



**HAL**  
open science

## Lecture acoustique de la voie ferrée

Pierre-Emile Chartrain

► **To cite this version:**

Pierre-Emile Chartrain. Lecture acoustique de la voie ferrée. Sciences de l'ingénieur [physics]. Aix Marseille Université, 2013. Français. NNT: . tel-01103224

**HAL Id: tel-01103224**

**<https://theses.hal.science/tel-01103224>**

Submitted on 14 Jan 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITE  
ÉCOLE DOCTORALE 353  
Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique,  
Micro et Nanoélectronique

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en Mécanique**

**Spécialité : ACOUSTIQUE**

Présentée et soutenue par

Pierre-Emile CHARTRAIN

## Lecture acoustique de la voie ferrée

Thèse préparée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique et à  
Innovation & Recherche SNCF,

dirigée par Pierre-Olivier MATTEI et co-dirigée par Estelle BONGINI

Soutenue le 17 Octobre 2013

### Jury :

|                             |                       |            |
|-----------------------------|-----------------------|------------|
| <i>Rapporteurs :</i>        | Alain LE BOT          | - LTDS     |
|                             | Alexandre GARCIA      | - LMSSC    |
| <i>Examineurs :</i>         | Astrid PIERINGER      | - CHALMERS |
|                             | Frédéric LEBON        | - LMA      |
| <i>Président :</i>          | Charles PÉZERAT       | - LAUM     |
| <i>Directeur de thèse :</i> | Pierre-Olivier MATTEI | - LMA      |
| <i>Invité :</i>             | Estelle BONGINI       | - SNCF     |



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Monsieur Pierre-Olivier MATTEI pour son encadrement scientifique et humain. Il a su trouver un juste équilibre entre le domaine de la recherche académique et le milieu plus contraignant de l'industrie. Ses encouragements ont fortement contribué à la qualité du document de thèse.

Je remercie très chaleureusement mon encadrant industriel Madame Estelle BONGINI, pour son soutien, l'enthousiasme porté à ce sujet de thèse, ses orientations scientifiques toujours pertinentes, mais aussi pour ces qualités humaines.

Je suis également très reconnaissant à l'égard des membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon travail, et plus particulièrement à Astrid PIERINGER qui a fait le déplacement de Suède jusqu'à Marseille, à Alain LEBOT et Alexandre GARCIA qui ont accepté la charge d'être Rapporteurs.

Merci à Florence MARGIOCCHI pour son accueil au sein de l'équipe Acoustique Vibration et Environnement, pour ses conseils mais aussi pour sa générosité et sa bonne humeur.

J'exprime ma gratitude envers tous les membres du Laboratoire de Mécanique de Marseille, pour m'avoir accueillie dans un cadre agréable et d'une grande richesse culturelle.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les collaborateurs de l'Innovation et Recherche, notamment Franck, Baldrik, Sofia, Charles, qui ont chacun enrichie mes connaissances et apportés une contribution positive à mes travaux de thèse.

Un grand merci à Florent, Virginie, Juan Carlos, Benoit, Olivier et tous les autres doctorants de l'innovation et Recherche SNCF, pour les moments passés à discuter, débattre, défendre des théories ou point de vue aussi pertinents que délirants, mais toujours passionnants.

Merci à l'équipe de l'AEF (Agence d'Essais Ferroviaire), et plus particulièrement à Cyril MELLET qui a contribué au bon déroulement des campagnes de mesures, ainsi qu'aux différents membres de l'ingénierie SNCF avec qui j'ai travaillé.

Enfin mille mercis à mes proches, mes parents sans qui je n'aurais probablement jamais découvert le domaine de l'acoustique et pour leurs soutiens indéfectible, tout comme pour mes amis, qui ont fortement contribué à mon équilibre moral, particulièrement dans les moments de travail les plus intenses.



## Résumé

Le bruit de roulement est la principale source de bruit des transports ferroviaires pour des vitesses conventionnelles. Il est produit par les vibrations puis le rayonnement acoustique du matériel roulant et de la voie provoqués par le déplacement imposé à la roue et au rail par les défauts microscopiques de surface présents sur les bandes de roulement appelé rugosité.

Afin d'évaluer et de gérer le bruit dans l'environnement, la directive Européenne 2002/49/CE impose la réalisation de cartographies du bruit dont celui des infrastructures ferroviaires. L'état acoustique de la voie ferrée peut être qualifié par le niveau de rugosité de ses rails et par son comportement dynamique qui servent de paramètres d'entrée des logiciels de prédiction du bruit dans l'environnement. Ces données sont généralement évaluées par des systèmes de mesures statiques, ce qui limite la caractérisation de la voie à quelques dizaines ou centaines de mètres.

Cette thèse a pour objectif de proposer et de valider une méthodologie de mesure de l'état acoustique de la voie (rugosité et comportement dynamique) qui permette de dépasser cette limitation et ainsi fournir les données mesurées sur l'ensemble du réseau ferroviaire français et européen aux modèles de prédiction de bruit en environnement. La solution proposée est un système de mesure en situation embarquée capable d'évaluer le niveau de rugosité et le comportement dynamique de la voie sur laquelle passe le véhicule équipé. Le système nommé LECAV pour « LECTure Acoustique de la Voie », consiste à mesurer et utiliser le bruit rayonné par la roue et la voie pour identifier la rugosité à la source de ce bruit. Ceci équivaut au problème inverse de la génération du bruit de roulement par la rugosité. Les gammes de fréquences de rayonnement distinctes et les positions de mesures acoustiques choisies proche de la voie (basses fréquences) et de la roue (hautes fréquences) permettent la séparation de leurs contributions acoustiques dans le bruit de roulement. Le problème inverse est alors résolu séparément pour la roue et pour la voie à l'aide du calcul de l'impédance acoustique.

L'estimation de l'impédance acoustique de la roue s'appuie sur une modélisation de son comportement vibratoire réalisée par la méthode des éléments finis et du calcul de la pression acoustique rayonnée par la roue basé sur la formulation intégrale de Rayleigh. L'impédance acoustique de la voie est estimée à partir d'un modèle de poutre épaisse en appui sur un support élastique périodique (système masse-ressort) et de la modélisation du rayonnement du rail par une ligne de sources ponctuelles élémentaires équiréparties sur sa longueur. Le comportement dynamique de la voie est obtenu par comparaison calcul/mesure du champ acoustique émis par le rail qui dépend des propriétés mécaniques des matériaux qui la composent. Les calculs du champ acoustique rayonné par le rail sont issus d'un ensemble de voies gabarits représentatives des réseaux ferroviaires français et européen.

La confrontation des résultats issus des différents modèles et de mesures réalisées sur un train à poste fixe ont permis de définir les conditions de validités et des approximations possibles de ces modèles.

**Mots clés :** Bruit de roulement, lecture acoustique, rugosité du rail, caractérisation expérimentale, vibroacoustique de la roue, intégrale de Rayleigh, vibroacoustique du rail, modèle de poutre.

## Acoustic reading of railway track

### Abstract

The rolling noise is the main source of noise in the railway transport sector at conventional speed. It is produced by the vibration and the acoustic radiation of the vehicle and the railway track, caused by the movement of at the wheel and the rail. These movements are imposed by microscopic irregularities on the rolling surface called roughness.

To assess and manage the rolling noise propagating in the environment, the 2002/49/EC European directive imposes to build noise maps. The acoustic characteristics of railway tracks can be qualified from the level of rail roughness and from dynamic behavior. They are used as input parameters in noise prediction software. These characteristics are generally assessed thanks to static measurement systems, which narrow down to the analysis of railway tracks to a few meters.

The aim of this Phd is to propose and validate a measurement methodology for the acoustic characterization of railway tracks (roughness and dynamic behavior). This methodology will allow to overcome the above mentioned limitations and will provide data input for the whole French and European railway network. It is an on-board measurement system assessing the level of rail roughness and the dynamic behavior of the scanned track. It is named LECAV for "LECTure Acoustique de la Voie" in French ("Acoustic reading of railway track"). It uses the noise radiating from the wheel and the rail. It corresponds to the inverse problem of rolling noise created from roughness. The distinct frequency ranges of sound radiated from the track and the wheel, in addition to the measured positions which are close to the track (low frequencies) and to the wheel (high frequencies) allow the separation their acoustic contributions in the total rolling noise. Therefore, the inverse problem is separately solved for the wheel and for the track based on the calcul of each acoustic impedance.

The assessment of the acoustic impedance model of the wheel is based on a finite element method for the vibration behavior and the Rayleigh integral formula for the acoustic pressure. The acoustic impedance of the rail is calculated from a beam model on periodic support (masse-stiffness system) for the vibration behavior, and a line of elementary sources equally spaced on his axis for the pressure. The vibration behavior of the track is obtained from the measures/calculation comparison of the rail sound field which depends on the mechanics properties of the track. Rail sound field is calculated for a set of typical railway tracks of French and European network.

Domains of validity of the developed models are determined with the confrontation of results between these models results and measurements on static train.

**Keywords :** Railway noise, acoustic reading, rail roughness, experimental characterization, vibroacoustic of wheel, Rayleigh integral, vibroacoustic of rail, beam model.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Résumé / Abstract</b>   | <b>i</b>  |
| <b>Mesure de la rugosité des rails des chemins de fer : du local au global</b> | <b>1</b>  |
| <b>1 Comment mesurer la rugosité des rails des chemins de fer ?</b>            | <b>5</b>  |
| 1.1 Rugosité du rail   | 6         |
| 1.1.1 Mesure locale  | 6         |
| 1.1.2 Mesure globale   | 8         |
| 1.1.3 Dépasser les limites   | 11        |
| 1.2 Comportement vibroacoustique d'une roue ferroviaire                        | 12        |
| 1.2.1 Modélisation du comportement vibratoire                                  | 12        |
| 1.2.2 Modélisation du comportement acoustique                                  | 17        |
| 1.3 Comportement vibroacoustique de la voie                                    | 18        |
| 1.3.1 Modélisation du comportement vibratoire d'un rail sur son support        | 19        |
| 1.3.2 Modélisation du rayonnement acoustique d'un rail                         | 29        |
| 1.4 Modélisation de l'interaction roue/rail                                    | 31        |
| 1.4.1 Modèle de Hertz pour un contact normal                                   | 31        |
| 1.4.2 Filtre de contact  | 33        |
| 1.4.3 Modèle d'excitation verticale  | 34        |
| 1.5 Nouvelle méthode de mesure de la rugosité : LECAV                          | 37        |
| <b>2 La roue : un capteur vibroacoustique</b>                                  | <b>43</b> |
| 2.1 Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail                   | 44        |
| 2.2 Modèle expérimental vibroacoustique de la roue                             | 46        |
| 2.2.1 Mesures acoustiques embarquées sur un TGV à 300 km/h                     | 46        |
| 2.2.2 Mesures vibroacoustiques à poste fixe                                    | 47        |
| 2.3 Modèle numérique vibroacoustique de la roue                                | 58        |
| 2.3.1 Modélisation du comportement vibratoire                                  | 58        |
| 2.3.2 Modélisation du rayonnement acoustique                                   | 66        |
| 2.3.3 Impédance acoustique numérique   | 76        |
| 2.4 De la pression sonore à l'effort d'interaction                             | 79        |
| 2.4.1 Calcul de la vitesse vibratoire  | 79        |
| 2.4.2 Calcul de l'effort appliqué  | 83        |
| 2.5 Discussion   | 85        |
| 2.5.1 Effet du roulage   | 85        |
| 2.5.2 Mesure de la rugosité des deux files de rail                             | 85        |
| 2.5.3 Robustesse de la méthode   | 86        |
| 2.6 Conclusions  | 86        |
| <b>3 La voie : un élément en interaction avec la roue</b>                      | <b>89</b> |
| 3.1 Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail                   | 90        |
| 3.2 Modélisation vibratoire du rail sur son support                            | 91        |
| 3.2.1 Réponse fréquentielle  | 92        |
| 3.2.2 Réponse spatiale   | 95        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3      | Modélisation du rayonnement acoustique du rail . . . . .                 | 97         |
| 3.3.1    | Modèle linéique de sources ponctuelles . . . . .                         | 97         |
| 3.3.2    | Rayonnement spatial . . . . .  | 99         |
| 3.3.3    | Dépendance fréquentielle . . . . .                                       | 109        |
| 3.3.4    | Conclusions sur le rayonnement acoustique du rail . . . . .              | 110        |
| 3.4      | De la pression sonore à la mobilité . . . . .                            | 110        |
| 3.4.1    | Effet des variations du comportement vibratoire sur le champ acoustique  | 110        |
| 3.4.2    | Pouvoir discriminant de la « signature acoustique » de la voie . . . . . | 112        |
| 3.4.3    | Identification expérimentale . . . . .                                   | 113        |
| 3.4.4    | Calcul de la vitesse vibratoire . . . . .                                | 116        |
| 3.5      | Discussion . . . . .   | 119        |
| 3.5.1    | Effet du chargement de la voie . . . . .                                 | 119        |
| 3.5.2    | Effet du roulage . . . . .   | 121        |
| 3.5.3    | Effet acoustique provoqué par la caisse du train . . . . .               | 121        |
| 3.5.4    | Robustesse de la méthode . . . . .                                       | 122        |
| 3.6      | Conclusions . . . . .  | 122        |
|          | <b>Conclusions et perspectives</b>                                       | <b>125</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>129</b> |
| <b>A</b> | <b>Modèles vibratoires de la voie : théorie des poutres</b>              | <b>135</b> |
| A.1      | Support continu . . . . .  | 135        |
| A.1.1    | Poutre d'Euler-Bernoulli . . . . .                                       | 135        |
| A.1.2    | Poutre de Timoshenko . . . . .   | 137        |
| A.2      | Support périodique . . . . .   | 139        |
| A.2.1    | Poutre d'Euler-Bernoulli . . . . .                                       | 140        |
| A.2.2    | Poutre de Timoshenko . . . . .   | 142        |
| <b>B</b> | <b>Campagne de mesure LECAV</b>  | <b>145</b> |
| B.1      | Caractéristiques de la voie ferrée . . . . .                             | 145        |
| B.2      | Équipement de la roue et du rail : informations techniques . . . . .     | 145        |
| B.3      | Mesure du taux de décroissance . . . . .                                 | 146        |
| B.4      | Correction des mesures vibratoires latérales sur le rail . . . . .       | 147        |
| <b>C</b> | <b>Modèle d'impédance acoustique d'une roue monobloc</b>                 | <b>151</b> |
| C.1      | Comportement vibratoire . . . . .  | 151        |
| C.2      | Comportement acoustique . . . . .  | 155        |
| C.2.1    | Intégrale de Rayleigh : théorie . . . . .                                | 155        |
| C.2.2    | Etude de convergence numérique du modèle de rayonnement . . . . .        | 156        |
| C.2.3    | Champ proche, champ lointain et effet de sol . . . . .                   | 159        |
| C.2.4    | Calcul du champ acoustique . . . . .                                     | 160        |
| C.3      | Impédance acoustique . . . . .   | 166        |
| C.4      | Approximation de l'impédance acoustique . . . . .                        | 171        |
|          | <b>Liste des symboles</b>  | <b>173</b> |

# Mesure de la rugosité des rails des chemins de fer : du local au global

Bien que le système ferroviaire soit une solution favorable à la demande croissante de mobilité par ses atouts environnementaux, le bruit qu'il génère n'en demeure pas moins une nuisance importante. La réduction du bruit reste un enjeu essentiel pour son développement et son intégration en zone habitée. Les recherches menées à ce sujet ont déjà permis d'établir que le bruit de roulement est la principale source du bruit ferroviaire pour des vitesses supérieures à 50 km/h et inférieures à 300 km/h [Mellet 2006]. Le bruit de roulement est produit par les vibrations puis le rayonnement acoustique du matériel roulant et de la voie (voir Fig. 1) provoqués par une excitation au niveau du contact roue/rail [Remington 1987b, Thompson 1993a]. Le phénomène excitateur est le déplacement imposé à la roue et au rail par les défauts de surface présents sur les bandes de roulement (roues et rail) et que l'on appelle rugosité. La puissance acoustique rayonnée dans l'environnement est la somme des contributions issues de chaque composant émissif, à savoir les roues du véhicule ainsi que le rail et les traverses de la voie.

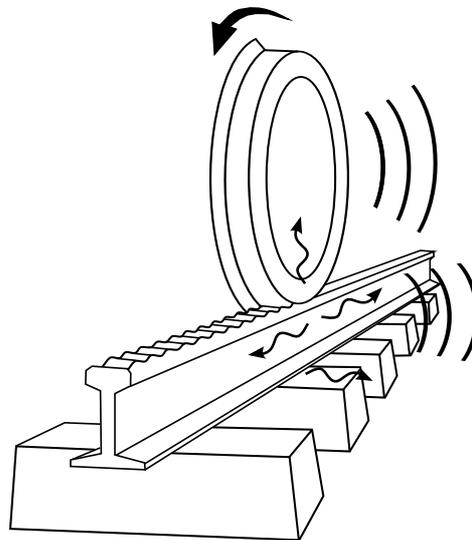


FIGURE 1 – Illustration du mécanisme à l'origine du bruit de roulement ferroviaire [Krylov 2001].

La directive Européenne 2002/49/CE relative à l'évaluation et à la gestion du bruit dans l'environnement [JOC 2002] impose la réalisation de cartographies du bruit émis dans l'environnement par les infrastructures de transport dont les infrastructures ferroviaires. La puissance acoustique rayonnée au passage d'un train dépend de la réponse vibroacoustique des structures rayonnantes et de l'amplitude du phénomène excitateur : la rugosité de la roue et du rail. La prédiction du bruit dans l'environnement est alors obtenue à partir de ces données. Le comportement vibroacoustique et la rugosité de la roue sont des données supposées invariantes durant le trajet effectué par le véhicule, ces données sont donc propres

au véhicule et leur détermination ne est pas problématique<sup>1</sup>. En revanche le comportement vibroacoustique et la rugosité du rail varient le long du trajet. Le comportement vibratoire du rail, qui pilote son comportement acoustique, dépend des propriétés mécaniques des éléments qui composent la voie, autrement dit du type de pose de la voie susceptible de varier le long du trajet. La rugosité qui est un phénomène aléatoire fonction de l'usure de la bande de roulement du rail, varie également le long du trajet. Actuellement, ces données sont généralement évaluées par des systèmes de mesure statiques : la rugosité et le comportement vibratoire de la voie ne peuvent donc être déterminés que localement par rapport à l'étendu du réseau ferroviaire existant.

Cette thèse a pour objectif de proposer et de valider une méthodologie de mesure de la rugosité et du comportement vibratoire de la voie qui permet de « dépasser les frontières » d'une mesure locale des systèmes actuels, à une mesure globale par un nouveau système. La solution proposée consiste en un système de mesure en condition embarquée, nommé LECAV pour « LECTure Acoustique de la Voie », capable d'estimer, à partir du bruit de roulement, le niveau de rugosité et le type de pose de la voie auscultée sur l'ensemble du réseau. La séparation des champs acoustiques émis par la roue et le rail est assurée par des mesures microphoniques en champ proche et leurs gammes de fréquences de rayonnements distinctes : basses fréquences pour le rail et hautes fréquences pour la roue. La méthodologie proposée repose principalement sur les liens vibroacoustiques entre les pressions émises respectivement par la roue et le rail, et le niveau vibratoire au point de contact roue/rail nécessaire à la détermination de la rugosité du rail. Elle repose également sur une technique d'identification du comportement vibratoire de la voie par comparaison calcul/mesure. Le développement et la validation de cette méthodologie relative à un nouveau système de mesure en situation embarquée de la rugosité constituent l'essentiel des travaux exposés dans ce document. Ils se composent de caractérisations expérimentales et de modélisations des comportements vibratoires et acoustiques du rail et de la roue.

Dans le premier chapitre, les différentes méthodes des systèmes de mesure embarquée de la rugosité du rail existants sont tout d'abord étudiées. Le test de deux systèmes, basés sur une approche vibratoire pour le premier et une approche acoustique pour le second, permet de statuer sur leurs principales limitations. Avant d'établir et d'exposer le principe général d'une nouvelle méthode de lecture acoustique de la voie, il a paru essentiel d'étudier les phénomènes physiques relatifs au bruit de roulement à travers la littérature, des modèles développés jusqu'alors et de leurs validations.

Dans le chapitre 2, les hypothèses sur lesquelles repose la méthode LECAV relatives à la roue sont validées à partir de mesures vibroacoustiques statiques et acoustiques embarquées. Les modélisations de l'impédance acoustique et de la réponse vibratoire de la roue, qui représentent le lien vibroacoustique entre la pression et l'amplitude vibratoire au point de contact roue/rail, sont ensuite présentées. Elles s'appuient sur une modélisation du comportement vibratoire de la roue réalisée par la méthode des éléments finis et sur le calcul de la pression acoustique rayonnée basé sur la formulation intégrale de Rayleigh. À partir des résultats expérimentaux et numériques obtenus, nous observons par la suite que la modélisation de l'impédance acoustique peut être simplifiée. Enfin, la capacité de la méthode

---

1. La rugosité de la roue est mesurée dans un centre de maintenance et le comportement vibroacoustique est calculé en fonction du type de roue qui équipe le matériel roulant.

LECAV, développée du point de vue de la roue, à estimer la rugosité est discutée.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du rayonnement du rail dans le but de déterminer d'une part une méthode d'estimation du comportement vibratoire de la voie établie sur une comparaison du champ acoustique relatif mesuré et préalablement calculé, et d'évaluer d'autre part l'amplitude vibratoire du rail au point de contact roue/rail. Une modélisation tridimensionnelle du rayonnement acoustique du rail par des lignes de sources ponctuelles élémentaires equiréparties sur sa longueur est développée à cet effet. L'étude vibroacoustique expérimentale du rail à partir de laquelle ce modèle est développé a aussi permis de valider un modèle de rayonnement du rail simplifié, qui néglige la géométrie de la section du rail mais qui est cependant plus adapté à la méthode LECAV. La méthode d'identification du type de pose de la voie est testée et validée à partir de ce modèle simplifié. En dernier lieu, l'effet du chargement du véhicule sur le comportement vibratoire de la voie et l'effet du roulage qui seront à considérer dans les travaux futurs sont abordés.



# Comment mesurer la rugosité des rails des chemins de fer ?

---

## Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Rugosité du rail</b> . . . . .   | <b>6</b>  |
| 1.1.1      | Mesure locale . . . . .   | 6         |
| 1.1.2      | Mesure globale . . . . .  | 8         |
| 1.1.3      | Dépasser les limites . . . . .  | 11        |
| <b>1.2</b> | <b>Comportement vibroacoustique d'une roue ferroviaire</b> . . . . .        | <b>12</b> |
| 1.2.1      | Modélisation du comportement vibratoire . . . . .                           | 12        |
| 1.2.1.1    | Déformée modale . . . . .   | 12        |
| 1.2.1.2    | Facteur d'amortissement . . . . .   | 14        |
| 1.2.1.3    | Réponse en fréquence . . . . .  | 15        |
| 1.2.2      | Modélisation du comportement acoustique . . . . .                           | 17        |
| <b>1.3</b> | <b>Comportement vibroacoustique de la voie</b> . . . . .                    | <b>18</b> |
| 1.3.1      | Modélisation du comportement vibratoire d'un rail sur son support . . . . . | 19        |
| 1.3.1.1    | Support continu uniforme . . . . .  | 20        |
| 1.3.1.2    | Comportement dynamique de la voie . . . . .                                 | 23        |
| 1.3.1.3    | Influence des paramètres de la voie . . . . .                               | 25        |
| 1.3.1.4    | Supports périodiques . . . . .  | 26        |
| 1.3.2      | Modélisation du rayonnement acoustique d'un rail . . . . .                  | 29        |
| 1.3.2.1    | Rayonnement acoustique 2D dans le plan transversal . . . . .                | 29        |
| 1.3.2.2    | Rayonnement acoustique 2D dans le plan longitudinal . . . . .               | 30        |
| <b>1.4</b> | <b>Modélisation de l'interaction roue/rail</b> . . . . .                    | <b>31</b> |
| 1.4.1      | Modèle de Hertz pour un contact normal . . . . .                            | 31        |
| 1.4.2      | Filtre de contact . . . . .   | 33        |
| 1.4.3      | Modèle d'excitation verticale . . . . .                                     | 34        |
| <b>1.5</b> | <b>Nouvelle méthode de mesure de la rugosité : LECAV</b> . . . . .          | <b>37</b> |

---

## 1.1 Rugosité du rail

Les surfaces des bandes de roulement de la roue et du rail ne sont pas totalement lisses, elles présentent des aspérités et des irrégularités nommées rugosité. Le passage d'une roue à la vitesse  $V$  sur une rugosité de longueur d'onde  $\lambda$  présente sur le rail (ou sur la roue), provoque une excitation vibratoire harmonique de fréquence [Thompson 2009] :

$$f = \frac{V}{\lambda}. \quad (1.1)$$

Les vibrations portées par les hautes fréquences sont transmises aux structures (roue et voie) qui rayonnent (voir Fig. 1). La gamme de fréquence du bruit de roulement est considérée entre 100 et 5000 Hz. En hautes fréquences, la taille de la surface de contact entre la roue et le rail conduit à une diminution du bruit de roulement (décrit par le filtre de contact abordé dans la section 1.4.2). A partir de (Eq. 1.1), les longueurs d'ondes de la rugosité à l'origine du bruit de roulement sont alors comprises entre 900 mm et 4,5 mm comme indiqué sur tableau 1.1. Ce dernier donne les ordres de grandeurs des longueurs d'onde de la rugosité en fonction de différentes vitesses<sup>1</sup> et de différentes fréquences (de rayonnement). En pratique, les basses fréquences sont peu pertinentes, de ce fait la gamme de longueur d'onde de rugosité appropriée est comprise entre 5 et 500 mm [Thompson 2000]. Les amplitudes de la rugosité s'étendent généralement de 100  $\mu\text{m}$  jusqu'à 1  $\mu\text{m}$  pour de bonnes surfaces de roulement. Contrairement à l'amplitude, la gamme de longueur d'onde est souvent limitée par l'instrument de mesure de rugosité.

|          | 100 Hz | 250 Hz | 500 Hz | 1000 Hz | 2500 Hz | 5000 Hz |
|----------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 80 km/h  | 230    | 90     | 45     | 22      | 9,0     | 4,5     |
| 160 km/h | 450    | 180    | 90     | 45      | 18      | 8,9     |
| 220 km/h | 610    | 245    | 120    | 60      | 25      | 12      |
| 320 km/h | 900    | 360    | 180    | 90      | 36      | 18      |

TABLE 1.1 – Exemple de longueurs d'onde de rugosité (en mm) pour différentes fréquences et vitesse de train

### 1.1.1 Mesure locale

Il existe deux principaux types d'instruments de mesures de rugosité directe<sup>2</sup> avec contact. Le premier est composé d'une structure rigide (règle) placée au dessus du rail comme illustrée sur la figure 1.1a. Un capteur de déplacement translate le long de la règle et mesure la hauteur de la surface du rail relativement à celle de la structure (voir Fig. 1.2a). La taille<sup>3</sup> de 1,2 m de cette dernière est la limitation principale de ce type d'instrument, pour une résolution en tiers d'octave<sup>4</sup>, elle fixe la bande de la longueur d'onde maximale à 100 mm. La fréquence d'excitation minimale imputable à la rugosité

1. Les différentes vitesses du tableau 1.1 correspondent aux vitesses maximales de différents types de lignes ferroviaires, des lignes basses vitesses limitées aux transports de marchandises (fret) aux lignes grande vitesse (LGV).

2. Sous entend une mesure du profil spatial réel de la bande de roulement du rail.

3. Taille standard internationale.

4. Analyse fréquentielle préconisée par la norme NF-EN 15610 relative à la méthode de mesure directe de la rugosité dans le cadre de la génération du bruit [AFN 2009].

mesurée augmente avec la vitesse du train ; pour une vitesse de 320 km/h, la fréquence  $f$  est environ égale à 800 Hz pour une longueur d'onde de la rugosité maximale mesurée de 100 mm.

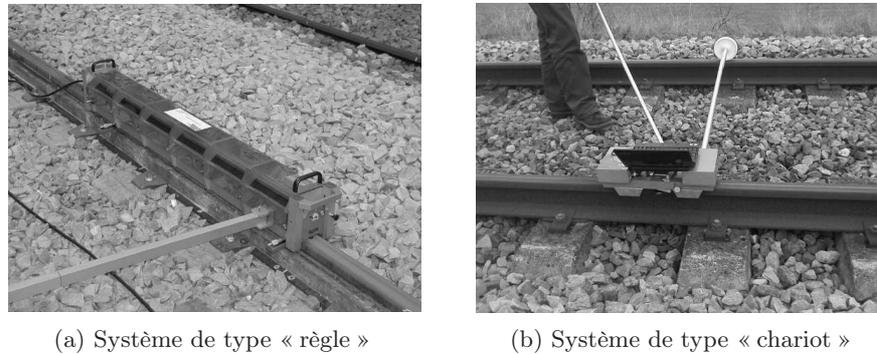


FIGURE 1.1 – Exemple de systèmes de mesures de rugosité du rail [Cléon 2010] ; règle développée par la société Muller BBM (a) et le chariot « Corrugation Analysis Trolley » (CAT) développé par la société RailMeasurement (b).

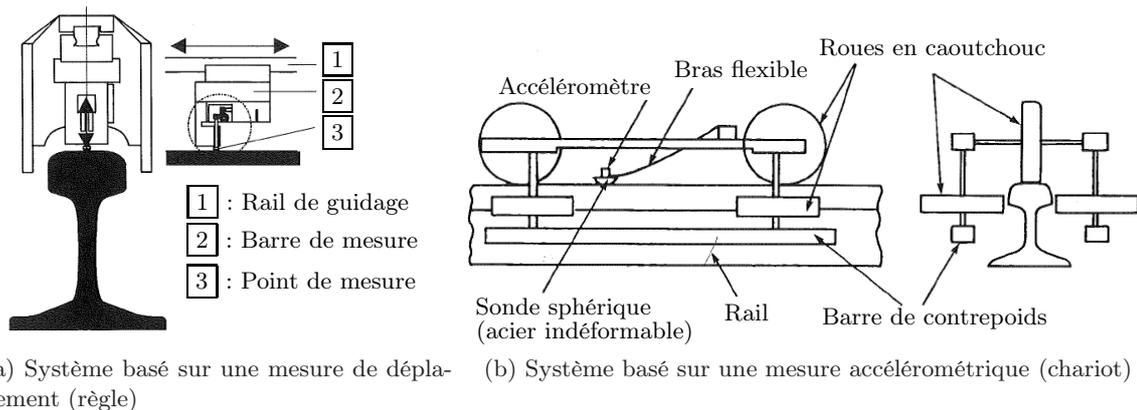
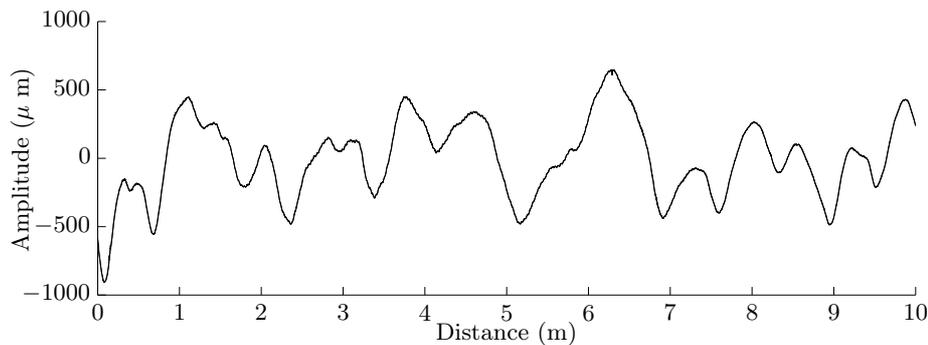


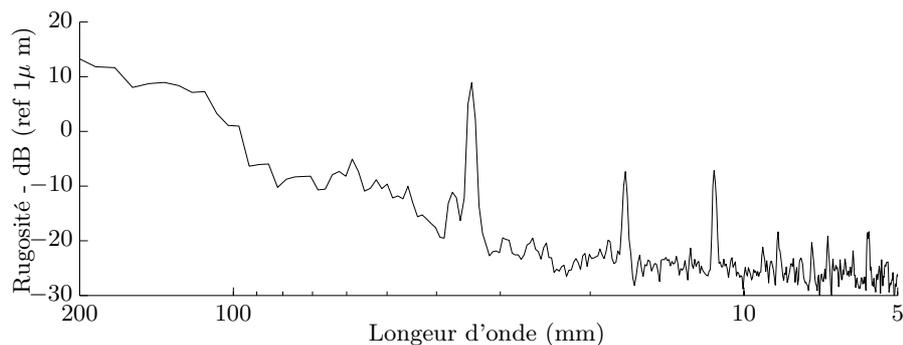
FIGURE 1.2 – Représentation schématique du système de mesure de la rugosité [Krylov 2001]

Le deuxième type d'équipement est un chariot (il est communément utilisé l'anglicisme « trolley » pour désigner ce type d'équipement) que l'utilisateur fait rouler le long du rail (voir Fig. 1.1b). L'utilisation d'un accéléromètre pour mesurer le profil du rail dispense ce système d'une structure rigide [Grassie 1999] (voir Fig. 1.2b). De plus, l'appareil mesure la distance parcourue par synchronisation spatiale, ainsi la mesure de rugosité d'une longue section de rail est rendue possible. Un exemple de mesure de rugosité effectuée sur 10 m avec le système « Corrugation Analysis Trolley » (CAT) est présentée sur la figure 1.3a. La représentation de la mesure dans le domaine des longueurs d'onde est tracée sur la figure 1.3b. Sur cet exemple trois longueurs d'onde d'amplitudes particulièrement élevées sont repérées à environ 35 mm, 17,5 mm et 11,5 mm, elles sont caractéristiques de l'opération de meulage effectuée peu de temps avant la mesure. Cette opération de maintenance qui consiste à reprofiler la bande de roulement du rail est réalisée à l'aide de meules rotatives en contact avec le rail. La vitesse de rotation des meules de 3600 tr/min et la vitesse du train de maintenance d'environ 8 km/h entraîne la répétition du passage d'un même point de la meule au contact du rail tous les 35 mm, qui forme ainsi un motif périodique.

Celui-ci correspond au premier pic repéré dans le spectre de longueur d'onde, les seconds et troisièmes pics correspondent respectivement aux premières harmoniques paire et impaire de la raie fondamentale provoquée par le meulage. Le son rayonné par un train qui passerait à 200 km/h sur les 10 m de rail de rugosité mesurée par le chariot CAT (voir Fig. 1.3a), serait composé de trois émergences tonales de fréquences 1600 Hz, 3200 Hz et 4800 Hz (cf Eq. 1.1).



(a) Rugosité spatiale



(b) Rugosité dans le domaine des longueurs d'onde

FIGURE 1.3 – Ligne de rugosité d'un long rail soudé (LRS) (mesure issu de [Delavaud 2011]).

Les deux types de système imposent un trafic nul, *i.e* pendant la nuit ou lors de blanc travaux<sup>5</sup>. Les conditions d'utilisation des systèmes de mesures directes sont alors inappropriées à l'exploitation de la voie lors des mesures. Pour le chariot, outre l'utilisation manuelle<sup>6</sup>, la limite de la distance de mesure est fixée par le temps accordé par la condition de trafic nul. Par conséquent, les distances de mesures effectuées par des méthodes de mesures de rugosité avec contact (directes) sont très limitées par rapport au nombre de kilomètres de voies ferroviaires, qui s'élève en France à plusieurs dizaines de milliers de kilomètres. Pour parer cette limitation et ainsi mesurer la rugosité sur l'ensemble du réseau ferroviaire Français (mesure globale), des méthodes alternatives de mesures de rugosité sans contact sont proposées.

### 1.1.2 Mesure globale

Pour ne plus être contraint par la distance de mesure de rugosité, le système de mesure doit être embarqué sur un train commercial ou un train d'auscultation dédié. Par conséquent, le procédé de mesure doit être sans contact. Différentes méthodes sont proposées dans la

5. Périodes de trafic nul planifiées dans le but de mener des opérations de maintenance de la voie

6. Qui préconise une vitesse de marche de l'utilisateur constante pour des mesures satisfaisantes.

littérature et présentées ci-dessous, elle sont basées sur plusieurs approches.

Une première approche **interférométrique** est envisagée par l'université de Pise [Fidecaro 2007] qui propose d'évaluer la rugosité du rail à l'aide de mesures d'interférométrie holographique (lumière visible). En comparant les « images » de références<sup>7</sup> et du rail, il apparaît des franges d'interférences parasites qui peuvent être exploitées pour estimer la rugosité directe. Cette méthode est prometteuse au vu de la compréhension théorique et des résultats en laboratoire, mais elle reste cependant au stade expérimental et demande une étude approfondie sur la fixation du matériel optique<sup>8</sup> dans le cadre d'une utilisation opérationnelle (*i.e* en roulage).

Une seconde approche **vibratoire** est notamment proposée par le département technique du gestionnaire public du réseau ferroviaire Suédois Trafikverket avec un système installé sur la rame « Swedish Track Recording Car » (TRC's) [Berggren 2008, Spänner 2008], et la société RailMeasurement avec le système « High Speed Rail Corrugation Analyser » (HSRCA) [Grassie 1989]. Ce type d'approche consiste à utiliser la fonction de transfert mesurée entre la rugosité et l'accélération de la boîte d'essieu<sup>9</sup>. La calibration du système est effectuée sur une voie de référence dont la rugosité est mesurée par une approche directe avec contact (règle ou chariot). La rugosité est estimée en multipliant cette fonction de transfert au niveau vibratoire mesuré sur la voie à qualifier.

Enfin une approche **acoustique** est utilisée par la Deutsche Bahn (DB) avec la rame « Schallmesswagen » (SMW) [Asmussen 2006] et par la société DeltaRail avec le système « Noise Monitoring » (NoisMon) [Jones 2006, Hardy 2006]. Cette approche consiste à mesurer le bruit de roulement proche de la zone de contact roue/rail. En effet, si la rugosité de la roue est faible par rapport à celle du rail, la variation du niveau de bruit est alors directement liée à la variation du niveau de rugosité du rail (pour une dynamique de voie donnée). Le système développé par la DB est constitué d'un microphone placé dans une enceinte semi-anéchoïque au dessus d'un bogie de la rame dédiée (Schallmesswagen). Il permet de mesurer les variations de bruit de roulement le long de la voie (sur 10 m) par rapport à un niveau de référence. Ces variations de bruit conduisent à une qualification de l'état de surface des rails, et si nécessaire au déclenchement d'opération de meulage<sup>10</sup>. Le second système (NoisMon) est constitué d'un microphone associé à un frontal d'acquisition dédié, fixé en champ proche du bogie. Il permet de mesurer un niveau acoustique moyen le long de la voie (sur 200 m) normalisé par rapport à une vitesse d'analyse de 160 km/h. La qualification de l'état de surface des rails est alors fonction de l'évolution du niveau acoustique au cours du temps (donc de la distance). Ces deux systèmes, basés sur une mesure acoustique, conduisent à une qualification de l'état de surface des rails par comparaison de niveaux de bruits globaux avec des valeurs gabarits mais ne permettent pas d'estimer un spectre de rugosité spatial. Afin d'obtenir une estimation « absolue » (et non plus relative) de la rugosité à partir de mesures acoustiques, la société M+P Consulting propose une calibration du système basés sur la mesure de la fonction de transfert entre la pression et la rugosité. Ce système est appelé « Acoustic Rail-Influence Recording on Wheels » (ARRoW) [Kuijpers 2010, Kuijpers 2008].

---

7. Dans un référentiel fixe par rapport au rail

8. Notamment dans le but d'éviter les résonances sur les modes de suspension de la plate-forme qui joue le rôle de référence

9. Les boîtes d'essieu sont situées aux extrémités des essieux (voir figure 1.4a).

10. Intervention pour une variation de niveau filtré par la pondération A supérieure à 3 dBA.

### Limitations des approches vibratoire et acoustique

Au cours d'une phase préliminaire du projet LECAV, les systèmes HSRCa et ARRoW ont été testés dans le cadre d'un benchmark des systèmes opérationnels de mesures de rugosité embarqués. Le benchmark avait pour objectifs de vérifier la répétabilité, la reproductibilité et la précision des différentes approches utilisées par ces systèmes. Une campagne de mesure sur des voies de rugosités et de comportements vibratoires différents a alors été menée. Les différents systèmes devaient délivrer un spectre de rugosité en tiers d'octave sur les différentes sections de voies dans la gamme de longueurs d'onde 8-500 mm préconisée par la norme ISO 3095 [AFN 2005].



(a) Système HSRCa (RailMeasurement)



(b) Système ARRoW (M+P consulting)

FIGURE 1.4 – Exemples de systèmes de mesure de rugosité indirecte embarqués; approche vibratoire (a) et approche acoustique (b).

**Le système HSRCa** a été initialement développé pour mesurer la sévérité des défauts locaux sur la bande de roulement du rail, plus particulièrement au niveau des soudures et des joints de rail. Il est actuellement utilisé en Australie à cet effet [Grassie 1989]. Le système est composé de quatre accéléromètres fixés sur les boîtes d'essieu d'un même bogie et d'un système d'exploitation dédié couplé à un tachymètre pour les informations de position et de vitesses (voir Fig. 1.4a). Les spectres de rugosités moyens dans le domaine des longueurs d'onde sont calculés tous les 10 m pour les deux files de rails des voies sélectionnées. Ce calcul est rendu possible par la mesure préalable de la fonction de transfert entre l'accélération de la boîte d'essieu et la rugosité de chaque file de rail des voies de références. Cette mesure est essentielle à la calibration du système.

**Le système ARRoW** est un système qui mesure simultanément le niveau sonore, la position et la vitesse (GPS). Il est composé de quatre microphones placés proche de chacune des roues d'un bogie (voir Fig. 1.4b). Les spectres de rugosités moyens dans le domaine des longueurs d'onde sont calculés tous les 10 m. Ces spectres sont obtenus à partir d'une fonction de transfert globale qui inclut une moyenne des mesures sur des sites de références (calibration du système) et des calculs issus de logiciel de prédiction de bruit en champ lointain. Il est supposé que la variation de bruit due à une variation de rugosité est la même en champ proche et en champ lointain (à 25m de la voie). Le calcul de la fonction de transfert est détaillé dans [Kuijpers 2008]. La calibration du système nécessite également la mesure directe de la rugosité des roues instrumentées. La distinction entre les deux files de rail n'est pas effectuée.

Les deux différents systèmes ont été calibrés sur les sites de référence A et B pour une vitesse de passage de 100 km/h (le système HSRCA ne retiendra que la calibration sur le site A). La voie de référence A était constituée de traverses en bois alors que la voie de référence B de traverses en béton. La répétabilité des résultats obtenus a été évaluée à partir de passages répétés sur une même voie C à la vitesse nominale de calibration (100 km/h). Enfin l'influence de la vitesse sur les estimations des spectres de rugosité a été évaluée à partir de passages répétés sur une même voie D pour des vitesses inférieures (60 km/h) et supérieures (120 km/h et 160 km/h) à la vitesse nominale de calibration.

Les résultats obtenus lors de cette campagne de mesure préliminaire du projet LECAV sont présentés dans [Bongini 2010] pour le système HSRCA et dans [Kuijpers 2010] pour le système ARRoW. La confrontation des niveaux des spectres de rugosité mesurés (mesure directe avec contact) et estimés (mesure indirecte sans contact) par les systèmes a montré leurs capacités à déterminer ces spectres pour les plus grandes longueurs d'ondes (au-delà de 20 mm pour l'approche acoustique et au-delà de 80 mm pour l'approche vibratoire). Le système acoustique a cependant montré des défaillances quant à la répétabilité des résultats des niveaux alors que les mesures de bruit étaient répétables. Ces défaillances sont donc probablement dues à la procédure ; l'hypothèse de proportionnalité entre le rayonnement en champ proche et champ lointain et/ou la moyenne des fonctions de transferts sur différents sites de référence peuvent être des sources d'erreur.

Les deux systèmes ont montré leurs limites pour estimer des spectres de rugosité de voies de réponses dynamiques différentes par rapport au site de référence. Au vu des différents comportements dynamiques des voies existantes (en France et en Europe), qui sont fonction de leurs compositions, cette limitation est très contraignante<sup>11</sup>. Enfin il a également été observé qu'il est primordial de maîtriser la rugosité des roues instrumentées ; leurs niveaux de rugosités doivent être inférieurs aux niveaux de rugosité des files de rail, plus particulièrement pour l'approche acoustique.

L'utilisation de mesures accélérométriques ou acoustiques semblent pertinentes mais demande des modifications des procédés actuels d'exploitation des données, afin notamment de considérer les variations de comportement dynamique des voies existantes.

### 1.1.3 Dépasser les limites

Afin d'estimer avec justesse la rugosité des rails de chemins de fer à l'aide d'une méthode sans contact fondée sur une approche vibratoire et/ou acoustique, la relation entre l'accélération et/ou la pression et la rugosité doit pouvoir évoluer en fonction du comportement vibratoire de la voie et potentiellement de la roue en contact. Cette capacité d'évaluation revient à considérer une « calibration adaptative » du système le long de la voie. Par conséquent, l'obtention d'un tel système nécessite la connaissance analytique ou numérique de la fonction de transfert, ainsi qu'une mesure et/ou une méthode d'identification du comportement dynamique de la voie. Il est alors indispensable d'appréhender les comportements vibroacoustiques de la roue et de la voie, ainsi que de leur interaction.

Dans le contexte de recherche sur le bruit de roulement et de sa modélisation, Remington

---

11. L'influence des différents éléments qui compose une voie ferroviaire sur son comportement vibratoire est présentée dans la section 1.3.1.3

a proposé un modèle théorique d'interaction roue/rail [Remington 1987a]. Ce modèle, ainsi que les travaux relatifs à l'élaboration d'un logiciel de génération de bruit de roulement nommé « Track Wheel Interaction Noise Software » (TWINS) [Thompson 1996c] développé par Thompson, ont contribué à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans la génération du bruit de roulement.

Dans l'intention de définir une méthode de mesure en situation embarquée de la rugosité, les connaissances et modélisations existantes sur les éléments à l'origine du bruit de roulement sont étudiées et présentées dans les sections suivantes<sup>12</sup>.

## 1.2 Comportement vibroacoustique d'une roue ferroviaire

### 1.2.1 Modélisation du comportement vibratoire

#### 1.2.1.1 Déformée modale

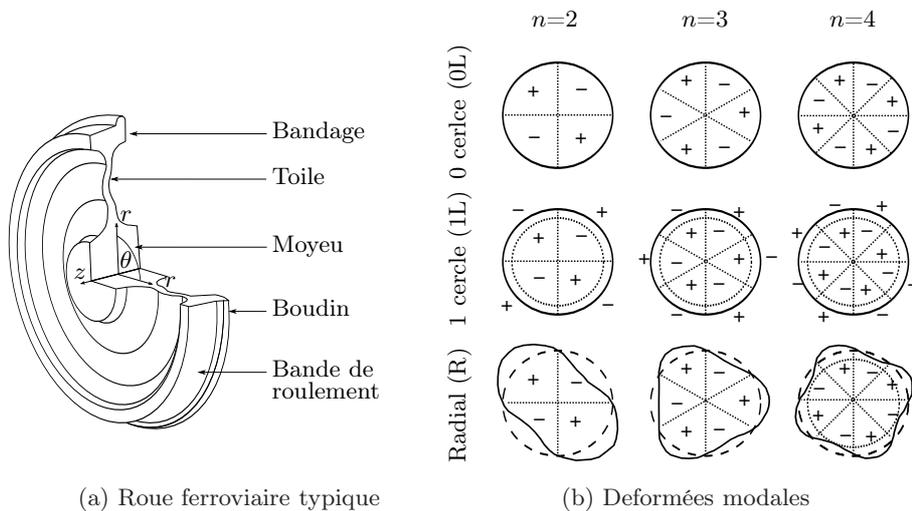


FIGURE 1.5 – Géométrie d'une roue ferroviaire typique et exemples de ses déformées modales, les signes +/- indiquent la phase relative des déformations, état non déformé (- - -), état déformé (—) et lignes nodales (· · ·)

Toute structure finie répond principalement sur ses modes de résonances. Les roues ferroviaires composées d'acier ont un amortissement très faible : leur comportement vibratoire est marqué par des résonances aiguës. Chaque résonance est caractérisée par une fréquence propre  $f_i$ , éventuellement complexe pour traduire les phénomènes dissipatifs, et une déformation associée  $\Phi_i(r, \theta)$  réelle ou complexe qui forment un mode propre  $[f_i, \Phi_i(r, \theta)]$ . Les modes d'une roue ferroviaire sont semblables à ceux d'une plaque plane circulaire à bord libre. Ils sont alors caractérisés par un nombre de diamètres nodaux  $n$  et un nombre de cercles nodaux  $m$  (voir Fig. 2.15). Les modes propres d'une plaque plane circulaire sont donnés par une combinaison de fonctions de Bessel pour la partie radiale et de fonction sinus/cosinus pour la partie orthoradiale ( $\sin n\theta$  ou  $\cos n\theta$  où  $\theta$  est la coordonnée angulaire autour de l'axe  $z$  de symétrie

12. Les modèles décrits et/ou abordés ne constituent pas une liste exhaustive des modèles existants, voir [Knothe 1993] pour une liste complète des modèles relatif au comportement dynamique de la voie et à l'interaction véhicule/voie proposés avant 1993.

de la roue, voir Fig. 1.5a). Les modes tels que  $n=0$  sont axisymétriques et les modes  $n \geq 1$  sont asymétriques et dégénérés à cause de la symétrie de révolution : à une fréquence propre correspond deux déformées modales, l'une en sinus, l'autre en cosinus [Touze 2002]. La figure 1.6 illustre le comportement vibratoire orthoradial pour un rayon  $r$  correspondant au centre de la toile d'une roue monobloc de 890 mm de diamètre. Pour une structure axisymétrique telle que la roue, les positions angulaires des lignes nodales sont arbitraires mais peuvent être fixées par la position de l'excitation ou d'une contrainte locale sur la structure. Dans l'exemple donné sur la figure 1.6, les diamètres nodaux sont fixés par une contrainte (force de réaction) au point de contact roue/rail en  $\theta=4,7$  rad. Néanmoins, une roue ferroviaire diffère quelque peu d'une plaque plane (voir Fig. 1.5a). La coupe transversale est asymétrique et d'épaisseur variable suivant le rayon. La conséquence de cette asymétrie est que d'une part, les modes radiaux et latéraux sont couplés, et que d'autre part les modes propres ne peuvent être directement décrits par des fonctions de Bessel. La première conséquence implique que les fréquences propres des modes latéraux qui possèdent un cercle nodal et radial sont proches, si bien qu'ils sont davantage couplés. De ce fait, l'identification de ces modes est particulièrement difficile. La seconde conséquence conduit à déterminer les modes propres par des approches numériques telles que la méthode des éléments finis [Thompson 1993b].

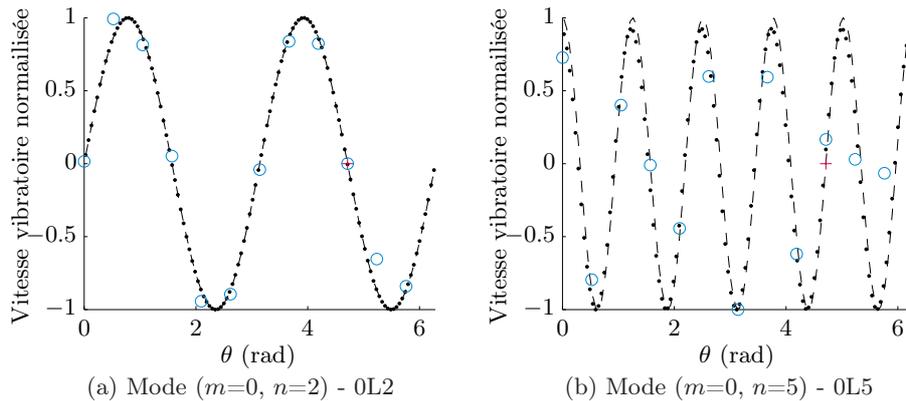


FIGURE 1.6 – Distribution d'amplitude vibratoire  $A$  orthoradiale pour  $r=0.26$  m (au centre de la toile) d'une roue ferroviaire monobloc de 890 mm de diamètre : modèle éléments finis ( $\cdot$ ), mesures ( $\circ$ ) (cf. section 2.2.2) et expression analytique ( $-$ );  $A=\sin(2\theta)$  (a)  $A=\cos(5\theta)$  (b). Position angulaire du point de contact roue/rail ( $+$ )

La figure 1.7 illustre le comportement vibratoire radial d'une roue monobloc de 890 mm de diamètre calculé par la méthode des éléments finis lorsque l'amplitude orthoradiale est à un maximum (cf. section 2.3.1.1). Quatre types de déformation de section peuvent être distingués :

- les modes latéraux à 0 cercle nodal (0L) :  
La section de roue se déforme suivant un mouvement de flexion latérale, avec une amplitude maximum au niveau du bandage (voir Fig. 1.7a et ligne 1 Fig. 1.5b).
- les modes radiaux (R) :  
Le découplage de la masse de la jante sur la raideur<sup>13</sup> de la toile induit un mouvement de translation radiale et de flexion latérale de la toile (voir Fig. 1.7b et ligne 3 Fig. 1.5b).
- les modes latéraux à 1 cercle nodal (1L) :

13. En traction compression.

La section de roue présente un deuxième mouvement de flexion latérale. Le mouvement de basculement du bandage est important (voir Fig. 1.7c et ligne 2 Fig. 1.5b).

- les modes latéraux à 2 cercles nodaux (2L) :

La déformée de la section transversale correspond à un troisième mode de flexion latérale avec un premier cercle nodal au centre de la toile et un second au niveau de la base du bandage. (voir Fig. 1.7d).

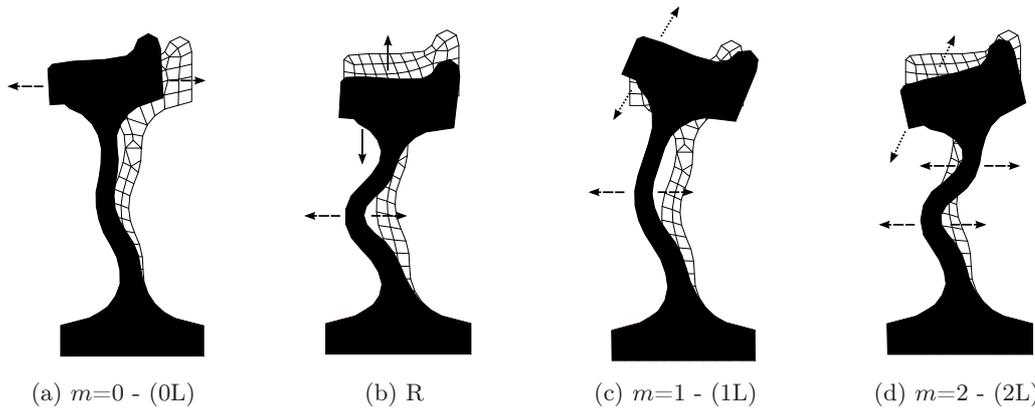


FIGURE 1.7 – Déformées modales de la section transversale d'une roue monobloc 890 mm pour un maximum d'amplitude orthoradiale, calculées par méthode des éléments finis (§ section 2.3.1.1) ; mouvements latéraux (--->), verticaux (—>) et couplés (···>)

Les différentes déformées modales sont quasiment les mêmes pour toutes les roues ferroviaires, que la toile soit plate ou courbe. Seules les fréquences propres sont dépendantes du type de roue, notamment de son diamètre. Plus le diamètre est grand, plus les fréquences propres sont basses [Thompson 1993b].

Les modes à un diamètre nodal ( $n=1$ ) sont couplés au mouvement de flexion de l'essieu. En revanche, lorsque  $n=0$ , les modes sont couplés au mouvement d'extension de l'essieu. Ces couplages apparaissent en basses fréquences et ont pour conséquence une augmentation de l'amortissement de la roue. Pour les modes d'ordre  $n$  supérieurs ( $n \geq 2$ ), les mouvements de l'essieu par rapport aux modes de la roue sont négligeables [Thompson 1993b].

### 1.2.1.2 Facteur d'amortissement

Le facteur d'amortissement est théoriquement défini comme le rapport entre l'amortissement modal et l'amortissement critique (Eq. 1.3) : il caractérise l'évolution et la décroissance au cours du temps des oscillations d'un système physique. Le facteur d'amortissement d'une roue ferroviaire est généralement très faible, il est lié aux propriétés mécaniques de l'acier qui possède un facteur de perte interne compris entre  $0,2 \cdot 10^{-4}$  et  $3 \cdot 10^{-4}$  [Cremer 2005]. La dissipation de l'énergie des ondes vibratoires dans l'acier est faible et les oscillations de la roue sont peu amorties.

Le facteur d'amortissement ne peut être déterminé qu'à partir de mesures, pour lesquelles il est nécessaire de porter une attention particulière à la résolution fréquentielle de l'analyse : l'amortissement étant très faible, les résonances de la structure sont très marquées et le

pas fréquentiel doit être suffisamment fin afin de caractériser leurs amortissements<sup>14</sup>. Une approximation raisonnable du facteur d'amortissement, déterminée par des mesures sur cinq types de roues ferroviaires, peut être utilisée pour les calculs prédictifs du comportement acoustique de la roue [Thompson 2009] :

- $10^{-3}$  pour les modes avec  $n=0$ ,
- $10^{-2}$  pour les modes avec  $n=1$ ,
- $10^{-4}$  pour les modes avec  $n \geq 2$ .

Pour les modes de diamètre nodaux  $n < 2$ , le facteur d'amortissement de la roue dépend du couplage avec l'essieu. Pour les modes  $n \geq 2$ , le facteur d'amortissement est caractérisé par le facteur de perte interne de l'acier.

| Mode                  | R2    | 1L2   | R3    | R0    | 1L4    |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Fréquence (Hz)        | 1722  | 2387  | 2426  | 2761  | 3707   |
| Amortissement $\zeta$ | 0,009 | 0,004 | 0,004 | 0,003 | 0,0013 |

TABLE 1.2 – Facteur d'amortissement mesuré sur une roue en roulage [Thompson 1999b].

Lors du roulage l'amortissement mesuré initialement sur une roue libre est augmenté par le couplage entre la roue et le rail [Thompson 2009]. Cela signifie que c'est le contact entre les deux structures qui est responsable de la dissipation d'énergie vibratoire. Le tableau 1.2 fournit des valeurs d'amortissement mesurées sur une roue en roulage [Thompson 1999b]. L'amortissement équivalent a été estimé par la largeur fréquentielle du pic à demi-puissance (ce qui revient à -3 dB). Les facteurs d'amortissements trouvés, compris entre  $10^{-3}$  et  $9.10^{-3}$ , sont effectivement légèrement plus élevés que les facteurs d'amortissement mesurés sur une roue libre (autour de  $10^{-4}$ ).

### 1.2.1.3 Réponse en fréquence

Le comportement vibratoire de la roue peut être analytiquement modélisé par un anneau [Munjal 1982, Remington 1987a], une plaque plane circulaire [Irretier 1983], on encore une poutre [Thompson 2009]. Cependant, étant donnée la complexité de sa géométrie, les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont plus fiables [Thompson 1993b].

La réponse en fréquence de la roue soumise à un effort extérieur peut être déterminée à partir de ses modes de vibrations. Introduisons cela en considérant un système amorti à un degré de liberté de type masse  $M$ , ressort  $K$ , amortissement  $C$ . L'amplitude complexe  $u$  du déplacement de la masse est donnée par l'équation du mouvement :

$$-\omega^2 M u + i\omega C u + K u = F, \quad (1.2)$$

où la dépendance temporelle  $e^{i\omega t}$  est implicite. L'expression de la pulsation propre  $\omega_i$  et du facteur d'amortissement  $\zeta_i$  :

$$\omega_i = \sqrt{K/M} \quad \text{et} \quad \zeta_i = \frac{C}{2} \sqrt{KM}, \quad (1.3)$$

14. La technique usuellement utilisée pour déterminer le facteur d'amortissement nécessite de mesurer l'amplitude maximale et la largeurs de bande à -3 dB de la résonance, la justesse de leurs mesures dépend de la résolution fréquentielle (Eq. 2.2.2.3).

permettent d'écrire l'expression (1.2) sous la forme :

$$M(\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\zeta_i\omega\omega_i)u = F, \quad (1.4)$$

ainsi la mobilité<sup>15</sup> est donnée par :

$$Y = \frac{i\omega u}{F} = \frac{i\omega}{M(\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\zeta_i\omega\omega_i)}. \quad (1.5)$$

De manière plus générale, lorsque les  $N$  premiers modes propres  $\Phi_n$  sont connus, la réponse d'une structure au point  $j$  pour une force de pulsation  $\omega$  ( $f=2\pi$ ) appliquée en  $k$  est obtenue par superposition modale :

$$Y_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{i\omega\Phi_{ji}\Phi_{ki}}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\zeta_i\omega\omega_i)}, \quad (1.6)$$

où  $\Phi_{ji}$  est l'amplitude du mode  $i$  à la position  $j$ ,  $\Phi_{ki}$  est l'amplitude du mode  $i$  à la position  $k$ , et  $m_i$  est la masse généralisée [Ewins 2000]. La pulsation  $\omega_i$ , l'amplitude  $\Phi_i$  et la masse généralisée  $m_i$  de chaque mode  $i$  sont calculés par la méthode des éléments finis adaptée aux structures complexes de grande taille. Les réponses vibratoires d'une roue TGV calculées à l'aide de la méthode des éléments finis et de la superposition modale (Eq. 1.6) sont présentées sur la figure 1.8. Le comportement de l'essieu est pris en compte par l'addition d'un système anti-résonant à l'expression (Eq. 1.6) tel que :

$$Y = \frac{i\omega}{K} - \frac{i}{M\omega}, \quad (1.7)$$

où  $M$  est la moitié de la masse de l'essieu ( $\approx 600$  kg) et  $K$  la raideur choisie de manière à ajuster la fréquence d'antirésonance sur la résonance du mode de corps rigide de la roue (autour de 600 Hz).

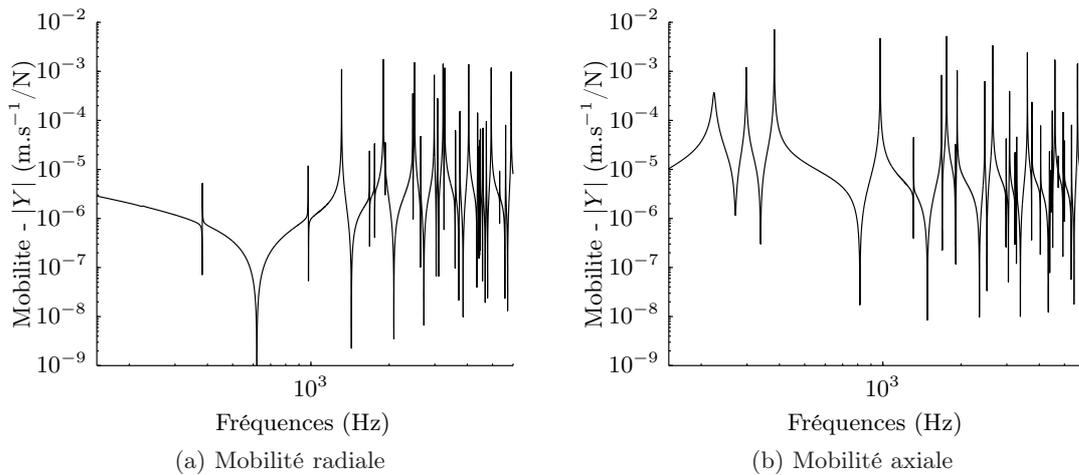


FIGURE 1.8 – Mobilité d'une roue TGV pour une force appliquée sur la bande de roulement.

En basses fréquences (au dessous de 500 Hz), la mobilité radiale tracée sur la figure 1.8a,

15. La mobilité est le rapport entre la vitesse vibratoire et la force appliquée au même point, elle représente la capacité d'une structure à vibrer pour une force unitaire.

dépend de la masse de l'essieu. Après l'antirésonance autour de 600 Hz, la mobilité remonte jusqu'à être pilotée par la série de résonances aiguës qui apparaissent à partir de 1,5 kHz : celles-ci correspondent aux modes radiaux et axiaux à un cercle nodal (cf. section 2.2.2.2). La mobilité axiale représentée sur la figure 1.8b, est dominée par les résonances associées aux modes à zéro cercles nodaux. Les plus importants d'entre eux sont ceux pour lesquels  $n \geq 2$  qui ont un amortissement plus faible que pour les modes avec  $n < 2$ . Pour ces derniers, la mobilité de la roue est indépendante de l'essieu et la modélisation de son comportement vibratoire n'est pas nécessaire. Il est cependant essentiel de considérer un encastrement de l'extrémité intérieure du moyeu [Thompson 2009]. Dans ce cas, les résultats obtenus pour les modes composés de zéro et un diamètre nodal (0L et 1L), fortement couplés aux modes de l'essieu, sont altérés mais, de par leurs plus forts amortissements, leurs réponses vibratoires sont peu contributives au bruit de roulement [Thompson 1993b].

### Effet de la rotation de la roue

La rotation de la roue conduit à une séparation des fréquences des modes  $n \geq 1$  en deux résonances ( $f \pm nV/2\pi r_0$  avec  $V$  la vitesse de roulage et  $r_0$  le rayon de la roue). L'une est l'autre correspondent aux propagations d'ondes dans les directions identique et opposée à la direction de roulage [Thompson 1993d].

### 1.2.2 Modélisation du comportement acoustique

Le champ acoustique produit par une structure vibrante peut être représenté par une distribution de sources acoustiques. Cette distribution dépend de la distance et de l'orientation du récepteur par rapport à la structure. Dans le cadre de la prédiction du bruit de roulement dans l'environnement, le champ de pression total produit par la structure est décrit par sa puissance acoustique. La puissance  $W$  rayonnée par une structure vibrante dans une bande de fréquence particulière peut être écrite [Cremer 2005] :

$$W = \rho_0 c_0 S \frac{1}{2} |\bar{v}^2| \sigma, \quad (1.8)$$

où  $S$  est l'aire de la surface vibrante de la structure,  $|\bar{v}^2|$  est la vitesse vibratoire quadratique moyenne spatialement moyennée.  $\rho_0$  et  $c_0$  sont respectivement la densité de l'air et la vitesse de propagation des ondes sonores dans l'air.  $\sigma$  est le coefficient de rayonnement qui exprime le rapport entre la puissance acoustique rayonnée par la structure et la puissance rayonnée par un piston plan de surface identique. En basses fréquences, quand la longueur d'onde acoustique est grande devant la dimension caractéristique de la surface vibrante, le coefficient de rayonnement est généralement faible. Lorsque la fréquence est supérieure à la fréquence critique, le coefficient de rayonnement tend vers 1. La fréquence critique  $f_c$  correspond à la fréquence pour laquelle la longueur d'onde structurale est égale à la longueur d'onde acoustique. Pour une plaque mince la fréquence critique s'écrit :

$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi h} \left( \frac{12\rho(1-\nu)}{E} \right)^{1/2}, \quad (1.9)$$

où  $E$  est le module d'Young,  $\rho$  la densité, et  $\nu$  le coefficient de Poisson de l'acier. Pour une épaisseur  $h$  d'une plaque en acier représentative d'une roue ferroviaire ( $h \approx 25$  mm), la fréquence critique est de l'ordre de 500 Hz.

Le coefficient de rayonnement peut être calculé par une approche analytique, telle que la formulation intégrale de Rayleigh [Thompson 1988]. Pour cette approche, l'interaction entre le champ rayonné par la face avant et arrière de la roue ne peut être considérée, tout comme l'effet de la géométrie complexe. Les travaux basés sur la méthode des éléments de frontières (BEM)<sup>16</sup> ont montré que le coefficient de rayonnement déterminé par la méthode de Rayleigh en basses fréquences pouvait être significativement différent mais que les écarts sont inférieurs à 2 dB en hautes fréquences [Thompson 2002]. Les résultats obtenus par la méthode des éléments de frontière révèlent que quel que soit le nombre de diamètres nodaux et le type de modes, le facteur de rayonnement croît rapidement vers l'unité entre 250 et 1200 Hz (voir Fig. 1.9). Finalement le coefficient de rayonnement de chaque mode tend vers 1 après la fréquence de coupure de la roue proche de 500 Hz. Au voisinage de la fréquence de résonance d'un mode, la contribution acoustique de la roue est alors celle de cet unique mode.

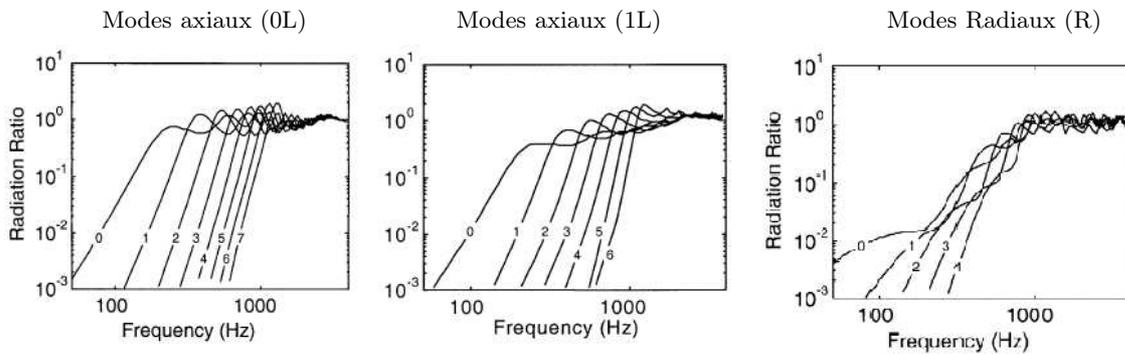


FIGURE 1.9 – Coefficient de rayonnement de différents types de modes d'une roue fret de 920 m de diamètre par nombre de diamètres nodaux  $n$  [Thompson 2002].

## Directivité

A partir des résultats de mesures exposés dans [Thompson 2002], pour les mouvements radiaux le champ de pression peut être approché par un champ omnidirectionnel. Il est en revanche plus approprié de décrire le champ acoustique créé par les déformations axiales par celui d'un dipôle dont le maximum d'amplitude est dans la direction axiale, et le minimum dans le plan de la roue.

## 1.3 Comportement vibroacoustique de la voie

La capacité de la voie à rayonner du bruit est mesurée par l'intermédiaire du coefficient de rayonnement du rail qui dépend des ondes vibratoires qui le parcourent. Par conséquent, le rayonnement est déterminé à partir de la modélisation du comportement vibratoire du rail sur son support. On propose dans la suite de cette section de présenter les principaux modèles dynamiques de voie, puis de s'intéresser aux modèles de rayonnement du rail.

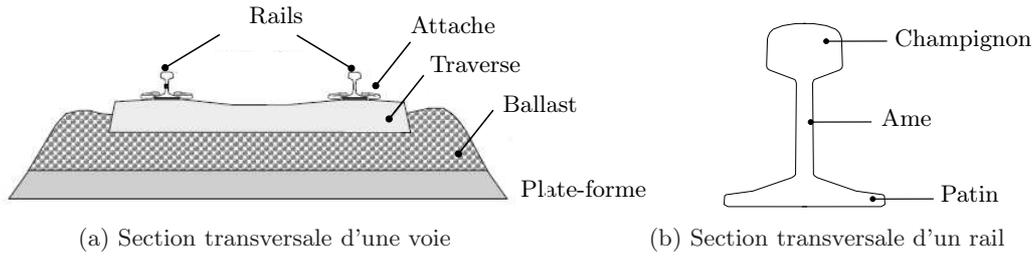


FIGURE 1.10 – Pose de voie ferroviaire typique (a) et différentes parties du rail (b)

### 1.3.1 Modélisation du comportement vibratoire d'un rail sur son support

Pour une pose de voie classique, le rail est monté sur une semelle élastique (semelle sous rail) posée sur la traverse, elle-même noyée dans le ballast<sup>17</sup> (voir Fig. 1.10a). Une attache plus ou moins souple maintient l'ensemble rail et semelle en place sur la traverse (voir par exemple Fig. B.1). Cette pose de voie est communément modélisée par deux systèmes masse-ressort en série (voir Figure 1.11). L'expression de la raideur équivalente qui supporte le rail s'écrit alors :

$$s(\omega) = s_p \frac{s_b - \omega^2 m_t}{(s_p + s_b) - \omega^2 m_t}, \quad (1.10)$$

où  $s_p$  caractérise la raideur complexe<sup>18</sup> de la semelle,  $m_t$  symbolise la masse d'une demi-traverse et  $s_b$  la raideur complexe du ballast. Cette raideur représente le comportement vibratoire harmonique de chaque support ponctuel espacé périodiquement d'une distance  $a$  (distance inter-traverse). Le support peut être également considéré comme continu et uniforme : dans ce cas la raideur équivaut à une raideur linéique ;  $s'(\omega) = s(\omega)/a$  avec  $s'_p = s_p/a$  et  $m'_t = m_t/a$  (voir Fig. 1.11).

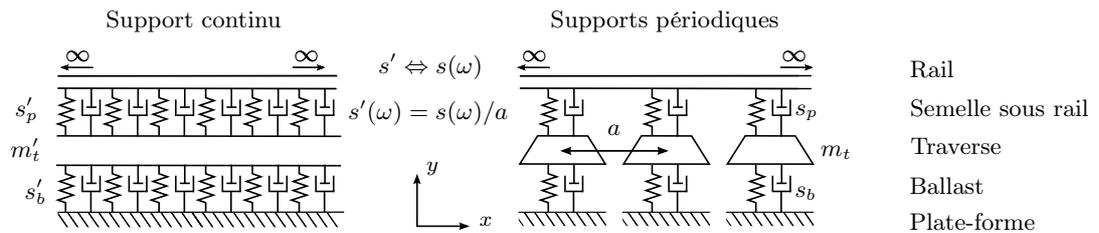


FIGURE 1.11 – Modélisation de la voie par un support double couche

D'autres modélisations de la voie sont proposées dans la littérature, avec notamment la prise en compte des modes de déformation des traverses [Grassie 1995].

Le rail peut être considéré comme une structure de type poutre à section indéformable et le long de laquelle se propagent des ondes vibratoires de part et d'autre du point d'excitation. En premier lieu le modèle de poutre mince d'Euler-Bernoulli est utilisé pour modéliser le

16. Boundary Elements Method

17. Ce même schéma est valable pour une voie sur dalle, la traverse étant le plus souvent insérée dans un chausson élastique noyé dans la dalle en béton.

18. L'inclusion du phénomène de dissipation induit une valeur d'amortissement complexe tel que  $s = \bar{s}(1 + i\eta)$  où  $\eta$  est le facteur de perte du matériau considéré et  $\bar{s}$  la raideur réelle.

comportement en flexion verticale d'un rail, cependant cette représentation atteint ses limites vers 1 kHz. Pour une modélisation du rail en plus hautes fréquences, il est plus adapté d'employer une poutre de Timoshenko qui prend en compte les effets de cisaillement et d'inertie rotationnelle (effets négligés dans le cas d'une poutre d'Euler). Pour des fréquences supérieures à 2,5 kHz il est nécessaire de prendre en compte les déformations de la section. A partir de cette fréquence, le mouvement vertical du patin<sup>19</sup> (« foot flaping ») apparaît progressivement jusqu'à environ 5 kHz où le patin entre en résonance (voir Fig. 1.12). La modélisation du comportement de la section du rail peut être effectuée par la méthode des éléments finis, cependant cette technique (comme son nom l'indique) est inappropriée à une structure infinie telle que le rail. En appliquant des conditions de symétrie ou d'anti-symétrie aux limites de la section du maillage élément finis du rail il est néanmoins possible d'obtenir les modes de déformation verticale [Thompson 1997]. Un modèle multi-poutres est également proposé par Wu [Wu 1999a] ; le rail est représenté par deux poutres de Timoshenko couplées par une couche élastique infinie (modélisée par des ressorts). La masse de la seconde poutre est ajustée de manière à représenter la masse du patin et obtenir la fréquence de résonance de battement du patin. Pour représenter fidèlement le comportement vibratoire du rail sur son support en hautes fréquences, il faut alors des modèles de plus en plus complexes.



FIGURE 1.12 – Mode de déformation verticale du patin en hautes fréquences

Afin d'illustrer le comportement vibratoire du rail, l'expression analytique de différents types de poutres de sections indéformables est présentée pour un support continu uniforme dans un premier temps. Le comportement dynamique de la voie ainsi que l'influence des paramètres des éléments qui la composent sont ensuite présentés. Enfin la prise en compte de la périodicité du support est abordée. La présentation théorique est tirée des travaux de Hamet [Hamet 1999] et de Nordborg [Nordborg 2002], notamment exposés dans [Faure 2011] (cf. annexe A).

Les paramètres numériques des modèles utilisés (Poutre d'Euler-Bernoulli ou Timoshenko sur support continu ou périodique) sont donnés dans le tableau 1.3. Comme pour le support, les phénomènes dissipatifs dans le rail sont pris en compte en utilisant un module d'élasticité  $E$  complexe :  $E = E(1 + i\eta_r)$  où  $\eta_r$  est le facteur de perte interne dans le rail. La rigidité en flexion verticale est notée  $B = EI$  où  $I$  est le moment d'inertie.

### 1.3.1.1 Support continu uniforme

#### Poutre d'Euler Bernoulli

19. Les différentes parties du rail sont indiquées sur la figure 1.15c.

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre mince d'Euler en flexion s'écrit :

$$B \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tilde{u}(x, t) + s' \tilde{u}(x, t) + m'_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}(x, t) = 0. \quad (1.11)$$

Le mouvement de flexion de la poutre est noté  $\tilde{u}(x, t)$  où  $x$  est la position le long du rail et  $t$  le temps. Plaçons nous en régime harmonique<sup>20</sup>  $\tilde{u}(t) = u(\omega) e^{i\omega t}$ , et déplaçons la force de réaction du support  $[-F_s(\omega) = s'(\omega)u(x, \omega)]$  au second membre :

$$\frac{d^4}{dx^4} u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) = -\frac{F_s(\omega)}{B}, \quad (1.12)$$

où  $k_B^4 = m'_r \omega^2 / B$  est le nombre d'onde de flexion d'une poutre mince (infinie et libre). Considérons que le déplacement est de la forme  $u(x, \omega) e^{\pm \gamma(\omega)x}$  où la grandeur complexe  $\gamma(\omega)$  est appelée constante de propagation<sup>21</sup>. En substituant la forme du déplacement considérée dans (Eq. 1.12), la relation de dispersion des ondes dans une poutre d'Euler sur son support s'écrit alors :

$$\gamma^4 = k_B^4 \left[ 1 - \frac{s'(\omega)}{m'_r \omega^2} \right] = k_\beta^4. \quad (1.13)$$

La solution générale de l'équation peut être écrite sous la forme :

$$u(x, \omega) = a_1 e^{k_\beta x} + a_2 e^{i k_\beta x} + b_1 e^{-k_\beta x} + b_2 e^{-i k_\beta x}. \quad (1.14)$$

Elle est composée de la combinaison linéaire de quatre solutions élémentaires<sup>22</sup> :

- $e^{\pm i k_\beta x}$  représentent les ondes « potentiellement » propagatives faiblement atténuées dans certaines gammes de fréquence liées à l'impédance mécanique du support,
- $e^{\pm k_\beta x}$  représentent les ondes évanescentes (onde de champ proche) fortement atténuées.

Le signe positif correspond à une propagation le long du rail pour les  $x$  décroissants (voir Fig. 1.13).

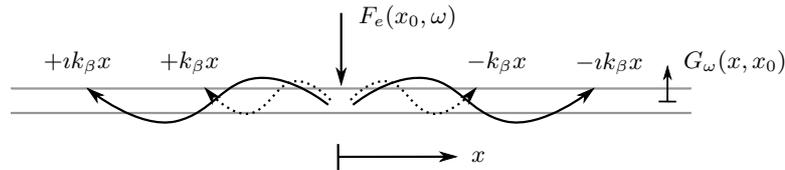


FIGURE 1.13 – Ondes propagatives (—) et ondes évanescentes (···) créées par une force en  $x_0$

La fonction de Green  $G_\omega$  associée à l'équation du mouvement de la poutre soumise à un champ de forces extérieures (Eq.A.1) est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire appliquée en  $x_0$  telle que  $F_e(x, \omega) = F_e(\omega) \delta(x, x_0)$  avec  $F_e(\omega) = 1$ . C'est la solution de l'équation :

$$\frac{d^4}{dx^4} G_\omega(x, x_0) - k_\beta^4(\omega) G_\omega(x, x_0) = \frac{1}{B} \delta(x, x_0). \quad (1.15)$$

20. On omet par la suite d'écrire la dépendance temporelle  $e^{i\omega t}$ .

21. Le rail étant considéré comme infini, il apparaît pertinent de considérer une représentation de sa vibration sous forme d'une superposition d'onde.

