pour l'analyse des systèmes et la conception de conditions LMI au pessimisme décroissant, il convient finalement de citer le travail fait par Fédéric Gouaisbaut et ses collègues pour les systèmes à retard. Ayant pu y participer, voici une des contribution sur ce sujet. Ce qui suit est un résumé des travaux dont on trouve les détails dans [94].

Les systèmes LTI à retard, avec retard h constant se définissent comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h), \ \forall t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), \ \forall t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{5.32}$$

où $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ est l'état instantané et ϕ définit les conditions initiales. Pour reformuler ce système à la manière d'une boucle d'interconnexion (et au passage réduire la complexité numérique dans le cas fréquent où A_d est de rang réduit), ce système se réécrit avec $A_d = BC$ comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t-h) \\ v(t) = Cx(t) \end{cases} . \tag{5.33}$$

La partie retardée de l'état en entrée de l'équation dynamique $v(t-h)$ résulte de l'opérateur retard de h sur la sortie virtuelle $v(t) \in \boldsymbol{R}^{p_d}$.

Dans le cadre simple des retard constants, l'opérateur retard s'écrit en tant que fonction de transfert e^{-hs}. Le problème de stabilité du système à retard ainsi formulé est dès lors équivalent au bien-posé de la boucle formée de l'application linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t-h) \end{pmatrix}$$

avec l'opérateur

$$\nabla = \begin{bmatrix} s^{-1}\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-hs}\mathbf{1}_{p_d} \end{bmatrix}, \ s \in \boldsymbol{C}_+.$$

En remarquant que $|e^{-hs}| \leq 1$ quand $s \in \boldsymbol{C}_+$ l'opérateur retard peut être traité à la manière d'un opérateur borné en norme quelconque ce qui conduit à des conditions classiques et connues dans le littérature traitant des IQC [140]. Reste que l'opérateur retard est plus que cela et il est possible d'exploiter les connaissances mathématiques que nous avons de l'exponentielle.

Dans [90] nous avons proposé une première idée reposant sur le fait qu'un retard est la composition de retards plus petits, ou mathématiquement : $e^{-hs} = (e^{-\frac{h}{q}s})^q$. Au prix de l'augmentation de la taille du problème, cette constatation conduit à un problème de bien-posé vis-à-vis de l'opérateur suivant :

$$\nabla_q = \begin{bmatrix} s^{-1}\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-\frac{h}{q}s}\mathbf{1}_{qp_d} \end{bmatrix}, \quad s \in \boldsymbol{C}_+.$$

où un retard plus faible intervient dans le modèle (fraction h/q du retard), mais répété de nombreuses fois quand $q \in \boldsymbol{N}$ est choisi grand.

Dans [92] ensuite nous avons exploité la connaissance du développement en série de Taylor du retard à l'ordre k

$$e^{-\frac{h}{q}s} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}(-\frac{h}{q}s)^i + \frac{1}{i!}(-\frac{h}{q}s)^i \delta_k(\frac{h}{q}s) \tag{5.34}$$

où le dernier terme $\frac{1}{i!}(-\frac{h}{q}s)^i\delta_k(\frac{h}{q}s)$ est le reste dont on peut s'attendre à ce qu'il soit borné. En réalité le terme qui est borné pour $s \in \boldsymbol{C}_+$ c'est $\delta_k(\frac{h}{q}s)$ et la Figure 5.12. Dans [93] il nous a été possible d'établir des approximations convexes de ces domaines sous la forme de cercles dont le centre est $c_i = \frac{i}{2(i+1)}$ et le rayon est $r_i = \frac{i+2}{2(i+1)}$. Ces cercles ont été choisis pour être une bonne approximation régions pour $\frac{h}{q}s$ proche de zéro, ce qui est le cas quand q est grand.

La définition des cercles a permis de transcrire en termes d'IQC les caractéristiques du reste de Taylor. Quant aux premiers termes de la série de Taylor (5.34), ils correspondent à des opérations de dérivation (s, s^2 etc.). Ainsi le retard peut, après quelques manipulations qui sont détaillées dans [94], se réécrire comme un problème de bien-posé vis-à-vis de l'opérateur suivant :

$$\nabla_{k,q} = \text{diag}\begin{bmatrix} s^{-1}\mathbf{1}_{kn} & e^{-\frac{h}{q}s}\mathbf{1}_{kqp} & \delta_1(\frac{h}{q}s)\mathbf{1}_{kp} & \delta_2(\frac{h}{q}s)\mathbf{1}_{(k-1)p} & \cdots & \delta_k(\frac{h}{q}s)\mathbf{1}_p \end{bmatrix}, \quad s \in \boldsymbol{C}_+.$$

qui rend compte de tous les restes de Taylor du retard. A mesure que q et k sont pris de plus en plus grands, les conditions LMI qui en découlent sont moins pessimistes (et numériquement plus difficiles à résoudre).

La technique utilisée ici avec le reste de Taylor est à mettre en relation avec ce qui est présenté en début de ce chapitre, à savoir la technique d'augmentation pour les système avec incertitudes. En effet, on peut aussi interpréter l'information sur le fait que les dérivées d'une incertitude constante sont nulles comme un développement de Taylor dont tous les termes sont nuls sauf le premier :

$$\Delta_j(s) = \Delta_j = \Delta_j + \frac{0}{1!}s + \frac{0}{2!}s^2 + \frac{0}{3!}s^3 \ldots$$

A noter également que le développement en série de Taylor s'est par la suite avéré comme n'étant pas numériquement le plus efficace. L'utilisation des inégalités de Bessel dans [88] permet d'améliorer les résultats.

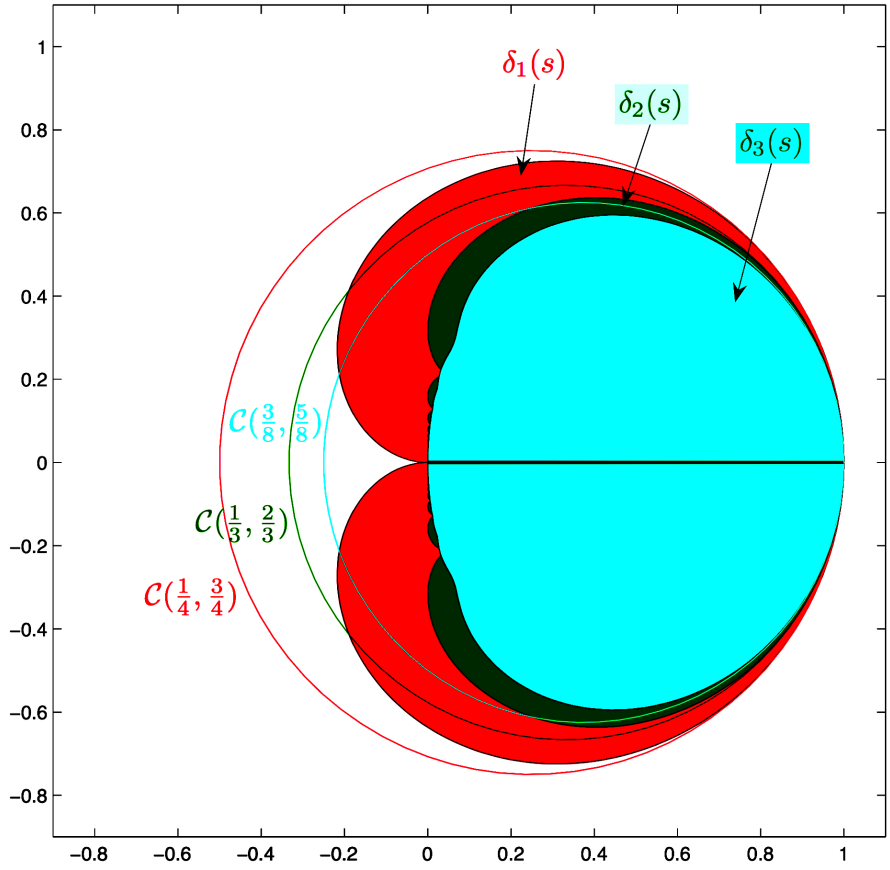


FIGURE 5.12 – Régions où se trouvent les opérateurs $\delta_i(s)$ pour $s \in \boldsymbol{C}^+$ et $\tau \geq 0$

Pour conclure, voici un exemple de [260], exemple très souvent étudié dans la littérature, qui a été traité dans [94] avec la méthode qui vient d'être exposée. Les données sont les suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(10+K) & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

La question est de trouver des paires (K, h) telles que le système est stable. L'enjeu secondaire (auquel nous avons également répondu, mais dont nous ne détaillerons pas les développements qui utilisent les S-variables) est de déterminer des régions dans le plan (K, h) pour lesquelles la stabilité peut être prouvée robustement.

Les résultats obtenus sont résumés sur la Figure 5.13. Les zones en noir correspondent aux valeurs de K et h qui rendent le système instable et qui ont été calculées analytiquement pour cet exemple très simple.

Pour $K < 0.3$ le système est stable quelque soit le retard h. Les conditions LMI permettent de le prouver même en prenant $q = 1$ et $k = 0$, c'est-à-dire sans ajouter d'information sur le retard.

