Hyperarbres et Partitions semi-pointées

Bérénice Delcroix-Oger

▶ **To cite this version:**

Bérénice Delcroix-Oger. Hyperarbres et Partitions semi-pointées : Aspects combinatoires, algébriques et homologiques. Combinatoire [math.CO]. Université Claude Bernard Lyon 1, 2014. Français. NNT : . tel-01110557

HAL Id: tel-01110557

https://theses.hal.science/tel-01110557

Submitted on 28 Jan 2015

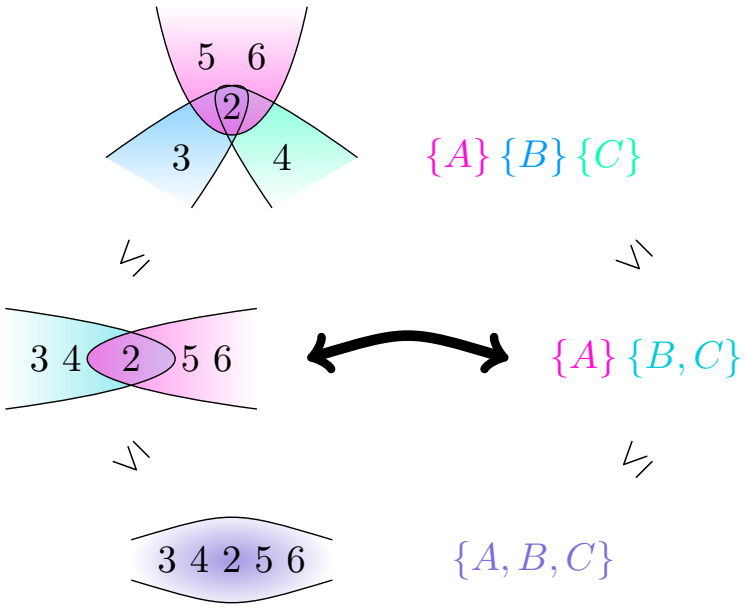
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut Camille Jordan
UMR 5208 du CNRS

Hyperarbres et Partitions semi-pointées :

Aspects combinatoires, algébriques et homologiques



Bérénice Delcroix-Oger

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
de l'Université Claude Bernard Lyon 1
préparée à l'Institut Camille Jordan
Laboratoire de Mathématiques

N° d'ordre : 243-2014
École doctorale InfoMaths ED512
UMR 5208 CNRS-UCBL

Thèse de doctorat

Spécialité Mathématiques

présentée par

Bérénice Delcroix-Oger

Hyperarbres et Partitions semi-pointées : Aspects combinatoires, algébriques et homologiques

Soutenue publiquement le 21 novembre 2014

Après avis de :

François	Bergeron	Université du Québec à Montréal
Nicolas	Thiéry	Université Paris Sud

Devant le jury composé de :

François	Bergeron	Université du Québec à Montréal	Rapporteur
Mireille	Bousquet-Mélou	Université de Bordeaux	Examinatrice
Frédéric	Chapoton	Université Claude Bernard Lyon I	Directeur de thèse
Sylvie	Corteel	Université Paris Diderot	Examinatrice
Frédéric	Jouhet	Université Claude Bernard Lyon I	Examinateur
Nicolas	Thiéry	Université Paris Sud	Rapporteur

À mes grands-parents

Résumé : Hyperarbres et Partitions semi-pointées : Aspects combinatoires, algébriques et homologiques

Cette thèse est consacrée à l'étude combinatoire, algébrique et homologique des hyperarbres et des partitions semi-pointées. Nous étudions plus précisément des structures algébriques et homologiques construites à partir des hyperarbres, puis des partitions semi-pointées, qui apparaissent naturellement au cours de notre étude.

Après un bref rappel des notions utilisées, nous utilisons la théorie des espèces de structure introduite par A. Joyal afin de déterminer l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres, connu aussi sous le nom de *poset de Whitehead*. Cette action s'identifie à l'action du groupe symétrique liée à la structure anti-cyclique de l'opérade PreLie. Nous raffinons ensuite nos calculs sur une graduation de l'homologie, appelée *homologie de Whitney*.

Lors de cette étude interviennent des formules semblant décrire des hyperarbres décorés par des espèces. Nous définissons la notion d'*hyperarbre aux arêtes décorées* par une espèce avant d'établir des équations fonctionnelles vérifiées par ces hyperarbres. Ces hyperarbres décorés peuvent être décrits comme des cas particuliers d'arborescence R-enrichie. Une bijection des hyperarbres décorés avec des arbres en boîtes et des partitions dont les parts sont décorées permet d'obtenir une formule close pour leur cardinal, à l'aide d'un codage de Prüfer. Certains exemples pertinents reliés à des objets connus sont exhibés. Nous généralisons ensuite la décoration des hyperarbres en décorant à la fois les arêtes et le voisinage des sommets de l'hyperarbre, ce qui permet d'obtenir une interprétation combinatoire de l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres en terme d'hyperarbres bidécorés.

Nous adaptons ensuite les méthodes de calcul de caractères sur les algèbres de Hopf d'incidence, introduites par W. Schmitt dans le cas de familles de posets bornés, à des familles de posets non bornés vérifiant certaines propriétés. Cette adaptation repose sur l'introduction d'une bigèbre formée sur les posets dont nous relions le coproduit au coproduit sur l'algèbre de Hopf d'incidence obtenue en bornant les posets par l'ajout d'un maximum. Nous appliquons ensuite cette adaptation aux posets des hyperarbres. Nous donnons une formule explicite pour le coproduit de la bigèbre associée, qui fait intervenir le cardinal de l'ensemble des hyperarbres dont la taille des arêtes et la valence des sommets sont fixées.

Enfin, une sorte d'hyperarbre décoré, appelée *hyperarbre aux arêtes pointées*, peut être à son tour munie d'un ordre partiel. Nous montrons que ces posets sont Cohen-Macaulay avant de calculer la dimension de l'unique groupe d'homologie non nulle. L'étude de ces posets fait apparaître une généralisation des posets des partitions et des posets des partitions pointées : les poset des partitions semi-pointées. Nous montrons que ces posets sont aussi Cohen-Macaulay, avant de déterminer à l'aide de la théorie des espèces une formule close pour la dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial de ces posets.

Mots-clés : Hyperarbre, poset, espèce, homologie, partition, action du groupe symétrique, algèbre de Hopf d'incidence, Cohen-Macaulay.

Abstract : Hypertrees and Semi-pointed Partitions : Combinatorial, Algebraic and Homological Aspects

This thesis is dedicated to the combinatorial, algebraic and homological study of hypertrees and semi-pointed partitions. More precisely, we study algebraic and homological structures built from hypertrees and semi-pointed partitions, which occur naturally in our study.

After recalling briefly the notions needed, we use the theory of species of structures, introduced by A. Joyal, to compute the action of the symmetric group on the homology of the hypertree posets, also known as *Whitehead poset*. This action is the same as the action of the symmetric group linked with the anticyclic structure of the PreLie operad. We refine our computations on a grading of the homology, called *Whitney homology*.

In this study occur formulas related to hypertrees decorated by species. We define the notion of *edge-decorated hypertrees* before stating functional equations satisfied by these hypertrees. These decorated hypertrees can be described as a special case of R-enriched trees. A one-to-one correspondence of decorated hypertrees with box trees and partitions whose parts are decorated sets enables us to compute a close formula for the cardinality of decorated hypertrees, thanks to a Prüfer code. Some relevant examples are related to known objects. We then generalize decorations of hypertrees by decorating both edges and neighbourhoods of vertices in a hypertree, which gives a combinatorial interpretation of Whitney homology of hypertree posets in terms of bidecorated hypertrees.

Moreover, we adapt computation methods of characters on incidence Hopf algebras, introduced by W. Schmitt for families of bounded posets, to families of unbounded posets satisfying some additional properties, called triangle and diamond posets. This relies on the link between the coproduct on a new bialgebra and the coproduct on the incidence Hopf algebra obtained by bounding posets by the addition of a greatest element. After applying these results to the hypertree posets, we give an explicit formula for the coproduct on the obtained bialgebra, involving the number of hypertrees with fixed valencies and edge sizes.

Finally, a kind of decorated hypertree, called *pointed-edge hypertree*, can also be endowed with a partial order. We show that the associated posets are Cohen-Macaulay and compute the dimension of the unique non-vanishing homology group. By studying the associated posets, we unveil a new family of posets : the semi-pointed partition posets, which generalize both partition posets and pointed partition posets. We show the Cohen-Macaulayness of these posets and obtain, thanks to species theory, a closed formula for the dimension of its unique homology group, which extend the ones established for partition posets and pointed partition posets.

Keywords : Hypertree, poset, species, homology, partition, action of the symmetric group, incidence Hopf algebra, Cohen-Macaulayness.

Remerciements

Cette thèse ne peut commencer sans un grand merci à Frédéric Chapoton, mon directeur de thèse. Il m'a permis de travailler sur un sujet de thèse passionnant et m'a encadrée avec patience, gentillesse et bienveillance. Il a toujours su se rendre disponible pour m'écouter et me conseiller, m'apprenant petit à petit les ficelles du métier et l'autonomie : je lui en suis très reconnaissante !

Je tiens aussi à remercier les rapporteurs, François Bergeron et Nicolas Thiéry, d'avoir pris le temps de se pencher sur ma thèse et de leurs remarques et commentaires qui m'ont permis de la peaufiner. Je suis reconnaissante à l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'en faire partie : c'est un honneur pour moi de présenter ma thèse devant eux.

J'ai une pensée émue pour M. Leblond, qui a eu la clairvoyance de me conseiller une orientation que je n'ai jamais regrettée, Sylvain Hénaff et Bernard Luron, qui ont guidé mes premiers pas parmi les mathématiques du supérieur, Patrick Dehornoy qui m'a encadrée lors de mon premier plongeon dans le monde de la recherche, et pour tous les enseignants qui m'ont transmis le goût de leur matière, de la rigueur et de l'enseignement : je les remercie de m'avoir accordé de leurs temps et de m'avoir guidée vers la thèse.

Je remercie les différents laboratoires qui m'ont permis d'exposer mes travaux, et les personnes qui sont venues les écouter.

Je remercie le GDR IM de m'avoir permis de séjourner pendant une semaine à Marne-la-vallée, Viviane qui m'a hébergée, et toute l'équipe de Marne-la-vallée pour leur formidable accueil. Je remercie tout autant le LIRCO qui a financé un séjour de deux semaines au LACIM de Montréal, et l'équipe du LACIM qui m'a aussi très bien accueillie. Je remercie de plus l'ANR HOGT qui m'a permis de prendre part à bien des rencontres et des cours enrichissants, et ses membres, avec qui les discussions ont été toute aussi enrichissante.

Je remercie Roland Bacher, Gilles Schaeffer et Gilbert Labelle pour les références qu'ils m'ont indiquées et qui ont permis d'étoffer ma thèse. Je remercie aussi l'ensemble des chercheurs que j'ai rencontré aux cours des différentes conférences auxquelles j'ai assisté et qui ont un peu, par les conversations que j'ai eu avec eux, contribué à nourrir cette thèse.

Je remercie ensuite l'ensemble du personnel de l'ICJ et de Lyon 1 qui ont fourni un cadre idéal à ces années de thèse, notamment Aurélie Raymond, Monique Gaffier et Maria Konieczny, qui ont su m'aiguiller parmi le labyrinthe administratif du laboratoire, Élisabeth Mironescu, qui est une source intarissable de bons conseils pour les jeunes doctorants de l'ICJ, Régis Goiffon et Kenji Iohara, avec qui j'ai eu plaisir à parler de Mathématiques au détour d'un café (ou d'un thé), Philippe Malbos et Nathalie Guin, qui m'ont permis d'effectuer une partie de mon monitorat en Informatique et Sylvie Sonnier, dont les discussions me manqueront l'année prochaine.

Je sais gré aux doctorants de l'ICJ qui ont contribué, par des conversations plus ou moins animées et leurs présences chaleureuses, à créer une ambiance agréable pour cette thèse, notamment à mes cobureaux et co-midis.

Je remercie Thomas Rey pour m'avoir gentiment donné son thème latex et m'avoir tant appris en première année, en vieux routard de troisième année. Je me souviens encore de ton "Tiens à jour ta biblio dès le début de ta thèse !" pendant que tu rédigeais... J'espère rencontrer le petit Camille avant qu'il ne commence à tremper du maroilles dans son café ! J'embrasse Claire-Soazic et Vincent, avec qui j'ai commencé ma thèse dans ce bureau 109E, en leur souhaitant à tous les deux (avec leurs conjoints respectifs) autant d'épanouissement dans leur vie professionnelle que dans leur vie privée. Faudra qu'on se revoit quand même ! Non Rudy, je ne t'oublie pas.

Nous avons commencé notre thèse en même temps et la finissons presque en même temps : j'ai été contente de partager le bureau avec toi pendant ces trois ans et j'admire secrètement la disposition artistique de tes livres sur ton bureau (qui me rappelle ma chambre d'enfant). Mais quand verra-t-on tes photos de mariage ? À Ioanna, qui nous a déjà quitté et avec qui j'ai partagé le TD de maths 3, je souhaite une bonne continuation. Saïd, tu nous manques ! Tomás, voy a dejar de refunfuñar ! Xavier, il y a un vide à ta place en ce moment, reviens-nous vite avant que Rudy n'annexe ton deuxième (et seul restant) bureau ! Simon, j'ai été contente de partager des bouts de tableaux avec toi. Ne t'inquiète pas, tu rencontreras le majestueux Grim un jour et j'ai hâte de voir Bébé violet pour ma part. "Alea jacta est" ! Enfin, Bienvenue à Nadja et Sylvain dans notre joli bureau !

Je pense aussi à ceux qui ont déjà quitté la communauté des doctorants pour celle des docteurs : Alexis, Elodie, Evra(r)d, JB, et tous les autres.

Enfin, je souhaite une bonne fin de thèse aux doctorants de l'ICJ, notamment Adriane, Antoine et Benoît, les compères algébristes, Benjamin le logicien, Blanche, Cécilia, François et Mathias, les compères combinatoriciens, Ivan, Marie, Sylvain le nouveau papa et Xiaolin.

Je tiens à ajouter une mention spéciale pour mes amis de promotion que j'ai toujours eu plaisir à retrouver autour d'un thé, ou d'un mojito, et que j'embrasse : Coline, Corentin et Emeriiiiic.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complet sans citer "les copains" : Antoine et Sophie, David et Loren, Marion, Mickaël et Charlotte, Pierre-Marie, Romain et Clémence. Tout a commencé par des repas d'oignons à la résidence, puis Marcel Merieux et le groupe s'est agrandi petit à petit... C'est toujours un plaisir de vous revoir, même si c'est malheureusement moins souvent qu'avant.

Nathalie et Lauriane ont su être là au bon moment, notamment pour alléger ma charge de pliage de pompons, ce qui m'a permis d'avancer dans ma thèse en préparant le mois de mai sereinement (ou presque) : merci à elles ! J'espère vous revoir bientôt !

J'en arrive à la famille. Je remercie mon père de m'avoir appris à regarder le monde d'un œil différent et curieux, ma mère de m'avoir inculqué sa rigueur germanique et son amour de l'enseignement et mes sœurs de m'avoir soutenu moralement à distance. Loin des yeux, près du cœur. J'embrasse Yann et Judicaëlle qui rédigera peut-être sa thèse dans 25 ans. Je remercie les Delcroix, François et Carmen et François, de m'avoir accueillie aussi chaleureusement au sein de leur famille, et m'avoir fait découvrir le maroilles, sans oublier les Phongmany, Clotilde et Rattana, Gauthier et Tristan. Je rends grâce à Grim d'avoir soigneusement poinçonné chacun des articles que je ramenais à la maison (et les meubles) et de s'être assuré que je ne fasse pas trop de grasses matinées, pour le bien de ma thèse et de son estomac.

Enfin Thibaut, mon mari. Sans toi, ma vie aurait des couleurs différentes (et serait plus poussiéreuse). Merci d'être toujours là. 🦇

Sommaire

Introduction générale **1**
Avant-propos 1

1 Généralités **7**
1.1 Espèces 7
1.2 Topologie des posets 14
1.3 Hyperarbres 25

2 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'homologie de $\widehat{HT_n}$ **31**
2.1 Homologie du poset des hyperarbres 32
2.2 Relations entre espèces et espèces auxiliaires 34
2.3 Dimension de l'homologie du poset 39
2.4 Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset 42
2.5 Action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney 46
2.6 Perspectives 51

3 Hyperarbres décorés **53**
3.1 Hyperarbres décorés 54
3.2 Compter les hyperarbres décorés grâce aux arbres en boîtes 60
3.3 Deux cas d'hyperarbres décorés 67
3.4 Généralisations : hyperarbres bidécorés 80
3.5 Perspectives 84

4 Algèbre de Hopf d'incidence des posets des hyperarbres et des partitions **85**
4.1 Généralités sur les algèbres de Hopf d'incidence 86
4.2 Algèbre de Hopf d'incidence des posets en triangle et en diamant 87
4.3 Algèbre de Hopf d'incidence des posets des hyperarbres 90

5 Hyperarbres aux arêtes pointées **105**
5.1 Présentation des posets 105
5.2 Caractère Cohen-Macaulay 106
5.3 Homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées 110

6 Partitions semi-pointées **113**
6.1 Généralités 114
6.2 Homologie des posets de partitions semi-pointées 117
6.3 Parenthèse sur les partitions décorées par une opérade 124
6.4 Perspectives 126

Bibliographie **129**

Introduction générale

Hâtez-vous lentement, et sans perdre courage,
Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage,
Polissez-le sans cesse, et le repolissez,
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez.

Art poétique (1674)
Nicolas Boileau

Avant-propos

Nous présentons dans ce manuscrit les résultats obtenus au cours de cette thèse, effectuée sous la direction de Frédéric Chapoton. Ce travail s'organise autour des hyperarbres, des partitions, et des posets associés. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux posets des hyperarbres et à leur homologie ainsi qu'à des variations décorées de ceux-ci. Plus particulièrement, nous avons étudié l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres ainsi que l'homologie du poset des hyperarbres pointés. Nous avons dénombré les hyperarbres décorés par des espèces. Nous avons de plus étudié le coproduit d'une bigèbre reliée à l'algèbre de Hopf d'incidence des posets des hyperarbres et des partitions, qui contient l'algèbre de Hopf de Faa di Bruno. Nous avons enfin étudié une généralisation des posets des partitions et des partitions pointées qui est apparue naturellement au cours de ce travail : les posets des partitions semi-pointées.

Liste des travaux rassemblés dans la thèse Les différents travaux rassemblés dans cette thèse ont fait l'objet des publications ou pré-publications suivantes :

- Chapitre 2 : Action of the symmetric groups on the homology of the hypertree posets, *Journal of Algebraic Combinatorics* [Oge13a],
- Chapitre 3 : Decorated hypertrees, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*[Oge13b],
- Chapitre 4 : Hypertree posets and hooked partitions, *soumis* [Oge14].

Des hypergraphes au poset des hyperarbres Les principaux objets apparaissant dans cette thèse sont les hyperarbres. La notion d'*hypergraphe* a été introduite au début des années 1970 par C. Berge dans [Ber73] et [Ber89], comme une généralisation de la notion de graphe. Un hypergraphe est un ensemble de sommets et d'arêtes, où une arête n'est plus seulement une paire de sommets, comme dans le cas des graphes, mais un ensemble de sommets de cardinal au moins deux. Depuis leur introduction, les hypergraphes ont fait l'objet de plusieurs études. D'un point de vue combinatoire, ils ont notamment été énumérés, ainsi que leurs arbres couvrants, par W. D. Smith et D. M. Warme dans [War98]. Ils ont de plus été dénombrés suivant le nombre de sommets et d'arêtes de tailles fixées par I. Gessel et L. Kalikow dans l'article [GK05] et dans la thèse [Kal99]. Cependant, l'intérêt des hypergraphes ne se limite pas à la combinatoire. En effet, la théorie des hypergraphes trouve des applications dans des domaines très variés tels que les théories des systèmes dynamiques et des ultrafiltres (théorème de Ramsey, cf. [Bla93]), la théorie des nombres (théorème de Szemerédi, cf. [FK78] et [Tao06] par exemple), la logique propositionnelle (problème SAT), les graphes et-ou, les bases de données et l'analyse des transports (cf. [GLPN93]), ou encore la théorie des arrangements de sous-espaces, utilisée en théorie de la complexité [Bjö94]. Les hypergraphes permettent de plus de modéliser des systèmes biologiques (cf. [KHT09]) ou encore des réseaux de réactions chimiques (cf. [Özt08]).

Il est naturel de définir à partir de la notion d'hypergraphe la notion d'hyperarbre. Un *hyperarbre* est en effet un hypergraphe connexe et sans cycle, relativement à une certaine notion de chemins dans un hypergraphe. L'ensemble des hyperarbres sur n sommets peut être muni d'une structure de poset définie comme suit. Soient deux hyperarbres sur n sommets H et K. L'hyperarbre H est plus petit que l'hyperarbre K si et seulement si toute arête de K est un sous-ensemble d'une arête de H. Plusieurs constructions sur le poset des hyperarbres ont été étudiées. Dans leur article [EFMre] par exemple, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon ont construit sur les hyperarbres planaires une structure d'algèbre de Hopf combinatoire qui généralise l'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Butcher-Connes-Kreimer. L'action de sous-groupes du groupe des automorphismes du groupe libre sur un complexe simplicial associé au poset des hyperarbres a de plus permis d'obtenir des résultats dans l'étude des automorphismes du groupe libre et de produits libres dans les articles de D. McCullough et A. Miller [MM96], de N. Brady, J. McCammond, J. Meier et A. Miller [BMMM01], de J. McCammond et J. Meier [MM04] et de C. Jensen, J. McCammond et J. Meier [JMM07] et [JMM06]. Le chapitre 2 de cette thèse est en grande partie motivé par ce dernier corpus d'article, ainsi que par l'article de F. Chapoton [Cha07]. En effet, N. Brady, J. McCammond, J. Meier et A. Miller montrent dans l'article [BMMM01] que le poset des hyperarbres sur n sommets ne possède qu'un unique groupe d'homologie non trivial et calculent sa dimension égale à $(n-1)^{n-2}$. Cette dimension a incitée F. Chapoton à conjecturer l'action du groupe symétrique sur le poset des hyperarbres sur n sommets après avoir calculé le polynôme caractéristique du poset dans [Cha07].

Espèces et Opérades Nous utilisons dans cette thèse la notion d'*espèce de structure*. Cette notion a été introduite par A. Joyal dans l'article [Joy81]. Une espèce est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. De manière informelle, une espèce peut être considérée comme une règle, un "plan de construction", qui permet de former à partir d'un ensemble d'éléments, que nous appellerons *étiquettes*, un ensemble d'objets stable par l'action du groupe symétrique sur les étiquettes. L'introduction de cette notion établit un cadre clair et universel pour la compréhension d'identités entre séries génératrices de structures étiquetées et non étiquetées. La théorie des espèces permet l'obtention de preuves élégantes de techniques algébriques usuelles, telles que la théorie de Pólya et l'inversion de Möbius pour n'en citer que quelques unes, ainsi que des résolutions efficaces de nombreux problèmes de combinatoire énumérative. Elle a connu, et connaît encore, de nombreux développements notamment grâce à l'école de combinatoire de Montréal et G.-C. Rota ([BRSV86]). Le livre [BLL98] de F. Bergeron,

G. Labelle and P. Leroux permettra au lecteur curieux d'approfondir la notion d'espèce et ses applications.

La notion d'espèce est intimement reliée à la notion d'opérade. En effet, une opérade $\mathcal{O}$ est une famille d'ensembles $(\mathcal{O}_n)_{n\geq 1}$ où chaque élément de l'ensemble $\mathcal{O}_n$ peut être vu comme une "boîte", qui associe à n éléments en entrée un élément en sortie. L'opérade $\mathcal{O}$ est aussi munie d'opérations de composition entre les "boîtes". Si elle est de plus munie d'une action du groupe symétrique sur les entrées compatible avec les opérations de composition, l'opérade $\mathcal{O}$ est dite *symétrique*. Une opérade symétrique peut alors être vue comme une espèce vérifiant certaines propriétés de composition. Bien que les prémices de l'histoire des opérades remonte jusqu'en 1898 avec l'article [Whi09], d'après [MSS02], la notion d'opérade n'a été formalisée qu'à partir des années 1960 en topologie algébrique comme outil pour l'étude des espaces de lacets itérés. Elle a été inspirée des notions de PACTS et PROPS de J.F. Adams et S. MacLane introduites au début des années 1960. Le nom d'"opérade" apparaît dans l'article [May72] de P. May, puis la théorie des opérades est développée par J. Stasheff, M. Boardman, R. Vogt, P. May, A. Joyal et d'autres mathématiciens spécialisés en topologie et théorie des catégories. Une opérade encode un type d'algèbre, et plus particulièrement, les opérations de ces algèbres ainsi que les manières de les composer. Cette description a permis à la théorie des opérades de connaître un nouveau souffle depuis les années 1990, avec des développements en théorie des déformations, en théorie quantique des champs, en géométrie non commutative, en théorie de la renormalisation, en théorie des catégories, en algèbre homologique, en informatique, ainsi qu'en combinatoire algébrique avec notamment les travaux de E. Getzler, V. Ginzburg, M. Kapranov, M. Kontsevitch et Y. Manin. Le lecteur curieux pourra trouver dans les références suivantes de plus amples informations sur l'aspect historique de la théorie des opérades : le livre [LV12] et l'article [MSS02].

Les opérades auxquelles cette thèse fait référence seront principalement les opérades Comm, Lie, Assoc, Perm, introduite par M. Mendez et J. Yang dans l'article [MY91] et F. Chapoton dans [Cha01] et PreLie, introduite par F. Chapoton et M. Livernet dans l'article [CL01]. Cette dernière opérade apparaît notamment lors de l'étude de l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres du chapitre 2.

Algèbres de Hopf d'incidence et Posets des partitions et des partitions décorées

W. Schmitt définit en 1994 dans son article [Sch94] la notion d'algèbre de Hopf d'incidence associée à une famille donnée de posets bornés satisfaisant certaines propriétés de clôture. Le produit de l'algèbre est le produit direct sur les posets. Le coproduit d'un poset est obtenu en effectuant la somme sur les éléments du poset, du produit direct de l'intervalle au-dessous de l'élément par l'intervalle au-dessus de l'élément. En utilisant le coproduit de l'algèbre de Hopf, il est alors possible de définir une convolution sur les caractères de l'algèbre. Les prémices de cette opération de convolution remontent à R. Dedekind et E.T. Bell, d'après G.C. Rota [BRSV86]. Cette opération apparaît aussi dans l'article [BRSV86] de G.C. Rota en même temps que l'introduction de la notion de nombre de Möbius d'un poset, qui se calcule de manière récursive sur les intervalles du poset et se trouve être égal à la caractéristique d'Euler du poset (théorème de Philip Hall). Le nombre de Möbius d'un poset est donc un invariant topologique clé de la théorie des posets.

L'une des algèbres de Hopf d'incidence les plus étudiées est certainement l'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions, aussi connue sous le nom d'algèbre de Hopf de Faa di Bruno. Le poset de partitions sur n sommets est constitué de l'ensemble des partitions de $\{1,\dots,n\}$ muni de l'ordre partiel suivant : une partition P est plus petite qu'une partition Q si toute part de Q est incluse dans une part de P. L'algèbre de Hopf de Faa di Bruno est apparue en 1974 dans l'article de Doubilet [Dou74], ainsi qu'en 1979 dans l'article de G.C. Rota et S. A. Joni [JR79]. Elle admet plusieurs constructions équivalentes. Elle peut ainsi être vue comme algèbre

de Hopf de renormalisation en théorie quantique des champs ou encore comme dual gradué de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des difféomorphismes formels (cf. [FM14]).

Nous étudierons au chapitre 4 l'algèbre de Hopf d'incidence associée au poset des hyperarbres, dont certains intervalles se décomposent en produits de posets des partitions.

Plans et résultats de la thèse Nous résumons maintenant le contenu de cette thèse.

Le premier chapitre rappelle les notions usuelles et les résultats connus concernant la théorie des espèces, l'homologie des posets et les posets des hyperarbres, qui seront utilisés dans la suite du manuscrit. Nous rappelons notamment que les posets des hyperarbres sont Cohen-Macaulay ([BMMM01]), c'est-à-dire que leur homologie est concentrée en degré maximal.

Le deuxième chapitre s'attache à l'étude de l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres. Nous montrons que, le poset étant Cohen-Macaulay, l'étude de cette action repose sur l'étude de l'action du groupe symétrique sur les k-chaînes larges du poset. La théorie des espèces permet alors d'obtenir, par des décompositions de chaînes, des équations fonctionnelles pour les chaînes considérées. Ces équations fonctionnelles mènent à une équation différentielle sur les séries génératrices qui permet de déterminer la dimension $(n-1)^{n-2}$ de l'unique groupe d'homologie non nul du poset des hyperarbres sur n sommets, retrouvant ainsi un résultat de J. McCammond et J. Meier [MM04]. Ces mêmes équations fonctionnelles traduites en termes de séries indicatrices de cycles permettent de déterminer l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres sur n sommets, qui s'identifie à l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'espace vectoriel $\mathrm{PreLie}(n-1)$ de l'opérade PreLie issue de sa structure anti-cyclique. L'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres s'identifie quant à elle à l'action du groupe symétrique sur une sorte d'hyperarbre décoré, étudié au chapitre 3.

Un hyperarbre décoré est un hyperarbre muni d'un choix pour chacune de ses arêtes de taille k d'une $\mathfrak{S}_k$-structure. Une bijection entre l'ensemble des hyperarbres décorés par une espèce $\mathcal{P}$ et l'ensemble des couples formés d'un arbre en boîtes et d'un ensemble d'ensembles décorés par $\mathcal{P}'$ nous permet d'énumérer les hyperarbres décorés par une espèce donnée $\mathcal{P}$. Une fois encore, la théorie des espèces fournit des équations fonctionnelles pour les espèces d'hyperarbres décorés qui permettent de calculer récursivement l'action du groupe symétrique sur les objets considérés. Ces équations sont appliquées dans les cas particuliers d'hyperarbres dont les arêtes sont décorées par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ et $\widehat{\mathrm{Lie}}$. Nous généralisons ensuite la décoration de l'hyperarbre en choisissant de plus une $\mathfrak{S}_j$-structure pour chaque sommet de valence j d'un hyperarbre décoré. Un tel hyperarbre sera appelé bidécoré. Nous établissons des équations fonctionnelles pour ces hyperarbres avant d'étudier certains cas d'hyperarbres bidécorés apparaissant dans l'article [Cha07] de F. Chapoton et lors de l'étude de l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres.

Le quatrième chapitre est une adaptation des calculs de caractères sur les algèbres de Hopf d'incidence à certaines familles de posets non bornés. En effet, la notion d'algèbre de Hopf d'incidence a été introduite dans le cadre de familles de posets bornés. Les posets des hyperarbres n'étant pas bornés, il n'est pas possible d'appliquer la théorie des algèbres de Hopf d'incidence aux posets eux-mêmes. Nous appelons *posets en triangle* les posets possédant un minimum mais non bornés comme les posets des hyperarbres. Nous pouvons appliquer la construction des algèbres de Hopf d'incidence aux posets en triangle augmentés d'un maximum qui sont alors bornés : nous obtenons une algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$. Cette algèbre de Hopf étant très grande, nous introduisons une bigèbre plus petite $\mathcal{B}$ que nous relions à $\mathcal{H}$ et dans laquelle les calculs seront allégés. Appliquant ces constructions aux posets d'hyperarbres, nous calculons le coproduit dans la bigèbre associée au poset des hyperarbres $\mathcal{B}_H$. Le coproduit dans $\mathcal{B}_H$ est relié au nombre d'hyperarbres ayant un nombre fixé α_k de sommets de valence k et un nombre fixé π_j d'arêtes de taille j. Grâce au lien entre les algèbres $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ et au calcul du coproduit sur $\mathcal{B}_H$, nous pouvons ensuite donner un nouveau calcul de la dimension de l'homologie du poset des

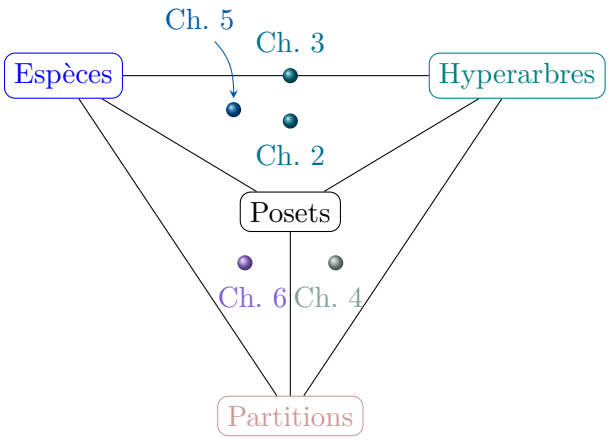
hyperarbres.

Le cinquième chapitre est lié à l'étude de certains hyperarbres décorés qui peuvent être munis d'un ordre partiel, les *hyperarbres aux arêtes pointées*. Ces hyperarbres sont des hyperarbres munis pour chaque arête d'un sommet distingué dans l'arête. Un hyperarbre aux arêtes pointées H sera plus petit qu'un autre hyperarbre aux arêtes pointées K si et seulement si chaque arête de H est union d'arêtes de K et a son pointage choisi parmi les pointages des arêtes de K dont elle est union. Nous montrons que le poset ainsi obtenu est Cohen-Macaulay, en montrant que tout intervalle ne contenant pas le minimum du poset est semi-modulaire, puis que le poset lui-même admet un ordre récursif sur ses atomes. Nous donnons ensuite des équations fonctionnelles vérifiées par la dimension m_n de l'unique groupe d'homologie non nul du poset des hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets, ainsi que les premières valeurs obtenues, pour des petits n.

Les travaux sur les hyperarbres aux arêtes pointées font surgir une généralisation des posets des partitions et des posets des partitions pointées : les posets des partitions semi-pointées qui sont l'objet du sixième chapitre. Une *partition semi-pointée* est une partition d'un ensemble à n éléments dont certaines parts possèdent un élément distingué et d'autre non. Une partition semi-pointée S est plus petite qu'une partition semi-pointée P si et seulement si chaque part s de S est l'union de parts $(p_1, \dots, p_j)$ de P et s n'est pointée que si au moins l'un des p_i l'est, auquel cas le pointage de s est choisi parmi ceux des p_k pointés. L'ensemble des partitions semi-pointées plus petites que la partition en n parts de $\{1, \dots, n\}$ avec l parts pointées $\{\{\mathbf{1}\}, \dots, \{\mathbf{l}\}, \{l+1\}, \dots, \{n\}\}$ forme alors un poset que nous bornons par l'ajout d'un minimum et que nous notons $\Pi_{n,\ell}$. Ce poset est totalement semi-modulaire donc Cohen-Macaulay. En utilisant la théorie des espèces et un raisonnement sur les chaînes strictes et larges similaire à celui utilisé pour le poset des hyperarbres, nous calculons ensuite la dimension de l'unique groupe d'homologie non nul du poset $\Pi_{n,\ell}$, pour laquelle nous donnons une formule close.

L'ordre des chapitres suit l'ordre chronologique et logique. Chaque chapitre peut cependant être lu indépendamment des autres, sous réserve de connaître les généralités rappelées dans le premier chapitre.

Nous présentons ci-dessus un diagramme situant les notions utilisées dans chacun des chapitres de ce manuscrit :



Notation

Les notations suivantes seront utilisées dans la thèse :
- $|E|$ désignera le cardinal de l'ensemble E.
- $\widehat{HT_n}$ désignera le poset des hyperarbres sur n sommets.
- Une espèce sera notée F ou $\mathcal{F}$. La série génératrice associée sera notée $\mathbf{C}_{\mathcal{F}}$ et la série indicatrice de cycles associée sera notée $\mathbf{Z}_{\mathcal{F}}$, sauf mention contraire.
- Nous utiliserons la même notation pour une opérade, l'espèce associée et la série indicatrice de cycles associée. Ainsi par exemple, elles seront toutes notées Comm dans le cas de l'opérade commutative et Perm dans le cas de l'opérade permutative.

CHAPITRE 1

Généralités

Sommaire

1.1 Espèces **7**
1.2 Topologie des posets **14**
1.3 Hyperarbres **25**

Ce premier chapitre se veut être une introduction accessible aux notions et aux résultats nécessaires dans la suite de ce manuscrit de thèse : les espèces de structures et les opérades, l'homologie des posets, accompagnés des notions d'épluchabilité, d'ordre récursif sur les atomes et de semi-modularité totale, ainsi que les hyperarbres et le poset associé.

1.1 Espèces de structure

Dans cette section, nous introduisons la théorie des espèces en nous appuyant sur le livre [BLL98]. Cette théorie a été introduite pour la première fois par A. Joyal dans les années 1980 dans l'article [Joy86].

1.1.1 Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition 1.1.1. Une *espèce* $\mathcal{F}$ est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini I, l'espèce $\mathcal{F}$ associe un ensemble fini $\mathcal{F}(I)$ indépendant de la nature de I.

Remarque 1.1.2. Une espèce $\mathcal{F}$ peut être vue comme une règle qui produit pour tout ensemble fini I, un ensemble fini $\mathcal{F}(I)$ et pour toute bijection $\sigma : I \to J$, une fonction $\mathcal{F}_\sigma : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ telle que :

1. Pour toutes bijections $\sigma : I \to J$ et $\tau : J \to K$, $\mathcal{F}_{\tau\circ\sigma} = \mathcal{F}_\tau \circ \mathcal{F}_\sigma$,
2. Pour l'identité $\mathrm{Id}_I : I \to I$, $\mathcal{F}_{\mathrm{Id}_I} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(I)}$.

Exemple 1.1.3.
– L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des ordres totaux sur I est une espèce, appelée l'*espèce des listes* et notée L.
– L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble $\{I\}$ est une espèce, appelée l'*espèce des ensembles* et notée E.

– L'application définie pour tout ensemble fini I par :

$$I \mapsto \begin{cases} \{I\} & \text{si } I = \emptyset, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une espèce, appelée l'*espèce unité* et notée 1. Cette espèce sera commentée dans l'exemple 1.1.5.

– L'application définie pour tout ensemble fini I par :

$$I \mapsto \begin{cases} \{I\} & \text{si } |I| = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une espèce, appelée l'*espèce singleton* et notée X.

– L'application définie pour tout ensemble fini I par :

$$I \mapsto \begin{cases} \{I\} & \text{si } |I| \geq 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une espèce, appelée l'*espèce des ensembles non vides*, associée à l'opérade Comm et qui sera notée de la même manière.

– L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble I est une espèce, appelée l'*espèce des ensembles pointés*. En effet, un élément de l'ensemble image correspond à un élément distingué dans l'ensemble de départ. Elle est associée à l'opérade Perm et sera notée de la même manière.

– L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des arbres enracinés étiquetés par I est une espèce, associée à l'opérade PreLie, et qui sera notée de la même manière.

– L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des cycles sur I est une espèce appelée *espèce des cycles*. Nous représenterons les cycles par des boucles lues en sens horaire.

1.1.2 Opérations sur les espèces

Il est possible de définir les opérations suivantes sur l'ensemble des espèces :

Définition 1.1.4. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces. Nous rappelons les opérations suivantes :

– $\mathcal{F}'(I) = \mathcal{F}(I \sqcup \{\bullet\})$, (Dérivée)

– $(\mathcal{F} + \mathcal{G})(I) = \mathcal{F}(I) \sqcup \mathcal{G}(I)$, (Somme)

– $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} \mathcal{F}(I_1) \times \mathcal{G}(I_2)$, (Produit)

– Si $\mathcal{G}(\emptyset) = \emptyset$, $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} \mathcal{F}(\pi) \times \prod_{J \in \pi} \mathcal{G}(J)$, où $\mathcal{P}(I)$ parcourt l'ensemble des partitions de I. (Substitution)

Notons que la somme et le produit de deux espèces sont commutatifs par définition.

Exemple 1.1.5.

– La dérivée de l'espèce des cycles associe à un ensemble E l'ensemble des cycles sur E et le symbole $\{\bullet\}$. Nous choisissons d'orienter les cycles en sens horaire. Coupant l'étiquette $\{\bullet\}$ dans le cycle, nous obtenons alors une liste des éléments de l'ensemble E : la dérivée de l'espèce des cycles est l'espèce des listes.
Cet exemple est illustré sur la figure 1.1.

– L'espèce unité 1 est l'unité du produit. En effet, étant donnée une espèce $\mathcal{F}$, nous obtenons, pour tout ensemble fini I :

$$1 \cdot \mathcal{F}(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} 1(I_1) \times \mathcal{F}(I_2) = 1(\emptyset) \times \mathcal{F}(I) = \{\emptyset\} \times \mathcal{F}(I) = \mathcal{F}(I).$$

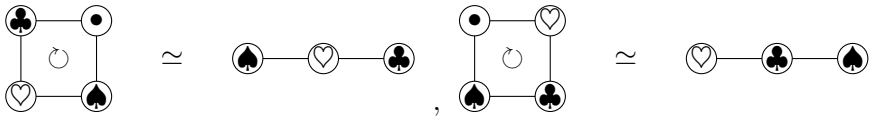


FIGURE 1.1 – Dérivée de l'espèce des cycles : l'espèce des listes.

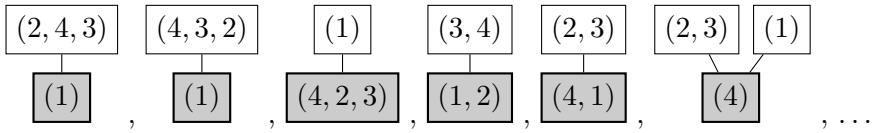


FIGURE 1.2 – Arbres enracinés de listes.

– Sur la figure 1.2 sont présentés des exemples appartenant à l'image de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ par l'espèce composée des arbres enracinés et des listes.

Les égalités que nous écrivons entre espèces signifient qu'il existe un isomorphisme entre ces espèces :

Définition 1.1.6 ([BLL98])**.** Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces. Un *isomorphisme* de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{G}$ est une famille de bijections $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \mapsto \mathcal{G}(U)$, où U est un ensemble fini, telle que pour tout ensemble fini V, toute bijection $\sigma : U \mapsto V$ et toute $\mathcal{F}$-structure $s \in \mathcal{F}(u)$, l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\mathcal{G}_\sigma \cdot \alpha_U(s) = \alpha_V(\mathcal{F}_\sigma \cdot s)$$

où $\cdot$ est une notation pour l'action du groupe symétrique sur la structure.

Les deux espèces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont alors dites *isomorphes*.

Les opérations entre espèces permettent notamment de décomposer les espèces, c'est-à-dire d'établir un isomorphisme d'espèces entre une espèce et une autre espèce obtenue par produit et composition d'espèces, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 1.1.7.
– Un arbre enraciné est constitué d'une racine et de la forêt de ses fils qui peuvent eux-mêmes être vus comme des arbres enracinés. Nous avons donc un isomorphisme d'espèces entre l'espèce PreLie et l'espèce $(X \cdot ((1 + \mathrm{Comm}) \circ \mathrm{PreLie}))$.
– Une liste est soit vide, soit constituée de son premier élément et de la liste de ses autres éléments. L'espèce L est donc isomorphe à l'espèce $1 + X \cdot L$.

1.1.3 Séries associées

Plusieurs séries peuvent être associées à une même espèce. Nous en présentons ici deux types : la série génératrice exponentielle et la série indicatrice de cycles.

À toute espèce $\mathcal{F}$ peut être associée la série suivante, appelée *série génératrice exponentielle* :

$$\mathbf{C}_\mathcal{F}(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{F}(\{1, \ldots, n\})| \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 1.1.8. Les séries génératrices des espèces définies à l'exemple 1.1.3 sont :
– $\mathbf{C}_L(x) = \frac{1}{1-x}$,
– $\mathbf{C}_E(x) = \exp(x)$,
– $\mathbf{C}_X(x) = x$,
– $\mathbf{C}_{\mathrm{Comm}}(x) = \exp(x) - 1$.

Les séries génératrices vérifient la proposition suivante :

Proposition 1.1.9. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces. Leurs séries génératrices satisfont :*
- $\mathbf{C}_{\mathcal{F}'} = \mathbf{C}'_{\mathcal{F}}$,
- $\mathbf{C}_{\mathcal{F}+\mathcal{G}} = \mathbf{C}_{\mathcal{F}} + \mathbf{C}_{\mathcal{G}}$,
- $\mathbf{C}_{\mathcal{F}.\mathcal{G}} = \mathbf{C}_{\mathcal{F}} \times \mathbf{C}_{\mathcal{G}}$,
- $\mathbf{C}_{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}} = \mathbf{C}_{\mathcal{F}} \circ \mathbf{C}_{\mathcal{G}}$, *si* $\mathcal{G}(\emptyset) = \emptyset$.

Soit $\mathcal{F}$ une espèce. Nous pouvons lui associer la série formelle suivante :

Définition 1.1.10. La *série indicatrice de cycles* d'une espèce $\mathcal{F}$ est la série formelle en une infinité de variables $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ définie par :

$$\mathbf{Z}_{\mathcal{F}}(\mathbf{p}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{F}^{\sigma} p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \ldots \right),$$

où $\mathcal{F}^{\sigma}$ désigne le nombre de $\mathcal{F}$-structures fixées par l'action de σ et σ_i est le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition de σ en cycles disjoints.

Remarque 1.1.11. La série génératrice exponentielle se relie à la série indicatrice de cycles comme suit :

$$\mathbf{Z}_{\mathcal{F}}(x, 0, 0, \ldots) = \mathbf{C}_{\mathcal{F}}(x).$$

Nous rappelons les opérations suivantes sur les séries indicatrices de cycles :

Définition 1.1.12. Les opérations $+$ et $\times$ sur les séries indicatrices de cycles coïncident avec les opérations $+$ et $\cdot$ définies sur les séries formelles.

Pour $f = f(\mathbf{p})$ et $g = g(\mathbf{p})$, la *substitution pléthystique* $f \circ g$ est définie par :

$$f \circ g(\mathbf{p}) = f(g(p_1, p_2, p_3, \ldots), g(p_2, p_4, p_6, \ldots), \ldots, g(p_k, p_{2k}, p_{3k}, \ldots), \ldots).$$

Elle est linéaire et distributive à gauche.

Ces opérations peuvent être reliées aux opérations sur les espèces par la proposition suivante :

Proposition 1.1.13. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces. Leurs séries indicatrices de cycles vérifient :*

$$\begin{array}{rlrl} \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}+\mathcal{G}} & = \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}} + \boldsymbol{Z}_{\mathcal{G}}, & \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}} & = \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}} \times \boldsymbol{Z}_{\mathcal{G}}, \\ \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}} & = \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}} \circ \boldsymbol{Z}_{\mathcal{G}}, & \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}'} & = \frac{\partial \boldsymbol{Z}_{\mathcal{F}}}{\partial p_1}. \end{array}$$

Nous pouvons de plus définir l'opération suivante :

Définition 1.1.14. La *suspension* Σ_t d'une série indicatrice de cycles $f(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ est définie par :

$$\Sigma_t f(p_1, p_2, p_3, \ldots) = -\frac{1}{t} f(-tp_1, -t^2 p_2, -t^3 p_3, \ldots).$$

Par convention, nous écrirons Σ pour la suspension en $t = 1$.

La proposition suivante relie la suspension et les opérations préalablement définies sur les séries indicatrices de cycle.

Proposition 1.1.15. *Soient f et g deux séries indicatrices de cycles. Elles vérifient :*
- $\Sigma\,(f \circ g) = \Sigma f \circ \Sigma g$,
- $\Sigma\,(f \cdot g) = -\Sigma f \times \Sigma g$,
- $-\Sigma f = f \circ (-p_1)$.

1.1.4 Espèces sur deux ensembles

Il existe des variations de la notion d'espèce. Nous présentons dans cette sous-section et la suivante deux types de variations : les espèces sur deux ensembles et les espèces linéaires. Commençons par définir la notion d'espèce sur deux ensembles.

Nous rappelons ici la définition d'une espèce sur deux ensembles, qui est un cas particulier des espèces multi-ensembles définies dans le livre [BLL98] de F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux.

Définition 1.1.16. Une *espèce sur deux ensembles* est une règle $\mathcal{F}$ qui produit pour tout couple d'ensembles finis (I_1, I_2), un ensemble fini $\mathcal{F}(I_1, I_2)$ et pour toutes bijections $\sigma_1 : I_1 \to J_1$ et $\sigma_2 : I_2 \to J_2$, une fonction $\mathcal{F}_{\sigma_1,\sigma_2} : \mathcal{F}(I_1, I_2) \to \mathcal{F}(J_1, J_2)$ telle que :

1. Pour toutes bijections $\sigma_1 : I_1 \to J_1$, $\sigma_2 : I_2 \to J_2$, $\tau_1 : J_1 \to K_1$ et $\tau_2 : J_2 \to K_2$, $\mathcal{F}_{\tau_1\circ\sigma_1,\tau_2\circ\sigma_2} = \mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2} \circ \mathcal{F}_{\sigma_1,\sigma_2}$,
2. Pour les identités $\mathrm{Id}_1 : I_1 \to I_1$ et $\mathrm{Id}_2 : I_2 \to I_2$, $\mathcal{F}_{\mathrm{Id}_1,\mathrm{Id}_2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(I_1,I_2)}$.

Notons $\mathbb{B}$, la catégorie des ensembles finis et bijections. Une espèce sur deux ensembles peut être définie de manière équivalente comme un foncteur de la catégorie $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans la catégorie $\mathbb{B}$.

Exemple 1.1.17. L'application $\mathcal{A}_{r,s}$ qui à deux ensembles V_1 et V_2 associe l'ensemble des forêts d'arbres enracinés dont les racines sont étiquetées par V_1 et les autres sommets sont étiquetés par V_2 est une espèce sur deux ensembles. Cette espèce est illustrée sur la figure 1.3.

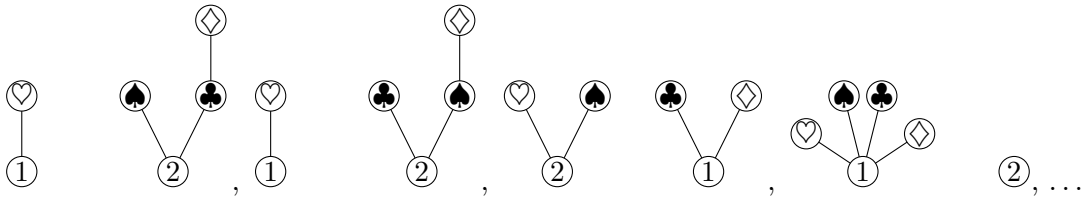


FIGURE 1.3 – Éléments de l'image par l'espèce $\mathcal{A}_{r,s}$ des ensembles $\{1, 2\}$ et $\{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

Nous effectuerons les opérations suivantes sur les espèces sur deux ensembles.

Définition 1.1.18. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces sur deux ensembles. Nous pouvons leur appliquer les opérations suivantes :

- $(\mathcal{F} + \mathcal{G})(I_1, I_2) = \mathcal{F}(I_1, I_2) \sqcup \mathcal{G}(I_1, I_2)$, (addition)
- $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(I, J) = \sum_{I_1\sqcup I_2=I, J_1\sqcup J_2=J} \mathcal{F}(I_1, J_1) \times \mathcal{G}(I_2, J_2)$, (produit)
- Si $\mathcal{G}(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$ et $\mathcal{E}$ est une espèce au sens classique du terme,

$$(\mathcal{E} \circ \mathcal{G})(I_1, I_2) = \bigsqcup_{\pi\in\mathcal{P}(I_1\cup I_2)} \mathcal{E}(\pi) \times \prod_{J\in\pi} \mathcal{G}(J \cap I_1, J \cap I_2),$$

où $\mathcal{P}(I_1 \cup I_2)$ parcourt l'ensemble des partitions de $I_1 \cup I_2$. (substitution)

Nous définissons les deux séries suivantes associées aux espèces sur deux ensembles :

Définition 1.1.19. Soit $\mathcal{F}$ une espèce sur deux ensembles. La série génératrice exponentielle associée à $\mathcal{F}$ est définie par :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{F}}(x, y) = \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} |\mathcal{F}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, m\})| \frac{x^n y^m}{n!m!}.$$

La série indicatrice de cycles associée à $\mathcal{F}$ est la série formelle en une infinité de variables $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots), \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \ldots)$ définie par :

$$\mathbf{Z}_{\mathcal{F}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{n,m \geq 0} \frac{1}{n!m!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \tau \in \mathfrak{S}_m} \mathcal{F}^{\sigma,\tau} p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \ldots q_1^{\tau_1} q_2^{\tau_2} q_3^{\tau_3} \ldots \right),$$

où $\mathcal{F}^{\sigma,\tau}$ est le nombre de $\mathcal{F}$-structures sur $(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, m\})$ fixées par l'action de σ sur $\{1, \ldots, n\}$ et de τ sur $\{1, \ldots, m\}$.

Pour $f = f(\mathbf{p})$ et $g = g(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, la *substitution pléthystique* $f \circ g$ est définie par :

$$f \circ g(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(g(p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, q_3, \ldots), \ldots, g(p_k, p_{2k}, p_{3k}, \ldots, q_k, q_{2k}, q_{3k}, \ldots), \ldots).$$

Elle est linéaire et distributive à gauche.

Ces séries vérifient les relations suivantes vis-à-vis des opérations :

Proposition 1.1.20. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espèces sur deux ensembles et $\mathcal{E}$ une espèce. Leurs séries associées vérifient :*

$$\mathbf{C}_{\mathcal{F}+\mathcal{G}} = \mathbf{C}_{\mathcal{F}} + \mathbf{C}_{\mathcal{G}}, \quad \mathbf{C}_{\mathcal{F}.\mathcal{G}} = \mathbf{C}_{\mathcal{F}} \times \mathbf{C}_{\mathcal{G}}, \quad \text{et si } \mathcal{G}(\emptyset, \emptyset) = \emptyset, \ \mathbf{C}_{\mathcal{E} \circ \mathcal{G}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}} \circ \mathbf{C}_{\mathcal{G}},$$
$$\mathbf{Z}_{\mathcal{F}+\mathcal{G}} = \mathbf{Z}_{\mathcal{F}} + \mathbf{Z}_{\mathcal{G}}, \quad \mathbf{Z}_{\mathcal{F}.\mathcal{G}} = \mathbf{Z}_{\mathcal{F}} \times \mathbf{Z}_{\mathcal{G}}, \quad \text{et si } \mathcal{G}(\emptyset, \emptyset) = \emptyset, \ \mathbf{Z}_{\mathcal{E} \circ \mathcal{G}} = \mathbf{Z}_{\mathcal{E}} \circ \mathbf{Z}_{\mathcal{G}}.$$

1.1.5 Opérades

Nous ne définirons brièvement dans cette partie que les opérades symétriques et renvoyons le lecteur à [Cha08], [Lod96] et [LV12] pour plus d'informations sur les opérades symétriques et non-symétriques.

La notion d'opérade a été introduite pour la première fois en topologie algébrique dans les années 1970 dans le cadre de l'étude des espaces de lacets par J. Boardman, R. Vogt et J. May. Elle a connu un regain d'intérêt dans les années 1990 avec la théorie de la dualité de Koszul introduite par V. Ginzburg et M. Kapranov et ses liens avec les espaces de modules de courbes.

Définition 1.1.21. Une *opérade* $\mathcal{O}$ est une espèce munie d'un morphisme associatif μ, appelé *morphisme de composition* de $\mathcal{O} \circ \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$, et telle que $\mathcal{O}(\{1\}) = \{\mathbf{1}\}$. L'élément $\mathbf{1}$ est appelé *l'unité* de l'opérade.

La composition de l'opérade $\mathcal{O}$ peut aussi s'exprimer en termes de compositions partielles, pour tous ensembles I et J et élément i de I :

$$\circ_i : \mathcal{O}(I) \times \mathcal{O}(J) \to \mathcal{O}(I - \{i\} \sqcup J),$$

satisfaisant des axiomes d'associativité.

Exemple 1.1.22.

1. Considérons l'espèce des ensembles non vides Comm. L'opérade associée, appelée *commutative*, est l'opérade obtenue en définissant l'application de composition qui à un ensemble d'ensembles d'éléments de I, $\{\{I_1\}, \ldots, \{I_k\}\}$, $I = \sqcup_{j=1}^{k} I_j$ associe le singleton de l'ensemble des éléments de I, $\{I\}$.
2. Considérons l'espèce des listes non vides Assoc. L'opérade associée, appelée *associative* est l'opérade obtenue en définissant l'application de composition qui à une liste de listes d'éléments de I, $((a_1^1, \ldots, a_{j_1}^1), (a_1^2, \ldots, a_{j_2}^2), \ldots, (a_1^k, \ldots, a_{j_k}^k))$, $I = \sqcup_{i=1}^{k} \sqcup_{p=1}^{j_i} a_p^i$ associe la liste des éléments de I, $(a_1^1, \ldots, a_{j_1}^1, a_1^2, \ldots, a_{j_2}^2, \ldots, a_1^k, \ldots, a_{j_k}^k)$ obtenue par concaténation des listes précédentes.

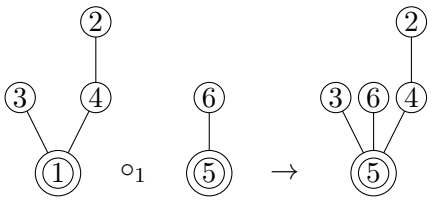


FIGURE 1.4 – Composition de deux arbres enracinés dans l'opérade NAP.

