Le groupe conforme des structures pseudo-riemanniennes

Vincent Pecastaing

▶ **To cite this version:**

Vincent Pecastaing. Le groupe conforme des structures pseudo-riemanniennes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112417 . tel-01127244

HAL Id: tel-01127244
https://theses.hal.science/tel-01127244

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS SUD

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

MATHEMATIQUES ORSAY

Université Paris-Sud

École Doctorale 142 : Mathématiques de la région Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Discipline : Mathématiques

Thèse de doctorat

Soutenue le 12 décembre 2014 par

Vincent Pecastaing

Le groupe conforme des structures pseudo-riemanniennes

Thèse soutenue au vu des rapports de MM. Renato Feres et Marc Herzlich

Composition du jury :

Président du jury :	M. Yves Benoist	Directeur de recherche (Université Paris-Sud)
	M. Sorin Dumitrescu	Professeur (Université Nice Sophia Antipolis)
	M. Elisha Falbel	Professeur (Université Pierre et Marie Curie)
Directeur de thèse :	M. Charles Frances	Professeur (Université de Strasbourg)
	M. Marc Herzlich	Professeur (Université Montpellier 2)
	M. Frédéric Paulin	Professeur (Université Paris-Sud)

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay CEDEX

Remerciements

Cette thèse ne pourrait commencer autrement que par l'expression de mes remerciements à Charles Frances, qui a été mon directeur. Durant ces trois années, il s'est constamment montré disponible et à l'écoute, et je suis heureux d'avoir eu la chance de bénéficier durant tout ce temps de son intuition et de son expérience. Il a guidé mes premiers pas de mathématicien sur des problématiques très riches et passionnantes, et pour lesquelles mon intérêt n'a fait que croître avec le temps. Pour tout cela, je tiens ici à lui témoigner ma profonde reconnaissance.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à Renato Feres et Marc Herzlich pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je suis honoré qu'ils aient pu prendre de leur temps pour relire mon manuscrit.

Je souhaite ensuite remercier vivement Yves Benoist, Sorin Dumitrescu, Elisha Falbel et Frédéric Paulin, qui ont aimablement accepté d'être membres de mon jury de thèse.

Durant ces quelques années, j'ai eu la chance de travailler parmi les chercheurs du laboratoire de mathématique d'Orsay. Ils m'ont toujours cordialement ouvert leur porte et c'est toujours spontanément qu'ils ont pris du temps pour écouter mes questions et discuter avec moi. Je les en remercie chaleureusement.

Je tiens à remercier les secrétaires du département, tout particulièrement Fabienne Jacquemin et Valérie Lavigne, pour leur aide précieuse face aux divers tracas administratifs que j'ai pu rencontrer.

J'ai également eu le plaisir de côtoyer au quotidien une équipe de doctorants très vivante et sympathique, au sein de laquelle ces trois années se sont déroulées dans une très bonne ambiance. Je remercie chacun d'entre eux.

Mes remerciements s'étendent à tous mes amis, et je suis heureux qu'une partie d'entre eux ait pu venir à ma soutenance. Je tiens particulièrement à exprimer ma reconnaissance à l'abbé Mole, ainsi qu'à toute sa confrérie.

Enfin, je voudrais terminer ces remerciements par une pensée toute particulière à ma famille et à mes proches, pour leur soutien et leur affection.

Résumé

Résumé

Cette thèse a pour objet principal l'étude des structures pseudo-riemanniennes et de leurs groupes de transformations conformes, locales et globales. On cherche à obtenir des informations générales sur la structure du groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne compacte de dimension au moins 3, et on s'intéresse également à la géométrie et la dynamique des actions conformes de groupes de Lie sur de telles structures. L'essentiel des résultats présentés en géométrie conforme se situe en signature lorentzienne $(1, n-1)$.

Le point de vue qui est adopté ici est d'interpréter une structure conforme de dimension au moins 3 comme étant la donnée d'une géométrie de Cartan modelée sur l'univers d'Einstein de même signature. Ces structures géométriques, introduites par Élie Cartan, sont rigides et leurs symétries locales ont des propriétés remarquables. Nous retrouvons dans ce contexte des résultats formulés par Mikhaïl Gromov à la fin des années 1980, et les mettons en œuvre sur le cas particulier de la géométrie de Cartan définie par une structure conforme.