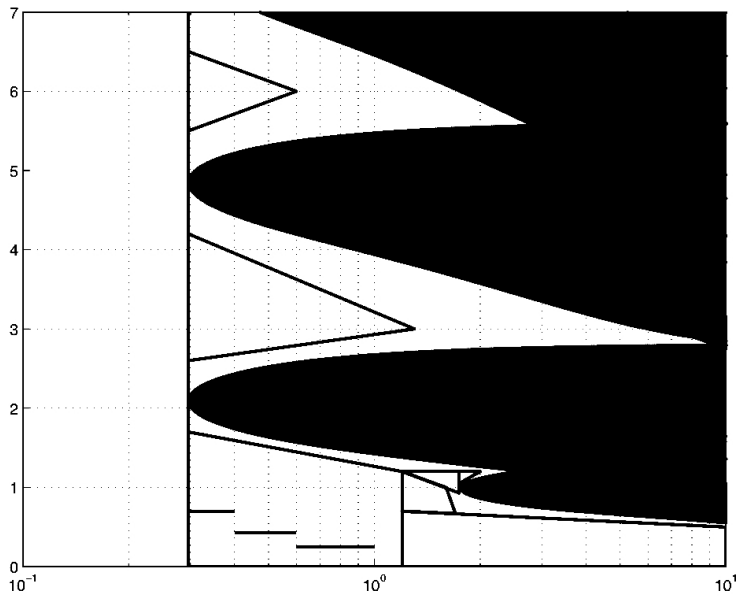


FIGURE 5.13 – Régions de stabilité du système vis-à-vis des paramètres (K, h)

Au-delà de $K = 0.3$ la stabilité dépend du retard. Seules les LMI construites pour des développement de Taylor à des ordres supérieurs à $k = 1$ permettent de trouver des bornes supérieures sur des retards compris entre 0 et une valeur supérieure $\bar{h}$. Les traits horizontaux situés dans cette partie de la figue représentent ce qu'il est possible de démontrer pour $k = 1$ et pour K pris dans des intervalles (stabilité robuste vis-à-vis de K et h). En augmentant l'ordre du développement de Taylor k et du découpage q les résultats permettent d'approcher finement le bas des langues noires inférieures. Ceci est illustré dans le Tableau 5.4. Pour $K = 1$ le petit retard maximal admissible est 1.4247.

Ce qui est plus marquant dans ces résultats, c'est que pour la première fois ils ont permis de démontrer la stabilité pour des retards non petits. C'est-à-dire pour des valeurs se trouvant entre des langues sur la figure. Avec $k = q = 3$ on peut montrer la stabilité dans la petite poche de stabilité du bas de la figure, et pour $k = q = 4$ on atteint les poches du haut de la figure. Ceci est bien évidement au prix de calculs très longs (2300 secondes pour prouver la stabilité robuste quand les paramètres sont dans le triangle situé le plus haut sur la figure).

TABLE 5.4 – Valeurs max de $\bar{h}$ obtenues pour $K = 1$ (le nombre de variables de décisions des LMI est donné entre parenthèses)

	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5
$k = 1$	0.2528 (37)	0.2541 (43)	0.2543 (49)	0.2544 (55)	0.2544 (61)
$k = 2$	1.1953 (79)	1.3229 (91)	1.3432 (103)	1.3494 (115)	1.3519 (127)
$k = 3$	1.3606 (127)	1.4195 (145)			

Conclusions et Perspectives

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est focalisé sur la séparation intégrale quadratique. Les résultats ont comme caractéristiques : d'être en lien étroit avec d'autres approches théoriques comme la théorie de Lyapunov, la μ-analyse, les IQC, (voir le Chapitre 2) ; d'étendre des résultats existants en séparation topologique à un cadre générique indépendant du type de signaux (temps continu, discret, fréquentiel...) et au cas de boucles d'interconnexion comprenant une application linéaire implicite (Chapitre 3) ; de reformuler dans ce cadre nombre de résultats existants dont certains n'avaient jusqu'ici pas de représentation en terme de systèmes interconnectés (performances impulsion à norme et impulsion à pic) et d'étendre tous ces résultats aux systèmes descripteurs (Chapitre 4) ; de formuler des résultats nouveaux au pessimisme décroissant pour des questions telles que la stabilité robuste vis-à-vis de paramètres constants ou variants dans le temps, la stabilité locale vis-à-vis de non-linéarités ou encore la stabilité des systèmes à retards (Chapitre 5). D'autres applications et implications de cette approche théorique sont à mon avis possibles et à venir. En voici quelques pistes.

Développement logiciel Ce document est l'occasion de développer dans les détails un grand nombre de résultats qui sont autant de déclinaisons d'un seul théorème, le Théorème 7 de séparation intégrale quadratique. Si les formules sont parfois complexes, elles sont par contre très générales et ne posent pas de difficulté à être codées dans un outil logiciel. Comme évoqué dans l'introduction, ma volonté initiale était de fournir ce logiciel avec ce manuscrit d'HdR. Pour des raisons de temps cela reste encore un travail à venir. Une version préliminaire du code existe cependant. C'est une variation nommée `Romuald` sur un code existant : `R-RoMulOC` [196]. Elle a déjà été testée pour l'analyse robuste de systèmes avec incertitudes paramétriques pour un exemple de satellite dans [12].

Méthodes probabilistes versus méthodes LMI Le logiciel `R-RoMulOC` cité ci-dessus est à l'origine dédié à l'implémentation de résultats sous forme LMI garantissant des performances pour toutes les incertitudes. Il s'agit là de résultats le plus souvent pessimistes. Une alternative à ce type de résultat est l'approche probabiliste qui s'affranchit de la contrainte que les performances soient pour toutes les incertitudes, en se contentant de garanties sur la plupart des incertitudes. Ou plus précisément en donnant des indications sur la (faible) probabilité que les niveaux de performances soient violés. On parle alors parfois de résultats optimistes. Cette approche probabiliste est décrite en détail dans [230]. Ces deux dernières années, dans le cadre d'une coopération entre la France et l'Italie, nous avons mené un travail conjoint avec Roberto Tempo et Fabrizio Dabbene, auteurs de [230]. Le logiciel `R-RoMulOC` (Randomized and Ro-

bust Multi-Objective Control, [196]) est une première étape de synthèse des deux points de vue optimiste et pessimiste. D'autres résultats combinant les deux points de vue sont en cours de développement et devraient être intégrés dans le logiciel `Romuald`.

IQS et S-variables Dans l'ouvrage [58] nous décrivons dans le détail une approche dite par S-variables. Cette technique est complémentaire à l'approche IQS ce qui peut se résumer en quelques lignes. Le Théorème 7 de séparation intégrale quadratique conduit aux conditions LMI (3.5) rappelées ci-dessous :

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma}\ ,\ \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp *} (\Theta(\varsigma) - \mu \mathbf{1}) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]^{\perp} \geq \mathbf{0}.$$

L'approche par S-variables consiste (en appliquant un résultat connu sous le nom de lemme de Finsler, ou lemme d'élimination) à réécrire ces conditions comme l'existence de variables additionnelles (S-variables $F(\varsigma)$) telles que :

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma}\ ,\ \exists F(\varsigma)\ :\ \Theta(\varsigma) - \mu \mathbf{1} \geq \left\{ F(\varsigma) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right] \right\}^{\mathcal{H}}.$$

Les avantages de la formulation par S-variables sont que : les matrices des données du problème $\mathcal{E}_1(\varsigma)$ et $\mathcal{A}(\varsigma)$ apparaissent explicitement (et non pas au travers du noyau de $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma) & -\mathcal{A}(\varsigma) \end{array}\right]$ dont l'expression peut être non triviale, surtout en tant que fonction de ς) ; les matrices $\Theta(\varsigma)$ et celles décrivant le système sont découplées. L'inconvénient est que la taille des LMI, tant en termes de dimensions des conditions, que du nombre de variables de décision, est fortement augmentée. Il est certain que S-variables et IQS ont un fort potentiel à être mises en relation, dès lors que la complexité numérique peut être contenue.

IQS et systèmes périodiques Au travers de l'encadrement de deux thèses, celle de Christophe Farges [65] puis celle de Jean-François Tregouët [234], j'ai travaillé sur le sujet de l'analyse et de la commande de systèmes périodiques à temps discret. Voir aussi les publications [187, 70, 25, 26, 71, 231, 67, 66, 68] et [240, 241, 237, 239, 242, 236, 235, 238]. Tous ces travaux ont été menés avec le point de vue de la théorie de Lyapunov et des S-variables. Un travail prospectif sera de mettre en lien ces résultats avec l'approche IQS et ce avec deux objectifs : ouvrir les résultats aux systèmes périodiques à temps continu où les opérateurs intégration s^{-1} et retard d'une période e^{-sT} devraient jouer un rôle important ; établir les connexions entre les modèles descripteurs issus de la technique d'augmentation pour réduire le pessimisme, technique discutée dans le Chapitre 5, avec les modèles descripteurs utilisés pour représenter les systèmes périodiques dans [234]. Pour expliquer ce dernier point considérons le modèle LTI à temps discret suivant $x_{k+1} = Ax_k$. Son modèle augmenté d'un ordre se formule sous la forme descripteur suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc} -\mathbf{1} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x_{k+2} \\ x_{k+1} \\ x_k \end{array}\right) = 0$$

Considérons maintenant un système 2-périodique tel que $x_{2q+1} = A_0 x_{2q}$ et $x_{2q+2} = A_1 x_{2q+1}$ où q désigne le nombre de périodes depuis l'instant initial 0. Ce modèle-ci s'écrit sous forme

descripteur comme suit :

$$\left[\begin{array}{ccc} -\mathbf{1} & A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_0 \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \end{array}\right) = 0$$

Ceux deux représentations peuvent sembler très semblables et pourtant les conditions LMI d'analyse que l'on peut construire pour l'une ou l'autre ont des différences, en terme de nombre de variables entre autre. Un travail en cours est de faire le lien entre ces deux modèles. Il fait apparaître des questionnements sur les effets mémoire dans les systèmes périodiques ainsi que sur la causalité des systèmes.