22. Par convention on choisit  $\Re\{k_\beta\} > 0$  et  $\Im\{k_\beta\} < 0$ .

La fonction de Green peut être déterminée soit par une méthode directe, soit par calcul de la transformée de Fourier spatiale de cette équation (Eq. 1.15). La méthode utilisée dans ce document est la méthode directe, celle-ci est rappelée en annexe A.1.1. La fonction de Green obtenue est donnée par :

$$G_\omega = -\frac{1}{4k_\beta^3} \frac{1}{B} \left[ e^{-k_\beta|x-x_0|} + \imath e^{-\imath k_\beta|x-x_0|} \right]. \quad (1.16)$$

Elle est formée d'une onde propagative et d'une onde évanescente (produites par la force ponctuelle en  $x_0$ ) qui s'atténue rapidement.

### Poutre de Timoshenko

Un raisonnement identique est mené pour une poutre de Timoshenko (cf annexe A.1.2). La prise en compte de l'effet de cisaillement et d'inertie rotationnelle dans l'équation du mouvement (Eq. A.12) conduit à la relation de dispersion suivante :

$$\gamma^4 + \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \gamma^2 - \left( k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) = 0, \quad (1.17)$$

avec le nombre d'onde des ondes de compression  $k_c = \omega \sqrt{\rho/E}$ , le nombre d'onde des ondes de cisaillement  $k_t^* = \omega \sqrt{\rho/G^*}$  où  $G^* = G/\kappa$ , ainsi que la rigidité de cisaillement  $K = G^* M/\rho$ .

Comme pour la poutre d'Euler, la relation de dispersion (Eq. 1.17) admet quatre solutions élémentaires<sup>23</sup> où :

- $e^{\pm \imath k_p}$  représentent les ondes « potentiellement » propagatives faiblement atténuées dans certaines gammes de fréquence (Eq. A.14 en annexe A.1.2),
- $e^{\pm k_d}$  représentent les ondes évanescentes (onde de champ proche) fortement atténuées (Eq. A.15 en annexe A.1.2).

La fonction de Green  $G_\omega$  associée à l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko soumise à un champ de forces extérieures (Eq. A.12) est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire appliquée en  $x_0$  telle que  $F_e(x, \omega) = F_e(\omega) \delta(x, x_0)$  avec  $F_e(\omega) = 1$  (Eq. A.17). La fonction de Green est obtenue par la méthode directe rappelée en annexe A.1.2.3. Elle s'écrit telle que :

$$G_\omega(x, x_0) = -\frac{1}{B} \left[ F_d e^{-k_d|x-x_0|} + \imath F_p e^{-\imath k_p|x-x_0|} \right], \quad (1.18)$$

où

$$F_p = \frac{1 - \frac{B}{K} (-k_p^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_p(k_p^2 + k_d^2)} \quad F_d = \frac{1 - \frac{B}{K} (k_d^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_d(k_p^2 + k_d^2)}. \quad (1.19)$$

### Taux de décroissance

---

23. Par convention on choisit  $\Re\{k_p\} \geq 0$  et  $\Re\{k_d\} \geq 0$ , ainsi que  $\Im\{k_p\} < 0$  et  $\Im\{k_d\} < 0$ .

La constante de propagation peut s'écrire sous la forme  $\gamma = \alpha + i\beta$  pour  $\alpha > 0$  où la partie réelle  $\alpha$  est l'atténuation des ondes le long du rail,  $\beta$  est le nombre d'onde et la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/\beta$ . Le taux de décroissance en décibels par unité de longueur (dB/m) est donnée par :

$$\Delta = \alpha \, 20 \log(e) \iff \Delta = \Re\{\gamma\} \, 20 \log(e). \quad (1.20)$$

### Mobilité et réponse spatiale

La réponse (déplacement) en tous points  $x$  le long du rail, pour une force appliquée en  $x_0$  est donnée par la fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  (voir Fig. 1.13). La mobilité, vitesse pour une force unitaire au point d'excitation, est donnée par :

$$Y_r = i\omega G_\omega(x_0, x_0). \quad (1.21)$$

A partir de la théorie présentée ci-dessus le comportement dynamique de la voie est décrit dans la section suivante.

#### 1.3.1.2 Comportement dynamique de la voie

##### Fréquences caractéristiques

Les mobilités et les taux de décroissance calculés pour les paramètres donnés dans le tableau 1.3 sont représentés sur la figure 1.14. On remarque quatre zones fréquentielles distinctes conditionnées par les fréquences de résonance et d'anti-résonance caractéristiques d'un système à deux degrés de liberté :

- $f_{ballast}$  correspond à la résonance en phase du rail et des traverses sur la raideur du ballast<sup>24</sup> :

$$f_{ballast} \approx \frac{1}{2\pi} \left( \frac{s_b}{m'_t + m'_r} \right)^{1/2}. \quad (1.22)$$

Pour les fréquences inférieures à cette première résonance ( $f < f_{ballast}$ , zone A sur la figure 1.14b), le rail est couplé à l'ensemble de la voie (traverses et ballast), le taux de décroissance dans la zone A est stable et élevé (de l'ordre de 10 dB/m).

- $f_{anti}$  correspond à l'anti-résonance du rail en opposition de phase par rapport à la résonance de la traverse (la réponse du rail est faible) :

$$f_{anti} \approx \frac{1}{2\pi} \left( \frac{s_b + s_p}{m'_r} \right)^{1/2}. \quad (1.23)$$

Entre cette fréquence et la fréquence de résonance du ballast ( $f_{ballast} < f < f_{anti}$ , zone B), l'énergie d'excitation reste dans le rail, le taux de décroissance est moins important que dans la zone A.

- $f_{semelle}$  correspond à la résonance du rail sur la raideur de la semelle (la réponse du

24. L'amplitude de la vitesse vibratoire de la traverse et du rail sont quasiment égales.

rail est maximale) :

$$f_{semelle} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{s_p}{m_t'} \right)^{1/2}. \quad (1.24)$$

Entre cette dernière et l'anti-résonance du rail ( $f_{anti} < f < f_{semelle}$ , zone C), l'énergie excitatrice est transmise aux traverses, le taux de décroissance atteint sa valeur maximum. Après la fréquence de résonance de la semelle ( $f > f_{semelle}$ , zone D), le rail est découplé de l'ensemble de la voie si bien que les ondes vibratoires se propagent librement ; le rail est considéré comme libre et le taux de décroissance s'effondre.

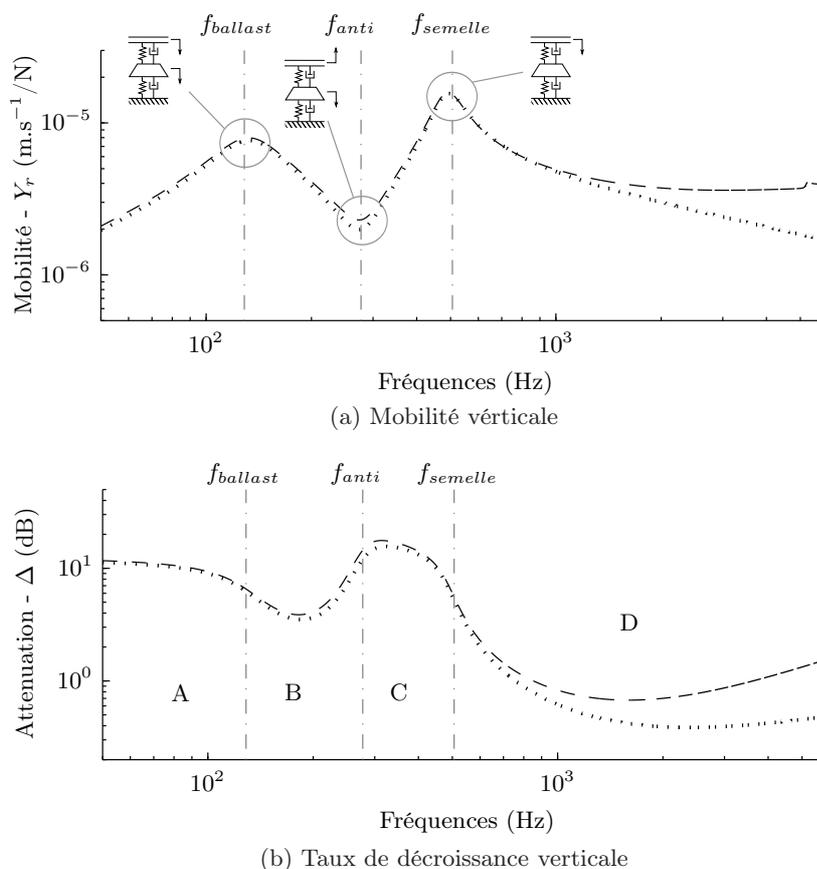


FIGURE 1.14 – Modélisation d'une voie ferroviaire typique ; modèle de poutre d'Euler Bernoulli ( $\cdots$ ) et Timoshenko ( $---$ ) sur support double couche continu.

### Influence du type de poutre

Les résultats obtenus par les modèles de poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont présentés sur la figure 1.14. Dans la gamme de fréquence où le support intervient significativement sur la réponse (*i.e* pour des fréquences inférieures à 1 kHz) les deux modèles donnent des valeurs pratiquement identiques. Au delà ( $f > 1 \text{ kHz}$ ), le modèle d'Euler-Bernoulli sous estime la réponse et le taux de décroissance (*i.e* surestime la longueur d'onde de l'onde propagative).

| <i>Type de rail</i>            |          | UIC60       | S54                        | U36    |                       |
|--------------------------------|----------|-------------|----------------------------|--------|-----------------------|
| Masse par unité de longueur    | $m'_r$   | <b>60</b>   | 54                         | 50     | [kg/m]                |
| Rigidité de flexion verticale  | $B = EI$ | <b>6,42</b> | 4,36                       | 4,23   | [MNm <sup>2</sup> ]   |
| Module d'élasticité            | $E$      |             | <b>2,1.10<sup>11</sup></b> |        | [N/m <sup>2</sup> ]   |
| Masse volumique                | $\rho$   |             | <b>7850</b>                |        | [kg.m <sup>-3</sup> ] |
| Coefficient de Poisson         | $\nu$    |             | <b>0,3</b>                 |        | [-]                   |
| Coefficient de cisaillement    | $\kappa$ |             | <b>2,4</b>                 |        | [-]                   |
| Coefficient de perte interne   | $\eta_r$ |             | <b>4.10<sup>-3</sup></b>   |        | [-]                   |
| <i>Raideur</i>                 |          | Raide       | Médium                     | souple |                       |
| Raideur de la semelle          | $s_p$    | 800         | <b>250</b>                 | 100    | [MN/m]                |
| Raideur du ballast             | $s_b$    | 200         | <b>100*</b>                | 25*    | [MN/m]                |
| <i>Amortissement</i>           |          | Faible      | Médium                     | Fort   |                       |
| Facteur de perte de la semelle | $\eta_p$ | 0,4         | <b>0,2</b>                 | 0,1    | [-]                   |
| Facteur de perte du ballast    | $\eta_b$ | 1           | <b>0,5*</b>                | 0,25*  | [-]                   |
| <i>Type de traverse</i>        |          | Monobloc**  | Bi-bloc**                  | Bois   |                       |
| Masse d'une demi-traverse      | $m_t$    | 140         | <b>120</b>                 | 50     | [kg]                  |

TABLE 1.3 – Paramètres mécaniques représentatif des différents types de voies existante en Europe [Squicciarini 2012] pour un modèle de poutre en flexion verticale. Les caractères en gras sont les valeurs d'une voie typique utilisées pour illustrer son comportement dynamique (cf. sections 1.3.1.2 et 1.3.1.4).\* NC dans [Squicciarini 2012], \*\* traverse en béton.

### 1.3.1.3 Influence des paramètres de la voie

La raideur et l'amortissement de la semelle sous le rail peuvent varier selon son épaisseur (4,5 mm ou 9 mm), sa forme (pleine, cannelée), le type d'élastomère qui la constitue et de son âge. Cette variation influe notablement sur le comportement vibratoire du rail ; les fréquences de résonance et d'antirésonance augmentent avec l'accroissement de la rigidité de la semelle (voir Fig. 1.15a). En revanche l'amplitude de la mobilité diminue avec la raideur de la semelle. Elle est plus particulièrement affectée par son amortissement (voir Fig. 1.15d). L'augmentation de la raideur et de l'amortissement de la couche de ballast, liée notamment à sa hauteur et sa compacité entraînent une augmentation de la fréquences de résonance du  $f_{ballast}$  et une diminution de l'amplitude de la mobilité autour de cette fréquence (voir Fig. 1.15b et Fig. 1.15e). La variation de la fréquence de l'antirésonance est toutefois plus faible. La raideur du ballast a très peu d'effet sur la mobilité autour de la résonance de la semelle. Contrairement aux paramètres relatifs à la semelle et au ballast, la masse et la rigidité de flexion de différents types de rails existants (de formes différentes) entraîne une modification de la mobilité sur toute la gamme de fréquence considérée (voir Fig. 1.15c). La fréquence de résonance du rail sur la semelle est peu modifiée, elle est légèrement plus basse pour un rail de type UIC60 que pour un rail U36 (masse plus faible pour le rail U36 que le rail UIC60, voir Tab. 1.3). Enfin, le type de traverse (particulièrement son matériau) conditionne sa masse et entraîne de fortes variations de la mobilité (entre le bois et le béton) pour l'ensemble des résonances de la voie (voir Fig. 1.15f). Cette variation de la mobilité en fonction du type de traverses peut expliquer l'inefficacité des systèmes embarqués à estimer la rugosité du rail sur une voie composée de traverses en bois à partir de la fonction de transfert

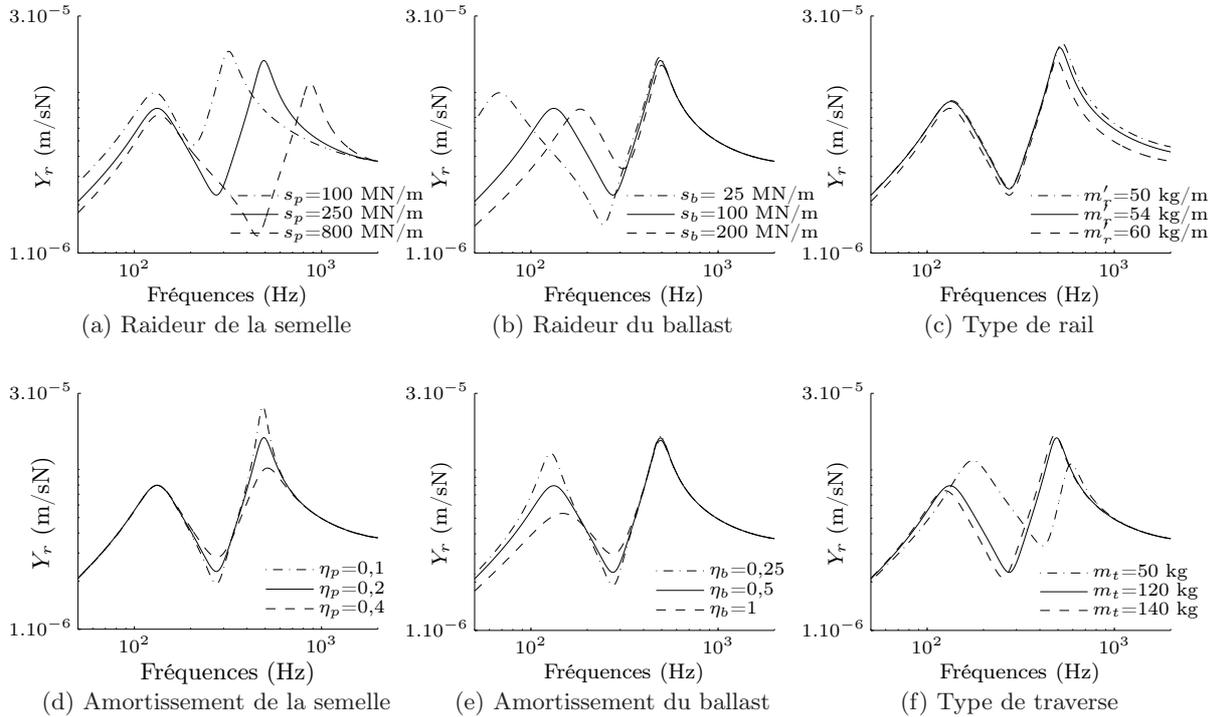


FIGURE 1.15 – Effet de la variation des paramètres de voie sur la mobilité ; modèle de poutre de Timoshenko sur un support continu pour les paramètres donnés dans le tableau 1.3.

mesurée sur une voie constituée de traverse béton (cf section 1.1.3). Le système d'attache du rail sur la traverse, s'il est basé sur un système de tirefonds, joue également un rôle important sur le comportement vibratoire du rail [Margiocchi 2007]. Les systèmes actuels, basés sur des clips dont la force de pression est calibrée à la fabrication, assurent une homogénéité d'une traverse à l'autre.

### 1.3.1.4 Supports périodiques

En pratique, le rail n'est pas supporté par une couche continue comme présenté dans la section 1.3.1.1, mais il repose sur des traverses espacées d'une distance approximativement constante (quasi-périodique). Des modèles ont été développés afin de considérer l'espacement réel et la raideur de chaque support [Heckl 1995, Heckl 2002]. Cette approche présente l'avantage d'être générale mais s'avère inappropriée à l'étude paramétrique de la réponse du rail (comme présentée dans la section 1.3.1.3) : elle impose une résolution lourde d'un système à  $N$  équations pour chaque fréquence<sup>25</sup>. Dans le cas particulier où l'espacement entre les traverses est fixe (espacement périodique) et que les raideurs de chaque support sont supposées identiques les unes aux autres, il est plus efficace d'utiliser les propriétés des systèmes périodiques et d'utiliser un modèle basé sur le théorème de Floquet. Il est utilisé afin d'obtenir l'expression des ondes de propagation du système libre (*i.e.* rail sur support en l'absence de force extérieure). La résolution théorique de la réponse spatiale du rail sur support périodique est succinctement présentée pour le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, cependant la démarche de résolution est identique pour une poutre de Timoshenko (cf. annexe A.2).

25.  $N$  est le nombre de supports considéré.

En supposant que les raideurs  $s(\omega)$  des supports sont identiques et un espacement régulier  $a$  entre chaque traverse ( $x_n=na$ ), et que la force de réaction de chaque support est prise en compte  $[-F_s(x, \omega)=s(\omega)u(x, \omega)\delta(x-na)]$ , l'équation du mouvement pour une force extérieure nulle (Eq. 1.12) devient :

$$\frac{d^4}{dx^4}u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) = -\frac{s(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(na, \omega)\delta(x-na), \quad (1.25)$$

Le théorème de Floquet qui stipule que :

$$u(x+na, \omega) = u(x, \omega)e^{-n\gamma a}, \quad (1.26)$$

permet d'écrire (Eq. 1.25) sous la forme :

$$\frac{d^4}{dx^4}u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) = -\frac{s(\omega)}{B} u(0, \omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-na)e^{-n\gamma a}. \quad (1.27)$$

En effectuant la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier spatiale de cette équation (Eq. 1.27), la solution devient [Nordborg 2002] :

$$u(x, \omega) = -u(0, \omega) \frac{s(\omega)}{4k_B^3 B} \mathcal{Y}_E(x, \gamma), \quad (1.28)$$

avec :

$$\mathcal{Y}_E(x, \gamma) = \frac{\sin k_B(a-x) + e^{-\gamma a} \sin k_B x}{\cos k_B a - \cos \gamma a} - \frac{\sinh k_B(a-x) + e^{-\gamma a} \sinh k_B x}{\cosh k_B a - \cosh \gamma a}. \quad (1.29)$$

La constante de propagation est alors déterminée en écrivant l'équation (Eq. 1.28) en  $x=0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \cosh^2 \gamma a + \left[ \frac{s(\omega)}{4k_B^3} (\sinh k_B a - \sin k_B a) - (\cosh_h k_B a + \cos_h k_B a) \right] \cosh \gamma a \\ + \frac{s(\omega)}{4k_B^3} (\cosh k_B a \sin k_B a - \cos k_B a \sinh k_B a) + \cosh k_B l \cos k_B a = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

La relation de dispersion (Eq. 1.30) admet deux solutions :  $\cosh \gamma_p a$  et  $\cosh \gamma_d a$ . A chacune de ces solutions correspondent deux valeurs  $\pm \gamma_p$  et  $\pm \gamma_d$  de la constante de propagation<sup>26</sup>. L'onde  $\gamma_p$  dite propagative, est caractérisée par une atténuation nulle, sauf dans certaines gammes de fréquences liées aux résonances du support (voir Fig. 1.14b et Eq.1.20). L'onde  $\gamma_d$  dite évanescence (ou onde de champ proche), est caractérisée par une forte atténuation sur toute la gamme de fréquence.

La fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  associée à l'équation du mouvement de la poutre d'Euler-Bernoulli soumise à un champ de forces extérieures (A.24) est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire appliquée en  $x_0$  telle que  $F_e(x, \omega)=F_e(\omega)\delta(x, x_0)$  avec

<sup>26</sup>. Nous conviendrons de désigner par  $\gamma_p$  et  $\gamma_d$  les solutions ayant une partie réelle positive :  $\Re \gamma_p \geq 0$ ,  $\Re \gamma_d \geq 0$ .

$F_e(\omega)=1$ . C'est la solution de l'équation :

$$\frac{d^4}{dx^4}G_\omega(x, x_0) - k_B^4 G_\omega(x, x_0) + \frac{s(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\omega(na, x_0)\delta(x - na)e^{-\gamma a} = \frac{1}{B}\delta(x - x_0). \quad (1.31)$$

Comme dans le cas du support continu, la fonction de Green est déterminée par la méthode directe (cf. annexe A.2.1.3) :

$$G_\omega(x, x_0) \begin{cases} = a_1 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_d)e^{n\gamma_d a} + a_2 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_p)e^{n\gamma_p a} & \tilde{x} = \tilde{x} + na < x_0 \\ = b_1 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, \gamma_d)e^{-n\gamma_d a} + b_2 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, \gamma_p)e^{-n\gamma_p a} & \tilde{x} = \tilde{x} + na > x_0 \end{cases} \quad (1.32)$$

avec  $0 < \tilde{x} \leq a$ . Les coefficients  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  sont déterminés par les conditions de discontinuités en  $x=0$  (Eq. A.36). L'expression de la fonction de Green d'une poutre de Timoshenko sur supports périodiques en nombre infini est de la même forme. La relation de dispersion est déterminée à partir de  $\mathcal{Y}_T$  qui est solution de l'équation du mouvement de la poutre libre<sup>27</sup> (cf. annexe A.2.2.2). La fonction de Green est ensuite obtenue par la méthode directe développée en annexe A.2.2.3. Les coefficients  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  sont déterminés par les conditions de discontinuités en  $x=0$  (Eq. A.48).

La mobilité du rail modélisée par une poutre de Timoshenko sur supports périodiques est comparée à la mobilité obtenue pour un support continu (voir Fig. 1.16a). Les résultats sont très similaires, il apparaît cependant pour le modèle discret une fréquence particulière autour de 1000 Hz appelée fréquence « pinned pinned » que l'on notera  $f_p$ . Elle correspond à la fréquence de résonance de la poutre en flexion verticale entre deux supports. Elle se manifeste quand la demi-longueur d'onde de flexion verticale (considérée comme libre) correspond à l'espacement  $a$ . Pour un rail UIC60 et un travelage<sup>28</sup> de 0,6 m,  $f_p=1090$  Hz (voir Fig. 1.16). A cette fréquence la mobilité est maximale lorsque la force extérieure est appliquée entre deux traverses, et minimale pour une force appliquée à l'aplomb d'une traverse. À la fréquence *pinned pinned*, l'atténuation des ondes verticales est localement plus importante, comme on peut le voir sur le taux de décroissance tracé sur la figure 1.16b.

### Comportement vibratoire dans la direction latérale

La modélisation de la voie par une poutre sur son support peut être également utilisée pour représenter le comportement dynamique dans la direction latérale. Cependant compte tenue de la plus forte flexibilité du système dans la direction latérale, les valeurs des paramètres de raideurs du système et du moment d'inertie de la poutre sont plus faibles (cf. section 3.2.1.2). Les fréquences caractéristiques sont plus basses, elles apparaissent généralement au dessous de 300 Hz. Le mode de flexion latérale (fréquence *pinned pinned*) entre deux traverses apparaît vers 500 Hz. Les modes de déformation de la section (flexion et torsion) interviennent dès 1000 Hz ; la fréquence du premier mode de flexion latérale est observable autour de 1500 Hz [Thompson 2009].

27. Sans force extérieure autre que le support.

28. Distance entre deux traverses.

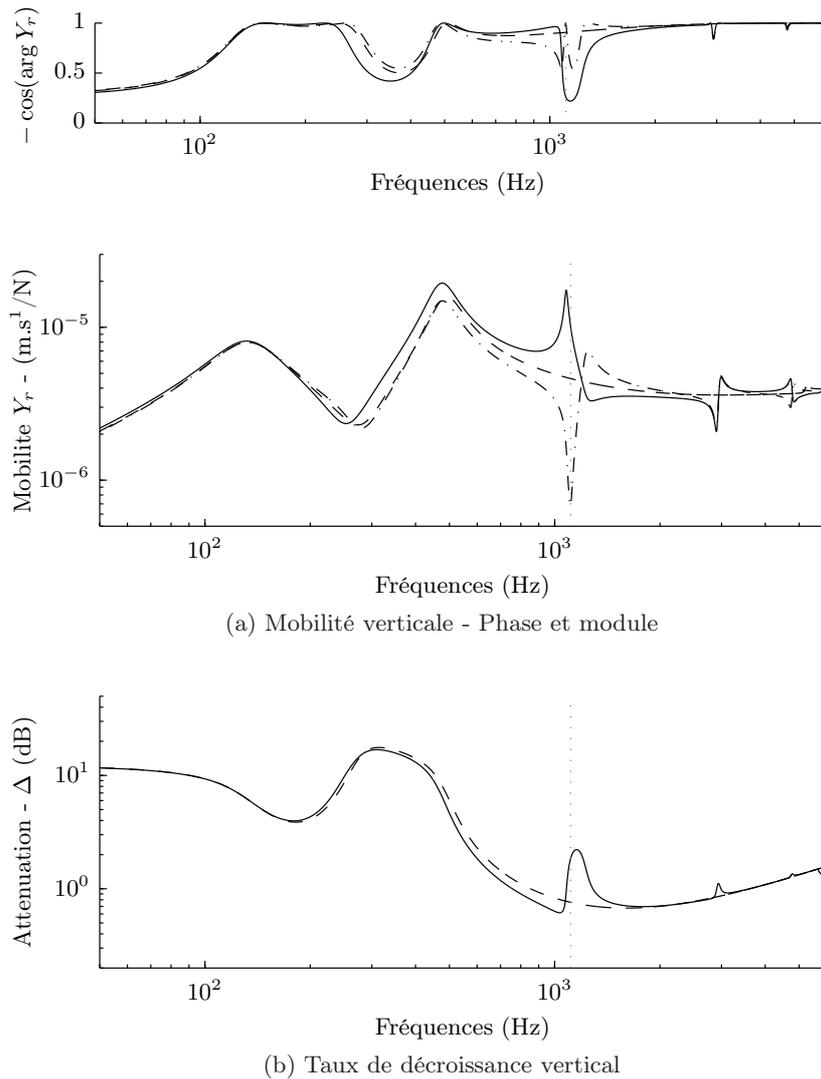


FIGURE 1.16 – Modélisation d’une voie ferroviaire typique ; modèle de poutre de Timoshenko sur support continu (---) et périodique pour une excitation à mi-distance entre deux traverses (—) et sur une traverse (- · -). Indication de la fréquence « pinned pinned »  $f_p$  (· · ·).

### 1.3.2 Modélisation du rayonnement acoustique d’un rail

L’approche bidimensionnelle est fréquemment utilisée pour modéliser le rayonnement acoustique du rail. Les modèles proposés dans la littérature considèrent, soit la géométrie de la section et négligent la longueur (plan transversal), soit la longueur mais néglige la géométrie de la section du rail (plan longitudinal).

#### 1.3.2.1 Rayonnement acoustique 2D dans le plan transversal

Le rayonnement du rail est caractérisé par le rayonnement de sa section de géométrie particulière (voir Fig. 1.15c). L’approche bidimensionnelle n’est justifiée que si l’atténuation des ondes vibratoires dans le rail est faible. Cette approche permet dans ce cas d’utiliser un modèle de source équivalent de la section [Thompson 1996c], ou un modèle basé sur la méthode des éléments de frontières adapté aux géométries de structure complexes [Thompson 2003b]. Le coefficient de rayonnement calculé par ce dernier modèle croît en  $\omega^3$

(tel que le facteur de rayonnement d'un dipôle) de 50 à 500 Hz, pour les ondes latérales, et 800 Hz pour les ondes verticales et reste stable autour de 1 jusqu'à 5000 Hz pour les deux types d'onde [Thompson 2009]. Thompson a étudié la validité de cette approche à l'aide d'un modèle trois dimensions constitué d'un ensemble de dipôles équirépartis le long du rail [Thompson 2003b]. Il a montré que l'approximation 2D dans la section est justifiée du point de vue de la puissance, mais que la distribution du champ spatial le long du rail ne peut être représentée par le facteur de rayonnement. Pour représenter la distribution du champ spatial, il est donc nécessaire de considérer le rail dans sa longueur.

### 1.3.2.2 Rayonnement acoustique 2D dans le plan longitudinal

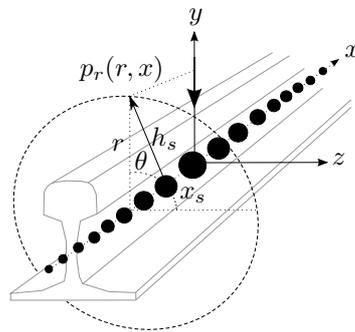


FIGURE 1.17 – Modélisation du rayonnement acoustique d'un rail par une ligne de sources ponctuelles

Afin de considérer la distribution du champ acoustique le long du rail, son rayonnement peut être représenté par une infinité de sources ponctuelles élémentaires placées sur son axe [Thompson 2003b]. Si les sources élémentaires sont des monopôles [Kitagawa 2010], cette représentation revient à négliger la géométrie de la section du rail et se réduit à nouveau à une approche bidimensionnelle (Fig. 1.17). La pression acoustique rayonnée par une ligne de monopôles ne dépend que de la distance au rail et la distance à l'origine. Cette indépendance par rapport à l'angle  $\theta$  dans le repère de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  permet d'écrire :

$$p(r, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega dQ(x_s) \frac{e^{-ikh_s}}{4\pi h_s}, \quad (1.33)$$

avec  $h_s = \sqrt{r^2 + (x - x_s)^2}$  où  $r$  représente le rayon du cylindre autour de l'axe  $x$  de la ligne de sources ponctuelles.  $dQ(x_s)$  est le débit massique élémentaire d'une source située en  $x_s$  supposé proportionnel à la vitesse vibratoire spatiale  $v(x_s)$  (flexion verticale, latérale ou autres types d'onde). Cette formulation est utilisée pour tracer le champ de pression le long de l'axe du rail modélisé par une poutre de Timoshenko sur support périodique pour trois fréquences particulières (voir Fig. 1.18)<sup>29</sup>. Les fréquences sont choisies de manière à ce qu'elles correspondent à une atténuation des ondes vibratoires verticales forte, moyenne et faible (voir Fig 1.16).

Lorsque les ondes vibratoires sont fortement atténuées, les forts niveaux de vibrations sont concentrés au point d'application de la force et le champ de pression s'apparente à celui

<sup>29</sup>. Les calculs numériques sont effectués à l'aide de la discrétisation de l'intégrale (Eq. 1.33) présentée dans le chapitre 3 (cf. section 3.3.1)

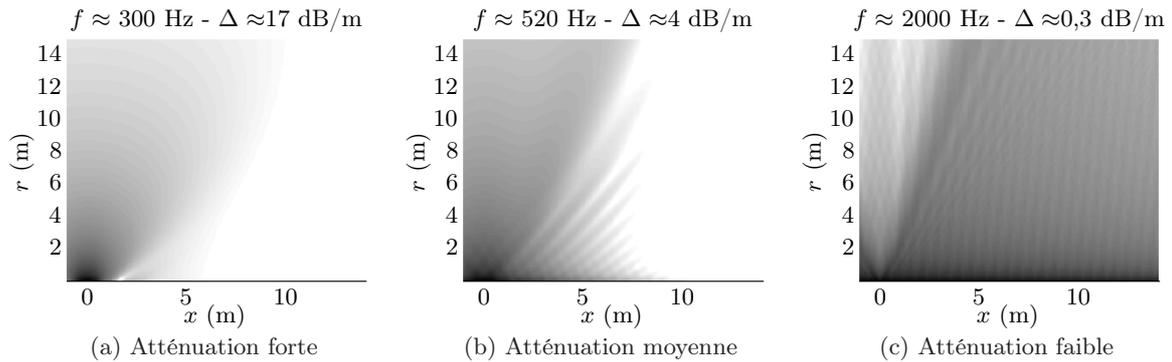


FIGURE 1.18 – Champ de pression acoustique rayonné le long du rail pour une force appliquée à mi-distance d’une travée. Dynamique du champ de pression de 40 dB.

d’une source ponctuelle (voir Fig. 1.18a). En hautes fréquences pour une atténuation faible la source est linéique, mais il subsiste toujours un angle de rayonnement particulier (voir Fig. 1.18c).

## 1.4 Modélisation de l’interaction roue/rail

La raideur de contact au point de contact roue/rail est causée par la déformation élastique locale qui crée une aire de contact (voir Fig. 1.19). La taille de cette aire augmente avec l’augmentation du chargement normal, par conséquent la relation qui relie le chargement à la déformation élastique locale est non-linéaire. Les techniques de modélisation de l’interaction roue/rail dans le but de prédire le bruit de roulement, ainsi que le bruit d’impact et le bruit de crissement, sont exposées dans [Pieringer 2011].

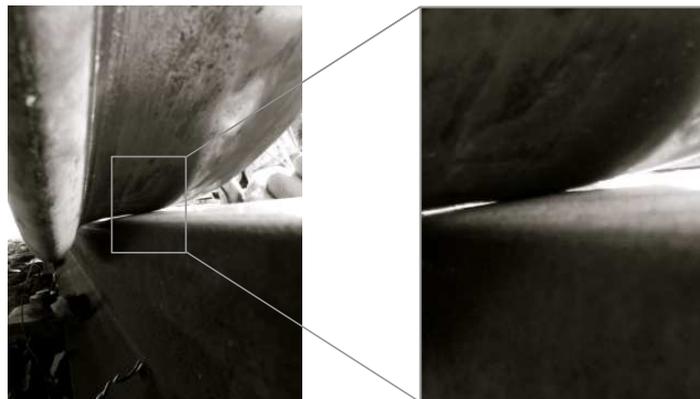


FIGURE 1.19 – Photo du contact de la roue sur le rail (campagne d’essai LECAV cf. section 2.2.2).

### 1.4.1 Modèle de Hertz pour un contact normal

La théorie du contact de Hertz est très généralement utilisée pour modéliser le contact roue/rail [Knothe 1993]. Cette théorie, publiée en 1882, est détaillée dans le livre [Johnson 1987]. La théorie de Hertz pour un contact normal entre deux corps repose sur les

hypothèses suivantes :

- Les deux structures en contact sont parfaitement élastiques et linéaires.
- Les surfaces des deux solides sont non-conformes. Sans chargement le contact est ponctuel et sous charge normale les dimensions du contact restent petites devant celles des structures, ainsi que par rapport à leurs rayons de courbure. Dans ces conditions, les deux solides sont considérés comme des demi-espaces élastiques.
- Les surfaces sont parfaitement lisses.
- Il n'y a pas de frottement à l'interface des deux structures (seule la pression normale est transmise).
- Les surfaces des deux structures sont parfaitement régulières. Elles peuvent être décrites par des fonctions quadratiques au voisinage du contact.

Dans ces conditions, la forme de l'aire de contact est une ellipse (voir Fig. 1.20) et la pression à l'interface des deux structures n'est transmise que dans la direction normale.

Pour de petites amplitudes de déplacement autour de la déflexion statique (distance de rapprochement des deux structures en contact) due au chargement statique vertical  $F_0$ , la déflexion est linéaire. Dans ce cas, la raideur verticale  $K_{H,lin}$  de contact linéaire de Hertz [Johnson 1987, Thompson 1993c] s'écrit :

$$K_{H,lin} = \frac{2}{\xi} \left( \frac{3E'^2 R_e F_0}{2} \right)^{1/3}, \quad (1.34)$$

où  $E'$  le module d'élasticité d'effort plan avec  $E' = E/(1 - \nu^2)$  où  $E$  est le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du rail et de la roue<sup>30</sup>,  $g$  est le rapport de la surface de contact,  $g=a/b$  où  $a$  et  $b$  sont définis par l'équation (E. 1.36) (voir Fig. 1.20a).  $\xi$  est un facteur adimensionné dépendant des rayons de courbures  $R_\alpha$  des deux surfaces et de la forme de la surface de contact.  $R_e$  est le rayon effectif de la courbure du contact donné par :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_w} + \frac{1}{R_{wt}} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_{rt}} \right), \quad (1.35)$$

où  $R_\alpha$  sont les rayons de courbures :

- de la roue dans la direction du roulement ( $R_w$ ),
- de la roue dans la direction transversale ( $R_{wt}$ )<sup>31</sup>,
- du rail dans la direction transversale ( $R_{rt}$ ),
- du rail dans la direction du roulement ( $R_r$ ),

qui est considéré comme infini, le terme  $1/R_r$  est donc négligeable (voir Fig. 1.20c).

Pour deux surfaces régulièrement lisses, la forme de l'aire de contact est elliptique. Les demi-axes  $a$  dans la direction du roulement et  $b$  dans la direction transversale sont donnés par les relations suivantes :

$$a = \sigma_1 \left( \frac{3F_0 R_e}{2E'} \right)^{1/3} \quad b = \sigma_2 \left( \frac{3F_0 R_e}{2E'} \right)^{1/3}. \quad (1.36)$$

30. Tous deux constitués du même matériau, l'acier.

31. Positif lorsqu'il est concave.

Les deux paramètres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui dépendent de  $R_\alpha$ , de manière similaire à  $\xi$ , sont tabulés ; voir par exemple [Thompson 2009]. Pour de plus grandes amplitudes de rugosité, il est nécessaire de prendre en compte les effets de non-linéarités [Thompson 2001]. Remington précise notamment que des pertes de contact peuvent apparaître pour des amplitudes de rugosité de l'ordre de  $150 \mu\text{m}$  pour un chargement  $F_0$  d'environ  $65 \text{ kN}$  [Remington 1996]. D'autres modèles s'appuient sur la théorie de Hertz, comme le modèle DPRS non-linéaire en trois dimensions (*Distributed Point Reacting Springs*) qui représente l'interaction entre la roue et le rail par une distribution uniforme de ressorts non-linéaires indépendants. [Remington 1996].

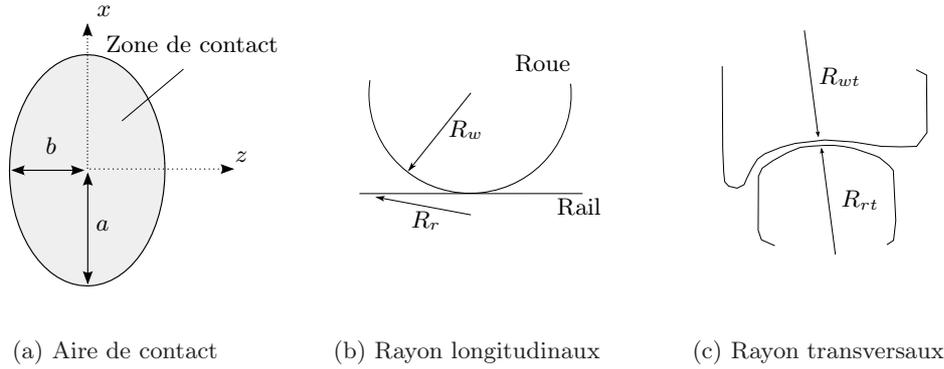


FIGURE 1.20 – Zone de contact (a) et rayon de courbure de la roue et du rail ; vue de la section (dans la direction de roulement) (b) et vue de face (c).

### 1.4.2 Filtre de contact

Le filtre de contact diminue l'excitation provoquée par la rugosité lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  de la rugosité devient de l'ordre de grandeur ou plus petite que la dimension de l'ellipse de contact. Dans ce cas, seule une partie de la rugosité est lue par le système roue-rail. L'expression analytique du filtre de contact  $H$  en fonction du nombre d'onde  $k$  (où  $k = 2\pi/\lambda$ ) a été proposée par Remington [Remington 1987a]. Pour une zone de contact circulaire de rayon  $a$  (Eq. 1.36), la fonction de transfert du filtre de contact s'écrit :

$$|H(k)|^2 = \frac{4}{\alpha} \frac{1}{(ka)^2} \int_0^{\tan^{-1} \alpha} [J_1(ka \sec \chi)]^2 d\chi, \quad (1.37)$$

où  $k$  est le nombre d'onde de la rugosité dans la direction longitudinale<sup>32</sup>,  $J_1$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 et  $\alpha$  est le paramètre qui décrit le degré de corrélation entre les rugosités longitudinales dans la zone de contact. Une grande valeur de  $\alpha$  implique que la corrélation entre les profils de rugosité mesurés sur deux traces parallèles dans la direction de roulement est faible. La fonction de transfert du filtre de contact (1.37) peut être approchée par une fonction simplifiée :

$$|H(k)|^2 = \left(1 + \frac{\pi}{4}(ka)^3\right)^{-1}. \quad (1.38)$$

32. Dans le sens de la longueur du rail.

Ces différentes fonctions sont comparées sur la Figure 1.21 pour un rayon  $a$  de la surface de contact de 12 mm<sup>33</sup>. La fréquence de coupure du filtre issu de l'équation (Eq. 1.37) apparaît autour de  $ka=1$  et possède des minima autour de  $ka=\pi$  (*i.e.*  $\lambda=2a$ ) et ses multiples entiers. Lorsque  $\alpha$  augmente la fréquence de coupure baisse et l'effet du filtre sur l'amplitude (hormis les minima prononcés) augmente. L'expression simplifiée (Eq. 1.38) permet de représenter raisonnablement la courbe du filtre de Remington pour  $\alpha=2$  autour de  $ka=2$ , et donne approximativement la même pente pour les valeurs de  $ka$  supérieures à 2. Les minima liés à la taille de la surface du contact ne sont cependant pas représentés.

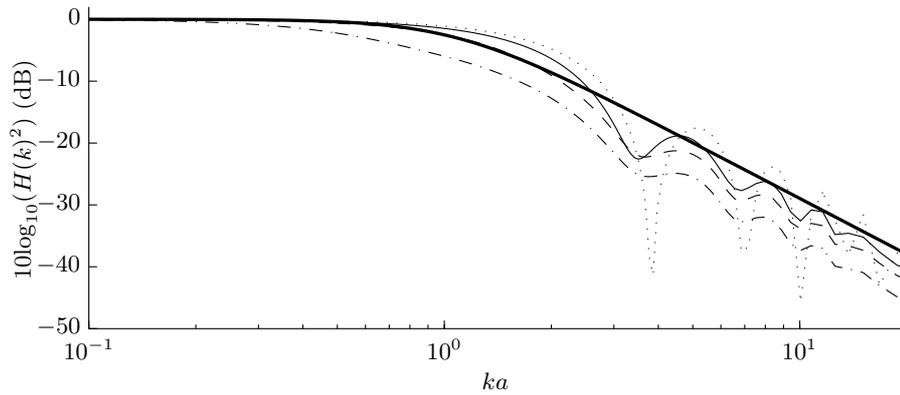


FIGURE 1.21 – Filtre de contact pour un aire de contact circulaire de rayon  $a$  de 12 mm pour  $\alpha = 0, 1$  ( $\cdots$ ),  $\alpha = 1$  ( $-$ ),  $\alpha = 2$  ( $- - -$ ),  $\alpha = 5$  ( $\cdots$ ) obtenus par la formulation intégrale (Eq. 1.37) et la formulation simplifiée (Eq. 1.38) ( $-$ ).

La comparaison entre les résultats obtenus par le filtre analytique de Remington et le modèle DPRS menée par Thompson [Thompson 2003a], montre que le modèle analytique conduit à une atténuation trop élevée pour de petites longueurs d'onde de rugosité mais qu'il peut être utilisé pour des longueurs d'ondes supérieures à une dimension longitudinale légèrement inférieure à la taille de la zone de contact.

### 1.4.3 Modèle d'excitation verticale

Le système roue/rail peut être représenté par deux systèmes dynamiques connectés au point de contact et excités par le déplacement relatif entre eux deux (voir Fig 1.22). La connexion est modélisée par une raideur de contact [Thompson 2009] (cf. section 1.4.1). Dans ce modèle le mouvement de la roue le long du rail est ignoré et remplacé par une excitation qui serait provoquée par la translation longitudinale de la rugosité (voir Fig. 1.22a). Seule la vibration verticale est considérée.

Si le rail est excité par une force verticale harmonique  $F e^{i\omega t}$  de fréquence angulaire  $\omega$  et d'amplitude complexe  $F$ , son amplitude de vitesse vibratoire est donnée par :

$$v_r = Y_r F, \quad (1.39)$$

avec  $Y_r$  la mobilité verticale exposée dans la section 1.3.1. L'amplitude est définie comme

33. La taille de la surface de contact correspond à une roue de 0,46 m de rayon sur un rail dont le profil du champignon est de rayon 0,5 m, chargé par 7,5 tonnes.

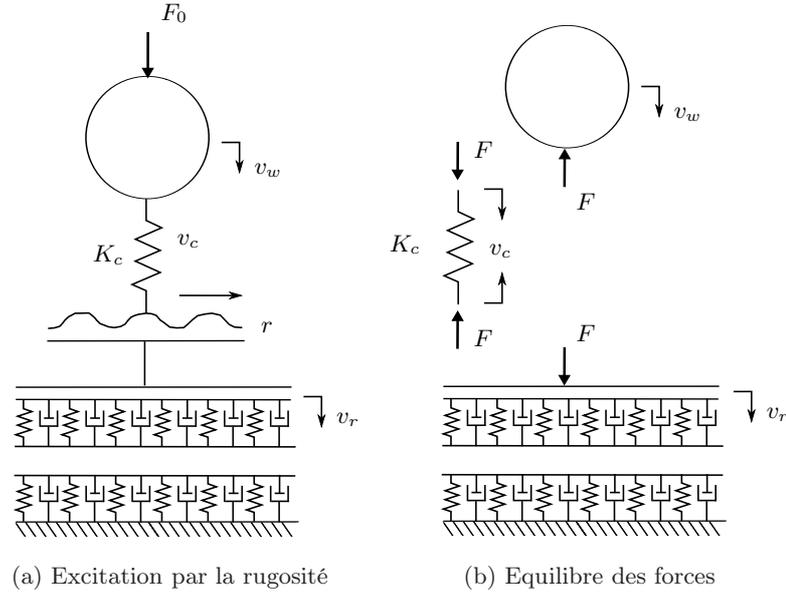


FIGURE 1.22 – Schéma du contact roue/rail

positive lorsque sa direction est vers le bas. La même force appliquée à la roue conduit alors à :

$$v_w = -Y_w F, \quad (1.40)$$

où  $Y_w$  est la mobilité de la roue (cf. section 1.2.1.3). Le ressort de contact possède une mobilité  $Y_c$ , si bien que la vitesse de vibration  $v_c$ , qui représente la vitesse relative (choisie positive pour la compression) à travers le ressort de contact s'écrit :

$$v_c = Y_c F = \frac{\omega F}{K_{H,lin}}, \quad (1.41)$$

où  $K_{H,lin}$  est la raideur de contact linéaire (obtenue par le modèle de Hertz). En introduisant l'amplitude de rugosité  $R$  à la fréquence angulaire  $\omega$ , si le contact entre la roue et le rail est maintenu, la vitesse relative est donnée par :

$$v_r = \omega R + v_w - v_c, \quad (1.42)$$

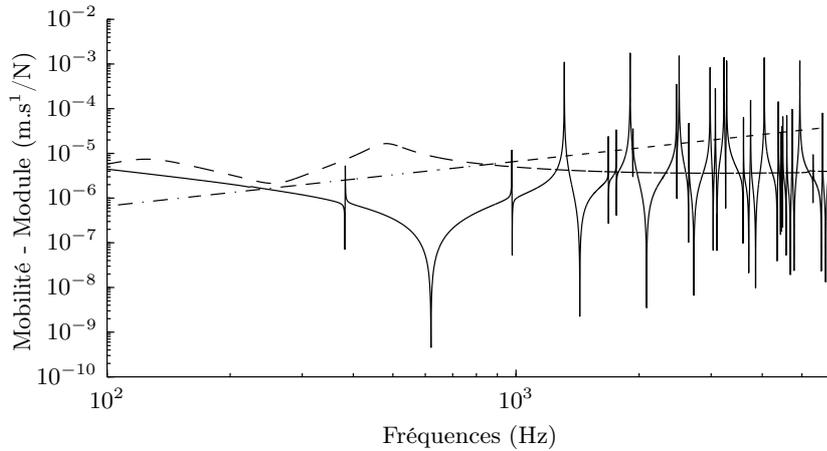
où  $\omega R$  est la vitesse vibratoire de la rugosité dont la pulsation est déterminée par la relation (Eq. 1.1). En combinant les équations (Eq. 1.39) à (Eq. 1.41) on obtient la force au point de contact :

$$F = \frac{\omega R}{Y_r + Y_w + Y_c}. \quad (1.43)$$

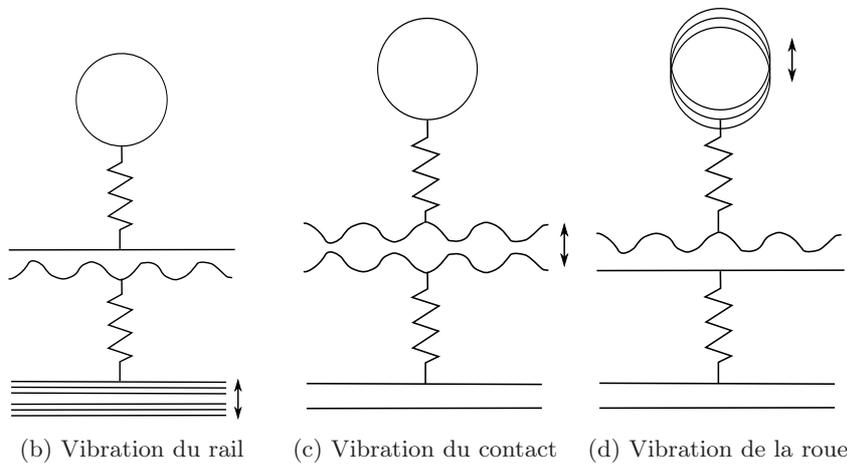
Les vitesses vibratoires du rail (Eq.1.39) et de la roue (Eq.1.40) s'écrivent alors :

$$v_r = \frac{i\omega R Y_r}{Y_r + Y_w + Y_c} \quad v_w = \frac{-i\omega R Y_w}{Y_r + Y_w + Y_c}. \quad (1.44)$$

Les réponses vibratoires de la roue et du rail sont couplées et dépendent des trois mobilités



(a) Mobilité de la roue (—) - cf. Fig. 1.8 -, du rail (---) - cf. Fig. 1.14 - et du contact (- · -).



(b) Vibration du rail (c) Vibration du contact (d) Vibration de la roue

FIGURE 1.23 – Mobilités des structures indépendantes et indications schématiques de l’excitation vibratoire provoquée par la rugosité sur le rail, le contact et la roue [Thompson 2009].

au dénominateur des équations (Eq. 1.44). Cependant, lorsqu’une des mobilités est particulièrement dominante par rapport aux autres, sa réponse devient similaire à l’amplitude de rugosité. Autrement dit, la rugosité (l’excitation) est transmise au rail, au contact ou à la roue en fonction de leurs amplitudes de mobilités (voir Fig. 1.23b. à 1.23d). Les vitesses de vibration du rail et de la roue estimées<sup>34</sup> à partir de (Eq. 1.44) et tracées sur la figure (1.24) illustrent ce comportement. En basses fréquences (entre 100 et 1000 Hz), la mobilité du rail est dominante par rapport à celles du contact et de la roue (voir Fig. 1.23a), si bien que le rail se déplace avec l’amplitude de rugosité (voir Fig. 1.23d) ; la vitesse vibratoire pour une force unitaire tend vers l’unité (voir Fig. 1.24a,  $v_r \approx \omega R$ ). En plus hautes fréquences (à partir de la résonance de la roue du mode R2 qui apparaît entre 1,5 et 2 kHz), c’est principalement la roue qui répond autour de ces résonances à l’amplitude de la rugosité (voir Fig. 1.23d et Fig 1.24b). La raideur de contact « se déplace » avec l’amplitude de rugosité entre les résonances de la roue (voir Fig. 1.23c). Ainsi, à partir des résultats du modèle d’interaction verticale, la connaissance de la vitesse vibratoire du rail et de la roue dans les gammes de fréquences respectives dans lesquelles leurs mobilités sont dominantes (au dénominateurs de

34. Les vitesses sont normalisés par la de rugosité  $\omega R$ .

(Eq. 1.44)) permettent de déterminer l'amplitude de la rugosité.

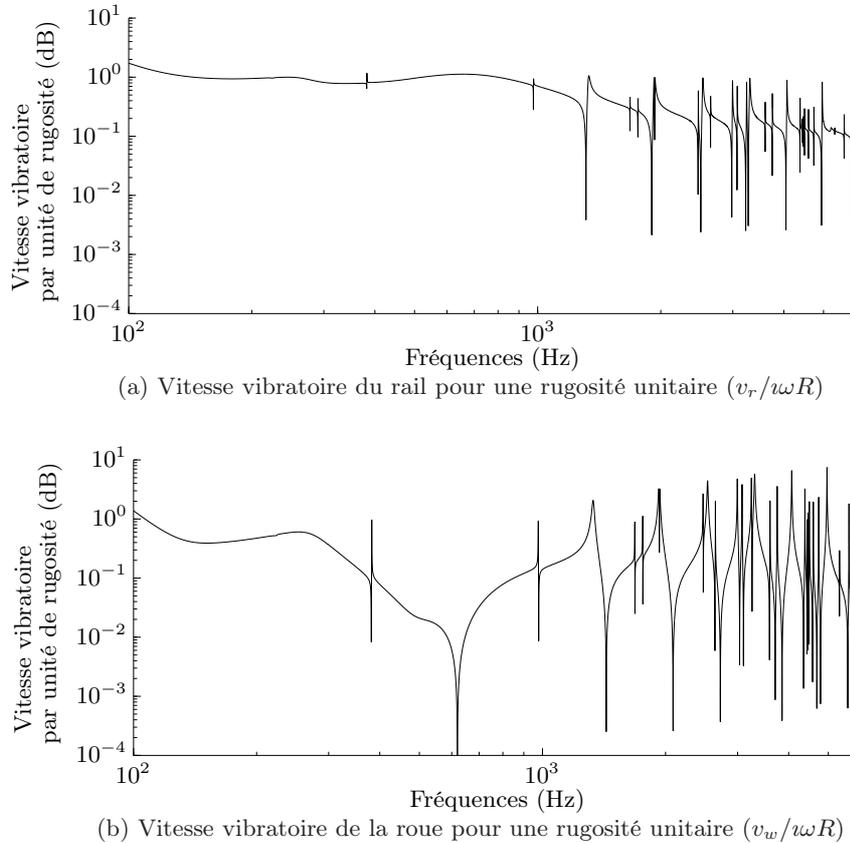


FIGURE 1.24 – Vitesse de vibration verticale par unité de rugosité au point de contact pour une rugosité unitaire issue du modèle d'interaction verticale [Thompson 2009].

## 1.5 Nouvelle méthode de mesure de la rugosité : LECTure Acoustique de la Voie

L'étude de l'efficacité des systèmes de mesure de rugosité embarqués existant révèle qu'il est essentiel de prendre en compte le comportement dynamique de la voie, et donc d'adapter en conséquence la fonction de transfert entre la donnée mesurée et la rugosité (cf. section 1.1.3). Il semble alors opportun d'utiliser un modèle pour adapter cette fonction de transfert. Au vu des connaissances et de la maîtrise du comportement vibratoire de la roue par rapport au comportement de la boîte d'essieu<sup>35</sup>, il est judicieux d'opter pour une approche acoustique. Bien que cette approche suppose une fonction de transfert scindée en deux parties : aérienne (acoustique) et solidienne (vibratoire), elle offre une solution de modélisation plus aisée par rapport à une modélisation de la boîte d'essieu<sup>36</sup>. La première partie de la fonction de transfert entre la pression et la vitesse vibratoire s'apparente à une impédance acoustique ( $Z=p/v$ ). La seconde est le rapport adimensionné

35. Position de mesure vibratoire fixe par rapport au train au plus près de la roue (cf. section 1.1.3).

36. La représentation du comportement vibratoire du roulement à billes nécessaire à la rotation de l'essieu conduirait inévitablement à une modélisation complexe de la fonction de transfert entre la rugosité et l'accélération de la boîte d'essieu.

entre la vitesse localisée au droit de la mesure acoustique et la vitesse au point de contact ( $\gamma$ ).

Il a été déterminé que le bruit de roulement à l'origine de la rugosité<sup>37</sup> est la combinaison du bruit rayonné par la voie et par la roue. Cependant ces deux éléments rayonnent fortement dans des gammes de fréquences distinctes ; entre 100 et 1500 Hz pour la voie, et de 1500 à 5000 Hz pour la roue. Etant donné que les positions de mesures sont choisies à proximité des sources sonores que l'on cherche à utiliser, il est légitime de supposer que les contributions de ces différentes sources qui participent au bruit de roulement peuvent être identifiées. La méthode de lecture acoustique de la voie en situation embarquée (sur un train dédié ou commercial) s'articule alors autour du bruit rayonné par la roue et par la voie dans leurs gammes de fréquences respectives ; elle est présentée sur la figure 1.25. La méthode proposée est fondée sur le modèle d'interaction verticale et suppose que les comportements vibratoires, acoustiques et les interactions entre les sous-systèmes sont linéaires.

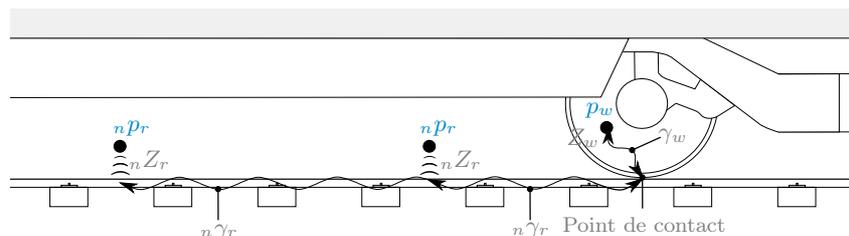
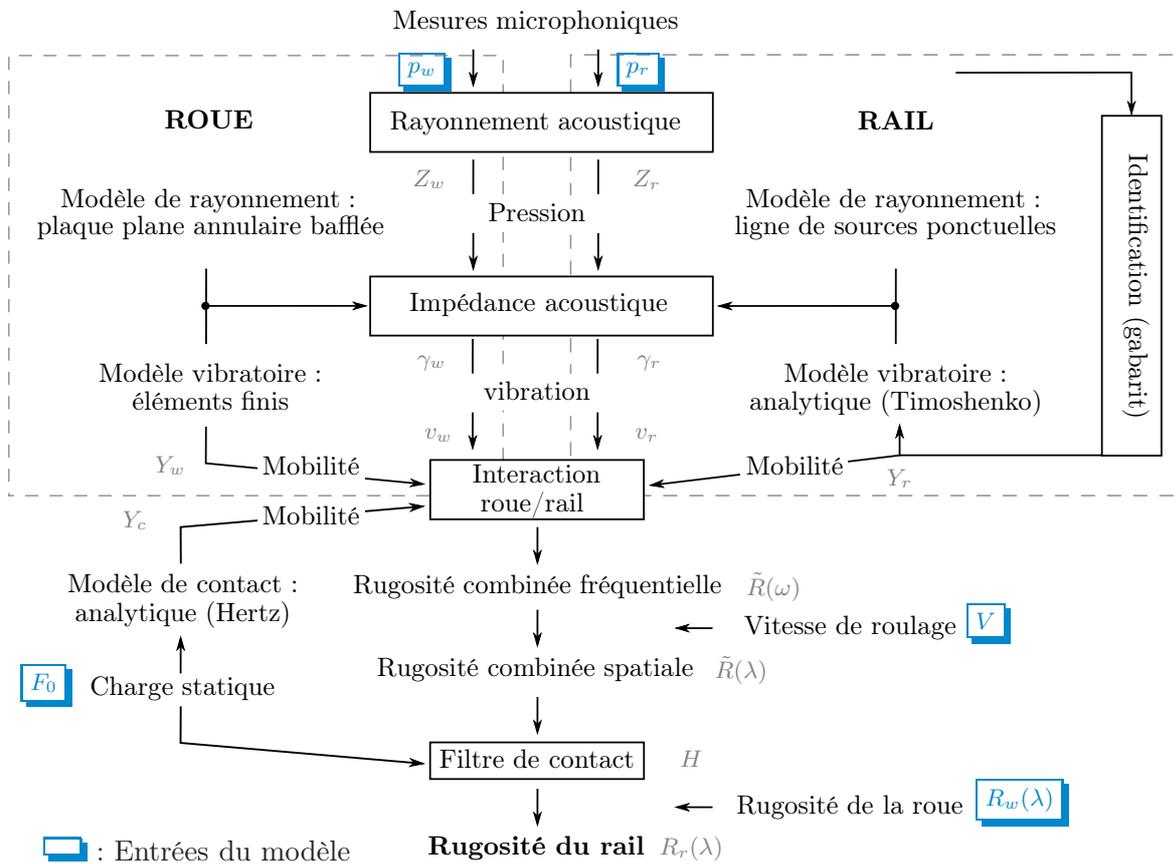


FIGURE 1.25 – Méthode LECAV : estimation de la rugosité du rail en situation embarquée.

37. Rugosité combinée de la roue et du rail (somme énergétique).

**La roue** est utilisée comme un capteur vibroacoustique capable de lire la rugosité des petites longueurs d'onde du rail à partir de son rayonnement acoustique hautes fréquences (au dessus de 1,5 kHz.). La méthode consiste à déterminer la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail à partir de la pression ( $p_w$ ). Le caractère modal du rayonnement est utilisé à cet effet, ainsi la vitesse est déterminée sur les modes de vibration de la roue. La fonction de transfert à déterminer est la combinaison de l'impédance acoustique de la roue ( $Z_w$ ) et le rapport entre la vitesse vibratoire au droit de la mesure microphonique et la vitesse au point de contact (voir Fig 1.25). Les modèles de rayonnement de la roue étudiés dans la littérature fournissent un coefficient de rayonnement valable en champ lointain, or la mesure du système est effectuée en champ proche. On propose alors de modéliser le rayonnement de la roue par un modèle simple basé sur la formulation intégrale de Rayleigh relative au rayonnement des structures planes inscrites dans un écran infini rigide (baffle) (cf. section 2.3.2). La vitesse vibratoire de la roue est calculée par la méthode des éléments finis adaptée à l'évaluation de l'impédance acoustique ( $v_w$ ), à la détermination de la fonction de transfert vibratoire ( $\gamma_w$ ) et au calcul de mobilité ( $Y_w$ ) de la roue (cf. sections 1.2.1 et 2.3.1). Ainsi tous les éléments sont réunis pour calculer la fonction de transfert pression/vitesse au point de contact ( $H_w = \gamma_w / Z_w$ ).

**Le rail** en contact avec la roue, lit la rugosité des grandes longueurs d'onde à partir de son rayonnement acoustique basses fréquences (en dessous de 1,5 kHz). Le champ acoustique du rail est utilisé pour déterminer l'armement de la voie auscultée, ainsi que la vitesse vibratoire au point de contact. Il faut noter que le rayonnement acoustique de la voie est seulement représenté par le rail : le rayonnement des traverses est volontairement omis<sup>38</sup> et le comportement du rail dans cette gamme de fréquence est entièrement dépendant des propriétés mécaniques de la voie. Le rayonnement acoustique du rail est modélisé par une lignes de sources ponctuelles élémentaires (monopôles ou dipôles) dont les débits sont données par la vitesse de vibration le long du rail (cf. sections 1.3.2 et 3.3). La source (le rail) étant proche du ballast et la mesure proche de la source, l'effet des réflexions acoustiques sur le ballast est pris en compte. La voie est modélisée par une poutre de Timoshenko sur support périodique (cf. sections 1.3.1.4 et 3.2) dont les paramètres mécaniques sont identifiés à partir du rayonnement acoustique du rail. Cette identification est effectuée grâce à la comparaison<sup>39</sup> entre les niveaux acoustiques ( $nPr$ ) relatifs mesurés en plusieurs points le long du rail (comme indiqué sur la figure 1.25) et des niveaux acoustiques relatifs calculés préalablement<sup>40</sup> (cf. section 3.4). Chaque niveau de pression relatif calculé correspond à une voie représentative du réseau français et européen<sup>41</sup> (gabarit). Ainsi, la voie gabarit la plus représentative de la voie mesurée est identifiée<sup>42</sup>; elle donne accès à l'impédance acoustique ( $Z_r$ ), aux rapports des vitesses vibratoires ( $\gamma_r$ ) et à la mobilité ( $Y_r$ ). Une fois la voie identifiée, le niveau absolu mesuré sur chaque microphone est utilisé pour déterminer la vitesse de vibration ( $v_r$ ) au point de contact en employant le même principe que pour la roue : à partir de la combinaison de l'impédance de rayonnement acoustique du rail et des

38. Le rayonnement des traverses est prépondérant pour les fréquences inférieures à la résonance du ballast ( $f_{ballast}$ ); gamme de fréquence où le bruit aérodynamique sous la caisse du train est supposé important.

39. Coefficient de corrélation linéaire.

40. L'utilisation de niveaux relatifs permet dans un premier temps de s'affranchir du niveau de pression absolu rayonné, donc de l'excitation que l'on cherche à déterminer par la suite.

41. La SNCF dispose d'une base de données de mesures vibratoires de voie importante [Margiocchi 2007, Cléon 2010].

42. Les paramètres du modèle de voie gabarit qui représente la voie mesurée peuvent être ensuite reliés aux éléments qui la compose, traverse bois ou béton par exemple, semelle de 4,5 m ou 9 mm, etc...

rapports des vitesses au droit des positions le long du rail et le point de contact ( $H_r = \gamma_r / Z_r$ ).

La raideur de contact  $K_H$  est calculée à partir du chargement statique ( $F_0$ ) par la roue du véhicule équipée du système de mesure embarqué à l'aide de la théorie de Hertz linéaire<sup>43</sup> (cf. section 1.4.1). La mobilité du contact est ainsi estimée :

$$Y_c(\omega) = \frac{i\omega}{K_H}. \quad (1.45)$$

À ce stade il est possible de déterminer le spectre de rugosité fréquentiel moyenné sur la distance d'acquisition  $L$  à partir du modèle d'interaction verticale (cf. section 1.4.3) :

$$\tilde{R}(\omega_r) = \frac{Y_r(\omega_r) + Y_w(\omega_r) + Y_c(\omega_r)}{i\omega Y_r(\omega_r)} v_r(\omega_r), \quad (1.46)$$

avec  $v_r(\omega_r) = p_r(\omega_r) H_r(\omega_r)$  où  $\omega_r$  représente le domaine de fréquences angulaires considéré pour le rail et la notation  $(\tilde{\cdot})$  indique que le spectre de rugosité est la combinaison des rugosités de la roue et du rail. Dans le domaine des fréquences angulaires de la roue ( $\omega_w$ ), la rugosité combinée est donnée par :

$$\tilde{R}(\omega_{w_i}) = \frac{Y_r(\omega_{w_i}) + Y_w(\omega_{w_i}) + Y_c(\omega_{w_i})}{-i\omega Y_w(\omega_{w_i})} v_w(\omega_{w_i}), \quad (1.47)$$

avec  $v_w(\omega_{w_i}) = p_{w_i}(\omega_{w_i}) H_w(\omega_{w_i})$  où  $i$  indique l'indice du mode de la roue. Le spectre de rugosité combinée est transposé dans le domaine des longueurs d'onde à partir de la vitesse ( $V$ ) de lecture<sup>44</sup> (cf. section 1.1) :

$$\tilde{R}(\lambda) = \tilde{R}(\omega) \frac{V}{2\pi}. \quad (1.48)$$

La rugosité est ensuite multipliée par l'inverse du filtre de contact afin de compenser la diminution de l'efficacité de lecture des petites longueurs d'ondes (cf. section 1.4.2) :

$$\tilde{R}(\lambda) = \frac{\tilde{R}(\lambda)}{H(\lambda)}. \quad (1.49)$$

Enfin, les rugosités de la roue et du rail étant supposées décorréélées [Thompson 1996a]<sup>45</sup>, la rugosité du rail est obtenue par soustraction énergétique (notée  $\ominus$ ) de la rugosité de la roue ( $R_w$ ) à la rugosité combinée :

$$R_r(\lambda) = \tilde{R}(\lambda) \ominus R_w(\lambda). \quad (1.50)$$

Dès lors que la rugosité de la roue instrumentée est connue, la rugosité du rail peut être déterminée. Il faut noter que si l'amplitude de rugosité de la roue est inférieure à celle du rail, son impact sur l'estimation de la rugosité du rail est négligeable. Il est alors préférable d'équiper un train dont le freinage est effectué par des freins à disque, comme le TGV ; dans ce cas la rugosité des roues est généralement inférieure à la rugosité de la voie (pour toutes

43. Pour des petites amplitudes de rugosité sans discontinuité singulières (empreinte de ballast supérieur à la taille du contact, joint de rail, aiguillage, etc...).

44. La vitesse  $V$  correspond à la vitesse moyenne de lecture sur la distance  $L$ . Une vitesse constante est préférable.

45. La rugosité de la roue est périodiquement en contact avec la rugosité du rail qui est considérée aléatoire.

---

les longueurs d'ondes) [Cléon 2010]. Le spectre de rugosité estimé correspond à la rugosité du rail spatialement moyennée sur la distance parcourue pendant le temps des acquisitions des pressions mesurées près du rail et de la roue. Le spectre de rugosité, ainsi que le comportement vibratoire de la voie identifié, sont associés au tronçon de voie ausculté par le système de lecture acoustique de la voie grâce aux repères kilométriques du début et de fin de l'acquisition obtenus par un système de géolocalisation du train équipé (GPS ou tachymètre).



# La roue : un capteur vibroacoustique

---

## Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail</b>  | <b>44</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Modèle expérimental vibroacoustique de la roue</b>            | <b>46</b> |
| 2.2.1      | Mesures acoustiques embarquées sur un TGV à 300 km/h             | 46        |
| 2.2.2      | Mesures vibroacoustiques à poste fixe                            | 47        |
| 2.2.2.1    | Protocole de mesure  | 48        |
| 2.2.2.2    | Comportement vibroacoustique                                     | 50        |
| 2.2.2.3    | Méthode d'identification modale expérimentale                    | 53        |
| 2.2.2.4    | Facteurs d'amortissement expérimentaux                           | 55        |
| 2.2.2.5    | Estimation de la vitesse vibratoire : application et validation  | 56        |
| <b>2.3</b> | <b>Modèle numérique vibroacoustique de la roue</b>               | <b>58</b> |
| 2.3.1      | Modélisation du comportement vibratoire                          | 58        |
| 2.3.1.1    | Modélisation de la roue par la méthode des éléments finis        | 58        |
| 2.3.1.2    | Intervalles d'associations des modes expérimentaux et numériques | 61        |
| 2.3.1.3    | Validation de la modélisation éléments finis                     | 63        |
| 2.3.2      | Modélisation du rayonnement acoustique                           | 66        |
| 2.3.2.1    | Formulation intégrale de Rayleigh                                | 66        |
| 2.3.2.2    | De la géométrie réelle à une plaque plane                        | 69        |
| 2.3.2.3    | Prise en compte de l'effet de sol                                | 70        |
| 2.3.2.4    | Calcul du champ acoustique                                       | 73        |
| 2.3.3      | Impédance acoustique numérique                                   | 76        |
| <b>2.4</b> | <b>De la pression sonore à l'effort d'interaction</b>            | <b>79</b> |
| 2.4.1      | Calcul de la vitesse vibratoire                                  | 79        |
| 2.4.2      | Calcul de l'effort appliqué                                      | 83        |
| <b>2.5</b> | <b>Discussion</b>  | <b>85</b> |
| 2.5.1      | Effet du roulage   | 85        |
| 2.5.2      | Mesure de la rugosité des deux files de rail                     | 85        |
| 2.5.3      | Robustesse de la méthode   | 86        |
| <b>2.6</b> | <b>Conclusions</b>   | <b>86</b> |

---

Nous cherchons dans ce chapitre à déterminer la mobilité et la vitesse vibratoire de la roue au point de contact roue/rail à partir de la pression rayonnée par la roue. Le rapport des deux conduits à approcher l'effort d'interaction roue/rail dans la gamme de fréquence où le rayonnement de la roue est prépondérant au bruit de roulement (Eq. 1.40). L'obtention de la vitesse vibratoire et de la mobilité obtenues grâce à la méthode d'estimation de l'interaction roue/rail présentée dans la section suivante, seront introduit dans les équations (1.47) et (1.46) de la méthode de lecture acoustique de la voie afin de déterminer la rugosité.

## 2.1 Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail à partir du rayonnement de la roue

La méthode d'estimation de l'effort d'interaction repose sur la nature modale du comportement vibratoire de la roue. On propose d'extraire l'information de l'effort appliqué à la roue à partir de sa réponse. La roue répond sur ses modes et deux hypothèses sont alors reconnues. La première est que lors du roulage, les résonances vibratoires de la roue sont peu modifiées et identifiables dans le signal de pression rayonnée en champ proche de celle-ci, malgré la présence de tout autre sources de bruit<sup>1</sup>. La seconde hypothèse est que la pression acoustique mesurée au droit de la surface de la roue est proportionnelle à la vitesse vibratoire normale à cette surface autour de chaque résonance. Si le champ de pression rayonnée par la roue vérifie ces deux hypothèses, alors il est possible d'estimer l'effort d'interaction roue/rail à partir de la pression mesurée. La figure 2.1 présente la méthode proposée.

Plaçons-nous dans le contexte du projet LECAV : un train circule à grande vitesse sur une voie ferrée. La pression acoustique est mesurée en champ proche de la surface vibrante d'une roue. Une acquisition temporelle de la pression permet d'obtenir un spectre fréquentiel qui correspond au rayonnement de la roue sur une distance  $L$  parcourue par le train.

La première étape s'appuie sur la détection des résonances dans le spectre fréquentiel de la pression  $p(\vec{x})$  mesurée. Les résonances acoustiques  $f_i$  correspondent aux résonances vibratoires de la roue (deuxième hypothèse) qui répond sur ses modes propres. Les fréquences de résonance sont connues par un calcul préalable des modes propres d'un modèle de roue résolu par la méthode des éléments finis (FEM<sup>2</sup>). La séparation modale suffisante des modes prépondérants au bruit de roulement permet d'associer chaque maximum d'amplitude du spectre de pression à un mode de vibration de la roue. Pour chaque mode de vibration, l'amplitude de pression  $p_i(\vec{x})$  et le facteur d'amortissement  $\zeta_i$  sont extraits du spectre fréquentiel de pression par une méthode d'identification modale. L'amplitude vibratoire de la surface de la roue  $v_i(\vec{x}_0)$  est ensuite déterminée à l'aide de l'impédance acoustique  $Z_i(\vec{x}, \vec{x}_0)$  de chaque mode. L'impédance est obtenue par le rapport entre la pression calculée par la résolution numérique de l'intégrale de Rayleigh discrétisée d'une plaque plane annulaire bafflée et sa vitesse normale de vibration calculée par le modèle éléments finis. Tout comme le calcul des modes propres, les impédances acoustiques de chaque mode sont calculées préalablement. A partir de la vitesse vibratoire de la surface de la roue et de la fonction de transfert vibratoire  $\gamma_i(\vec{x}_c, \vec{x}_0)$ , la vitesse au point de contact  $v_i(\vec{x}_c)$  est approchée. La mobilité  $Y_i(\vec{x}_c)$ , qui traduit la vitesse vibratoire par force unitaire au point de contact roue/rail permet de relier la vitesse à l'effort d'interaction. L'amplitude de la mobilité de

1. En roulement, la pression captée proche de la roue sera composée, hormis le rayonnement de la roue, d'un ensemble de sources de bruit tel que le bruit aérodynamique.

2. Finite Element Method.

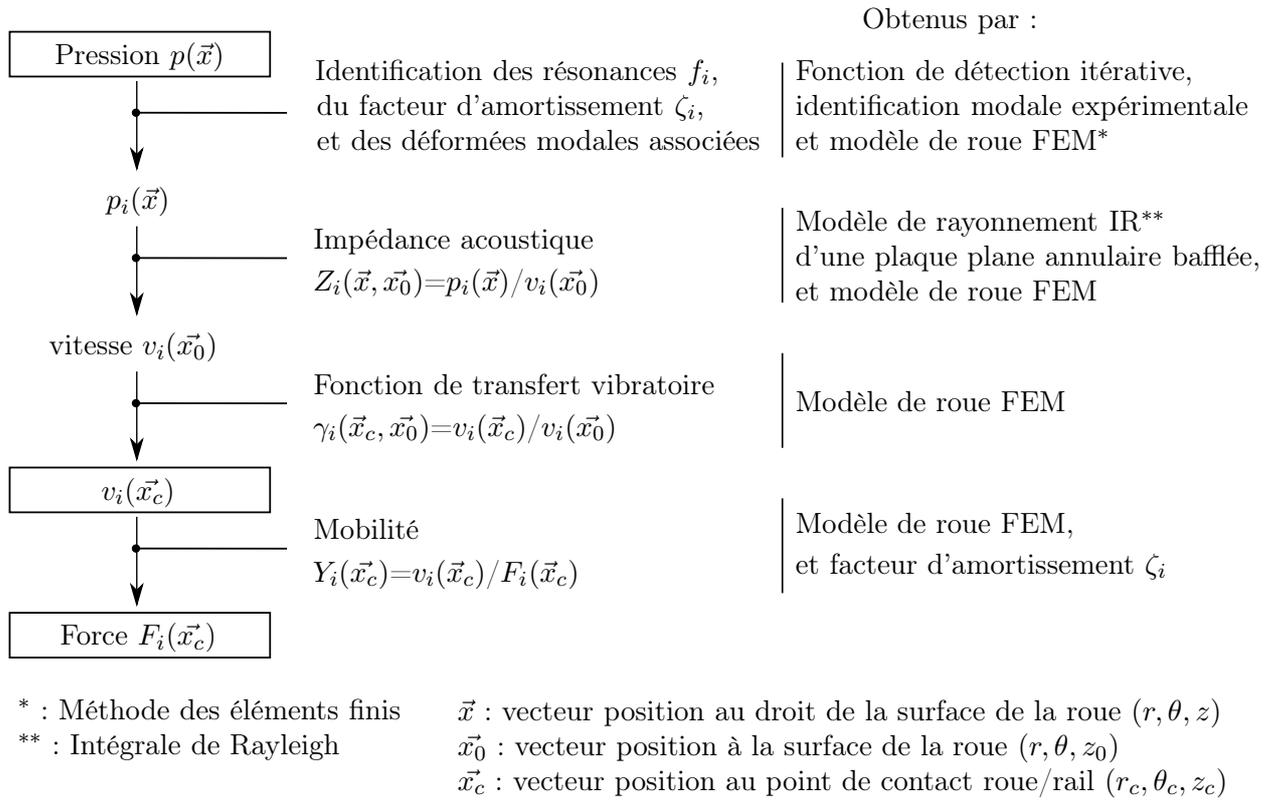


FIGURE 2.1 – Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail : partie roue

chaque mode est calculée à partir du modèle éléments finis et des facteurs d'amortissements identifiés. Ainsi, la pression acoustique rayonnée en champ proche de la surface vibrante de la roue permet d'estimer l'effort d'interaction roue/rail. Il faut cependant noter que l'effort est estimé de manière discrète : la méthode ne peut être appliquée qu'aux résonances détectées. Le modèle d'interaction roue/rail permet ensuite de traduire l'effort d'interaction en un spectre de rugosité<sup>3</sup> (voir Fig. 1.25).