Mots-clefs

Géométrie pseudo-riemannienne, Géométrie conforme, Structures de Cartan

---

The conformal group of pseudo-Riemannian structures

Abstract

The main object of this thesis is the study of pseudo-Riemannian structures and their local and global conformal transformation groups. The purpose is to obtain general informations about the conformal group of a compact pseudo-Riemannian manifold of dimension greater than or equal to 3, and we also study dynamical and geometrical properties of conformal Lie group actions on such structures. The largest part of the result that are presented in this work are formulated in the $(1, n-1)$ Lorentz signature.

The approach we have chosen here to study a conformal structure is to work with its associated normal Cartan geometry modeled on the Einstein universe with same signature. These geometric structures, introduced by Élie Cartan, are rigid and their local automorphisms have nice behaviours. We formulate in this context results of Mikhaïl Gromov, that go back to the late 1980', and use them in the particular case of the normal Cartan geometry associated to a conformal structure.

Keywords

Pseudo-Riemannian geometry, Conformal geometry, Cartan structures

Table des matières

Introduction **1**

Notations **11**

I Structures géométriques rigides **13**

1 G-structures de type fini et leurs automorphismes **15**
1.1 G-structures 15
1.1.1 Fibrés des repères d'une variété différentielle 15
Définitions générales 15
Forme canonique sur le fibré des repères d'ordre 1 16
1.1.2 Définition générale des G-structures et premiers exemples 17
1.1.3 Prolongation des G-structures 18
1.1.4 G-structures de type fini 21
1.2 Le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini 22
1.2.1 Les résultats de Palais sur les actions infinitésimales de groupes de Lie 22
1.2.2 Le groupe des automorphismes d'un parallélisme 24
1.2.3 Le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini . . . 26

2 Géométries de Cartan et le problème d'équivalence **29**
2.1 Généralités 29
2.1.1 Un peu de géométrie différentielle dans les espaces homogènes . . . 30
La forme de Maurer-Cartan 30
Le géométrie de Cartan canonique 31
2.1.2 Définition générale 32
2.1.3 Courbure d'une géométrie de Cartan 33
2.1.4 Isomorphismes et champs de Killing 33
2.1.5 Dérivation covariante universelle 35
2.2 Le problème d'équivalence 36
2.2.1 Quelques exemples connus 36
2.2.2 Le cas des G-structures munies de connexions linéaires 36
2.3 Problème d'équivalence pour les structures conformes 37
2.3.1 L'espace modèle de la géométrie conforme 38
Un mauvais candidat 38
L'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$ 38

L'algèbre $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$ 39
Le stabilisateur d'une direction isotrope 40
Décomposition de Cartan de $\mathfrak{o}(2,n)$ 40
Projections stéréographiques de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ 41
2.3.2 Le fibré de Cartan défini par une structure conforme 43
Connexions de Weyl 43
La première prolongation du fibré $\mathcal{P} \to M$ 44
Structure de $(CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n)$-fibré principal sur $\mathcal{P}^{(1)} \to M$ 45
Quelques identifications 47
2.3.3 La connexion de Cartan 48
La 1-forme canonique sur $\mathcal{P}^{(1)}$ 48
La condition de normalisation 50

II Orbites des isométries locales de structures rigides 57

3 Homogénéité locale des géométries de Cartan 59
3.1 Définitions 60
3.1.1 Orbites des automorphismes locaux, homogénéité locale 60
3.1.2 Homogénéité infinitésimale 61
3.1.3 Quelques commentaires. 61
3.2 Preuve de la généralisation du théorème de Singer 62
3.2.1 Sous-variétés parallèles d'une géométrie de Cartan 62
3.2.2 Conclusion 65
3.3 Preuve du théorème de l'orbite dense 65