IQS et systèmes hybrides Les prospectives ci-dessus pour les systèmes périodiques ouvrent plus généralement sur l'étude de systèmes avec des dynamiques décrites par plusieurs opérateurs. C'est le cas par exemple des systèmes 2D ou multidimensionnels, ou encore des systèmes hybrides qui combinent dynamiques continues (les flux) et dynamiques discrètes (les sauts). L'étude de ces systèmes impose de formuler avec attention les conditions initiales et finales de chacune des dynamiques et les liens entre les deux. L'outil mathématique racine carrée du Dirac proposé dans ce manuscrit pourrait être essentiel pour leur étude. Une coopération en ce sens est actuellement envisagée avec Pavel Pakshin, avec lequel j'ai travaillé par le passé sur l'application de résultats de synthèse de correcteurs au cas des systèmes stochastiques [159, 157, 160, 158, 156], et qui s'intéresse aujourd'hui aux systèmes 2D [62].

Systèmes discrets décrits par l'opérateur variation et commande adaptative Une originalité de manuscrit est de proposer toutes les conditions à la fois pour les représentations classiques des systèmes discrets régis par des équations récurrentes $x_{k+1} = Ax_k$, et pour des systèmes décrits par des variations de l'état $\frac{1}{T_s}(x_{k+1} - x_k) = Ax_k$. Ces dernières conditions ne sont pas surprenantes en soi mais peuvent être très utiles quand il s'agit de transformer des résultats obtenus pour les systèmes continus, en une version discrète réalisable en pratique sur des calculateurs. Cette question se pose en particulier pour ce qui est de la réalisation des lois de commande adaptatives du type $u(t) = K(t)e(t)$ où $e = y_r - y$ est l'erreur entre la sortie mesurée et un signal de référence et où le gain évolue selon une équation différentielle théorique du type $\dot{K}(t) = \text{Proj}_{\mathcal{K}}(-Ge(t)y^T(t)\Gamma)$. C'est d'ailleurs dans ce contexte que sont parus les premiers travaux sur l'opérateur variation [85]. Dans [132] mon doctorant Razvan Luzi a fait la discrétisation de nouvelles lois de commande adaptatives de ce type de façon empirique. En s'appuyant sur les représentations par opérateur variation, on peut envisager d'aller au-delà. Et surtout de garantir les propriétés de la version discrète des lois adaptatives, avec les mêmes outils théoriques (conditions LMI prouvant la stabilité robuste) que dans le cas continu.

Analyse robuste de la commande adaptative Pour convaincre le CNES que les lois adaptatives proposées dans [132] ne risquent en rien de provoquer des instabilités alors même que ces lois sont non-linéaires, la démarche adoptée a été d'appliquer des outils d'analyse robuste en considérant les gains de commande comme des incertitudes. Sachant que la loi de commande était conçue pour guarantir que les gains varient mais restent bornés dans des intervalles connus ($K(t) \in \mathcal{K}$ par construction de l'opérateur de projection Proj), il était possible

de traiter de la stabilité de la boucle fermée avec des résultats classiques du type "stabilité quadratique" où une fonction de Lyapunov commune pour toutes les valeurs possibles des gains était conçue. Ce type de condition est en général pessimiste, sauf si on admet des 'incertitudes' variant infiniment vite dans leurs domaines. Heureusement dans le cas industriel considéré, moyennant quelques considérations techniques, le test LMI correspondant s'est avéré positif et le CNES a procédé aux essais en conditions réelles de l'algorithme de commande à bord du satellite PICARD encore en orbite en janvier 2014. Dans d'autres cas le test pourrait échouer pour cause de pessimisme. Suivant la démarche adoptée dans ce manuscrit, une solution pour réduire le pessimisme serait, par augmentation de l'ordre des équations différentielles, d'inclure les connaissances sur la dérivée des paramètres. Or pour les correcteurs adaptatifs, les dérivées sont précisément connues. C'est même précisément ainsi que sont construites les règles d'adaptation : $\dot{K}(t) = \text{Proj}_{\mathcal{K}}(-Ge(t)y^T(t)\Gamma)$.

Augmentations d'ordre supérieur pour les systèmes non-linéaires Dans le Chapitre 5 la technique d'augmentation des systèmes a été appliquée de façon récursive aux incertitudes paramétriques et aux retards, générant des séquences de conditions LMI au pessimisme décroissant. Le même type de résultat est attendu pour des non-linéarités infiniment dérivables. Par contre pour ce qui est des systèmes avec non-linéarités de type zones-mortes, les résultats sont limités aux augmentations d'ordre un. Plus précisément, ce qui a été ajouté dans les équations décrivant le système, c'est la dérivée $\mathcal{T}_\theta \dot{z}_1$ du signal entrant dans la non-linéarité. Comme ce signal est une combinaison linéaire de la dérivée de l'état, aucune dérivation additionnelle de l'état n'a été réellement effectuée. Une question reste ouverte : comment aller au-delà dans l'augmentation pour les systèmes non-linéaires non-différentiables ? Question qui se confronte au problème des discontinuités de $\dot{x}$. Une réponse possible est de voir alors le système augmenté comme un système hybride constitué de sauts intervenant aux limites des zones-mortes (ou saturations) et de flux entre ces sauts.

Réinterpréter les conditions de secteur généralisées en terme de bien-posé Avant d'explorer la piste des augmentations d'ordre supérieur proposée ci-dessus, une piste alternative est celle des conditions dites "conditions de secteur généralisées" [228]. Ces conditions se révèlent être les plus performantes pour l'analyse des systèmes avec zones-mortes. Elles remplacent les propriétés sur l'opérateur zone-morte $\text{dz}(z_1)$ par des conditions sur $\text{dz}(z_1) - Hx$ où la matrice H est laissée libre. L'interprétation en termes d'interconnexion et de bien-posé reste à faire. Elle permettra d'exploiter ces conditions généralisées dans le contexte IQS. Les avantages attendus sont de pouvoir prendre avantage de toutes les flexibilités de l'approche IQS (traitement des incertitudes et de performances) et éventuellement de comprendre plus avant les propriétés sous-jacentes aux conditions de secteur généralisées, avec comme espoir d'en concevoir une version au pessimisme encore réduit.

Technique d'augmentation et choix d'une base Un sujet que nous n'avons pas eu le temps d'aborder dans ce document est celui des liens entre IQS et les méthodes IQC où les multiplieurs sont des fonctions de la fréquence ($s = \text{j}\omega$). Nous avons donné une interprétation des résultats basés sur l'augmentation des systèmes en terme de fonctions de Lyapunov dépendant

des paramètres, mais il se trouve que les résultats ont d'autres interprétations exploitables. Pour expliquer cela, considérons le cas le plus simple d'un système LTI à temps continu bouclé avec une incertitude paramétrique Δ bornée en norme $\Delta^*\Delta \leq \mathbf{1}$. Supposons que le système est augmenté de ses dérivés jusqu'à l'ordre $\aleph = 1$. Dans ce cas le résultat LMI du Corollaire 18 s'écrit comme suit :

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp *} \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_\Delta \otimes \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_\Delta \otimes \mathbf{1}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E} & -\mathcal{A} \end{array}\right]^{\perp} \geq 0.$$

En utilisant les équation algébriques contenues dans la représentation descripteur vis-à-vis de l'incertitude Δ, ce résultat s'interprète en terme d'existence d'une matrice de Lyapunov de la forme $M_1^*(\Delta)PM_1(\Delta)$, où $M_1(\Delta)$ est une fonction rationnelle en Δ. De la même façon, mais cette fois en regardant le bouclage vis-à-vis de l'opérateur intégration s^{-1}, le résultat s'interprète comme l'existence de scalings (dénommés aussi multiplieurs), dépendant de s sous la forme $M_2^*(s)P_\Delta M_2(s)$, où $M_2(s)$ est une fonction rationnelle en s, c'est-à-dire une matrice de transfert. Ce résultat est ainsi à rapprocher de ceux développés sous le vocable IQC où les multiplieurs sont recherchés sous cette même forme mais pour des choix a priori de $M_2(s)$. Ces choix sont en général sous la forme de bases de fonctions de transfert, [222, 217, 218]. Un travail en cours porte sur un raisonnement en sens inverse visant à construire, pour $M_2(s)$ donnée, le modèle descripteur augmenté sous-jacent.

