



**HAL**  
open science

# Étude d'une famille de transformations préservant la mesure de $ZxT$

Alba Marina Málaga Sabogal Málaga Sabogal

► **To cite this version:**

Alba Marina Málaga Sabogal Málaga Sabogal. Étude d'une famille de transformations préservant la mesure de  $ZxT$ . Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112413 . tel-01127218

**HAL Id: tel-01127218**

**<https://theses.hal.science/tel-01127218v1>**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Faculté des sciences d'Orsay

École doctorale de mathématiques de la région Paris-sud (ED 142)

Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

## THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

*par*

**Alba Marina MÁLAGA SABOGAL**

Étude d'une famille de transformations préservant la mesure de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$

**Date de soutenance** : 12 décembre 2014

### Composition du jury :

Directeur de thèse :	JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ	Professeur (Collège de France)
Rapporteurs :	PASCAL HUBERT	Professeur (Univ. d'Aix-Marseille)
	CORINNA ULCIGRAI	Reader in Mathematics (Univ. of Bristol)
Examineurs :	GIOVANNI FORNI	Professor (Univ. of Maryland)
	SAMUEL LELIÈVRE	Maître de conférences (Univ. Paris Sud)
	ANTON ZORICH	Professeur (Univ. Paris Diderot)



---

## Remerciements

Je remercie chaleureusement Jean-Christophe Yoccoz dont la bienveillance n'a d'égale que sa sagacité. Son soutien continu a été pour moi un point d'appui pendant toutes les années de la thèse.

Je suis honorée que Corinna Ulcigrai et Pascal Hubert aient accepté la charge d'être rapporteurs. Je remercie Giovanni Forni, Pascal Hubert, Samuel Lelièvre et Anton Zorich d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie tous les professeurs qui ont accepté de me guider pendant les divers stages mathématiques de recherche avant le doctorat : Sylvie Ruelle, Gilles Courtois, Frédéric Paulin, Christian Valqui, Ramón García Cobián. Leur présence forte m'a marqué au delà de ces stages courts, et leur soutien a été sans faille. Je remercie surtout Sylvie Ruelle qui a été la première à me proposer un problème de recherche, pour mon stage de M2, en dépassant l'approche classique d'entraînement à la lecture d'articles.

Je remercie mes parents, mes sœurs, mon frère, la vie nous a séparé mais je ne les oublie jamais. Fernando, Elka, Lucía, Ximena, Alhelí, Alejandra, Gabriel, les échanges riches que vous savez si bien engendrer ont nourri ma curiosité des choses depuis mon enfance.

Je remercie David qui m'a suivi et soutenu pendant mes longues études.

Je remercie Clara pour sa présence lumineuse, rayon de soleil qui ne s'éteint jamais.

Je remercie Claudine Mitschi et Michèle Loday, pour leur amitié, leur soutien, leur foi, leur habileté à guider les jeunes chercheurs et les jeunes chercheuses comme moi.

Je remercie Gang Bai, pour sa disponibilité tard le soir pour tous les petits soucis de ses étudiants et anciens élèves et ses conseils sincères. Le travail qu'elle fait pour tous ses étudiants n'a pas de prix.

Je remercie Pascal et Dominique Poupelle pour leur amitié, le rire partagé et les conseils avisés. J'ai rencontré Pascal au programme de parrainage des anciens élèves aux élèves étrangers de l'école Polytechnique, mais Pascal et Dominique sont allés bien au delà de ce rôle.

Je remercie Hugo Bonet, pour son travail au groupe de théâtre universitaire à Cusco. Les habilités que j'y ai acquises me sont encore fort utiles et les amis que j'y ai gagnés resteront à jamais dans mon souvenir. Je remercie aussi l'équipe pédagogique du lycée Pukllasunchis à Cusco pour leur approche décontractée des connaissances en général et en particulier des mathématiques. C'est là que lors d'un festival de jeux mathématiques j'ai rencontré la mathématicienne Gabrielle Frisch, qui m'a guidée au démarrage de mes études de licence. C'est aussi à Pukllasunchis que j'ai noué des liens d'amitié avec Eli Huaraya. Je remercie Eli d'avoir toujours maintenu le contact avec moi et de m'avoir encouragé même à distance, malgré notre éloignement géographique qui dure déjà douze ans.

Je remercie les amis péruviens que j'ai rencontré lors de mes études de licence et de master à Lima. Le temps qu'on a passé à résoudre des exercices ensemble,

à discuter des subtilités, de l'avenir, cela continue à m'être utile. Laura La Rosa, Milagros Zorrilla, Juan Pablo Cahahuanca, Kenny Venegas, Cristina Sofia La Plata, Ruben Lizarbe, Hugo Castillo, Victor Rodriguez, Paul Mazizo, Maycol Falla, Arturo Fernandez, Cesar Lara, Orestes Bueno, Liliana Puchuri, bien que le contact entre nous ne soit plus aussi fort, chaque ami reste comme une perle dans mon souvenir et m'aide à rester plus forte. Plus particulièrement je voudrais remercier John Cotrina, Rodolfo Canto et Julio Rabanal, qui étaient pour moi comme des frères à l'époque et dont l'amitié a su dépasser les frontières.

Je remercie tous les gens avec qui j'ai travaillé sur "La lumière ne s'arrête pas là" et d'autres que j'ai connus sur d'autres projets d'Art-Science. Xavier Maître, Cyril Vachez, Ismail Konate et Julien Kozlowski savaient agrémente le travail de conversations amusantes même tard le soir au NeticLab et je ne compte plus les plats de nouilles et les glaces qu'on a partagés. Je remercie particulièrement Xavier Maître et Michèle Gouiffès pour leur soutien personnel. Je remercie aussi les doctorants à l'enthousiasme contagieux avec qui on a pu partager des expériences créatives et créatrices : Marion Tardieu, Tom Giraud, Alex Setkov, Alexandra Roatis, Florian Focone, Bokaris Panagiotis-Alexandros.

Le laboratoire de Mathématiques d'Orsay a une ambiance de dialogue et de coopération excellente dont j'ai pu bénéficier pendant toute la durée de ma thèse. Je remercie du fond de mon cœur tous les gens qui travaillent pour que cela puisse avoir lieu : les organisateurs et organisatrices des divers séminaires et groupes de travail, les chercheurs et enseignants-chercheurs qui acceptent de prendre sur leur temps pour des activités un peu administratives, les secrétaires qui font tourner le tout de façon cohérente, les techniciens qui font de leur mieux pour que les pannes soient rares. Ce laboratoire, j'ai rêvé d'y être bien avant d'y arriver, maintenant que je pars, je sais que dans mes rêves je ne m'étais pas trompée et que vous allez tous me manquer.

Je voudrais remercier mes collègues de bureau, pour leur présence, leur compréhension et la bonne ambiance qu'ils savent mettre sans tomber dans la demesure d'interrompre le travail. Arno, Étienne, Imène, Élodie, Thomas, Robert, Corentin, Andrés, Vincent, Guokuan, Stéphane, qu'on parle avec eux de mathématiques ou de sujets de sociétés, on y trouve toujours son compte. Plus particulièrement, je voudrais remercier Élodie Vernet, Étienne le Masson et Thomas Morzadec pour leur amitié sans faille.

Plus largement, je remercie l'ensemble des doctorants pour tout ce qu'on a partagé au labo : les discussions, les longs déjeuners, quelques pauses café, les séminaires, les pots...

Pendant ma thèse et ma vie j'ai reçu de l'amitié et du soutien de tellement de gens qu'il m'est impossible de les nommer tous. Que les absents me pardonnent.

Merci à ceux qui ont cru en moi plus fort que moi-même, merci à ceux qui m'ont ouvert leur cœur, merci à ceux qui ont partagé leur savoir, merci à ceux qui ont écouté mon chagrin et mes joies, merci à ceux qui m'ont ouvert la porte de chez eux, merci à ceux qui m'ont lu, merci à ceux qui m'ont posé des questions et à ceux qui m'ont donné des réponses, merci...

Pendant mes études le soutien institutionnel que j'ai reçu d'organisations diverses et variées m'a donné de la liberté pour que je puisse me concentrer sur mes études. Je ne sais plus comment remercier toutes les institutions qui m'ont soutenu :

- le MESR, pour son financement du contrat doctoral ;
- l'École polytechnique qui m'a permis de rester sur son campus jusqu'à la fin de ma thèse ;
- la Fondation de l'École polytechnique, pour sa bourse pour les élèves étrangers du cycle d'ingénieur ;
- l'IMCA, pour sa bourse de master (avec l'ICTP) ;
- l'UNI, pour son soutien financier en fin de licence et lors de mon départ pour l'École polytechnique ;
- le CONCYTEC, pour son soutien financier lors de mon départ pour l'École polytechnique.



# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Du billard au cylindre</b>	<b>7</b>
1.1	Dans ce chapitre . . . . .	7
1.2	Les billards planaires . . . . .	7
1.3	La construction de Katok-Zemlyakov . . . . .	10
1.4	Le dépliage partiel du billard dans un parallélogramme . . . . .	13
1.5	Les modèles limites . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Généralités sur la famille</b>	<b>23</b>
2.1	Dans ce chapitre . . . . .	23
2.2	Orbites dans un contexte de définition partielle . . . . .	23
2.3	Notre famille de transformations . . . . .	24
2.4	Codage par niveaux . . . . .	26
2.5	Les échanges d'intervalles . . . . .	28
2.6	Propriétés topologiques . . . . .	31
2.7	Un modèle sans singularités . . . . .	33
2.8	Suspensions (I) . . . . .	35
2.9	Suspensions (II) . . . . .	37
2.10	Relation entre notre famille et des flots directionnels . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Minimalité générique</b>	<b>43</b>
3.1	Généralités sur la minimalité . . . . .	43
3.2	Bouts topologiques . . . . .	44
3.3	Bouts de variétés unidimensionnelles . . . . .	47
3.4	Le théorème de Keane pour les échanges d'intervalles généralisés . . . . .	51
3.5	Preuve du théorème 3.4.1 . . . . .	53
3.6	Minimalité générique . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Ergodicité et conservativité</b>	<b>59</b>
4.1	Dans ce chapitre . . . . .	59
4.2	Définitions . . . . .	59
4.3	Rapport entre conservativité et ergodicité . . . . .	60
4.4	Une condition suffisante pour la conservativité . . . . .	61



---

4.5	Conservativité générique et presque-sûre . . . . .	62
4.6	Ergodicité générique . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>69</b>
5.1	Dans ce chapitre . . . . .	69
5.2	Orbite d'un point . . . . .	69
5.3	Orbite d'un niveau . . . . .	71
5.4	Code Maxima . . . . .	72
	<b>Bibliographie</b>	<b>77</b>

# Chapitre 0

## Introduction

L'étude des billards planaires occupe un rôle central dans la théorie des systèmes dynamiques. Ces systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté permettent d'illustrer de façon concrète de nombreux aspects de la théorie générale.

La dynamique dans les billards strictement convexes est ainsi un terrain d'action privilégié pour la théorie KAM ([Laz73], [Dou82]). A l'inverse, la dynamique dans les billards dispersifs ou semi-dispersifs a permis à Sinaï, Bunimovich ([Sin70], [BS80], [Bun79]) et leurs successeurs de développer la théorie hyperbolique en présence de singularités.

A cet égard, l'étude de la dynamique dans les billards polygonaux rationnels, qui a connu un essor prodigieux ces 30 dernières années, occupe une place singulière. Les motivations à l'origine de ce développement ont été au moins autant d'origine géométrique que dynamique.

En effet, une construction formalisée par Katok et Zemlyakov [ZK75], Fox et Kershner [FK36], conduit à associer à un billard polygonal rationnel une *surface de translation*, c'est à dire une surface de Riemann compacte équipée d'une 1-forme holomorphe (non identiquement nulle). La terminologie est due au fait suivant : en dehors des zéros de la 1-forme, les primitives locales de celle-ci forment un atlas dont les changements de cartes sont des translations. Comprendre la dynamique dans le billard polygonal rationnel équivaut à analyser les flots directionnels sur la surface de translation. L'étude des espaces de modules de surfaces de translation se situe au carrefour de nombreuses disciplines mathématiques : théorie des nombres, théorie des groupes, analyse complexe, systèmes dynamiques, géométrie hyperbolique,...

La dynamique (en temps continu) définie par un flot directionnel sur une surface de translation correspond en temps discret à celle d'une classe particulièrement intéressante de transformations en dimension 1 : les *échanges d'intervalles*. Pour une surface de genre 1, les transformations correspondantes sont simplement les rotations sur le cercle  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et des échanges d'intervalles à deux ou trois intervalles. L'étude des propriétés dynamiques des échanges d'intervalles associés à une surface de translation de genre  $> 1$  a été un axe majeur de recherches ces trente dernières années.

Un premier résultat est dû à Keane [Kea75] : un échange d'intervalles sans connexion est *minimal*, plus précisément toute demi-orbite infinie d'un tel échange d'intervalles est dense.

Keane avait conjecturé que presque tout échange d'intervalles est *uniquement ergodique*, donc en particulier ergodique (pour la mesure de Lebesgue). La démonstration de ce résultat en 1982, indépendamment par Masur [Mas82] et par Veech [Vee82] a été une étape cruciale des progrès de la théorie. Un peu plus tard, Kerckhoff, Masur et Smillie [KMS85] obtiennent un résultat plus précis : pour toute surface de translation, presque toute direction donne lieu à un flot directionnel *uniquement ergodique*.

Plus récemment, Avila-Forni [AF07] ont démontré en 2006 que presque tout échange d'intervalles de combinatoire non rotationnelle est *faiblement mélangeant*, complétant des résultats partiels de Katok-Stepin [KS70] et Veech [Vee84].

Les billards dans les polygones rationnels, ou les flots directionnels sur une surface de translation, peuvent être considérés comme une classe de flots hamiltoniens (singuliers) *complètement intégrables*, la direction jouant le rôle de la variable d'action (i.e. de l'intégrale première) non triviale. Dans la théorie hamiltonienne classique, le théorème de Nekhoroshev [Nek77] est un résultat fondamental : dans un cadre analytique (sans singularité!), il garantit, pour un système  $\varepsilon$ -proche d'être complètement intégrable, que les variables d'action n'évoluent guère sur des périodes de temps exponentiellement longues (i.e. de l'ordre de  $\exp(-\varepsilon^{-a})$ , pour une constante  $a$  ne dépendant que de la dimension).

Notre connaissance des billards polygonaux rationnels s'est considérablement améliorée dans les dernières décennies. Celle des billards polygonaux irrationnels reste par contre largement embryonnaire. Ceci a constitué une des motivations pour les travaux développés dans cette thèse.

Notre point de départ a été le billard dans un parallélogramme « presque » rectangulaire, i.e. un parallélogramme dont deux angles sont égaux à  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$  et deux angles sont égaux à  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Nous pouvons supposer que le parallélogramme a deux côtés exactement horizontaux, et deux côtés presque verticaux.

Nous calculons dans le chapitre 1 l'application qui associe à un rebond sur un côté presque vertical le rebond suivant sur un côté de même nature (après rebonds éventuels sur les côtés horizontaux). Cela revient à considérer le billard dans la bande verticale infinie  $V$  obtenue en dépliant la table initiale par réflexion le long des côtés horizontaux. Le groupe engendré par ces réflexions est un groupe diédral infini. Le bord de  $V$  est constitué de deux lignes brisées parallèles. Notons  $\theta$  l'angle de la corde joignant deux rebonds successifs sur le bord de  $V$  par rapport à la direction horizontale. Lorsque  $|\theta| - \frac{\pi}{2} > \varepsilon$ , les extrémités de la corde appartiennent à des composantes connexes **distinctes** du bord de  $V$ , et l'angle  $\theta'$  associé à la corde suivante vérifie  $\theta' = \theta \pm 2\varepsilon$ .

À la fin du chapitre 1, nous considérons les transformations obtenues par passage à la limite *formel*  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans le régime  $|\theta| - \frac{\pi}{2} \gg \varepsilon$ . La variable  $\theta$  devient une variable

discrète  $n$  variant dans  $\mathbb{Z}$ . Les transformations obtenues par passage à la limite ont (à un revêtement de degré 2 près) pour espace des phases le produit  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  et dépendent d'un paramètre  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  : pour  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ ,  $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ , on définit

$$F_{\underline{\alpha}}(n, x) = \begin{cases} (n+1, x + \alpha_n) & \text{si } x + \alpha_n \in (0, 1/2) \\ (n-1, x + \alpha_n) & \text{si } x + \alpha_n \in (-1/2, 0). \end{cases}$$

Les valeurs pertinentes du paramètre  $\underline{\alpha}$  dépendent de l'ordre de grandeur de  $|\theta| - \frac{\pi}{2}$  (qui ne varie pas au cours du temps). Lorsque  $|\theta| - \frac{\pi}{2} \gg \varepsilon^{1/2}$ ,  $\alpha_n$  est indépendant de  $n$ . La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  correspondante a été étudiée, entre autres, par Conze et Keane ([Con76],[CK76],[Con80]) et Schmidt [Sch77]. Lorsqu'on a au contraire

$$\varepsilon^{1-\nu} \gg |\theta| - \frac{\pi}{2} \gg \varepsilon, \quad \forall \nu > 0,$$

il est naturel de considérer *toutes* les transformations de la famille  $F_{\underline{\alpha}}$ . Dans l'esprit du théorème de Nekhoroshev, il est naturel de poser la question suivante :

**Question :** Pour un paramètre typique  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , et une condition initiale aléatoire  $(0, x) \in \{0\} \times \mathbb{T}$ , quelle est la vitesse de « diffusion » dans  $\mathbb{Z}$  de la première coordonnée de l'orbite  $F_{\underline{\alpha}}^n(0, x)$  ?

Nos travaux ne nous ont pas permis de répondre à cette question. Nous avons néanmoins pu établir, dans les chapitres 3 et 4, quelques propriétés importantes de la famille de transformations  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$ .

Le chapitre 2 est consacré à des propriétés élémentaires de la famille de transformations  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$ . Appelons *niveau* d'un point  $(n, x)$  de l'espace des phases  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  l'entier  $n$ . La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  n'est pas définie partout : chaque niveau  $n$  contient deux singularités  $(n, -\alpha_n)$ ,  $(n, \frac{1}{2} - \alpha_n)$  de  $F_{\underline{\alpha}}$  et deux singularités  $(n, 0)$ ,  $(n, \frac{1}{2})$  de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ . Comme pour les échanges d'intervalles standard, les *connexions* jouent un rôle important dans l'étude de  $F_{\underline{\alpha}}$  : il s'agit d'orbites finies de  $F_{\underline{\alpha}}$  issues d'une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$  et aboutissant à une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$ . En général,  $F_{\underline{\alpha}}$  n'a pas de connexion : une telle occurrence ne peut se produire qu'en présence d'un certain type de relation linéaire entre les coordonnées  $\alpha_n$  du paramètre  $\underline{\alpha}$ .

Lorsque  $\alpha_n = 0$  ou  $\frac{1}{2}$ , les singularités de  $F_{\underline{\alpha}}$  de niveau  $n$  coïncident avec celles de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ . Lorsque  $\alpha_n = 0$ , le niveau  $n$  est un niveau « passoire » : si une orbite arrive au niveau  $n$  en venant du niveau  $n+1$  (resp.  $n-1$ ), elle se trouvera à l'instant suivant au niveau  $n-1$  (resp.  $n+1$ ). Au contraire, lorsqu'on a  $\alpha_n = \frac{1}{2}$ , le niveau  $n$  est un niveau « miroir » : si une orbite arrive au niveau  $n$  en venant du niveau  $n+1$  (resp.  $n-1$ ), elle se retrouvera à nouveau à l'instant suivant au niveau  $n+1$  (resp.  $n-1$ ). Les niveaux miroirs jouent un rôle important dans la preuve des théorèmes principaux de ce travail.

Bien qu'un échange d'intervalles standard ne soit pas stricto sensu un homéomorphisme, il est quelquefois utile d'en construire un modèle qui soit un homéomorphisme d'un espace métrique compact : il suffit pour ce faire d'éclater les orbites des singularités de  $F_{\underline{\alpha}}$  et de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ . De façon similaire, pour chaque paramètre  $\underline{\alpha}$ , il existe un espace localement compact *non compact*  $X_{\underline{\alpha}}$ , une application continue surjective  $h : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  et un homéomorphisme  $f_{\underline{\alpha}}$  de  $X_{\underline{\alpha}}$  tels que

- $h$  est une semi-conjugaison entre  $f_{\underline{\alpha}}$  et  $F_{\underline{\alpha}}$  ;
- un point  $z \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  a une image inverse par  $h$ , sauf s'il appartient à l'orbite d'une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$  ou  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ , auquel cas il a deux antécédents par  $h$ .

On connaît l'importance de la construction de surfaces de translation par suspension (pour des temps de retour localement constants appropriés) d'échanges d'intervalles standard. Nous présentons dans le chapitre 2 deux variantes de cette construction, et identifions le genre de la surface de translation obtenue.

Dans la première variante, nous considérons un paramètre  $\underline{\alpha}$  qui possède deux niveaux miroirs  $m, n$  avec  $n - m > 2$ . Le produit  $(m, n) \times \mathbb{T} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  est alors essentiellement invariant par  $F_{\underline{\alpha}}$  : plus précisément, le temps de retour de  $F_{\underline{\alpha}}$  sur cet ensemble est égal à 1 ou 2. Notons  $P_{\underline{\alpha}}$  l'application de retour correspondante. Cette transformation de  $(m, n) \times \mathbb{T}$  est un *échange d'intervalles généralisé* (généralisé au sens où les intervalles échangés ne sont pas forcément arrangés comme sous-intervalles successifs d'un même intervalle, voir définition 23). La suspension de  $P_{\underline{\alpha}}$  (avec hauteur constante égale à 1) produit une surface de translation qui sera importante au chapitre 4.

Dans la deuxième variante, nous considérons un paramètre  $\underline{\alpha}$  tel que la suite  $\alpha_n$  est périodique de période  $N \geq 1$ . La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  induit alors une transformation  $P_{\underline{\alpha}}$  de  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  qui est un échange d'intervalles généralisé au sens précédent. La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est une  $\mathbb{Z}$ -extension de  $P_{\underline{\alpha}}$ . Là aussi, nous calculons le genre de la surface de translation obtenue par suspension avec hauteur constante de  $P_{\underline{\alpha}}$ .

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la minimalité des transformations  $F_{\underline{\alpha}}$ . Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 3.6.1.** *Pour un paramètre générique  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , la transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est minimale.*

Rappelons le théorème de Keane [Kea75]

**Théorème 3.1.2.** *Pour un échange d'intervalles standard sans connexion, toute demi-orbite infinie est dense.*

Comme nous l'a fait observer P. Le Calvez, une propriété si forte ne peut avoir lieu pour  $F_{\underline{\alpha}}$  : on considère le modèle  $f_{\underline{\alpha}} : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow X_{\underline{\alpha}}$  évoqué plus haut. Comme  $X_{\underline{\alpha}}$  n'est pas compact, il existe au moins une orbite positive de  $f_{\underline{\alpha}}$  qui n'est pas dense (et de même une orbite négative non dense). Dire que  $F_{\underline{\alpha}}$  est minimal, c'est dire que toute orbite (complète) est dense dans l'espace des phases  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . On notera que  $F_{\underline{\alpha}}$  n'a génériquement pas de connexion, et que toutes ses orbites sont alors infinies.

La première étape de la preuve du théorème est d'étendre le théorème de Keane au cas des échanges d'intervalles généralisés. Appelons *irréductible* un échange d'intervalles généralisé qui ne peut s'écrire comme somme disjointe de deux échanges d'intervalles généralisés plus simples. Tout échange d'intervalles généralisé s'exprime comme une somme disjointe d'un nombre fini d'échanges d'intervalles généralisés irréductibles. Nous démontrons le résultat suivant :

**Theorème 3.4.1.** *Un échange d'intervalles généralisé irréductible sans connexion est périodique ou minimal (au sens fort du théorème de Keane).*

A partir de ce résultat, on obtient la minimalité générique des transformations  $F_{\underline{\alpha}}$  par un argument classique de catégorie de Baire. La réponse à la question suivante est sans doute positive :

**Question :** La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est-elle minimale pour presque tout paramètre  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  ?

Le chapitre 4 est consacré à la conservativité et à l'ergodicité des transformations  $F_{\underline{\alpha}}$ .

Les transformations  $F_{\underline{\alpha}}$  ne sont pas nécessairement conservatives : si on a  $\alpha_n = 0$  pour tout entier  $n$ , ou plus généralement si la série  $\sum_{n>0} \alpha_n$  est convergente, il est facile de construire des ensembles errants de mesure positive.

Considérons la condition suivante sur le paramètre  $\underline{\alpha}$  :

$$(\star) \quad \liminf_{n \rightarrow -\infty} d_{\mathbb{T}} \left( \alpha_n, \frac{1}{2} \right) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} d_{\mathbb{T}} \left( \alpha_n, \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Nous démontrons le résultat suivant

**Proposition 4.5.2.** *Si le paramètre  $\underline{\alpha}$  vérifie  $(\star)$ , la transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservative.*

Nous démontrons auparavant une version abstraite de ce résultat, où l'hypothèse  $(\star)$  se traduit (pour une transformation préservant une mesure infinie  $\sigma$ -finie) par l'existence d'une suite de boîtes presque invariantes.

Comme la condition  $(\star)$  est satisfaite par une partie  $G_{\delta}$ -dense de mesure totale de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , nous concluons que

**Theorème 4.5.4.** *La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est génériquement et presque sûrement conservative.*

Nous montrons ensuite le

**Theorème 4.6.7.** *La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est génériquement ergodique.*

Malheureusement nous ne connaissons pas la réponse (très probablement positive) à la question suivante :

**Question :** La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est-elle ergodique pour presque tout paramètre  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  ?

La démonstration de l'ergodicité générique repose sur un argument classique de catégorie de Baire, couplé au théorème de Kerckhoff-Masur-Smillie mentionné au début de cette introduction.

Au début de ce travail de thèse, nous avons effectué quelques explorations numériques de la famille  $F_{\underline{\alpha}}$ , en essayant en particulier de comprendre la vitesse de diffusion (très lente) des orbites. Nous rendons très brièvement compte de ces simulations dans le chapitre 5.



# Chapitre 1

## Passage d'un billard sur le parallélogramme à des modèles limites sur des cylindres discrets

### Sommaire

---

1.1 Dans ce chapitre . . . . .	7
1.2 Les billards planaires . . . . .	7
1.3 La construction de Katok-Zemlyakov . . . . .	10
1.4 Le dépliage partiel du billard dans un parallélogramme . . . . .	13
1.5 Les modèles limites . . . . .	19

---

### 1.1 Dans ce chapitre

Dans ce chapitre sera tracée la route qui mène de la considération du billard dans un parallélogramme irrationnel à des familles de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . Le point de départ sera de considérer l'application de première arrivée d'un côté du parallélogramme au côté opposé, et ensuite faire tendre certains des paramètres vers zéro ou l'infini.

### 1.2 Les billards planaires

Les billards sont des systèmes dynamiques qu'on peut voir aussi bien en temps discret qu'en temps continu. L'idée informelle est celle d'une balle qui évolue à l'intérieur d'une table, sans friction, en rebondissant élastiquement sur les bords. En temps continu, on regarde toute l'évolution, alors qu'en temps discret on regarde seulement les rebonds succesifs sur le bord de la table.

Nous commençons par préciser la notion de table de billard.



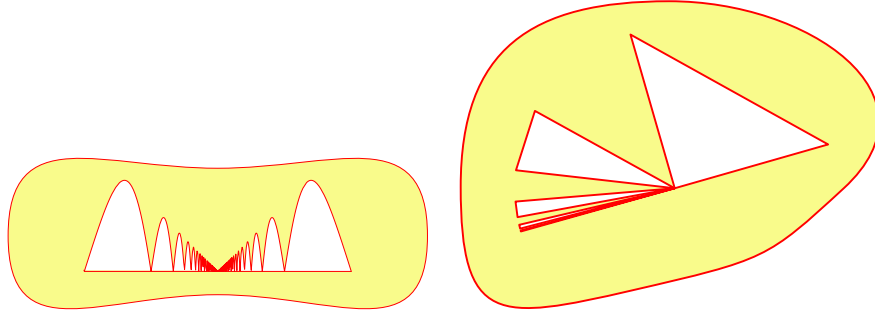


FIGURE 1.1 – Exemples de tables de billards non admises par la définition 1.

**Définition 1.** Une **table de billard planaire** est un ouvert connexe  $U$  du plan tel que tout point  $x_0$  du bord  $\partial U$  de  $U$  possède un voisinage fermé  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$  ayant la propriété suivante : il existe un nombre fini de plongements de classe  $\mathcal{C}^1$   $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tels que :

- $\gamma_i(0) = x_0$  ;
- $\gamma_i((0, 1]) \cap \gamma_j((0, 1]) = \emptyset$  pour  $i \neq j$  ;
- $\gamma_i((0, 1]) \subset B(x_0, \varepsilon)$ ,  $\gamma_i(1) \in S(x_0, \varepsilon)$  ;
- $\partial U \cap \overline{B}(x_0, \varepsilon) = \bigcup \gamma_i([0, 1])$ .

La **complétion par bouts premiers** de la table  $U$  est un espace topologique noté  $\widehat{U}$ , muni d'une application continue surjective  $p : \widehat{U} \rightarrow \overline{U}$ , caractérisé par les propriétés suivantes :

- la restriction de  $p$  à  $p^{-1}(U)$  est un homéomorphisme sur  $U$  ;
- soit  $x_0 \in \partial U$ , comme dans la définition 1 ; les points de  $p^{-1}(x_0)$  sont en bijection avec les composantes connexes de  $U \cap \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ , appelées **secteurs** ;
- soit  $S$  une composante connexe de  $U \cap \overline{B}(x_0, \varepsilon)$  ; la restriction de l'application  $p$  à l'adhérence de  $p^{-1}(S)$  dans  $\widehat{U}$  est un homéomorphisme sur l'adhérence de  $S$ .