4 Orbites des isométries locales d'une structure rigide 67
4.1 Définitions 69
4.1.1 Générateurs de Killing 69
4.1.2 Champs de Killing locaux 70
4.1.3 Lieu d'intégrabilité 71
4.1.4 Une formulation plus précise du théorème d'intégrabilité 71
Objet de la démonstration du théorème 4.1 71
4.2 Les résultats de Gromov pour les parallélismes 72
4.2.1 Intégration des générateurs de Killing 72
4.2.2 Orbites des automorphismes locaux d'un parallélisme 76
4.3 Des parallélismes aux géométries de Cartan générales 77
4.3.1 Théorème d'intégrabilité 77
4.3.2 Agencement des orbites 78
4.4 Le théorème d'intégrabilité pour les structures analytiques réelles 79
4.4.1 Le théorème d'intégrabilité en analytique 79
4.4.2 Quelques exemples explicites 81
Nécessité de l'hypothèse de compacité dans le théorème 4.4 82
4.5 Extensions aux géométries de Cartan généralisées 82
4.5.1 Structures de Cartan généralisées 83
Généralisation des résultats 83
4.5.2 Éléments de preuves 85
Preuve du théorème 4.6 85

Preuve du théorème 4.5 86
4.6 Une autre approche du théorème de Singer 86

III Actions conformes de groupes de Lie sur des variétés compactes 89

5 Autour d'un théorème de plongement 91
5.1 Historique 91
5.1.1 Applications de Gauss 91
5.1.2 Dynamique algébrique mesurée 92
5.1.3 Le théorème de plongement de Zimmer et ses conséquences en géométrie lorentzienne 93
5.2 Théorème de plongement pour les géométries de Cartan 93
5.2.1 Applications de Gauss dans les géométries de Cartan 93
5.2.2 Étude des points de Zimmer sur quelques exemples 95
5.2.3 Énoncé du théorème de Bader-Frances-Melnick et esquisse de la preuve 96
5.2.4 Liens avec le théorème initial 97
5.3 Sur des mises en oeuvre du théorème de plongement 97
5.3.1 Localisation des points de Zimmer 98
5.3.2 Cas d'une action localement libre sur une structure conforme 98
5.3.3 Cas général d'une action de groupe sur une structure conforme . . . 99

6 Actions conformes de groupes de Lie simples 101
6.1 Classification des groupes de Lie simples non compacts qui peuvent agir conformément 103
6.1.1 Contraintes sur le rang réel 103
6.1.2 Préliminaires algébriques 104
6.1.3 Exclusion des algèbres $\mathfrak{sp}(1,k)$, $k \geqslant 2$, et de $\mathfrak{f}_4^{-20}$ 108
Un plongement fourni par le théorème 5.4 108
Sous-groupes unipotents de P 108
Incompatibilité algébrique 110
6.2 Caractérisation des actions inessentielles de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ 111
6.3 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$-orbites de dimension au plus 2 114
6.3.1 Description locale des orbites voisines d'un point fixe de l'action . . 115
Définition de l'holonomie d'un automorphisme fixant un point . . . 116
Généralités autour de la linéarisation des transformations conformes. 116
Représentation d'isotropie 119
Feuilletage d'un voisinage d'un point fixe 120
Signature des orbites 122
6.3.2 Adhérence des orbites riemanniennes 124
6.3.3 Une alternative 124
6.4 Platitude conforme pour les actions essentielles analytiques 125
6.4.1 Platitude sous l'existence d'orbites de dimension 1 125
6.4.2 Preuve du théorème principal 126
Signature de l'orbite de x_0 127
Travail algébrique sur l'holonomie 127
Le champ fourni par le théorème d'intégrabilité des générateurs de Killing 130

Dynamique du flot $\phi^t_{A^*}$ 132
Fin de la preuve 136
6.5 Extension aux groupes non localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ 137

7 Actions conformes de groupes de Lie nilpotents 139
7.1 Actions conformes localement libres de groupes nilpotents d'indice 2 142
7.1.1 Le cas des groupes de Heisenberg 143
7.1.2 Cas général 145
7.2 Actions conformes essentielles 146
7.2.1 Holonomie de champs de vecteurs et platitude conforme 146
Propriétés dynamiques d'éléments de P sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ 147
7.2.2 Préliminaires algébriques sur des représentations de $\mathfrak{heis}(3)$ 148
7.2.3 Existence d'un point où l'holonomie de Z est une translation de type lumière 149
Un lemme sur les translations de type lumières de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ 152
7.2.4 Conclusion 153
7.2.5 Démonstration du théorème 7.2 154
7.3 Caractérisation algébrique des groupes de Lie nilpotents non abélien qui peuvent agir conformément 155

Bibliographie 157

Introduction

Le travail qui est présenté dans cette thèse est principalement motivé par des questions de géométrie conforme pseudo-riemannienne en dimension supérieure ou égale à 3, et on s'intéresse tout particulièrement à la signature lorentzienne. Ces questions sont abordées en utilisant la *géométrie de Cartan* que définit une telle structure conforme. Les géométries de Cartan sont des structures géométriques introduites par É. Cartan dans les années 1920 et sont des exemples de structures géométriques *rigides*. Notre travail en géométrie conforme utilise des résultats généraux sur les automorphismes locaux et infinitésimaux des structures rigides, reformulés dans le cadre des géométries de Cartan.