De l'analyse à la synthèse Les résultats présentés dans ce document sont exclusivement des résultats d'analyse. Il est naturel d'envisager par la suite leur extension à des questions de synthèse, synthèse de lois de commande, de filtres, d'observateurs etc. Malheureusement, si l'on reste au niveau générique du Théorème 7 de séparation intégrale quadratique, la synthèse conduit à des conditions qui n'ont pas de structure aisément exploitable telles que :

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma}\ ,\ \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma, K) & -\mathcal{A}(\varsigma, K) \end{array}\right]^{\perp *} (\Theta(\varsigma) - \mu\mathbf{1}) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma, K) & -\mathcal{A}(\varsigma, K) \end{array}\right]^{\perp} \geq \mathbf{0}.$$

où $\Theta(\varsigma)$ et K sont les paramètres à rechercher et où $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma, K) & -\mathcal{A}(\varsigma, K) \end{array}\right]^{\perp}$ n'est pas nécessairement linéaire vis-à-vis de K (paramètres de la loi de commande, de l'observateur, etc.). Un des grands mérites des travaux de recherche sur la synthèse de lois est d'avoir mis en évidence des astuces mathématiques permettant d'exploiter au mieux la structure dans certains cas particuliers et aboutir à des conditions LMI. On peut par exemple citer [35] pour le changement de variable linéarisant qui conduit à des résultats LMI de synthèse de lois de commande par retour d'état. Résultat exploitable pour les systèmes avec ou sans incertitudes, mais limité à la stabilité quadratique où une fonction de Lyapunov commune à toutes les réalisations du système est recherchée. On peut également citer [211, 113] pour des caractérisations LMI de synthèse de correcteurs par retour de sortie d'ordre plein pour les systèmes sans incertitudes. Résultats qui ont eu de nombreuses déclinaisons pour la commande linéaire dépendant des paramètres [2, 213, 144] et plus récemment pour la synthèse de filtres robustes [217, 222, 31]. Même s'il reste sans doute des marges d'amélioration de ces résultats de synthèse convexe, il est peu probable qu'ils résoudront le cas générique de synthèse de lois structurées, d'ordre réduit, robustes.

Une méthode alternative est d'appliquer l'approche par S-variables qui conduit à des conditions de la forme :

$$\forall \varsigma \in \mathbf{\Sigma} \ : \ \Theta(\varsigma) - \mu \mathbf{1} \geq \left\{ F(\varsigma) \left[\begin{array}{cc} \mathcal{E}_1(\varsigma, K) & -\mathcal{A}(\varsigma, K) \end{array} \right] \right\}^{\mathcal{H}}.$$

qui, de manière générique, peuvent être exprimées comme des expressions bilinéaires en $F(\varsigma)$ et K. Cette façon de considérer la synthèse, même si attrayante, et largement exploitée dans la littérature [151, 174, 96, 19, 74], est encore en grande partie prospective. En effet, en comparaison des méthodes citées plus haut, il n'y a quasiment aucun cas particulier pour lequel un algorithme de résolution convexe, ou au moins à convergence garantie, existe. Les seuls cas qui soient partiellement résolus sont la synthèse de gains de retour d'état robustes et la synthèse de correcteurs d'ordre plein multi-objectif, pour les systèmes à temps discret, [58]. Pouvoir étendre ces résultats à la synthèse d'observateurs sera une première étape de développements futurs, même si dans le cas des observateurs robustes de nombreuses questions restent ouvertes [184].

Bibliographie

[1] T. Alamo, A. C. anf D. Limon, and E. F. Camacho, "Estimation of the domain of attraction for saturated discrete-time systems," *International Journal of System Science*, vol. 37, no. 8, pp. 575–583, 2006.

[2] P. Apkarian and R. Adams, "Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems," in *IEEE Trans. on Control System Technology*, 1997.

[3] Y. Ariba and F. Gouaisbaut, "Input-output framework for robust stability of time-varing delay systems," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Shanghai, Dec. 2009, pp. 274–279.

[4] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, and K. Johansson, "Robust stability of time-varying delay systems : the quadratic separation approach," *Asian Journal of Control*, vol. 14, no. 5, pp. 1205–1214, Sep. 2012.

[5] D. Arzelier, J. Bernussou, and D. Peaucelle, "Analyse robuste par fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres," LAAS-CNRS, Toulouse, France, Tech. Rep. 00442, Oct. 2000, rapport pour le Pôle PIROLA.

[6] ——, "Analyse robuste par fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres - rapport final de la phase 1," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 01144, Apr. 2001, rapport pour le Pôle PIROLA.

[7] ——, "Synthèse robuste multi-objectif," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 01392, Sep. 2001, rapport pour le Pôle PIROLA.

[8] ——, "Synthèse d'un pilote mixte H_2/H_∞," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 02182, Apr. 2002, rapport pour le Pôle PIROLA.

[9] ——, "Analyse et synthèse robustes d'un pilote par les méthodes de Lyapunov," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 03390, Jul. 2003, rapport pour le Pôle PIROLA.

[10] D. Arzelier, J. Bernussou, D. Peaucelle, and G. Goffaux, "Synthèses et analyses de pilotes par une approche multi-objectif H_2/H_∞," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 02267, Jun. 2002, rapport pour le Pôle PIROLA.

[11] D. Arzelier, A. Bortott, F. Gouaisbaut, and D. Peaucelle, "Modélisation LFT incertaine pour DEMETER," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 08826, Dec. 2008, rapport pour contrat CNES R&T R-SO8/TG-0004-008 intitulé "Amélioration de la robustesse et validation SCAO par modélisation LFT et analyse pire cas".

[12] ——, "Analyse robuste du modèle LFT de DEMETER à l'aide des boîtes à outils RoMulOC et Romuald," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 09295, Apr. 2009, rapport pour contrat CNES R&T R-SO8/TG-0004-008 intitulé "Amélioration de la robustesse et validation SCAO par modélisation LFT et analyse pire cas".

[13] ——, "Validation de la modélisation LFT incertaine pour DEMETER en boucle fermée," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 09294, Feb. 2009, rapport pour contrat CNES R&T R-SO8/TG-0004-008 intitulé "Amélioration de la robustesse et validation SCAO par modélisation LFT et analyse pire cas".

[14] D. Arzelier, D. Bouillon, and D. Peaucelle, "Approche systèmes pour la commande des turbomachines," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 07726, Jul. 2006, rapport pour contrat DPAC/LAAS/ONERA/SNECMA.

[15] D. Arzelier, G. Comerlatto, and D. Peaucelle, "Analyse et synthèse de systèmes de commande robustes et résilients : Correcteurs robustes et résilients pour la synthèse LPV." LAAS-CNRS, Toulouse, France, Tech. Rep. 11329, 2011.

[16] D. Arzelier, G. De Calazan Chevarria, and D. Peaucelle, "Analyse et synthèse de systèmes de commande robustes et résilients. analyse robuste." LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 09496, Aug. 2009, convention ONERA F/20 334/DA PPUJ.

[17] ——, "Analyse et synthèse de systèmes de commande robustes et résilients. analyse robuste : fonctions d'analyse et tests numériques sur l'axe longitudinal avec romuloc," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep., Apr. 2010, convention ONERA F/20 334/DA PPUJ.

[18] D. Arzelier, G. Garcia, and D. Peaucelle, "Generalized uncertainty and quadratic stabilizability : an LMI approach," in *American Control Conference*, vol. 1, Philadelphia, PA, Jun. 1998, pp. 85–86.

[19] D. Arzelier, E. Gryazina, D. Peaucelle, and B. Polyak, "Mixed LMI/randomized methods for static output feedback control design," in *American Control Conference*, Baltimore, Jun. 2010.

[20] D. Arzelier and D. Peaucelle, "Systèmes non linéaires - version 4," cours B2, CNAM-IPST, 1998.

[21] ——, "Robust multi-objective state-feedback control for real parametric uncertainties via parameter-dependent Lyapunov functions," LAAS-CNRS, Toulouse FRANCE, Tech. Rep. 99098, Nov. 1999.

[22] ——, "Représentation et analyse des systèmes linéaires - version 1," cours de première année ENSICA, 2000.

[23] ——, "Robust multi-objective control for linear systems - elements of theory and romuloc toolbox," Slides of the lecture at UFSC, Florianopolis, Oct. 2009.

[24] ——, "Robust multi-objective control for linear systems - elements of theory and romuloc toolbox," Slides of the lecture at UFRGS, Porto Alegre, Oct. 2009.

[25] D. Arzelier, D. Peaucelle, and C. Farges, "Robust analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs," in *joint IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, Dec. 2005, same as [26].

[26] ——, "Robust analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs," in *joint IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, Dec. 2005.

[27] G. Bara, "Dilated LMI conditions for time-varying polytopic descriptor systems : the discrete-time case," *Int. J. Control*, vol. 84, no. 6, pp. 1010–1023, 2011.

[28] K. Barbosa, C. d. Souza, and D. Coutinho, "Robust stability of discrete-time linear descriptor systems with time-varying uncertainties via parametric Lyapunov function," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Maui, Dec. 2012, pp. 5134–5139.

[29] I. Barkana, "Rohrs example and robust stability of simple adaptive control," *Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 121, pp. 721–728, 1991.

[30] I. Barkana, M. Teixeira, and L. Hsu, "Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control," *Automatica*, vol. 42, no. 9, pp. 1611–1616, Sep. 2006.

[31] B. Bayon, G. Scorletti, and E. Blanco, "AnLMI solution for a class of robust open-loop problems," in *American Control Conference*, Montréal, Jun. 2012, pp. 5234–5239.

[32] R. Ben Yamin, I. Yaesh, and U. Shaked, "Simplified adaptive control with guaranteed H_∞ performance," in *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, St. Petersburg, Aug. 2007.

[33] ——, "Robust simplified adaptive model following for linear time-delay systems," in *European Control Conference*, Budapest, Aug. 2009, pp. 1638–1643.

[34] D. Bernstein and A. Michel, "A chronological bibliography on saturating actuators," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp. 375–380, 1995.