Un point  $y_0 \in \widehat{U} \setminus U$  est **régulier** s'il correspond à un secteur de  $B(p(y_0), \varepsilon) \cap U$  délimité par des courbes  $\gamma_+, \gamma_-$  telles que  $\frac{d\gamma_+}{dt}(0), \frac{d\gamma_-}{dt}(0)$  aient des directions opposées. Il est **singulier** dans le cas contraire.

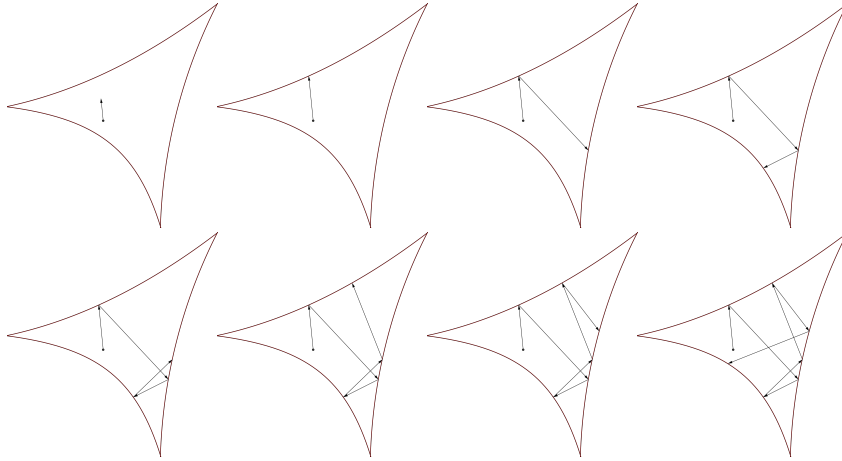
**Remarque 1.** La définition 1 élimine tous les cas où des points d'auto-intersection du bord de la table s'accumuleraient sur un point du bord, ainsi que les cas où au voisinage d'un point du bord il y aurait une infinité de secteurs. (Voir figure 1.1.)

**Définition 2 (Billard en temps continu).** Étant donnée une table de billard planaire  $U$ , le le flot de billard est donné par le mouvement d'une particule sans dimension qui :

- se meut dans  $U$  suivant un mouvement rectiligne uniforme (on pourra toujours supposer que les unités ont été choisies pour que la vitesse soit 1) ;

- rebondit le long des parties lisses du bord de  $U$  selon les lois de la mécanique (ou de l'optique).

Plus précisément, si une trajectoire arrive au temps  $t_0$  en un point  $x_0$  du bord de  $U$ , elle définit un point  $y_0$  de  $\widehat{U}$  tel que  $p(y_0) = x_0$ . Si  $y_0$  est singulier, ou si  $y_0$  est régulier mais la trajectoire arrive en  $x_0$  tangentiellement au bord, on ne prolonge pas la trajectoire au-delà de  $t_0$ .



Cependant, vu que l'évolution du billard est triviale à l'intérieur de la table, on a envie de considérer seulement les rebonds successifs sur le bord du billard. À ce moment-là, on considère le billard en temps discret.

**Définition 3 (Billard en temps discret).** Chaque point de l'espace des phases est la donnée de :

- un point du bord de la table  $\widehat{U} \setminus U$  ;
- un vecteur unitaire  $v$  :
  - pointant vers l'intérieur de la table (dans le sens où  $p(y) + tv$  appartient au secteur déterminé par  $y$  pour  $t > 0$  assez petit) ;
  - non tangent (dans le sens où  $v$  n'est pas parallèle à  $\frac{d\gamma_+}{dt}(0)$  ni à  $\frac{d\gamma_-}{dt}(0)$ , où  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  délimitent le secteur de  $B(p(y), \varepsilon) \cap U$  qui correspond à  $y$ ).

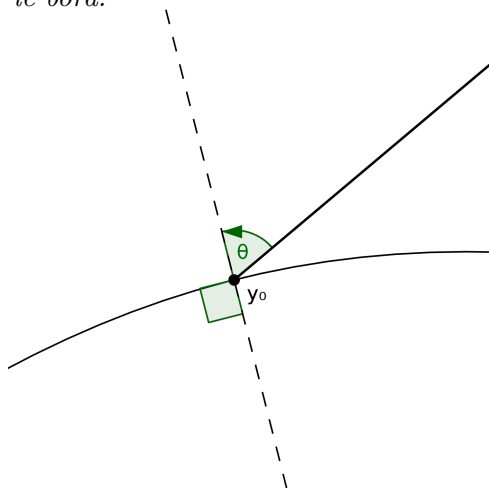
La transformation du billard assigne à chaque point de l'espace des phases le point qui correspond au prochain rebond, s'il a lieu.

Dans le cas continu on dispose d'une mesure invariante dans l'espace de phases.

**Proposition 1.2.1.** *La mesure de Liouville, produit de la mesure de Lebesgue sur la table  $U$  par la mesure de Lebesgue sur l'ensemble des vecteurs unitaires  $\mathbb{S}^1$ , est une mesure invariante pour le flot du billard continu.*

Dans le cas discret, c'est un peu plus délicat. On voit dans la définition 3 que la transformation de billard n'est pas définie partout.

**Proposition 1.2.2.** *Sur l'espace des phases de la transformation du billard en temps discret, considérons  $\omega$  la forme d'aire  $\cos\theta d\theta ds$ , où  $\theta$  est l'angle du vecteur avec la normale pointant vers l'intérieur, et  $s$  est une coordonnée de longueur d'arc sur le bord.*



*Alors la forme d'aire  $\omega = \cos\theta d\theta ds$  est invariante par la transformation du billard.*

*Supposons que la forme  $\omega$  donne une mesure nulle à l'ensemble des points de l'espace de phases où la transformation de billard n'est pas définie. La mesure associée à  $\omega$  est alors une mesure invariante.*

### 1.3 La construction de Katok-Zemlyakov

Jusqu'ici, on a regardé des billards planaires généraux. Dans cette thèse je me suis intéressée plutôt aux billards polygonaux.

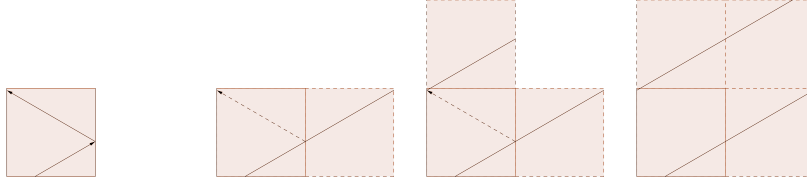
**Définition 4.** Un **billard polygonal** est un billard planaire sur une table  $U$  telle que :

- $U$  est borné ;
- $\partial U$  est l'union d'un nombre fini de segments fermés.

Alors  $\widehat{U} \setminus U$  a un nombre fini de composantes connexes. Chaque composante connexe de  $\widehat{U} \setminus U$  est homéomorphe à un cercle. Elle contient un nombre fini (au moins 2) de points singuliers.

On appelle **côté** de  $U$  une composante connexe de  $\widehat{U} \setminus U$ , privé des points singuliers. Les extrémités d'un côté sont des points singuliers distincts. L'image par  $p$  d'un côté est un segment contenu dans  $\overline{U} \setminus U$ .

Regardons en temps continu un billard polygonal. Il y a une construction classique de dépliage du billard, formalisée dans [ZK75] par Katok et Zemlyakov. L'idée est que lorsqu'une trajectoire du billard arrive au bord de la table, plutôt que de la faire rebondir, on prend une image miroir de la table par rapport au côté et on fait continuer la trajectoire tout droit.

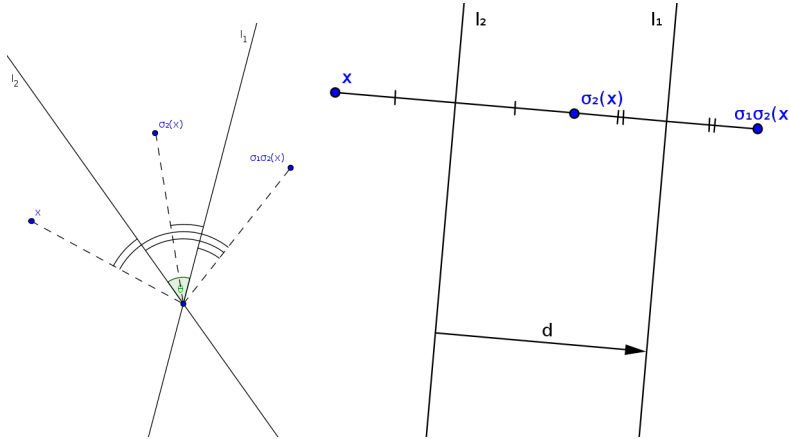


Plus formellement, soit  $U$  une table de billard polygonale. Considérons pour chaque côté  $c$ , la symétrie affine par rapport à la droite qui contient le segment  $p(c)$  et appelons-la  $\sigma_c$ . Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble de côtés, et  $\tilde{G}_{\mathcal{C}}$  le sous-groupe de  $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$  engendré par les symétries affines  $\sigma_c, c \in \mathcal{C}$ .

**Lemme 1.3.1.** Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux droites, et soit  $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_2$ ) la symétrie affine par rapport à la droite  $l_1$  (resp.  $l_2$ ). Alors  $\sigma_1\sigma_2$  est :

- une translation, si  $l_1 \parallel l_2$  (dans ce cas le vecteur de translation est orthogonal à  $l_1$  et  $l_2$ , la longueur du vecteur de translation est égale à deux fois la distance de  $l_1$  à  $l_2$ );
- une rotation affine, si  $l_1 \not\parallel l_2$  (dans ce cas le centre de rotation est l'intersection de  $l_1$  et  $l_2$ , l'angle de rotation est égal au double de l'angle entre  $l_1$  et  $l_2$ )

Réciproquement, toute translation et toute rotation affine s'exprime comme la composition de deux symétries affines.



**Corollaire 1.3.2.** Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux côtés dans  $\mathcal{C}$ , et soient  $\sigma_1 = \sigma_{c_1}, \sigma_2 = \sigma_{c_2}$ .

- Si  $p(c_1)$  et  $p(c_2)$  sont parallèles,  $\sigma_1\sigma_2$  est une translation.
- Si  $p(c_1)$  et  $p(c_2)$  ne sont pas parallèles, alors  $\sigma_1\sigma_2$  est une rotation d'angle égal au double de l'angle entre  $p(c_1)$  et  $p(c_2)$ .

En particulier si  $p(c_1)$  et  $p(c_2)$  ne sont pas parallèles et l'angle entre  $p(c_1)$  et  $p(c_2)$  est un multiple rationnel de  $\pi$ , alors  $\sigma_1\sigma_2$  est une rotation périodique.

**Lemme 1.3.3.** La composition d'une rotation affine non-triviale (c'est-à-dire distincte de l'identité) et d'une translation est une rotation affine.

La composition d'une symétrie affine et d'une rotation affine est égale à la composition d'une translation avec une symétrie affine.

La composition de deux rotations est :

- une rotation affine si les deux rotations n'ont pas de parties linéaires opposées ;
- une translation, sinon.

**Corollaire 1.3.4.** Dans  $\tilde{G}_C$ , les seules transformations directes d'ordre fini, s'il y en a, sont des rotations.

**Définition 5.** On appelle **symétrie glissée** le produit d'une symétrie avec une translation.

**Corollaire 1.3.5.** Tout élément de  $\tilde{G}_C$  qui est produit d'un nombre impair de générateurs  $\sigma_c$  est une symétrie glissée. Tout élément de  $\tilde{G}_C$  qui est produit d'un nombre pair de générateurs  $\sigma_c$  est une rotation ou une translation.

Soit  $G_C$  le sous-groupe de  $O_2(\mathbb{R}^2)$  formé par les parties linéaires des éléments de  $\tilde{G}_C$ .

**Proposition 1.3.6.** L'application  $f : \tilde{G}_C \rightarrow G_C$  qui à chaque transformation assigne sa partie linéaire, est un homomorphisme surjectif de groupes.

On remarque que les éléments de  $G_C$  sont soit des symétries linéaires, soit des rotations. Les éléments de  $\tilde{G}_C$  sont soit des rotations affines soit des translations, soit des symétries glissées.

Notons  $\hat{U}_{\text{reg}}$  l'union (dans  $\hat{U}$ ) de  $U$  avec les points réguliers de  $\hat{U} \setminus U$ . Considérons sur  $\hat{U}_{\text{reg}} \times \tilde{G}_C$  la relation d'équivalence  $\equiv_C$  engendrée par :

$$\forall c \in \mathcal{C} : \forall x \in c : \forall w \in \tilde{G}_C : (x, w) \equiv_C (x, w\sigma_c) \quad (1.1)$$

On denote par  $\tilde{U}_C$ , le quotient de  $\hat{U}_{\text{reg}} \times \tilde{G}_C$  par la relation  $\equiv_C$ .

- les seules classes d'équivalences non triviales sont :

$$\{(x, w), (x, wg_c)\}, x \in c \in \mathcal{C}, w \in \tilde{G}_C$$

- la topologie est la topologie quotient du produit de la topologie de  $\hat{U}_{\text{reg}}$  avec la topologie discrète sur  $\tilde{G}_C$
- le groupe  $\tilde{G}_C$  agit à gauche sur  $\hat{U}_{\text{reg}} \times \tilde{G}_C$  par

$$v.(x, w) = (x, v.w) \quad (1.2)$$

et cette action passe au quotient. Un domaine fondamental pour cette action est  $\hat{U}_{\text{reg}} \times \{e\}$ .

- Le quotient est une surface qui possède un atlas tel que les changements de cartes sont des translations (autrement dit c'est une **surface de translation**).

On considère maintenant le quotient  $\hat{U}_C$  de  $\tilde{U}_C$  par la relation

$$(g, w) \sim (g, w') \Leftrightarrow f(w) = f(w').$$

(Rappelons que pour chaque  $w \in \tilde{G}_C$ ,  $f(w)$  est la partie linéaire de  $w$ .)

*Remarque 2.*  $\widehat{U}_{\mathcal{C}}$  est aussi le quotient de  $\widehat{U}_{\text{reg}} \times \widetilde{G}_{\mathcal{C}}$  par la relation d'équivalence engendrée par :

$$\forall c \in \mathcal{C} : \forall x \in c : \forall w \in G_{\mathcal{C}} : (x, w) \equiv_{\mathcal{C}} (x, wf(\sigma_c)) \quad (1.3)$$

Si  $\mathcal{C}$  est strictement inclus dans l'ensemble de toutes les côtés, on dira que  $\widehat{U}_{\mathcal{C}}$  et  $\widetilde{U}_{\mathcal{C}}$  ont été obtenus par **dépliage partiel** du billard. Si par contre  $\mathcal{C}$  est l'ensemble de tous les côtés, on dira que  $\widehat{U}_{\mathcal{C}}$  et  $\widetilde{U}_{\mathcal{C}}$  ont été obtenus par **dépliage total** du billard, et on les notera  $\check{U}$  et  $\tilde{U}$ . Dans ce cas, si le billard est rationnel, c'est-à-dire si tout côté de la table fait avec tout autre côté de la table un angle qui est un multiple rationnel de  $\pi$ ,  $\check{U}$  est une surface de Riemann compacte, privée d'un nombre fini de points. Par contre, si le billard n'est pas rationnel,  $\check{U}$  sera une surface de translation non compacte. Ferrán Valdez a montré dans [Val09] que le dépliage total  $\check{U}$  d'un billard irrationnel sur une table simplement connexe est homéomorphe au monstre du Loch Ness, l'unique surface de genre infini à un seul bout.

## 1.4 Le dépliage partiel du billard dans un parallélogramme

Considérons dans le plan un parallélogramme d'angles  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  et  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ .

Nous supposons que notre parallélogramme a une paire de côtés horizontaux et que l'angle inférieur gauche est aigu. Nous appellerons les côtés non-horizontaux des côtés **presque-verticaux**.

Nous appellerons  $h$  la hauteur verticale du parallélogramme. On note  $l$  la distance du coin inférieur gauche jusqu'à la projection du coin supérieur droit sur le prolongement du côté inférieur. (Voir figure 1.2).

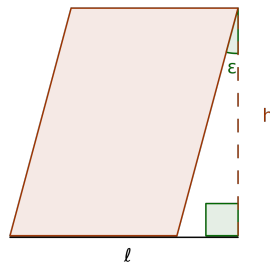


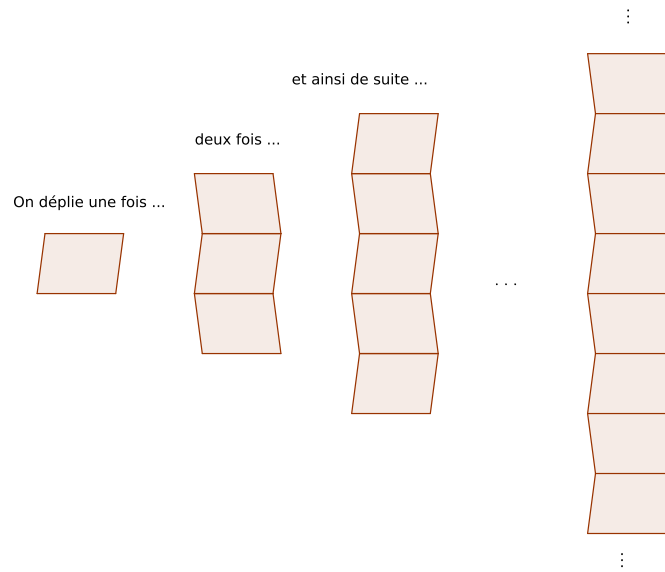
FIGURE 1.2 – Le parallélogramme déterminé par  $h, \varepsilon, l$

Nous supposons  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que le parallélogramme ne soit pas trop fin. Nous voulons assurer que la projection du coin supérieur gauche sur la droite qui contient le côté horizontal inférieur se trouve à l'intérieur de ce côté.

C'est pourquoi nous supposons que

$$\tan(\varepsilon) < \frac{l}{2h}. \quad (1.4)$$

Nous notons  $U$  l'intérieur du parallélogramme et nous nous intéressons au billard dans la table  $U$ . Nous voulons regarder l'application de premier retour sur l'union des deux côtés presque verticaux. Pour ceci considérons le dépliage partiel  $\tilde{U}$  le long des symétries par rapport aux côtés horizontaux.



Il en résulte une bande infinie, incluse dans le plan, sur laquelle on peut aussi jouer au billard.

Dans la construction de dépliage partiel de la section précédente, prenons pour  $\mathcal{C}$  l'ensemble des deux côtés horizontaux. Notons  $\sigma_-$  (resp.  $\sigma_+$ ) la symétrie par rapport au côté inférieur (resp. supérieur) du parallélogramme. En associant à  $\sigma_-$  (resp.  $\sigma_+$ ) l'involution  $n \mapsto -1 - n$  (resp.  $n \mapsto 1 - n$ ) de  $\mathbb{Z}$ , on définit un isomorphisme  $q$  de  $\tilde{G}_{\mathcal{C}}$  sur le groupe diédral infini formé des translations  $n \mapsto n + 2r$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  et des symétries  $n \mapsto 2r + 1 - n$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ . On définit une application  $i$  du dépliage partiel  $\tilde{U}_{\mathcal{C}}$  dans le plan comme suit :

$$\text{pour } \forall x \in \hat{U}_{\text{reg}} \text{ et } w \in \tilde{G}_{\mathcal{C}} : i([x, w]) = w(p(x)). \quad (1.5)$$

On appelle  $V$  l'intérieur de l'image de  $\hat{U}_{\mathcal{C}}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . C'est une région connexe du plan dont le bord a deux composantes connexes qui sont des lignes brisées périodiques. Nous ferons maintenant du billard dans  $V$ . Remarquons que  $\bar{V} = \hat{V}$ .

Notons  $\partial V$  le bord de  $V$  privé des points singuliers. Rappelons que l'espace des phases de la transformation de billard sur  $V$  est l'ensemble des couples  $(x, \vec{v})$  où :

- le point  $x$  est un point dans  $\dot{\partial V}$  ;
- le vecteur  $\vec{v}$  est un vecteur pointant vers l'intérieur de  $V$ .

Nous prendrons sur cet espace de phases, appelé  $\Omega$ , des coordonnées  $(\mathcal{S}, M, \theta, p)$  où les deux premières coordonnées sont discrètes et les deux dernières sont des coordonnées continues.

- La coordonnée  $\mathcal{S}$  prend deux valeurs :
  - La valeur  $\mathcal{L}$  dans la composante gauche de  $\partial V$ .
  - La valeur  $\mathcal{R}$  dans la composante droite de  $\partial V$ .
- La deuxième coordonnée est égale à  $M$  pour les points du bord de  $w_M.U$ , où  $w_M$  est l'élément de  $\tilde{G}_C$  tel que  $q(w_M)(0) = M$ .
- $\theta$  est l'angle par rapport à l'horizontale, mesuré dans le sens trigonométrique dans la composante gauche et mesuré dans le sens antitrigonométrique dans la composante droite. C'est-à-dire que si  $\theta_0$  désigne l'angle par rapport à la normale au côté, alors :
  - $\theta = \theta_0 + \varepsilon$  si  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$  et  $M$  est pair, ou  $\mathcal{S} = \mathcal{L}$  et  $M$  est impair ;
  - $\theta = \theta_0 - \varepsilon$  si  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$  et  $M$  est impair, ou  $\mathcal{S} = \mathcal{L}$  et  $M$  est pair.
- $p = s \cdot \cos(\theta_0)$  où  $s$  désigne l'abscisse curviligne sur l'adhérence de deux côtés successifs faisant un angle inférieur à  $\pi$ , de telle sorte que  $s$  vaut 0 au point singulier le plus proche d'angle plus petit que  $\pi$  et  $s$  est croissante vers le haut de la bande. On remarquera que  $|s|$  est la distance au-dit point singulier. Donc
  - $p = s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)$  si  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$  et  $M$  est pair, ou  $\mathcal{S} = \mathcal{L}$  et  $M$  est impair ;
  - $p = s \cdot \cos(\theta + \varepsilon)$  si  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$  et  $M$  est impair, ou  $\mathcal{S} = \mathcal{L}$  et  $M$  est pair.

On remarquera que  $|p|$  est la distance entre la corde qui décrit la trajectoire continue et le point singulier le plus proche d'angle plus petit que  $\pi$ .

Ces coordonnées parcourent les ensembles suivants :

- la première coordonnée prend seulement deux valeurs :  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{R}$  ;
- la deuxième coordonnée  $M$  parcourt tous les entiers relatifs ;
- la troisième coordonnée parcourt des intervalles différents qui dépendent de la parité de  $M$  et du côté où l'on se trouve :

$$L_+ := \left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$$

$$L_- := \left(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

$$\theta \in \begin{cases} L_+ & , \text{ si } (\mathcal{R}, M \text{ pair}) \text{ ou } (\mathcal{L}, M \text{ impair}) \\ L_- & , \text{ si } (\mathcal{R}, M \text{ impair}) \text{ ou } (\mathcal{L}, M \text{ pair}) \end{cases} ; \quad (1.6)$$

- la quatrième coordonnée parcourt des intervalles différents qui dépendent de la parité de  $M$  et de la valeur de  $\theta$  :

$$J_+(\theta) = \frac{h}{\cos(\varepsilon)} \cdot (0, \cos(\theta + \varepsilon))$$

$$J_-(\theta) = \frac{h}{\cos(\varepsilon)} \cdot (-\cos(\theta - \varepsilon), 0)$$



$$p \in \begin{cases} J_-(\theta) & , \text{ si } (\mathcal{R}, M \text{ pair}) \text{ ou } (\mathcal{L}, M \text{ impair}) \\ J_+(\theta) & , \text{ si } (\mathcal{R}, M \text{ impair}) \text{ ou } (\mathcal{L}, M \text{ pair}) \end{cases} . \quad (1.7)$$

Notons  $G_V$  le groupe formé des isométries affines du plan qui préservent la bande  $V$ . Le groupe  $\tilde{G}_{\mathcal{C}}$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $G_V$ . Le groupe  $G_V$  agit librement et transitivement sur l'ensemble des côtés de  $V$ , paramétré par les coordonnées  $(\mathcal{S}, M)$ . L'action de  $G_V$  sur  $V$  induit une action de  $G_V$  sur l'espace des phases  $\Omega$ . En particulier, voici comment agit un ensemble de générateurs de  $G_V$  sur  $\Omega$  :

- la symétrie  $\sigma_-$  par rapport au côté inférieur de  $U$

$$(\mathcal{S}, M, \theta, p) \mapsto (\mathcal{S}, -M - 1, -\theta, -p); \quad (1.8)$$

- la symétrie  $\sigma_+$  par rapport au côté supérieur de  $U$

$$(\mathcal{S}, M, \theta, p) \mapsto (\mathcal{S}, -M + 1, -\theta, -p); \quad (1.9)$$

- la translation  $\sigma_+\sigma_-$  :

$$(\mathcal{S}, M, \theta, p) \mapsto (\mathcal{S}, M + 2, \theta, p); \quad (1.10)$$

- la rotation  $\rho$  qui est la symétrie centrale par rapport au centre du parallélogramme  $U$  :

$$(\mathcal{S}, M, \theta, p) \mapsto (\bar{\mathcal{S}}, -M, -\theta, -p) \text{ où } \bar{\mathcal{S}} = \begin{cases} \mathcal{L} & \text{si } \mathcal{S} = \mathcal{R} \\ \mathcal{R} & \text{si } \mathcal{S} = \mathcal{L} \end{cases} ; \quad (1.11)$$

- une symétrie glissée  $\sigma_*$  le long de l'axe vertical :

$$(\mathcal{S}, M, \theta, p) \mapsto (\bar{\mathcal{S}}, M + 1, \theta, p) \text{ où } \bar{\mathcal{S}} = \begin{cases} \mathcal{L} & \text{si } \mathcal{S} = \mathcal{R} \\ \mathcal{R} & \text{si } \mathcal{S} = \mathcal{L} \end{cases} ; \quad (1.12)$$

L'action de  $G_V$  sur l'espace des phases  $\Omega$  commute à la transformation du billard dans  $V$ . Comme  $G_V$  agit transitivement sur l'ensemble des côtés de  $V$ , il suffit de calculer la transformation de billard sur un côté de  $V$ .

- **Le cas spécial :** Un cas important bien que peu fréquent est le cas, illustré à la figure 1.3, de deux rebonds successifs sur la même composante. Calculons pour ce cas la transformation de billard depuis le côté presque-vertical droit de  $U$ . Autrement dit on prend comme point de départ dans l'espace des phases un point de coordonnées  $(\mathcal{R}, 0, \theta, p)$ , où  $\theta \in L_+ = (-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$ ,  $p \in J_-(\theta) = \frac{h}{\cos(\varepsilon)}(-\cos(\theta - \varepsilon), 0)$ .

Vu que les côtés ont des pentes de  $\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$ , ce cas est possible si et seulement si  $\theta$  est  $\varepsilon$ -proche de  $\frac{\pi}{2}$ . Calculons l'image de  $(\mathcal{R}, 0, \theta, p)$  sachant que  $\theta \in (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$  et que la première coordonnée de l'image est  $\mathcal{R}$ . Soient  $(\mathcal{R}, 1, \theta', p')$  les coordonnées de l'image. Traçons la corde allant du point de départ au point d'arrivée de ce pas de la transformation. Considérons les angles

par rapport à la normale au point d'arrivée. On a la relation :  $\theta' + \varepsilon = \pi - \theta - \varepsilon$ . Il s'ensuit que  $\theta' = \pi - 2 \cdot \varepsilon - \theta$ .

Maintenant, considérons le segment qui réalise la distance entre le point singulier et la corde allant du point de départ au point d'arrivée. La longueur de ce segment est  $|p| = |p'|$ . Comme le signe de  $p$  est différent selon la parité de  $M$ , il s'ensuit que  $p' = -p$ .

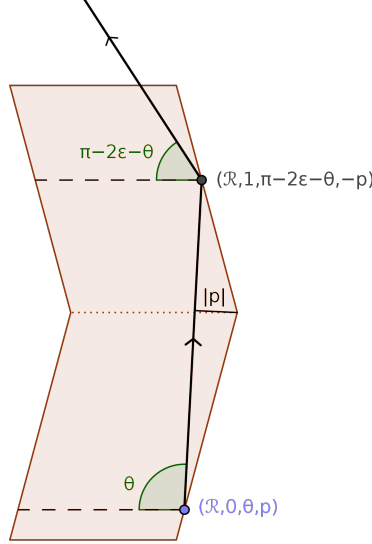


FIGURE 1.3 – Rebond dans le cas spécial

Donc la transformation dans le cas spécial est

$$(\mathcal{R}, 0, \theta, p) \mapsto (\mathcal{R}, 1, \pi - 2\varepsilon - \theta, -p) \quad (1.13)$$

Regardons pour quelles valeurs de  $(\theta, p)$  cette transformation est possible. Pour cela, il faut et il suffit que  $p' \in J_+(\theta')$ .

$$p' \in J_+(\theta') = \frac{h}{\cos(\varepsilon)} \cdot (0, -\cos(\theta + \varepsilon)) \Leftrightarrow p \in (\cos(\theta + \varepsilon), 0)$$

Étant donnée  $\theta \in L_+$ , l'intervalle  $(\cos(\theta + \varepsilon), 0)$  est non-trivial si et seulement si  $\theta > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ . Il est inclus dans  $(-\cos(\theta - \varepsilon), 0)$  si et seulement si  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Il contient  $(-\cos(\theta - \varepsilon), 0)$  si et seulement si  $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ . On en déduit que le cas spécial ici discuté arrive si et seulement si  $(\theta, p)$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta + \varepsilon) \leq p \leq 0. \\ \text{ou bien} \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \cos(\theta - \varepsilon) \leq p \leq 0. \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

Jusqu'ici on n'a parlé que du cas où le point de départ est  $(\mathcal{R}, 0, \theta, p)$ . Par l'action du groupe  $G_V$ , nous obtenons la transformation de billard pour tous les cas spéciaux :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}, M, \theta, p) &\mapsto (\mathcal{S}, M + 1, \pi - (\theta + 2\varepsilon), -p) && \text{si } \mathcal{S} = \mathcal{R}, M \text{ est pair,} \\
 &&& \text{ou } \mathcal{S} = \mathcal{L}, M \text{ est impair} \\
 (\mathcal{S}, M, \theta, p) &\mapsto (\mathcal{S}, M - 1, -\pi - (\theta - 2\varepsilon), -p) && \text{si } \mathcal{S} = \mathcal{R}, M \text{ est impair,} \\
 &&& \text{ou } \mathcal{S} = \mathcal{L}, M \text{ est pair}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

- **Le cas général :** Dans le cas général, on considère des points de la composante droite du bord de la bande  $V$  qui partent vers le haut. C'est-à-dire que dans l'espace de phases on prend un point de coordonnées  $(\mathcal{R}, M, \theta, p)$  avec  $\theta > 0$ , et on cherche à savoir quelle est son image  $(\mathcal{L}, M', \theta', p')$ .