Structures géométriques rigides

La notion générale de structure géométrique rigide est délicate à définir, et il est difficile de le faire rigoureusement sans tomber dans un formalisme assez lourd. En première approche, on peut dire que l'on qualifie de rigide les structures géométriques qui ont *peu de symétries locales*. Le sens un peu plus précis que l'on peut mettre derrière cette idée est que dans une structures rigide *à l'ordre* r_0, un automorphisme est complètement déterminé par son r_0-jet en un point qu'il fixe, *ie* par la partie régulière de son développement de Taylor à l'ordre r_0. L'exemple le plus classique de ce phénomène se situe en géométrie riemannienne ou affine : lorsqu'une transformation affine f d'une variété affine (M, ∇) fixe un point x et a sa différentielle $T_x f$ triviale en ce point, f coïncide avec l'identité sur la composante connexe de x.

Dans [Gro88], M. Gromov propose une définition générale des structures géométriques rigides. Bien qu'il ne soit pas clair que la définition de Gromov englobe tous les exemples possibles, elle reste à notre connaissance la plus flexible et permet d'inclure des structures très variées (voir également [DG91]). Nous ne rentrerons pas dans le formalisme des définitions de Gromov, contentons-nous de citer quelques exemples célèbres.

Les variétés différentielles munies de métriques pseudo-riemanniennes ou de connexions affines, les structures conformes pseudo-riemanniennes en dimension supérieure ou égale à 3 ou encore les variétés munies de structures projectives sont tous des exemples de structures rigides. *A contrario*, les structures conformes en dimension 2, la donnée d'une forme symplectique, d'un champ de vecteur ou encore d'une distribution de k-plans sur une variété différentielle ne définissent pas une structure rigide.

En dimension 2, le théorème d'uniformisation de Riemann peut nous faire deviner que les structures conformes ne sont pas rigides. Il nous dit en effet que sur la sphère de Riemann, il y a *beaucoup* de transformations conformes locales puisqu'à biholomorphisme près, $\mathbf{C}P^1$ ne contient que trois ouverts simplement connexes. En dimension plus grande, un très bel exemple de la manifestation de la rigidité des structures conformes est le

Théorème (Liouville, 1850)**.** *Soient $n \geqslant 3$ et $\mathbf{S}^n$ la sphère de dimension n munie de sa métrique ronde. Si U et V sont deux ouverts non vides et connexes de $\mathbf{S}^n$, alors tout difféomorphisme conforme $f : U \to V$ est restriction d'une transformation de Möbius de $\mathbf{S}^n$.*

Les « espaces généralisés » de Cartan. Une autre grande famille de structures géométriques rigides est ce qu'on appelle les *géométries de Cartan*. Ces géométries furent introduites par É. Cartan (voir [Car52]) et l'idée était de construire des versions *courbes* des espaces homogènes classiques, au même sens qu'une variété riemannienne est une version courbée de l'espace euclidien. Une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ sur une variété différentielle est donc toujours définie relativement à un espace homogène $\mathbf{X}$, appelé *espace modèle*.

Parfois, la donnée d'une géométrie de Cartan est en fait équivalente à celle d'une structure géométrique « classique ». Par exemple, une géométrie de Cartan $(M^n, \mathcal{C})$ dont l'espace modèle est l'espace affine définit canoniquement une connexion affine ∇ sur M, et inversement à toute connexion affine correspond une géométrie de Cartan modelée sur l'espace affine. De plus, cette correspondance est fonctorielle. D'une façon générale, si on parvient à exhiber une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés munies de géométries de Cartan modelées sur un certain espace homogène $\mathbf{X}$ et la catégorie des variétés munies d'une structure « classique », on dit que l'on a résolu le *problème d'équivalence* pour ces structures géométriques. Cette problématique est un domaine de recherche à part entière. À l'heure actuelle, le problème d'équivalence a été résolu pour beaucoup de structures géométriques rigides, et on trouve à l'intersection des structures rigides de Gromov et des géométries de Cartan la plupart des exemples familiers.