[35] J. Bernussou, J. Geromel, and P. Peres, "A linear programing oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems," *Systems & Control Letters*, vol. 13, pp. 65–72, Jul. 1989.

[36] P.-A. Bliman, "A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 42, pp. 2016–2042, 2004.

[37] A. Bouali, P. Chevrel, and M. Yagoubi, "About gain scheduled state-feedback controllers for rational LPV systems," in *Int. Conference on Automation Control Robitics and Vision*, Singapore, Dec. 2006, pp. 71–77.

[38] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia : SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[39] N. Budko and A. Samokhin, "Singular modes of the electromagnetic field," *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 40, pp. 6239–6250, 2007.

[40] M. Chaabane, O. Bachelier, M. Souissi, and D. Mehdi, "Stability and stabilization of continuous descriptor systems : An LMI approach," *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, doi :10.1155/MPE/2006/39367.

[41] M. Chadli and M. Darouach, "Novel bounded-real lemma for discrete-time descriptor systems : Application to H_∞ control design," *Automatica*, vol. 48, pp. 449–453, 2012.

[42] J. L. Chen, W.-D. Chang, C.-H. Lin, M.-L. Hung, and Y.-L. Chen, "A strict LMI condition for ESPR property of continuous-time descriptor systems," in *AsiaSim 2007*, ser. Communications in Computer and Information Science, J.-W. Park, T.-G. Kim, and Y.-B. Kim, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2007, vol. 5, pp. 29–35.

[43] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino, *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 2009.

[44] E. Collins, W. Haddad, V.-S. Chellaboina, and T. Song, "Robustness analysis in the delta-domain using fixed-structure multipliers," in *IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego, Dec. 1997, pp. 3286–3291.

[45] J. Colombeau, *Multiplication of distributions : A tool in Mathematics*, ser. Mathematics, Numerical Engineering and Theoretical Physics. Berlin : Springer-Verlag, 1992.

[46] D. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu, "Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial Lyapunov functions," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 47, no. 9, pp. 1575–1580, 2002.

[47] F. Dabbene, D. Henrion, D. Peaucelle, and R. Tempo, "Relaxation approaches for control of uncertain complex systems : Methodologies and tools," Workshop at IEEE CDC in Florence, Dec. 2013.

[48] M. De Oliveira and R. Skelton, *Perspectives in Robust Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2001, ch. Stability tests for constrained linear systems, pp. 241–257, edited by S.O. Reza Moheimani.

[49] M. Dettori and C. Scherer, "Robust stability analysis for parameter dependant systems using full block S-procedure," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Fl USA, Dec. 1998, pp. 2798–2799.

[50] ——, "Robust stability analysis for parameter dependent systems using full block S-procedure," in *Selected Topics in Identification, Modelling and Control*. Delft University Press, Dec. 1998, vol. 11, pp. 17–25.

[51] J. Doyle, A. Packard, and K. Zhou, "Review of LFTs, LMIs and μ," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Brignton, England, Dec. 1991, pp. 1227–1232.

[52] J. Doyle, "Analysis of control systems with structured uncertainty," in *IEE Proceedings*, vol. 129, 1982.

[53] ——, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 129, no. 6, pp. 255–267, 1982.

[54] J. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 26, pp. 252–253, Apr. 1981.

[55] Y. Ebihara and T. Hagiwara, "New dilated LMI characterizations for continuous-time control design and robust multiobjective control." in *American Control Conference*, Anchorage, AK, May 2002, pp. 47–52.

[56] ——, "Robust controller synthesis with parameter-dependent Lyapunov variables : A dilated LMI approach," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, Dec. 2002, pp. 4179–4184.

[57] Y. Ebihara and D. Peaucelle, "Reducing conservatism of LMI conditions," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2007, invited session.

[58] Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier, *S-Variable Approach to LMI-based Robust Control*, ser. Communications and Control Engineering. Springer, 2015.

[59] Y. Ebihara, D. Peaucelle, D. Arzelier, and T. Hagiwara, "Robust H_2 performance analysis of uncertain LTI systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, Jul. 2006, paper in an invited session.

[60] L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, Eds., *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, ser. Advances in Design and Control. Philadelphia : SIAM, 2000.

[61] L. El Ghaoui and G. Scorletti, "Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 32, no. 9, pp. 1273–1284, 1996.

[62] J. Emelianova, P. Pakshin, K. Galkowski, and E. Rogers, "Stability of nonlinear 2d systems described by the continuous-time roesser model," *Autom. Remote Contr.*, vol. 75, no. 5, pp. 845–858, May 2014.

[63] M. Fan, A. Tits, and J. Doyle, "Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodelled dynamics," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 36, no. 1, pp. 25–38, Jan. 1991.

[64] H. Fang, Z. Lin, and M. Rotea, "On IQC approach to the analysis and design of linear systems subject to actuator saturation," in *IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego, 2006.

[65] C. Farges, "Méthodes d'analyse et de synthèse robustes pour les systèmes linéaires périodiques," Ph.D. dissertation, Université Paul Sabatier, Toulouse III, Dec. 2006.

[66] C. Farges, D. Peaucelle, and D. Arzelier, "Méthodes LMI de stabilisation des sytèmes linéaires périodiques," in *JDMACS*, Lyon, Sep. 2005.

[67] ——, "Output feedback stabilization of linear periodic systems," in *joint IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, Dec. 2005.

[68] ——, "LMI formulation for the resilient dynamic output feedback stabilization of linear periodic systems," in *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, Cachan, Apr. 2006, same as [72].

[69] ——, "Resilient static output feedback stabilization of linear periodic systems," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, Jul. 2006.

[70] C. Farges, D. Peaucelle, D. Arzelier, and J. Daafouz, "Robust H_2 performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs," *Systems & Control Letters*, vol. 56, no. 2, pp. 159–166, 2007, doi :10.1016/j.sysconle.2006.08.006.

[71] C. Farges, D. Peaucelle, D. Theron, and D. Arzelier, "Resilient structured periodic H_2 synthesis for a spacecraft in elliptical orbits," in *IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Toulouse, Jun. 2007.

[72] D. Farges, D. Peaucelle, and D. Arzelier, "LMI formulation for the resilient dynamic output feedback stabilization of linear periodic systems," *International Journal of Tomography and Statistics*, vol. 6, no. S07, pp. 74–79, 2007.

[73] G. Feng and M. Palaniswami, "Robust direct adaptive controllers with a new normalization technique," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 11, pp. 2330–2334, 1994.

[74] Y. Feng, M. Yagoubi, and P. Chevrel, "Dilated LMI characterisations for linear time-invariant singular systems," *Int. J. Control*, vol. 83, no. 11, pp. 2276–2284, 2010.

[75] G. Ferreres and J.-M. Biannic, "A $\hat{\mathrm{I}}_{\frac{1}{4}}$ analysis technique without frequency gridding," in *American Control Conference*, vol. 4, 1998, pp. 2294–2298.

[76] G. Ferreres, J. Biannic, and J. Magni, "A skew mu toolbox (SMT) for robustness analysis," in *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, Sep. 2004, pp. 309 –314. [Online]. Available : www.onera.fr/staff-en/jean-marc-biannic

[77] G. Ferreres, J.-F. Magni, and J.-M. Biannic, "Robustness analysis of flexible structures : practical algorithms," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, no. 8, pp. 715–733, 2003. [Online]. Available : http://dx.doi.org/10.1002/rnc.742

[78] M. Fiacchini, "Convex difference inclusions for systems analysis and control," Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, Spain, January 2010.

[79] V. Fomin, A. Fradkov, and V. Yakubovich, *Adaptive control of dynamic plants*. Moscow : Nauka, 1981, in Russian.

[80] A. Fradkov, "Adaptive stabilization of a linear dynamic plant," *Autom. Remote Contr.*, vol. 35, no. 12, pp. 1960–1966, 1974.

[81] ——, "Quadratic Lyapunov functions in the adaptive stabilization problem of a linear dynamic plant," *Siberian Math. J.*, vol. 2, pp. 341–348, 1976.

[82] E. Fridman, "Stability of linear descriptor systems with delay : A lyapunov-based approach," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 273, no. 1, pp. 24–44, 2002.

[83] E. Fridman and U. Shaked, "A descriptor system approach to H_∞ control of time-delay systems," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 47, pp. 253–270, 2002.

[84] M. Fu, S. Dasgupta, and Y. Soh, "Integral quadratic constraints approach vs. multiplier approach," *Automatica*, vol. 41, no. 2, pp. 281–287, 2005.

[85] G. Goodwin, R. Lozano Leal, D. Mayne, and R. Middleton, "Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control," *Automatica*, vol. 22, no. 2, pp. 199–207, 1986.

[86] F. Gouaisbaut and Y. Ariba, "Delay range stability of a class of distributed time delay systems," *Systems & Control Letters*, vol. 60, no. 3, pp. 211–217, Mar. 2011.

[87] F. Gouaisbaut, Y. Ariba, and D. Peaucelle, "Stability analysis of time-varying delay systems in quadratic separation framework," in *ICNPAA 2008 (Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences)*, Genova, Jun. 2008.

[88] F. Gouaisbaut, Y. Ariba, and A. Seuret, "Bessel inequality for robust stability analysis of time-delay system," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Florence, Dec. 2013, pp. 928–933.

[89] F. Gouaisbaut and J. M. Gomes da Silva Jr., "Stability analysis of discrete-time systems with uncertain delays : a quadratic separation approach," in *European Control Conference*, Budapest, Aug. 2009, pp. 4175–4180.