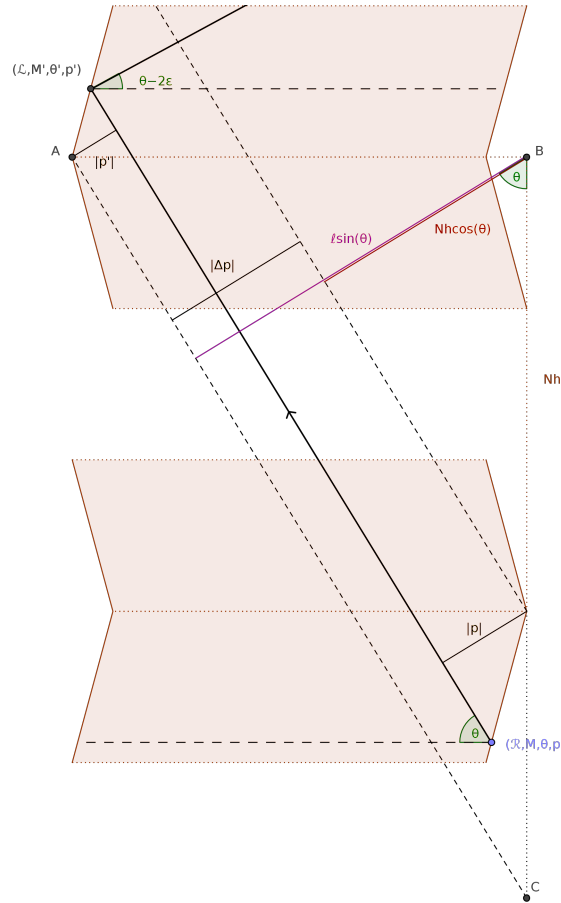


FIGURE 1.4 – Rebond dans le cas général

Pour tout entier  $K$ , notons par  $\underline{K}$  l'entier pair qui est égal à  $K$  ou  $K - 1$ , et par  $\overline{K}$  l'entier pair qui est égal à  $K$  ou  $K + 1$ .

Considérons l'entier impair  $N = \overline{M'} - \underline{M} - 1$ . Soit  $\Delta p = p' - p$ , alors  $\Delta p + Nh \cos(\theta)$  est la hauteur d'un triangle rectangle :

- dont un des côtés faisant un angle droit est de longueur  $l$ ,
- dont l'angle adjacent au côté de longueur  $l$  est  $\theta$ .

Ce triangle est visible sur la figure 1.4 (triangle  $ABC$ ). Donc :

$$p' = p + l \sin(\theta) - Nh \cos(\theta). \quad (1.16)$$

On remarque que le signe de  $p'$  est  $(-1)^{M'}$  et le signe de  $p$  est  $(-1)^{M+1}$ . La coordonnée angulaire est transformée comme suit :

$$\theta' = \theta - (-1)^{M'} 2\varepsilon \quad (1.17)$$

On remarque que  $p'$ ,  $\theta'$  s'expriment avec  $p$ ,  $\theta$  et  $M$  et  $M'$  seulement.  $M'$  s'exprime en fonction de  $M$  comme :

$$M' = \begin{cases} M + N & \text{si } M' \text{ et } M \text{ sont de parité différente} \\ M + N + 1 & \text{si } M' \text{ et } M \text{ sont pairs} \\ M + N - 1 & \text{si } M' \text{ et } M \text{ sont impairs} \end{cases} \quad (1.18)$$

Par la symétrie  $\sigma_-$ , on voit que cette description de la transformation de billard sur le bord droit de  $V$  est valable pour tous les points de la forme  $(\mathcal{R}, M, \theta, p)$ .

On remarque que la transformation de billard s'écrit comme une « rotation » de la coordonnée  $p$ , suivie d'un « changement de niveau » dans la coordonnée angulaire. Soit  $(\mathcal{S}, M, \theta, p)$ . Alors des calculs ci-dessus et du fait que la transformation de billard commute à la symétrie glissée  $\sigma_*$ , on déduit que la transformation de billard agit comme suit. D'abord, on déplace  $p$  par  $l \sin(\theta) - h \cos(\theta)$  modulo  $2h \cos(\theta)$ . Plus précisément on note  $N$  l'unique nombre impair tel que  $p + l \sin(\theta) - Nh \cos(\theta)$  se trouve dans l'intervalle  $\frac{h}{\cos(\varepsilon)} (-\cos(\theta + \varepsilon), \cos(\theta - \varepsilon)) = J_-(\theta + 2\varepsilon) \cup \{0\} \cup J_+(\theta - 2\varepsilon)$ . Cet intervalle est en effet de longueur  $2h \cos(\theta)$ . Alors si on adopte la notation  $(-1)^{\mathcal{L}} = -1$ ,  $(-1)^{\mathcal{R}} = 1$ , on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \overline{\mathcal{S}} \\ p' &= p + l \sin(\theta) - Nh \cos(\theta) \\ M' &= \begin{cases} M + N & \text{si } pp' > 0 \\ M + N + 1 & \text{si } p' > 0 \text{ et } p < 0 \\ M + N - 1 & \text{si } p' < 0 \text{ et } p > 0 \end{cases} \\ \theta' &= \theta - (-1)^{\mathcal{S}} (-1)^{M'} 2\varepsilon \end{aligned} \quad (1.19)$$

## 1.5 Les modèles limites

Dans la section précédente on a considéré le billard dans la bande  $V$  obtenue par dépliage partiel d'un parallélogramme. On a calculé l'expression de la transformation de billard dans les coordonnées  $(\mathcal{S}, M, \theta, p)$ .

Dans cette section, nous définissons des transformations de  $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  obtenues par passage à la limite de la transformation du billard dans la région

$$\frac{\pi}{2} - |\theta| \gg \varepsilon > 0$$

quotientée par la translation verticale  $\sigma_+ \sigma_-$ . On notera  $W$  ce quotient de l'espace des phases. La transformation du billard induit une transformation de  $W$ .

Pour  $\frac{\pi}{2} - |\theta| > \varepsilon$ , la fibre de  $W$  au dessus de  $\theta$  est constituée de deux cercles  $W_{\mathcal{L}}(\theta)$  et  $W_{\mathcal{R}}(\theta)$ , de longueur  $2h \cos \theta$ . Chacun de ces deux cercles est naturellement paramétré par

$$\overline{J_-(\theta) \cup J_+(\theta)} = \frac{h}{\cos \varepsilon} [-\cos(\theta - \varepsilon), \cos(\theta + \varepsilon)]$$

et est privé des deux points associés aux paramètres 0 et  $\frac{h}{\cos \varepsilon} \cos(\theta + \varepsilon)$ .

Posons  $\tilde{\alpha}(\theta) := l \sin \theta - h \cos \theta$ . Supposons qu'on ait  $\frac{\pi}{2} - |\theta| > 3\varepsilon$ . Rappelons qu'on pose  $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{R}$  si  $\mathcal{S} = \mathcal{L}$  et  $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{L}$  si  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ . La transformation du billard (vue dans  $W$ ) envoie le cercle  $W_{\mathcal{S}}(\theta)$  dans l'union des deux cercles  $W_{\overline{\mathcal{S}}}(\theta + 2\varepsilon) \cup W_{\overline{\mathcal{S}}}(\theta - 2\varepsilon)$  de la façon suivante :

- On commence par effectuer dans le cercle  $W_{\mathcal{S}}(\theta)$  une rotation d'angle  $\tilde{\alpha}(\theta)$ .
- On choisit l'unique relèvement du point obtenu qui se trouve dans l'intervalle

$$\overline{J_-(\theta + 2\varepsilon) \cup J_+(\theta - 2\varepsilon)} = \frac{h}{\cos \varepsilon} [-\cos(\theta + \varepsilon), \cos(\theta - \varepsilon)].$$

Ceci est possible car cet intervalle est de même longueur  $2h \cos \theta$  que  $W_{\mathcal{S}}(\theta)$ .

- Si ce relèvement appartient à  $J_-(\theta + 2\varepsilon)$ , on l'envoie sur le point de même paramètre dans  $W_{\overline{\mathcal{S}}}(\theta + 2\varepsilon)$ ; si ce relèvement appartient à  $J_+(\theta - 2\varepsilon)$ , on l'envoie sur le point de même paramètre dans  $W_{\overline{\mathcal{S}}}(\theta - 2\varepsilon)$ .

On voit donc que l'image du cercle  $W_{\mathcal{S}}(\theta)$  par la transformation du billard est l'union de l'intervalle  $J_-(\theta + 2\varepsilon)$  dans le cercle  $W_{\overline{\mathcal{S}}}(\theta + 2\varepsilon)$  et de l'intervalle  $J_+(\theta - 2\varepsilon)$  dans le cercle  $W_{\overline{\mathcal{S}}}(\theta - 2\varepsilon)$ .

Dans la limite  $\frac{\pi}{2} - |\theta| \gg \varepsilon > 0$ , les cercles  $W_{\mathcal{S}}(\theta)$ ,  $W_{\mathcal{S}}(\theta \pm 2\varepsilon)$  deviennent de même longueur  $2h \cos \theta$ . De même, les intervalles  $J_{\pm}(\theta)$ ,  $J_{\pm}(\theta \pm 2\varepsilon)$  sont tous de longueur  $h \cos \theta$ . Appliquons alors un changement d'échelle de rapport  $2h \cos \theta$  sur la coordonnée  $p$  qui rende ces cercles de longueur 1. Les cercles sont paramétrés par  $[-1/2, 1/2]$  et privés des points associés aux paramètres 0 et  $1/2$ . La rotation pertinente est celle d'angle

$$\alpha(\theta) = \frac{\tilde{\alpha}(\theta)}{2h \cos \theta} = \frac{l}{2h} \tan \theta - \frac{1}{2}.$$

Les différents modèles limites obtenus dépendent de la comparaison entre les angles  $\alpha(\theta), \alpha(\theta \pm 2\varepsilon), \alpha(\theta \pm 4\varepsilon), \dots$ . Pour  $\underline{\alpha} = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , on introduit la transformation  $\tilde{F}_{\underline{\alpha}}$  de  $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  définie par

$$\tilde{F}_{\underline{\alpha}}(\mathcal{S}, n, x) = \begin{cases} (\bar{\mathcal{S}}, n+1, x + \alpha_n) & \text{si } x + \alpha_n \in (0, 1/2) \\ (\bar{\mathcal{S}}, n-1, x + \alpha_n) & \text{si } x + \alpha_n \in (-1/2, 0). \end{cases}$$

Le paramètre  $\alpha_n$  qui nous intéresse est essentiellement  $\alpha(\theta - 2n\varepsilon) \bmod 1$ .

- Supposons d'abord qu'on ait  $\frac{\pi}{2} - |\theta| \gg \varepsilon^{1/2}$ . On a alors  $|\alpha(\theta + 2n\varepsilon) - \alpha(\theta)| \ll 1$  pour tout entier (fixé)  $n$ . Le modèle limite pertinent est donc donné par la transformation  $\tilde{F}_{\underline{\alpha}}$  telle que

$$\alpha_n = \alpha(\theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cette transformation est un revêtement de degré 2 d'une transformation étudiée, entre autres, par Conze et Keane ([CK76], [Con76], [Con80]) et Schmidt [Sch77].

- Supposons ensuite qu'on ait

$$\varepsilon^{1/2} \gtrsim \frac{\pi}{2} - |\theta| \gg \varepsilon^{2/3}.$$

D'après la formule de Taylor, on aura, pour tout entier  $n$  fixé

$$\alpha(\theta - 2n\varepsilon) = \alpha(\theta) - 2n\varepsilon \frac{l}{2h} (1 + \tan^2 \theta) + o(1).$$

La famille pertinente de transformations dans ce régime limite est donc la famille  $\tilde{F}_{\underline{\alpha}}$ , pour des paramètres  $\underline{\alpha}$  de la forme

$$\alpha_n = \gamma_0 + n\gamma_1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les paramètres  $\gamma_0, \gamma_1$  peuvent ici prendre des valeurs arbitraires.

- De façon similaire, pour tout entier  $k \geq 2$ , dans le régime

$$\varepsilon^{(k-1)/k} \gtrsim \frac{\pi}{2} - |\theta| \gg \varepsilon^{k/(k+1)},$$

la formule de Taylor permet d'approcher  $\alpha(\theta - 2n\varepsilon)$  par un polynôme de degré  $< k$  en  $n$  avec un reste  $o(1)$ . La famille pertinente de transformations dans ce régime limite est donc la famille  $\tilde{F}_{\underline{\alpha}}$ , pour des paramètres  $\underline{\alpha}$  de la forme

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i n^i, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les paramètres  $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$  peuvent prendre des valeurs arbitraires.

- Le cas sans doute le plus intéressant est celui caractérisé par

$$\varepsilon^{k/(k+1)} \gg \frac{\pi}{2} - |\theta| \gg \varepsilon, \quad \forall k > 0.$$

La formule de Taylor pour  $\alpha(\theta - 2n\varepsilon)$  n'est alors plus vraiment intéressante car les termes qui la composent ne deviennent pas petits. Le modèle limite

qui semble le plus pertinent est la famille *complète* de transformations  $\tilde{F}_{\underline{\alpha}}$ , permettant au paramètre  $\underline{\alpha}$  de parcourir  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  tout entier. Il est aussi naturel d'équiper l'espace des paramètres  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  de la mesure de Haar. On donne dans les prochains paragraphes une justification heuristique (parmi d'autres possibles) de ces assertions.

Posons  $\kappa := \frac{l}{2h}$ . Pour tout entier  $N > 0$ , notons  $\gamma^{(N)}(\theta)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{[-N, N]}$  dont les  $2N + 1$  composantes sont les réels  $\varepsilon^{2/3} \tan(\theta - 2n\varepsilon)$ ,  $-N \leq n \leq n$ . Les composantes de  $\gamma^{(N)}(\theta)$  sont donc de l'ordre de  $\varepsilon^{2/3} (\frac{\pi}{2} - |\theta|)^{-1} \gg 1$ . Le  $(2N + 1)$ -uplet  $\alpha^{(N)}(\theta) := (\alpha(\theta - 2n\varepsilon))_{-N \leq n \leq N} \in \mathbb{T}^{[-N, N]}$  est l'image dans  $\mathbb{T}^{[-N, N]}$  du vecteur  $\kappa \varepsilon^{-2/3} \gamma^{(N)}(\theta) + c_0$ , où  $c_0$  désigne le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à  $1/2$ .

Supposons que  $\kappa$  ne soit connu qu'avec une précision de l'ordre de  $\varepsilon^{1/3}$ ; plus précisément, écrivons  $\kappa = \kappa_0 + \tau \varepsilon^{1/3}$ , où la variable aléatoire  $\tau$  est uniformément distribuée dans l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . La distribution correspondante pour le point  $\alpha^{(N)}(\theta)$  est la distribution uniforme sur un morceau d'orbite du point  $c_0$  pour le flot linéaire sur  $\mathbb{T}^{[-N, N]}$  engendré par le vecteur  $\gamma^{(N)}(\theta)$ ; la longueur (en temps) de ce morceau d'orbite est  $\varepsilon^{-1/3} \gg 1$ .

Si le vecteur  $\gamma^{(N)}(\theta)$  est suffisamment irrationnel (diophantien), la distribution uniforme sur de longs morceaux d'orbite du flot linéaire associé se rapproche dans la topologie faible de la mesure de Haar sur  $\mathbb{T}^{[-N, N]}$ .

Pour voir que le vecteur  $\gamma^{(N)}(\theta)$  est diophantien pour la plupart des valeurs de  $\theta$ , on peut essayer de montrer que la courbe  $\theta \mapsto \gamma^{(N)}(\theta)$  est non-planaire au sens de Pyartli et appliquer le théorème de Pyartli [Pya69]. Nous ne nous engagerons pas plus avant dans cette voie, car notre démarche dans cette section n'était de toute façon qu'heuristique ...

*Remarque 3.* Dans les chapitres suivants, nous oublierons la première coordonnée ( $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{R}$ ) et considérerons la famille légèrement plus simple, également paramétrée par  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , définie par

$$F_{\underline{\alpha}}(n, x) = \begin{cases} (n + 1, x + \alpha_n) & \text{si } x + \alpha_n \in (0, 1/2) \\ (n - 1, x + \alpha_n) & \text{si } x + \alpha_n \in (-1/2, 0). \end{cases}$$

## Chapitre 2

# Généralités sur la famille

### Sommaire

---

2.1 Dans ce chapitre . . . . .	23
2.2 Orbites dans un contexte de définition partielle . . . . .	23
2.3 Notre famille de transformations . . . . .	24
2.4 Codage par niveaux . . . . .	26
2.5 Les échanges d'intervalles . . . . .	28
2.6 Propriétés topologiques . . . . .	31
2.7 Un modèle sans singularités . . . . .	33
2.8 Suspensions (I) . . . . .	35
2.9 Suspensions (II) . . . . .	37
2.10 Relation entre notre famille et des flots directionnels . . . . .	39

---

### 2.1 Dans ce chapitre

Dans ce chapitre nous discutons quelques propriétés simples de la famille  $\{F_\alpha\}$ , nous introduisons des notations et nous posons quelques exemples.

### 2.2 Orbites dans un contexte de définition partielle

Nous avons besoin de préciser le sens des mots « orbite » et « invariant » dans le cas d'une transformation qui n'est pas définie partout.

Pour le reste de cette section, fixons un ensemble  $X$ , un sous-ensemble  $Y$  de  $X$ , une transformation injective  $T : Y \rightarrow X$ . Nous noterons  $T : X \dashrightarrow X$  car nous regarderons la dynamique de  $T$  sur  $X$  tout entier même si  $T$  n'est pas définie partout. Nous noterons  $\text{sing}(T)$  l'ensemble des points de  $X$  où  $T$  n'est pas définie, c'est à dire  $\text{sing}(T) = X \setminus Y$ . De façon similaire  $\text{sing}(T^{-1}) = X \setminus T(Y)$ .



**Définition 6 (Orbites).** L'**orbite future** de  $x$  est

$$\mathcal{O}_+(x) = \left\{ T^k(x) \mid k \geq 0 \text{ et } \forall j : \text{si } 0 \leq j < k \text{ alors } T^j(x) \notin \text{sing}(T) \right\} \quad (2.1)$$

L'**orbite passée** de  $x$  est

$$\mathcal{O}_-(x) = \left\{ T^{-k}(x) \mid k \geq 0 \text{ et } \forall j : \text{si } 0 \leq j < k \text{ alors } T^{-j}(x) \notin \text{sing}(T^{-1}) \right\} \quad (2.2)$$

L'**orbite** de  $x$ ,  $\mathcal{O}(x)$ , est l'ensemble de toutes les itérations possibles de  $T$  sur  $x$ . C'est donc l'union de l'orbite passée et de l'orbite future de  $x$ .

**Remarque 4.** Si  $x \in \text{sing}(T) \cap \text{sing}(T^{-1})$ , alors aucune des deux transformations  $T$  et  $T^{-1}$  n'est définie en  $x$ . Dans ce cas l'orbite de  $x$  est le singleton  $\{x\}$ .

**Définition 7.** Une **connexion** est une orbite finie non-périodique de  $T$ .

**Définition 8 (Itérés d'un ensemble).** Les ensembles  $T^k(A)$  et  $T^{-k}(A)$  sont définis par récurrence comme

$$\begin{aligned} T(A) &= \{T(x) \mid x \in A \setminus \text{sing}(T)\}, \quad T^{-1}(A) = \{T^{-1}(x) \mid x \in A \setminus \text{sing}(T^{-1})\} \\ \forall k \geq 0 : T^{k+1}(A) &= T(T^k(A)), \quad T^{-k-1}(A) = T^{-1}(T^{-k}(A)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Définition 9.** Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est  **$T$ -invariant** si et seulement  $T^{-1}(A) \subset A$  et  $T(A) \subset A$ .

**Définition 10 (Complété dynamique).** Le **complété dynamique** de  $A \subset X$ , noté  $A^*$ , est défini par

$$A^* = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} T^k(A) \quad (2.4)$$

De façon équivalente,  $A^*$  est l'union des orbites de tous les points de  $A$ .

**Remarque 5.** Un ensemble est **invariant** si et seulement si il est égal à son complété dynamique.

## 2.3 Notre famille de transformations

Nous notons  $Z$  l'espace de phases  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ .

**Définition 11.** Soit  $z \in Z$ . Alors on note  $n(z)$  l'entier  $n$  pour lequel il existe un  $x \in \mathbb{T}$  tel que  $z = (n, x)$ . On appelle  $n(z)$  le **niveau** de  $z$ .

Pour tout entier  $n_0$ , on appelle **niveau**  $n_0$  ou  **$n_0$ -ième niveau** l'ensemble des points  $z$  de  $Z$  dont le niveau  $n(z)$  est égal à  $n_0$ , c'est à dire  $\{n_0\} \times \mathbb{T}$ .

Rappelons la définition de la famille  $\{F_\alpha\}$ . Chaque transformation de cette famille sera définie comme une rotation sur chaque niveau de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  suivie d'une fonction de saut  $J$  (définition 14).

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{T}$ ), notons  $R_\alpha$  la rotation de  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$ .

**Définition 12.** Pour chaque suite biinfinie  $\underline{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , soit  $R_{\underline{\alpha}}$  la rotation de  $\alpha_n$  sur le niveau  $n$ . Autrement dit :

$$R_{\underline{\alpha}}(n, x) = (n, R_{\alpha_n}(x)) = (n, (x + \alpha_n) \bmod 1)$$

Considérons  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  paramétré par  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

**Définition 13.** La fonction de saut  $J : Z \dashrightarrow Z$  est définie par

$$J(n, x) = \begin{cases} (n + 1, x) & \text{si } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ (n - 1, x) & \text{si } x \in (-\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour définir  $F_{\underline{\alpha}}$ .

**Définition 14.** Pour tout  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  :

$$F_{\underline{\alpha}} = J \circ R_{\underline{\alpha}}.$$

Dans l'étude de la famille  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$  on a deux espaces en jeu : l'espace des paramètres et l'espace de phases.

**Définition 15.** Considérons  $\mathbb{R}$  avec la topologie habituelle et considérons sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la topologie quotient.

- On munit l'espace de phases  $Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  de la topologie produit de la topologie discrète sur  $\mathbb{Z}$  avec la topologie quotient sur le cercle  $\mathbb{T}$ .
- On munit l'espace de paramètres  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  de la topologie produit. C'est-à-dire qu'une base de la topologie est formée des ensembles dits « cylindriques », de la forme

$$\{\underline{\alpha} \mid \alpha_n \in V_n\}$$

où  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une collection d'ouverts de  $\mathbb{T}$  qui satisfait  $V_n = \mathbb{T}$  sauf pour un nombre fini d'indices  $n$ .

**Définition 16.** Soit  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur le cercle  $\mathbb{T}$ .

- On munit l'espace des phases  $Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  de la mesure  $\Lambda$ , mesure produit de la mesure de comptage avec  $\lambda$ .
- On munit l'espace des paramètres  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  de la mesure produit :  $\lambda^{\mathbb{Z}}$ . Sur les ensembles « cylindriques » de la base de la topologie, elle vaut :

$$\lambda^{\mathbb{Z}}(\{\underline{\alpha} \mid \alpha_n \in V_n\}) = \prod \lambda(V_n)$$

**Proposition 2.3.1.** *Le sous-ensemble  $\text{sing}(F_{\underline{\alpha}})$  de l'espace de phases où  $F_{\underline{\alpha}}$  n'est pas défini est un ensemble dénombrable, donc de mesure nulle.*

## 2.4 Codage par niveaux

**Définition 17.** Soit  $A$  un sous-ensemble quelconque de l'espace de phases. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $A_n$  l'intersection de  $A$  avec le niveau  $n$ , projeté sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Autrement dit :

$$A_n = \{x \in \mathbb{T} \mid \exists z \in A, n(z) = n, z = (n, x)\}$$

**Définition 18.** On note  $A^\uparrow$  (prononcé «  $A$  montant ») l'ensemble des points de  $A$  qui montent de niveau à la prochaine itération, et on note  $A^\downarrow$  l'ensemble des points qui descendent à la prochaine itération. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} A^\uparrow &= \left\{ z \in A \mid n(F_{\underline{\alpha}}(z)) = n(z) + 1 \right\} \\ A^\downarrow &= \left\{ z \in A \times \mathbb{T} \mid n(F_{\underline{\alpha}}(z)) = n(z) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Similairement on définit  $A^{\uparrow\uparrow}$  comme l'ensemble des points qui montent deux niveaux de suite pendant les deux prochaines itérations. Plus généralement, si  $s$  est une suite finie de  $k$  flèches montantes ( $\uparrow$ ) ou descendantes ( $\downarrow$ ),  $A^s$  denote l'ensemble des points qui pendant les  $k$  itérations suivantes changent de niveau selon la suite  $s$ .

Observons que si  $s$  est un mot initial de  $s'$  alors  $A^{s'} \subset A^s$  et  $A_n^{s'} \subset A_n^s$ .

En prenant  $A = Z$ , on obtient  $Z_n, Z_n^s$ .

**Définition 19.** Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et soit  $s$  un mot formé de  $k_\uparrow$  flèches montantes ( $\uparrow$ ) et de  $k_\downarrow$  flèches descendantes ( $\downarrow$ ). Alors on désigne par  $n + s$  la quantité

$$n + s := n + k_\uparrow - k_\downarrow$$

Nous définissons aussi des rotations  $R_{\underline{\alpha}, n}^s$ , par récurrence sur la longueur de  $s$  :

$$R_{\underline{\alpha}, n}^0 = \text{id}, R_{\underline{\alpha}, n}^{s\uparrow} = R_{\underline{\alpha}, n}^{s\downarrow} = R_{\alpha_{n+s}} \circ R_{\underline{\alpha}, n}^s$$

**Remarque 6.**  $R_{\underline{\alpha}, n}^s$  est donc la composée des rotations auxquelles va être soumis un point dans  $\{n\} \times Z_n^s$ .

**Proposition 2.4.1** (Calcul de  $Z_n^s$ ). *Si  $s$  est de longueur 1,  $Z^s, Z_n^s$  sont donnés (d'après les définitions 17 et 18) par :*

$$\begin{aligned} Z^\uparrow &= R_{\underline{\alpha}}^{-1} \left( \mathbb{Z} \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \right), & Z_n^\uparrow &= R_{\alpha_n}^{-1} \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ Z^\downarrow &= R_{\underline{\alpha}}^{-1} \left( \mathbb{Z} \times \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \right), & Z_n^\downarrow &= R_{\alpha_n}^{-1} \left(-\frac{1}{2}, 0\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

*Si  $s$  est de longueur  $\geq 1$  et si  $Z_n^s = (a, b)$ , alors  $Z_n^{s\uparrow}$  est donné par la table :*

$Z_n^{s\uparrow}$		$R_{\underline{\alpha}, n}^{s\uparrow}(a)$	
		$\in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$	$\in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
$R_{\underline{\alpha}, n}^{s\uparrow}(b)$	$\in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$	$\emptyset$	$\left(a, R_{\alpha_n}^{s\uparrow -1} \left(\frac{1}{2}\right)\right)$
	$\in \left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left(R_{\alpha_n}^{s\uparrow -1}(0), b\right)$	$Z_n^s$

et  $Z_n^{s\downarrow}$  est donné par la table complémentaire :

$Z_n^{s\downarrow}$		$R_{\alpha,n}^{s\downarrow}(a)$	
		$\in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$	$\in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
$R_{\alpha,n}^{s\downarrow}(b)$	$\in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$	$Z_n^s$	$\left(R_{\alpha,n}^{s\downarrow}{}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), b\right)$
	$\in \left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left(a, R_{\alpha,n}^{s\downarrow}{}^{-1}(0)\right)$	$\emptyset$

**Corollaire 2.4.2.** Si  $s$  est de longueur 2,  $Z_n^s$  est donné par :

$$\begin{aligned}
Z_n^{\uparrow\uparrow} &= \begin{cases} R_{\alpha_n}^{-1}\left(0, R_{\alpha_{n+1}}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right), & \text{si } \alpha_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ R_{\alpha_n}^{-1}\left(R_{\alpha_{n+1}}^{-1}(0), \frac{1}{2}\right), & \text{si } \alpha_{n+1} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases} \\
Z_n^{\uparrow\downarrow} &= \begin{cases} R_{\alpha_n}^{-1}\left(R_{\alpha_{n+1}}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right), & \text{si } \alpha_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ R_{\alpha_n}^{-1}\left(0, R_{\alpha_{n+1}}^{-1}(0)\right), & \text{si } \alpha_{n+1} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases} \\
Z_n^{\downarrow\uparrow} &= \begin{cases} R_{\alpha_n}^{-1}\left(R_{\alpha_{n-1}}^{-1}(0), 0\right), & \text{si } \alpha_{n-1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ R_{\alpha_n}^{-1}\left(\frac{-1}{2}, R_{\alpha_{n-1}}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right), & \text{si } \alpha_{n-1} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases} \\
Z_n^{\downarrow\downarrow} &= \begin{cases} R_{\alpha_n}^{-1}\left(\frac{-1}{2}, R_{\alpha_{n-1}}^{-1}(0)\right), & \text{si } \alpha_{n-1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ R_{\alpha_n}^{-1}\left(R_{\alpha_{n-1}}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right), 0\right), & \text{si } \alpha_{n-1} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

**Corollaire 2.4.3** (Des valeurs de symétrie). Lorsque  $\alpha_n = \frac{1}{2}$ , le niveau  $n$  agit comme un miroir :

- toutes les trajectoires venant d'en haut y rebondissent vers le haut,
- toutes les trajectoires venant d'en bas y rebondissent vers le bas.