Plusieurs séries de mesures ont été réalisées afin de valider les hypothèses de la méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail proposée. En tout premier lieu, des mesures de pression embarquées sur un TGV présentées dans la section 2.2.1 ont permis de valider l'hypothèse d'émergence acoustique des résonances vibratoires. Une seconde série de mesures dédiées au projet LECAV est présentée dans la section 2.2.2. Elle a été réalisée à poste fixe sur un train d'essai stationné sur une voie ballastée. Ces mesures ont permis de valider l'hypothèse de proportionnalité entre la pression acoustique et la vitesse vibratoire de la roue aux résonances ainsi que les différents modèles développés.

3. Le spectre de rugosité estimé est à l'origine de l'effort d'interaction roue/rail sur la distance  $L$  parcourue par le train.

## 2.2 Modèle expérimental vibroacoustique de la roue

### 2.2.1 Mesures acoustiques embarquées sur un TGV à 300 km/h

Des mesures de pressions embarquées sur un TGV d'essai (IRIS 360) qui circulait sur une ligne à grande vitesse (LGV) ont été réalisées par un microphone suspendu dans un caisson anéchoïque asymétrique<sup>4</sup> placé au dessus d'un tube traversant le plancher du train débouchant au-dessus d'une roue (en face de la bande de roulement). Pour une vitesse moyenne de 308 km/h et une acquisition temporelle de 80 s, la densité spectrale de puissance (DSP) permet d'affirmer que le bruit mesuré a un caractère fortement modal que l'on peut raisonnablement attribuer à la roue (voir Fig. 2.2).

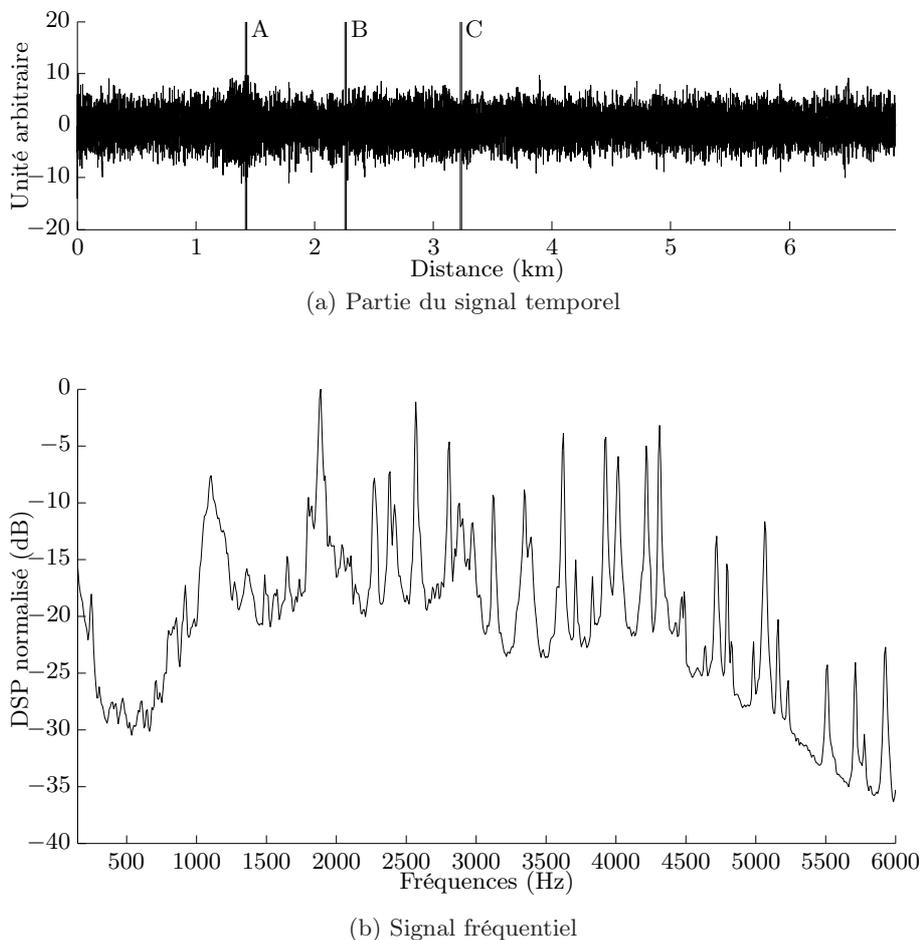


FIGURE 2.2 – Pression mesurée par un microphone embarqué sur un TGV circulant à une vitesse moyenne de 308 km/h pour une distance parcourue de 6,8 km. La référence de l'amplitude de la densité spectrale de puissance est le maximum d'amplitude de cette DSP

Le dispositif de mesure embarqué LECAV a pour but de déterminer le spectre de rugosité moyen du rail<sup>5</sup> par tronçons de voie relativement courts par rapport aux nombres de kilomètres de la ligne inspectée. Les densités spectrales présentées sur la figure 2.3 représentent le contenu fréquentiel des acquisitions temporelles correspondant à des tronçons de voie de

4. L'asymétrie du caisson permet d'éliminer les modes acoustique de la caisse.

5. De la file de rail correspondant à la roue équipée.

10 m. En considérant que la réponse vibratoire de la roue, ainsi que l'armement de la LGV sont invariants sur la distance de chaque acquisition, la variation de l'amplitude du signal et de son contenu fréquentiel dépend de la fluctuation de l'amplitude de la rugosité du rail. Dès lors que la fonction de transfert entre la pression et la rugosité est connue, il est alors possible de déterminer par réciprocity, l'un par rapport à l'autre. La détermination de la pression par rapport à la rugosité correspond au problème direct. Dans le cadre du système LECAV, seul le problème inverse est considéré : déterminer la rugosité par rapport à la pression. La voie de transfert acoustique entre le microphone embarqué sur le TGV IRIS 360 et le microphone ne sont expérimentalement pas connus. Il est alors impossible d'établir et de vérifier la relation entre la pression rayonnée par la roue et sa vibration. Or le principe de la méthode d'estimation de l'effort d'interaction s'appuie sur la connaissance d'un lien robuste entre la pression et la vitesse vibratoire de la roue. Pour ce faire, une campagne de mesure a été réalisée à poste fixe dans un environnement maîtrisé.

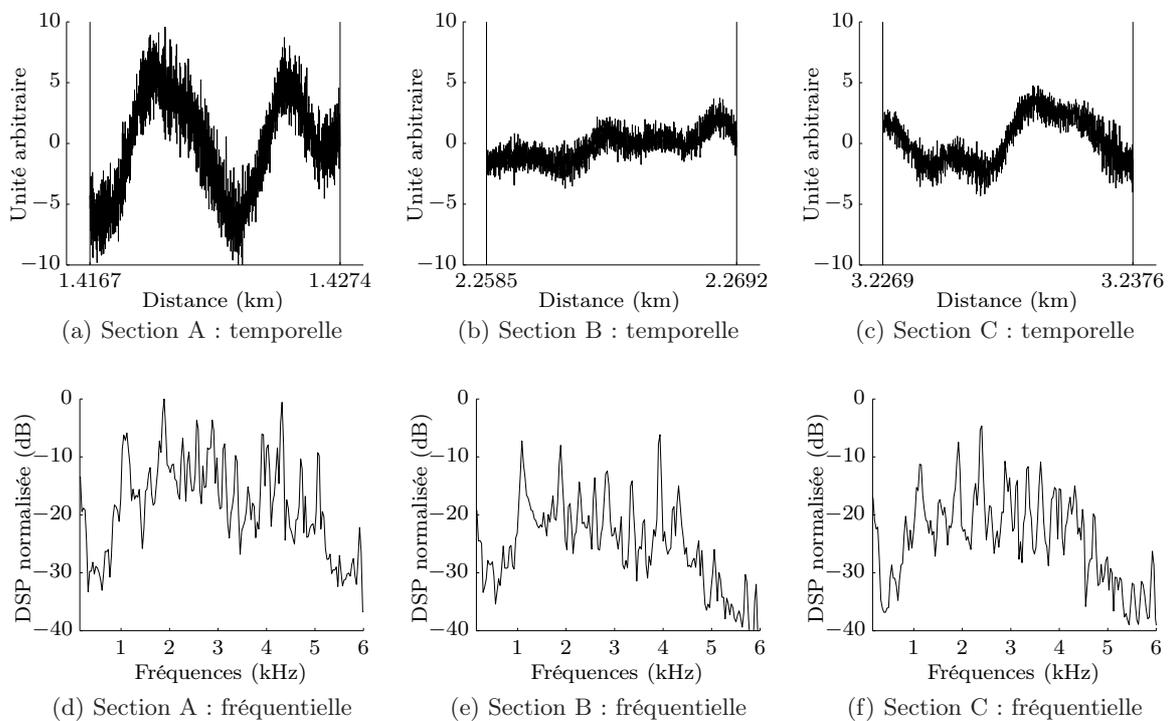


FIGURE 2.3 – Evolution de la pression mesurée par un microphone embarqué sur un TGV circulant à une vitesse moyenne de 308 km/h pour une distance parcourue de 10 m, (cf. Fig. 2.2). La référence de l'amplitude des densités spectrales de puissance est le maximum d'amplitude des DSP des sections A, B et C

### 2.2.2 Mesures vibroacoustiques à poste fixe

Une campagne de mesure a été réalisée sur une voiture d'essai équipée de roues monoblocs de 890 mm de diamètre. La caractérisation vibroacoustique expérimentale d'une roue a été effectuée à poste fixe de manière à équiper celle-ci, ainsi que la boîte d'essieu et le rail de capteurs de pression et d'accélération. Ces conditions de mesures ont ainsi pris en compte l'effet du chargement de la voie au point de contact roue/rail, la condition d'encastrement de la roue sur l'essieu, les effets acoustiques dus à la caisse du train, la géométrie complexe du

bogie et l'effet de sol sans les perturbations aéroacoustiques qui seraient provoquées par le mouvement du train.

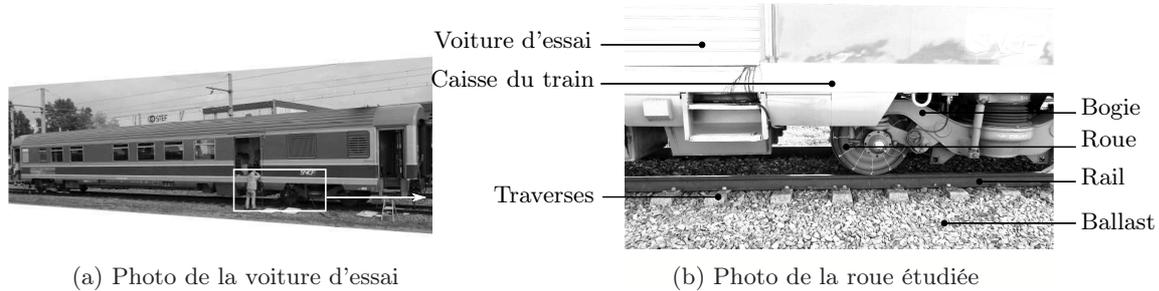


FIGURE 2.4 – Voiture d'essai en stationnement sur une voie de service

La voiture d'essai était en stationnement sur une voie de service ballastée de l'établissement de maintenance des Ardoines. Les informations sur la composition de la voie sont données en annexe (cf. annexe B.1). Le point de contact de la roue sur le rail était situé à mi-distance entre deux traverses (voir Fig. 2.4b). Les mesures ont été réalisées au mois d'avril 2011 par l'Agence d'Essai Ferroviaire (AEF). Celles-ci sont détaillées dans la section suivante.

### 2.2.2.1 Protocole de mesure

Pour déterminer la relation entre la vitesse vibratoire de la roue et son rayonnement acoustique, les acquisitions de la pression et de l'accélération ont été effectuées simultanément (voir Fig. 2.5). Les informations techniques concernant les capteurs et la chaîne de mesure sont données en annexe (cf. annexe B.2). Les capsules des microphones étaient situées à équidistance de la surface courbe de la face avant de la roue (*i.e.* vers l'extérieur de la voie<sup>6</sup>) au droit des accéléromètres collés sur la face arrière (*i.e.* vers l'intérieur de la voie<sup>7</sup>). La pose des accéléromètres sur la face arrière de la roue permet, par rapport au gabarit du bogie, d'ausculter toute la surface de la roue, sans influencer le rayonnement acoustique de la face opposée. Les positions de mesure sont présentées sur la figure 2.6b. Celles-ci forment un maillage défini par  $N_r$  points de mesures radiaux et  $N_\theta$  points de mesures angulaires. Le maillage a été réalisé de manière à observer un nombre de diamètres nodaux inférieur ou égal à six ( $n \leq 6$ ) et un nombre de cercles nodaux inférieur ou égal à deux ( $m \leq 2$ ) tout en considérant les contraintes expérimentales sur le nombre et la mise en place des capteurs<sup>8</sup>. Sept positions de mesure d'accélération et de pressions dans la direction axiale ont été réparties sur une ligne radiale entre le rayon intérieur  $r_{int}$  de la roue (défini par la jonction entre la toile et le moyeu) et le rayon extérieur  $r_{ext}$  (défini par la bande de roulement), (voir Fig. 2.6a). Une position de mesure d'accélération et de pression dans une direction radiale a également été définie sur la bande de roulement.

Les acquisitions simultanées de pression et d'accélération sur une ligne radiale ont été effectuées pour 12 positions angulaires comprises entre 0 et 330 °<sup>9</sup>. Cette opération a été réalisée à l'aide d'un support microphonique rotatif centré sur l'axe de l'essieu (voir Fig. 2.5a). Ce système assurait une répétabilité des mesures de pression (écartements inter-microphones

6. La direction normale à la surface avant de la roue est dans la direction des  $z$  positifs (voir  $n_{ax}$  sur la figure 2.6a).

7. La direction normale à la surface arrière de la roue est dans la direction des  $z$  négatifs (voir Fig. 2.6a).

8. Le nombre maximum de microphone était fixé à 8.

9. Le pas angulaire  $\Delta_\theta$  est de 30°.

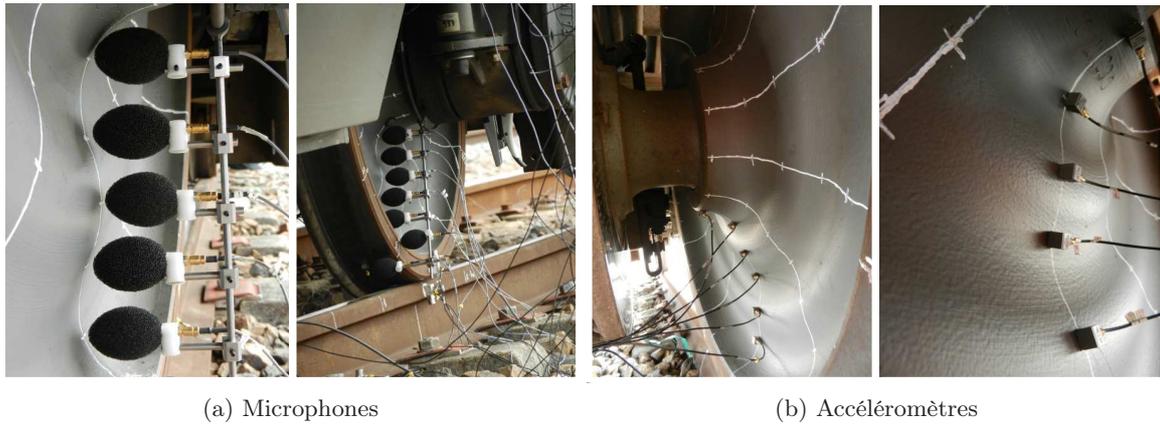
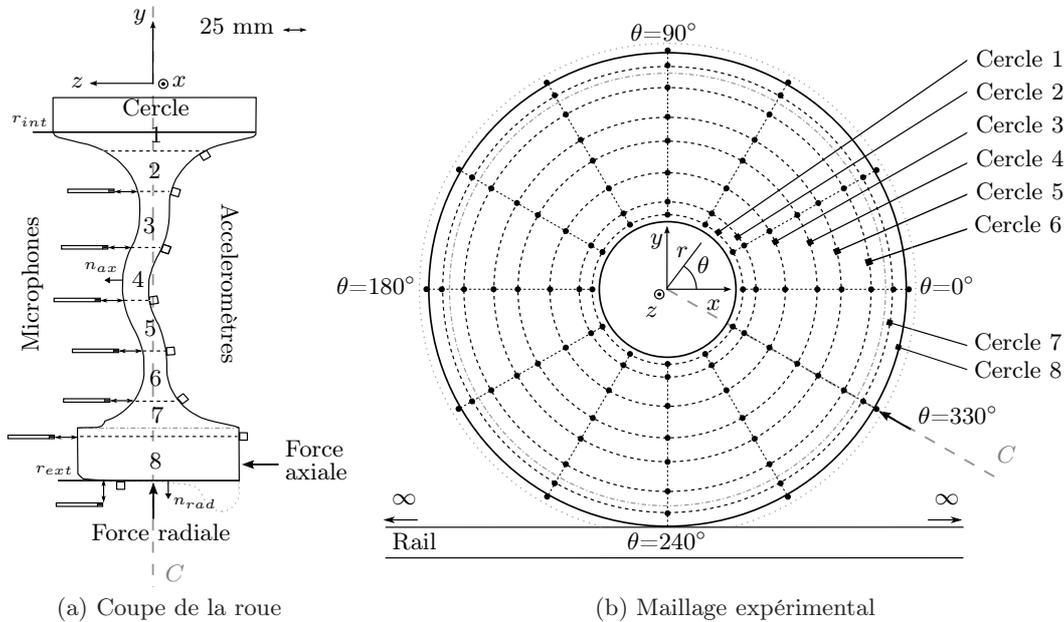


FIGURE 2.5 – Photographies des dispositifs de mesures acoustiques et vibratoires

FIGURE 2.6 – Positions de mesure ( $\cdot$ ) sur la face avant de la roue monobloc 890 mm étudiée

et distances entre les microphones et la surface de la roue maintenus). Les accéléromètres ont quant à eux été déplacés manuellement et fixés sur la surface de la toile de la roue par de la cire (voir Fig. 2.5b). L'encombrement d'un microphone et de sa boule anti-vent n'a pas permis la mesure de pression proche du moyeu (cercle 1), le nombre de positions de mesure était donc de 84 pour la pression et de 92 pour l'accélération. Pour une analyse plus aisée dans la suite du document, les positions de mesures sont numérotées et repérées sur la figure 2.7.

La force d'excitation radiale ne pouvant pas être appliquée au point de contact entre la roue et le rail, elle a été appliquée au centre de la bande de roulement de la roue pour un angle  $\theta$  de  $330^\circ$ . L'excitation axiale a été appliquée sur la jante pour un même angle (voir Fig. 2.6). Les acquisitions de pression et d'accélération pour chaque pas angulaire ont été réalisées pour dix excitations au marteau d'impact dans les directions radiale et axiale. Pour chaque impact, l'énergie injectée dans la roue a été mesurée par le cap-

teur de force du marteau d'impact. Pour les angles compris entre 0 et 120°, la géométrie du bogie n'a pas permis de mesurer la pression acoustique rayonnée par la roue (voir Fig. 2.7).

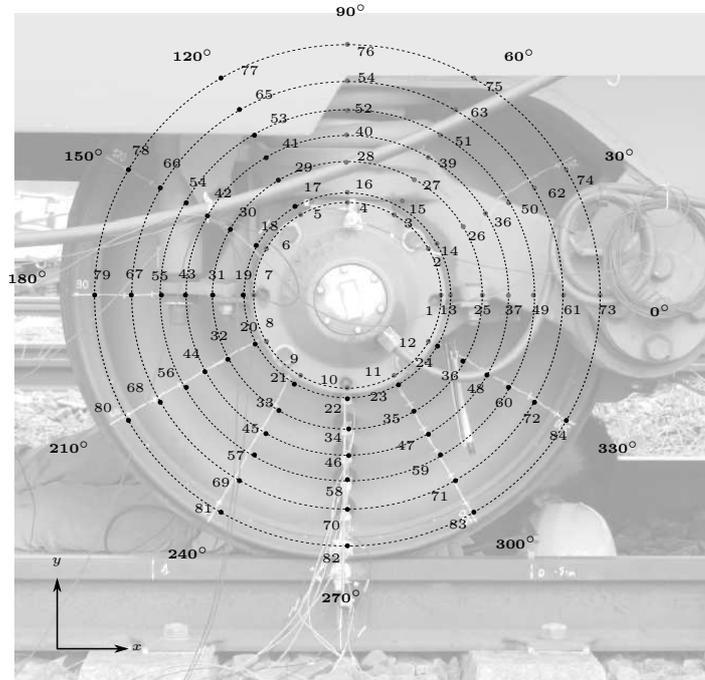


FIGURE 2.7 – Numéros des positions de mesures de pressions et d'accélération axiales

Une partie des résultats obtenus, après traitement des données mesurées, est présentée tout au long de ce chapitre. Une première analyse des résultats expérimentaux est proposée dans la section suivante.

### 2.2.2.2 Comportement vibroacoustique

Intéressons nous dans un premier temps à identifier la position optimale de mesure embarquée de pression par rapport au comportement vibroacoustique de la roue. Afin d'obtenir le meilleur rapport signal sur bruit, il est *a priori* judicieux de placer le microphone au droit de la surface dont le rayonnement acoustique est maximal. Les distributions des amplitudes quadratiques moyennes des vitesses vibratoires et des pressions acoustiques mesurées le long de la section transversale (*i.e.* le rayon) représentées sur la figure 2.8<sup>10</sup>, indiquent qu'une excitation radiale provoque une amplitude de pression acoustique maximale au centre de la toile (cercle 4) ; position pour laquelle la vitesse de vibration axiale<sup>11</sup> de la toile est également maximale. Etant donné que lors du roulement, la rugosité provoque un déplacement relatif entre le rail et la roue qui induit une force d'interaction principalement verticale<sup>12</sup>[Thompson 1993a], le microphone qui assurera la mesure de pression embarquée sera positionné au centre de la toile de la roue.

Attachons-nous maintenant à examiner quelles informations sur la vitesse vibratoire sont « propagées » par la pression. La vitesse de vibration quadratique moyenne mesurée

10. Les mesures sont filtrées entre 100 et 6000 Hz, ce qui correspond à la bande de fréquences utiles dont la part du bruit basses fréquences inhérente aux conditions de mesures extérieures est éliminée.

11. La vitesse de vibration est mesurée dans la direction de la normale sortante à la face avant de la roue.

12. Autrement dit, la rugosité induit une force dans la direction normale à la surface de la bande de roulement, telle que la force radiale expérimentale.

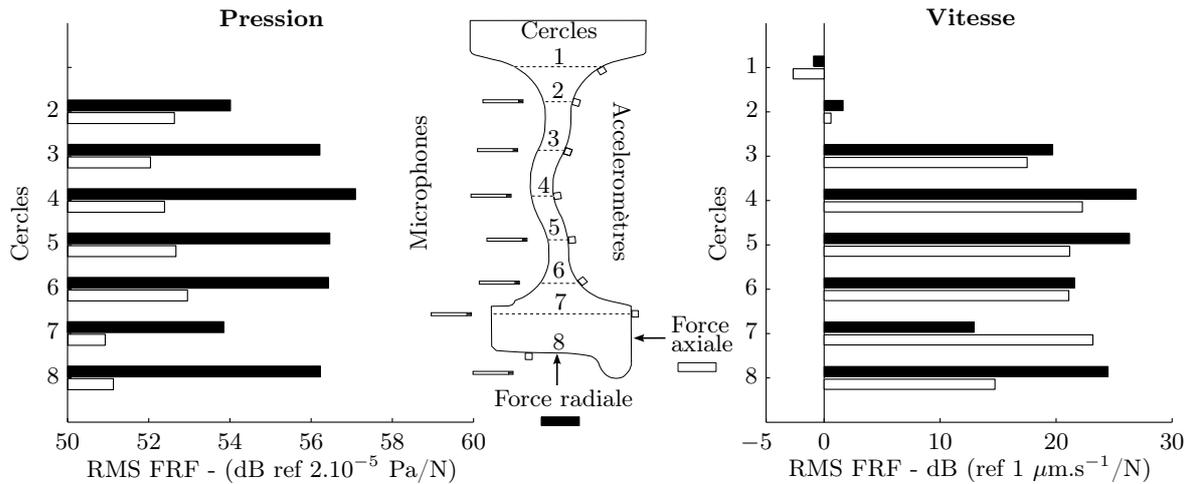


FIGURE 2.8 – Pression acoustique et vitesse vibratoire quadratiques moyennes de la section transversale d’une roue monobloc de 890 mm de diamètre montée sur un train en stationnement sur une voie ferrée ballastée.

est en accord avec l’inertie de la masse de la roue décrite par les modes de vibration (voir Fig. 1.7 dans la section 1.2.1.1 du chapitre 1). Pour une force radiale, la vitesse de vibration axiale mesurée au centre de la toile tracée sur la figure 2.9<sup>13</sup>, permet d’affirmer que le fort niveau vibratoire observé sur la figure 2.8 est principalement dû aux modes radiaux (R), ainsi qu’aux modes 1L (comme par exemple le mode 1L4). La réponse vibratoire significative de ces derniers (1L), est sollicitée par le couplage entre ces modes et les modes radiaux [Thompson 1993b]. En revanche, les réponses vibratoires des modes 0L et 2L (mis à part 2L0) sont relativement faibles. La distribution de la pression acoustique rayonnée par la roue est analogue à la distribution de vitesse vibratoire (voir Fig. 2.8)<sup>14</sup>. Il est alors légitime d’affirmer qu’en champ proche, la pression acoustique résulte de la vitesse vibratoire de la surface concentrée autour du point au droit de la mesure de pression. La forte corrélation entre la pression acoustique et la vitesse vibratoire sur la figure 2.9 corrobore cette affirmation. Par conséquent, il est naturel d’associer les résonances acoustiques aux modes de vibration correspondant, comme le montre la coïncidence des repères des types de modes<sup>15</sup> sur les figure 2.9a et 2.9b. Les modes les plus contributifs au bruit de roulement<sup>16</sup> sont alors les modes radiaux et latéraux à un cercle nodal dans la gamme de fréquences comprises entre 1500 et 5500 Hz, autrement dit pour les modes R et 1L dont les diamètres nodaux sont supérieurs à deux ( $n \geq 2$ ) [Thompson 1988, Thompson 1996b, Cigada 2008]. La borne basse fréquence correspond à l’apparition du premier mode radial significatif (R2) [Thompson 2000], et la borne supérieure correspond à la limite fréquentielle de l’excitation mécanique de la rugosité par rapport à la taille de la surface de contact roue/rail (filtre de contact - cf. section 1.4.2), comme en atteste le champ de pression émis par la roue d’un TGV en circulation tracé sur la figure 2.2 (cf. section 2.2.1).

La comparaison entre la pression et la vitesse vibratoire effectuée dans cette section,

13. La vitesse vibratoire tracée sur la figure 2.9 est la moyenne des vitesses vibratoires mesurées sur le cercle 4 entre 150 et 330° inclus (positions 42 à 48 sur la figure 2.7).

14. Rappelons ici que les positions de mesures acoustiques sont en face des positions de mesures vibratoires.

15. Les types de modes sont présentés dans la section 1.2.1.1 du chapitre 1. L’association des résonances à ces types de modes est effectuée par comparaison calcul/mesures (pour toutes les positions) - cf. section 2.3.1.3.

16. Dans la part du bruit de roulement imputé à la roue.

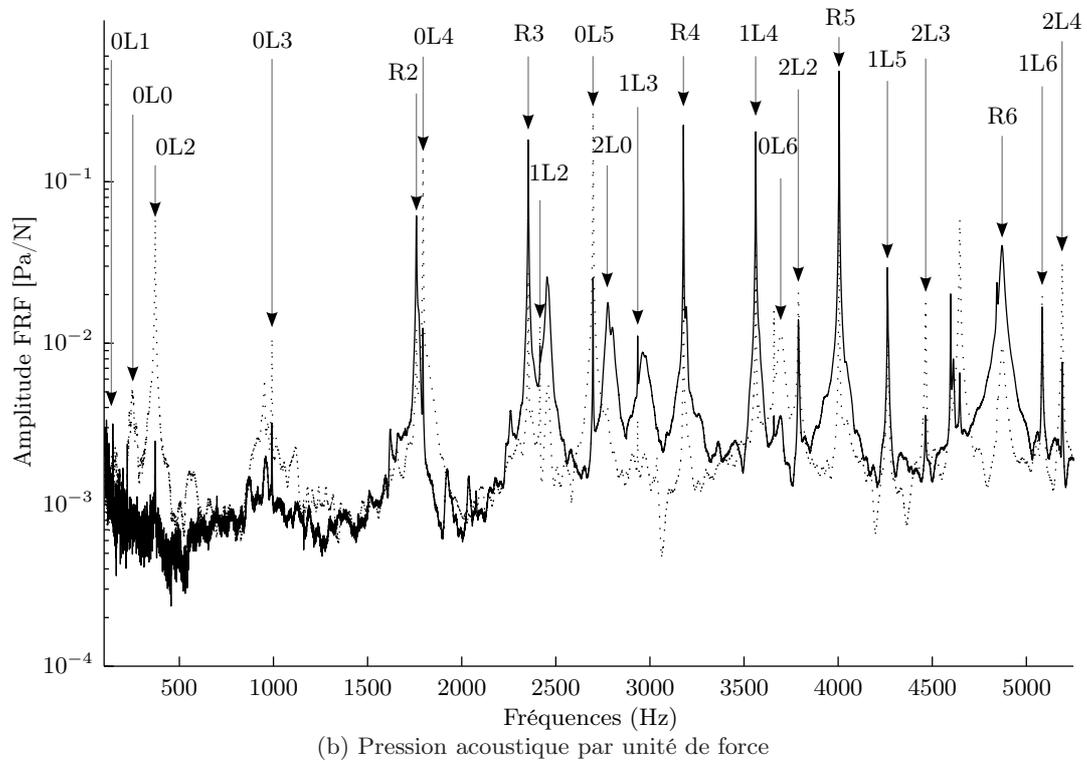
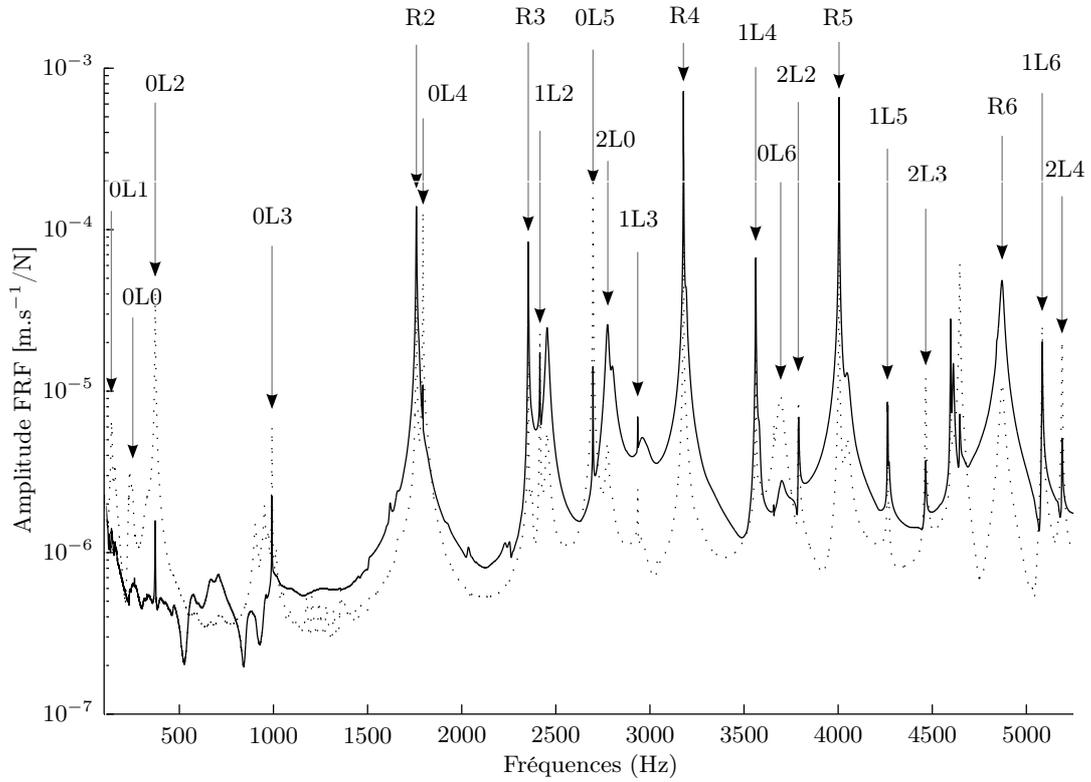


FIGURE 2.9 – Mobilité et pression moyenne (entre  $120$  et  $330^\circ$ ) sur la toile de la roue (cercle 4,  $r=0,25$  m) pour une excitation radiale (—) et axiale ( $\cdots$ ). Types de modes ( $\rightarrow$ ).

permet de confirmer que le bruit rayonné par la roue est caractérisé par ses résonances vibratoires (cf. section 2.2.1). Les fréquences de résonances  $f_i$  des modes excités par l'effort d'interaction roue/rail induit par la rugosité peuvent être directement identifiées à partir de la pression acoustique émise par la roue. D'après la méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail, il est également nécessaire de déterminer l'amortissement de chaque mode. L'identification de ce dernier requiert l'emploi d'une méthode d'identification expérimentale qui fait l'objet de la section suivante.

### 2.2.2.3 Méthode d'identification modale expérimentale

Dans cette section, on s'applique à estimer le facteur d'amortissement de chaque mode détecté à partir de la mesure de pression. Celui-ci est utile à l'estimation de la mobilité de la roue au point de contact. Comme précisé dans la section 1.2.1.2 du chapitre 1, l'amortissement des modes de roues ferroviaires est très faible. Lors du roulage, le facteur d'amortissement augmente mais reste néanmoins suffisamment faible pour que l'hypothèse d'unicité locale des modes soit vérifiée (voir Fig. 2.2 et 2.3). De ce fait, les modes sont supposés indépendants. Ils sont donc considérés individuellement, comme des systèmes résonants à un degré de liberté (cf. section 1.2.1.1). La réponse d'un tel système, autour de chaque mode  $i$ , s'écrit :

$$S_i(\omega) = \frac{A_i(\omega_i)}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\zeta_i\omega\omega_i}, \quad (2.1)$$

où les paramètres modaux tels que la fréquence de résonance  $f_i$  ( $f_i = \omega_i/2\pi$ ), l'amplitude modale  $A_i$  et le facteur d'amortissement  $\zeta_i$  peuvent être expérimentalement déterminés par plusieurs méthodes. Les plus courantes sont [Ewins 2000] :

- la méthode de l'amplitude du pic,
- la méthode du cercle de Nyquist,
- ou une méthode d'ajustement de courbe par une fonction Lorentzienne<sup>17</sup>

L'amortissement particulièrement faible de la roue et le pas fréquentiel<sup>18</sup> ne permettent pas une évaluation satisfaisante de l'amortissement par la méthode de l'amplitude du pic. En effet, le facteur d'amortissement peut être obtenu par la largeur de la bande fréquentielle définie par la décroissance de l'amplitude d'un facteur  $1/\sqrt{2}$  (-3 dB) autour de la résonance donnée par  $\Delta f = 2\zeta_i f_i$ . Un amortissement de  $10^{-4}$  à 1000 Hz nécessite une résolution minimum de 0,2 Hz<sup>19</sup>, or la résolution expérimentale est de 0,4 Hz. La seconde méthode (cercle de Nyquist) permet quant à elle une identification robuste du facteur d'amortissement. Elle consiste à utiliser les propriétés du cercle formé par les points de mesure dans le plan complexe<sup>20</sup> autour d'une résonance afin d'en estimer son amplitude et son amortissement (voir Fig. 2.10). La constante modale est donnée par la taille du cercle :

$$|A_i(\omega_i)| = D_i\omega_i2\zeta_i, \quad (2.2)$$

17. Les fonctions Lorentziennes, tout comme les fonctions Gaussiennes permettent de représenter aisément les formes de type « pic » (distributions unimodales).

18. Inhérent au temps d'acquisition.

19. Dans le cas idéal où la bande fréquentielle est centrée sur le résonance.

20. Aussi appelé plan d'Argand.

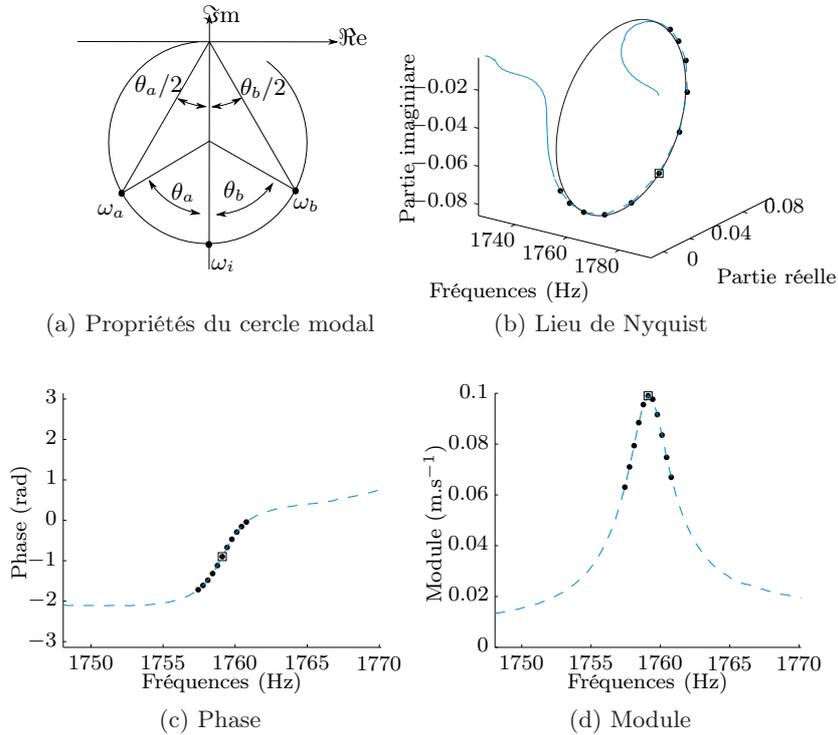


FIGURE 2.10 – Propriétés du cercle de Nyquist dans le plan complexe et exemple de représentations de la mobilité de la roue monobloc étudiée autour d’un mode (R2) pour une excitation radiale; mesures (---) utilisées pour l’identification (●) de part et d’autre de la résonance (□), et cercle théorique (—).

où  $D$  est le diamètre du cercle identifié à partir de la mesure<sup>21</sup>, et  $\zeta_i$  le facteur d’amortissement donné<sup>22</sup> par la relation suivante [Ewins 2000] :

$$\zeta_i \cong \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_i (\tan(\theta_a/2) + \tan(\theta_b/2))}, \quad (2.3)$$

où  $\theta_a$  et  $\theta_b$  sont les angles formés par les points de mesure de part et d’autre de la résonance illustrée sur la figure 2.10a. La méthode du cercle de Nyquist est appliquée autour des résonances détectées par une fonction itérative qui procède de la manière suivante :

- la fréquence de résonance  $f_i$  est estimée au maximum d’amplitude du signal mesuré,
- le facteur d’amortissement  $\zeta_i$  et la constante modale  $A_i$  sont estimés par la méthode du cercle de Nyquist (Eq. 2.3 et Eq. 2.2),
- l’amplitude du signal autour de la résonance est analytiquement approchée à l’aide de l’équation (Eq. 2.1),
- l’amplitude approchée autour de la résonance est soustraite au signal mesuré.

La soustraction de l’amplitude approchée permet d’annuler la résonance dont les paramètres modaux sont identifiés, et donc de repérer un nouveau maxima d’amplitude lors de l’itération suivante. Le nombre d’itération  $N$  choisi ne doit pas dépasser le nombre de modes de la structure étudiée, ou alors les identifications n’auraient pas de signification physique.

21. L’identification du cercle théorique est effectuée par la méthode des moindres carrés.

22. Dans le cas d’un faible amortissement.

La méthode d'identification de résonances par une somme de fonctions Lorentziennes ou d'autres méthodes d'identifications de courbes, présentent l'avantage de déterminer le facteur d'amortissement à partir d'un signal de valeurs absolues, et non des parties réelles et imaginaires indispensables à la méthode de Nyquist. Le traitement des signaux temporels expérimentaux<sup>23</sup> acquis lors du roulage (système embarqué) ne donneront accès qu'à un signal de valeurs absolues, telle que la densité spectrale de puissance. Dans ce cas, une méthode d'identification de courbes sera alors requise pour la détermination des paramètres modaux. Néanmoins, pour des mesures impulsives, la méthode du cercle de Nyquist et d'identification de courbes sont équivalentes. Les facteurs d'amortissement identifiés à partir du cercle de Nyquist sont effectivement comparables aux résultats obtenus par une méthode d'ajustement de courbes<sup>24</sup> développée sous Mathematica © (voir Fig. 2.11).

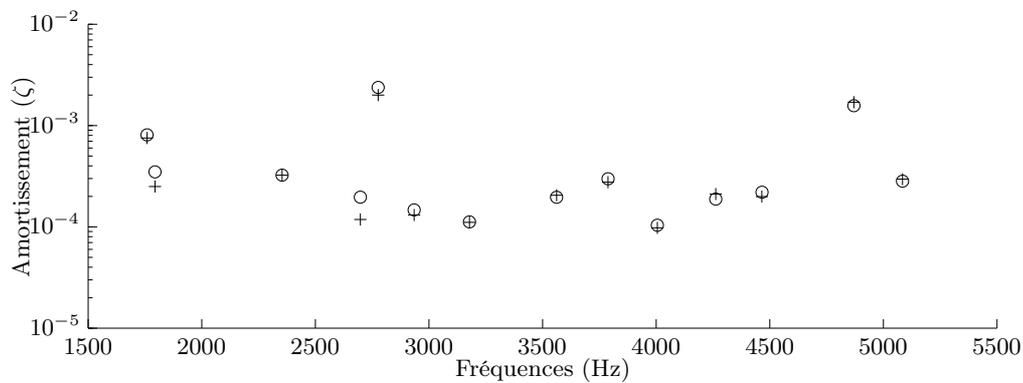


FIGURE 2.11 – Amortissement identifié à partir de la pression mesurée à la position 45 (cf. Fig. 2.13a) : méthode de Nyquist sur Matlab © (o), ajustement de courbes Lorentziennes sur Mathematica © (+).

#### 2.2.2.4 Facteurs d'amortissement expérimentaux

Pour chaque acquisition de pression mesurée<sup>25</sup>, les facteurs d'amortissement sont identifiés à l'aide de la méthode du cercle de Nyquist pour un nombre de modes détectés fixé à  $N=15$ <sup>26</sup>. L'opération est menée parallèlement sur la vitesse vibratoire, en prenant soin de vérifier la correspondance entre les modes repérés sur la pression et la vitesse<sup>27</sup>. Les facteurs d'amortissement identifiés sont reportés sur la figure 2.12. On remarque que pour chaque mode, la moyenne des facteurs d'amortissement identifiés à partir de la pression tend vers la moyenne des identifications réalisées à partir des vitesses vibratoires. Cela confirme que chaque mode rayonne principalement autour de sa fréquence de résonance, (coefficient de rayonnement unitaire décrit dans la littérature - cf. section 1.2.2) et que par conséquent les mesures de pression et de vitesse sont équivalentes pour estimer le comportement vibratoire de la roue. Ainsi, l'estimation de l'amortissement utile au calcul de la mobilité de la roue au

23. Supposés aléatoires, gaussiens, stationnaires et ergodiques.

24. La méthode d'ajustement de courbes est basée sur l'approximation itérative d'une fonction Lorentzienne par rapport à un signal mesuré, centré sur une résonance.

25. Pression mesurées aux positions axiales comprises entre les angles 150 et 330° inclus (cf. section 2.2.2.1).

26. Ce choix permet de localiser les modes les plus émergents et d'éviter ainsi les détections d'émergences de niveau proche du bruit de fond.

27. Cette précaution permet une comparaison directe entre les identifications des facteurs d'amortissement effectuées à partir de la pression et ceux obtenus à partir de la vitesse.

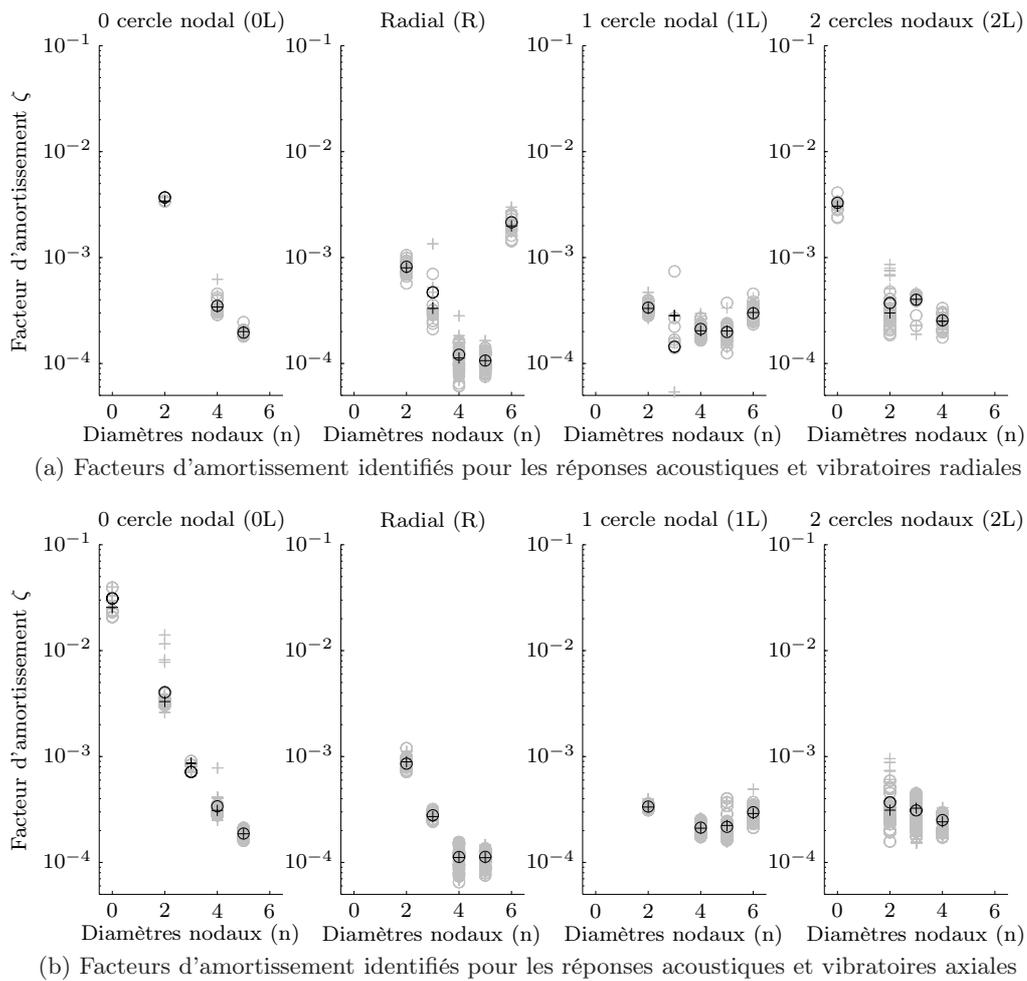


FIGURE 2.12 – Facteurs d’amortissement expérimentaux d’une roue monobloc de 890 mm de diamètre (montée sur un train en stationnement sur une voie ballastée) identifiés à partir : de la pression acoustique [par position (rond gris) - moyenne (rond noir)] et de la vitesse vibratoire [par position (croix grise) - moyenne (croix noir)].

point de contact peut être assurée par la mesure de pression embarquée<sup>28</sup>.

Le couplage entre le rail et la roue, par l’intermédiaire du contact entre les surfaces des bandes de roulements respectives, augmente l’amortissement. Les facteurs d’amortissement obtenus sont effectivement supérieurs aux facteurs d’amortissements nominaux d’une roue libre indiqués par Thompson [Thompson 2009] (cf. section 1.2.1.2).

### 2.2.2.5 Estimation de la vitesse vibratoire au moyen de la pression acoustique : application et validation

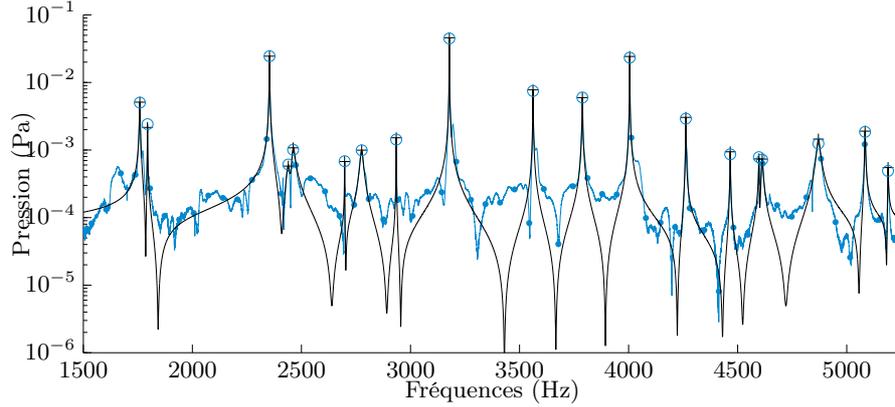
Vérifions dans cette section, la justesse de l’identification du facteur d’amortissement et appliquons la première étape de la méthode d’identification de l’effort d’interaction roue/rail (voir figure 2.1) : l’évaluation de la vitesse vibratoire au moyen de la pression mesurée. Pour cela, la vitesse de vibration  $v(\vec{x}_0)$  est reconstruite à l’aide des paramètres modaux identifiés

28. L’identification du facteur d’amortissement sera effectuée par la méthode d’ajustement de courbes (cf. section 2.2.2.3).

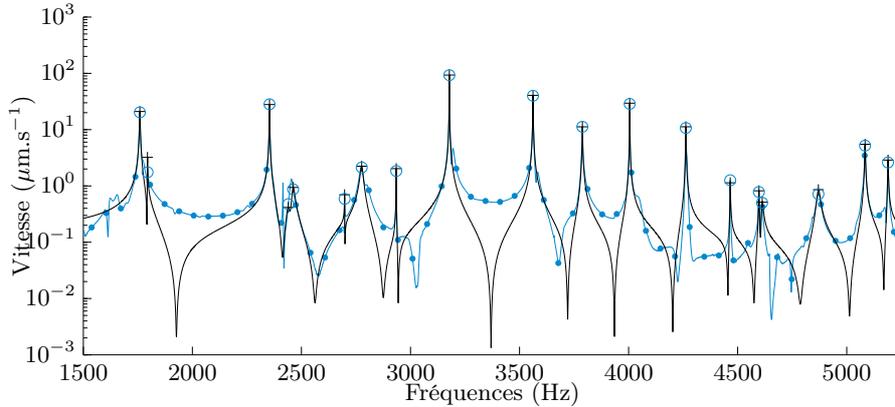
à partir de la pression  $p(\vec{x})$  mesurée en champ proche du centre de la toile de la roue<sup>29</sup>. En premier lieu, la reconstruction est appliquée à la pression par superposition modale telle que :

$$p(\omega, \vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i(\omega_i, \vec{x})}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\zeta_i\omega\omega_i}. \quad (2.4)$$

La figure 2.13a illustre la reconstruction de la pression par rapport à la mesure. On observe



(a) Pression acoustique  $p(r, \theta, z)$  avec  $r \approx 0,27$  et  $\theta \approx 240^\circ$  et  $z \approx 0,025$  m



(b) Vitesse vibratoire  $v(r, \theta, z_0)$  avec  $r \approx 0,27$ ,  $\theta \approx 240^\circ$  et  $z_0 \approx 0$  m

FIGURE 2.13 – Pression acoustique et vitesse vibratoire à la position 45 pour une excitation radiale (voir Fig. 2.7) ; mesures (—●—, aux résonances ○) et modèle de superposition modale construit pour les paramètres  $f_i$ ,  $\zeta_i$  et  $A_i$  identifiés à partir de la pression et de l'impédance  $Z_i$  mesurée (—, aux résonances +).

qu'autour des résonances, la pression reconstruite coïncide avec la pression mesurée, ce qui traduit l'exactitude de l'identification des paramètres modaux. A l'aide de ces derniers, dont la constante modale est divisée par l'impédance acoustique mesurée  $Z_i(\vec{x}, \vec{x}_0)$ <sup>30</sup>, la vitesse est reconstruite telle que :

$$v(\omega, \vec{x}_0) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i(\omega_i, \vec{x})/Z_i(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\zeta_i\omega\omega_i}. \quad (2.5)$$

29. La pression acoustique rayonnée est mesurée pour un impact sur la bande de roulement (radial) à  $330^\circ$ .

30. L'impédance acoustique est la moyenne des impédances mesurées pour chaque impact.

L'accord entre la vitesse vibratoire reconstruite  $\tilde{v}(\vec{x}_0)$  et la vitesse mesurée autour de chaque mode tracées sur la figure 2.13b, révèle que :

- les fréquences de résonances vibratoires  $f_i$  sont correctement détectées et identifiées,
- la pression acoustique proche de la surface vibrante de la roue est proportionnelle à la vitesse vibratoire de cette surface, c'est pourquoi les facteurs d'amortissement  $\zeta_i$  estimés sont assimilables aux facteurs d'amortissement vibratoires.

L'obtention de la vitesse de vibration à partir de la pression dépend de l'impédance acoustique  $Z_i$  (Eq.2.5), qui caractérise la capacité de rayonnement acoustique de chacun des modes. Cette impédance est ici mesurée (cf. section 2.2.2.1), or dans le contexte du projet LECAV, celle-ci sera inconnue<sup>31</sup>. Afin d'estimer la vitesse de vibration de la roue par l'unique mesure de pression rayonnée par celle-ci, on propose d'évaluer l'impédance acoustique de chaque mode à partir de méthodes numériques.

## 2.3 Modèle numérique vibroacoustique de la roue

L'impédance acoustique de chaque mode est définie par le rapport entre la pression rayonnée en un point proche de la surface avant de la roue et la vitesse vibratoire de cette surface au droit de ce point. On propose de modéliser la pression acoustique rayonnée par la roue par le rayonnement d'une plaque plane annulaire bafflée dont la formulation intégrale de Rayleigh est une solution (cf. section 2.3.2.1). Cette formulation requiert la vitesse vibratoire de la surface émissive. Seule la méthode des éléments finis permet de connaître cette vitesse vibratoire. Elle est présentée dans la section suivante.

### 2.3.1 Modélisation du comportement vibratoire

#### 2.3.1.1 Modélisation de la roue par la méthode des éléments finis

Le comportement vibratoire de la roue ferroviaire monobloc de 890 mm de diamètre étudiée expérimentalement (cf. section 2.2.2.1) est modélisé par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel Cast3M ©. Le maillage volumique de la structure<sup>32</sup> est réalisé par construction axisymétrique autour de l'axe de l'essieu de la surface maillée de la section définie par le contour de la roue (voir Fig. 2.14).

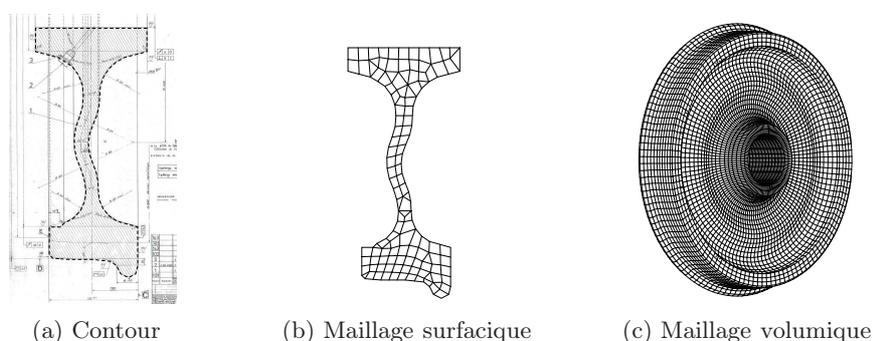


FIGURE 2.14 – Construction du maillage éléments finis volumique d'une roue monobloc.

31. La mesure simultanée de la pression et de la vitesse vibratoire sur la roue instrumentée par le système LECAV susciterait des contraintes d'adaptabilité et de coût d'installation inappropriés.

32. Composé de 14518 éléments cubiques linéaires.

Les conditions aux limites du calcul des modes propres<sup>33</sup> sont les suivantes :

- une contrainte d’encastrement<sup>34</sup> est appliquée aux noeuds de la surface interne du moyeu. Cette condition traduit la prise en compte de l’essieu.
- La matrice de raideur géométrique est calculée pour un champ de contraintes qui satisfait le champ de déplacement de la structure causé par une force ponctuelle de 56 kN. Cette condition décrit la force de réaction engendrée par le poids de la voiture d’essai au contact de la roue avec le rail<sup>35</sup>.

Cette dernière condition aux limites fixe les diamètres nodaux. Cependant, le calcul des modes asymétriques ( $n \geq 1$ ) conduit à deux déformées modales de fréquences propres quasi-identiques<sup>36</sup> : l’une en sinus, l’autre en cosinus<sup>37</sup>. Seules les déformées qui correspondent aux mesures sont considérées (majoritairement en cosinus). La figure 2.15 illustre les déformées modales obtenues par le calcul aux valeurs propres d’un mode latéral (1L4) et des modes radiaux (R2 et R5).

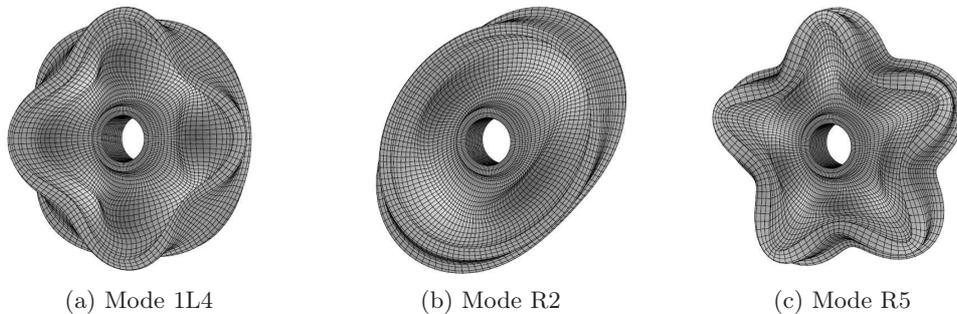


FIGURE 2.15 – Déformées modales d’une roue 890 mm monobloc calculées par éléments finis

Les fréquences des modes propres calculées et associées aux résonances mesurées sont ordonnées par types de déformations ( $m$ ) et par nombre de diamètres nodaux ( $n$ ) dans le tableau 2.1. La vitesse vibratoire normale en chaque noeud de la surface du maillage volumique est ensuite calculée pour des forces appliquées aux noeuds correspondant aux impacts expérimentaux :

- sur la bande de roulement dans la direction radiale,
- et sur le bandage dans la direction axiale (voir Fig. 2.6).

Le calcul d’une réponse vibratoire à une force localisée est effectué par recombinaison modale (cf. section 1.2.1.3) à partir des facteurs d’amortissements expérimentaux (Dans le cas où le mode expérimental n’est pas repéré, la valeur du facteur d’amortissement nominal est utilisé

33. La résolution du problème généralisé aux valeurs propres est effectuée par un algorithme basé sur la méthode de Lanczos avec réorthogonalisation [Géradin 1992].

34. Déplacements et rotations nuls dans toutes les directions

35. En considérant que les raideurs des amortisseurs de chaque bogie sont identiques, que les positions des points de contacts entre les bandes de roulement des rails et des roues sont similaires, qu’il n’y a pas de déclivité ni de devers de la voie et que la répartition de masse de la voiture d’essai est homogène, alors la force de réaction à chaque contact roue/rail est le poids de la voiture d’essai divisé par le nombre de roue, soit 5750 kg (le poids de la voiture d’essai est de 46 T repartit sur huit roues), ce qui revient à 56 kN pour la valeur usuelle de l’accélération de la pesanteur  $g$  de  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ( $1 \text{ N}=1 \text{ kg.m/s}^2$ ).

36. Dégénérescences causées par la symétrie de révolution semblables aux modes de plaques circulaires à bord libre [Touze 2002].

37. Les déformées sont pivotées l’une par rapport à l’autre de  $90^\circ$  (cf. section 1.2.1.1).

| $n$ | 0 cercle nodal (0L) |       |        | Radial (R) |       |        | 1 cercle nodal (1L) |       |        | 2 cercles nodaux (2L) |       |        |
|-----|---------------------|-------|--------|------------|-------|--------|---------------------|-------|--------|-----------------------|-------|--------|
|     | Mes.                | Pred. | Erreur | Mes.       | Pred. | Erreur | Mes.                | Pred. | Erreur | Mes.                  | Pred. | Erreur |
| 0   | 251                 | 257   | 1,8    |            | 4066  |        |                     | 1650  |        | 2775                  | 2802  | 1,0    |
| 1   | 139                 | 181   | 30,4   |            | 1902  |        |                     | 1182  |        |                       | 3173  |        |
| 2   | 372                 | 373   | 0,2    | 1759       | 1738  | -0,1   | 2354                | 2396  | 1,8    | 3788                  | 4115  | 8,6    |
| 3   | 992                 | 1001  | 0,9    | 2415       | 2374  | -1,7   | 2935                | 2963  | 0,9    | 4465                  | 4633  | 3,7    |
| 4   | 1794                | 1815  | 1,1    | 3178       | 3128  | -1,5   | 3561                | 3597  | 0,9    | 5189                  | 5300  | 2,1    |
| 5   | 2698                | 2736  | 1,4    | 4005       | 3963  | -1,0   | 4262                | 4312  | 1,1    |                       |       |        |
| 6   | 3694                | 3720  | 0,7    | 4870       | 4841  | -0,6   | 5084                | 5141  | 1,1    |                       |       |        |

TABLE 2.1 – Fréquences de résonances en Hz mesurée (Mes.), calculées<sup>38</sup>(Pred.) et erreurs relatives en %  $[(f_{Pred}-f_{Mes})/f_{Mes} \times 100]$ , pour une roue monobloc de 890 mm de diamètre.  $n$  est le nombre de diamètres nodaux

(cf. section 1.2.1.2)) estimés dans la section 2.2.2.4. Les mobilités radiales<sup>39</sup> et axiales<sup>40</sup> calculées et mesurées sont représentées sur la figure 2.16.

Les écarts entre les fréquences de résonances calculées et mesurées, donnés en pourcentage dans le tableau 2.1, se retrouvent sur les représentations des mobilités. Ces écarts sont fonction des paramètres initiaux de la modélisation éléments finis de la roue tels que sa géométrie, les paramètres mécaniques du matériau qui la compose, la densité du maillage ainsi que les conditions aux limites mentionnées précédemment<sup>41</sup>. En effet, la prise en compte de l'essieu par un encastrement engendre une erreur de l'ordre de 30 % sur le mode particulièrement couplé au mode d'essieu (0L1). Cependant, seuls les modes pour lesquels le nombre de diamètres nodaux est inférieur à 2 ( $n \leq 1$ ) sont couplés aux modes de l'essieu (cf. section 1.2.1.1) : l'influence de la condition d'encastrement sur l'approximation des modes prépondérant au bruit de roulement est alors négligeable (cf. section 2.2.2.2). Le plus fort amortissement de ces types de modes par rapport aux modes pour lesquels  $n \geq 2$  implique qu'ils ne sont pas toujours expérimentalement identifiés. Une densité du maillage insuffisante dans la section transversale donne lieu à des écarts importants pour les modes de déformées transversales à deux diamètres nodaux<sup>42</sup> (2L). Les écarts des autres types de modes (0L, 1L, R pour  $n \geq 2$ ) compris entre  $\pm 1,8$  %, peu dépendant de la condition d'encastrement et peu sensibles à la densité du maillage, sont alors majoritairement dus à une combinaison d'erreurs sur la géométrie et sur les paramètres mécaniques du matériau. Ces écarts rendent difficile l'étape d'association des résonances acoustiques mesurées par le système embarqué aux modes vibratoires calculés. En effet, cette association repose sur la capacité du modèle éléments finis à déterminer un intervalle fréquentiel unique autour de chaque mode propre dans lequel il existe un seul mode expérimental correspondant. Par conséquent l'association des modes expérimentaux aux modes numériques dépend de la précision des fréquences propres calculées par le modèle éléments finis. Cette étape d'association est détaillée dans la section suivante.

38. Les modes propres sont calculés pour une roue neuve de masse volumique  $\rho=7800 \text{ kg.m}^{-3}$ , de module d'élasticité  $E= 2,10.10^{11} \text{ Pa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu =0,31$  [Cremer 2005].

39. Réponse vibratoire dans la direction normale à la bande de roulement (parallèle au plan vertical  $(O, x, y)$ ) pour une excitation de direction identique appliquée au même point.

40. Réponse vibratoire dans la direction normale au bandage (parallèle au plan horizontal  $(O, y, z)$ ) pour une excitation de direction identique appliquée au même point.

41. Hormis la force de réaction qui n'engendre aucune modification des fréquences propres de la roue.

42. Plus particulièrement le mode 2L2 pour le maillage utilisé dans l'étude présentée ici.

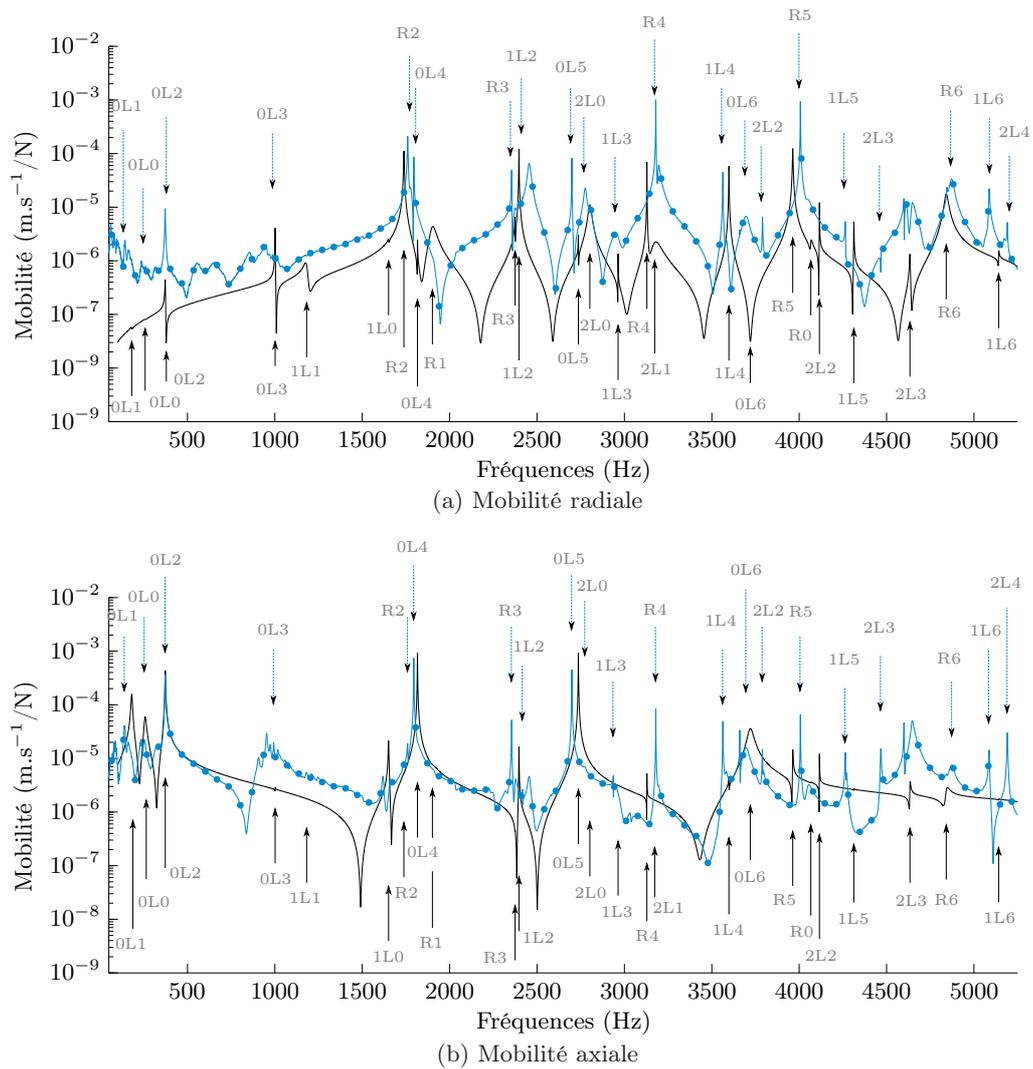


FIGURE 2.16 – Mobilités mesurées (—●—) et calculées (—) par modélisation éléments finis d'une roue monobloc de 890 mm de diamètre ; repères de modes expérimentaux (---▶) et des modes numériques éléments finis (—▶).

### 2.3.1.2 Intervalles d'associations des modes expérimentaux et numériques

Après la première étape de détection des résonances acoustiques de la méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail (cf. Fig. 2.1), celles-ci doivent être correctement associées aux modes de vibration qui les a créés. Un intervalle fréquentiel autour de chaque mode assurant l'association est défini à partir des fréquence propres calculées par la modélisation EF (Eléments Finis). Les intervalles d'associations fixés à  $\pm 1,8\%$  autour des fréquences propres calculées indiquent que tous les modes expérimentaux ne sont pas associés et que certains intervalles fréquentiels se recouvrent (voir Fig. 2.17). Les approximations altérées par la densité du maillage des fréquences propres des modes 2L sont trop éloignées de la mesure : ces modes ne peuvent être associés aux modes vibratoires EF correspondants. Les domaines d'associations des couples de modes 1L2 et R3, 1L4 et 0L6, ainsi que 0L6 et 2L4 se recouvrent. Dans ce cas, puisque la résonance acoustique détectée appartient à deux domaines d'association, il est délicat de déterminer le mode vibratoire à l'origine de son rayonnement. Pour surmonter ces difficultés il est nécessaire d'accroître la précision de la

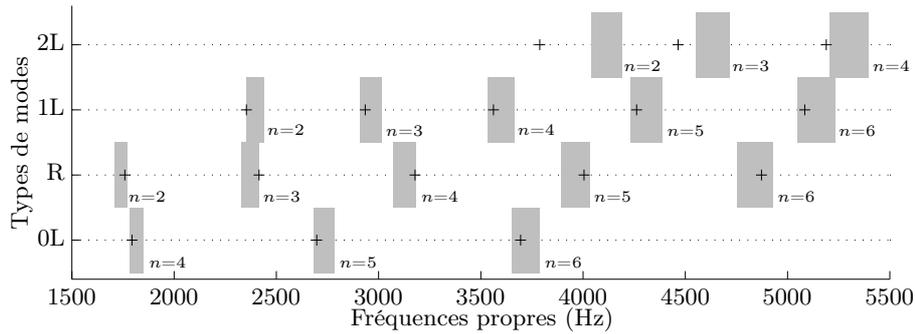


FIGURE 2.17 – Intervalles d’associations des modes expérimentaux aux modes numériques EF à  $\pm 1,8\%$  autour des fréquences propres calculées (■) (cf. Tab. 2.1), fréquences de résonances mesurées (+).

modélisation EF afin de réduire l’intervalle fréquentiel tout en assurant l’association de tous les modes. Analysons l’influence de la géométrie et de la masse volumique à cette intention.

|   | Masse (kg)      | Ect. rel. masse (%) | Ect. rel. fréquence (%) |
|---|-----------------|---------------------|-------------------------|
| Variations de la masse volumique $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] pour $\bar{\Delta}_r$ 0 mm |                 |                     |                         |
| $\rho=8100$   | $m_w=317$       | 3,9                 | -1,87                   |
| $\bar{\rho}=7800$   | $\bar{m}_w=305$ | -                   | -                       |
| $\rho=7500$   | $m_w=293$       | -3,9                | 1,98                    |
| Variations de l’usure relative $\Delta_r$ [mm] pour $\bar{\rho}=7800$ kg/m <sup>3</sup> |                 |                     |                         |
| $\Delta_r=0$  | $\bar{m}_w=305$ | -                   | -                       |
| $\Delta_r=12,5$   | $m_w=268$       | -12,0               | [-3,2 4,2]              |
| $\Delta_r=25$   | $m_w=233$       | -23,7               | [-8,7 7,2]              |

TABLE 2.2 – Ecart relatifs (Ect. rel. - [min max] ou constants) de masses  $[(m_w - \bar{m}_w)/\bar{m}_w \times 100]$  et de fréquences propres  $[(f_i - \bar{f}_i)/\bar{f}_i \times 100]$  d’une roue monobloc de diamètre 890 mm calculés par modélisation EF en fonction du type d’acier (variation de la masse volumique  $\rho$ ) et du nombre de kilomètres parcourus (usure relative  $\Delta_r$ ).

**La masse volumique** de la roue est inhérente au type d’acier utilisé lors de sa confection. Elle peut varier entre  $\rho=7500$  kg/m<sup>3</sup> et  $\rho=8100$  kg/m<sup>3</sup> [Fanchon 2001]. Cette variation est à l’origine d’un écart de la masse de la roue étudiée de  $\pm 4\%$ <sup>43</sup> ; par conséquent d’un écart fréquentiel des modes propres de  $\pm 2\%$ <sup>44</sup> (voir Tab. 2.2). Cependant la masse volumique de la roue est constante (tout au long de sa durée de vie) si bien qu’elle peut être préalablement ajustée par rapport à la masse initiale de la roue<sup>45</sup>. Il est néanmoins recommandé de connaître la référence de l’acier de la roue modélisée afin de minimiser l’incertitude sur les fréquences propres imputée à la masse volumique.

**La géométrie** de la roue est fonction de son usure<sup>46</sup>, elle dépend alors du nombre

43. Par rapport à la roue de masse volumique moyenne  $\bar{\rho}=7800$  kg/m<sup>3</sup>.

44. Puisque  $f_r = (\sqrt{K/M})/2\pi$  et que la raideur géométrique  $K$  est indépendante de la masse volumique (cf. section 1.2.1.3).

45. Si la précision de la géométrie de la modélisation FE est maîtrisée et que la masse initiale de la roue est connue.

46. En considérant que la précision de la géométrie initiale de la roue utilisée dans la modélisation EF soit

de kilomètres parcourus. Cette usure est décrite par la diminution relative  $\Delta_r$  de la bande de roulement, donc du diamètre (voir Fig. 2.18). Pour la roue étudiée, elle peut atteindre  $\Delta_r=25$  mm<sup>47</sup>. Cette diminution du diamètre donne lieu à une réduction de la masse de la roue de 24 %<sup>48</sup> qui provoque des écarts des fréquences propres compris entre  $\pm 8$  % (voir Tab. 2.2). La réduction de masse est localisée sur la bande de roulement, si bien que la modification de la raideur géométrique (en plus de celle de la masse) entraîne des variations des fréquences propres particulières à chaque mode (voir Fig. 2.19). Le but n'est pas ici de déterminer une loi d'évolution des fréquences propres en fonction de l'usure de la roue mais de porter une attention toute particulière à cette variation afin de la considérer dans la détermination des intervalles d'association des résonances acoustiques aux différents types de modes EF. La prise en compte de cette évolution des fréquences propres dans le système LECAV pourrait être effectuée par la détection de la dérive des fréquences de résonances qui activerait une modification des intervalles en conséquence<sup>49</sup>.

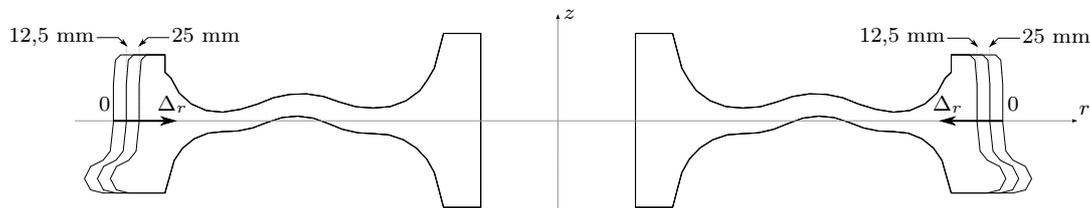


FIGURE 2.18 – Usure relative d'une roue monobloc de diamètre initial de 890 mm

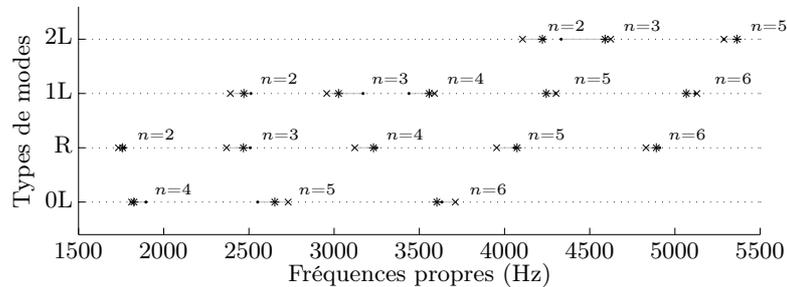


FIGURE 2.19 – Evolution des fréquences propres en fonction de l'usure relative d'une roue de diamètre initial de 890 mm ;  $\Delta_r=0$  mm ( $\times$ ),  $\Delta_r=12,5$  mm ( $*$ ) et  $\Delta_r=25$  mm ( $\cdot$ ).

### 2.3.1.3 Validation de la modélisation éléments finis

Grâce à la mesure simultanée de la vibration et de la pression, l'association des modes expérimentaux et des modes éléments finis peut être correctement effectuée (cf. section 2.2.2.1). Concentrons-nous dans cette section à vérifier et quantifier le bon accord entre le comportement vibratoire mesuré et calculé. Pour chaque mode, le comportement vibratoire modal de la roue est représenté par la vitesse normale de la surface avant<sup>50</sup>

satisfaisante (de l'ordre de  $\pm 5$  mm).

47. Cette valeur limite est déduite du diamètre de la roue minimal de 840 mm (dernier reprofilage) donné par le dessin technique de la roue monobloc étudiée.

48. Par rapport à la masse d'une roue neuve  $\bar{\Delta}_r=0$  mm.

49. Les intervalles fréquentiels relatifs à une usure donnée seraient préalablement calculés.

50. Surface inscrite dans le plan vertical  $(O, x, y)$ .

mesurée<sup>51</sup> et calculée<sup>52</sup> (voir Fig. 2.20 et Fig. C.1-C.3)<sup>53</sup>.

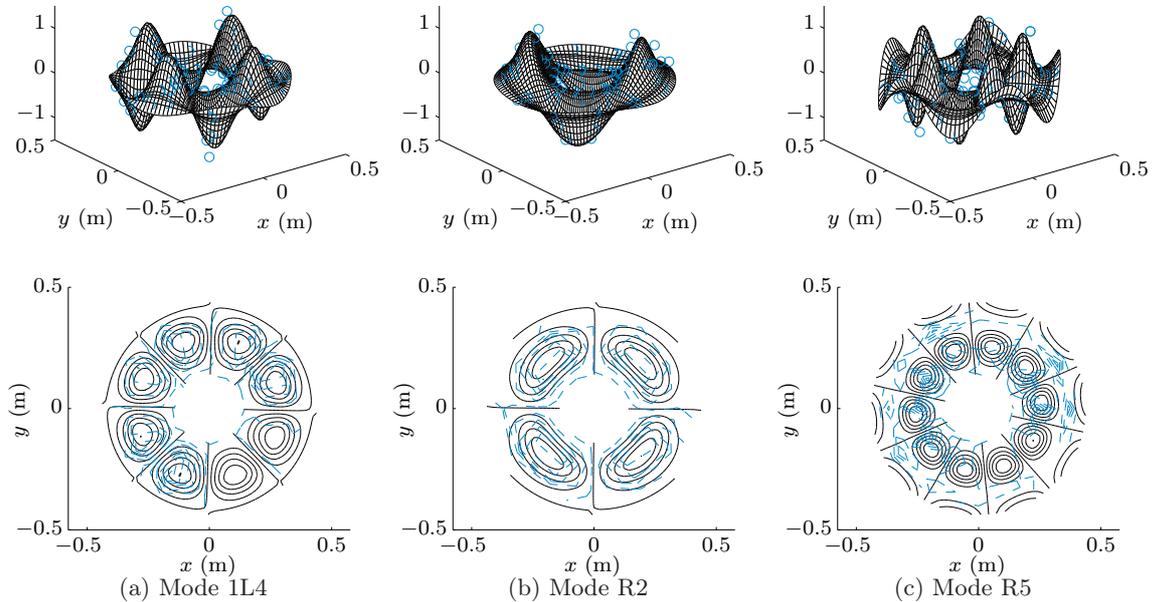


FIGURE 2.20 – Partie réelle et contours de la vitesse vibratoire normalisée calculée par éléments finis (—) et mesurée (○, - -) autour des modes propres d’une roue monobloc 890 mm pour une excitation radiale.