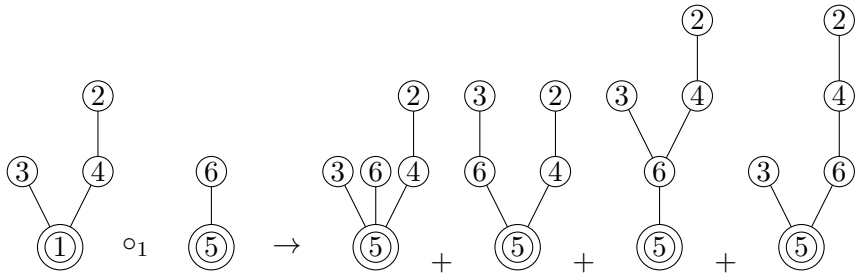


FIGURE 1.5 – Composition de deux arbres enracinés dans l'opérade PreLie.

3. Il peut y avoir plusieurs opérades sur une même espèce. Ainsi, considérant l'ensemble des arbres enracinés non vides PreLie, on peut lui associer l'opérade PreLie rappelée à l'exemple 1.1.24, mais aussi une opérade appelée NAP (non-associative permutative), introduite par M. Livernet dans [Liv06]. La composition associée est l'application qui a un arbre A d'arbres enracinés $a_1, \dots a_n$ associe un arbre enraciné comme suit : si l'arbre enraciné a_i est dans le sommet i de A, alors les fils de i deviennent fils de la racine de a_i, le père de i devient le père de a_i et le sommet i est supprimé. La racine du nouvel arbre obtenu est alors la racine de l'arbre qui se trouvait dans la racine de A. Une illustration de cette composition est représentée sur la figure 1.4. Nous renvoyons à l'article [Cha08] pour d'autres exemples.

Nous rappelons maintenant la définition des espèces linéaires, obtenues en changeant la catégorie d'arrivée, qui apparaissent dans le chapitre sur les hyperarbres décorés au paragraphe 3.1.2. Cette notion permet d'élargir la notion d'opérade.

Définition 1.1.23. Une *espèce linéaire* $\mathcal{F}$ est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans la catégorie des espaces vectoriels. À un ensemble fini I, l'espèce $\mathcal{F}$ associe un espace vectoriel $F(I)$ indépendant de la nature de I.

Les opérations sur les espèces induisent par linéarité des opérations sur les espèces linéaires.

Toute espèce donne une espèce linéaire en considérant l'espace vectoriel engendré par son image : cette notion est donc bien une généralisation de la notion d'espèce. La notion d'opérades se généralise naturellement aux espèces linéaires.

Exemple 1.1.24. 1. Considérant l'espèce linéaire des arbres enracinés non vides PreLie, qui à un ensemble non vide associe l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés sur cet ensemble, on peut lui associer l'opérade PreLie introduite par F. Chapoton et M. Livernet dans [CL01]. La composition d'un arbre enraciné T dans le sommet i d'un arbre enraciné S est une somme sur l'ensemble des fonctions des fils de i dans S vers les sommets de T. Étant donnée une telle fonction φ, nous déconnectons le sommet i de ses fils et de son père, s'il existe, puis nous relions ce père à la racine de T et chacun des fils f_j de i au

sommet $\varphi(f_j)$ de T. La racine du résultat est la racine de T si i était la racine de S, et la racine de S sinon. Une illustration de cette composition est représentée sur la figure 1.5.

Certaines opérades sont munies d'une structure additionnelle : elles sont cycliques ou anti-cycliques. Nous renvoyons à [Cha05] pour plus de détails.

Définition 1.1.25. Une opérade $\mathcal{O}$ est dite *cyclique* ou *anti-cyclique* s'il existe une action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur l'espace $\mathcal{O}(\{1,\dots,n\})$ qui étende l'action de $\mathfrak{S}_n$, et si cette action satisfait certains axiomes de compatibilité avec la composition. Une opérade sera alors cyclique si l'unité 1 de l'opérade est envoyée sur elle-même et anti-cyclique si elle est envoyée sur son opposé.

Exemple 1.1.26.
- L'opérade Assoc est cyclique. En effet, l'espèce des listes est la dérivée de l'espèce des cycles : à une liste sur I peut donc être associé un cycle sur $I\cup\{\bullet\}$. L'action de $\mathfrak{S}_{I\cup\{\bullet\}}$ sur le cycle induit une action sur la liste : si I est de cardinal n, nous obtenons une action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui étend l'action de $\mathfrak{S}_n$. De plus, considérant la liste (1), elle est associée au cycle $1 \circlearrowright \bullet$ qui est invariant par l'action de $\mathfrak{S}_{\{1,\bullet\}}$: l'unité de Assoc est donc envoyée sur elle-même par cette action.
- L'opérade PreLie est anti-cyclique (cf. [Cha05]).

1.2 Topologie des ensembles partiellement ordonnés

Cette section est une introduction à l'homologie des posets basée sur le livre [Wac07]. Nous y présentons le complexe simplicial associé à chaque poset : l'homologie du poset est alors l'homologie du complexe simplicial associé au poset. Nous présentons ensuite la notion d'épluchabilité et de semi-modularité totale, qui impliquent que l'homologie du poset soit concentrée en plus haut degré. Le poset est alors dit Cohen-Macaulay. Nous présentons finalement une variante dd' l'homologie d'un poset : l'homologie de Whitney.

1.2.1 Poset et complexe simplicial associé

Commençons par définir la notion de poset ou ensemble partiellement ordonné.

Définition 1.2.1. Un *ordre partiel* est une relation binaire $\leq$ vérifiant :
- $x \leq x$, (Réflexivité)
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$, (Antisymétrie)
- $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$. (Transitivité)

Un *poset* ou *ensemble partiellement ordonné* est un ensemble V muni d'un ordre partiel $\leq$.

Nous noterons $x < y$ si $x \leq y$ avec $x \neq y$.

Exemple 1.2.2. Quelques exemples de posets :
- $\mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre défini par $(a,b) < (\alpha,\beta)$ si et seulement si $a < \alpha$ et $b < \beta$.
- Le poset des sous-ensembles d'un ensemble E muni de l'ordre défini par $A \leq B$ si et seulement si A est un sous-ensemble de B, pour A et B deux sous-ensembles de E.
- Le poset des partitions d'un ensemble E muni de l'ordre défini par $P_1 \leq P_2$ si et seulement si les parts de P_1 sont unions de parts de P_2, pour P_1 et P_2 deux partitions de E.
- Le poset des sous-groupes d'un groupe G muni de l'ordre défini par $H \leq H'$ si et seulement si H est un sous-groupe de H', pour H et H' deux sous-groupes du groupe G.

On note $[x,y]$ l'intervalle fermé $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$, (x,y) l'intervalle ouvert $\{z \in P : x < z < y\}$, $(x,y]$ l'intervalle semi -ouvert à droite $\{z \in P : x < z \leq y\}$ et $[x,y)$, l'intervalle semi-ouvert à gauche $\{z \in P : x \leq z < y\}$.

Un poset est dit *borné* s'il possède un minimum $\widehat{0}$ et un maximum $\widehat{1}$.

Pour P un poset quelconque, on note $\widehat{P}$, le poset P complété d'un minimum et d'un maximum et $\bar{P}$, le poset P où l'on a ôté, s'ils existent, le maximum et le minimum.

Définition 1.2.3 (Relation de couverture)**.** On dit que y *couvre* x si $x < y$ et il n'existe aucun z tel que $x < z < y$.

L'ensemble des couples (x, y) tels que y couvre x s'appelle l'ensemble des *relations de couverture*.

Le *diagramme de Hasse* d'un poset P est un graphe dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont les relations de couverture dans P.

Exemple 1.2.4. Nous présentons ici les diagrammes de Hasse de quelques posets présentés à l'exemple 1.2.2. Le minimum sera toujours représenté en bas.

– Le poset des sous-ensembles non vides d'un ensemble à trois éléments a son diagramme de Hasse représenté sur la figure 1.6.

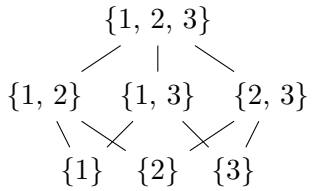


FIGURE 1.6 – Diagramme de Hasse du poset des sous-ensembles non vides d'un ensemble à trois éléments

– Le poset des partitions d'un ensemble à trois éléments a son diagramme de Hasse représenté sur la figure .

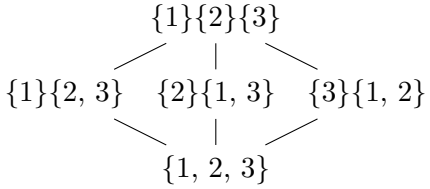


FIGURE 1.7 – Diagramme de Hasse du poset des partitions d'un ensemble à trois éléments.

– Le poset des sous-groupes de D_4, le groupe des automorphismes du carré son diagramme de Hasse représenté sur la figure .

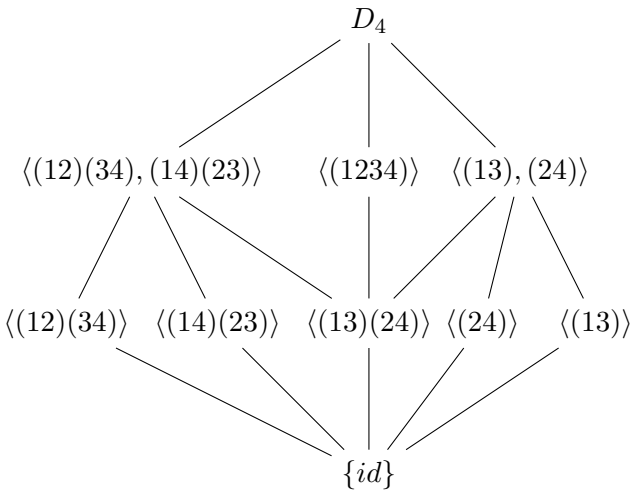


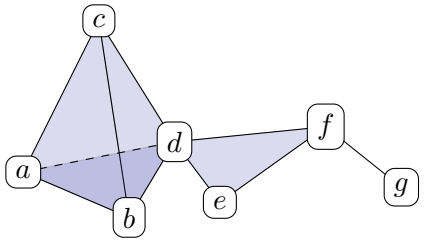
FIGURE 1.8 – Diagramme de Hasse du poset des sous-groupes de D_4.

Nous allons associer à chaque poset un complexe simplicial.

Définition 1.2.5. Un *complexe simplicial* Δ sur un ensemble V est un ensemble non vide de sous-ensembles éventuellement vides de V tel que :
– $\{v\} \in \Delta$ pour tout $v \in V$, un tel élément sera appelé *sommet* du complexe simplicial,
– Si $F \subseteq G$ et $G \in \Delta$, alors $F \in \Delta$.

Exemple 1.2.6. L'ensemble suivant est un complexe simplicial :

$$\begin{aligned}\Delta = &\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\\ &\{ab\},\{ac\},\{ad\},\{bc\},\{cd\},\{bd\},\{de\},\{df\},\{ef\},\{fg\},\\ &\{abc\},\{adb\},\{bcd\},\{def\}\}\end{aligned}$$



Les éléments de Δ sont appelés *faces* et les faces maximales sont appelées *facettes*. La dimension d'une face F de Δ est égal à $|F|-1$. La dimension $\dim(\Delta)$ d'un complexe simplicial est le maximum des dimensions de ses facettes. Le complexe simplicial $\{\emptyset\}$ est le complexe simplicial vide, de dimension -1. Si toutes les facettes de Δ ont la même dimension, Δ est dit *pur*.

À tout poset $P = (V, \leq)$, on associe le complexe simplicial $\Delta(P)$, appelé *complexe d'ordre*, défini comme suit :
– Les sommets de $\Delta(P)$ sont les éléments de P,
– Les faces de $\Delta(P)$ sont les *chaînes*, c'est-à-dire les sous-ensembles totalement ordonnés de P.

Exemple 1.2.7. Nous présentons dans cet exemple le diagramme de Hasse et le complexe simplicial associé au poset des sous-ensembles non vides de $\{1, 2, 3\}$.

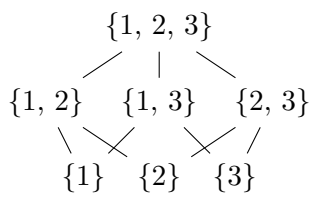
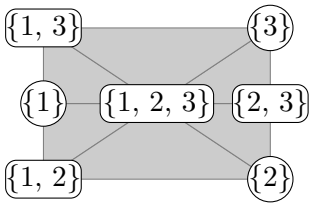


Diagramme de Hasse



Complexe simplicial associé

Une chaîne de P est dite *maximale* si elle n'est pas incluse dans une chaîne plus longue. L'ensemble des chaînes maximales de P correspond alors à l'ensemble des facettes de $\Delta(P)$. Le poset P est dit *pur* (ou *gradué*) si toutes les chaînes maximales ont la même longueur. Le complexe $\Delta(P)$ est alors pur si et seulement si P est gradué.

Définition 1.2.8. Le poset *dual* $(P^*, \leq^*)$ d'un poset $(P, \leq)$ est obtenu à partir du même ensemble sous-jacent en posant $x \leq^* y$ pour tout paire (x,y) de l'ensemble vérifiant $x \leq y$ dans P.

Un poset et son dual ont le même complexe simplicial associé.

1.2.2 Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Nous définissons dans ce paragraphe deux invariants d'un poset : son nombre de Möbius et sa caractéristique d'Euler, et les relions l'un à l'autre.

Définition 1.2.9. La fonction de Möbius μ est définie récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P par :

$$\begin{aligned} &\mu(x,x) = 1, && \forall x \in P \\ &\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\widehat{0}, \widehat{1})$. Le nombre de Möbius d'un poset non borné P est défini par $\mu(P) := \mu(\widehat{P})$.

La fonction de Möbius vérifie alors l'égalité suivante :

$$\sum_{z \in [x,y]} \mu(z,y) = 0, \forall x < y. \tag{1.1}$$

Le nom de cet invariant vient de l'exemple suivant. Si Div_n est le poset des diviseurs d'un entier n, $\mu(d,m) = \mu(m/d)$, où μ est la fonction de Möbius classique telle que :

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } \ n = p_1 \dots p_k, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.2.10. Nous calculons dans cet exemple quelques nombres de Möbius.

– Le nombre de Möbius du poset des sous-ensembles sur un ensemble à trois sommets de la figure 1.9 vaut :

$$\begin{aligned}\mu(\widehat{0},\widehat{0}) &= 1\\ \mu(\widehat{0},\{a\}) &= -1, a \in \{1,2,3\}\\ \mu(\widehat{0},\{a,b\}) &= 1, a,b \in \{1,2,3\}, a \neq b\\ \mu(\widehat{0},\widehat{1}) &= -1.\end{aligned}$$

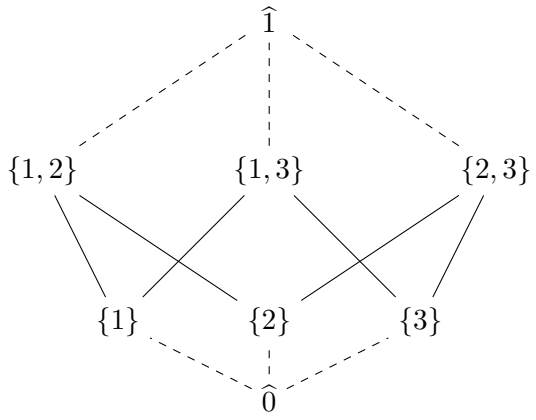


FIGURE 1.9 – Poset des sous-ensembles sur un ensemble à trois sommets.

– Nombre de Möbius du poset des sous-groupes de D_4, le groupe des automorphismes du carré, de la figure 1.8 :

$$\begin{aligned}\mu(id,id) &= 1\\ \mu(id,\{a\}) &= -1, a \in \{\langle(12)(34)\rangle, \langle(14)(23)\rangle, \langle(13)(24)\rangle, \langle(24)\rangle, \langle(13)\rangle\}\\ \mu(id,\{\langle(1234)\rangle\}) &= 0\\ \mu(id,\{\langle(13),(24)\rangle\}) &= \mu(id,\{\langle(12)(34),(14)(23)\rangle\}) = 2\\ \mu(D_4) &= 0.\end{aligned}$$

Dans tout poset, la fonction de Möbius vérifie le même genre de relation que la fonction de Möbius classique.

Proposition 1.2.11 (Inversion de Möbius,[Rot64, Sta12])**.** *Soient P un poset et $f, g : P \to \mathbb{C}$. Alors, nous avons :*

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) \Leftrightarrow f(y) = \sum_{x \leq y} \mu(x,y) g(x).$$

L'ensemble des résultats obtenus en appliquant la fonction de Möbius aux intervalles dont le minimum est le minimum du poset peut être regroupé sous la forme d'un polynôme : le polynôme caractéristique.

Définition 1.2.12. Le *polynôme caractéristique* d'un poset P possédant un minimum $\widehat{0}$, gradué par une fonction r est donné par :

$$\mathrm{car}(s) = \sum_{x \in P} \mu(\widehat{0},x) s^{n-r(x)},$$

où $n = \max_{x \in P} r(x)$.

Exemple 1.2.13. La caractéristique d'Euler du poset des sous-ensembles d'un ensemble à trois éléments est $s^3 - 3s^2 + 3s - 1$.

Celle des sous-groupes de D_4 est $s^3 - 5s^2 + 4s$.

Remarquons que, par définition, le terme constant du polynôme caractéristique d'un poset est égal à son nombre de Möbius. De plus, le polynôme caractéristique d'un intervalle s'annule en 1.

Nous définissons maintenant un autre invariant de poset : la caractéristique d'Euler.

Définition 1.2.14. La *caractéristique d'Euler réduite* d'un complexe simplicial est définie par :

$$\tilde{\chi}(\Delta) := \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^{i-1} f_i(\Delta),$$

où $f_i(\Delta)$ est le nombre de i-faces de Δ.

La caractéristique d'Euler réduite d'un poset est définie comme celle de son complexe d'ordre.

Les deux invariants de poset définis précédemment sont reliés par le théorème suivant.

Théorème 1.2.15 (Théorème de Philip Hall)**.** *[Sta12, 3.8.5] La fonction de Möbius d'un poset et sa caractéristique d'Euler sont reliées par :*

$$\mu(\widehat{P}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)).$$

Remarque 1.2.16. Cette relation fait intervenir $\widehat{P}$: il faut donc considérer un poset P sans extrema afin que le nombre de Möbius de $\widehat{P}$ ne soit pas trivial.

Exemple 1.2.17. Nous calculons la caractéristique d'Euler du poset des sous-ensembles non vides d'un ensemble à trois éléments privé de son maximum.

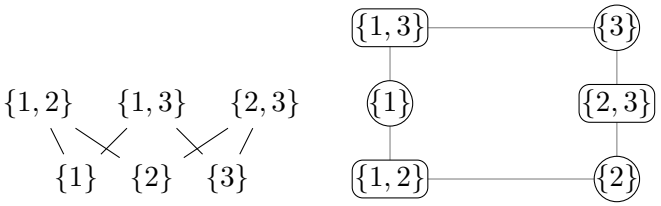


Diagramme de Hasse Complexe d'ordre associé

Cette caractéristique d'Euler est bien égale au nombre de Möbius du poset des sous-ensembles d'un ensemble à trois éléments, calculée à l'exemple 1.2.10.

$$\tilde{\chi}(\Delta) := \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^{i} f_i(\Delta) = -1 + 6 - 6 = -1$$

Ces deux invariants sont des invariants topologiques du poset liés à la dimension des groupes d'homologie du poset que nous définissons maintenant.

1.2.3 Homologie d'un poset

L'homologie d'un poset peut être définie comme l'homologie du complexe simplicial associé. Nous renvoyons au livre de J. Munkres [Mun84] pour plus de détails sur l'homologie simpliciale.

Pour tout poset P et tout entier naturel j, l'espace des chaînes $C_j(P)$ est défini comme étant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les $j+1$-chaînes sur P, c'est-à-dire les $j+1$-uplets de P $(a_0, \ldots, a_j)$ tels que $a_i < a_{i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq j-1$. On définit de plus $C_{-1} = \mathbb{C}\mathbf{e}$.

L'application de bord $\partial_j : C_j(P) \to C_{j-1}(P)$ est définie par :

$$\partial_j(x_0 < x_1 < \ldots < x_j) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i (x_0 < x_1 < \ldots < \widehat{x_i} < \ldots < x_j), \forall j > 0,$$

où $\widehat{x_i}$ signifie que l'on ôte l'élément x_i

et $\partial_0(x_0) = \mathbf{e}$.

L'application de bord vérifie : $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$.

L'*homologie réduite* mesure le défaut d'exactitude du complexe de chaînes. Elle est définie, pour tout $j \geq 0$, par :

$$\tilde{H}_j(P) = \operatorname{Ker} \partial_j / \operatorname{Im} \partial_{j+1}.$$

Exemple 1.2.18. Calculons l'homologie réduite du poset des sous-ensembles non vides privé de son maximum :

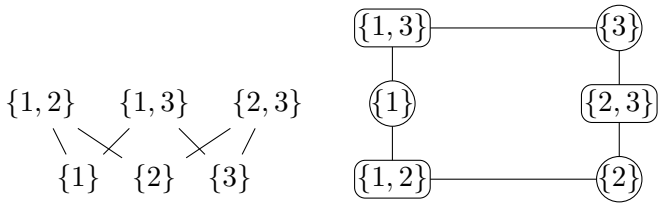


Diagramme de Hasse Complexe d'ordre associé

Une base de C_1 est donnée par :

$$\{\{1\} - \{1,3\}, \{1\} - \{1,2\}, \{2\} - \{1,2\},$$
$$\{2\} - \{2,3\}, \{3\} - \{1,3\}, \{3\} - \{2,3\}\}.$$

Une base de C_0 est donnée par :

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

Comme $\operatorname{Im} \partial_1 = C_0$, le calcul de l'homologie donne alors :

$$\widetilde{H}_0 = C_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = \{0\}.$$

De plus, $\operatorname{Im} \partial_2 = \{0\}$ et une base de $\operatorname{Ker} \partial_1$ est donnée par $\{\{1\} - \{1,3\} + (-1) \times \{1\} - \{1,2\} + \{2\} - \{1,2\} + (-1) \times \{2\} - \{2,3\} + \{3\} - \{2,3\} + (-1) \times \{3\} - \{1,3\}\}$. Nous obtenons alors :

$$\widetilde{H}_1 = \operatorname{Ker} \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \mathbb{C}.$$

Le lien entre l'homologie d'un poset et les invariants de la section précédente est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.2.19. *L'homologie d'un poset est reliée à son nombre de Möbius et à sa caractéristique d'Euler par la relation suivante :*

$$\mu(\widehat{P}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)) = \sum_{i=0}^{\dim \Delta} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(\Delta(P)).$$

1.2.4 Posets épluchables

Nous présentons ici les notions d'épluchabilité et la semi-modularité totale qui impliquent toutes les deux une concentration en degré maximal de l'homologie du poset qui est alors dit Cohen-Macaulay. Le degré maximal est alors déterminé par la longueur des chaînes du poset.

Épluchabilité

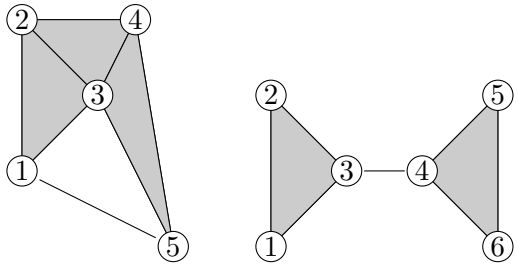
L'*épluchabilité* (*shellability* en anglais) est une propriété combinatoire des complexes simpliciaux ayant de fortes implications topologiques et algébriques. Cette notion est apparue au milieu du dix-neuvième siècle, dans des travaux de L. Schläfli sur le calcul de la caractéristique d'Euler d'un polytope convexe [Sch01]. Rappelons qu'un complexe simplicial pur est un complexe dont toutes les faces maximales, appelées facettes, ont même dimension. La théorie de l'épluchabilité ne s'appliquait qu'aux complexes simpliciaux purs avant d'être étendue par A. Björner et M. Wachs aux complexes non purs dans leurs articles [BW96] et [BW97].

Pour toute face F d'un complexe simplicial Δ, nous notons $\langle F\rangle$ l'ensemble $\{G \in \Delta : G \subseteq F\}$. Nous définissons maintenant la notion d'épluchabilité.

Définition 1.2.20. Un complexe simplicial est dit *épluchable* s'il est possible d'ordonner ses facettes en $F_1, \ldots, F_t$ de telle sorte que le sous-complexe $\left(\cup_{i=1}^{k-1} \langle F_i\rangle\right) \cap \langle F_k\rangle$ soit pur et de dimension $\dim F_k - 1$ pour tout $k = 2, \ldots, t$. Un tel ordre des facettes est appelé un *épluchage*.

Un poset est *épluchable* si son complexe d'ordre est épluchable.

Exemple 1.2.21. – Le complexe simplicial ci-dessous à gauche est épluchable alors que celui de droite ne l'est pas. En effet, pour le complexe simplicial de gauche, en posant $F_1 = \{1, 2, 3\}$, $F_2 = \{2, 3, 4\}$, $F_3 = \{3, 4, 5\}$ et $F_4 = \{1, 5\}$, l'ordre obtenu est un épluchage. Par contre, pour le complexe simplicial de droite, aucun ordre ne convient car aucune des facettes de dimension 2 ne peut être intersectée de manière à ce que l'intersection soit de dimension 1.



– Les posets des partitions et des sous-ensembles sont épluchables. (cf. exemple 1.2.30)

Cette notion a de fortes implications topologiques, que nous énonçons au théorème suivant.

Théorème 1.2.22 ([BW96])**.** *Un complexe simplicial épluchable a le même type d'homotopie qu'un bouquet de sphères (de dimension variées), où pour tout i, le nombre de i-sphères est le nombre de i-facettes dont l'ensemble du bord est contenu dans l'union des facettes précédentes (dans l'ordre d'épluchabilité). De telles facettes sont appelées* facettes d'homologie.

Corollaire 1.2.23. *Si le complexe d'ordre de P est épluchable, alors pour tout i, l'homologie de P est donnée par :*

$$\widetilde{H}_i(P) \cong \mathbb{C}^{r_i},$$

où r_i est le nombre de i-facettes d'homologie de Δ.

Une conséquence topologique de l'épluchabilité est la notion suivante.

Définition 1.2.24. Un poset est dit *Cohen-Macaulay* si son homologie est concentrée en degré maximal, c'est-à-dire si tous ses groupes d'homologie sont triviales, sauf celui de degré k, où toute chaîne stricte du poset sans bornes est constituée d'au plus $k + 1$ éléments.

Proposition 1.2.25 ([BW96])**.** *Un poset pur épluchable est Cohen-Macaulay.*

Épluchabilité lexicographique

Dans l'article [Bjö80], A. Björner a prouvé une conjecture de R. Stanley émise au début des années 1970 en trouvant une condition sur l'étiquetage des arêtes du diagramme de Hasse d'un poset qui implique l'épluchabilité du poset. De cette condition a émergé une théorie de l'épluchabilité lexicographique établie dans une série d'articles de A. Björner et M. Wachs, d'abord développée dans le cas pur avec les articles [BW82] et [BW83] puis dans le cas général dans les articles [BW96] et [BW97].

Il y a deux versions de l'épluchabilité : l'épluchabilité selon les arêtes (EL) et l'épluchabilité selon les chaînes (CL).

Nous n'étudierons ici que la première version de l'épluchabilité.

Un *étiquetage des arêtes* d'un poset borné P est une application $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$, où $\mathcal{E}(P)$ est l'ensemble des arêtes du diagramme de Hasse de P, c'est-à-dire l'ensemble des relations de couverture dans P, et Λ est un poset (souvent $\mathbb{N}$ muni de sa relation d'ordre naturelle). Étant donné un étiquetage des arêtes λ, il est possible d'associer à chaque chaîne maximale $c = (\widehat{0} < x_1 < \cdots < x_t < \widehat{1})$ un mot

$$\lambda(c) = \lambda(\widehat{0}, x_1)\lambda(x_1, x_2)\ldots\lambda(x_t, \widehat{1}).$$

Le chaîne c est alors dite *croissante* si le mot est strictement croissant, c'est-à-dire si

$$\lambda(\widehat{0}, x_1) < \lambda(x_1, x_2) < \cdots < \lambda(x_t, \widehat{1}).$$

Définition 1.2.26. Soit P un poset borné. Un *étiquetage lexicographique des arêtes* (*EL-labeling* en anglais) est un étiquetage des arêtes tel que, dans tout intervalle fermé $[x, y]$ de P, il y ait une et une seule chaîne maximale croissante, plus petite que toutes les autres chaînes dans l'ordre lexicographique. S'il existe un étiquetage lexicographique des arêtes du diagramme de Hasse de P, P est dit *épluchable selon ses arêtes* (*EL-shellable* en anglais).

L'épluchabilité selon les arêtes implique l'épluchabilité.

Théorème 1.2.27 ([Bjö80], [BW96])**.** *Considérons un poset borné P épluchable selon ses arêtes, alors l'ordre lexicographique sur les chaînes maximales de P est un épluchage de $\Delta(P)$. De plus, l'ordre correspondant pour les chaînes de $\bar{P}$ est un épluchage de $\Delta(\bar{P})$.*

Exemple 1.2.28. Nous considérons le poset borné P de la figure 1.10.

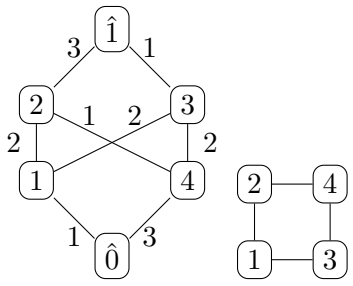


FIGURE 1.10 – Le poset P de l'exemple 1.2.28 et le complexe simplicial associé à $\bar{P}$.

Les chiffres figurant à côté des arêtes du diagramme de Hasse correspond à un étiquetage lexicographique des arêtes. L'ordre lexicographique sur les chaînes maximales du poset est :

1. $\hat{0} < 1 < 3 < \hat{1}$
2. $\hat{0} < 1 < 2 < \hat{1}$

3. $\hat{0} < 4 < 2 < \hat{1}$
4. $\hat{0} < 4 < 3 < \hat{1}$

L'épluchage du complexe simplicial correspondant $\Delta(\bar{P})$ représenté figure 1.10, donné par l'ordre $\{1,3\} < \{1,2\} < \{4,2\} < \{4,3\}$, est bien un épluchage du complexe simplicial.

Théorème 1.2.29 ([BW96])**.** *Soit P un poset tel que $\widehat{P}$ soit épluchable selon ses arêtes. Le poset P a alors le même type d'homotopie qu'un bouquet de sphères, où le nombre de i-sphères est le nombre de $(i+2)$-chaînes décroissantes maximales de $\widehat{P}$.*

Exemple 1.2.30.

1. En étiquetant l'arête (P, Q), $P \leq Q$ par l'élément $q \in Q - P$, le poset des sous-ensembles est épluchable selon ses arêtes.
2. Nous définissons l'étiquetage selon les arêtes du dual du poset des partitions comme suit. Soit P une partition d'un ensemble à n éléments en k parts P_i qui couvre une partition Q dont les parts sont $\{P_1 \cup P_2, P_3, \dots P_k\}$. Alors l'étiquetage obtenu en étiquetant l'arête (P, Q) par $\max(\min(P_1), \min(P_2))$ est un étiquetage lexicographique des arêtes du poset. Cet étiquetage a été introduit par I. Gessel (cf. [Bjö80]). Nous le représentons pour $n = 4$ sur la figure ci-dessous.

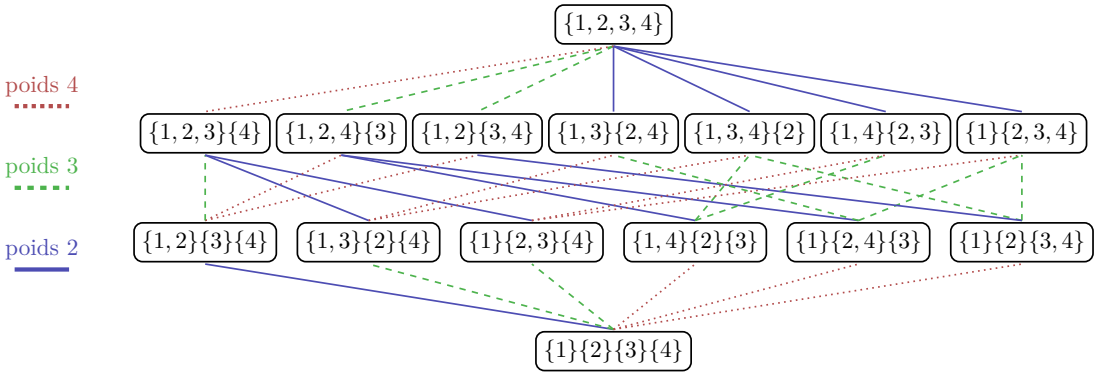


FIGURE 1.11 – Étiquetage selon les arêtes du poset dual de Π_4

Les conséquences topologiques de l'épluchabilité sont particulièrement intéressantes dans le cas de posets sans extrema, puisque le complexe d'ordre d'un poset possédant un maximum ou un minimum est un cône donc tous les groupes d'homologie réduite d'un tel poset sont triviaux. De ce fait, il est plus intéressant d'une manière générale d'étudier $\bar{P}$ que d'étudier P. Par la suite, nous noterons $\widehat{P} = \bar{\widehat{P}}$ pour alléger les notations.

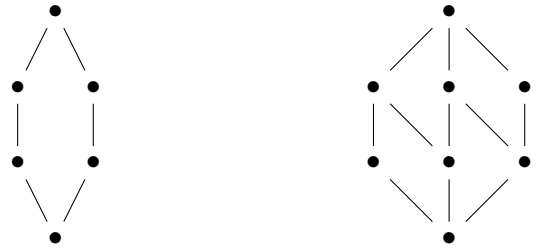
Ordre récursif sur les atomes

Dans cette section, nous présentons une autre notion impliquant l'épluchabilité : l'ordre récursif sur les atomes. Les *atomes* d'un poset borné P sont les éléments couvrant $\widehat{0}$.

Définition 1.2.31. Un poset borné P *admet un ordre récursif sur ses atomes* si P n'a qu'un seul élément ou s'il en a au moins deux et qu'il existe un ordre $a_1, a_2, \dots, a_t$ sur les atomes de P vérifiant :

1. Pour tout $j = \{1, 2, \dots, t\}$, l'intervalle $[a_j, \widehat{1}]$ admet un ordre récursif sur les atomes dans lequel les atomes de $[a_j, \widehat{1}]$ qui sont dans $[a_i, \widehat{1}]$ pour $i < j$ viennent d'abord.
2. Pour tout $i < j$, si $a_i, a_j < y$, alors il existe $k < j$ et un atome z de $[a_j, \widehat{1}]$ qui couvre a_j et tel que $a_k < z \leq y$.

Exemple 1.2.32. Le poset ci-dessous à gauche n'admet par d'ordre récursif sur ses atomes car la deuxième propriété n'est pas respectée. Celui de droite en admet un : l'ordre donné en lisant les sommets de gauche à droite à chaque niveau par exemple.



Théorème 1.2.33. *[BW83, Proposition 2.3 & Theorem 3.2] Si un poset borné P est épluchable selon ses arêtes, alors il admet un ordre récursif sur ses atomes. Si un poset borné et gradué P admet un ordre récursif sur ses atomes, alors il est épluchable.*

Les relations entre les différentes notions définies jusqu'à présent sont rappelées sur le diagramme suivant.

Épluchabilité selon les arêtes ⇘ Semi-modularité totale ⇙
Existence d'un ordre récursif sur les atomes
⇓
Épluchabilité
⇓
Cohen-Macaulay.

Un poset borné P est *semi-modulaire* si pour tous $u, v \in P$ qui couvrent un élément $x \in P$, il existe un élément $y \in P$ qui couvre à la fois u et v. La semi-modularité n'implique pas forcément l'épluchabilité. Un poset est *totalement semi-modulaire* si tout intervalle fermé dans le poset est semi-modulaire. Les posets des sous-ensembles et des partitions sont totalement semi-modulaires. La notion de semi-modularité est reliée aux notions précédentes par le théorème suivant.

Théorème 1.2.34. *[BW83, Theorem 5.1] Tout ordre sur les atomes d'un poset totalement semi-modulaire est un ordre récursif sur les atomes.*

La semi-modularité totale peut donc être utilisée pour montrer l'existence d'un ordre récursif pour les atomes et donc pour montrer l'épluchabilité d'un poset. En effet, en regroupant les théorèmes 1.2.33 et 1.2.34, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.35. *Tout poset borné, gradué et totalement semi-modulaire est Cohen-Macaulay.*

1.2.5 Homologie de Whitney d'un poset

Nous introduisons ici un raffinement de l'homologie d'un poset. Ce raffinement sera utile pour le calcul de l'action d'un groupe sur un poset. La notion d'homologie de Whitney a été introduite pour la première fois par K. Baclawski dans l'article [Bac75], dans le cas de treillis géométriques. Elle a été définie par la suite par S. Sundaram dans l'article [Sun94b] dans le cas pur, puis généralisée au cas quelconque par M. Wachs dans l'article [Wac99].

Soit P un poset Cohen-Macaulay de minimum $\widehat{0}$, sur lequel agit un groupe G, l'*homologie de Whitney* de P est définie pour tout entier r par :

$$\mathrm{WH}_r(P) = \bigoplus_{x \in P_r} \widetilde{H}_{r-2}(\widehat{0}, x),$$

où, pour tout x de P, $r(x)$ est le rang de x et $P_r := \{x \in P : r(x) = r\}$.

L'action de G sur P induit une action de G sur $\mathrm{WH}_r(P)$.

S. Sundaram utilise l'homologie de Whitney d'un poset Cohen-Macaulay pour calculer des représentations de groupes sur l'homologie. Sa technique se base sur le résultat suivant.

Théorème 1.2.36 ([Sun94b], [Sun94a])**.** *Soit P un poset avec un minimum $\widehat{0}$, muni d'une action d'un groupe G. Si P est Cohen-Macaulay, alors :*

$$\widetilde{H}_{l(P)-1}(P - \{\widehat{0}\}) \cong_G \bigoplus_{r=0}^{l(P)} (-1)^{l(P)+r} WH_r(P).$$

Nous étudierons l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres dans la partie 2.5.

1.3 Des hypergraphes au poset des hyperarbres

La notion d'hypergraphe a été introduite par C. Berge au début des années 1970. Un hypergraphe est une généralisation d'un graphe dont les arêtes sont des ensembles de sommets de cardinal au moins deux et non plus seulement des paires non ordonnées. Dans cette section, nous définissons les hyperarbres comme étant des hypergraphes connexes et acycliques. Nous introduisons ensuite un ordre partiel sur l'ensemble des hyperarbres sur n sommets avant de récapituler les résultats déjà existants sur le poset des hyperarbres.

1.3.1 Des hypergraphes aux hyperarbres

Définition 1.3.1. Un *hypergraphe* (sur un ensemble V) est un couple (V, E) où V est un ensemble fini et E est un ensemble de sous-ensembles de cardinal au moins deux de V. Les éléments de V sont appelés *sommets* et ceux de E sont appelés *arêtes*. La *valence* d'un sommet est le nombre d'arêtes auxquelles le sommet appartient. La *taille* d'une arête est le nombre de sommets qu'elle contient.

Un exemple d'hypergraphe est représenté sur la figure 1.12.

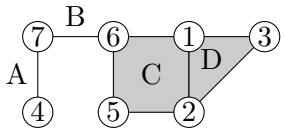


FIGURE 1.12 – Exemple d'hypergraphe sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Définition 1.3.2. Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.

Un *chemin d'un sommet ou d'une arête d à un sommet ou une arête f de H* est une suite finie alternée de sommets et d'arêtes commençant par d et finissant par f :

$$(d, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, \ldots, f),$$

où pour tout i, $v_i \in V$, $e_i \in E$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$. La *longueur* du chemin est le nombre d'arêtes et de sommets dans le chemin.

Exemple 1.3.3. Dans l'hypergraphe de la figure 1.12, il y a plusieurs chemins de 4 à 2 : $(4, A, 7, B, 6, C, 2)$ et $(4, A, 7, B, 6, C, 1, D, 3, D, 2)$ entre autres. Un chemin de C à 3 est $(C, 1, D, 3)$.

Définition 1.3.4. Un *hyperarbre* est un hypergraphe sur un ensemble non vide de sommets H tel que, étant donnés deux sommets distincts v et w de H,

$\lvert\mathcal{H}_n\rvert$ |n	1	2	3	4	5	6	7
1	1	4	29	311	4447	79745	1722681

TABLE 1.1 – Nombre d'hyperarbre $|\mathcal{H}_n|$ sur n sommets.

– il existe un chemin de v à w dans H à arêtes distinctes, c'est-à-dire que H est *connexe*,
– et ce chemin est unique, c'est-à-dire que H n'a pas de *cycles*.

Le couple $H = (V, E)$ est appelé *hyperarbre sur* V. Si V est de cardinal n, H est appelé *hyperarbre sur* n *sommets*.

L'espèce des hyperarbres est notée $\mathcal{H}$. Un exemple d'hyperarbre est représenté sur la figure 1.13. Le nombre d'hyperarbres sur n sommets est représenté sur la table 1.1 pour de petites valeurs de n (voir aussi la suite A030019 sur l'OEIS). La formule pour ce nombre est donnée au troisième point de l'exemple 3.2.9.

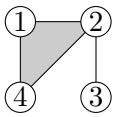


FIGURE 1.13 – Exemple d'hyperarbre sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

Remarquons qu'il existe une autre description des hyperarbres sur un ensemble V en termes d'arbres bipartis étiquetés par V, utilisée par McCullough et Miller dans [MM96]. Un arbre biparti étiqueté par un ensemble V est un arbre T qui est muni d'une bijection de V dans un sous-ensemble des sommets de T qui contient tous les sommets de valence 1 et qui inclut une et une seule extrémité de chaque arête de T. Les sommets étiquetés d'un arbre biparti correspondent aux sommets de l'hyperarbre associé et les sommets non étiquetés correspondent aux arêtes de l'hyperarbre.

FIGURE 1.14 – Hyperarbre et arbre biparti étiqueté associé.

Les chemins sur les hyperarbres vérifient la propriété suivante.

Proposition 1.3.5. *Étant donné un hyperarbre H, un sommet ou une arête d de H et une arête ou un sommet distinct f de H, il existe un unique chemin de longueur minimale de d à f. De plus, ce chemin est l'unique chemin à arêtes distinctes de d à f.*

Démonstration. La preuve est immédiate en considérant les hyperarbres comme des arbres bipartis : cela vient du fait qu'un arbre biparti est un arbre. □

1.3.2 Quelques types d'hyperarbres pointés

Nous utiliserons par la suite les variantes suivantes d'hyperarbres.

Définition 1.3.6. Un *hyperarbre enraciné* est un hyperarbre H dont un sommet s est distingué. On dit alors que l'hyperarbre H est *enraciné en* s et que s est la *racine* H.

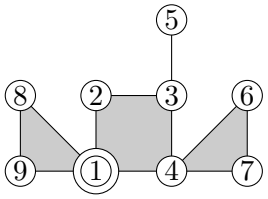


FIGURE 1.15 – Hyperarbre sur neuf sommets enraciné en 1.

Un exemple d'hyperarbre enraciné est représenté sur la figure 1.15.

Définition 1.3.7. Un *hyperarbre pointé en une arête* est un hyperarbre H dont une arête a est distinguée. On dit alors que l'hyperarbre H est *pointé en* a.

Un exemple d'hyperarbre pointé en une arête est représenté sur la figure 1.16.

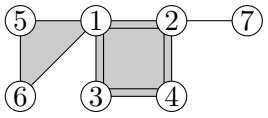


FIGURE 1.16 – Hyperarbre sur sept sommets, pointé en $\{1, 2, 3, 4\}$.

Définition 1.3.8. Un *hyperarbre enraciné pointé en une arête* est un hyperarbre H dont une arête a et un sommet s appartenant à l'arête a sont distingués. L'hyperarbre H est dit *pointé en* a *et enraciné en* s.

Un exemple d'hyperarbre enraciné pointé en une arête est représenté sur la figure 1.17.

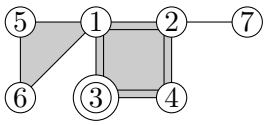


FIGURE 1.17 – Hyperarbre sur sept sommets, pointé en $\{1, 2, 3, 4\}$ et enraciné en 3.

Définition 1.3.9. Un *hyperarbre creux* sur un ensemble de sommets I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté par $\#$, appelé *creux*, n'appartient qu'à une et une seule arête, appelée *arête creuse*.

Un exemple d'hyperarbre creux est représenté sur la figure 1.18.

L'application qui à un ensemble I associe l'ensemble des hyperarbres d'un certain type (pointé ou non, enraciné ou non) dont les sommets sont étiquetés par I est une espèce. Nous noterons $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{H}^a$, $\mathcal{H}^{pa}$) l'espèce qui, à un ensemble fini I, associe l'ensemble des hyperarbres (resp. hyperarbres enracinés, hyperarbres pointés en une arête, hyperarbres pointés en une arête et un sommet) dont les sommets sont étiquetés par I.

Nous invitons le lecteur à consulter le livre [BLL98, Chapitre 2.3] pour plus d'explications sur le principe de dissymétrie. De manière générale, un *principe de dissymétrie* est l'utilisation d'un centre naturel pour exprimer une espèce non pointée en fonction d'espèces pointées. Un exemple d'application de ce principe est l'utilisation du centre d'un arbre pour relier les arbres aux arbres enracinés.

Nous pouvons appliquer le principe de dissymétrie aux hyperarbres pointés et non pointés.

Proposition 1.3.10. *La relation suivante lie les espèces d'hyperarbres pointés et non pointés :*

$$\mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa} = \mathcal{H}^p + \mathcal{H}^a.$$

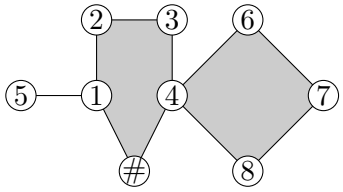


FIGURE 1.18 – Hyperarbre creux sur huit sommets. L'arête creuse est l'arête $\{1, 2, 3, 4\}$.

Pour la preuve, nous avons besoin de la notion suivante qui utilise la proposition 1.3.5.

Définition 1.3.11. L'*excentricité* d'un sommet ou d'une arête dans un hyperarbre est le nombre maximum d'arêtes et de sommets sur un chemin minimal le reliant à un autre sommet. Le *centre* d'un hyperarbre (pointé en une arête ou non, enraciné ou non) est le sommet ou l'arête d'excentricité minimum.

Exemple 1.3.12. Sur la figure 1.19 sont représentées les excentricités e de deux hyperarbres. Le centre de l'hyperarbre de gauche est une arête alors que le centre de l'hyperarbre de droite est un sommet.

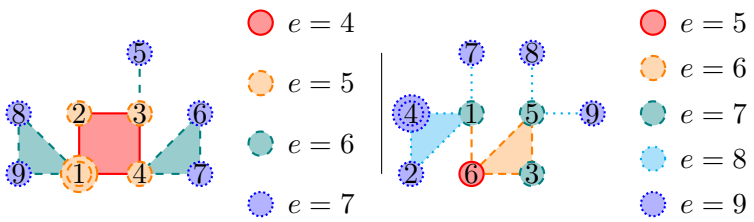


FIGURE 1.19 – L'excentricité e de deux hyperarbres

Proposition 1.3.13. *Le centre d'un hyperarbre est unique.*

Démonstration. Nous prouvons cette proposition par l'absurde.

Considérons un hyperarbre H possédant deux centres a et b. Les centres a et b ont donc la même excentricité ϵ par définition. Le nombre de sommets et d'arêtes sur un chemin entre une arête et un sommet est pair. Le nombre de sommets et d'arêtes sur un chemin entre deux sommets est impair. Comme les chemins maximaux de longueur ϵ relient a et b à des sommets, les centres a et b sont donc tous les deux des arêtes ou tous les deux des sommets, suivant la parité de ϵ.

Comme a et b sont différents, il existe un chemin C_m minimal de longueur impaire de a à b, donc possédant au moins un élément c différent de a et de b. Considérons un chemin $(b, \dots, e_n, v_n = f)$ de b à un sommet f tel que c ne soit pas dans ce chemin. Si c n'est pas dans le chemin minimal $(a, \dots, e'_p, v'_p = f)$ de a à f, alors la concaténation des chemins $(b, \dots, e_n, f, e'_p, \dots, a)$ est une marche de b à a ne contenant pas c. Les arêtes de type e_i (respectivement e'_j) sont toutes différentes. Si cette marche n'est pas minimale, il existe un indice i minimal tel que e_i et e'_j soient égaux pour un j et alors, le chemin $(b, \dots, e_i, v'_j, \dots, a)$ serait un chemin minimal de a à b ne contenant pas c donc différent de C_m : ceci contredit la proposition 1.3.5.

Ainsi, pour tout sommet f, c est soit sur le chemin de b à f, soit sur celui de a à f. L'excentricité de c est donc strictement plus petite que celle ϵ de a et b, ce qui contredit la minimalité de ϵ. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1.3.10.

Démonstration de la proposition 1.3.10. Les applications suivantes sont des bijections réciproques :

$$\phi : \mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa} \to \mathcal{H}^a + \mathcal{H}^p,$$

$$\psi : \mathcal{H}^a + \mathcal{H}^p \to \mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa}.$$

Soit I un ensemble fini. Nous définissons les applications ϕ et ψ comme suit :

Si T appartient à l'image de I par $\mathcal{H}$, $\phi(T)$ est l'hyperarbre obtenu en enracinant ou pointant T en son centre. Si le centre est un sommet, nous obtenons alors un hyperarbre enraciné, si son centre est une arête, nous obtenons un hyperarbre pointé en une arête. (cas A)

Si T appartient à l'image de I par $\mathcal{H}^{pa}$, $\phi(T)$ est l'hyperarbre obtenu à partir de T en :
- oubliant la racine de T si c'est son centre, ce qui donne un hyperarbre pointé en une arête, (cas B)
- oubliant l'arête pointée de T si c'est son centre, ce qui donne un hyperarbre enraciné, (cas C)
- oubliant la racine ou l'arête pointé le plus près du centre de l'hyperarbre sinon.(cas D)

Si T appartient à l'image de I par $\mathcal{H}^a$, $\psi(T)$ est l'hyperarbre obtenu à partir de T en :
- oubliant l'arête pointée de T si c'est son centre, (réciproque du cas A)
- enracinant le centre de T s'il appartient à l'arête pointée de T, (réciproque du cas B)
- enracinant le sommet de l'arête pointée le plus proche du centre de T. (réciproque du cas D)

Sinon, T appartient à l'image de I par $\mathcal{H}^p$, $\psi(T)$ est l'hyperarbre obtenu à partir de T en :
- oubliant la racine de T si c'est son centre, (réciproque du cas A)
- pointant le centre de T si c'est une arête contenant sa racine, (réciproque du cas C)
- pointant l'arête la plus proche du centre de T et qui contient la racine de T. (réciproque du cas D) □

1.3.3 Le poset des hyperarbres

Soient I un ensemble fini de cardinal n, S et T deux hyperarbres sur I. L'hyperarbre S est *plus petit* que T, noté $S \preceq T$, si chaque arête de S est union d'arêtes de T, et l'hyperarbre S est *strictement plus petit* que T, noté $S \prec T$ si $S \preceq T$ mais $S \neq T$. Un exemple est présenté figure 1.20.

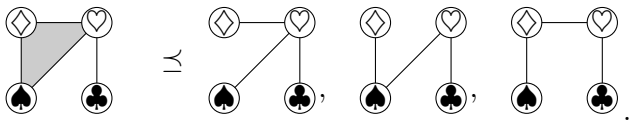


FIGURE 1.20 – Exemple d'ordre dans le poset des hyperarbres à quatre sommets étiquetés par $I = (\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit)$.

L'ensemble $(\mathcal{H}(I), \preceq)$ est un *ensemble partiellement ordonné* (ou *poset*), noté HT(I). Le poset des hyperarbres est parfois aussi appelé poset de *Whitehead*. Nous noterons $\widehat{\mathrm{HT(I)}}$ le poset obtenu en ajoutant à HT(I) un maximum $\hat{1}$. Pour tout entier naturel n, nous noterons de plus $\mathrm{HT_n}$ le poset $\mathrm{HT}(\{1, \ldots, \mathrm{n}\})$.

Dans HT(I), il est possible de définir le *rang* $r(h)$ d'un hyperarbre h à A arêtes par :

$$r(h) = A - 1.$$

Les relations de couverture augmentent (ou diminuent) le rang de 1 : le poset HT(I) est gradué par le nombre d'arêtes de chaque hyperarbre.

Les posets des hyperarbres apparaissent lors de l'étude de groupes d'automorphismes de groupes libres et de produits libres dans les articles de D. McCullough-A. Miller [MM96], N. Brady-J. McCammond-J. Meier-A. Miller [BMMM01], J. McCammond-J. Meier [MM04] ou encore C. Jensen-J. McCammond-J. Meier [JMM07] et [JMM06]. L'ensemble de ces travaux a motivé l'étude de ces objets qui sera exposée dans les chapitres suivants.

1.3.4 Homologie du poset des hyperarbres

N. Brady, F. Chapoton, C. Jensen, J. McCammond, J. Meier et A. Miller ont montré plusieurs résultats sur le poset des hyperarbres que nous regroupons ci-après.

En montrant que le poset obtenu en renversant l'ordre des posets des hyperarbres admet un ordre récursif sur ses atomes, N. Brady, C. Jensen, J. McCammond, J. Meier et A. Miller ont prouvé le théorème suivant.

Théorème 1.3.14 ([BMMM01])**.** *Les posets des hyperarbres* $\widehat{\mathrm{HT}}_n$ *sont Cohen-Macaulay.*

Un calcul sur les nombres de Möbius du poset des hyperarbres effectué par J. McCammond et J. Meier donne le résultat suivant.

Théorème 1.3.15 ([MM04])**.** *La caractéristique d'Euler réduite du poset des hyperarbres est* $(n-1)^{n-2}$*.*

En utilisant la notion d'hyperarbre cyclique, F. Chapoton a montré le résultat suivant.

Proposition 1.3.16 ([Cha07])**.** *Le polynôme caractéristique du poset des hyperarbres sur n sommets est donné par la fonction génératrice de l'ensemble fini des hyperarbres cycliques sur n sommets selon le nombre d'arêtes.*

CHAPITRE 2

Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres

Sommaire

2.1 Homologie du poset des hyperarbres 32
2.2 Relations entre espèces et espèces auxiliaires 34
2.3 Dimension de l'homologie du poset 39
2.4 Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset 42
2.5 Action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney 46
2.6 Perspectives 51

Dans l'article [BMMM01], il est montré que les posets des hyperarbres sont Cohen-Macaulay : leur homologie est concentrée en degré maximal. J. McCammond et J. Meier ont calculé dans leur article [MM04] la dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres sur n sommets : cette dimension est $(n-1)^{n-2}$. L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ des sommets des hyperarbres induit une action sur le poset des hyperarbres sur n sommets compatible avec la différentielle du complexe de chaînes associé : le groupe symétrique agit alors sur l'unique groupe d'homologie non trivial du poset. Dans son article [Cha07], F. Chapoton a calculé le polynôme caractéristique du poset des hyperarbres et a énoncé une conjecture pour l'action du groupe symétrique sur l'homologie et sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres. Après avoir calculé la dimension de l'homologie du poset des hyperarbres de manière originale, nous utilisons la théorie des espèces pour déterminer l'action du groupe symétrique sur cette homologie, que nous relions à la structure anti-cyclique de l'opérade Prelie par le théorème suivant.

Théorème. *La série indicatrice de cycles* $\mathbf{Z}_{-1}$*, qui donne le caractère pour l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres, est reliée à la série indicatrice de cycles* M *associée à la structure anti-cyclique de l'opérade* PreLie *par :*

$$\mathbf{Z}_{-1} = p_1 - \Sigma M = (\mathrm{Comm} \circ \Sigma\, \mathrm{PreLie}) + p_1\,(\Sigma\, \mathrm{PreLie} + 1)\,.$$

Nous calculons aussi l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset, répondant ainsi à la conjecture de F. Chapoton.

Théorème. *L'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres est reliée à la série* HAL *par :*

$$\mathbf{Z}_{-1,t} = \mathrm{HAL} + \frac{p_1}{t}.$$

où la série HAL *est définie par le système d'équations suivant :*

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}} = p_1\left(\frac{p_1}{1+tp_1} \circ \mathrm{Comm} \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}})\right),$$
$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} = p_1(\Sigma_t\,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm} \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}})),$$
$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{A}} = (\mathrm{Comm} - p_1) \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}),$$
$$\mathrm{HAL} = \mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} + \mathrm{HAL}^{\mathrm{A}} - \mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}.$$

Ce système permet de calculer les premiers termes des séries à l'aide du logiciel de calcul formel favori du lecteur.

2.1 Homologie du poset des hyperarbres

Nous présentons dans cette section une méthode pour ramener l'étude de l'homologie du poset des hyperarbres, qui est Cohen-Macaulay, à l'étude des chaînes larges d'hyperarbres dans le poset.

2.1.1 Chaînes et homologie du poset des hyperarbres

Nous renvoyons au chapitre 1.2 pour les définitions relatives à l'homologie d'un poset.

L'ensemble des $k-1$-*chaînes strictes* d'hyperarbres sur I est l'ensemble HS_k^I des k-uplets $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ où les a_i sont des éléments non minimaux de $\mathrm{HT(I)}$ et $a_i \prec a_{i+1}$. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\mathrm{HS}_k^{\{1,\ldots,n\}}$ est alors noté C_{k-1}^n. Nous noterons de plus $\widetilde{H}_m^n$, l'homologie réduite du poset $\widehat{HT}_n$.

Les dimensions des espaces d'homologies satisfont la propriété classique suivante.