Outre la présentation générale des géométries de Cartan, l'objet du chapitre 2 est d'énoncer et de donner une démonstration du problème d'équivalence pour les structures conformes pseudo-riemanniennes de dimension au moins 3. Ce chapitre ne prétend rien apporter de nouveau, si ce n'est la présentation et le choix du point de vue. Nous avons pris le parti de relier la construction de la géométrie de Cartan associée à une structure conforme à la notion de *prolongation des G-structures* que l'on introduit au premier chapitre.

En signature riemannienne, le problème d'équivalence pour les structures conformes remonte à Cartan. Il s'énonce de la façon suivante.

Théorème (Cartan, 1923)**.** *Soit $n \geqslant 3$. Il existe une correspondance qui à toute structure conforme riemannienne $(M^n, [g])$ de dimension n associe une géométrie de Cartan $(M^n, \mathcal{C})$ normalisée, modelée sur la sphère conforme riemannienne $(\mathbf{S}^n, [g_{can}])$, et telle qu'un difféomorphisme entre deux variétés riemanniennes est conforme si et seulement si c'est un isomorphisme entre les géométries de Cartan correspondantes.*

Si on n'est pas en signature riemannienne, l'espace homogène approprié pour résoudre le problème d'équivalence pour les structures conformes est l'*univers d'Einstein* $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Historiquement, il a été introduit en signature lorentzienne et il s'agissait d'une solution statique aux équations d'Einstein. Outre sa dimension physique, cet espace est un objet mathématique très intéressant. C'est un espace homogène sous l'action de $PO(p+1, q+1)$, compact, et naturellement muni d'une classe conforme de signature (p, q). Le groupe $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ de ses transformations conformes est tout $PO(p+1, q+1)$, et a la dimension maximale possible pour le groupe conforme d'une structure conforme de signature (p, q).

ORBITES DES AUTOMORPHISMES LOCAUX DES GÉOMÉTRIES DE CARTAN : HOMOGÉNÉITÉ LOCALE ET THÉORÈME DE STRUCTURE DES ORBITES SUR L'OUVERT D'INTÉGRABILITÉ.

Soit (M, ϕ) une structure géométrique. On dit que (M, ϕ) est *localement homogène* si pour tous points $x, y \in M$, il existe des voisinages ouverts $U, V \subset M$ de x et y et $f : U \to V$ un automorphisme local de (M, ϕ) tel que $f(x) = y$. D'une façon plus générale, la relation sur M définie par $x \sim y$ si et seulement s'il existe un automorphisme local qui envoie x sur y est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelées *orbites des automorphismes locaux* de (M, ϕ), ou Aut^{loc}-orbites en condensé. La structure géométrique (M, ϕ) est donc localement homogène si et seulement si elle ne contient qu'une seule Aut^{loc}-orbite.

A priori, les automorphismes locaux d'une structure géométrique quelconque peuvent avoir des dynamiques chaotiques et les Aut^{loc}-orbites peuvent avoir des allures pathologiques. Gromov a démontré dans [Gro88] que lorsque la structure géométrique est rigide, en dehors d'un lieu exceptionnel qui est un fermé d'intérieur vide, ça n'est pas le cas. Un de ses résultats célèbres à ce sujet est le *théorème de l'orbite dense.*

Théorème ([Gro88])**.** *Soit (M, ϕ) une structure géométrique rigide de type algébrique. Supposons qu'il existe une Aut^{loc}-orbite qui est dense dans M. Alors il existe un ouvert dense U de M qui est localement homogène.*

Nous ne détaillons pas ce qu'il faut entendre par « type algébrique ». Le lecteur non familier avec les structures géométriques "à la Gromov" peut ignorer cette hypothèse en première approche, cette dernière étant très peu restrictive.

On peut mesurer la force de ce résultat en pensant à la situation où un groupe discret d'automorphismes de (M, ϕ) admet une orbite dense. Gromov présentait ce théorème comme un corollaire d'un résultat plus fin, qui s'énonce comme suit.