Ces représentations graphiques permettent de discerner le comportement modal de chaque mode mais limite la comparaison entre les mesures et les calculs. La trace des valeurs absolues des vitesses vibratoires numériques reportées aux points de mesures expérimentaux permet d’observer les similitudes avec les vitesses mesurées (voir Fig. 2.21). De plus, étant donné que les conditions expérimentales particulières n’ont pas permis une grande précision sur la position des capteurs, les incertitudes sur les positions expérimentales sont prises en compte et représentées en gris clair sur la figure 2.21. Elles indiquent les extrema des écarts des vitesses vibratoires calculées à  $\pm 15$  mm<sup>54</sup> (sur un rayon) et  $\pm 3^\circ$ <sup>55</sup> (sur un cercle) par rapport aux positions définies par le maillage expérimental.

Les maxima d’amplitudes de vibration, situés au centre de la toile de la roue (cercle 4), et les minima situés à l’extrémité intérieure de la toile (cercle 2) de ces modes de types 1L et R corroborent le comportement vibratoire de la roue décrit dans la section 2.2.2.2. Les intervalles d’incertitude sur les positions de mesures renseignent sur l’existence de fortes singularités locales de la vitesse vibratoire (homogène aux déformées modales) dont les variations peuvent atteindre 60 % de la dynamique de l’amplitude de la déformée, comme pour le cercle 5 du mode R2 (voir Fig. 2.21b). Malgré ces fortes singularités, l’amplitude des vitesses mesurées et calculées comprise ou proche de l’intervalle d’incertitude illustre le bon accord

51. En chaque point du maillage expérimental correspondant à la face avant (voir Fig. 2.6 et Fig. 2.7).

52. En chaque noeud du maillage EF correspondant à la face avant de la roue (voir Fig. 2.14c).

53. La réponse vibratoire des modes 0L et 2L est représentée pour une force appliquée dans la direction axiale et les modes 1L et R pour une force radiale (ce qui correspond aux réponses prépondérantes respectives).

54. Taille moyenne d’une maille du modèle éléments finis.

55. Plus petit pas angulaire du modèle éléments finis.

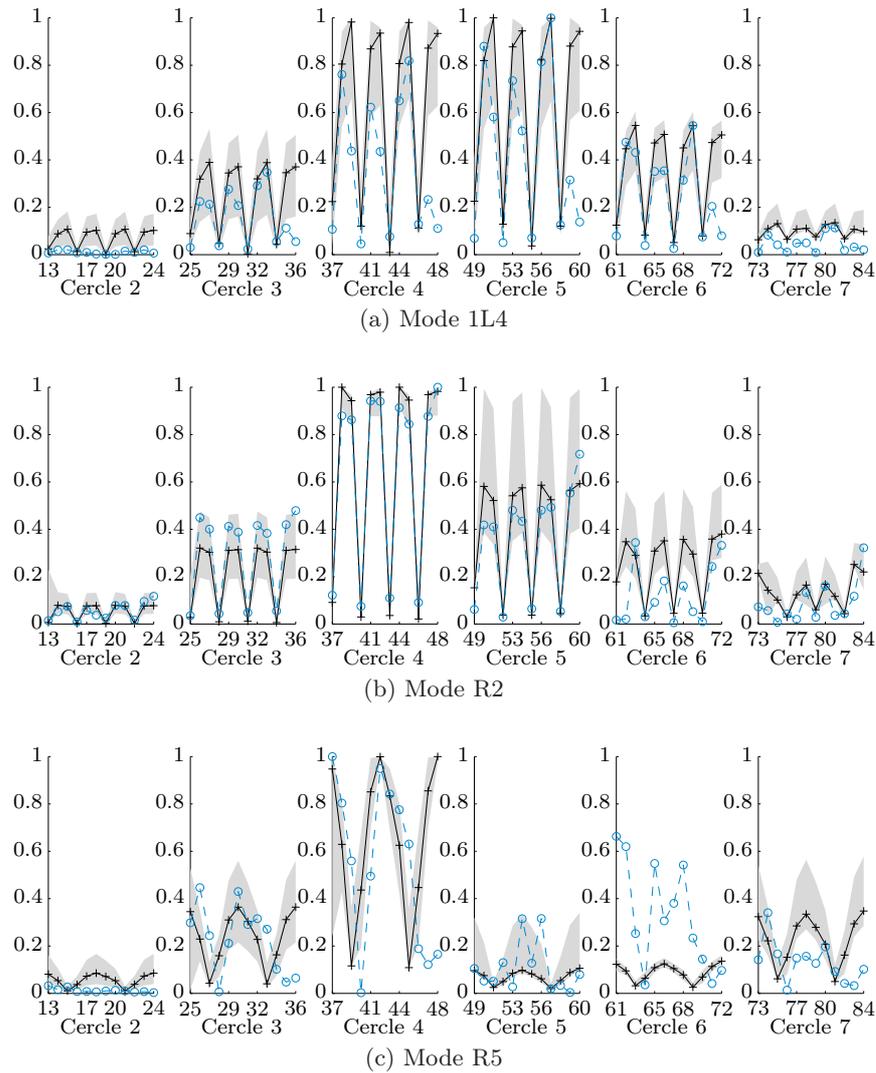


FIGURE 2.21 – Vitesses vibratoires normalisées réparties sur la surface de la roue pour une excitation radiale; calculées par méthode des éléments finis (+), mesurées (o) et incertitudes sur les positions de mesures à  $\pm 3^\circ$  et  $\pm 15$  mm (■).

entre l'expérience et la modélisation éléments finis. Toutefois, des dissemblances sont observées sur le cercle 6 du mode R5; cet écart de vitesse est pour cet exemple inexplicable. Afin de quantifier cet accord pour tous les modes, le coefficient de corrélation linéaire  $r_{ij}$  entre les vitesses absolues calculées (indicée  $i$ ) et mesurées (indicée  $j$ ) est utilisé comme indicateur de ressemblance. Il est défini par l'équation (Eq. 3.10) dans la section 3.4.3 du chapitre 3. Le coefficient de corrélation  $r_{ij}$  est compris entre 0 et 1, plus le coefficient est proche de 1, plus la corrélation entre le profil de vitesse vibratoire mesuré et calculé est forte. Les coefficients de corrélation linéaires entre les modes EF et expérimentaux sont répertoriés dans le tableau 2.3. Les coefficients de corrélation des modes dont l'allure de la déformation de la section transversale est monotone (modes 0L -  $m=0$ ) sont très proches de 1. Le coefficient de corrélation semble légèrement diminué avec l'augmentation du nombre de singularités dépendantes du nombre de diamètres et de cercles nodaux. Néanmoins, la corrélation moyenne de  $0,8 \pm 0,08$  entre les modes expérimentaux et les modes numériques valide la modélisation élément finis de la roue étudiée. Ainsi, chaque résonance acoustique est associée au mode à l'origine de son

rayonnement, pour lequel la vitesse vibratoire est connue.

| $n$ | 0L   |             | R    |             | 1L   |             | 2L   |             |
|-----|------|-------------|------|-------------|------|-------------|------|-------------|
| 0   | 0,98 | [0,98-0,99] | -    | -           | -    | -           | 0,45 | [0,42-0,58] |
| 1   | 0,96 | [0,95-0,97] | -    | -           | -    | -           | -    | -           |
| 2   | 0,99 | [0,98-0,99] | 0,94 | [0,75-0,94] | 0,88 | [0,85-0,94] | 0,77 | [0,63-0,78] |
| 3   | 0,89 | [0,88-0,92] | 0,60 | [0,48-0,63] | 0,52 | [0,45-0,57] | 0,79 | [0,69-0,80] |
| 4   | 0,96 | [0,91-0,96] | 0,67 | [0,42-0,74] | 0,82 | [0,75-0,85] | 0,85 | [0,77-0,86] |
| 5   | 0,93 | [0,86-0,93] | 0,53 | [0,29-0,58] | 0,86 | [0,78-0,86] | -    | -           |
| 6   | 0,88 | [0,86-0,88] | 0,70 | [0,33-0,84] | 0,85 | [0,69-0,85] | -    | -           |

TABLE 2.3 – Coefficients de corrélations linéaires  $r_{ij}$  et incertitudes sur les positions de mesures ( $[\min(r_{ij}) \max(r_{ij})]$ ) entre les vitesses absolues vibratoires calculées par méthode des éléments finis et mesurées.

### 2.3.2 Modélisation du rayonnement acoustique

On a montré dans la section précédente qu'à l'aide de la modélisation de la roue par la méthode des éléments finis, on est en mesure de déterminer la vitesse vibratoire normale de la surface rayonnante de chaque mode détecté par le système embarqué. Dans le but d'estimer l'impédance acoustique, il est alors maintenant nécessaire de calculer la pression acoustique rayonnée par la roue. Les étapes et hypothèses essentielles à l'établissement d'un modèle de rayonnement acoustique d'une roue, basé sur la formulation intégrale des problèmes aux limites linéaires de l'acoustique dans le domaine fréquentiel, sont présentées dans la section suivante.

#### 2.3.2.1 Formulation intégrale de Rayleigh

Etant donnée la faible distance entre le point d'observation de la pression au centre de la toile et la surface vibrante devant le rayon et la géométrie du bandage de la roue, le rayonnement acoustique « radial » de la bande de roulement est négligé. Pour la même raison, le champ acoustique émis par la face arrière de la roue est supposé négligeable par rapport au champ rayonné par la face avant. De ce fait, la surface avant de la roue inscrite dans le plan  $(x,y)$  est modélisée par une plaque plane annulaire située dans un écran infini parfaitement rigide (l'anglicisme bafflé est couramment employé pour désigner cette configuration). La plaque est centrée sur l'origine du repère de coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta, z)$  et l'écran infini est perpendiculaire à l'axe  $Oz$  (voir Fig. 2.22). La plaque est animée par une vitesse de vibration harmonique  $v_w$  qui dépend du point  $\vec{x}_0(r_0, \theta_0, z_0)$ . La vitesse est calculée par la méthode des éléments finis présentée dans la section 2.3.1.1. Le domaine d'étude du champ acoustique recouvre le demi-espace  $z > 0$ . En admettant les conditions de Sommerfeld à l'infini ( $z \rightarrow \infty$ ), et puisque la vitesse vibratoire à la frontière  $S$  est nulle en dehors de la surface vibrante  $S_0$ , la solution du problème conduit à l'équation dite de Rayleigh (cf. annexe C.2.1). Le champ acoustique rayonné par la roue au point d'observation  $\vec{x}(r, \theta, z)$  est approché par [Cremer 2005] :

$$p(\vec{x}) = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{e^{-ikh}}{h} v_w(\vec{x}_0) dS_0, \quad (2.6)$$

où  $h$  est la distance entre le point d'observation et le point source (*i.e* trajet de l'onde directe) définie par :

$$h = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = (r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos(\theta - \theta_0) + z_0^2)^{1/2}. \quad (2.7)$$

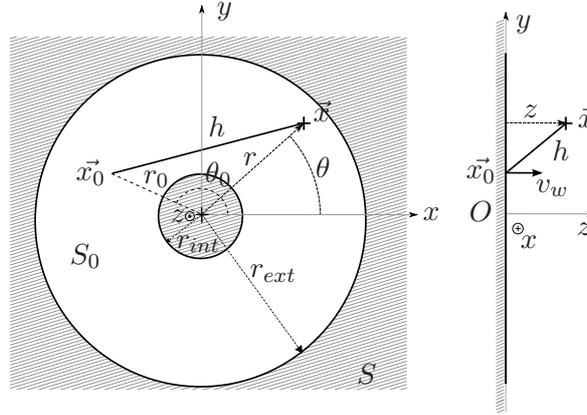


FIGURE 2.22 – Systèmes d'axes et coordonnées

La vitesse de vibration  $v_w$  n'est connue qu'aux noeuds du maillage éléments finis. La vitesse vibratoire d'un sous-espace de la surface  $S_0$ , déterminé par la géométrie d'une maille, est définie comme la moyenne des vitesses vibratoires de chaque noeud qui la compose (voir Fig. 2.23a). L'approximation de la pression acoustique rayonnée par la roue est alors calculée par la discrétisation de l'intégrale de Rayleigh telle que [Cremer 2005] :

$$\tilde{p}(\vec{x}) = \sum_{q=1}^{N_s} \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \left( \sum_{l=0}^1 \sum_{j=0}^1 v_w [r_0(q+l), \theta_0(q+j)] \right) \frac{1}{4} \int_{\theta_0(q)}^{\theta_0(q+1)} \int_{r_0(q)}^{r_0(q+1)} \frac{e^{-ikh}}{h} r_0 dr_0 d\theta_0. \quad (2.8)$$

où la pression rayonnée  $\tilde{p}$  est la somme des pressions rayonnées par les  $N_s$  sous-espaces<sup>56</sup> formés par le maillage éléments finis (voir Fig.2.23b).

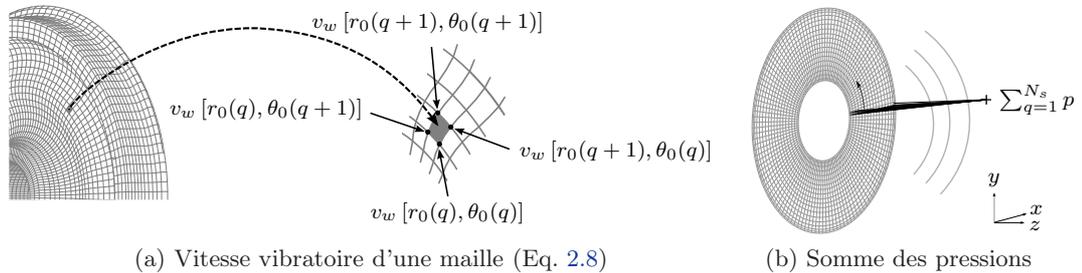


FIGURE 2.23 – Calcul de la vitesse vibratoire moyenne : somme des vitesses aux noeuds de chaque maille. Calcul de la pression : somme des pressions rayonnées par chaque maille.

Afin d'évaluer l'erreur sur le calcul de la pression issue de la formulation intégrale dis-

<sup>56</sup>. Le nombre de sous espace est fonction du nombre d'éléments du modèle FEM  $N_r$  le long d'un rayon et  $N_\theta$  autour de l'axe de révolution :  $N_s = N_r \times N_\theta$ . Dans le cas du modèle FEM de la roue monobloc présentée dans la section 2.3.1.1, le nombre d'éléments est de 2562 ( $N_r=21$  et  $N_\theta=122$ ).

crétisée (Eq. 2.8) par rapport à la formulation continue (Eq. 2.6), ainsi que la robustesse de l'algorithme de discrétisation, une étude de convergence numérique est réalisée en utilisant une fonction test analytique continue sur  $\mathbb{R}$  donnée par l'équation suivante :

$$\Psi(r, \theta) = \mathcal{A} \sin \left( \frac{r - r_{int}}{\hat{m}(r_{ext} - r_{int})} \pi \right) \sin(n\theta), \quad (2.9)$$

où  $r_{int}$  et  $r_{ext}$  sont les rayons respectifs intérieur et extérieur de la plaque annulaire (voir Fig. 2.22),  $\hat{m}$  est l'indice qui correspond aux nombres de cercles nodaux  $m$  ( $m=0 \rightarrow \hat{m}=2$ ,  $m=\hat{m}=1$  et  $m=2 \rightarrow \hat{m}=0,5$ ),  $n$  le nombre de diamètres nodaux, et  $\mathcal{A}$  est le coefficient d'amplitude (cf. annexe C.2.2). La fonction test permet d'approcher les comportements vibratoires des différents types de modes en fonction de leurs nombres de diamètres nodaux  $n$  et cercles nodaux  $m$ . Les différentes formes de la fonction  $\Psi(r, \theta)$ , en fonction de  $r$  et de  $\theta$ , sont respectivement illustrées sur les figures 2.24a et 1.6a<sup>57</sup>.

Les détails de l'étude de convergence, notamment de l'effet de la densité du maillage sur

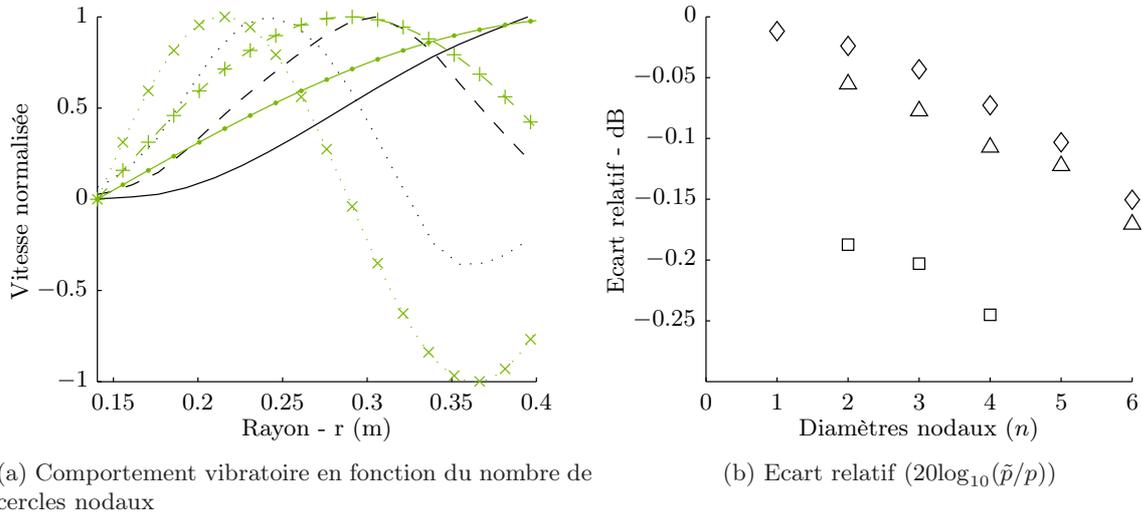


FIGURE 2.24 – Comparaison de la fonction test (Eq. 2.9) ; 0L ( $\cdot, -$ ), 1L et R( $+, -$ ), 2L ( $\times, \dots$ ) et de la vitesse vibratoire calculée par éléments finis ; 0L ( $-$ ), 1L et R( $- -$ ), 2L ( $\dots$ ). Ecart relatif entre la pression calculée par l'intégrale discrète  $\tilde{p}$  (Eq. C.11) et continue  $p$  (Eq. C.12) par types de fonctions tests qui représentent les modes : 0L ( $\diamond$ ), R et 1L ( $\triangle$ ), et 2L ( $\square$ ) (cf annexe C.2.2).

l'approximation de la pression par formulation discrète sont donnés en annexe C.2.2. Pour chaque type de mode, le champ acoustique est calculé le long d'une singularité vibratoire radiale et angulaire (le long d'une longueur d'onde selon  $r$  ou  $\theta$ ). La pression quadratique moyenne du champ de pression, caractérisée par les singularités inhérentes aux modes observés, est calculée par la formulation intégrale continue ainsi que par la formulation discrète aux noeuds du maillage éléments finis. Les écarts entre ces deux résultats sont présentés sur la figure 2.24b. La formulation intégrale discrète sous-estime légèrement l'amplitude de la pression par rapport à la pression calculée par la formulation continue. Cet écart est d'autant plus grand que le nombre de diamètres et de cercles nodaux augmente. Toujours est-il que la précision de la formulation discrète est acceptable, l'écart maximum observé entre les deux

57. Pour un rayon  $r$  donné, la fonction test analytique ne dépend que de  $\theta$  :  $\Psi(\theta) = \sin(n\theta) = \mathcal{A}$  pour  $\mathcal{A}=1$ .

formulations étant inférieur à 0,25 dB (voir Fig. 2.24b). Les champs de pression acoustique présentés dans la suite de ce chapitre 2 sont calculés par la formulation intégrale discrète donnée par l'équation 2.8.

### 2.3.2.2 De la géométrie réelle à une plaque plane

La modélisation de la surface de la toile et du bandage par une plaque plane suppose que les courbures du profil sont négligées. La prise en compte de la surface réelle de la roue est cependant réalisée par le développement de la surface courbe de la roue en  $z=0$  (voir Fig.2.25). Ainsi l'aire de la surface rayonnante réelle de la roue est respectée. Toutefois, le développement implique une translation virtuelle des positions microphoniques le long du rayon (voir Fig. 2.26). La taille des mailles sur  $r$  du modèle éléments finis est petite au regard des rayons de courbures du profil transversal de la toile, l'aire de la surface courbe de la roue est donc approchée par la somme des aires des anneaux développées telle que :

$$A_d = \pi \left[ \left( r_{int} + \sum_{i=1}^{N_r-1} \sqrt{(r_{i+1} - r_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \right)^2 - r_{int}^2 \right], \quad (2.10)$$

où  $N_r$  est le nombre de points du maillage éléments finis le long d'un rayon. Dans le cas où les rayons de courbure de la toile ne sont pas considérés, ce qui revient à projeter les noeuds du maillage en  $z=0$  (voir Fig. 2.26), l'aire de la surface de la plaque plane est donnée par :

$$A_p = \pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2). \quad (2.11)$$

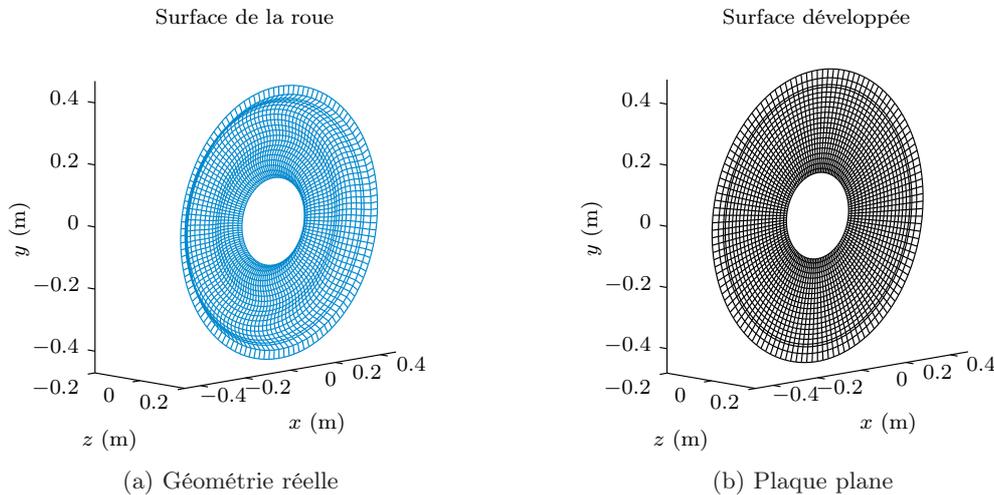


FIGURE 2.25 – Plaque plane correspondante au développement de la surface réelle de la roue

La projection induit une diminution de 13 % par rapport au développement de la surface réelle ( $A_p=0.56 \text{ m}^2$  et  $A_d=0.65 \text{ m}^2$ ). L'effet de l'aire de la surface de la plaque sur le champ acoustique est étudié en comparant les pressions rayonnées par la plaque projetée et développée pour une vitesse de vibration harmonique constante (ce qui revient à considérer la plaque comme un piston annulaire) (voir Fig. 2.27). Les variations des différences de pression (causées par les interférences géométriques de champ proche) fluctuent entre  $\pm 1$  dB en basses fréquences (voir Fig. 2.27a), entre  $\pm 2$  dB en moyennes fréquences (voir Fig. 2.27b), entre  $\pm 4$  dB en hautes fréquences (voir Fig. 2.27c). Par rapport à la dynamique du champ acoustique

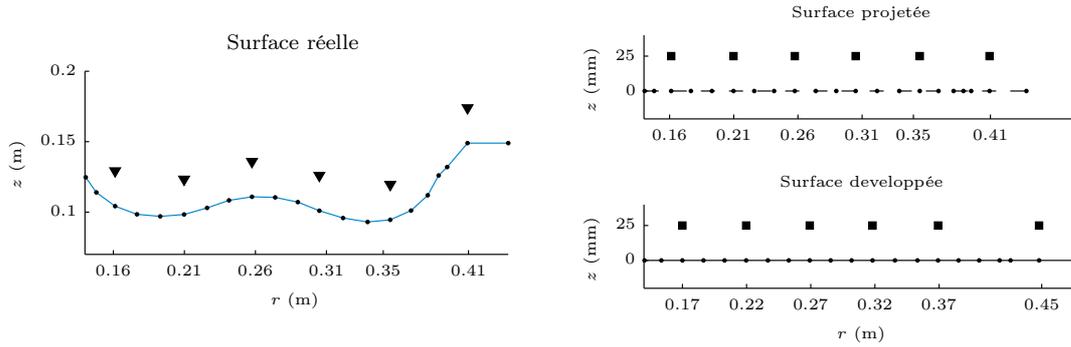


FIGURE 2.26 – Noeuds du maillage éléments finis ( $\cdot$ ), positions réelles ( $\blacktriangledown$ ) et virtuelles ( $\blacksquare$ ) des microphones au droit des surfaces ; réelle ( $\text{—}$ ), projetée ( $\text{- - -}$ ) et développée ( $\text{—}$ ).

rayonné par les modes de la roue, qui est par exemple d'environ 30 dB pour les modes R2, 1L4 et R5 (voir Fig. 2.33), ainsi que l'intervalle d'incertitude sur les positions expérimentales des microphones (cf. section 2.3.2.4), l'effet est minime. Les pressions rayonnées pour les deux géométries de plaques sont présentées dans la suite de ce chapitre 2, néanmoins la plaque développée, qui considère l'aire de la surface effective de la roue, est choisie comme référence.

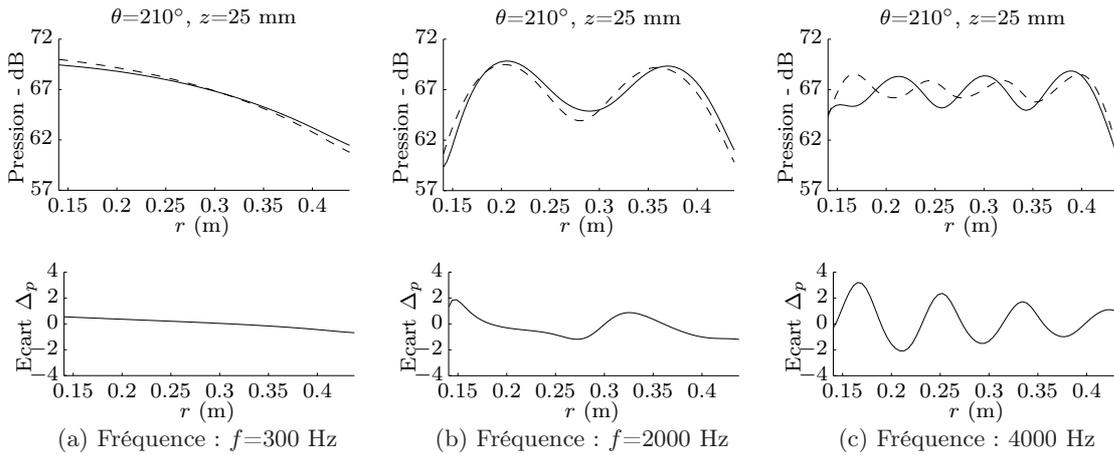


FIGURE 2.27 – Pression rayonnée par la plaque dont la surface est projetée  $\tilde{p}_p$  ( $\text{- - -}$ ), ou développée  $\tilde{p}_d$  ( $\text{—}$ ) pour une vitesse de vibration constante ( $v_w=1.10^{-4}$  m.s $^{-1}$ ) ; référence de la pression en dB :  $2.10^{-5}$  Pa. Ecart entre les pressions ;  $\Delta_p=20 \log_{10}(\tilde{p}_d/\tilde{p}_p)$ .

### 2.3.2.3 Prise en compte de l'effet de sol

La réflexion de l'onde acoustique sur le sol émise par la surface vibrante est prise en compte par la méthode des sources images qui considère que le champ émis en  $\vec{x}_0$  et reçu en  $\vec{x}$  est la superposition du champ direct émis par la source primaire  $\vec{x}_0$  et du champ réfléchi par le plan horizontal ( $x, z$ ) qui coupe perpendiculairement l'axe  $Oy$  en  $y=-(r_{ext} + l_r)$ . Le champ réfléchi est modélisé comme le champ émis par une source symétrique  $\vec{x}'_0$  de la source primaire  $\vec{x}_0$  par rapport au plan horizontal défini précédemment (voir Fig. 2.28). La quantité d'énergie portée par l'onde réfléchie, étant donnée une onde incidente directe, est traduite par le coefficient de réflexion du sol  $\mathcal{R}$ <sup>58</sup>. Le champ de pression rayonné par la roue pour lequel

58. Le sol est parfaitement réfléchissant pour  $\mathcal{R}=1$ , et transparent pour  $\mathcal{R}=0$ , ce qui revient à considérer la pression « champ libre » tel que  $p=p'$ .

l'effet de sol est considéré s'écrit alors :

$$p'(\vec{x}) = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \iint_{S_0} \left( \frac{e^{-ikh}}{h} + \mathcal{R} \frac{e^{-ikh'}}{h'} \right) v_w(\vec{x}_0) dS_0, \quad (2.12)$$

où  $h'$  est la distance entre le point source image  $\vec{x}'_0$  et le point de reception  $\vec{x}$  (*i.e* trajet de l'onde réfléchie) :

$$h' = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + 4(r_{ext} + l_r) [(r \sin(\theta) - r_0 \sin(\theta_0)) + (r_{ext} + l_r)] + z^2)^{1/2}. \quad (2.13)$$

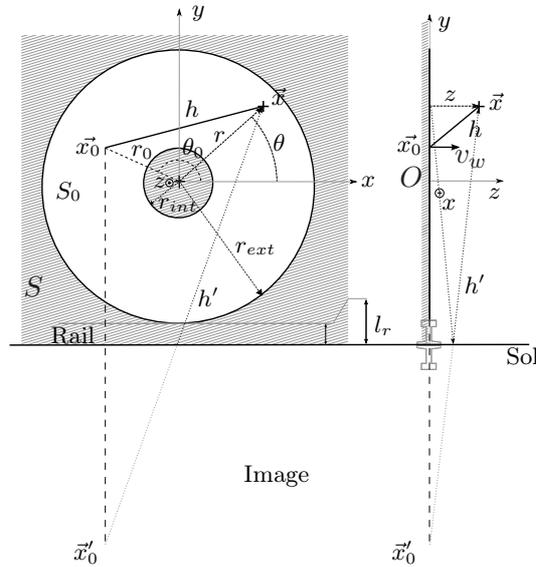


FIGURE 2.28 – Systèmes d'axes et coordonnées

Le coefficient de réflexion est choisi égale à 1, ce qui modélise un sol parfaitement réfléchissant. Il est évident que ce choix n'est pas réaliste, mais il permet d'amplifier le phénomène de réflexion et d'en observer plus aisément son effet sur les résultats obtenus. Le coefficient choisi est néanmoins proche du coefficient de réflexion basses fréquences de 0,8 (à 125 Hz) d'une couche de ballast<sup>59</sup> de 275 mm de hauteur [Broadbent 2009, Thompson 2009]. Celui-ci décroît ensuite jusqu'à 0,4 en moyennes fréquences (2000 Hz) et reste stable jusqu'à 5000 Hz. La prise en compte d'un coefficient de réflexion qui dépend de l'impédance du sol et de l'angle d'incidence de l'onde acoustique est détaillée dans la section 3.3.1.

**En champ proche** l'effet de sol est négligeable. En effet, pour une observation de la pression telle que  $z=0.025$  m, la distance parcourue  $h'$  par l'onde réfléchie est au minimum 12 fois supérieure à la distance  $h$  parcourue par l'onde directe. Si bien que l'onde réfléchie, fortement atténuée en raison de la décroissance géométrique, n'a que très peu d'incidence sur le champ reçu qui correspond alors au champ direct. Les figures 2.29b, C.9b et C.10b, illustrent le phénomène : la pression rayonnée par chaque maille du domaine  $S_0$  résulte de la superposition du champ direct et du champ réfléchi par le sol qui conduit à une interférence. L'amplitude de celle-ci est cependant très atténuée par rapport à la pression émise par la maille au droit

59. Composé de grain en granit.

du point d'observation  $\vec{x}$  ( $\approx -20$  dB), elle est alors peu contributive dans la somme de la formulation (Eq. 2.8)<sup>60</sup>. En observant la différence des pressions le long de l'axe vertical<sup>61</sup>  $Oy$  avec et sans effet de sol (voir Fig. 2.30), il est remarquable que la pression avec effet de sol oscille<sup>62</sup> entre  $\pm 2$  dB autour de la pression directe. Celle-ci est d'autant plus petite que le rayonnement est directif, c'est à dire que la fréquence augmente (voir Fig. 2.30b et 2.30c).

**En champ lointain** l'effet de sol en basses fréquences induit en revanche une augmentation du champ acoustique de 6 dB dû au doublement de la pression ( $h' \approx h$  et  $\mathcal{R}=1$  dans (Eq.2.12) - voir Fig. C.9d et 2.30a). En plus hautes fréquences (voir Fig.2.30b et 2.30c), l'effet de sol est fonction de l'interférence entre le champ direct et réfléchi. Cette observation en champ lointain, permet de valider la prise en compte de l'effet de sol dans l'expression qui modélise le champ acoustique émis par la roue (Eq. 2.12).

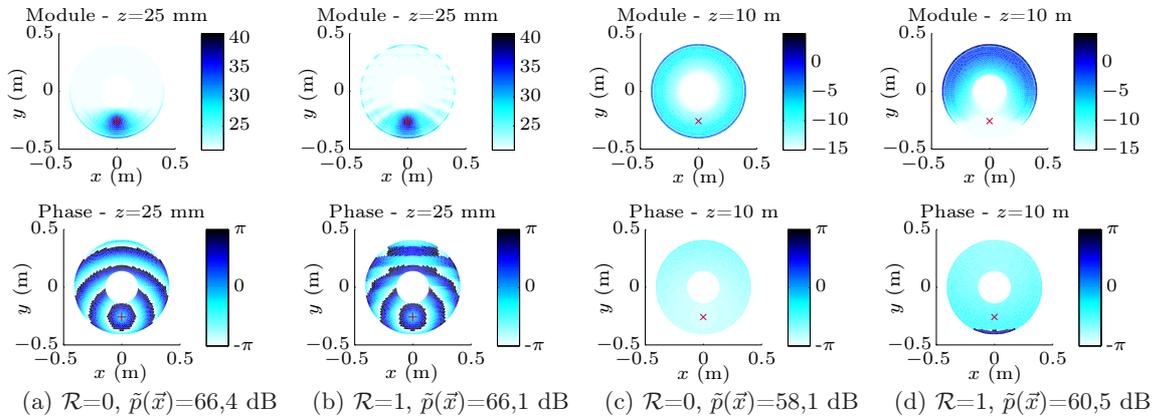


FIGURE 2.29 – Pressions acoustiques rayonnées par sous-espaces représentées aux points d'émissions  $\vec{x}_0 \in S_0$  pour le calcul de la pression (Eq. 2.8) au point d'observation  $\vec{x}$  ( $r=26$  mm,  $\theta=270^\circ$ ,  $z$ ) à la fréquence 2000 Hz; en champ proche ( $z=25$  mm,  $+$ ) et en champ lointain ( $z=10$  m,  $\times$ ), avec ( $\mathcal{R}=1$ ) et sans ( $\mathcal{R}=0$ ) effet de sol pour une vitesse de vibration constante ( $v_w=1.10^{-4}$  m.s $^{-1}$ ).

Remarquons toutefois que la vitesse de vibration des modes de la roue étudiée n'est pas constante (elle varie selon le point  $\vec{x}_0$  dans le domaine  $S_0$ ), il n'est donc pas certain qu'en champ proche, l'effet du champ acoustique réfléchi par le sol sur le champ direct, soit toujours négligeable<sup>63</sup>; dans la suite de ce chapitre 2, l'effet de sol est alors considéré.

60. L'effet de sol de l'expression (Eq. 2.12) est ajouté à la formulation intégrale discrète.

61. Le calcul de la pression n'est effectué qu'au droit de la surface animée d'une vitesse harmonique non nulle; domaine de validité de la formulation intégrale utilisée ( $v_w \in S[-r_{int} + r_{int}] = 0$ ).

62. Oscillations correspondantes à l'interférence du champ acoustique direct et du champ réfléchi par le sol. Rappelons que la pression acoustique rayonnée en champ proche est de nature interférentielle.

63. Pour la pression au droit d'un noeud de vibration, le champ réfléchi émis par un ventre vibratoire peut être significatif par rapport au champs direct.

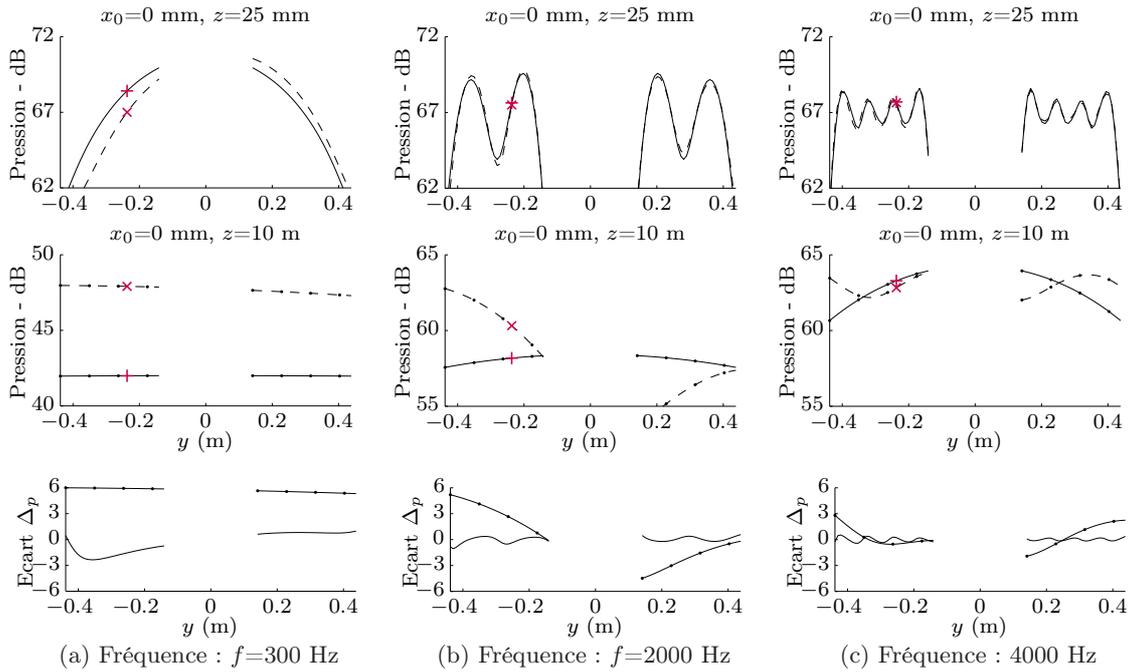


FIGURE 2.30 – Pression rayonnée par la plaque dont la surface est développée avec effet de sol  $\tilde{p}'_d$  (---)  $\mathcal{R}=1$ , et sans effet de sol  $\tilde{p}_d$  (—); en champ proche (—) et champ lointain (·) pour une vitesse de vibration constante ( $v_w=1.10^{-4}$  m.s $^{-1}$ ); référence de la pression en dB :  $2.10^{-5}$  Pa. Ecarts entre les pressions;  $\Delta_p=20 \log_{10}(\tilde{p}'_d/\tilde{p}_d)$ .

### 2.3.2.4 Calcul du champ acoustique

Puisque l'impédance acoustique est le rapport entre la pression et la vitesse vibratoire, elle ne dépend pas de l'amplitude de la vitesse initiale du mode, mais de sa dynamique (*i.e* « déformée »). Pour observer et comparer le champ acoustique mesuré et calculé de chaque mode, la vitesse vibratoire quadratique moyenne de chacun d'eux est normalisée par la vitesse quadratique moyenne mesurée. Ainsi la coïncidence de l'amplitude vibratoire des modes numériques et expérimentaux est assurée<sup>64</sup>. La pression acoustique de la roue en champ proche ( $z=25$  mm) notée  $p_w(r, \theta, z, \omega_i)$  est définie par l'équation (Eq. 2.8) de l'intégrale de Rayleigh discrétisée pour la vitesse normalisée  $\tilde{v}_w$  du mode vibratoire  $i$  de la roue. L'indice  $i$  est ensuite remplacé par l'indication du type de mode  $mLn$  et  $Rn$  où  $m$  et  $n$  sont respectivement les nombres de cercles nodaux et de diamètres nodaux. Dans le cas où les réflexions du champ acoustique sur le sol sont considérées, le calcul de  $p_w(r, \theta, z, \omega_i)$  est effectué à partir de l'équation (Eq. 2.12)<sup>65</sup>.

Dans un premier temps, les champs acoustiques émis par les modes présentés dans la section 2.3.1.3 sont illustrés sur la figure 2.31 (les champs acoustiques des autres modes sont donnés en annexe C.2.4)<sup>66</sup>. Le domaine d'observation du champ choisi entre 180 et 270° correspond à l'espace le plus dégagé de tout obstacle, tel que la structure du bogie ou des amortisseurs, supposés perturbateurs du champ acoustique rayonné par la face avant de

64. La dynamique de l'amplitude de la réponse vibratoire numérique peut être parfois différente de celle mesurée; écarts d'amplitudes observés par exemple sur les figures 2.16a et 2.16b.

65. La formulation intégrale de l'équation (Eq. 2.12) est discrétisée de la même manière que l'équation (Eq. 2.8) sans l'effet du sol.

66. Les pressions sont calculées aux fréquences expérimentales respectives des modes de vibration (voir Tab. 2.1).

la roue<sup>67</sup> (voir Fig. 2.7). Malgré une sous estimation du niveau, et plus particulièrement aux positions qui correspondent aux noeuds de vibration, l'allure du champ de pression calculé par la formulation intégrale de Rayleigh est en accord avec l'allure du champ mesuré (voir Fig. 2.31 ainsi que Fig. C.11 et C.12).

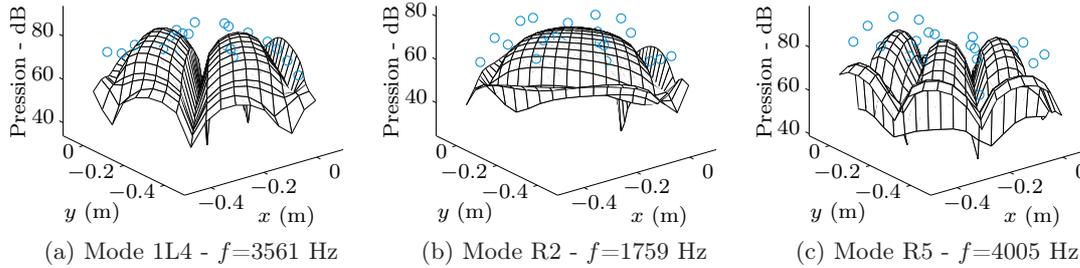


FIGURE 2.31 – Champ acoustique rayonnée par la roue entre  $180$  et  $270^\circ$  : modèle de plaque bafflée développée pour  $\mathcal{R}=0$  (—) et mesures ( $\circ$ )

Pour une meilleure lisibilité des résultats obtenus, les pressions calculées et mesurées sont présentées le long de deux rayons, pour les angles  $210^\circ$  et  $240^\circ$ , ainsi que sur les cercles 3 et 4 dans le domaine considéré précédemment (voir Fig. 2.32a). Tout comme dans la section 2.3.1.3, l'incertitude sur la position réelle de mesure est prise en compte. L'intervalle d'incertitude est déterminé par les extremums d'amplitudes de pressions calculées autour du point d'observation, à  $\pm 15$  mm et  $\pm 3^\circ$ ; domaine défini par la surface grise sur la figure 2.32a.

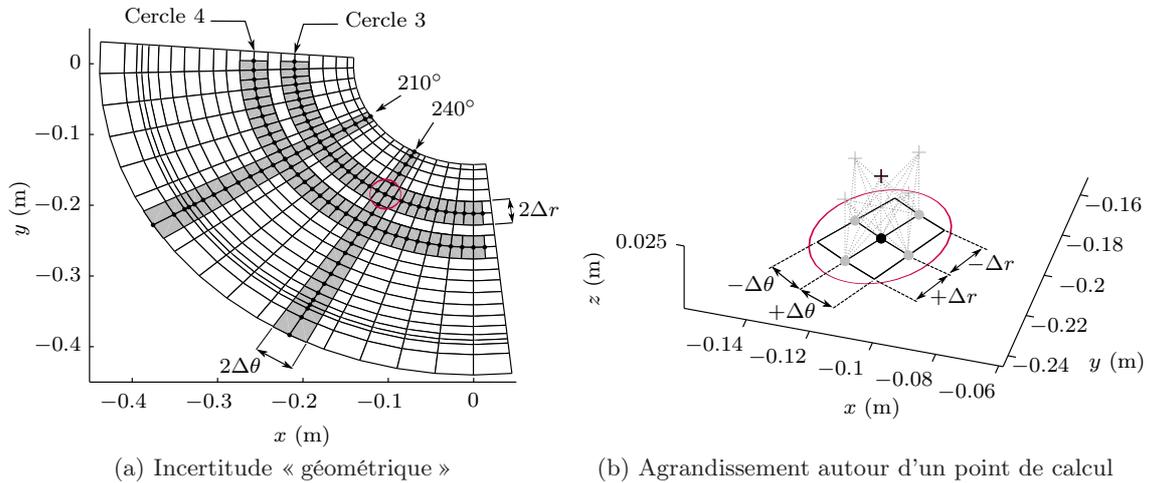


FIGURE 2.32 – Domaines autour des positions d'observations de la pression (+) et de la vitesse vibratoire ( $\cdot$ ) dans lesquels l'incertitude « géométrique » est considérée ■;  $\Delta_r \approx 15$  mm et  $\Delta_\theta \approx 3^\circ$ . Incertitude sur l'impédance acoustique; trajets  $\tilde{p}/v_w$  ( $\cdots$ ).

On remarque aisément les noeuds et ventres de pression aux positions des diamètres nodaux sur les figures 2.33(a,c,e) ainsi que la déformation de la section transversale sur les figures 2.33(b,d,f). Sur ces dernières, la forme concave et courbe de la toile semble

67. Le champ acoustique peut être perturbé par les réflexions, les diffractions ou encore diffusions causées par la structure du train dans l'environnement proche de la roue.

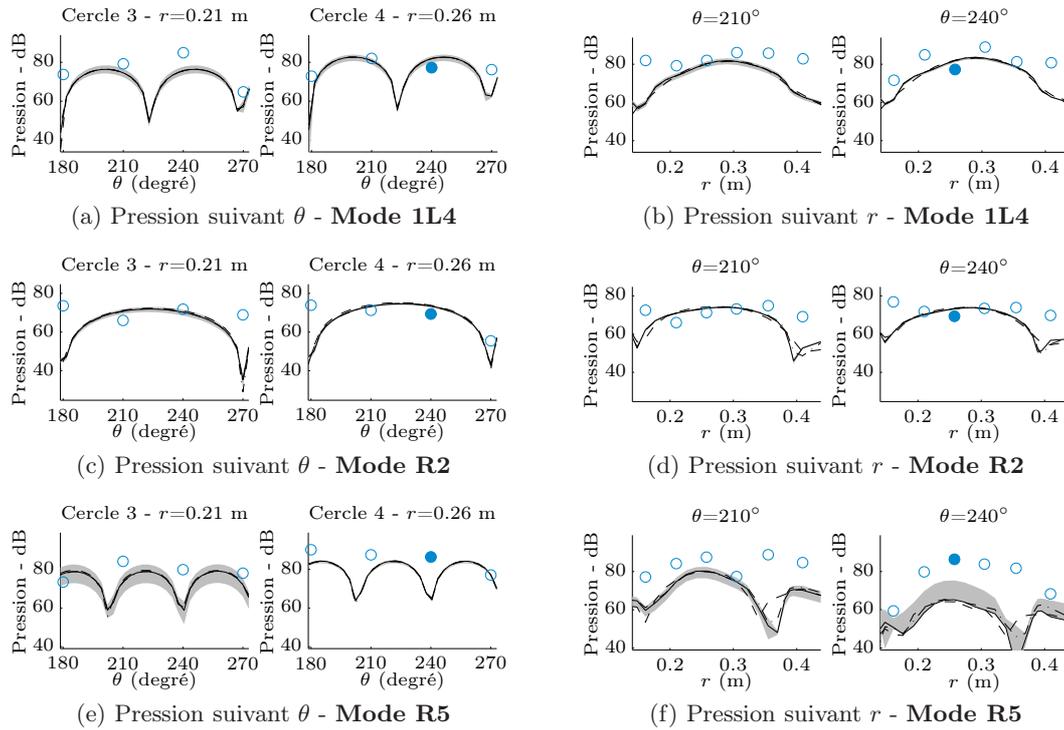


FIGURE 2.33 – Pression acoustique rayonnée : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- · -), plaque projetée (- - -), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ) et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ )<sup>68</sup>; référence de la pression en dB :  $2.10^{-5}$  Pa

causer une augmentation des niveaux acoustiques aux extrémités de celle-ci (cercles 2 :  $r=0,15$  m et 6 :  $r=0,38$  m). La prise en compte de la surface courbe par son développement apporte peu de différences par rapport au champ de pression calculé pour la plaque projetée (cf. section 2.3.2.2). C'est en revanche la pression rayonnée pour la plaque projetée qui tend vers la mesure et ajuste ainsi l'allure du champ de pression comme pour les modes latéraux (0L3 à 0L6 - voir Fig. C.13(g-i)) et Fig. C.14(a,b) ou le mode R5 (voir Fig. 2.33f). Pour ce dernier, la différence entre la pression mesurée et la pression calculée, quelle que soit la projection ou le développement, est particulièrement élevée en  $r=0.38$  (cercle 6). Cet écart calcul/mesure correspond à l'écart des vitesses vibratoires relevé dans la section précédente (cf. section 2.3.1.3 - Fig. 2.21c). L'augmentation du champ de pression à l'extrémité du bandage de la roue que l'on pouvait attendre du rayonnement « radial » causé par la bande de roulement, et plus particulièrement pour les modes radiaux (voir Fig 2.15) n'est pas observée. L'hypothèse sur la séparation des champs acoustiques « radial » et « axial » en un point proche de la toile de la roue est donc validée (voir Fig.2.33 et Fig.C.14). Pour la même raison, le modèle de plaque plane confondue dans un plan rigide infini est également justifié.

Comme précisé dans la section 2.3.2.3, l'effet de sol n'a que très peu d'influence sur la pression directe rayonnée en champ proche. Pour l'ensemble des modes, la pression calculée avec un coefficient de réflexion du sol  $\mathcal{R}$  égal à 1 au droit d'un ventre de vibration coïncide avec la pression pour  $\mathcal{R}=0$  (sans effet de sol). Dans le cas où la pression avec  $\mathcal{R}=1$  est calculée au droit d'un noeud de vibration, l'effet de sol peut entraîner des différences avec la pression

68. L'incertitude est de  $\Delta\theta = \pm 3^\circ$  lorsque la pression est présentée sur un rayon, et de  $\Delta\theta = \pm 3^\circ$  lorsque la pression est présentée sur un 1/4 de cercle.

avec  $\mathcal{R}=0$ , mais celles-ci restent minimales devant l'écart de pression entre le calcul et la mesure.

Lorsque la pression calculée est très différente de la mesure, l'incertitude sur la position d'observation indique, dans la plupart des cas, que l'erreur sur le niveau acoustique est effectivement causée par un décalage de la position de calcul par rapport à la mesure ; soit radiale comme sur la figure 2.33e, ou angulaire comme sur la figure 2.33f. Plus le nombre de diamètres nodaux et de cercles nodaux augmente, ce qui augmente le nombre de fortes singularités de la vitesse vibratoire, plus l'incertitude « géométrique » augmente.

A partir de la confrontation entre la mesure et le calcul, on montre que le champ acoustique rayonné par la roue en champ proche peut être raisonnablement décrit par le champ de pression d'une plaque plane annulaire bafflée calculée par une formulation intégrale discrétisée.

### 2.3.3 Impédance acoustique numérique

L'impédance acoustique de la roue en champ proche ( $z=25$  mm) notée  $Z_w$  est définie par :

$$Z_w(\vec{x}, \vec{x}_0, \omega_i) = \frac{p_w(r, \theta, z, \omega_i)}{v_w(r, \theta, z_0, \omega_i)} \quad (2.14)$$

où  $p_w(r, \theta, z, \omega_i)$  est la pression rayonnée par la roue et  $v_w(r, \theta, z_0, \omega_i)$  la vitesse vibratoire du mode  $i$  (l'indice  $i$  est remplacé par l'indication du type de mode comme pour la pression - cf. section 2.3.2.4). L'incertitude géométrique sur l'impédance acoustique est la combinaison de l'incertitude sur la position de la vitesse dans le plan  $(x, y)$  pour  $z=0$  et sur la position de la pression dans le plan parallèle en  $z=25$  mm (l'incertitude sur la profondeur  $z$  n'est pas considérée). L'intervalle d'incertitude est déterminé par les extrema d'impédances calculées pour les différents trajets pression-vitesse illustrés sur la figure 2.32b.

Les représentations globales des impédances acoustiques des modes 1L4, R2 et R5 sur la figure 2.34 montrent que l'impédance est constante au centre de la toile de la roue ; les niveaux forment un plateau que l'on retrouve aussi pour tous les modes R, 1L et 2L (voir Fig. C.16 et Fig.C.17).

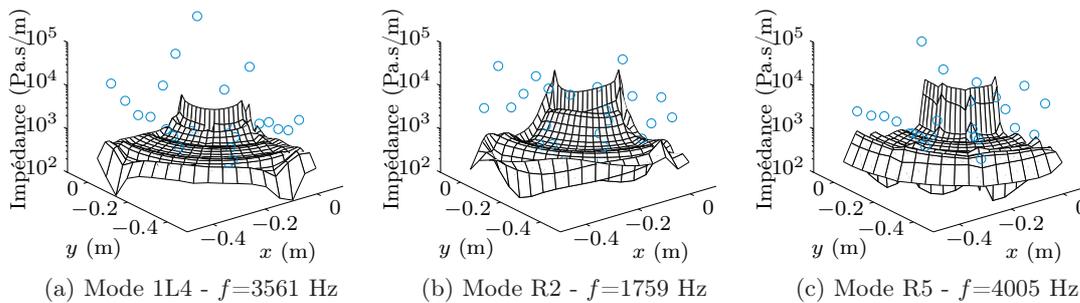


FIGURE 2.34 – Impédance acoustique en champ proche ( $z=0.025$  m) de la toile de la roue ; modèle de plaque bafflée développée (—) et mesures (○).

### Evolution orthoradiale de l'impédance (selon l'angle $\theta$ )

Sur les figures 2.35 les plateaux clairement identifiables indiquent d'une part que l'impédance acoustique est indépendante de l'angle  $\theta$  et d'autre part que l'impédance au centre de la toile (cercle 3 et 4) tend vers l'impédance caractéristique de l'air ( $\rho_0 c_0 \approx 444 \text{ Pa.s/m}$  à  $20^\circ\text{C}$ ). L'impédance acoustique mesurée, comprise ou proche de l'intervalle d'incertitude sur la position de mesure confirme cette tendance que l'on retrouve pour tous les modes (voir Fig C.16 à Fig C.18). Toutefois pour les modes 0L, ce comportement se restreint à la zone proche du cercle 4; plus près du moyeu (cercle 3), l'impédance est environ 2 à 7 fois plus élevée que l'impédance caractéristique de l'air<sup>69</sup> et devient dépendante de  $\theta$  pour les modes de diamètres nodaux  $n$  supérieurs à 3 (voir Fig. C.17h à C.16g ainsi que Fig. C.18i, C.18k et C.19a).

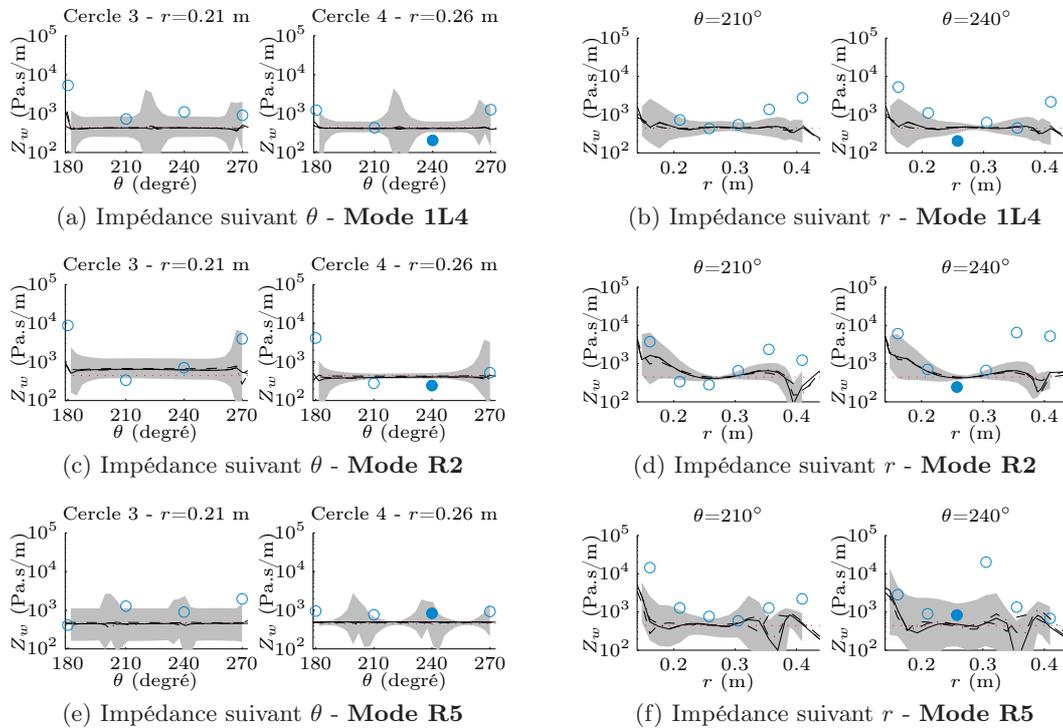


FIGURE 2.35 – Impédance de rayonnement acoustique de la roue : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- - -), plaque projetée (- - -), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ ) et impédance caractéristique de l'air  $\rho_0 c_0$  ( $\cdots$ )

### Evolution radiale de l'impédance (selon le rayon $r$ )

Le comportement vibratoire des modes 0L (maximum de vitesse au niveau du bandage) conduit à une impédance acoustique dépendante du rayon : élevée près du moyeu et faible près du bandage (voir Fig C.16a à Fig C.16g). Ce comportement est clairement visible sur les figures C.18(b,d,f,h,j,i) et C.19b; il signifie que la capacité de ce type de modes à rayonner près du bandage pour une vitesse donnée est faible. La coïncidence très acceptable des mesures et

69. Hormis pour le mode 0L où l'impédance est 20 fois plus forte que l'impédance caractéristique de l'air (voir Fig C.18g).

des calculs prouve que l'hypothèse de plaque bafflée en champ proche n'est pas déraisonnable, et que malgré les écarts du coefficient de rayonnement observés en basses fréquences<sup>70</sup> entre l'utilisation du modèle élément de frontière et la technique de Rayleigh [Thompson 2002], cette dernière est valable en champ proche. Pour les modes 1L, R et 2L, l'impédance au centre de la toile (cercle 3 et 4) tend globalement vers l'impédance caractéristique de l'air (voir Fig. 2.35 et C.19 C.20). Ceci est d'autant plus vrai pour des fréquences élevées, ce qui indique que le champ de pression est de plus en plus directif et qu'il devient indépendant de la vitesse vibratoire avoisinant le point de réception (élargissement des plateaux le long du rayon avec la fréquence sur les figures 2.34, C.16 et C.17). La confrontation entre les résultats calculés et mesurés montrent que l'estimation de l'impédance le long du rayon est moins juste aux extrémités du voile mais reste néanmoins satisfaisante au centre de la toile (pour  $r=21$  mm et  $r=26$  mm - les explications sont données dans la section 2.3.2.4 sur le comportement de la pression). Au centre de la toile, la coïncidence satisfaisante entre les mesures et les calculs est, dans la plupart des cas (pour les modes R, 1L et 2L), proche de l'impédance caractéristique de l'air, on propose alors d'utiliser cette impédance caractéristique comme une approximation de l'impédance acoustique de la roue en champ proche.

### Approximation de l'impédance acoustique

Nous avons précisé dans la section 1.2.2 et montré dans la section 2.2.2.2 que les modes prépondérants au bruit de roulement, et donc potentiellement identifiés par le système de mesure embarqué proposé, sont les modes pour lesquels  $m \geq 1$  et  $n \geq 2$ . Pour ces modes et à conditions que :

- $r$  corresponde au centre de la toile ( $r \in [200 \ 350]$  mm pour une roue 890 mm de diamètre),
- $\theta$  corresponde à un endroit dégagé de la structure du matériel roulant,
- et que la distance source observateur  $z'$  ( $z' = |z - z_0|$ ) soit très inférieure au diamètre  $d$  de la roue  $z' \ll d$  (champ proche -  $d/z' \approx 35$  pour  $d=890$  mm),

l'impédance acoustique<sup>71</sup>  $Z_w(\vec{x}, \vec{x}_0)$  peut être approchée par l'impédance caractéristique de l'air :

$$|Z_w(\vec{x}, \vec{x}_0, \omega_i)| \approx \rho_0 c_0. \quad (2.15)$$

Cette approximation de l'impédance acoustique revient à approcher la pression émise très près de la toile de la roue par  $p = \rho_0 c_0 v$ . Autrement dit la pression près de la roue est approximée par la pression pariétale définie par la condition de continuité de la vitesse entre la structure et l'air.

Les domaines de validité de l'approximation déterminée par l'écart entre l'impédance acoustique de la roue calculée et l'approximation  $\rho_0 c_0$  sont représentés par la zone de couleur blanche<sup>72</sup> sur les figures 2.36 et C.21 en annexe C.4. Les conditions énoncées ci-dessus sur  $r, \theta$  et  $z$  correspondent aux domaines de validités de chaque mode considéré. La fonction de transfert acoustique du système LECAV peut alors être approchée par la simple expression de l'impédance caractéristique de l'air.

70. Les modes 0L sont majoritairement en basses fréquences.

71. Entre deux points définis par les vecteurs  $\vec{x}(r, \theta, z)$  (dans l'air), et  $\vec{x}_0(r, \theta, z_0)$  (à l'interface entre l'air et la structure).

72. La couleur blanche indique une coïncidence exacte (écart de 0 dB) entre l'impédance acoustique de la roue calculée et l'approximation  $\rho_0 c_0$ .

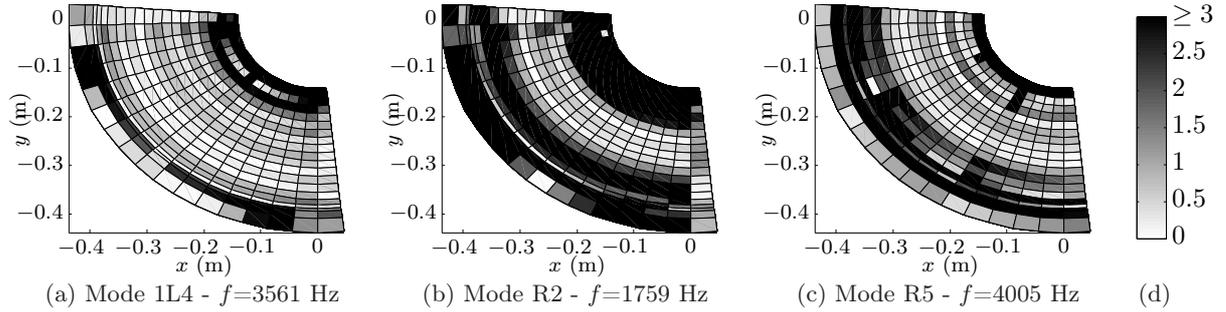


FIGURE 2.36 – Domaine de validité de l'approximation de l'impédance  $Z_w$  par  $\rho_0 c_0$  ; écart en dB donné par  $[20 \log_{10}(|Z_w(\vec{x}, \vec{x}_0, \omega_i)| / \rho_0 c_0)]$  et nuancier (d).

## 2.4 De la pression sonore à l'effort d'interaction

Afin de vérifier et d'illustrer la combinaison de l'ensemble des éléments modélisés dans la partie roue de la méthode LECAV (voir Fig 1.25 dans la section 1.5) tels que :

- l'impédance acoustique ( $Z_w$ )
- la fonction de transfert vibratoire ( $\gamma_w$ )
- et la mobilité ( $Y_w$ ),

la méthode d'estimation de l'effort d'interaction est mise en oeuvre à partir de la pression mesurée au point  $\vec{x}(r=0,26 \text{ m}, \theta=240^\circ, z=0,02 \text{ m})$  indicé 45 (voir Fig. 2.13a dans la section 2.2.2.5). Ce point est inclus dans le domaine de validité de l'approximation de l'impédance acoustique en champ proche de la roue.

### 2.4.1 Calcul de la vitesse vibratoire

#### Vitesse vibratoire au droit de la mesure de pression

Tout comme dans la section 2.2.2.5, la vitesse de vibration  $v(\vec{x}_0)$  de la toile est reconstruite par superposition modale à l'aide des paramètres modaux identifiés à partir de la pression acoustique  $p(\vec{x})$ . En premier lieu, l'impédance acoustique calculée à partir des modèles de vibration et de rayonnement acoustique présentés dans les sections précédentes (respectivement 2.3.1 et 2.3.2), est utilisée pour estimer la vitesse de vibration. Cette vitesse est comparée à la vitesse vibratoire estimée à partir de l'approximation proposée : l'impédance caractéristique de l'air.

La reconstruction de la vitesse vibratoire représentée sur la figure 2.37a montre qu'autour des résonances, l'estimation de la vitesse vibratoire est proche de la mesure. En considérant les intervalles d'erreur sur les positions expérimentales, les amplitudes vibratoires estimées aux résonances englobent majoritairement les valeurs mesurées (60 % des modes). Dans le cas contraire, celles-ci sont proches de l'une des bornes de l'intervalle d'erreur (40 % restant). La reconstruction de la vitesse vibratoire par l'impédance caractéristique de l'air (approximation) donne des résultats équivalents (voir Fig 2.37b). Toutefois, la divergence de la vitesse vibratoire approchée par l'impédance caractéristique de l'air par rapport à la vitesse vibratoire mesurée autour du mode R6 (à la fréquence de 4870 Hz sur la figure 2.37b), est légèrement plus importante que dans le cas où la vitesse est estimée à partir de l'impédance calculée par l'intégrale de Rayleigh (voir Fig. 2.37a) : l'approximation  $\rho_0 c_0$  atteint sa limite pour ce mode (voir Fig C.21c). Ces résultats montrent que la proportionnalité entre la pression et la

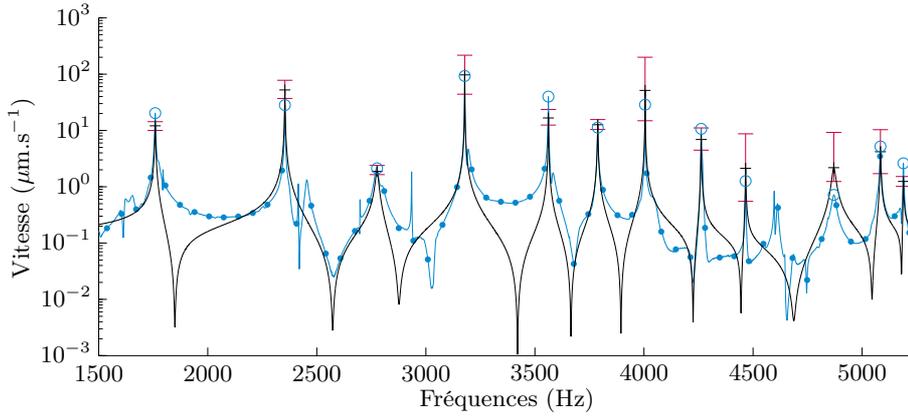
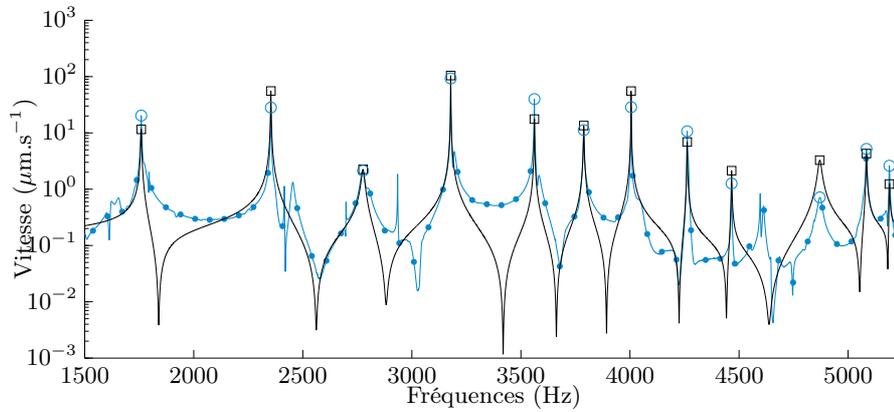
(a) Reconstruction à partir de l'impédance numérique  $Z(r, \theta, z_0, \omega_0)$  (+)(b) Reconstruction à partir de l'approximation de l'impédance caractéristique  $\rho_0 c_0$  ( $\square$ )

FIGURE 2.37 – Vitesse vibratoire latérale de la toile à la position  $\vec{x}_0$  ( $r=0,26$  m,  $\theta=240^\circ$ ,  $z_0$ ) (point de 45) pour une excitation radiale sur la bande de roulement ( $\theta=330^\circ$ ); modèle (—), mesure (—•—, aux résonances  $\circ$ ) et incertitudes sur les positions de mesures (—+—).

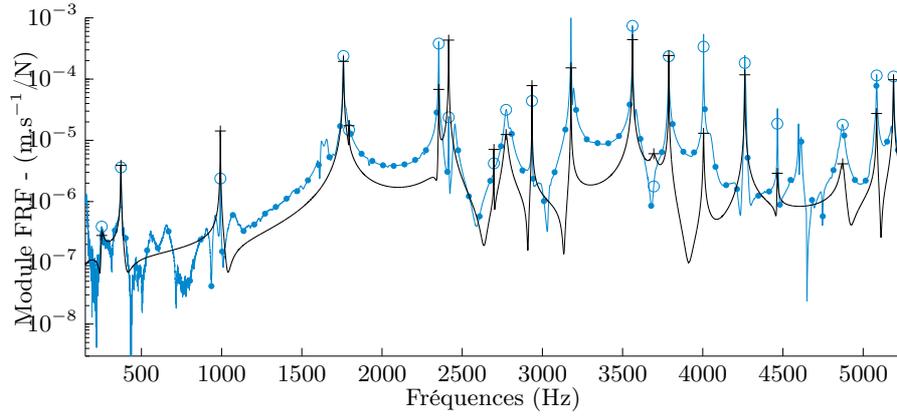
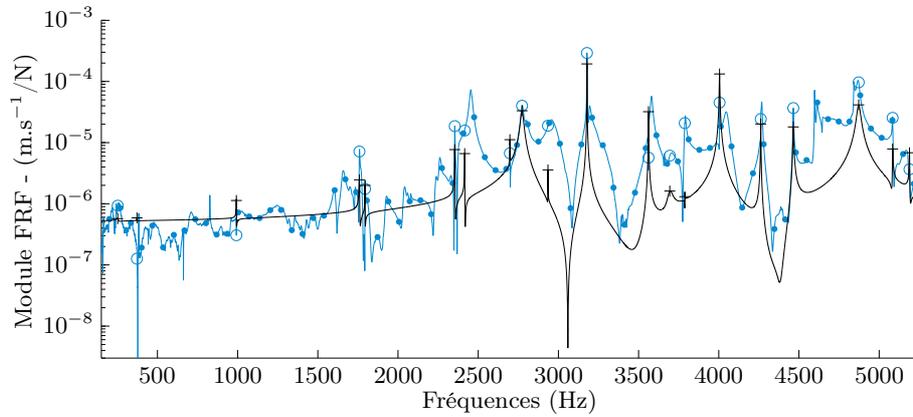
vitesse vibratoire (démontrée dans la section 2.2.2.5) est commune à tous les modes R, 1L et 2L de fréquences supérieures à 1000 Hz. Ainsi, pour ces modes, la pression mesurée en champ proche de la toile permet de déterminer la vitesse vibratoire de cette dernière à l'aide de l'impédance caractéristique de l'air telle que :

$$v_w(\vec{x}_0, \omega_i) = \frac{p_w(\vec{x}, \omega_i)}{\rho_0 c_0}. \quad (2.16)$$

D'après le modèle d'interaction verticale, la condition de continuité des vitesses vibratoires entre le rail et la roue s'applique au point de contact entre ces deux structures, il est alors nécessaire de relier la vitesse vibratoire de la toile à la vitesse au point de contact roue/rail.

### Vitesse vibratoire au point de contact

La vitesse vibratoire au point de contact ( $\vec{x}_c$ ) est évaluée par l'intermédiaire de la vitesse vibratoire de la toile au droit de la mesure de pression ( $\vec{x}_0$ ) et de la fonction de transfert

(a) Réponse vibratoire latérale de la toile à la position  $\vec{x}_0$  ( $r=0,26$  m,  $\theta=240^\circ$ ,  $z_0$ ) (position 45)(b) Réponse vibratoire verticale du bandage au point de contact  $\vec{x}_c$  ( $r=0,42$  m,  $\theta=270^\circ$ ,  $z_0$ )FIGURE 2.38 – Réponses vibratoires de la roue monobloc de 890 mm étudiée pour une excitation radiale sur la bande de roulement ( $\theta=330^\circ$ ); modèle (—), mesure (—●—).

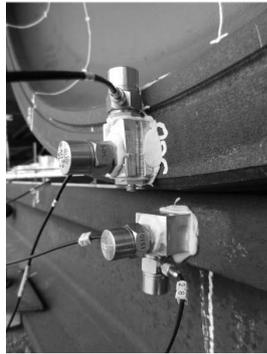
vibratoire  $\gamma_w(\vec{x}_c, \vec{x}_0, \omega_i)$  :

$$\gamma_w(\vec{x}_c, \vec{x}_0, \omega_i) = \frac{v_w(\vec{x}_c, \omega_i)}{v_w(\vec{x}_0, \omega_i)} = \frac{Y_w(\vec{x}_c, \omega_i)}{Y_w(\vec{x}_0, \omega_i)}. \quad (2.17)$$

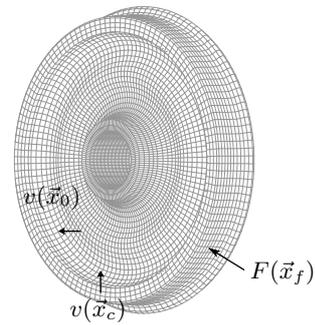
Elle permet, d'obtenir la vitesse vibratoire verticale  $v_w(\vec{x}_c)$  au point de contact :

$$v_w(\vec{x}_c, \omega_i) = \gamma_w(\vec{x}_c, \vec{x}_0, \omega_i) v_w(\vec{x}_0, \omega_i). \quad (2.18)$$

La vitesse vibratoire verticale au niveau du point de contact a été mesurée au moyen d'un cube métallique indéformable solidaire du bandage de la roue (voie Fig. 2.39a). Les réponses vibratoires en  $\vec{x}_0$  et  $\vec{x}_c$  mesurées et calculées par la méthode EF sont respectivement illustrées sur les figures 2.38a et 2.38b. Le rapport de ces réponses vibratoires ( $\gamma_w$ ) tracé sur la figure 2.40b, conduit à la vitesse vibratoire au point de contact (voir Fig. 2.40). Les écarts observés entre les vitesses vibratoires mesurée et calculée proviennent du manque de justesse des calculs des fonctions de transfert vibratoires. On remarque sur les réponses vibratoires des écarts entre la mesure et le calcul, notamment pour le mode R5 à la fréquence 4005 Hz : la réponse est sous-estimée en  $\vec{x}_0$  et surestimée en  $\vec{x}_c$  ce qui provoque une différence significative entre la mesure et le calcul du rapport  $\gamma_w(\vec{x}_c, \vec{x}_0, \omega_i)$ . Cet écart impacte directement la justesse de l'estimation de la vitesse vibratoire au point de contact. Pour les autres modes les écarts sont



(a) Mesure aux point de contact



(b) Positions et directions de mesures vibratoires

FIGURE 2.39 – Positions des mesures des vitesses vibratoires latérale  $\vec{x}_0(r=0,26 \text{ m}, \theta=240^\circ, z_0)$  (point de mesure 45) et verticale  $\vec{x}_c(r=0,42 \text{ m}, \theta=270^\circ, z_0)$  sur le bandage de la roue au point de contact pour une force  $F$  appliquée sur la bande de roulement à  $\theta=330^\circ$ .

plus faibles mais néanmoins observables. Étant donné que la vitesse vibratoire et la mobilité de la roue au point de contact permettent d'estimer la rugosité (Eq. 1.47), la justesse de cette dernière est conditionnée par la modélisation éléments finis du comportement vibratoire de la roue.

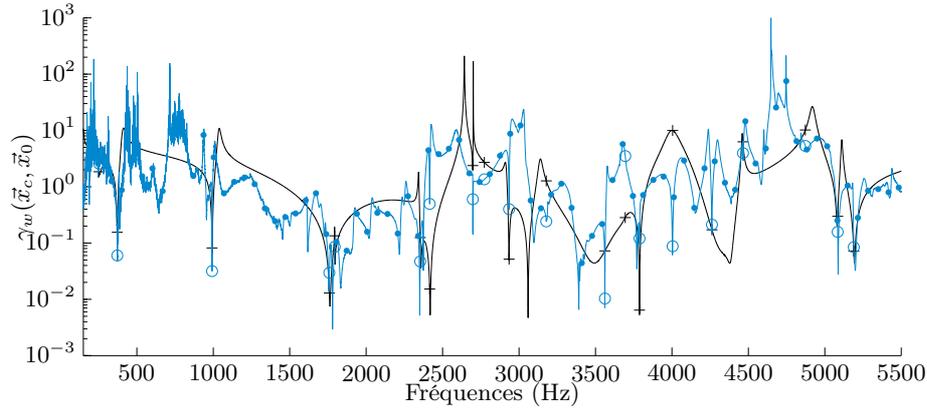
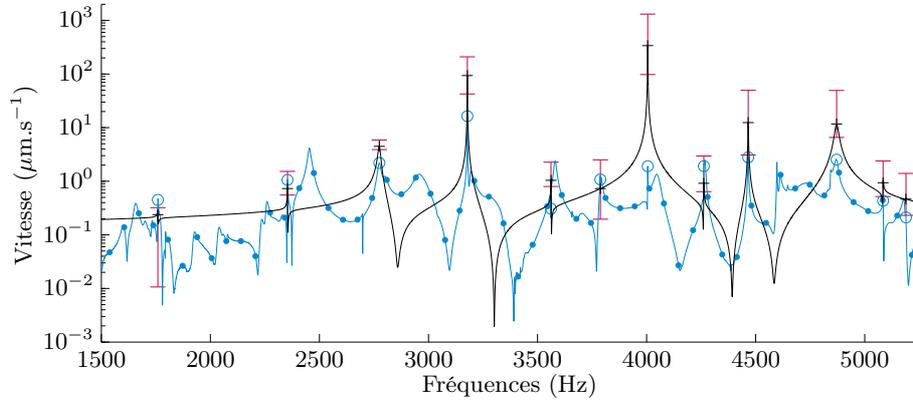
(a) Fonction de transfert vibratoire  $\gamma_w(\vec{x}_c, \vec{x}_0)$ (b) Vitesse vibratoire verticale du bandage au point de contact  $\vec{x}_c(r=0,42 \text{ m}, \theta=270^\circ, z_0)$ 

FIGURE 2.40 – Fonction de transfert vibratoire et vitesse vibratoire au point de contact pour une excitation radiale sur la bande de roulement ( $\theta=330^\circ$ ); modèle (—), mesure (—•—, aux résonances  $\circ$ ) et incertitudes sur les positions de mesures (|—|).