Lemme 2.1.1. *La caractéristique d'Euler de l'homologie vérifie :*

$$\chi_{eul} = \sum_{m\geq 0} (-1)^m \dim \tilde{H}_m^n = \sum_{m\geq -1} (-1)^m \dim C_m^n. \tag{2.1}$$

Le théorème suivant décrit une partie de l'homologie du poset.

Théorème 2.1.2. *[MM04, theorem 2.9] Pour tout $n \geq 1$, le poset $\widehat{\mathrm{HT}}_{\mathrm{n}}$ est Cohen-Macaulay.*

Corollaire 2.1.3. *L'homologie de $\widehat{\mathrm{HT}}_{\mathrm{n}}$ est concentrée en degré maximal :*

$$\tilde{H}_i^n = \begin{cases} 0, & \text{pour } i \neq \dim(|\widehat{\mathrm{HT}}_{\mathrm{n}}|) \\ \mathbb{C}^{\dim \tilde{H}_i^n}, & \text{pour } i = \dim(|\widehat{\mathrm{HT}}_{\mathrm{n}}|). \end{cases}$$

Comme $\dim \widehat{\mathrm{HT}}_{\mathrm{n}} = n-3$, l'équation (2.1) peut alors être réécrite comme suit :

$$(-1)^{n-3} \dim \tilde{H}_{n-3}^n = \sum_{m\geq -1} (-1)^m \dim C_m^n. \tag{2.2}$$

De plus, comme la différentielle du complexe de chaînes est compatible avec l'action du groupe symétrique, l'action de celui-ci sur $(C_m^n)_{m\geq -1}$ induit une action sur $\tilde{H}_{n-3}^n$. Nous obtenons alors la relation suivante, avec $\chi_{i+1}^{s,n}$ le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'espace vectoriel C_i^n et $\chi_{\tilde{H}_{n-3}^n}$ le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'espace vectoriel $\tilde{H}_{n-3}^n$:

$$(-1)^{n-3} \chi_{\tilde{H}_{n-3}^n} = \sum_{m\geq -1} (-1)^m \chi_{m+1}^{s,n}. \tag{2.3}$$

2.1.2 Des chaînes larges aux chaînes strictes

D'après l'équation (2.3), il suffit de calculer la somme alternée des caractères sur C_m^n pour déterminer le caractère sur l'unique groupe d'homologie non trivial.

Soient k un nombre naturel et I un ensemble fini. L'ensemble des *k-chaînes larges* d'hyperarbres sur I est l'ensemble $\mathrm{HL}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}}$ des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ où les a_i sont des éléments de HT(I) et $a_i \preceq a_{i+1}$. Notons que les k-chaînes strictes sont alors des chaînes de $k+1$ éléments alors que les k-chaînes larges sont des chaînes de k éléments.

Nous définissons les espèces suivantes :

Définition 2.1.4. L'espèce $\mathcal{H}_k$ des k-chaînes larges d' hyperarbres est définie par :

$$I \mapsto \mathrm{HL}_k^I\,.$$

L'espèce $\mathcal{H}_k^s$ des $k-1$-chaînes strictes d' hyperarbres est définie par :

$$I \mapsto \mathrm{HS}_k^I\,.$$

Définition 2.1.5. Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0,1\}$ de longueur k, contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto & M_{k,s}, \\ V \neq \emptyset & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

Nous décrivons maintenant le lien entre ces espèces :

Proposition 2.1.6. *Les espèces $\mathcal{H}_k$ et $\mathcal{H}_i^s$ vérifient la relation suivante :*

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i \geq 0} \mathcal{H}_i^s \cdot \mathcal{M}_{k,i}.$$

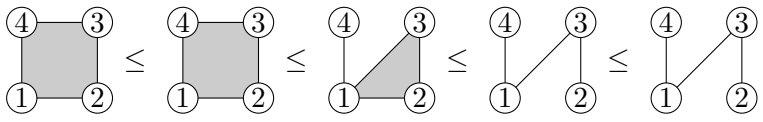
Démonstration. Soit $(a_1, \ldots, a_k)$ une k-chaîne large. Elle peut se factoriser en un couple formé d'une s-chaîne stricte $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})$, obtenue par suppression dans $(a_1, \ldots, a_k)$ des répétitions et du minimum $\hat{0}$, s'il apparaît, et d'un élément $u_1 \ldots u_k$ de $M_{k,s}$ tel que :

- $u_1 = 0$ si $a_1 = \hat{0}$, 1 sinon ;
- $u_j = 0$ si $a_j = a_{j-1}$, 1 sinon.

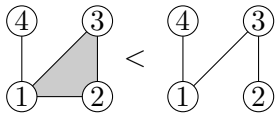
Remarquons que $\hat{0}$ est interdit ici dans les chaînes strictes considérées car les extremums du poset doivent être enlevées pour éviter que le complexe simplicial associé soit contractile (et donc que son homologie soit triviale). D'une i-chaîne stricte et d'un mot $u_1 \ldots u_k$ de $M_{k,i}$, on peut alors reconstruire une k-chaîne large.

La bijection précédente ne modifie pas l'étiquetage des sommets des hyperarbres considérés : un élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ envoie une chaîne large L_1 sur une chaîne large L_2 si et seulement si elle envoie la chaîne stricte s_1 correspondant à L_1 sur la chaîne stricte s_2 correspondant à L_2. Cette bijection est donc compatible avec l'action de $\mathfrak{S}_n$. Ceci établit l'isomorphisme d'espèces voulu. □

Exemple 2.1.7. La chaîne large suivante :



est alors reliée au couple formé de la chaîne stricte suivante :



et du mot : 00110.

Remarque 2.1.8. Ce raisonnement, considéré sur les ensembles sous-jacents, se généralise à tout poset Cohen-Macaulay.

Corollaire 2.1.9. *Considérons l'action par permutation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1,\dots,n\}$. Les caractères χ_k et χ_i^s des actions induites sur les espaces vectoriels $\mathcal{H}_k(\{1,\dots,n\})$ et $\mathcal{H}_i^s(\{1,\dots,n\})$ satisfont :*

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s. \tag{2.4}$$

Démonstration. L'isomorphisme de la proposition 2.1.6 est un isomorphisme d'espèces : il préserve donc l'action du groupe symétrique.

Nous obtenons alors :

$$\mathcal{H}_k(\{1,\dots,n\}) \cong \sum_{i\geq 0} \mathcal{H}_i^s(\{1,\dots,n\}) \cdot \mathcal{M}_{k,i}(\emptyset).$$

De plus, l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{M}_{k,i}(\emptyset)$ est triviale, nous obtenons alors :

$$\chi_k = \sum_{i\geq 0} \chi_i^s \times |M_{k,i}|.$$

Le cardinal de $M_{k,i}$ est $\binom{k}{i}$. Comme la longueur d'une chaîne stricte maximale de $\mathrm{HT_n}$ est $n-2$, la somme est finie. □

L'expression $\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s$ est un polynôme en k, de degré borné par n : il est donc possible d'étendre le polynôme χ_k aux entiers relatifs. De plus, le coefficient binomial $\binom{-1}{i}$ est égal à $(-1)^i$: nous obtenons alors $\chi_{-1} = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \chi_i^s$. L'équation (2.3) montre que la valeur absolue du polynôme χ_k évalué en $k=-1$ est égale à la valeur absolue du caractère de l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ induite sur l'homologie du poset.

Proposition 2.1.10. *Notons $P_n(X)$ le polynôme qui, évalué en k, donne le caractère des k-chaînes larges dans le poset $\widehat{HT_n}$. Le caractère donné par l'action de $\mathfrak{S}_n$ induite sur l'homologie du poset $\widehat{HT_n}$ est donnée par $(-1)^n P_n(-1)$.*

Cette proposition se généralise à tout autre poset Cohen-Macaulay muni d'une action du groupe symétrique compatible, avec une évaluation du polynôme des caractères des k-chaînes larges en un k_0 pouvant varier suivant les cas.

2.2 Relations entre espèces et espèces auxiliaires

Nous avons ainsi relié l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres à l'action du groupe symétrique sur les k-chaînes larges du poset des hyperarbres. Il nous faut maintenant calculer cette action. Pour ce faire, nous définissons dans cette section de nouvelles espèces et relions les espèces introduites entre elles. Nous renvoyons le lecteur à la partie 1.1 pour une introduction à la théorie des espèces.

2.2.1 Hyperarbres enracinés et pointés

Nous renvoyons le lecteur à la section 1.3.2 pour les définitions des hyperarbres enracinés, pointés en une arête, pointés en un sommet et une arête et creux.

Soit k un entier naturel.

Rappelons que le minimum d'une chaîne est l'hyperarbre de la chaîne qui possède le moins d'arêtes.

L'espèce associée aux k-chaînes larges d'hyperarbres, dont le minimum est un hyperarbre enraciné, est notée $\mathcal{H}_k^p$. Le sommet racine dans le minimum est alors distingué dans les autres hyperarbres de la chaîne, si bien que tous les hyperarbres de la chaîne peuvent être considérés comme enracinés en ce sommet. Nous appellerons ces chaînes *k-chaînes larges d'hyperarbres pointées* et noterons $\mathcal{H}_k^p$ l'espèce associée.

L'espèce associée aux k-chaînes larges d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre pointé en une arête, appelées *k-chaînes larges d'hyperarbres pointées en une arête*, est notée $\mathcal{H}_k^a$. L'espèce associée aux k-chaînes larges d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre pointé en une arête et un sommet, appelées *k-chaînes larges d'hyperarbres pointées en une arête et un sommet*, est notée $\mathcal{H}_k^{pa}$.

2.2.2 Principe de dissymétrie

Nous renvoyons le lecteur à la proposition 1.3.10 pour une explication du principe de dissymétrie sur les hyperarbres. Nous appliquons ce principe aux chaînes larges d'hyperarbres. Soit k un entier naturel, la proposition suivante relie les k-chaînes larges d'hyperarbres non pointées, enracinées, pointées en une arête et pointées en une arêtes et un sommet.

Proposition 2.2.1 (Principe de dissymétrie pour les chaînes d'hyperarbres)**.** *Les espèces des chaînes d'hyperarbres vérifient la relation suivante :*

$$\mathcal{H}_k + \mathcal{H}_k^{pa} = \mathcal{H}_k^p + \mathcal{H}_k^a, \tag{2.5}$$

où $=$ signifie l'existence d'un isomorphisme d'espèces.

Démonstration. La proposition résulte de l'application du principe de dissymétrie aux minima des chaînes. □

2.2.3 Relations entre espèces

Relations pour $\mathcal{H}_k^p$

Pour obtenir une équation fonctionnelle pour $\mathcal{H}_k^p$, nous avons besoin d'introduire un dernier type de chaîne à partir de la notion d'hyperarbre creux, définie dans la partie 1.3.2.

Définition 2.2.2. Une *k-chaîne large d'hyperarbres creuse* est une chaîne large de longueur k dans le poset des hyperarbres sur $\{\#, 1, \ldots, n-1\}$, dont le minimum est un hyperarbre creux. L'espèce des k-chaînes larges d'hyperarbres creuses est notée $\mathcal{H}_k^c$. L'espèce des k-chaînes larges d'hyperarbres creuses dont le minimum n'a qu'une seule arête est notée $\mathcal{H}_k^{cm}$.

Remarquons que les autres hyperarbres de la chaîne ne sont pas forcément des hyperarbres creux parce que le sommet étiqueté par # est dans une et une seule arête dans le minimum de la chaîne mais peut par la suite appartenir à plusieurs arêtes après division de l'arête le contenant.

Toutes ces espèces sont reliées par la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. *Les espèces $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ vérifient :*

$$\mathcal{H}_k^p = X + X \cdot \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_k^c, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c. \tag{2.8}$$

Démonstration. Toutes les bijections décrites ci-dessous sont compatibles avec l'action du groupe symétrique : ce sont des isomorphismes d'espèces.

Équation (2.6) Une k-chaîne d'hyperarbres enracinée sur un ensemble de cardinal 1 est constituée d'un sommet répété à chaque étape. C'est donc le même objet qu'un singleton : l'espèce associée est l'espèce X.

Considérons maintenant les k-chaînes d'hyperarbres enracinées sur au moins deux sommets. Une telle chaîne peut être divisée en un singleton et un ensemble de k-chaînes larges creuses d'hyperarbres. Le singleton correspond en effet à la racine du minimum de la chaîne et l'ensemble de chaînes creuses d'hyperarbres est obtenu en :

- supprimant la racine dans tous les hyperarbres de la chaîne,
- mettant un creux # dans les arêtes où se trouvait la racine,
- séparant les arêtes contenant les creux dans le minimum de la chaîne de manière à obtenir un ensemble d'hyperarbres creux.

Le troisième point induit une décomposition de la chaîne en un ensemble de chaînes creuses. En effet, il permet d'obtenir une partition de l'ensemble des arêtes telle que chaque sommet différent de la racine apparaisse dans une et une seule part et telle que les parts soient connexes. De plus, cette partition est préservée dans la chaîne puisque les autres éléments dans la chaîne sont obtenus par division des arêtes uniquement : ceci donne le résultat (2.6).

Exemple 2.2.4. Une chaîne d'hyperarbres enracinée et sa décomposition en un singleton et un ensemble de chaînes creuses d'hyperarbres est présentée sur la figure 2.1. Nous avons ici représenté seulement les minima (en haut) et les maxima (en bas) des chaînes.

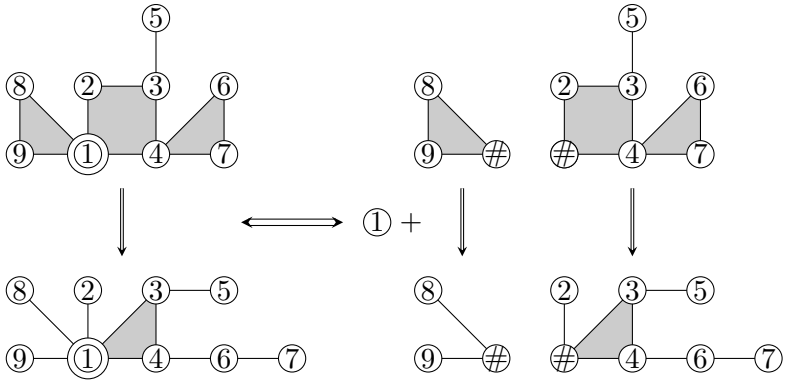


Figure 2.1 – Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres enracinée.

Équation (2.7) Soit S une k-chaîne creuse d'hyperarbres selon la définition 2.2.2.

L'arête creuse dans le minimum, c'est-à-dire l'arête contenant le creux, donne à chaque niveau l de la chaîne un ensemble d'arêtes distinguées D_e^l. Ces arêtes distinguées forment une chaîne creuse d'hyperarbres D dont le minimum n'a qu'une arête.

Supprimer l'arête creuse D_e^1 dans le minimum de S donne une forêt d'hyperarbres, c'est-à-dire un ensemble d'hyperarbres $\{h_1^1, \ldots, h_f^1\}$. Tout hyperarbre h_i a un sommet distingué s_i qui était dans l'arête creuse. Enracinons h_i en s_i. L'évolution des arêtes de l'hyperarbre h_i dans S induit une chaîne S_{h_i}. L'enracinement de h_i implique un enracinement de la chaîne S_{h_i}.

Remarquons maintenant que la forêt d'hyperarbres $\{h_1^l, \ldots, h_f^l\}$ obtenue au niveau l de la chaîne en supprimant D_e^l est identique à la forêt d'hyperarbres obtenue en prenant les hyperarbres au niveau l dans les chaînes $S_{h_1}, \ldots, S_{h_f}$.
Ainsi la chaîne S est la chaîne D, où à chaque niveau l, sur un sommet i, on greffe l'hyperarbre h_i^l. La greffe consiste à remplacer le sommet i par la racine de l'hyperarbre h_i^l.
La chaîne S peut aussi être vue comme la chaîne D, où une chaîne d'hyperarbres enracinée S_{h_i} a été insérée au sommet i. Ceci donne le résultat (2.7).

Exemple 2.2.5. Une chaîne creuse d'hyperarbres est équivalente à une chaîne creuse d'hyperarbres dont le minimum n'a qu'une arête, et dont les sommets sont des chaînes d'hyperarbres enracinées. Un exemple est présenté sur la figure 2.2.

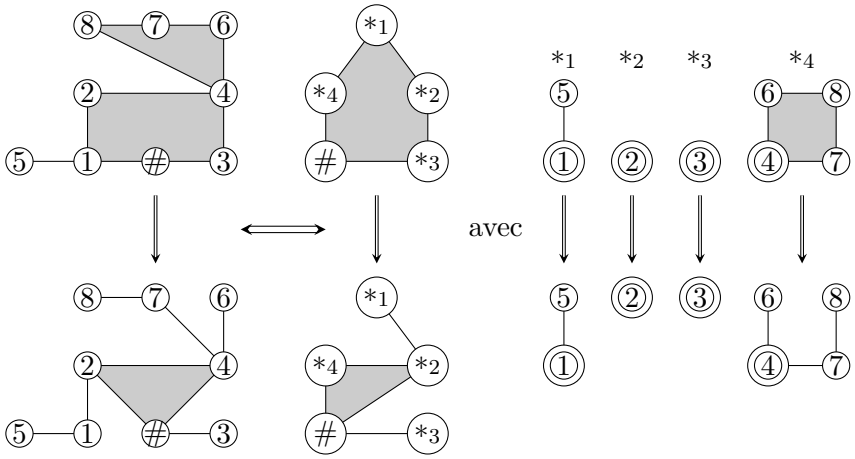


FIGURE 2.2 – Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres creuse.

Équation (2.8) Une k-chaîne d'hyperarbres creuse dont le minimum n'a qu'une seule arête peut être vue comme une $(k-1)$-chaîne large d'hyperarbres $\mathcal{C}_{k-1}$ avec un sommet étiqueté par $\#$. Séparant les arêtes contenant l'étiquette $\#$ dans le minimum de $\mathcal{C}_{k-1}$ revient à séparer cette chaîne en un ensemble non vide de $(k-1)$-chaînes d'hyperarbres creuses. Ceci donne le résultat (2.8). □

Comme l'espèce $\mathcal{H}_k^p$ peut se factoriser par l'espèce X, l'application $\frac{\mathcal{H}_k^p - X}{X}$ est une espèce. Nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.6. *L'espèce $\mathcal{H}_k^p$ vérifie :*

$$\mathcal{H}_k^p = X + X \cdot \mathrm{Comm} \circ \left(\frac{\mathcal{H}_{k-1}^p - X}{X} \circ \mathcal{H}_k^p \right).$$

Relations pour $\mathcal{H}_k^a$

La proposition suivante relie l'espèce des chaînes pointées en une arête aux autres espèces.

Proposition 2.2.7. *L'espèce $\mathcal{H}_k^a$ vérifie :*

$$\mathcal{H}_k^a = (\mathcal{H}_{k-1} - X) \circ \mathcal{H}_k^p. \tag{2.9}$$

Démonstration. Soit S une k-chaîne large d'hyperarbres pointée en une arête.

L'arête pointée dans le minimum donne à chaque niveau l de la chaîne un ensemble d'arêtes distinguées D_e^l, obtenu par division de l'arête pointée. Ces arêtes distinguées forment une chaîne d'hyperarbres D dont le minimum n'a qu'une arête. Cette chaîne peut être vue comme une $k-1$-chaîne d'hyperarbres.

Supprimer l'arête pointée D_e^1 dans le minimum de S donne une forêt d'hyperarbres, c'est-à-dire un ensemble d'hyperarbres $\{h_1, \dots, h_f\}$. Tout hyperarbre h_i a un sommet distingué s_i qui était dans l'arête pointée. Enracinons h_i en s_i. L'évolution des arêtes de l'hyperarbre h_i dans S induit une chaîne S_{h_i}. L'enracinement de h_i implique un enracinement de la chaîne S_{h_i}.

Remarquons maintenant que la forêt d'hyperarbres $\{h_1^l, \dots, h_f^l\}$ obtenue au niveau l de la chaîne en supprimant D_e^l est identique à la forêt d'hyperarbres obtenue en prenant les hyperarbres au niveau l dans les chaînes $S_{h_1}, \dots, S_{h_f}$.

Ainsi la chaîne S est la chaîne D, où à chaque niveau l, sur un sommet i, on greffe l'hyperarbre h_i^l. La greffe consiste à remplacer le sommet i par la racine de l'hyperarbre h_i^l.

Le chaîne S peut aussi être vue comme la chaîne D, où une chaîne d'hyperarbres enracinée S_{h_i} a été insérée au sommet i. Ceci donne le résultat, comme dans la démonstration de la proposition 2.2.3. □

Exemple 2.2.8. Une chaîne d'hyperarbres pointée en une arête peut être vue comme une chaîne d'hyperarbres dont les sommets sont des chaînes d'hyperarbres enracinées. Un exemple est présenté sur la figure 2.3.

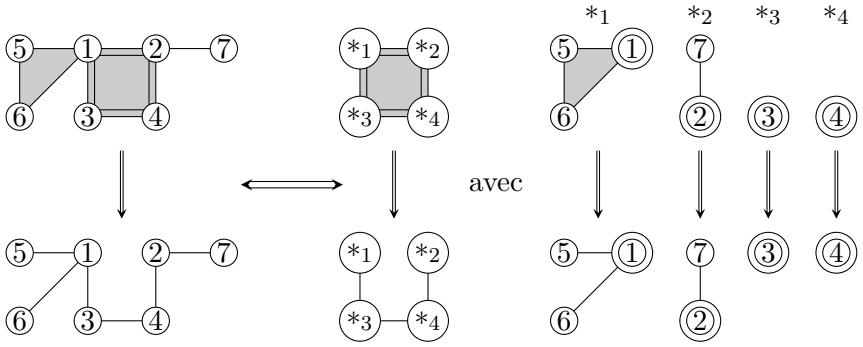


Figure 2.3 – Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres pointée en une arête.

Relations pour $\mathcal{H}_k^{pa}$

L'espèce des chaînes d'hyperarbres pointées en une arête et un sommet vérifie la proposition suivante.

Proposition 2.2.9. *L'espèce $\mathcal{H}_k^{pa}$ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\mathcal{H}_k^{pa} = (\mathcal{H}_{k-1}^{p} - X) \circ \mathcal{H}_k^{p}. \tag{2.10}$$

Démonstration. Si l'on oublie l'enracinement dans la chaîne, nous pouvons appliquer la décomposition de la proposition 2.2.7.

Enraciner une chaîne d'hyperarbres pointée en une arête est équivalent à enraciner la $(k-1)-$chaîne d'hyperarbres correspondante. Nous obtenons ainsi le résultat voulu. □

Exemple 2.2.10. Une chaîne d'hyperarbres pointée en un sommet et une arête peut être vue comme une chaîne d'hyperarbres enracinés, dont les sommets sont étiquetés par des chaînes d'hyperarbres enracinés. Un exemple est présenté sur la figure 2.4.

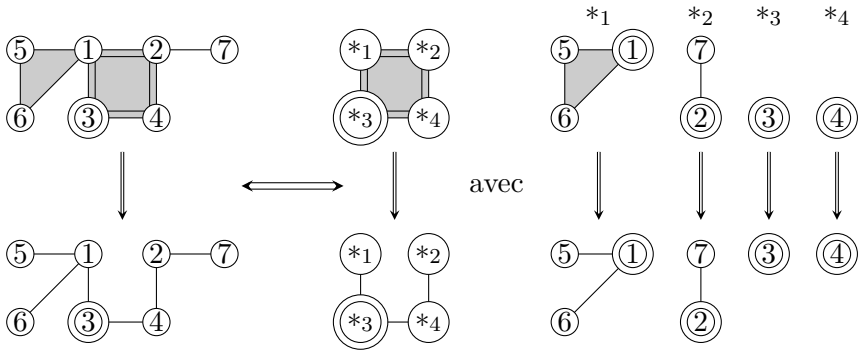


FIGURE 2.4 – Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres pointée en une arête et un sommet.

Relations pour $\mathcal{H}_k$

Les relations entre espèces pointées et non pointées impliquent la proposition suivante.

Proposition 2.2.11. *L'espèce $\mathcal{H}_k$ vérifie :*

$$X \cdot \mathcal{H}_k' = \mathcal{H}_k^p, \tag{2.11}$$

où $'$ est la dérivation des espèces.

2.2.4 Retour sur les chaînes strictes et larges

Enraciner les chaînes ne change pas la nature polynomiale du caractère associé à l'action du groupe symétrique sur ces chaînes, montrée dans la section 2.1.2. Ceci montre que les séries génératrices et les séries indicatrices de cycles de $\mathcal{H}^p$ sont des polynômes en k. De plus, comme la composée de deux séries formelles à coefficients polynomiaux est une série formelle à coefficients polynomiaux, les séries génératrices et séries indicatrices de cycles associées à $\mathcal{H}^a$, $\mathcal{H}^{pa}$, $\mathcal{H}^c$ et $\mathcal{H}^{cm}$ sont des polynômes en k. Par conséquent, pour toutes les espèces considérées, nous pouvons évaluer la série indicatrice de cycles en -1 et cela permettra de déterminer le caractère pour l'action du groupe symétrique sur l'homologie associée aux posets des hyperarbres enracinés puis quelconques.

2.3 Dimension de l'homologie du poset

Le calcul de la dimension de l'homologie du poset se ramène donc à un calcul du nombre de k-chaînes larges. Nous utilisons maintenant les relations entre espèces obtenues à la section précédente, traduites en terme de séries génératrices, pour déterminer ce nombre. Ces relations impliquent en effet une équation différentielle sur le nombre de k-chaînes larges d'hyperarbres que nous résolvons pour $k = -1$. Les séries génératrices exponentielles associées aux espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^a$, $\mathcal{H}_k^{pa}$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ sont notées $\mathbf{C}_k$, $\mathbf{C}_k^p$, $\mathbf{C}_k^a$, $\mathbf{C}_k^{pa}$, $\mathbf{C}_k^c$ et $\mathbf{C}_k^{cm}$.

2.3.1 Liens entre séries génératrices

Les égalités entre espèces de la partie 2.2 impliquent des égalités entre séries génératrices, que nous énonçons à la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. *La série $\mathbf{C}_k^p$ vérifie :*

$$\mathbf{C}_k^p = x \times \exp\left(\frac{\mathbf{C}_{k-1}^p \circ \mathbf{C}_k^p}{\mathbf{C}_k^p} - 1\right). \tag{2.12}$$

La série $\mathbf{C}_k^a$ vérifie :

$$\mathbf{C}_k^a = (\mathbf{C}_{k-1} - x) \circ (\mathbf{C}_k^p). \tag{2.13}$$

La série $\mathbf{C}_k^{pa}$ vérifie :

$$\mathbf{C}_k^{pa} = (\mathbf{C}_{k-1}^p - x) \circ (\mathbf{C}_k^p). \tag{2.14}$$

La série $\mathbf{C}_k$ vérifie :

$$x \times \mathbf{C}_k' = \mathbf{C}_k^p. \tag{2.15}$$

De plus, d'après le principe de dissymétrie de la proposition 2.2.1, ces séries vérifient aussi :

$$\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k^{pa} = \mathbf{C}_k^p + \mathbf{C}_k^a. \tag{2.16}$$

2.3.2 Valeurs de ces séries pour $k = 0$ et $k = -1$

Calcul de $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{C}_0^p$

Il n'y a qu'une 0-chaîne d'hyperarbres : la chaîne vide. Ceci donne :

$$\mathbf{C}_0 = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1. \tag{2.17}$$

La relation (2.15) donne :

$$\mathbf{C}_0^p = xe^x. \tag{2.18}$$

Calcul de $\mathbf{C}_{-1}$

D'après la proposition 2.1.10, il suffit d'étudier la valeur en -1 du polynôme dont la valeur en k donne le nombre de k-chaînes larges pour obtenir la dimension du seul groupe d'homologie du poset des hyperarbres non trivial. Ainsi, nous étudions la valeur en $k = -1$ des séries génératrices exponentielles dont les coefficients sont ces polynômes.

La série $\mathbf{C}_{-1}$ est donnée par le théorème suivant. Ce résultat a été prouvé pour la première fois par McCammond et Meier dans leur article [MM04]. Nous donnons ici une nouvelle démonstration de ce résultat.

Théorème 2.3.2. *[MM04, theorem 5.1] La dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres sur n sommets est $(n-1)^{n-2}$.*

Démonstration. Pour montrer ce théorème, nous relions la série génératrice $\mathbf{C}_{-1}$ à la série de Lambert dont nous rappelons la définition.

Définition 2.3.3. Soit ΣW la série donnée par :

$$\Sigma W(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Cette série est la suspension de la série génératrice W de l'espèce des arbres enracinés, associée à l'opérade PreLie.

D'une part, d'après les équations (2.13) et (2.14), appliquées en $k = 0$, le principe de dissymétrie du corollaire 2.2.1 s'écrit :

$$\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_0^p = \mathbf{C}_0^a - \mathbf{C}_0^{pa} = (\mathbf{C}_{-1} - \mathbf{C}_{-1}^p) \circ \mathbf{C}_0^p.$$

Avec les équations (2.15), (2.17) et (2.18), cette égalité équivaut à :

$$(\mathbf{C}_{-1} - x\mathbf{C}'_{-1}) \circ xe^x = e^x - xe^x - 1. \tag{2.19}$$

D'autre part, la suspension de la série de Lambert vérifie l'équation suivante, obtenue à partir d'une décomposition des arbres enracinés (voir [BLL98, page 2] par exemple) :

$$\Sigma W(x) e^{\Sigma W(x)} = x.$$

Calculons sa dérivée :

$$(\Sigma W)'(x) = \frac{1}{x + e^{\Sigma W}}.$$

En composant l'équation (2.19) avec ΣW, nous obtenons :

$$\mathbf{C}_{-1} - x\mathbf{C}'_{-1} = e^{\Sigma W} - x - 1.$$

Pour conclure, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3.4. *Un calcul du terme $e^{\Sigma W} - x - 1$ donne :*

$$e^{\Sigma W} - x - 1 = \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration du lemme 2.3.4. Les deux parties de l'équation s'annulent en 0.

Dériver la partie gauche de l'équation donne :

$$(e^{\Sigma W} - x - 1)' = \Sigma W' e^{\Sigma W} - 1 = \frac{e^{\Sigma W} - x - e^{\Sigma W}}{x + e^{\Sigma W}} = -x\Sigma W'.$$

Dériver la partie droite de l'équation donne :

$$\left(\sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

D'où l'égalité suivante

$$\left(\sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n^n \frac{x^n}{n!} = -x\Sigma W'.$$

Ces deux séries formelles ont même dérivée et même valeur en 0 : elles sont donc égales. □

Nous concluons grâce au lemme 2.3.4, en posant $\mathbf{C}_{-1} = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$. Ainsi les coefficients a_n satisfont pour tout entier $n > 0$:

$$a_n - n a_n = -(n-1) a_n = (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1}.$$ □

Corollaire 2.3.5. *La dérivée de la série $\mathbf{C}_{-1}$ vérifie :*

$$(\mathbf{C}_{-1} - x)' = \Sigma W.$$

Démonstration. Nous dérivons l'expression de $\mathbf{C}_{-1}$ obtenue dans le théorème 2.3.2 :

$$(\mathbf{C}_{-1} - x)' = \sum_{n \geq 2} (-1)^n (n-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$ □

Retour sur $\mathbf{C}_0^a$ et $\mathbf{C}_0^{pa}$

Les séries $\mathbf{C}_0^a$ et $\mathbf{C}_0^{pa}$ sont données par la proposition suivante.

Proposition 2.3.6. *1. La série $\mathbf{C}_0^a$ vérifie :*

$$\mathbf{C}_0^a = \sum_{n\geq 2}(n-1)^2\frac{x^n}{n!}. \tag{2.20}$$

2. La série $\mathbf{C}_0^{pa}$ vérifie :

$$\mathbf{C}_0^{pa} = \sum_{n\geq 2} n(n-1)\frac{x^n}{n!}. \tag{2.21}$$

Démonstration. D'après les équations (2.13) et (2.18), $\mathbf{C}_0^a$ vérifie :

$$\mathbf{C}_0^a(x) = (\mathbf{C}_{-1} - x) \circ \mathbf{C}_0^p(x) = (\mathbf{C}_{-1} - x) \circ xe^x.$$

En dérivant cette égalité et en utilisant le corollaire 2.3.5, nous obtenons :

$$(\mathbf{C}_0^a)'(x) = \Sigma W \circ xe^x \times (x+1)e^x = x(x+1)e^x.$$

Ce qui donne :

$$(\mathbf{C}_0^a)'(x) = \sum_{n\geq 1} n^2\frac{x^n}{n!}.$$

Comme $\mathbf{C}_0^a(0) = 0$, nous obtenons le premier résultat.
D'après les équations (2.14) et (2.18), $\mathbf{C}_0^{pa}$ vérifie :

$$\mathbf{C}_0^{pa}(x) = (\mathbf{C}_{-1}^p - x) \circ \mathbf{C}_0^p(x) = (x(\mathbf{C}'_{-1} - 1)) \circ xe^x.$$

Avec le corollaire 2.3.5, nous obtenons :

$$\mathbf{C}_0^{pa}(x) = (x\Sigma W) \circ xe^x = x^2e^x.$$

Ceci donne le second résultat. □

2.4 Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset

Nous utilisons de nouveau les relations entre espèces de la section 6.2.6, traduites en terme de séries indicatrices de cycles cette fois. Ces relations permettent de calculer l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres qui se relie à l'opérade PreLie. Nous renvoyons le lecteur à la section 1.1.3 pour un rappel sur les séries indicatrices de cycles.

2.4.1 Description de l'action

Considérons un poset d'hyperarbres sur n sommets, comme décrit précédemment. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble des sommets d'un hyperarbre par permutation. Cette action conserve le nombre d'arêtes et l'ordre du poset : elle induit donc une action sur les chaînes puis sur l'homologie du poset $\widehat{\mathrm{HT}_n}$. Nous déterminons dans cette section le caractère de cette action sur l'homologie du poset.

Dans ce qui suit, $\mathbf{Z}_k$, $\mathbf{Z}_k^p$, $\mathbf{Z}_k^a$ et $\mathbf{Z}_k^{pa}$ désigneront les séries indicatrices de cycles associées aux espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^a$ et $\mathcal{H}_k^{pa}$.

2.4.2 Relations entre séries indicatrices de cycles

Les relations entre espèces de la section 2.2 impliquent la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. *Les séries* $\mathbf{Z}_k$, $\mathbf{Z}_k^p$, $\mathbf{Z}_k^a$ *et* $\mathbf{Z}_k^{pa}$ *vérifient les relations suivantes :*

$$\mathbf{Z}_k + \mathbf{Z}_k^{pa} = \mathbf{Z}_k^p + \mathbf{Z}_k^a, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{Z}_k^p = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} \circ \left(\frac{\mathbf{Z}_{k-1}^p \circ \mathbf{Z}_k^p - \mathbf{Z}_k^p}{\mathbf{Z}_k^p} \right), \tag{2.23}$$

$$\mathbf{Z}_k^a + \mathbf{Z}_k^p = \mathbf{Z}_{k-1} \circ \mathbf{Z}_k^p, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{Z}_k^{pa} + \mathbf{Z}_k^p = \mathbf{Z}_{k-1}^p \circ \mathbf{Z}_k^p, \tag{2.25}$$

et

$$p_1 \frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial p_1} = \mathbf{Z}_k^p. \tag{2.26}$$

Ces relations sont valides pour tout entier relatif k. En effet, les coefficients de p_λ sont des polynômes en k, donc nous pouvons étendre à $\mathbb{Z}$ les relations précédentes valides sur $\mathbb{N}$.

2.4.3 Calcul du caractère du groupe symétrique

Calcul de $\mathbf{Z}_{-1}$

Utilisant la proposition 2.1.10, il suffit d'étudier la valeur en -1 du polynôme dont la valeur en k est, au signe près, le caractère de l'action du groupe symétrique sur les k-chaînes larges pour obtenir le caractère sur l'homologie. C'est pourquoi nous étudions la valeur en -1 de la série indicatrice de cycles dont les coefficients sont ces polynômes.

L'opérade PreLie est anti-cyclique, comme montré dans l'article de F. Chapoton [Cha05]. Ceci signifie que l'action usuelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur le module $\mathrm{PreLie}(n)$, ayant pour base l'ensemble des arbres enracinés sur n sommets, peut être étendue à une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$. Nous écrivons M pour la série indicatrice de cycles associée à cette structure anti-cyclique.

Le lecteur pourra consulter l'article [Cha07, part 5.4] pour plus d'informations sur cette série.

Nous montrons maintenant le théorème suivant, qui décrit l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres en fonction des séries indicatrices de cycles associées aux opérades Comm et PreLie.

Théorème 2.4.2. *La série indicatrice de cycles* $\mathbf{Z}_{-1}$*, qui donne le caractère pour l'action du groupe symétrique sur l'homologie des posets des hyperarbres, est reliée à la série indicatrice de cycles* M *associée à la structure anti-cyclique de l'opérade* PreLie *par :*

$$\mathbf{Z}_{-1} = p_1 - \Sigma M = \mathrm{Comm} \circ \Sigma\, \mathrm{PreLie} + p_1 \left(\Sigma\, \mathrm{PreLie} + 1 \right). \tag{2.27}$$

La série indicatrice de cycles $\mathbf{Z}_{-1}^p$ *est donnée par :*

$$\mathbf{Z}_{-1}^p = p_1 \left(\Sigma\, \mathrm{PreLie} + 1 \right). \tag{2.28}$$

Démonstration. Nous commençons par calculer $\mathbf{Z}_0$ et $\mathbf{Z}_0^p$. Il n'y a qu'une 0-chaîne : la chaîne vide. Elle est fixée par n'importe quelle permutation. Un calcul rapide donne :

$$\mathbf{Z}_0 = \mathrm{Comm}\,.$$

Nous obtenons avec l'équation (2.26) :

$$\mathbf{Z}_0^p = p_1 \frac{\partial\,\mathrm{Comm}}{\partial p_1} = \mathrm{Perm} = p_1(1+\mathrm{Comm}). \tag{2.29}$$

L'équation (2.23) donne :

$$\mathbf{Z}_0^p = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} \circ \left(\frac{\mathbf{Z}_{-1}^p \circ \mathbf{Z}_0^p - \mathbf{Z}_0^p}{\mathbf{Z}_0^p} \right),$$

donc remplacer $\mathbf{Z}_0^p$ par son expression donne :

$$p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} \circ \left(\frac{\mathbf{Z}_{-1}^p \circ \mathrm{Perm} - \mathrm{Perm}}{\mathrm{Perm}} \right).$$

Rappelons que $\Sigma\,\mathrm{PreLie} \circ \mathrm{Perm} = \mathrm{Perm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} = p_1$, d'après [Cha07], en conséquence de la dualité de Koszul pour les opérades.

Nous obtenons :

$$\Sigma\,\mathrm{PreLie} = \frac{\mathbf{Z}_{-1}^p - p_1}{p_1},$$

d'où le résultat :

$$\mathbf{Z}_{-1}^p = p_1\,(\Sigma\,\mathrm{PreLie} + 1)\,. \tag{2.30}$$

L'équation de dissymétrie (2.22), combinée avec les relations (2.24) et (2.25) en $k = 0$ donne :

$$\mathrm{Comm} + \mathbf{Z}_{-1}^p \circ \mathrm{Perm} - \mathrm{Perm} = \mathrm{Perm} + \mathbf{Z}_{-1} \circ \mathrm{Perm} - \mathrm{Perm}\,.$$

En composant par $\Sigma\,\mathrm{PreLie}$ et en remplaçant $\mathbf{Z}_{-1}^p$ par son expression dans l'équation (2.28), nous obtenons :

$$\mathbf{Z}_{-1} = \mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} + p_1\,(\Sigma\,\mathrm{PreLie} + 1) - p_1.$$

Comme $(p_1(\mathrm{Comm} + 1)) \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} = p_1$, nous obtenons alors :

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} = \frac{p_1 - \Sigma\,\mathrm{PreLie}}{\Sigma\,\mathrm{PreLie}}.$$

Ainsi, la série indicatrice de cycles $\mathbf{Z}_{-1}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}_{-1} = -1 + \frac{p_1}{\Sigma\,\mathrm{PreLie}} + p_1 \times \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,. \tag{2.31}$$

En utilisant l'équation [Cha05, equation 50], composée avec la suspension, nous obtenons :

$$\Sigma M - 1 = -p_1(-1 + \Sigma\,\mathrm{PreLie} + \frac{1}{\Sigma\,\mathrm{PreLie}}),$$

Le résultat est obtenu en utilisant l'égalité suivante, venant de l'équation (2.31) :

$$(p_1 - \mathbf{Z}_{-1}) - 1 = p_1 - \frac{p_1}{\Sigma\,\mathrm{PreLie}} - p_1 \times \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,.$$

□

Retour sur $\mathbf{Z}_0^a$ et $\mathbf{Z}_0^{pa}$

Dans cette partie, nous raffinons les résultats obtenus à la proposition 2.3.6.

Théorème 2.4.3. *Les séries indicatrices de cycles associées aux espèces des* 0*-chaînes larges, dont le minimum est un hyperarbre pointé en une arête et des* 0*-chaînes larges, dont le minimum est un hyperarbre pointé en une arête et un sommet, vérifient :*

$$\mathbf{Z}_0^a = \mathrm{Comm} + (p_1 - 1) \times \mathrm{Perm}, \tag{2.32}$$

et

$$\mathbf{Z}_0^{pa} = p_1 \,\mathrm{Perm}\,. \tag{2.33}$$

Pour une série indicatrice de cycles $\mathbf{C}$*, nous écrivons* $(\mathbf{C})_n$ *pour la partie de* $\mathbf{C}$ *correspondant à la représentation du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$*.*

Pour tout $n \geq 2$*, écrivant* $S^{(n-1,1)}$ *pour la représentation irréductible du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ *associée à la partition* $(n-1,1)$ *de* n*, nous obtenons :*

1. $(\mathbf{Z}_0^a)_n$ *est le caractère de la représentation* $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)}$ *;*
2. $(\mathbf{Z}_0^{pa})_n$ *est le caractère de la représentation* $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-1,1)}$*.*

Démonstration. Les égalités viennent des relations (2.24) et (2.25), en remplaçant les séries $\mathbf{Z}_0^p$, $\mathbf{Z}_{-1}^p$ et $\mathbf{Z}_{-1}$ par leurs expressions dans les équations (2.29), (2.28) et dans le théorème 2.4.2. Nous obtenons alors :

$$(\mathbf{Z}_0^a)_n = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} + \sum_{\lambda \vdash n-2} p_1^2 \frac{p_\lambda}{z_\lambda} - \sum_{\lambda \vdash n-1} p_1 \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \tag{2.34}$$

Notons maintenant f_λ le nombre de points fixés par une permutation de type λ.
Le coefficient devant $\frac{p_\lambda}{z_\lambda}$ dans $(\mathbf{Z}_0^a)_n$ est :

$$1 - f_\lambda + f_\lambda(f_\lambda - 1) = (f_\lambda - 1)^2.$$

De la même manière, nous obtenons :

$$(\mathbf{Z}_0^{pa})_n = \sum_{\lambda \vdash n-2} p_1^2 \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \tag{2.35}$$

Le coefficient devant $\frac{p_\lambda}{z_\lambda}$ dans $(\mathbf{Z}_0^{pa})_n$ est

$$(f_\lambda - 1)^2 + f_\lambda - 1 = f_\lambda(f_\lambda - 1).$$

Nous pouvons maintenant conclure grâce au lemme suivant.

Lemme 2.4.4. *Le caractère de la représentation irréductible* $S^{(n-1,1)}$ *sur la classe de conjugaison* C_σ *est égale à* $p-1$*, où* p *est le nombre de points fixés par chaque élément de* C_σ*.*

Ce lemme repose sur le fait que la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$, de caractère p sur une classe de conjugaison à p points fixes, est la somme directe de la représentation triviale, de caractère constant égal à 1, et de la représentation $S^{(n-1,1)}$.

Ainsi, d'après ce lemme, le caractère de la représentation $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)}$ sur la classe de conjugaison C_σ est égal à $(p-1)^2$, où p est le nombre de points fixés par chaque élément de C_σ. On obtient ainsi la première relation.

La seconde relation est obtenue en calculant le caractère de la représentation $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-1,1)}$, égal à $f_\sigma(f_\sigma - 1)$ sur toute classe de conjugaison dont les éléments ont f_σ points fixes. □

2.5 Action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney

Nous calculons maintenant l'action du groupe symétrique sur un raffinement de l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres. Pour ce faire, nous introduirons de nouvelles variantes de chaînes pointées.

2.5.1 Propriétés de l'homologie de Whitney

Nous renvoyons le lecteur à la section 1.2.5 pour la définition de l'homologie de Whitney.

Pour calculer l'homologie de Whitney de $\widehat{\mathrm{HT}_\mathrm{n}}$, nous définissons le poids suivant sur les k-chaînes larges.

Définition 2.5.1. Le *poids* d'une chaîne d'hyperarbres S, noté $w(S)$, est :

$$w(S) = |\text{arête}(\max(S))| - 1$$

où $|\text{arête}(\max(S))|$ est le nombre d'arêtes dans le maximum de S.

Remarquons que dans $\widehat{\mathrm{HT}_\mathrm{n}}$, le poids d'une chaîne est égal au rang de son maximum.

Pour $\mathcal{E}$ une espèce de série indicatrice de cycles $\mathbf{C}$, nous noterons $\mathcal{E}_t$ l'espèce pondérée associée, de série indicatrice de cycles $\mathbf{C}_t$.

Ainsi, l'espèce $\mathcal{H}_{k,t}$ est l'espèce qui associe à un ensemble A l'ensemble des paires formées d'une k-chaîne large d'hyperarbres et du poids de son maximum. C'est pourquoi nous obtenons :

$$\mathbf{Z}_{k,t} = \sum_{n\geq 1}\sum_{i\geq 0} \chi(\mathrm{HL}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k,i}}) t^i \frac{x^n}{n!},$$

où $\chi(\mathrm{HL}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k,i}})$ est le caractère donné par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'espace des k-chaînes larges dont le maximum a pour rang i.

Nous reprenons le raisonnement de la section 2.1.2 : notre but est de trouver des relations polynomiales en k entre les k-chaînes larges d'hyperarbres quelconques, pointées ou non, enracinées ou non, et de les évaluer après en $k = -1$. Nous obtenons alors :

$$\mathbf{Z}_{-1,t} = \sum_{n\geq 1}\sum_{i\geq 0} \mathrm{WH}_\mathrm{i}(\widehat{\mathrm{HT}_\mathrm{n}})(-t)^i \frac{x^n}{n!}. \tag{2.36}$$

2.5.2 Liens entre séries indicatrices de cycles

Un raisonnement similaire à celui de la partie 2.2 permet d'obtenir les relations suivantes en tenant compte du poids.

Proposition 2.5.2. *Les séries* $\mathbf{Z}_{k,t}$, $\mathbf{Z}^p_{k,t}$, $\mathbf{Z}^a_{k,t}$ *et* $\mathbf{Z}^{pa}_{k,t}$ *vérifient les relations suivantes :*

$$\mathbf{Z}_{k,t} + \mathbf{Z}^{pa}_{k,t} = \mathbf{Z}^p_{k,t} + \mathbf{Z}^a_{k,t}, \tag{2.37}$$

$$\mathbf{Z}^p_k = \frac{p_1}{t} \times (1 + \mathrm{Comm} \circ \left(\frac{t\mathbf{Z}^p_{k-1,t} - p_1}{p_1} \circ t\mathbf{Z}^p_{k,t} \right), \tag{2.38}$$

$$\mathbf{Z}^a_{k,t} = (\mathbf{Z}_{k-1,t} - \frac{p_1}{t}) \circ (t\mathbf{Z}^p_{k,t}), \tag{2.39}$$

$$\mathbf{Z}^{pa}_{k,t} = (\mathbf{Z}^{p}_{k-1,t} - \frac{p_1}{t}) \circ (t\mathbf{Z}^{p}_{k,t}), \tag{2.40}$$

$$p_1 \frac{\partial \mathbf{Z}_{k,t}}{\partial p_1} = \mathbf{Z}^{p}_{k,t}. \tag{2.41}$$

2.5.3 Nouvelles chaînes pointées

Nous avons besoin de deux nouveaux types de chaînes. Nous noterons :
- par $\mathcal{H}^{A}_{k,t}$, l'espèce associée aux k-chaînes larges d'hyperarbres dont le maximum est un hyperarbre pointé en une arête, et par $\mathbf{Z}^{A}_{k,t}$ la série indicatrice de cycles associée.
- par $\mathcal{H}^{pA}_{k,t}$, l'espèce associée aux k-chaînes larges d'hyperarbres dont le maximum est un hyperarbre pointé en une arête et un sommet, et par $\mathbf{Z}^{pA}_{k,t}$ la série indicatrice de cycles associée.

Par définition, l'espèce $\mathcal{H}^{a}_{1,t}$ coïncide avec l'espèce $\mathcal{H}^{A}_{1,t}$ et l'espèce $\mathcal{H}^{pa}_{1,t}$ coïncide avec l'espèce $\mathcal{H}^{pA}_{1,t}$.

Les espèces précédentes sont liées aux autres espèces pointées et enracinées d'hyperarbres par le théorème suivant.

Proposition 2.5.3. *Les espèces $\mathcal{H}^{A}_{k,t}$ et $\mathcal{H}^{pA}_{k,t}$ vérifient :*

$$\mathcal{H}^{A}_{k,t} = \mathcal{H}^{A}_{k-1,t} \circ (t\mathcal{H}^{p}_{k,t}), \tag{2.42}$$

$$\mathcal{H}^{pA}_{k,t} = \mathcal{H}^{pA}_{k-1,t} \circ (t\mathcal{H}^{p}_{k,t}), \tag{2.43}$$

$$\mathcal{H}_{k,t} + \mathcal{H}^{pA}_{k,t} = \mathcal{H}^{p}_{k,t} + \mathcal{H}^{A}_{k,t}. \tag{2.44}$$

Démonstration. Pointer une arête dans le maximum revient à pointer une arête dans le minimum de la chaîne puis pointer une arête dans l'ensemble des arêtes distinguées ainsi obtenues dans le maximum de la chaîne. La première relation découle de ce fait et de la démonstration de la proposition 2.2.7.

Si nous enracinons la chaîne en un sommet, nous obtenons la seconde relation.

La troisième relation est obtenue par le même raisonnement que pour la proposition 2.2.1 qui établit le principe de dissymétrie pour les k-chaînes larges. □

Nous obtenons alors les relations suivantes.

Corollaire 2.5.4. *Les séries $\mathbf{Z}^{A}_{k,t}$ et $\mathbf{Z}^{pA}_{k,t}$ satisfont :*

$$\mathbf{Z}^{A}_{k,t} = \mathbf{Z}^{A}_{k-1,t} \circ (t\mathbf{Z}^{p}_{k,t}), \tag{2.45}$$

$$\mathbf{Z}^{pA}_{k,t} = \mathbf{Z}^{pA}_{k-1,t} \circ (t\mathbf{Z}^{p}_{k,t}). \tag{2.46}$$

2.5.4 Les séries HAL

Nous rappelons ici les définitions des séries HAL introduites par F. Chapoton dans son article [Cha07].

Définition 2.5.5. Les séries HAL, $\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}}$, $\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}$ et $\mathrm{HAL}^{\mathrm{A}}$ sont définies par les équations fonctionnelles suivantes :

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}} = p_1 \left(\frac{p_1}{1+tp_1} \circ \mathrm{Comm} \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}) \right), \tag{2.47}$$

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} = p_1(\Sigma_t\,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm} \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}})), \tag{2.48}$$

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{A}} = (\mathrm{Comm} - p_1) \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}), \tag{2.49}$$

$$\mathrm{HAL} = \mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} + \mathrm{HAL}^{\mathrm{A}} - \mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}\,. \tag{2.50}$$

Nous introduisons la série ΣW_t, définie par :

$$(t\,\mathrm{Perm} - tp_1 + p_1) \circ \Sigma W_t = \Sigma W_t \circ (t\,\mathrm{Perm} - tp_1 + p_1) = p_1.$$

Proposition 2.5.6. *La série ΣW_t vérifie :*

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma W_t = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t \Sigma W_t}. \tag{2.51}$$

Démonstration. Par définition, nous avons :

$$(\mathrm{Perm} - p_1) \circ \Sigma W_t = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}.$$

Cependant, Perm vérifie : $\mathrm{Perm} = p_1(1 + \mathrm{Comm})$, d'où le résultat. □

Le théorème suivant donne des expressions explicites pour les séries HAL en fonction de ΣW_t.

Théorème 2.5.7. *Les séries* HAL, $\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}}$, $\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}$ *et* $\mathrm{HAL}^{\mathrm{A}}$ *vérifient :*

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}} = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}, \tag{2.52}$$

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{A}} = (\mathrm{Comm} - p_1) \circ \Sigma W_t, \tag{2.53}$$

$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} = \frac{p_1}{t} \left(\Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \frac{p_1 - \Sigma W_t}{\Sigma W_t} \right). \tag{2.54}$$

où $\Sigma\,\mathrm{Lie}$ *est la série vérifiant* $\Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm} = \mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{Lie} = p_1$.

Démonstration. 1. Un calcul utilisant l'équation (2.51) donne :

$$p_1 \left(\frac{\mathrm{Comm} \circ \Sigma W_t}{1 + t\,\mathrm{Comm} \circ \Sigma W_t} \right) = p_1 \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t\Sigma W_t + tp_1 - t\Sigma W_t},$$

d'où la relation :

$$\frac{p_1 - \Sigma W_t}{t} = p_1 \left(\frac{p_1}{1+tp_1} \circ \mathrm{Comm} \circ \left(p_1 + (-t) \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t} \right) \right).$$

Les séries $\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}$ et $\frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}$ satisfont la même équation fonctionnelle. De plus, si nous connaissons les n premiers termes d'une solution de cette équation, celle-ci détermine de façon unique le $n+1$ème coefficient : cette équation admet donc une unique solution s'annulant en $x = 0$. Ainsi, les séries $\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}$ et $\frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}$ sont égales.

2. La seconde égalité découle de la première et de l'équation (2.49) parce que la série ΣW_t vérifie :
$$p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}} = \Sigma W_t.$$
3. D'après la première relation de la proposition, la série $\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}}$ vérifie :
$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} = p_1(\Sigma_t \,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm} \circ \Sigma W_t).$$
L'égalité $\Sigma_t \,\mathrm{Lie} = \frac{1}{t}\Sigma \,\mathrm{Lie} \circ (tp_1)$ implique la relation suivante.
$$\mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} = \frac{p_1}{t}(\Sigma \,\mathrm{Lie} \circ t\,\mathrm{Comm} \circ \Sigma W_t).$$
À l'aide de l'équation (2.51), nous obtenons finalement le résultat souhaité. □

2.5.5 Calcul des caractères

Calcul des séries pour $k = 0$

Les séries des k-chaînes d'hyperarbres évaluées en $k = 0$ sont données par les séries suivantes.

Proposition 2.5.8. *1. La série $\mathbf{Z}_{0,t}$ s'exprime :*
$$\mathbf{Z}_{0,t} = \mathrm{Comm} - p_1 + \frac{p_1}{t}. \tag{2.55}$$
2. La série $\mathbf{Z}^p_{0,t}$ s'exprime :
$$\mathbf{Z}^p_{0,t} = \mathrm{Perm} - p_1 + \frac{p_1}{t} = p_1\,\mathrm{Comm} + \frac{p_1}{t}. \tag{2.56}$$
La série $t\mathbf{Z}^p_{0,t}$ est alors l'inverse pour la substitution de la série ΣW_t.
3. La série $\mathbf{Z}^A_{0,t}$ s'exprime :
$$\mathbf{Z}^A_{0,t} = \mathrm{Comm} - p_1. \tag{2.57}$$
4. La série $\mathbf{Z}^{pA}_{0,t}$ s'exprime :
$$\mathbf{Z}^{pA}_{0,t} = \mathrm{Perm} - p_1 = p_1\,\mathrm{Comm}\,. \tag{2.58}$$

Démonstration. 1. La seule chaîne d'hyperarbres fixée par l'action d'un élément σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est la chaîne vide. Néanmoins, le poids de la chaîne vide est 1, sauf pour $n = 1$, où ce poids est $\frac{1}{t}$. C'est pourquoi la série $\mathbf{Z}_{0,t}$ ne diffère de Comm que pour $n = 1$, d'où le résultat.

2. Comme $p_1 \frac{\partial\,\mathrm{Comm}}{\partial p_1} = \mathrm{Perm}$, le résultat vient de la relation (2.41) avec $k = 0$.

3. Par définition, $\mathbf{Z}^A_{1,t} = \mathbf{Z}^a_{1,t}$ donc avec les relations (2.45) et (2.39), la série $\mathbf{Z}^A_{0,t}$ vérifie :
$$\mathbf{Z}^A_{0,t} = \mathbf{Z}_{0,t} - \frac{p_1}{t} = \mathrm{Comm} - p_1.$$

4. Par définition, $\mathbf{Z}^{pA}_{1,t} = \mathbf{Z}^{pa}_{1,t}$ donc avec les relations (2.46) et (2.40), la série $\mathbf{Z}^{pA}_{0,t}$ vérifie :
$$\mathbf{Z}^{pA}_{0,t} = \mathbf{Z}^p_{0,t} - \frac{p_1}{t} = \mathrm{Perm} - p_1 = p_1\,\mathrm{Comm}\,.$$ □

Calcul des séries pour $k = -1$

Le théorème suivant raffine le calcul du polynôme caractéristique de l'article [Cha07], prouve la conjecture de [Cha07, Conjecture 5.3] et relie l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres à des séries définies par équation fonctionnelle, qui s'avère correspondre à l'action du groupe symétrique sur un ensemble d'hyperarbres décorés par l'opérade Lie (cf. section 3.4).