Plus précisément :

$$\begin{aligned}
Z_{n-1}^{\uparrow\uparrow} &= \emptyset \\
Z_{n-1}^{\uparrow\downarrow} &= Z_{n-1}^{\uparrow} \\
Z_{n+1}^{\downarrow\uparrow} &= Z_{n+1}^{\downarrow} \\
Z_{n+1}^{\downarrow\downarrow} &= \emptyset.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

De façon similaire, lorsque  $\alpha_n = 0$ , le niveau  $n$  agit comme une passoire : toute trajectoire venant d'en haut passe à travers et continue vers le bas ; toute trajectoire venant d'en bas passe à travers et continue vers le haut.

**Définition 20.** Lorsque  $\alpha_n = \frac{1}{2}$  on dit que le niveau  $n$  est un **niveau miroir**.

Par le corollaire 2.4.3, entre deux niveaux miroirs différents,  $F_{\alpha}$  va définir une transformation préservant une mesure finie. (Voir la section 2.6). Cette transformation ressemblera énormément à ce qui est appelé classiquement un échange d'intervalles. Dans la section suivante, nous rappellerons ce concept et définirons la notion d'échange d'intervalles généralisé qui sera la notion pertinente dans notre contexte.

## 2.5 Les échanges d'intervalles

Imaginons un enfant qui serait en train de jouer avec des bâtons dans son jardin. Cet enfant a trouvé plein de petits bâtons bien droits de diverses tailles. Il pose ces bâtons par terre les uns à la suite des autres, marque le point du début et le point de la fin de cette configuration, et trace un segment de droite reliant ces deux points. Ensuite il réarrange les bâtons sur ce même segment, sans les renverser. On a donc deux configurations, une de départ et une d'arrivée. L'enfant choisit un point du segment. Si ce point n'est pas l'extrémité d'un bâton dans la configuration de départ, il reporte ce point sur l'unique bâton posé sur ce point. Il regarde ensuite à quel point dans la configuration d'arrivée cela correspond. Ce jeu, c'est une description informelle de l'échange d'intervalles tel qu'il est considéré classiquement. (Pour une définition précise, voir la définition 21.)

Mais, si à la place de bâtons de bois l'enfant avait eu accès à des bouts de cordes, aurait-il encore été tenté de placer ces bouts alignés les uns à la suite des autres? N'aurait-il pas eu l'initiative de mettre les bouts de cordes les uns à la suite des autres de façon circulaire? Ou de les arranger en plusieurs cercles? Dans ce cas le jeu correspondrait aux échanges d'intervalles généralisés. (Pour une définition précise, voir la définition 23.)

Ceci n'était qu'une discussion informelle, passons maintenant à la description formelle de ce type de système. Nous commencerons par rappeler la définition classique. Dans ce cas, il suffit de connaître la longueur des différents bâtons, la configuration de départ et la configuration d'arrivée. C'est donc la combinatoire qui gouverne la dynamique et ceci se reflète dans la définition. Les échanges d'intervalles classiques sont décrits combinatoirement par exemple dans [Yoc10].

**Définition 21.** Un **échange d'intervalles classique** est donné par un quadruplet  $(\mathcal{A}, \lambda, \pi, \tau)$  où :

- l'alphabet  $\mathcal{A}$  est un ensemble fini de taille  $d$  ;
- la suite de longueurs  $\lambda$  est une famille de nombres réels positifs indexée par l'alphabet  $\mathcal{A}$  ;
- la permutation  $\pi$  est une permutation de l'alphabet  $\mathcal{A}$  ;
- la configuration initiale  $\tau$  est un  $d$ -uplet de toutes les lettres de l'alphabet  $\mathcal{A}$ .

On appelle **combinatoire** de l'échange d'intervalles le couple  $(\pi, \tau)$ .

La dynamique d'un tel échange d'intervalles est définie comme suit :

- l'espace de phases est un intervalle réel  $\mathcal{I} = (x_{\min}, x_{\max})$  de longueur  $\sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a$  ;
- dans cet espace de phases on distingue l'ensemble  $\{u_a, v_a, u'_a, v'_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_{\tau_i} &= x_{\min} + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{\tau_j} \\
 v_a &= u_a + \lambda_a \\
 u'_{\pi(\tau_i)} &= x_{\min} + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{\pi(\tau_j)} \\
 v'_a &= u'_a + \lambda_a
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Remarquons que les ensembles  $\{u_a, v_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  et  $\{u'_a, v'_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  sont tous les deux de cardinalité  $d + 1$  car  $v_a = u_b$  si  $\tau^{-1}(a) + 1 = \tau^{-1}(b)$  et  $v'_{\pi(a)} = u'_{\pi(b)}$  si  $\tau^{-1}(a) + 1 = \tau^{-1}(b)$ .

- On définit la transformation  $T : \mathcal{I} \setminus \{u_a, v_a\}_{a \in \mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{I} \setminus \{u'_a, v'_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  de la façon suivante. Pour chaque  $x \in \mathcal{I}$ , s'il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $u_a < x < v_a$ , alors  $T(x) = x - u_a + u'_a$ .
- On appelle *singularités* de  $T$  l'ensemble des points de  $\mathcal{I}$  où la transformation  $T$  n'a pas été définie. (Ceci n'inclut donc pas les extrémités de l'intervalle  $I$ ).

$$\begin{aligned} \text{sing}(T) &= \{u_a \mid a \in \mathcal{A}, a \neq \tau_1\} \\ &= \{v_a \mid a \in \mathcal{A}, a \neq \tau_d\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

*Remarque 7.* Si on change  $x_{\min}$  dans la définition 21, la dynamique de  $T$  ne change pas car des  $T$  associés à des  $x_{\min}$  différents seront conjugués par une translation.

*Remarque 8.* Si on change le vecteur  $\lambda$  dans la définition 21 par un facteur d'échelle, la dynamique de  $T$  ne change pas car des  $T$  associés à de tels  $\lambda$  seront conjugués par une transformation affine.

*Remarque 9.* Si on étend la définition de  $T$  à tout l'intervalle  $\mathcal{I}$ , il sera a priori impossible de le faire de façon continue car les points de  $\text{sing}(T)$ , définis dans (2.10), sont a priori des discontinuités de première espèce (i.e. les limites à droite et à gauche existent et sont des nombres réels différents). Choisir de regarder les éléments de  $\text{sing}(T)$  comme des singularités ou bien des discontinuités relève d'un choix qui n'affecte pas les résultats présentés dans cette thèse.

**Exemple 1.** Pour éclairer un peu ces notions prenons par exemple un échange de quatre intervalles avec la présentation suivante :

$$\left( \mathcal{A} = \{A, B, C, D\}, \lambda, \pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}, \tau = (A, B, C, D) \right) \tag{2.11}$$

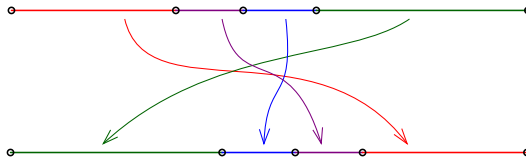


FIGURE 2.1 – Exemple d'échange d'intervalles classique

L'échange d'intervalles de combinatoire (2.11) est illustré sur la figure 2.1.

Après choix de la borne inférieure  $x_{\min}$  de l'intervalle  $\mathcal{I}$ , la borne supérieure de l'intervalle est donnée par  $x_{\max} = x_{\min} + \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a$ . Les points  $u_a, v_a, u'_a, v'_a$  sont énumérés dans l'équation (2.12) qui suit.

$$\begin{aligned}
u'_D &= u_A = x_{\min}, & v_D &= v'_A = x_{\max} \\
u_B = v_A &= u_A + \lambda_A, & u_C = v_B &= u_B + \lambda_B, & u_D = v_C &= u_C + \lambda_C \\
v'_B = u'_A &= v'_A - \lambda_A, & v'_C = u'_B &= v'_B - \lambda_B, & v'_D = u'_C &= v'_C - \lambda_C
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Les ensembles de singularités de  $T$  et de  $T^{-1}$  dans cet exemple sont :

$$\text{sing}(T) = \{u_B, u_C, u_D\}, \quad \text{sing}(T^{-1}) = \{u'_C, u'_B, u'_A\} \tag{2.13}$$

*Remarque 10.* Quand on étudie les échanges d'intervalles on se rend vite compte que les propriétés dynamiques comme la transitivité, la minimalité ou l'ergodicité ne dépendent pas vraiment du choix de l'intervalle  $\mathcal{I}$  sur lequel la dynamique se déroule, ni de sa taille (c.f. remarques 7 et 8). C'est pour ça que souvent on rajoute à la définition 21 d'un échange d'intervalles comme quadruplet  $(\mathcal{A}, \lambda, \pi, \tau)$  une condition de normalisation de la longueur totale  $\sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a = 1$ . Avec cette condition supplémentaire, l'ensemble des échanges d'intervalles à combinatoire  $(\pi, \tau)$  fixée est un simplexe.

Dans la définition classique 21 d'un échange d'intervalles, on a un nombre fini de sous-intervalles qui sont alignés les uns après les autres ; la dynamique est donnée par une transformation qui coïncide avec une translation sur chacun de ces sous-intervalles. Si on fixe l'intervalle de départ de la transformation, la définition classique 21 est équivalente à la définition 22 suivante.

**Définition 22** (Définition alternative d'un échange d'intervalles classique). Un **échange d'intervalles** (*classique*) est une transformation  $T : X \dashrightarrow X$  où :

- La variété  $X$  est une variété réelle connexe non-compacte de dimension 1 (sans bord).
- La variété  $X$  est dotée d'une métrique (riemannienne) telle que la longueur de  $X$  est finie.
- Le domaine de  $T$  est  $X$  privé d'un nombre fini de points, appelés les *singularités* de  $T$ .
- La transformation  $T$  est injective.
- Sur chacune des composantes connexes du domaine  $X \setminus \text{sing}(T)$  de  $T$ , la transformation  $T$  préserve l'orientation
- Sur chacune des composantes connexes du domaine  $X \setminus \text{sing}(T)$  de  $T$ , la restriction de  $T$  préserve la métrique de  $X$ .

Si on modifie un peu les hypothèses de connexité et de compacité dans le premier point de la définition 22, on obtient une généralisation de la notion d'échange d'intervalles qui nous sera très utile par la suite. Cette généralisation est explicitée dans la définition 23.

**Définition 23.** Un **échange d'intervalles** (*généralisé*) est une transformation  $T : X \dashrightarrow X$  où :

- la variété  $X$  est une variété orientée réelle de dimension 1 ayant un nombre fini de composantes connexes ;
- la variété  $X$  est munie d'une métrique (riemannienne) telle que la longueur de chaque composante connexe de  $X$  est finie ;
- le domaine de  $T$  est  $X$  privé d'un nombre fini de points, appelés les *singularités* de  $T$  ;
- la transformation  $T$  est injective ;
- sur chacune des composantes connexes du domaine  $X \setminus \text{sing}(T)$  de  $T$ , la transformation  $T$  préserve l'orientation ;
- la transformation  $T$  préserve la métrique de  $X$  partout où elle est définie.

*Remarque 11.* La métrique de  $X$  induit une distance sur chaque composante connexe de  $X$ . La distance entre deux points d'une même composante connexe de  $X$  est définie comme la plus courte longueur d'une courbe joignant les deux points. Ceci est la façon habituelle d'induire une distance sur une variété munie d'une métrique.

En outre la métrique de  $X$  induit une mesure sur les boréliens de  $X$ . Les composantes connexes de  $X$  sont isométriques à des cercles  $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$  ou des intervalles ouverts bornés. Cela permet d'introduire la mesure de Lebesgue par isométrie. On remarquera que cette mesure est sans atome et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur les cartes.

La dernière condition de la définition 23 se traduit alors comme préservation de la mesure par  $T$ . On est dans un cadre de systèmes dynamiques mesurables et préservant la mesure mais pas continus. En particulier il faut être bien attentif à l'utilisation des notions de dynamique topologique comme la minimalité et la transitivité. Nous discuterons plus largement la minimalité dans le chapitre 3.

## 2.6 Propriétés topologiques

Dans cette section nous verrons que l'absence de connexions est typique dans la famille  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$  et que l'image d'un ouvert par  $F_{\underline{\alpha}}$  dépend semi-continûment du paramètre  $\underline{\alpha}$ .

**Proposition 2.6.1.** *L'ensemble des  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  tels que  $F_{\underline{\alpha}}$  n'a pas de connexion est un ensemble  $G_{\delta}$ -dense de mesure totale. Plus précisément, si  $F_{\underline{\alpha}}$  a une connexion, il existe une suite finie d'entiers  $(n_i)_{0 \leq i \leq k}$  telle que  $|n_{i+1} - n_i| = 1$  et  $\sum_{i=0}^k \alpha_{n_i} \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $F_{\underline{\alpha}}$  a des connexions.

Alors, il existe  $z = (n, x) \in \text{sing}(F_{\underline{\alpha}}^{-1})$ ,  $k \geq 0$  et  $z' = (n', x') \in \text{sing}(F_{\underline{\alpha}})$  tels que

$$\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(z') = \{z, \dots, F_{\underline{\alpha}}^k(z) = z'\}$$

Par définition de  $F_{\underline{\alpha}}$ ,  $x$  est égal à 0 ou  $\frac{1}{2}$  et  $R_{\alpha_{n'}}(x')$  est égal à 0 ou  $\frac{1}{2}$ . Si  $n_i = n(F_{\underline{\alpha}}^i(z))$  est la suite des niveaux de l'orbite de  $z$ , alors

$$R_{\alpha_{n'}}(x') = R_{\alpha_{n_k}} \circ \dots \circ R_{\alpha_{n_1}} \circ R_{\alpha_{n_0}}(x) \quad (2.14)$$



D'où

$$\alpha_{n_k} + \cdots + \alpha_{n_1} + \alpha_{n_0} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2} \pmod{1}. \quad (2.15)$$

□

Soient  $n < m$  et supposons que  $n$  et  $m$  sont tous les deux des niveaux de symétrie. Alors l'ensemble  $D_n^m(\underline{\alpha})$  défini ci-dessus est  $F_{\underline{\alpha}}$ -invariant.

$$D_n^m(\underline{\alpha}) := \{n\} \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \bigcup_{l=n+1}^{m-1} \{l\} \times \mathbb{T} \cup \{m\} \times \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad (2.16)$$

La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  restreinte à  $D_n^m(\underline{\alpha})$  est alors un échange d'intervalles généralisé. On le désigne par  $F_{n,\underline{\alpha}}^m$ .

$$F_{n,\underline{\alpha}}^m := F_{\underline{\alpha}} \Big|_{D_n^m(\underline{\alpha})} \quad (2.17)$$

Réciproquement, pour  $\alpha = (\alpha_l)_{n < l < m} \in \mathbb{T}^{(n,m)}$ , notons  $j(\alpha)$  l'élément de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  dont les coordonnées d'indice  $\in (n, m)$  coïncident avec celles de  $\alpha$  et dont les autres coordonnées sont égales à  $1/2$ . Alors chaque  $\alpha \in \mathbb{T}^{(n,m)}$  définit (via  $F_{j(\alpha)}$ ) un échange d'intervalles généralisé  $F_{n,\alpha}^m := F_{n,j(\alpha)}^m$  sur  $(n, m) \times \mathbb{T}$ .

Quand  $n + m = 0$ , on adopte une notation spéciale

$$F_{N,\underline{\alpha}} := F_{-N,\underline{\alpha}}^N, \quad F_{N,\alpha} := F_{-N,\alpha}^N. \quad (2.18)$$

**Proposition 2.6.2.** *L'ensemble des  $\alpha \in \mathbb{T}^{(n,m)}$  tels que  $F_{n,\alpha}^m$  n'a pas de connexion est un ensemble  $G_\delta$ -dense de mesure totale. Plus précisément, si la transformation  $F_{n,\alpha}^m$  a une connexion, alors il existe une suite d'entiers  $(n_i)_{0 \leq i \leq k} \subset (n, m)$  telle que  $\sum_{i=0}^k \alpha_{n_i} \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$  et  $|n_{i+1} - n_i| = 1$ .*

Voyons maintenant la semi-continuité.

**Proposition 2.6.3.** *Pour un entier  $k \in \mathbb{Z}$  et un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ , l'image  $F_{\underline{\alpha}}^k(I)$  dépend de façon semi-continue de  $\underline{\alpha}$  dans la topologie de Hausdorff. Plus précisément pour tout compact  $L \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ , l'ensemble des  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  tels que  $L \subset F_{\underline{\alpha}}^k(I)$  est un ensemble ouvert.*

*Démonstration.* Soit  $I$  un intervalle ouvert. L'ensemble  $F_{\underline{\alpha}}^k(I)$  est un ensemble ouvert qui est une union finie d'intervalles ouverts disjoints. La coordonnée dans  $\mathbb{T}$  des points du bord de chacun de ses intervalles est le résultat d'une rotation de la somme d'un nombre fini de paramètres  $\alpha_n$  appliquée à 0 ou  $\frac{1}{2}$ . En particulier elle dépend continûment de  $\underline{\alpha}$ .

Prénotons  $L \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  compact, et soit  $\underline{\alpha}_0 \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  tel que  $L \subset F_{\underline{\alpha}_0}^k(I)$ .

Numérotons les intervalles ouverts dans la décomposition de  $F_{\underline{\alpha}_0}^k(I)$  :

$$F_{\underline{\alpha}_0}^k(I) = J_1(\underline{\alpha}_0) \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_l(\underline{\alpha}_0).$$

Pour chaque  $i_0$  entre 1 et  $l$ , on a que  $L_{i_0} := L \cap J_{i_0}(\underline{\alpha}_0)$  est compacte car  $L_{i_0} = L \setminus \bigcup_{i \neq i_0} J_i(\underline{\alpha}_0)$ . Dans un voisinage de  $\underline{\alpha}_0$ , la décomposition a encore le même nombre d'intervalles

$$F_{\underline{\alpha}}^k(I) = J_1(\underline{\alpha}) \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_l(\underline{\alpha}).$$

où chaque point du bord de  $J_i(\underline{\alpha})$  dépend continûment de  $\underline{\alpha}$ .

Pour  $\underline{\alpha}$  dans un voisinage de  $\underline{\alpha}_0$ , on aura  $L_i \subset J_i(\underline{\alpha})$  car les bords de  $J_i(\underline{\alpha})$  dependent continûment de  $\underline{\alpha}$ . Donc  $L \subset F_{\underline{\alpha}}^k(I)$  pour  $\underline{\alpha}$  dans un voisinage de  $\underline{\alpha}_0$ .  $\square$

## 2.7 Un modèle sans singularités

Soit  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ . Dans cette section, nous construisons :

- un espace métrisable localement compact non compact  $X_{\underline{\alpha}}$  ;
- un homéomorphisme  $f_{\underline{\alpha}} : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow X_{\underline{\alpha}}$  ;
- une application continue surjective  $h : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ ,

avec les propriétés suivantes :

- $h$  est une semi-conjugaison entre  $f_{\underline{\alpha}}$  et  $F_{\underline{\alpha}}$ , c'est à dire qu'on a

$$h \circ f_{\underline{\alpha}} = F_{\underline{\alpha}} \circ h;$$

- un point  $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  a un ou deux antécédents par  $h$  ; le second cas se produit si et seulement si  $z$  appartient à l'orbite d'une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$  ou de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ .

Notons que la construction de  $X_{\underline{\alpha}}$  s'inspire de la construction classique de l'espace de phases pour le contre-exemple de Denjoy.

On commence par définir des fonctions  $\rho_+$ ,  $\rho_-$  sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  de la façon suivante. Soit  $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . S'il existe  $m \geq 0$  tel que  $z$  soit l'image par  $F_{\underline{\alpha}}^m$  d'une singularité  $z_0$  de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ , on pose

$$\rho_+(z) = 2^{-(m+|n|)},$$

où  $n$  désigne le niveau de  $z_0$ . Si  $z$  n'appartient pas à l'orbite positive d'une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ , on pose  $\rho_+(z) = 0$ .

De même, s'il existe  $m \geq 0$  tel que  $z$  soit l'image par  $F_{\underline{\alpha}}^{-m}$  d'une singularité  $z_1$  de  $F_{\underline{\alpha}}$ , on pose

$$\rho_-(z) = 2^{-(m+|n|)},$$

où  $n$  désigne le niveau de  $z_1$ . Si  $z$  n'appartient pas à l'orbite négative d'une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$ , on pose  $\rho_-(z) = 0$ . On définit aussi

$$\rho = \rho_+ + \rho_-.$$

Observons que  $\rho$  est nulle en dehors d'un ensemble dénombrable, que  $\rho$  prend des valeurs positives ou nulles et qu'on a

$$\sum_{z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}} \rho(z) \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(m+|n|)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} = 6$$

(avec égalité lorsque  $F_{\underline{\alpha}}$  n'a pas de connexion). Pour  $n \in \mathbb{Z}$  posons

$$\rho_n = \sum_{x \in \mathbb{T}} \rho(n, x).$$

Une autre propriété évidente de  $\rho$  est la suivante : si  $\rho(z) = 0$ , alors  $z$  n'est ni une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$  ni une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ , et on a  $\rho(F_{\underline{\alpha}}(z)) = \rho(F_{\underline{\alpha}}^{-1}(z)) = 0$ .

Soit  $\mu$  la mesure de Radon sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  qui est la somme de la mesure de Lebesgue  $\Lambda$  et de la mesure atomique  $\sum_{z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}} \rho(z) \delta_z$ .

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

$$\mu(\{n\} \times \mathbb{T}) = 1 + \rho_n.$$

Définissons

$$\begin{aligned} Y_{\underline{\alpha}}(n) &= \mathbb{R}/(1 + \rho_n)\mathbb{Z}, \\ Y_{\underline{\alpha}} &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} Y_{\underline{\alpha}}(n). \end{aligned}$$

Identifions  $\mathbb{T}$  à  $[0, 1)$ ,  $Y_{\underline{\alpha}}(n)$  à  $[0, (1 + \rho_n))$ . On définit deux applications  $k_n^-, k_n^+$  de  $\mathbb{T}$  dans  $Y_{\underline{\alpha}}(n)$  par

$$\begin{aligned} k_n^-(x) &= \mu(\{n\} \times (0, x)) \\ k_n^+(x) &= k_n^-(x) + \rho(n, x) = \mu(\{n\} \times (0, x]). \end{aligned}$$

Finalement, on pose

$$\begin{aligned} X_{\underline{\alpha}}(n) &= k_n^-(\mathbb{T}) \cup k_n^+(\mathbb{T}), \\ X_{\underline{\alpha}} &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} X_{\underline{\alpha}}(n) \subset Y_{\underline{\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $X_{\underline{\alpha}}(n)$  est une partie compacte non-vide du cercle  $Y_{\underline{\alpha}}(n)$ . Leur réunion,  $X_{\underline{\alpha}}$ , est donc localement compacte mais pas compacte.

L'application  $h : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  est définie de la façon suivante. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $w \in X_{\underline{\alpha}}(n)$ , on écrit

$$w = k_n^\varepsilon(x),$$

avec  $\varepsilon \in \{-, +\}$  et  $x \in \mathbb{T}$ , et on pose

$$h(w) = (n, x).$$

Cette application est bien définie car  $w$  détermine  $x$  de façon unique (lorsque  $\rho(n, x) = 0$ , le choix de  $\varepsilon$  est arbitraire).

L'application  $h$  est clairement surjective. Elle est 1-lipschitzienne car on a, pour tous  $0 \leq x < y \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

$$\mu(\{n\} \times (x, y)) \geq y - x.$$

Soit  $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . Si  $\rho(n, x) = 0$ , on a

$$k_n^+(x) = k_n^-(x),$$

et ce point de  $X_{\underline{\alpha}}(n)$  est l'unique antécédent de  $(n, x)$  par  $h$ . Si au contraire  $\rho(n, x) > 0$ , alors les points  $k_n^-(x)$ ,  $k_n^+(x)$  sont distincts et ce sont deux antécédents de  $(n, x)$  par  $h$ .

Soit  $w \in X_{\underline{\alpha}}$ .

- Si  $h(w)$  n'est pas une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$ , on écrit  $w = k_n^\varepsilon(h(w))$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon \in \{-, +\}$ , et on pose

$$f_{\underline{\alpha}}(w) = k_n^\varepsilon(F_{\underline{\alpha}}(h(w))).$$

- Si  $h(w)$  est une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}$ , on écrit encore  $w = k_n^\varepsilon(h(w))$ . Le point

$$z := \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{\underline{\alpha}}(h(w) + \varepsilon x)$$

est une singularité de  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ . On définit

$$f_{\underline{\alpha}}(w) = k_n^\varepsilon(z).$$

L'application  $f_{\underline{\alpha}} : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow X_{\underline{\alpha}}$  ainsi définie est continue. En échangeant  $F_{\underline{\alpha}}$  et  $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$  dans la discussion précédente, on définit une application  $g_{\underline{\alpha}}$  qui est clairement la réciproque de  $f_{\underline{\alpha}}$ . Donc  $f_{\underline{\alpha}}$  est un homéomorphisme. Par construction,  $h$  est une semi-conjugaison entre  $f_{\underline{\alpha}}$  et  $F_{\underline{\alpha}}$ .

## 2.8 Suspensions (I)

Soit  $N$  un entier strictement positif. Pour un élément  $\alpha \in \mathbb{T}^N$ , on notera  $\underline{\alpha} = j(\alpha)$  l'élément de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  dont les coordonnées d'indice  $\in [1, N]$  sont celles de  $\alpha$  et les autres coordonnées sont égales à  $1/2$ .

La proposition suivante résulte d'un calcul élémentaire.

**Proposition 2.8.1.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^N$ .*

1. *L'ensemble*

$$\begin{aligned} D_0^{N+1}(\underline{\alpha}) &:= ([1, N] \times \mathbb{T}) \cup F_{\underline{\alpha}}([1, N] \times \mathbb{T}) \\ &= ([1, N] \times \mathbb{T}) \cup \left( \{N+1\} \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \right) \cup \left( \{0\} \times \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \right) \end{aligned}$$

*est invariant par  $F_{\underline{\alpha}}$ .*

2. *L'application de premier retour  $P_{\underline{\alpha}}$  de  $F_{\underline{\alpha}}$  sur  $[1, N] \times \mathbb{T}$  vérifie*

$$P_{\underline{\alpha}}(n, x) = \begin{cases} (n, R_{\alpha_n + \frac{1}{2}}(x)) & \text{si } n = N \text{ et } R_{\alpha_n}(x) \in (0, \frac{1}{2}) \\ (n, R_{\alpha_n + \frac{1}{2}}(x)) & \text{si } n = 1 \text{ et } R_{\alpha_n}(x) \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ F_{\underline{\alpha}}(n, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

*Le domaine de  $P_{\underline{\alpha}}$  est donc  $\{(n, x) \in [1, N] \times \mathbb{T} \mid x + \alpha_n \notin \{0, \frac{1}{2}\}\}$ . Le domaine de  $P_{\underline{\alpha}}^{-1}$  est  $\{(n, x) \in [1, N] \times \mathbb{T} \mid x \neq 0, \frac{1}{2}\}$ .*

On notera  $\mathcal{M}(\alpha)$  une surface de translation obtenue par suspension de  $P_\alpha$  : dans le produit  $[1, N] \times \mathbb{T} \times [0, 1]$  on identifie les points  $(z, 1)$  et  $(P_\alpha(z), 0)$  pour tout  $z$  dans le domaine de  $P_\alpha$  ; l'atlas définissant la structure de surface de translation en dehors des singularités est celui hérité de la structure standard sur  $\mathbb{T} \times [0, 1]$ .

On va déterminer le genre de  $\mathcal{M}(\alpha)$ , le nombre et la nature de ses singularités.

**Proposition 2.8.2.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^N$ . Notons  $\omega$  la 1-forme holomorphe associée à la surface de translation  $\mathcal{M}(\alpha)$ .*

1. *La 1-forme holomorphe  $\omega$  possède deux zéros d'ordre  $N - 1$ .*
2. *Le genre de  $\mathcal{M}(\alpha)$  est égal à  $N$ .*

*Démonstration.* L'opposé de la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{M}(\alpha)$  est égal à la somme des ordres des zéros de  $\omega$ . Il suffit donc de montrer la première partie de la proposition.