[90] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle, "Delay-dependent robust stability of time delay systems," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, Jul. 2006, paper in an invited session.

[91] ——, "Quadratic stability applied to time-delay systems," LAAS-CNRS, Tech. Rep. 06455, Jun. 2006.

[92] ——, "Stability of time-delay systems with non-small delay," in *IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, Dec. 2006.

[93] ——, "Robust stability of time-delay systems with interval delays," in *IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Dec. 2007.

[94] ——, "Robust stability of polytopic time-delay systems with delays defined in intervals," LAAS-CNRS, Tech. Rep. 08427, 2008.

[95] B. Hanzon, "On the square roots of the dirac delta distribution," in *Econometric Institute*. Erasmus University Rotterdam, 1983, vol. 8323.

[96] D. Henrion, D. Arzelier, and D. Peaucelle, "Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions," *Automatica*, vol. 39, no. 8, pp. 1479–1485, Aug. 2003.

[97] D. Henrion, M. Ganet-Schoeller, and S. Bennani, "Measures and LMI for space launcher robust control validation robust control design," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, 2012, pp. 236–241.

[98] D. Henrion and A. Garulli, Eds., *Positive Polynomials in Control*. Berlin : Lecture Notes in Control and Information Sciences 312, Springer Verlag, 2005.

[99] T. Hilaire, P. Chevrel, and Y. Trinquet, "Designing low parametric sensitivity FWL realizations of LTI controllers/filters within the implicit state-space framework," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Seville, Dec. 2006, pp. 5192–5197.

[100] H. Hindi and S. Boyd, "Analysis of linear systems with saturation using convex optimization," in *Conference on Decision and Control*, Tampa or , USA, 1998, pp. 903–908.

[101] N. Hovakimyan and C. Cao, L_1 *adaptive control theory - Guaranteed robustness with fast adaptation*. SIAM, 2010.

[102] T. Hu and Z. Lin, *Control systems with actuator stauration : Analysis and design*. Boston : Birkhäuser, 2001.

[103] M. Ikeda, T. Lee, and E. Uezato, "A strict LMI condition for H_2 control of descriptor systems," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Dec. 2000, pp. 601–604.

[104] P. Ioannou and P. Kokotovic, "Robust redesign of adaptive control," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 29, no. 3, pp. 202–211, 1984.

[105] P. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc, 1996.

[106] J. Ishihara and M. Terra, "On the lyapunov theorem for singular systems," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 47, no. 11, 2002.

[107] Z. Iwai and I. Mizumoto, "Robust and simple adaptive control systems," *Int. J. Control*, vol. 55, no. 6, pp. 1453–1470, 1992.

[108] T. Iwasaki and S. Hara, "Well-posedness of feedback systems : insights into exact robustness analysis," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, Dec. 1996, pp. 1863–1868.

[109] ——, "Well-posedness of feedback systems : Insights into exact robustness analysis and approximate computations," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 43, no. 5, pp. 619–630, 1998.

[110] ——, "Generalized KYP lemma : Unified frequency domain inequalities with design applications," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 50, no. 1, pp. 41–59, Jan. 2005.

[111] T. Iwasaki, S. Hara, and A. Fradkov, "Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi)finite ranges." *Systems & Control Letters*, vol. 54, no. 7, pp. 681–691, 2005.

[112] T. Iwasaki and G. Shibata, "LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 46, no. 8, pp. 1195–1207, Aug. 2001.

[113] T. Iwasaki and R. Skelton, "Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions," *J. Optimization Theory and Applications*, vol. 85, no. 2, pp. 291–307, May 1995.

[114] M. Johansson, "Piecewise linear control systems," Ph.D. dissertation, Lund Institute of Technology, Depto. of Automatic Control (Lund University), Lund, Sweden, 1999.

[115] U. Jönsson, "Lectures on input-output stability and integral quadratic constraints," `http://www.math.kth.se/ ~ulfj/5B5744/Lecturenotes.ps`, 2001.

[116] U. Jönsson and A. Megretski, "IQC characterizations of signal classes," in *European Control Conference*, Karlsruhe, Sep. 1999.

[117] U. Jönsson and A. Rantzer, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, ser. Advances in Design and Control. SIAM, 2000, ch. 6 Optimization of Integral Quadratic Constraints, pp. 109–127, edited by L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu.

[118] M. Jun and M. Safonov, "Multiplier IQC's for uncertain time-delays," in *American Control Conference*, Arlington, Jun. 2001.

[119] V. Kapila and K. G. (Eds.), *Actuator saturation control*. Marcel Dekker, Inc., 2002.

[120] H. Kaufman, I. Barkana, and K. Sobel, *Direct adaptive control algorithms*. New York : Springer, 1998, second Edition.

[121] H. Khalil, *Nonlinear systems*. MacMillan, 1992.

[122] ——, *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall, 2002.

[123] E. Kharisov, N. Hovakimyan, and K. Aström, "Comparison of architectures and robustness of model reference adaptive controllers and L_1 adaptive controllers," *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013.

[124] C.-H. Kuo and L. Lee, "Robust d-admissibility in generalized LMI regions for descriptor systems," in *Asian Control Conference*, Melbourne, Jul. 2004, pp. 1058–1065.

[125] I. Landau, *Adaptive control : the model reference approach*. New-York : Marcel Dekker Inc., 1979.

[126] E. Lavretsky and K. Wise, *Robust and adaptive control : with aerospace applications*, ser. Advanced textbooks in control and signal processing. Springer, 2012.

[127] M. Liberzon, "Essays on the absolute stability theory," *Autom. Remote Contr.*, vol. 67, no. 10, pp. 1610–1644, 2006.

[128] D. Lindorff and R. Carroll, "Survey on adaptive control using Liaunov design," *Int. J. Control*, vol. 18, no. 5, pp. 897–914, 1973.

[129] J. Löfberg, "YALMIP : Yet Another LMI Parser," Aug. 2001. [Online]. Available : users.isy.liu.se/johanl/yalmip

[130] J. Löfberg, "YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, 2004.

[131] A. Luzi, "Commande adaptative de l'attitude du satellite PICARD - fin d'étude et synthèse de résultats," LAAS-CNRS, Toulouse, FRANCE, Tech. Rep. 130875, Mar. 2014.

[132] ——, "Commande variante dans le temps pour le contrôle d'attitude de satellites," Ph.D. dissertation, Université de Toulouse, Feb. 2014.

[133] A. Luzi, D. Peaucelle, J.-M. Biannic, C. Pittet, and J. Mignot, "Structured adaptive attitude control of a satellite," *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 28, no. 7-8, pp. 664–685, 2014.

[134] A. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse 1907, 1892, traduit de l'ouvrage original.

[135] J. Magni, "User manual of the linear fractional representation toolbox version 2.0," ONERA - Systems Control and Flight Dynamics Depertment, Tech. Rep., Oct. 2005, uRL : `www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Biannic/toolboxes.html`.

[136] I. Masubuchi, T. Akiyama, and M. Saeki, "Synthesis of output-feedback gain-scheduling controllers based on descriptor LPV system representation," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2003, pp. 6115–6120.

[137] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems : A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 669–673, 1997.

[138] D. Materassi and M. Salapaka, "Attraction domain estimates combining Lyapunov functions," in *American Control Conference*, St Louis, Jun. 2009.

[139] A. Megretski, "New IQC for quasi-concave nonlinearities," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 11, pp. 603–620, 2001.

[140] A. Megretski and A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 6, pp. 819–830, Jun. 1997.

[141] G. Meinsma, Y. Shrivastava, and M. Fu, "A dual formulation of mixed μ and on the losslessness of (D, G)-scaling," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 7, pp. 1032–1036, 1997.

[142] R. Middleton and G. Goodwin, "Imporved finite word length characteristics in digital control using delta operators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, no. 11, pp. 1015–1021, 1986.

[143] R. Middleton and I. Gustafsson, "Numerical sensitivity of linear matrix inequalities using shift and delta operators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 11, pp. 2873–2879, 2012.

[144] J. Mohammadpour and C. Scherer, Eds., *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer, 2012.

[145] K. Narendra and A. M. Annaswamy, "A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 32, no. 2, pp. 134–145, 1987.

[146] K. Narendra and L. Valavani, "Direct and indirect model reference adaptive control," *Automatica*, vol. 15, no. 6, pp. 653–664, 1979.

[147] M. Naumović and M. Stojić, "Comparative study of finite word length effects in digital filter design via the shift and delta transforms," in *IEEE TELSIKS*, Nis, Yugoslavia, Oct. 1999, pp. 141–144.

[148] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Philadelphia, PA : SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[149] C. Neuman, "Properties of delta operator model of dynamical physical systems," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 23, no. 1, pp. 296–301, 1993.

[150] M. d. Oliveira, J. Bernussou, and J. Geromel, "A new discrete-time stability condition," *Systems & Control Letters*, vol. 37, no. 4, pp. 261–265, Jul. 1999.

[151] M. d. Oliveira, J. Geromel, and J. Bernussou, "An LMI optimization approach to multiobjective and robust H_∞ controller design for discrete-time systems," in *Control and Decision Conference*, Phoenix, Ar., Dec. 1999.

[152] M. d. Oliveira, J. Geromel, and L. Hsu, "LMI characterization of structural and robust stability : The discrete-time case," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 296, no. 1-3, pp. 27–38, Jul. 1999.