### 2.4.2 Calcul de l'effort appliqué

Afin d'observer la capacité d'estimation de la rugosité par le capteur vibroacoustique qu'est la roue, on cherche à estimer la force expérimentalement injectée. Puisque la force est cherchée autour des résonances significatives au bruit de roulement (*i.e* pour des fréquences supérieures à 1500 Hz) et que la prépondérance de la mobilité autour de ces résonances implique que la vitesse vibratoire de la roue est pilotée par la rugosité ( $v_w \approx \omega R$  - cf. section 1.4.3), les mobilités du rail<sup>73</sup> et du contact peuvent être négligées dans l'équation de la force au point de contact (Eq. 1.43). Ainsi la force injectée est déterminée par :

$$F(\vec{x}_f, \omega_i) = \frac{v_w(\vec{x}_f, \omega_i)}{Y_w(\vec{x}_f, \omega_i)} \quad (2.19)$$

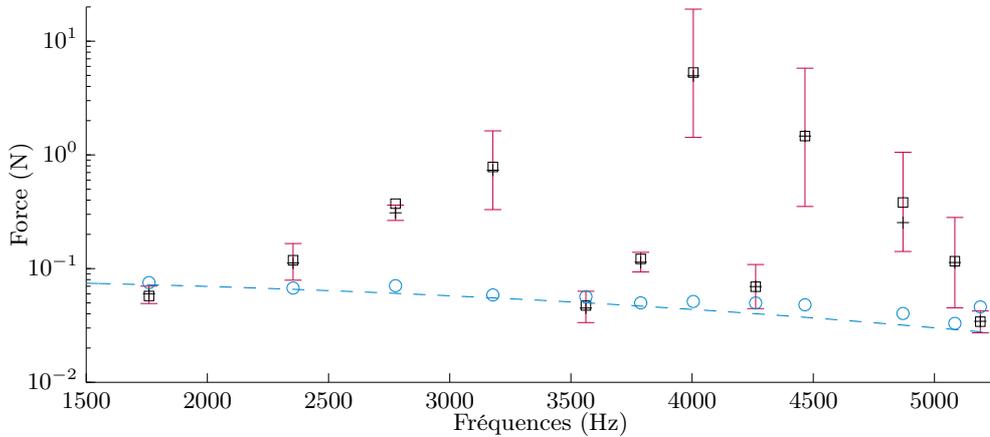
<sup>73</sup>. Le couplage entre la roue et le rail est tout de même pris en compte par l'intermédiaire du facteur d'amortissement utile à l'évaluation de l'amplitude de la mobilité de la roue.

où  $\vec{x}_f$  est la position de la force et de la mobilité (voir Fig. 2.39). En utilisant la méthode LECAV on obtient :

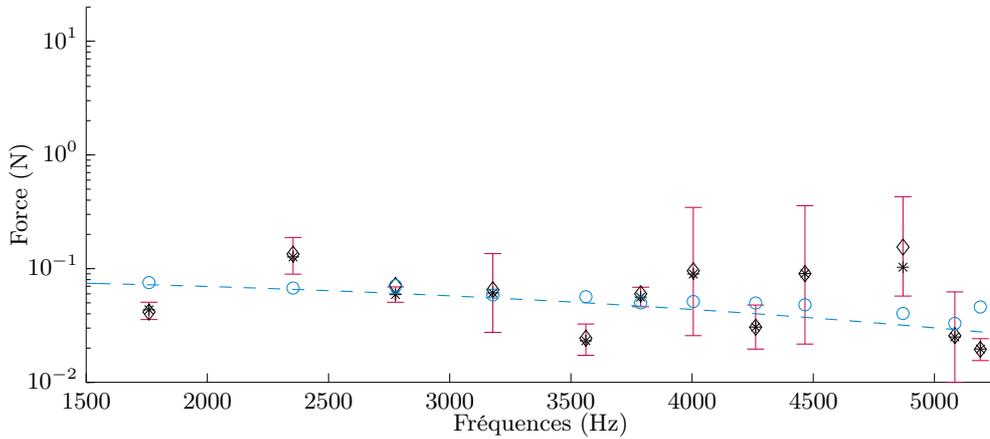
$$F(\vec{x}_f, \omega_i) = \frac{p_w(\vec{x}, \omega_i) \gamma_w(\vec{x}_f, \vec{x}, \omega_i)}{Z_w(\vec{x}_0, \vec{x}, \omega_i) Y_w(\vec{x}_f, \omega_i)}, \quad (2.20)$$

ou encore en utilisant l'approximation de l'impédance acoustique de la roue :

$$F(\vec{x}_f, \omega_i) = \frac{p_w(\vec{x}, \omega_i) \gamma_w(\vec{x}_f, \vec{x}_0, \omega_i)}{\rho_0 c_0 Y_w(\vec{x}_f, \omega_i)}. \quad (2.21)$$



(a) Force estimée à partir de la mobilité numérique (FEM);  $Z_w$  (+) et  $\rho_c c_0$  ( $\square$ )



(b) Force estimée à partir de la mobilité mesurée;  $Z_w$  (\*) et  $\rho_c c_0$  ( $\diamond$ )

FIGURE 2.41 – Force moyenne appliquée sur la bande de roulement (direction radiale) pour un angle de  $330^\circ$ ; mesures (---), prédictions expérimentale ( $\circ$ ) et numérique (signe en noir); incertitudes sur les positions de mesures (|--|).

La force estimée est présentée dans un premier temps en considérant la mobilité calculée par la méthode des éléments finis (cf. section 2.3.1.1). L'erreur sur l'amplitude la mobilité, que l'on peut observer sur la figure 2.38a, se retrouve dans l'évaluation de la force, plus particulièrement pour le mode R5 (4005 Hz) comme pour la vitesse vibratoire au point de contact (voir Fig. 2.41a). L'estimation de la force, donc de la rugosité est significativement conditionnée par la justesse du modèle élément finis. La propriété systématique de l'erreur

permet néanmoins de mesurer la rugosité relative à partir de la mobilité calculée. Lorsque la mobilité utilisée pour obtenir la force est mesurée, l'erreur et notablement diminuée (voir Fig. 2.41b). Ceci indique que pour une estimation absolue de la force il est préférable d'ajouter une étape de calibration à poste fixe par le biais de la mesure de la mobilité de la roue. Celle-ci serait effectuée avant d'utiliser le système sur plusieurs centaines de kilomètre de voie ferrée.

## 2.5 Discussion

### 2.5.1 Effet du roulage

En statique, les ondes stationnaires qui résultent de la propagation simultanée dans des directions opposées de deux ondes de même fréquence, fixe la déformée modale de la roue (principe d'interférence). Cependant, pour une roue en rotation, les deux ondes qui se propagent dans des directions opposées sont excitées par une force statistiquement indépendante (rugosité de composantes fréquentielles différentes) et donc de fréquences différentes [Thompson 2009]. Puisque les composantes de la force d'excitation de fréquences différentes ne sont pas corrélées, les ondes opposées résultantes sont par conséquent également décorréélées, bien que l'amplitude des deux ondes soit maximale à des fréquences très proches de la fréquence propre (dédoublage des fréquences de résonance - cf. section 1.2.1.3). La réponse vibratoire de la roue à une force aléatoire ne contient pas de diamètres nodaux fixes, mais la réponse est une combinaison de deux ondes indépendantes. La réponse acoustique intégrée sur le temps d'acquisition est alors indépendante de la position orthoradiale du microphone (indépendante de l'angle  $\theta$ ). Etant donné que l'impédance acoustique de la roue est également indépendante de la position angulaire  $\theta$  (cf. section 2.3.3 et Fig. 2.36 et C.21), l'amplitude vibratoire de la roue, intégrée sur le temps d'acquisition (distance parcourue), pourra être déterminée à partir de la pression acoustique intégrée sur la même durée d'acquisition.

*Remarque 1* : sur le spectre acoustique mesuré par un microphone embarqué sur un TGV circulant à 300 km/h, de résolution fréquentielle de 2 Hz (voir Fig. 2.2), le dédoublement des fréquences de résonance n'est pas visible alors que par exemple, la résonance du mode R d'ordre  $n=2$  autour de 1800 Hz, devrait apparaître à  $\pm 60$  Hz<sup>74</sup> de la fréquence propre. D'après ce résultat, le dédoublement *a priori* des fréquences de résonance, qui aurait pu causer des difficultés dans l'étape de détection des modes de roue, n'entravera pas la démarche d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail par la roue proposée dans ce chapitre.

### 2.5.2 Mesure de la rugosité des deux files de rail

L'hypothèse du modèle de plaque bafflée suppose que le rayonnement acoustique de la face arrière de la roue (de normale dirigée vers l'intérieure du train) est négligeable. Etant donné que cette hypothèse est validée par la mesure (cf. section 2.3.2.4), la séparation des champs acoustiques respectivement émis par la roue de la file de rail de droite et par la roue de la file de rail de gauche est assurée. Il serait par ailleurs pertinent d'équiper deux roues opposées d'un même bogie afin de mesurer la rugosité des deux files de rail.

<sup>74</sup>. D'après la relation  $f \pm nV/2\pi r_0$  où  $V$  est la vitesse de roulage et  $r_0$  est le rayon de la roue (cf. section 1.2.1.3).

*Remarque 2* : afin d'assurer la séparation de la lecture de la rugosité entre les deux files de rail, il sera nécessaire d'évaluer le couplage vibratoire en roulement des deux roues par l'intermédiaire de l'essieu. Notons cependant que l'excitation aléatoire par la rugosité décorrélée entre les deux files de rail est défavorable à l'établissement de mode de résonance de l'essieu. De plus, le couplage des modes de l'essieu aux modes de roues apparaît pour les modes basses fréquences inférieures aux fréquences de résonances des modes prépondérants au bruit de roulement utilisés par le système LECAV (cf section 1.2.1.1).

### 2.5.3 Robustesse de la méthode

Le champ de pression acoustique rayonné par la roue mesuré en plusieurs points orthoradiaux situés au centre de la roue (pour un même rayon  $r=0,26$  m) et répartis sur plusieurs angles (150 à 240°, voir Fig. 2.6) permet, en effectuant la moyenne, de réduire l'erreur relative sur l'estimation de la force d'excitation de 10 à 5% [Chartrain 2012]. Ce résultat a été obtenu à partir de l'impédance acoustique expérimentale, mais il montre cependant que la robustesse et la précision sur l'estimation de la force (donc de la rugosité) peut être augmentée en utilisant plusieurs mesures microphoniques réparties au centre de la toile de la roue.

## 2.6 Conclusions

En hautes fréquences, au dessus de 1,5 kHz, la roue est utilisée comme un capteur vibroacoustique capable de lire la rugosité du rail. La mesure du champ acoustique près du centre de sa toile permet, à partir de la méthode d'estimation de l'effort d'interaction entre la roue et le rail développée dans ce chapitre, d'estimer la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail. Cette vitesse donne ensuite accès au niveau de rugosité de petites longueurs d'onde par l'intermédiaire du modèle d'interaction verticale utilisé par le système de mesure acoustique de la voie.

Le champ acoustique rayonné par la roue, fortement marqué par ses modes vibratoires, est vecteur d'information sur sa vitesse de vibration. Il permet effectivement d'identifier la fréquence de résonance et l'amortissement de chacun des modes qui émerge du signal de pression. Le champ acoustique de chaque mode d'une roue monobloc de 890 mm de diamètre est calculé à partir de la formulation intégrale du rayonnement d'une plaque plane annulaire bafflée (qui représente la toile) dont la vitesse vibratoire normale est obtenue par la méthode des éléments finis. Les résultats issus de cette modélisation ont montré que très près de la toile de la roue, le rayonnement des modes prépondérants dans le bruit de roulement ( $Rn, mLn$  pour  $m \geq 1$  et  $n \geq 2$ )<sup>75</sup> est proportionnel à la vitesse vibratoire de la toile, et que ce coefficient de proportionnalité peut être simplifié par l'impédance caractéristique de l'air. À partir de cette observation, validée par des mesures vibroacoustiques réalisées sur un même type de roue, l'amplitude de la vitesse vibratoire de la toile peut être ainsi déterminée à partir de la pression acoustique rayonnée autour de chaque mode émergent. Pour estimer le niveau de rugosité du rail il est nécessaire de transposer, à l'aide d'une fonction de transfert vibratoire, la vitesse de la toile au point de contact roue/rail et de calculer la mobilité en ce point. Le manque de justesse de la fonction de transfert et de la mobilité calculées par la méthode des éléments finis conduit

<sup>75</sup>. Les déformées modales d'une roue ferroviaire sont caractérisées par un nombre de cercle  $m$  et un nombre de diamètre nodaux  $n$ . Les lettres R et L précise réciproquement que les mouvements de la déformée sont majoritairement radiaux et axiaux (latéraux).

---

à une estimation erronée de l'amplitude absolue de l'effort d'interaction roue/rail, donc du niveau de rugosité qui en est la cause. Toutefois, l'erreur étant systématique, l'utilisation d'une telle modélisation permet de déterminer avec précision le niveau de rugosité relatif. Une solution pour obtenir un niveau de rugosité absolu serait d'utiliser une mesure de calibration (vitesse vibratoire pour une force donnée) avant d'utiliser le système. Cette solution resterait moins contraignante qu'une calibration similaire aux systèmes de mesures embarquées actuels, qui impose des mesures de rugosité sur une voie de référence. De plus, elle assurerait, par la vérification des dérives des fréquences de résonances provoquées par l'usure de la roue, la bonne association des émergences acoustiques aux modes vibratoires.

La gamme de fréquence du capteur vibroacoustique est limitée aux fréquences des modes prépondérants au bruit de roulement discrètement comprises entre 1500 Hz et 5000 Hz, ce qui correspond à une gamme de longueurs d'onde de 16 mm jusque à 50 mm pour une vitesse de lecture de 300 km/h et de 11 mm à 30 mm pour une vitesse de 200 km/h.



# La voie : un élément en interaction avec la roue

---

## Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>3.1</b> | <b>Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail</b>         | <b>90</b>  |
| <b>3.2</b> | <b>Modélisation vibratoire du rail sur son support</b>                  | <b>91</b>  |
| 3.2.1      | Réponse fréquentielle   | 92         |
| 3.2.1.1    | Réponse verticale   | 92         |
| 3.2.1.2    | Réponse croisée   | 94         |
| 3.2.2      | Réponse spatiale  | 95         |
| <b>3.3</b> | <b>Modélisation du rayonnement acoustique du rail</b>                   | <b>97</b>  |
| 3.3.1      | Modèle linéique de sources ponctuelles                                  | 97         |
| 3.3.2      | Rayonnement spatial   | 99         |
| 3.3.2.1    | « Directivité » transversale  | 99         |
| 3.3.2.2    | « Directivité » longitudinale   | 107        |
| 3.3.3      | Dépendance fréquentielle  | 109        |
| 3.3.4      | Conclusions sur le rayonnement acoustique du rail                       | 110        |
| <b>3.4</b> | <b>De la pression sonore à la mobilité</b>                              | <b>110</b> |
| 3.4.1      | Effet des variations du comportement vibratoire sur le champ acoustique | 110        |
| 3.4.2      | Pouvoir discriminant de la « signature acoustique » de la voie          | 112        |
| 3.4.3      | Identification expérimentale  | 113        |
| 3.4.4      | Calcul de la vitesse vibratoire   | 116        |
| <b>3.5</b> | <b>Discussion</b>   | <b>119</b> |
| 3.5.1      | Effet du chargement de la voie  | 119        |
| 3.5.2      | Effet du roulage  | 121        |
| 3.5.3      | Effet acoustique provoqué par la caisse du train                        | 121        |
| 3.5.4      | Robustesse de la méthode  | 122        |
| <b>3.6</b> | <b>Conclusions</b>  | <b>122</b> |

---

Nous cherchons dans ce chapitre à déterminer la mobilité et la vitesse vibratoire du rail au point de contact roue/rail à partir de la pression rayonnée par le rail. Le rapport des deux conduits à approcher l'effort d'interaction roue/rail dans la gamme de fréquence où le rayonnement du rail est prépondérant au bruit de roulement (Eq. 1.39). L'obtention de la vitesse vibratoire et de la mobilité obtenues grâce à la méthode d'estimation de l'interaction roue/rail présentée dans la section suivante, seront introduit dans les équations (1.46) et (1.47) de la méthode de lecture acoustique de la voie afin de déterminer la rugosité.

### 3.1 Méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail à partir du rayonnement du rail

Le modèle d'interaction verticale utilisé par la méthode de lecture acoustique de la voie en situation embarquée nécessite de connaître le comportement dynamique de la voie au point de contact entre le capteur vibroacoustique (la roue) et le rail. Celui-ci est décrit par la mobilité du rail sur son support. La mobilité du rail dépend tout particulièrement des éléments qui le supportent, autrement dit du type de pose de la voie. Par conséquent la mobilité du rail varie inévitablement le long du parcours du train équipé du système LECAV. Le rayonnement acoustique du rail étant lié à son comportement vibratoire, on propose d'identifier le comportement vibratoire à l'aide de mesures microphoniques en situation embarquée. Cette identification permet ensuite de déterminer l'impédance acoustique de la voie qui permet de déterminer la vitesse vibratoire au point de contact. La méthode proposée est présentée sur la figure 3.1.

Comme dans la section 2.1 du chapitre 2 qui porte sur la présentation de la méthode d'estimation de l'effort d'interaction roue/rail par la roue, plaçons nous dans le contexte LECAV. L'acquisition des pressions acoustiques en deux points répartis le long de la caisse du train permet d'obtenir deux spectres fréquentiels qui correspondent au rayonnement acoustique du rail sur une distance  $L$  parcourue par le train (voir Fig. 1.25). Le rapport  $\Delta_p$  des spectres de pressions mesurées en ces deux points est utilisé comme une signature du type de voie ; il permet de s'affranchir de l'amplitude acoustique absolue et du spectre d'excitation (rugosité). Cette signature est comparée à un ensemble de signatures acoustiques  $\tilde{\Delta}_p$  calculées préalablement à partir du comportement vibratoire de voies représentatives des réseaux Français et Européens (gabarits). Le rayonnement acoustique de chacune des voies est calculé à l'aide d'un modèle de rayonnement du rail basé sur une ligne de sources ponctuelles élémentaires dont les débits massiques sont fixés par la fonction de Green  $G_\omega$  d'un modèle de poutre en appui sur un support élastique double couches. Le taux de corrélation maximum entre le rapport des pressions mesurées et les rapports de pressions calculées conduit à l'identification d'une voie gabarit. La mobilité  $Y_r$  de la voie gabarit identifiée est associée au tronçon de voie qui correspond à la distance  $L$ . Cette première étape permet ensuite d'utiliser l'impédance acoustique  $Z(\vec{x}_n, \vec{x}_{n_0})$  de la voie gabarit identifiée afin de déterminer les vitesses vibratoires du rail  $v(\vec{x}_{n_0})$  au droit des points de mesures microphoniques. A partir des fonctions de transfert vibratoires le long du rail  $\gamma(\vec{x}_c, \vec{x}_{n_0})$ , la vitesse vibratoire moyenne au point de contact roue/rail  $v(\vec{x}_c)$  est estimée. La mobilité de la voie gabarit identifiée permet alors de relier la vitesse vibratoire moyenne à la force d'interaction. L'effort d'interaction est finalement traduit en spectre de rugosité à l'aide du modèle d'interaction verticale. Cette méthode nécessite un modèle de rayonnement acoustique du rail efficace en champ proche qui dépend de sa direction longitudinale. C'est pourquoi un modèle de rayonnement basé sur une ligne de sources ponctuelles élémentaires équiréparties le long du rail est choisi (cf. section 1.3.2).

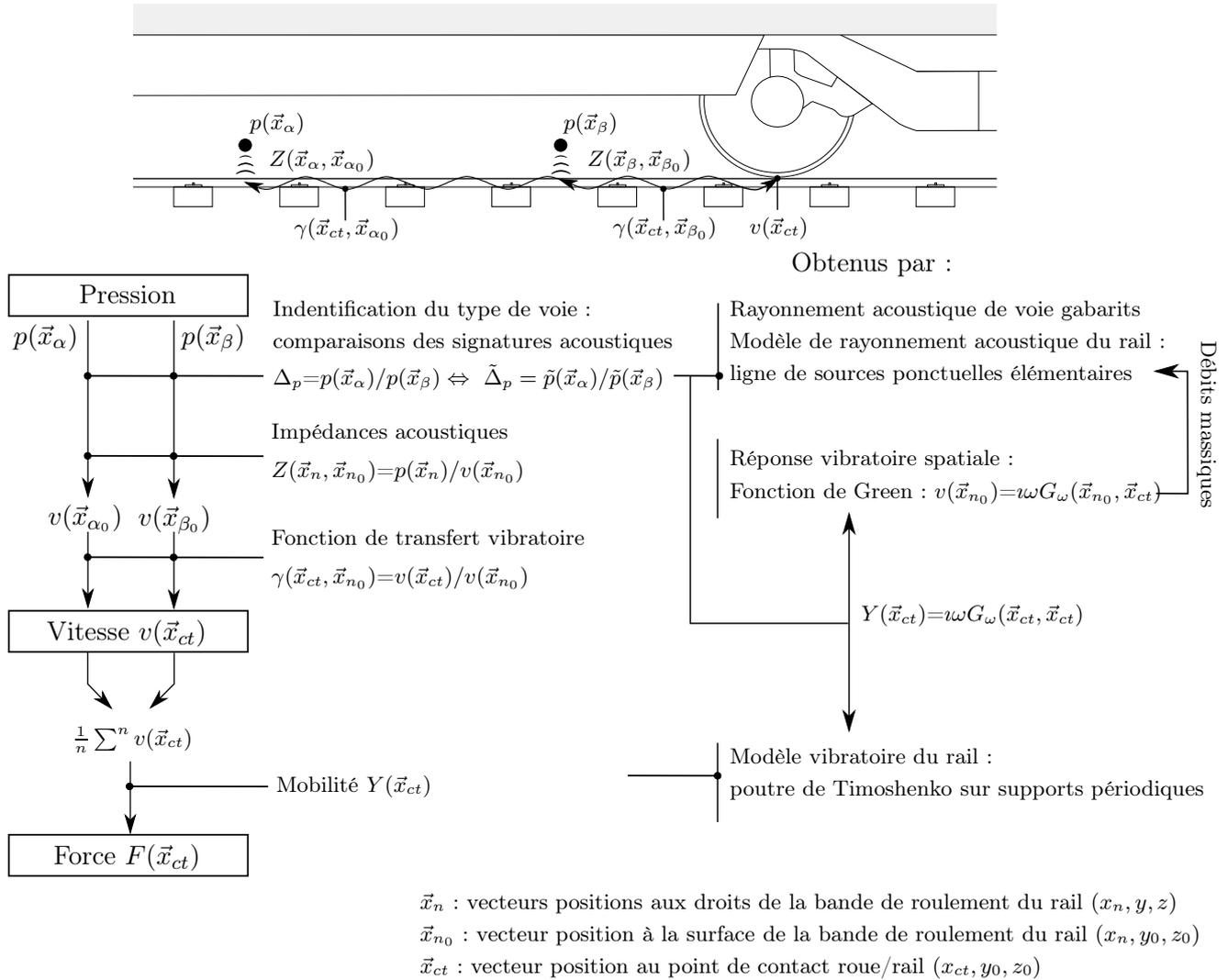


FIGURE 3.1 – Méthode de détermination de la mobilité et de l’effort d’interaction roue/rail.

Afin de s’assurer de sa validité, une étude vibroacoustique expérimentale du rail a été menée. L’analyse des résultats obtenus par différentes modélisations vibratoires et acoustiques confrontés aux mesurés est présentée dans la suite de ce chapitre.

### 3.2 Modélisation vibratoire du rail sur son support

La modélisation du rayonnement acoustique du rail par une ligne de sources élémentaires implique de connaître les amplitudes et phases des sources qui la composent. Ces amplitudes complexes, supposées proportionnelles à la vitesse vibratoire du rail, peuvent être obtenues par le calcul de la fonction de Green d’une poutre sur un support représentatif du comportement dynamique de la voie (cf. section 1.3.1). Afin d’assurer une prédiction du comportement vibratoire sur une grande gamme de fréquences, notamment en hautes

fréquences, le rail est modélisé par une poutre de Timoshenko<sup>1</sup>. Le support de la poutre est choisi périodique de manière à reproduire au mieux les comportements vibratoires locaux le long du rail induits par les forces de réactions des traverses.

Avant de s'intéresser au rayonnement du rail essentiel au système LECAV, nous analyserons la capacité d'un tel modèle de voie à représenter son comportement vibratoire. Si ce modèle est valide il pourra alimenter le modèle de rayonnement basé sur une représentation par sources ponctuelles.

Les réponses vibratoires verticales calculées à partir du modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques sont comparées à des mesures effectuées sur la voie ballastée utilisée lors des mesures vibroacoustiques de la roue. La voie est composée de traverses bibloc<sup>2</sup> en béton et d'un rail de type U36 (cf. annexe B.1). Les réponses vibratoires verticales le long du rail libre<sup>3</sup> ont été simultanément mesurées pour une excitation ponctuelle appliquée sur la bande de roulement<sup>4</sup> dans la direction verticale à mi-distance<sup>5</sup> entre deux traverses ou sur une traverse<sup>6</sup> (voir Fig. 3.17). Les paramètres mécaniques du modèle de voie ont été ajustés par itération à partir des mesures dans le but de représenter le comportement vibratoire de la portion de voie étudiée<sup>7</sup> (voir Tab. 3.1). Dans un premier temps la comparaison des résultats est menée dans la gamme de fréquence considérée pour le bruit de roulement. Les résultats sont ensuite examinés le long du rail aux fréquences caractéristiques de la voie.

### 3.2.1 Réponse fréquentielle

#### 3.2.1.1 Réponse verticale

Comme le montre les résultats présentés sur la figure 3.2, les amplitudes et phases de la mobilité verticale obtenues par le modèle et la mesure coïncident. Cela traduit la validité du modèle utilisé. Pour une réponse vibratoire éloignée du point d'excitation, comme représentée sur la figure 3.3, l'estimation est dégradée mais reste néanmoins fidèle à l'allure de la réponse mesurée. Dans les deux cas, les fréquences caractéristiques de la voie sont correctement estimées. Cependant, comme la raideur des semelles sous rail est élevée et que le type de rail est particulièrement souple, la fréquence de résonance du rail sur la semelle ( $f_{semelle}$  - cf. section 1.3.1.2) à 760 Hz est proche de la fréquence *pinned pinned* à 955 Hz. Ces deux fréquences proches l'une de l'autre provoquent un comportement vibratoire singulier autour de ces résonances plus délicat à modéliser. En plus hautes fréquences (au dessus de 1200 Hz) les modes de la section du rail apparaissent [Thompson 1997], notamment à 5230 Hz, mode qui correspond à la fréquence de battement du patin qui se répercute sur le mouvement

---

1. Le modèle de poutre d'Euler Bernoulli atteint ses limites à 1 kHz contre 2,5 kHz pour celui d'une poutre de Timoshenko (cf. section 1.3.1.2).

2. Une traverse bibloc est composée de deux blochets reliés par une barre métallique.

3. La voie n'était pas chargée par le train d'essai utilisé pour l'étude vibroacoustique de la roue.

4. La bande de roulement est déterminée par la surface horizontale supérieure du champignon (surface brillante sur les photos des figures 3.8a et 3.16).

5. La position de la force appliquée à mi-distance d'une travée correspond à l'emplacement du contact/roue rail dans le cas de où la voie est chargée par le train.

6. Les réponses vibratoires résultent de moyennes de réponses vibratoires sur 10 excitations ponctuelles effectuées au marteau d'impact.

7. Un ajustement optimisé des paramètres du modèle en un point local n'induit pas une optimisation des mobilités calculées sur les mesures le long du rail. L'étude vibratoire de la voie s'étend sur 5 m ; au-delà les mesures dans les gammes de fréquences dans lesquelles les ondes vibratoires deviennent fortement atténuées sont bruitées et incohérentes avec l'excitation.

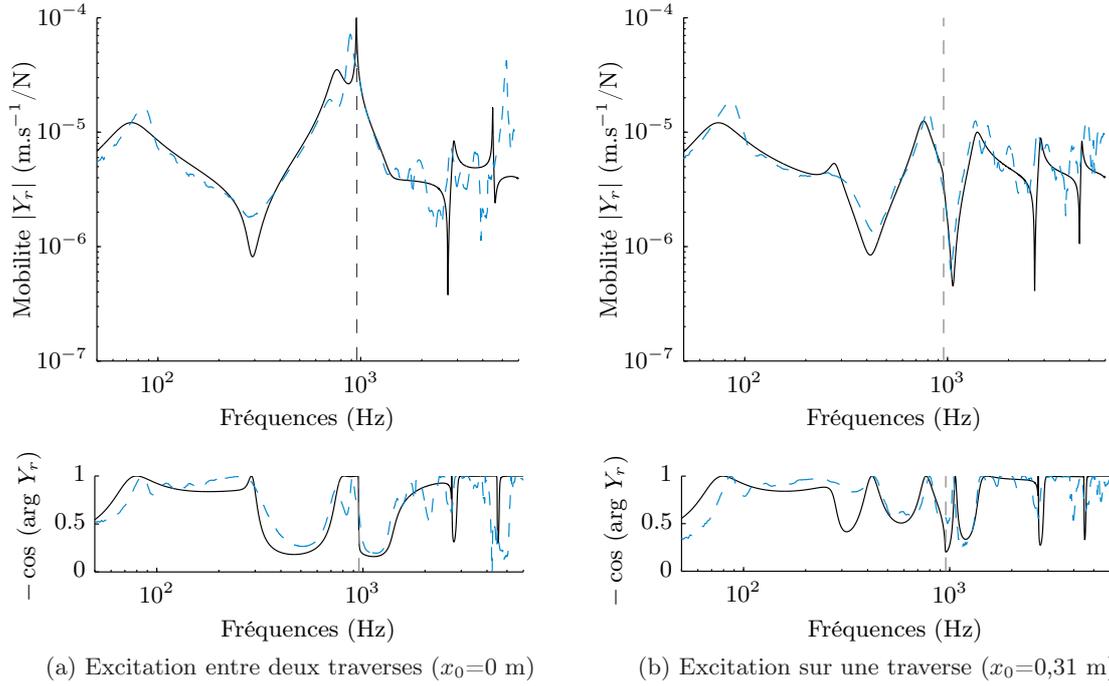


FIGURE 3.2 – Mobilité verticale ( $x=x_0$ ) pour une force verticale appliquée en  $x_0$  : modèle (—), mesure (---). La fréquence *pinned pinned* qui apparaît à 955 Hz est repérée par (---).

vertical du champignon (voir Fig 1.12). La section de la poutre de Timoshenko utilisée par le modèle de voie étant supposée indéformable (section droite), le modèle n'est pas capable de rendre compte des modes de déformation de section. Toutefois, les harmoniques de la longueur d'onde correspondante à la fréquence *pinned pinned* sont correctement représentés<sup>8</sup> (voir Fig. 3.2b). Excepté ces différences entre l'estimation analytique et la mesure, le modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques permet de déterminer la réponse vibratoire de la voie avec justesse.

| Paramètres mécaniques du modèle de poutre de Timoshenko |          |     |        |
|---|----------|-----|--------|
| Raideur de la semelle                                   | $s_p$    | 650 | [MN/m] |
| Facteur de perte de la semelle                          | $\eta_p$ | 0,2 | [-]    |
| Raideur du ballast                                      | $s_b$    | 25  | [MN/m] |
| Facteur de perte du ballast                             | $\eta_b$ | 0,5 | [-]    |
| Masse d'une demi-traverse                               | $m_t$    | 101 | [kg]   |

TABLE 3.1 – Paramètres ajustés sur la mobilité verticale de la voie libre. Les paramètres mécaniques du rail U36 sont données dans le tableau 1.3.

8. Première résonance :  $f_p \approx 955$  Hz  $\Leftrightarrow \pi/k=a$ , seconde résonance  $f'_p \approx 2681$  Hz  $\Leftrightarrow 2\pi/k=a$  et troisième résonance  $f''_p \approx 4481$  Hz  $\Leftrightarrow 3\pi/k=a$  avec  $a$  la distance entre deux traverses (voir Fig. 1.11) et  $k$  le nombre d'onde des ondes vibratoires dans le rail.

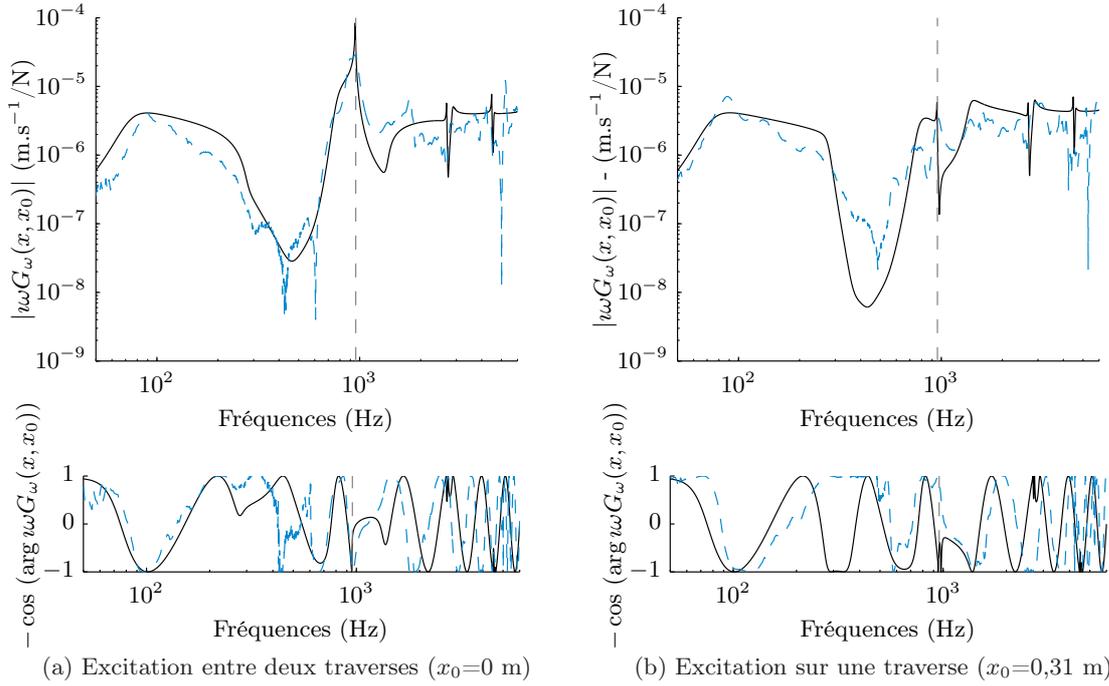


FIGURE 3.3 – Vitesse vibratoire verticale en  $x=-1,9$  m pour une force verticale appliquée en  $x_0$  : voir légende de la figure 3.2.

### 3.2.1.2 Réponse croisée

La réponse croisée est la réponse vibratoire latérale du rail pour une excitation appliquée dans la direction verticale. Elle reflète le comportement vibratoire latéral du rail lors du passage d'un train en ligne droite. La réponse croisée permet de déterminer les amplitudes complexes des sources ponctuelles qui représentent le rayonnement induit par le comportement vibratoire latéral du rail (cf. section 3.3.2.1). La mobilité croisée est définie par [Thompson 1999a] :

$$Y_r^{yz} = X \sqrt{Y_r^y Y_r^z} \quad (3.1)$$

où  $X$  est le coefficient de couplage<sup>9</sup>,  $Y_r^y$  est la mobilité verticale (cf. section 3.2.1.1) et  $Y_r^z$  est la mobilité latérale<sup>10</sup>. Afin de déterminer la réponse croisée il est nécessaire d'estimer la mobilité latérale. Les paramètres de la voie ajustés sur la mobilité latérale mesurée sont reportés dans le tableau 3.2. La plus forte flexibilité du rail et des systèmes d'attaches dans cette direction se traduit par une diminution des raideurs de flexion du rail et de la semelle. En revanche la raideur équivalente du ballast augmente. La mobilité latérale représentée sur la figure 3.4a est utilisée pour obtenir la mobilité croisée tracée sur la figure 3.4b. La valeur et le signe du coefficient de couplage sont choisis de manière à accorder respectivement l'amplitude et la phase de la mobilité croisée calculée sur la mobilité croisée mesurée. Contrairement à la mobilité verticale, la modélisation du comportement vibratoire latéral est incorrecte et ne permet pas d'estimer avec justesse la mobilité croisée.

9. Le signe de  $X$  fixe la phase.

10. La mobilité latérale est le rapport entre la vitesse vibratoire dans la direction latérale en un point et la force appliquée au même point et dans la même direction.

| Paramètres mécaniques du modèle de poutre de Timoshenko |          |      |                     |
|---|----------|------|---------------------|
| Rigidité de flexion laterale                            | $B = EI$ | 0,75 | [MNm <sup>2</sup> ] |
| Coefficient de couplage                                 | $X$      | -5   | [-]                 |
| Raideur de la semelle                                   | $s_p$    | 45   | [MN/m]              |
| Facteur de perte de la semelle                          | $\eta_p$ | 0,1  | [-]                 |
| Raideur du ballast                                      | $s_b$    | 75   | [MN/m]              |
| Facteur de perte du ballast                             | $\eta_b$ | 0,1  | [-]                 |

TABLE 3.2 – Paramètres ajustés sur la mobilité latérale de la voie libre. Les autres paramètres mécaniques du rail U36 sont données dans le tableau 1.3.

*Remarque* : les oscillations visibles sur les tracés des mobilités latérale et croisée mesurées entre 600 et 1500 Hz (voir Fig. 3.4) sont des interférences dues à une rupture du rail entre deux types de voies située à environ 20 m de la position d’excitation (cf. annexe B.4). Les ondes latérales très peu atténuées pour ces fréquences sont réfléchies à la terminaison du rail (rupture d’impédance) et provoquent des interférences (voir aussi Fig. B.3). Les résultats sur le comportement latéral du rail présentés dans la suite de ce chapitre (sur les figures 3.10 et 3.15b dans la section 3.3.2.1) sont « corrigés » en conséquence (cf. annexe B.4).

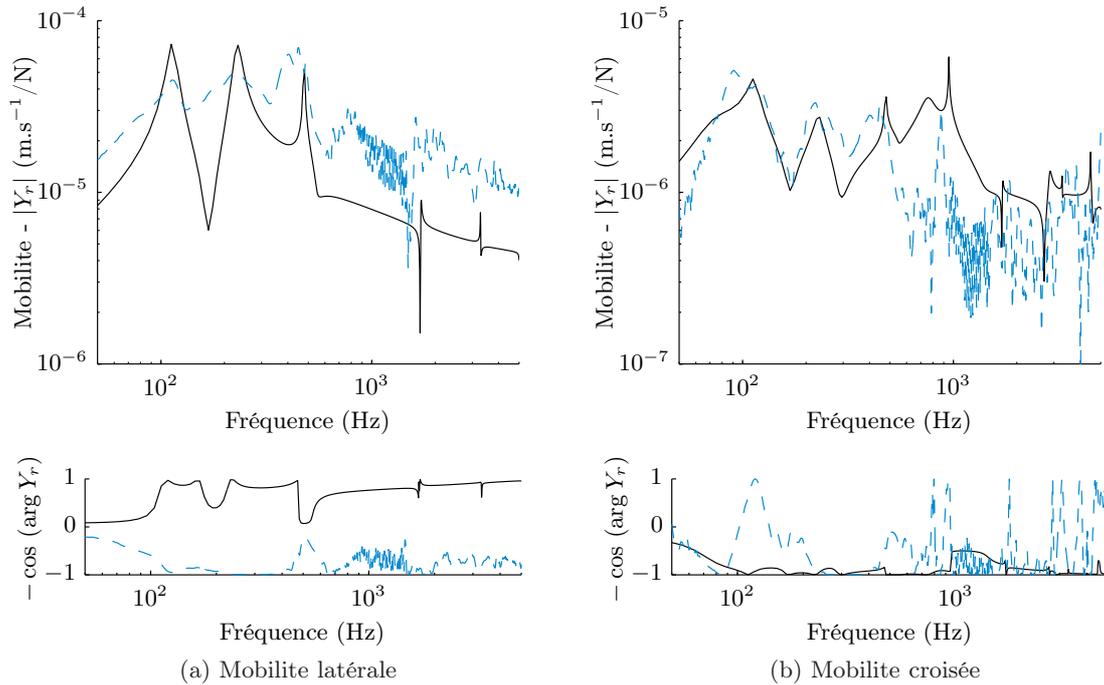


FIGURE 3.4 – Mobilité ( $x=0$  m) pour une force verticale appliquée en  $x_0$  : modèle (—), mesures (---).

### 3.2.2 Réponse spatiale

En complément des mesures vibratoires simultanées sur le rail pour une excitation ponctuelle, une série de mesures en conformité avec la norme NF EN ISO 15461<sup>11</sup> [AFN 2008]

11. Norme relative à la caractérisation des propriétés dynamiques de sections de voie pour le mesurage du bruit au passage.

a été réalisée. Les réponses vibratoires sont obtenues par réciprocity entre les positions d'excitation ponctuelles le long du rail et la position d'un seul capteur accélérométrique situé en  $x_0$  (cf. annexe B.3). Les résultats obtenus par la fonction de Green ( $G_\omega$ ) du modèle de poutre de Timoshenko sur appuis périodiques tracés sur la figure 3.5 sont en accord avec les mesures. Non seulement en termes de décroissance exponentielle des ondes vibratoires verticales le long du rail, mais également par rapport à l'évolution périodique plus locale de l'amplitude, notamment sur les figures 3.5b et 3.5e. Toutefois, à la fréquence *pinned pinned*, la décroissance est surestimée (voir Fig. 3.5d). La proximité entre cette dernière et la fréquence  $f_{semelle}$  induit probablement un couplage; la décroissance à la fréquence  $f_p$  est de pente similaire à la décroissance des ondes à la fréquence  $f_{semelle}$  (voir Fig 3.5c). Ce phénomène de couplage expliquerait la plus grande disparité entre les résultats du modèle et des mesures à ces fréquences. Le modèle de poutre sur supports périodiques permet néanmoins d'obtenir une bonne description du comportement vibratoire de la voie ferrée ballastée, autant d'un point de vue local que global (le long du rail).

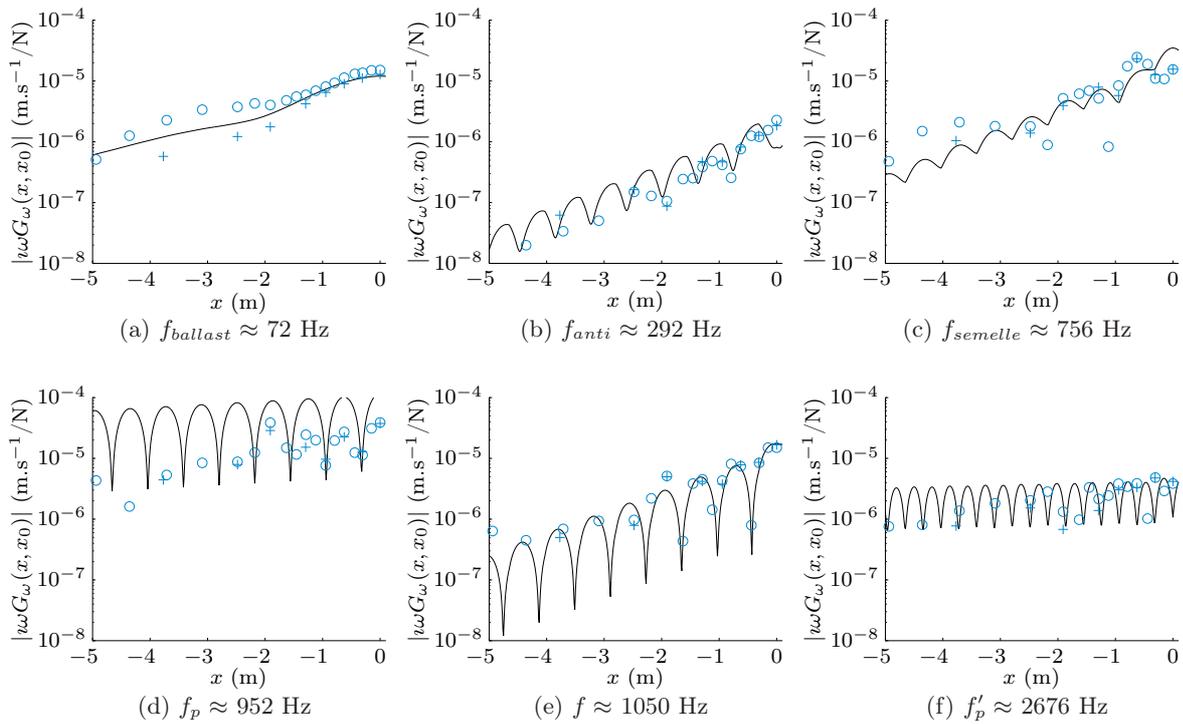


FIGURE 3.5 – Vitesse vibratoire verticale le long du rail; modèle (—), mesure par réciprocity ( $\circ$ ), mesure simultanée ( $+$ ). Excitation verticale appliquée à mi-distance entre deux traverses ( $x_0=0$ ). Cohérences des mesures comprises entre 0,98 et 1.

Hormis les différences entre les mesures simultanées et réciproques entre -2 et -5 m à la fréquence de résonance de l'ensemble de la voie sur le ballast ( $f_{ballast}$ ), la coïncidence entre les résultats obtenus par les deux types de protocoles expérimentaux (simultanées sur la figure 3.17 et réciproques sur la figure B.1 en annexe B.3) indiquent une bonne répétabilité des mesures vibratoires.

### 3.3 Modélisation du rayonnement acoustique du rail

Nous avons montré dans la section 3.2 que le modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques permet une bonne estimation du comportement vibratoire de la voie en fréquence et en espace. La fonction de Green  $G_\omega$  qui en résulte est alors utilisée pour déterminer le débit massique de chaque source élémentaire du modèle de rayonnement acoustique du rail.

#### 3.3.1 Modèle linéique de sources ponctuelles

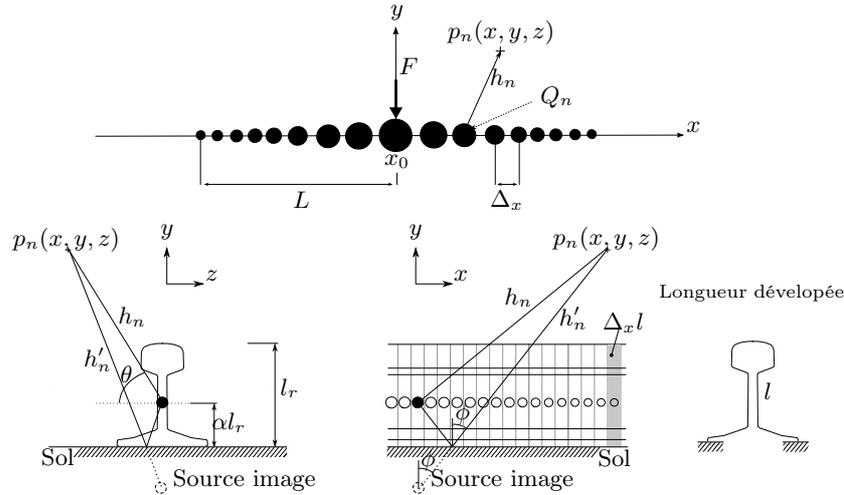


FIGURE 3.6 – Modélisation du rayonnement du rail par une ligne de sources ponctuelles. Trajets des ondes acoustiques émises par une source ponctuelle.

Dans le contexte du projet LECAV, le champ acoustique émis par le rail doit être décrit dans sa longueur (cf section 3.1). Un modèle basé sur une ligne de sources ponctuelles élémentaires réparties le long du rail est donc approprié [Thompson 2003b, Kitagawa 2010] (cf section 1.3.2). Contrairement à la roue, les distances géométriques sources-récepteurs parcourues par les ondes acoustiques directes émises par le rail et les ondes réfléchies sur le sol sont de mêmes ordres de grandeurs, l'effet des réflexions acoustiques sur le ballast est alors ajouté au modèle de ligne de source. Le modèle de rayonnement devient dépendant des trois dimensions de l'espace (voir Fig. 3.6).

En premier lieu le rail est considéré comme une infinité de monopôles equirépartis sur son axe. La pression rayonnée par le rail s'écrit comme la somme des contributions acoustiques de chaque monopôle. La pression en un point  $\vec{x}$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  est calculée à partir de l'équation (1.33) discrétisée en prenant compte l'effet de sol grâce à la méthode des sources images :

$$\tilde{p}_r(\vec{x}) = i\omega \sum_{n=1}^{N_s} Q_n \left( \frac{e^{-ikh_n}}{4\pi h_n} + \mathcal{R}(\phi) \frac{e^{-ikh'_n}}{4\pi h'_n} \right), \quad (3.2)$$

où  $N_s$  est le nombre de sources élémentaires et  $Q_n$  est le débit massique de chaque source élémentaire  $n$  donné par :

$$Q_n = -\rho_0 i\omega G_\omega(x_n, x_0) l \Delta_x. \quad (3.3)$$

La vitesse vibratoire de chaque source est fixée par la fonction de Green complexe  $G_\omega$  définie

par le modèle de poutre choisi (cf. section 1.3.1),  $l$  correspond au périmètre de la section rayonnante du rail<sup>12</sup> et  $\Delta_x$  est la distance entre deux sources élémentaires adjacentes (voir Fig. 3.6). Le rayonnement du rail peut être également modélisé par le rayonnement d'une infinité de dipôles equirépartis sur son axe. Le débit massique de chaque source devient :

$$Q'_n = (-\rho_0 \omega G_\omega(x_n, x_0) l \Delta_x) \cos \theta. \quad (3.4)$$

où  $\theta$  est l'angle formé entre l'axe du dipôle et un point de l'espace (voir Fig. 3.6). Dans l'expression du débit massique de chaque source (Eq. 3.3)  $l$  ne correspond plus au périmètre de la section rayonnante mais à la hauteur de l'âme du rail (moment dipolaire).

Quel que soit le type de source, les trajets de l'onde directe et de l'onde réfléchie sur le ballast sont déterminés par les distances respectives :

$$h_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y + \alpha l_r)^2 + (z)^2} \quad h'_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - \alpha l_r)^2 + (z)^2}, \quad (3.5)$$

où  $\alpha$  est un coefficient qui fixe la hauteur de la ligne de sources ponctuelles par rapport à la hauteur du rail  $l_r$ . Le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}$  est exprimé en terme d'impédance du sol pour une onde plane<sup>13</sup> d'angle d'incidence  $\phi$  par rapport à la direction normale au sol (voir Fig. 3.6)

$$\mathcal{R}(\phi) = \frac{Z'_n \cos(\phi) - 1}{Z'_n \cos(\phi) + 1}, \quad (3.6)$$

où l'angle d'incidence s'écrit à partir du théorème de Pythagore généralisé (théorème d'Al-Kashi)<sup>14</sup> :

$$\phi = \arccos \left( \frac{(2\alpha h_r)^2 + h_n^2 - h_n'^2}{4\alpha h_r 2h_n} \right). \quad (3.7)$$

L'impédance  $Z'_n = Z_n / \rho_0 c_0$  dans l'expression de  $\mathcal{R}$  (E. 3.6) dépend de  $Z_n$  qui est l'impédance acoustique caractéristique du sol et  $\rho_0 c_0$  l'impédance caractéristique de l'air. L'impédance  $Z'_n$  est déterminée par le modèle de Delany Bazley, modèle bien adapté à une approche fréquentielle<sup>15</sup> [Delany 1970]. Ce modèle est construit à partir des résultats de mesures d'impédances acoustiques d'un grand nombre de matériaux poreux qui ont conduit à une expression empirique basée sur la résistivité au passage de l'air  $\sigma_e$  :

$$Z'_n = 1 + 9,08 \left( \frac{1000f}{\sigma_e} \right)^{-0,75} - 11,9i \left( \frac{1000f}{\sigma_e} \right)^{-0,73}. \quad (3.8)$$

La résistivité au passage de l'air  $\sigma_e$  est choisie de manière à représenter l'impédance du ballast ;  $\sigma_e = 1.10^5$  Pa.s/m<sup>2</sup> [Broadbent 2009]. Cette valeur, si elle ne permet qu'une approximation grossière du coefficient de réflexion du ballast, est du moins plus physique qu'un coefficient de réflexion constant (indépendant de la fréquence et de l'angle d'incidence). Les coefficients

12. La section rayonnante est définie par le périmètre total de la section du rail dont la largeur de la surface inférieure du patin (tournée vers le ballast) est soustraite. Dans le cas d'un rail U36 ;  $l = 0,636$  m.

13. En champ proche, la correction apportée à l'expression du coefficient de réflexion (Eq. 3.6) pour les ondes sphériques a très peu d'effet sur l'impédance du sol ; il est utile de la prendre en compte dans le cas de propagations longues distances où l'onde devient rasante ( $\phi \rightarrow \pi/2$ ) [Thompson 2009].

14. Les réflexions des ondes acoustiques sur le ballast sont supposées spéculaires.

15. L'hypothèse de causalité invalidée ne fait pas défaut en régime harmonique.

de réflexion obtenus pour différents angles d'incidences de l'onde réfléchie sont présentés sur la figure 3.7.

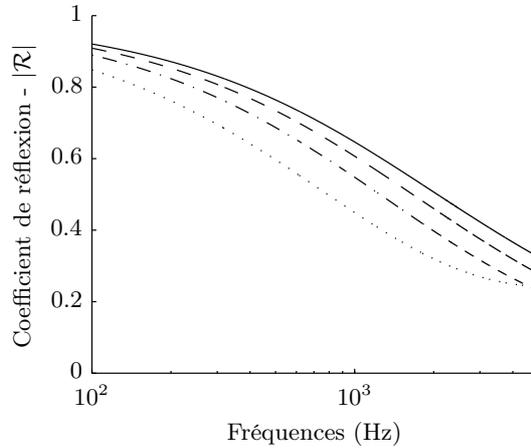


FIGURE 3.7 – Coefficient de réflexion pour une impédance de sol qui correspond à  $\sigma_e = 1.10^5$  Pa.s/m<sup>2</sup> pour les angles d'incidence :  $\phi = 0$  (—),  $\phi = \pi/6$  (- - -),  $\phi = \pi/4$  (- · -) et  $\phi = \pi/3$  (···).

### 3.3.2 Rayonnement spatial

Le modèle de rayonnement basé sur une ligne de sources ponctuelles ne permet pas de prendre en compte la géométrie de la section du rail. Le comportement vibroacoustique de la section du rail est alors étudié afin de déterminer la pertinence et les conséquences de cette hypothèse. Les conclusions émises à partir de cette première observation sont ensuite vérifiées le long du rail.

#### 3.3.2.1 « Directivité » transversale

Le champ acoustique rayonné par la section du rail a été mesuré à l'aide d'une « antenne » microphonique placée dans le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à l'axe longitudinal  $x$  du rail (voir Fig. 3.8). L'instrumentation de la section de capteurs accélérométriques a permis de mesurer simultanément les vitesses vibratoires verticales du champignon et du patin ainsi que les vitesses vibratoires latérales du champignon et de l'âme du rail. Les amplitudes et les phases des vitesses vibratoires des différentes parties du rail représentées sur la figure 3.10 permettent de distinguer cinq zones fréquentielles dans lesquelles on propose une représentation du comportement acoustique à partir de sources élémentaires (monopôle ou dipôle).

#### Proche de l'excitation ( $x \approx -0,6$ m et $x_0 = 0$ m)

En basses fréquences, dans la zone A sur la figure 3.10 comprise entre la résonance du ballast ( $f_{ballast} \approx 72$  Hz) et l'antirésonance du rail sur la traverse ( $f_{anti} \approx 230$  Hz), les mouvements verticaux en phase du champignon et du patin sont prépondérants par rapport aux mouvements latéraux de l'âme et du champignon. Le rail se déplace majoritairement comme un corps rigide dans la direction verticale ; ce comportement vibratoire est assimilé à un rayonnement acoustique de type monopolaire (modélisation schématique 1 sur la figure

3.9 - voir Fig. 3.14c).

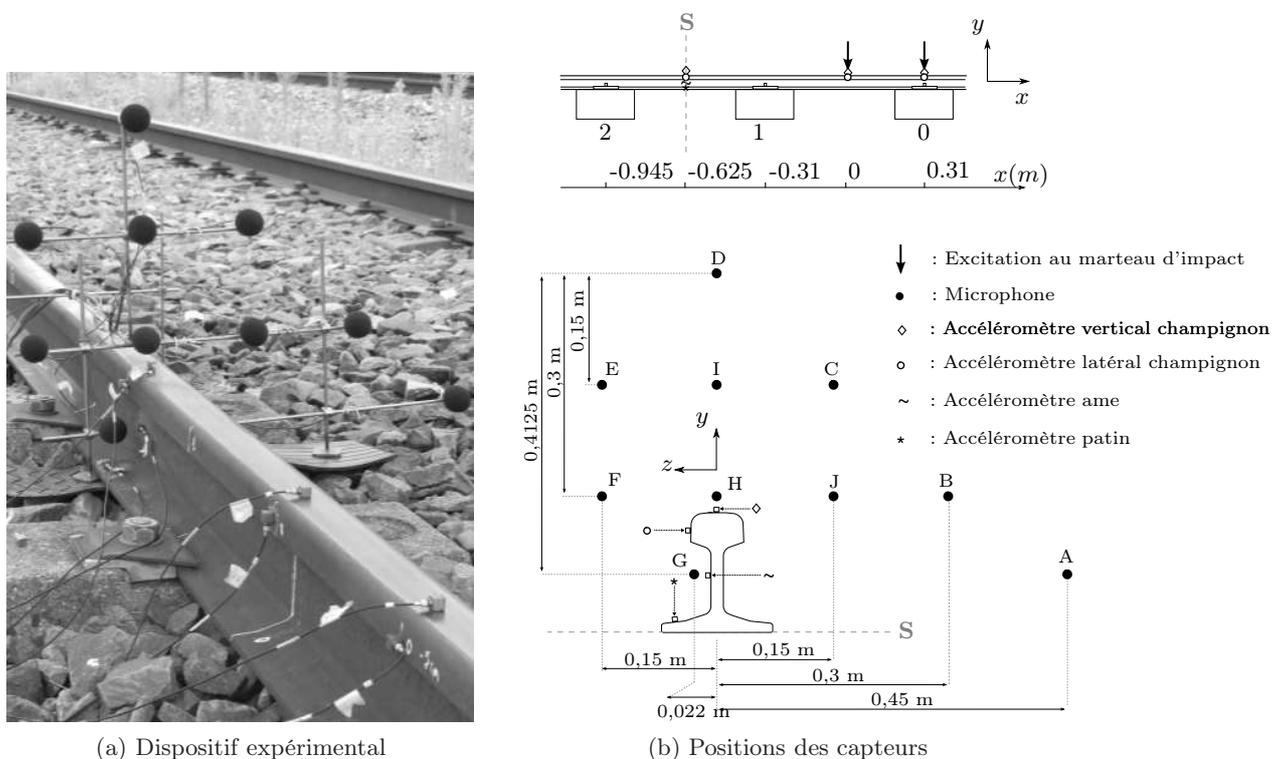


FIGURE 3.8 – Dispositif expérimental mis en oeuvre pour caractériser le comportement vibroacoustique de la section du rail.

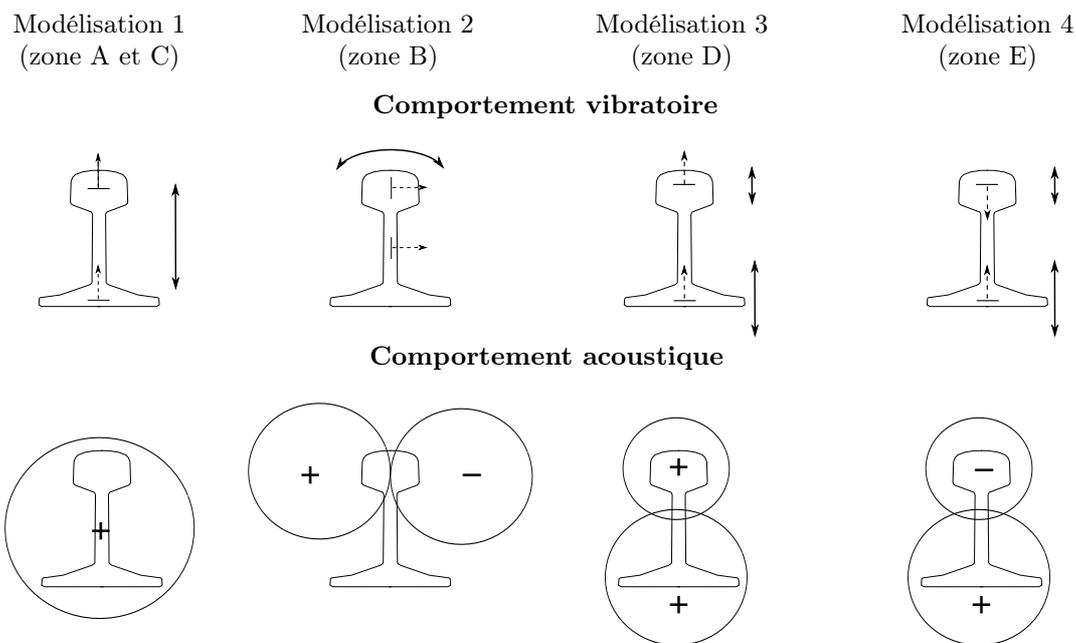


FIGURE 3.9 – Représentation schématiques des différents comportements vibratoires prépondérants et acoustique associés

La zone fréquentielle B est comprise entre la fréquence d'antirésonance et la résonance du

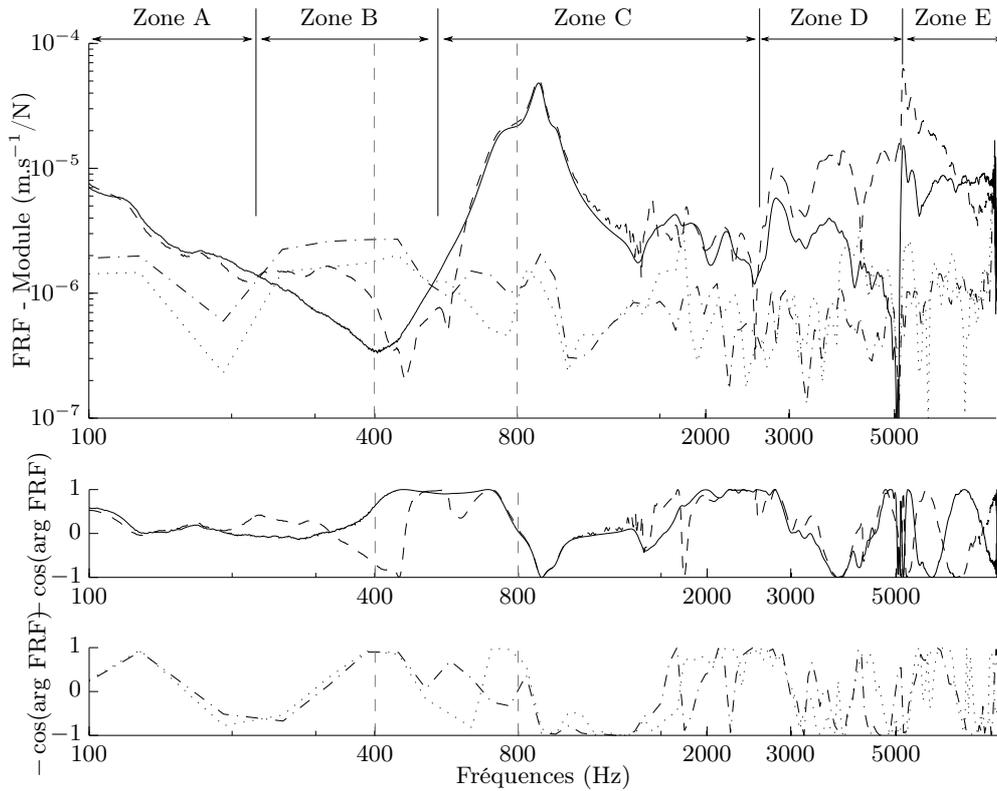


FIGURE 3.10 – Vitesse vibratoire de la section d’un rail U36 en  $x \approx -0.6$  m (point **b**) pour une excitation verticale en  $x_0=0$  : champignon vertical (—), champignon latéral (- · -), âme (···) et patin (- · - ·)

rail sur la semelle ( $f_{semelle} \approx 760$  Hz), gamme de fréquences dans laquelle l’atténuation des ondes verticales est élevée (cf. section 1.3.1.2). Dans cette zone les mouvements latéraux en phase du champignon et de l’âme sont supérieurs aux mouvements verticaux en opposition de phase du champignon et du patin (voir Fig. 3.10). Le rail oscille principalement de part et d’autre de son axe longitudinal; le comportement acoustique associé à ce comportement vibratoire est modélisé par un dipôle (modélisation 2 - voir Fig. 3.14c). La comparaison entre le rayonnement d’une ligne de sources dipolaires dont les débits sont fixés par le comportement vibratoire latéral et les mesures confirme la nature dipolaire du champ de pression rayonné par le rail pour ces fréquences (voir Fig. 3.12a). Les écarts entre les pressions calculées et mesurées de part et d’autre de la section<sup>16</sup> sont compris entre 0 et 2 dB<sup>17</sup> contre 2 et 8 dB pour une ligne de monopôles (voir Fig. 3.11a). En revanche le rayonnement dipolaire ne suffit pas à représenter le champ acoustique dans le plan vertical le long du rail (axe  $(x, y)$  perpendiculaire à la bande de roulement du rail). Ce plan correspond au plan du dipôle dans lequel par définition le champ acoustique dipolaire est nul (voir Fig. 3.14b et cf. Eq. ??). Or les mouvements verticaux du patin et du champignon provoquent toutefois un rayonnement acoustique dans cette direction. On propose alors de considérer les mouvements latéraux et verticaux, et donc de prendre en compte la géométrie de la section du rail, par une combinaison de monopôles et de dipôles. Le rayonnement acoustique du rail est représenté par le rayonnement de trois lignes de sources ponctuelles; deux lignes de monopôles représentent

16. Positions A, B, C, E, F, G, et J sur la figure 3.8b.

17. Hormis le point E

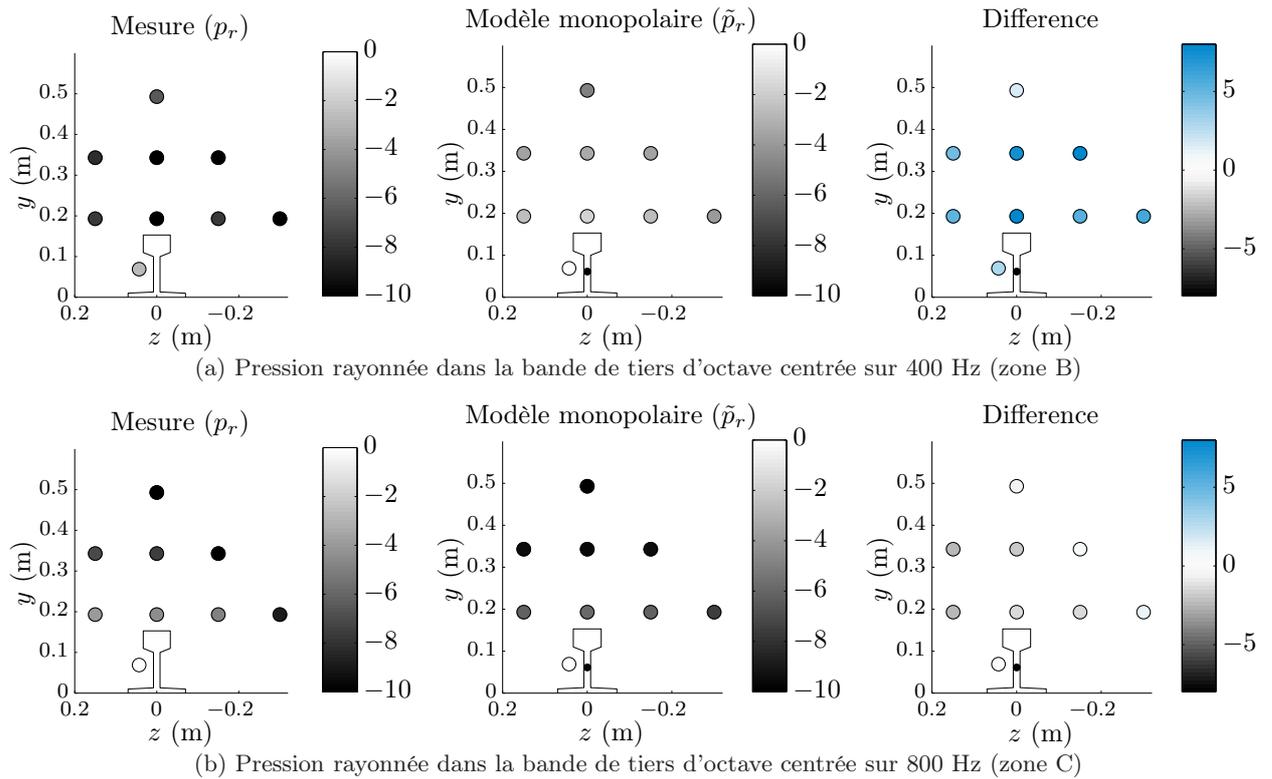


FIGURE 3.11 – Rayonnement acoustique de la section du rail modélisé par une ligne de monopôles. Observation en  $x \approx -0.6$  m (point **b**) pour une excitation verticale en  $x_0=0$  : aux positions de mesures B à J ( $\circ$ ) (cf. Fig. 3.8b). Le modèle considère les réflexions sur le sol pour  $\sigma_e=1.10^5$  Pa.s/m<sup>2</sup>. Nuancier du rayonnement [ $20 \log_{10}(\tilde{p}_r/\min(\tilde{p}_r, p_r))$ ] et échelle de couleur de la différence calcul/mesure [ $20 \log_{10}(\tilde{p}_r/p_r)$ ]

le rayonnement induit par le comportement vibratoire vertical du champignon et du patin (modélisation respectives 1 et 3,4 - voir Fig. 3.14c), et une ligne de dipôles modélise le rayonnement des mouvements latéraux du champignon et de l'âme (modélisation 2 - voir Fig. 3.14c). Cette approche permet une bonne représentation du champ acoustique de la section dans la zone fréquentielle B ; les différences calculs/mesures sont comprises entre -1 et 1 dB (hormis la position de mesure D).

Au voisinage de la fréquence de résonance du rail sur la semelle et de la fréquence *pinned* qui correspond à la zone C, on retrouve un comportement vibratoire similaire au comportement basses fréquences (zone A) ; les vitesses vibratoires (phases et amplitudes) du champignon et du patin sont confondues (voir Fig. 3.10). Le comportement acoustique est décrit par celui d'un monopôle (modélisation 1). Les vitesses vibratoires verticales sont fortement prépondérantes par rapport aux vitesses latérales (voir Fig. 3.10), si bien que le rayonnement induit par les mouvements latéraux du rail est négligeable. Le champ acoustique rayonné par une ligne de dipôles est effectivement très largement sous estimé (-10 dB) par rapport au champ mesuré (voir Fig. 3.12b). Les différences entre les pressions émises par une ligne de monopôles et les mesures sont cependant acceptables, entre -2 et 0 dB (voir Fig. 3.11b). Le modèle de rayonnement du rail constitué de trois lignes de sources ponctuelles permet également une bonne représentation du champ acoustique dans la zone C : les différences calculs/mesures sont comprises entre -1 et 1 dB (voir Fig. 3.13b). Dans cette zone fréquentielle, cette dernière approche n'améliore pas significativement l'estimation

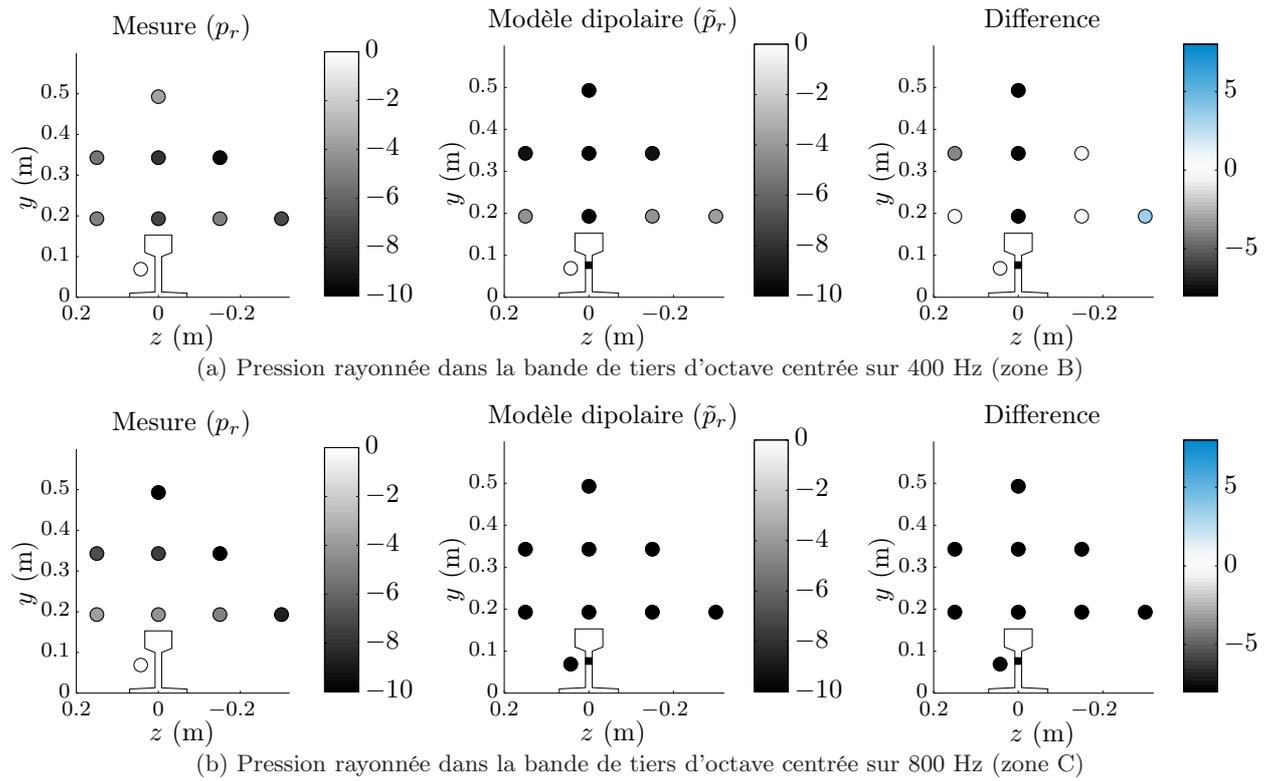


FIGURE 3.12 – Rayonnement acoustique de la section du rail modélisé par une ligne de dipôles. Voir légende de la figure 3.11.

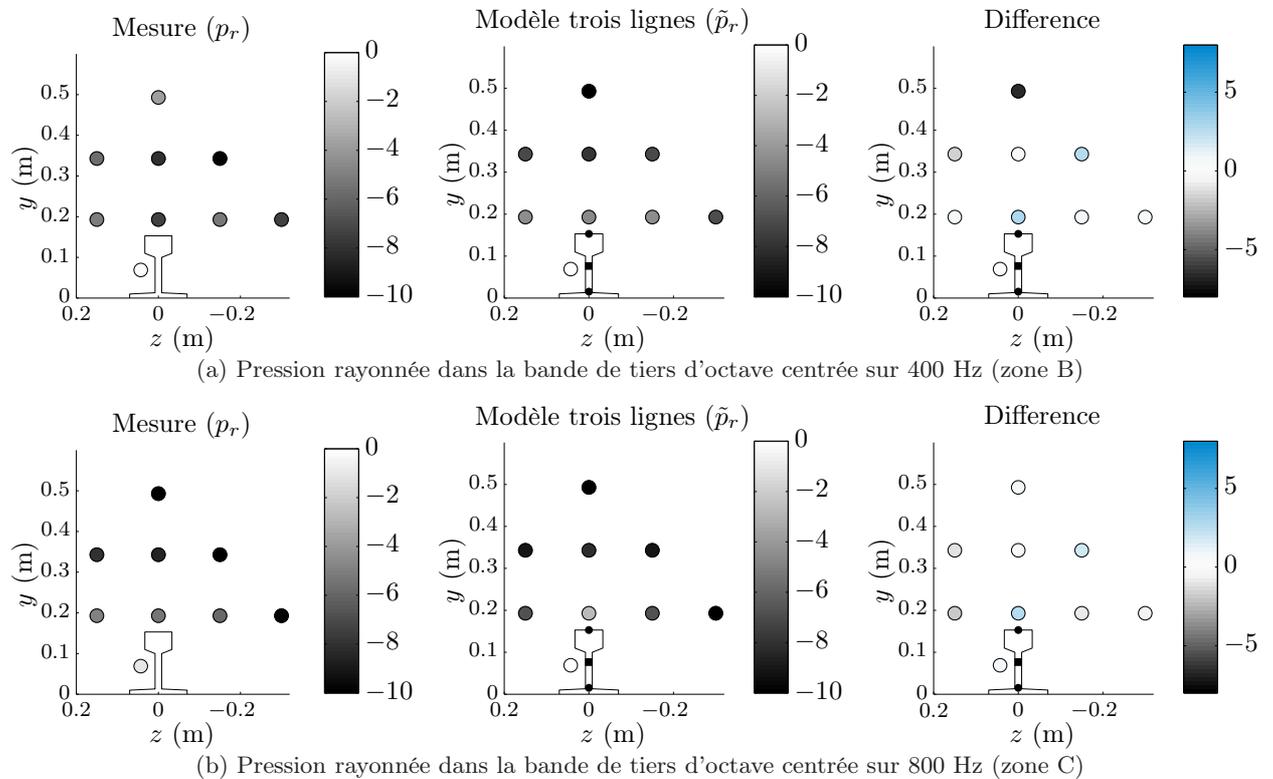


FIGURE 3.13 – Rayonnement acoustique de la section du rail modélisé par trois lignes de sources ponctuelles (monopôles (•) et dipôles (■)). Voir légende de la figure 3.11.

du champ acoustique, une seule ligne de monopôles suffit à estimer le champ acoustique rayonné par la section du rail.

En plus hautes fréquences, de la deuxième harmonique de la fréquence  $f_p$  jusqu'à la fréquence du mode de battement du patin (zone D), ce dernier apparaît progressivement et entraîne une plus forte vitesse vibratoire du patin par rapport à la vitesse du champignon. Les vitesses verticales sont toujours en phases et les mouvements latéraux du rail sont plus faibles que les mouvements verticaux (environ 7 fois plus faible). Au delà de la fréquence de résonance du patin (zone E), les phases des vitesses verticales du patin et du champignon deviennent opposées. On propose alors de représenter le comportement acoustique du rail en hautes fréquences par deux monopôles de hauteurs respectives égales à celles du patin et du champignon<sup>18</sup>. Chaque amplitude de ces monopôles est fixée par la vitesse vibratoire des parties du rail associées. Dans la zone D ( $f \approx [2500 \text{ } 5200]$  Hz) les monopôles sont en phase (modélisation 3) et au delà de la résonance du patin ( $f > 5200$  Hz), les monopôles sont en opposition de phase (modélisation 4).