Les zéros de  $\omega$  sont associés dans  $[1, N] \times \mathbb{T} \times [0, 1]$  aux points de la forme  $(z, 1)$ ,  $z \in \text{sing}(P_\alpha)$ , et  $(z, 0)$ ,  $z \in \text{sing}(P_\alpha^{-1})$ . Pour déterminer le nombre et l'ordre de ces zéros, on tourne autour (dans  $\mathcal{M}(\alpha)$ ) de chacun des zéros dans le sens trigonométrique.

D'après la proposition 2.8.1 ci-dessus,

- pour  $1 \leq n < N$ , le secteur (d'angle  $\pi$ ) associé à  $(n, -\alpha_n, 1)$  est suivi du secteur associé à  $(n + 1, 0, 0)$  ; le secteur associé à  $(n, 0, 0)$  est suivi du secteur associé à  $(n + 1, -\alpha_{n+1}, 1)$  ;
- pour  $1 < n \leq N$ , le secteur associé à  $(n, \frac{1}{2} - \alpha_n, 1)$  est suivi du secteur associé à  $(n - 1, \frac{1}{2}, 0)$  ; le secteur associé à  $(n, \frac{1}{2}, 0)$  est suivi du secteur associé à  $(n - 1, \frac{1}{2} - \alpha_{n-1}, 1)$  ;
- le secteur associé à  $(N, -\alpha_N, 1)$  est suivi du secteur associé à  $(N, \frac{1}{2}, 0)$  ; le secteur associé à  $(N, 0, 0)$  est suivi du secteur associé à  $(N, \frac{1}{2} - \alpha_N, 1)$  ;
- le secteur associé à  $(1, \frac{1}{2} - \alpha_1, 1)$  est suivi du secteur associé à  $(1, 0, 0)$  ; le secteur associé à  $(1, \frac{1}{2}, 0)$  est suivi du secteur associé à  $(1, -\alpha_1, 1)$ .

On rencontre alternativement des secteurs d'angle  $\pi$  associés à  $(z, 1)$  tels que  $z \in \text{sing}(P_\alpha)$  et des secteurs d'angle  $\pi$  associés à  $(z, 0)$ ,  $z \in \text{sing}(P_\alpha^{-1})$ . Il suffit donc de déterminer dans quel ordre on rencontre cette deuxième classe de secteurs. Notons  $\sigma$  la permutation de  $\text{sing}(P_\alpha^{-1})$  telle que le secteur associé à  $(z, 0)$  soit suivi, après une rotation de  $2\pi$ , par celui associé à  $(\sigma(z), 0)$ . On a

- $\sigma(n, 0) = (n + 2, 0)$ , pour  $1 \leq n < N - 1$  ;
- $\sigma(N - 1, 0) = (N, \frac{1}{2})$  ;
- $\sigma(N, 0) = (N - 1, \frac{1}{2})$  ;
- $\sigma(n, \frac{1}{2}) = (n - 2, \frac{1}{2})$ , pour  $2 < n \leq N$  ;
- $\sigma(2, \frac{1}{2}) = (1, 0)$  ;
- $\sigma(1, \frac{1}{2}) = (2, 0)$ .

On constate que la permutation  $\sigma$  possède deux cycles d'ordre  $N$ . Cela signifie que  $\mathcal{M}(\alpha)$  possède exactement deux singularités coniques et que l'angle total en chacune de ces singularités est  $2N\pi$ . La démonstration de la proposition est complète.  $\square$

Soit  $\mathbf{1}$  le vecteur  $(1, \dots, 1)$  dans  $\mathbb{R}^N$ .

**Proposition 2.8.3.** *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la surface de translation  $\mathcal{M}(\alpha + t\mathbf{1})$  se déduit de  $\mathcal{M}(\alpha)$  par l'action de l'élément  $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* En effet, pour tout  $x \in \mathbb{T}$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $x' = R_t(x)$ , alors

$$\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_a(x') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{a+t}(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour tout  $a \in \mathbb{T}$ .

Donc la surface qui s'obtient de  $\mathcal{M}(\alpha)$  par l'action de  $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est décrite comme un quotient de la façon suivante : dans le produit  $[1, N] \times \mathbb{T} \times [0, 1]$  on identifie les points  $(z, 1)$  et  $(P_{\alpha+t\mathbf{1}}(z), 0)$  pour tout  $z$  dans le domaine de  $P_{\alpha+t\mathbf{1}}$ . C'est donc la surface de translation  $\mathcal{M}(\alpha + t\mathbf{1})$ .  $\square$

## 2.9 Suspensions (II)

Soit  $N$  un entier strictement positif. On note  $\mathbb{Z}_N$  l'anneau des entiers modulo  $N$ . Pour un élément  $\alpha \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}_N}$ , on notera  $F_\alpha$  l'échange d'intervalles généralisé défini sur  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{T}$  par

$$F_\alpha(n, x) = \begin{cases} (n+1, x + \alpha_n) & \text{pour } x + \alpha_n \in (0, \frac{1}{2}), \\ (n-1, x + \alpha_n) & \text{pour } x + \alpha_n \in (-\frac{1}{2}, 0). \end{cases} \quad (2.19)$$

Les singularités de  $F_\alpha$  sont donc les  $2N$  points  $(n, -\alpha_n)$ ,  $(n, \frac{1}{2} - \alpha_n)$ , pour  $n \in \mathbb{Z}_N$ . Celles de  $F_\alpha^{-1}$  sont les  $2N$  points  $(n, 0)$ ,  $(n, \frac{1}{2})$ , pour  $n \in \mathbb{Z}_N$ .

On notera  $\mathcal{N}(\alpha)$  la surface de translation obtenue par suspension de  $F_\alpha$  : dans le produit  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{T} \times [0, 1]$  on identifie les points  $(z, 1)$  et  $(F_\alpha(z), 0)$  pour tout  $z$  dans le domaine de  $F_\alpha$  ; l'atlas définissant la structure de surface de translation en dehors des singularités est celui hérité de la structure standard sur  $\mathbb{T} \times [0, 1]$ .

On va déterminer le genre de  $\mathcal{N}(\alpha)$ , le nombre et la nature de ses singularités.

**Proposition 2.9.1.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}_N}$ . Notons  $\omega$  la 1-forme holomorphe associée à la surface de translation  $\mathcal{N}(\alpha)$ .*

1. *La 1-forme holomorphe  $\omega$  possède deux zéros d'ordre  $N-1$  lorsque  $N$  est impair, quatre zéros d'ordre  $N/2-1$  lorsque  $N$  est pair.*

2. Le genre de  $\mathcal{N}(\alpha)$  est égal à  $N$  lorsque  $N$  est impair, à  $N - 1$  lorsque  $N$  est pair.

*Démonstration.* L'opposé de la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{M}(\alpha)$  est égal à la somme des ordres des zéros de  $\omega$ . Il suffit donc de montrer la première partie de la proposition.

Les zéros de  $\omega$ , qui sont les singularités de  $\mathcal{N}(\alpha)$ , sont associés dans  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{T} \times [0, 1]$  aux points de la forme  $(z, 1)$ ,  $z \in \text{sing}(F_\alpha)$ , et  $(z, 0)$ ,  $z \in \text{sing}(F_\alpha^{-1})$ . Pour déterminer le nombre et l'ordre de ces zéros, on tourne (dans  $\mathcal{N}(\alpha)$ ) autour de chacun des zéros dans le sens trigonométrique.

D'après la définition de  $F_\alpha$  ci-dessus,

- le secteur (d'angle  $\pi$ ) associé à  $(n, -\alpha_n, 1)$  est suivi du secteur associé à  $(n + 1, 0, 0)$ ; le secteur associé à  $(n, 0, 0)$  est suivi du secteur associé à  $(n + 1, -\alpha_{n+1}, 1)$ ;
- le secteur associé à  $(n, \frac{1}{2} - \alpha_n, 1)$  est suivi du secteur associé à  $(n - 1, \frac{1}{2}, 0)$ ; le secteur associé à  $(n, \frac{1}{2}, 0)$  est suivi du secteur associé à  $(n - 1, \frac{1}{2} - \alpha_{n-1}, 1)$ .

On rencontre alternativement des secteurs d'angle  $\pi$  associés à  $(z, 1)$ , avec  $z \in \text{sing}(F_\alpha)$  et  $(z, 0)$  où  $z \in \text{sing}(F_\alpha^{-1})$ . Il suffit donc de déterminer dans quel ordre on rencontre cette deuxième classe de secteurs. Notons  $\sigma$  la permutation de  $\text{sing}(F_\alpha^{-1})$  telle que le secteur associé à  $(z, 0)$  soit suivi, après une rotation de  $2\pi$ , par celui associé à  $(\sigma(z), 0)$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}_N$ , on a  $\sigma(n, 0) = (n + 2, 0)$  et  $\sigma(n, \frac{1}{2}) = (n - 2, \frac{1}{2})$ .

On constate que la permutation  $\sigma$  possède

- deux cycles d'ordre  $N$  lorsque  $N$  est impair;
- quatre cycles d'ordre  $N/2$  lorsque  $N$  est pair.

Donc, lorsque  $N$  est impair,  $\mathcal{N}(\alpha)$  possède exactement deux singularités coniques d'angle total  $2N\pi$ . Lorsque  $N$  est pair,  $\mathcal{N}(\alpha)$  possède exactement quatre singularités coniques d'angle total  $N\pi$ .

La démonstration de la proposition est complète.  $\square$

En particulier, on peut déduire du théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie [KMS85] que  $F_\alpha$  est ergodique pour presque tout  $\alpha$ . (La déduction est similaire à ce qui sera fait sur l'ergodicité dans le chapitre 4, c'est pourquoi on ne la détaille pas ici)

Si la suite de rotations  $\underline{\alpha}$  est une suite périodique de période  $N$ , considérons  $\alpha$  l'image de  $\underline{\alpha}$  dans  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}_N}$ . Soit  $F_\alpha$  comme dans (2.19), alors  $F_{\underline{\alpha}}$  est un cocycle entier sur  $F_\alpha : \mathbb{Z}_N \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}_N \times \mathbb{T}$ .

Alors par un théorème de Klaus Schmidt [Sch77], on peut déduire que  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservative si  $F_\alpha$  est ergodique.

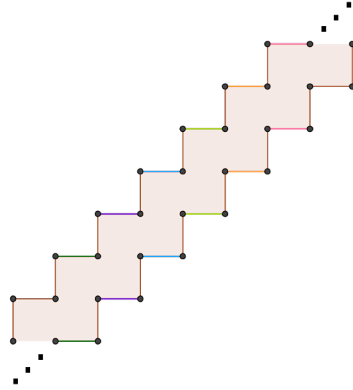
## 2.10 Relation entre notre famille et des flots directionnels

Exposons maintenant comment  $F_\alpha$  se traduit en un flot directionnel sur une surface de translation de genre infini.

**Définition 24.** Une surface  $S$  (compacte ou non, sans bord) est dite **de translation** s'il existe un sous-ensemble discret  $\Sigma \subset S$  tel que  $S \setminus \Sigma$  possède un atlas  $\mathcal{T}$  où les changements de cartes sont des translations.

*Remarque 12.* Si  $S$  est compacte, l'ensemble  $\Sigma$  dans la définition 24 est forcément fini.

Considérons la surface de translation de genre infini, qu'on appellera surface en escalier, obtenue par identification des côtés opposés dans le polygone infini suivant :



Dans ce dessin on a mis toutes les marches de l'escalier de même hauteur. Mais que se passe-t-il lorsque les hauteurs des marches varient? (Voir figure 2.2) Plus précisément, pour chaque  $H > 0$ , on considère le rectangle  $R(H) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, H]$ .

Étant donnée une suite bi-infinie  $\underline{H} = \{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , on considère la suite  $\{R_n\}$  où  $R_n = R(H_n)$ . Ensuite on recolle les  $R_n$  pour obtenir l'escalier  $S(\underline{H})$  : on quotiente la réunion disjointe des  $R_n$  par la relation d'équivalence définie comme suit : pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ , pour chaque  $(x, y) \in R_n$  et chaque  $(u, v) \in R_{n+1}$  on a que

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + \frac{1}{2}, y = H_n, \text{ et } v = 0 \\ \text{ou} \\ x = u, y = 0, \text{ et } v = H_{n+1} \\ \text{ou} \\ |x| = \frac{1}{2}, u = -x \text{ et } v = y \\ \text{ou} \\ u = x \text{ et } v = y \end{cases} . \quad (2.20)$$



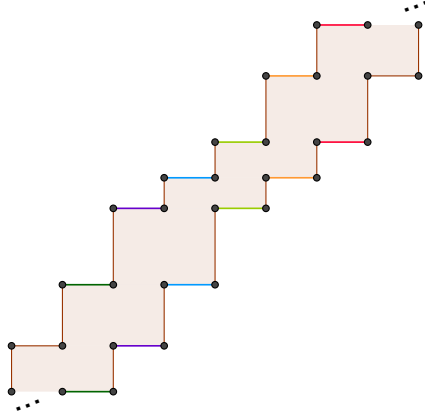


FIGURE 2.2 – Exemple de surface en escalier avec marches de hauteur variable.

Dorénavant, on identifie chaque rectangle  $R_n$  avec son image dans le quotient  $S(\underline{H})$ . Dans chaque rectangle  $R_n$ , on fixe  $C_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{H_n}{2}\right\}$ . On voit  $C_n$  dans  $S(\underline{H})$ , comme  $R_n$ , donc  $C_n$  est en fait un cercle  $\mathbb{T} \times \left\{\frac{H_n}{2}\right\}$ .

L'ensemble  $C = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_n$  étant une union disjointe d'une collection dénombrable de cercles, il est homéomorphe à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . Pour chaque angle  $\theta$ , considérons l'homéomorphisme  $f_\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{T} \rightarrow C$  défini comme suit :

$$f_\theta(n, x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{H_n}{2} \cot(\theta)\right) \times \left\{\frac{H_n}{2}\right\} \text{ dans } R_n. \quad (2.21)$$

**Exemple 2.** Dans la figure 2.3 on a distingué par des étiquettes 0 et  $\frac{1}{2}$  les points  $f_\theta(n, 0)$  et  $f_\theta\left(n, \frac{1}{2}\right)$  sur l'union de cercles  $C$  sur la surface de la figure 2.2.

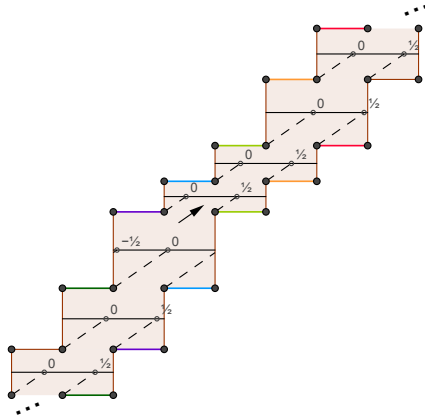


FIGURE 2.3 – L'ensemble  $C$  dans une surface en escalier.

**Proposition 2.10.1.** *L'homéomorphisme  $f_\theta$  conjugue l'application de premier retour sur  $C$  du flot directionnel dans la direction  $\theta$  avec la transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  où*

$$\underline{\alpha} = \left\{ -\frac{1}{2} + H_n \cot(\theta) \right\}.$$

On observe que pour toute direction  $\theta$  fixée (ni verticale, ni horizontale), la formule

$$\alpha_n = -\frac{1}{2} + H_n \cot(\theta)$$

définit un homéomorphisme entre  $(\mathbb{R}/(\tan \theta)\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$  et l'espace de paramètres de la famille  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$ ,  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ .

Par contre, pour une suite fixée de hauteurs  $\{H_n\}$ , la correspondance  $\theta \mapsto \{\alpha_n = -\frac{1}{2} + H_n \cot(\theta)\}$  n'est pas surjective. Qui plus est, le complément de son image contient un  $G_\delta$ -dense dans l'espace des paramètres de  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$ .

*Remarque 13.* Dans le cas où la suite  $\underline{\alpha}$  est une suite constante, alors la correspondance entre  $F_{\underline{\alpha}}$  et son surface en escalier a été explicitée par Pat Hooper, Pascal Hubert et Barak Weiss dans [WHH13].



## Chapitre 3

# Minimalité générique

### Sommaire

---

3.1 Généralités sur la minimalité . . . . .	43
3.2 Bouts topologiques . . . . .	44
3.3 Bouts de variétés unidimensionnelles . . . . .	47
3.4 Le théorème de Keane pour les échanges d'intervalles généralisés . . . . .	51
3.5 Preuve du théorème 3.4.1 . . . . .	53
3.6 Minimalité générique . . . . .	54

---

### 3.1 Généralités sur la minimalité

On rappelle la définition usuelle de la minimalité, dans le cas où  $X$  est un espace topologique et  $F : X \rightarrow X$  est un homéomorphisme. On dit que  $F$  est *minimal* si les seuls sous-ensembles fermés et invariants sont  $X$  et l'ensemble vide. Ceci est équivalent à dire que toute orbite de  $F$  est dense.

Nous allons donner une définition de la minimalité dans un cadre un peu élargi pour couvrir nos besoins.

Pour le reste de cette section, fixons un espace métrisable  $X$ , un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  qui est réunion finie d'ensembles ouverts connexes, une transformation injective  $T : Y \rightarrow X$ . Nous noterons  $T : X \dashrightarrow X$  car nous considérerons la dynamique de  $T$  sur  $X$  tout entier même si  $T$  n'est pas définie partout. Nous noterons  $\text{sing}(T)$  l'ensemble des points de  $X$  où  $T$  n'est pas définie, c'est à dire  $\text{sing}(T) = X \setminus Y$ . De façon similaire  $\text{sing}(T^{-1}) = X \setminus T(Y)$ .

En particulier, tout ce qui suit dans la section vaut pour un échange d'intervalles généralisé  $T : X \dashrightarrow X$  comme dans la définition 23 du chapitre 2.

**Définition 25.** Nous dirons que le système  $T : X \dashrightarrow X$  est **minimal** si toutes ses orbites sont denses.

**Proposition 3.1.1.** *Si le système  $T : X \dashrightarrow X$  est minimal, alors*

- *soit  $T$  n'a pas de connexion.*
- *soit  $X$  est un ensemble discret fini.*

*Démonstration.* Supposons que le système est minimal et que  $T$  a une connexion. C'est-à-dire qu'il existe  $x \in X$  tel que  $\mathcal{O}(x)$  est fini. Par minimalité, l'orbite  $\mathcal{O}(x)$  est dense dans l'espace métrisable  $X$ . Comme  $\mathcal{O}(x)$  est fini, ceci implique  $X = \mathcal{O}(x)$ .  $\square$

*Remarque 14.* En particulier, si un échange d'intervalles est minimal, alors il n'a pas de connexion. Le théorème de Keane 3.1.2 donne la réciproque de cette affirmation.

**Théorème 3.1.2.** *[Kea75] Soit  $T : X \dashrightarrow X$  un échange d'intervalles classique. Si  $T$  n'a pas de connexion alors cet échange d'intervalles est minimal.*

La preuve du théorème de Keane 3.1.2 sera donnée dans la section 3.5, ainsi qu'un énoncé pour des échanges d'intervalles généralisés. Avant ça une partie de la preuve peut être décrite dans le contexte un peu plus général, décrivant le rapport entre les orbites périodiques et les « cycles de bouts ». Ceci se déroule dans la section 3.3, mais avant, nous introduisons la notion de bout.

## 3.2 Bouts topologiques

Pour la preuve du théorème de Keane pour les échanges d'intervalles généralisés, nous utiliserons la notion de bout topologique. La définition 26 est une définition générale de ce que sont les bouts topologiques, mais elle s'exprime beaucoup plus simplement dans le cas de variétés unidimensionnelles (cf. proposition 3.3.2)

**Définition 26 (Bouts).** Soit  $L$  un espace topologique, alors l'ensemble des bouts de  $L$  est

$$\mathcal{B}(L) = \left\{ (u_K) \in \prod_{K \text{ compact}} \pi_0(L \setminus K) \mid K \subset K' \Rightarrow u_K \supset u_{K'} \right\}. \quad (3.1)$$

On appelle chaque élément de  $\mathcal{B}(L)$  un **bout** de  $L$ .

*Remarque 15.* Un espace topologique compact n'a pas de bout.

**Proposition 3.2.1.** *L'ensemble des bouts d'un espace topologique séparé est égal à la réunion disjointe des ensembles de bouts de ses composantes connexes.*

*Autrement dit, si  $L$  est un espace topologique*

- *pour chaque composante connexe  $M$  de  $L$ , il existe une application injective  $\mathcal{B}(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(L)$  ;*
- *pour deux composantes connexes différentes  $M$  et  $M'$ , les images de  $\mathcal{B}(M)$  et  $\mathcal{B}(M')$  sont disjointes dans  $\mathcal{B}(L)$  ;*

- tout bout de  $L$  est le bout d'une des composantes connexes de  $L$ .

*Démonstration.* Soit  $L$  un espace topologique.

Montrons d'abord que tout bout d'une composante connexe de  $L$  est aussi un bout de  $L$ . Soit  $M$  une composante connexe de  $L$  et soit  $(u_K)_{K \subset M}$  un bout de  $M$ . Nous allons définir un bout  $(v_K)$  de  $L$  à partir du bout  $u_K$ . Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $L$ . Si  $K \cap M$  est vide, alors  $M$  est une composante connexe de  $L \setminus K$ , on prend  $v_K = M$ . Si  $K \cap M$  n'est pas vide, alors  $K \cap M$  est fermé (car intersection de deux fermés), dans un compact ( $K$ ), donc  $K \cap M$  est compact, on prend  $v_K = u_{K \cap M}$ . On a donc défini une application de l'ensemble de bouts de  $M$  dans l'ensemble de bouts de  $L$ . Cette application est injective car si  $(u_K), (u'_K)$  sont deux bouts de  $M$  et  $(v_K)$  est un bout de  $L$  qui provient aussi bien de  $(u_K)$  que de  $(u'_K)$  alors pour tout  $K$  inclus dans  $M$  on a que  $u_K = u_{K \cap M} = v_K = u'_{K \cap M} = u'_K$ .

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux composantes connexes de  $L$  distinctes, alors les images de leurs ensembles de bouts sont disjointes dans  $\mathcal{B}(L)$ . Soient  $(u_K)_K$  et  $(v_K)_K$  deux bouts de  $L$  provenant respectivement de  $M_1$  et  $M_2$ . Soient  $K_0 \subset M_1$  un ensemble compact. Alors  $u_{K_0} \subset M_1$  et  $v_{K_0} = M_2$  donc les bouts  $(u_K)_K$  et  $(v_K)_K$  sont distincts.

Voyons maintenant que tout bout de  $L$  est le bout d'une de ses composantes connexes. Soit  $(u_K)_K$  un bout de  $L$ . On veut montrer qu'il existe une composante connexe  $M$  de  $L$  telle que  $u_K \subset M$  pour tout compact  $K$  de  $L$ . Par connexité de  $u_K$ , on sait que pour chaque  $K$ , il existe une composante connexe  $M$  de  $L$  telle que  $u_K \subset M$ . Soient  $K_1, K_2$  deux compacts de  $L$ , et soient  $M_1, M_2$  les deux composantes connexes de  $L$  telles que  $u_{K_1} \subset M_1$  et  $u_{K_2} \subset M_2$ . Considérons le compact  $K = K_1 \cup K_2$ . Par définition d'un bout topologique,  $u_K \subset u_{K_1}$  et  $u_K \subset u_{K_2}$ . Donc la réunion de  $u_{K_1}$  et  $u_{K_2}$  est connexe, par conséquent elle est incluse dans une seule composante connexe  $M$  de  $L$ . Il s'ensuit que  $M_1 = M_2 = M$ . Donc le bout de  $L$ ,  $(u_K)_K$ , est en fait un bout de  $M$ .  $\square$

*Remarque 16.* Tout homéomorphisme entre des espaces topologiques séparés induit une bijection entre leurs bouts.

**Définition 27.** Soit  $L$  un espace topologique séparé. Une **exhaustion par compacts** de  $L$  est une suite croissante  $(K_i)_{i=0}^{\infty}$  de sous-ensembles compacts  $K_i$  de  $L$ , telle que  $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{int}(K_i)$ .

**Proposition 3.2.2.** Soit  $L$  un espace topologique séparé. Si  $(K_i)_{i \geq 0}$  est une exhaustion par compacts de  $L$  alors le diagramme commutatif (3.2) induit une bijec-

$$\begin{aligned}
\text{tion } \pi \text{ entre l'ensemble } \mathcal{B}(L) \text{ et l'ensemble } & \left\{ (u_i) \in \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i) \mid \forall i : u_i \supset u_{i+1} \right\}. \\
\mathcal{B}(L) & \hookrightarrow \prod_K \pi_0(L \setminus K) \\
\pi \downarrow & \quad \downarrow \text{projection} \\
& \quad \quad \quad \downarrow \text{canonique} \tag{3.2} \\
\left\{ (u_i) \in \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i) \mid \forall i : u_i \supset u_{i+1} \right\} & \hookrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i)
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Voyons d'abord que  $\pi$  est surjective. Soit  $(u_i) \in \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i)$  une suite décroissante, c'est à dire que  $u_i \supset u_{i+1}$ . Soit  $K$  un compact quelconque ; comme les intérieurs des compacts  $K_i$  recouvrent  $L$ , il existe  $i_0$  tel que  $K \subset \text{int}(K_{i_0})$ . On prend alors pour  $u_K$  l'unique composante connexe de  $L \setminus K$  qui contienne  $u_{i_0}$ . Cette définition est cohérente car la suite des  $u_i$  est décroissante.

L'image par  $\pi$  de  $(u_K)_K$  est égale à la suite  $(u_i)_{i \geq 0}$ . La surjectivité s'en déduit.

Voyons maintenant l'injectivité. Soit  $(u_i) \in \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i)$  une suite décroissante. Soient  $(v_K), (w_K) \in \mathcal{B}(L)$  qui se projettent sur  $(u_i)_{i \geq 0}$ . Nous allons montrer que  $v_K = w_K$  pour tout  $K$ . Soit  $K \subset L$  compact. Soit  $i_0$  tel que  $K \subset K_{i_0}$ . Par la définition d'un bout, on sait que  $v_K$  et  $w_K$  sont des composantes connexes de  $L \setminus K$  et qu'elles contiennent  $u_{i_0}$ . Or, deux composantes connexes dont l'intersection est non-vide, sont forcément égales. Donc  $v_K = w_K$ .  $\square$

*Notation 1.* Lorsque  $L$  a une exhaustion par compacts  $(K_i)_{i \geq 0}$ , on identifie son ensemble de bouts  $\mathcal{B}(L)$  à l'ensemble  $\left\{ (u_i) \in \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i) \mid \forall i : u_i \supset u_{i+1} \right\}$ . La proposition 3.2.2 nous donne alors une bijection canonique entre les ensembles de bouts associés à des exhaustions différentes.

**Proposition 3.2.3.** *La droite réelle a deux bouts.*

*Démonstration.* Pour chaque  $i$  entier positif, soit  $K_i = [-i, i]$ . Alors  $(K_i)_{i \geq 0}$  est une exhaustion par compacts de la droite réelle. On peut donc calculer l'ensemble des bouts en suivant la notation 1.

Pour chaque  $i$ , le complément de  $K_i$  a deux composantes connexes. En effet  $\mathbb{R} \setminus K_i = (-\infty, -i) \cup (i, \infty)$ . Soit  $(u_i)_i \in \prod_{i=0}^{\infty} \pi_0(L \setminus K_i)$  un bout de  $\mathbb{R}$ . Pour chaque  $i$ , ou bien  $u_i = (-\infty, -i)$ , ou bien  $u_i = (i, \infty)$ . Si  $u_0 = (0, \infty)$ , alors de la condition de décroissance de la suite  $(u_i)_i$ , on déduit que  $u_i = (i, \infty)$  pour tout  $i$ . De façon similaire, si  $u_0 = (-\infty, 0)$  alors  $u_i = (-\infty, -i)$  pour tout  $i$ . Donc  $\mathbb{R}$  a exactement deux bouts, qu'on notera  $-\infty$  et  $\infty$ .

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{((- \infty, -i))_{i \geq 0}}_{-\infty}, \underbrace{((i, \infty))_{i \geq 0}}_{\infty} \right\} \tag{3.3}$$

□

**Définition 28** (Topologie de la droite étendue). Soit  $\overline{\mathbb{R}}$  la droite réelle unie avec ses deux bouts  $\{-\infty, \infty\}$ . On étend à  $\overline{\mathbb{R}}$  la relation d'ordre parmi les réels en imposant pour tout nombre réel  $r$  que  $-\infty < r$  et  $r < \infty$ . On adopte par conséquent les notations

$$\begin{aligned} [-\infty, r) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty \leq x < r\} \\ (r, \infty] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid r < x \leq \infty\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On considère sur  $\overline{\mathbb{R}}$  la topologie engendrée par les intervalles réels ouverts et les ensembles de la forme décrite dans (3.4). On remarque que cette topologie rend l'inclusion  $\mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continue.

*Remarque 17.*  $\overline{\mathbb{R}}$  est compact.

### 3.3 Bouts de variétés unidimensionnelles

Toutes les variétés considérées sont lisses, paracompactes, séparées, à base dénombrable.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons souvent dans le cas de variétés (lisses) de dimension un, ayant un nombre fini de composantes connexes. La proposition 3.3.1 ci-dessous implique que dans ce cas chaque composante connexe de la variété est difféomorphe ou bien à une droite ou bien à un cercle.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $C$  une variété connexe de dimension un. Si  $C$  est compacte alors elle est difféomorphe à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Si  $C$  n'est pas compacte alors elle est difféomorphe à la droite réelle.*

On renvoie à [Mil65] pour une preuve.

**Définition 29.** Soit  $C$  une variété connexe de dimension un. Si  $C$  est compacte, on dit que c'est un **cercle**, sinon, on dit que c'est un **intervalle** (ouvert).

*Remarque 18.* Si  $X$  est une variété de dimension un, alors elle est réunion de cercles et d'intervalles.