Théorème 2.5.9 (D'après la conjecture 5.3 de [Cha07]). *1. La série $\mathbf{Z}^{pa}_{-1,t}$ vérifie :*

$$\mathbf{Z}^{pa}_{-1,t} = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t} = \mathrm{HAL}^{\mathrm{pA}}. \tag{2.59}$$

2. La série $\mathbf{Z}^{a}_{-1,t}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}^{a}_{-1,t} = (\mathrm{Comm} - p_1) \circ \Sigma W_t = \mathrm{HAL}^{\mathrm{A}}. \tag{2.60}$$

3. La série $\mathbf{Z}^{p}_{-1,t}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}^{p}_{-1,t} = \frac{p_1}{t}\left(1 + \Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \frac{p_1 - \Sigma W_t}{\Sigma W_t}\right) = \mathrm{HAL}^{\mathrm{p}} + \frac{p_1}{t}. \tag{2.61}$$

4. La série $\mathbf{Z}_{-1,t}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}_{-1,t} = \mathrm{HAL} + \frac{p_1}{t}. \tag{2.62}$$

Démonstration. Les parties droites des égalités sont données par le théorème 2.5.7.

1. La relation (2.46) avec $k = 0$ donne, associée aux équations (2.56) et (2.58) :

   $$\mathbf{Z}^{pa}_{-1,t} = (p_1\,\mathrm{Comm}) \circ \Sigma W_t.$$

   Nous pouvons alors conclure grâce à l'équation (2.51).
2. La relation (2.46) avec $k = 0$ donne, associée aux équations (2.56) et (2.57) :

   $$\mathbf{Z}^{a}_{-1,t} = (\mathrm{Comm} - p_1) \circ \Sigma W_t,$$

   d'où le résultat.
3. Comme ΣW_t est l'inverse de $t\mathbf{Z}^{p}_{0,t}$, la relation (2.38) avec $k = 0$ donne :

   $$p_1 = \Sigma W_t \left(1 + \mathrm{Comm} \circ \frac{t\mathbf{Z}^{p}_{-1,t} - p_1}{p_1}\right)$$

   comme $\Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm} = p_1$ d'après l'article [Cha07], nous obtenons :

   $$\Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \frac{p_1 - \Sigma W_t}{\Sigma W_t} = \frac{t\mathbf{Z}^{p}_{-1,t} - p_1}{p_1}.$$

   Ceci donne le résultat.
4. Cette relation vient des relations précédentes associées au principe de dissymétrie. □

2.6 Perspectives

2.6.1 Analogue en type B

Certains intervalles du poset des hyperarbres se décomposent en produit de posets des partitions. Dans leur article [BW83], A. Björner et M. Wachs ont introduit un analogue en type B du poset des partitions, c'est-à-dire un poset de partitions sur lequel le groupe hyperoctaédral des permutations signées agit par automorphisme de manière à ce que cette action soit compatible avec la différentielle du complexe de chaînes associé au poset. L'une des perspectives de cette thèse serait la construction d'un analogue en type B du poset des hyperarbres sur lequel le groupe hyperoctaédral agirait par automorphisme. Ce travail est en cours, en collaboration avec Ben Summers.

CHAPITRE 3

Hyperarbres décorés

Sommaire

3.1 Hyperarbres décorés 54
3.2 Compter les hyperarbres décorés grâce aux arbres en boîtes 60
3.3 Deux cas d'hyperarbres décorés 67
3.4 Généralisations : hyperarbres bidécorés 80
3.5 Perspectives 84

Nous considérons dans ce chapitre les hyperarbres munis d'une $\mathfrak{S}$-structure additionnelle sur leurs arêtes et/ou au voisinage des sommets. Un exemple typique est donné par les hyperarbres munis d'un ordre cyclique sur les éléments de chaque arête et avec un ordre total sur l'ensemble des arêtes entourant chaque sommet. Un hyperarbre muni d'une telle structure sur ses arêtes est appelé *hyperarbre décoré*. Quand la structure additionnelle est présente sur les arêtes et au voisinage des sommets, l'hyperarbre est dit *bidécoré*. Des hyperarbres décorés apparaissent dans l'article [JMM07] de C. Jensen, J. McCammond et J. Meier lors du calcul de la caractéristique d'Euler d'un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre. Dans son article [Cha07], F. Chapoton introduit une sorte d'hyperarbre bidécoré pour calculer le polynôme caractéristique du poset des hyperarbres. De plus, dans l'article [Oge13a], le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres est relié à un autre type d'hyperarbres bidécorés, lui aussi introduit par F. Chapoton dans [Cha07]. Ces exemples motivent l'étude d'hyperarbres décorés effectuée dans ce chapitre.

Pour l'étude générale des hyperarbres décorés, nous utilisons la notion d'espèce et des hyperarbres auxiliaires : les hyperarbres enracinés, pointés en une arête, pointés en une arête et un sommet et creux. Comme les hyperarbres décorés et leurs variations enracinées et pointées sont reliés par le principe de dissymétrie 3.1.6, nous étudions les versions enracinées et pointées des hyperarbres décorés pour obtenir des résultats sur les hyperarbres décorés. D'autres relations entres les différents types d'hyperarbres sont obtenues dans la proposition 3.1.13. Ces relations sont utilisées pour l'étude de l'action du groupe symétrique dans les cas particuliers de la section 3.3.

L'un des principaux résultats de ce chapitre est le théorème 3.2.8, qui décrit le nombre d'hyperarbres décorés et de leurs variations pointées et enracinées.

Théorème. *Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, le nombre d'hyperarbres décorés enracinés sur n som-*

mets et k arêtes est donné par :

$$E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^k.$$

Le nombre d'hyperarbres décorés creux sur n sommets et k arêtes est donné par :

$$E_{\mathcal{S}}(k, n)\, n^{k-1}.$$

Le nombre d'hyperarbres décorés sur n sommets et k arêtes est donné par :

$$E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k-1}.$$

où $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles sur n sommets, chacun muni d'une $\mathcal{S}'$-structure et $\mathcal{S}'$ est la différentielle de l'espèce $\mathcal{S}$.

Pour montrer ce théorème, nous introduisons la notion d'*arbre en boîtes*. Un arbre en boîtes est une paire formée d'un ensemble d'étiquettes, regroupées en sommets, et d'un ensemble d'arêtes orientées d'une étiquette vers un sommet. De plus, le graphe obtenu en réunissant toutes les étiquettes d'un sommet en un unique élément doit être un arbre enraciné orienté.

Nous relions ensuite à des objets connus des hyperarbres décorés et bidécorés par certaines espèces spécifiques. Deux cas particuliers d'hyperarbres décorés sont étudiés à la section 3.3. Le premier cas a été introduit dans [JMM07], et correspond aux hyperarbres dont les arêtes sont décorées par l'espèce linéaire $\widehat{\mathrm{PreLie}}$. Les versions enracinées de ces hyperarbres sont alors les hyperarbres dont chaque arête e contient un sommet isolé, nommé pétiole de l'arête e, et un arbre enraciné dont les sommets sont les autres sommets de e. Ces hyperarbres sont en bijection avec les arbres enracinés 2-colorés, qui sont des arbres enracinés dont les arêtes sont bleues ou rouges. Cette bijection permet de déterminer le caractère de l'action du groupe symétrique sur la version creuse de ces hyperarbres décorés. Les relations entre espèces déterminées dans la première section permettent alors de déduire le caractère pour les autres hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$. La section 3.3 porte aussi sur un autre type d'hyperarbres décorés : les hyperarbres dont les arêtes sont décorées par l'espèce linéaire $\widehat{\mathrm{Lie}}$. Nous les relions à l'opérade Λ introduite dans l'article de F. Chapoton [Cha02].

Nous introduisons à la section 3.4 les hyperarbres bidécorés et relions deux types d'hyperarbres bidécorés au poset des hyperarbres. Le premier cas est une décoration des arêtes de l'hyperarbre par l'espèce des ensembles non vides Comm et du voisinage de ses sommets par l'espèce des cycles. Ces hyperarbres sont appelés hyperarbres cycliques et reliés aux hyperarbres de l'article [Cha07]. Le second cas d'hyperarbres bidécorés est un hyperarbre dont les arêtes sont décorées par l'espèce des ensembles Comm et les voisinages des sommets sont décorés par l'espèce $\Sigma\,\mathrm{Lie}$. Nous montrons que le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres est identique au caractère de l'action du groupe symétrique sur ces hyperarbres.

3.1 Hyperarbres décorés

3.1.1 Définitions des hyperarbres décorés

Nous définissons à partir des notions d'hyperarbre, hyperarbre enraciné, hyperarbre pointé et hyperarbre creux, rappelées au paragraphe 1.3.2 ce qui sera appelé par la suite un *hyperarbre décoré*. Cette définition fait intervenir la notion d'espèce rappelée au paragraphe 1.1.

Définition 3.1.1. Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, un *hyperarbre décoré (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux)* est obtenu à partir d'un hyperarbre H (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

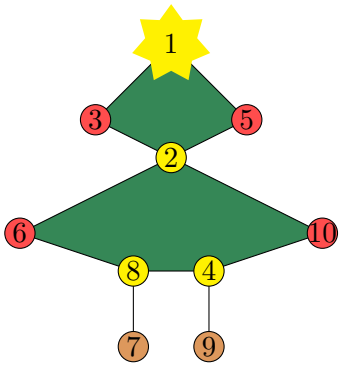


FIGURE 3.1 – Exemple d'hyperarbre décoré enraciné décorés par l'espèce $\mathcal{S}'$ qui associe à un ensemble I l'ensemble des applications de $\{1,2,3\}$ dans I.

Nous définissons le poids suivant sur l'ensemble des hyperarbres de tout type (pointé ou non, enraciné ou non, creux ou non) :

Définition 3.1.2. Le poids d'un hyperarbre H qui a pour ensemble d'arêtes E est donné par :

$$W_t(H) = t^{|E|-1}.$$

Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, l'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des hyperarbres (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) décorés sur I, munis de leur poids, est une espèce, appelée l'espèce des hyperarbres (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) $\mathcal{S}$-décorés et notée $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathcal{H}^{p}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}}$). Quand il n'y a aucune ambiguïté sur l'espèce utilisée, nous ne la mentionnerons pas.

Exemple 3.1.3. Nous considérons deux décorations différentes du même hyperarbre H.

Un hyperarbre décoré obtenu à partir de H en décorant ses arêtes par l'espèce des cycles Cycle est dessiné sur la partie gauche de la figure 3.2. Le poids de cet hyperarbre est t^7.

Un hyperarbre décoré obtenu à partir de H en décorant ses arêtes par l'espèce des ensembles pointés Perm est dessiné sur la partie droite de la figure 3.2. Le sommet près duquel se trouve une étoile dans chaque arête est le sommet pointé de l'arête : par exemple, le sommet pointé de l'arête $\{9,11\}$ est 9, celui de $\{9,10\}$ est 10, celui de $\{8,9\}$ est 9 et celui de $\{12,13,1,8\}$ est 12.

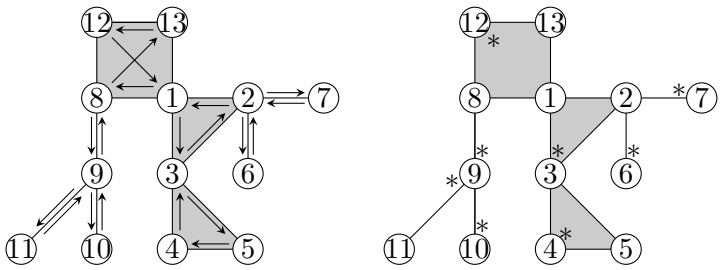


FIGURE 3.2 – Hyperarbres décorés.

Sur la figure 3.3, nous décorons l'hyperarbre pointé en une arête de l'exemple 1.16 avec l'espèce des arbres, qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des arbres ayant pour ensemble de sommets l'ensemble I. Les arêtes sont représentées par des rectangles sur le dessin, et l'arête pointée est représentée par un double rectangle.

Les hyperarbres enracinés et creux possèdent un sommet naturellement distingué dans chaque arête non creuse : le sommet le plus proche de la racine ou de l'arête creuse, que nous nommerons

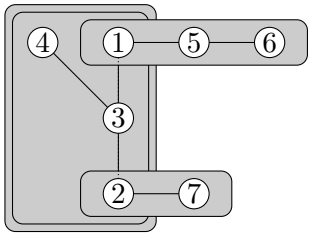


Figure 3.3 – Hyperarbre décoré pointé en une arête.

pétiole de l'arête. Nous pouvons alors donner des définitions équivalentes reposant sur la notion de dérivée d'une espèce.

Définition-Proposition 3.1.4. Considérons un hyperarbre H enraciné (resp. pointé en une arête et un sommet, resp. creux). Alors, un *hyperarbre enraciné (resp. pointé en une arête et un sommet, resp. creux) décoré* est obtenu à partir de H en choisissant pour chaque arête e de H un élément dans l'ensemble $\mathcal{S}'\left(V_e^l\right)$, où l'ensemble V_e^l est l'ensemble des sommets de e différent du pétiole, s'il existe.

Cette définition est équivalente à la définition 3.1.1.

Exemple 3.1.5. Nous donnons un exemple d'hyperarbre enraciné décoré. La partie gauche de la figure 3.4 est obtenue en décorant les arêtes d'un hyperarbre enraciné par l'espèce des cycles. La partie droite de la figure 3.4 est le même hyperarbre enraciné dans lequel l'ensemble des éléments de chaque arête différents du pétiole a été décoré par la dérivée de l'espèce des cycles : l'espèce des listes. Les deux images représentent le même hyperarbre.

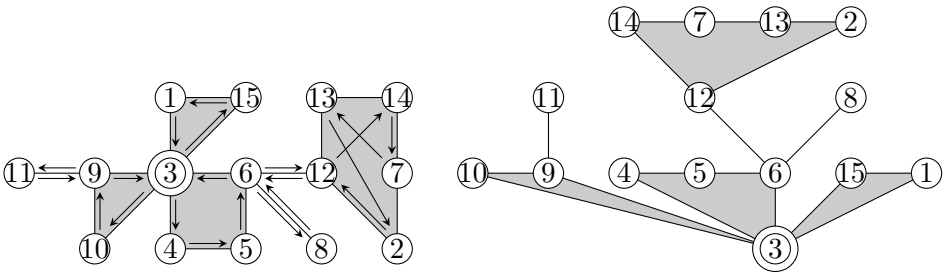


Figure 3.4 – Hyperarbre enraciné décoré par l'espèce des cycles.

Nous décorons maintenant les arêtes d'un hyperarbre pointé en une arête et un sommet par l'espèce des listes, sur le côté gauche de la figure 3.5. Les petits nombres à l'intérieur de chaque arêtes, à côté de chaque sommet donnent l'ordre des sommets dans la liste associée à l'arête. La dérivée de l'espèce des listes est l'espèce des unions de deux listes. Ainsi, l'hyperarbre décoré du côté gauche de la figure est équivalent à l'hyperarbre du côté droit de la figure, où, pour chaque arête, l'ensemble des sommets différents du pétiole est séparé en deux listes. La ligne en pointillée marque la séparation de l'arête entre ces deux listes. La seconde liste de l'arête $\{2, 7\}$ est vide.

Sur la figure 3.6, nous donnons un exemple d'hyperarbre creux décoré par l'espèce des ensembles pointés non vides Perm. Comme précédemment, la partie gauche de l'exemple est obtenue avec la première définition d'hyperarbre creux décoré. Le sommet pointé de la décoration de chaque arête est représentée avec une étoile $*$ à côté. La partie droite est obtenue par la seconde définition, avec $\mathcal{S}^{'} = 1 + \mathrm{Comm} + \mathrm{Perm}$. Ces deux dessins représentant le même hyperarbre.

Le principe de dissymétrie 3.1.6 préserve le poids sur les hyperarbres. Enraciner un hyperarbre en un sommet ou pointer une de ses arêtes puis décorer ses arêtes revient à d'abord décorer

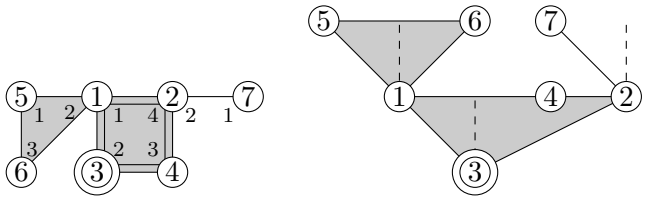


FIGURE 3.5 – Hyperarbre pointé en un sommet et une arête décoré par l'espèce des listes.

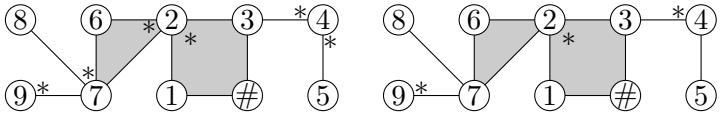


FIGURE 3.6 – Hyperarbre creux décoré par l'espèce des ensembles pointés.

ses arêtes puis enraciner l'hyperarbre en un sommet ou pointer une de ses arêtes. C'est pourquoi la décoration des arêtes est compatible avec le principe de dissymétrie 1.3.10 précédente et nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 3.1.6 (Principe de dissymétrie pour les hyperarbres décorés)**.** *Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, la relation suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} + \mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}^{p}_{\mathcal{S}} + \mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}}. \tag{3.1}$$

Nous généralisons ces définitions aux espèces linéaires.

3.1.2 Généralisation aux espèces linéaires et premières relations avec d'autres structures arborescentes

La définition-proposition 3.1.4 motive l'introduction d'hyperarbres enracinés ou creux aux arêtes décorées par des espèces qui ne soient pas des dérivées d'espèces mais d'une des généralisations : les espèces linéaires, définies en 1.1.23 et dont nous rappelons ici la définition.

Définition 3.1.7. Une *espèce linéaire* F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans la catégorie des espaces vectoriels. À un ensemble fini I, l'espèce F associe un espace vectoriel $\mathrm{F}(I)$ indépendant de la nature de I.

La notion de dérivée d'une espèce linéaire peut être définie comme suit.

Définition 3.1.8. Soit F une espèce linéaire. La dérivée de F est l'espèce définie par :

$$F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\}).$$

Les opérations sur les espèces peuvent être adaptées aux espèces linéaires.

Nous pouvons maintenant généraliser la décoration des arêtes des hyperarbres.

Définition 3.1.9. Étant donnée une espèce linéaire $\mathcal{S}$, un *hyperarbre décoré* (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) est obtenu à partir d'un hyperarbre (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) H en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e. L'espèce qui a un ensemble I associe l'ensemble des hyperarbres (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) décorés sur I est alors une espèce linéaire. Les hyperarbres décorés par une espèce linéaire vérifie alors la relation suivante (multi-linéarité). Si une arête a dans un hyperarbre H est décoré par une somme d'espèce linéaire $\sum_{i=1} n\mathcal{E}_i(a)$, l'hyperarbre sera alors équivalent à la somme des hyperarbres obtenus en décorant, dans le i-ème terme, l'arête a de H par $\mathcal{E}_i(a)$.

Une espèce ensembliste peut alors être vue comme une espèce linéaire en considérant l'espace vectoriel engendré par l'ensemble image. Nous noterons l'espèce ensembliste et l'espèce linéaire associée de la même façon.

Nous définissons de même les hyperarbres décorés creux, enracinés et pointés en une arête et un sommet.

Considérons une espèce $\mathcal{S}$. Quand il existe une espèce ou une espèce linéaire $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}' = \mathcal{S}$, nous la notons $\widehat{\mathcal{S}}$. Notons qu'une telle espèce n'est pas unique. Pour toute opérade cyclique ou anti-cyclique $\mathcal{C}$, il existe toujours une espèce linéaire $\widehat{\mathcal{C}}$. Ceci prouve l'existence des espèces linéaires $\widehat{\mathrm{PreLie}}$, $\widehat{\mathrm{Lie}}$, $\widehat{\mathrm{Perm}}$ et $\widehat{\mathrm{Assoc}}$. La cyclicité ou l'anti-cyclicité de ces opérades a été examinée dans l'article de F. Chapoton [Cha05] et dans l'article de E. Getzler et M. Kapranov [GK95]. Par abus de langage, nous dirons maintenant indifféremment *espèce* pour une espèce ou une espèce linéaire.

La notion d'hyperarbre décoré creux peut être reliée à différents objets, suivant sa décoration. Par exemple, considérant l'espèce linéaire $\widehat{\mathrm{Perm}}$ dont la dérivée est l'espèce Perm, les hyperarbres décorés creux associés peuvent être reliés à la notion d'arbre gras.

Sur la figure 3.7, nous donnons un exemple d'hyperarbre creux, décoré par $\widehat{\mathrm{Perm}}$, où Perm est l'espèce des ensembles pointés non vides. Le sommet pointé de chaque arête est marqué par une étoile $*$. Le pétiole de l'arête $\{2, 6, 7\}$ est 2. Nous pouvons remarquer que les sommets 8, 9, 4 et 5 sont nécessairement pointés puisqu'ils sont seuls avec le pétiole dans leur arête.

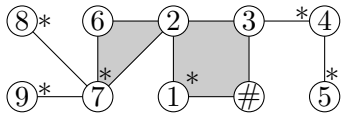


Figure 3.7 – Hyperarbre creux décoré par $\widehat{\mathrm{Perm}}$.

Définition 3.1.10 ([Zas02])**.** Un *arbre gras sur un ensemble* V est une partition de V, dont les parts sont appelées *sommets*, munie d'arêtes reliant les éléments des différents sommets, telle que :

- un *chemin* sur l'arbre gras est une suite alternée $(a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots, c_n)$, où pour tout i, a_i et c_i sont des éléments de sommets différents et b_i est une arête entre a_i et c_i, et pour tout i entre 1 et $n-1$, c_i et a_{i+1} sont des éléments du même sommet ;
- pour toute paire d'éléments de sommets différents (a, c), il existe un et un seul chemin à arêtes disjointes de a à c.

Un *arbre gras enraciné* est un arbre gras muni d'un sommet distingué appelé la *racine*.

Sur la figure 3.8, un exemple d'arbre gras enraciné est représenté. La racine est entourée.

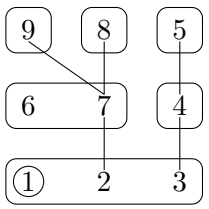


Figure 3.8 – Arbre gras enraciné sur l'ensemble $\{1, \ldots, 9\}$.

Proposition 3.1.11. *L'espèce des hyperarbres creux décorés par* $\widehat{\mathrm{Perm}}$ *est isomorphe à l'espèce des arbres gras enracinés.*

Démonstration. Remarquons d'abord que les hyperarbres creux décorés par $\widehat{\text{Perm}}$ sont des hyperarbres creux où dans chaque arête, l'ensemble des sommets différents du pétiole est un ensemble pointé.

Considérons un arbre gras enraciné FT sur un ensemble fini V. Le *pétiole* d'une arête e est le sommet de l'arête e le plus proche de la racine et l'*extrémité* est l'autre sommet. Considérons un sommet v de l'arbre gras enraciné. Nous formons une arête de l'hypergraphe en considérant l'ensemble formé des éléments de V dans le sommet v et du pétiole de l'arête reliant ce sommet à la racine, si la racine n'est pas dans v. Notons E l'ensemble des arêtes ainsi formées. L'hypergraphe $H = (E, V)$ obtenu est un hyperarbre car tout chemin dans H était dans FT.

Ajoutant un creux dans l'arête de E contenant la racine de FT, nous obtenons un hyperarbre creux. De plus, l'extrémité de chaque arête dans FT donne un élément pointé différent du pétiole dans chaque arête de H. Cette structure est identique à celle obtenue en décorant les arêtes de l'hyperarbre par $\widehat{\text{Perm}}$.

Réciproquement, considérons un hyperarbre creux H décoré par $\widehat{\text{Perm}}$. Il est possible de construire la structure dont les sommets sont les arêtes de H privées de leur pétiole et sans creux, et dont les arêtes sont entre l'élément pointé de chaque arête de H et son pétiole : c'est un arbre gras FT. En distinguant le sommet de FT obtenu à partir de l'arête creuse de H, nous obtenons un arbre gras enraciné. □

Exemple 3.1.12. Les deux figures précédentes 3.7 et 3.8 sont reliées par la bijection de la démonstration.

3.1.3 Relations entre espèces

Pour établir des relations entre espèces, nous avons besoin des opérations sur les espèces rappelées à la section 1.1. Les espèces précédentes sont alors reliées par la proposition suivante.

Proposition 3.1.13. *Étant donnée une espèce ou une espèce linéaire $\mathcal{S}$ telle que $|S(\emptyset)| = 0$ et $|S(\{1\})| = 0$, les espèces $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^a_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}}$ vérifient :*

$$\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}} = X \cdot \mathcal{H}'_{\mathcal{S}}, \tag{3.2}$$

$$t\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}} = X + X \cdot (\text{Comm} \circ (t\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}})), \tag{3.3}$$

$$\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}} = S' \circ t\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}}, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{H}^a_{\mathcal{S}} = S \circ t\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}^c_{\mathcal{S}} \cdot t\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}} = X \cdot \left[(X \cdot (1 + \text{Comm})) \circ \mathcal{H}^c_{\mathcal{S}}\right]. \tag{3.6}$$

Démonstration. Cette preuve repose sur le même principe de décomposition utilisée dans la preuve de la proposition 2.2.3. La différence vient du fait que les arêtes sont ici décorées par S et non plus seulement des ensembles : casser une arête revient à obtenir un S-ensemble d'éléments (S) et non plus seulement un ensemble (Comm). En multipliant les séries par t, la puissance de t correspond au nombre d'arêtes dans les hyperarbres associés.

- La première relation vient du lien entre une espèce et ses variations pointées.
- La seconde relation est obtenue en décomposant un hyperarbre enraciné. S'il n'y a qu'un sommet, l'étiquetage de ce sommet de l'hyperarbre correspond à l'espèce singleton X. Comme il n'y a aucune arête, la puissance de t associée est 0. Autrement, nous séparons l'étiquette de la racine du reste de l'hyperarbre, ce qui correspond à une multiplication

par X. Il reste un hyperarbre avec un creux contenu dans différentes arêtes. En séparant ces arêtes, nous obtenons un ensemble non vide d'hyperarbres creux dont les arêtes sont décorées par $\mathcal{S}$. Il y a le même nombre d'arêtes dans l'ensemble des hyperarbres creux et dans l'hyperarbre enraciné. Cette opération est donc un isomorphisme d'espèces parce qu'un sommet seul est un hyperarbre et nous obtenons un hyperarbre enraciné décoré en identifiant ensemble tous les creux d'une forêt non vide d'hyperarbres creux décorés puis en étiquetant le creux obtenu.

– La troisième relation est obtenue en pointant les sommets dans l'arête creuse puis en la cassant : nous obtenons une forêt non vide d'hyperarbres enracinés décorés. Comme nous cassons une arête, la forêt d'hyperarbres enracinés obtenue a une arête de moins que l'hyperarbre creux initial : nous pouvons donc simplifier le t devant la série $\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}}$. L'ensemble des racines est une $\mathcal{S}'$-structure et induit cette structure sur l'ensemble des hyperarbres de la forêt ; nos obtenons une $\mathcal{S}'$-structure dans laquelle tous les éléments sont des hyperarbres enracinés décorés. Comme cette opération est réversible et ne dépend pas de l'étiquetage des sommets de l'hyperarbre creux, c'est un isomorphisme d'espèces.
– La quatrième relation est obtenue en pointant les sommets de l'arête pointée et en la cassant : nous obtenons une forêt d'au moins deux hyperarbres enracinés décorés. Comme nous cassons une arête, la forêt d'hyperarbres enracinés obtenue a une arête de moins que l'hyperarbre pointé en une arête initial : nous pouvons donc simplifier le t devant la série $\mathcal{H}^a_{\mathcal{S}}$. L'ensemble des racines est une $\mathcal{S}$-structure et induit cette structure sur l'ensemble des hyperarbres de la forêt ; nos obtenons une $\mathcal{S}$-structure dans laquelle tous les éléments sont des hyperarbres enracinés décorés. Comme cette opération est réversible et ne dépend pas de l'étiquetage des sommets de l'hyperarbre pointé en une arête, c'est un isomorphisme d'espèces.
– La dernière relation est obtenue en séparant l'arête pointée des autres arêtes contenant la racine et en remplaçant la racine de l'arête pointée par un creux : la composante connexe de l'arête pointée donne un hyperarbre creux décoré et la composante connexe contenant la racine donne un hyperarbre enraciné décoré. Il y a le même nombre d'arêtes dans l'hyperarbre pointé en un sommet et une arête et dans l'union formée de l'hyperarbre creux et de l'hyperarbre enraciné. □

Corollaire 3.1.14. *En utilisant les équations* (3.3) *et* (3.4) *de la proposition précédente, nous obtenons :*

$$t\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}} = X + X \cdot [\mathrm{Comm} \circ (tS' \circ t\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}})] \tag{3.7}$$

et

$$\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}} = S' \circ (X + X \cdot \mathrm{Comm} \circ (t\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}}))\,. \tag{3.8}$$

3.2 Compter les hyperarbres décorés grâce aux arbres en boîtes

Dans cette section, nous comptons les hyperarbres décorés et leurs variations enracinées et pointées en utilisant un nouveau type de structures arborescentes : les *arbres en boîtes*.

3.2.1 Arbres en boîtes

Considérons un quadruplet (L, V, R, E), où
– L est un ensemble fini appelé l'ensemble des *étiquettes*,
– V est une partition de L appelée l'ensemble des *sommets*,
– R est un élément de V appelé la *racine*,
– E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelée l'ensemble des *arêtes*.

Nous noterons $\tilde{E}$, l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. La paire $\left(V, \tilde{E}\right)$ est alors un graphe orienté, dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L.

Définition 3.2.1. Un quadruplet (L, V, R, E) est un *arbre en boîte* si et seulement si le graphe $\left(V, \tilde{E}\right)$ est un arbre, enraciné en R, dont les arêtes sont orientées vers la racine.

L'étiquette l est appelée *parent* du sommet v si $E(v) = l$.

Un exemple d'arbre en boîtes est présenté sur la figure 3.9. La racine est le rectangle double.

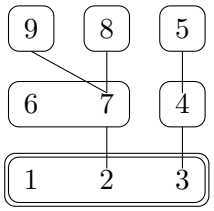


FIGURE 3.9 – Arbre en boîtes.

La différence entre arbres en boîtes et arbres gras repose principalement dans les arêtes : elles sont entre étiquettes dans les arbres gras et et entre une étiquette et un sommet dans un arbre en boîtes.

Proposition 3.2.2. *Considérons L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parts $p_0, p_1, \ldots, p_k$, où le cardinal de p_i est n_i et où $k \geq 0$. Le nombre d'arbres en boîtes $N_{p_0;p_1,\ldots,p_k}$ sur $k+1$ sommets dont la racine est étiquetée par p_0 et les k autres sommets (s'il y en a) sont étiquetés par l'un des k autres p_i est donné par :*

$$N_{p_0;p_1,\ldots,p_k} = n_0 \times n^{k-1}.$$

Première démonstration. Nous prouvons la proposition par récurrence forte sur k.

Pour $k = 0$, nous avons $V = L = p_0$ et $n_0 = n$: il n'y a alors qu'un arbre en boîte possible, celui a un seul sommet contenant toutes les étiquettes. Pour $k = 1$, il n'y a qu'un sommet attaché à une étiquette de la racine. Comme il y a n_0 étiquettes dans la racine, il y a n_0 arbres en boîtes sur deux sommets.

Supposons la proposition vraie pour tout $q < k$, nous calculons le nombre $N_{p_0;p_1,\ldots,p_k}$ d'arbres en boîtes sur $k+1$ sommets satisfaisant les hypothèses. Il peut être obtenu comme une somme sur le nombre de sommets attachés à la racine, appelés ses *enfants*. Si la racine a j enfants, avec respectivement $n_{i_1}, \ldots, n_{i_j}$ étiquettes, il y a n_0^j façons de les relier à la racine. De plus, couper la racine puis fusionner ses enfants en une nouvelle racine donne un arbre en boîtes sur $k+1-j$ sommets et $n - n_0$ étiquettes, dont la racine a $n_{i_1} + \cdots + n_{i_j}$ étiquettes. En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$N_{p_0;p_1,\ldots,p_k} = \sum_{j=1}^{k} n_0^j \sum_{0<i_1<\cdots<i_j} \left(n_{i_1} + \cdots + n_{i_j}\right) (n - n_0)^{k-j-1}.$$

Dans la deuxième somme $\sum_{0<i_1<\cdots<i_j} \left(n_{i_1} + \cdots + n_{i_j}\right)$, tout n_i apparaît $\binom{k-1}{j-1}$ fois, pour $i \geq 1$. En effet, dans ce cas le sommet étiqueté par p_i est un enfant de la racine donc nous choisissons les $j-1$ autres fils parmi les $k-1$ autres sommets. C'est pourquoi nous avons :

$$N_{p_0;p_1,\ldots,p_k} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} n_0^j (n - n_0)^{k-j} = n_0 \times n^{k-1}.$$

Ceci donne le résultat voulu. □

Après publication de l'article [Oge13b], nous avons trouvé lors d'un séjour au laboratoire Gaspard Monge de Marne-la-vallée, d'après les suggestions de J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon, la démonstration suivante, reposant sur le principe de codage de Prüfer pour les hyperarbres, introduit par B. Selivanov dans l'article [Sel72] (cf. [Bac11] pour une retranscription en anglais d'une partie de cet article) et Roland Bacher dans l'article [Bac11].

Deuxième démonstration. Étant donnés $p_0, p_1, \dots, p_k$ et un arbre en boîtes A, on définit récursivement un mot de $L^{k-1} \times p_0$ associé à l'arbre A. Si l'arbre a deux sommets, le mot associé est le sommet de la racine étiquetée par p_0 auquel est attaché le sommet étiqueté par p_1. L'ensemble des mots possibles est donc l'ensemble p_0. Si $k \geq 2$, l'arbre en boîtes A a au moins une feuille différente de la racine. On considère p_{i_1} la feuille ayant la plus petite étiquette. Notant w le mot de $L^{k-2} \times p_0$ associé à l'arbre en boîtes obtenu en coupant p_{i_1} dans A, le mot associé à A sera le mot $E(p_{i_1})w$ de $L^{k-1} \times p_0$.

Étant donnés $p_0, p_1, \dots, p_k$ et un mot $w_1 w_2 \dots w_k$ de $L^{k-1} \times p_0$, on reconstruit un arbre en boîtes et on montre que cette construction est la réciproque de la précédente par récurrence. Si $k = 1$, il n'y a qu'un sommet à relier à la racine et le mot est une étiquette de la racine : on relie le sommet à cette étiquette w_1. On obtient alors un graphe enraciné sur deux sommets à une arête : c'est donc bien un arbre en boîtes. De plus, cette construction est l'inverse de la construction précédente. Soit $k \geq 2$, tel que la proposition soit vraie pour $k-1$. Considérons l'ensemble p_{e_j} des p_i dont aucune des étiquettes n'apparaît dans le mot. Ces p_{e_j} formeront les feuilles de l'arbre. Supposons que p_{e_1} possède la plus petite étiquette parmi les p_{e_j}. Alors, la donnée de $\{p_i\}_{i=0}^{k} - p_{e_1}$ et de $w_2 \dots w_k$ donne un arbre en boîtes de racine p_0. Reliant p_{e_1} à w_1 dans cet arbre, nous obtenons toujours un arbre en boîtes puisque l'arbre reste connexe et qu'aucun cycle n'est créé. De plus, p_{e_1} est la feuille avec la plus petite étiquette.

La construction est donc une bijection entre l'ensemble des arbres en boîtes sur $k+1$ sommets et l'ensemble des mots sur $L^{k-1} \times p_0$. □

Exemple 3.2.3. Le mot ainsi associé à l'arbre en boîtes de la figure 3.9 est : $4377-2$, ce dernier chiffre appartenant forcément à la racine de l'arbre en boîtes.

3.2.2 Dénombrement des hyperarbres décorés

Proposition 3.2.4. *Soit $\mathcal{S}$ une espèce. Tout hyperarbre enraciné à k arêtes et n sommets, décorés par $\mathcal{S}$, peut se décomposer en un triplet $(r, \mathbf{S}, BT)$ où :*

- *r est la racine de l'hyperarbre,*
- *$\mathbf{S}$ est une partition en k parts d'un ensemble de cardinal $n-1$ avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts,*
- *et BT est un arbre en boîtes sur $k+1$ sommets dont la racine est étiquetée par r et tous les autres sommets sont étiquetés par l'une des k parts décrites au point précédent.*

Démonstration. Étant donné un hyperarbre enraciné décoré H à k arêtes et n sommets et avec une racine étiquetée par r, l'ensemble des arêtes induit une partition en k parts d'un ensemble de cardinal $n-1$ avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts. En effet, soit e, une arête, l'ensemble des sommets de e différent du pétiole est muni d'une $\mathcal{S}'$-structure, parce que l'hyperarbre enraciné est décoré. De plus, tout sommet différent de la racine est le pétiole de l'ensemble des arêtes le contenant, sauf de l'arête le contenant la plus proche de la racine, qui existe toujours et est unique par connexité et acyclicité.

Ainsi, tout sommet différent de la racine est compté une fois dans l'ensemble $\mathbf{S}$. Nous notons ensuite V, l'*ensemble des sommets* du futur arbre, défini comme la partition en k parts précédente. Pour toute arête e de H, nous associons le sommet correspondant de V au pétiole de e qui appartient à un autre sommet de V : appelons BT le résultat obtenu. Comme H est un hyperarbre, pour tout sommet v il existe un et un seul chemin entre la racine et v, donc il

n'y a aussi qu'un et un seul chemin de la racine au sommet contenant v dans BT : BT est donc un arbre en boîtes avec une racine étiquetée par r.

Réciproquement, étant donné un arbre en boîtes BT avec une racine étiquetée par r et les autres sommets étiquetés par un des k ensembles sur $n-1$ sommets, chacun muni d'une $\mathcal{S}'$-structure, nous appelons *parent* d'un sommet l'étiquette qui lui est attachée par une arête. Notant l'ensemble des étiquettes V, nous définissons E somme la partition de V obtenue en prenant, pour tout sommet de BT, l'union de l'ensemble de ses étiquettes avec leur parent. Nous obtenons alors un hyperarbre enraciné en r. De plus, la $\mathcal{S}$-structure sur tout sommet de BT induit une décoration $\mathcal{S}$ des arêtes de l'hyperarbre enraciné. □

Exemple 3.2.5. La bijection précédente associe à l'hyperarbre enraciné décoré de la figure 3.4 la racine 3, l'ensemble des listes $\{(15,1), (14,7,13,2), (4,5,6), (8), (10,9), (11), (12)\}$ et l'arbre en boîtes de la figure 3.10. L'ordre des éléments dans chaque boîte n'interfère pas.

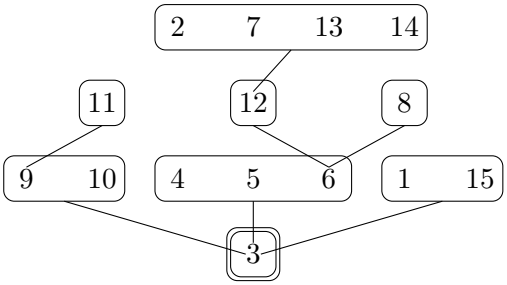


FIGURE 3.10 – Arbre en boîtes associé, avec la racine 3 et l'ensemble de listes $\{(15,1), (14,7,13,2), (4,5,6), (8), (10,9), (11), (12)\}$, à l'hyperarbre de la figure 3.4.

Proposition 3.2.6. *Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, tout hyperarbre creux sur k arêtes et n sommets, dont les arêtes sont décorées par $\mathcal{S}$, peut se décomposer en un couple $(\mathbf{S}, BT)$ où :*

- *$\mathbf{S}$ est une partition en k parts d'un ensemble de cardinal n avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts,*
- *et BT est un arbre en boîtes sur k sommets dont chacun des sommets est étiqueté par un des k ensembles du point précédent.*

Démonstration. Nous adaptons ici la démonstration de la proposition 3.2.4 des hyperarbres enracinés aux hyperarbres creux.

Étant donné un hyperarbre creux décoré H à k arêtes et n sommets et avec une racine étiquetée par r, l'ensemble des arêtes induit une partition $\mathbf{S}$ en k parts des n sommets, chacune des parts étant munie d'une $\mathcal{S}'$-structure. En effet, soit e, une arête, l'ensemble des sommets de e différent du pétiole est muni d'une $\mathcal{S}'$-structure, parce que l'hyperarbre creux est décoré. De plus, tout sommet est le pétiole de l'ensemble des arêtes le contenant, sauf de l'arête la plus proche de l'arête creuse, qui existe toujours et est unique par connexité et acyclicité.

Ainsi, tout sommet différent de la racine est compté une fois dans l'ensemble $\mathbf{S}$. Nous notons ensuite V, l'*ensemble des sommets* du futur arbre, défini comme l'ensemble des k ensembles précédents. Pour toute arête non creuse e de H, nous associons le sommet correspondant de V au pétiole de e qui appartient à un autre sommet de V : appelons BT le résultat obtenu. Les sommets qui étaient dans l'arête creuse forment la racine de BT. Comme H est un hyperarbre, pour tout sommet v il existe un et un seul chemin entre l'arête creuse et v, donc il n'y a aussi qu'un et un seul chemin de la racine au sommet contenant v dans BT : BT est donc un arbre en boîtes avec une racine étiquetée par les sommets de l'arête creuse.

Réciproquement, étant donné un arbre en boîtes BT avec ses sommets étiquetés par un des k ensembles sur n sommets, chacun muni d'une $\mathcal{S}'$-structure, nous appelons *parent* d'un sommet

l'étiquette qui lui est attachée par une arête. Les arêtes de l'hyperarbre creux seront obtenue en considérant pour chaque sommet non racine de l'hyperarbre, l'ensemble des étiquettes de ce sommet et son parent et en considérant les étiquettes du sommet racine comme une arête dans laquelle on ajoute un creux. Nous obtenons alors un hyperarbre creux, la structure d'hyperarbre étant issue de la structure arborescente de l'arbre en boîtes. De plus, la $\mathcal{S}'$-structure sur tout sommet de BT induit une décoration par $\mathcal{S}$ des arêtes de l'hyperarbre creux. □

Exemple 3.2.7. L'arbre en boîtes associé à l'hyperarbre de la figure 3.7 est présenté sur la figure 3.9, avec l'ensemble des ensembles pointés associés $\{\{\mathbf{1}, 2, 3\}, \{\mathbf{4}\}, \{\mathbf{5}\}, \{6, \mathbf{7}\}, \{\mathbf{8}\}, \{\mathbf{9}\}\}$.

Soient $\mathbf{C}_{\mathcal{S}}$, $\mathbf{C}^{p}_{\mathcal{S}}$, $\mathbf{C}^{c}_{\mathcal{S}}$, $\mathbf{C}^{a}_{\mathcal{S}}$ et $\mathbf{C}^{pa}_{\mathcal{S}}$ les séries génératrices pondérées des espèces $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{p}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}}$. Notons $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ le nombre d'ensembles de k ensembles munis d'une $\mathcal{S}'$-structure sur n sommets. Par convention, nous posons $E_{\mathcal{S}}(1, 1) = 1$.

Utilisant l'énumération des arbres en boîtes de la proposition 3.2.2, les bijections entre hyperarbres et arbres en boîtes des propositions 3.2.4 et 3.2.6 impliquent le théorème suivant. Remarquons notamment que la formule donnant le nombre d'hyperarbres décorés ne dépend que du nombre de parts dans la partition, et du nombres de sommets et d'arêtes de l'hyperarbre : le nombre d'arbres en boîte d'une forme donnée ne dépend pas de la taille des parts en question.

Théorème 3.2.8. *Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, le nombre d'hyperarbres décorés enracinés sur n sommets et k arêtes est donné par :*

$$E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k}. \tag{3.9}$$

Le nombre d'hyperarbres décorés creux sur n sommets et k arêtes est donné par :

$$E_{\mathcal{S}}(k, n)\, n^{k-1}. \tag{3.10}$$

Le nombre d'hyperarbres décorés sur n sommets et k arêtes est donné par :

$$E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k-1}. \tag{3.11}$$

où $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles sur n sommets, chacun muni d'une $\mathcal{S}'$-structure et $\mathcal{S}'$ est la différentielle de l'espèce $\mathcal{S}$.

Les séries génératrices des espèces des hyperarbres décorés pointés en une arête et décorés pointés en une arête et un sommet sont liées aux séries génératrices des espèces des hyperarbres décorés enracinés et creux par les relations suivantes :

$$\mathbf{C}^{pa}_{\mathcal{S}}(x) = t\mathbf{C}^{p}_{\mathcal{S}}(x) \times \mathbf{C}^{c}_{\mathcal{S}}(x), \tag{3.12}$$

$$\mathbf{C}^{a}_{\mathcal{S}}(x) = \mathbf{C}_{\mathcal{S}}(x) + \mathbf{C}^{pa}_{\mathcal{S}}(x) - \mathbf{C}^{p}_{\mathcal{S}}(x). \tag{3.13}$$

Ces formules donnent le nombre de tous les types d'hyperarbres décorés en fonction du nombre d'ensembles décorés.

Démonstration. – D'après la proposition 3.2.4, le nombre d'hyperarbres enracinés sur k arêtes et n sommets est donné par :

$$n \times E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k-1},$$

où il y a n façons différentes de choisir la racine, $E_{\mathcal{S}}(k, n-1)$ façons de former une partition en k parts d'un ensemble de cardinal $n-1$ avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts, et $1 \times n^{k-1}$ façons d'assembler ces ensembles en un arbre en boîtes à racine fixée, d'après la proposition 3.2.2.

– Appliquons la proposition 3.2.6. Il y a $E_{\mathcal{S}}(k,n)$ façons de construire une partition en k parts d'un ensemble de cardinal $n-1$ avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts. Notons $n_{i_1},\dots,n_{i_k}$ les cardinaux de ces parts. Nous choisissons la $j$ième de ces parts comme racine de l'arbre en boîtes sur k sommets et n étiquettes. Le nombre d'arbres en boîtes obtenus est $n_{i_j}\times n^{k-2}$, d'après la proposition 3.2.2. Comme $\sum_{j=1}^{k} n_{i_j}\times n^{k-2} = n^{k-1}$, nous obtenons le résultat voulu.
– Nous prouvons l'équation (3.11) par intégration de la formule (3.9).
– Les dernières équations sont obtenues en traduisant en termes de séries génératrices les équations (3.1) et (3.6) sur les espèces. □

Exemple 3.2.9. – Soit Assoc l'espèce des listes non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k listes est $\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$. En effet, il y a $n!$ façons de ranger les éléments de l'ensemble en une liste puis $\binom{n-1}{k-1}$ façons de découper cette liste en k morceaux. Nous avons alors compté les listes de k listes sur n éléments : il nous faut diviser par $k!$ pour obtenir le résultat souhaité. Ainsi, si nous considérons les hyperarbres décorés par $\widehat{\text{Assoc}}$, les séries génératrices des hyperarbres décorés enracinés et creux sont :

$$\mathbf{C}^{p}_{\mathcal{S}}(x) = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\frac{(n-1)!}{k!}(nt)^{k}\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\mathbf{C}^{c}_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}(nt)^{k-1}\frac{x^n}{n!}.$$

Nous retrouvons notamment la formule (44) de la proposition 3.3 de [Ler04]. La relation entre espèces du théorème 1.3 de ce même article se retrouve par les relations entre espèces de la proposition 3.1.13.

– Soit Perm l'espèce des ensembles pointés non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles pointés est $\binom{n}{k}\times k^{n-k}$. En effet, nous choisissons le sommet pointé de chaque ensemble, puis le reste de la partition est donnée par une application des autres sommets vers le sommet pointé de l'ensemble auquel il appartient. Ainsi, considérant les hyperarbres décorés par $\widehat{\text{Perm}}$, les séries génératrices des hyperarbres décorés enracinés et creux sont :

$$\mathbf{C}^{p}_{\mathcal{S}}(x) = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}k^{n-1-k}(nt)^{k}\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\mathbf{C}^{c}_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-k}(nt)^{k-1}\frac{x^n}{n!}.$$

– Soit Comm l'espèce des ensembles non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles est donné par $S(n,k)$, un nombre de Stirling de seconde espèce. Ainsi, considérant les hyperarbres décorés par $\widehat{\text{Comm}}$, les séries génératrices des hyperarbres décorés enracinés et creux sont :

$$\mathbf{C}^{p}_{\mathcal{S}}(x) = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}S(n-1,k)(nt)^{k}\frac{x^n}{n!},$$

et

$$\mathbf{C}^{c}_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(nt)^{k-1}\frac{x^n}{n!}.$$

Ces hyperarbres décorés sont isomorphes aux hyperarbres non décorés. Ce résultat a été prouvé pour la première fois par I. Gessel et L. Kalikow dans [GK05].

– Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k cycles est donné par $|s(n,k)|$, la valeur absolue d'un nombre de Stirling de première espèce. Ainsi, considérant les hyperarbres décorés par l'espèce des cycles, les séries génératrices des hyperarbres décorés enracinés et creux sont :

$$\mathbf{C}^p_{\mathcal{S}}(x) = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} |s(n-1,k)|\,(nt)^k\,\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\mathbf{C}^c_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} |s(n,k)|\,(nt)^{k-1}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Ces séries correspondent à celles obtenues pour une décoration par $\widehat{\text{Lie}}$. Nous verrons ce cas en détail dans la partie 3.3.2.

3.2.3 Raffinement

Nous introduisons maintenant deux poids : un sur l'ensemble des arbres en boîtes et l'autre sur l'ensemble des hyperarbres enracinés et creux.

Définition 3.2.10. Sur un arbre en boîtes $BT = (L, V, R, E)$, nous définissons le poids suivant :

$$W(BT) = \prod_{i\in L} x_i^{|E^{-1}(i)|},$$

où les x_i sont des variables formelles. La puissance de x_i est alors le nombre d'enfants de l'étiquette i, pour toute étiquette i de L.

Avec ce poids, le nombre d'arbres en boîtes est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.2.11. *Considérons L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parts $p_0, p_1, \ldots, p_k$, où le cardinal de p_i est n_i et où $k \geq 0$. Le nombre d'arbres en boîtes $N_{p_0;p_1,\ldots,p_k}$ sur $k+1$ sommets dont la racine est étiquetée par $p_0 = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et les k autres sommets (s'il y en a) sont étiquetés par l'un des k autres p_i est donné par :*

$$N_{p_0;p_1,\ldots,p_k} = n_0 \times n^{k-1}.$$

Démonstration. Nous reprenons la démonstration par code de Prüfer de la proposition 3.2.2. Les lettres du mot obtenu correspondent aux étiquettes ayant des fils : une étiquette ayant j fils apparaîtra j fois dans le mot. Ce mot est formé de $k-1$ lettres sans restriction puis d'une lettre de la racine, ce qui donne le résultat. □

Le poids sur l'ensemble des hyperarbres sur n sommets est défini comme suit :

Définition 3.2.12. Sur un hyperarbre creux ou enraciné $H = (V, E)$, nous définissons le poids suivant :

$$W(H) = \prod_{i\in V} x_i^{p(i)},$$

où $p(i)$ est le nombre d'arêtes dont le pétiole est i.

Ces poids sont reliés par le théorème suivant.

Théorème 3.2.13. *Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, tout hyperarbre enraciné pondéré sur n sommets avec k arêtes, dont les arêtes sont décorées par $\mathcal{S}$, peut se décomposer en un triplet $(r, \mathbf{S}, BT)$ où :*

- *r est la racine de l'hyperarbre,*
- **S** *est une partition en k parts d'un ensemble de cardinal $n-1$ avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts,*
- *et BT est un arbre en boîtes pondéré sur $k+1$ sommets dont la racine est étiquetée par r et chacun des autres sommets est étiqueté par l'un des k ensembles du point précédent.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la bijection de la démonstration de la proposition 3.2.4 est compatible avec les poids. Cette compatibilité vient du fait que les ensembles des pétioles de l'hyperarbre enraciné et de l'arbre en boîtes reliés par la proposition sont identiques. □

Exemple 3.2.14. Le poids de l'hyperarbre enraciné de la figure 3.4, qui correspond au poids de l'arbre en boîtes de la figure 3.10, est : $x_3^3 x_6^2 x_9 x_{12}$.

Théorème 3.2.15. *Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$, tout hyperarbre creux pondéré sur n sommets, avec k arêtes décorées par $\mathcal{S}$, peut se décomposer en un couple $(\mathbf{S}, BT)$ où :*

- **S** *est une partition en k parts d'un ensemble de cardinal n avec une $\mathcal{S}'$-structure sur chacune des parts,*
- *et BT est un arbre en boîtes pondéré sur k sommets, chacun des sommets étant étiqueté par l'un des k ensembles du point précédent.*

Démonstration. De la même manière que nous avons prouvé la compatibilité en terme de poids de la bijection de la démonstration de la proposition 3.2.4 dans le cas des hyperarbres enracinés pondérés, nous montrons que la démonstration de la proposition 3.2.6 s'adapte en tenant compte du poids. □

Exemple 3.2.16. Le poids de l'hyperarbre creux de la figure 3.7, qui correspond au poids de l'arbre en boîtes de la figure 3.9, est : $x_2 x_3 x_4 x_7^2$.

Nous notons $\mathbf{C}_{\mathcal{S},W}$, $\mathbf{C}^p_{\mathcal{S},W}$, $\mathbf{C}^c_{\mathcal{S},W}$, $\mathbf{C}^a_{\mathcal{S},W}$ et $\mathbf{C}^{pa}_{\mathcal{S},W}$ les séries génératrices pondérées des espèces $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^p_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^c_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{H}^a_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}}$. Nous noterons aussi $E_{\mathcal{S}}(k,n)$ le nombre d'ensembles de k ensembles sur n sommets, chaque ensemble étant muni d'une $\mathcal{S}'$-structure.

Avec la proposition 3.2.11, les théorèmes précédents 3.2.15 et 3.2.13 impliquent le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.17. *Les séries génératrices pondérées des espèces des hyperarbres décorés enracinés et creux s'expriment :*

$$\mathbf{C}^p_{\mathcal{S},W}(x) = \frac{x}{t} + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} (x_1+\cdots+x_n)\, E_{\mathcal{S}}(k,n-1)\left((x_1+\cdots+x_n)\,t\right)^{k-1}\frac{x^n}{n!} \tag{3.14}$$

et

$$\mathbf{C}^c_{\mathcal{S},W}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} E_{\mathcal{S}}(k,n)\left((x_1+\cdots+x_n)\,t\right)^{k-1}\frac{x^n}{n!}. \tag{3.15}$$

Ce corollaire sera utilisé dans la section suivante où nous spécialisons les résultats obtenus pour les opérades Lie et PreLie.

3.3 Deux cas d'hyperarbres décorés

Nous présentons deux types d'hyperarbres décorés particuliers : les hyperarbres décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ et les hyperarbres décorés par $\widehat{\text{Lie}}$.

3.3.1 Hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$

Dans leur article [JMM07], C. Jensen, J. McCammond et J. Meier introduisent un poids sur l'ensemble des hyperarbres. Nous montrons ici que ce poids est relié à une décoration des arêtes des hyperarbres par l'espèce linéaire $\widehat{\mathrm{PreLie}}$, dont la dérivée est l'espèce PreLie qui associe à un ensemble fini I non vide l'ensemble des arbres enracinés étiquetés par I.

Application du dénombrement des hyperarbres décorés

En appliquant les résultats de la section précédente sur le dénombrement des hyperarbres décorés, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *La série génératrice de l'espèce des hyperarbres enracinés décorés par l'espèce linéaire* $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \frac{x}{t} + \sum_{n\geq 2} n\,(tn+n-1)^{n-2}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Cette équation est la spécialisation en $x_i = 1$ de l'équation donnant les hyperarbres enracinés pondérés dans [JMM07, Theorem 3.9].

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres décorés par l'espèce linéaire $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = x + \sum_{n\geq 2} (tn+n-1)^{n-2}\,\frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres creux décorés par l'espèce linéaire $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^{c}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \sum_{n\geq 1} (tn+n)^{n-1}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration. Nous utilisons la formule classique pour le nombre de forêts de k arbres sur n sommets, qui peut être trouvée dans le livre de M. Aigner et G. Ziegler [AZ04] :

$$E_{\mathrm{PreLie}}(k,n) = \binom{n}{k} k \times n^{n-1-k} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}. \tag{3.16}$$

Utilisant les expressions du théorème 3.2.8, nous obtenons :

$$\mathbf{C}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}(x) = \frac{x}{t} + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} n\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-1-k}\,(nt)^{k-1}\,\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\mathbf{C}^{c}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}\,(nt)^{k-1}\,\frac{x^n}{n!}.$$

En réindexant les sommes, cela donne :

$$\mathbf{C}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \frac{x}{t} + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=0}^{n-2} n\binom{n-2}{k}(n-1)^{n-2-k}\,(nt)^{k}\,\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\mathbf{C}^{c}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n^{n-1-k}\,(nt)^{k}\,\frac{x^n}{n!}.$$

La formule du binôme de Newton donne le résultat voulu pour $\mathbf{C}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ et $\mathbf{C}^{c}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$. La série $\mathbf{C}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ est ensuite obtenue par intégration. □

Lien avec les arbres enracinés 2-colorés

Nous relions maintenant les arbres 2-colorés, dont les arêtes sont ou bleu (0) ou rouge (1), aux hyperarbres décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ pour calculer les séries génératrices des hyperarbres décorés enracinés et pointés en une arête et un sommet.

Définition 3.3.2. Un *arbre enraciné 2-coloré* est un arbre enraciné (V, E), où V est l'ensemble des sommets et $E \subseteq V \times V$ est l'ensemble des arêtes, muni d'une application φ de E dans $\{0, 1\}$. De manière équivalente, c'est la donnée d'un arbre enraciné (V, E) et d'une partition $E_0 \cup E_1$ de E, où $E_0 \cap E_1 = \emptyset$.