#### Loi de l'excitation ( $x \approx -3,8$ m et $x_0=0$ m)

Le comportement vibratoire de la section à 3,8 m de l'excitation est identique au comportement à 0,6 m de l'excitation, aussi bien en termes d'amplitudes que de phases<sup>19</sup>. La description du comportement acoustique de la section établie à  $x=0,6$  m est donc valable à  $x=3,8$  m. Cependant, étant donné la plus faible atténuation des ondes vibratoires latérales dans le rail par rapport aux ondes verticales (voir Fig. 3.15a), la zone fréquentielle dans laquelle le rayonnement est assimilé à un dipôle (zone B) s'étend entre  $f_{anti}$  et  $f_{semelle}$  dès lors que l'on s'éloigne de la position d'excitation (voir Fig. 3.15b).

On a montré que la nature du champ acoustique rayonné par la section du rail dépend de son comportement vibratoire. Le modèle constitué de trois lignes de sources ponctuelles élémentaires monopolaires et dipolaires permet de représenter ces différents champs acoustiques (voir Fig. 3.14c). Il semble alors adapté à la modélisation du rayonnement acoustique du rail dans toute la gamme de fréquences considérées pour le bruit de roulement. Cependant cette représentation nécessite l'utilisation de modèles vibratoires plus complexes : les amplitudes et phases des sources dipolaires peuvent être calculées par la réponse croisée d'un modèle de poutre (cf. 3.2.1.2), mais ce choix conduit à une augmentation du nombre de paramètres mécaniques de la voie à connaître (voir Tab. 3.2). Le calcul des amplitudes complexes des monopôles représentatifs du rayonnement du patin implique l'utilisation d'un modèle considérant les modes de déformations de la section du rail, et plus particulièrement du mode de battement du patin (cf. section 1.3.1).

Une ligne de monopôles suffit à modéliser le rayonnement acoustique du rail lorsque les mouvements d'ensemble de celui-ci sont verticaux. Le modèle monopolaire est alors adapté aux zones fréquentielles A et C ; entre 100 et 250 Hz ainsi qu'entre 600 et 2500 Hz pour cette voie. Contrairement au modèle constitué de trois lignes de sources, il présente l'avantage de n'utiliser que la réponse vibratoire verticale du champignon du rail fidèlement obtenue par un

18. Cette modélisation schématique s'apparente à l'approche triple ligne dont le rayonnement de la ligne de dipôles est négligeable par rapport au rayonnement des lignes monopolaires.

19. Seule les phases des vitesses vibratoires verticales dans la zone B sont différentes ; en opposition à -0,6 m et en phases à 3,8 m.

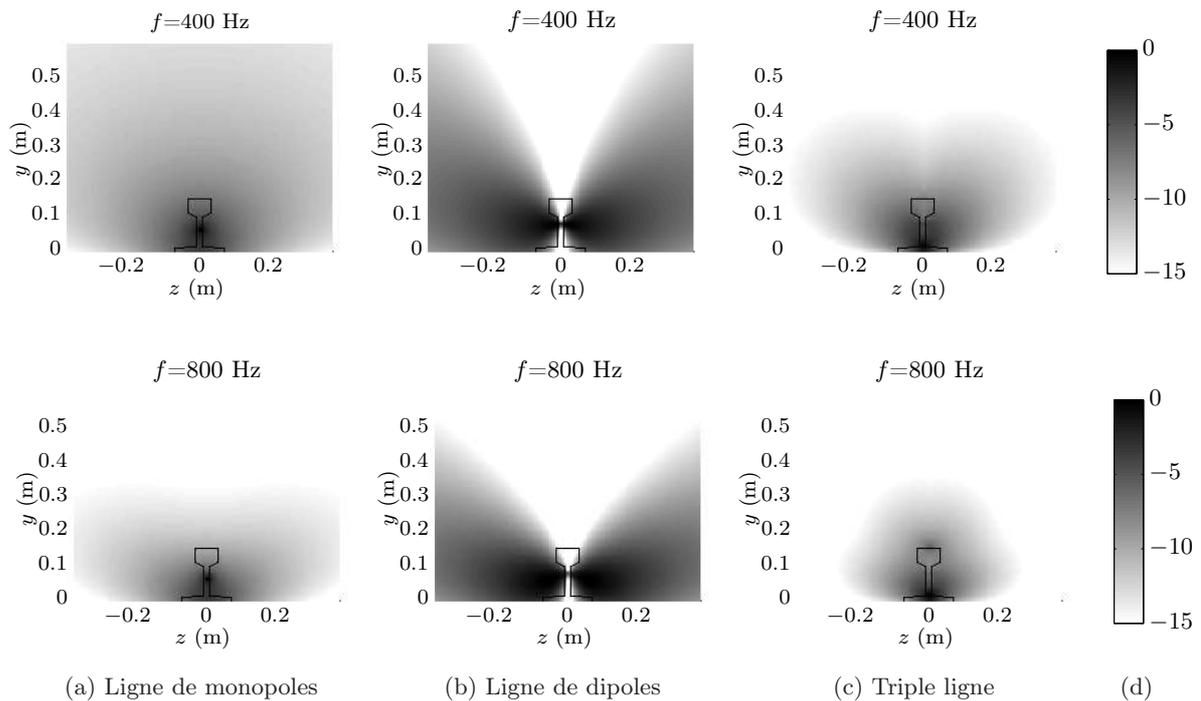


FIGURE 3.14 – Modélisation du rayonnement acoustique de la section du rail.

modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques. Etant donné la difficulté à estimer avec justesse la vitesse vibratoire croisée du champignon<sup>20</sup> et le fait que la modélisation du comportement vibratoire du patin n'est pas développée<sup>21</sup>, seul le modèle de rayonnement monopolaire est utilisé dans la suite de ce chapitre. Ses capacités à estimer la « directivité longitudinale » et la dépendance fréquentielle du champ acoustique émis par le rail sont vérifiées dans les sections suivantes.

### Hauteur de la ligne de sources ponctuelles

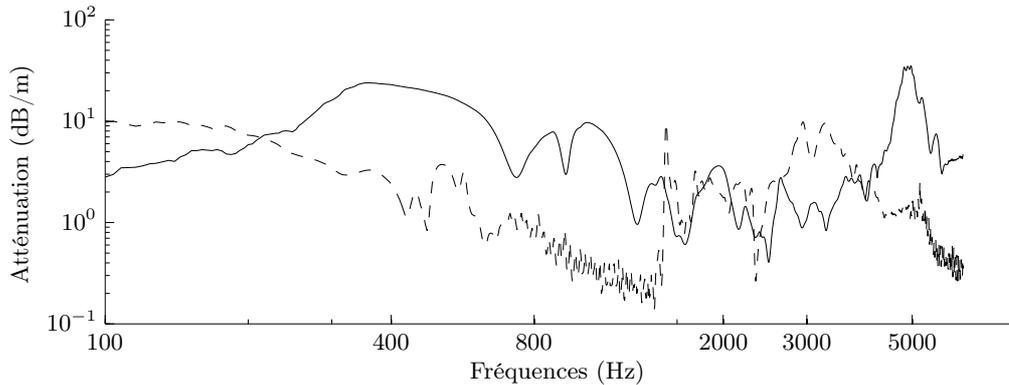
La hauteur de la ligne de sources ponctuelles monopolaire fixée par le coefficient  $\alpha$ , introduit dans la section 3.3.1 (voir figure 3.6), résulte d'une minimisation de l'écart entre les pressions quadratiques spatialement moyennées mesurée et calculée dans le plan transversal<sup>22</sup>. Dans les gammes de fréquences A et C dans lesquelles le modèle de sources monopolaire est considéré valide, le coefficient optimisé de la hauteur de la ligne de sources élémentaires est de 0,4, soit proche de la ligne médiane du rail. Ce résultat concorde avec la modélisation 1 du champ acoustique proposée (voir Fig. 3.9).

20. Les amplitudes complexes des dipôles utilisées pour le modèle dipolaire simple ligne ou par les modèles triple ligne sont issues de la multiplication des réponses spatiales verticales du modèle de poutre par le rapport complexe entre les vitesses vibratoires du champignon dans les directions latérales et verticales mesurées en  $x=0.6$  m pour une force appliquée verticalement. Ce rapport n'est valide qu'à la position  $x$  de mesure et ne peut pas être utilisé pour modéliser le comportement vibratoire croisé le long du rail.

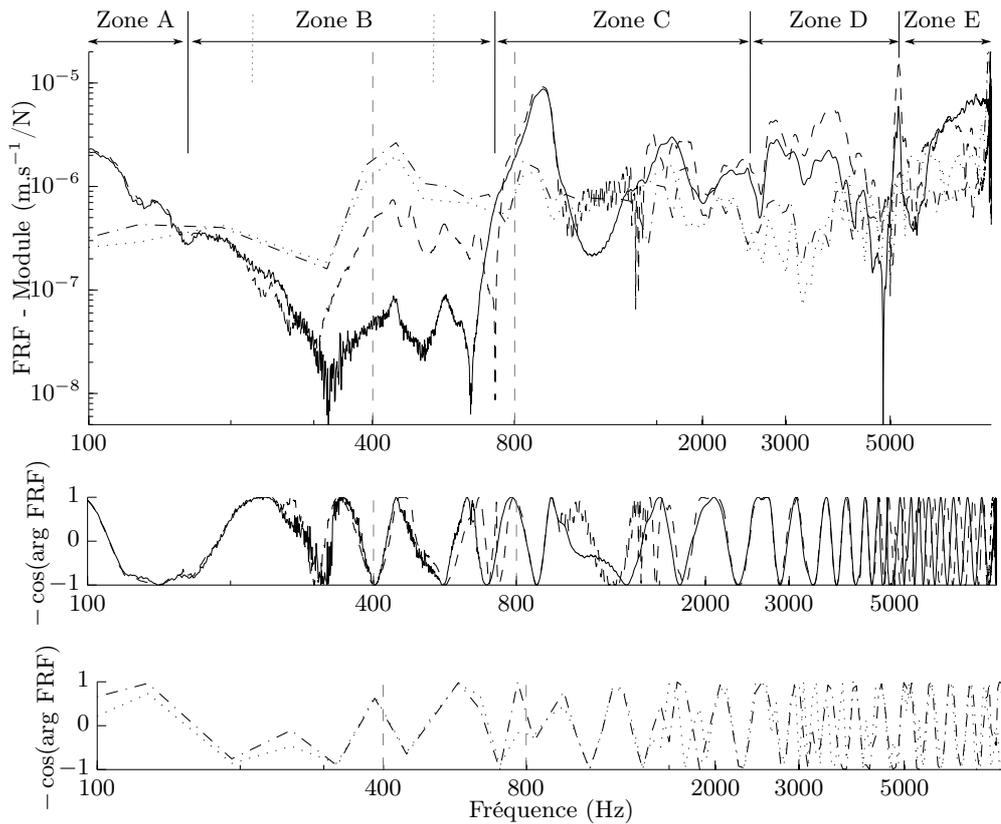
21. Les amplitudes complexes des monopôles qui représentent le rayonnement du patin sont calculées à partir de la multiplication des réponses spatiales verticales du modèle de poutre et du rapport complexe (la phase est considéré notamment dans la zone B) entre les vitesses vibratoires verticales du patin et du champignon mesurées en  $x=0.6$  m. Tout comme pour la ligne dipolaire, ce rapport n'est valide qu'à la position de la mesure.

22. Aux positions de mesures A à J sur la figure 3.8b.

*Remarque :* dans le cas du modèle triple ligne, les sources son naturellement placées aux hauteurs respectives des parties du rail qu'elles représentent. Une ligne de monopôles est située au centre de l'épaisseur moyenne du patin, une ligne de dipôles est placée au centre de la hauteur de l'âme et de champignon, et une dernière ligne de monopôles est localisée sur la tête du champignon (bande de roulement du rail) (voir Fig. 3.13).



(a) Taux de décroissance verticale (—) et laterale (---) le long du rail (cf. annexe B.3)



(b) Vitesse vibratoire de la section d'un rail U36 en  $x \approx -3.8$  m (point g) pour une excitation verticale en  $x_0=0$  : champignon vertical (—), champignon latéral (- - -), âme ( $\cdots$ ) et patin (- · -). Le repère de la zone B pour  $x=0,6$  m est indiqué par les pointillés gris.

FIGURE 3.15 – Elargissement de la zone fréquentielle B associée au comportement dipolaire par rapport à la distance entre le point de réception acoustique et le point d'excitation vibratoire.

## 3.3.2.2 « Directivité » longitudinale



FIGURE 3.16 – Dispositif expérimental mis en oeuvre pour caractériser le comportement vibroacoustique d'un rail dans sa longueur.

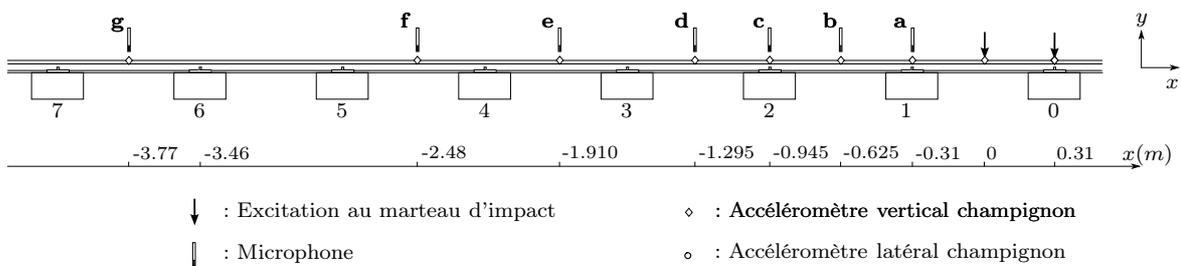


FIGURE 3.17 – Positions de mesures microphoniques et accélérométriques verticales le long du rail

Lors de la mesure des réponses vibratoires le long du rail, le rayonnement acoustique a également été mesuré en champ proche (voir Fig 3.16). Les microphones étaient situés à l'aplomb de la bande de roulement du rail au droit des positions de mesures accélérométriques (voir Fig 3.17 et cf. section 3.2). Les résultats obtenus par le modèle de rayonnement du rail et les mesures sont tracés sur la figure 3.18. En basses fréquences ( $f \approx 200$  Hz), la bonne coïncidence entre les pressions calculées et mesurées indique que l'hypothèse d'un rayonnement monopolaire dans la zone A est valide. En revanche, à 400 Hz les estimations et les mesures divergent, particulièrement aux positions **d** et **e**. L'approximation du rayonnement dipolaire autour de cette fréquence n'est pas vérifiée<sup>23</sup> mais la modélisation du champ acoustique par celui d'une ligne de monopôles est insuffisante (cf Fig. 3.11a). Pour les fréquences comprises dans la zone C, la pression estimée est proche de la pression mesurée (voir Fig. 3.18c à 3.18e). Néanmoins comme pour le comportement vibratoire, à la fréquence particulière  $f_p$  l'estimation est dégradée. Il faut noter que pour ces trois fréquences, les écarts observés entre le modèle acoustique et les mesures de pression sont identiques aux écarts entre le modèle vibratoire et les mesures vibratoires (voir Fig. 3.5c et 3.5e). En champ proche, la définition des amplitudes et phases des sources du modèle acoustique basée sur l'hypothèse de proportionnalité entre la pression et la vitesse vibratoire est donc vérifiée. En plus hautes fréquences, le bon accord entre la vibration mesurée et calculée (voir Fig 3.5f) ne suffit plus à estimer la pression avec justesse (voir Fig .3.18f) : le modèle de rayonnement monopolaire atteint ses

23. Et ne peut l'être puisque les microphones sont situés dans le plan dipolaire.

limites. Le rayonnement plus directif et les amplitudes vibratoires verticales, prépondérantes mais différentes entre le patin et le champignon, doivent être considérées. La modélisation par un doublet de monopôles proposée sur la figure 3.9 (modélisations 3 et 4) paraît plus adaptée en hautes fréquences. Toutefois, dans les gammes de fréquences A et C, le modèle de rayonnement du rail composé de sources ponctuelles monopolaires equiréparties en son long est justifié. Celui-ci permet une bonne représentation du champ acoustique spatial le long du rail dans le plan vertical. Afin de vérifier les conclusions émises à partir de l'analyse du comportement acoustique spatial et ainsi valider l'utilisation et les limitations du modèle de rayonnement, une analyse fréquentielle du champ de pression est effectuée dans la section suivante.

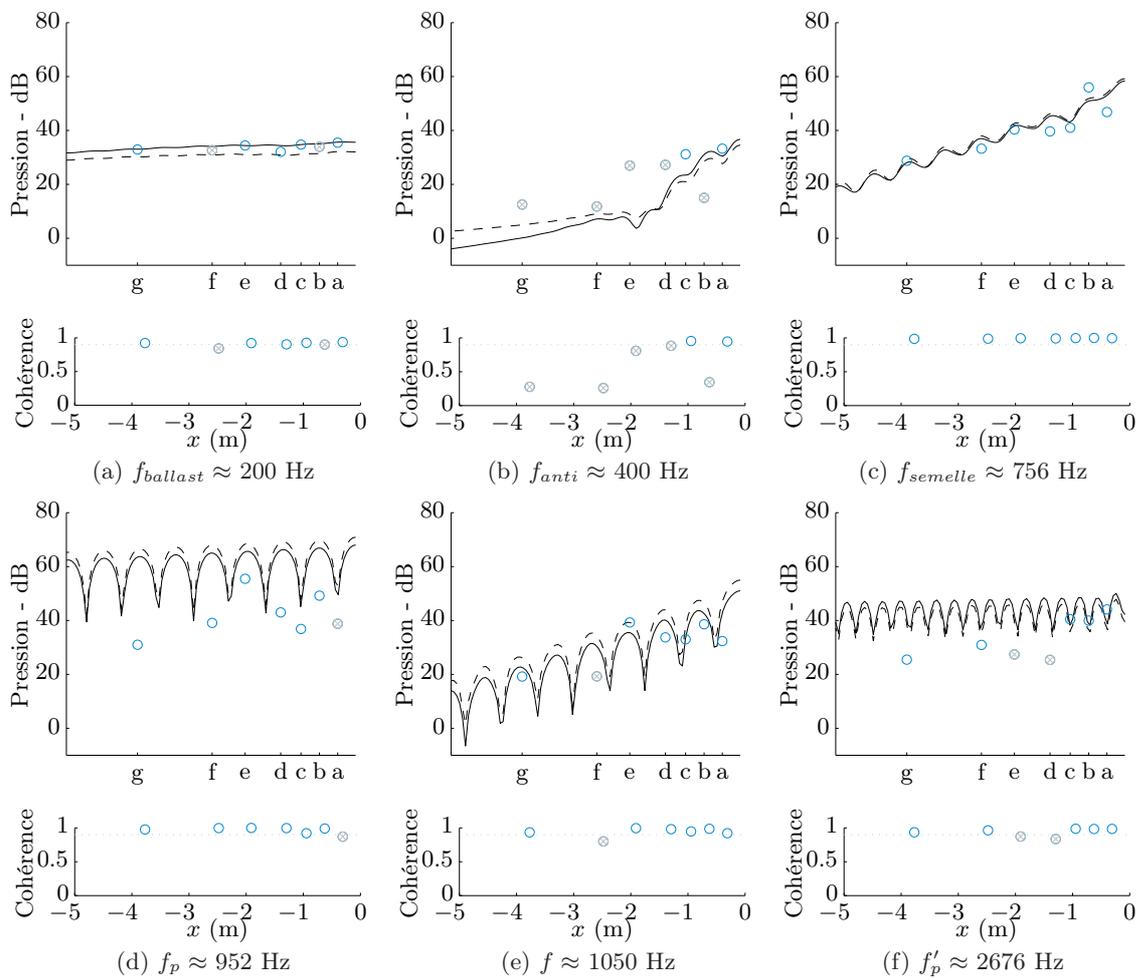


FIGURE 3.18 – Pression acoustique le long du rail (cf. Fig. 3.17) ; modèle avec effet de sol (—) et sans effet de sol (---) pour  $\alpha=0,4$ , mesure verticale (o) ; référence  $2.10^{-5}$  Pa/N. Excitation verticale appliquée à mi-distance entre deux traverses ( $x_0=0$ ). Cohérence entre l'excitation et la pression mesurée inférieure à 0,9 (x).

### 3.3.3 Dépendance fréquentielle

Les pressions acoustiques mesurées et estimées à environ deux mètres<sup>24</sup> de l'excitation sont représentées sur la figure 3.19. En basses fréquences, autour de 200 Hz, gamme de fréquence dans laquelle la cohérence entre la pression mesurée et l'excitation tend vers 0,9 la pression calculée est en accord avec la mesure. Dans la zone B, les mesures de pression sont fortement incohérentes avec l'excitation mais confirme que la représentation monopolaire n'est pas pertinente dans cette zone fréquentielle abordée dans la section précédente (voir Fig. 3.18b). Autour de la fréquence de résonance du rail sur la semelle et de la fréquence *pinned pinned* (zone C), l'amplitude de pression est maximale. Dans cette gamme de fréquence où la cohérence est proche<sup>25</sup> de 1, la pression calculée concorde très nettement avec la pression mesurée<sup>26</sup>. En hautes fréquences la surestimation de l'amplitude vibratoire obtenue par le modèle de poutre (donc des amplitudes des sources ponctuelles) entraîne un niveau acoustique trop élevé par rapport à la mesure (voir Fig. 3.3 et section 3.2). Les bonnes coïncidences entre les résultats expérimentaux et numériques dans les zones fréquentielles A et C confirment la pertinence d'une représentation du comportement acoustique du rail par celui d'un monopôle. L'utilisation du modèle de sources ponctuelles monopolaires est alors justifiée dans ces gammes de fréquences.

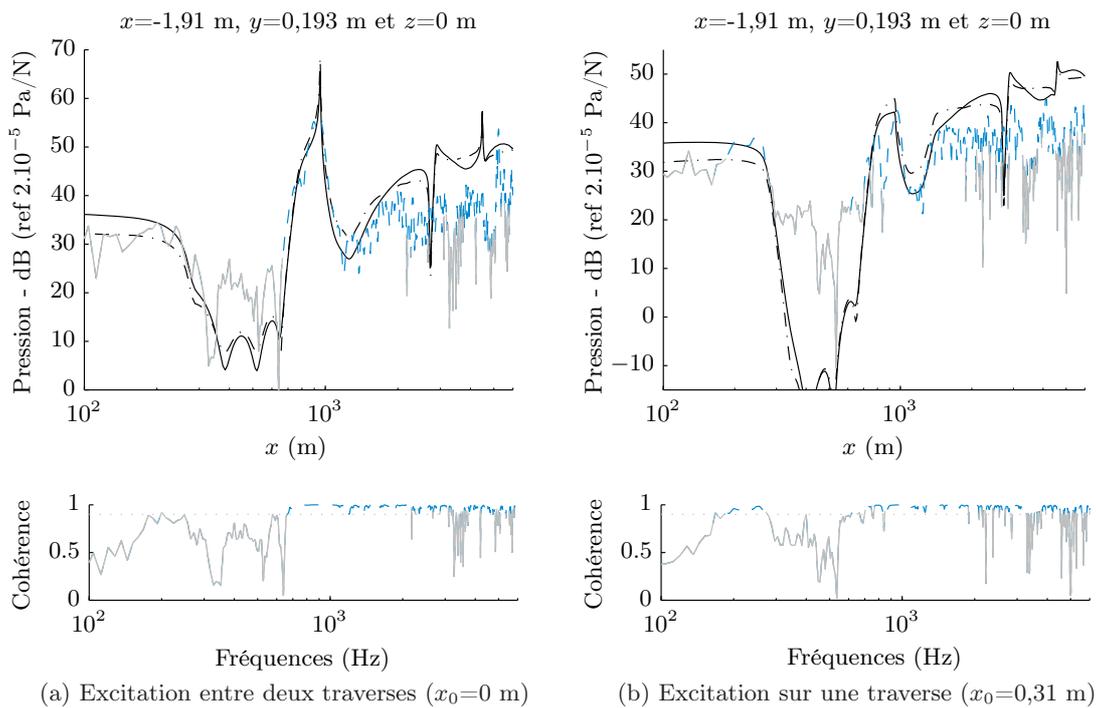


FIGURE 3.19 – Rayonnement acoustique du rail à la position **e** : modèle avec effet de sol (—) et sans effet de sol (- - -) pour  $\alpha=0,4$ , mesure verticale (- · -).

24. Position **e** sur la figure 3.17; elle se situe entre les positions **a** et **g** étudiées précédemment (cf. section 3.3.2.1).

25. Ce qui assure la validité des mesures.

26. Seule le champ acoustique au comportement particulier du rail lié à la proximité de  $f_{semelle}$  et  $f_p$  propre à la voie étudiée (qui n'est pas modélisé par le modèle de poutre) n'est pas correctement estimé, plus particulièrement pour une excitation sur une traverse (voir Fig. 3.19b).

### 3.3.4 Conclusions sur le rayonnement acoustique du rail

Le rayonnement acoustique d'un rail à la fréquence  $f$  peut être approximativement représenté par (voir Fig. 3.9) :

- un monopôle en basses fréquences, entre la résonance de l'ensemble de la voie sur le ballast et l'anti-résonance du rail ( $f_{ballast} < f < f_{anti} \Leftrightarrow$  modélisation 1),
- un dipôle orienté horizontalement entre la fréquence d'anti-résonance et de la résonance du rail sur la semelle ( $f_{anti} < f < f_{semelle} \Leftrightarrow$  modélisation 2),
- un monopôle autour de la fréquence de résonance du rail sur la semelle et de la fréquence *pinned pinned* ( $f_{semelle} < f < f'_p \Leftrightarrow$  modélisation 1),
- une paire de monopôles verticaux en phase entre la deuxième harmonique de la fréquence *pinned pinned* et la résonance du patin ( $f'_p < f < f_{patin} \Leftrightarrow$  modélisation 3),
- et une paire de monopôles verticaux en oppositions de phase en plus hautes fréquences ( $f > f_{patin} \Leftrightarrow$  modélisation 4).

Toutes ces représentations peuvent être réalisées par un modèle de rayonnement composé de trois lignes de sources ponctuelles représentatives des comportements acoustiques du patin, de l'âme et du champignon. En plus de la prise en compte du champ acoustique spatial le long du rail inhérent au modèle de sources équiréparties sur son axe, cette nouvelle proposition de modélisation du rayonnement prend en compte la géométrie de la section : elle semble ainsi bien adaptée à la détermination du champ acoustique tridimensionnel sur toute la gamme de fréquence considérée pour le bruit de roulement. La détermination de l'amplitude et de la phase de chacune des sources ponctuelles élémentaires du modèle triple ligne nécessite cependant la modélisation, dans le cas d'une excitation verticale, du comportement vibratoire vertical du champignon et du patin ainsi que de la modélisation du comportement latéral du champignon et/ou de l'âme.

Un modèle composé d'une simple ligne de sources monopolaires permet néanmoins de déterminer fidèlement la pression acoustique rayonnée par le rail en basses et moyennes fréquences (zone A et C). Il présente l'avantage de faire appel à un nombre de paramètres très inférieur au nombre de paramètres nécessaires au modèle triple ligne (du fait notamment des différents modèles vibratoires analytiques et/ou numériques, mais également des données géométriques). Le modèle monopolaire est donc plus adapté aux calculs de rayonnements acoustiques d'un grand nombre de voies gabarits utiles à la méthode de discrimination du type de voie.

## 3.4 De la pression sonore à la mobilité

Nous avons montré qu'il est possible de déterminer la pression acoustique émise par le rail à partir de son modèle vibratoire. Observons maintenant l'effet des variations du comportement vibratoire sur le champ acoustique afin de déterminer la méthode utilisée pour discriminer le comportement vibratoire de la voie à partir de son rayonnement acoustique.

### 3.4.1 Effet des variations du comportement vibratoire sur le champ acoustique

Considérons un ensemble de voies de type de pose (armement) différents, autrement dit de comportements vibratoires différents (cf. section 1.3.1.3). Chacune des voies est constituée

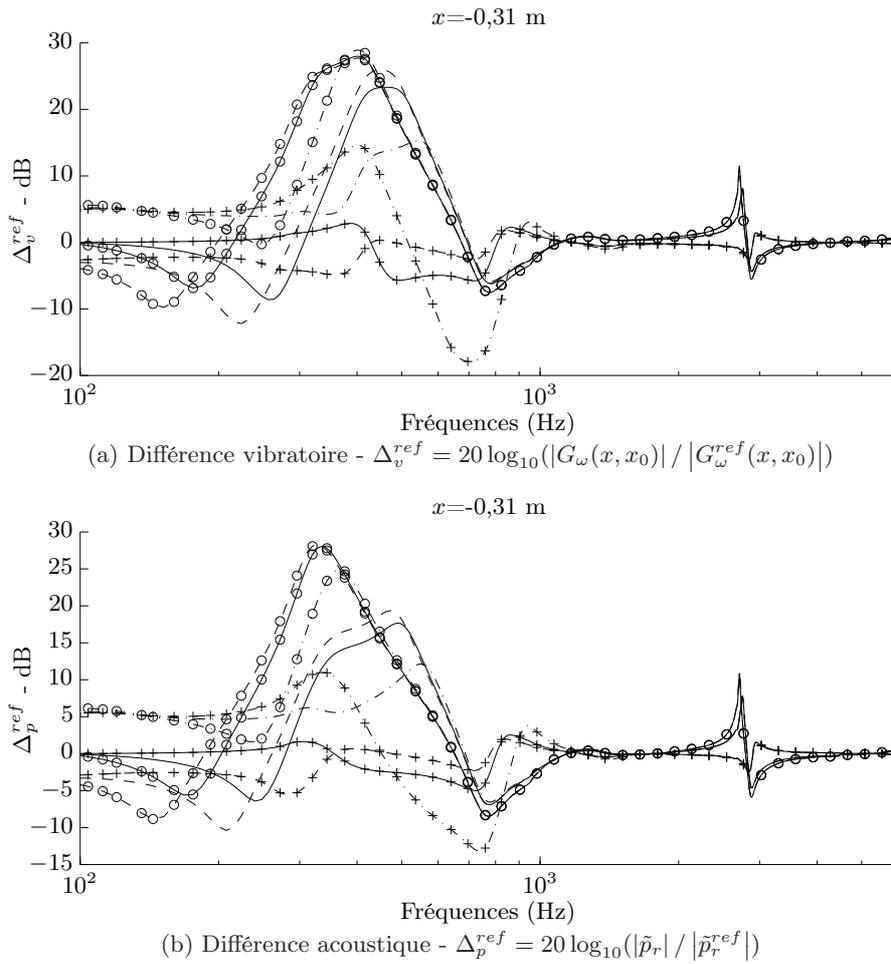


FIGURE 3.20 – Variation de la vitesse vibratoire et de la pression rayonnée par le rail : voie souple ( $\circ$ ), voie intermédiaire (pas de symbole) et voie raide ( $+$ ) pour trois types de traverses ; bois ( $- \cdot -$ ), béton bibloc ( $\text{—}$ ) et béton monobloc ( $- - -$ ) (voir Tab. 1.3). Excitation verticale appliquée en  $x_0=0$  m à mi-distance entre deux traverses. Les paramètres de la voie de référence sont donnée dans le tableau 3.1.

d'un rail U36, l'effet de la masse du rail n'est pas considéré dans cette étude (voir Fig. 1.15c). Etant donné que le paramètre le plus influent sur le comportement vibratoire est la semelle sous rail [Vincent 1996], trois raideurs de semelles sont utilisées pour représenter trois types de voies : raide ( $s_p=800$  MN/m), intermédiaire ( $s_p=250$  MN/m) et souple ( $s_p=100$  MN/m). Pour chaque type de voie, trois sortes de traverses sont considérées : bois (100 kg), bibloc en béton (208 kg)<sup>27</sup> et monobloc en béton (280 kg). Les autres paramètres sont donnés dans le tableau 1.3 (valeurs en caractères gras). Les 9 voies qui constituent cet ensemble représentent des voies qu'il est possible de rencontrer sur les réseaux ferroviaires français et européens. La pression acoustique et la vitesse vibratoire de chacune des voies sont respectivement calculées à partir du modèle de rayonnement composé d'une ligne de monopôles dont les amplitudes et phases sont fixées par le modèle vibratoire de poutre de Timoshenko sur supports périodiques. Les différences entre les vitesses vibratoires de ces voies et celle de la voie étudiée (paramètres du tableau 3.1) tracées sur la figure 3.20a montrent que le type de pose de la voie entraîne de fortes variations du comportement vibratoire, comme

27. Cette valeur de traverse bibloc correspond à celle de la voie étudiée.

précisé dans la section 1.3.1.3 du chapitre 1. Ces variations particulièrement notables au niveau des différentes fréquences caractéristiques des voies gabarits (par rapport à la voie de référence) permettent de distinguer si le comportement vibratoire de la voie de référence est semblable ou dissemblable à celui d'une voie gabarit. Les différences tracées sur la figure 3.20a traduisent cette différenciation. En effet, les faibles différences entre les niveaux vibratoires des voies gabarits composées de semelles raides et de traverses bibloc (+—) ou monobloc (+- -) et la voie de référence indiquent que celle-ci est raide et qu'elle n'est pas équipée de traverses en bois. Les différences des champ de pression permettent cette même distinction (voir Fig. 3.20b). La comparaison de champs de pression de voies de comportements vibratoires connus par rapport à celui d'une voie de référence (que l'on peu considérer comme inconnue), permet alors d'en déterminer son comportement vibratoire (raide, souple, matériau de la traverse, etc...).

Lors du roulage, la réponse vibratoire de la voie (et donc de la pression acoustique) sera, en plus du type de pose, dépendant de l'effort d'interaction causé par la rugosité que l'on cherche à déterminer. On propose alors d'identifier dans un premier temps le comportement vibratoire de la voie par une méthode qui, en utilisant plusieurs mesures microphoniques le long du rail, permet de s'affranchir de l'excitation. Cette méthode est présentée dans la section suivante. À partir du type de voie obtenue par cette méthode de discrimination du type de voie, la mobilité, la vitesse de vibration au point de contact et l'impédance acoustique utiles à la détermination de la rugosité pourront être ensuite estimées.

### 3.4.2 Pouvoir discriminant de la « signature acoustique » de la voie

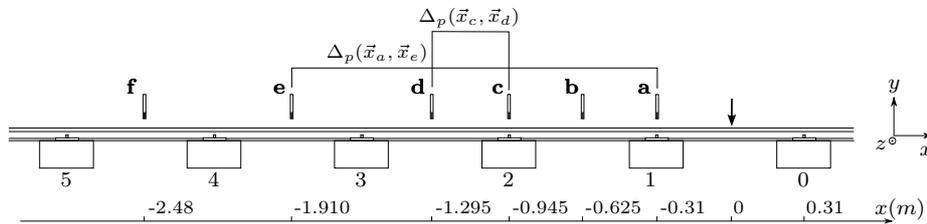


FIGURE 3.21 – Positions microphoniques ( $y \approx -0,2$  m et  $z=0$  m). Voir légende de la figure 3.17.

La pression relative entre deux récepteurs répartis le long du rail (voir Fig. 3.1) est considérée comme une « signature acoustique » du type de voie indépendante de l'amplitude absolue du rayonnement et du spectre de l'excitation (rugosité). Une « signature acoustique » est définie en décibels telle que :

$$\tilde{\Delta}_p(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta) = 20 \log_{10} \left( \frac{|\tilde{p}_r(\vec{x}_\beta)|}{|\tilde{p}_r(\vec{x}_\alpha)|} \right) \frac{1}{|x_\alpha - x_\beta|}, \quad (3.9)$$

où  $\tilde{p}_r$  est la pression calculée par l'équation (Eq. 3.2) du modèle de rayonnement du rail en chacune des positions microphoniques le long du rail définies par les vecteurs  $\vec{x}_\alpha$  et  $\vec{x}_\beta$ . Les signatures des voies gabarits présentées dans la section précédente sont calculées et tracées sur la figure 3.22 pour deux paires de microphones illustrés sur la figure 3.21. Les variations des fréquences caractéristiques liées aux comportements vibratoires des différents types de voies (voir Fig. 3.20) entraînent des singularités à des fréquences différentes qui donnent au champ acoustique relatif un pouvoir discriminant (voir Fig. 3.22). Néanmoins l'allure de la

pression relative dépend des positions  $\vec{x}_\alpha$  et  $\vec{x}_\beta$  le long du rail. On observe que pour deux points proches tel que **c** et **d** ( $|x_c - x_d| \approx 0,3$  m, voir Fig. 3.22b), la signature acoustique est moins discriminante que pour deux points éloignés tels que **a** et **e** ( $|x_a - x_e| \approx 1,6$  m, voir Fig. 3.22a). La capacité des signatures acoustiques à discriminer le type de voie à partir de pressions mesurées en fonction des positions microphoniques est vérifiée dans la section suivante.

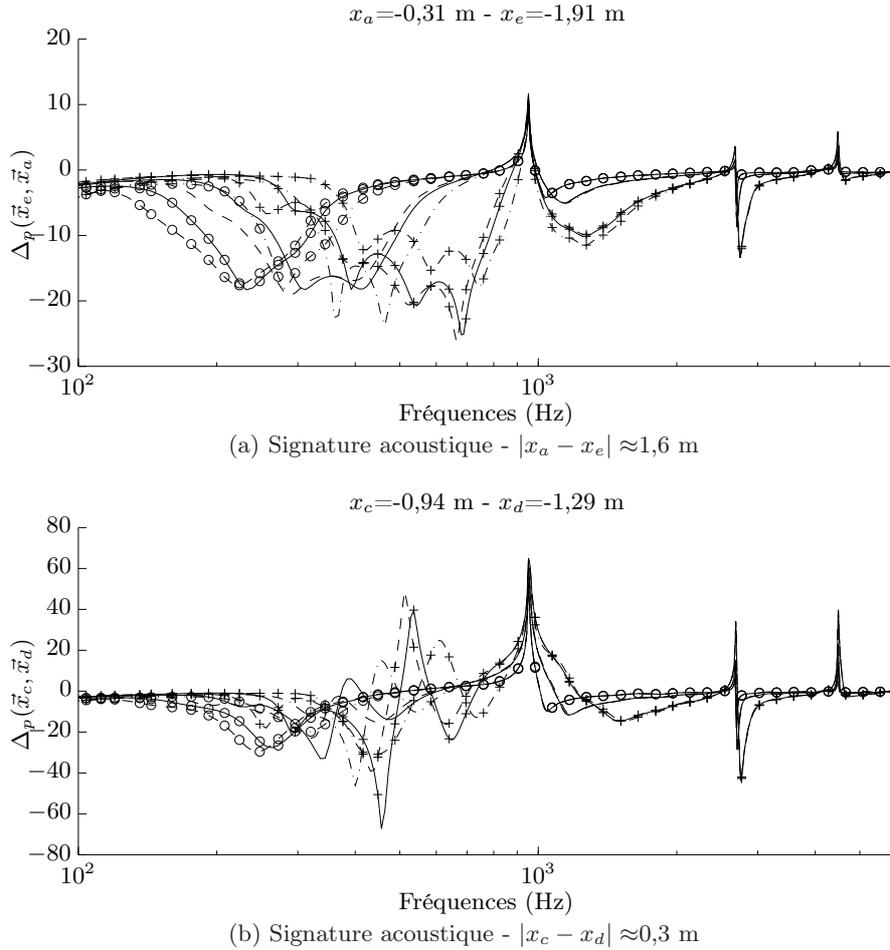


FIGURE 3.22 – Pression relative (signature acoustique) le long du rail en fonction du type de voie des doublets microphoniques représentés sur la figure 3.21, voir légende de la figure 3.20

### 3.4.3 Identification expérimentale

L'outil mathématique utilisé pour comparer une signature acoustique calculée  $\tilde{\Delta}_p^i$  et la signature mesurée  $\Delta_p^j$  est le coefficient de corrélation tel que :

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (3.10)$$

où  $\sigma_{ij}$  est la covariance entre les deux signatures acoustiques définie par

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \tilde{\Delta}_p^i(k) - \bar{\tilde{\Delta}}_p^i \right) \left( \Delta_p^j(k) - \bar{\Delta}_p^j \right), \quad (3.11)$$

où  $N$  est la longueur du signal.  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  sont les écarts-types des signatures acoustiques donnés par

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \Delta_p^i(k) - \bar{\Delta}_p^i \right)^2}, \quad (3.12)$$

où le symbole  $(\bar{\quad})$  indique la moyenne arithmétique. Le coefficient de corrélation linéaire est calculé entre chaque signature acoustique des voies gabarits et la signature mesurée. Les signatures acoustiques ne sont calculées et mesurées qu'aux fréquences comprises dans la gamme de validité du modèle de rayonnement acoustique du rail basé sur une ligne de monopôles : dans les zones fréquentielles A et C (voir Fig. 3.10 et 3.23). Pour chaque doublet microphonique, la voie gabarit pour laquelle le coefficient de corrélation est maximal est associée à la voie dont le rayonnement acoustique est mesuré. Cette étape est effectuée pour un ensemble de 21 doublets microphoniques décrits par les positions  $\vec{x}_\alpha$  et  $\vec{x}_\beta$  de mesures indiquées sur la figure 3.17. Les doublets microphoniques qui permettent l'identification du type de la voie mesurée (paramètres mécaniques) sont reportés dans le tableau 3.3. Rappelons que la voie mesurée est composée de semelle sous rail raide et de traverses bibloc en béton.

| Identifications                            | Doublet microphoniques   | Proportion <sup>1</sup> (%) |
|--|--|-----------------------------|
| de la raideur de la semelle <sup>2</sup> : | a-b, a-c, a-d, a-e, a-f, a-g, b-d, b-f, b-g, c-g, d-e, d-g, e-g, f-g | 66                          |
| du matériau de la traverse <sup>3</sup> :  | a-c, a-d, a-e, a-f, a-g, c-g, d-e, d-g, e-g                          | 42                          |
| du type de traverse <sup>4</sup> :         | e-f, e-g   | 5                           |

TABLE 3.3 – Identification des paramètres mécaniques de la voie au moyen de la signature acoustique mesurée par un doublet microphonique. 1. Proportion de doublets microphoniques capables d'identifier la voie parmi l'ensemble des doublets utilisés (21), 2. Entre souple, intermédiaire ou raide, 3. Entre bois ou béton, 4. Entre bibloc ou monobloc (cf. Tab. 1.3).

La raideur de la semelle sous rail la plus proche (800 MN/m) de celle de la voie étudiée (650 MN/m) est identifiée pour la plupart des doublets microphoniques (plus de 60 %). La raideur de la semelle influence le comportement vibratoire de la voie au voisinage de la fréquence de résonance du rail sur la semelle  $f_{semelle}$  (cf. section 1.3.1.3 et voir Fig. 3.20), ce qui correspond à la zone fréquentielle C dans laquelle le rayonnement du rail est maximal (cf. section 3.19). Dans cette gamme de fréquence, les signatures acoustiques, et plus particulièrement pour les doublets d'espacement inter-microphoniques supérieur à une travée, sont discriminantes (voir. Fig. 3.22) et permettent de déterminer la raideur de la semelle. L'allure de la signature acoustique calculée qui correspond à la voie identifiée par deux positions microphoniques éloignées (a-e) est effectivement semblable à l'allure de la signature mesurée au même positions, alors que les signatures d'autres types de voie diffèrent (voir Fig. 3.23a). La signature mesurée étant chahutée, les plus faibles dissemblances entre les signatures des différentes voies et la faible distance inter-microphonique du doublet (1/2 travée  $\approx 0,3$  m) ne permettent pas d'identifier les bons paramètres (voir Fig 3.23b). Pour l'exemple de cette dernière figure, la raideur de la semelle et la traverses identifiées sont respectivement souple et bois (au lieu de raide et béton).

La masse de la traverse qui dépend particulièrement du matériau qui la constitue, agit sur la fréquence de résonance du ballast en basses fréquences (zone fréquentielle A), mais également sur la fréquence  $f_{semelle}$  (voir Fig. 1.15a dans la section 1.3.1.3). Les différences

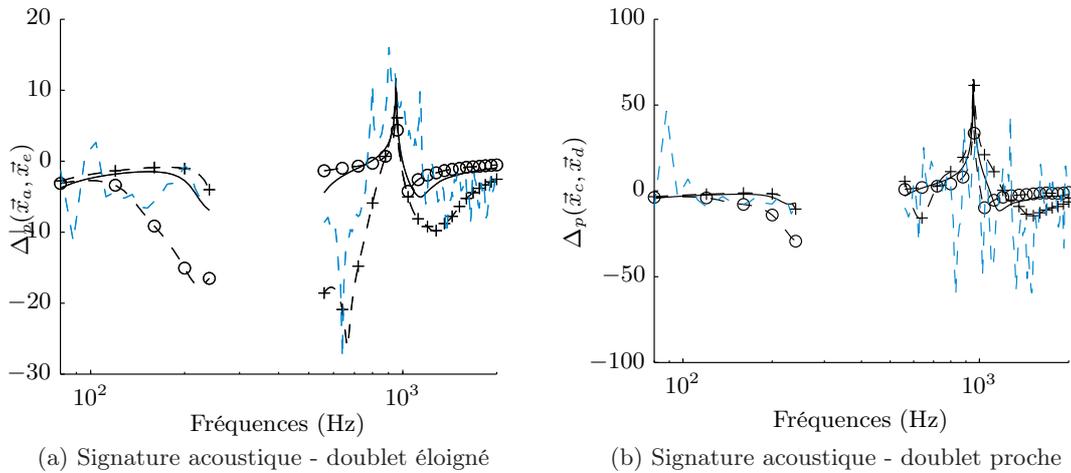


FIGURE 3.23 – Rapport de pression (signature acoustique) entre des positons microphoniques éloignées ou proches ; voie souple monobloc (---○), voie médium bibloc (—), voie raide monobloc (- - + , voie identifiée par le doublet éloigné **a-e**) et rapport mesuré (- - -).

des réponses vibratoires et acoustiques entre une voie raide composée de traverse béton et une voie de même raideur composée de traverse bois sont de l'ordre de 15 dB (voir Fig. 3.20). Ces différences, que l'on retrouve dans la signature acoustique (voir Fig. 3.22a autour de 600 Hz par exemple), permettent de déterminer le matériau des traverses, ce qui revient à approcher leurs masses. La différenciation du type de traverse entre bibloc et monobloc est en revanche plus délicate. La plus faible différence de masse, qui dépend uniquement de la géométrie, entraîne peu de modification du comportement vibratoire de la voie (voir Fig. 1.15f dans la section 1.3.1.3 et Fig. 3.20) : les signatures calculées pour ces deux types de traverses sont donc semblables (voir Fig. 3.22) et il devient difficile de dissocier le type de traverse béton (entre bibloc et monobloc) à partir de la pression acoustique (voir Tab. 3.3).

Afin de vérifier et de valider la convergence des identifications de la méthode de comparaison des signatures, la voie dont les paramètres mécaniques sont ajustés (cf. section 3.2) est ajoutée aux 9 voies gabarits (cf. section 3.4.1). Considérons que celle-ci fait parti d'un ensemble de voies gabarits étoffé. Les doublets microphoniques qui permettent d'identifier la voie ajustée ainsi que les voies raides<sup>28</sup> composées de traverses bétons (paramètres proches de ceux de la voie étudiée) sont reportés dans le tableau 3.4. Plus de 50 % des doublets microphoniques permettent, à partir de la méthode de discrimination du type de voie présentée dans la section précédente, d'identifier les paramètres mécaniques de la voie (masse de la traverse et raideur de la semelle). Les doublets microphoniques dont un des microphones est placé près de l'excitation (**a** ou **b**) et pour une distance inter-microphonique supérieure ou égale à une travée assurent l'identification du comportement vibratoire de la voie (voir Tab. 3.4). Les positions proches de l'excitation permettent de mesurer le champ acoustique créé par les ondes vibratoires fortement atténuées et la distance entre les deux microphones supérieure ou égale à une travée garantit le caractère discriminant de la signature acoustique.

Le champ acoustique rayonné par le rail et la méthode de la signature acoustique permet d'identifier une voie gabarit de paramètres mécaniques (type de pose) connues. La mobilité de la voie associée au rayonnement du rail mesuré est alors obtenue en utilisant les para-

28. La voie raide est caractérisée par une raideur de semelle élevée (cf. section 3.4.1).

| Identifications  | Doublet microphoniques            |
|--|-----------------------------------|
| des paramètres optimaux <sup>1</sup> :                                   | a-c, a-e, a-f, b-d, b-e, b-g, d-e |
| de la raideur de la semelle et du matériau de la traverse <sup>2</sup> : | a-d, a-g, c-g, d-g, e-g           |

TABLE 3.4 – Identification des paramètres mécaniques de la voie au moyen de la signature acoustique mesurée par un doublet microphonique. 1. Les paramètres optimaux correspondent aux paramètres ajustés (voir Tab. 3.1), 2. Paramètres de la voie gabarit les plus proches des paramètres optimaux.

mètres identifiés dans un modèle de poutre sur support élastique double couche. L'effet du chargement sur cette mobilité est abordé dans la section 3.5.1. Les paramètres mécaniques identifiés permettent également d'obtenir l'impédance acoustique et les fonctions de transfert vibratoires du rail utiles au calcul de la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail.

### 3.4.4 Calcul de la vitesse vibratoire

Pour obtenir le niveau de rugosité du rail à partir de son rayonnement acoustique il est essentiel de connaître la fonction de transfert entre le niveau de pression acoustique et l'amplitude de la vitesse vibratoire au point de contact/roue rail. La fonction de transfert est obtenue par les calculs de l'impédance acoustique du rail en chaque position de mesures microphoniques, et des fonctions de transfert vibratoires entre ces positions et le point de contact roue/rail (cf. section 3.1, Fig. 3.1).

L'impédance acoustique est définie par :

$$Z_r(\vec{x}_n, \vec{x}_{n_0}) = \frac{\tilde{p}_r(\vec{x}_n)}{i\omega G_\omega(\vec{x}_c, \vec{x}_{n_0})}. \quad (3.13)$$

où la pression  $\tilde{p}_r$  est calculée par le modèle de rayonnement du rail basé sur une ligne de monopôles (cf. section 3.3.1) et la fonction de Green (réponse vibratoire) est obtenue par le modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques (cf. section 1.3.1.4). La vitesse vibratoire du rail estimée à partir de la pression acoustique mesurée  $\vec{x}_n$  le long du train s'écrit alors :

$$v_r(\vec{x}_{n_0}) = \frac{p_r(\vec{x}_n)}{Z_r(\vec{x}_n, \vec{x}_{n_0})}. \quad (3.14)$$

Dans le contexte relatif au système de lecture acoustique de la voie, les impédances acoustiques numériques de chaque voie gabarit seront calculées préalablement, ainsi lorsque le type de voie sera identifié par la signature acoustique, l'impédance acoustique associée à cette signature<sup>29</sup> sera utilisée pour déterminer la vitesse vibratoire de la voie. Il en sera de même pour la fonction de transfert vibratoire.

Considérons deux impédances numériques : l'une est calculée à partir des paramètres mécaniques ajustés sur la mesure que l'on nommera impédance ajustée (paramètres optimaux du tableau 3.4 - cf. section 3.2), l'autre est calculée à partir des paramètres de la voie gabarit majoritairement identifiée parmi les 9 voies gabarits (voie raide composée de traverses mo-

29. L'impédance acoustique est calculée à partir des paramètres mécaniques utilisée pour le calcul de la signature.

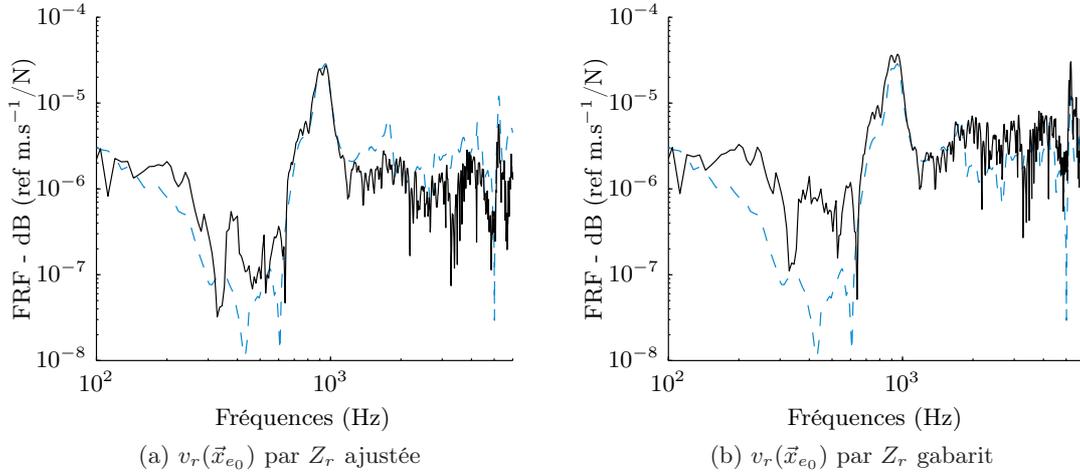


FIGURE 3.24 – Vitesse vibratoire verticale du rail en  $x=-1,91$  m (position **e**) : mesurée (---) et estimée (—) par l’impédance acoustique numérique de la voie ajustée (a) et de la voie gabarit identifiée par la signature (b).

nobloc - deuxième ligne du tableau 3.4) que l’on nommera impédance gabarit. L’impédance ajustée permet, à partir de la pression mesurée, de reconstruire avec justesse la vitesse vibratoire dans la gamme de fréquences comprise entre 600 et 1100 Hz (voir Fig. 3.24a). En plus hautes fréquences la vitesse est légèrement sous-estimée, cela est dû à la surestimation de la pression acoustique calculée par le modèle de rayonnement composé d’une ligne de sources monopolaires (voir Fig. 3.19a). L’impédance gabarit identifiée permet également une estimation de la vitesse vibratoire du rail acceptable (voir Fig. 3.24b). Cependant, l’estimation est dégradée dans la gamme de fréquence 600 et 1100 Hz à cause de la différence de raideur de la voie gabarit identifiée par rapport à la voie ajustée ( $s_p=800$  MN/m pour la voie gabarit contre  $s_p=650$  MN/m pour la voie ajustée). La dégradation de l’estimation de la vitesse vibratoire en basses fréquences<sup>30</sup> sur la figure 3.24b est due à la différence de masse entre la traverse identifiée (monobloc,  $m_t=140$  kg) et la traverse de la voie étudiée (bibloc,  $m_t=101$  kg<sup>31</sup>).

La vitesse au point de contact roue/rail (définie par la position  $\vec{x}_{ct}$ ) est ensuite déterminée par le rapport des réponses vibratoires en  $\vec{x}_{n_0}$  et  $\vec{x}_{ct}$  qui correspond à la fonction de transfert vibratoire définie comme :

$$\gamma_r(\vec{x}_{ct}, \vec{x}_{n_0}) = \frac{G_\omega(\vec{x}_{ct}, \vec{x}_{n_0})}{G_\omega(\vec{x}_{ct}, \vec{x}_{ct})}. \quad (3.15)$$

La vitesse vibratoire au point de contact roue/rail s’écrit alors :

$$v_r(\vec{x}_{ct}) = \gamma_r(\vec{x}_{ct}, \vec{x}_{n_0})v_r(\vec{x}_{n_0}). \quad (3.16)$$

La vitesse vibratoire au point de contact roue/rail est estimée à partir de la pression acoustique mesurée à la position **e** pour une force unitaire, la vitesse estimée équivaut alors

30. Dans la gamme comprise entre 100 et 250 Hz pour laquelle le modèle de rayonnement est valide.

31. La masse de la traverses bibloc de la voie étudiée, qui est une voie de service, est plus inférieure à la masse moyen de 120 kg des traverses bibloc.

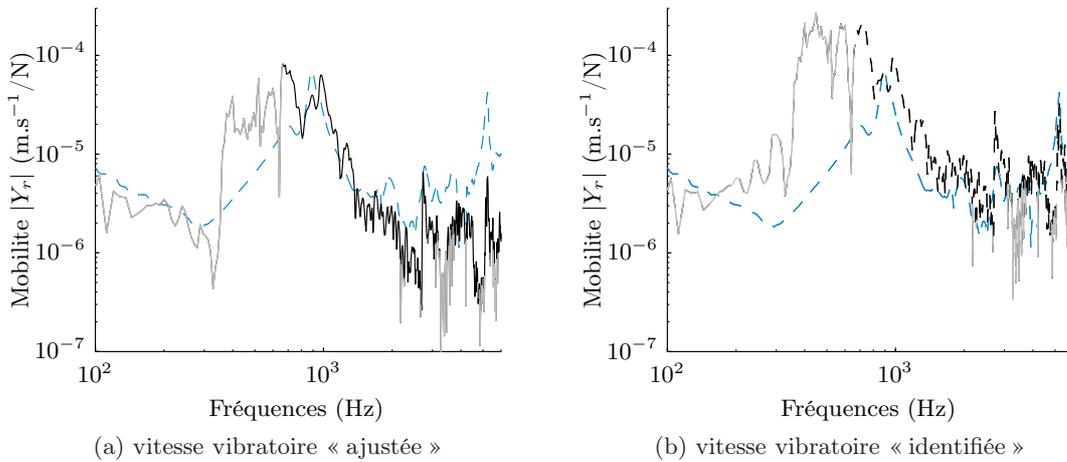


FIGURE 3.25 – Vitesse vibratoire verticale du rail au point d’excitation (en  $x=0m$ ) : mesurée (--) et estimée (—) par l’impédance acoustique et la fonction de transfert vibratoire numérique de la voie ajustée (a) et de la voie gabarit identifiée par la signature  $\Delta_p(\vec{x}_a, \vec{x}_e)$  (b). Les parties de la courbe grisées indique une cohérence entre la pression mesurée utilisée pour déterminer la vitesse vibratoire et l’excitation inférieure à 0,9.

à la mobilité. Les mobilités mesurée et calculée à partir de l’impédance ajustée  $Z_r(\vec{x}_e, \vec{x}_{e_0})$  et la fonction de transfert vibratoire ajustée<sup>32</sup>  $\gamma_r(\vec{x}_{ct}, \vec{x}_{e_0})$  sont tracées sur la figure 3.25a. Les parties de la courbe grisées signifient que la mesure de pression n’est pas pertinente (voir cohérence de la figure 3.19a). La mobilité estimée à partir de la pression cohérente avec l’excitation est en accord avec la mobilité mesurée. Toutefois on remarque quelques écarts entre la mobilité estimée et la mobilité mesurée autour de la fréquence de résonance de la semelle et la fréquence *pinned pinned*, ils sont dus au manque de justesse de la mobilité calculée par la poutre de Timoshenko sur supports périodiques aux positions  $x_e = -1,91 m$  (voir Fig. 3.3a) et  $x_{ct} = 0 m$  (voir Fig. 3.2a). Malgré ces écarts, ces résultats montrent que la méthode d’estimation de la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail à partir de l’identification des paramètres mécaniques de la voie à l’aide de comparaisons de signatures acoustiques gabarits dans un premier temps, et de l’impédance acoustique et de la fonction de transfert vibratoire dans un deuxième temps est valide si la pression mesurée est cohérente avec l’excitation.

Dans le cas où les paramètres de la voie gabarit identifiée sont approchés des paramètres optimaux (par exemple une raideur de semelle supérieure de 150 MN/m et une masse de traverse surestimée d’environ 35 kg), la justesse de l’estimation de la vitesse vibratoire au point de contact diminue : l’écart mesure/estimation augmente comme le montre les courbes de mobilités tracées sur la figure 3.25b. D’après les résultats obtenus dans la section précédente, dès lors qu’une voie ferrée aux paramètres mécaniques adaptés au comportement vibratoire de la voie auscultée fait partie des voies gabarit, celle-ci est identifiée par la méthode de la signature. Ainsi, la justesse de la vitesse vibratoire estimée au point de contact roue/rail et la mobilité, qui permettent ensuite d’évaluer la rugosité, est conditionnée par la bonne représentation du comportement vibratoire de la voie auscultée par les voies gabarits considérées dans le système de lecture acoustique de la voie ferrée.

32. La fonction de transfert vibratoire est calculée à partir des paramètres ajustés (voir Tab. 3.1).

## 3.5 Discussion

### 3.5.1 Effet du chargement de la voie

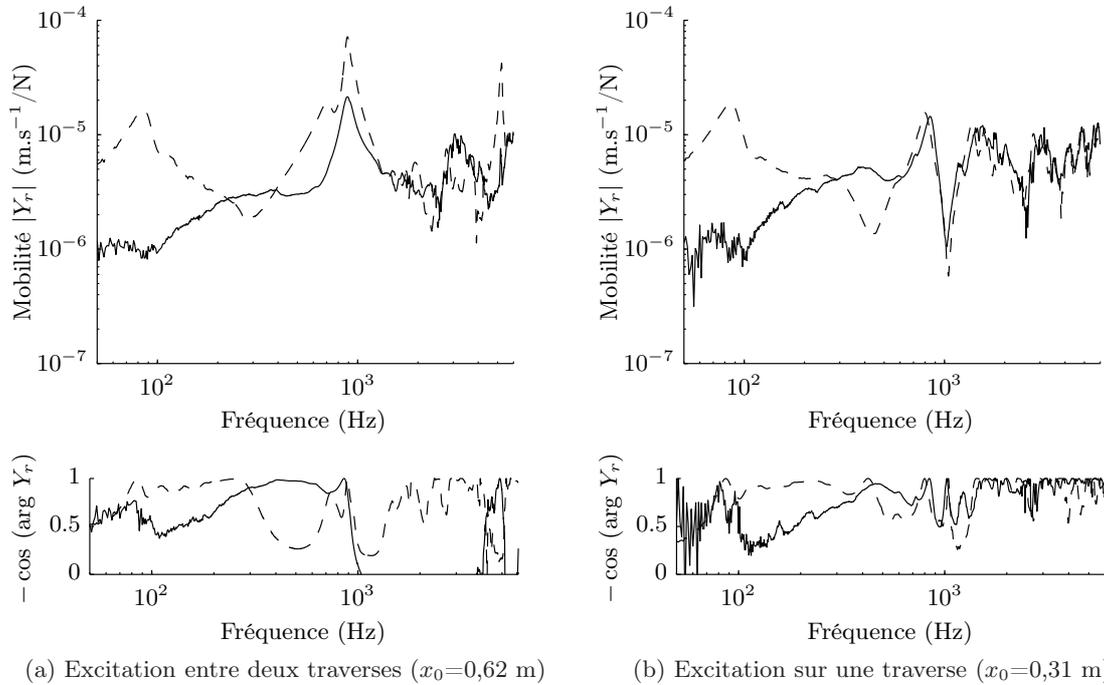


FIGURE 3.26 – Mobilité verticale mesurée pour la voie chargée par une voiture d'essai en  $x=0$  (—) et pour la voie libre (- - -). L'excitation est appliquée dans la direction verticale en  $x_0$ .

Le chargement du train, appliqué à la voie étudiée par l'intermédiaire du point de contact roue/rail, engendre une augmentation de la raideur de la voie près du point de contact, plus particulièrement de la raideur du ballast. L'augmentation de la fréquence de résonance du ballast ( $f_{ballast} \approx 300$  Hz) et la forte diminution de l'amplitude de la mobilité, visibles sur la figure 3.26, se traduisent par une augmentation significative de la raideur et du facteur de perte du ballast. Les paramètres mécaniques de la voie ajustés aux mobilités mesurées proches du point de contact roue/rail (voir Fig. 3.27) et donnés dans le tableau 3.5 montrent que la raideur du ballast augmente de 1600 % (par rapport à la voie libre). La raideur de la semelle sous rail augmente également, mais plus modérément (140 %). La voie libre étant déjà raide, la fréquence de résonance du rail sur la semelle pour la voie chargée est peu modifiée par rapport à la fréquence  $f_{semelle}$  pour la voie libre (voir Fig 3.26). Contrairement à l'amplitude de la mobilité autour de la résonance du ballast, l'amplitude de la mobilité autour de la fréquence de résonance de la semelle pour une force appliquée sur une traverse est inchangée. En revanche, l'effet du chargement entraîne une diminution de la mobilité (d'environ 10 dB) lorsque l'excitation est appliquée entre deux traverses. Malgré la modification des paramètres mécaniques pour la voie chargée, l'amplitude de la mobilité calculée par le modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques pour une force appliquée entre deux traverses est surestimées d'environ 10 dB (voir Fig. 3.27).

Plus généralement, en basses fréquences l'atténuation de l'amplitude vibratoire le long du rail est forte (autour de 10 dB/m), par conséquent la présence de multiples points de contact

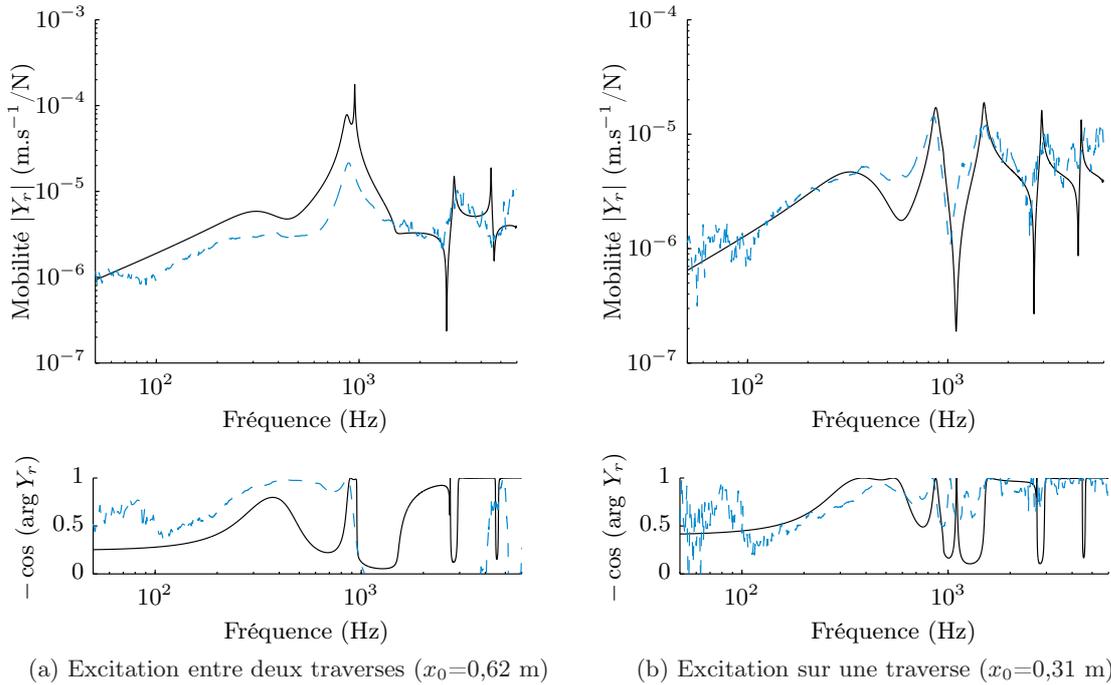


FIGURE 3.27 – Mobilité verticale pour la voie chargée par une voiture d’essai en  $x_0$  pour une force verticale appliquée en  $x_0$  : modèle (—), mesure (---).

| Paramètres mécaniques du modèle de poutre de Timoshenko |          |      |        |
|---|----------|------|--------|
| Raideur de la semelle                                   | $s_p$    | 920  | [MN/m] |
| Facteur de perte de la semelle                          | $\eta_p$ | 0,05 | [-]    |
| Raideur du ballast                                      | $s_b$    | 400  | [MN/m] |
| Facteur de perte du ballast                             | $\eta_b$ | 1    | [-]    |

TABLE 3.5 – Paramètres ajustés sur la mobilité verticale de la voie chargée. Les autres paramètres mécaniques du rail U36 sont donnés dans le tableau 1.3.

roue/rail<sup>33</sup> affecte peu le comportement vibratoire spatial du rail [Wu 2001] : l’amplitude vibratoire d’une onde en un point de contact est très vite atténuée et n’interfère pas avec l’onde du point de contact adjacent également très atténuée. Les différences entre le comportement vibratoire du rail chargé et libre au point de contact roue/rail apparaissent entre 700 et 1200 Hz [Wu 2001]. Cette gamme de fréquence correspond à la gamme de fréquence de rayonnement du rail utile à la méthode LECAV. Il est donc nécessaire de considérer l’effet du chargement sur le comportement vibratoire du rail afin de calculer le champ acoustique rayonné par celui-ci en présence du train. Les travaux de Wu et Thompson [Wu 2000] sur la modélisation de la voie soumise au chargement d’un train par l’intermédiaire des multiples points de contact roue/rail montrent que l’effet du chargement sur le comportement vibratoire de la voie est localisé autour de 2 m de part et d’autre du point d’excitation ; au delà l’effet du chargement peut être négligé. Cet effet est dû à l’augmentation locale de la raideur du support au point de contact roue/rail. Pour représenter le comportement vibratoire spatial du rail soumis au poids du train, il est alors primordial de prendre en compte

33. Pour deux roues d’un même bogie, l’espacement minimum est compris entre environ 2 m et 4 m en fonction de sa taille.

cette augmentation dans le modèle de Timoshenko sur supports périodiques. Dans ce cas, l'hypothèse sur l'égalité des raideurs équivalentes des supports n'est plus valide : la structure n'est plus périodiquement identique et le théorème de Floquet relatif aux structures infinies ne peut donc être appliqué. Il sera alors nécessaire d'utiliser un modèle fini qui prend en compte la raideur de chaque support [Heckl 1995, Heckl 2002] (cf. section 1.3.1.4). Il sera également essentiel de déterminer la relation entre le chargement statique  $F_0$  occasionné par le train et les paramètres mécaniques des supports localisés près du point de contact roue/rail [Wu 1999b]. Ainsi le rayonnement acoustique du rail pourra être calculé à partir du modèle simplifié monopolaire dont le débit de chacune des sources équiréparties le long du rail sera calculé à partir du modèle de poutre qui considérera le chargement. Les impédances acoustiques et les signatures acoustiques des voies gabarits pourront être calculées en fonction de la position des microphones le long du rail et le chargement statique du train équipée du système LECAV. Le modèle de poutre qui considérera le chargement permettra d'obtenir la mobilité du rail au point de contact, ainsi que les fonctions de transfert vibratoires.

### 3.5.2 Effet du roulage

Lors du roulage, le champ de pression mesuré le long du rail sera intégré sur une distance  $L$  dépendante du temps d'acquisition et la vitesse du train. Le champ acoustique sera alors la contribution du champ créé par une série d'impacts appliqués successivement sur une travée<sup>34</sup>. En supposant que le type de pose de la voie est homogène sur la distance  $L$ , le champ acoustique rayonné par la voie pourra être calculé à partir du principe de superposition. Le champ calculé sera alors la somme des champs de pression calculés pour des forces discrètement et successivement appliquées le long d'une travée. L'effet du chargement, comme précisé dans la section précédente, sera pris en compte sur le comportement vibratoire du rail modélisé à chaque position d'impact. Si le principe de superposition est validé, la méthode de discrimination du type de voie pourra être appliquée de la même façon qu'en statique, mais les signatures acoustiques prendront en compte l'effet du roulage.

### 3.5.3 Effet acoustique provoqué par la caisse du train

Le dessous de la caisse du train étant généralement près du sol, les réflexions du champ acoustique émis par le rail sur la caisse du train seront à considérer, plus particulièrement pour la gamme de fréquence de rayonnement du rail compris entre 100 et 1500 Hz dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de grandeur de l'espacement entre la caisse du train et le sol. Cela conduit à deux conséquences, la distance géométrique de l'onde acoustique réfléchiée est petite devant sa longueur d'onde, des ondes stationnaires (mode) entre le sol et le dessous de la caisse peuvent apparaître. Le modèle de rayonnement devra donc prendre en compte ces effets. D'un point de vue pratique, un matériau absorbant placé sous la caisse du train pourrait être une solution de diminution de l'effet acoustique provoqué par la caisse du train. Cette solution serait néanmoins contraignante au vu de la gamme fréquentielle de rayonnement du rail : l'épaisseur du matériau absorbant devra être nécessairement élevée pour être efficace en basses fréquences. Elle suppose donc un aménagement spécifique de la caisse du train équipé par le système LECAV.

---

34. Sur une traverse, entre cette traverse et la traverse suivante, sur la traverse suivante et ainsi de suite.

*Remarque* : le champ de pression acoustique rayonné par le rail devra être mesuré au plus près de celui-ci afin d'assurer la séparation de son champ acoustique avec le champ rayonné par le rail opposé tout en respectant les contraintes de sécurités inhérentes au système ferroviaire.

### 3.5.4 Robustesse de la méthode

La robustesse des procédés utilisés pour identifier le comportement vibratoire de la voie et le niveau vibratoire au point de contact causé par la rugosité peut être renforcée par moyennages. L'augmentation du nombre de microphones (minimum deux) alloués à la discrimination du type de pose de la voie (donc de son comportement vibratoire) permet de multiplier le nombre de signatures et ainsi assurer la convergence de l'identification du comportement vibratoire de la voie auscultée. Un troisième microphone permettrait de mesurer trois signatures acoustiques (au lieu d'une seule pour deux microphones), qui donnerait ainsi la possibilité d'utiliser un critère de détection, comme par exemple un minimum de deux identifications de voies gabarits communes (ou trois si l'on souhaite une plus grande sévérité sur ce critère). De plus, sachant que les fonctions de transfert acoustiques et vibratoires propres à chaque microphone permettent une estimation de la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail (*i.e* le nombre de moyennes est multiplié par le nombre de microphones utilisés), la précision sur l'estimation de cette vitesse vibratoire peut être accrue par le nombre de microphones utilisés.

Comme pour la roue, équiper le véhicule d'un second dispositif symétrique au premier permettrait de mesurer la rugosité des grandes longueurs d'onde de la file de rail opposée, mais il permettrait surtout d'accroître la robustesse de l'identification du comportement vibratoire de la voie. Celui-ci est effectivement indépendant de la file de rail<sup>35</sup>, l'identification du type de pose de la voie pourrait être effectuée à partir du double du nombre de paires microphoniques obtenues avec un seul système. Dans le cas de l'exemple précédent, la convergence de l'identification de la voie à partir de 6 signatures acoustiques permettrait d'assurer cette identification.

## 3.6 Conclusions

En basses fréquences, en dessous de 1,5 kHz, le rayonnement acoustique de la voie ferrée est utilisé pour estimer la rugosité du rail. Deux mesures le long du rail permettent, à partir de la méthode d'estimation de l'effort d'interaction entre la roue et le rail développée dans ce chapitre, d'estimer la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail. Cette vitesse donne ensuite accès au niveau de rugosité de grandes longueurs d'onde par l'intermédiaire du modèle d'interaction verticale utilisé par le système de mesure acoustique de la voie.

Le rayonnement du rail peut être modélisé par un ensemble de sources ponctuelles equiréparties sur son axe. Le débit de chacune des sources est supposé proportionnel à la vitesse vibratoire du rail. Trois lignes de sources ponctuelles peuvent être utilisées pour représenter le champ acoustique tridimensionnel : chacune d'entre elle représente le rayonnement acoustique du patin (pied du rail), de l'âme (liaison entre le pied et la tête du rail) et du champignon (tête du rail). Cette représentation optimale nécessite néanmoins de modéliser le comportement vibratoire des différentes parties du rail. Une ligne de monopôles

<sup>35</sup>. En supposant que les semelles sous rail, propres aux files de rails, sont de propriétés mécaniques identiques (même type de semelle) et de même âges.

placée au centre du rail suffit malgré tout à modéliser son rayonnement acoustique lorsqu'il est omnidirectionnel : entre 100 et 200 Hz et entre 400 et 2500 Hz pour une voie typique. Pour ces fréquences, le calcul des débits monopolaires à partir de la fonction de Green (réponse spatiale) associée à l'équation du mouvement d'une poutre de Timoshenko en flexion sur support périodique, permet de représenter fidèlement le champ acoustique spatial dans le plan vertical au rail.

Le champ acoustique rayonné par le rail est vecteur d'information sur le niveau de rugosité. Cependant, le comportement vibratoire dépend également de l'armement de la voie, autrement dit des éléments qui la composent comme les semelles sous rail et les traverses. Le comportement vibratoire de la voie est piloté par les propriétés mécaniques de ces éléments tels que la raideur et la masse. Afin d'utiliser le champ acoustique émis par le rail pour estimer la rugosité, il est alors essentiel de déterminer en premier lieu le comportement vibratoire de la voie auscultée par le système LECAV. Nous avons proposé une méthode d'identification du comportement vibratoire de la voie, basée sur le rapport de pressions mesurées le long du rail (signature acoustique) qui permet de s'affranchir de l'excitation. La comparaison de ce rapport à un ensemble de voies gabarits représentatives des réseaux français et européens permet d'identifier le type de pose de la voie ; raideur de la semelle et matériau de la traverse par exemple. Nous avons montré qu'il est essentiel de séparer les points de mesures microphoniques d'au moins une travée et de placer un des microphones près de l'excitation pour assurer l'identification du comportement vibratoire de la voie par cette méthode. L'identification de l'armement de la voie permet ensuite d'estimer la vitesse de vibration au point de contact roue/rail à partir de la pression rayonnée par le rail. La mobilité et la vitesse vibratoire moyenne au point de contact introduites dans le modèle d'interaction roue/rail permettent finalement d'estimer la rugosité.

L'hypothèse de sources monopolaires du modèle de rayonnement du rail composé d'une simple ligne, permet d'estimer la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail sur la quasi-totalité de la gamme de fréquence de rayonnement utilisée pour le système LECAV. Seule, la vitesse vibratoire au point de contact dans la gamme comprise entre 200 et 400 Hz pour une voie classique<sup>36</sup> obtenue à partir du modèle de rayonnement n'est pas valide. Ainsi, les gammes de longueurs d'onde qui peuvent être lues par le système LECAV à partir du rayonnement du rail sont 55-208 mm et 416-833 mm pour une vitesse du véhicule de 300 km/h, et de 37-138 mm et 277-555 mm pour une vitesse de 200 km/h.

---

36. Ce qui correspond à la gamme de fréquences autour de la fréquence d'antirésonance du rail (qui apparaît autour de 300 Hz pour une voie classique) pour laquelle l'hypothèse de source omnidirectionnelle n'est pas valide.



# Conclusions et perspectives

Le bruit de roulement est la principale source de bruit des transports ferroviaires pour des vitesses conventionnelles. Le bruit de roulement est la principale source de bruit des transports ferroviaires pour des vitesses conventionnelles. Il est produit par les vibrations puis le rayonnement acoustique du matériel roulant et de la voie provoqués par le déplacement imposé à la roue et au rail par les défauts microscopiques de surface présents sur les bandes de roulement appelé rugosité.

Afin d'évaluer et de gérer le bruit dans l'environnement, la directive Européenne 2002/49/CE impose la réalisation de cartographies du bruit dans l'environnement des infrastructures ferroviaires. L'état acoustique de la voie ferrée peut être qualifié par le niveau de rugosité de ses rails et par son comportement dynamique qui servent de paramètres d'entrée des logiciels de prédiction du bruit dans l'environnement. Ces données sont généralement évaluées par des systèmes de mesures statiques, ce qui limite la caractérisation de la voie à quelques dizaines ou centaines de mètres.

Cette thèse a eu pour objectif de proposer et de valider une méthodologie de mesure de l'état acoustique de la voie (rugosité et comportement dynamique) qui permet de dépasser cette limitation et ainsi fournir les données mesurées sur l'ensemble du réseau ferroviaire français et européen aux modèles de prédiction de bruit en environnement. De plus, la planification d'opérations de maintenance corrective de l'état acoustique de la voie (notamment du meulage acoustique pour l'état de surface des rails) peut être optimisée à partir de ces données.

La solution proposée est un système de mesure en situation embarquée capable d'évaluer le niveau de rugosité et le comportement dynamique de la voie auscultée. Le système nommé LECAV pour « LECture Acoustique de la Voie », consiste à mesurer et utiliser le bruit rayonné par la roue et la voie pour estimer la rugosité à l'origine de ce bruit. Les mesures acoustiques sont réalisées en champ proche du rail et de la roue qui rayonnent principalement dans des gammes de fréquences distinctes ; entre 100 et 1500 Hz pour le rail et 1500 et 5000 Hz pour la roue. À partir des mesures de pression rayonnée par le rail et la roue et des comportements vibroacoustiques respectifs, la vitesse vibratoire au point de contact roue/rail est déterminée pour la gamme de fréquences couverte par les rayonnements mesurés. Cette vitesse vibratoire permet, par l'intermédiaire de la modélisation de l'interaction entre la roue et le rail, de déterminer le spectre de rugosité qui correspond aux irrégularités spatiales du rail lues par le système LECAV durant l'acquisition des pressions.