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $X$  une variété de dimension 1. Alors :*

- l'ensemble des bouts de  $X$  est la réunion disjointe des bouts de chacune de ses composantes connexes
- pour chaque composante connexe de  $X$ , son ensemble de bouts est
  - vide, si la composante est compacte ;
  - de cardinal deux, si la composante n'est pas compacte.

*Démonstration.* Par la proposition 3.2.1 on sait que l'ensemble des bouts de  $X$  est la réunion disjointe des bouts de ses composantes connexes.

Par la proposition 3.3.1 on sait que les composantes connexes de  $X$  sont ou bien des cercles ou bien des intervalles.



Par la remarque 15 on sait que l'ensemble des bouts d'un cercle est vide.

Par la proposition 3.2.3 on sait que l'ensemble des bouts d'un intervalle est de cardinal deux.  $\square$

**Définition 30.** Soit  $X$  une variété de dimension un, ayant un nombre fini de composantes connexes. Sur  $\overleftrightarrow{X} = X \cup \mathcal{B}(X)$  on introduit la topologie de la façon suivante :

- Si  $X$  est connexe :
  - si  $X$  est compacte, c'est un cercle, il n'a pas de bout et  $X = \overleftrightarrow{X}$ , et la topologie de  $\overleftrightarrow{X}$  est égale à la topologie de  $X$  ;
  - si  $X$  n'est pas compacte, il existe un homéomorphisme  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Par la remarque 16 il existe donc une bijection  $\tilde{f}$  (induite par cet homéomorphisme) entre l'ensemble des bouts de  $X$  et l'ensemble des bouts  $\{-\infty, \infty\}$  de  $\mathbb{R}$ . La topologie sur  $\overleftrightarrow{X}$  est la seule qui fasse de  $f \cup \tilde{f}$  un homéomorphisme.
- Si  $X$  n'est pas connexe, on considère sur  $\overleftrightarrow{X}$  la topologie qui induit sur la réunion de chaque composante connexe avec ses bouts soit celle décrite dans le point précédent. Plus précisément, si  $X = \bigsqcup_{Y \in \pi_0(X)} Y$ , alors  $\overleftrightarrow{X} = \bigsqcup_{Y \in \pi_0(X)} \overleftrightarrow{Y}$ .

Dans tous les cas la topologie sur  $\overleftrightarrow{X}$  en fait un espace compact.

On appelle  $\overleftrightarrow{X}$  muni de cette topologie la **compactification par bouts** de  $X$ .

**Proposition 3.3.3.** Soit  $X$  une variété de dimension un ayant un nombre fini de composantes connexes. Soit  $U$  une partie de  $\overleftrightarrow{X}$ .

1. Si  $U$  est ouvert dans  $\overleftrightarrow{X}$  alors  $U \cap X$  est ouvert dans  $X$
2. Supposons inversement que  $U \cap X$  soit un ouvert de  $X$ . Alors  $U$  est un ouvert de  $\overleftrightarrow{X}$  si et seulement si pour tout bout  $(u_K)_K$  dans  $U$  il existe un ensemble compact  $K \subset X$  tel que  $U \cap X \supset u_K$

*Démonstration.* D'après la proposition 3.3.1, nous savons que  $X$  est réunion disjointe de cercles et d'intervalles. On voit facilement qu'il suffit de montrer les conclusions de la proposition pour chaque composante connexe  $Y$  de  $X$ .

Si  $Y$  est un cercle, les parties ouvertes de  $Y$  et  $\overleftrightarrow{Y}$  sont les mêmes.

Si  $Y$  est un intervalle, on peut supposer que  $Y = \mathbb{R}$ ,  $\overleftrightarrow{Y} = \overline{\mathbb{R}}$  et les conclusions de la proposition sont à nouveau vérifiées.  $\square$

**Proposition 3.3.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés unidimensionnelles à nombre fini de composantes connexes. Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme. Alors  $f$  s'étend à un homéomorphisme entre les compactifiés par bouts.

est forcément bijective car  $f$  est bijective.

Nous définissons maintenant une extension de  $f$  à  $\mathcal{B}(X)$  comme suit :

$$\tilde{f}((u_K)_K \text{ compact} \subset L) = \left( f(u_{f^{-1}(K)}) \right)_{K' \text{ compact} \subset L'} . \quad (3.5)$$

Par la discussion qui précède, nous savons que  $\tilde{f}$  est une bijection entre l'ensemble des bouts de  $X$  et l'ensemble des bouts de  $Y$ .

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\overleftarrow{X}$ . Cela signifie que  $\mathcal{O}$  est un ouvert  $\mathcal{O}_0$  de  $X$  uni avec tous les bouts  $(u_K)_K$  de  $X$  tels que  $\mathcal{O}_0$  contient  $u_K$  pour un certain  $K$ . Donc  $(f \cup \tilde{f})(\mathcal{O})$  est la réunion d'un ouvert  $f(\mathcal{O}_0)$  avec tous les bouts  $(v_K)_K$  de  $Y$  tels que  $f(\mathcal{O}_0)$  contient  $v_{f(K)}$  pour un certain  $K$ , d'où  $(f \cup \tilde{f})(\mathcal{O})$  est un ouvert de  $\mathcal{Y}$ . De la même façon on montre que si  ${}_{mathcal{O}'}$  est un ouvert de  $\overleftarrow{Y}$  alors  $(f \cup \tilde{f})^{-1}(\mathcal{O}')$  est un ouvert de  ${}_{ECX}$ .

Donc l'extension de  $f$  à  $L \cup \mathcal{B}(L)$  par  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme.

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $X$  une variété de dimension un à nombre fini de composantes connexes, orientée, dotée d'une métrique, et soit  $Y \subset X$  un ouvert à nombre fini de composantes connexes. Supposons que  $T : Y \rightarrow X$  est un homéomorphisme sur son image qui préserve l'orientation et la métrique. Alors pour chaque entier strictement positif  $k$ , l'ensemble des points  $k$ -périodiques est un ouvert à nombre fini de composantes connexes.*

*Démonstration.* Pour chaque  $x \in Y$ , soit  $C_x$  la composante connexe de  $Y$  qui contient  $x$ . La restriction de  $T$  à  $C_x$  est une isométrie préservant l'orientation.

De façon analogue, pour  $k > 0$  et  $x$  appartenant au domaine  $T^{1-k}(Y)$  de  $T^k$ , on note  $C_x^k$  la composante connexe de  $T^{1-k}(Y)$  qui contient  $x$ . Comme  $T^{1-k}(Y)$  est une partie ouverte de  $X$ , il en est de même pour  $C_x^k$ .

La restriction de  $T^k$  à  $C_x^k$  est une isométrie préservant l'orientation. Si  $x$  est un point périodique de période  $k$ , cette restriction a un point fixe en  $x$  et coïncide donc avec l'identité sur  $C_x^k$ . L'ensemble des points  $k$ -périodiques est donc ouvert dans  $X$ .

Dans une variété de dimension un, l'intersection de deux parties ouvertes qui ont un nombre fini de composantes connexes a un nombre fini de composantes connexes. L'ensemble

$$T^{-1}(Y) = \{T^{-1}(x), x \in Y \cap T(Y)\}$$

a donc un nombre fini de composantes connexes. Par récurrence il en est de même de

$$T^{-k}(Y) = \{T^{-1}(x), x \in T(Y) \cap T^{1-k}(Y)\}$$

pour tout  $k > 0$ . Ceci termine la preuve du lemme.  $\square$

**Définition 31.** Soit  $X$  une variété orientée de dimension un ayant un nombre fini de composantes connexes. Soit  $M$  une composante connexe de  $X$ , et soit  $f$  un difféomorphisme de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , préservant l'orientation. Nous considérons l'extension de  $f$  en un homéomorphisme entre  $\overleftarrow{M}$  et  $\overleftarrow{\mathbb{R}}$  ou  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Alors les intervalles fermés, ouverts, semi-ouverts se définissent par analogie avec ceux de la droite réelle et de la droite réelle étendue. C'est à dire que si  $a, b \in \overleftarrow{M}$ , alors :

- $[a, b] = f^{-1}[f(a), f(b)]$
- $[a, b) = f^{-1}[f(a), f(b))$

- $(a, b] = f^{-1}(f(a), f(b)]$
- $(a, b) = f^{-1}(f(a), f(b))$

On appelle  $a$  l'**extrémité gauche** et  $b$  l'**extrémité droite** de chacun des intervalles ci-dessus.

*Remarque 19.* Par la proposition 3.3.2 tout bout  $a$  d'une variété orientée  $X$  de dimension 1 est bout d'une composante connexe non compacte  $M$  de  $X$ .

**Définition 32.** On dit que  $a$  est un **bout gauche** (resp. **droit**) de  $X$  si un homéomorphisme de  $\overleftarrow{M} \rightarrow \overleftarrow{\mathbb{R}}$ , préservant l'orientation, envoie  $a$  sur  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ).

On note  $\mathcal{B}^L(X)$  l'ensemble des bouts gauches et  $\mathcal{B}^R(X)$  l'ensemble des bouts droits. On note  $\overleftarrow{X}^L$  l'ensemble  $X \sqcup \mathcal{B}^L(X)$ ; on note  $\overleftarrow{X}^R$  l'ensemble  $X \sqcup \mathcal{B}^R(X)$ .

*Remarque 20.* Lorsqu'on renverse l'orientation de  $X$ , un bout gauche devient droit et vice-versa.

Soit  $X$  une variété orientée de dimension un à nombre fini de composantes connexes. Soit  $Y$  une partie ouverte de  $X$  à nombre fini de composantes connexes. Soit  $a$  un bout gauche de  $Y$ . Notons  $M$  la composante connexe de  $Y$  dont  $a$  est le bout gauche. Soit  $f$  un homéomorphisme préservant l'orientation de  $\overleftarrow{M}$  sur  $\overleftarrow{\mathbb{R}}$ . On a la dichotomie suivante :

- soit la limite  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f^{-1}(t)$  existe dans  $X$ , on la note alors  $j_L(a)$ ;
- soit cette limite n'existe pas, on note alors  $j_L(a)$  le bout gauche (dans  $\mathcal{B}^L(X)$ ) de la composante connexe  $M$ .

On pose aussi  $j_L(y) = y$  pour tout  $y \in Y$ .

**Lemme 3.3.6.** L'application  $j_L : \overleftarrow{Y}^L \rightarrow \overleftarrow{X}^L$  ainsi définie est injective. Elle est bijective si  $X \setminus Y$  est un ensemble fini.

*Remarque 21.* Par la remarque 20, on a un énoncé analogue pour  $\overleftarrow{Y}^R, \overleftarrow{X}^R$ .

*Démonstration.* Soient  $y_1, y_2 \in \overleftarrow{Y}^L$  deux éléments qui ont la même image  $x$  par  $j_L$  dans  $\overleftarrow{X}^L$ .

- si  $x \in Y$ , on a  $y_1 = y_2 = x$
- si  $x \in X \setminus Y$ , on a  $y_1, y_2 \in \mathcal{B}^L(Y)$ . La composante connexe  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) de  $Y$  dont  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) est le bout gauche contient un intervalle ouvert de  $X$  dont  $x$  est l'extrémité gauche. Donc  $M_1 = M_2$  et  $y_1 = y_2$ .
- si  $x \in \mathcal{B}^L(X)$ , alors  $y_1, y_2 \in \mathcal{B}^L(Y)$ . La composante connexe  $N$  de  $X$  dont  $x$  est le bout gauche contient la composante connexe  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) de  $Y$  dont  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) est le bout gauche. Donc  $M_1 = M_2$  et  $y_1 = y_2$ .

Supposons que  $X \setminus Y$  est fini et montrons que  $j_L$  est surjective. Soit  $x \in \overleftarrow{X}^L$ . Si  $x \in Y$ , on a  $j_L(x) = x$ . Si  $x \in X \setminus Y$ , alors  $Y$  contient un intervalle ouvert  $J$  de  $X$  dont  $x$  est l'extrémité gauche. L'image par  $j_L$  du bout gauche de la composante connexe de  $Y$  qui contient  $J$  est égale à  $x$ .

### 3.4. Le théorème de Keane pour les échanges d'intervalles généralisés 51

Si  $x \in \mathcal{B}^L(X)$ , on note  $N$  la composante connexe de  $X$  dont  $x$  est le bout gauche et  $f$  un homéomorphisme préservant l'orientation de  $\overline{N}$  sur  $\overline{R}$ . Pour  $t$  suffisamment négatif,  $Y$  contient  $J = f^{-1}((-\infty, t))$ . L'image par  $j_L$  du bout gauche de la composante connexe de  $Y$  qui contient  $J$  est égale à  $x$ .  $\square$

### 3.4 Le théorème de Keane pour les échanges d'intervalles généralisés

**Définition 33.** Soient  $(T_i : X_i \dashrightarrow X_i)_{i \in I}$  une famille finie d'échanges d'intervalles généralisés. L'échange d'intervalles généralisé  $T := \bigsqcup_i T_i$  sur  $X := \bigsqcup_i X_i$  dont la restriction à  $X_i$  est  $T_i$  est appelé **somme disjointe** des  $T_i$ . Un échange d'intervalles généralisé qui n'est pas somme disjointe d'échanges plus simples est dit **irréductible**.

Tout échange d'intervalles généralisé est somme disjointe d'échanges d'intervalles généralisés irréductibles.

**Définition 34.** Soit  $T : X \dashrightarrow X$  un échange d'intervalles généralisé. Notons  $Y \subset X$  le domaine de  $T$ ,  $Y' \subset X$  celui de  $T^{-1}$ . D'après le lemme 3.3.6, l'application  $j_L : \overleftarrow{Y}^L \rightarrow \overleftarrow{X}^L$  est bijective et il en est de même de l'application  $j'_L : \overleftarrow{Y}'^L \rightarrow \overleftarrow{X}^L$ . Notons  $T^{(L)}$  la bijection de  $\overleftarrow{Y}^L$  sur  $\overleftarrow{Y}'^L$  induite par  $T$ . La bijection  $T_L := j'_L \circ T^{(L)} \circ (j_L)^{-1}$  de  $\overleftarrow{X}^L$  dans lui-même est appelée **extension gauche** de  $T$ . Une orbite périodique de  $T_L$  est un **cycle de bouts** si elle est contenue dans  $\mathcal{B}^L(X) = \overleftarrow{X}^L \setminus X$ .

On notera que l'extension gauche  $T_L$  et son inverse  $T_L^{-1}$  sont **continues à droite** en tout point de  $\overleftarrow{X}^L$ .

*Remarque 22.* On définit de façon analogue l'extension droite de  $T$ .

**Définition 35.** Un échange d'intervalles généralisé  $T : X \dashrightarrow X$  est **périodique** s'il n'a pas de singularité et s'il existe un entier  $k > 0$  tel que  $T^k = \text{id}_X$ . Le plus petit entier  $k > 0$  ayant cette propriété est la **période** de  $T$ .

On peut maintenant énoncer la version du théorème de Keane pour les échanges d'intervalles généralisés.

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $T : X \dashrightarrow X$  un échange d'intervalles généralisé irréductible. Si  $T$  n'a pas de connexion,  $T$  est périodique ou minimal.*

La démonstration de ce théorème occupe cette section et la suivante. Nous commençons par étudier la relation entre orbites périodiques, connexions et cycles de bouts.

Soit  $T : X \dashrightarrow X$  un échange d'intervalles généralisé. Soit  $k > 0$  un entier tel que  $T$  possède au moins un point périodique de période  $k$ . D'après le lemme 1.4.5, l'ensemble  $P_k$  des points fixes de  $T^k$  est ouvert et a un nombre fini de composantes connexes. Soit  $\tilde{x}$  un bout gauche de  $P_k$ ,  $x$  l'image de  $\tilde{x}$  dans  $\overleftarrow{X}^L$ . D'après la continuité à droite de l'extension gauche  $T_L$  de  $T$ , on obtient

**Lemme 3.4.2.** *On a  $T_L^k(x) = x$ .*

Notons  $x_0 = x, x_1 = T_L(x), \dots, x_{k-1} = T_L^{k-1}(x)$  les points de l'orbite de  $x$  par  $T_L$  dans  $\overleftarrow{X}^L$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$  on notera  $x_n = x_i$  où  $0 \leq i < k$  et  $n = i \bmod k$ . Chacun de ces points est un bout gauche de  $P_k$ . On a la dichotomie suivante :

1. soit aucun des points  $x_i$  n'appartient à  $X$  ; dans ce cas l'orbite de  $x$  par  $T_L$  est donc un cycle de bouts ;
2. soit au moins l'un des points  $x_i$  appartient à  $X$  ; dans ce cas, on a le

**Lemme 3.4.3.** *L'orbite de  $x$  dans  $\overleftarrow{X}^L$  contient une connexion de  $T$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x$  appartient à  $X$ . Comme  $x$  n'appartient pas à  $P_k$ , au moins l'un des  $x_i$  n'appartient pas au domaine de  $T$ , et au moins l'un des  $x_i$  n'appartient pas au domaine de  $T^{-1}$ . Soit  $n$  le plus petit entier positif ou nul tel que  $x_n$  n'appartienne pas au domaine de  $T$ . Dans tous les cas,  $x_n$  appartient à  $X$  et est donc une singularité de  $T$  : c'est vrai par hypothèse si  $n = 0$ , et résulte de ce que  $x_{n-1}$  appartienne au domaine de  $T$  si  $n > 0$ . Considérons de même le plus grand entier  $m$  négatif ou nul tel que  $x_m$  n'appartienne pas au domaine de  $T^{-1}$ . Le point  $x_m$  appartient à  $X$  et est donc une singularité de  $T^{-1}$ . Les points  $(x_i)_{m \leq i \leq n}$  forment une connexion de  $T$ .  $\square$

**Proposition 3.4.4.** *Soit  $T : X \dashrightarrow X$  un échange d'intervalles généralisé irréductible. Si  $T$  n'a pas de connexion et a une orbite périodique, alors  $T$  est périodique.*

La démonstration va préciser un peu la conclusion de la proposition.

*Démonstration.* Soit  $k$  un entier strictement positif qui est la période minimale d'un point périodique de  $T$ . On note comme précédemment  $P_k$  l'ensemble des points fixes de  $T^k$ . On va distinguer deux cas :

- L'ensemble  $P_k$  n'a pas de bout gauche. D'après la proposition 3.3.1, chacune des composantes de  $P_k$  est un cercle, et est donc aussi une composante connexe de  $X$ . Comme  $T$  est irréductible,  $X$  n'a pas d'autre composante connexe et est donc égal à  $P_k$ . Ceci prouve que  $T$  est périodique. Plus précisément, il existe une factorisation  $k = \ell q$  en deux entiers positifs tels que  $X$  ait  $\ell$  composantes connexes permutées cycliquement par  $T$  et la restriction de  $T^\ell$  à chacune de ces composantes soit une rotation d'ordre  $q$ .
- L'ensemble  $P_k$  a au moins un bout gauche. D'après les lemmes 3.4.2 et 3.4.3, comme  $T$  n'a pas de connexion, chaque bout gauche de  $P_k$  appartient à un cycle de bouts. En considérant l'extension droite  $T_R$  de  $T$ , on voit de même que chaque bout droit de  $P_k$  appartient à un cycle de bouts droits. On conclut à nouveau que chaque composante connexe de  $P_k$  est une composante connexe de  $X$ . Comme  $T$  est irréductible,  $X$  est égal à  $P_k$ , et les composantes connexes de  $X$  sont permutées cycliquement par  $T$ . Ces composantes connexes sont des intervalles, au nombre de  $k$ , et on a  $T^k = \text{id}_X$ .  $\square$

### 3.5 Preuve du théorème 3.4.1

Le théorème 3.4.1 résulte de la proposition 3.4.4 et de la proposition suivante.

**Proposition 3.5.1.** *Soit  $T : X \dashrightarrow X$  un échange d'intervalles généralisé irréductible. Si  $T$  n'a ni connexion, ni orbite périodique, toute orbite future (resp. passée) infinie de  $T$  est dense dans  $X$ .*

La démonstration reprend essentiellement celle de Keane [Kea75].

*Démonstration.* Supposons au contraire qu'il existe un point  $y$  de  $X$  dont l'orbite future est infinie mais évite un intervalle (ouvert) non trivial  $I$  de  $X$ . Quitte à rétrécir  $I$ , on peut supposer que  $I$  est contenu dans le domaine de  $T$  et dans celui de  $T^{-1}$ , et que les extrémités de  $I$  sont des points de  $X$ . Notons  $D_+$  l'ensemble formé des points  $x \in I$  pour lesquels il existe un entier  $m > 0$  tel que

- $x$  appartienne au domaine de  $T^m$  ;
- $T^m(x)$  appartienne à  $\text{sing}(T) \cup \partial I$  ;
- pour  $0 < k < m$ , le point  $T^k(x)$  n'appartienne pas à l'adhérence  $\bar{I}$  de  $I$ .

Il est clair qu'un tel entier  $m =: m_x$ , quand il existe, est uniquement défini par ces propriétés. On peut donc définir une application  $f$  de  $D_+$  dans  $\text{sing}(T) \cup \partial I$  par  $f(x) := T^{m_x}(x)$ . Cette application est injective : si  $x, x'$  sont deux points de  $D_+$  tels que  $f(x) = f(x')$ , on ne peut avoir  $m_x > m_{x'}$  car le point  $x' = T^{m_x - m_{x'}}(x) \in I$  contredirait la troisième propriété de  $m_x$ . De même, on ne peut avoir  $m_x < m_{x'}$ . On a donc  $m_x = m_{x'}$  et  $x = x'$  car  $T^{m_x}$  est injective.

Comme  $f$  est injective et  $\text{sing}(T) \cup \partial I$  est fini, l'ensemble  $D_+$  est lui-même fini.

On définit de façon analogue l'ensemble  $D_-$  formé des points  $x \in I$  pour lesquels il existe un entier  $m < 0$  tel que

- $x$  appartienne au domaine de  $T^m$  ;
- $T^m(x)$  appartienne à  $\text{sing}(T^{-1}) \cup \partial I$  ;
- pour  $0 > k > m$ , le point  $T^k(x)$  n'appartienne pas à l'adhérence  $\bar{I}$  de  $I$ .

L'ensemble  $D_-$  est une partie finie de  $I$ .

Soit  $J$  une composante connexe de  $I \setminus D_+$ . D'après le théorème de récurrence de Poincaré, il existe un entier  $n > 0$  tel que  $T^n(J)$  intersecte  $I$ . Notons  $n_J$  le plus petit entier strictement positif ayant cette propriété. Comme  $J$  ne rencontre pas  $D_+$ ,  $J$  est contenu dans le domaine de  $T^{n_J}$ , et l'image  $T^{n_J}(J)$  est contenue dans  $I$ . De plus,  $J$  est contenu dans le domaine de l'application de premier retour  $R_I$  de  $T$  dans  $I$ , et la restriction de  $R_I$  à  $J$  est égale à  $T^{n_J}$ . En fait l'image  $T^{n_J}(J)$  est une composante connexe de  $I \setminus D_-$ .

Définissons

$$I^* := \bigcup_{J \in \pi_0(I \setminus D_+)} \bigcup_{0 \leq n \leq n_J} T^n(J).$$

C'est une partie ouverte de  $X$  qui a un nombre fini de composantes connexes. Notons  $\widehat{I}$  l'intérieur de l'adhérence de  $I^*$  dans  $X$ ; c'est la réunion de  $I^*$  et des points de  $\partial I^*$  qui sont accumulés des deux côtés par  $I^*$ . L'ensemble  $\widehat{I} \setminus I^*$  est fini. L'ensemble  $\widehat{I}$  est une partie ouverte de  $X$  qui a un nombre fini de composantes connexes.

Observons que l'orbite future de  $y$  ne rencontre pas  $I^*$  (car l'orbite future des points de  $I^*$  rencontre  $I$ ). Comme l'orbite future de  $y$  est infinie, l'ensemble  $\widehat{I}$  n'est pas égal à  $X$ .

Pour tout point  $x$  de  $I^*$  qui n'appartient pas à  $D_+$ , la définition de  $I^*$  montre que  $x$  appartient au domaine de  $T$  et que  $T(x)$  appartient à  $I^*$ . Si chaque bout de  $\widehat{I}$  était un bout de  $X$  (c'est en particulier le cas si  $\widehat{I}$  n'a pas de bouts),  $\widehat{I}$  serait réunion de composantes connexes de  $X$  et serait invariant par  $T$ . Ce n'est pas possible car  $\widehat{I} \neq X$  et  $T$  est irréductible.

Donc il existe un bout  $x$  de  $\widehat{I}$  qui appartient à  $X$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x$  est un bout gauche de  $\widehat{I}$ , considéré comme un point de  $X \subset \overleftarrow{X}^L$ . Si  $x$  n'est pas une singularité de  $T$ , l'image  $T_L(x)$  est un point de  $X \subset \overleftarrow{X}^L$ , et c'est un bout gauche de  $\widehat{I}$  d'après la relation  $T(I^* \setminus D_+) \subset I^*$  et la relation analogue  $T^{-1}(I^* \setminus D_-) \subset I^*$ . Comme  $T$  ne possède pas d'orbite périodique, il en est de même de  $T_L$ . Mais l'ensemble des bouts gauches de  $\widehat{I}$  est fini. Il existe donc un entier  $n \geq 0$  tel que  $x$  appartienne au domaine de  $T^n$  et  $T^n(x) \in \text{sing}(T)$ . De même il existe un entier  $m \leq 0$  tel que  $x$  appartienne au domaine de  $T^m$  et  $T^m(x) \in \text{sing}(T^{-1})$ . On obtient ainsi une connexion qui contredit l'hypothèse de la proposition. □

### 3.6 Minimalité générique

**Théorème 3.6.1.**  $F_{\underline{\alpha}}$  est génériquement minimale. Autrement dit, il existe un ensemble  $G_\delta$ -dense de paramètres tel que  $F_{\underline{\alpha}}$  est minimale pour tout  $\underline{\alpha}$  dans cet ensemble.

*Démonstration.* Pour chaque intervalle ouvert non vide  $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ , notons  $\mathcal{U}(I)$  l'ensemble des paramètres  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  tels que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_{\underline{\alpha}}^k(I) = \mathbb{Z} \times \mathbb{T}.$$

La topologie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  a une base dénombrable  $\mathfrak{B}$  formée d'intervalles ouverts de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . La transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  est minimale si et seulement si  $\underline{\alpha}$  appartient à  $\mathcal{U}(I)$  pour tout  $I \in \mathfrak{B}$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{U}(I)$  est un ensemble  $G_\delta$ -dense de l'espace de Baire  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  pour tout intervalle ouvert non vide  $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . Le théorème sera alors démontré.

On fixe dans la suite de la démonstration un intervalle ouvert non vide  $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . Pour des entiers  $M, J > 0$ , on note  $\mathcal{U}(I, J, M)$  l'ensemble des paramètres  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$

tels que

$$(\star) \quad \bigcup_{|k| \leq M} F_{\underline{\alpha}}^k(I) \supset [-J, J] \times \mathbb{T}.$$

On pose aussi

$$\mathcal{U}(I, J) = \bigcup_{M > 0} \mathcal{U}(I, J, M).$$

Comme on a  $\mathcal{U}(I) \supseteq \bigcap_{J > 0} \mathcal{U}(I, J)$ , il suffit de voir que  $\mathcal{U}(I, J)$  est une partie ouverte et dense de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  pour tout  $J > 0$ .

Montrons que  $\mathcal{U}(I, J, M)$  est une partie ouverte de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  pour tous  $J, M > 0$ . Soit  $\underline{\alpha} \in \mathcal{U}(I, J, M)$ . Comme  $(\star)$  est un recouvrement ouvert d'un espace compact, il existe pour  $|k| \leq M$  des parties compactes  $L_k \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  telles que  $L_k \subset F_{\underline{\alpha}}^k(I)$  et  $\bigcup_{|k| \leq M} L_k \supset [-J, J] \times \mathbb{T}$ . Par la proposition 2.6.3, pour chaque  $k \in [-M, M]$ , un ouvert  $V(k) \subset \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  contenant  $\alpha$  tel que  $F_{\underline{\alpha}'}^k(I) \supset L_k$  pour tout  $\underline{\alpha}' \in V(k)$ . L'intersection  $\bigcap_{|k| \leq M} V(k)$  est un voisinage de  $\alpha$  contenu dans  $\mathcal{U}(I, J, M)$ .

Montrons que  $\mathcal{U}(I, J)$  est une partie dense de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  pour tout  $J > 0$ . Notons  $H$  le niveau de  $I$ . Soit  $V$  un ouvert non vide de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ . Quitte à rétrécir  $V$ , on peut supposer qu'il existe  $N > \max(J, |H|)$  et des intervalles ouverts  $V_n \subset \mathbb{T}$  pour  $|n| < N$  tels que

$$V = \{\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}} \mid \alpha_n \in V_n, \forall n \in (-N, N)\}.$$

Nous allons montrer que  $V$  rencontre  $\mathcal{U}(I, J)$ . Pour  $\alpha = (\alpha_n)_{|n| < N} \in \mathbb{T}^{(-N, N)}$ , notons  $j(\alpha)$  l'élément de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  dont les coordonnées d'indice  $\in (-N, N)$  coïncident avec celles de  $\alpha$  et dont les autres coordonnées sont égales à  $1/2$ . D'après (2.17), chaque  $\alpha \in \mathbb{T}^{(-N, N)}$  définit (via  $F_{j(\alpha)}$ ) un échange d'intervalles généralisé  $F_{N, \alpha}$  sur  $(-N, N) \times \mathbb{T}$ . D'après la proposition 2.6.2, l'ensemble des paramètres  $\alpha \in \mathbb{T}^{(-N, N)}$  tels que  $F_{N, \alpha}$  n'ait pas de connexion est un  $G_{\delta}$ -dense de  $\mathbb{T}^{(-N, N)}$ . On peut donc choisir  $\alpha \in \mathbb{T}^{(-N, N)}$  tel que  $F_{N, \alpha}$  n'ait pas de connexion et que  $\alpha_n \in V_n$  pour  $|n| < N$ . Par définition de  $V$ , l'image  $j(\alpha)$  appartient à  $V$ .