Un exemple d'arbre enraciné 2-coloré est représenté sur la figure 3.11. Les arêtes de E_1 sont en pointillés (rouge) alors que les arêtes de E_0 sont en trait plein (bleu).

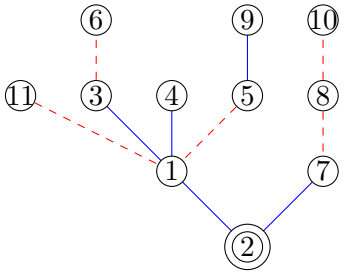


FIGURE 3.11 – Arbre enraciné 2-coloré.

Proposition 3.3.3. *L'espèce des hyperarbres creux décorés par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est isomorphe à l'espèce des arbres enracinés 2-colorés. Le poids de l'hyperarbre est alors égal au nombre d'arêtes rouges.*

Démonstration. Un hyperarbre creux dont les arêtes sont décorées par $\widehat{\text{PreLie}}$ est un hyperarbre creux dans lequel, pour toute arête e, les sommets de e différents du creux ou du pétiole forment un arbre enraciné.

Considérons un hyperarbre creux H décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$ sur un ensemble de sommets V. Notons E_0, l'ensemble des arêtes entre les éléments de V dans les arbres enracinés obtenus avec la décoration par $\widehat{\text{PreLie}}$. Le graphe (V, E_0) est alors la forêt d'arbres obtenue en supprimant les arêtes de l'hyperarbre H. Pour chaque arête e de H, nous notons r_e la racine de l'arbre enraciné dans e et p_e le pétiole de e. Soit E_1 l'ensemble des arêtes entre r_e et p_e pour toute arête e de H. Par définition de ces ensembles, l'intersection de E_0 avec E_1 est vide. De plus, tout chemin dans H correspond à un chemin dans $(V, E_0 \cup E_1)$. Comme H est un hyperarbre, le graphe $(V, E_0 \cup E_1)$ est un arbre T. Nous enracinons cet arbre en la racine r de l'arbre décorant l'arête creuse de H : T est alors un arbre 2-coloré enraciné en r.

Réciproquement, soit $T = (V, E_0 \cup E_1)$ un arbre enraciné 2-coloré. Le graphe (V, E_0) est une forêt d'arbres : nous pouvons enraciner ces arbres en leur sommet le plus proche de la racine de T. Notons $T_1, \ldots, T_n$ cette forêt, où T_1 est l'arbre enraciné contenant la racine de T. Pour tout i entre 2 et n, il existe un sommet de V plus proche de la racine de T que la racine de T_i : nous notons ce sommet p_i. Ainsi, nous considérons l'hypergraphe dont l'ensemble des sommets est V, dont les arêtes contiennent les sommets de T_1 ou l'union des sommets de T_i et de p_i, pour tout i entre 2 et n. Nous obtenons alors un hypergraphe décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$. De plus, les chemins dans T et dans l'hypergraphe obtenu sont identiques : cet hypergraphe est donc un hyperarbre. □

Exemple 3.3.4. L'hyperarbre creux dont les arêtes sont décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ associé à l'arbre enraciné 2-coloré de la figure 3.11 est l'hyperarbre creux de la figure 3.12.

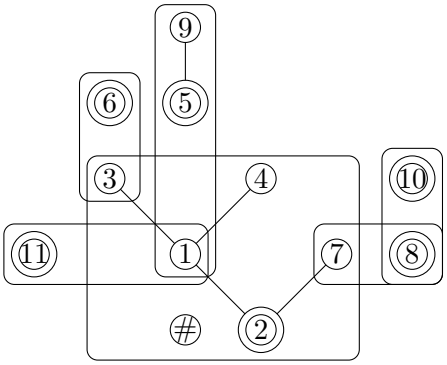


Figure 3.12 – Hyperarbre creux décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$.

Remarquons que cette proposition redonne l'expression de $\mathbf{C}^{c}_{\widehat{\text{PreLie}}}$ obtenue précédemment dans la proposition 3.3.1.

Relions maintenant les hyperarbres enracinés décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ aux arbres enracinés 2-colorés. Nous considérerons que les arêtes de E_0 sont bleues et que les arêtes de E_1 sont rouges.

Proposition 3.3.5. *L'espèce des hyperarbres enracinés décorés par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est isomorphe à l'espèce des arbres enracinés 2-colorés dont la racine a tous ses fils rouges. Le nombre d'arêtes de l'hyperarbre correspond au nombre d'arêtes rouges de l'arbre 2-coloré.*

Démonstration. Étant donné un hyperarbre enraciné H décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$ à k arêtes et n sommets, nous considérons l'ensemble pointé de ses sommets (r, V). Nous dessinons en bleu les arêtes obtenues grâce à la structure PreLie dans les arêtes de H : nous obtenons ainsi une forêt de $k+1$ arbres avec $n-k-1$ arêtes bleues. Pour toute arête e, nous relions maintenant le pétiole de e à la racine de l'arbre dans e. Nous obtenons ainsi un graphe 2-coloré G sur n sommets avec $n-k-1+k$ arêtes, dont k arêtes rouges. Montrons que ce graphe est connexe. Un chemin entre la racine et un sommet x dans H est une suite de chemins dans les arbres décorant les arêtes de H entre leur racines et un sommet qui est le pétiole d'une autre arête et de chemins du pétiole d'une arête à la racine de l'arbre correspondant. Comme ces chemins existent aussi dans G, nous obtenons un arbre enraciné 2-coloré dont la racine a tous ses fils rouges.

Réciproquement, étant donné un tel arbre enraciné 2-coloré T, nous supprimons les arêtes rouges de T. Nous enracinons toutes les composantes connexes obtenues en le sommet qui était le plus proche de la racine de T dans T. Étant donnée une composante connexe C_k, nous la plaçons avec son parent dans une arête d'un hypergraphe H. Nous enracinons l'hypergraphe obtenu en le sommet qui était racine de T. Nous obtenons ainsi un hyperarbre enraciné décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$. En effet, l'hypergraphe est pointé en un sommet et une arête et toute arête contient un sommet et un arbre enraciné, ce qui donne la décoration par $\widehat{\text{PreLie}}$. De plus, tout couple de sommets relié par une arête dans T est dans la même arête dans H donc H est connexe. Finalement, un cycle dans H viendrait d'un cycle dans T, qui n'en contient pas puisque c'est un arbre : H est donc un hyperarbre. Le nombre d'arêtes de l'hyperarbre correspond alors au nombre d'arêtes rouges de l'arbre 2-coloré. □

Exemple 3.3.6. Sur la figure 3.13 sont représentés un hyperarbre enraciné décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$ et l'arbre 2-coloré correspondant.

Proposition 3.3.7. *L'espèce des hyperarbres pointés en une arête et un sommet décorés par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est isomorphe à l'espèce des arbres enracinés 2-colorés dont la racine a exactement un fils bleu (et possiblement des fils rouges). Le poids de l'hyperarbre est alors le nombre d'arêtes rouges.*

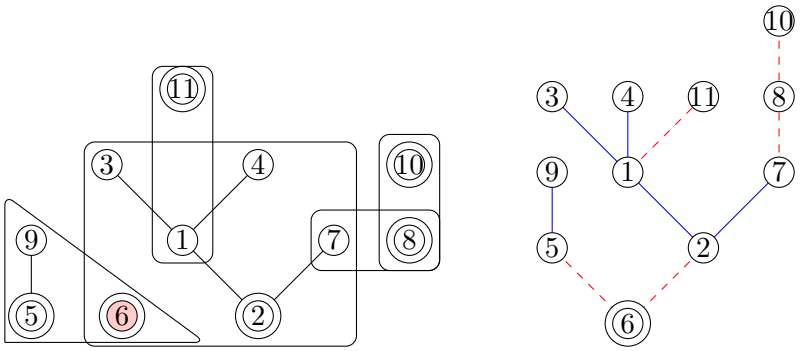


FIGURE 3.13 – Un hyperarbre enraciné décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$ et l'arbre 2-coloré correspondant.

Démonstration. Étant donné un hyperarbre pointé en un sommet et une arête H décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$ à k arêtes et n sommets, nous considérons l'ensemble pointé de ses sommets (r, V). Nous dessinons en bleu les arêtes obtenues grâce à la structure PreLie dans les arêtes de H : nous obtenons ainsi une forêt de $k+1$ arbres avec $n-k-1$ arêtes bleues. Nous relions r avec la racine de l'arbre dans l'arête pointée de H par une arête bleue : nous obtenons une forêt de k arbres avec $n-k$ arêtes bleues. Pour toute arête non pointée e, nous relions maintenant le pétiole de e à la racine de l'arbre dans e. Nous obtenons ainsi un graphe 2-coloré G sur n sommets avec $n-k+k-1$ arêtes. Montrons que ce graphe est connexe. Un chemin entre la racine et un sommet x dans H est une suite de chemins dans les arbres décorant les arêtes de H entre leur racines et un sommet qui est le pétiole d'une autre arête et de chemins du pétiole d'une arête à la racine de l'arbre correspondant. Comme ces chemins existent aussi dans G, nous obtenons un arbre enraciné 2-coloré dont la racine a exactement un fils bleu et possiblement d'autre fils rouges.

Réciproquement, étant donné un tel arbre enraciné 2-coloré T, nous supprimons les arêtes rouges de T. Nous enracinons toutes les composantes connexes obtenues en le sommet qui était le plus proche de la racine de T dans T. Étant donnée une composante connexe C_k, nous la plaçons avec son parent dans une arête d'un hypergraphe H. Nous enracinons l'hypergraphe obtenu en le sommet qui était racine de T, pointons l'arête contenant l'arête bleue adjacente à la racine et supprimons cette arête. Nous obtenons ainsi un hyperarbre pointé en un sommet et une arête décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$. En effet, l'hypergraphe est pointé en un sommet et une arête et toute arête contient un sommet et un arbre enraciné, ce qui donne la décoration par $\widehat{\text{PreLie}}$. De plus, tout couple de sommets relié par une arête dans T est dans la même arête dans H donc H est connexe. Finalement, un cycle dans H viendrait d'un cycle dans T, qui n'en contient pas puisque c'est un arbre : H est donc un hyperarbre. Le poids de l'hyperarbre correspond alors au nombre d'arêtes rouges. □

Calcul des sériés génératrices des hyperarbres pointés

Nous utilisons maintenant l'analogie avec les arbres enracinés 2-colorés pour calculer les autres séries génératrices exponentielles.

Proposition 3.3.8. *La série génératrice de l'espèce des hyperarbres pointés en un sommet et une arête décorés par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^{pa}_{\widehat{\text{PreLie}}} = x + \sum_{n\geq 2} n\,(n+tn-1)^{n-3}\,(n-1)\,(1+2t)\,\frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres pointés en une arête, décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ *est*

donnée par :

$$\mathbf{C}^{a}_{\widehat{\text{PreLie}}} = x + \sum_{n\geq 2} (n+tn-1)^{n-3}\,(n-1)\,(1+tn)\,\frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration. – Nous avons relié les hyperarbres pointés en un sommet et une arête décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ aux arbres enracinés 2-colorés dont la racine a exactement un fils bleu (et éventuellement d'autres fils rouges) dans la proposition 3.3.7. Nous comptons les arbres enracinés 2-colorés en utilisant le nombre d'arêtes rouges comme un poids sur les arbres 2-colorés. Il y a alors n façons de choisir la racine de l'arbre enraciné 2-coloré. Si la racine a k fils, $k-1$ sont rouges et il y a k façons de choisir le fils bleu. L'ensemble des fils forme alors une forêt de k arbres enracinés 2-colorés sur $n-1$ sommets. Comptons les forêts de k arbres enracinés 2-colorés sur $n-1$ sommets. Nous utilisons la formule (3.16) :

$$E_{\text{PreLie}}(k, n-1) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-1-k}.$$

Il y a $n-1-k$ arêtes dans la forêt, chacune étant bleue ou rouge. Ainsi, le nombre de forêts de k arbres enracinés 2-colorés sur $n-1$ sommets est donné par : $\binom{n-2}{k-1} \times (n-1)^{n-1-k}\,(1+t)^{n-1-k}$. Enfin, le n-ième coefficient de la série est :

$$\left(\mathbf{C}^{pa}_{\widehat{\text{PreLie}}}\right)_n = n\sum_{k=1}^{n-1} kt^{k-1}\binom{n-2}{k-1}\left((n-1)\,(1+t)\right)^{n-1-k}.$$

Un calcul rapide utilisant une réindexation de sommet et la formule du binôme de Newton donne le résultat voulu.

– Nous obtenons la deuxième série génératrice grâce au principe de dissymétrie de la proposition 3.1.6. □

Raffinement

Nous utilisons maintenant le poids défini dans la partie 3.2.3 sur les hyperarbres enracinés et creux. Ces poids nous permettent d'obtenir les mêmes résultats que dans [JMM07].

Proposition 3.3.9. *La série génératrice des hyperarbres creux décorés par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^{c}_{\widehat{\text{PreLie}}} = x + \sum_{n\geq 2}\left((x_1+\cdots+x_n)\,t+n\right)^{n-1}\frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice des hyperarbres enracinés décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^{p}_{\widehat{\text{PreLie}}} = \frac{x}{t} + \sum_{n\geq 2}(x_1+\cdots+x_n)\left((x_1+\cdots+x_n)\,t+n-1\right)^{n-2}\frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration. Nous utilisons les formules du corollaire 3.2.17. □

Les hyperarbres enracinés pondérés comptés dans [JMM07, Theorem 3.9] sont en bijection avec les hyperarbres enracinés décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$.

Il est possible de raffiner le deuxième n en $y_1+\ldots+y_n$ en introduisant un nouveau poids sur l'ensemble des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$. Pour ce faire, nous avons d'abord besoin des définitions suivantes.

Définition 3.3.10. Étant donnée une forêt enracinée et un de ses sommets v, un *fils* v' du sommet v est un sommet v' relié à v par une arête et tel que v est sur le chemin de v' à la racine. Le degré de v dans la forêt enracinée est le nombre de fils de v dans cette forêt.

Avec cette définition, nous pouvons définir le poids suivant sur l'ensemble des forêts d'arbres enracinés sur un ensemble de sommets V.

Définition 3.3.11. Soit F une forêt d'arbres enracinés sur un ensemble de sommets V. Nous munissons cette forêt du poids suivant :

$$W(F) = \prod_{i \in V} y_i^{s(i)},$$

où $s(i)$ est le degré du sommet i.

La bijection entre d'une part les hyperarbres creux décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$ et d'autre part les arbres en boîtes et l'ensemble d'ensembles décorés de la proposition 3.2.6, et les poids introduits dans les définitions 3.2.10 et 3.3.11, induisent un poids sur l'ensemble des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$.

Définition 3.3.12. Soit H un hyperarbre creux décoré par $\widehat{\text{PreLie}}$ sur un ensemble de sommets V. Nous le munissons du poids suivant :

$$W(T) = \prod_{i \in V} x_i^{p(i)} y_i^{s(i)},$$

où $p(i)$ est le nombre d'arêtes de H dont le pétiole est i et $s(i)$ est le nombre d'enfants de i dans l'arbre venant de la décoration par $\widehat{\text{PreLie}}$.

En utilisant la bijection avec les arbres en boîtes et les ensembles d'ensembles décorés, nous pouvons calculer la série génératrice de l'espèce pondérée des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$.

Proposition 3.3.13. *La série génératrice de l'espèce pondérée des hyperarbres creux dont les arêtes sont décorées par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}_t^c = x + \sum_{n \geq 2} \left((x_1 + \cdots + x_n)\, t + y_1 + \cdots + y_n \right)^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration. Dans le livre de Stanley [Sta01, Proposition 5.3.2], la formule pour le nombre de forêts de k arbres sur n sommets est donnée par :

$$E_{\text{PreLie}}(t, k, n) = \binom{n-1}{k-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in V_j} y_i \right)^{n-k}. \tag{3.17}$$

Nous utilisons le corollaire 3.2.17 pour obtenir le résultat voulu. □

Calcul des séries indicatrices de cycles des hyperarbres décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$

Nous renvoyons le lecteur à la section 1.1 pour une introduction aux séries indicatrices de cycles. Nous utiliserons la même notation pour les espèces et la série indicatrice de cycles associée. Nous calculons la série indicatrice de cycles des hyperarbres décorés par $\widehat{\text{PreLie}}$. Nous n'écrirons pas l'argument des séries indicatrices de cycles $(t, p_1, p_2, \ldots)$ dans cette partie.

Proposition 3.3.14. *La série indicatrice de cycles des hyperarbres creux décorés par* $\widehat{\text{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{Z}^c_{\widehat{\text{PreLie}}} = \frac{1}{1+t}\, \text{PreLie} \circ (1+t)\, p_1. \tag{3.18}$$

Démonstration. Par la proposition 3.3.3, la série indicatrice de cycles des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ est donnée par la série indicatrice de cycles des arbres enracinés 2-colorés. □

Nous définissons les expressions suivantes, pour λ une partition d'un entier n, noté $\lambda \vdash n$:

$$f_k(\lambda) = \sum_{l|k} l\lambda_l$$

et

$$P_k(\lambda) = \left((1+t^k)f_k(\lambda) - 1\right)^{\lambda_k} - k\lambda_k(t^k+1) \times \left((1+t^k)f_k(\lambda) - 1\right)^{\lambda_k - 1}.$$

Nous obtenons les formules suivante pour les séries indicatrices de cycles des hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$.

Proposition 3.3.15. *La série indicatrice de cycles des hyperarbres enracinés décorés par* $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\vdash n, \lambda_1 \neq 0} \lambda_1 \left(\lambda_1 t + \lambda_1 - 1\right)^{\lambda_1 - 2} \prod_{k\geq 2} P_k(\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \tag{3.19}$$

La série indicatrice de cycles des hyperarbres pointés en un sommet et une arête, décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{Z}^{pa}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\vdash n, \lambda_1 \neq 0} \lambda_1 (\lambda_1 - 1)(2t+1)\left(\lambda_1 + \lambda_1 t - 1\right)^{\lambda_1 - 3} \prod_{k\geq 2} P_k(\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \tag{3.20}$$

La série indicatrice de cycles des hyperarbres pointés en une arête et décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{Z}^{a}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\vdash n, \lambda_1 \neq 0} (\lambda_1 - 1)(1+\lambda_1 t)\left(\lambda_1 + \lambda_1 t - 1\right)^{\lambda_1 - 3} \prod_{k\geq 2} P_k(\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \tag{3.21}$$

La série indicatrice de cycles des hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{Z}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\vdash n, \lambda_1 \neq 0} \left(\lambda_1 t + \lambda_1 - 1\right)^{\lambda_1 - 2} \prod_{k\geq 2} P_k(\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}. \tag{3.22}$$

Démonstration. Nous utilisons la proposition 3.1.13 et la série indicatrice de cycles des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ pour calculer les autres séries.

– La série $\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \frac{p_1}{t} \times \left((1+\mathrm{Comm}) \circ \left(t \times \mathbf{Z}^{c}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}\right)\right).$$

En utilisant le résultat de la proposition 3.3.14, nous obtenons :

$$\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \frac{p_1}{t} \times \left((1+\mathrm{Comm}) \circ \left(\frac{t}{1+t}\,\mathrm{PreLie} \circ ((1+t)\,p_1)\right)\right).$$

Nous utilisons maintenant les méthodes de la démonstration du lemme 4 de l'article de V. Dotsenko et A. Khoroshkin [DK07] et de la démonstration de la proposition 7.2 dans l'article de F. Chapoton [Cha07].

Posons $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) = (\lambda_1 + 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$. Nous pouvons supposer que, pour $i \geq r$, nous avons $\mu_i = 0$. Le coefficient de tp_μ dans $\mathbf{Z}^p_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ est donné par le résidu suivant.

$$c_\mu = \int (1 + \mathrm{Comm}) \circ \frac{t}{1+t} \mathrm{PreLie} \circ ((1+t)\, p_1) \prod_{i=1}^{r} \frac{dp_i}{p_i^{\mu_i+1}},$$

avec $1 + \mathrm{Comm} = \prod_{k\geq 1} \exp(p_k/k)$. Nous effectuons le changement de variables $y_l = p_l \circ t(1+t)^{-1} \mathrm{PreLie} \circ ((1+t)\, p_1)$. Par la dualité de Koszul des opérades, prouvée dans le cas de l'opérade PreLie par F. Chapoton et M. Livernet dans leur article [CL01], la série indicatrice de cycles PreLie vérifie $(-p_1 (1 + \mathrm{Comm})) \circ - \mathrm{PreLie} = p_1$. Ainsi, la substitution est donnée pour tout $k \geq 1$ par :

$$p_k = \frac{y_k}{t^k} \exp\left(- \sum_{l \geq 1} \frac{1 + t^{kl}}{t^{kl}} \frac{y_{kl}}{l} \right).$$

Nous obtenons donc :

$$c_\mu = \int \prod_{k=1}^{r} \exp\left(\frac{y_k}{k} + \mu_k \sum_{l\geq 1} \frac{1+t^{kl}}{t^{kl}} \frac{y_{kl}}{l} \right) \left(\frac{t^k}{y_k} \right)^{\mu_k} \left(1 - y_k \frac{1+t^k}{t^k} \right) y_k^{-1} \prod_{k=1}^{r} dy_k.$$

Nous réécrivons alors une partie de l'argument de l'exponentielle :

$$\sum_{k\geq 1} k\mu_k \sum_{l\geq 1} \frac{1+t^{kl}}{t^{kl}} \frac{y_{kl}}{kl} = \sum_{k\geq 1} \frac{1+t^k}{t^k} \left(f_k(\lambda) - 1 \right) \frac{y_k}{k},$$

avec $f_k(\lambda) = \left(\sum_{l|k, l>1} l\lambda_l \right) + \lambda_1 + 1$. Ainsi, c_μ est donné par le résidu :

$$c_\mu = \prod_{k=1}^{r} \int \exp\left(\frac{y_k a_k}{k} \right) t^{k\mu_k} \left(1 - y_k \frac{1+t^k}{t^k} \right) \frac{dy_k}{y_k^{\mu_k+1}},$$

avec $a_k = 1 + \left(1 + t^k\right) \left(t^k\right)^{-1} \left(f_k(\lambda) - 1 \right)$. Cela donne le résultat voulu puisque le résidu de $\exp(az)\, z^{-n}$, pour une constante a, est donné par $a^{n-1}/(n-1)!$.

– La relation (3.6) de la proposition 3.1.13 donne la relation suivante pour la série $\mathbf{Z}^{pa}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$:

$$\mathbf{Z}^{pa}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = p_1 \times \left((p_1 (1 + \mathrm{Comm})) \circ \frac{t}{1+t} \mathrm{PreLie} \circ ((1+t)\, p_1) \right).$$

Nous utilisons les même méthodes que pour les hyperarbres enracinés, avec le même changement de variable, pour obtenir le résultat.

– La relation (3.5) de la proposition 3.1.13 donne la relation suivante pour la série $\mathbf{Z}^{a}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$:

$$\mathbf{Z}^{a}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = \widehat{\mathrm{PreLie}} \circ t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}.$$

Cependant, l'équation (50) de l'article de F. Chapoton [Cha05] donne :

$$\widehat{\mathrm{PreLie}} = p_1 \times \left(1 + \mathrm{PreLie} + \frac{1}{\mathrm{PreLie}} \right).$$

Ainsi, la série $\mathbf{Z}^{a}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}^{a}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} \times \left(1 + \mathrm{PreLie} \circ t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} + \frac{1}{\mathrm{PreLie} \circ t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}} \right).$$

De plus, en utilisant l'expression de $\mathbf{Z}^c_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ en fonction de $\mathbf{Z}^p_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ de l'équation (3.4) de la proposition 3.1.13, et celle de la proposition 3.3.14, nous obtenons :

$$\mathbf{Z}^a_{\widehat{\mathrm{PreLie}}} = p_1 \times \left[\left((1 + \mathrm{Comm}) \times \left(1 + \frac{p_1}{t} + \frac{t}{p_1} \right) \right) \circ \frac{t}{1+t} \, \mathrm{PreLie} \circ ((1+t)\, p_1) \right].$$

Nous utilisons les mêmes méthodes que pour les hyperarbres enracinés, avec le même changement de variable, pour obtenir le résultat.

– La série $\mathbf{Z}_{\widehat{\mathrm{PreLie}}}$ est obtenue en utilisant le principe de dissymétrie 3.1.6. □

3.3.2 Hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$

Dans cette partie, nous étudions les hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$, où Lie est l'espèce associée à la série indicatrice de cycles suivante :

$$\mathrm{Lie} = -\sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log(1 - p_k),$$

où μ est la fonction de Möbius, qui vaut $(-1)^p$ sur les entiers positifs sans diviseurs carrés et avec p facteurs premiers, et 0 sur les autres entiers.

Calcul des séries génératrices des hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$

En appliquant les résultats de la deuxième section, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3.3.16. *La série génératrice de l'espèce des hyperarbres enracinés décorés par* $\widehat{\mathrm{Lie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^p_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t} \prod_{k=0}^{n-2} (nt + k) \times \frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n \geq 1} \prod_{k=1}^{n-2} (nt + k) \times \frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^c_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n \geq 1} \prod_{k=1}^{n-1} (nt + k) \, \frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres pointés en une arête et un sommet décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^{pa}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n \geq 2} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \prod_{k=0}^{n-2} \prod_{l=1}^{n-p-1} (pt + k) \left((n-p)\, t + l \right) \frac{x^n}{n!}.$$

La série génératrice de l'espèce des hyperarbres pointés en une arête décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{C}^a_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n \geq 2} \prod_{k=0}^{n-2} (nt + k) - \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \prod_{k=0}^{n-2} \prod_{l=1}^{n-p-1} (pt + k) \left((n-p)\, t + l \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration. Les trois premiers résultats sont obtenus en appliquant les formules (3.9) et (3.11) du théorème 3.2.8 avec $E_{\widehat{\mathrm{Lie}}}(k,n) = (-1)^{k+n} s(k,n)$, où $s(k,n)$ est un nombre de Stirling de première espèce. En effet, les nombres de Stirling de première espèce vérifient l'équation classique suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} s(k,n)\, x^k = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

La quatrième équation est obtenue en utilisant la relation (3.6) et la dernière est obtenue en utilisant le principe de dissymétrie de la proposition 3.1.6. □

Calcul des séries indicatrices de cycles des hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$

Nous étudions maintenant l'action du groupe symétrique sur ces hyperarbres. Nous définissons les expressions suivantes, pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ une partition d'un entier n :

$$f_k(\lambda) = \sum_{l|k} l\lambda_l$$

et

$$\varphi_i(\lambda) = \sum_{k|i} \frac{t^k}{i} \mu\left(\frac{i}{k}\right) f_k(\lambda),$$

où μ est la fonction de Möbius rappelée précédemment.

En utilisant ces expressions, nous obtenons les relations suivantes :

Proposition 3.3.17. *La série indicatrice de cycles des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$ est donnée par :*

$$\mathbf{Z}^{c}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\vdash n} \sum_{p\geq 1} \frac{\mu(p)}{p} \prod_{i=1, i\neq p}^{r} \left(\binom{\varphi_i(\lambda)+\lambda_i-1}{\lambda_i} - t^i \binom{\varphi_i(\lambda)+\lambda_i-1}{\lambda_i-1} \right) \times \sum_{q=1}^{\lambda_p} \frac{1}{q} \left(\binom{\varphi_p(\lambda)+\lambda_p-q-1}{\lambda_p-q} - t^q \binom{\varphi_p(\lambda)+\lambda_p-q-1}{\lambda_p-q-1} \right) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}.$$

La série indicatrice de cycles des hyperarbres enracinés décorés par $\widehat{\mathrm{Lie}}$ est donnée par :

$$\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{t} \left(\prod_{k=0}^{\lambda_1-2} (\lambda_1 t + k) \right) \prod_{i\geq 2} \left(\binom{\varphi_i(\lambda)+\lambda_i-1}{\lambda_i} - t^i \binom{\varphi_i(\lambda)+\lambda_i-1}{\lambda_i-1} \right) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}.$$

Démonstration. – Les équations du corollaire 3.1.14 donnent :

$$t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = p_1 + p_1 \times \mathrm{Comm} \circ \left(t \times \mathrm{Lie} \circ t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} \right)$$

et

$$\mathbf{Z}^{c}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} = \mathrm{Lie} \circ t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}}.$$

Notons $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Nous pouvons supposer que pour $i \geq r$, nous avons $p_i = 0$. Le coefficient de p_λ dans $\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}}$ est donné par le résidu c_λ suivant :

$$c_\lambda = \int \mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}} \prod_{i=1}^{r} \frac{dp_i}{p_i^{\lambda_i+1}}.$$

Nous utilisons le changement de variable $y_i = p_i \circ t\mathbf{Z}^{p}_{\widehat{\mathrm{Lie}}}$. Calculons d'abord $(1+\mathrm{Comm}) \circ t\,\mathrm{Lie}$.

$$(1+\mathrm{Comm})\circ t\,\mathrm{Lie} = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k}p_k\circ\left(-\sum_{l\geq 1}\frac{\mu(l)}{l}\log(1-p_l)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1}\frac{t^k}{kl}\mu(l)\log(1-p_{kl})\right)$$
$$= \prod_{k,l\geq 1}(1-p_{kl})^{-\frac{t^k\mu(l)}{kl}}.$$

Ainsi, le changement de variable est donné par :

$$p_i = y_i\prod_{k,l\geq 1}(1-y_{kli})^{\frac{t^{ki}\mu(l)}{kl}}.$$

Nous obtenons :

$$c_\lambda = \int\frac{y_1}{t}\prod_{i=1}^{r}\prod_{k,l\geq 1}(1-y_{kli})^{-\frac{\lambda_i t^{ki}\mu(l)}{kl}}\left(1-\frac{t^i y_i}{1-y_i}\right)\frac{dy_i}{y_i^{\lambda_i+1}}.$$

Nous séparons alors les termes pour chacun des y_j. Cela donne :

$$c_\lambda = \int\frac{y_1}{t}\prod_{i=1}^{r}\int(1-y_i)^{-\varphi_i(\lambda)}\left(1-\frac{t^i y_i}{1-y_i}\right)\frac{dy_i}{y_i^{\lambda_i+1}},$$

où nous avons :

$$\varphi_i(\lambda) = \sum_{j|k|i}\frac{t^k}{i}\mu\left(\frac{i}{k}\right)j\lambda_j = \sum_{k|i}\frac{t^k}{i}\mu\left(\frac{i}{k}\right)f_k(\lambda).$$

Nous calculons maintenant l'intégrale suivante :

$$\int y_p^q(1-y_p)^{-\varphi_p(\lambda)-1}(1-y_p(1+t^p))\frac{dy_p}{y_p^{\lambda_p+1}}$$
$$= \sum_{j\geq 0}\binom{\varphi_p(\lambda)+j}{j}\left(\int y_p^{q+j-\lambda_p-1}dy_p-(1+t^p)\int y_p^{q+j-\lambda_p}dy_p\right)$$
$$= \binom{\varphi_p(\lambda)+\lambda_p-q-1}{\lambda_p-q}-t^p\binom{\varphi_p(\lambda)+\lambda_p-q-1}{\lambda_p-q-1}.$$

Ce calcul appliqué à c_λ donne le résultat voulu pour $\mathbf{Z}^p_{\widehat{\mathrm{Lie}}}$.

– Notons $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$. Nous supposons que pour tout $i\geq r$, nous avons $p_i=0$. Le coefficient de p_λ dans $\mathbf{Z}^c_{\widehat{\mathrm{Lie}}}$ est donné par le résidu d_λ :

$$d_\lambda = \int\mathrm{Lie}\circ t\mathbf{Z}^p_{\widehat{\mathrm{Lie}}}\prod_{i=1}^{r}\frac{dp_i}{p_i^{\lambda_i+1}}.$$

Pour calculer d_λ, nous utilisons le même changement de variable $y_i = p_i\circ t\mathbf{Z}^p_{\widehat{\mathrm{Lie}}}$. Nous obtenons ainsi, en développant log :

$$d_\lambda = -\int\sum_{p\geq 1}\frac{\mu(p)}{p}\log(1-y_p)\prod_{i=1}^{r}\prod_{k,l\geq 1}(1-y_{kli})^{-\frac{i\lambda_i t^{ki}\mu(l)}{kli}}\left(1-\frac{t^i y_i}{1-y_i}\right)\frac{dy_i}{y_i^{\lambda_i+1}}$$
$$= \sum_{p\geq 1}\frac{\mu(p)}{p}\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q}\int y_p^q\prod_{i=1}^{r}(1-y_i)^{-\varphi_i(\lambda)}\left(1-\frac{t^i y_i}{1-y_i}\right)\frac{dy_i}{y_i^{\lambda_i+1}}.$$

Ceci donne le résultat attendu. □

Lien avec l'opérade Λ

Dans cette partie, nous relions les hyperarbres décorés par $\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}$ et $\widehat{\mathrm{Lie}}$ à l'opérade Λ, définie dans l'article de F. Chapoton [Cha02]. Nous renvoyons le lecteur à la partie 1.1 pour une introduction aux séries indicatrices de cycles et pour un rappel de la définition de la suspension Σ.

Proposition 3.3.18. *Les hyperarbres creux décorés par $\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}$ et $\widehat{\mathrm{Lie}}$ sont reliés par la relation suivante :*

$$\mathbf{Z}^c_{\widehat{\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots)=\Sigma\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(-t,p_1,p_2,\ldots).$$

Démonstration. D'après le corollaire 3.1.14, la série $\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots)=\Sigma\,\mathrm{Lie}\circ\left(p_1\times(1+\mathrm{Comm})\circ\left(t\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots)\right)\right).$$

D'où, en appliquant la suspension puis en utilisant la proposition 1.1.15 :

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots)&=\mathrm{Lie}\circ\left(-p_1\times\Sigma\,(1+\mathrm{Comm})\circ\left(t\Sigma\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots)\right)\right),\\&=\mathrm{Lie}\circ\left(p_1\times(1+\mathrm{Comm})\circ\left(-t\Sigma\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots)\right)\right).\end{aligned}$$

La dernière équation est l'équation définissant $\mathbf{Z}^c_{\widehat{\mathrm{Lie}}}(-t,p_1,p_2,\ldots)$, nous obtenons alors le résultat voulu. □

Nous introduisons maintenant les opérades Pasc et Λ, définies dans [Cha02]. Ces deux opérades sont des opérades symétriques dans la catégorie des espaces vectoriels et définies par des générateurs et des relations quadratiques. Ces présentations peuvent être retrouvées dans [Cha02]. L'opérade Pasc admet une base explicite indexée par les ensembles non vides, et l'espèce sous-jacente est donnée par :

$$\mathrm{Pasc}=(1+\mathrm{Comm})\Sigma_t\,\mathrm{Comm}.$$

L'opérade Λ est définie comme le dual quadratique de l'opérade Pasc. Dans un papier non publié [Dot12], V. Dotsenko a montré la koszulité de ces deux opérades. Ce résultat implique la proposition suivante.

Proposition 3.3.19. *Les hyperarbres creux décorés par $\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}$ sont liés à l'opérade Λ par :*

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}(t,p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots)&=t^{-1}\Lambda\left(t^{-1},tp_1,\ldots,t^ip_i,\ldots\right)\\&=\Sigma\Sigma_t\Lambda\left(t^{-1},p_1,\ldots\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Le corollaire 3.1.14 donne la relation suivante, comme $\mathrm{Comm}\circ\Sigma\,\mathrm{Lie}=p_1$:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}\right)^{-1}&=\frac{\mathrm{Comm}}{1+\mathrm{Comm}\circ tp_1},\\&=\left(\prod_{k\geq1}\exp\left(p_k/k\right)-1\right)\times\prod_{k\geq1}\exp\left(-t^kp_k/k\right).\end{aligned}$$

Puisque l'opérade Λ est Koszul, elle vérifie $\Sigma\,\mathrm{Pasc}\circ\Lambda=p_1$, ce qui donne la relation :

$$\begin{aligned}tp_1=&\prod_{k\geq1}\exp\left(-\frac{p_k}{k}\circ\Lambda\left(t,p_1,\ldots,p_i,\ldots\right)\right)\\&\times\prod_{k\geq1}\exp\left(\frac{t^k}{k}p_k\circ\Lambda\left(t,p_1,\ldots,p_i,\ldots\right)\right)-1.\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant t par t^{-1} dans cette expression, nous obtenons, comme $1 = t \times t^{-1}$:

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{t} &= \prod_{k\geq 1} \exp\left(-\frac{t^k}{k} p_k \circ t^{-1}\Lambda\left(t^{-1}, p_1, \dots,\right)\right) \\ &\left(\prod_{k\geq 1} \exp\left(\frac{p_k}{k} \circ t^{-1}\Lambda\left(t^{-1}, p_1, \dots,\right)\right) - 1\right) \\ &= \left(\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}\right)^{-1} \circ t^{-1}\Lambda\left(t^{-1}, p_1, \dots, p_i, \dots\right).\end{aligned}$$

En composant par tp_1, nous obtenons que $\Sigma\Sigma_t\Lambda\left(t^{-1}, p_1, \dots\right)$ est l'inverse de $\left(\mathbf{Z}^c_{\widehat{\Sigma\,\mathrm{Lie}}}\right)^{-1}$ pour le pléthysme. □

3.4 Généralisations : hyperarbres bidécorés

3.4.1 Définitions des hyperarbres bidécorés et de leurs variations enracinées et pointées

Dans cette partie, nous généralisons la décoration des arêtes étudiée précédemment à une décoration des arêtes et du voisinage des sommets.

Définition 3.4.1. Étant données deux espèces ou espèces linéaires $\mathcal{S}_e$ et $\mathcal{S}_v$, un *hyperarbre bidécoré (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux)* est obtenu à partir d'un hyperarbre (resp. enraciné, pointé en une arête, pointé en une arête et un sommet, creux) dont les arêtes sont décorées par $\mathcal{S}_e$, en choisissant pour tout sommet v de H un élément de $\mathcal{S}_v(E_v)$, où E_v est l'ensemble des arêtes contenant v.

Un *hyperarbre enraciné bidécoré gauche* est obtenu à partir d'un hyperarbre enraciné dont les arêtes sont décorées par $\mathcal{S}_e$, en choisissant pour tout sommet v de H un élément de $\mathcal{S}'_v(E_v)$, où E_v est l'ensemble des arêtes contenant v.

Remarquons que quand $\mathcal{S}_v$ est l'espèce Comm, les hyperarbres enracinés bidécorés et bidécorés gauches sont du même type : des hyperarbres enracinés décorés.

L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des hyperarbres (resp. enracinés, pointés en une arête, pointés en une arête et un sommet, creux) bidécorés sur I est une espèce, appelée l'espèce des hyperarbres (resp. enracinés, pointés en une arête, pointés en une arête et un sommet, creux) $(\mathcal{S}_e, \mathcal{S}_v)$-bidécorés et notée $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$ (resp. $\mathcal{H}^{Ap}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$)

L'application qui associe à un ensemble fini I l'ensemble des hyperarbres enracinés bidécorés gauches est une espèce, appelée espèce des hyperarbres enracinés $(\mathcal{S}_e, \mathcal{S}_v)$-bidécorés gauches, et notée $\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$.

Exemple 3.4.2. Sur le côté droit de la figure 3.14 est représenté un exemple d'hyperarbre bidécoré, avec le voisinage de ses sommets décoré par l'espèce des listes non vides Assoc et ses arêtes décorées par l'espèce des ensembles pointés non vides Perm. Le sommet pointé de chaque arête est représenté avec une étoile à côté. L'ordre des arêtes autour d'un sommet est donné par les nombres près de chaque sommet. Par exemple, autour du sommet 9, l'arête $\{8, 9\}$ est la première de la liste, l'arête $\{10, 9\}$ est la deuxième et l'arête $\{11, 9\}$ est la troisième et dernière.

Sur le côté gauche de la figure 3.14, nous avons représenté un exemple d'hyperarbre enraciné bidécoré, avec ses arêtes décorées par l'espèce des cycles et le voisinage de chaque sommet décoré par l'espèce des ensembles pointés non vides Perm. Quand le sommet n'est que dans une arête, cette arête est l'élément pointé de la décoration. Autrement, nous indiquons l'arête pointée à l'aide d'une étoile $*$. Par exemple, dans le voisinage du sommet 15, l'arête pointée est l'arête $\{12, 15\}$, qui est aussi pointée dans le voisinage du sommet 12.

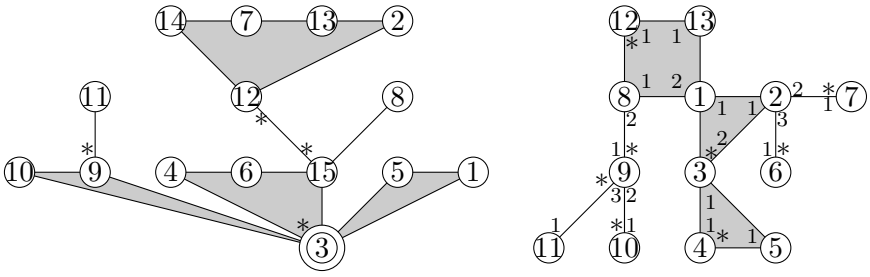


FIGURE 3.14 – Hyperarbres bidécorés.

Nous pouvons donner la définition équivalente suivante dans les cas creux et pointé en une arête.

Définition 3.4.3. Étant donné un sommet v, il y a une arête contenant v qui est la plus proche de l'arête pointée ou creuse de H : nous l'appelons la *branche* de v. Alors, un *hyperarbre pointé en une arête (et éventuellement en un sommet) bidécoré* (resp. *hyperarbre creux bidécoré*) est obtenu à partir d'un hyperarbre H pointé en une arête (et éventuellement en un sommet) (resp. creux) en choisissant pour chaque sommet v de H un élément de $\mathcal{S}'_v\left(E_v^l\right)$, où E_v^l est l'ensemble des arêtes contenant v, différentes de la branche.

Exemple 3.4.4. Nous décorons un hyperarbre pointé en une arête et un sommet sur le côté gauche de la figure 3.15 par l'espèce de cycles dans les arêtes et autour des sommets. Cet hyperarbre est équivalent à l'hyperarbre plan représenté sur le côté droit de la figure 3.15 où les sommets et les arêtes sont ordonnés dans la liste d'après leur place dans le plan (avec un sens de rotation horaire). Pour tous les sommets différents de la racine, l'arête venant de la racine vers le sommet est la branche du sommet et les autres arêtes forment une liste.

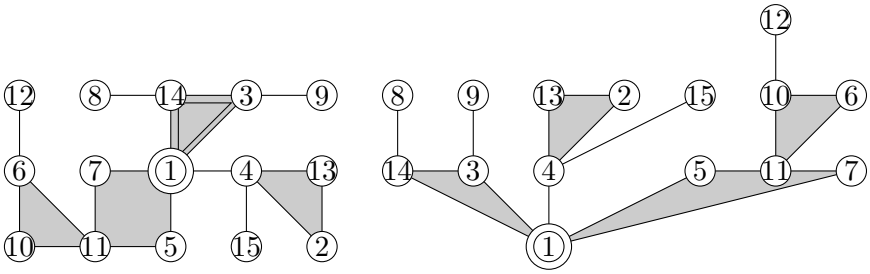


FIGURE 3.15 – Hyperarbre bidécoré enraciné.

3.4.2 Relations entre espèces

Principe de dissymétrie

Nous utilisons le principe de dissymétrie de la proposition 3.1.6. Comme la décoration autour des sommets est définie de la même manière pour tous les types d'hyperarbres, le principe de dissymétrie est encore valide pour les hyperarbres bidécorés.

Proposition 3.4.5 (Principe de dissymétrie pour les hyperarbres bidécorés)**.** *Étant données deux espèces $\mathcal{S}_e$ et $\mathcal{S}_v$, la relation suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} + \mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = \mathcal{H}^{Ap}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} + \mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}. \tag{3.23}$$

Équations fonctionnelles

Les espèces précédentes sont liées par la proposition suivante.

Proposition 3.4.6. *Considérons l'espèce $\mathcal{S}_e$, telle que $\mathcal{S}_e(\emptyset) = \mathcal{S}_e(\{1\}) = \emptyset$, et l'espèce $\mathcal{S}_v$, telle que $\mathcal{S}_v(\emptyset) = \emptyset$ et $|\mathcal{S}_v(\{1\})| = 1$. Les espèces $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{Ap}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$, $\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$ et $\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}$ satisfont :*

$$t\mathcal{H}^{Ap}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = X + X \cdot \left(\mathcal{S}_v \circ t\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}\right), \tag{3.24}$$

$$t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = X + X \cdot \left((\mathcal{S}'_v - 1) \circ t\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}\right), \tag{3.25}$$

$$\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = \mathcal{S}'_e \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}, \tag{3.26}$$

$$\mathcal{H}^{a}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = \mathcal{S}_e \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}, \tag{3.27}$$

$$\mathcal{H}^{pa}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = \mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} \cdot t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}. \tag{3.28}$$

Démonstration.
- Le cas d'un hyperarbre à un seul sommet est trivial. Pour des hyperarbres plus gros, nous séparons l'étiquette de la racine : elle correspond à l'espèce singleton X. Il reste alors un hyperarbre avec un creux à la place de la racine, contenu dans au moins une arête. Par définition d'un hyperarbre bidécoré, ces arêtes sont munies d'une $\mathcal{S}_v$-structure. Nous obtenons un ensemble muni d'une $\mathcal{S}_v$-structure d'hyperarbres creux aux arêtes décorées par $\mathcal{S}_e$ et aux sommets décorés par $\mathcal{S}_v$.
- Ce cas ne diffère du cas précédent que par la structure autour de la racine, qui est une $\mathcal{S}'_v$-structure et non une $\mathcal{S}_v$-structure comme dans le cas précédent.
- La troisième relation est obtenue en pointant les sommets de l'arête creuse, puis brisant cette arête : nous obtenons une forêt non vide d'hyperarbres enracinés décorés. L'ensemble des racines est une $\mathcal{S}'_e$-structure et induit cette structure sur l'ensemble des hyperarbres : nous obtenons une $\mathcal{S}'_e$-structure dans laquelle tous les éléments sont des hyperarbres enracinés décorés. Les arêtes restantes autour de la racine sont alors munies d'une $\mathcal{S}'_v$-structure héritée de la $\mathcal{S}_v$-structure initialement autour de la racine. Comme cette opération est réversible et ne dépend pas de l'étiquetage des sommets de l'hyperarbre creux, c'est un isomorphisme d'espèces.
- La quatrième relation est obtenue en pointant les sommets de l'arête pointée, puis en brisant cette arête : nous obtenons une forêt non vide d'hyperarbres enracinés décorés. L'ensemble des racines est une $\mathcal{S}_e$-structure et induit cette structure sur l'ensemble des hyperarbres : nous obtenons une $\mathcal{S}_e$-structure dans laquelle tous les éléments sont des hyperarbres enracinés décorés. Les arêtes restantes autour de la racine sont alors munies d'une $\mathcal{S}'_v$-structure héritée de la $\mathcal{S}_v$-structure initialement autour de la racine. Comme cette opération est réversible et ne dépend pas de l'étiquetage des sommets de l'hyperarbre pointé en une arête, c'est un isomorphisme d'espèces.
- La dernière équation est obtenue en décorant le voisinage des sommets de part et d'autres de l'égalité de la proposition 3.1.13. □

Corollaire 3.4.7. *À l'aide des équations* (3.25) *et* (3.26) *de la proposition 3.4.6, nous obtenons :*

$$\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = \mathcal{S}'_e \circ \left(X + X \cdot \left[(\mathcal{S}'_v - 1) \circ t\mathcal{H}^{c}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}\right]\right),$$
$$t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v} = X + X \cdot \left[(\mathcal{S}'_v - 1) \circ t\mathcal{S}'_e \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathcal{S}_e,\mathcal{S}_v}\right].$$

Remarque 3.4.8. Les hyperarbres décorés sont des cas particuliers des arborescences R-enrichies introduites par G. Labelle dans [Lab81], avec $R = \mathcal{S}'_v \circ \mathcal{S}'_e$.

3.4.3 Cas particuliers d'hyperarbres bidécorés et lien avec le poset des hyperarbres

Dans le chapitre 2, nous avons relié le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres avec une série formelle HAL définie par F. Chapoton dans l'article [Cha07]. Nous donnons maintenant une interprétation combinatoire de HAL en termes d'hyperarbres bidécorés. Comme ces séries ont été inspirées par celles des *hyperarbres cycliques*, nous étudions d'abord le lien entre les hyperarbres cycliques et les hyperarbres bidécorés.

Hyperarbres cycliques

Dans l'article [Cha07], les *hyperarbres cycliques* sont définis comme des hyperarbres avec, pour chaque sommet v, un ordre cyclique sur les arêtes contenant v. L'espèce associée est notée HAC. Cette définition correspond à celle des hyperarbres bidécorés obtenus en prenant l'espèce des ensembles d'au moins deux éléments $\mathrm{Comm} - X$ pour $\mathcal{S}_e$ et l'espèce des cycles Cycle pour $\mathcal{S}_v$.

Comme pour les hyperarbres usuels, nous considérerons des hyperarbres cycliques enracinés, pointés en une arête et pointés en une arête et un sommet, dont les espèces associées sont respectivement notées HAC^p, HAC^a et HAC^{pa}. Avec ces définitions, HAC^a et $\mathcal{H}^a_{\mathrm{Comm,Cycle}}$, et aussi HAC^{pa} et $\mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm,Cycle}}$ sont isomorphes parce que dans ces définitions, le pointage et la décoration commutent. Comparons les relations pour trouver d'autres liens entre les différents types d'hyperarbres.

D'une part, les espèces définies par F. Chapoton vérifient les relations suivantes :

$$\mathrm{HAC}^{pa} = t^{-1}X \cdot (\mathrm{Assoc} \circ t\, \mathrm{YC})\,,$$

avec YC définie par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{YC} &= \mathrm{Comm} \circ (X + t\,\mathrm{HAC}^{pa})\,,\\
\mathrm{HAC}^a &= (\mathrm{Comm} - X) \circ (X + t\,\mathrm{HAC}^{pa})\,,\\
\mathrm{HAC}^p &= t^{-1}X\ \mathrm{Cycle} \circ t\,\mathrm{YC},\\
\mathrm{HAC} &= \mathrm{HAC}^a + \mathrm{HAC}^p - \mathrm{HAC}^{pa}\,.
\end{aligned}$$

Alors que, d'autre part, les hyperarbres bidécorés vérifient :

$$\begin{aligned}
t\mathcal{H}^{Ap}_{\mathrm{Comm,Cycle}} &= X + X \cdot \left(\mathrm{Cycle} \circ t\mathcal{H}^{c}_{\mathrm{Comm,Cycle}}\right),\\
t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm,Cycle}} &= X + X \cdot \left(\mathrm{Assoc} \circ t\mathcal{H}^{c}_{\mathrm{Comm,Cycle}}\right),\\
\mathcal{H}^{c}_{\mathrm{Comm,Cycle}} &= \mathrm{Comm} \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
\mathcal{H}^{a}_{\mathrm{Comm,Cycle}} &= (\mathrm{Comm} - X) \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
\mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm,Cycle}} &= \mathcal{H}^{c}_{\mathrm{Comm,Cycle}} \cdot t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
\mathcal{H}_{\mathrm{Comm,Cycle}} &= \mathcal{H}^{Ap}_{\mathrm{Comm,Cycle}} + \mathcal{H}^{a}_{\mathrm{Comm,Cycle}} - \mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm,Cycle}}.
\end{aligned}$$

En comparant ces équations, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{HAC}^a &= \mathcal{H}^{a}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
X + t\,\mathrm{HAC}^{pa} &= t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
\mathrm{YC} &= \mathcal{H}^{c}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
\mathrm{HAC}^{pa} &= \mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm,Cycle}},\\
\mathrm{HAC}^{p} &= t^{-1}X + \mathcal{H}^{Ap}_{\mathrm{Comm,Cycle}}.
\end{aligned}$$

Étudions maintenant le cas des séries HAL.

Le poset des hyperarbres

Les séries HAL, HAL^p, HAL^a et HAL^{pa} définies dans [Cha07] satisfont les relations suivantes, qui les caractérisent :

$$\begin{aligned} t\,\mathrm{HAL}^{pa} &= p_1 \times \Sigma\,\mathrm{Assoc} \circ t\,\mathrm{Comm} \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{pa})\,, \\ t\,\mathrm{HAL}^{p} &= p_1 \times \Sigma\,\mathrm{Lie} \circ t\,\mathrm{Comm} \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{pa})\,, \\ \mathrm{HAL}^{a} &= (\mathrm{Comm} - p_1) \circ (p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{pa})\,, \\ \mathrm{HAL} &= \mathrm{HAL}^{a} + \mathrm{HAL}^{p} - \mathrm{HAL}^{pa}\,. \end{aligned}$$

Nous relions ces séries aux séries indicatrices de cycles d'hyperarbres bidécorés obtenues en considérant l'espèce des ensembles d'au moins deux éléments $\mathrm{Comm} - X$ pour $\mathcal{S}_e$ et l'espèce $\Sigma\,\mathrm{Lie}$ pour $\mathcal{S}_v$. Pour ce choix de décorations, les séries indicatrices de cycles d'hyperarbres bidécorés satisfont :

$$\begin{aligned} t\mathcal{H}^{Ap}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} &= X + X \cdot \Sigma\,\mathrm{Lie} \circ t\,\mathrm{Comm} \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} &= X + X \cdot (-\Sigma\,\mathrm{Assoc}) \circ t\,\mathrm{Comm} \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathcal{H}^{a}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} &= (\mathrm{Comm} - X) \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} &= \left(\mathrm{Comm} \circ t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}\right) \cdot t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathcal{H}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} &= \mathcal{H}^{Ap}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} + \mathcal{H}^{a}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}} - \mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}. \end{aligned}$$

En comparant ces équations, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 + (-t)\,\mathrm{HAL}^{pa} &= t\mathcal{H}^{Bp}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathrm{HAL}^{a} &= \mathcal{H}^{a}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathrm{HAL}^{pa} &= \mathcal{H}^{pa}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathrm{HAL}^{p} &= t^{-1}p_1 + \mathcal{H}^{Ap}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}, \\ \mathrm{HAL} &= t^{-1}p_1 + \mathcal{H}_{\mathrm{Comm},\Sigma\,\mathrm{Lie}}. \end{aligned}$$

Ainsi, le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres est identique au caractère pour l'action du groupe symétrique sur l'ensemble des hyperarbres dont les sommets sont décorés par $\Sigma\,\mathrm{Lie}$.

3.5 Perspectives

3.5.1 Composition dans les hyperarbres décorés

L'ensemble des partitions décorées par une opérade est munie d'une structure naturelle de poset, héritée de la composition de l'opérade (cf. [Val07]). Étant données deux arêtes a_1 et a_2, possédant un sommet commun et décorées par une espèce $\mathcal{P}$, serait-il possible de définir une composition permettant de déterminer une décoration cohérente par $\mathcal{P}$ de l'arête $a_1 \cup a_2$, comme c'est la cas pour $\mathcal{P} = \mathrm{Perm}$ et $\mathcal{P} = \mathrm{Comm}$? Cette composition permettrait notamment de définir des posets d'hyperarbres décorés par des espèces.

CHAPITRE 4

Algèbre de Hopf d'incidence des posets des hyperarbres et des partitions

Sommaire

4.1 Généralités sur les algèbres de Hopf d'incidence 86
4.2 Algèbre de Hopf d'incidence des posets en triangle et en diamant . 87
4.3 Algèbre de Hopf d'incidence des posets des hyperarbres 90

En 1994, W. Schmitt a introduit dans son article [Sch94] la notion d'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}_F$ associée à une famille donnée F de posets satisfaisant certaines conditions de clôture. Utilisant la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_F$, il est possible de définir une convolution sur les caractères de cette algèbre. Les nombres de Möbius des posets de la famille F peuvent alors être calculés en utilisant les caractères sur l'algèbre de Hopf d'incidence.

Cependant, les algèbres de Hopf d'incidence de W. Schmitt ne sont définies que pour des posets bornés. Nous introduisons dans cette partie une méthode pour calculer certains caractères d'autres types de posets, appelés posets en triangle et en diamant. Les posets en diamant sont des posets bornés alors que les posets en triangle ont un minimum mais n'ont pas de maximum. Si nous considérons la famille héréditaire engendrée par les posets en diamant et les posets en triangle augmentés, c'est-à-dire les posets en triangle auquel on ajoute un maximum, il est possible de construire l'algèbre de Hopf d'incidence associée $\mathcal{H}$. Le coproduit de la bigèbre $\mathcal{B}$ engendrée par les classes d'isomorphismes de la famille héréditaire associée aux posets en triangle et en diamant peut être relié au coproduit de l'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$: cette relation nous permet d'identifier le calcul de certaines applications de la bigèbre $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ avec la convolution des caractères sur l'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$. L'avantage de cette méthode est d'alléger et de simplifier les calculs de caractères.

Nous appliquons ensuite cette méthode aux posets des hyperarbres. Pour ce faire, nous prouvons dans la troisième partie de ce chapitre le critère suivant sur α_i et π_j pour l'existence d'un hyperarbre avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j :

$$\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i = \sum_{j=2}^{l} j\pi_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{j=2}^{l} \pi_j - 1. \tag{4.1}$$

Ce critère permet alors de calculer le coproduit dans la bigèbre $\mathcal{B}_{HT}$ associée aux posets des hyperarbres h_n et aux posets des partitions p_n. Le coproduit est donné par la formule suivante :

Théorème. *Soit $\mathcal{P}(n)$, l'ensemble des uplets $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et $\pi = (\pi_2, \ldots, \pi_l)$ satisfaisant les équations* (4.1)*. Le coproduit de h_n dans $\mathcal{B}_{HT}$ est donné par :*

$$\Delta(h_n) = \frac{1}{n} \sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}(n)} \frac{n! \times k! \times n!}{\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j! \prod_{i\geq 1}(i-1)!^{\alpha_i}\alpha_i!} \prod_{i=2}^{k} p_i^{\alpha_i} \otimes \prod_{j=2}^{l} h_j^{\pi_j},$$

avec $k = \sum_{j\geq 2} \pi_j - 1$.