La caractérisation expérimentale des comportements vibroacoustiques en champ proche de la roue et du rail ainsi que leurs modélisations sont les principaux travaux réalisés dans cette thèse. Les résultats expérimentaux obtenus à partir de deux campagnes de mesures statiques réalisées sur un train d'essai et une voie ferroviaire ont permis d'orienter et de valider les hypothèses sur lesquelles s'appuient les modèles. Nous avons cherché à calculer l'impédance acoustique de rayonnement, les fonctions de transfert vibratoires entre un point donné et le point de contact roue/rail, et la mobilité (vitesse vibratoire pour une force unitaire) des deux structures utilisées par la méthode LECAV.

La roue, de comportement vibratoire caractérisé par ses modes propres inhérents à une structure finie peu amortie, rayonne principalement autour de ses fréquences de résonance. En premier lieu, nous avons démontré expérimentalement que le rayonnement acoustique aux voisinages des fréquences de résonance est proportionnel à la vitesse vibratoire, et qu'il est alors possible d'identifier la valeur de l'amortissement vibratoire à partir du champ acoustique. Nous avons ensuite calculé le rayonnement acoustique de chacun des modes à partir de la formulation intégrale de Rayleigh fréquemment utilisée pour représenter le rayonnement des structures planes. La surface de la roue (toile et jante) est modélisée par une plaque plane annulaire bafflée dont la vitesse vibratoire normale est calculée par la méthode des éléments finis. La formulation intégrale est discrétisée sur les noeuds du maillage élément finis, ce qui permet le calcul de la pression acoustique en champ très proche d'une structure de comportement vibratoire complexe. Les champs de pression par rapport aux champs de vitesses vibratoires respectifs ainsi obtenus montrent que l'impédance acoustique, en champ proche du centre de la toile pour les modes prépondérants dans le bruit de roulement, peut être approchée par l'impédance caractéristique de l'air ( $\rho_0 c_0$ ). Nous avons enfin observé que la justesse du modèle élément finis conditionne la justesse de la vitesse vibratoire au point de contact estimée à partir du rayonnement acoustique de la roue, ainsi que de la mobilité utile au modèle d'interaction roue/rail.

Le comportement vibroacoustique du rail, supposé infini, est caractérisé par les ondes vibratoires qui se propagent en son long de part et d'autre du point d'excitation. Dans la gamme de fréquences où le rayonnement du rail est dominant par rapport au rayonnement de la roue, la propagation des ondes de flexion verticale et latérale est pilotée par les propriétés mécaniques (dans les directions respectives) de son support constitué d'un ballast continu, sur lequel repose à intervalles réguliers, une traverse et une semelle sous rail. En plus hautes fréquences, le rail est supposé comme découplé des supports et les ondes vibratoires se propagent librement. Le rail est modélisé par une poutre épaisse de Timoshenko en appui sur des supports périodiquement espacés. Les impédances mécaniques de chaque support, modélisé par une raideur équivalente à un système ressort-masse-ressort, sont supposées homogènes (de raideurs mécaniques égales). Nous avons confirmé par la mesure que cette modélisation, fréquemment utilisée pour la prédiction du bruit de roulement, permet une bonne représentation du comportement vibratoire spatial des ondes de flexion verticales qui se propagent dans la tête du rail (champignon) pour des fréquences inférieures à 2,5 kHz. En plus hautes fréquences, des modes de déformation de la section du rail apparaissent, notamment autour de 5 kHz où le pied du rail (patin) rentre en résonance. Le rayonnement du rail peut être modélisé par une ligne de sources ponctuelles élémentaires équiréparties sur sa longueur où l'effet des réflexions acoustiques sur le ballast est pris en compte grâce à la méthode des sources images. Le débit des sources ponctuelles est supposé proportionnel à la vitesse vibratoire le long du rail. Nous avons montré que pour des sources monopolaires de débits fixés par le comportement vibratoire vertical du champignon modélisé par la poutre de Timoshenko, le champ acoustique spatial proche du rail dans le plan vertical est fidèlement représenté pour une voie typique, pour les fréquences comprises entre 100 et 200 Hz et entre 400 Hz et 2,5 kHz. Ces gammes de fréquences correspondent aux mouvements d'ensemble<sup>37</sup> verticaux du rail causés par une excitation verticale. En revanche, entre 200 Hz et 400 Hz, le rail se déplace principalement dans la direction latérale et le champ acoustique tend vers

37. Les vitesses vibratoires du champignon et du patin sont égales et en phase.

celui d'un dipôle. En plus hautes fréquences (au dessus de 2,5 kHz), nous suggérerons, à partir des mesures vibratoires, de modéliser le rayonnement du rail plus directif, par une paire de monopôles verticaux d'amplitudes différentes : le premier représente le patin et le second le champignon. Nous avons donc proposé un modèle composé de trois lignes de sources ponctuelles élémentaires de nature et de débit respectif aux différents comportements vibroacoustiques des différentes parties du rail en fonction de la fréquence, qui permet ainsi de modéliser le rayonnement du rail sur toute la gamme de fréquence considéré pour le bruit de roulement (100-5000 Hz). Cette modélisation demande néanmoins à être validée à partir des modèles vibratoires adaptés aux calculs des débits pour chacune des sources acoustiques.

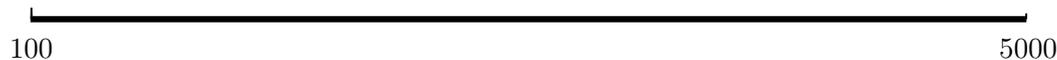
D'un point de vue du système de lecture acoustique de la voie, le comportement vibroacoustique du rail, utile à l'estimation de la vitesse vibratoire du rail causé par la rugosité, dépend des propriétés mécaniques de la voie. Nous avons donc proposé une méthode d'identification du comportement vibratoire de la voie auscultée (fonction de propriétés mécaniques), basée sur le champ acoustique relatif entre deux points le long du rail. Le champ acoustique relatif permet de s'affranchir de la rugosité : il représente la signature acoustique du comportement vibratoire de la voie. Le modèle acoustique basé sur une ligne de monopôles équirépartis le long du rail validé sur la majeure partie de la gamme de fréquences utile au système LECAV, alimenté par le modèle vibratoire de poutre de Timoshenko sur supports périodiques, est utilisé pour calculer la signature acoustique de voies gabarits représentatives des réseaux ferroviaires français et européens. L'identification de la voie auscultée est effectuée par comparaison calcul/mesure de la signature. La voie identifiée, de propriétés mécaniques connues, permet ensuite de calculer l'impédance acoustique de rayonnement, les fonctions de transfert vibratoires entre un point donné et le point de contact roue/rail, et la mobilité du rail. Nous avons montré que l'identification d'une voie gabarit de comportement proche de la voie réelle permet, à partir de la pression mesurée en champ proche du rail, d'estimer la vitesse vibratoire au point de contact dans la zone de validité du modèle de rayonnement.

Les modèles et leurs gammes de fréquence de validité respectives, indispensables à la méthode de lecture acoustique de la voie développée dans cette thèse, sont reportés sur la figure 3.28. Avant d'obtenir un spectre de rugosité par le système de mesure acoustique de la voie en situation embarqué et de valider les méthodes proposées dans cette thèse, il sera essentiel de prendre en compte l'effet du roulage et du chargement de la voie provoqué par le poids du train. Les travaux futurs porteront principalement sur le modèle vibratoire du rail, qui devra prendre en compte l'effet de la modification locale des impédances mécaniques des supports du rail au voisinage du point de contact roue/rail afin de calculer la mobilité en ce point, ainsi que le débit de chacune des sources élémentaires du modèle de rayonnement du rail réparties en son long. L'intégration de la vitesse vibratoire du rail, durant le temps d'acquisition du système, qui revient à l'alternance du point d'excitation (point de contact roue/rail) entre et à l'aplomb des traverses, devra être également pris en compte à partir du principe de superposition. L'effet acoustique de la caisse devra également être étudié afin d'apporter les corrections nécessaires au modèle de rayonnement du rail. La gamme fréquentielle de validité du modèle de rayonnement pourra être également étendue par l'utilisation du modèle de rayonnement du rail composé de trois lignes de sources ponctuelles. Les gammes de longueurs d'onde des spectres de rugosité qui seront obtenus après validation du système de mesure LECAV, sont données par exemple pour des vitesses du train de 200 et 300 km/h (voir Fig. 3.28).

Gammes fréquentielles (Hz) de validité des modélisations du :

Rayonnement acoustique de la roue

(Eléments Finis + Intégrale de Rayleigh)



Approximation du rayonnement acoustique de la roue

( $p = \rho_0 c_0 v$ )



Comportement vibratoire de la roue\*

(Elements Finis)



Rayonnement acoustique du rail

(Ligne de sources monopolaires + poutre de Timoshenko sur supports périodiques)

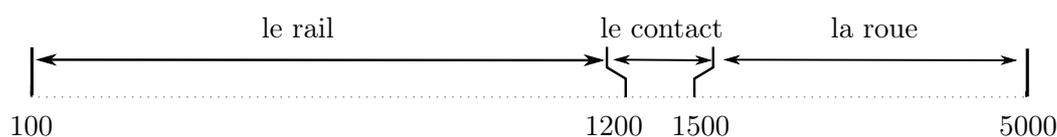


Comportement vibratoire du rail

(Poutre de Timoshenko sur supports périodiques)



Rugosité majoritairement lue par :



Gammes fréquentielles (Hz) de validité du système LECAV



Longueur d'onde  $\lambda$  de rugosité (en mm) pour une vitesse  $V$  de **200** km/h



Longueur d'onde  $\lambda$  de rugosité (en mm) pour une vitesse  $V$  de **300** km/h



\* Modes propres : déformées modales et fréquences propres

FIGURE 3.28 – Gammes fréquentielles de validité des différents modèles dans les conditions d'utilisation requises par la méthode de lecture acoustique de la voie (LECAV). Représentations de gammes sur des axes en échelles logarithmiques.

# Bibliographie

- [AFN 2005] *NF EN ISO 3095, Mesurage du bruit émis par les véhicules circulant sur rails*, 2005. (Cité en page 10.)
- [AFN 2008] *NF EN 15461, Caractérisation des propriétés dynamiques de sections de voie pour le mesurage du bruit au passage*, 2008. (Cité en pages 95 et 146.)
- [AFN 2009] *NF EN 15610, Applications ferroviaires, Bruit à l'émission, Mesurage de la rugosité des rails relative à la génération du bruit de roulement*, 2009. (Cité en page 6.)
- [Asmussen 2006] B. Asmussen, H. Onnich, R. Strube, L. M. Greven et S. Shröder. *Status and perspectives of the "Specially Monitored Track"*. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 293, pages 1070–1077, 2006. (Cité en page 9.)
- [Berggren 2008] E. G. Berggren, M. X. Li. Martin et J. Spänner. *A new approach to the analysis and presentation of vertical track geometry quality and rail roughness*. *Wear*, vol. 265, pages 1488–1496, 2008. (Cité en page 9.)
- [Bongini 2010] E. Bongini, S.L. Grassie et M. J. Saxon. *"Acoustic mapping" of a railway network : application of a system based on measurement of axlebox vibration*. In 10<sup>th</sup> International Workshop on Railway Noise, Nagahama, 2010. (Cité en page 11.)
- [Broadbent 2009] A. Broadbent. *The acoustic properties of railway ballast*. In Euronoise, Édimbourg, 2009. (Cité en pages 71 et 98.)
- [Bruneau 1998] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, 1998. (Cité en pages 155 et 156.)
- [Chartrain 2012] P.-E. Chartrain, P.-O. Mattei et E. Bongini. *Experimental assessment of wheel/rail interaction force with rolling noise analysis*. In Acoustics, Nantes, 2012. (Cité en page 86.)
- [Cigada 2008] A. Cigada, S. Manzonie et M. Vanali. *Vibro-acoustic characterization of railway wheels*. *Applied Acoustics*, vol. 69, pages 530–545, 2008. (Cité en page 51.)
- [Cléon 2010] P. M. Cléon et F. Poisson. *Acoustique des transports ferroviaires*. *Techniques de l'ingénieur*, vol. BR2040, 2010. (Cité en pages 7, 39 et 41.)
- [Cremer 2005] L. Cremer, M. Heckl et B.A.T. Petersson. *Structure-borne sound structural - vibrations and sound radiation at audio frequencies*. Springer, 2005. (Cité en pages 14, 17, 60, 66, 67 et 156.)
- [Delany 1970] M. E. Delany et E. N. Bazley. *Acoustical properties of fibrous absorbent materials*. *Applied Acoustics*, vol. 3(2), pages 105–116, 1970. (Cité en page 98.)
- [Delavaud 2011] V. Delavaud. *Modélisation temporelle de l'interaction roue/rail, pour une application au bruit de roulement ferroviaire*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2011. (Cité en page 8.)
- [Ewins 2000] D.J Ewins. *Modal testing : theory and application*. Reserch Studies Press, 2000. (Cité en pages 16, 53 et 54.)
- [Fanchon 2001] J.-L. Fanchon. *Guide de mécanique - sciences et technologies industrielles*. Nathan, 2001. (Cité en page 62.)
- [Faure 2011] B. Faure. *Caractérisation du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2011. (Cité en pages 20, 135, 136 et 139.)

- [Fidecaro 2007] F. Fidecaro, G. Licitra, A. Bertolini, E. Maccioni et M. Paviotti. *Interferometric rail roughness measurement at train operational speed*. JSV, vol. 293, pages 856–854, 2007. (Cité en page 9.)
- [Grassie 1989] S.L. Grassie. *Corrugation on Australian National : cause, measurement and rectification*. volume 89/12, pages 188–192, 1989. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Grassie 1995] S.L. Grassie. *Dynamic modelling of concrete railway sleepers*. Journal of Sound and Vibration, vol. 187, pages 799–813, 1995. (Cité en page 19.)
- [Grassie 1999] S.L. Grassie, M. Saxon et J.D. Smith. *Measurement of longitudinal rail irregularities and criteria for acceptable grinding*. Journal of Sound and Vibration, vol. 227, pages 949–964, 1999. (Cité en page 7.)
- [Géradin 1992] M. Géradin et D. Rixen. *Théorie des vibrations - application à la dynamique des structures*. Masson, 1992. (Cité en page 59.)
- [Hamet 1999] J.F. Hamet. *Railway Noise : Use of Timochenko Model in Rail Vibration Studies*. Acta Acustica, vol. 85, pages 54–62, 1999. (Cité en pages 20 et 135.)
- [Hardy 2006] A. E. J. Hardy, R. R. K. Jones et S. Turner. *The influence of real head roughness on railway noise prediction*. Journal of Sound and Vibration, vol. 293, pages 965–974, 2006. (Cité en page 9.)
- [Heckl 1995] M.A. Heckl. *Railway noise - can random sleeper spacings help ?* Acta Acustica, vol. 81(6), pages 559–564, 1995. (Cité en pages 26 et 121.)
- [Heckl 2002] M.A. Heckl. *Coupled waves on a periodically supported Timoshenko beam*. Journal of Sound and Vibration, vol. 252(5), pages 849–882, 2002. (Cité en pages 26 et 121.)
- [Irretier 1983] H. Irretier. *The natural and forced vibration of a wheel disc*. Journal of Sound and Vibration, vol. 87(2), pages 161–177, 1983. (Cité en page 15.)
- [JOC 2002] *Directive 2002/49/CE du parlement Européen et du conseil du 25 juin 2002 relative à l'évaluation et la gestion du bruit dans l'environnement*. [http://www.ineris.fr/aida/consultation\\_document/973](http://www.ineris.fr/aida/consultation_document/973), 2002. (Cité en page 1.)
- [Johnson 1987] K.L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987. (Cité en pages 31 et 32.)
- [Jones 2006] C.J.C. Jones, D.J. Thompson et R.J. Diehl. *The use of decay rates to analyse the performance of railway track in rolling noise generation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 293(3-5), pages 485–495, 2006. (Cité en pages 9 et 146.)
- [Kitagawa 2010] T. Kitagawa et D.J. Thompson. *The horizontal directivity of noise radiated by a rail implications for the use of microphone arrays*. Journal of Sound and Vibration, vol. 329, pages 202–220, 2010. (Cité en pages 30 et 97.)
- [Knothe 1993] K.L. Knothe et S.L. Grassie. *Modelling of Railway Track and Vehicle/Track Interaction at High Frequencies*. Vehicule System Dynamics, vol. 22, pages 209–262, 1993. (Cité en pages 12 et 31.)
- [Krylov 2001] V.V. Krylov. *Noise and vibration from high-speed trains*. Thomas Telford, 2001. (Cité en pages 1 et 7.)
- [Kuijpers 2008] A.H.W.M. Kuijpers. *Rail Roughness Monitoring in the Netherlands*. In 9<sup>th</sup> International Workshop on Railway Noise, Munich, 2008. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Kuijpers 2010] A.H.W.M. Kuijpers, W. Schwanen et E. Bongini. *Indirect rail roughness measurement : the ARRoW system within the LECAV project*. In 10<sup>th</sup> International Workshop on Railway Noise, Nagahama, 2010. (Cité en pages 9 et 11.)

- [Margiocchi 2007] F. Margiocchi, F. Letourneaux et P-E. Gautier. *Caractérisation vibro-acoustique d'une voie ferrée*. Acoustique & Technique, vol. 46-47, pages 24–33, 2007. (Cité en pages 26 et 39.)
- [Mellet 2006] C. Mellet, F. Létourneaux, F. Poisson et C. Talotte. *High speed train noise emission : Latest investigation of the aerodynamic/rolling noise contribution*. Journal of Sound and Vibration, vol. 293(3-5), pages 535–546, 2006. (Cité en page 1.)
- [Munjal 1982] M. L. Munjal et M. Heckl. *Some mechanisms of excitation of a railway wheel*. Journal of Sound and Vibration, vol. 81(1), pages 477–489, 1982. (Cité en page 15.)
- [Nordborg 2002] A. Nordborg. *Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 111(4), pages 1772–1781, 2002. (Cité en pages 20, 27, 135 et 140.)
- [Pieringer 2011] A. Pieringer. *Time-domain modelling of high-frequency wheel/rail interaction*. PhD thesis, CHALMERS University of Technology, Suède, 2011. (Cité en page 31.)
- [Remington 1987a] P. Remington. *Wheel/rail rolling noise, I : Theoretical analysis*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 81 (6), pages 1805–1823, 1987. (Cité en pages 12, 15 et 33.)
- [Remington 1987b] P. Remington. *Wheel/rail rolling noise, II : Validation of the theory*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 81 (6), pages 1824–1832, 1987. (Cité en page 1.)
- [Remington 1996] P. Remington et J. Webb. *Estimation of wheel/rail interaction force in the contact area due to roughness*. Journal of Sound and Vibration, vol. 193(1), pages 83–102, 1996. (Cité en page 33.)
- [Spänner 2008] J. Spänner. *A new approach of assessing rail roughness*. In 4<sup>th</sup> IET International Conference on Railway Condition Monitoring 2008, Derby, pages 1–5, 2008. (Cité en page 9.)
- [Squicciarini 2012] G. Squicciarini et D. Thompson. *Stardamp project - task 2.2 description of the stardamp tool*. 2012. (Cité en page 25.)
- [Thompson 1988] D.J. Thompson. *Predictions of acoustic radiation from vibrating wheels and rails*. Journal of Sound and Vibration, vol. 120, pages 275–380, 1988. (Cité en pages 18 et 51.)
- [Thompson 1993a] D.J. Thompson. *Wheel-rail noise generation. Part I : Introduction and interaction model*. Journal of Sound and Vibration, vol. 161(3), pages 387–400, 1993. (Cité en pages 1 et 50.)
- [Thompson 1993b] D.J. Thompson. *Wheel-rail noise generation. Part II : Wheel vibration*. Journal of Sound and Vibration, vol. 161(3), pages 401–419, 1993. (Cité en pages 13, 14, 15, 17 et 51.)
- [Thompson 1993c] D.J Thompson. *Wheel-Rail Noise generation, Part IV : Contact zone and results*. Journal of Sound and Vibration, vol. 161(3), pages 447–466, 1993. (Cité en page 32.)
- [Thompson 1993d] D.J Thompson. *Wheel-Rail Noise generation, Part V : Inclusion of wheel rotation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 161(3), pages 467–482, 1993. (Cité en page 17.)

- [Thompson 1996a] D.J. Thompson. *On the relationship between wheel and rail surface roughness and rolling noise*. Journal of Sound and Vibration, vol. 193(1), pages 149–160, 1996. (Cité en page 40.)
- [Thompson 1996b] D.J. Thompson, P. Fodiman et H. Mathé. *Experimental validation of TWINS prediction program for rolling noise, Part 2 : results*. Journal of Sound and Vibration, vol. 193(1), pages 137–147, 1996. (Cité en page 51.)
- [Thompson 1996c] D.J. Thompson, B. Hemsforth et N. Vincent. *Experimental validation of the TWINS prediction program for rolling noise, part 1, description of the model and method*. Journal of Sound and Vibration, vol. 193(1), pages 123–135, 1996. (Cité en pages 12 et 29.)
- [Thompson 1997] D.J. Thompson. *Experimental analysis of wave propagation in railway track*. Journal of Sound and Vibration, vol. 203(5), pages 867–888, 1997. (Cité en pages 20 et 92.)
- [Thompson 1999a] D.J. Thompson, M.H.A. Janssens et F.G. De Beer. *Twins theoretical manual (version 3.0)*. European Commission DG 12, Silent Freight and Silent track consortia, 1999. (Cité en page 94.)
- [Thompson 1999b] D.J. Thompson, N. Vicent et P. E. Gautier. *Validation of a model for railway rolling noise using field measurements with sinusoidally profiled wheels*. Journal of Sound and Vibration, vol. 223(4), pages 587–609, 1999. (Cité en page 15.)
- [Thompson 2000] D.J. Thompson et C. J. C. Jones. *A review of the modelling of wheel/rail noise generation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 231(3), pages 519–536, 2000. (Cité en pages 6 et 51.)
- [Thompson 2001] D.J. Thompson. *The effects of non-linearities at the wheel/rail interface on the generation of rolling noise*. In Inter-Noise, the 2001 International Congress on Noise Control Engineering, The Hague, 2001. (Cité en page 33.)
- [Thompson 2002] D.J. Thompson et C.J.C. Jones. *Sound Radiation from vibrating railway wheel*. Journal of Sound and Vibration, vol. 253, pages 401–419, 2002. (Cité en pages 18 et 78.)
- [Thompson 2003a] D.J. Thompson. *The influence of the contact zone excitation of wheel/rail noise*. Journal of Sound and Vibration, vol. 267(3), pages 523–535, 2003. (Cité en page 34.)
- [Thompson 2003b] D.J. Thompson, C.J.C. Jones et N. Turner. *Investigation into the validity of two-dimensional models for sound radiation from waves in rails*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 113, pages 1965–1974, 2003. (Cité en pages 29, 30 et 97.)
- [Thompson 2009] D. J. Thompson. *Railway noise and vibration, mechanisms, modelling and means of control*. Elsevier, 2009. (Cité en pages 6, 15, 17, 28, 30, 33, 34, 36, 37, 56, 71, 85 et 98.)
- [Touze 2002] C. Touze, O. Thomasy et A. Chaigne. *Asymmetric non-linear forced vibration of free-edge circular plate. Part 1 : theory*. Journal of Sound and Vibration, vol. 258(4), pages 649–676, 2002. (Cité en pages 13 et 59.)
- [Vincent 1996] N. Vincent, P. Bouvet, D.J. Thompson et P.E. Gautier. *Theoretical optimization of track components to reduce rolling noise*. Journal of Sound and Vibration, vol. 193(1), pages 161–171, 1996. (Cité en page 111.)

- [Wu 1999a] T.X. Wu et D.J. Thompson. *A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies*. Journal of Sound and Vibration, vol. 224(2), pages 329–348, 1999. (Cité en page 20.)
- [Wu 1999b] T.X. Wu et D.J. Thompson. *The effects of local preload on the foundation stiffness and vertical vibration of railway track*. Journal of Sound and Vibration, vol. 219(5), pages 881–904, 1999. (Cité en page 121.)
- [Wu 2000] T.X. Wu et D.J. Thompson. *The vibration behavior of railway track at high frequencies under multiple preloads and wheel interactions*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 108(3), pages 1046–1053, 2000. (Cité en page 120.)
- [Wu 2001] T.X. Wu et D.J. Thompson. *Vibration analysis of railway track with multiple wheels on the rail*. Journal of Sound and Vibration, vol. 239(1), pages 69–97, 2001. (Cité en page 120.)



# Modèles vibratoires de la voie : théorie des poutres

---

## Sommaire

---

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| <b>A.1 Support continu</b>        | <b>135</b> |
| A.1.1 Poutre d'Euler-Bernoulli    | 135        |
| A.1.1.1 Équation du mouvement     | 135        |
| A.1.1.2 Constantes de propagation | 136        |
| A.1.1.3 Fonction de Green         | 136        |
| A.1.2 Poutre de Timoshenko        | 137        |
| A.1.2.1 Équation du mouvement     | 137        |
| A.1.2.2 Constantes de propagation | 137        |
| A.1.2.3 Fonction de Green         | 138        |
| <b>A.2 Support périodique</b>     | <b>139</b> |
| A.2.1 Poutre d'Euler-Bernoulli    | 140        |
| A.2.1.1 Équation du mouvement     | 140        |
| A.2.1.2 Constantes de propagation | 140        |
| A.2.1.3 Fonction de Green         | 141        |
| A.2.2 Poutre de Timoshenko        | 142        |
| A.2.2.1 Équation du mouvement     | 142        |
| A.2.2.2 Constantes de propagation | 142        |
| A.2.2.3 Fonction de Green         | 143        |

---

Cette section présente la théorie des poutres sur des supports continus ou périodiques utilisées pour modéliser le comportement vibratoire de la voie ferroviaire. Elle est tirée des travaux de Nordborg [Nordborg 2002] (poutre d'Euler-Bernoulli) et de Hamet [Hamet 1999] (poutre de Timoshenko), notamment exposés dans [Faure 2011].

## A.1 Support continu

### A.1.1 Poutre d'Euler-Bernoulli

#### A.1.1.1 Équation du mouvement

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre mince d'Euler-Bernoulli en flexion soumise à une force extérieure et à la réaction du support s'écrit :

$$\frac{d^4}{dx^4}u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) = -\frac{F(\omega)}{B} \quad (\text{A.1})$$

où  $k_B^4 = m'_r \omega^2 / B$  est le nombre d'onde de flexion d'une poutre mince (infinie et libre),  $u(x, \omega)$  est le mouvement de flexion de la poutre et  $x$  la position le long du rail.  $F(\omega)$  est le champ

de forces extérieures en N/m composée de la force extérieure  $F_e(\omega)$  et la réaction du support  $F_s(\omega)$  telle que :

$$F(\omega) = F_e(\omega)\delta(x - x_0) - F_s(\omega), \quad (\text{A.2})$$

avec  $-F_s(\omega) = s'(\omega)u(x, \omega)$  où  $s'(\omega)$  est la raideur équivalente du support (cf. section 1.3.1 - Eq.1.10).

### A.1.1.2 Constantes de propagation

La solution générale de l'équation différentielle est une combinaison linéaire d'ondes de la forme  $u(x, \omega)e^{\pm\gamma(\omega)x}$ . La substitution de la forme du déplacement considérée dans l'équation (A.1) sans force extérieure autre que la réaction du support permet de déterminer les valeurs possibles de la constante de propagation. Autrement dit, les valeurs des constantes de propagation  $\gamma(\omega)$  sont cherchées tels que  $u(x, \omega)$  est solution de (A.1) pour  $F_e(\omega)=0$  (Eq. 1.12). Ce qui conduit à l'équation de dispersion suivante :

$$\gamma^4 = k_B^4 \left[ 1 - \frac{s'(\omega)}{m_r \omega^2} \right] = k_\beta^4, \quad (\text{A.3})$$

où  $k_\beta$  est le nombre d'onde de flexion d'une poutre d'Euler Bernoulli sur support continu de raideur linéique équivalente  $s'(\omega)$ . La racine quatrième est définie de manière à ce que  $\Re\{k_\beta\} > 0$  et  $\Im\{k_\beta\} < 0$ . La solution générale de l'équation A.1 s'écrit sous la forme :

$$u(x, \omega) = a_1 e^{k_\beta x} + a_2 e^{i k_\beta x} + b_1 e^{-k_\beta x} + b_2 e^{-i k_\beta x}. \quad (\text{A.4})$$

### A.1.1.3 Fonction de Green

La fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  associée à l'équation (A.1) est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire ( $F_e(\omega)=1$ ) appliquée en  $x_0$ . C'est la solution de l'équation :

$$\frac{d^4}{dx^4} G_\omega(x, x_0) - k_\beta^4(\omega) G_\omega(x, x_0) = \frac{1}{B} \delta(x - x_0). \quad (\text{A.5})$$

La fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  est obtenue par la méthode directe selon le raisonnement suivant [Faure 2011] :

**a** - En tout autre point que celui de l'excitation ( $\forall x \neq x_0$ ), aucune force extérieure autre que la réaction du support n'est appliquée, cela signifie que :

$$\frac{d^4}{dx^4} G_\omega(x, x_0) - k_\beta^4(\omega) G_\omega(x, x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0. \quad (\text{A.6})$$

**b** - Au point d'excitation ( $x = x_0$ ), les deux premières dérivées de la fonction de Green sont continues et la discontinuité est assumée par la dérivée d'ordre 3. En intégrant l'équation (A.5) de part et d'autre de  $x_0$ , compte tenu de la discontinuité de  $G_\omega(x, x_0)$  en  $x = x_0$ , on obtient :

$$\frac{d^3}{dx^3} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{B}, \quad (\text{A.7})$$

c - À plus ou moins l'infini ( $\pm\infty$ ), la fonction de Green est bornée.

Comme toute solution de l'équation A.1, la fonction  $G_\omega$  est de la forme A.4. Compte tenu des conditions c (à l'infini) elle peut s'écrire :

$$G_\omega(x, x_0) \begin{cases} = a_1 e^{k_\beta(x-x_0)} + a_2 e^{\imath k_\beta(x-x_0)} & x < 0 \\ = b_1 e^{-k_\beta(x-x_0)} + b_2 e^{-\imath k_\beta(x-x_0)} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont déterminés en utilisant les conditions b en  $x_0$ . Ce sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} G_\omega(x, x_0)|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \\ \frac{d}{dx} G_\omega(x, x_0)|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} G_\omega(x, x_0)|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \\ \frac{d^3}{dx^3} G_\omega(x, x_0)|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{B} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

ce qui revient à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -k_\beta & -\imath k_\beta & -k_\beta & -\imath k_\beta \\ k_\beta^2 & -k_\beta^2 & -k_\beta^2 & k_\beta^2 \\ -k_\beta^3 & \imath k_\beta^3 & -k_\beta^3 & \imath k_\beta^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

La fonction de Green obtenue s'écrit :

$$G_\omega = -\frac{1}{4k_\beta^3} \frac{1}{B} \left[ e^{-k_\beta|x-x_0|} + \imath e^{-\imath k_\beta|x-x_0|} \right]. \quad (\text{A.11})$$

## A.1.2 Poutre de Timoshenko

### A.1.2.1 Équation du mouvement

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre épaisse de Timoshenko en flexion soumise au champ des forces extérieures  $F(\omega)$  (Eq. A.2) s'écrit :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] u(x, \omega) = \frac{F(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right], \quad (\text{A.12})$$

avec :

le nombre d'onde des ondes de compression  $k_c = \omega \sqrt{\rho/E}$ ,

le nombre d'onde des ondes de cisaillement  $k_t^* = \omega \sqrt{\rho/G^*}$  où  $G^* = G/\kappa$ ,

et la rigidité de cisaillement  $K = G^* M/\rho$ .

### A.1.2.2 Constantes de propagation

Comme pour la poutre d'Euler Bernoulli, la substitution de l'expression du déplacement  $u(x, \omega) e^{\pm\gamma(\omega)x}$  dans l'équation (A.12) sans force extérieure autre que la réaction du support permet de déterminer les valeurs possibles de la constante de propagation. La relation de

dispersion s'écrit :

$$\gamma^4 + \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \gamma^2 - \left( k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) = 0 \quad (\text{A.13})$$

qui admet quatre solutions  $k_d$ ,  $-k_d$ ,  $ik_p$  et  $-ik_p$  avec :

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left[ \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right)^2 + 4 \left( k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.14})$$

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left[ \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right)^2 + 4 \left( k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.15})$$

où la notation  $\frac{1}{2}$  représente la racine carrée à partie réelle positive et à partie imaginaire négative. La solution générale de l'équation (A.12) s'écrit sous la forme :

$$u(x, \omega) = a_1 e^{k_d x} + a_2 e^{ik_p x} + b_1 e^{-k_d x} + b_2 e^{-ik_p x}. \quad (\text{A.16})$$

### A.1.2.3 Fonction de Green

La fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  associé à l'équation A.12 est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire  $[F_e(\omega)=1]$  appliquée en  $x_0$ . C'est la solution de l'équation :

$$\left[ \frac{d^4}{dx^4} + \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \frac{d^2}{dx^2} - k_B^4 + k_c^2 k_t^{*2} + \frac{s'(\omega)}{B} \left( 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right) \right] G_\omega(x, x_0) = \left[ \frac{1}{B} \left\{ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right\} - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dx^2} \right] \delta(x - x_0). \quad (\text{A.17})$$

Le raisonnement de la méthode directe utilisé pour obtenir la fonction de Green de la poutre d'Euler-Bernoulli est tenu pour la poutre de Timoshenko.

**a -** En tout autre point que celui de l'excitation ( $\forall x \neq x_0$ ), aucune force extérieure autre que la réaction du support n'est appliquée, cela signifie que :

$$\left[ \frac{d^4}{dx^4} + \left( k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \frac{d^2}{dx^2} - k_B^4 + k_c^2 k_t^{*2} + \frac{s'(\omega)}{B} \left( 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right) \right] G_\omega(x, x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0. \quad (\text{A.18})$$

**b -** Au point d'excitation ( $x = x_0$ ), la fonction de Green est continue. En revanche, contrairement au cas du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, la dérivée d'ordre 2 présente au second membre de l'équation (A.12) impose des discontinuités dès la dérivée d'ordre 1. En intégrant successivement l'équation (A.18) de part et d'autre de  $x_0$  on obtient

[Faure 2011] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3}{dx^3} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} + (k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K}) \frac{d}{dx} G_\omega \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{B} [1 - \frac{B}{K} k_c^2] \\ \frac{d^2}{dx^2} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \\ \frac{d}{dx} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = -\frac{1}{K} \\ G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

c - À plus ou moins l'infini ( $\pm\infty$ ), la fonction de Green est bornée.

Comme toute solution de l'équation A.12, la fonction  $G_\omega$  est de la forme A.16. Compte tenu des conditions c (à l'infini) elle peut s'écrire :

$$G_\omega(x, x_0) \begin{cases} = a_1 e^{k_d(x-x_0)} + a_2 e^{ik_p(x-x_0)} & x < 0 \\ = b_1 e^{-k_d(x-x_0)} + b_2 e^{-ik_p(x-x_0)} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont déterminés en utilisant les conditions b en  $x_0$ . Ce sont les solutions du système d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -k_d & -ik_p & -k_d & -ik_p \\ k_d^2 & -k_p^2 & -k_d^2 & k_p^2 \\ -k_d^3 & ik_p^3 & -k_d^3 & ik_p^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{K} \\ 0 \\ \frac{1}{B} - \frac{1}{K} [k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K}] \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

La fonction de Green obtenue s'écrit :

$$G_\omega(x, x_0) = -\frac{1}{B} \left[ F_d e^{-k_d|x-x_0|} + iF_p e^{-ik_p|x-x_0|} \right], \quad (\text{A.22})$$

où

$$F_p = \frac{1 - \frac{B}{K}(-k_p^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_p(k_p^2 + k_d^2)} \quad F_d = \frac{1 - \frac{B}{K}(k_d^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_d(k_p^2 + k_d^2)}. \quad (\text{A.23})$$

## A.2 Support périodique

Rappelons les hypothèses utilisées dans le cas du modèle de poutre sur supports périodiques (cf. section 1.3.1.4) :

- les supports au nombre infini sont régulièrement espacés d'une distance  $a$  (les points d'attaches sont repérés par les abscisses notés  $x_n$  donc  $x_n = na$  et l'origine des abscisses est situé sur une traverse),
- les impédances mécaniques  $s(\omega)$  (Eq. 1.10) de chaque support sont supposées identiques,
- le théorème de Floquet relatif aux structures périodiques est considéré.

Le modèle inclut la réaction de chaque support (traverse) qui constitue une force de rappel  $-F_s(\omega) = s(\omega)u(na, \omega)\delta(x - na)$ . La force extérieure appliquée en  $x_0$  est  $F_e(\omega)\delta(x - x_0)$ .

## A.2.1 Poutre d'Euler-Bernoulli

### A.2.1.1 Équation du mouvement

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre mince d'Euler-Bernoulli en flexion, soumise à une force extérieure et à la réaction du support périodique, s'écrit :

$$\frac{d^4}{dx^4}u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) + \frac{s(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(na, \omega) \delta(x - na) = \frac{F_e(\omega)}{B} \delta(x - x_0). \quad (\text{A.24})$$

### A.2.1.2 Constantes de propagation

En l'absence de force extérieur [ $F_e(\omega) = 0$ ], le système (rail en appui sur les traverses) est libre. Les ondes qui peuvent se propager le long de ce système sont solution de l'équation :

$$\frac{d^4}{dx^4}u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) = -\frac{s(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(na, \omega) \delta(x - na). \quad (\text{A.25})$$

Le théorème de Floquet qui stipule que la solution doit être telle que :

$$u(x + na, \omega) = u(x, \omega) e^{-n\gamma a}, \quad (\text{A.26})$$

permet d'écrire :

$$\frac{d^4}{dx^4}u(x, \omega) - k_B^4 u(x, \omega) = -\frac{s(\omega)}{B} u(0, \omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) e^{-n\gamma a}. \quad (\text{A.27})$$

La transformé de Fourier inverse de la transformée de Fourier spatiale de l'équation (A.27) permet d'obtenir la solution sous la forme [Nordborg 2002] :

$$u(x, \omega) = -u(0, \omega) \frac{s(\omega)}{4k_B^3 B} \mathcal{Y}_E(x, \gamma) \quad (\text{A.28})$$

avec :

$$\mathcal{Y}_E(x, \gamma) = \frac{\sin k_B(a - x) + e^{-\gamma a} \sin k_B x}{\cos k_B a - \cos \gamma a} - \frac{\sinh k_B(a - x) + e^{-\gamma a} \sinh k_B x}{\cosh k_B a - \cosh \gamma a} \quad (\text{A.29})$$

La constante de propagation est alors déterminée en écrivant l'équation (Eq. A.28) en  $x=0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \cosh^2 \gamma a + \left[ \frac{s(\omega)}{4k_B^3} (\sinh k_B a - \sin k_B a) - (\cosh_h k_B a + \cos_h k_B a) \right] \cosh \gamma a \\ + \frac{s(\omega)}{4k_B^3} (\cosh k_B a \sin k_B a - \cos k_B a \sinh k_B a) + \cosh k_B a \cos k_B a = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

La relation de dispersion (Eq. A.30) admet deux solutions :  $\cosh \gamma_p a$  et  $\cosh \gamma_d a$ . A chacune de ces solutions correspondent deux valeurs  $\pm \gamma_p$  et  $\pm \gamma_d$  de la constante de propagation. Nous conviendrons de désigner par  $\gamma_p$  et  $\gamma_d$  les solutions ayant une partie réelle positive :  $\Re\{\gamma_p\} \geq 0$ ,  $\Re\{\gamma_d\} \geq 0$ . L'équation différentielle du mouvement du système libre admet donc quatre solutions élémentaires. La solution générale peut être écrite sous la forme d'une combinaison

linéaire de ces quatre solutions :

$$u(x, \omega) = a_1 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} + b_1 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_p) e^{-n\gamma_p a} \quad (\text{A.31})$$

avec :  $x = \tilde{x} = \tilde{x} + na$ ,  $0 \leq \tilde{x} < a$

### A.2.1.3 Fonction de Green

La fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  associée à l'équation (A.24) est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire [ $F_e(\omega)=1$ ] appliquée en  $x_0$ . C'est la solution de l'équation :

$$\frac{d^4}{dx^4} G_\omega(x, x_0) - k_B^4 G_\omega(x, x_0) + \frac{s(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\omega(na, x_0) \delta(x - na) e^{-\gamma a} = \frac{1}{B} \delta(x - x_0) \quad (\text{A.32})$$

Le raisonnement de la méthode directe tenu dans le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli sur support continu pour déterminer la fonction de Green est utilisé dans le cas du support périodique :

**a** - En tout autre point que celui de l'excitation ( $\forall x \neq x_0$ ), le système est libre<sup>1</sup> :

$$\frac{d^4}{dx^4} G_\omega(x, x_0) - k_B^4 G_\omega(x, x_0) + \frac{s(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\omega(na, x_0) \delta(x - na) = 0 \quad \forall x \neq x_0. \quad (\text{A.33})$$

**b** - Au point d'excitation ( $x = x_0$ ), les deux premières dérivées de la fonction de Green sont continues et la discontinuité est assumée par la dérivée d'ordre 3.

$$\frac{d^3}{dx^3} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{B}, \quad (\text{A.34})$$

**c** - À plus ou moins l'infini ( $\pm\infty$ ), la fonction de Green est bornée.

La fonction de Green est alors exprimée par une combinaison des solutions élémentaires de l'équation (A.25) dont la forme générale est donnée par l'équation (A.31). Compte tenu de la condition **c** à l'infini, elle peut s'écrire :

$$G_\omega(x, x_0) \begin{cases} = a_1 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} & \tilde{x} = \tilde{x} + na < x_0 \\ = b_1 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 \mathcal{Y}_E(\tilde{x}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p a} & \tilde{x} = \tilde{x} + na > x_0 \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

Les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont déterminés en utilisant les conditions **b** en  $x_0$ . Ce sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Y}_E(x_0, -\gamma_d) & -\mathcal{Y}_E(x_0, -\gamma_p) & \mathcal{Y}_E(x_0, \gamma_d) & \mathcal{Y}_E(x_0, \gamma_p) \\ -\dot{\mathcal{Y}}_E(x_0, -\gamma_d) & -\dot{\mathcal{Y}}_E(x_0, -\gamma_p) & \dot{\mathcal{Y}}_E(x_0, \gamma_d) & \dot{\mathcal{Y}}_E(x_0, \gamma_p) \\ -\ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, -\gamma_d) & -\ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, -\gamma_p) & \ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, \gamma_d) & \ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, \gamma_p) \\ -\ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, -\gamma_d) & -\ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, -\gamma_p) & \ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, \gamma_d) & \ddot{\mathcal{Y}}_E(x_0, \gamma_p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

1. Rappelons que le système libre correspond au système rail sur son support sans aucune force extérieure.

où  $\dot{\mathcal{Y}}_E, \ddot{\mathcal{Y}}_E, \dddot{\mathcal{Y}}_E$  désignent respectivement les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 par rapport à  $x$ .

## A.2.2 Poutre de Timoshenko

### A.2.2.1 Équation du mouvement

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre épaisse de Timoshenko en flexion, soumise à une force extérieure et à la réaction du support périodique, s'écrit :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] u(x, \omega) + \frac{s(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(na, \omega) \delta(x-na) = \frac{F_e(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \delta(x-x_0). \quad (\text{A.37})$$

### A.2.2.2 Constantes de propagation

En l'absence de force extérieure [ $F_e(\omega) = 0$ ], le système (rail en appui sur les traverses) est libre. Les ondes qui peuvent se propager le long de ce système sont solution de l'équation :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] u(x, \omega) = \frac{s(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(na, \omega) \delta(x-na) \quad (\text{A.38})$$

En appliquant le théorème de Floquet (Eq. A.26), l'équation (A.38) devient :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] u(x, \omega) = -u(0, \omega) \frac{s(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n\gamma a} \delta(x-xa). \quad (\text{A.39})$$

La transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier spatiale de cette équation (Eq. A.39) permet d'obtenir la solution sous la forme :

$$u(x, \omega) = -u(0, \omega) \frac{s(\omega)}{B} \mathcal{Y}_T(x, \gamma), \quad (\text{A.40})$$

avec :

$$\mathcal{Y}_T(x, \gamma) = F_p \frac{\sin k_p(a-x) + e^{-\gamma a} \sin k_p x}{\cos k_p a - \cosh \gamma a} - F_d \frac{\sinh k_d(a-x) + e^{-\gamma a} \sinh k_d x}{\cosh k_d a - \cosh \gamma a}. \quad (\text{A.41})$$

La constante de propagation est alors déterminée en écrivant l'équation (Eq. A.40) en  $x=0$ , on obtient :

$$\cosh^2 \gamma a + \left[ \frac{s(\omega)}{B} (F_d \sinh k_d a - F_p \sin k_p a) - (\cosh k_d a + \cos k_p a) \right] \cosh \gamma a + \frac{s(\omega)}{B} (F_p \cosh k_d a \sin k_p a - F_d \cos k_p a \sinh k_d a) + \cosh k_d a \cos k_p a = 0. \quad (\text{A.42})$$

Comme pour la poutre d'Euler-Bernoulli sur supports périodiques, la relation de dispersion (Eq. A.42) admet deux solutions :  $\cosh \gamma_p a$  et  $\cosh \gamma_d a$ . A chacune de ces solutions correspondent deux valeurs  $\pm \gamma_p$  et  $\pm \gamma_d$  de la constante de propagation. Nous conviendrons de

désigner par  $\gamma_p$  et  $\gamma_d$  les solutions ayant une partie réelle positive :  $\Re\gamma_p \geq 0$ ,  $\Re\gamma_d \geq 0$ . L'équation différentielle du mouvement du système libre admet donc quatre solutions élémentaires. La solution générale peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire de ces quatre solutions :

$$u(x, \omega) = a_1 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} + b_1 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, -\gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, -\gamma_p) e^{-n\gamma_p a} \quad (\text{A.43})$$

avec :  $x = \tilde{x} = \tilde{x} + na$ ,  $0 \leq \tilde{x} < a$ .

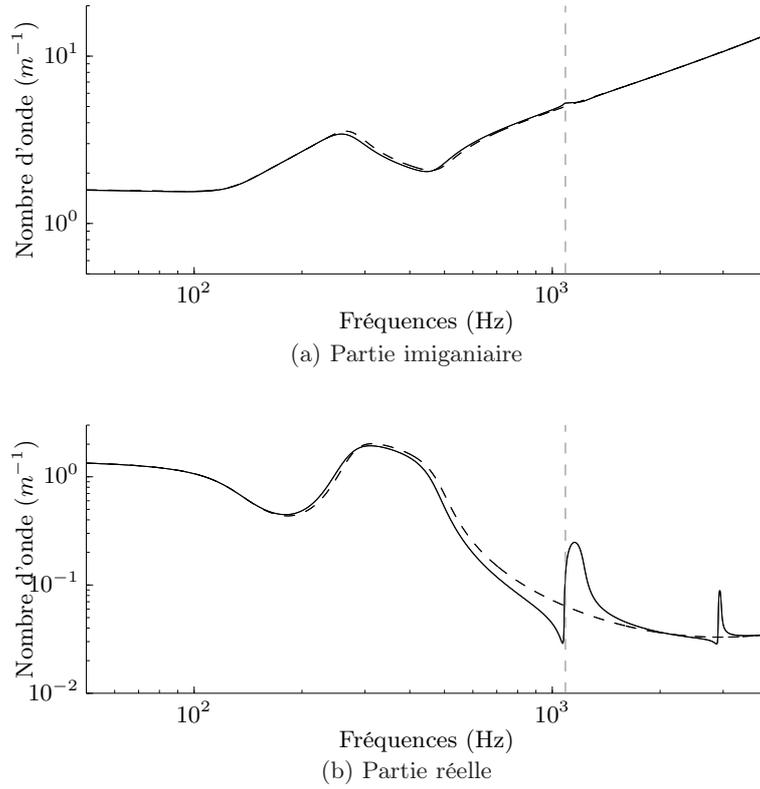


FIGURE A.1 – Constante de propagation de l'onde de propagative de flexion verticale pour une voie typique (cf. Tab 1.3) modélisée par une poutre de Timoshenko sur support continu (---) et supports périodiques (—).

### A.2.2.3 Fonction de Green

La fonction de Green  $G_\omega(x, x_0)$  associé à l'équation A.37 est la réponse spatiale du rail à une force extérieure ponctuelle unitaire [ $F_e(\omega)=1$ ] appliquée en  $x_0$ . C'est la solution de l'équation :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] G_\omega(x, \omega) + \frac{s(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_\omega(na, \omega) \delta(x-na) = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \delta(x - x_0) \quad \forall x \neq x_0. \quad (\text{A.44})$$

La fonction de Green est évaluée par la méthode directe :

a - En tout autre point que celui de l'excitation ( $\forall x \neq x_0$ ), le système est libre :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] G_\omega(x, \omega) + \frac{s(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_\omega(na, \omega) \delta(x - na) = 0. \quad (\text{A.45})$$

b - Au point d'excitation ( $x = x_0$ ), la fonction épond aux conditions suivantes (cf. section A.1.2.3) :

$$\begin{cases} \frac{d^3}{dx^3} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = \frac{1}{B} \left[ 1 + \frac{B}{K} k_t^2 \right] \\ \frac{d^2}{dx^2} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \\ \frac{d}{dx} G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = -\frac{1}{K} \\ G_\omega(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

c - À plus ou moins l'infini ( $\pm\infty$ ), la fonction de Green est bornée.

La fonction de Green est alors exprimée par une combinaison des solutions élémentaires de l'équation (A.44) dont la forme générale est donnée par l'équation (A.43). Compte tenu de la condition c à l'infini, elle peut s'écrire :

$$G_\omega(x, x_0) \begin{cases} = a_1 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} & \tilde{x} = \tilde{x} + na < x_0 \\ = b_1 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 \mathcal{Y}_T(\tilde{x}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p a} & \tilde{x} = \tilde{x} + na > x_0 \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont déterminés en utilisant les conditions b en  $x_0$ . Ce sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Y}_T(x_0, -\gamma_d) & -\mathcal{Y}_T(x_0, -\gamma_p) & \mathcal{Y}_T(x_0, \gamma_d) & \mathcal{Y}_T(x_0, \gamma_p) \\ -\dot{\mathcal{Y}}_T(x_0, -\gamma_d) & -\dot{\mathcal{Y}}_T(x_0, -\gamma_p) & \dot{\mathcal{Y}}_T(x_0, \gamma_d) & \dot{\mathcal{Y}}_T(x_0, \gamma_p) \\ -\ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, -\gamma_d) & -\ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, -\gamma_p) & \ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, \gamma_d) & \ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, \gamma_p) \\ -\ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, -\gamma_d) & -\ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, -\gamma_p) & \ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, \gamma_d) & \ddot{\mathcal{Y}}_T(x_0, \gamma_p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{K} \\ 0 \\ \frac{1}{B} \left[ 1 + \frac{B}{K} k_t^{*2} \right] \end{bmatrix}. \quad (\text{A.48})$$

où  $\dot{\mathcal{Y}}_T, \ddot{\mathcal{Y}}_T, \ddot{\mathcal{Y}}_T$  désignent respectivement les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 par rapport à  $x$ .

# Campagne de mesure LECAV

## Sommaire

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>B.1</b> | <b>Caractéristiques de la voie ferrée</b>                         | <b>145</b> |
| <b>B.2</b> | <b>Équipement de la roue et du rail : informations techniques</b> | <b>145</b> |
| <b>B.3</b> | <b>Mesure du taux de décroissance</b>                             | <b>146</b> |
| <b>B.4</b> | <b>Correction des mesures vibratoires latérales sur le rail</b>   | <b>147</b> |

## B.1 Caractéristiques de la voie ferrée

La voie ferrée de service de l'établissement de maintenance des Ardoines est composée d'un rail U36 posé sur une semelle cannelée en élastomère de 9 mm d'épaisseur. Le rail est attaché à des traverses bi-blocs béton de type VAX U31 et de masse 202 kg par des attaches Nabla (voir Fig. B.1). L'ensemble repose sur une banquette de ballast d'une hauteur de 20 cm.



FIGURE B.1 – Type de voie : système d'attache du rail

## B.2 Équipement de la roue et du rail : informations techniques

La roue a été équipée de microphones à électronique intégrée 1/4 de pouce Brüel & Kjaer de type champ libre, de sensibilité nominale de 30 mV/Pa et de bande passante 12 kHz (référence : 4951 - voir Fig. 2.5a), ainsi que d'accéléromètres cubiques à électronique intégrée de 5 grammes Brüel & Kjaer, de sensibilité nominale de 10 mV/m.s<sup>-2</sup> et de bande passante 10 kHz (référence : 4507B - voir Fig. 2.5b). Les capteurs fixés (par de la colle) au rail et à la roue au niveau du point de contact étaient des accéléromètres cubiques à électronique intégrée de 18 grammes DJB, de sensibilité nominale 10 mV/g (référence : A/120/V - voir Fig. 2.39a). L'acquisition de l'ensemble des voies a été réalisée de manière synchrone à la fréquence d'échantillonnage de 16384 Hz et numérisée en 32 bits. Les acquisitions temporelles des signaux ont été effectuées pour une durée de trois secondes. Ce temps d'acquisition a permis d'obtenir un pas fréquentiel inférieur à 0,4 Hz adapté à l'analyse modale d'une structure résonante peu amortie telle que la roue. Le capteur de force du marteau d'impact

avait une sensibilité de 2,19 mV/N et de bande passante 6kHz. Les capteurs microphoniques accélérométriques, ainsi que la chaîne d'acquisition ont été également utilisés pour les mesures vibroacoustiques menées sur le rail et présentées dans le chapitre 3 (voir Fig. 3.8a et 3.16).

### B.3 Mesure du taux de décroissance

La tête du champignon du rail a été instrumentée de deux accéléromètres fixés verticalement et latéralement à mi-distance entre deux traverses. Le rail est excité par une impulsion au marteau d'impact. L'estimation du taux de décroissance des ondes vibratoires dans le rail selon la norme NF EN ISO 15461 [AFN 2008] est basée sur la mesure d'un ensemble de réponses en fréquence, dans le sens vertical et latéral pour la force appliquée dans le même sens, le long du rail. Les positions de mesurages sont représentées sur la figure B.1. La répartition de ces positions permet à la fois une densité de mesure proche de l'accéléromètre adaptée aux fortes atténuations ainsi qu'un nombre suffisant de mesures éloignées pour les faibles atténuations.

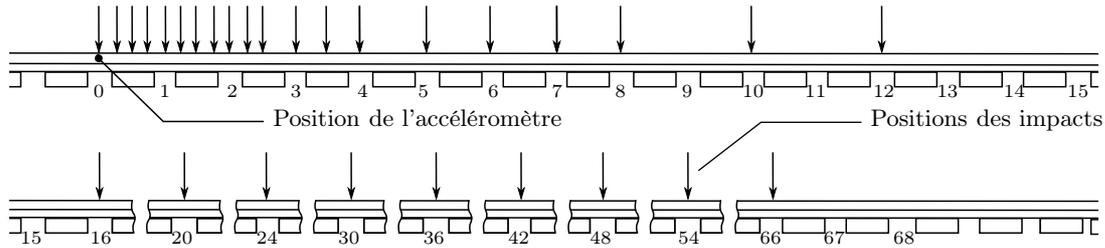


FIGURE B.2 – Positions des impacts effectués au marteau à choc par rapport à l'accéléromètre [AFN 2008].

Dans l'hypothèse où les ondes de flexion verticale et transversale s'atténuent de façon exponentielle en fonction de la distance  $x$  le long du rail, l'amplitude de la réponse  $A$  (vitesse ou accélération) du rail au point d'abscisse  $x$  peut s'écrire en fonction de la réponse à l'origine :  $A(x) \approx A(0)e^{-\beta x}$ , où  $\beta$  est la constante de décroissance. Le taux de décroissance est déterminé par intégration du rapport des réponses en puissance le long du rail sur la réponse en puissance à l'origine [Jones 2006] :

$$\int_0^{\infty} |A(x)|^2 dx = |A(x)|^2 \int_0^{\infty} e^{-2\beta x} = \int_0^{\infty} \frac{|A(x)|^2}{|A(0)|^2} dx = \frac{1}{2\beta} \quad (\text{B.1})$$

Ne disposant que de mesures discrètes le long du rail entre le point de réponse ( $x=0$ ) et la distance maximale  $x_{max}$  de mesure, la constante de décroissance est évaluée sur la base d'une estimation de la somme des réponses telle que :

$$\frac{1}{2\beta} = \sum_{x=0}^{x_{max}} \frac{|A(x)|^2}{|A(0)|^2} \Delta x, \quad (\text{B.2})$$

où  $\Delta x$  est l'intervalle entre les points situés à mi-distance des positions de mesure des deux

cotés. De (B.2), le taux de décroissance  $\Delta$  en dB/m s'écrit :

$$\Delta = \beta 20 \log(e) = \frac{10 \log(e)}{\sum_{x=0}^{x_{max}} \frac{|A(x)|^2}{|A(0)|^2} \Delta_x}, \quad (\text{B.3})$$

Les taux de décroissance verticale et latérale tracés sur la figure 3.15a sont obtenus par cette dernière équation (Eq. B.3). Les réponses vibratoires verticales mesurées le long du rail sont utilisées pour valider la réponse spatiale donnée par le modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodique présenté dans la section 3.2.2 (voir Fig. 3.5). Les taux de décroissance et les modules des réponses en fréquences ont été fournis par l'AEF (Agence d'Essai Ferroviaire).

## B.4 Correction des mesures vibratoires latérales sur le rail

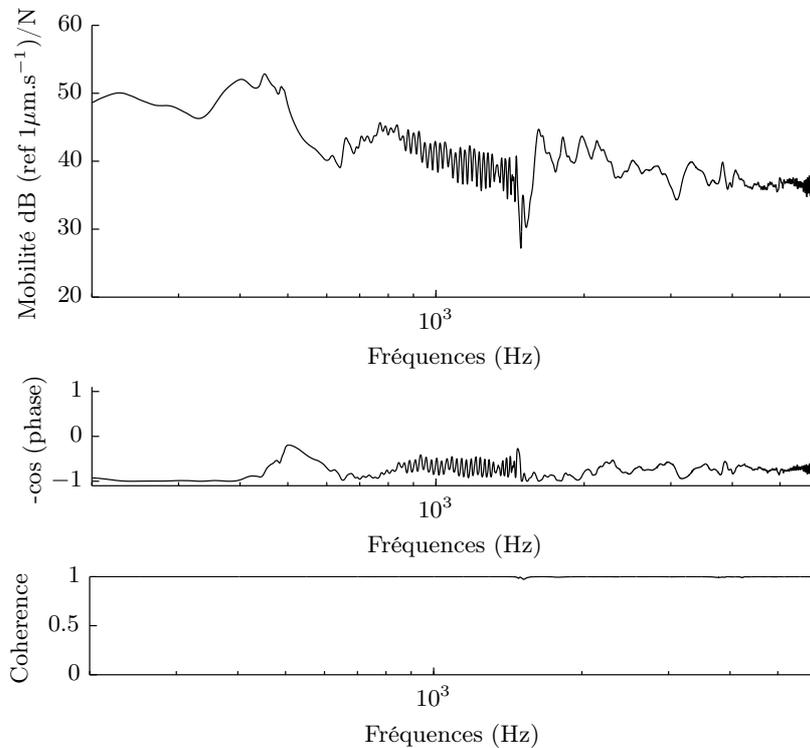


FIGURE B.3 – Mobilité latérale  $x=0$  m.

Il apparait des oscillations autour de 1000 et 5500 Hz sur la mobilité latérale mesurée sur le champignon du rail<sup>1</sup> (voir Fig. B.3). Sur le signal temporel de l'accélération latérale du rail mesuré, tracé sur la figure B.4a, on observe aux instants  $t_1 \approx 0.02$  s et  $t_2 \approx 0.04$  s une augmentation de l'accélération après la décroissance de l'amplitude vibratoire provoquée par l'excitation impulsionnelle effectuée à l'aide d'un marteau d'impact. Ces augmentations vibratoires correspondent à deux ondes réfléchies par la rupture d'impédance du rail à la jonction entre deux voies. À cette jonction, le rail de la voie étudiée est coupé et relié au rail d'une autre voie par une éclisse (voir Fig. B.4).

1. L'accéléromètre est fixé sur la face latérale du champignon et la force est appliquée sur cette même face.

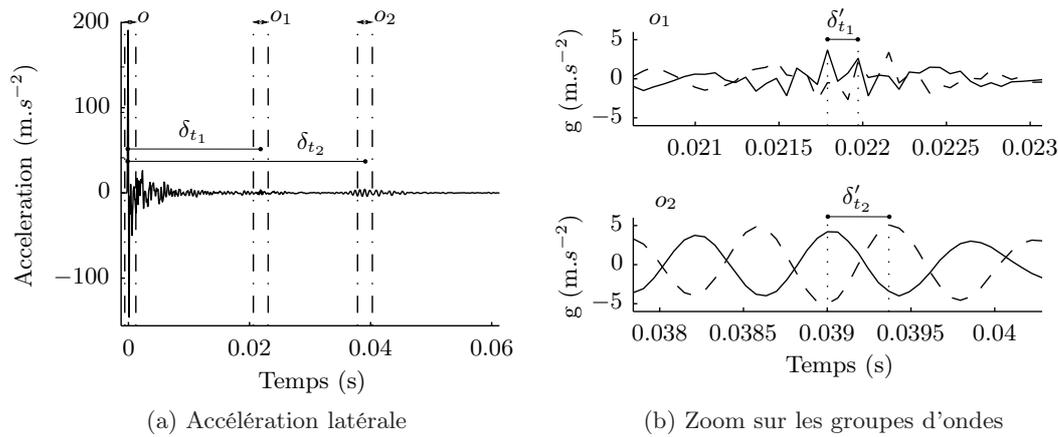


FIGURE B.4 – Accélération latérale en  $x=0$  (—) et  $x=0.31$  (- - -).

Le rail en acier est un milieu dispersif : la vitesse de groupe des ondes latérales dépend de la fréquence. Les ondes « retour » à chaque instant  $t_1$  et  $t_2$  correspondent respectivement aux fréquences 5700 Hz et 1100 Hz : l'onde haute fréquence se propage deux fois plus vite que l'onde basse fréquence (voir Fig. B.5a). Autour de ces fréquences, les ondes latérales dans le rail sont peu atténuées, de l'ordre de 0,3 dB/m (voir Fig. 3.15a), et se propagent sur une longue distance. Dans la direction verticale, l'énergie vibratoire des ondes réfléchies est négligeable (voir Fig. B.5b) du fait de la plus forte atténuation des ondes verticales (voir Fig. 3.15a).

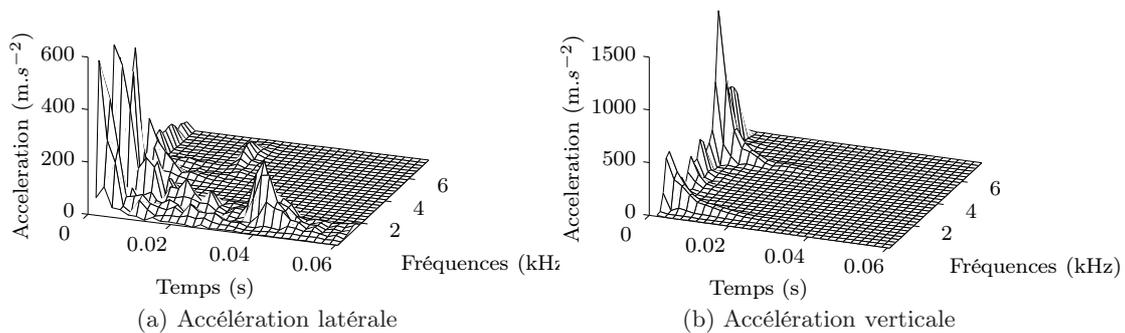


FIGURE B.5 – Représentation temps/fréquences des accélérations latérale et verticale en  $x = 0$ .

Pour confirmer l'apparition d'ondes de flexion latérales « retour » provoquées par la rupture du rail, la distance  $D$  parcourue par les ondes  $o_1$  et  $o_2$  entre le point d'excitation et le point de réflexion des ondes est estimée à partir de leur vitesses de groupe mesurées le long du rail. La distance  $D$  est déterminée par :

$$D = \delta_{t_1} c_1 = \delta_{t_2} c_2 \quad (\text{B.4})$$

où  $\delta_{t_1}$  et  $\delta_{t_2}$  sont les temps de propagations respectifs d'un aller et retour des groupes d'ondes

$o_1$  et  $o_2$ .  $c_1$  et  $c_2$  sont les vitesses de groupe des ondes latérales  $o_1$  et  $o_2$  définies par :

$$c_1 = \frac{\delta x}{\delta'_{t_1}} \quad c_2 = \frac{\delta x}{\delta'_{t_2}} \quad (\text{B.5})$$

où  $\delta'_{t_1}$  et  $\delta'_{t_2}$  sont les temps de vol respectifs des groupes d'ondes  $o_1$  et  $o_2$  mesurées<sup>2</sup> entre deux points de mesure accélérométriques<sup>3</sup> le long du rail espacés de la distance  $\delta x$  (voir Fig. B.4b). Les vitesses de groupe moyennes  $c_1=1919 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c_2=875 \text{ m.s}^{-1}$  ainsi obtenues, donne une distance moyenne  $D$  d'environ 28 m, ce qui correspond à 64 traverses. La distance  $D$  estimée correspond au double (aller-retour) de la distance  $d$  entre le point d'excitation et l'éclisse ( $D/2 \approx d \approx 19 \text{ m}$  ce qui correspond à 32 traverses - voir Fig. B.6). Les oscillations observées sur la représentation de la mobilité latérales figure B.3 sont donc dues à la rupture du rail au niveau de l'éclisse en amont des positions de mesures. Pour s'affranchir de ces oscillations perturbatrices, la mobilité est calculée sur le signal temporel de l'accélération tronqué avant la première onde retour (pour  $t=0.021\text{s}$ ) (voir Fig. B.7). La courte fenêtre temporelle induit un plus grand pas fréquentiel des réponses en fréquences « corrigées », comme sur les figures 3.10 et 3.15.

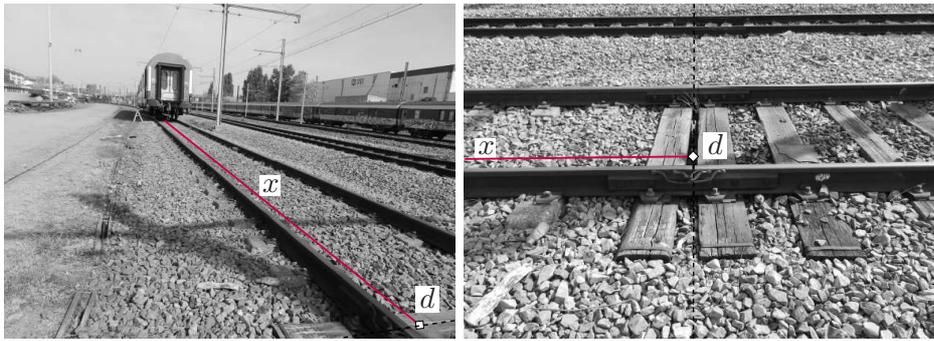


FIGURE B.6 – Raccordement du rail par une éclisse au niveau du changement de type de voie

2. Les temps de vols sont estimées à partir de l'inter-corrélations.

3. Les positions de mesures accélérométrique sont donnés sur la figure 3.17.

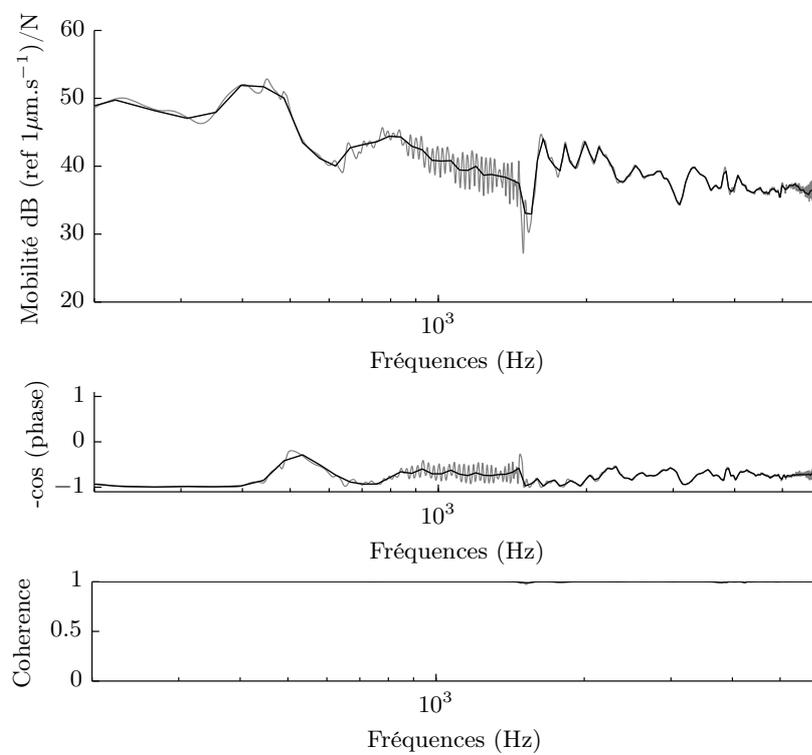


FIGURE B.7 – Mobilité latérale pour une excitation latérale en  $x=0$  m ; prise en compte des réflexions à la rupture du rail ( $t=3$  s) (—) et sans les réflexions ( $t=0.021$  s) (---).

# Modèle d'impédance acoustique d'une roue monobloc

---

## Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>C.1 Comportement vibratoire</b> . . . . .                            | <b>151</b> |
| <b>C.2 Comportement acoustique</b> . . . . .                            | <b>155</b> |
| C.2.1 Intégrale de Rayleigh : théorie . . . . .                         | 155        |
| C.2.2 Etude de convergence numérique du modèle de rayonnement . . . . . | 156        |
| C.2.3 Champ proche, champ lointain et effet de sol . . . . .            | 159        |
| C.2.4 Calcul du champ acoustique . . . . .                              | 160        |
| <b>C.3 Impédance acoustique</b> . . . . .                               | <b>166</b> |
| <b>C.4 Approximation de l'impédance acoustique</b> . . . . .            | <b>171</b> |

---

Les résultats obtenus par les modèles du comportement vibratoire et acoustique de la roue monobloc de 890 mm de diamètre sont présentés ici pour tous les modes.

## C.1 Comportement vibratoire

La réponse vibratoire de chaque mode obtenue par la méthode des éléments finis (cf. section 2.3.1.1) et la mesure (cf. section 2.2.2) relative à la section 2.3.1.3 est présentée sur les figures C.1 à C.3

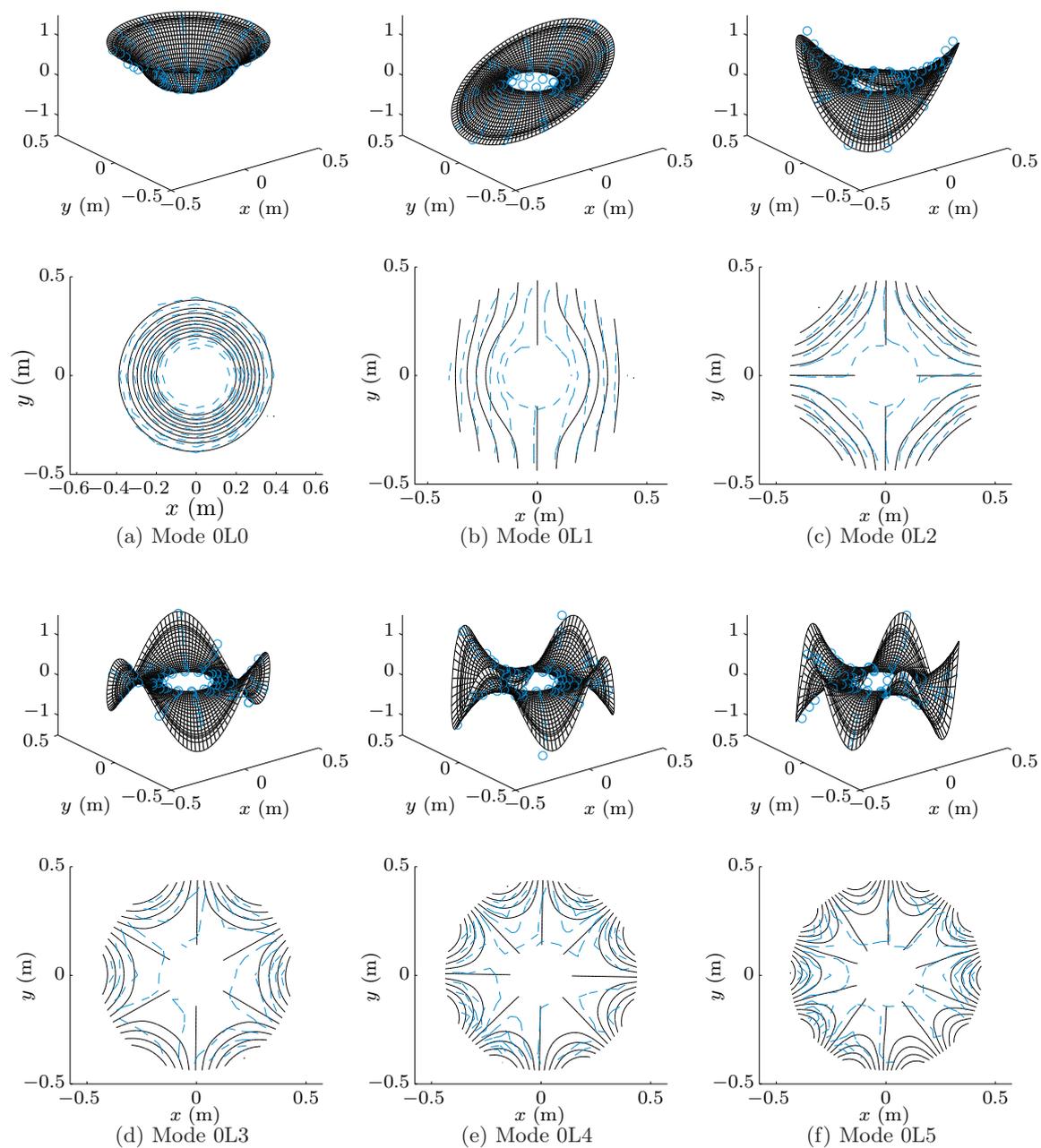


FIGURE C.1 – Partie réelle et contour de la vitesse vibratoire normalisée calculée par éléments finis (—) et mesurée (○,---) autour des modes propres d'une roue monobloc 890 mm pour une excitation axiale

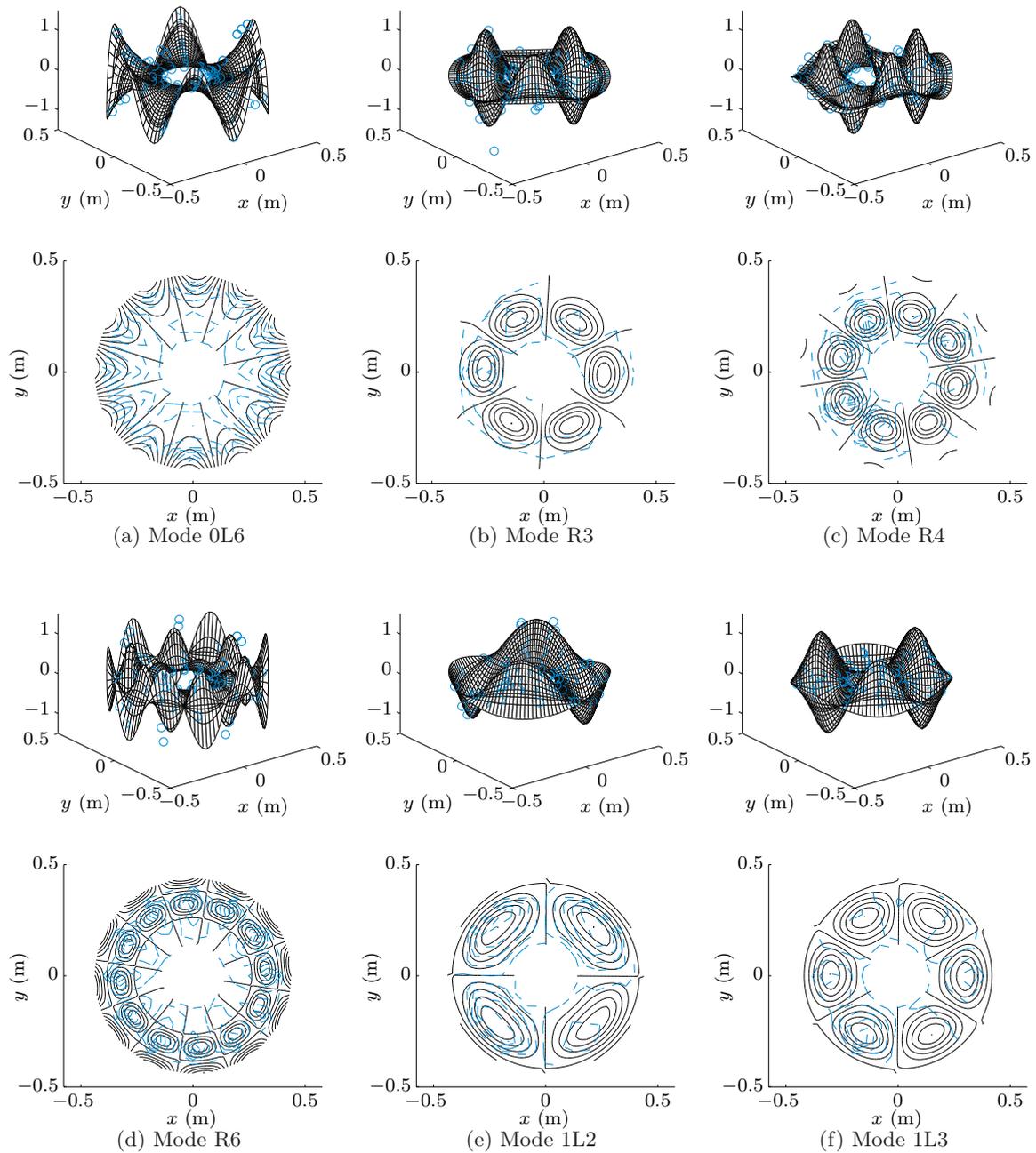


FIGURE C.2 – Partie réelle et contour de la vitesse vibratoire normalisée calculée par éléments finis (—) et mesurée ( $\circ$ , ---) autour des modes propres d'une roue monobloc 890 mm pour une excitation radiale (1Ln,R3) et axiale (0L6)

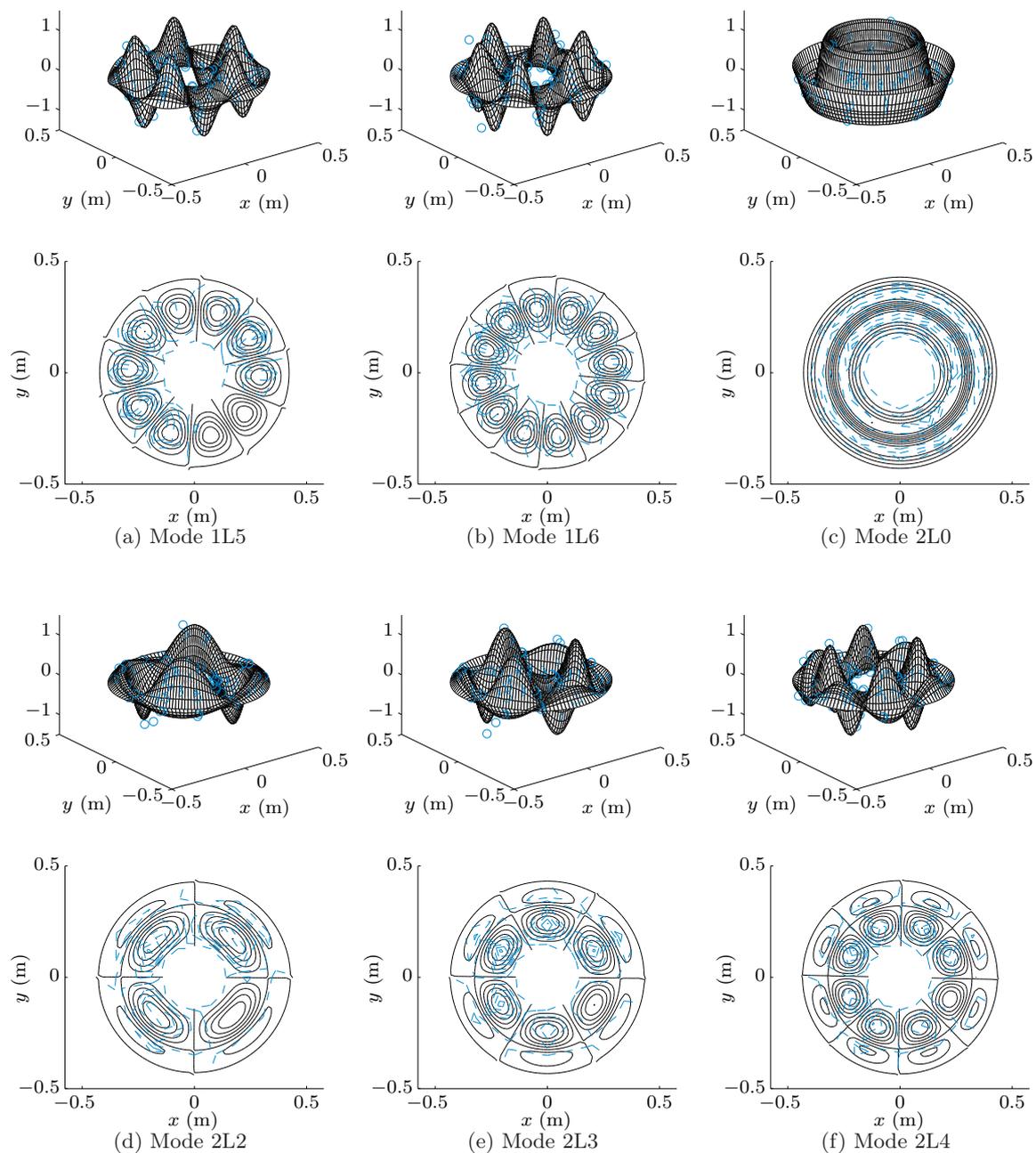


FIGURE C.3 – Partie réelle de la vitesse vibratoire normalisée calculée par éléments finis (—) et mesurée (○,---) autour des modes propres d'une roue monobloc 890 mm pour une excitation radiale (R4,R6) et axiale (2L0, 2L2-2L4)

## C.2 Comportement acoustique

### C.2.1 Intégrale de Rayleigh : théorie

La formulation intégrale du problème aux limites linéaire de l'acoustique dans le domaine fréquentiel s'écrit <sup>1</sup> [Bruneau 1998] :

$$p(\vec{x}) = \iint_{\partial D} \left( p(\vec{x}_0) \frac{\partial G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial n_0} - G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial p(\vec{x}_0)}{\partial n_0} \right) dS_0 + \iiint_D q(\vec{x}_0) G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0) dD_0, \quad (\text{C.1})$$

où le terme source  $q(\vec{x})$  et la fonction de Green  $G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0)$  satisfont l'équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p(\vec{x}) &= q(\vec{x}) \\ (\Delta + k^2)G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0) &= \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Notons que la première intégrale de l'équation (Eq. C.1) traduit la modification de la pression de la source acoustique créée par la présence de frontière, la seconde représente la pression acoustique créée par la source acoustique au sein du fluide. Dans le cas d'une plaque plane dont la surface est située en  $z=0$  et qui coïncide avec le plan  $(x, y)$  (Fig. 2.22), il n'y a pas de source volumique dans le demi espace  $z>0$ , si bien que l'équation (C.1) se réduit à :

$$p(\vec{x}) = \iint_{S_0} \left( p(\vec{x}_0) \frac{\partial G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial n_0} - G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial p(\vec{x}_0)}{\partial n_0} \right) dS_0. \quad (\text{C.3})$$

La condition cinématique des vitesses normales à l'interface entre une surface et son fluide environnant <sup>2</sup>, impose la condition suivante sur la vitesse des particules de fluide en  $z=0$  :

$$v(\vec{x}_0) \cdot \vec{z} = v_0(\vec{x}_0), \quad (\text{C.4})$$

où  $v_0$  est la vitesse de vibration harmonique de la surface  $S_0$ . En projetant l'équation d'Euler linéarisée sur l'axe  $z$ , la dérivée normale de la pression est alors reliée à la vitesse normale de la surface  $S_0$  telle que :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial n_0} = \omega \rho_0 v_0(\vec{x}_0). \quad (\text{C.5})$$

La pression acoustique à la surface de la plaque n'est pas connue, il est alors exclu d'explicitement le champ acoustique à partir de l'équation (C.3) avec la fonction de Green en espace libre [Bruneau 1998] définie par :

$$G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{e^{-ik\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}}{4\pi\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}. \quad (\text{C.6})$$

L'expression du champ de pression acoustique est cherchée de manière à ce qu'elle dépende uniquement de la vitesse normale de vibration de la surface. Par conséquent, à utiliser une autre fonction de Green dont la dérivée normale est nulle. La solution consiste à construire une fonction de Green basée sur le principe des sources images qui conduit à annuler la dérivée normale de la fonction de Green en  $z=0$ . En effet, en présence d'une surface plane

1. Cette formulation est obtenue par la résolution du théorème de Green à trois dimensions par intégration dans le domaine  $D$  considéré.