L'échange d'intervalles généralisé  $F_{N, \alpha}$  est irréductible : en effet l'image de la composante connexe de niveau  $n$  rencontre celles de niveaux  $n - 1$  et  $n + 1$  pour  $|n| < N - 1$ . Comme  $F_{N, \alpha}$  n'a pas de connexion,  $F_{N, \alpha}$  est périodique ou minimal d'après le théorème 3.4.1. Le cas périodique a été décrit dans la démonstration de la proposition 3.4.4 : une condition nécessaire est que les composantes connexes de l'espace des phases soient cycliquement permutées par l'échange d'intervalles généralisé. Comme ce n'est pas le cas pour  $F_{N, \alpha}$ , on conclut que  $F_{N, \alpha}$  est minimal. On a donc

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_{N, \alpha}^k(I) = (-N, N) \times \mathbb{T}.$$

Il existe donc, par compacité de  $(-N, N) \times \mathbb{T}$ , un entier  $M$  tel que

$$\bigcup_{|k| \leq M} F_{N, \alpha}^k(I) = (-N, N) \times \mathbb{T}.$$



Rappelons que  $J < N$  donc  $[-J, J] \subset (-N, N)$ . Par définition de  $F_{N,\alpha}$ , une itération de cette transformation correspond à une ou deux itérations de  $F_{j(\alpha)}$ . On a donc

$$\bigcup_{|k| \leq 2M} F_{j(\alpha)}^k(I) \supset [-J, J] \times \mathbb{T}.$$

Ceci montre que  $j(\alpha)$  appartient à l'intersection de  $V$  et de  $\mathcal{U}(I, J)$ . La démonstration du théorème est complète.  $\square$

*Remarque 23.* Dans la version classique du théorème de Keane ou la proposition 3.5.1, la minimalité obtenue dans la conclusion (en l'absence de connexion) a un sens plus fort : toute demi-orbite infinie est dense. Une telle conclusion ne saurait avoir lieu pour les transformations  $F_{\underline{\alpha}}$ , comme nous l'a fait observer P. Le Calvez.

**Proposition 3.6.2.** *Soit  $X$  un espace localement compact, non-compact. Soit  $T : X \rightarrow X$  un homéomorphisme. Alors il existe  $x \in X$  tel que  $\mathcal{O}^+(x)$  n'est pas dense dans  $X$ .*

*Démonstration.* Supposons que toute demi-orbite positive est dense.

Soit  $K$  un compact d'intérieur non-vidé. Pour tout  $x \in K$ , il existe  $n(x) > 0$  tel que  $T^{n(x)}(x) \in \text{int}(K)$ .

Pour tout  $x$  il existe donc un voisinage  $V(x)$  tel que  $F^{n(x)}(V(x)) \subset \text{int}(K)$ .

Comme  $K$  est compact, alors il existe  $N, x_1, \dots, x_N \in K$  tels que  $K \subset \bigcup_{i=1}^N V(x_i)$ .

Pour tout  $y \in K$ , il existe  $n$  entre 0 et  $\max n(x_i)$  tel que  $T^n(y) \in K$ . Le temps de retour dans  $K$  est borné. Donc  $\bigcup_{0 \leq n \leq \max n(x_i)} T^n(K)$  est invariant compact. C'est un ensemble d'intérieur non-vidé et aucun de ses éléments ne possède d'orbite future dense dans  $X$ .  $\square$

Nous avons vu dans la section 2.7 les objets suivants

- un espace localement compact  $X_{\underline{\alpha}}$ , non compact
- un homéomorphisme  $f_{\underline{\alpha}} : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow X_{\underline{\alpha}}$
- une application continue surjective  $h : X_{\underline{\alpha}} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ .

où  $h$  est une semi-conjugaison entre  $T$  et  $f_{\underline{\alpha}}$ .

La proposition 3.6.2 s'applique à  $f_{\underline{\alpha}}$ . Via  $h$ , nous obtenons comme corollaire l'absence de « demi-minimalité future » ni « passée » pour les transformations  $F_{\underline{\alpha}}$  dans notre famille.

**Corollaire 3.6.3.** *Supposons que l'ensemble des connexions de  $F_{\underline{\alpha}}$  est fini. Pour tout  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , il existe  $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  tel que la  $F_{\underline{\alpha}}^k(z)$  est défini pour tout temps  $k$  mais  $\mathcal{O}^+(z)$  n'est pas dense dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.6.2, l'ensemble des  $w \in X_{\underline{\alpha}}$  tels que  $\mathcal{O}^+(w)$  n'est pas dense dans  $X_{\underline{\alpha}}$  est non-vidé.

Prenons  $w \in X_{\underline{\alpha}}$  tel que  $\mathcal{O}^+(w)$  n'est pas dense dans  $X_{\underline{\alpha}}$ .

- Supposons que  $h(f_{\underline{\alpha}}^k(w)) \notin \text{sing}(F_{\underline{\alpha}})$  pour tout  $k > 0$ . Alors  $z = h(w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  a une demi-orbite positive définie pour tout temps qui n'est pas dense.
- Supposons qu'il existe  $k > 0$  tel  $h(f_{\underline{\alpha}}^k(w)) \in \text{sing}(F_{\underline{\alpha}})$ , alors  $h(f_{\underline{\alpha}}^{k+1}(w)) \in \text{sing}(F_{\underline{\alpha}}^{-1})$ . Comme  $F_{\underline{\alpha}}$  n'a qu'un nombre fini de connexions, il existe un  $k$  maximal tel que  $h(f_{\underline{\alpha}}^k(w)) \in \text{sing}(F_{\underline{\alpha}})$ . Alors  $z = h(f_{\underline{\alpha}}^{k+1}(w))$  a une demi-orbite positive définie pour tout temps et cette orbite n'est pas dense.

□

*Remarque 24.* Dans le cas où la suite de rotations  $\underline{\alpha}$  est constante irrationnelle, David Ralston a calculé la dimension de Hausdorff typique de l'ensemble des points d'un niveau donné dont la demi-orbite positive ne passe jamais en dessous de ce niveau [Ral14].



# Chapitre 4

## Ergodicité et conservativité

### Sommaire

---

4.1 Dans ce chapitre . . . . .	59
4.2 Définitions . . . . .	59
4.3 Rapport entre conservativité et ergodicité . . . . .	60
4.4 Une condition suffisante pour la conservativité . . . . .	61
4.5 Conservativité générique et presque-sûre . . . . .	62
4.6 Ergodicité générique . . . . .	64

---

### 4.1 Dans ce chapitre

Nous montrons ici que  $F_\alpha$  est typiquement conservative et ergodique.

### 4.2 Définitions

**Définition 36.** Soit  $T : X \rightarrow X$  une application d'un ensemble  $X$  dans lui-même. Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est **errant** s'il ne rencontre aucun des ensembles  $T^n(A), n > 0$ .

Dans les définitions suivantes,  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  est un espace mesuré.

**Définition 37.** Une transformation mesurable  $T : X \rightarrow X$  est **non-singulière** si, pour toute partie mesurable  $A$  de  $X$ , on a  $\mu(A) = 0$  si et seulement si  $\mu(T^{-1}A) = 0$ .

**Définition 38.** Une transformation non-singulière  $T : X \rightarrow X$  est **dissipative** si elle possède un ensemble errant de mesure positive. Elle est **conservative** dans le cas contraire.

D'après le théorème de récurrence de Poincaré, si la mesure  $\mu$  est finie et  $T$  préserve  $\mu$ , alors  $T$  est conservative.

**Définition 39.** Une transformation non-singulière  $T : X \rightarrow X$  est **ergodique** si les sous-ensembles invariants sont de mesure nulle ou totale (c'est-à-dire que leur complémentaire est de mesure nulle).

### 4.3 Rapport entre conservativité et ergodicité

Un système conservatif peut tout à fait ne pas être ergodique.

**Exemple 3.** Si  $T : X \rightarrow X$  et  $S : Y \rightarrow Y$  sont deux systèmes conservatifs, alors le système qu'ils définissent sur l'union disjointe de  $X$  et  $Y$  est aussi conservatif. Mais ce système ne pourra pas être ergodique car  $X$  et  $Y$  sont tous les deux de mesure positive.

Mais est-ce qu'un système ergodique peut ne pas être conservatif? Oui, comme le montre l'exemple 4.

**Exemple 4.** Considérons l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  muni de la mesure de comptage. La translation  $n \mapsto n + 1$  est une transformation préservant la mesure sur  $\mathbb{Z}$ .

Par le principe de récurrence, la translation est une transformation ergodique. En effet n'importe quel sous-ensemble de mesure positive est non-vide. Et n'importe quel sous-ensemble invariant contient  $n - 1$  et  $n + 1$  dès qu'il contient  $n$ . Donc n'importe quel sous-ensemble invariant de mesure positive est  $\mathbb{Z}$  tout entier.

Cependant, la translation sur les entiers n'est pas une transformation conservative. En effet, pour n'importe quel  $n$ , l'ensemble singleton  $\{n\}$  est un ensemble errant.

Cependant, il est possible de montrer que l'exemple de la translation sur les entiers est essentiellement le seul exemple inversible ayant l'ergodicité sans la conservativité.

**Proposition 4.3.1.** Soit  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré et  $T : X \rightarrow X$  une transformation inversible non-singulière. Supposons que  $T$  soit ergodique et dissipative. Alors  $\mu$  est purement atomique et les supports des atomes de  $\mu$  forment une orbite de  $T$ .

*Démonstration.* Soit  $U$  un sous-ensemble errant de mesure positive. Comme  $T$  est ergodique, le **complété dynamique**  $U^* := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(U)$  est invariant, donc de mesure totale. Si on pouvait écrire  $U$  comme union de deux ensembles disjoints  $U_1, U_2$  de mesure positive, leurs complétés dynamiques formeraient une partition de  $X$  mod.0 en ensembles invariants de mesure positive, contredisant l'ergodicité de  $T$ . Donc la restriction de  $\mu$  à  $U$  est constituée d'un unique atome et la preuve de la proposition est complète.  $\square$

En particulier, comme la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  n'a pas d'atome, une transformation  $F_{\underline{\alpha}}$  qui est ergodique est aussi conservative.

## 4.4 Une condition suffisante pour la conservativité

Dans cette section,  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  est un espace mesuré et  $T : X \rightarrow X$  est une transformation inversible préservant la mesure.

Si la mesure  $\mu$  est finie, alors  $T$  est conservative d'après le théorème de récurrence de Poincaré.

De façon à peine plus générale, si  $\mu$  est infinie, mais  $X$  est union croissante d'une suite  $(X_n)$  de sous-ensembles invariants de mesure finie, alors  $T$  est conservative : en effet, un ensemble errant rencontre chacun des  $X_n$  suivant un ensemble de mesure nulle.

Nous allons voir qu'on peut affaiblir dans l'assertion précédente l'hypothèse d'invariance des  $X_n$ .

**Définition 40.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Une partie  $Y \subset X$  est  $\varepsilon$ -**invariante** si la mesure de  $T(Y) \setminus Y$  est  $\leq \varepsilon$ .

Avoir un seul ensemble  $\varepsilon$ -invariant n'est pas très intéressant, ce qui est plus intéressant pour nous, c'est de faire une exhaustion de l'ensemble tout entier par des ensembles presque invariants.

**Définition 41.** Une **suite de boîtes presque invariantes** est une suite croissante de parties  $X_n \subset X$  vérifiant

- la réunion des  $X_n$  est égale à  $X$  ;
- chaque  $X_n$  est de mesure finie ;
- la suite  $\varepsilon_n := \mu(T(X_n) \setminus X_n)$  tend vers 0.

Ce qui nous intéresse dans la définition des boîtes presque invariantes, c'est d'avoir suffisamment d'ensembles presque invariants pour contrôler n'importe quel autre sous-ensemble, notamment les candidats à être des sous-ensembles errants.

**Proposition 4.4.1.** (*Lemme des boîtes*) Si  $T$  possède une suite de boîtes presque invariantes, alors  $T$  est conservative.

*Démonstration.* Soit  $(X_n)$  une suite de boîtes pour  $T$ .

Soit  $U \subset X$  un sous-ensemble de mesure positive. Nous voulons montrer que  $U$  n'est pas errant. Quitte à intersecter avec une boîte presque invariante, nous pouvons supposer que  $U$  est inclus dans toutes les boîtes  $X_n$  pour  $n$  suffisamment grand.

Soit  $n$  tel que  $\varepsilon_n < \mu(U)$  et  $U \subset X_n$ . Considérons l'ensemble  $A_i$  des points de  $U$  qui sortent de  $X_n$  au temps  $i$ , comme suit :

$$\begin{aligned} B_i &= \left\{ x \in U \mid 0 \leq k \leq i \Rightarrow T^k(x) \in X_n \right\} \\ A_i &= B_{i-1} \setminus B_i \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les ensembles  $T^i(A_i)$  sont inclus dans l'ensemble  $T(X_n) \setminus X_n$ . Il s'ensuit que la mesure de leur réunion ne peut pas dépasser  $\varepsilon_n$ .

Maintenant, de deux choses l'une :

- soit il existe  $i \neq j$  tels que la mesure de  $T^i(A_i) \cap T^j(A_j)$  est  $> 0$ . Comme les ensembles  $A_i, A_j$  sont des sous-ensembles de  $U$ , on en déduit que  $U$  n'est pas errant.
- soit pour tous  $i \neq j$  la mesure de  $T^i(A_i) \cap T^j(A_j)$  est nulle. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(T^i(A_i)) \\ &\leq \mu(T(X_n) \setminus X_n) \leq \varepsilon_n < \mu(U). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'ensuit que l'ensemble des points de  $U$  qui ne sortent jamais de la boîte  $X_n$  est un ensemble de mesure positive. Ce ne peut donc pas être un ensemble errant, parce que s'il l'était, son complété dynamique serait de mesure infinie tout en étant inclus dans la boîte  $X_n$  de mesure finie.

Donc, dans tous les cas  $U$  n'est pas errant.  $\square$

## 4.5 Conservativité générique et presque-sûre

De la proposition 4.4.1 on va déduire une condition suffisante pour que  $F_{\underline{\alpha}}$  soit conservative, et on verra que cette condition est satisfaite génériquement et presque-sûrement. Nous commençons par un lemme technique.

Le lemme 4.5.1 nous servira à trouver une condition suffisante pour que  $F_{\underline{\alpha}}$  possède une suite de boîtes presque invariantes. Il exprime la mesure des points qui traversent un niveau donné en deux itérations. Rappelons que dans le chapitre 2 nous avons introduit une notation pour l'ensemble des points qui changent de niveau d'une certaine façon pendant un temps fixé (définition 18). Si  $s$  est une suite finie de  $k$  flèches montantes ( $\uparrow$ ) ou descendantes ( $\downarrow$ ),  $Z^s$  dénote l'ensemble des points qui pendant les  $k$  itérations suivantes changent de niveau selon la suite  $s$ .

**Lemme 4.5.1.** *Pour tout  $n$  la mesure des points qui passent du niveau  $n - 1$  au niveau  $n + 1$  en deux itérations est égale à la distance dans  $\mathbb{T}$  de  $\alpha_n$  à  $\frac{1}{2}$ . Autrement dit :*

$$\lambda \left( Z_{n-1}^{\uparrow\uparrow} \right) = \lambda \left( Z_{n+1}^{\downarrow\downarrow} \right) = d_{\mathbb{T}} \left( \alpha_n, \frac{1}{2} \right) \quad (4.3)$$

*Démonstration.* On calculera seulement la mesure de  $Z_{n-1}^{\uparrow\uparrow}$  puisque le calcul pour  $Z_{n+1}^{\downarrow\downarrow}$  est en tout point similaire.

D'abord, par la définition de  $F_{\underline{\alpha}}$ , on obtient que

$$F_{\underline{\alpha}} \left( \{n-1\} \times Z_{n-1}^{\uparrow} \right) = \{n\} \times \left( 0, \frac{1}{2} \right) \quad (4.4)$$

donc

$$F_{\underline{\alpha}}^2 \left( \{n-1\} \times Z_{n-1}^{\uparrow\uparrow} \right) = \begin{cases} \{n+1\} \times \left( \alpha_n, \frac{1}{2} \right) & , \text{ si } 0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2} \\ \{n+1\} \times \left( 0, \frac{1}{2} + \alpha_n \right) & , \text{ si } -\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Comme  $F_{\underline{\alpha}}$  préserve la mesure, l'équation 4.5 permet de conclure que

$$\lambda\left(Z_{n-1}^{\uparrow\uparrow}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \alpha_n & , \text{ si } 0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \alpha_n & , \text{ si } -\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq 0 \end{cases} = d_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2}, \alpha_n\right) \quad (4.6)$$

□

La proposition 4.5.2 est la clé pour obtenir le résultat principal de cette section, à savoir que les systèmes de la famille  $F_{\underline{\alpha}}$  sont presque sûrement et génériquement conservatifs.

**Proposition 4.5.2.** *Soit Cons l'ensemble défini par.*

$$\text{Cons} = \left\{ \underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}} \left| \liminf_{n \rightarrow +\infty} d_{\mathbb{T}}\left(\alpha_n, \frac{1}{2}\right) = \liminf_{n \rightarrow -\infty} d_{\mathbb{T}}\left(\alpha_n, \frac{1}{2}\right) = 0 \right. \right\} \quad (4.7)$$

Alors  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservatif pour tout  $\underline{\alpha} \in \text{Cons}$ .

*Démonstration.* Pour tout couple d'entiers  $m, n$ , avec  $n - m > 1$  définissons

$$Y(m, n) = (m, n) \times \mathbb{T}, \quad X(m, n) = Y(m, n) \cup F_{\underline{\alpha}}(Y(m, n)).$$

On a alors

$$F_{\underline{\alpha}}(X(m, n)) \setminus X(m, n) = F_{\underline{\alpha}}^2(Z_{n-1}^{\uparrow\uparrow}) \cup F_{\underline{\alpha}}^2(Z_{m+1}^{\downarrow\downarrow}).$$

D'après le lemme 4.5.1 on obtient

$$\lambda^{\mathbb{Z}}(F_{\underline{\alpha}}(X(m, n)) \setminus X(m, n)) = d_{\mathbb{T}}\left(\alpha_n, \frac{1}{2}\right) + d_{\mathbb{T}}\left(\alpha_m, \frac{1}{2}\right).$$

Supposons que  $\alpha \in \text{Cons}$ . Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers positifs  $(n_k)$  et une suite strictement décroissante d'entiers négatifs  $(m_k)$  telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\mathbb{T}}\left(\alpha_{n_k}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_{\mathbb{T}}\left(\alpha_{m_k}, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

La suite  $(X_k) := (X(m_k, n_k))$  est alors une suite de boîtes presque invariantes pour  $F_{\underline{\alpha}}$ . La proposition 4.4.1 permet de conclure que  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservative. □

On a donc montré une condition suffisante pour avoir la conservativité de  $F_{\underline{\alpha}}$ . Voyons maintenant que les paramètres satisfont cette condition génériquement et presque sûrement.

**Lemme 4.5.3.** *L'ensemble Cons défini par (4.7) est en même temps un ensemble  $G_{\delta}$ -dense et un ensemble de mesure totale.*



*Démonstration.* Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  posons

$$A_{\varepsilon,m} = \left\{ \underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}} \mid d_{\mathbb{T}} \left( \alpha_m, \frac{1}{2} \right) < \varepsilon \right\} \quad (4.8)$$

alors on a

$$\text{Cons} = \bigcap_{k \geq 2} \bigcap_{n1}^{\infty} \left[ \left( \bigcup_{m < -n} A_{\frac{1}{k},m} \right) \cap \left( \bigcup_{m > n} A_{\frac{1}{k},m} \right) \right] \quad (4.9)$$

Les ensembles  $A_{\varepsilon,m}$  sont ouverts. Étant une intersection dénombrable d'ouverts, Cons est un ensemble  $G_{\delta}$ . Chaque ensemble  $\bigcup_{m < -n} A_{\frac{1}{k},m}$ , de même que chaque ensemble  $\bigcup_{m > n} A_{\frac{1}{k},m}$ , est dense. L'ensemble Cons est donc un ensemble  $G_{\delta}$ -dense.

Pour ce qui est de la mesure, on calcule d'abord la mesure des ouverts dans la formule (4.9). Pour  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ , on a

$$\lambda^{\mathbb{Z}}(A_{\varepsilon,m}) = 2\varepsilon \quad (4.10)$$

d'où

$$\lambda^{\mathbb{Z}} \left( \left( \bigcup_{m > n} A_{\varepsilon,m} \right)^{\complement} \right) = \lambda^{\mathbb{Z}} \left( \bigcap_{m > n} A_{\varepsilon,m}^{\complement} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{m > n} \lambda^{\mathbb{Z}}(A_{\varepsilon,m}^{\complement}) = 0. \quad (4.11)$$

L'ensemble  $\bigcup_{m > n} A_{\varepsilon,m}$  est donc un ensemble de mesure totale. Un calcul tout à fait analogue montre qu'il en est de même pour les ensembles  $\bigcup_{m < -n} A_{\varepsilon,m}$ . Étant une intersection dénombrable d'ensembles de mesure totale, Cons est lui aussi un ensemble de mesure totale.  $\square$

Maintenant on peut conclure.

**Théorème 4.5.4.**  $F_{\underline{\alpha}}$  est génériquement et presque-sûrement conservative.

## 4.6 Ergodicité générique

Nous avons montré que pour tout  $\underline{\alpha}$  dans

$$\text{Cons} = \left\{ \underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}} \mid \liminf_{n \rightarrow +\infty} d_{\mathbb{T}} \left( \alpha_n, \frac{1}{2} \right) = \liminf_{n \rightarrow -\infty} d_{\mathbb{T}} \left( \alpha_n, \frac{1}{2} \right) = 0 \right\}$$

$F_{\underline{\alpha}}$  est conservative.

D'après le lemme 4.5.3, l'ensemble Cons est une partie  $G_{\delta}$ -dense de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ , donc un espace de Baire.

Nous allons montrer que l'ensemble des paramètres dans Cons pour lesquels  $F_{\underline{\alpha}}$  est ergodique contient un ensemble  $G_{\delta}$ -dense.

**Lemme 4.6.1.** *Si  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservative alors pour chaque niveau  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application de premier retour*

$$R_n : \{n\} \times \mathbb{T} \rightarrow \{n\} \times \mathbb{T}$$

*est définie presque partout.*

*Démonstration.* Sinon, il existe un sous-ensemble de mesure positive dans  $\{n\} \times \mathbb{T}$  dont les itérations positives ne reviennent jamais à  $\{n\} \times \mathbb{T}$ . En particulier, cet ensemble est errant mais ce n'est pas possible car  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservative.  $\square$

**Proposition 4.6.2.** *Si  $F_{\underline{\alpha}}$  est conservative, alors*

$$F_{\underline{\alpha}} \text{ est ergodique} \Leftrightarrow \forall n : R_n \text{ est ergodique}$$

*Démonstration.* Rappelons que nous avons adopté dans le chapitre 2 la notation suivante : pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose :

$$A_n = A \cap (\{n\} \times \mathbb{T})$$

Supposons que  $F_{\underline{\alpha}}$  est ergodique. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $B \subset \{n\} \times \mathbb{T}$  un ensemble  $R_n$ -invariant de mesure positive. Considérons  $B^*$ , le complété dynamique par  $F_{\underline{\alpha}}$  de  $B$  :

$$B^* = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_{\underline{\alpha}}^k(B) \quad (4.12)$$

$B^*$  est un ensemble  $F_{\underline{\alpha}}$ -invariant, de mesure positive puisqu'il contient  $B$ . Comme  $F_{\underline{\alpha}}$  est ergodique, le complémentaire de  $B^*$  est de mesure nulle, en particulier chaque  $B_m^*$  est de mesure totale. Comme  $B$  est  $R_n$ -invariant, alors  $B = B_n^*$  donc  $B$  est de mesure totale.

Réciproquement, supposons que chaque  $R_n$  est ergodique. Soit  $A$  un ensemble mesurable  $F_{\underline{\alpha}}$ -invariant, alors chaque  $A_n$  est un ensemble  $R_n$ -invariant. Il est donc de mesure totale ou de mesure nulle. Par définition de  $F_{\underline{\alpha}}$  nous remarquons que

$$F_{\underline{\alpha}}(A_n) \subset A_{n-1} \cup A_{n+1}.$$

Si  $A_n$  est de mesure totale alors  $A_{n-1}$  et  $A_{n+1}$  sont au moins de mesure  $\frac{1}{2}$  et donc de mesure totale.

Il s'ensuit que, soit tous les  $A_n$  sont de mesure nulle et  $A$  est de mesure nulle, soit tous les  $A_n$  sont de mesure totale et  $A$  est de mesure totale.

Donc  $F_{\underline{\alpha}}$  est ergodique.  $\square$

Donc, ce que nous devons montrer, c'est que pour chaque  $n$ ,  $R_n$  est ergodique pour un  $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  générique. Il suffit de traiter le cas  $n = 0$ . Nous adoptons la notation  $R = R_0$ .

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$  considérons la somme de Birkhoff

$$S_k \varphi := \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R^i$$

**Définition 42.** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$  et tout  $\varepsilon > 0$ , définissons l'ensemble :

$$W(\varphi, \varepsilon) := \left\{ \underline{\alpha} \in \text{Cons} \mid \exists k > 0, \left\| \frac{1}{k} S_k \varphi - \int_{\mathbb{T}} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon \right\}$$

**Proposition 4.6.3.** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  et tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $W(\varphi, \varepsilon)$  est ouvert dans  $\text{Cons}$ .

*Démonstration.* Soit  $\underline{\alpha} \in W(\varphi, \varepsilon)$ . Par définition de  $W(\varphi, \varepsilon)$ , il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\left\| \frac{1}{k} S_k \varphi - \int_{\mathbb{T}} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon. \quad (4.13)$$

On fixe dans la suite un entier  $k$  satisfaisant l'inégalité 4.13.

Posons  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \left\| \frac{1}{k} S_k \varphi - \int_{\mathbb{T}} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2}$ .

On va montrer que si  $\tilde{\underline{\alpha}} \in \text{Cons}$  est assez proche de  $\underline{\alpha}$ , on a :

$$\left\| \frac{1}{k} S_k \varphi - \frac{1}{k} \tilde{S}_k \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon_1 \quad (4.14)$$

où  $\tilde{S}_k \varphi(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ \tilde{R}^i(x)$  et  $\tilde{R}$  est l'application de premier retour de  $F_{\tilde{\underline{\alpha}}}$  sur le niveau 0.

Soit  $\mathcal{J}$  la famille au plus dénombrable des composantes connexes du domaine de  $R^k$ . Soit  $\mathcal{J}_0$  une sous-famille finie de  $\mathcal{J}$  telle que

$$\lambda \left( \bigcup_{J \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0} J \right) < \left( \frac{\varepsilon_1}{4 \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}} \right)^2. \quad (4.15)$$

Soit  $J \in \mathcal{J}_0$ ; nous désignons par  $\check{J}$  l'intervalle de même centre que  $J$  de longueur  $\left( 1 - \left( \frac{\varepsilon_1}{4 \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}} \right)^2 \right) |J|$ . On a :

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_0} \lambda(J - \check{J}) < \left( \frac{\varepsilon_1}{4 \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}} \right)^2 \quad (4.16)$$

Soit  $\delta > 0$  un nombre réel qui sera déterminé dans la suite. Il existe un voisinage  $V = V(\delta)$  de  $\underline{\alpha}$  dans  $\text{Cons}$  tel que, pour tout  $J \in \mathcal{J}_0$ , tout  $\tilde{\underline{\alpha}} \in V$ , l'intervalle  $\check{J}$  soit inclus dans le domaine de  $\tilde{R}^k$  et on ait

$$d_{\mathbb{T}}(\tilde{R}^i(x) - R^i(x)) < \delta, \forall 0 \leq i \leq k, \forall x \in \check{J} \quad (4.17)$$

Comme  $\varphi$  est uniformément continue, on peut choisir  $\delta$  de façon à avoir, pour  $|x - y| < \delta$ ,

$$d_{\mathbb{T}}(\varphi(x), \varphi(y)) < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (4.18)$$

Pour  $\tilde{\alpha} \in V$ ,  $J \in \mathcal{J}_0$ ,  $x \in \tilde{J}$ , on a alors

$$\frac{1}{k} \left| S_k \varphi(x) - \tilde{S}_k \varphi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (4.19)$$

Pour  $\tilde{\alpha} \in V$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0} \int_J \left( \frac{1}{k} (S_k \varphi - \tilde{S}_k \varphi) \right)^2 &\leq 4 \|\varphi\|_{C^0}^2 \lambda \left( \bigcup_{J \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0} J \right) \leq \frac{\varepsilon_1^2}{4} \\ \sum_{J \in \mathcal{J}_0} \int_{J \setminus \tilde{J}} \left( \frac{1}{k} (S_k \varphi - \tilde{S}_k \varphi) \right)^2 &\leq 4 \|\varphi\|_{C^0}^2 \sum_{J \in \mathcal{J}_0} \lambda(J \setminus \tilde{J}) \leq \frac{\varepsilon_1^2}{4} \\ \sum_{J \in \mathcal{J}_0} \int_{\tilde{J}} \left( \frac{1}{k} (S_k \varphi - \tilde{S}_k \varphi) \right)^2 &\leq \frac{\varepsilon_1^2}{4} \end{aligned} \quad (4.20)$$

On obtient donc (4.14) lorsque  $\tilde{\alpha} \in V$ . □

**Proposition 4.6.4.** *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $W(\varphi, \varepsilon)$  est dense dans Cons.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $\varepsilon > 0$  et soit  $V$  une partie ouverte non vide de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ . On va montrer que  $V$  rencontre  $W(\varphi, \varepsilon)$ . Quitte à rétrécir  $V$ , on peut supposer qu'il existe un entier positif  $M$  et des intervalles ouverts  $V_{-M}, \dots, V_M$  de  $\mathbb{T}$  tels que

$$V = \{ \underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}} \mid \alpha_n \in V_n, \forall n \in [-M, M] \}.$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{T}^{[-M, M]}$ , on note  $j(\alpha)$  l'élément de  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$  dont les coordonnées d'indice  $\in [-M, M]$  sont celles de  $\alpha$  et les autres coordonnées sont égales à  $1/2$ . On a  $j(\alpha) \in \text{Cons}$ . On a vu au chapitre 2, proposition 2.8.1, que l'application de premier retour de  $F_{j(\alpha)}$  sur  $[-M, M] \times \mathbb{T}$  était l'application  $P_\alpha$  définie par

$$P_\alpha(n, x) = \begin{cases} (n, R_{\alpha_n + \frac{1}{2}}(x)) & \text{si } n = M \text{ et } R_{\alpha_n}(x) \in (0, \frac{1}{2}) \\ (n, R_{\alpha_n + \frac{1}{2}}(x)) & \text{si } -M = n \text{ et } R_{\alpha_n}(x) \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ F_\alpha(n, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a aussi construit au chapitre 2, section 2.8, une surface de translation  $\mathcal{M}(\alpha)$  qui est la suspension (à hauteur constante égale à 1) de  $P_\alpha$ . Notons  $\mathbf{1}$  l'élément de  $\mathbb{R}^{[-M, M]}$  dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

On a vu au chapitre 2, section 2.8.3, que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la surface de translation  $\mathcal{M}(\alpha + t\mathbf{1})$  se déduisait de  $\mathcal{M}(\alpha)$  par l'action de l'élément  $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ .

Considérons  $\alpha \in \mathbb{T}^{[-M, M]}$ . D'après le théorème de Kerckhoff-Masur-Smillie [KMS85], le flot vertical de  $\mathcal{M}(\alpha + t\mathbf{1})$  est uniquement ergodique pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ . On peut donc trouver  $\alpha \in \prod_{-M}^M V_n$  tel que le flot vertical de  $\mathcal{M}(\alpha)$  soit uniquement ergodique.

Mais alors  $P_\alpha$  est ergodique et il en est de même de son application de retour  $R$  sur  $\{0\} \times \mathbb{T}$ . Observons que  $R$  est aussi l'application de retour de  $F_{j(\alpha)}$  sur  $\{0\} \times \mathbb{T}$ .

Comme  $R$  est ergodique, le paramètre  $j(\alpha)$  appartient à  $W(\varphi, \varepsilon)$  car les moyennes ergodiques de  $\varphi$  convergent dans  $L^2(\mathbb{T})$  vers  $\varphi$  d'après le théorème ergodique de Von Neumann. Le paramètre  $j(\alpha)$  appartient aussi à  $V$ . L'intersection  $W(\varphi, \varepsilon) \cap V$  n'est donc pas vide.  $\square$

Soit  $D$  une partie dénombrable dense de  $L^2(\mathbb{T})$  formée de fonctions continues. Définissons

$$\mathcal{E} := \bigcap_{\varphi \in D} \bigcap_{k=1}^{\infty} W(\varphi, \frac{1}{k}) = \bigcap_{\varphi \in D} \bigcap_{\varepsilon > 0} W(\varphi, \varepsilon).$$

D'après les propositions 4.6.3 et 4.6.4,  $\mathcal{E}$  est une partie  $G_\delta$ -dense dans l'espace de Baire Cons.

**Lemme 4.6.5.** *Soit  $\underline{\alpha} \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $\underline{\alpha} \in W(f, \varepsilon)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in D$  tel que  $\|f - \varphi\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Comme  $\underline{\alpha} \in W(\varphi, \frac{\varepsilon}{3})$ , il existe  $k > 0$  tel que

$$\left\| \frac{1}{k} S_k \varphi - \int_{\mathbb{T}} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.21)$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k} S_k \varphi - \frac{1}{k} S_k f \right\|_{\mathcal{L}^2} &\leq \| \varphi - f \|_{\mathcal{L}^2} < \frac{\varepsilon}{3} \\ \left\| \int_{\mathbb{T}} \varphi - \int_{\mathbb{T}} f \right\|_{\mathcal{L}^2} &\leq \| \varphi - f \|_{\mathcal{L}^2} < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \quad (4.22)$$

On conclut que  $\underline{\alpha} \in W(f, \varepsilon)$   $\square$

**Proposition 4.6.6.** *Si  $\underline{\alpha} \in \mathcal{E}$ , alors  $R$  est ergodique.*

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$  une fonction  $R$ -invariante.

On a donc  $\frac{1}{k} S_k f = f$  pour tout  $k > 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 4.6.5,  $\underline{\alpha} \in W(f, \varepsilon)$ , donc il existe  $k > 0$  tel que

$$\left\| f - \int_{\mathbb{T}} f \right\|_{\mathcal{L}^2} = \left\| \frac{1}{k} S_k f - \int_{\mathbb{T}} f \right\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon \quad (4.23)$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a  $f = \int_{\mathbb{T}} f$   $\lambda$ -presque partout et  $f$  est donc constante  $\lambda$ -presque partout.

Les seules fonctions  $F_{\underline{\alpha}}$ -invariantes sont les fonctions constantes. Cela signifie que  $R$  est ergodique.  $\square$

**Théorème 4.6.7.**  *$F_{\underline{\alpha}}$  est ergodique pour un  $\underline{\alpha}$  générique.*

*Démonstration.* Cela suit des propositions 4.6.4, 4.6.3 et 4.6.6.  $\square$

# Chapitre 5

## Simulations numériques

### Sommaire

---

<b>5.1 Dans ce chapitre</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>5.2 Orbite d'un point</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>5.3 Orbite d'un niveau</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.4 Code Maxima</b> . . . . .	<b>72</b>

---

### 5.1 Dans ce chapitre

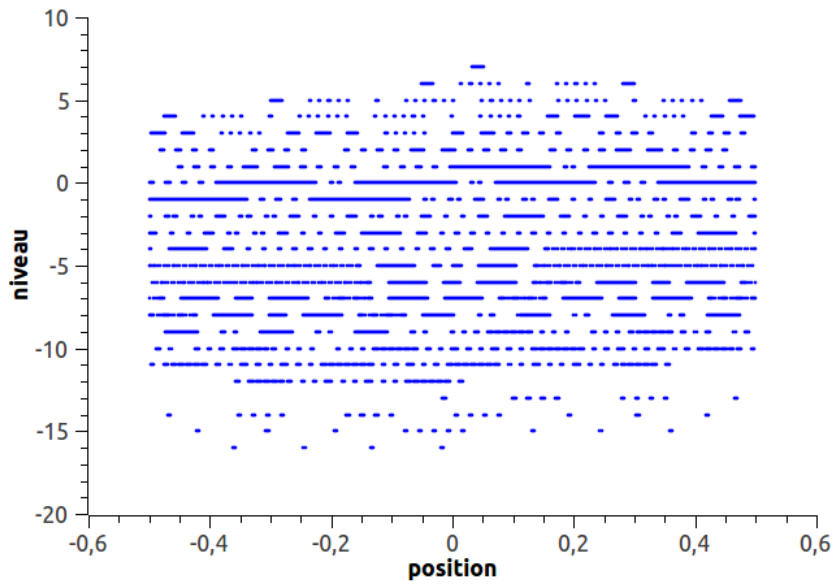
Au début de la thèse, j'ai réalisé quelques simulations numériques, avec le but de me familiariser avec la famille  $\{F_{\underline{\alpha}}\}$  et d'éventuellement émettre quelques conjectures. Pour cela j'ai utilisé deux logiciels : Maxima et SciLab. Dans ce chapitre, je montre quelques exemples (en Maxima) et j'explique brièvement le code. Pour ne pas alourdir le texte, le code est regroupé dans la section 5.4.

**Problème :** Lorsque  $k$  est grand, quel est l'ordre de grandeur typique de  $n(F_{\underline{\alpha}}^k(0, x))$  ( $x$  étant tiré aléatoirement dans  $\mathbb{T}$  et  $\underline{\alpha}$  dans  $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ ) ?

### 5.2 Orbite d'un point

Nous tirons au hasard un point sur le niveau 0 et une suite  $\underline{\alpha}$ . Nous utilisons la fonction `evolution2dmod` dans Maxima pour calculer et dessiner les 65000 premiers itérés de ce point.

Par exemple, lorsque le point tiré au sort est  $z = (0, -0.042851999966329)$ , et les paramètres de rotation  $\alpha_n$  tirés au sort sont donnés par la table (5.1), le 65000-ième itéré de  $z$  est  $(-3, 0.18300927251027)$ , et l'orbite de  $z$  est dessinée dans la figure 5.1.

FIGURE 5.1 – Une orbite de  $F_\alpha$ 

$n$	$\alpha_n$
-16	0.37661758595722117
-15	0.06094607112936612
-14	0.2741308223589196
-13	-0.45352516146949196
-12	0.34103127496174923
-11	0.1396886523764258
-10	-0.34688506817178943
-9	-0.42023259727954
-8	-0.42318770468617783
-7	0.05494099327252999
-6	-0.3426233582344742
-5	0.018312778081162495
-4	0.34374906245152115
-3	-0.3185107853044773
-2	-0.2361205776418822
-1	-0.4255866787264875
0	0.15459730786128634
1	-0.38582372270439014
2	-0.27509187769182253
3	0.4276687310621847
4	0.30090983387530157
5	-0.17547662171076506
6	-0.17547662171076506
7	-0.0822469629631648

(5.1)

Cet exemple est visiblement différent de ce qui se passe pour une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ . On peut le visualiser en changeant légèrement la définition de la coordonnée entière de  $F_\alpha$ , de sorte à ce que les paramètres de rotation  $\alpha_n$  soient retirés au sort à chaque visite au niveau  $n$ . Si on remplace la définition de la première coordonnée de  $F_\alpha$ ,  $F_1$ , par :

```
F[1](n,x):=n+(if xact>=0
  then (alpha[n+1]:random(1.0)-0.5,(if n=nmax then nmax:n+1),+1)
  else (alpha[n-1]:random(1.0)-0.5,(if n=nmin then nmin:n-1),-1));
```

alors en relançant la fonction `evaluation2dmod` j'obtiens que le 20000-ième itéré de  $z = (0, 0.41482358355533)$  est  $(5, -0.09064471862578)$ . Le tracé des premiers 20000 itérés de  $z$  se trouve sur la figure 5.2 :

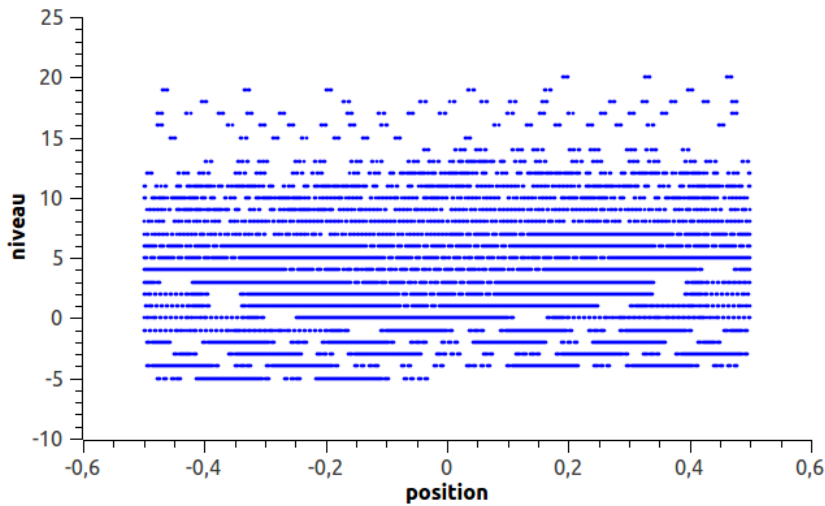


FIGURE 5.2 – Une orbite de la marche aléatoire

On remarque que dans le deuxième cas, les niveaux visités par l'orbite s'éloignent beaucoup plus du niveau de départ. Je ne présente ici que ces deux exemples mais j'ai fait les mêmes observations sur plusieurs autres exécutions de mon code.

Or, dans le cas de la marche aléatoire, on sait grâce au théorème central limite, que l'orbite s'éloigne typiquement de  $\sqrt{k}$  de son niveau de départ au bout de  $k$  itérations. Apparemment, ce n'est pas typiquement le cas des orbites de  $F_\alpha$ . Le but de la prochaine section est de faire quelques simulations pour estimer ce paramètre de diffusion dans le cas de  $F_\alpha$ .

### 5.3 Orbite d'un niveau

Cette fois on prend le niveau 0 et on regarde comment se distribuent les orbites de tous les points dans ce niveau. Plus précisément, si  $\lambda_0$  est la mesure de Lebesgue



sur  $\{0\} \times \mathbb{T}$  alors

$$\lambda(k, \underline{\alpha}) := (F_{\underline{\alpha}}^k)_*(\lambda_0)$$

est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ . La mesure

$$\mu(k, \underline{\alpha}) = n_*(\lambda(k, \underline{\alpha}))$$

est alors une mesure de probabilité sur  $\mathbb{Z}$ .

Nous allons calculer la moyenne de  $\mu(k, \underline{\alpha})$  pour un certain nombre de tirages aléatoires de  $\underline{\alpha}$ .

La fonction utilisée pour cette partie est `seg1step`.

Pour  $k = 101$  et 10 tirages on obtient une distribution de moyenne  $\mu_{101} = -0.96145313976103$  et variance  $\sigma_{101} = 3.507764473466828$ . Son graphe se trouve dans la figure 5.3.

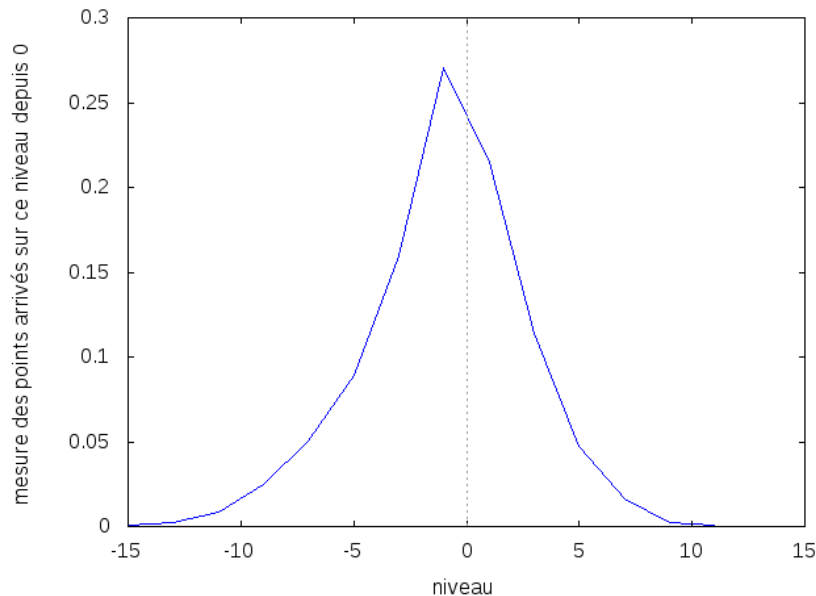


FIGURE 5.3 – Distribution au bout de 101 itérations, moyenne de 10 tirages

Pour  $k = 1001$  itérations et 4 tirages on obtient une distribution de moyenne  $\mu_{1001} = 0.16596479657475$  et variance  $\sigma_{1001} = 2.430342819333646$ . Son graphe se trouve dans la figure 5.4.

On notera que la variance  $\sigma_{101}$  est plus grande que celle pour  $k = 1001$ . Il semble que la croissance de  $\sigma_k$  avec  $k$  soit assez lente.

## 5.4 Code Maxima

Pour chaque  $x \in \mathbb{T}$ ,  $R(x)$  est la projection de  $x$  dans  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ .

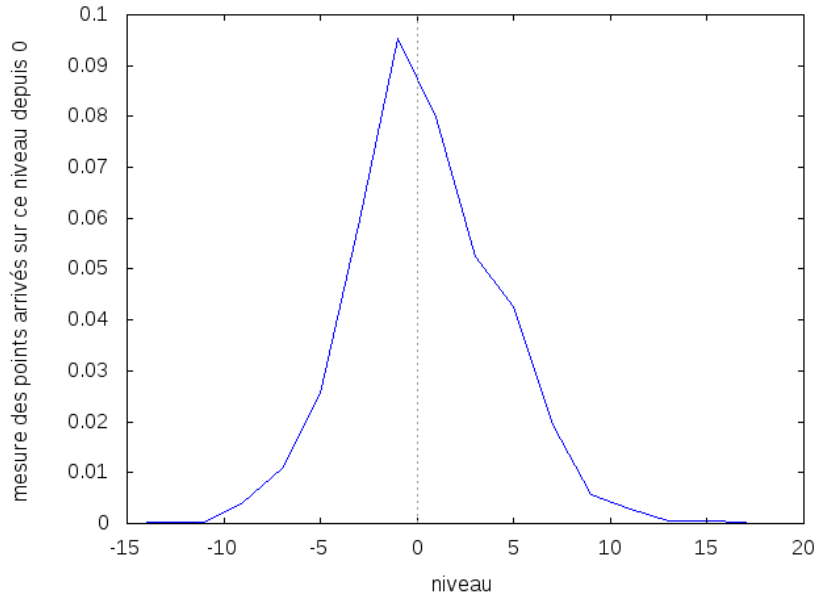


FIGURE 5.4 – Distribution au bout de 1001 itérations, moyenne de 4 tirages

```
R(x) := mod(x+0.5, 1.0) - 0.5;
```

Les coordonnées de la fonction  $F_\alpha$  sont  $F_1$  et  $F_2$ . Nous calculons  $\alpha$  au fur et à mesure, dès qu'on arrive à un niveau  $n'$  qui n'a pas encore été visité, on tire au sort  $\alpha_{n'}$ .

```
F[2](n,x) := (xact:R(x+alpha[n]));
F[1](n,x) := n+(if xact<0
  then ((if n=nmin then (alpha[n-1]:random(1.0)-0.5,nmin:n-1)),nact=n-1,-1)
  else ((if n=nmax then (alpha[n+1]:random(1.0)-0.5,nmax:n+1)),nact=n+1,+1));
```

Pour chaque  $z = (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ , `evolution2dmod([n, x], k)` calcule l'orbite positive de  $z$  jusqu'au temps  $k$ , et la dessine. Cette fonction accepte les mêmes options graphiques que `plot2d`.

```
evolution2dmod(initial, k, [options]) :=
block
([n:initial[1],x:initial[2],xaux,data:[],kwds:[],numer:true,float:true],
print("Nous regardons l'orbite du point de position ",x," au niveau ",n,"."),
for i thru length(options) do
  (if not listp(options[i]) then error("Wrong option", options[i]),
  kwds: cons(options[i][1], kwds)),
for i thru k do
  ((data: cons([x, n], data)),
  xaux: F[2](n,x),
  if not numberp(xaux) then
    error("Function",'F[1]','gave a non-numerical value:', xaux),
  n: F[1](n,x),
```

```

    if not numberp(n) then
        error("The function", 'F[2]', "gave a non-numerical value:", y),
        x: xaux),
    nact:n,
    if not member('xlabel,kwds) then
        options: endcons(['xlabel','niveau'],options),
    if not member('ylabel,kwds) then
        options: endcons(['ylabel','position'],options),
    if not member('style,kwds) then options: endcons(['style','points'],options),
    options: cons(['discrete', data], options),
    print("Après ",k-1,"itérations, la position est ",x," et le niveau ",n,"."),
    print("Graph passed to plot2d..."),
    apply(plot2d, options));

```

Pour le calcul de la transformation sur des segments, chaque segment est représenté par un octuplet  $(x, y, n, n_{\min}, n_{\max}, t_{\min}, t_{\max}, t)$  si le segment est  $(x, y)$  sur le niveau  $n$  et que

- $n_{\min}$  est le niveau le plus bas déjà visité par le segment ;
- $n_{\max}$  est le niveau le plus haut déjà visité par le segment ;
- $t_{\min}$  est le temps mis pour arriver pour la première fois au niveau  $n_{\min}$  ;
- $t_{\max}$  est le temps mis pour arriver pour la première fois au niveau  $n_{\max}$  ;
- $t$  est le temps (nombre d'itérations depuis le segment de départ).

Les fonctions `seg1stepplus` et `seg1stepminus` calculent une seule itération de  $F_{\alpha}$  sur un intervalle.

```

seg1stepplus(p):=block(
[u,v,alpha,seg],alpha:par[p[3]],
u:R(p[1]+alpha),v:R(p[2]+alpha),
if p[1]=-0.5 and p[2]=0.5 then seg:[0,0.5]
elseif u<=0 and v>0 then seg:[0, v ]
elseif u>=0 and u<v then seg:[u, v ]
elseif u>=0 and v<=0 then seg:[u,0.5]
else return([]),
if nmax=p[3]
then (nmax:p[3]+1,
par[nmax]:random(1.0)-0.5),
if p[5]<p[3]+1
then append(seg, [p[3]+1,p[4],p[3]+1,p[6],p[8]+1,p[8]+1])
else append(seg, [p[3]+1,p[4], p[5] ,p[6], p[7] ,p[8]+1]));

```

```

seg1stepminus(p):=block(
[u,v,niv,alpha],alpha:par[p[3]],
u:R(p[1]+alpha),v:R(p[2]+alpha),
if p[1]=-0.5 and p[2]=0.5 then seg:[-0.5,0]
elseif u<v and v<=0 then seg:[ u ,v]
elseif u<0 and v>=0 then seg:[ u ,0]
elseif u>=0 and v<=0 then seg:[-0.5,v]

```

```

else return([]),
if nmin=p[3]
then (nmin:p[3]-1,
      par[nmin]:random(1.0)-0.5),
if p[4]>p[3]-1
then append(seg,[p[3]-1,p[3]-1,p[5],p[8]+1,p[7],p[8]+1])
else append(seg,[p[3]-1,p[4],p[5],p[6],p[7],p[8]+1]);

```

On conserve les orbites des segments comme des files de segments, c'est pourquoi nous avons besoin de la fonction `lastpush`.

```
load(basic)$lastpush(c,l):=(symbolcheck(l),buildq([c,l],l:endcons(c,l)))$
```

La fonction `seg1step`, étant donnée une liste de segments `segs` la transforme en sa liste de segments images.

```

seg1step():=block(
[s,as,ns],
s:length(segs),
for i:1 thru s do
  (as:pop(segs),
   ns:seg1stepminus(as),
   if length(ns)>0 then
     lastpush(ns,segs),
   ns:seg1stepplus(as),
   if length(ns)>0 then
     lastpush(ns,segs))
);

```

Avant de lancer des calculs, s'il y a besoin de réinitialiser (ou initialiser) les paramètres de rotation, on le fait comme suit :

```

(n0:0,nmax:n0,nmin:n0,x0:random(1.0)-0.5);
(remarray(alpha),alpha[n0]:random(1.0)-0.5);

```



# Bibliographie

- [AF07] Artur Avila and Giovanni Forni. Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows. *Ann. of Math. (2)*, 165(2) :637–664, March 2007. (Cité en page 2.)
- [BS80] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai. Markov partitions for dispersed billiards. *Comm. Math. Phys.*, 78(2) :247–280, December 1980. (Cité en page 1.)
- [Bun79] L. A. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Comm. Math. Phys.*, 65(3) :295–312, October 1979. (Cité en page 1.)
- [CK76] J.-P. Conze and M. Keane. Ergodicité d’un flot cylindrique. In *Séminaire de Probabilités, I (Univ. Rennes, Rennes, 1976), Exp. No. 5*, page 7. Dépt. Math. Informat., Univ. Rennes, Rennes, 1976. (Cité en pages 3 et 21.)
- [Con76] J.-P. Conze. Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques. In *Séminaire de Probabilités, I (Univ. Rennes, Rennes, 1976), Exp. No. 2*, page 21. Dépt. Math. Informat., Univ. Rennes, Rennes, 1976. (Cité en pages 3 et 21.)
- [Con80] Jean-Pierre Conze. Ergodicité d’une transformation cylindrique. *Bull. Soc. Math. France*, 108(4) :441–456, 1980. (Cité en pages 3 et 21.)
- [Dou82] Raphaël Douady. *Applications du théorème des tores invariants*. Thèse de 3e cycle, Université Paris 7, June 1982. (Cité en page 1.)
- [FK36] Ralph H. Fox and Richard B. Kershner. Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron. *Duke Mathematical Journal*, 2(1) :147–150, 1936. (Cité en page 1.)
- [Kea75] Michael Keane. Interval exchange transformations. *Math Z*, 141(1) :25–31, February 1975. (Cité en pages 2, 4, 44 et 53.)
- [KMS85] Steven Kerckhoff, Howard Masur, and John Smillie. A rational billiard flow is uniquely ergodic in almost every direction. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 13(2) :141–142, 1985. (Cité en pages 2, 38 et 67.)
- [KS70] A B Katok and Anatolii M Stepin. Metric properties of measure preserving homeomorphisms. *Uspehi Mat. Nauk*, 25(2 (152)) :193–220, April 1970. (Cité en page 2.)

- [Laz73] V F Lazutkin. Existence of caustics for the billiard problem in a convex domain. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 37 :186–216, 1973. (Cité en page 1.)
- [Mas82] Howard Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1) :169–200, January 1982. (Cité en page 2.)
- [Mil65] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Based on notes by David W. Weaver. The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965. (Cité en page 47.)
- [Nek77] N N Nekhoroshev. An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable hamiltonian systems. *Uspehi Mat. Nauk*, 32(6(198)) :1–65, December 1977. (Cité en page 2.)
- [Pya69] A. S. Pyartli. Diophantine approximations of submanifolds of a euclidean space. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(4) :303–306, October 1969. (Cité en page 22.)
- [Ral14] David Ralston. 1/2-heavy sequences driven by rotation. *Monatshefte für Mathematik*, 175(4) :595–612, December 2014. (Cité en page 57.)
- [Sch77] Klaus Schmidt. *Cocycles on ergodic transformation groups*. Macmillan Company of India, Ltd., Delhi, 1977. Macmillan Lectures in Mathematics, Vol. 1. (Cité en pages 3, 21 et 38.)
- [Sin70] Ya. G. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. *Uspehi Mat. Nauk*, 25(2 (152)) :141–192, 1970. (Cité en page 1.)
- [Val09] Ferrán Valdez. Infinite genus surfaces and irrational polygonal billiards. *Geom Dedicata*, 143(1) :143–154, December 2009. (Cité en page 13.)
- [Vee82] William A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math. (2)*, 115(2) :201–242, March 1982. (Cité en page 2.)
- [Vee84] William A. Veech. The metric theory of interval exchange transformations. i : Generic spectral properties. *Am. J. Math.*, 106(6) :1331–1359, December 1984. (Cité en page 2.)
- [WHH13] Barak Weiss, Pascal Hubert, and W. Patrick Hooper. Dynamics on the infinite staircase. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(9) :4341–4347, March 2013. (Cité en page 41.)
- [Yoc10] Jean-Christophe Yoccoz. Interval exchange maps and translation surfaces. In *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic*, volume 10 of *Clay Math. Proc.*, pages 1–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, Providence, RI, 2010. (Cité en page 28.)
- [ZK75] A. N. Zemlyakov and A. B. Katok. Topological transitivity of billiards in polygons. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 18(2) :760–764, August 1975. (Cité en pages 1 et 10.)

---

**Résumé :** L'objet de cette thèse est l'étude des propriétés typiques d'une famille de transformations du cylindre discret  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  (où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est le cercle de longueur un), consistant à appliquer une rotation à chaque cercle du cylindre, puis couper tous les cercles en deux et déplacer une moitié de chaque cercle d'un niveau vers le bas et l'autre moitié d'un niveau vers le haut.

Cette étude s'appuie sur des résultats existants en théorie des échanges d'intervalles et en théorie des surfaces de translation compactes.

Tout d'abord, nous démontrons que pour presque toute suite bi-infinie de rotations, le système obtenu est conservatif (c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'ensemble errant de mesure positive).

Ensuite, nous démontrons que pour un ensemble  $G_\delta$ -dense de paramètres, le système est à la fois conservatif, minimal et ergodique.

La famille de transformations étudiée a un rapport heuristique avec une famille de billards planaires, ainsi qu'une traduction en termes de flots sur certaines surfaces de translation de genre infini. Ce lien est expliqué dans les premiers chapitres de la thèse. Le dernier chapitre présente quelques expériences numériques.

**Mots clés :** Billards polygonaux, théorie ergodique, systèmes dynamiques

---

**Abstract :** The main objective of this thesis is the study of the typical dynamical behaviour of a family of transformations on the discrete cylinder  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$  (where  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  is the length one circle). Apply a rotation to every single circle of the cylinder then cut every circle in two and move half of each circle one level down and the other half one level up.

To achieve this goal, we use existing results about interval exchange transformations and about compact translation surfaces.

First, we prove that for almost every bi-infinite sequence of rotations, the obtained system is conservative (i.e. there is no wandering set of positive measure).

Next, we prove that for a  $G_\delta$ -dense set of parameters, the described system is ergodic, minimal and conservative.

This system is heuristically related to a family of planar billiards, it also has a translation into flows on infinite genus translation surfaces.

**Keywords :** Polygonal billiards, ergodic theory, dynamical systems

---