Théorème ([Gro88])**.** *Soit (M, ϕ) une structure géométrique rigide de type algébrique. Il existe un ouvert dense de M dans lequel les Aut^{loc}-orbites sont des sous-variétés fermées.*

Dans les chapitres 3 et 4, nous revisitons ces résultats dans le cas des géométries de Cartan. Informellement, l'idée générale est que dans une géométrie de Cartan, les Aut^{loc}-orbites sont les lignes de niveaux d'applications qui généralisent les notions de courbures et de dérivées covariantes de la courbure en géométrie riemannienne. Les résultats que nous formulons sur les automorphismes locaux et leurs orbites s'obtiennent alors en étudiant ces lignes de niveaux.

Homogénéité locale des géométries de Cartan. Nous commençons au chapitre 3 par établir que l'homogénéité locale d'une géométrie de Cartan découle d'une notion de constance de la courbure et de ses dérivées covariantes jusqu'à un certain ordre fixée à l'avance. Ceci généralise un résultat des années 1960 en géométrie riemannienne, dû à I. Singer.

Sans rentrer dans une définition précise, une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ d'espace modèle $\mathbf{X} = G/P$ sur une variété M est la donnée d'un P-fibré principal $\pi : \widehat{M} \to M$, de base M, et d'une 1-forme $\omega \in \Omega^1(\widehat{M}, \mathfrak{g})$, appelée connexion de Cartan. Les morphismes entre géométries de Cartan sont les morphismes de P-fibrés principaux qui respectent les connexions de Cartan. La 1-forme ω définit une application P-équivariante $K : \widehat{M} \to V_K$,

appelée *application courbure*, où V_K est un espace vectoriel sur lequel P agit linéairement. À tout ordre $r \geqslant 1$, ω définit également des applications P-équivariantes $D^r K : \widehat{M} \to V_K^r$, appelées dérivées covariantes de la courbure. Puisqu'elles sont définies par ω, ces applications sont invariantes par les automorphismes locaux.

Nous obtenons le résultat suivant (théorème 3.1), et expliquons comment en déduire très rapidement une version du théorème de l'orbite dense pour les géométries de Cartan.

Théorème. *Soient $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan d'espace modèle $\boldsymbol{X} = G/P$ et $m = \dim P$. Si les applications P-équivariantes $K, D^1K, \dots, D^mK$ sont toutes à valeurs dans une seule P-orbite, alors $(M,\mathcal{C})$ est localement homogène.*

Intégrabilité des générateurs de Killing. Dans le cas général (*ie* sans hypothèse sur la courbure), il est naturel de s'intéresser aux lignes de niveau de ces applications. À tout ordre $r \geqslant 1$, il existe un ouvert dense Ω de M tel que $K, \dots, D^rK$ sont de rang localement constant sur $\pi^{-1}(\Omega)$. Les lignes de niveaux de ces applications sont donc des sous-variétés fermées de cet ouvert, et quitte à réduire Ω ces sous-variétés vont se projeter sur des sous-variétés fermées de Ω.

L'objet du chapitre 4 est de montrer que l'on peut toujours choisir Ω et r de sorte que les sous-variétés de Ω ainsi obtenues soient exactement les Aut^{loc}-orbites dans Ω, prouvant ainsi le théorème sur la structure des Aut^{loc}-orbites. L'ingrédient clé de la démonstration est un résultat d'intégrabilité motivé par la question suivante.

Le pendant infinitésimal de la notion d'automorphisme d'une géométrie de Cartan est celle de *champ de Killing*. Il s'agit simplement de champs de vecteurs sur M dont les flots locaux sont formés d'automorphismes locaux. On vérifie qu'un champ de vecteurs X sur M est de Killing si et seulement s'il existe $\widehat{X}$ un champ de vecteurs sur $\widehat{M}$ qui commute à l'action de P, vérifie $\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega = 0$ et $\pi_*\widehat{X} = X$.