Cette formule est liée au nombre d'hyperarbres de valences et tailles des arêtes fixées, qui a aussi été déterminé par M. Bousquet-Mélou et G. Chapuy dans [BMC12] (voir aussi [Sta01]), en terme d'arbres bicolorés, et par R. Bacher dans [Bac11] en termes d'hyperarbres. La première étape de ce calcul est de montrer qu'il se réduit au calcul du nombre de façons de construire un hyperarbre à partir d'une π-partition crochue. Nous montrons ensuite à l'aide d'un codage de Prüfer que cette construction est codée par des mots. Finalement, nous comptons ces mots.

Le nombre de Möbius du poset de hyperarbres sur n sommets a été calculé par J. McCammond et J. Meier en 2004 dans l'article [MM04]. F. Chapoton a calculé son polynôme caractéristique dans [Cha07] et a conjecturé l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres, qui a été prouvée dans [Oge13a]. Nous donnons une nouvelle démonstration du calcul des nombres de Möbius des posets des hyperarbres. Ce calcul donne la proposition suivante.

Proposition. *L'égalité suivante, reliant le nombre d'arbres sur $n-1$ sommets au nombre d'hyperarbres sur n sommets, avec valence α et taille des arêtes π, est vérifiée :*

$$(n-1)^{n-2} = \sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}(n)} \frac{(-1)^{i\alpha_i - 1}}{n} \times \frac{n!}{\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!} \times \frac{k! \times n!}{\prod_{i\geq 1}\alpha_i!},$$

où $\mathcal{P}(n)$ est l'ensemble des couples d'uplets $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \pi = (\pi_2, \ldots, \pi_l))$ satisfaisant les équations (4.1)*.*

4.1 Généralités sur les algèbres de Hopf d'incidence

Nous introduisons dans cette section des notions concernant les algèbres de Hopf d'incidence, qui seront nécessaires par la suite.

Toutes les définitions rappelées ici sont issues de l'article de W. Schmitt [Sch94].

Une famille de posets $\mathcal{P}$ est *close par intervalles*, si elle est non vide et si, pour tout $P \in \mathcal{P}$ et $x \leq y \in P$, l'intervalle $[x, y]$ appartient à $\mathcal{P}$. Une relation d'équivalence $\sim$ sur une famille close par intervalles $\mathcal{P}$ est dite *compatible avec l'ordre* si pour toute relation $P \sim Q$, il existe une bijection $\phi : P \to Q$ telle que $[0_P, x] \sim [0_Q, \phi(x)]$ et $[x, 1_P] \sim [\phi(x), 1_Q]$, pour tout $x \in \mathcal{P}$. L'isomorphisme de posets est un exemple de relations compatibles avec l'ordre : c'est la relation compatible avec ordre qui sera utilisée dans ce chapitre.

Étant donné K un anneau unitaire commutatif, et $\sim$ une relation compatible avec l'ordre sur une famille close par intervalles $\mathcal{P}$, nous considérons l'ensemble quotient $\mathcal{P}/\sim$ et nous notons $[P]$ la classe d'équivalence par $\sim$ du poset $P \in \mathcal{P}$. Nous définissons une cogèbre $C(\mathcal{P})$ comme suit.

Proposition 4.1.1. *[Sch94, Theorem 3.1] Notons $C(\mathcal{P})$ le K-module libre engendré par $\mathcal{P}/\sim$. Nous définissons les applications linéaires $\Delta : C(\mathcal{P}) \to C(\mathcal{P}) \otimes C(\mathcal{P})$ et $\epsilon : C(\mathcal{P}) \to K$ par :*

$$\Delta[P] = \sum_{x\in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

et

$$\epsilon[P] = \delta_{|P|,1},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Alors, $C(\mathcal{P})$ est une cogèbre ayant une comultiplication Δ et une counité ϵ.

Le *produit direct* de posets P_1 et P_2 est le produit cartésien d'ensembles $P_1 \times P_2$ partiellement ordonné par la relation $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ dans P_i, pour $i = 1, 2$. Une *famille héréditaire* est une famille close par intervalles qui est aussi close par produit direct. Considérons $\sim$ une relation compatible avec l'ordre de $\mathcal{P}$ qui soit aussi une congruence de semi-groupe, c'est-à-dire telle que si $P \sim Q$ dans $\mathcal{P}$, alors $P \times R \sim Q \times R$ et $R \times P \sim R \times Q$, pour tout $R \in \mathcal{P}$. Cette relation est *réduite* si, quand $|R| = 1$, on a $P \times R \sim R \times P \sim P$. Ces hypothèses garantissent la bonne définition du produit sur le quotient. Une relation compatible avec l'ordre sur une famille héréditaire $\mathcal{P}$ qui est aussi une congruence réduite est appelée *relation de Hopf* sur $\mathcal{P}$. L'isomorphisme entre posets est une relation de Hopf.

Proposition 4.1.2 ([Sch87])**.** *Soit $\sim$ une relation de Hopf sur une famille héréditaire $\mathcal{P}$. Alors $H(\mathcal{P}) = (C(\mathcal{P}), \times, \Delta, \epsilon)$, muni d'un antipode S est une algèbre de Hopf sur K.*

Nous ne détaillons pas ici l'antipode S et renvoyons à [Sch87] pour une description plus fournie.

Exemple 4.1.3. L'algèbre de Hopf d'incidence engendrée par la famille des posets des sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ est l'algèbre des polynômes $K[x]$, munie du coproduit suivant :

$$\Delta(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}.$$

Nous considérerons ici le cas du corps $K = \mathbb{Q}$.

L'ensemble des morphismes d'algèbres, appelés *caractères*, entre $H(\mathcal{P})$ et $\mathbb{Q}$ peut être muni d'une structure de groupe. Étant donnés deux caractères ϕ et ψ, la convolution de ϕ et ψ est définie sur tout élément P de $H(\mathcal{P})$ par :

$$\phi * \psi(P) = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)}),$$

où le coproduit est noté suivant la convention de Sweedler $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$. L'unité de ce groupe est la counité de l'algèbre de Hopf $H(\mathcal{P})$.

4.2 Algèbre de Hopf d'incidence des posets en triangle et en diamant

Nous établissons dans cette section le lien entre l'algèbre de Hopf d'incidence de posets dits en triangle et en diamant et une bigèbre plus petite que nous construisons.

4.2.1 Présentation des posets en triangle et en diamant et de leurs algèbres de Hopf d'incidence

Considérons une famille F_0 de posets $\{(d_i)_{i\geq 1}, (t_j)_{j\geq 3}\}$, tels que d_1 soit le poset trivial, d_i soit un intervalle pour tout $i \geq 2$ et t_j soit un poset avec un minimum mais aucun maximum. Les posets $(d_i)_{i\geq 1}$ sont appelés posets en diamant et les posets $(t_j)_{j\geq 2}$ sont appelés posets en triangle. Nous notons $\widehat{t_j}$ les posets en triangle augmentés, bornés par l'addition d'un maximum $\widehat{1}$. Nous supposons de plus que :

- tout intervalle fermé d'un poset en diamant peut s'écrire comme un produit de posets en diamant, (Propriété de décomposition 1)

– tout intervalle fermé d'un poset en triangle peut s'écrire comme un produit de posets en diamant, (Propriété de décomposition 2 a)
– tout intervalle semi-ouvert $[t, \widehat{1})$ d'un poset en triangle augmenté $\widehat{t_j}$ peut s'écrire comme un produit de posets en triangle. (Propriété de décomposition 2 b)

Nous notons F_1 la famille héréditaire engendrée par F_0 : du fait des propriétés de décomposition énoncées plus haut, cette famille est constituée des produits directs de posets en triangle et en diamant. Comme les posets en diamant et en triangle possèdent tous un minimum, tous les posets de F_1 possèdent un minimum, certains étant des intervalles et d'autres non.

Pour appliquer le procédé de construction de W. Schmitt, nous considérons maintenant la famille héréditaire F_2 engendrée par les éléments de la famille F_1, augmentés d'un maximum quand ils n'en possèdent pas déjà : F_2 est alors une famille héréditaire d'intervalles. Nous appliquons maintenant la construction de W. Schmitt à cette famille en considérant l'isomorphisme entre posets comme relation réduite compatible avec l'ordre pour obtenir une algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$. Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, le calcul de certains caractères sur $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ peut se réduire à des calculs sur une bigèbre plus petite. En effet, l'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ est librement engendrée en tant qu'algèbre par les posets en diamant et les posets en triangle augmentés d'un maximum, ainsi que par les produits de posets en diamant et triangle augmentés d'un maximum. La bigèbre considérée ne sera elle librement engendrée en tant qu'algèbre que par les posets en diamant et les posets en triangle. Le coproduit dans la bigèbre sera ainsi plus simple, car il fera intervenir moins de termes.

4.2.2 Une bigèbre plus petite construite sur les posets en diamant et en triangle

La famille F_1 est close par produits directs et par intervalles, c'est-à-dire que tout intervalle fermé d'un poset de la famille appartient à cette famille. Nous construisons une bigèbre (non co-unitaire) depuis cette famille en employant la méthode que W. Schmitt utilise pour construire une algèbre de Hopf d'incidence à partir d'une famille héréditaire de posets.

Considérons l'isomorphisme de posets comme relation de Hopf $\sim$, l'ensemble $\tilde{F_1} = F_1/\sim$ est un monoïde, dont le produit est induit par le produit direct entre posets et dont l'élément neutre 1 correspond à la classe de l'intervalle à un élément. Notons $V(F_1)$ le K-module libre engendré par $\tilde{F_1}$. La structure de monoïde sur $\tilde{F_1}$ induit une structure d'algèbre sur $V(F_1)$, isomorphe à l'algèbre monoïdale de $\tilde{F_1}$ sur K. Comme F_1 est l'ensemble des monômes sur les posets en triangle et en diamant de F_0, l'algèbre $V(F_1)$ est engendrée par les classes d'isomorphismes des posets en triangle et en diamant de F_0. Tous les éléments de F_1 possèdent un minimum : nous pouvons alors munir l'algèbre $V(F_1)$ du coproduit suivant défini sur chaque classe d de posets bornés et chaque classe t de posets non bornés possédant un minimum par :

$$\Delta(d) = \sum_{x \in d} [\widehat{0}_d, x] \otimes [x, \widehat{1}_d],$$

et

$$\Delta(t) = \sum_{x \in t} [\widehat{0}_t, x] \otimes [x, \widehat{1}_{\widehat{t}}).$$

Ce coproduit est bien défini car l'intervalle semi-ouvert $[x, \widehat{1}_{\widehat{t}})$ appartient à $V(F_1)$ d'après la propriété de décomposition 2.b. C'est de plus un morphisme d'algèbres puisqu'un intervalle d'un produit de posets peut s'écrire comme un produit d'intervalles.

Remarquons que les posets en diamant sont des intervalles alors que les posets en triangle ne le sont pas : ces deux types de posets n'appartiennent donc pas à la même classe d'isomorphismes. Nous notons $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ la bigèbre obtenue.

La sous-algèbre $\mathcal{D}_\diamond$ engendrée par les posets en diamant est aussi une sous-cogèbre d'après la propriété de décomposition 1 : c'est donc une sous-bigèbre de l'algèbre de Hopf d'incidence

des posets en triangle et en diamant. D'après la propriété de décomposition 2.a, la sous-algèbre $\mathcal{T}_\triangledown$ de $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ engendrée par les posets en triangle est un comodule à droite sur $\mathcal{D}_\diamond$. Grâce à la définition du coproduit et à la structure de produit direct sur les posets, le coproduit sur $\mathcal{T}_\triangledown$ reste un morphisme d'algèbres.

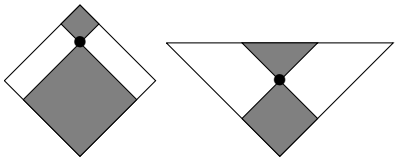


FIGURE 4.1 – Intervalles dans les posets en diamant et triangle : tous sont des produits de posets en diamant, sauf l'intervalle semi-ouvert en haut des posets en triangle, qui est produit de posets en triangle.

Nous montrons que le calcul de certains caractères sur l'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ peut se réduire à des calculs sur la bigèbre $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$.

4.2.3 Résultats sur le calcul de certains caractères sur l'algèbre de Hopf d'incidence des posets en triangle et en diamant

Nous définissons l'application linéaire suivante :

$$\lambda : \mathcal{B}_{\diamond,\triangledown} \to \mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$$

qui envoie la classe d'isomorphisme c_{d_i} d'un poset en diamant d_i de $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ sur la classe d'isomorphisme c_{d_i} de d_i dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ et qui envoie la classe d'isomorphisme c_{t_j} d'un poset en triangle t_j dans $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ sur la classe d'isomorphisme $c_{\widehat{t_j}}$ du poset en triangle augmenté $\widehat{t_j}$ dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$.

Cette application linéaire est bien définie. En effet, si deux posets en diamant sont dans la même classe d'isomorphisme dans $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$, alors ils sont isomorphes et ont donc aussi la même classe d'isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$. Si deux posets en triangle ont la même classe d'isomorphisme dans $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$, alors ils sont isomorphes et donc, les posets augmentés associés sont aussi isomorphes : ces posets auront la même classe d'isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$.

Nous voudrions calculer certains caractères sur les classes d'isomorphismes des posets en diamant d_i de F_0 et des posets en triangle augmenté $\widehat{t_j}$ issus des posets en triangle t_j de F_0 dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$. Comme F_0 est une sous-famille de F_1, à chaque élément de F_0 correspond une classe d'isomorphisme de $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ qui est envoyée sur la classe d'isomorphisme de l'élément correspondant dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$: les éléments sur lesquels nous voulons calculer les caractères appartiennent donc bien à l'image de λ.

Nous remarquons de plus que la fibre d'une classe d'isomorphisme dans l'image de λ est composée d'au plus une classe d'isomorphisme de posets en triangle et d'une classe d'isomorphisme de posets en diamant. En effet, si deux classes d'isomorphismes de posets en triangle, ou deux classes d'isomorphismes de posets en diamant, sont envoyés par λ sur la même classe d'isomorphisme, alors ces classes d'isomorphismes sont égales.

Considérons deux caractères α et β sur $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ tels qu'il existe deux nombres rationnels ϵ_α, ϵ_β et deux applications $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ de $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ dans $\mathbb{Q}$ satisfaisant :

$$\alpha(\lambda(c_{d_i})) = \widetilde{\alpha}(c_{d_i}),\ \alpha(\lambda(c_{t_j})) = \epsilon_\alpha \widetilde{\alpha}(c_{t_j}),$$

et

$$\beta(\lambda(c_{d_i})) = \widetilde{\beta}(c_{d_i}),\ \beta(\lambda(c_{t_j})) = \epsilon_\beta \widetilde{\beta}(c_{t_j}),$$

pour toute classe d'isomorphisme c_{d_i} de posets en diamant d_i de F_0 et pour toute classe d'isomorphisme c_{t_j} de posets en triangle t_j de F_0.

Alors, la convolution de α et β peut être calculée grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *La convolution des caractères α et β sur $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ est donnée par :*

$$\alpha * \beta(\lambda(c_{d_i})) = \sum \widetilde{\alpha}(c_{d_i}^{(1)})\widetilde{\beta}(c_{d_i}^{(2)}),$$

et

$$\alpha * \beta(\lambda(c_{t_j})) = \epsilon_\beta \sum \widetilde{\alpha}(c_{t_j}^{(1)})\widetilde{\beta}(c_{t_j}^{(2)}) + \epsilon_\alpha \widetilde{\alpha}(c_{t_j}),$$

où $\Delta(c_{d_i}) = \sum c_{d_i}^{(1)} \otimes c_{d_i}^{(2)}$ et $\Delta(c_{t_j}) = \sum c_{t_j}^{(1)} \otimes c_{t_j}^{(2)}$ dans $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$.

Cette proposition permet de ramener les calculs de caractères sur $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ à des calculs de caractères sur $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$, engendrée par moins d'éléments.

Démonstration. La classe d'isomorphisme $\lambda(c_{d_i})$ est la classe d'isomorphisme d'un poset en diamant d_i dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ par définition de λ. De plus, le coproduit de $\lambda(c_{d_i})$ dans $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ et de c_{d_i} dans $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$ sont identiques, par définition du coproduit. Comme α et $\widetilde{\alpha}$ d'une part et β et $\widetilde{\beta}$ d'autre part coïncident sur $\lambda(c_{d_i})$ et c_{d_i} respectivement, nous obtenons la première égalité.

Pour obtenir la deuxième égalité, remarquons que la classe d'isomorphisme $\lambda(c_{t_j})$ correspond à la classe d'isomorphisme d'un poset en triangle augmenté $\widehat{t_j}$ par définition de λ. Ainsi, le coproduit de $\lambda(c_{t_j})$ sur $\mathcal{H}_{\diamond,\triangledown}$ possède un terme de plus que le coproduit de c_{t_j} sur $\mathcal{B}_{\diamond,\triangledown}$, dû au fait que le poset $\widehat{t_j}$ a un élément de plus que le poset t_j (son maximum). Ce terme supplémentaire est $\lambda(c_{t_j}) \otimes 1$. Tous les autres termes de chacun des coproduits peuvent être liés en associant $\lambda(c_{t_j})$ à l'unique classe d'isomorphisme de posets en triangle dans sa fibre c_{t_j}. De plus, les posets dans la partie gauche du coproduit de $\lambda(c_{t_j})$ sont en diamant, excepté pour le terme qui n'appartient pas au coproduit de c_{t_j}. Comme α et $\widetilde{\alpha}$ coïncident sur les posets en diamant, nous obtenons comme voulu :

$$\alpha * \beta(\lambda(c_{t_j})) = \sum \widetilde{\alpha}(c_{t_j}^{(1)})\epsilon_\beta\widetilde{\beta}(c_{t_j}^{(2)}) + \epsilon_\alpha \widetilde{\alpha}(c_{t_j}).$$ □

Remarquons que les hypothèses sur α et β sont identiques : le théorème précédent donne donc aussi la formule pour $\beta * \alpha$.

Nous utiliserons ce résultat dans la section 4.3.3 pour calculer certains caractères sur les posets des hyperarbres.

4.3 Algèbre de Hopf d'incidence des posets des hyperarbres et des partitions

Nous appliquons la section précédente au cas des posets des hyperarbres et des partitions. Nous travaillerons maintenant avec $K = \mathbb{Q}$.

4.3.1 Algèbre de Hopf d'incidence des posets d'hyperarbres

Nous étudions maintenant l'algèbre de Hopf d'incidence de la famille des posets d'hyperarbres. La notion d'hyperarbre et de poset des hyperarbres est rappelée dans la section 1.3.

Certains intervalles dans les posets d'hyperarbres se décomposent en produit d'un autre type de poset : les posets de partitions. Le *poset des partitions (de V)* est un poset sur l'ensemble des partitions d'un ensemble V. Une partition π_1 est plus petite qu'une partition π_2 si chaque part de π_1 est l'union de parts de π_2. Le poset des partitions sur n sommets Π_n est basé sur l'ensemble des partitions d'un ensemble de cardinal n.

Nous avons besoin du résultat suivant de J. McCammond et J. Meier sur les intervalles dans le poset des hyperarbres sur n sommets.

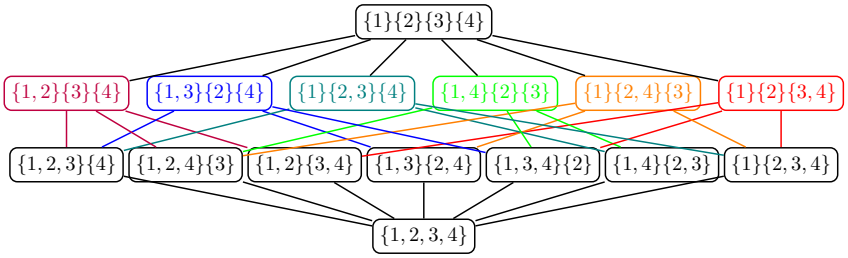


FIGURE 4.2 – Le poset Π_4

Lemme 4.3.1 (Lemma 2.5,[MM04]). *Soit τ un hyperarbre sur n sommets. Dans le poset $\widehat{HT_n}$,*

1. *l'intervalle $[\widehat{0}, \tau]$ est un produit direct de posets de partitions, avec un facteur Π_j pour chaque sommet de τ de valence j ;*
2. *l'intervalle semi-ouvert $[\tau, \widehat{1})$ est un produit direct de posets d'hyperarbres, avec un facteur $\mathrm{HT_j}$ pour chaque arête de τ de taille j.*

Considérons l'algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}_{\widehat{HT}} = (\mathcal{H}_{\widehat{HT}}, \times, \epsilon, \eta, \Delta, S)$ obtenue par la construction de la partie 4.2.1 en considérant l'ensemble des posets des partitions $(p_i)_{i\geq 1}$ comme ensemble de posets en diamant et l'ensemble des posets des hyperarbres $(h_n)_{n\geq 3}$, où h_n est la notation abrégée pour HT_n, comme ensemble de posets en triangle. En effet, p_1, le poset des partitions sur un élément et le poset des hyperarbres sur deux éléments HT_2 sont isomorphes au poset trivial, les posets des partitions sont des intervalles et les posets d'hyperarbres possèdent un minimum mais aucun maximum. De plus, c'est un résultat classique que tout intervalle du poset des partitions d'un ensemble est isomorphe à un produit de posets des partitions. Ceci combiné avec le lemme 4.3.1 implique que cette famille vérifie les propriétés de décomposition et donc tous les pré-requis de la partie 4.2.1. Nous noterons $\widehat{h_n}$ les posets d'hyperarbres augmentés $\widehat{HT_n}$.

Considérons $\mathcal{H}^*_{\widehat{HT}}$, le groupe des caractères $\chi : \mathcal{H}_{\widehat{HT}} \to \mathbb{Q}$. Notre but est de calculer les nombres de Möbius des posets des hyperarbres augmentés en utilisant les techniques classiques de caractères. Une bonne référence pour ce genre de calcul de caractères, et de nombres de Möbius, pour les posets de partitions est l'article [Spe97] de R. Speicher. Pour calculer le caractère qui associe à chaque poset de $\mathcal{H}_{\widehat{HT}}$ son nombre de Möbius, nous utilisons la proposition 4.2.1.

Nous notons $\mathcal{B}_{HT}$ la bigèbre définie dans la partie 4.2.2. Grâce au lemme 4.3.1(2), nous obtenons que cette bigèbre n'est pas seulement engendrée comme algèbre par les classes d'isomorphismes des posets de partitions et des intervalles $[\tau, \widehat{1})$, pour tout hyperarbre τ, mais aussi par un ensemble plus petit : les classes d'isomorphismes des posets de partitions p_n et des posets d'hyperarbres h_n. De plus, ces posets sont gradués : deux posets de partitions p_n et p_m (resp. d'hyperarbres h_n et h_m) sont isomorphes si et seulement si $n = m$. Comme les p_i et h_j sont deux à deux dans des classes d'isomorphismes disjointes et que nous nous concentrerons sur ces classes, nous utiliserons les mêmes notations pour les classes d'isomorphismes de posets et pour les posets eux-mêmes.

Ainsi, la convolution des caractères α et β sur $\mathcal{H}_{\widehat{HT}}$ peut être calculée en utilisant la bigèbre $\mathcal{B}_{HT}$.

Proposition 4.3.2. *La convolution de caractères α et β sur $\mathcal{H}_{\widehat{HT}}$ peut être calculée en utilisant les applications $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ de $\mathcal{B}_{HT}$ dans $\mathbb{Q}$, si elles existent et satisfont les équations suivantes, pour tout $i \geq 1$ et $n \geq 3$:*

$$\alpha(p_i) = \widetilde{\alpha}(p_i), \ \ \alpha(\widehat{h}_n) = \epsilon_\alpha \widetilde{\alpha}(h_n),$$
$$\beta(p_i) = \widetilde{\beta}(p_i), \ \ \beta(\widehat{h}_n) = \epsilon_\beta \widetilde{\beta}(h_n),$$

avec $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta \in \mathbb{Q}$.

Ce calcul est donné par :

$$\alpha * \beta(p_i) = \sum \widetilde{\alpha}(p_i^{(1)})\widetilde{\beta}(p_i^{(2)}),$$

et

$$\alpha * \beta(\widehat{h_j}) = \epsilon_\beta \sum \widetilde{\alpha}(h_j^{(1)})\widetilde{\beta}(h_j^{(2)}) + \epsilon_\alpha \widetilde{\alpha}(h_j),$$

où $\Delta(p_i) = \sum p_i^{(1)} \otimes p_i^{(2)}$ *et* $\Delta(h_j) = \sum h_j^{(1)} \otimes h_j^{(2)}$ *dans* $\mathcal{B}_{HT}$.

Démonstration. C'est un corollaire de la proposition 4.2.1 appliqué à p_i et h_j. □

Exemple 4.3.3. Nous considérons le poset $\widehat{HT_3}$ représenté sur la figure 4.3.

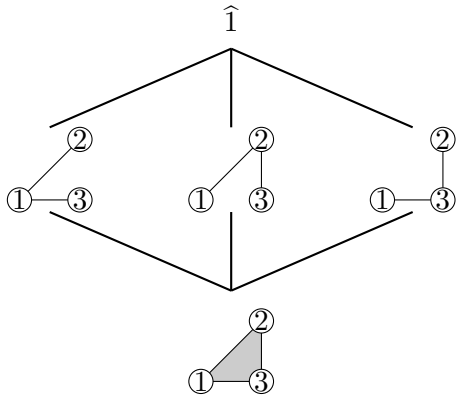


Figure 4.3 – Le poset $\widehat{HT_3}$

Le calcul du coproduit donne :

$$\Delta(\widehat{h_3}) = 1 \otimes \widehat{h_3} + 3\ p_2 \otimes \widehat{h_2} + \widehat{h_3} \otimes 1, \text{ dans } \mathcal{H}_{\widehat{HT}},$$
$$\Delta(h_3) = 1 \otimes h_3 + 3\ p_2 \otimes h_2, \text{ dans } \mathcal{B}_{HT}.$$

Nous exprimons de manière explicite le coproduit dans la section suivante.

4.3.2 Calcul du coproduit

Nous calculons maintenant le coproduit Δ dans l'algèbre $\mathcal{B}_{HT}$. Nous notons $p_1 = 1$ l'élément neutre de $\mathcal{B}_{HT}$ pour le produit, c'est-à-dire le poset trivial.

Le coproduit des classes d'isomorphismes des posets de partitions p_n est déjà connu. Son expression est rappelée par exemple dans l'article de W. Schmitt [Sch94].

Proposition 4.3.4. *[Sch94, Example 14.1] : Le coproduit sur les classes d'isomorphismes des posets de partitions est donné par :*

$$\Delta\left(\frac{p_n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n j_i = k, \sum_{i=1}^n i j_i = n}} \binom{k}{j_1,\ldots,j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{i!}\right)^{j_i} \otimes \frac{p_k}{k!},$$

où p_1 est le poset trivial.

Nous calculons maintenant le coproduit de h_n. D'après la structure des posets des hyperarbres et le lemme 4.3.1, la partie gauche du coproduit d'une classe d'isomorphismes de posets des hyperarbres h_n est le produit de classes d'isomorphismes de posets de partitions et la partie

droite est un produit de classes d'isomorphismes de posets des hyperarbres h_k. Nous commençons par établir un critère pour décrire les produits tensoriels apparaissant dans le coproduit de h_n. Nous écrivons le coproduit comme suit :

$$\Delta(h_n) = \sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}_n} c^n_{\alpha,\pi} p_\alpha \otimes h_\pi, \tag{4.2}$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des couples (α, π) tels que $c^n_{\alpha,\pi}$ ne soit pas nul, et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ et $\pi = (\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_l)$, $p_\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ et $h_\pi = h_2^{\pi_2} h_3^{\pi_3} \ldots h_l^{\pi_l}$. Le coefficient $c^n_{\alpha,\pi}$ correspond au nombre d'hyperarbres dans HT_n avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j, pour tout $i \geq 1$ et $j \geq 2$.

Nous donnons maintenant une caractérisation de l'ensemble $\mathcal{P}_n$. Nous considérons les hyperarbres comme des arbres bipartis étiquetés par $[\![1, n]\!]$, comme dans [MM96]. Un arbre biparti étiqueté par $[\![1, n]\!]$ est un arbre T muni d'une injection de $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble de ses sommets tel que l'image de $[\![1, n]\!]$ contienne tous les sommets de valence 1 et tel que pour toute arête dans T exactement une de ses extrémités appartienne à l'image de $[\![1, n]\!]$. Les sommets étiquetés d'un arbre biparti correspondent aux sommets de l'hyperarbre associé et les autres sommets correspondent aux arêtes de l'hyperarbre. Nous notons α_i le nombre de sommets étiquetés de valence i et π_j le nombre de sommets non étiquetés de valence j (ou, de manière équivalente, le nombre d'arêtes de taille j dans l'hyperarbre). Un hyperarbre et son arbre biparti associé sont représentés sur la figure 4.4. Pour cet exemple, nous avons $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 1$, $\alpha_1 = 5$ et $\alpha_2 = 2$. Nous voulons déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et $(\pi_2, \ldots, \pi_l)$ pour qu'il existe un hyperarbre avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j, pour tout $i \geq 1$ et $j \geq 2$.

FIGURE 4.4 – Hyperarbre et arbre biparti associé.

Nous obtenons alors le critère suivant de non-annulation de $c^n_{\alpha,\pi}$, exprimé en terme d'hyperarbres.

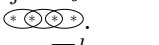
Proposition 4.3.5. *Étant donnés deux uplets $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et $\pi = (\pi_2, \ldots, \pi_l)$, et $n = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, il existe un hyperarbre avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i = \sum_{j=2}^{l} j\pi_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{j=2}^{l} \pi_j - 1. \tag{4.3}$$

Nous retardons la démonstration de la proposition pour l'illustrer à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 4.3.6. Pour $n = 4$, la deuxième équation de (4.3) implique $\sum_{j=2}^l \pi_j \leq 3$, i.e. $\sum_{i=1}^k i\alpha_i \leq 6$. Les α possibles sont :

- $\alpha = (4)$, alors nous obtenons la condition $\sum_{j=2}^l \pi_j = 1$ donc le seul π possible est $\pi = (0, 0, 1)$. La forme d'hyperarbre correspondante est : .
- $\alpha = (3, 1)$, alors nous obtenons la condition $\sum_{j=2}^l \pi_j = 2$ donc le seul π possible est $\pi = (1, 1)$. La forme d'hyperarbre correspondante est : .

- $\alpha = (2, 2)$, alors nous obtenons la condition $\sum_{j=2}^{l} \pi_j = 3$ donc le seul π possible est $\pi = (3)$. La forme d'hyperarbre correspondante est :  .
- $\alpha = (3, 0, 1)$, alors nous obtenons la condition $\sum_{j=2}^{l} \pi_j = 3$ donc le seul π possible est $\pi = (3)$. La forme d'hyperarbre correspondante est : .

Démonstration de la proposition 4.3.5. Supposons qu'il existe un tel hyperarbre. Tout sommet a une valence fixée donc, en comptant les sommets, nous obtenons l'équation :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n.$$

Par construction, tout sommet non étiqueté est relié à un sommet étiqueté. Nous obtenons alors l'égalité suivante en comptant les arêtes :

$$\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i = \sum_{j=2}^{l} j\pi_j. \tag{4.4}$$

De plus, à chaque arbre biparti peut être associé un complexe simplicial dont la dimension des faces n'excède pas 1. Ce complexe simplicial est connexe et sans cycle. Sa caractéristique d'Euler est donc égale à 1 et s'exprime :

$$\chi = 1 = \sum_{j\geq 2} \pi_j - \sum_{j\geq 2} j\pi_j + \sum_{i\geq 1} \alpha_i. \tag{4.5}$$

Une preuve plus combinatoire suggérée par N. Thiéry revient à remarquer qu'il y a une arête de moins que de sommets dans un arbre. Ces équations sont équivalentes aux équations (4.3).

Nous pouvons aussi déduire de la seconde équation de la proposition l'expression suivante pour π_2 en termes de π_j pour $j \geq 3$:

$$\pi_2 = n - 1 - \sum_{j\geq 3} (j-1)\pi_j.$$

Montrons maintenant que cette condition est aussi suffisante. Nous considérons un ensemble de α_i sommets étiquetés, chacun muni de i demi-arêtes et π_j sommets non étiquetés, chacun muni de j demi-arêtes, avec $i \geq 1$, $j \geq 2$, tels que les équations (4.3) soient satisfaites. Comme l'équation (4.4) est vérifiée, nous pouvons associer les sommets ensemble, en reliant deux-à-deux les demi-arêtes de sommets étiquetés et non étiquetés, de manière à former un graphe biparti T étiqueté par $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire un graphe muni d'une injection de $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble de ses sommets telle que l'image de $[\![1, n]\!]$ contienne tous les sommets de valence 1 et telle que, pour toute arête de T, exactement une de ses extrémités appartienne à l'image de $[\![1, n]\!]$.

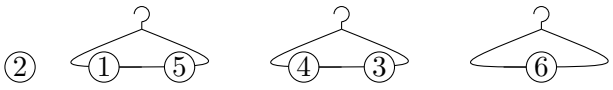
Comme l'équation (4.5) est vérifiée, la caractéristique d'Euler du graphe vaut 1. Cette caractéristique est aussi égale à la différence entre le nombre de composantes connexes et le nombre de cycles du graphe. Si le graphe est connexe, alors, il ne possède aucun cycle : c'est un arbre et nous venons de construire l'arbre biparti voulu. L'hyperarbre associé a les valences et tailles d'arêtes voulues.

Si le graphe n'est pas connexe, alors il y a un cycle dans l'une des composantes connexes. Une arête dans cette composante connexe peut donc être enlevée, sans pour autant augmenter le nombre de composantes connexes. Cette arête est entre un sommet non-étiqueté u_1 et un sommet étiqueté l_1. Coupons une arête dans une autre composante connexe entre deux sommets u_2 et l_2. Nous obtenons alors un graphe dans lequel chaque élément de l'ensemble $\{u_1, l_1, u_2, l_2\}$ a une demi-arête non reliée. En liant u_2 avec l_1 et u_1 avec l_2, nous obtenons un graphe biparti satisfaisant les conditions requises, avec une composante connexe de moins. En effet, nous avons

peut-être déconnecté la composante connexe de u_2 et l_2 en supprimant l'arête, mais nous recréons un chemin entre u_2 et l_2 en reliant les sommets, en utilisant le chemin existant entre u_1 et l_1. Comme cette opération diminue le nombre de composantes connexes, nous pouvons la répéter jusqu'à obtenir l'hyperarbre vérifiant les conditions requises. □

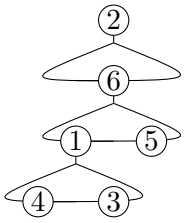
Nous voulons maintenant calculer le coefficient $c^n_{\alpha,\pi}$ quand il ne s'annule pas. Nous le faisons par une méthode bijective. Étant donné un uplet de nombres $\pi = (\pi_2, \dots, \pi_m)$, nous appelons *$\pi$-partition crochue* une partition formée d'un bloc d'un sommet et de π_j autres blocs avec un crochet et $j-1$ sommets, pour tout $j \geq 2$.

Exemple 4.3.7. Une π-partition crochue P, pour $\pi = (1, 2)$:



.

Rappelons que le pétiole d'une arête dans un hyperarbre enraciné est le sommet de l'arête le plus proche de la racine. L'assemblage des éléments d'une π-partition crochue en un hyperarbre enraciné peut être vu comme un assemblage de cintres et de patères, où les sommets sont des patères et les arêtes privées de leur pétiole peuvent être vues comme des cintres (portant eux-mêmes des patères). Chaque cintre est alors accroché à la patère correspondant au pétiole de l'arête. Nous représentons ici l'hyperarbre T de l'exemple 4.3.9 :



.

Pour des raisons de place, nous noterons X le crochet et représenterons cette π-partition crochue comme suit :

$$P = (2) \quad (X|1\ 5) \quad (X|4\ 3) \quad (X|6).$$

Enraciner un hyperarbre en un sommet, c'est-à-dire choisir un sommet dans cet hyperarbre, donne l'équation suivante, en remplaçant $c^n_{\alpha,\pi}$ par $\frac{c^{n\bullet}_{\alpha,\pi}}{n}$ dans l'équation (4.2) :

$$\Delta(h_n) = \frac{1}{n} \sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}_n} c^{n\bullet}_{\alpha,\pi} p_\alpha \otimes h_\pi,$$

où $c^{n\bullet}_{\alpha,\pi}$ correspond au nombre d'hyperarbres enracinés dans HT_n avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j, pour tout $i \geq 1$ et $j \geq 2$.

Fixons π et α et notons Π_{PC} l'ensemble des π-partitions crochues et $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi}$, l'ensemble des hyperarbres enracinés avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j. Le cardinal de $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi}$ est $c^{n\bullet}_{\alpha,\pi}$. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{H}^p_{\alpha,\pi} \to \Pi_{\mathrm{PC}}$ définie en prenant pour chaque arête e l'ensemble de tous les sommets de e, excepté le plus proche de la racine, et en ajoutant un crochet à cet ensemble. Si nous ajoutons le singleton formé par la racine à cet ensemble d'ensembles crochus, nous obtenons une π-partition crochue. En effet, tous les ensembles, sauf un de cardinal un, ont un crochet et la taille de chaque ensemble crochu est un de moins que la taille de l'arête associée.

Étant donné P dans Π_{PC}, nous appelons F_P la fibre $\varphi^{-1}(P)$. Les fibres de deux éléments distincts de Π_{PC} sont nécessairement disjointes puisque leurs images par φ sont différentes. De plus, tout élément dans $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi}$ a une image dans Π_{PC} par φ. Le coefficient $c^{n\bullet}_{\alpha,\pi}$ est alors la

somme des cardinaux de ses fibres disjointes. Comme nous le verrons dans la démonstration, le cardinal d'une fibre est indépendant de la π-partition crochue considérée : nous le notons $d^n_{\alpha,\pi}$. Nous dirons que l'on peut *construire* un hyperarbre H à partir d'une π-partition crochue P si $\varphi(H) = P$.

Relions maintenant les hyperarbres aux partitions crochues :

Lemme 4.3.8. *Le coefficient $c^n_{\alpha,\pi}$ est relié à $d^n_{\alpha,\pi}$ par :*

$$c^n_{\alpha,\pi} = \frac{1}{n} \times \frac{n!}{\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!} \times d^n_{\alpha,\pi}. \tag{4.6}$$

Démonstration. Nous voulons calculer le cardinal $c^{n\bullet}_{\alpha,\pi}$ de $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi}$. Considérons l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi}$. Par définition de l'application φ, qui ne dépend pas de l'étiquetage des sommets, cette action induit une action du groupe symétrique sur l'ensemble Π_{PC}.

L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble des partitions crochues de type π est bien définie, puisque elle ne change pas la taille des blocs des partitions, et transitive. Nous notons $(\mathcal{O}_j)_{1\leq j\leq p}$ les orbites de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi}$. La fibre F_P a une composante f^P_j dans chaque orbite $\mathcal{O}_j$. Nous résumons les notations sur le diagramme suivant :

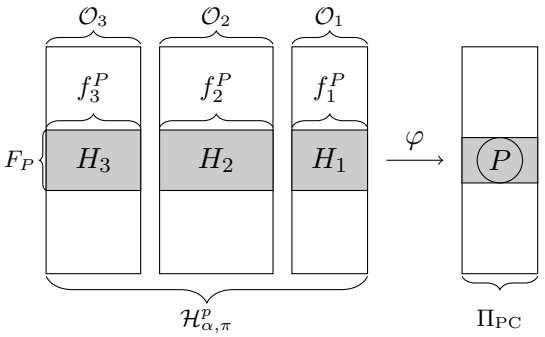


Figure 4.5 – L'application φ.

Prenons un hyperarbre H_j dans chaque f^P_j. La formule des classes appliquée à $\mathcal{O}_j$ donne :

$$n! = |\mathcal{O}_j| \times |\operatorname{Aut}_{H_j}|,$$

où $|\operatorname{Aut}_{H_j}|$ est le cardinal du groupe d'automorphisme des hyperarbres enracinés H_j.

Comme $\mathcal{H}^p_{\alpha,\pi} = \bigsqcup_{j=1}^p \mathcal{O}_j$, nous obtenons la relation :

$$c^{n\bullet}_{\alpha,\pi} = n! \times \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|\operatorname{Aut}_{H_j}|}. \tag{4.7}$$

Considérons le groupe G_P des permutations de $[\![1,n]\!]$ fixant P. Le nombre de tels permutations est $\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!$. Le groupe G_P agit sur la fibre F_P transitivement sur chaque f^P_j. En effet, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ envoie un hyperarbre H de f^P_k sur un hyperarbre H' de f^P_k, alors, comme $\varphi(H) = \varphi(\sigma(H)) = P$, σ stabilise P. Nous pouvons donc appliquer la formule des classes à f^P_j qui donne :

$$|f^P_j| \times |\operatorname{Stab}_{G_P} H_j| = |G_P| = \prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!, \tag{4.8}$$

où $\operatorname{Stab}_{G_P} H_j = \{\sigma \in G_P | \sigma(H_j) = H_j\}$.

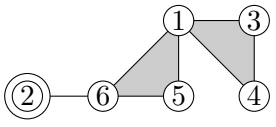
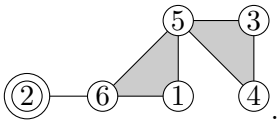
Nous montrons que $\mathrm{Stab}_{G_P} H_j = \mathrm{Aut}_{H_j}$. Comme $G_P \subseteq \mathfrak{S}_n$, il en découle que $\mathrm{Stab}_{G_P} H_j \subseteq \mathrm{Aut}_{H_j}$. Considérons σ dans Aut_{H_j}, alors $\varphi(\sigma(H_j)) = \varphi(H_j) = P$ et $\varphi(\sigma(H_j)) = \sigma(P) : \sigma$ stabilise P. Nous obtenons ainsi la relation $\mathrm{Stab}_{G_P} H_j = \mathrm{Aut}_{H_j}$. Combiné aux équations (4.7) et (4.8), nous obtenons le résultat, puisque $d^n_{\alpha,\pi} = \sum_{j=1}^{p} |f_j^P|$. □

Exemple 4.3.9. Nous considérons la π-partition crochue P suivante :

$$P = (2) \quad (X|1\ 5) \quad (X|4\ 3) \quad (X|6),$$

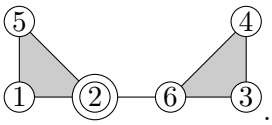
avec $\pi = (1, 2)$, où $X|$ représente le crochet du bloc.

Pour $\alpha = (4, 2)$, nous pouvons construire les hyperarbres enracinés suivants (et beaucoup d'autres) :

$T =$  et $T' =$  .

Nous décrivons un exemple d'action du groupe G_P sur la fibre de P. Considérant T et T', qui sont dans la fibre de P, la permutation (3 4) fixe T et T' mais la permutation (1 5) envoie T sur T'. Alors T et T' sont dans la même orbite.

L'hyperarbre T'' suivant n'est pas dans la même orbite que T et T' :

 .

Nous voulons maintenant calculer le nombre $d^n_{\alpha,\pi}$ de constructions d'un hyperarbre ayant α_j sommets de valence j à partir d'une π-partition crochue P_π. Ce nombre est aussi le cardinal de la fibre $\varphi^{-1}(P_\pi)$. Il est donné par une bijection introduite par B. Selivanov dans [Sel72] et R. Bacher dans [Bac11], que nous rappelons ici :

Lemme 4.3.10. *Étant donné un couple (α, π) dans $\mathcal{P}_n$ et une π-partition crochue P_π, il existe une bijection entre l'ensemble des constructions d'un hyperarbre enraciné ayant α_j sommets de valence j depuis P_π et l'ensemble des mots sur $[\![1, n]\!]$, de longueur $\sum_{j\geq 2} \pi_j - 1$, avec $\sum_{i\geq 2} \alpha_i$ lettres différentes, où α_i lettres apparaissent $i - 1$ fois, pour tout $i \geq 2$.*

Démonstration. Nous prouvons ce lemme en utilisant une démonstration de type code de Prüfer. Nous voulons compter le nombre d'hyperarbres enracinés différent pouvant être construits à partir d'une π-partition crochue P_π et qui ont α_i sommets de valence i pour tout $i \geq 1$. Étant donné un tel hyperarbre enraciné, nous construisons récursivement une variante de code de Prüfer.

Si l'hyperarbre n'a qu'une arête de taille n, alors, nous séparons la racine de l'arête et y mettons un crochet à la place : nous obtenons deux blocs, l'un avec la racine et l'autre crochu de taille $n-1$. Étant donnée une π-partition crochue, nous assemblons les deux blocs de la partition en une arête et nous obtenons un hyperarbre. Le mot associé est le mot vide, qui est de longueur 0.

Si l'hyperarbre enraciné H a plus d'une arête, nous considérons l'ensemble des feuilles de l'hyperarbre, c'est-à-dire l'ensemble des arêtes dont tous les sommets sauf le plus proche de la racine, appelé le *pétiole*, sont de valence 1. Il est possible d'ordonner l'ensemble des feuilles suivant leur élément non partagé minimal. Le pétiole de la feuille minimale sera la première lettre w_1 du mot w associé à H. Supposons que ce sommet soit de valence v. Nous notons s_m la taille de la feuille minimale. En supprimant cette feuille et les $s_m - 1$ sommets différents du pétiole

présents dans cette feuille, nous obtenons un hyperarbre enraciné H' sur $n - s_m + 1$ sommets dans lequel la valence du pétiole w_1 a diminué de un, le nombre de sommets de valence 1 a diminué de $s_m - 1$ et tous les autres sommets ont même valence qu'avant. Comme les sommets de valence 1 n'apparaissent pas dans le mot associé à l'hyperarbre, la suppression de ces sommets ne fera que diminuer d'un le nombre d'occurrences de w_1 dans le mot associé à H' par rapport au mot associé à H. Si w' est le mot associé à H', nous obtenons la relation $w = w_1 w'$.

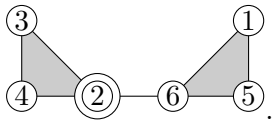
De plus, la partition crochue associée à H' peut être obtenue à partir de P_π en supprimant le bloc crochu de P_π contenant les sommets de valence 1 dans la feuille minimale. Nous construisons alors le mot w' associé à H' : c'est un mot de longueur $\sum_{j\geq 2} \pi_j - 2$, avec $\sum_{i\geq 2} \alpha_i$ lettres différentes, où α_i lettres apparaissent $i-1$ fois pour tout $i \notin \{v, v-1\}$, $\alpha_v - 1$ lettres apparaissent $v-1$ fois et $\alpha_{v-1} + 1$ lettres apparaissent $v-2$ fois. Remarquons que le sommet w_1 est de valence $v-1$ dans H' donc il apparaît $v-2$ fois dans w'. Alors, la lettre w_1 apparaît $v-1$ fois dans le mot $w = w_1 w'$ et le mot $w = w_1 w'$ vérifie les conditions requises.

Réciproquement, si nous avons une π-partition crochue et un mot w satisfaisant les conditions requises, nous pouvons construire l'hyperarbre enraciné associé en ordonnant les blocs crochus dont les éléments ne sont pas des lettres de w suivant leur élément minimal. Nous attachons ensuite le bloc minimal à la dernière lettre du mot, qui est un élément d'un autre bloc et nous supprimons cette lettre. Nous répétons ces opérations jusqu'à ce que le mot soit vide. Nous obtenons finalement un hyperarbre enraciné et cette opération est l'inverse de la construction ci-dessus. Ainsi, nous obtenons une bijection entre les constructions d'hyperarbres enracinés à partir d'une partition crochue et l'ensemble des mots du lemme. □

Remarque 4.3.11. Remarquons que cette démonstration est un raffinement de la démonstration pour les arbres en boîtes 3.2.1.

Exemple 4.3.12. Considérant la partition crochue P et les hyperarbres T, T' et T'' de l'exemple 4.3.9, les mots respectivement associés à la construction de T, T' et T'' à partir de P sont : 1 6, 5 6, et 2 6.

L'hyperarbre dont la construction depuis P est associé au mot 6 2 est :



Il y a 36 mots associés à la π-partition crochue : 6 correspondant à des hyperarbres avec un sommet de valence 3 et les autres de valence 1, et 30 correspondant à des hyperarbres avec deux sommets de valence 2 et les autres de valence 1.

Lemme 4.3.13. *Le nombre de mots de k lettres, sur un alphabet de taille n, avec α_i lettres répétées $i-1$ fois est :*

$$d^n_{\alpha,\pi} = \frac{k! \times n!}{\prod_{i\geq 2}(i-1)!^{\alpha_i}\alpha_i!}. \tag{4.9}$$

Démonstration. Le nombre de mots sur $[\![1, n]\!]$, de longueur k, avec $\sum_{i\geq 2} \alpha_i$ lettres différentes, où α_i lettres apparaissent $i-1$ fois pour tout $i \geq 2$ est :

$$\frac{k! \times n!}{\prod_{i\geq 1}(i-1)!^{\alpha_i}\alpha_i!}.$$

En effet, il y a $\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}$ façons de choisir les lettres de ces mots. L'ensemble des lettres du mot peut être muni d'un ordre total (nous en choisissons un). Alors, si p positions dans le mot ont déjà été choisies, nous avons $\binom{k-p}{i}$ choix de positions pour une lettre apparaissant i fois. Le résultat vient de la combinaison de ces énumérations. □

Grâce au lemme, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.3.14. *Si les uplets $\alpha = (\alpha_1, \dots)$ et $\pi = (\pi_2, \dots)$ satisfont les équations* (4.3)*, le nombre d'hyperarbres avec α_i sommets de valence i et π_j arêtes de taille j, avec $i \geq 1$ et $j \geq 2$ est donné par :*

$$c^n_{\alpha,\pi} = \frac{1}{n} \times \frac{n!}{\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!} \times \frac{k! \times n!}{\prod_{i\geq 1}(i-1)!^{\alpha_i}\alpha_i!}, \tag{4.10}$$

avec $k = \sum_{j\geq 2}\pi_j - 1 = \sum_{i\geq 2}(i-1)\alpha_i$ et $n = \sum_{i\geq 1}\alpha_i = \sum_{j\geq 2}(j-1)\pi_j + 1$.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence des lemmes 4.3.8, 4.3.10 et 4.3.13. □

Cette proposition associée à l'équation (4.2) donne une formule explicite pour le coproduit.

Théorème 4.3.15. *Soit $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des uplets $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ et $\pi = (\pi_2, \dots, \pi_l)$ satisfaisant l'équation* (4.1)*. Le coproduit de h_n dans $\mathcal{B}_{HT}$ est donné par :*

$$\Delta(h_n) = \frac{1}{n} \times \sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}(n)} \frac{n!}{\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!} \times \frac{k! \times n!}{\prod_{i\geq 1}(i-1)!^{\alpha_i}\alpha_i!} \prod_{i=2}^{k} p_i^{\alpha_i} \otimes \prod_{j=2}^{l} h_j^{\pi_j},$$

avec $k = \sum_{j\geq 2}\pi_j - 1$.

Exemple 4.3.16. Nous pouvons maintenant calculer le coproduit de quelques h_n. En utilisant les valeurs de (α, π) pour lesquelles $c^n_{\alpha,\pi}$ est non nul, calculées dans l'exemple 4.3.6, nous obtenons pour h_4 :

$$\begin{aligned}
\Delta h_4 &= \frac{1}{4} \times \frac{4!}{3!} \times \frac{0!4!}{4!} \times p_1^4 \otimes h_4 + \frac{1}{4} \times \frac{4!}{2!} \times \frac{1!4!}{3!} \times p_1^3 p_2 \otimes h_2 h_3 \\
&\quad + \frac{1}{4} \times \frac{4!}{3!} \times \frac{2!4!}{2!2!} \times p_1^2 p_2^2 \otimes h_2^3 + \frac{1}{4} \times \frac{4!}{3!} \times \frac{2!4!}{3!2!} \times p_1^3 p_3 \otimes h_2^3, \\
\Delta h_4 &= 1 \otimes h_4 + 12\ p_2 \otimes h_2 h_3 + 12\ p_2^2 \otimes h_2^3 + 4\ p_3 \otimes h_2^3.
\end{aligned}$$

En sommant les coefficients de ce coproduit, nous obtenons le nombre d'hyperarbres sur 4 sommets attendu, qui est 29.

4.3.3 Calcul du nombre de Möbius des posets des hyperarbres augmentés

Sur n'importe quelle algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$ ayant pour générateurs une famille de posets $(g_n)_{n\geq 1}$, nous définissons les caractères ζ et μ pour tout $n \geq 1$ par :

$$\zeta : g_n \mapsto 1$$

et

$$\mu : g_n \mapsto \mu(g_n),$$

où $\mu(g_n)$ est le nombre de Möbius du poset g_n, dont la définition est rappelée en 1.2.9.

Ces caractères sont les inverses l'un de l'autre. Cela signifie que si ϵ est la counité de $\mathcal{H}$ et $*$ est la convolution de caractères, nous avons :

$$\zeta * \mu = \mu * \zeta = \epsilon.$$

En effet, ces équations viennent des définitions de la convolution et de la fonction de Möbius d'un poset :

$$\mu * \zeta([h,h]) = \mu([h,h]) = 1$$

et

$$\mu * \zeta([h,h']) = \sum_{h\leq x\leq h'} \mu([h,x]) \times 1 = \mu(h,h') + \sum_{h\leq x<h'} \mu(h,x) = 0,$$

pour tout intervalle $[h,h']$, $h < h'$ dans $\mathcal{H}$.

D'après la définition de la fonction de Möbius 1.2.9, $\mu*\zeta$ et $\zeta*\mu$ s'annulent sur tout intervalle non trivial.

Nous voulons calculer le nombre de Möbius des posets des hyperarbres augmentés. Nous utilisons alors la proposition 4.3.2. Pour prouver que les caractères satisfont les hypothèses de la proposition, nous avons besoin de la définition et du lemme suivants.

Définition 4.3.17. Si P est un poset fini avec un unique minimum, alors nous définissons la *fonction somme* par $s(P) = \sum_{x\in P} \mu(\widehat{0}, x)$.

Si $\widehat{P}$ est le poset obtenu à partir de P en lui ajoutant un maximum $\widehat{1}$, alors $\mu(\widehat{P}) = -s(P)$.

Lemme 4.3.18. *[MM04, Lemma 4.4] Si P_i, $i \in [k]$ est une liste de posets finis ayant chacun un minimum et $Q = \prod_{i=1}^{k} P_i$, alors $s(Q) = \prod_{i=1}^{k} s(P_i)$.*

Alors nous pouvons définir deux applications de $\mathcal{B}_{HT}$ dans $\mathbb{Q}$, sur tout poset borné p de $\mathcal{B}_{HT}$ et tout poset h avec un minimum mais sans maximum par :

$$\widetilde{\zeta}(p) = \zeta(p) = 1,\ \widetilde{\zeta}(h) = \zeta(h) = 1,$$

et

$$\widetilde{\mu}(p) = \mu(p),\ \widetilde{\mu}(h) = s(h).$$

Ces applications vérifient la propriété suivante, de par leur définition et le lemme 4.3.18, pour tout $i \geq 2$ et $j \geq 3$:

$$\widetilde{\zeta}(\prod_{i=1}^{k} p_i) = \prod_{i=1}^{k} \widetilde{\zeta}(p_i),\ \widetilde{\zeta}(\prod_{j=1}^{l} h_j) = \prod_{j=1}^{l} \widetilde{\zeta}(h_j),$$

et

$$\widetilde{\mu}(\prod_{i=1}^{k} p_i) = \prod_{i=1}^{k} \widetilde{\mu}(p_i),\ \widetilde{\mu}(\prod_{j=1}^{l} h_j) = \prod_{j=1}^{l} \widetilde{\mu}(h_j).$$

Ces applications vérifient les conditions de la proposition 4.3.2, nous l'appliquons donc dans les sections suivantes. Comme les posets des partitions et des hyperarbres ne sont pas mêlés dans le coproduit d'un poset des hyperarbres, la convolution de μ et de ζ sera donnée par un calcul ne faisant interférer que les valeurs de $\widetilde{\zeta}$ et $\widetilde{\mu}$ sur les posets des partitions et des hyperarbres. La première partie de ce qui suit sera dévolue à l'équation $\zeta * \mu = \epsilon$ et la seconde partie sera dévolue à l'équation $\mu * \zeta = \epsilon$.

Calcul à droite

Dans cette section, nous donnons une démonstration simplifiée du résultat de J. McCammond et J. Meier du calcul des nombres de Möbius des posets des hyperarbres augmentés.

Appliquant la fonction de Möbius sur la partie droite du coproduit, nous obtenons :

$$\zeta * \mu(\widehat{h_n}) = 0,$$

pour tout $n \geq 2$.

Ainsi, appliquant le calcul du coproduit du théorème 4.3.15 et le résultat de la proposition 4.3.2, nous obtenons l'égalité suivante pour $n \geq 2$:

$$0 = -\sum \widetilde{\mu}(h_n^{(2)}) + 1,$$

où $\Delta(h_n) = \sum h_n^{(1)} \otimes h_n^{(2)}$.

Utilisant le lemme 4.3.1, la définition du coproduit sur $\mathcal{B}_{HT}$ et la multiplicativité de $-\mu$, nous obtenons alors :

$$\mu(\widehat{HT_n}) = \sum_{\substack{h \in HT_n,\, i \in ES(h) \\ h > \widehat{0}}} \prod -\mu(\widehat{HT_i}) + (-1)^n, \tag{4.11}$$

où $ES(h)$ est le multiensemble des tailles des arêtes de h.