[153] R. Ortega, L. Praly, and Y. Tang, "Direct adaptive tuning of robust controllers with guaranteed stability properties," *Systems & Control Letters*, vol. 8, no. 4, pp. 321 – 326, 1987. [Online]. Available : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167691187900983

[154] A. Packard and J. Doyle, "The complex structured singular value," *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 71–109, 1993.

[155] C. Paim, S. Tarbouriech, J. Gomes da Silva Jr., and E. Castelan, "Control design for linear systems with saturating actuators and L_2-bounded disturbances," in *Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, 2002.

[156] P. Pakshin and D. Peaucelle, "Lqr parametrization of static output feedback gains for linear systems with markovian switching and related robust stabilization and passification problems," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Shanghai, Dec. 2009.

[157] ——, "Stabilization and passification of uncertain systems via static output feedback," in *IEEE Conference on Control Application*, St Petersburg, Jul. 2009.

[158] ——, "Output feedback stabilizing control and passification of switching diffusion systems," in *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Budapest, Jul. 2010.

[159] P. Pakshin, D. Peaucelle, and T. Zhilina, "Stabilization of linear systems with state dependent noise via output feedback and its application to robust control design," in *14th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, Miedzyzdroje, août 2009.

[160] P. Pakshin, S. Soloviev, and D. Peaucelle, "Parametrization of stabilizing controllers for stochastic systems," *Autom. Remote Contr.*, vol. 70, no. 9, pp. 1514–1527, 2009.

[161] P. Parillo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems," *Mathematical Programing*, vol. 96, no. 2, pp. 293–320, 2003.

[162] D. Peaucelle, "Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres," Ph.D. dissertation, Université Toulouse III - Paul Sabatier, France, Jul. 2000.

[163] ——, "Systèmes à temps discret, commande numérique des procédés," cours ENSA Agadir, Maroc, 4ème année, 2003.

[164] ——, "Commande robuste des systèmes linéaires - techniques LMI," Transparents de cours, ENAC option Systèmes-Transport Aérien, décembre 2007.

[165] ——, "Integral quadratic separation applied to polytopic systems," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Haifa, Jun. 2009.

[166] ——, "Models in robust control framework," Slides for the 2nd russian summer school on Control, Information and Optimization, Pereslavl'-Zalesskii, Jun. 2010.

[167] ——, "Obtaining LMIs for robust control problems," Slides for the 2nd russian summer school on Control, Information and Optimization, Pereslavl'-Zalesskii, Jun. 2010.

[168] ——, "Robust control using convex optimization," Slides of the lecture at Kyoto University, Mar. 2010.

[169] ——, "Commande robuste des systèmes linéaires - techniques LMI - boîte à outil RoMulOC," Transparents de cours, Ecole des JD-MACS, Marseille, Jun. 2011.

[170] ——, "Analyse et synthèse de systèmes de commande robustes et résilients : Correcteurs robustes, résilients et performants." LAAS-CNRS, Toulouse, France, Tech. Rep. 12727, 2012.

[171] ——, "Analyse et synthèse de systèmes de commande robustes et résilients : Guide d'utilisation des codes." LAAS-CNRS, Toulouse, France, Tech. Rep. 12726, 2012.

[172] ——, "Commande robuste," Transparents de cours de Master II, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2012.

[173] ——, "Integral quadratic separation for robust analysis of launcher models," LAAS-CNRS, Tech. Rep. 12136, Mar. 2012.

[174] D. Peaucelle and D. Arzelier, "An efficient numerical solution for H_2 static output feedback synthesis," in *European Control Conference*, Porto, Portugal, Sep. 2001, pp. 3800–3805.

[175] ——, "Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 46, no. 4, pp. 624–630, Apr. 2001.

[176] ——, "Ellipsoidal sets for resilient and robust static output-feedback," LAAS-CNRS, Toulouse, FRANCE, Tech. Rep. 02353, Sep. 2002, 27 pages.

[177] ——, "Ellipsoidal sets for resilient and robust static output-feedback," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 50, no. 6, pp. 899–904, Jun. 2005.

[178] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou, "A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 40, no. 1, pp. 21–30, May 2000.

[179] D. Peaucelle, D. Arzelier, and C. Farges, "LMI results for resilient state-feedback with H_∞ performance," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Paradise Island, The Bahamas, Dec. 2004.

[180] D. Peaucelle, D. Arzelier, and G.Garcia, "Quadratic stabilisability and disk pole assignment for generalised uncertainty models - an LMI approach," in *2nd IMACS multiconference CESA*, vol. 1, Apr. 1998, pp. 650–655.

[181] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion, and F. Gouaisbaut, "Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation," *Automatica*, vol. 43, pp. 795–804, 2007.

[182] D. Peaucelle, L. Baudouin, and F. Gouaisbaut, "Integral quadratic separators for performance analysis," in *European Control Conference*, Budapest, Aug. 2009.

[183] D. Peaucelle, A. Bortott, F. Gouaisbaut, D. Arzelier, and C. Pittet, "Robust analysis of DEMETER benchmark via quadratic separation," in *IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Nara, Sep. 2010.

[184] D. Peaucelle and Y. Ebihara, "Lmi results for robust control design of observer-based controllers, the discrete-time case with polytopic uncertainties," in *IFAC 19th World Congress*, Cape Town, Aug. 2014.

[185] D. Peaucelle, Y. Ebihara, D. Arzelier, and T. Hagiwara, "General polynomial parameter-dependent Lyapunov functions for polytopic uncertain systems," in *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Kyoto, Jul. 2006.

[186] D. Peaucelle, D. Efimov, and J.-M. Biannic, "Commande adaptative," Transparents de cours, enseignement de l'Ecole doctorale EDSYS, Toulouse, May 2011.

[187] D. Peaucelle, C. Farges, and D. Arzelier, "Robust LFR-based technique for stability analysis of limit cycles," in *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, St. Petersburg, Aug. 2007.

[188] D. Peaucelle, A. Fradkov, and B. Andrievsky, "Passification-based adaptive control of linear systems : Robustness issues," *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 22, no. 6, pp. 590–608, Aug. 2008, doi : 10.1002/acs.1009.

[189] D. Peaucelle and A. Fradkov, "Robust adaptive L_2-gain control of polytopic MIMO LTI systems - LMI results," *Systems & Control Letters*, vol. 57, no. 11, pp. 881–887, 2008.

[190] D. Peaucelle and F. Gouaisbaut, "Discussion on "Parameter-dependent Lyapunov functions approach to stability analysis and design for uncertain systems with time-varying delay"," *European J. of Control*, vol. 11, no. 1, pp. 69–70, 2005.

[191] D. Peaucelle, D. Henrion, Y. Labit, and K. Taitz, "User's guide for SeDuMi Interface 1.04," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep. 02247, Apr. 2002.

[192] D. Peaucelle, H. Khan, and P. Pakshin, "LMI-based analysis of robust adaptive control for linear systems with time-varying uncertainty," *Autom. Remote Contr.*, vol. 70, no. 9, pp. 1540–1552, 2009.

[193] D. Peaucelle and V. Mahout, "3D 'helicopter' benchmark : Modeling," LAAS-CNRS, Toulouse, Tech. Rep., Jun. 2005.

[194] D. Peaucelle and M. Sato, "LMI tests for positive definite polynomials : Slack variable approach," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 54, no. 4, pp. 886 – 891, Apr. 2009.

[195] D. Peaucelle, S. Tarbouriech, M. Ganet-Schoeller, and S. Bennani, "Evaluating regions of attraction of LTI systems with saturation in IQS framework," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Jun. 2012, paper in an invited session.

[196] D. Peaucelle, A. Tremba, D. Arzelier, A. Bortott, G. Calafiore, G. Chevarria, F. Dabbene, B. Polyak, P. Shcherbakov, M. Sevin, P. Spiesser, and R. Tempo. (2014, Jan.) R-RoMulOC : Randomized and Robust Multi-Objective Control toolbox. [Online]. Available : http://projects.laas.fr/OLOCEP/romuloc

[197] C. Pittet, "Benchmark analyse robuste, mode normal de DEMETER," GT MOSAR, Bordeaux, Dec. 2002.

[198] C. Pittet and D. Arzelier, "DEMETER : a benchmark for robust analysis and control of the attitude of flexible microsatellites," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, 2006.

[199] C. Pittet, S. Tarbouriech, and C. Burgat, "Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and popov criteria," in *Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, 1997, pp. 4518–4523.

[200] I. Polik and T. Terlaky, "A survey of the S-lemma," *SIAM Review*, vol. 49, no. 3, pp. 371–418, 2007.

[201] K. Premaratne, R. Salvi, N. Habib, and J. LeGall, "Delta-operator formulated discrete-time approximations of continuous-time systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 3, pp. 581–585, 1994.

[202] A. Rantzer, "On the Kalman-Yakubovitch-Popov lemma," *Systems & Control Letters*, vol. 28, pp. 7–10, 1996.

[203] A. Rehm and F. Allgöwer, "An lmi approach towards general quadratic performance analysis and synthesis of descriptor systems," in *American Control Conference*, San Diego, Jun. 1999, pp. 1299–1303.

[204] C. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, and G. Stein, "Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 30, pp. 881–889, 1985.

[205] B. Romanchuk, "Computing regions of attraction with polytopes : Planar case," *Automatica*, vol. 32, no. 12, pp. 1727–1732, 1996.