2. Lorsque le fluide est considéré léger, tel que l'air, le couplage fluide/structure est négligeable

parfaitement réfléchissante en  $z_0=0$  (baffle), le champ acoustique total, au point  $\vec{x}_1=(x, y, z)$ , résulte du champ en l'absence de la surface et de celui émis par la source image symétrique, au point  $\vec{x}_2=(x, y, -z)$ , de la source réelle par rapport au plan  $(x, z)$ . La présence du baffle revient alors à écrire la fonction de Green telle que :

$$G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_s) = \frac{e^{-ik\|\vec{x}-\vec{x}_1\|}}{4\pi\|\vec{x}-\vec{x}_1\|} - \frac{e^{-ik\|\vec{x}-\vec{x}_2\|}}{4\pi\|\vec{x}-\vec{x}_2\|}. \quad (\text{C.7})$$

Puisque la dérivée normale de la fonction de Green satisfait ainsi au problème de Neumann en  $z=0$  :

$$\frac{\partial G_\omega(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial n} = 0, \quad (\text{C.8})$$

la pression rayonnée par la plaque devient [Bruneau 1998, Cremer 2005] :

$$p(\vec{x}) = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{e^{-ik\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} v_0 dS_0. \quad (\text{C.9})$$

Cette relation est connue sous le nom d'intégrale de Rayleigh.

### C.2.2 Etude de convergence numérique du modèle de rayonnement

Une fonction test  $\Psi(r, \theta)$  est employée afin de déterminer l'erreur sur la pression approchée par la formulation intégrale discrète par rapport à la pression calculée par la formulation continue (cf. section 2.3.2.1). La fonction test proposée a pour but de représenter les singularités des différents comportements vibratoires de la roue inhérentes aux différents types de modes. Cette fonction test permet de connaître la vitesse vibratoire en tout point de la surface rayonnante. Elle est alors choisie analytique et continue sur  $\mathbb{R}$ , elle s'écrit telle que :

$$\Psi(r, \theta) = \mathcal{A} \sin\left(\frac{r - r_{int}}{\hat{m}(r_{ext} - r_{int})}\pi\right) \sin(n\theta), \quad (\text{C.10})$$

où  $r_{int}$  et  $r_{ext}$  sont les rayons respectifs intérieur et extérieur de la plaque annulaire (voir Fig. 2.22),  $\hat{m}$  est l'indice qui correspond aux nombres de cercles nodaux  $m$  ( $m=0 \rightarrow \hat{m}=2$ ,  $m=\hat{m}=1$  et  $m=2 \rightarrow \hat{m}=0,5$ ),  $n$  le nombre de diamètres nodaux, et  $\mathcal{A}$  est le coefficient d'amplitude. Les fonctions tests de chaque type de mode, pour un nombre de diamètres nodaux  $n$  arbitraires sont représentées sur la figure C.4. Etant donné que les comportements vibratoires des modes R et 1L sont proches, la fonction test telle que  $m=\hat{m}=1$  représente aussi bien les modes de type R que les modes 1L.

La pression acoustique rayonnée par la plaque plane annulaire bafflée au point d'observation<sup>3</sup>  $\vec{x}$  calculée par la formulation intégrale discrète :

$$\tilde{p}(\vec{x}) = \sum_{q=1}^{N_s} \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \left( \sum_{l=0}^1 \sum_{j=0}^1 \Psi[r_0(q+l), \theta_0(q+j)] \right) \frac{1}{4} \int_{\theta_0(q)}^{\theta_0(q+1)} \int_{r_0(q)}^{r_0(q+1)} \frac{e^{-ikh}}{h} r_0 dr_0 d\theta_0. \quad (\text{C.11})$$

que l'on nommera « pression discrète », est comparée à la pression calculée par la formulation

---

3. De coordonnées polaires  $(r, \theta, z)$ .

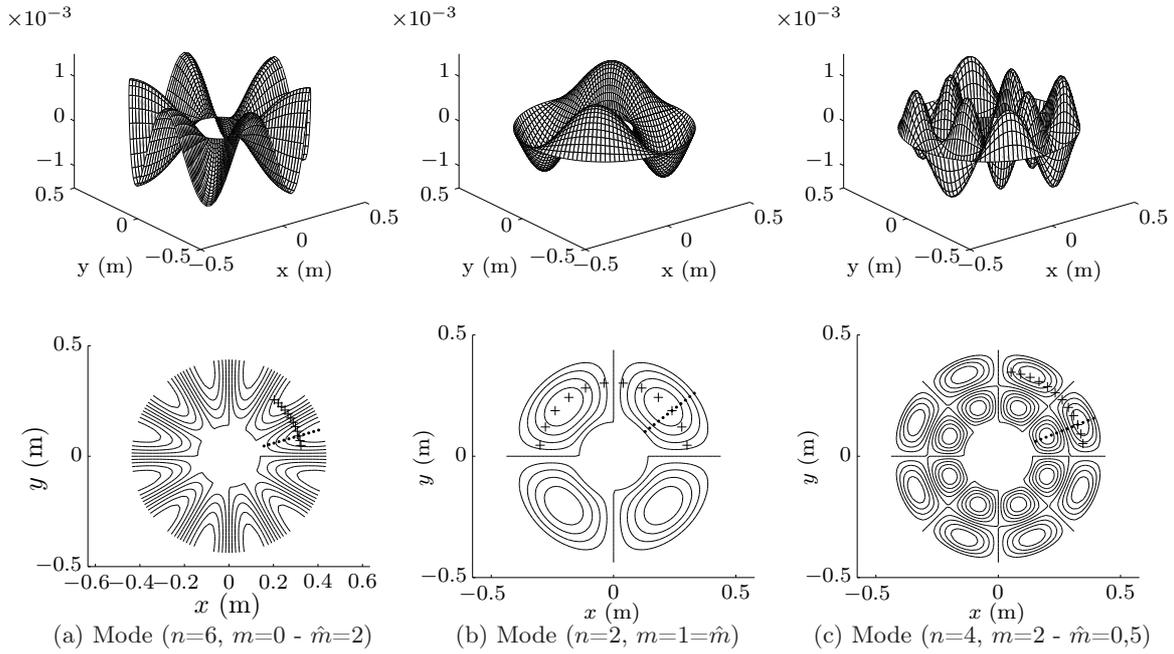


FIGURE C.4 – Amplitudes pour  $\mathcal{A}=1.10^{-3}$  et contours des fonction tests (Eq. C.10) qui représentent les modes de roue : 0L6 (a), 1L2 ou R2 (b) et 2L4 (c). Points d’observations circulaires (+) et radiaux (·)

continue :

$$p(\vec{x}) = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{e^{-ikh}}{h} \Psi(r, \theta) dS_0. \quad (\text{C.12})$$

que l’on nommera « pression de référence ». Le nombre  $N_s$  de sous-espaces de l’équation (Eq. C.11) est défini par le nombre de points angulaires  $N_\theta$ , et le nombre de points radiaux  $N_r$ ;  $N_s = N_r \times N_\theta$ . La pression de référence (Eq. C.12) est malgré tout calculée numériquement, cependant le contrôle de la tolérance de l’erreur absolue sur le calcul de la pression permet d’assurer une précision de  $10^{-10}$  Pa<sup>4</sup>. Les positions des calculs du champ de pression sont réparties de manière à observer son comportement aux singularités dues, soit aux diamètres nodaux, soit aux cercles nodaux (voir Fig. C.4). Les pressions sont calculées en champ proche de la surface de la plaque ( $z=0,025$  m) aux fréquences expérimentales correspondantes aux modes vibratoires.

Les pressions discrète et de référence, ainsi que leurs écarts relatifs en fonction du nombre de points angulaires et radiaux considérés dans l’équation C.11, sont représentés pour les quatre types de déformées sur les figures C.5 à C.7. Sur ces figures, les pressions et les écarts sont dans un premier temps tracés pour un point d’observation. La pression discrète est tracée pour différents rapport du nombre de points de discrétisation sur la longueur d’onde de la déformée modale. Remarquons que le nombre de diamètres nodaux  $n$  correspond directement au multiple de la longueur d’onde  $\lambda_\theta$  qui apparaît suivant  $\theta$  (voir Fig. 1.6), alors que le nombre

4. La fonction `quad2d`, d’évaluation numérique d’intégration à deux dimensions d’une surface plane du logiciel Matlab©, cherche à satisfaire la condition d’infériorité ou d’égalité de l’approximation sur l’erreur absolue par rapport à la tolérance fixée par l’utilisateur (ici fixée à  $10^{-10}$  - les niveaux de pression calculés sont de l’ordre de 1 Pa (94 dB)).

de cercles nodaux  $m$  correspond indirectement à la longueur d'onde  $\lambda_\theta$  suivant le rayon  $r$  (voir Fig. 2.24a). Les correspondances entre le nombre de cercles nodaux  $m$  et la longueur d'onde  $\lambda_r$  est donnée par :

- $m=0 \Leftrightarrow \lambda_r/4$
- $m=1 \Leftrightarrow \lambda_r/2$
- $m=2 \Leftrightarrow \lambda_r$ .

Ces figures montrent qu'en champ proche, 10 points par longueur d'onde ( $\dots, \square$ ) sont insuffisants pour décrire avec justesse le champ de pression rayonnée par la structure. D'après les écarts relatifs des différentes figures, et les pressions discrètes tracées sur la figure C.7 ( $-\cdot-\cdot, \nabla$ ), un minimum de 15 points par longueur d'onde est requis pour s'affranchir de la discrétisation de l'intégrale de Rayleigh (Eq.2.8). En champ proche il est alors nécessaire de connaître la vitesse vibratoire de la plaque avec une densité de maillage élevée pour assurer l'exactitude de la pression calculée : minimum 15 points/ $\lambda$  par rapport à la densité nécessaire en champ lointain qui est généralement de 6 points/ $\lambda$ .

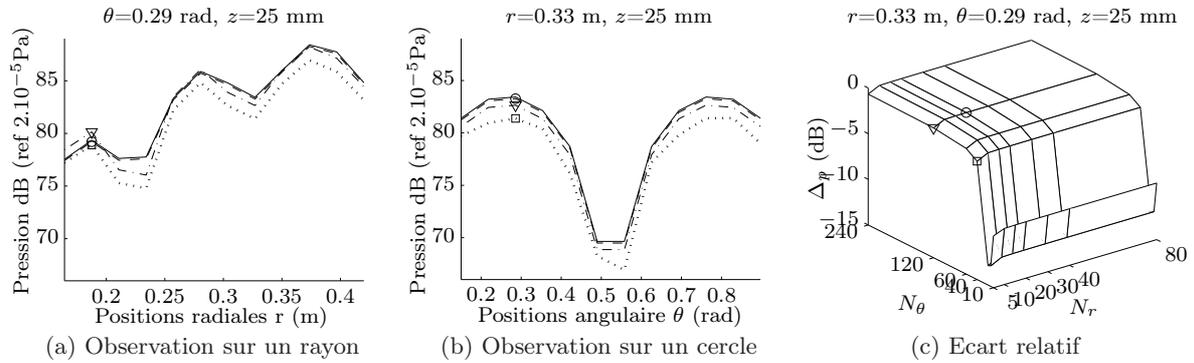


FIGURE C.5 – Pressions calculées par la formulation continue  $p$  (—) et la formulation discrète  $\tilde{p}$  pour  $\Psi(n=6, m=0) \Leftrightarrow \mathbf{OL6}$  :  $80=N_r/\lambda_r - 20=N_\theta/\lambda_\theta$  ( $-\cdot-\cdot, \circ$ ),  $20=N_r/\lambda_r - 20=N_\theta/\lambda_\theta$  ( $-\cdot-\cdot, \nabla$ ),  $20=N_r/\lambda_r - 6=N_\theta/\lambda_\theta$  ( $\dots, \square$ ), et écart relatif défini tel que  $\Delta_p=20 \log_{10}(\tilde{p}/p)$ .

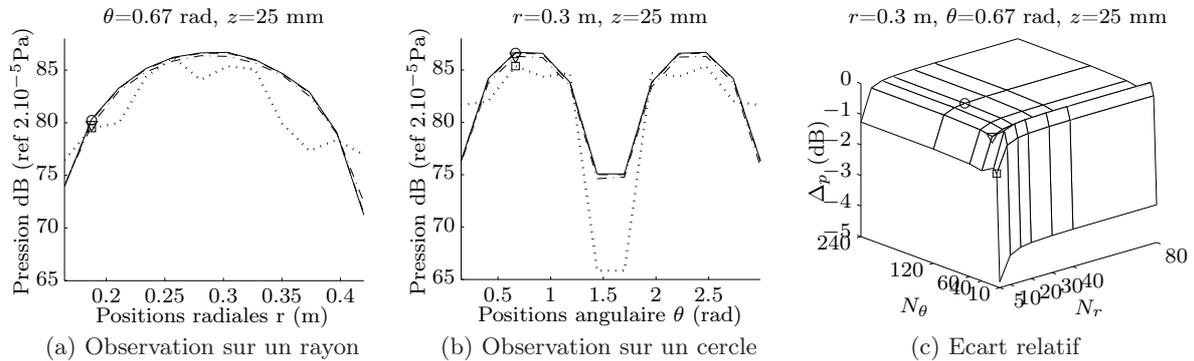


FIGURE C.6 – Pressions calculées par la formulation continue  $p$  (—) et la formulation discrète  $\tilde{p}$  pour  $\Psi(n=2, m=1) \Leftrightarrow \mathbf{R2}$  ou  $\mathbf{1L2}$  :  $40=N_r/\lambda_r - 60=N_\theta/\lambda_\theta$  ( $-\cdot-\cdot, \circ$ ),  $20=N_r/\lambda_r - 20=N_\theta/\lambda_\theta$  ( $-\cdot-\cdot, \nabla$ ),  $10=N_r/\lambda_r - 10=N_\theta/\lambda_\theta$  ( $\dots, \square$ ), et écart relatif défini tel que  $\Delta_p=20 \log_{10}(\tilde{p}/p)$ .

Pour s'assurer de la représentativité des résultats obtenus pour une position d'observation, c'est la pression quadratique moyenne sur toutes les positions de calculs (données sur la figure C.4) qui est maintenant considérée pour estimer l'écart entre la pression de référence et la

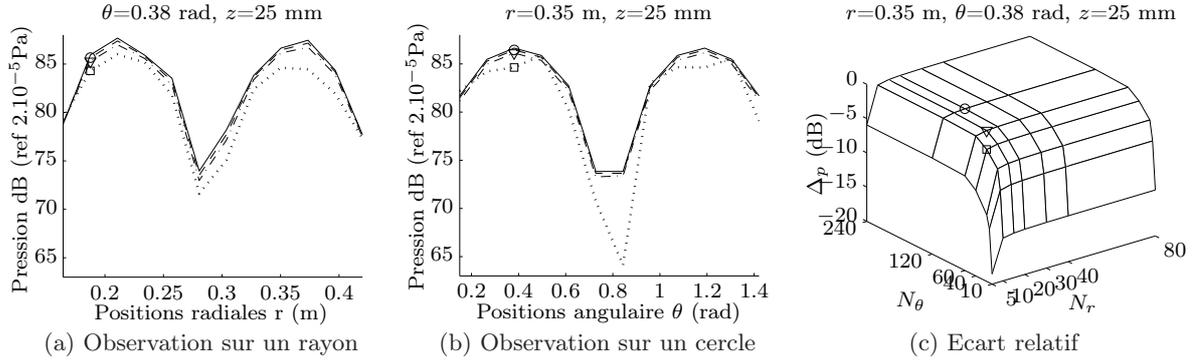


FIGURE C.7 – Pressions calculées par la formulation continue  $p$  (—) et la formulation discrète  $\tilde{p}$  pour  $\Psi$  ( $n=4, m=2$ )  $\Leftrightarrow$  **2L4** :  $20=N_r/\lambda_r - 30=N_\theta/\lambda_\theta$  (---,  $\circ$ ),  $15=N_r/\lambda_r - 15=N_\theta/\lambda_\theta$  (- · -,  $\nabla$ ),  $10=N_r/\lambda_r - N_\theta=10/\lambda_\theta$  ( $\cdots$ ,  $\square$ ), et écart relatif défini tel que  $\Delta_p=20 \log_{10}(\tilde{p}/p)$ .

pression discrète en fonction du nombre de points de discrétisation. Les résultats obtenus sont tracés sur la figures C.8. Les plateaux représentent le domaine de convergence (écart nul) entre la pression issue de la formulation discrète et la pression issue de la formulation continue. Pour les quatre types de mode représentés, les plateaux s'effondrent à partir d'un nombre de points angulaires inférieur à 80 ainsi que d'un nombre de points radiaux inférieur à 15. La densité du maillage éléments finis composé de 122 points angulaires et de 21 points radiaux permet donc d'assurer la convergence de la pression discrète vers la pression de référence. Il faut noter que pour les plus grands nombres de diamètres nodaux et de cercle modaux considérés ( $n=6$  et  $m=2$ ) la densité du maillage élément finis respecte la condition de 15 points par longueur d'onde. L'écart maximal acceptable de 0,25 dB entre les pressions de référence et discrète, pour la densité du maillage élément finis et pour tous les modes considérés (entre 130 et 5200 Hz), permet de valider l'utilisation de la formulation intégrale discrète pour le calcul de la pression (voir Fig. 2.24)

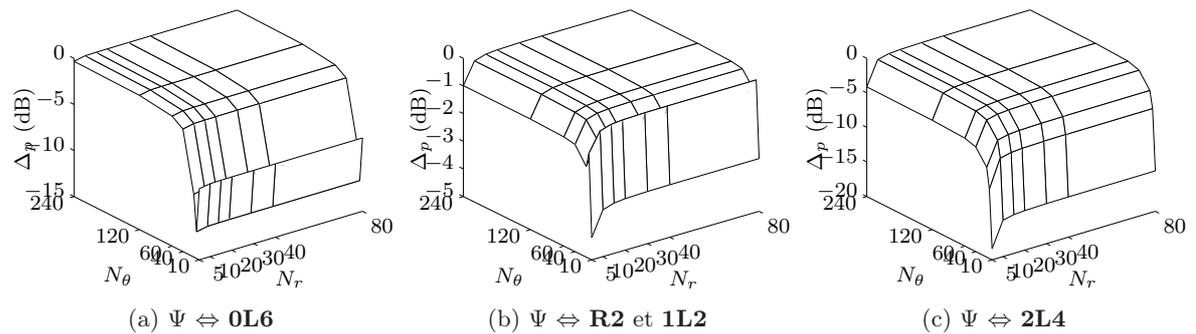


FIGURE C.8 – Ecart relatif entre la pression quadratique moyenne de référence ( $p$  - Eq. C.12) et la pression quadratique moyenne discrète ( $\tilde{p}$  - Eq. C.11)  $\Delta_p=20 \log_{10}(\tilde{p}/p)$ .

### C.2.3 Champ proche, champ lointain et effet de sol

Les figures relative à la section 2.3.2.3, sur l'effet des réflexions sur le ballast des ondes acoustiques émises par la roue sont données ici, voir C.9 pour une fréquence de 300 Hz et figure C.10 pour une fréquence de 4000 Hz.

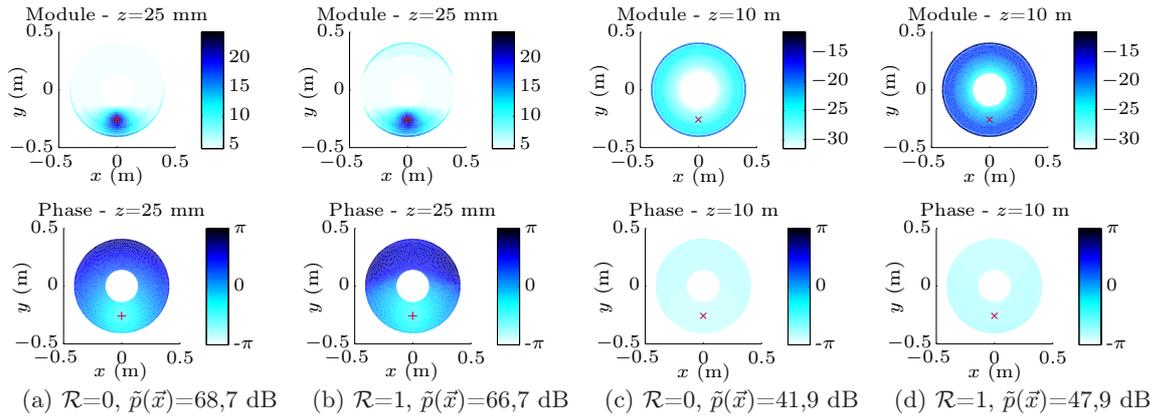


FIGURE C.9 – Pressions acoustiques rayonnées par sous-espaces représentées aux points d'émissions  $\vec{x}_0 \in S_0$  pour le calcul de la pression (Eq. 2.8) au point d'observation  $\vec{x}(r=0,26$  m,  $\theta=271^\circ$ ,  $z)$  à la fréquence 300 Hz; en champ proche ( $z=25$  mm, +) et en champ lointain ( $z=10$  m, ×), avec ( $\mathcal{R}=1$ ) et sans ( $\mathcal{R}=0$ ) effet de sol pour une vitesse de vibration constante ( $v_w=1.10^{-4}$  m.s $^{-1}$ ).

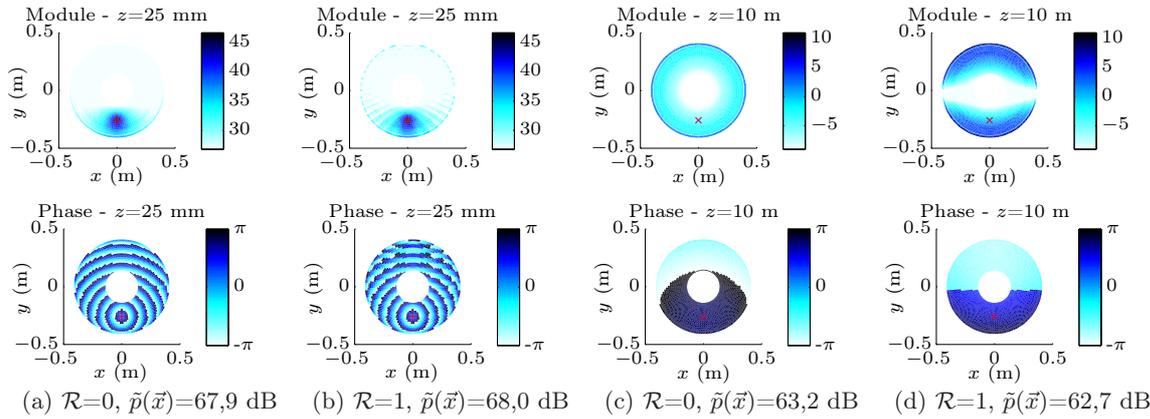


FIGURE C.10 – Pressions acoustiques rayonnées par sous-espaces à la fréquence 4000 Hz; voir légende de la figure C.9.

### C.2.4 Calcul du champ acoustique

Le champ acoustique de chaque mode obtenue par le modèle de rayonnement de la roue basé sur la formulation intégrale d'une plaque plane annulaire bafflé (cf. section 2.3.2.1) et la mesure (cf. section 2.2.2) relative à la section 2.3.2.4 est présenté sur les figures C.11 et C.12 pour une obrevation 3D, ainsi que sur les figures C.13 à C.15 pour une observation 2D.

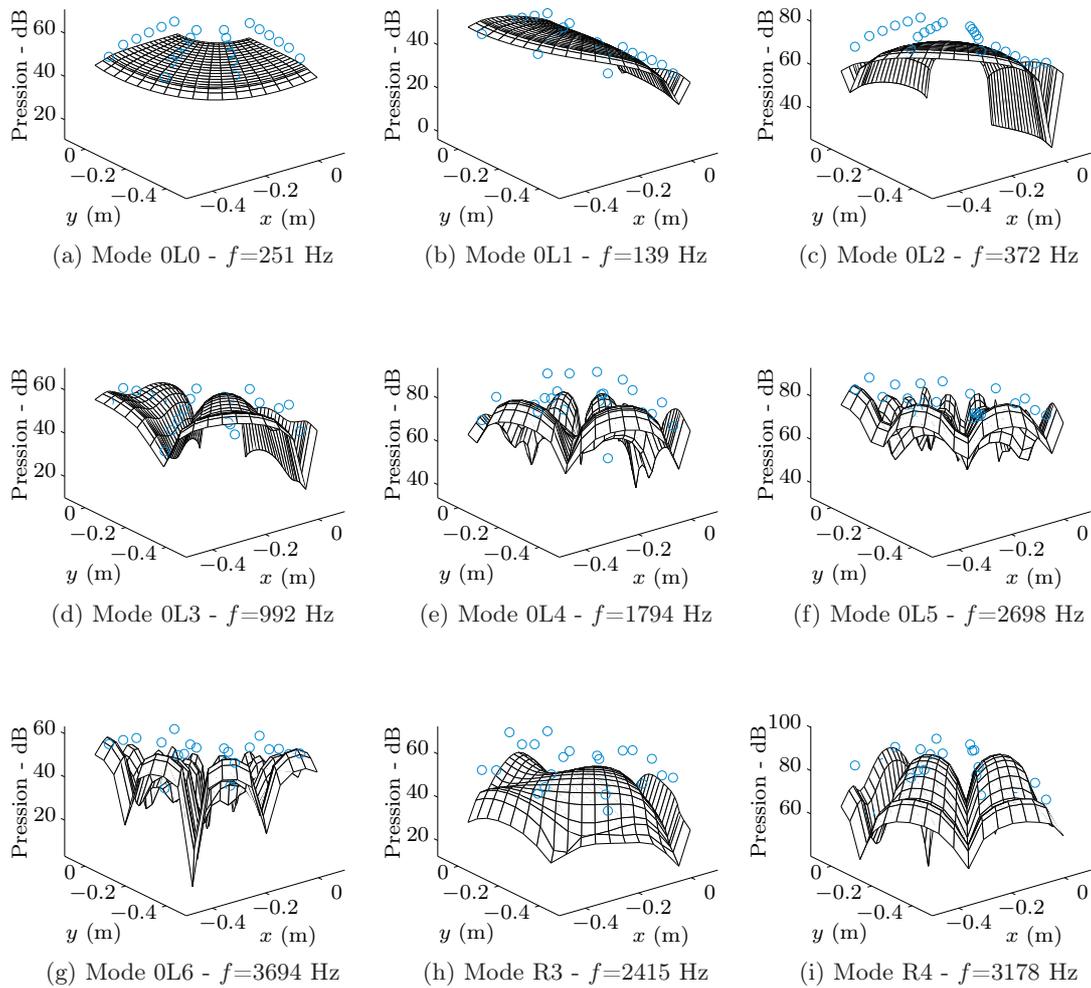


FIGURE C.11 – Pression acoustique rayonnée en champ proche ( $z=0.025$  m) par la toile d'une roue monobloc de 890 mm de diamètre : modèle de plaque bafflée développée pour  $\mathcal{R}=0$  (—) et mesures ( $\circ$ )

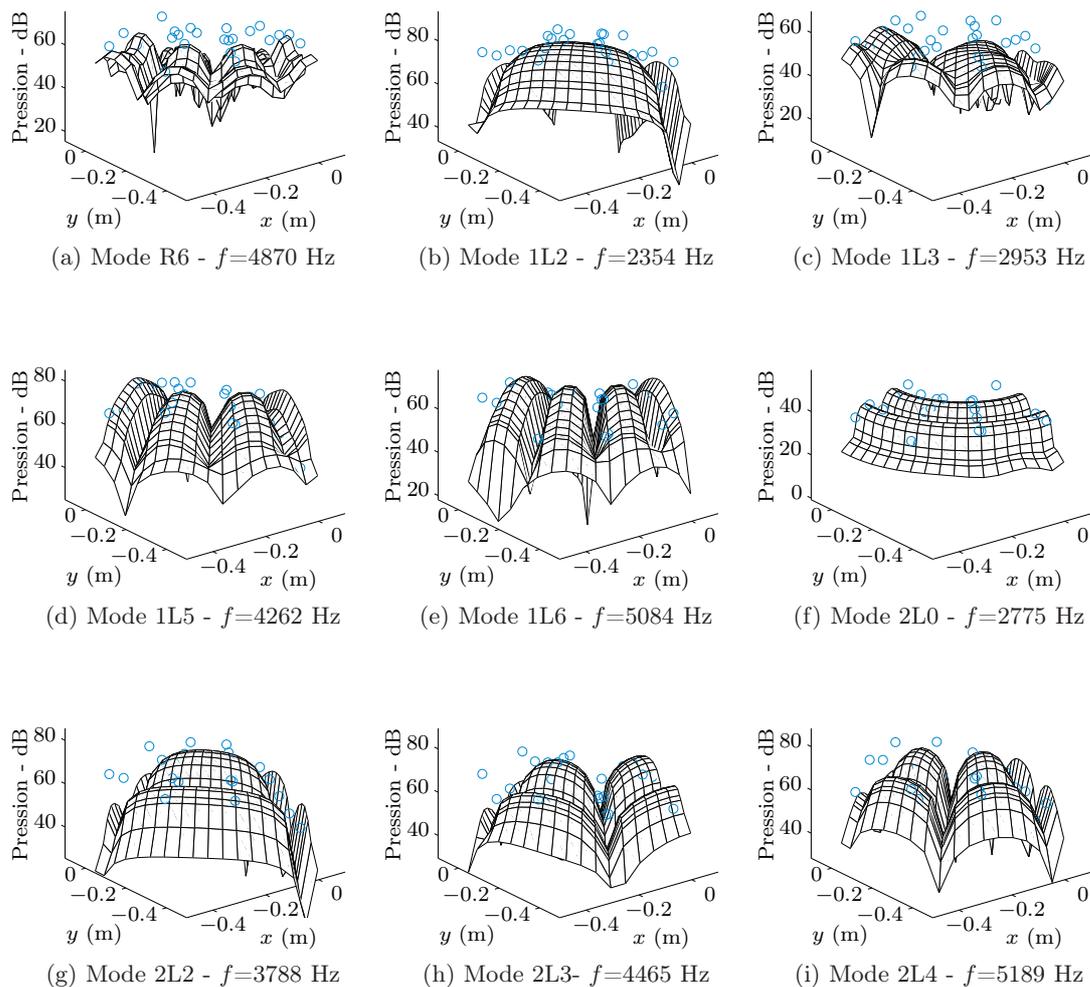


FIGURE C.12 – Pression acoustique rayonnée en champ proche ( $z=0.025$  m) par la toile d'une roue monobloc de 890 mm de diamètre : modèle de plaque bafflée développée pour  $\mathcal{R}=0$  (—) et mesures ( $\circ$ )

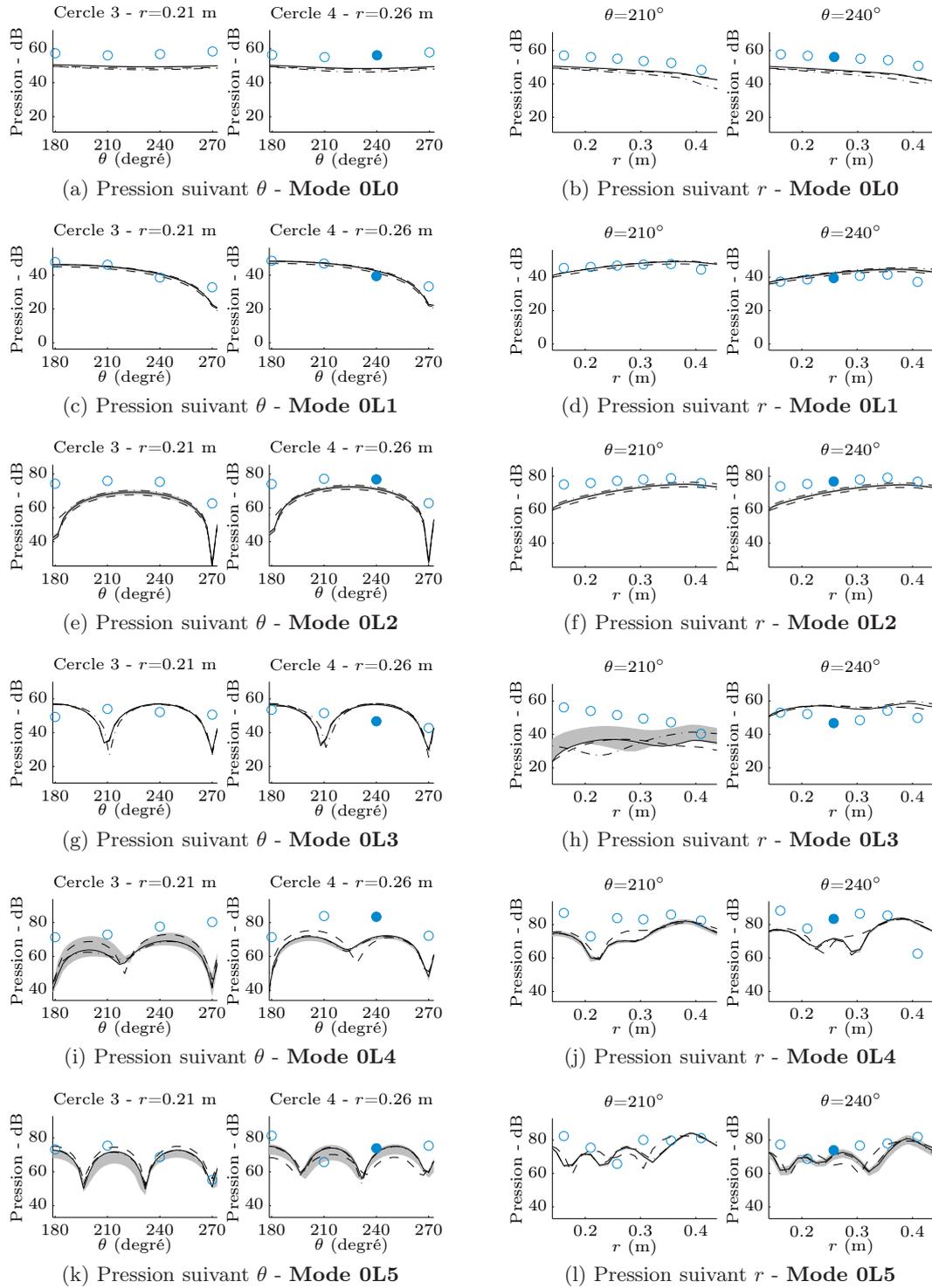


FIGURE C.13 – Pression acoustique rayonnée : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- - -), plaque projetée (- · - ·), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ ); référence de la pression en dB :  $2.10^{-5}$  Pa

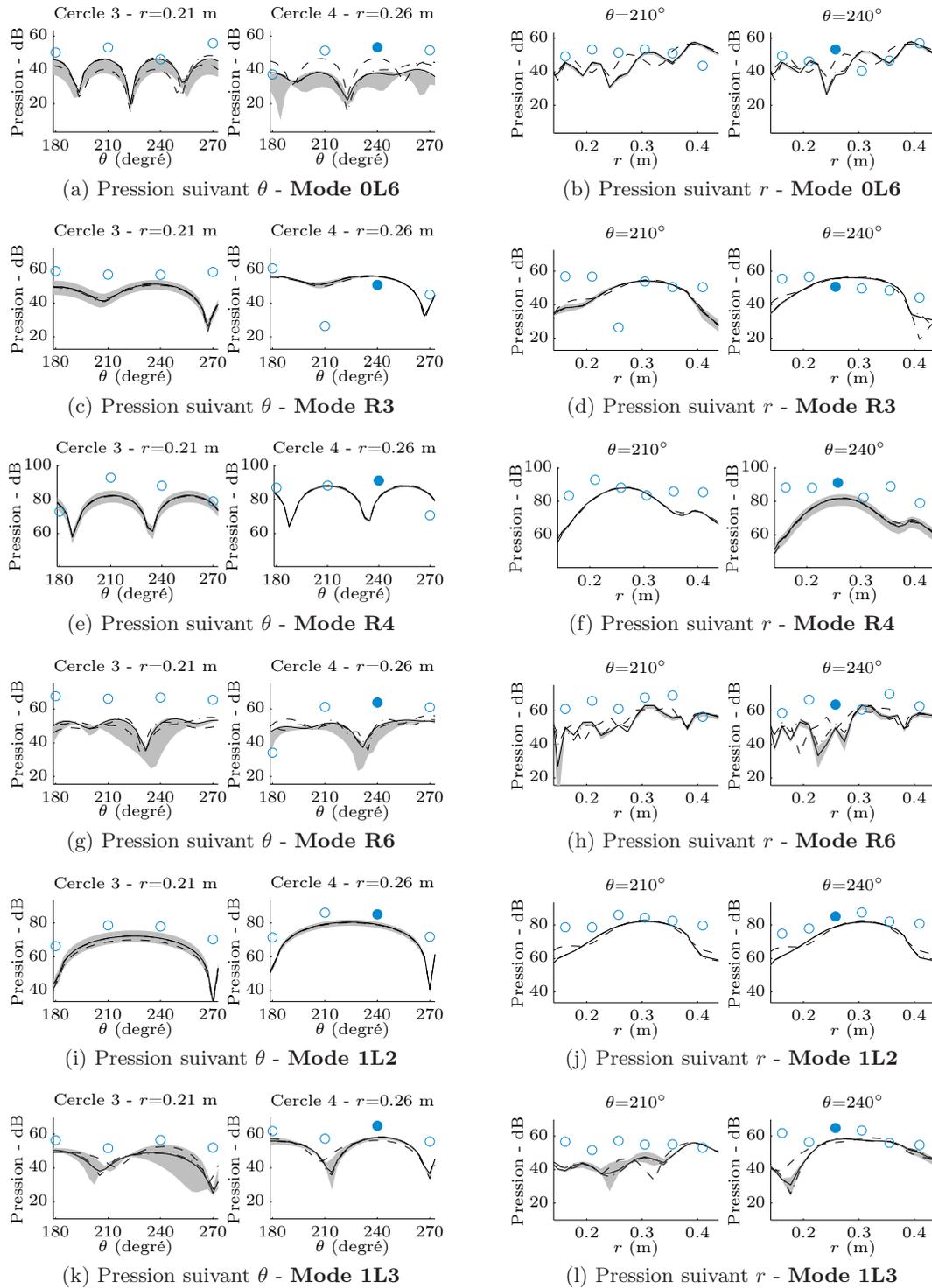


FIGURE C.14 – Pression acoustique rayonnée : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (---), plaque projetée (-.-), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ ); référence de la pression en dB :  $2.10^{-5}$  Pa

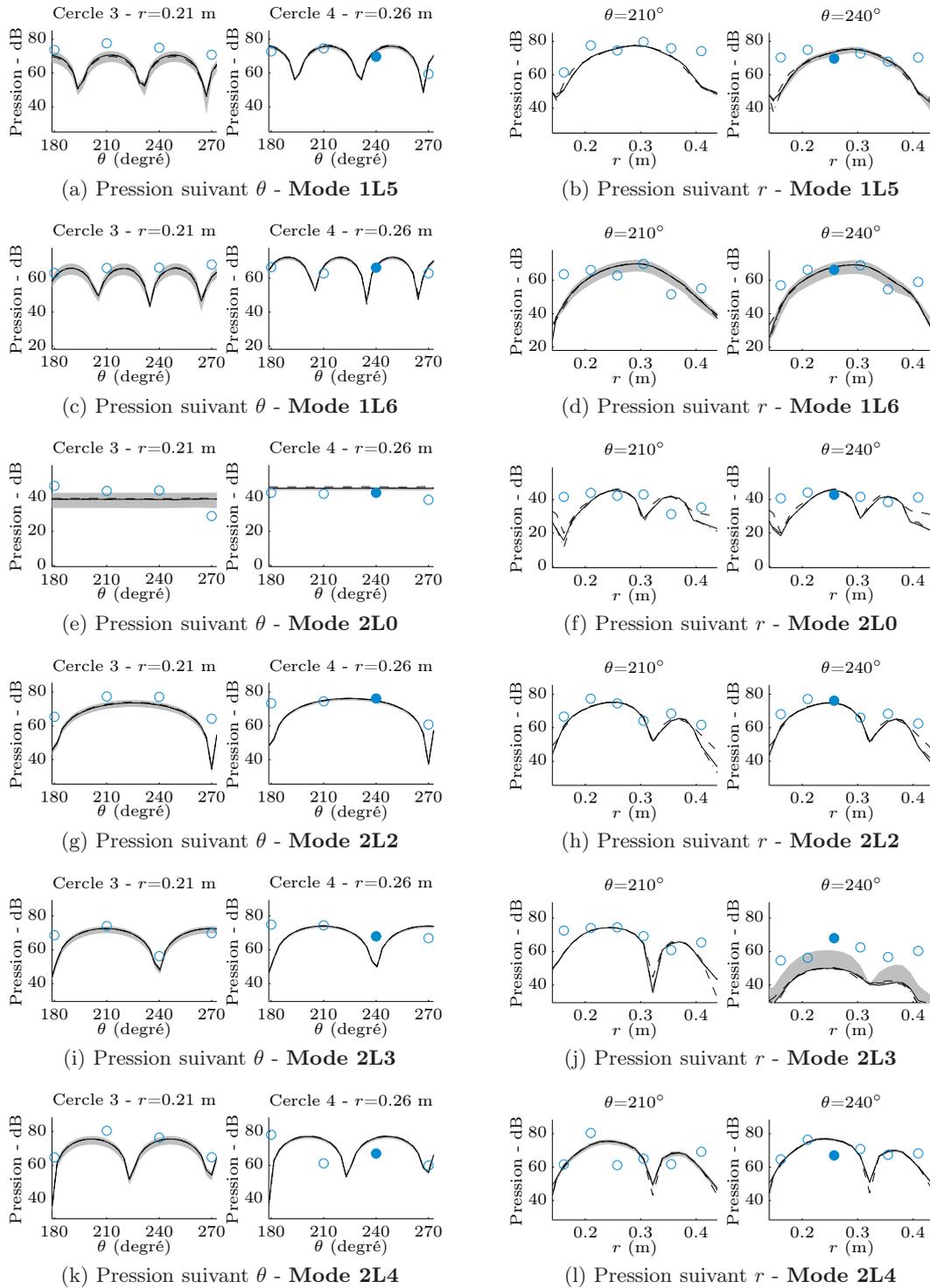


FIGURE C.15 – Pression acoustique rayonnée : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- · -), plaque projetée (- - -), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ ); référence de la pression en dB :  $2.10^{-5}$  Pa

### C.3 Impédance acoustique

L'impédance acoustique de chaque mode obtenue par la combinaison des deux précédents modèles (vibratoire et acoustique) et la mesure (cf. section 2.2.2) relative à la section 2.3.3 est présentée sur les figures C.16 et C.17 pour une observation 3D, ainsi que sur les figures C.18 à C.20 pour une observation 2D.

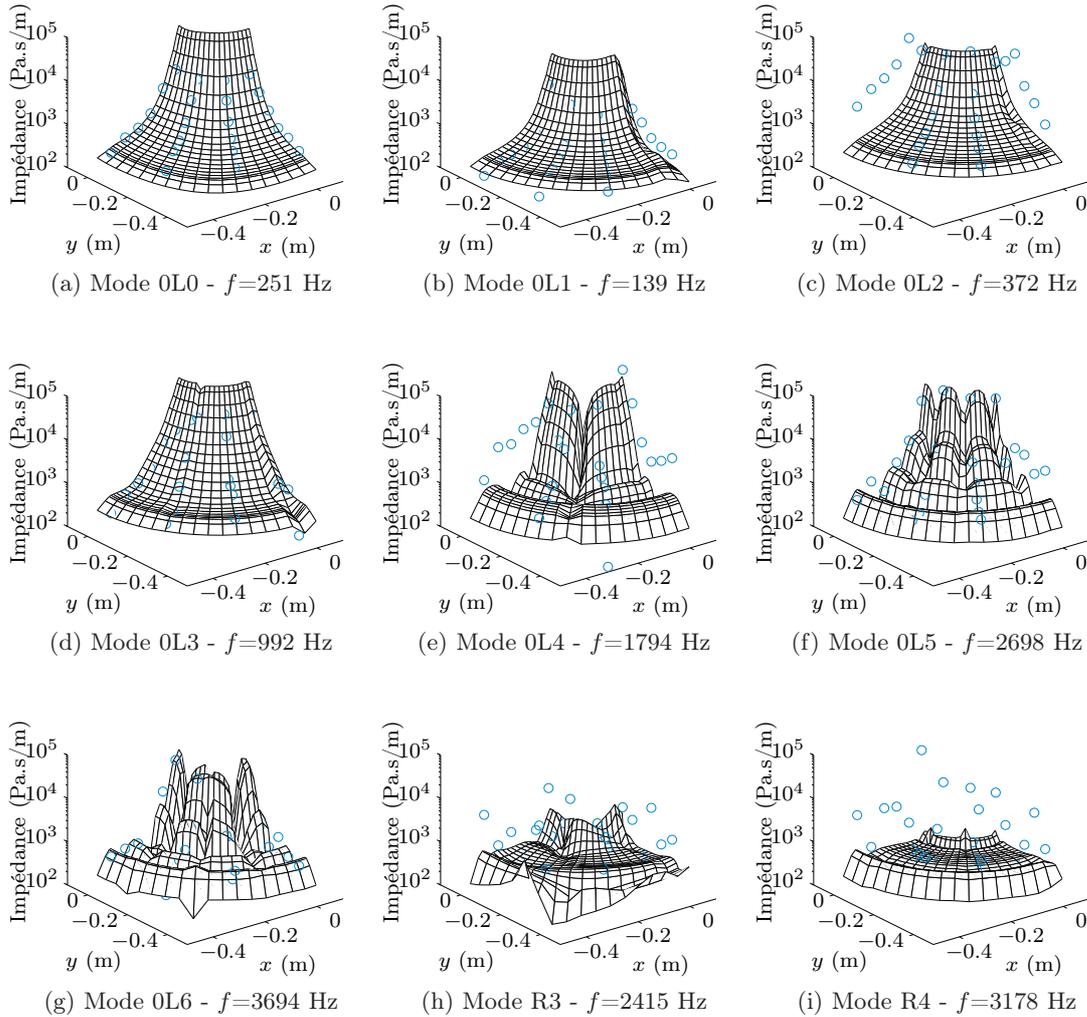


FIGURE C.16 – Impédance acoustique en champs proche ( $z=0.025$  m) de la toile de la roue ; modèle de plaque bafflée développée pour  $\mathcal{R}=0$  (—) et mesures (○).

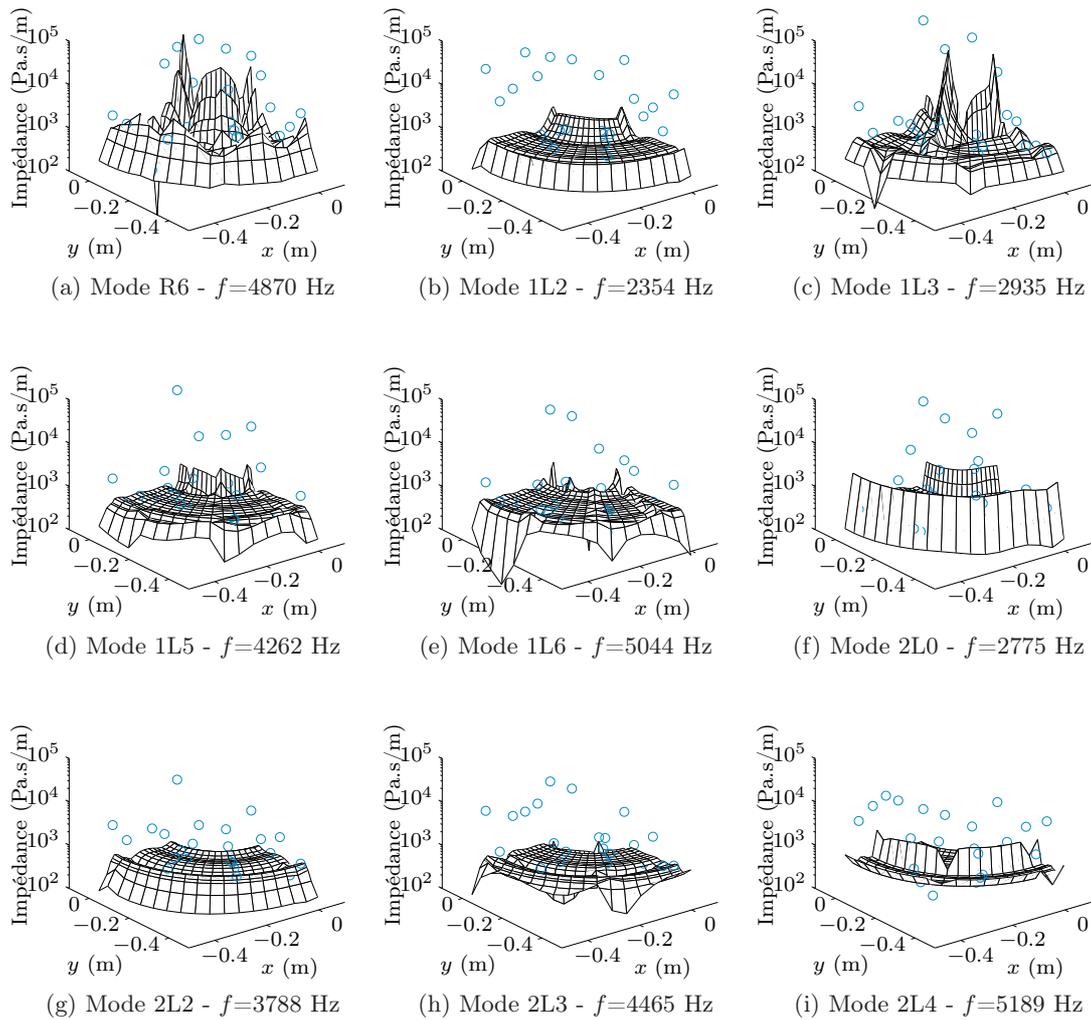


FIGURE C.17 – Impédance acoustique en champs proche ( $z=0.025$  m) de la toile de la roue ; modèle de plaque bafflée développée pour  $\mathcal{R}=0$  (—) et mesures ( $\circ$ ).

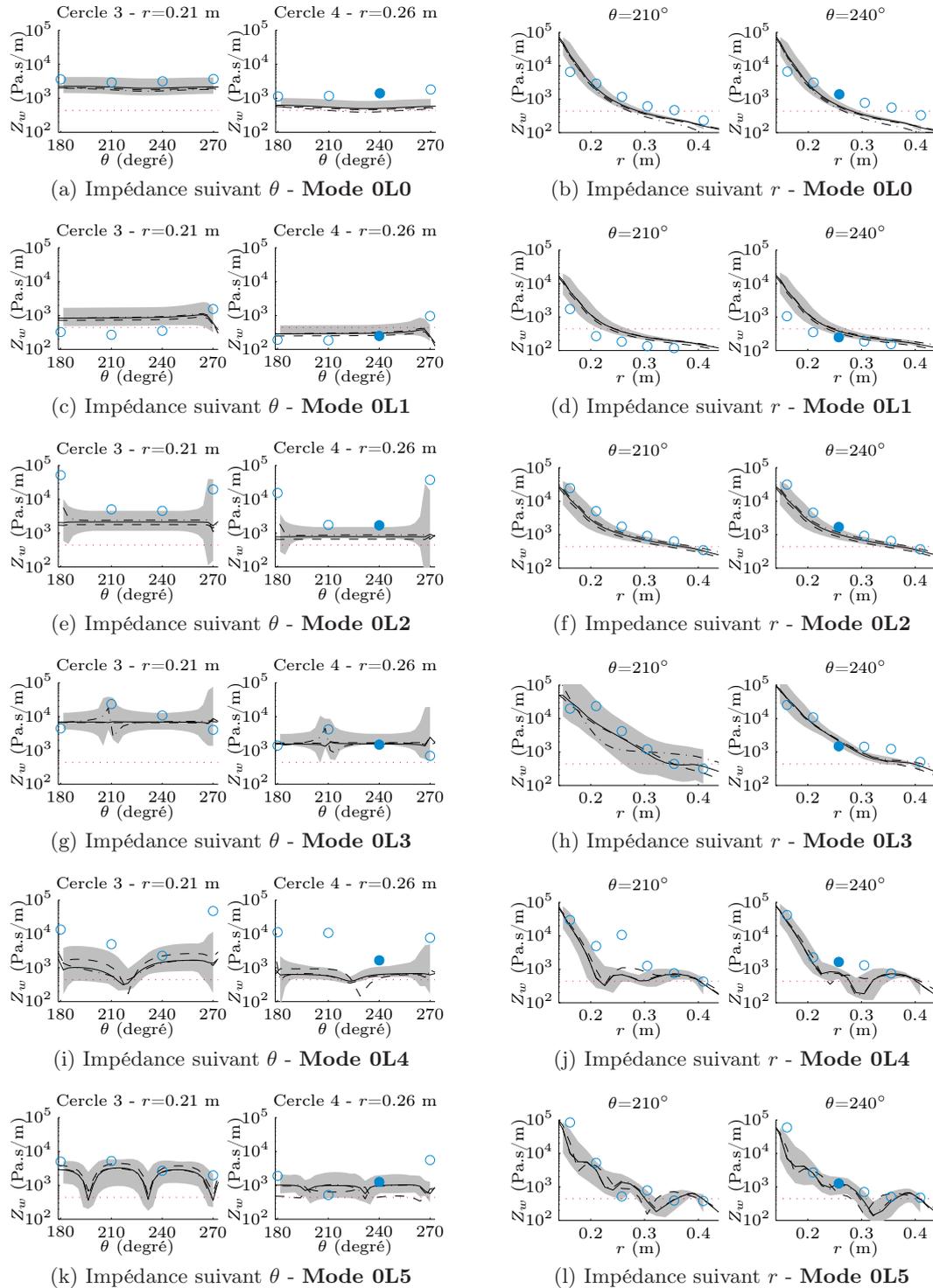


FIGURE C.18 – Impédance de rayonnement acoustique de la roue : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- - -), plaque projetée (- - -), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ ) et impédance caractéristique de l'air  $\rho_0 c_0$  ( $\cdots$ ).

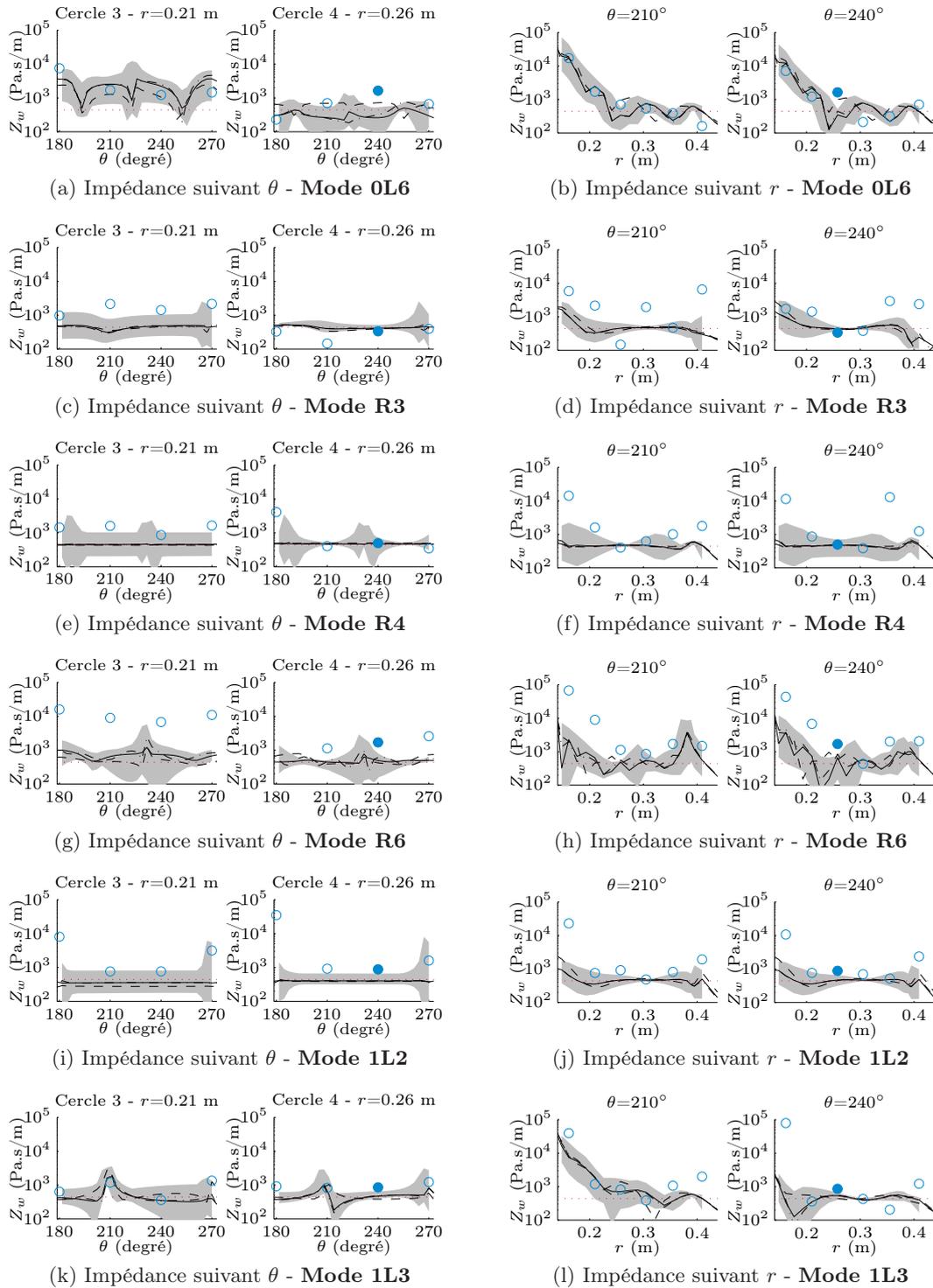


FIGURE C.19 – Impédance de rayonnement acoustique de la roue : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- - -), plaque projetée (· · ·), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\blacksquare$ ) et impédance caractéristique de l'air  $\rho_0 c_0$  ( $\cdots$ ).

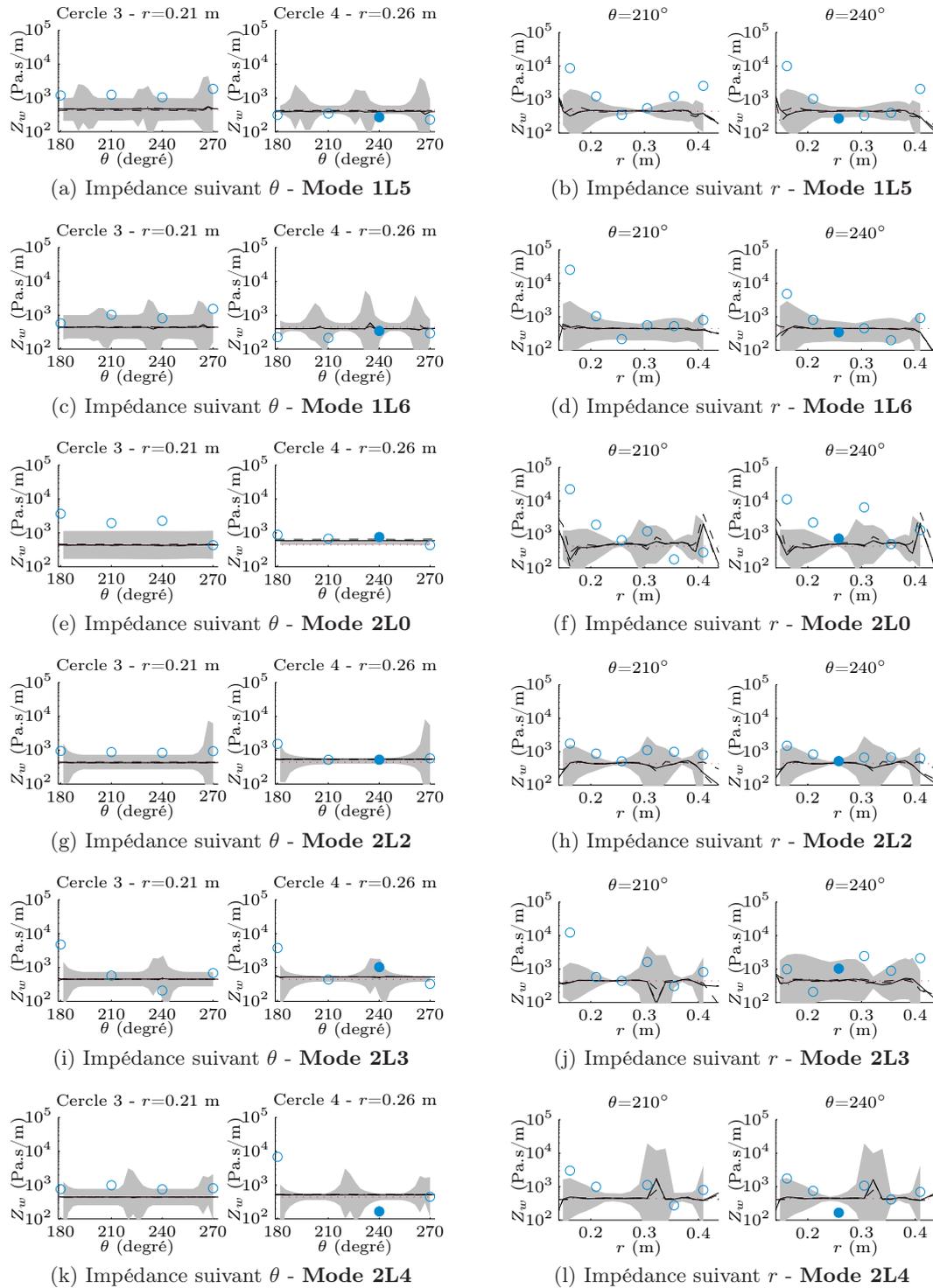


FIGURE C.20 – Impédance de rayonnement acoustique de la roue : modèle de plaque bafflée développée avec  $\mathcal{R}=0$  (—) et  $\mathcal{R}=1$  (- - -), plaque projetée (- - -), mesures ( $\circ$ ), mesure au point 45 ( $\bullet$ ), et incertitude sur la position radiale et angulaire ( $\equiv$ ) et impédance caractéristique de l'air  $\rho_0 c_0$  ( $\cdots$ ).

## C.4 Approximation de l'impédance acoustique

La zone de validité de l'[Approximation](#) de l'impédance acoustique de chaque mode qui répond aux conditions nécessaires à l'approximation est présentée sur la figure [C.21](#).

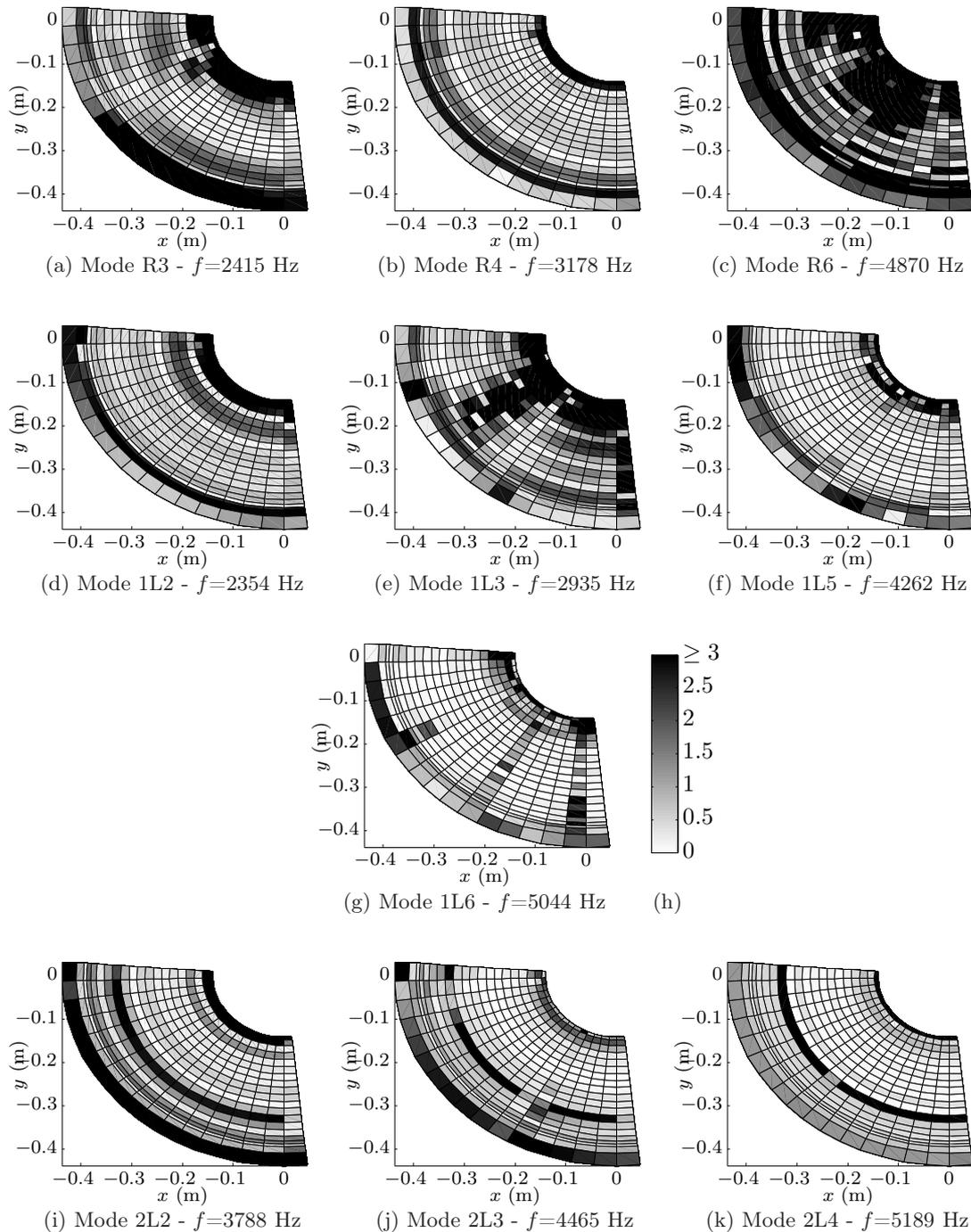


FIGURE C.21 – Domaine de validité de l'approximation de l'impédance  $Z_w$  par  $\rho_0 c_0$ ; écart en dB donné par  $[20 \log_{10}(|Z_w(r, \theta, z, \omega_i)| / \rho_0 c_0)]$  et nuancier (h).

# Liste des symboles

|                     |   |
|---------------------|---|
| $\alpha$            | Coefficient de corrélation de la rugosité du rail dans la zone de contact (chapitre 1)                  |
| $\alpha$            | Coefficient de la hauteur de la ligne de sources ponctuelles par rapport au rail (chapitre 3)           |
| $\Delta$            | Atténuation des ondes vibratoires   |
| $\delta'_{t_{1,2}}$ | Temps de propagation sur la distance $\delta_x$   |
| $\delta_x$          | Distance de propagation   |
| $\Delta_p$          | Signature acoustique  |
| $\Delta_r$          | Usure relative de la bande de roulement   |
| $\delta_{t_{1,2}}$  | Temps de propagation sur la distance $D$  |
| $\Delta_x$          | Distance entre deux sources élémentaires adjacentes   |
| $\eta_b$            | Facteur de perte du ballast   |
| $\eta_e$            | Coefficient de perte interne dans l'acier   |
| $\eta_p$            | Facteur de perte dans la semelle  |
| $\gamma$            | Coefficient de propagation  |
| $\gamma_r$          | Fonction de transfert vibratoire du rail  |
| $\gamma_w$          | Fonction de transfert vibratoire de la roue   |
| $\hat{n}$           | Indice du nombre de cercles nodaux de la fonction test  |
| $\Im m$             | Partie imaginaire   |
| $i$                 | Nombre imaginaire ( $\sqrt{-1}$ )   |
| $\kappa$            | Coefficient de cisaillement   |
| $\lambda$           | Longueur d'onde   |
| $\mathbb{R}$        | Ensemble des nombres réels  |
| $\mathcal{A}$       | Coefficient d'amplitude de la fonction test   |
| $\mathcal{R}$       | Coefficient de réflexion  |
| $\mathcal{Y}_E$     | Fonction de l'abscisse $x$ et de la constante de propagation $\gamma$ pour une poutre d'Euler-Bernoulli |
| $\mathcal{Y}_T$     | Fonction de l'abscisse $x$ et de la constante de propagation $\gamma$ pour une poutre de Timoshenko     |
| $\nu$               | Coefficient de Poisson  |
| $\omega$            | Pulsation   |
| $\omega_i$          | Pulsation propre du mode $i$  |
| $\phi$              | Angle d'incidence de l'onde réfléchie   |

---

|                      |   |
|----------------------|---|
| $\Phi_i$             | Déformée modale du mode $i$   |
| $\Psi$               | Fonction test   |
| $\Re e$              | Partie réelle   |
| $\rho$               | Masse volumique de l'acier  |
| $\rho_0$             | Masse volumique de l'air  |
| $\sigma$             | Coefficient de rayonnement  |
| $\sigma_1, \sigma_2$ | Paramètres adimensionnés utilisés pour déterminer les dimensions de la surface de contact |
| $\sigma_e$           | Résistivité au passage de l'air   |
| $\sigma_{ij}$        | Covariance  |
| $\sigma_i$           | Écart-types lié à une série de valeurs calculées  |
| $\sigma_j$           | Écart-types lié à une série de valeurs mesurées   |
| $\theta$             | Coordonnée angulaire (dans un repère sphérique et cylindrique)                            |
| $\xi$                | Rapport adimensionné utilisé pour déterminer la raideur de contact                        |
| $\zeta_i$            | Facteur d'amortissement du mode $i$   |
| $a$                  | Distance entre deux traverses   |
| $a$                  | Rayon longitudinal de l'ellipse de contact  |
| $A_d$                | Aire développée   |
| $A_p$                | Aire projetée   |
| $B$                  | Rigidité de flexion verticale   |
| $b$                  | Rayon transversal de l'ellipse de contact   |
| $C$                  | Amortissement   |
| $c_0$                | Célérité des ondes dans l'air   |
| $c_{1,2}$            | Vitesse de groupe   |
| $D$                  | Distance de propagation   |
| $dQ$                 | débit massique élémentaire  |
| $E$                  | Module d'élasticité   |
| $E'$                 | Module d'élasticité d'effort plan   |
| $F$                  | Champ de force ou force quand la force de réaction est nulle (impact)                     |
| $f$                  | Fréquence   |
| $F_0$                | Chargement statique   |
| $F_e$                | Force extérieure  |
| $F_s$                | Force de réaction du support  |
| $F_0$                | Chargement statique vertical  |

---

|             |   |
|-------------|---|
| $f_c$       | Fréquence de coupure  |
| $F_d$       | Amplitude complexe de l'onde de champ proche dans une poutre de Timoshenko en flexion |
| $f_i$       | Fréquence propre du mode $i$  |
| $F_p$       | Amplitude complexe de l'onde propagative dans une poutre de Timoshenko en flexion     |
| $G$         | Module de cisaillement  |
| $G_\omega$  | Fonction de Green   |
| $H$         | Filtre de contact   |
| $h$         | Distance source-récepteur de l'onde directe   |
| $h'$        | Distance source-récepteur de l'onde réfléchie   |
| $h'_n$      | Distance source-récepteur de l'onde réfléchie pour la source $n$                      |
| $h_n$       | Distance source-récepteur de l'onde directe pour la source $n$                        |
| $h_s$       | Distance source-récepteur dans le cas d'une source omnidirectionnelle                 |
| $I$         | Moment d'inertie  |
| $K$         | Raideur   |
| $k$         | Nombre d'onde   |
| $k_t^*$     | Nombre d'onde complexe des ondes de cisaillement                                      |
| $k_\beta$   | Nombre d'onde complexe d'une poutre d'Euler-Bernoulli                                 |
| $k_B$       | Nombre d'onde de flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli                               |
| $k_c$       | Nombre d'onde de compression  |
| $k_d$       | Nombre d'onde complexe propagatif d'une poutre de Timoshenko                          |
| $K_{H,lin}$ | Raideur linéaire verticale de contact   |
| $k_p$       | Nombre d'onde complexe de champ proche d'une poutre de Timoshenko                     |
| $L$         | Distance le long du rail  |
| $l$         | Périmètre apparent du rail (Eq. 3.2) ou moment dipolaire (Eq. ??)                     |
| $l_r$       | Hauteur du rail   |
| $M$         | Masse   |
| $m$         | Nombre de cercle nodaux   |
| $m'_r$      | Masse du rail par unité de longueur   |
| $m_t$       | Masse d'une demi-traverse   |
| $m_w$       | Masse de la roue  |
| $max$       | maximum   |
| $min$       | minimum   |
| $n$         | Nombre de diamètre nodaux   |

---

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $p_r$                        | Pression acoustique du rail                                  |
| $p_w$                        | Pression acoustique de la roue                               |
| $Q_n$                        | débit massique élémentaire d'une source monopolaire $n$      |
| $Q'_n$                       | débit massique élémentaire d'une source dipolaire $n$        |
| $r$                          | Coordonnée radiale (dans un repère sphérique et cylindrique) |
| $R_e$                        | Rayon de courbure effectif du contact                        |
| $R_e$                        | Rayon effectif de la courbure du contact                     |
| $r_{ext}$                    | Rayon extérieur  |
| $r_{ij}$                     | Coefficient de corrélation linéaire                          |
| $r_{int}$                    | Rayon intérieur  |
| $R_{rt}$                     | Rayon du profil transversal du rail                          |
| $R_r$                        | Rayon du rail (=0)   |
| $R_{wt}$                     | Rayon du profil transversal de la roue                       |
| $R_w$                        | Rayon de la roue   |
| $S$                          | Surface  |
| $s$                          | Raideur équivalente  |
| $s'$                         | Raideur équivalente par unité de longueur                    |
| $s_b$                        | Raideur du ballast   |
| $s'_b$                       | Raideur du ballast par unité de longueur                     |
| $s_p$                        | Raideur de la semelle  |
| $s'_p$                       | Raideur de la semelle par unité de longueur                  |
| $u$                          | Déplacement  |
| $V$                          | Vitesse de roulage   |
| $v_r$                        | Vitesse vibratoire du rail                                   |
| $v_w$                        | Vitesse vibratoire de la roue                                |
| $X$                          | Coefficient de couplage de la mobilité croisée du rail       |
| $Y_r$                        | Mobilité du rail   |
| $Y_r^{yz}$                   | Mobilité croisée du rail                                     |
| $Y_w$                        | Mobilité de la roue  |
| $Z'_n$                       | Modèle d'impédance du ballast                                |
| $Z_n$                        | Impédance caractéristique du sol                             |
| $Z_r$                        | Impédance acoustique du rail                                 |
| $Z_w$                        | Impédance acoustique de la roue                              |
| a, b, c, d, e, f, g          | Positions microphoniques longitudinales au rail              |
| A, B, C, D, E, F, G, H, I, J | Positions microphoniques transversales au rail               |