Le calcul des premiers termes donne :

$$\mu(\widehat{HT_2}) = -1,$$

$$\mu(\widehat{HT_3}) = 3 \times (-\mu(\widehat{HT_2}))^2 - 1 = 2,$$

et

$$\mu(\widehat{HT_4}) = 13 \times (-\mu(\widehat{HT_3})) + 16 \times (-\mu(\widehat{HT_2}))^3 + 1 = -26 + 16 + 1 = -9.$$

Pour obtenir une formule close, nous considérons les séries génératrices exponentielles d'hyperarbres munis d'un poids $-\mu(\widehat{HT_i})$ pour chaque arête de taille i :

$$T(x) = -x + \sum_{n \geq 2} \sum_{h \in HT_n} \prod_{i \in ES(h)} \left(-\mu(\widehat{HT_i})\right) \frac{x^n}{n!},$$

où $ES(h)$ est le multiensemble des taille des arêtes de l'hyperarbre h. Utilisant l'équation (4.11), nous obtenons :

$$T(x) = -x - \sum_{n \geq 2} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - e^{-x}.$$

De plus, L. Kalikow a montré dans [Kal99] que la dérivée de T vérifie l'équation fonctionnelle suivante.

Théorème 4.3.19 (Kalikow)**.** *La série génératrice T vérifie l'équation suivante :*

$$xT'(x) = x \times \exp(y(x)) \text{ où } y(x) = \sum_{j \geq 1} -\mu(\widehat{HT_{j+1}}) \frac{x^j T'(x)^j}{j!}$$

Nous obtenons alors :

$$x = \sum_{j \geq 1} \mu(\widehat{HT_{j+1}}) \frac{x^j e^{-jx}}{j!}.$$

Ceci montre le théorème suivant de J. McCammond et J. Meier.

Théorème 4.3.20. *[MM04, Theorem 5.1] Le nombre de Möbius du poset augmenté des hyperarbres sur n sommets est donné par :*

$$\mu(\widehat{HT_n}) = (-1)^{n-1}(n-1)^{n-2}.$$

Comme l'homologie d'un poset des hyperarbres augmenté est concentrée en degré maximal, ce nombre de Möbius est aussi, au signe près, la dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial du poset. L'action du groupe symétrique sur cette homologie a été calculée dans l'article [Oge13b] et au chapitre 2.

Calcul à gauche

Appliquant la fonction de Möbius sur la partie gauche du coproduit, nous obtenons :

$$\mu * \zeta(\widehat{h_n}) = 0,$$

pour tout $n \geq 2$.

En utilisant la proposition 4.3.2, nous pouvons réécrire ceci pour tout $n \geq 2$ en :

$$0 = \sum \widetilde{\mu}(h_n^{(1)})\widetilde{\zeta}(h_n^{(2)}) - \widetilde{\mu}(h_n).$$

La formule (4.2) pour le coproduit donne :

$$\mu(\widehat{HT_n}) = -\sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}_n} c^n_{\alpha,\pi} \prod (-1)^{(i-1)\alpha_i}(i-1)!^{\alpha_i}.$$

Utilisant les théorèmes 4.3.20 et 4.3.15, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.3.21. *L'égalité suivante, reliant le nombre d'arbres sur $n-1$ sommets au nombre d'hyperarbres sur n sommets, avec valence α et taille des arêtes π, est vérifiée :*

$$(n-1)^{n-2} = \sum_{(\alpha,\pi)\in\mathcal{P}(n)} \frac{(-1)^{i\alpha_i-1}}{n} \times \frac{n!}{\prod_{j\geq 2}(j-1)!^{\pi_j}\pi_j!} \times \frac{k!\times n!}{\prod_{i\geq 1}\alpha_i!},$$

où $\mathcal{P}(n)$ est l'ensemble des couples d'uplets $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \pi = (\pi_2, \ldots, \pi_l))$ satisfaisant :

$$n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{j=2}^{l} (j-1)\pi_j + 1 \quad \text{et} \quad k = \sum_{j=2}^{l} \pi_j - 1 = \sum_{i=1}^{k} (i-1)\alpha_i.$$

Démonstration. Ceci vient du calcul du coproduit, combiné avec les nombres de Möbius des posets augmentés des hyperarbres et des posets de partitions. En effet, le nombre de Möbius du poset des partitions sur n éléments est donné par $(-1)^{n-1}(n-1)!$. □

Exemple 4.3.22. Nous obtenons ainsi, utilisant le calcul du coproduit de l'exemple 4.3.16 :

$$\begin{aligned}\mu(\widehat{HT_4}) &= -(1\times(-1)^{0\times 4}0!^4 + 12\times(-1)^{0\times 2}0!^2\times(-1)^{1\times 1}1!^1 + 12\times(-1)^{1\times 2}1!^2 \\ &\quad + 4\times(-1)^{0\times 1}0!^1\times(-1)^{2\times 1}2!^1, \\ &= -(1-12+12+8) = -9.\end{aligned}$$

Pour $n = 5$, les couples (α, π) possibles, d'après la proposition 4.3.5, sont :

- $(\alpha, \pi) = ((5,0,0,0),(0,0,0,1))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((4,1,0,0),(1,0,1,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((4,1,0,0),(0,2,0,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((4,0,1,0),(2,1,0,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((3,2,0,0),(2,1,0,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((2,3,0,0),(4,0,0,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((4,0,0,1),(4,0,0,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .
- $(\alpha, \pi) = ((3,1,1,0),(4,0,0,0))$: la forme d'hyperarbre correspondante est .

Les coefficients $c^n_{\alpha,\pi}$ correspondants sont donnés, d'après la proposition 4.3.14, par :

- Pour $(\alpha, \pi) = ((5,0,0,0),(0,0,0,1))$, $c^n_{\alpha,\pi} = \frac{1}{5} \times \frac{5!}{4!} \times \frac{1!5!}{5!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi} = 1$.

– Pour $(\alpha,\pi)=((4,1,0,0),(1,0,1,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{3!}\times\frac{1!5!}{4!1!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=20$.
– Pour $(\alpha,\pi)=((4,1,0,0),(0,2,0,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{2!^2 2!}\times\frac{1!5!}{4!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=15$.
– Pour $(\alpha,\pi)=((4,0,1,0),(2,1,0,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{2!2!}\times\frac{2!5!}{4!2!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=30$.
– Pour $(\alpha,\pi)=((3,2,0,0),(2,1,0,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{2!2!}\times\frac{2!5!}{3!2!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=120$.
– Pour $(\alpha,\pi)=((2,3,0,0),(4,0,0,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{4!}\times\frac{3!5!}{2!3!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=60$.
– Pour $(\alpha,\pi)=((4,0,0,1),(4,0,0,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{4!}\times\frac{3!5!}{3!4!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=5$.
– Pour $(\alpha,\pi)=((3,1,1,0),(4,0,0,0))$, $c^n_{\alpha,\pi}=\frac{1}{5}\times\frac{5!}{4!}\times\frac{3!5!}{2!3!}$, d'où $c^n_{\alpha,\pi}=60$.

Nous obtenons ainsi le nombre de Möbius du poset de hyperarbres sur 5 sommets :

$$\begin{aligned}\mu(\widehat{HT_5}) &= -(1\times(-1)^{0\times5}0!^5+20\times(-1)^{0\times4}0!^4\times(-1)^{1\times1}1!^1\\
&\quad+15\times(-1)^{0\times4}0!^4\times(-1)^{1\times1}1!^1+30\times(-1)^{0\times4}0!^4\times(-1)^{2\times1}2!^1\\
&\quad+120\times(-1)^{0\times3}0!^3\times(-1)^{1\times2}1!^2+60\times(-1)^{0\times2}0!^2\times(-1)^{1\times3}1!^3\\
&\quad+5\times(-1)^{0\times4}0!^4\times(-1)^{3\times1}3!^1+60\times(-1)^{0\times3}0!^3\times(-1)^{1\times1}1!^1\times(-1)^{2\times1}2!^1)\\
&= -1+20+15-60-120+60+30+120\\
&= 64.\end{aligned}$$

CHAPITRE 5

Hyperarbres aux arêtes pointées

Sommaire

5.1 Présentation des posets 105
5.2 Caractère Cohen-Macaulay 106
5.3 Homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées 110

Nous avons étudié les posets des hyperarbres dans les chapitres 2 et 4 et les hyperarbres décorés dans la partie 3. Certains ensembles d'hyperarbres décorés peuvent être à leur tour munis d'une structure de poset : c'est le cas des hyperarbres aux arêtes pointées que nous étudions dans cette section. Un *hyperarbre aux arêtes pointées* est un hyperarbre muni, pour chacune de ses arêtes e, d'un sommet distingué de cette arête e. L'ensemble des hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets peut être muni de l'ordre suivant : un hyperarbre P est plus petit qu'un hyperarbre Q si et seulement si les arêtes de Q sont incluses dans les arêtes de P et le pointage d'une arête e de P est choisi parmi le pointage des arêtes de Q contenues dans e.

Après une présentation des posets des hyperarbres aux arêtes décorées, nous montrons qu'ils sont Cohen-Macaulay, c'est-à-dire que leur homologie est concentrée en degré maximal, en montrant qu'ils sont totalement semi-modulaires. Nous déterminons ensuite la dimension de l'unique groupe d'homologie non nul.

Proposition. *La dimension m_i du groupe d'homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées sur i sommets $\widehat{HT_i^{p,\square}}$ est le coefficient de x^{i-1} dans la série $\widetilde{R}$ donnée par le système d'équations fonctionnelles suivant :*

$$\begin{cases} \widetilde{R} & = x \exp\left(\sum_{i\geq 2} i(-m_i)\frac{\widetilde{R}^{i-1}}{(i-1)!}\right), \\ 1-e^{-x} & = \left[\exp\left(\sum_{i\geq 2}(-m_i)\frac{\widetilde{R}^{i-1}}{(i-1)!}\right)-1\right] \times \exp\left(\sum_{i\geq 2}(i-1)(-m_i)\frac{\widetilde{R}^{i-1}}{(i-1)!}\right). \end{cases}$$

5.1 Présentation des posets

Considérons l'ensemble des hyperarbres sur n sommets décorés par l'espèce Perm des ensembles pointés non vides, comme définis au chapitre 3. Ce sont des hyperarbres sur n sommets où pour chaque arête, un sommet est distingué. Ces arêtes sont dites *pointées* et de tels hyperarbres sont appelés *hyperarbres aux arêtes pointées*. Nous appellerons *forme* de l'hyperarbre aux arêtes pointées H, et noterons $s(H)$, l'hyperarbre non décoré sous-jacent.

n	2	3	4	5	6	7
hp_n	2	15	204	4 100	109 818	3 687 859

Table 5.1 – Nombre hp_n d'hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets

Le nombre d'hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets, $n \geq 2$, peut être calculé en utilisant les formules du théorème 3.2.8 de la section 3. Les premières valeurs pour ce nombre apparaissent dans la table 5.1.

Nous munissons l'ensemble des hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets de l'ordre suivant. Soient T et S, deux hyperarbres aux arêtes pointées. L'hyperarbre T est plus petit que l'hyperarbre S, noté $T \leq S$, si et seulement si les arêtes de T sont unions d'arêtes de S et le pointage de chacune des unions d'arêtes est choisi parmi les pointages de ces arêtes. Nous notons $\widehat{HT_n^p}$ le complété du poset obtenu en ajoutant au poset un maximum $\hat{1}$ et un minimum $\hat{0}$.

Exemple 5.1.1. Un exemple d'hyperarbre aux arêtes pointées est représenté sur la figure 5.1.

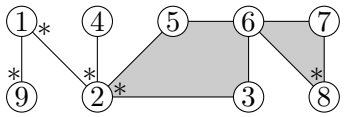


Figure 5.1 – Exemple d'hyperarbre aux arêtes pointées.

Cet hyperarbre est inférieur à l'hyperarbre de la figure 5.2.

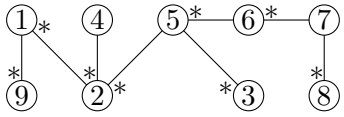


Figure 5.2 – Exemple d'hyperarbre aux arêtes pointées plus grand que l'hyperarbre de la figure 5.1.

Notons que si l'arête $\{2, 5\}$ de l'hyperarbre 5.2 ci-dessus était pointée en 5 et non en 2, les deux hyperarbres 5.2 et 5.1 seraient incomparables.

Le poset des hyperarbres aux arêtes pointées sur trois sommets est représenté sur la figure 5.3.

Le poset des hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets est gradué par le nombre d'arêtes des hyperarbres, comme l'est le poset des hyperarbres sur n sommets.

5.2 Caractère Cohen-Macaulay

Dans ce qui suit, nous fixons un entier $n \geq 2$. Nous montrons que le poset des hyperarbres aux arêtes pointées $\widehat{HT_n^p}$ est Cohen-Macaulay. Le lecteur pourra trouver au chapitre 1.2 les notions de topologie des posets nécessaires à ce qui suit.

Pour prouver le caractère Cohen-Macaulay de $\widehat{HT_n^p}$, nous suivons les deux étapes de la méthode utilisée pour le poset des hyperarbres par N. Brady, J. McCammond, J. Meier et A. Miller dans [BMMM01], qui repose sur une technique de A. Björner et M. Wachs [BW83], en raffinant celle-ci avec le pointage introduit dans les hyperarbres. La première étape consiste à

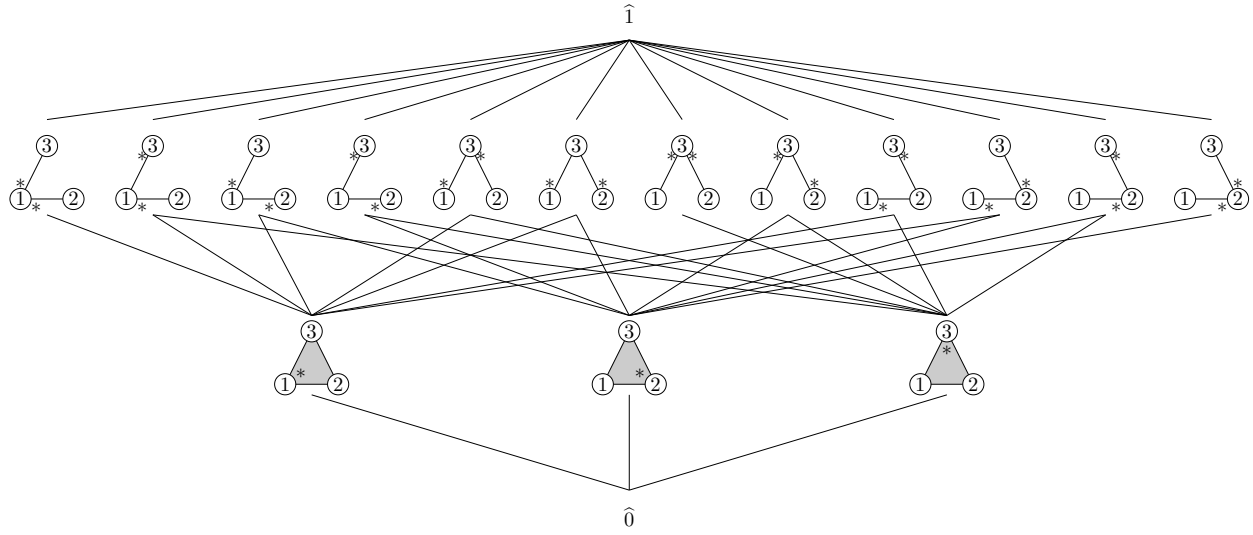


FIGURE 5.3 – Poset des hyperarbres aux arêtes pointées sur trois sommets $\widehat{HT_3^p}$.

montrer que les intervalles entre les atomes et le maximum sont totalement semi-modulaires. Nous exhibons ensuite un ordre sur les atomes du poset qui permet de montrer que les intervalles de $\widehat{HT_n^p}$ admettent un ordre récursif sur leurs atomes, ce qui conduit au résultat principal.

Rappelons qu'un poset est *totalement semi-modulaire* si et seulement si pour tout intervalle $[a, b]$ du poset et pour tous $u, v \in [a, b]$ qui couvrent un élément $x \in [a, b]$, il existe un élément $y \in [a, b]$ qui couvre à la fois u et v. Rappelons aussi qu'un poset borné P *admet un ordre récursif sur ses atomes* si P n'a qu'un seul élément ou s'il en a au moins deux et qu'il existe un ordre $a_1, a_2, \ldots, a_t$ sur les atomes de P vérifiant :

1. Pour tout $j = \{1, 2, \ldots, t\}$, l'intervalle $[a_j, \widehat{1}]$ admet un ordre récursif sur les atomes dans lequel les atomes de $[a_j, \widehat{1}]$ qui sont dans $[a_i, \widehat{1}]$ pour $i < j$ viennent d'abord.
2. Pour tout $i < j$, si $a_i, a_j < y$, alors il existe $k < j$ et un atome z de $[a_j, \widehat{1}]$ qui couvre a_j et tel que $a_k < z \leq y$.

Considérons maintenant le poset dual $\widehat{HT_n^p}^*$ de $\widehat{HT_n^p}$. Comme $\widehat{HT_n^p}$ est borné et gradué, $\widehat{HT_n^p}^*$ l'est aussi. Le minimum de $\widehat{HT_n^p}$ devient le maximum de $\widehat{HT_n^p}^*$, que nous noterons $\widetilde{1}$. Le maximum de $\widehat{HT_n^p}$ devient le minimum de $\widehat{HT_n^p}^*$, que nous noterons $\widetilde{0}$. Les atomes de $\widehat{HT_n^p}^*$ sont les arbres dont chaque arête est pointée en un sommet. Nous avons donc $T \leq T'$ si et seulement si $T = \widetilde{0}$, ou $T' = \widetilde{1}$, ou bien les arêtes de T sont unions d'arêtes de T'. La forme de $\widehat{HT_n^p}^*$ est représentée sur la figure 5.4.

Proposition 5.2.1. *Pour tous $T, T' \in \widehat{HT_n^p}^*$ différents de $\widetilde{0}$, l'intervalle $[T, T']$ est totalement semi-modulaire.*

Démonstration. Considérons un intervalle $[T, T']$ de $\widehat{HT_n^p}^*$, T différent de $\widetilde{0}$. Dans cet intervalle, considérons un élément t couvert par deux éléments x et y. Si x et y n'ont chacun qu'une arête, ils sont couverts par $\widetilde{1}$ qui est alors nécessairement égal à T'. Nous supposerons maintenant que ce n'est pas le cas. Il y a plusieurs cas à examiner :

Cas 1 Supposons que x et y soient obtenus à partir de t par fusion de deux paires d'arêtes disjointes (a_x^1, a_x^2) et (a_y^1, a_y^2) avec un choix de pointage $p_x \in a_x^1 \cup a_x^2$ et $p_y \in a_y^1 \cup a_y^2$. Comme x et y ont au moins deux arêtes, il y a un élément M de l'intervalle, supérieur à x et y, dans lequel chacune de ces paires est fusionnée, et possiblement avec d'autres

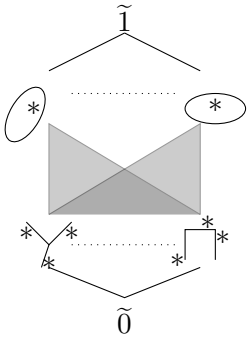


Figure 5.4 – Forme du poset $\widehat{HT_n^p}^*$.

arêtes. Alors, l'élément obtenu par la fusion de chacune de ces deux paires d'arêtes puis le pointage de $a_x^1 \cup a_x^2$ par p_x et de $a_y^1 \cup a_y^2$ par p_y, couvre x et y et est plus petit que M : il appartient donc à l'intervalle.

Cas 2 Supposons que x et y soient obtenus à partir de t par fusion de deux paires d'arêtes non disjointes $(a_x, a_{x,y})$ et $(a_{x,y}, a_y)$ avec un choix de pointage $p_x \in a_x \cup a_{x,y}$ et $p_y \in a_{x,y} \cup a_y$.

a) S'il y a un élément M de l'intervalle, supérieur à x et y, dans lequel les trois arêtes sont fusionnées ensemble, possiblement avec d'autres arêtes. Le pointage de ce groupe d'arêtes dans M est alors p_x, p_y ou un autre élément, pointage d'une arête n'appartenant pas à ce triplet d'arêtes. L'élément obtenu à partir de t en fusionnant les trois arêtes a_x, $a_{x,y}$ et a_y et en choisissant p_x, s'il est pointé dans M, et p_y sinon, couvre alors x et y et est inférieur à M.

b) S'il n'existe pas un tel élément M, cela signifie que $T' = \widetilde{1}$. Notons respectivement p_1, p_2 et p_3 les éléments pointés respectifs des arêtes a_x, $a_{x,y}$ et a_y. Alors les cas suivants se présentent :

$p_x = p_1$ Alors, il est possible de choisir p_1 comme pointage de la fusion de l'arête $a_x \cup a_{x,y}$ avec l'arête a_y dans x et de la fusion de l'arête $a_{x,y} \cup a_y$ avec l'arête a_x dans y. L'hyperarbre obtenu couvre donc à la fois x et y.

$p_x = p_2$ Alors, il est possible de choisir p_y comme pointage de la fusion de l'arête $a_x \cup a_{x,y}$ avec l'arête a_y dans x et de la fusion de l'arête $a_{x,y} \cup a_y$ avec l'arête a_x dans y. L'hyperarbre obtenu couvre donc à la fois x et y.

Ceci montre le résultat voulu. □

Comme tout ordre sur les atomes d'un poset totalement semi-modulaire est un ordre récursif sur ses atomes d'après le théorème 1.2.34, la première partie de la définition de l'ordre récursif sur les atomes d'un poset est ainsi vérifié. Pour démontrer que le poset $\widehat{HT_n^p}^*$ admet un ordre récursif sur ses atomes, il reste donc à trouver un ordre $(a_1, \ldots, a_p)$ sur les atomes du poset tel que la deuxième propriété de la définition 1.2.31 soit vérifiée :

"il existe un ordre $a_1, a_2, \ldots, a_t$ sur les atomes de P vérifiant que pour tout $i < j$, si $a_i, a_j < y$, alors il existe $k < j$ et un atome z de $[a_j, \widehat{1}]$ qui couvre a_j tel que $a_k < z \leq y$".

Cet ordre peut être défini en utilisant l'ordre total $\leq_{BM3}$ sur les arbres, induit par l'ordre partiel défini par N. Brady, J. McCammond, J. Meier and A. Miller dans [BMMM01], auquel le lecteur est renvoyé pour plus de détails.

Pour le définir, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 5.2.2. La *liste de pointage* d'un hyperarbre aux arêtes pointées H, noté $\overrightarrow{lp}(H)$, est la liste obtenue en considérant le multi-ensemble des pointages de l'hyperarbre avec multiplicité

et en l'ordonnant par ordre décroissant. L'ensemble des listes de pointage peut être muni de l'ordre partiel suivant. Etant données deux listes de pointage de deux hyperarbres aux arêtes pointées ayant le même nombre d'arêtes $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, nous définissons :

$$\mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, k\} : \begin{cases} a_j = b_j \forall j < i, \\ a_i < b_i \end{cases} \quad \text{(ordre lexicographique)}$$

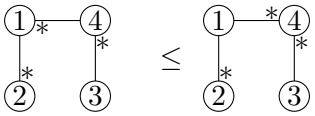
Exemple 5.2.3. La liste de pointage de l'hyperarbre aux arêtes pointées de la figure 5.1 est (9, 8, 2, 2, 1).

Celle de l'hyperarbre aux arêtes pointées de la figure 5.2 est $(9, 8, 6, 5, 3, 2, 2, 1)$.

Définition 5.2.4. Définissons un ordre $\leq_{PO}$ sur les arbres aux arêtes pointées en posant pour deux arbres aux arêtes pointées T et T' :

$$\begin{aligned} T \leq_{PO} T' \iff & \; s(T) <_{BM3} s(T') \\ & \text{ou } s(T) = s(T') \text{ et } \overrightarrow{lp}(T) \preceq \overrightarrow{lp}(T'). \end{aligned}$$

Exemple 5.2.5. Exemple d'ordre entre deux arbres :



Proposition 5.2.6. *L'ordre $\leq_{PO}$ sur les atomes de $\widehat{HT_n^p}^*$ donne un ordre récursif sur ses atomes.*

Démonstration. Il nous faut montrer la propriété suivante :

Il existe un ordre $a_1, a_2, \ldots, a_t$ sur les atomes de $\widehat{HT_n^p}^*$ vérifiant que pour tout $i < j$, si $a_i, a_j <_{PO} y$, alors il existe $k < j$ et un atome z de $[a_j, \widetilde{1}]$ qui couvre a_j et tel que $a_k < z \leq y$.

Soient T et T', deux atomes de $\widehat{HT_n^p}^*$, $T <_{PO} T'$, et H, un élément de $\widehat{HT_n^p}^*$ plus grand que T et T' dans l'ordre de $\widehat{HT_n^p}^*$. Il nous faut examiner les deux cas suivants :

Cas 1 : $s(T) \neq s(T')$. En utilisant les propriétés démontrées dans l'article [BMMM01] de l'ordre $\leq_{BM3}$, il existe un atome $\widetilde{A}$ et un hyperarbre s_M tels que l'atome $\widetilde{A}$ soit plus petit que $s(T')$ pour $\leq_{BM3}$ et l'hyperarbre s_M couvre $s(T')$ et soit plus petit que $s(H)$ et plus grand que $\widetilde{A}$.

Alors, il existe un pointage des arêtes de s_M tel que l'hyperarbre aux arêtes pointées obtenu M couvre T' et soit plus petit que H. En effet, si une arête de s_M est union d'arêtes de $s(T')$, il suffit de choisir son pointage parmi les pointages de cet ensemble d'arêtes dans T', en conservant les pointages qui apparaîtront dans H. Il existe aussi un pointage des arêtes de $\widetilde{A}$ tel que $\widetilde{A}$ soit plus petit que M. En effet, il suffit que les pointages des arêtes de M apparaissent dans les pointages des arêtes de $\widetilde{A}$.

Cas 2 : $s(T) = s(T')$. Dans ce cas, seul le pointage des arêtes de T et T' les distinguent. Soit k' le plus grand entier tel que l'une des arêtes de T' soit pointée en k' mais pas l'arête correspondante dans T. Alors, il existe une arête a de $s(T)$ contenant le sommet k' et un autre sommet k telle que cette arête soit pointée en k' dans T' et en k dans T. Alors, par définition, comme $T <_{PO} T'$, nous avons $k < k'$. Soit $\widetilde{T}$, l'hyperarbre obtenu depuis T' en changeant le pointage de a de k' à k. Par définition de l'ordre, nous avons $\widetilde{T} <_{PO} T'$. De plus, le pointage de a est différent dans T et T' donc l'arête a doit être fusionnée avec d'autres arêtes $(a_1, \ldots, a_p)$ dans H, supérieur à T et T', et son pointage doit être oublié, au profit de celui de a_1 par exemple. Prenant l'hyperarbre M obtenu depuis T' par la fusion de a avec a_1, en conservant le pointage de a_1, M est inférieur à H, supérieur à $\widetilde{T}$ et couvre T'. □

Théorème 5.2.7. *Le poset $\widehat{HT_n^p}^*$ admet un ordre récursif sur ses atomes, donc les posets $\widehat{HT_n^p}^*$ et $\widehat{HT_n^p}$ sont Cohen-Macaulay.*

Démonstration. Ceci est une conséquence du théorème 1.2.33 appliqué au poset gradué et borné $\widehat{HT_n^p}$. □

5.3 Homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées

Nous calculons maintenant la dimension de l'homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées qui ont une arête pointée en 1, que nous noterons $\widehat{HT_n^{p,\square}}$. Ce poset est un sous-poset de $\widehat{HT_n^p}$. Le choix de 1 est arbitraire et les résultats obtenus ne dépendront pas de ce choix. L'ensemble des hyperarbres sur n sommets plus grands que l'hyperarbre à une arête pointée en 1, muni de l'ordre partiel correspondant, sera noté $HT_n^{p,\square}$. L'homologie de ce poset vérifie la propriété suivante.

Proposition 5.3.1. *Le poset $\widehat{HT_n^{p,\square}}$ est Cohen-Macaulay.*

Démonstration. Nous raisonnons sur le dual du poset $\widehat{HT_n^{p,\square}}^*$. Nous montrons que ce poset hérite de l'ordre récursif sur les atomes sur $\widehat{HT_n^p}^*$ montré au théorème 5.2.7. Tous les intervalles $[T, T']$ de $\widehat{HT_n^{p,\square}}^*$, où T et T' sont des hyperarbres aux arêtes pointées, sont des intervalles de $\widehat{HT_n^p}^*$ donc sont semi-modulaires. Il reste à trouver un ordre sur les atomes du poset tel que :

Pour tout $i < j$, si $a_i, a_j < y$, alors il existe $k < j$ et un atome z de $[a_j, \widehat{1}]$ qui couvre a_j et tel que $a_k < z \leq y$.

L'ordre induit par celui sur les atomes de $\widehat{HT_n^p}^*$ convient. En effet, si a_i et a_j sont des atomes de $\widehat{HT_n^{p,\square}}^*$ et y est un élément de $\widehat{HT_n^{p,\square}}^*$, alors notamment, ce sont des élément de $\widehat{HT_n^p}^*$ et il existe $k < j$, un atome a_k de $\widehat{HT_n^p}^*$ et un atome z de $[a_j, \widehat{1}]$ qui couvre a_j et tel que $a_k < z \leq y$ dans $\widehat{HT_n^p}^*$. Comme a_k et z sont plus petit que y, ils ont aussi une arête pointée en 1 donc appartiennent à $\widehat{HT_n^{p,\square}}^*$. □

Nous calculons maintenant la dimension de l'homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées. Pour ce faire, nous adaptons la méthode appliquée par J. McCammond et J. Meier dans [MM04] pour le calcul de la dimension de l'homologie du poset des hyperarbres.

Nous définissons d'abord le poids suivant sur l'ensemble des hyperarbres de $HT_n^{p,\square}$.

Définition 5.3.2. Soit H un hyperarbre aux arêtes pointées de $HT_n^{p,\square}$ et λ_i le nombre d'arêtes de taille i de H. Le *poids* de H est défini par :

$$\text{POIDS}(H) = u_2^{\lambda_2} u_3^{\lambda_3} \dots u_n^{\lambda_n}.$$

Le sommet 1 devant être présent dans tous les pointages, les posets $\widehat{HT_{n+1}^{p,\square}}$ et $HT_{n+1}^{p,\square}$ seront munis d'une action de $\mathfrak{S}_n$. Nous notons alors $T^\square$ la série génératrice exponentielle des hyperarbres aux arêtes pointées pondérées dans $HT_n^{p,\square}$:

$$T^\square = \sum_{n \geq 1} \sum_{H \in HT_{n+1}^{p,\square}} \text{POIDS}(H) \frac{x^n}{n!}. \tag{5.1}$$

Nous notons R la série génératrice exponentielle des hyperarbres enracinés en un sommet aux arêtes pointées. Remarquons qu'aucune condition n'est imposée sur les pointages des arêtes de ces hyperarbres : ils n'appartiennent pas nécessairement à $\widehat{HT_n^{p,\square}}$.

Ces séries vérifient les relations suivantes.

Proposition 5.3.3. *La série R vérifie :*

$$R = x \exp\left(\sum_{i\geq 2} i u_i \frac{R^{i-1}}{(i-1)!}\right).$$

La série R est alors reliée à la série $T^{\square}$ par la relation suivante :

$$T^{\square} = \left[\exp\left(\sum_{i\geq 2} u_i \frac{R^{i-1}}{(i-1)!}\right) - 1\right] \times \exp\left(\sum_{i\geq 2} (i-1) u_i \frac{R^{i-1}}{(i-1)!}\right).$$

Démonstration. 1. Considérons un hyperarbre aux arêtes pointées enraciné en un sommet s. Nous enlevons le sommet s dans l'hyperarbre pour le remplacer par un creux puis séparons les arêtes qui contenaient la racine : nous obtenons un sommet et un ensemble éventuellement vide d'hyperarbres aux arêtes pointées contenant un creux dans l'une de leurs arêtes.

Considérant un tel hyperarbre aux arêtes pointées possédant un creux dans l'une de leur arête, nous pouvons supposer que cette arête creuse contient $i-1$ éléments en plus du creux. Alors, il y a i manières de choisir le pointage de cette arête et nous obtenons, en la cassant, $i-1$ hyperarbres aux arêtes pointés, enracinés au sommet de l'arête que l'on casse.

2. Soit H un hyperarbre aux arêtes pointées pondérées de $\widehat{HT_n^{p,\square}}$. Nous enlevons le sommet 1 de cet hyperarbre pour le remplacer par un creux et séparons les arêtes qui étaient reliées par ce sommet. Nous obtenons un ensemble non vide d'hyperarbres creux dont toutes les arêtes, sauf celle contenant le creux, sont pointées et un ensemble éventuellement vide d'hyperarbres creux dont toutes les arêtes sont pointées. Éclatant l'arête creuse, nous obtenons une forêt de $i-1$ hyperarbres aux arêtes pointées enracinées. Cette arête creuse correspond à un terme u_i et il y a $i-1$ façons de la pointer si elle doit l'être. □

Pour un hyperarbre H de $\widehat{HT_n^{p,\square}}$, nous noterons μ_H le nombre de Möbius de l'intervalle $[H;\widehat{1}]$ et m_H sa valeur absolue. Nous noterons de plus μ_n le nombre de Möbius du poset $\widehat{HT_n^{p,\square}}$ et m_n sa valeur absolue.

Nous allons maintenant évaluer la série $T^{\square}$ en $u_i = -m_i$. La série obtenue $\widetilde{T^{\square}}$ vérifie la proposition suivante.

Proposition 5.3.4. *La série $\widetilde{T^{\square}}$ vérifie :*

$$\widetilde{T^{\square}} = 1 - e^{-x}.$$

Démonstration. D'après l'égalité (1.1), la somme des nombres de Möbius des hyperarbres de $HT_n^{p,\square}$ vaut :

$$\sum_{H\in HT_n^{p,\square}} \mu_H = -\mu(\widehat{1},\widehat{1}) = -1.$$

De plus, le coefficient $\widetilde{T_n^{\square}}$ de $\frac{x^n}{n!}$ est donné par :

$$\widetilde{T_n^{\square}} = \sum_{H\in HT_{n+1}^{p,\square}} \left(\prod_{i\in ES(H)} (-m_i)\right)$$

où $ES(H)$ est le multiensemble des taille des arêtes de H.

Nous avons maintenant besoin de décrire les intervalles de $\widehat{HT_n^{p,\square}}$. Cette description est donnée par le lemme suivant.

i	2	3	4	5	6
m_i	1	6	120	4690	291880

Table 5.2 – Dimension de l'homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées

Lemme 5.3.5. *Soit τ un hyperarbre aux arêtes pointées sur n sommets ayant une arête pointée en 1.*

L'intervalle semi-ouvert $[\tau, \widehat{1})$ est un produit direct de posets de la forme $HT_n^{p,\square}$, avec un facteur $HT_j^{p,\square}$ pour chaque arête de τ de taille j.

Démonstration du lemme 5.3.5. Dans l'intervalle $[\tau, \widehat{1})$, les arêtes de τ se scindent indépendamment les unes des autres. Nous pouvons alors séparer l'intervalle en produit des posets obtenus par subdivision de l'une des arêtes de τ. Si l'arête considérée est de taille j et pointée en i, un tel poset est isomorphe à $HT_j^{p,\square}$ en associant au sommet i le sommet 1 et réétiquetant les autres sommets de 2 à j. □

Le lemme 4.3.18 et la proposition 5.3.5 impliquent alors, pour un hyperarbre H aux arêtes pointées sur n sommets à r arêtes :

$$-\mu_H = s\left([H, \widehat{1})\right) = \prod_{i \in ES(H)} s\left(HT_i^{p,\square}\right) = \prod_{i \in ES(H)} \sum_{\tau \in HT_i^{p,\square}} \mu_\tau = (-1)^r \prod_{i \in ES(H)} \mu_i.$$

Or le poset est Cohen-Macaulay donc le signe de μ_i est $(-1)^{i-1}$. De plus, tous les sommets sauf la racine sont les pétioles de toutes les arêtes qui les contiennent sauf une. En comptant les sommets des arêtes privées de leur pétiole, nous obtenons donc que $\sum_{i \in ES(H)}(i-1) = n-1$. Cette relation implique :

$$-\mu_H = \prod_{i \in ES(H)} (-\mu_i) = (-1)^{n-1} \prod_{i \in ES(H)} (-m_i).$$

Nous obtenons donc :

$$\widetilde{T_n^{\square}} = (-1)^n \sum_{H \in HT_{n+1}^{p,\square}} \mu_H = (-1)^{n-1}. \qquad \square$$

La valeur absolue des nombres de Möbius m_i du poset est alors donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{R} & = x \exp\left(\sum_{i \geq 2} i(-m_i) \frac{\widetilde{R}^{i-1}}{(i-1)!}\right), \\ 1 - e^{-x} & = \left[\exp\left(\sum_{i \geq 2} (-m_i) \frac{\widetilde{R}^{i-1}}{(i-1)!}\right) - 1\right] \times \exp\left(\sum_{i \geq 2} (i-1)(-m_i) \frac{\widetilde{R}^{i-1}}{(i-1)!}\right). \end{cases}$$

Comme m_i apparaît pour la première fois dans le coefficient de x^{i-1}, les m_i vérifiant cette équation sont uniques.

En développant et comparant les deux termes des deux équations, nous obtenons les valeurs indiquées dans le tableau 5.2. Ces valeurs pouvant posséder de gros facteurs premiers, il y a peu d'espoir d'obtenir une formule close "simple" pour ces dimensions.

CHAPITRE 6

Partitions semi-pointées

Sommaire

6.1 Généralités 114
6.2 Homologie des posets de partitions semi-pointées 117
6.3 Parenthèse sur les partitions décorées par une opérade 124
6.4 Perspectives 126

Certains intervalles du poset des hyperarbres se décomposent en produits de posets des partitions (cf. Lemme 4.3.1). Cela tient au fait que dans un intervalle du poset dont le maximum est un hyperarbre, le voisinage de chacun des sommets se comporte comme un poset de partitions. Si nous étudions de même le voisinage d'un sommet dans un intervalle du poset des hyperarbres aux arêtes pointées décrit au chapitre 5, une variation des posets des partitions apparaît naturellement : les posets des partitions semi-pointées. Ces posets généralisent à la fois les posets des partitions et les posets des partitions pointées étudiés par F. Chapoton et B. Vallette dans [CV06] et [Val07]. Ils peuvent être vus comme un cas particulier de partition décorée par une espèce, qui apparaissent dans la composition des espèces et dans l'article de M. Mendez et J. Yang [MY91]. Nous étudions l'homologie des posets de partitions semi-pointées dans ce chapitre.

Après avoir décrit les posets de partitions semi-pointées, nous montrons qu'ils sont Cohen-Macaulay grâce à la semi-modularité totale puis nous utilisons la théorie des espèces pour calculer la dimension de leur unique groupe d'homologie non nul. Cette dimension est donnée par le théorème suivant.

Théorème. *La dimension de l'homologie du poset augmenté des partitions semi-pointées sur un ensemble de taille $\ell + p$ et un ensemble de pointage de taille ℓ est donnée par :*

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p-1)^{\ell-1}.$$

La somme des dimensions des homologies des intervalles maximaux des posets des partitions semi-pointées sur un ensemble de taille $\ell + p$ et un ensemble de pointage de taille ℓ est donnée par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^{\ell}.$$

Enfin, nous calculons l'action du groupe symétrique sur les posets de partitions décorées par une opérade et retrouvons un corollaire du résultat de B. Vallette [Val07]. Sous certaines

conditions sur l'opérade $\mathcal{P}$, l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset de partitions décorées par l'opérade $\mathcal{P}$ vérifie la proposition suivante.

Proposition. *L'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset augmenté des partitions décorées par l'opérade $\mathcal{P}$ est donnée par la série indicatrice de cycles de la composée* $\mathrm{Comm} \circ \mathcal{P}^{-1}$ *de l'opérade* Comm *et de l'inverse pour la composition de l'opérade $\mathcal{P}$.*

L'action du groupe symétrique sur la somme de l'homologie des intervalles maximaux du poset des partitions décorées par l'opérade $\mathcal{P}$ est donnée par la série indicatrice de cycles de l'inverse pour la composition $\mathcal{P}^{-1}$ de l'opérade $\mathcal{P}$.

6.1 Généralités

Nous commençons par définir les posets des partitions semi-pointées et montrer que leur homologie est concentrée en degré maximal. Dans cette section et les suivantes, nous utiliserons la notion d'espèce sur deux ensembles rappelée au paragraphe 1.1.4. Nous noterons dans la suite les espèces $\mathcal{F}$, la série génératrice correspondante $\mathbf{C}_{\mathcal{F}}$ et la série indicatrice de cycles correspondante $\mathbf{Z}_{\mathcal{F}}$, où l'indice $\mathcal{F}$ pourra être omis.

6.1.1 Poset des partitions semi-pointées

Définition 6.1.1. Soit $V = V_1 \sqcup V_2$ un ensemble de cardinal n, avec V_1 de cardinal ℓ. Une *partition semi-pointée* de $V = V_1 \sqcup V_2$ est une partition de V telle que chaque part de la partition vérifie :

- Si la part n'est constituée que d'éléments de V_1, elle est pointée en un de ces éléments,
- Si la part n'est constituée que d'éléments de V_2, elle n'est pas pointée,
- Si la part est constituée d'éléments de V_1 et de V_2, elle peut être non pointée ou pointée en l'un des éléments de V_1.

Le pointage d'une part sera l'élément pointé de la part ou l'ensemble vide si la part n'est pas pointée. Une (n, ℓ)-partition semi-pointée est une partition semi-pointée de $V = \{1, \dots, n\}$ avec $V_1 = \{1, \dots, \ell\}$ et $V_2 = \{\ell + 1, \dots, n\}$.

Nous noterons en gras l'élément pointé de chaque part.

Exemple 6.1.2. L'ensemble des $(4, 2)$-partitions semi-pointées est le suivant :

$$\begin{gathered}
\{\mathbf{1}, 2, 3, 4\}, \{1, \mathbf{2}, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \\
\{\mathbf{1}\}\{\mathbf{2}, 3, 4\}, \{\mathbf{1}\}\{2, 3, 4\}, \{\mathbf{2}\}\{\mathbf{1}, 3, 4\}, \{\mathbf{2}\}\{1, 3, 4\}, \{3\}\{\mathbf{1}, 2, 4\}, \\
\{3\}\{1, \mathbf{2}, 4\}, \{3\}\{1, 2, 4\}, \{4\}\{\mathbf{1}, 2, 3\}, \{4\}\{1, \mathbf{2}, 3\}, \{4\}\{1, 2, 3\}, \\
\{\mathbf{1}, 3\}\{\mathbf{2}, 4\}, \{\mathbf{1}, 3\}\{2, 4\}, \{1, 3\}\{\mathbf{2}, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \{\mathbf{1}, 4\}\{\mathbf{2}, 3\}, \\
\{1, 4\}\{\mathbf{2}, 3\}, \{\mathbf{1}, 4\}\{2, 3\}, \{1, 4\}\{2, 3\}, \{\mathbf{1}, 2\}\{3, 4\}, \{1, \mathbf{2}\}\{3, 4\} \\
\{\mathbf{1}\}\{3\}\{\mathbf{2}, 4\}, \{\mathbf{1}\}\{3\}\{2, 4\}, \{\mathbf{1}\}\{4\}\{\mathbf{2}, 3\}, \{\mathbf{1}\}\{4\}\{2, 3\}, \{\mathbf{2}\}\{3\}\{\mathbf{1}, 4\}, \{\mathbf{2}\}\{3\}\{1, 4\}, \\
\{\mathbf{2}\}\{4\}\{\mathbf{1}, 3\}, \{\mathbf{2}\}\{4\}\{1, 3\}, \{3\}\{4\}\{\mathbf{1}, 2\}, \{3\}\{4\}\{1, \mathbf{2}\}, \{\mathbf{1}\}\{\mathbf{2}\}\{3, 4\}, \\
\{\mathbf{1}\}\{\mathbf{2}\}\{3\}\{4\}.
\end{gathered}$$

L'application qui à (V_1, V_2) associe l'ensemble des partitions semi-pointées de $V = V_1 \sqcup V_2$ est une espèce sur deux ensembles.

Soit V un ensemble fini. L'ensemble des partitions semi-pointées sur $V = V_1 \sqcup V_2$ peut être muni de l'ordre partiel suivant.

Définition 6.1.3. Soient deux partitions semi-pointées P et Q. La partition P est inférieure à la partition Q si et seulement si les parts de P sont unions de parts de Q et le pointage des parts

de P est "hérité" de ceux de Q, au sens où si une part p de P est union de parts $(q_1, \dots, q_n)$ de Q, alors le pointage de p est choisi parmi ceux des q_i, sachant que si l'une des parts q_i n'est pas pointée, la part p peut ne pas être pointée.

Exemple 6.1.4. Avec $V_1 = \{1, 2, 3\}$ et $V_2 = \{4, 5\}$, la partition semi-pointée $\{\mathbf{1}, 2\}\{3, 4\}\{5\}$ est plus grande que la partition semi-pointée $\{\mathbf{1}, 2, 3, 4\}\{5\}$ mais n'est pas comparable avec la partition semi-pointée $\{1, 2, \mathbf{3}, 4\}\{5\}$. Ces partitions sont aussi des partitions semi-pointées de $V = \{1, 3\} \sqcup \{2, 4, 5\}$ par exemple.

Nous pouvons remarquer que deux partitions semi-pointées P et Q peuvent être dans plusieurs posets Π_{V,V_1} différents. Si la partition P est inférieure à la partition Q dans l'un de ces posets, alors elle l'est dans tous les autres qui contiennent ces deux éléments : l'ordre entre deux éléments ne dépend donc pas du choix de la décomposition $V = V_1 \sqcup V_2$.

Nous noterons Π_{V,V_1} le poset des partitions semi-pointées de $V = V_1 \sqcup V_2$ borné par l'ajout d'un minimum $\widehat{0}$ et $\Pi_{n,\ell}$ le poset des (n, ℓ)-partitions semi-pointées borné par l'ajout d'un minimum $\widehat{0}$. Sur la figure 6.1 est représenté le poset $\Pi_{3,1}$. Le maximum du poset Π_{V,V_1}, qui est la partition dont toutes les parts sont de cardinal 1, munie de son unique pointage possible, sera noté π_{V,V_1}.

Remarque 6.1.5. Le poset $\Pi_{n,0}$ est le poset des partitions de $\{1, \dots n\}$ auquel on a rajouté un minimum.

Rappelons la définition du poset des partitions pointées. Une *partition pointée* d'un ensemble V est une partition de V munie pour chacune de ses parts d'un élément distingué. Le poset des partitions pointées sur n éléments est l'ensemble des partitions pointées de $\{1, \dots, n\}$ où une partition P est plus petite qu'une partition Q si les parts de P sont unions de parts de Q et l'élément pointé de chacune de ses parts appartient à l'ensemble des éléments pointés des parts dont elle est l'union. Les posets $\Pi_{n,n}$ et $\Pi_{n,n-1}$ sont deux posets isomorphes au poset des partitions pointées, le premier de manière immédiate d'après les définitions respectives des objets et le deuxième en identifiant l'absence de pointage d'une part à un pointage du dernier élément qui appartient à cette part.

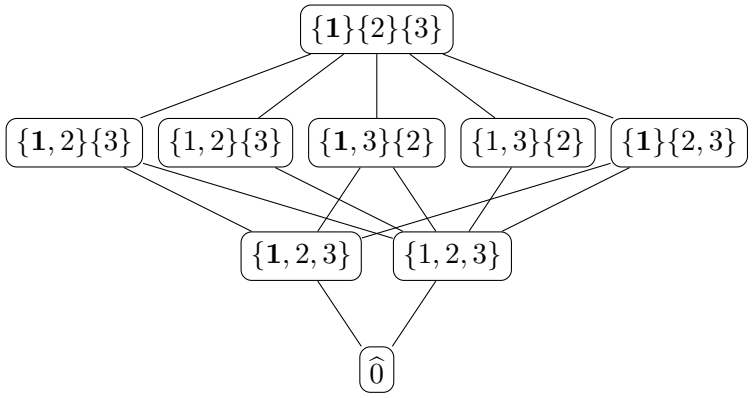


FIGURE 6.1 – Le poset $\Pi_{3,1}$.

6.1.2 Concentration de l'homologie

Nous renvoyons à la section 1.2 pour les notions de base concernant l'homologie des posets, l'ordre récursif sur les atomes et l'épluchabilité. Le but de cette sous-section est de montrer que le poset $\Pi_{n,\ell}$ est Cohen-Macaulay, c'est-à-dire que son homologie est concentrée en degré maximal.

Pour ce faire, il suffit de montrer que le poset, ou son dual, est totalement semi-modulaire, d'après les théorèmes 1.2.34 et 1.2.33.

Nous montrons maintenant la semi-modularité totale du poset dual qui est le poset obtenu en renversant l'ordre du poset des partitions semi-pointés et en ajoutant un maximum. Notons $\Pi^{n,\ell}$ le poset obtenu. Il n'apparaîtra que dans cette partie. Le poset $\Pi^{n,\ell}$ est représenté sur la figure 6.2.

Proposition 6.1.6. *$\Pi^{n,\ell}$ est totalement semi-modulaire.*

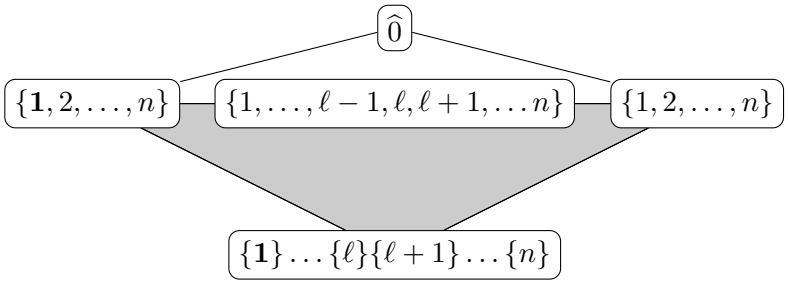
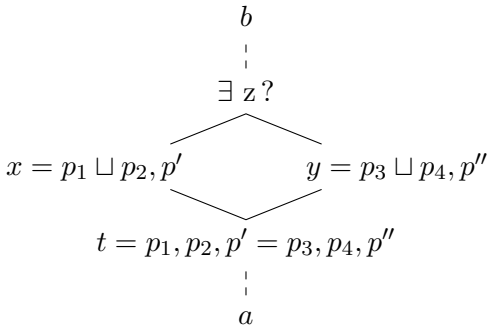


Figure 6.2 – Le poset $\Pi^{n,\ell}$.

Démonstration. Soit un intervalle $[a, b]$ de $\Pi^{n,\ell}$. Supposons qu'il existe t, x, y trois éléments de $[a, b]$ tels que x et y couvrent t et x soit différent de y.

Il nous faut montrer qu'alors, il existe un élément z de $[a, b]$ couvrant x et y.



Si x et y n'ont chacun qu'une part, $b = \widehat{0}$ et ils sont couverts par b.

Sinon, nous pouvons supposer que x est obtenu à partir de t par fusion de deux parts p_1 et p_2 de t avec un choix de pointage e_x pouvant être vide, l'élément pointé de p_1, s'il existe, ou l'élément pointé de p_2, s'il existe. Nous pouvons aussi supposer que y est obtenu par fusion de deux parts p_3 et p_4 de t avec un choix de pointage e_y pouvant être vide, l'élément pointé de p_1, s'il existe, ou l'élément pointé de p_2, s'il existe.

– Premier cas : Les parts p_1, p_2, p_3 et p_4 sont disjointes.
  Alors nous considérons l'élément z obtenu à partir de t en fusionnant p_1 et p_2 et choisissant le pointage e_x pour la fusion et en fusionnant p_3 et p_4 et choisissant le pointage e_y pour la fusion.
  Cet élément peut être obtenu depuis x en fusionnant p_3 et p_4 et choisissant le pointage e_y pour la fusion et depuis y en fusionnant p_1 et p_2 et choisissant le pointage e_x pour la fusion : il couvre donc ces deux éléments. Comme x et y sont supérieurs à a, z l'est aussi. De plus, b est supérieur à x et y donc les parts p_1 et p_2 sont fusionnées dans t, tout comme p_3 et p_4, avec un pointage compatible : b est donc aussi supérieur à z et z appartient à l'intervalle $[a, b]$.

– Deuxième cas : Les parts p_1, p_2, p_3 et p_4 ne sont pas disjointes.
Alors, quitte à renuméroter les parts, nous pouvons supposer que p_1 et p_4 sont égales. Notons qu'il ne peut pas y avoir plus de deux parts égales comme x et y sont différents et les parts p_{2i-1} et p_{2i} sont différentes, pour $i \in \{1, 2\}$. Nous exhibons maintenant un élément couvrant x et y.

Cas $b \neq \widehat{0}$ et le pointage d'une des parts de b vient du pointage p de l'une des parts p_i. Comme b est supérieur à x et y, les trois parts p_1, p_2 et p_3 sont, possiblement avec d'autres parts, unies en une part dans b. Alors, nous notons p le pointage de cette part fusionnée dans b issu du pointage de l'une des parts p_i. Nous considérons alors z obtenu à partir de t en fusionnant les trois parts p_1, p_2 et p_3 et en choisissant le pointage p. La partition z couvre bien x et y et est inférieure à b. En effet, le pointage p peut être choisi à la fois comme pointage pour l'union de $p_1 \cup p_2$ et p_3 dans x et pour l'union de p_2 et $p_1 \cup p_3$ dans y. De plus, les parts de b peuvent être obtenues comme union de parts de z.

Autres cas Nous pouvons considérer l'élément z obtenu à partir de t en fusionnant les trois parts p_1, p_2 et p_3 et en choisissant le pointage comme suit :
– Si x et y ont tous les deux hérité du pointage, ou de l'absence de pointage, de p_1, z hérite de ce même pointage.
– Si x a hérité du pointage, ou de l'absence de pointage, de p_1, et y de celui de p_3, z hérite du pointage de p_3.
– Si y a hérité du pointage, ou de l'absence de pointage, de p_1, et x de celui de p_2, z hérite du pointage de p_2.
– Sinon, z hérite du pointage de p_2 ou de celui de p_3 (les deux conviennent). □

Corollaire 6.1.7. *Les posets $\Pi_{n,\ell}$ sont Cohen-Macaulay.*

Démonstration. Ceci est une conséquence du corollaire 1.2.35 combiné avec la proposition 6.1.6. □

6.2 Homologie des posets de partitions semi-pointées

Le but de cette partie est le calcul de la dimension de l'unique groupe d'homologie non nul de $\Pi_{n,\ell}$. Nous montrons que ce calcul se ramène à un calcul sur les chaînes larges de partitions semi-pointées.

6.2.1 Passage des chaînes strictes aux chaînes larges

Nous appliquons ici au poset $\Pi_{n,\ell}$ le raisonnement du paragraphe 2.1.2 sur le passage des chaînes strictes au chaînes larges dans le poset des hyperarbres. Pour obtenir le caractère de l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset, il nous faut calculer la somme alternée des caractères de l'action du groupe symétrique sur les chaînes strictes du poset.

Soient k un nombre naturel et $V = V_1 \sqcup V_2$ un ensemble fini. L'ensemble des *k-chaînes strictes* de partitions semi-pointées sur Π_{V,V_1} est l'ensemble $\mathrm{PS}_k^{V_1,V_2}$ des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ où les a_i sont des éléments non minimaux et non maximaux de Π_{V,V_1} et $a_i \prec a_{i+1}$. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\mathrm{PS}_k^{\{1,\ldots,l\},\{1,\ldots,n-l\}}$ est alors noté $C_k^{n,\ell}$. L'ensemble des *k-chaînes larges* de partitions semi-pointées sur $V = V_1 \sqcup V_2$ est l'ensemble $\mathrm{PSL}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{V_1},\mathrm{V_2}}$ des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ où les a_i sont des éléments différents de $\widehat{0}$ dans Π_{V,V_1} et $a_i \preceq a_{i+1}$.

L'ensemble des *k-chaînes strictes avec multiplicité* de partitions semi-pointées dans $\Pi_{V,V_1} - \widehat{0}$ est l'ensemble $\mathrm{PSM}_k^{V_1,V_2}$ des couples formés par un élément minimal $\mathfrak{m}$ de $\Pi_{V,V_1} - \widehat{0}$ et un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ où $a_i \in]\mathfrak{m}; \pi_{V,V_1}[$, $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$, et $a_i \prec a_{i+1}$, $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Enfin nous appellerons *k-chaînes larges avec multiplicité* et noterons $\mathrm{PSLM}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{V_1,V_2}}$ l'ensemble des couples formés d'un élément minimal $\mathfrak{m}$ de $\Pi_{n,\ell} - \widehat{0}$ et d'une k-chaîne large de $[\mathfrak{m}, \pi_{V,V_1}]$, ou de manière équivalente, l'ensemble des chaînes larges dans chacun des intervalles maximaux du poset $\Pi_{n,\ell} - \widehat{0}$, comptées avec multiplicité.