[206] A. Saberi, Z. Lin, and A. Teel, "Control of linear systems with saturating actuators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 368–377, 1996.

[207] M. Safonov, *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, ser. Signal Processing, Optimization, and Control. MIT Press, 1980.

[208] ——, "Stability margins for diagonally perturbed multivariable feedback systems," *IEE Proceedings : Control Theory and applications*, vol. 129, no. 6, pp. 251–256, 1982.

[209] B. Sari, O. Bachelier, and D. Mehdi, "Robust state-feedback admissibilisation of discrete linear polytopic descriptor systems : a strict linear matrix inequality approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 6, no. 8, pp. 1097–1108, 2010.

[210] C. Scherer, "A full block S-procedure with applications," in *IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, Dec. 1997, pp. 2602–2607.

[211] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 42, no. 7, pp. 896–911, Jul. 1997.

[212] C. Scherer, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, ser. Advances in Design and Control. SIAM, 2000, ch. 10 Robust Mixed Control and Linear Parameter-Varying Control with Full Block Scallings, pp. 187–207, edited by L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu.

[213] ——, "LPV control and full-block multipliers," *Automatica*, vol. 37, no. 3, pp. 361–375, 2001.

[214] ——, "Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 27, no. 2, pp. 365–395, 2005.

[215] ——, "LMI relaxations in robust control," *European J. of Control*, vol. 12, pp. 3–29, 2006.

[216] C. Scherer and C. Hol, "Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs," *Mathematical Programing*, vol. 107, no. 1-2, pp. 189–211, 2006.

[217] C. Scherer and I. Köse, "Robustness with dynamic IQCs : An exact state-space characterization of nominal stability with applications to robust estimation," *Automatica*, vol. 44, pp. 1666–1675, 2008.

[218] ——, "From transfer matrices to realizations : Convergence properties and parametrization of robustness analysis conditions," *Systems & Control Letters*, vol. 62, pp. 632–642, 2013.

[219] G. Scorletti, "Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI," Ph.D. dissertation, Université Paris XI Orsay, 1997.

[220] G. Scorletti, X. Bombois, M. Barenthin, and V. Fromion, "Imporved efficient analysis for systems with uncertain parameters," in *IEEE Conf. Decision and Control*, New Orleans, Dec. 2007, pp. 5038–5043.

[221] G. Scorletti, J.-P. Folcher, and L. El Ghaoui, "Output feedback control with input saturations : LMI design approaches," *European Journal of Control*, vol. 7, no. 6, pp. 289–301, 2012.

[222] G. Scorletti and V. Fromion, "Further results on the design of robust H_∞ feedforward controllers and filters," in *IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego, Dec. 2006, pp. 3560–3565.

[223] G. Scorletti and L. E. Ghaoui, "Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, pp. 845–877, 1998.

[224] R. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis, *A Unified Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis series in Systems and Control, 1998.

[225] J. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, vol. 11-12, pp. 625–653, 1999. [Online]. Available : sedumi.mcmaster.ca

[226] H. Sussmann, E. Sontag, and Y. Yang, "A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 12, pp. 2411–2425, 1994.

[227] S. Tarbouriech, G. Garcia, J. M. Gomes da Silva Jr., and I. Queinnec, *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. London (UK) : Springer-Verlag, 2011.

[228] S. Tarbouriech, G. Garcia, J. Gomes da Silva Jr., and I. Queinnec, *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London : Spingler-Verlag, 2011.

[229] A. Teel, "On graph, conic relations, and input-output stability of nonlinear feedback systems," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 41, no. 5, pp. 702–709, May 1996.

[230] R. Tempo, G. Calafiore, and F. Dabbene, *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems, with Applications*, second edition ed. Spingler-Verlag, 2013.

[231] D. Theron, C. Farges, D. Peaucelle, and D. Arzelier, "Periodic H_2 synthesis for spacecraft in elliptical orbits with atmospheric drag and J_2 perturbations," in *American Control Conference*, New-York, Jul. 2007.

[232] A. Tits and M. Fan, "On the small μ theorem," *Automatica*, vol. 31, pp. 1199–1201, 1995.

[233] T. Toh, M. Todd, and R. Tutuncu, "SDPT3 - a MATLAB software package for semidefinite programming," *Optimization Methods and Software*, vol. 11, pp. 545–581, 1999. [Online]. Available : www.math.nus.edu.sg/$\sim$mattohkc/sdpt3.html

[234] J.-F. Tregouët, "Synthèse de correcteurs robustes périodiques à mémoire et application au contrôle d'attitude de satéllites par roues à réaction et magnéto-coupleurs." Ph.D. dissertation, Université de Toulouse, Oct. 2012. [Online]. Available : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00782111

[235] J.-F. Tregouët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz, "Periodic FIR controller synthesis for discrete-time uncertain linear systems," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Orlando, Dec. 2011.

[236] ——, "Periodic H_2 synthesis for spacecraft attitude control with magnetorquers and reaction wheels," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Orlando, Dec. 2011.

[237] ——, "Robust H_∞ performance of periodic systems with memory : New formulations, analysis and design results," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Maui, Dec. 2012.

[238] J.-F. Tregouët, D. Arzelier, D. Peaucelle, C. Pittet, and A. Falcoz, "Contrôle d'attitude périodique avec magnéto-coupleurs et roues à réaction," in *JDMACS*, Marseille, Jun. 2011.

[239] J.-F. Tregouët, D. Arzelier, D. Peaucelle, C. Pittet, and L. Zaccarian, "Reaction wheels desaturation using magnetorquers and static input allocation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014.

[240] J.-F. Tregouët, D. Arzelier, D. Peaucelle, and L. Zaccarian, "Static input allocation for reaction wheels desaturation using magnetorquers," in *IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Wurzburg, Sep. 2013.

[241] J.-F. Tregouët, Y. Ebihara, D. Arzelier, D. Peaucelle, C. Pittet, and A. Falcoz, "Robust stability of periodic systems with memory : New formulations, analysis and design results," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Jun. 2012.

[242] J.-F. Tregouët, D. Peaucelle, D. Arzelier, and Y. Ebihara, "Periodic memory state-feedback controller : New formulation, analysis and design results," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 58, no. 8, pp. 1986–2000, Aug. 2013.

[243] A. Trofino, "Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems," in *American Control Conference*, Chicago, Il, Jun. 2000, pp. 3707–3711.

[244] A. Trofino and T. Dezuo, "LMI stability conditions for uncertain rational nonlinear systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013.

[245] K. Tsakalis, "Robustness of model reference adaptive controllers : an input-output approach," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 5, pp. 556–565, 1992.

[246] E. Uezato and M. Ikeda, "Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and H_∞ control of descriptor systems," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 1999, pp. 4092–4097.

[247] J. Veenman, H. Koroglu, and C. Scherer, "Analysis of the controlled NASA HL20 atmospheric re-entry vehicle based on dynamic IQCs," in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Chicago, Aug. 2009.

[248] J. Veenman and C. Scherer, "Stability analysis with integral quadratic constraints : A dissipativity based proof," in *IEEE Conf. Decision and Control*, Florence, Dec. 2013, pp. 3770–3775.

[249] G. Verghese, B. Levy, and T. Kailath, "A generalized state-space for singular systems," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 26, no. 4, pp. 811–831, 1981.

[250] J. Willems, "Dissipative dynamical systems. part I : General theory. part II : Linear systems with quadratic supply rates," *Arch. Rational Mach. Analysis*, vol. 45, pp. 321–393, 1972.

[251] Y. Xia, P. Shi, G. Liu, and D. Rees, "Robust mixed H_2/H_∞ state-feedback control for continuous-time descriptor systems with parameter uncertainties," *Circuits Systems Signal Processing*, vol. 24, no. 4, pp. 431–443, 2005.

[252] S. Xu and C. Yang, "Stabilization of discrete-time singular systems : a matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 35, no. 9, pp. 1613–1617, 1999.

[253] I. Yaesh and U. Shaked, "Simplified adaptive control via improved robust positive real conditions," *Systems & Control Letters*, vol. 55, pp. 1033–1040, 2006.

[254] V. A. Yakubovich, "Minimization of quadratic functionals under the quadratic constraints and the necessity of a frequency condition in the quadratic criterion for absolute stability of nonlinear control systems," *Soviet Math. Doklady*, vol. 14, pp. 593–597, 1973.

[255] V. Yakubovitch, "The S-procedure in nonlinear control theory," *Vestnik Leningrad University*, pp. 62–77, 1971.

[256] ——, "Nonconvex optimization problem : The infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints," *Systems & Control Letters*, vol. 19, pp. 13–22, 1992.

[257] G. Zames, "On the input-output stability of time variyng nonlinear feedback systems, part i : Conditions derived using concepts of loop gain, conicity and positivity." *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 11, pp. 228–238, 1966.

[258] G. Zhai, N. Koyama, F. Brezelius, and M. Yoshida, "Strict LMI conditions for stability and stabilization of discrete-time descriptor systems," in *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Taipei, Sep. 2004, pp. 495–499.

[259] G. Zhang, Y. Xia, and P. Shi, "New bounded real lemma for discrete-time singular systems," *Automatica*, vol. 44, pp. 886–890, 2008.

[260] J. Zhang, C. Knospe, and P. Tsiotras, "Toward less conservative stability analysis of time delay systems," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, Dec. 1999, pp. 2017–2022.

[261] K. Zhou and J. Doyle, *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1997.

[262] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and Opimal Control*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1996.