Pour $k \geq 1$, nous définissons les espèces suivantes :

Définition 6.2.1. L'espèce $\mathcal{C}_k^g$ des k-chaînes larges de partitions semi-pointées est définie par :

$$(V_1, V_2) \mapsto \mathrm{PSL}_k^{V_1,V_2}\,.$$

L'espèce $\mathcal{C}_k^l$ des k-chaînes larges de partitions semi-pointées avec multiplicité est définie par :

$$(V_1, V_2) \mapsto \mathrm{PSLM}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{V_1,V_2}}\,.$$

L'espèce $\mathcal{C}_k^s$ des k-chaînes strictes de partitions semi-pointées est définie par :

$$(V_1, V_2) \mapsto \mathrm{PS}_k^{V_1,V_2}\,.$$

L'espèce $\mathcal{C}_k^{sl}$ des k-chaînes strictes de partitions semi-pointées avec multiplicité est définie par :

$$(V_1, V_2) \mapsto \mathrm{PSM}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{V_1,V_2}}\,.$$

Définition 6.2.2. Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0,1\}$ de longueur k, contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} (\emptyset,\emptyset) & \mapsto & M_{k,s}, \\ V \neq (\emptyset,\emptyset) & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

Nous décrivons maintenant le lien entre ces espèces.

Proposition 6.2.3. *Pour $k \geq 1$, les espèces $\mathcal{C}_k^g$, $\mathcal{C}_k^l$, $\mathcal{C}_i^{sl}$ et $\mathcal{C}_i^s$ vérifient les relations suivantes :*

$$\mathcal{C}_k^g \cong \sum_{i\geq 0} \mathcal{C}_i^s \cdot \mathcal{M}_{k,i}.$$

et

$$\mathcal{C}_k^l \cong \sum_{i\geq 1} \mathcal{C}_{i-1}^{sl} \cdot \mathcal{M}_{k,i} + \sum_{i\geq 0} \mathcal{C}_i^{sl} \cdot \mathcal{M}_{k,i}$$

Démonstration. 1. Soit $(a_1, \ldots, a_k)$ une k-chaîne large dans le poset $\Pi_{n,\ell}$. Elle peut se factoriser en un couple formé d'une s-chaîne stricte $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})$, obtenue par suppression dans $(a_1, \ldots, a_k)$ des répétitions et du maximum π_{V,V_1}, s'il apparaît, et d'un élément $u_1 \ldots u_k$ de $M_{k,s}$ tel que :
   – $u_k = 0$ si $a_k = \pi_{V,V_1}$, 1 sinon ;
   – $u_j = 0$ si $a_j = a_{j+1}$, 1 sinon, si $1 \leq j \leq k-1$.
   D'une i-chaîne stricte et d'un mot $u_1 \ldots u_k$ de $M_{k,i}$, on peut alors reconstruire une k-chaîne large.

   Ceci établit l'isomorphisme d'espèce voulu.

2. Soit maintenant $((a_1, \ldots, a_k), \mathfrak{m})$ une k-chaîne large avec multiplicité, appartenant à l'intervalle entre l'élément minimal $\mathfrak{m}$ et le maximum π_{V,V_1}. Elle peut se factoriser comme suit.

Si la chaîne finit par π_{V,V_1}. elle se décompose en un couple formé d'une $s-1$-chaîne stricte avec multiplicité $((a_{i_1},\dots,a_{i_{s-1}}),\mathfrak{m})$ appartenant à l'intervalle entre l'élément minimal $\mathfrak{m}$ et le maximum π_{V,V_1}, obtenue par suppression dans $(a_1,\dots,a_k)$ des répétitions, de $\mathfrak{m}$ et de π_{V,V_1}, s'il est présent, et d'un élément $u_2\dots u_k$ de $M_{k,s}$ tel que :
- $u_k = 0$ si $a_k = \mathfrak{m}$, 1 sinon ;
- $u_j = 0$ si $a_j = a_{j+1}$, 1 sinon.

Sinon elle se décompose en un couple $((a_{i_1},\dots,a_{i_s}),\mathfrak{m})$ formé d'une s-chaîne stricte avec multiplicité appartenant à l'intervalle entre l'élément minimal $\mathfrak{m}$ et le maximum π_{V,V_1}, obtenue par suppression dans $(a_1,\dots,a_k)$ des répétitions et de $\mathfrak{m}$, s'il est présent, et d'un élément $u_1\dots u_k$ de $M_{k,s}$ tel que :
- $u_k = 0$ si $a_k = \mathfrak{m}$, 1 sinon ;
- $u_j = 0$ si $a_j = a_{j+1}$, 1 sinon.

Ceci établit l'isomorphisme d'espèce voulu. □

Corollaire 6.2.4. *Soit k un entier naturel non nul. Les séries génératrices exponentielles $\mathbf{C}_k^g$, $\mathbf{C}_k^l$, $\mathbf{C}_k^s$ et $\mathbf{C}_k^{sl}$ vérifient :*

$$\mathbf{C}_k^g \cong \sum_{i\geq 0} \mathbf{C}_i^s \times \binom{k}{i},$$

et

$$\mathbf{C}_k^l \cong \sum_{i\geq 1} \mathbf{C}_{i-1}^{sl} \times \binom{k}{i} + \sum_{i\geq 0} \mathbf{C}_i^{sl} \times \binom{k}{i}.$$

Les séries indicatrices de cycles $\mathbf{Z}_k^g$, $\mathbf{Z}_k^l$, $\mathbf{Z}_k^s$ et $\mathbf{Z}_k^{sl}$ vérifient :

$$\mathbf{Z}_k^g \cong \sum_{i\geq 0} \mathbf{Z}_i^s \times \binom{k}{i},$$

et

$$\mathbf{Z}_k^l \cong \sum_{i\geq 1} \mathbf{Z}_{i-1}^{sl} \times \binom{k}{i} + \sum_{i\geq 0} \mathbf{Z}_i^{sl} \times \binom{k}{i}.$$

Démonstration. L'isomorphisme de la proposition 6.2.3 est un isomorphisme d'espèce : il préserve donc l'action des groupes symétriques. Comme, l'action de $\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{n-\ell}$ sur $\mathcal{M}_{k,i}(\emptyset,\emptyset)$ est triviale, nous obtenons directement les relations. □

La longueur d'une chaîne stricte dans le poset $\Pi_{n,\ell}$ est d'au plus $n-2$. Les séries $\mathbf{Z}_k^g$ et $\mathbf{Z}_k^l$ sont donc polynomiales en k.

Proposition 6.2.5. *L'action de $\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{n-\ell}$ induite sur l'homologie du poset $\Pi_{n,\ell}$ est donnée, au signe près, par la valeur en $k=-1$ du polynôme $\mathbf{Z}_k^g$. L'action de $\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{n-\ell}$ induite sur la somme directe des homologies des intervalles maximaux du poset $\Pi_{n,\ell} - \widehat{0}$ est donnée, au signe près par la valeur en $k=-2$ du polynôme $\mathbf{Z}_k^l$.*

Démonstration. Ce résultat vient de l'écriture de la caractéristique d'Euler du poset, qui est Cohen-Macaulay, et du corollaire 6.2.4. □

6.2.2 Relations entre espèces

Soit k un entier naturel non nul.

Nous aurons besoin dans ce qui suit des espèces auxiliaires suivantes :

- $\mathcal{C}_k^\bullet$, l'espèce qui à (V_1, V_2) associe l'ensemble des chaînes larges de longueur k dans le poset $\Pi_{V_1 \cup V_2, V_1}$, formées de partitions semi-pointées dont le minimum est une partition en une part pointée,
- $\mathcal{C}_k^\times$, l'espèce qui à (V_1, V_2) associe l'ensemble des chaînes larges de longueur k dans le poset $\Pi_{V_1 \cup V_2, V_1}$, formées de partitions semi-pointées dont le minimum est une partition en une part non pointée.

Proposition 6.2.6. *Les espèces $\mathcal{C}_k^\bullet$, $\mathcal{C}_k^\times$, $\mathcal{C}_k^g$ et $\mathcal{C}_k^l$ sont reliées par les relations suivantes :*

$$\mathcal{C}_k^\bullet = \mathcal{C}_{k-1}^\bullet \cdot (\mathrm{Comm} + 1) \circ \left(\mathcal{C}_{k-1}^\bullet + \mathcal{C}_{k-1}^\times\right),$$

$$\mathcal{C}_k^\times = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{C}_{k-1}^\times \cdot (\mathrm{Comm} + 1) \circ \mathcal{C}_{k-1}^\bullet,$$

$$\mathcal{C}_k^g = \mathrm{Comm} \circ \left(\mathcal{C}_k^\bullet + \mathcal{C}_k^\times\right),$$

$$\mathcal{C}_{k-1}^l = \mathcal{C}_k^\bullet + \mathcal{C}_k^\times.$$

Démonstration.

- Considérons une chaîne large de longueur k dont le minimum n'a qu'une part, qui est pointée. Alors, l'élément e suivant ce minimum dans la chaîne a une part pointée d'où provient le pointage du minimum et d'autres parts éventuelles pointées ou non. Oubliant le minimum et séparant les parts de la partition e, nous obtenons une chaîne large de longueur $k-1$ dont le minimum est en une part pointée et un ensemble éventuellement vide de chaînes larges de longueur $k-1$ dont le minimum est en une part, pointée ou non.
- Considérons une chaîne large de longueur k dont le minimum n'a qu'une part non pointée. Alors, l'élément e suivant ce minimum dans la chaîne a un ensemble non vide de parts non pointées et d'autres parts éventuelles pointées. La séparation de chacune des parts de e dans le reste de la chaîne est indépendant de la séparation des autres parts. Oubliant le minimum et séparant les partitions de la chaîne selon les parts de la partition e, nous obtenons un ensemble non vide de chaînes larges de longueur $k-1$ dont le minimum est en une part non pointée et un ensemble éventuellement vide de chaînes larges de longueur $k-1$ dont le minimum est en une part pointée.
- Considérons une chaîne large de longueur k. La relation voulue est obtenue en séparant les parts du minimum de la chaîne.
- Considérons une chaîne large avec multiplicité de longueur k $((a_1, \ldots, a_k), \mathfrak{m})$ de partitions semi-pointées dans un intervalle maximal $[\mathfrak{m}, \pi_{V,V_1}]$ du poset épointé. Nous obtenons une $k+1$-chaîne large en rajoutant au début de la chaîne la partition $\mathfrak{m}$ à une part bornant l'intervalle, qui peut être pointée ou non. Il y a alors une bijection entre les couples $((a_1, \ldots, a_k), \mathfrak{m})$ et les chaînes $(\mathfrak{m}, a_1, \ldots, a_k)$. La chaîne $(\mathfrak{m}, a_1, \ldots, a_k)$ est alors une $k+1$-chaîne large dont le minimum est en une part, pointée ou non. □

6.2.3 Dimension de l'homologie des posets des partitions semi-pointées

Nous nous intéressons maintenant à la dimension de l'unique groupe d'homologie non nul des posets de partitions semi-pointées. Nous utilisons les relations entre espèces de la proposition 6.2.6 : elles impliquent des relations entre séries génératrices que nous réécrivons à la proposition suivante. Ces relations nous permettront d'obtenir des formules closes explicites pour la dimension du groupe d'homologie du poset des partitions semi-pointées. Ces relations sont valables pour tout entier naturel non nul k. Comme la taille des chaînes est bornée dans un poset donné,

les coefficients des séries $\mathbf{C}_k^g$ et $\mathbf{C}_k^l$ sont des polynômes en k. De plus, par les relations montrées à la sous-sections précédentes entre les séries, les coefficients des séries $\mathbf{C}_k^\bullet$ et $\mathbf{C}_k^\times$ sont aussi des polynômes en k : les relations entre ces séries restent donc valables pour tout entier relatif.

Proposition 6.2.7. *Pour tout entier relatif k, les séries génératrices $\mathbf{C}_k^\bullet$, $\mathbf{C}_k^\times$, $\mathbf{C}_k^g$ et $\mathbf{C}_k^l$ vérifient les relations suivantes :*

$$\mathbf{C}_k^\bullet = \mathbf{C}_{k-1}^\bullet \times e^{\mathbf{C}_{k-1}^\bullet + \mathbf{C}_{k-1}^\times}, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{C}_k^\times = e^{\mathbf{C}_{k-1}^\bullet}\left(e^{\mathbf{C}_{k-1}^\times} - 1\right), \tag{6.2}$$

$$\mathbf{C}_k^g = \exp\left(\mathbf{C}_k^\bullet + \mathbf{C}_k^\times\right) - 1, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{C}_{k-1}^l = \mathbf{C}_k^\bullet + \mathbf{C}_k^\times. \tag{6.4}$$

Calculant les premiers termes, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 6.2.8. *Les séries $\mathbf{C}_{-1}^\bullet$ et $\mathbf{C}_{-1}^g$ sont reliées par :*

$$x = \mathbf{C}_{-1}^\bullet\left(1 + \mathbf{C}_{-1}^g\right), \tag{6.5}$$

$$y = \mathbf{C}_{-1}^g + 1 - e^{\mathbf{C}_{-1}^\bullet}. \tag{6.6}$$

Démonstration. Nous calculons dans un premier temps $\mathbf{C}_1^\bullet$ et $\mathbf{C}_1^\times$. Rappelons que le coefficient de $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dans la série $\mathbf{C}_1^\bullet$ (resp. $\mathbf{C}_1^\times$) est le nombre de chaînes larges de longueur un dont le minimum n'a qu'une part pointée (resp. non pointée), sur un ensemble de pointages possibles de taille ℓ et un ensemble d'éléments non pointés de taille p. Il y en a ℓ dans le cas pointé de $\mathbf{C}_1^\bullet$ et 1 si p est non nul, 0 sinon, dans le cas non pointé de $\mathbf{C}_1^\times$. Nous obtenons donc :

$$\mathbf{C}_1^\bullet = xe^{x+y} \text{ et } \mathbf{C}_1^\times = e^{x+y} - e^x.$$

En utilisant les relations entre séries génératrices précédentes (6.1) et (6.2), nous obtenons :

$$\begin{cases} xe^{x+y} = \mathbf{C}_0^\bullet e^{\mathbf{C}_0^\bullet + \mathbf{C}_0^\times} \\ e^{x+y} - e^x = e^{\mathbf{C}_0^\bullet + \mathbf{C}_0^\times} - e^{\mathbf{C}_0^\bullet}. \end{cases}$$

Ces équations impliquent l'équation fonctionnelle suivante qui détermine de manière unique $\mathbf{C}_0^\bullet$:

$$xe^{x+y} = \mathbf{C}_0^\bullet\left(e^{x+y} - e^x + e^{\mathbf{C}_0^\bullet}\right).$$

Résolvant cette équation et la reportant dans le système ci-dessus, nous obtenons :

$$\mathbf{C}_0^\bullet = x \text{ et } \mathbf{C}_0^\times = y.$$

En replaçant ces valeurs dans les relations (6.1) et (6.2) pour $k = 0$, établies à la proposition 6.2.7, dans lesquelles nous éliminons $\mathbf{C}_{-1}^\times$ à l'aide de l'équation (6.3), nous obtenons les relations du système. □

ℓ |n	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	5	15	52	203	877
1	1	3	8	25	89	354	1551
2		3	10	35	133	552	2493
3			10	41	173	768	3637
4				41	196	953	4815
5					196	1057	5785
6						1057	6322
7							6322

Table 6.1 – Nombre de partitions semi-pointées dans $\Pi_{n,\ell}$

Remarque 6.2.9. La coefficient de $\frac{x^\ell y^{n-\ell}}{\ell!(n-\ell)!}$ de la série $\mathbf{C}_1^g$ donne le nombre de partitions semi-pointées dans $\Pi_{n,\ell}$. Cette série vérifie :

$$\mathbf{C}_1^g = \exp\left((x+1)e^{x+y} - e^x\right) - 1.$$

Nous récapitulons dans le tableau 6.1 les premières valeurs obtenues.

La première ligne correspond au cas des partitions d'un ensemble à n éléments : son cardinal est donné par le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bell B_n. Les deux diagonales $\ell = n$ et $\ell = n-1$ correspondent au cas des partitions pointées dont le cardinal est donné par la formule $\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}(n-\ell)^\ell$.

Les équations (6.5) et (6.6) permettent d'obtenir l'équation implicite suivante pour $\mathbf{C}_{-1}^\bullet$:

$$x = \mathbf{C}_{-1}^\bullet \left(y + e^{\mathbf{C}_{-1}^\bullet}\right). \tag{6.7}$$

Nous allons utiliser la proposition suivante, citée du livre [Sta01, Theorem 5.4.2, Corollary 5.4.3] pour obtenir le résultat voulu.

Proposition 6.2.10 (Théorème d'inversion de Lagrange)**.** *Soient K un corps de caractéristique nulle, $F(x) = \sum_{i\geq 1} a_i x^i \in xK[[x]]$, avec $a_1 \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$n[x^n]F^{<-1>}(x) = [x^{n-1}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1}\left(\frac{z}{F(z)}\right)^n_{z=0},$$

où $F^{<-1>}$ désigne l'inverse de F pour la composition.

Pour tout $H(x) \in K((x))$, nous avons alors :

$$n[x^n]H\left(F^{<-1>}(x)\right) = [x^{n-1}]H'(x)\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n.$$

Théorème 6.2.11. *Les séries génératrices $\mathbf{C}_{-1}^\bullet$, correspondant aux dimensions de l'homologie d'un intervalle maximal du poset entre une partition en une part pointée et une partition dont toutes les parts sont de taille 1, $\mathbf{C}_{-1}^g$, correspondant aux dimensions de l'homologie du poset augmenté, et $\mathbf{C}_{-2}^l$, correspondant à la somme des dimensions des homologies des intervalles maximaux du poset, vérifient :*

$$\mathbf{C}_{-1}^\bullet = \sum_{\ell\geq 1, p\geq 0} (-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!},$$

$$\mathbf{C}_{-1}^g = \sum_{\ell\geq 1, p\geq 0} (-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p-1)^{\ell-1}\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!},$$

$$\mathbf{C}_{-2}^l = \sum_{\ell\geq 1, p\geq 0} (-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^{\ell}\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}.$$

Démonstration. – Calculons maintenant les coefficients de $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$. Nous appliquons à l'équation (6.7) le théorème d'inversion de Lagrange (proposition 6.2.10) avec $F(x) = x\,(y + e^x)$. Nous obtenons :

$$\mathbf{C}^{\bullet}_{-1} = \sum_{\ell \geq 1} \frac{x^\ell}{\ell!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{y+e^z}\right)^{\ell}_{z=0}.$$

Le calcul de la dérivée donne, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{y+e^z}\right)^{\ell} = \sum_{p \geq 0} \binom{-\ell}{p} y^p \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\ell-1} e^{z(-\ell-p)}.$$

D'où l'équation suivante, dont découle le résultat voulu :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{y+e^z}\right)^{\ell}_{z=0} = \sum_{p \geq 0} (-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!} \frac{y^p}{p!} (\ell+p)^{\ell-1}.$$

– La deuxième équation est obtenue par inversion de Lagrange avec $H(x) = y - 1 + e^x$ en utilisant la relation (6.6). Le coefficient $\frac{x^\ell y^l}{\ell! l!}$ de la série voulue est alors donné par le coefficient de $\frac{x^{\ell-1} y^l}{(\ell-1)! l!}$ dans la série :

$$H'(x) \left(\frac{x}{F(x)}\right)^{\ell} = e^x (y + e^x)^{-\ell}.$$

– La troisième équation est obtenue grâce à l'équation différentielle du lemme suivant :

Lemme 6.2.12. *Les séries génératrices $\mathbf{C}^{l}_{-2}$ et $\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}$ vérifient l'équation différentielle suivante :*

$$x \frac{\partial \mathbf{C}^{l}_{-2}}{\partial x} = x \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial y}.$$

Notant $\mathbf{C}^{l}_{-2} = \sum_{\ell \geq 0, p \geq 0, (\ell,p) \neq (0,0)} a_{\ell,p} \frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$, l'équation différentielle ci-dessus implique la relation suivante, pour tout $\ell \geq 0, p \geq 0, (\ell, p) \neq (0,0)$:

$$\ell a_{\ell,p} = -\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!} (\ell+p)^{\ell-1} (\ell+p).$$

Le résultat voulu suit immédiatement. □

Prouvons maintenant le lemme que nous venons d'utiliser :

Démonstration du lemme 6.2.12. En utilisant l'équation (6.4), nous obtenons :

$$x \frac{\partial \mathbf{C}^{l}_{-2}}{\partial x} = x \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial x} + x \frac{\partial \mathbf{C}^{\times}_{-1}}{\partial x}.$$

Le résultat du lemme sera donc vérifié si l'équation suivante est vérifiée :

$$y \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial y} = x \frac{\partial \mathbf{C}^{\times}_{-1}}{\partial x}.$$

Pour obtenir cette relation, nous dérivons par rapport à x et à y l'équation (6.7). Nous obtenons :

$$y \frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial y} = \frac{-y \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{y + e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}} + \mathbf{C}^{\bullet}_{-1} e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial x} = \frac{1}{y + e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}} + \mathbf{C}^{\bullet}_{-1} e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}}.$$

Nous dérivons d'autre part l'équation (6.6) par rapport à x. Nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{\times}_{-1}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{\partial x}\left(e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}} - e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}+\mathbf{C}^{\times}_{-1}}\right)}{e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}+\mathbf{C}^{\times}_{-1}}}.$$

Or, d'après l'équation (6.6), nous avons $e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}} - e^{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}+\mathbf{C}^{\times}_{-1}} = -y$ et d'après l'équation (6.5), nous avons $e^{-\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}-\mathbf{C}^{\times}_{-1}} = \frac{\mathbf{C}^{\bullet}_{-1}}{x}$, d'où le résultat. □

6.3 Parenthèse sur les partitions décorées par une opérade

Dans cette sous-section, nous nous plaçons dans le cadre du théorème 9 de l'article de B. Vallette [Val07]. Considérons donc une opérade ensembliste basique (*basic-set operad*) $\mathcal{P}$. C'est une opérade telle que, notant μ le morphisme de composition $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, l'application $\mu_{\nu_1,\ldots,\nu_k} : \mathcal{P}(k) \to \mathcal{P}(i_1 + \ldots + i_k), \nu \mapsto \mu(\nu(\nu_1, \ldots, \nu_k))$ soit injective, pour tout $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in (\mathcal{P}(i_1), \ldots, \mathcal{P}(i_k))$.

Une *partition décorée par* $\mathcal{P}$ sur un ensemble V à n éléments est une partition de V en ℓ ensembles $\{V_1, \ldots, V_\ell\}$ munie du choix, pour chacun des V_i d'un élément $V_i^{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}(V_i)$. Considérant l'opérade associative Assoc associée à l'espèce des listes par exemple, l'ensemble des partitions sur $\{1, 2, 3\}$ décorées par Assoc est :

$$\{(1\ 2\ 3)\}, \{(1\ 3\ 2)\}, \{(2\ 1\ 3)\}, \{(2\ 3\ 1)\}, \{(3\ 1\ 2)\}, \{(3\ 2\ 1)\},$$
$$\{(1)\ (2\ 3)\}, \{(1)\ (3\ 2)\}, \{(2)\ (1\ 3)\}, \{(2)\ (3\ 1)\}, \{(3)\ (1\ 2)\}, \{(3)\ (2\ 1)\},$$
$$\{(1)\ (2)\ (3)\}.$$

Le poset $\Pi_{n,\mathcal{P}}$ des $\mathcal{P}$-partitions sur n éléments est alors défini comme l'ensemble des partitions sur n éléments décorées par l'opérade $\mathcal{P}$, muni de l'ordre suivant. La partition maximum est la partition dont toutes les parts sont de taille 1, notée π. Une partition P_1 est plus petite qu'une partition $P_2 = (V_1^{\mathcal{P}}, \ldots, V_z^{\mathcal{P}})$ si toutes les parts de P_1 sont obtenues comme des $\mu(f(V_{i_1}^{\mathcal{P}}, \ldots, V_{i_j}^{\mathcal{P}}))$ où f est un élément de $\mathcal{P}(j)$.

Nous notons $\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},m}$, l'espèce des chaînes larges avec multiplicité de longueur k de partitions décorées par $\mathcal{P}$ dans chacun des intervalles maximaux des posets $\Pi_{n,\mathcal{P}}$, $n \geq 1$, c'est-à-dire l'espèce des couples formés d'un élément minimal min de $\Pi_{n,\mathcal{P}}$ et d'une k-chaîne large de $[\min, \pi]$, c'est-à-dire un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ tel que a_i appartienne à l'intervalle $[\min, \pi]$ et a_i soit inférieur (ou égal) à a_{i+1}.

Nous notons de plus $\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},\square}$ l'espèce des chaînes larges de longueur k de partitions décorées par $\mathcal{P}$ dans le poset $\Pi_{n,\mathcal{P}}$ dont le minimum n'a qu'une part. Si le poset est Cohen-Macaulay, le raisonnement sur le passage des chaînes strictes aux chaînes larges se transpose dans ce poset : la somme des homologies des intervalles maximaux du poset sera donnée par $\mathcal{C}_{-2}^{\mathcal{P},m}$.

Proposition 6.3.1. *Les relations entre espèces sont données par les équations suivantes :*

$$\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},m} = \mathcal{C}_{k+1}^{\mathcal{P},\square},$$

$$\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},\square} = \mathcal{P} \circ \mathcal{C}_{k-1}^{\mathcal{P},\square}.$$

Démonstration. Ces décompositions découlent de la définition des partitions et de l'ordre.

1. Nous comptons les k-chaînes larges avec multiplicité qui sont un couple formé d'un élément minimal $\mathfrak{m}$ de $\Pi_{n,\mathcal{P}}$ et d'une k-chaîne large de $[\mathfrak{m}, \pi]$. Ajoutant $\mathfrak{m}$ au début de la chaîne, nous obtenons une $k+1$ chaîne large dont le minimum n'a qu'une part.
2. Le minimum d'une k-chaîne large est obtenu comme une image par un élément d'un $\mathcal{P}(n)$ de l'ensemble des parts de l'élément qui le suit dans la chaîne, que nous appellerons le deuxième élément de la chaîne. En séparant les parts du deuxième élément de la chaîne, nous pouvons séparer la chaîne privée de son minimum en un ensemble de $k-1$-chaînes dont le minimum n'a qu'une part et la chaîne originale est obtenue comme une image par un élément d'un $\mathcal{P}(n)$ de l'ensemble de ces $k-1$-chaînes. □

Sous réserve que l'opérade soit Koszul ou le poset Cohen-Macaulay (ce qui est équivalent d'après [Val07, Theorem 9]), nous retrouvons alors un corollaire du résultat de B. Vallette [Val07] qui détermine l'homologie de ces posets. Notant $\mathcal{P}^{-1}$ la suspension de l'opérade duale de Koszul de $\mathcal{P}$, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 6.3.2. *L'action du groupe symétrique sur l'unique groupe d'homologie non nul des posets des $\mathcal{P}$-partitions est donnée par la série suivante :*

$$\mathcal{C}_{-2}^{\mathcal{P},m} = \mathcal{P}^{-1}.$$

Démonstration. Calculons $\mathcal{C}_1^{\mathcal{P},m}$. Pour ce faire, nous commençons par déterminer $\mathcal{C}_1^{\mathcal{P},\square}$. Une partition décorée par $\mathcal{P}$ en une part est un élément de $\mathcal{P}$ et tout élément de $\mathcal{P}$ donne une telle partition. Nous obtenons donc $\mathcal{C}_1^{\mathcal{P},\square} = \mathcal{P}$, ce qui donne, avec les relations de la proposition 6.3.1, l'égalité $\mathcal{C}_1^{\mathcal{P},m} = \mathcal{P} \circ \mathcal{P}$.

Utilisant les relations de la proposition 6.3.1, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0^{\mathcal{P},m} &= \mathcal{P}, \\
\mathcal{C}_{-1}^{\mathcal{P},m} &= X, \\
\mathcal{C}_{-2}^{\mathcal{P},m} &= \mathcal{P}^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Nous notons $\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},l}$, l'espèce des chaînes larges de longueur k de partitions décorées par $\mathcal{P}$ dans les posets $\Pi_{n,\mathcal{P}}$, $n \geq 1$. Remarquons qu'il n'est plus ici question de multiplicité ou d'intervalles maximaux dans le poset épointé. Si le poset est Cohen-Macaulay, le raisonnement sur le passage des chaînes strictes aux chaînes larges se transpose dans le poset : l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des partitions décorées par $\mathcal{P}$ sur n éléments augmenté d'un minimum est alors donnée par $\mathcal{C}_{-1}^{\mathcal{P},l}$.

Cette espèce est reliée à l'espèce $\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},\square}$ par la relation suivante.

Proposition 6.3.3. *Les espèces de chaînes larges $\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},l}$ et $\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},\square}$ sont reliées par :*

$$\mathcal{C}_k^{\mathcal{P},l} = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{C}_k^{\mathcal{P},\square}.$$

Démonstration. En séparant les parts du minimum d'une k-chaîne large, nous obtenons un ensemble de k-chaînes larges dont le minimum n'a qu'une seule part. De plus, un ensemble de k-chaînes larges dont le minimum n'a qu'une seule part peut à son tour être vu comme une k-chaîne large. □

L'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset augmenté est alors donné par la proposition suivante.

Proposition 6.3.4. *L'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des partitions décorées par $\mathcal{P}$ sur n éléments augmenté d'un minimum est donnée par :*

$$\mathcal{C}_{-1}^{\mathcal{P},l} = \mathrm{Comm} \circ \mathcal{P}^{-1}$$

Démonstration. Nos calculs précédents impliquent la relation suivante :

$$\mathcal{C}_{-1}^{\mathcal{P},\square} = \mathcal{P}^{-1}.$$

Le résultat suit immédiatement. □

Remarque 6.3.5. Les posets des partitions semi-pointées ne rentrent pas dans ce cadre.

6.4 Perspectives

6.4.1 Calcul de l'action du groupe symétrique sur les posets des partitions semi-pointées

Dans l'optique d'une étude des séries indicatrices de cycles des espèces précédentes, nous introduisons un raffinement des séries étudiées. Nous nous intéressons donc maintenant à un raffinement de la série $\mathbf{C}_{-1}^{g}$ définie comme suit :

$$\mathbf{C}_{-1,t}^{g} = \frac{\exp(t\mathbf{C}_{-2}^{l}) - 1}{t} = \frac{(\mathbf{C}_{-1}^{g} + 1)^t - 1}{t}.$$

L'intérêt de l'introduction de cette série tient au fait que ses coefficients sont des polynômes en t qui se factorisent en produit de polynômes de degré 1 à coefficients entiers, ce qui permet d'espérer que les coefficients de la série indicatrice de cycles correspondante pourraient eux aussi se factoriser en produit de polynômes en t de petits degrés à coefficients entiers.

La série $\mathbf{C}_{-1}^{g}$ vérifiant les équations (6.5) et (6.6), nous obtenons :

$$\mathbf{C}_{-1,t}^{g} = \frac{(y + e^{\mathbf{C}_{-1}^{\bullet}})^t - 1}{t}.$$

Le théorème d'inversion de Lagrange (proposition 6.2.10) donne alors le résultat suivant.

Proposition 6.4.1. *Les coefficients de la série* $\mathbf{C}_{-1,t}^{g}$ *sont donnés par :*

$$\mathbf{C}_{-1,t}^{g} = \sum_{\ell\geq 1, p\geq 0} \prod_{q=1}^{p} (t - \ell - q)\,(t - \ell - p)^{\ell-1} \frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}.$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème d'inversion de Lagrange avec $H(z) = \frac{(y+e^z)^t - 1}{t}$.

$$\begin{aligned}\frac{H'(x)}{(y+e^x)^\ell} &= e^x (y + e^x)^{t-\ell-1} \\ &= \sum_{p\geq 0} \frac{\prod_{q=0}^{p-1}(t-\ell-1-q)}{p!} y^p \sum_{\alpha\geq 0} \frac{(t-\ell-p)^\alpha}{\alpha!} x^\alpha.\end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{x^{\ell-1}y^p}{(\ell-1)!p!}$ dans cette expression donne alors le coefficient de $\frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}$ dans la série $\mathbf{C}_{-1,t}^{g}$. □

Remarque 6.4.2. L'expression trouvée pour la série $\mathbf{C}_{-1,t}^{g}$ évaluée en $t = 1$ (respectivement $t = 0$) redonne l'expression calculée au théorème 6.2.11 pour $\mathbf{C}_{-1}^{g}$ (respectivement $\mathbf{C}_{-2}^{l}$).

6.4.2 Algèbre de Hopf d'incidence

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions (Faa di Bruno) est très étudiée, notamment pour ses nombreuses applications. Elle s'identifie à une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a_n)_{n\geq 1}$ où a_n correspond à l'application de l'ensemble des séries formelles exponentielles à coefficients dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f = \sum_{n\geq 1} f_n \frac{x^n}{n!} \mapsto f_n.$$

De plus, d'après l'article [CV06] de F. Chapoton et B. Vallette, l'algèbre de Hopf d'incidence associée à la famille des partitions pointées est isomorphe à une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a_n)_{n\geq 2}$ donnée par la composition des séries formelles de la forme suivante :

$$x + \sum_{n\geq 2} a_n \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

La question d'une identification de l'algèbre de Hopf d'incidence des posets des partitions semi-pointées à une autre algèbre pouvant être décrite en fonction de séries formelles se pose légitimement. Les deux premières étapes du chemin menant à une réponse à cette question sont d'abord de donner une description complète des intervalles d'un poset $\Pi_{n,\ell}$ donné, puis de calculer le coproduit de l'algèbre de Hopf d'incidence des posets des partitions semi-pointées.

6.4.3 Analogue en type B

Les posets des partitions semi-pointées généralisent à la fois les posets de partitions et les posets des partitions pointées. Cependant, A. Björner et M. Wachs ont exhibé un analogue en type B du poset des partitions dans l'article [BW83] et F. Chapoton et B. Vallette, un analogue en type B du poset des partitions pointées dans leur article [CV06]. Il se pose donc légitimement la question d'une généralisation en type B des posets de partitions semi-pointées qui généraliserait à la fois les posets de partitions et les posets de partitions pointées de type B.

Bibliographie

[AZ04] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004. Including illustrations by Karl H. Hofmann. 68

[Bac75] Kenneth Bacławski. Whitney numbers of geometric lattices. *Advances in Math.*, 16:125–138, 1975. 24

[Bac11] Roland Bacher. On the enumeration of labelled hypertrees and of labelled bipartite trees. arXiv:1102.2708, 2011. 62, 86, 97

[Ber73] Claude Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1973. Deuxième édition, Collection Dunod Université, Série Violette, No. 604. 2

[Ber89] Claude Berge. *Hypergraphs*, volume 45 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Combinatorics of finite sets. 2

[Ber09] François Bergeron. *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces*. CMS Treatises in Mathematics. Canadian Mathematical Society, Ottawa, ON, 2009.

[Bjö80] Anders Björner. Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260(1):159–183, 1980. 22, 23

[Bjö94] Anders Björner. Subspace arrangements. In *First European Congress of Mathematics, Vol. I (Paris, 1992)*, volume 119 of *Progr. Math.*, pages 321–370. Birkhäuser, Basel, 1994. 2

[Bla93] Andreas Blass. Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics. *Topology Proc.*, 18:33–56, 1993. 2

[BLL98] François Bergeron, Gilbert Labelle, and Pierre Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota. 2, 7, 9, 11, 27, 41

[BMC12] Mireille Bousquet-Mélou and Guillaume Chapuy. The vertical profile of embedded trees. *Electron. J. Combin.*, 19(3):Paper 46, 61, 2012. 86

[BMMM01] Noel Brady, Jon McCammond, John Meier, and Andy Miller. The pure symmetric automorphisms of a free group form a duality group. *J. Algebra*, 246(2):881–896, 2001. 2, 4, 30, 31, 106, 108, 109

[BRSV86] Flavio Bonetti, Gian-Carlo Rota, Domenico Senato, and Antonietta M. Venezia. Symmetric functions and symmetric species. In *Combinatorics '84 (Bari, 1984)*, volume 123 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 107–113. North-Holland, Amsterdam, 1986. 2, 3

[Bur10] Emily Burgunder. A symmetric version of Kontsevich graph complex and Leibniz homology. *J. Lie Theory*, 20(1):127–165, 2010. http://arxiv.org/abs/0804.2052.

[BW82] Anders Björner and Michelle Wachs. Bruhat order of Coxeter groups and shellability. *Adv. in Math.*, 43(1):87–100, 1982. 22

[BW83] Anders Björner and Michelle Wachs. On lexicographically shellable posets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1):323–341, 1983. 22, 24, 51, 106, 127

[BW96] Anders Björner and Michelle L. Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(4):1299–1327, 1996. 21, 22, 23

[BW97] Anders Björner and Michelle L. Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10):3945–3975, 1997. 21, 22

[BY90] François Bergeron and Yeong Nan Yeh. The factoriality of the ring of S-species. *J. Combin. Theory Ser. A*, 55(2):194–203, 1990.

[Cha08] Frédéric Chapoton. Operads and algebraic combinatorics of trees. *Sém. Lothar. Combin.*, 58:Art. B58c, 27, 2007/08. http://www.emis.de/journals/SLC/wpapers/s58chapoton.html. 12, 13

[Cha01] Frédéric Chapoton. Un endofoncteur de la catégorie des opérades. In *Dialgebras and related operads*, volume 1763 of *Lecture Notes in Math.*, pages 105–110. Springer, Berlin, 2001. 3

[Cha02] Frédéric Chapoton. Opérades différentielles graduées sur les simplexes et les permutoèdres. (Differential graded operads related to simplices and permutohedra). *Bull. Soc. Math. Fr.*, 130(2):233–251, 2002. http://arxiv.org/abs/math.QA/0102172. 54, 79

[Cha05] Frédéric Chapoton. On some anticyclic operads. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:53–69 (electronic), 2005. 14, 43, 44, 58, 75

[Cha07] Frédéric Chapoton. Hyperarbres, arbres enracinés et partitions pointées. *Homology, Homotopy Appl.*, 9(1):193–212, 2007. http://www.intlpress.com/hha/v9/n1/. 2, 4, 30, 31, 43, 44, 48, 50, 53, 54, 74, 83, 84, 86

[CL01] Frédéric Chapoton and Muriel Livernet. Pre-Lie algebras and the rooted trees operad. *Internat. Math. Res. Notices*, (8):395–408, 2001. 3, 13, 75

[CL07] Frédéric Chapoton and Muriel Livernet. Relating two Hopf algebras built from an operad. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (24):Art. ID rnm131, 27, 2007.

[CV03] James Conant and Karen Vogtmann. On a theorem of Kontsevich. *Algebr. Geom. Topol.*, 3:1167–1224, 2003. http://arxiv.org/abs/math/0208169.

[CV06] Frédéric Chapoton and Bruno Vallette. Pointed and multi-pointed partitions of type A and B. *J. Algebraic Combin.*, 23(4):295–316, 2006. 113, 126, 127

[DK07] Vladimir V. Dotsenko and Anton S. Khoroshkin. Character formulas for the operad of a pair of compatible brackets and for the bi-Hamiltonian operad. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 41(1):1–22, 96, 2007. http://arxiv.org/abs/math/0605233. 74

[Dot12] Vladimir Dotsenko, 2012. Private communication. 79

[Dou74] Peter Doubilet. A Hopf algebra arising from the lattice of partitions of a set. *J. Algebra*, 28:127–132, 1974. 3

[DRS72] Peter Doubilet, Gian-Carlo Rota, and Richard Stanley. On the foundations of combinatorial theory. VI. The idea of generating function. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California,*

Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II: Probability theory, pages 267–318, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.

[EFMre] Kurusch Ebrahimi-Fard and Dominique Manchon. On an extension of Knuth's rotation correspondence to reduced planar trees. *J. Noncommut. Geom.*, à paraître. 2

[FK78] Hillel Furstenberg and Yitzhak Katznelson. An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. *J. Analyse Math.*, 34:275–291 (1979), 1978. 2

[FM14] Alexandra Frabetti and Dominique Manchon. Five interpretations of Faà di Bruno's formula. arXiv : 1402.5551, 2014. 4

[GK95] Ezra Getzler and Mikhail M. Kapranov. Cyclic operads and cyclic homology. In *Geometry, Topology and Physics*, pages 167–201. Press, 1995. `http://math.northwestern.edu/~getzler/Papers/cyclic.pdf`. 58

[GK05] Ira M. Gessel and Louis H. Kalikow. Hypergraphs and a functional equation of Bouwkamp and de Bruijn. *J. Combin. Theory Ser. A*, 110(2):275–289, 2005. `http://arxiv.org/abs/math/0410373`. 2, 65

[GLPN93] Giorgio Gallo, Giustino Longo, Stefano Pallottino, and Sang Nguyen. Directed hypergraphs and applications. *Discrete Appl. Math.*, 42(2-3):177–201, 1993. Combinatorial structures and algorithms. 2

[JMM06] Craig Jensen, Jon McCammond, and John Meier. The integral cohomology of the group of loops. *Geom. Topol.*, 10:759–784 (electronic), 2006. `http://arxiv.org/abs/0903.0140`. 2, 30

[JMM07] Craig Jensen, Jon McCammond, and John Meier. The Euler characteristic of the Whitehead automorphism group of a free product. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6):2577–2595 (electronic), 2007. `http://arxiv.org/abs/math/0601694`. 2, 30, 53, 54, 68, 72

[Joy81] André Joyal. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Adv. in Math.*, 42(1):1–82, 1981. 2

[Joy86] André Joyal. Foncteurs analytiques et espèces de structures. In *Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985)*, volume 1234 of *Lecture Notes in Math.*, pages 126–159. Springer, Berlin, 1986. 7

[JR79] Saj-Nicole A. Joni and Gian-Carlo Rota. Coalgebras and bialgebras in combinatorics. *Stud. Appl. Math.*, 61(2):93–139, 1979. 3

[Kal99] Louis H. Kalikow. *Enumeration of parking functions, allowable permutation pairs, and labeled trees*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1999. Thesis (Ph.D.)–Brandeis University. 2, 101

[KHT09] Steffen Klamt, Utz-Uwe Haus, and Fabian Theis. Hypergraphs and cellular networks. *PLoS Comput. Biol.*, 5(5):e1000385, 6, 2009. 2

[Kon93] Maxim Kontsevich. Formal (non)commutative symplectic geometry. In *The Gelfand Mathematical Seminars, 1990–1992*, pages 173–187. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[Lab81] Gilbert Labelle. Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange. *Adv. in Math.*, 42(3):217–247, 1981. 82

[Lab92a] Gilbert Labelle. Counting asymmetric enriched trees. *J. Symbolic Comput.*, 14(2-3):211–242, 1992.

[Lab92b] Gilbert Labelle. On asymmetric structures. *Discrete Math.*, 99(1-3):141–164, 1992.

[Lab93] Gilbert Labelle. Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires. *Theoret. Comput. Sci.*, 117(1-2):3–22, 1993. Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Bordeaux, 1991).

[Lab95] Gilbert Labelle. Some combinatorial results first found using computer algebra. *J. Symbolic Comput.*, 20(5-6):567–594, 1995. Symbolic computation in combinatorics Δ_1 (Ithaca, NY, 1993).

[Ler04] Pierre Leroux. Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals. *Electron. J. Combin.*, 11(1):Research Paper 32, 28, 2004. 65

[Liv06] Muriel Livernet. A rigidity theorem for pre-Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 207(1):1–18, 2006. 13

[LL04a] Gilbert Labelle and Cédric Lamathe. Even permutations and oriented sets: their shifted asymmetry index series. *Adv. in Appl. Math.*, 33(4):753–769, 2004.

[LL04b] Gilbert Labelle and Cédric Lamathe. A shifted asymmetry index series. *Adv. in Appl. Math.*, 32(3):576–608, 2004.

[Lod96] Jean-Louis Loday. La renaissance des opérades. *Astérisque*, (237):Exp. No. 792, 3, 47–74, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. 12

[LP94] Gilbert Labelle and Kathleen Pineau. Ensembles orientés et permutations paires: séries indicatrices d'asymétrie et q-séries. *Adv. in Appl. Math.*, 15(4):452–475, 1994.

[LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012. 3, 12

[May72] Jon Peter May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. 3

[McC06] Jon McCammond. Noncrossing partitions in surprising locations. *Amer. Math. Monthly*, 113:598–610, 2006.

[MM96] Darryl McCullough and Andy Miller. Symmetric automorphisms of free products. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 122(582):viii+97, 1996. 2, 26, 30, 93

[MM04] Jon McCammond and John Meier. The hypertree poset and the l^2-Betti numbers of the motion group of the trivial link. *Math. Ann.*, 328(4):633–652, 2004. 2, 4, 30, 31, 32, 40, 86, 91, 100, 101, 110

[MSS02] Martin Markl, Steve Shnider, and Jim Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. 3

[Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984. 19

[MY91] Miguel Méndez and Julia S. Yang. Möbius species. *Adv. Math.*, 85(1):83–128, 1991. 3, 113

[Oge13a] Bérénice Oger. Action of the symmetric groups on the homology of the hypertree posets. *J. Algebraic Combin.*, 38(4):915–945, 2013. 1, 53, 86

[Oge13b] Bérénice Oger. Decorated hypertrees. *J. Combin. Theory Ser. A*, 120(7):1871–1905, 2013. 1, 62, 101

[Oge14] Bérénice Oger. Hypertree posets and hooked partitions. *soumis*, 2014. 1

[Özt08] Can Özturan. On finding hypercycles in chemical reaction networks. *Appl. Math. Lett.*, 21(9):881–884, 2008. 2

[Rot64] Gian-Carlo Rota. On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 2:340–368 (1964), 1964. 18

[Sch01] Ludwig Schläfi. Theorie der vielfachen kontinuität. *Denkschriften der Schweizerischen naturforschen-den Gesellschaft*, 38, 1901. 21

[Sch87] William R. Schmitt. Antipodes and incidence coalgebras. *J. Combin. Theory Ser. A*, 46(2):264–290, 1987. 87

[Sch93] William R. Schmitt. Hopf algebras of combinatorial structures. *Canad. J. Math.*, 45(2):412–428, 1993.

[Sch94] William R. Schmitt. Incidence Hopf algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 96(3):299–330, 1994. 3, 85, 86, 92

[Sel72] Boris I. Selivanov. Enumeration of homogeneous hypergraphs with a simple cycle structure. *Kombinatornyĭ Anal.*, (Vyp. 2):60–67, 1972. 62, 97

[Spe97] Roland Speicher. Free probability theory and non-crossing partitions. *Sém. Lothar. Combin.*, 39:Art. B39c, 38 pp. (electronic), 1997. 91

[Sta01] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*. Number vol. 2 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001. 73, 86, 121

[Sta12] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. 18, 19

[Sun94a] Sheila Sundaram. Applications of the Hopf trace formula to computing homology representations. In *Jerusalem combinatorics '93*, volume 178 of *Contemp. Math.*, pages 277–309. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. 25

[Sun94b] Sheila Sundaram. The homology representations of the symmetric group on Cohen-Macaulay subposets of the partition lattice. *Adv. Math.*, 104(2):225–296, 1994. 24, 25

[Tao06] Terence Tao. A variant of the hypergraph removal lemma. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113(7):1257–1280, 2006. 2

[Val07] Bruno Vallette. Homology of generalized partition posets. *J. Pure Appl. Algebra*, 208(2):699–725, 2007. 84, 113, 124

[Wac99] Michelle L. Wachs. Whitney homology of semipure shellable posets. *J. Algebraic Combin.*, 9(2):173–207, 1999. 24

[Wac07] Michelle L. Wachs. Poset topology: tools and applications. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 497–615. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 14

[War98] David Michael Warme. *Spanning trees in hypergraphs with applications to Steiner trees*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.)–University of Virginia. 2

[Whi09] Alfred North Whitehead. *A treatise on universal algebra*. Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. With applications, Reprint of the 1898 original. 3

[Wil10] Thomas Willwacher. M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmueller lie algebra. Technical Report arXiv:1009.1654, Sep 2010.

[Zas02] Thomas Zaslavsky. Perpendicular dissections of space. *Discrete Comput. Geom.*, 27(3):303–351, 2002. `http://arxiv.org/abs/1001.4435`. 58

Table des figures

1.1 Dérivée de l'espèce des cycles : l'espèce des listes. 9
1.2 Arbres enracinés de listes. 9
1.3 Éléments de l'image par l'espèce $\mathcal{A}_{r,s}$ des ensembles $\{1,2\}$ et $\{\diamondsuit,\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$ 11
1.4 Composition de deux arbres enracinés dans l'opérade NAP. 13
1.5 Composition de deux arbres enracinés dans l'opérade PreLie. 13
1.6 Diagramme de Hasse du poset des sous-ensembles non vides d'un ensemble à trois éléments 15
1.7 Diagramme de Hasse du poset des partitions d'un ensemble à trois éléments. . . 15
1.8 Diagramme de Hasse du poset des sous-groupes de D_4. 16
1.9 Poset des sous-ensembles sur un ensemble à trois sommets. 18
1.10 Le poset P de l'exemple 1.2.28 et le complexe simplicial associé à $\bar{P}$. 22
1.11 Étiquetage selon les arêtes du poset dual de Π_4 23
1.12 Exemple d'hypergraphe sur $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. 25
1.13 Exemple d'hyperarbre sur $\{1,2,3,4\}$. 26
1.14 Hyperarbre et arbre biparti étiqueté associé. 26
1.15 Hyperarbre sur neuf sommets enraciné en 1. 27
1.16 Hyperarbre sur sept sommets, pointé en $\{1,2,3,4\}$. 27
1.17 Hyperarbre sur sept sommets, pointé en $\{1,2,3,4\}$ et enraciné en 3. 27
1.18 Hyperarbre creux sur huit sommets. 28
1.19 L'excentricité e de deux hyperarbres 28
1.20 Exemple d'ordre dans le poset des hyperarbres à quatre sommets étiquetés par $I = (\diamondsuit,\heartsuit,\clubsuit,\spadesuit)$. 29

2.1 Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres enracinée. 36
2.2 Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres creuse. 37
2.3 Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres pointée en une arête. 38
2.4 Décomposition d'une chaîne d'hyperarbres pointée en une arête et un sommet. . 39

3.1 Exemple d'hyperarbre décoré enraciné décorés par l'espèce $\mathcal{S}'$ qui associe à un ensemble I l'ensemble des applications de $\{1,2,3\}$ dans I. 55
3.2 Hyperarbres décorés. 55
3.3 Hyperarbre décoré pointé en une arête. 56
3.4 Hyperarbre enraciné décoré par l'espèce des cycles. 56
3.5 Hyperarbre pointé en un sommet et une arête décoré par l'espèce des listes. . . 57

3.6 Hyperarbre creux décoré par l'espèce des ensembles pointés. 57
3.7 Hyperarbre creux décoré par $\widehat{\mathrm{Perm}}$. 58
3.8 Arbre gras enraciné sur l'ensemble $\{1, \ldots, 9\}$. 58
3.9 Arbre en boîtes. 61
3.10 Arbre en boîtes associé, avec la racine 3 et l'ensemble de listes $\{(15, 1), (14, 7, 13, 2), (4, 5, 6), (8), (10, 9), (11), (12)\}$, à l'hyperarbre de la figure 3.4. 63
3.11 Arbre enraciné 2-coloré. 69
3.12 Hyperarbre creux décoré par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$. 70
3.13 Un hyperarbre enraciné décoré par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ et l'arbre 2-coloré correspondant. . . 71
3.14 Hyperarbres bidécorés. 81
3.15 Hyperarbre bidécoré enraciné. 81

4.1 Intervalles dans les posets en diamant et triangle. 89
4.2 Le poset Π_4 91
4.3 Le poset $\widehat{HT_3}$ 92
4.4 Hyperarbre et arbre biparti associé. 93
4.5 L'application φ. 96

5.1 Exemple d'hyperarbre aux arêtes pointées. 106
5.2 Exemple d'hyperarbre aux arêtes pointées plus grand que l'hyperarbre de la figure 5.1. 106
5.3 Poset des hyperarbres aux arêtes pointées sur trois sommets $\widehat{HT_3^p}$. 107
5.4 Forme du poset $\widehat{HT_n^p}^*$ 108

6.1 Le poset $\Pi_{3,1}$. 115
6.2 Le poset $\Pi^{n,\ell}$. 116

Liste des tableaux

1.1 Nombre d'hyperarbre $|\mathcal{H}_n|$ sur n sommets. 26

5.1 Nombre hp_n d'hyperarbres aux arêtes pointées sur n sommets 106
5.2 Dimension de l'homologie du poset des hyperarbres aux arêtes pointées 112

6.1 Nombre de partitions semi-pointées dans $\Pi_{n,\ell}$ 122

Abstract : Hypertrees and Semi-pointed Partitions : Combinatorial, Algebraic and Homological Aspects

This thesis is dedicated to the combinatorial, algebraic and homological study of hypertrees and semi-pointed partitions. More precisely, we study algebraic and homological structures built from hypertrees and semi-pointed partitions, which occur naturally in our study.

After recalling briefly the notions needed, we use the theory of species of structures, introduced by A. Joyal, to compute the action of the symmetric group on the homology of the hypertree posets, also known as *Whitehead poset*. This action is the same as the action of the symmetric group linked with the anticyclic structure of the PreLie operad. We refine our computations on a grading of the homology, called *Whitney homology*.

In this study occur formulas related to hypertrees decorated by species. We define the notion of *edge-decorated hypertrees* before stating functional equations satisfied by these hypertrees. These decorated hypertrees can be described as a special case of R-enriched trees. A one-to-one correspondence of decorated hypertrees with box trees and partitions whose parts are decorated sets enables us to compute a close formula for the cardinality of decorated hypertrees, thanks to a Prüfer code. Some relevant examples are related to known objects. We then generalize decorations of hypertrees by decorating both edges and neighbourhoods of vertices in a hypertree, which gives a combinatorial interpretation of Whitney homology of hypertree posets in terms of bidecorated hypertrees.

Moreover, we adapt computation methods of characters on incidence Hopf algebras, introduced by W. Schmitt for families of bounded posets, to families of unbounded posets satisfying some additional properties, called triangle and diamond posets. This relies on the link between the coproduct on a new bialgebra and the coproduct on the incidence Hopf algebra obtained by bounding posets by the addition of a greatest element. After applying these results to the hypertree posets, we give an explicit formula for the coproduct on the obtained bialgebra, involving the number of hypertrees with fixed valencies and edge sizes.

Finally, a kind of decorated hypertree, called *pointed-edge hypertree*, can also be endowed with a partial order. We show that the associated posets are Cohen-Macaulay and compute the dimension of the unique non-vanishing homology group. By studying the associated posets, we unveil a new family of posets: the semi-pointed partition posets, which generalize both partition posets and pointed partition posets. We show the Cohen-Macaulayness of these posets and obtain, thanks to species theory, a closed formula for the dimension of its unique homology group, which extend the ones established for partition posets and pointed partition posets.

Keywords : Hypertree, poset, species, homology, partition, action of the symmetric group, incidence Hopf algebra, Cohen-Macaulayness.

Hyperarbres et Partitions semi-pointées :
Aspects combinatoires, algébriques et homologiques.

Résumé:
Cette thèse est consacrée à l'étude combinatoire, algébrique et homologique des hyperarbres et des partitions semi-pointées. Nous étudions plus précisément des structures algébriques et homologiques construites à partir des hyperarbres, puis des partitions semi-pointées, qui apparaissent naturellement au cours de notre étude.
Après un bref rappel des notions utilisées, nous utilisons la théorie des espèces de structure introduite par A. Joyal afin de déterminer l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres, connu aussi sous le nom de *poset de Whitehead*. Cette action s'identifie à l'action du groupe symétrique liée à la structure anti-cyclique de l'opérade PreLie. Nous raffinons ensuite nos calculs sur une graduation de l'homologie, appelée *homologie de Whitney*.
Lors de cette étude interviennent des formules semblant décrire des hyperarbres décorés par des espèces. Nous définissons la notion d'*hyperarbre aux arêtes décorées* par une espèce avant d'établir des équations fonctionnelles vérifiées par ces hyperarbres. Ces hyperarbres décorés peuvent être décrits comme des cas particuliers d'arborescence R-enrichie. Une bijection des hyperarbres décorés avec des arbres en boîtes et des partitions dont les parts sont décorées permet d'obtenir une formule close pour leur cardinal, à l'aide d'un codage de Prüfer. Certains exemples pertinents reliés à des objets connus sont exhibés. Nous généralisons ensuite la décoration des hyperarbres en décorant à la fois les arêtes et le voisinage des sommets de l'hyperarbre, ce qui permet d'obtenir une interprétation combinatoire de l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres en terme d'hyperarbres bidécorés.
Nous adaptons ensuite les méthodes de calcul de caractères sur les algèbres de Hopf d'incidence, introduites par W. Schmitt dans le cas de familles de posets bornés, à des familles de posets non bornés vérifiant certaines propriétés. Cette adaptation repose sur l'introduction d'une bigèbre formée sur les posets dont nous relions le coproduit au coproduit sur l'algèbre de Hopf d'incidence obtenue en bornant les posets par l'ajout d'un maximum. Nous appliquons ensuite cette adaptation aux posets des hyperarbres. Nous donnons une formule explicite pour le coproduit de la bigèbre associée, qui fait intervenir le cardinal de l'ensemble des hyperarbres dont la taille des arêtes et la valence des sommets sont fixées.
Enfin, une sorte d'hyperarbre décoré, appelée *hyperarbre aux arêtes pointées*, peut être à son tour munie d'un ordre partiel. Nous montrons que ces posets sont Cohen-Macaulay avant de calculer la dimension de l'unique groupe d'homologie non nulle. L'étude de ces posets fait apparaître une généralisation des posets des partitions et des posets des partitions pointées : les poset des partitions semi-pointées. Nous montrons que ces posets sont aussi Cohen-Macaulay, avant de déterminer à l'aide de la théorie des espèces une formule close pour la dimension de l'unique groupe d'homologie non trivial de ces posets.

Mots clés: Hyperarbre, poset, espèce, homologie, partition, action du groupe symétrique, algèbre de Hopf d'incidence, Cohen-Macaulay.

Image en couverture : Lien entre le voisinage d'un sommet dans le poset des hyperarbres et le poset des partitions.

ED 512 INFOMATHS Ecole doctorale

UNIVERSITÉ DE LYON