Question. *Étant donné un vecteur tangent $A \in T_{\widehat{x}}\widehat{M}$, on se demande comment détecter s'il s'étend en un champ de Killing local de $(M,\mathcal{C})$, c'est-à-dire s'il existe un champ de vecteurs $\widehat{X}$ défini sur un voisinage de $\widehat{x}$ dans $\widehat{M}$, commutant à l'action de P tel que $\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega = 0$ et $\widehat{X}(\widehat{x}) = A$.*

Si un tel champ de vecteurs existe, il est nécessaire qu'à tout ordre $r \geqslant 1$ on ait $(\mathcal{L}_A D^r K)_{\widehat{x}} = 0$. Dans le cas général, on appelle *générateur de Killing* d'ordre $m \geqslant 1$ en $\widehat{x}$ tout vecteur tangent $A \in T_{\widehat{x}}\widehat{M}$ tel que $(\mathcal{L}_A D^r K)_{\widehat{x}} = 0$ pour tout $1 \leqslant r \leqslant m$. Nous démontrons alors le résultat ci-dessous (théorème 4.1).

Théorème. *Soient $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\boldsymbol{X} = G/P$ et $m = \dim G$. Il existe un ouvert dense Ω de M tel qu'en tout point de $\pi^{-1}(\Omega)$, tout générateur de Killing d'ordre m s'étend en un champ de Killing local.*

Ce théorème avait été énoncé dans quasiment les mêmes termes par K. Melnick, dans [Mel11], et l'auteure avait principalement détaillé le cas de la régularité analytique réelle. Il s'est avéré que la preuve du résultat général en régularité $\mathcal{C}^\infty$ contient une erreur. L'objet du chapitre 4 est essentiellement de donner une nouvelle démonstration de ce théorème, ainsi que quelques extensions.

Formellement, ce résultat nous dit qu'il existe une application $\varphi : \widehat{M} \to V$, où V est un espace vectoriel, telle que sauf dans un lieu exceptionnel, tout vecteur de $\mathrm{Ker}\, T_{\widehat{x}}\varphi$ s'étend en un champ de Killing local. Si de plus la géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$ est analytique

réelle, et compacte, alors ceci est en fait vrai sur toute la variété (théorème 4.4). Ce dernier théorème va nous servir lorsque nous étudierons les actions conformes de groupes de Lie simples sur des variétés lorentziennes compactes analytiques au chapitre 6 : grâce à la compacité de la variété, nous pourrons par un argument dynamique localiser des points où $\operatorname{Ker} T\varphi$ contient des directions intéressantes, et celles-ci nous fourniront des champs de Killing conformes locaux qui ne proviennent pas de l'action du groupe considéré.

GÉOMÉTRIE CONFORME LORENTZIENNE

Définition (Structures conformes)**.** Soit M une variété différentielle. Deux métriques pseudo-riemanniennes g et g' sur M sont dites *conformes* s'il existe une fonction lisse $\sigma : M \to \mathbf{R}$ telle que $g' = \mathrm{e}^{\sigma} g$ (g et g' ont nécessairement même signature). Si g est une métrique sur M, on définit sa *classe conforme* par

$$[g] = \{g',\ g' \text{ conforme à } g\}.$$

Une *structure conforme* de signature (p, q) sur une variété différentielle M de dimension $p + q$ est la donnée d'une classe conforme $[g]$ de signature (p, q) sur M.

Si $(M, [g])$ et $(N, [h])$ sont deux structures conformes, une *application conforme* entre ces deux structures est un difféomorphisme local $f : M \to N$ tel que $f^*[h] = [g]$.

Aspects algébriques

Les difféomorphismes conformes d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) forment un groupe $\operatorname{Conf}(M, [g])$, et en dimension supérieure ou égale à 3, ce dernier admet une unique structure différentielle qui en fait un groupe de Lie réel qui agit différentiablement sur M. La première problématique générale qui est abordée dans ce travail se formule comme suit.

Question 1. *Est-il possible de classer les groupes de Lie de la forme* $\operatorname{Conf}(M, [g])$*, avec* $(M, [g])$ *une structure conforme lorentzienne compacte de dimension au moins* 3 *?*

On peut bien sûr formuler la question analogue pour le groupe des isométries d'une variété lorentzienne compacte. Une réponse très satisfaisante y a été apportée en 1995 par des travaux simultanés et indépendants de S. Adams et G. Stuck ([AS97]) d'une part et A. Zeghib [Zeg98a] d'autre part.

Théorème (Adams-Stuck, Zeghib)**.** *Soient* (M^n, g) *une variété lorentzienne compacte, avec* $n \geqslant 2$*, et* $G = \operatorname{Isom}(M, g)_0$ *la composante neutre de son groupe d'isométries. Le revêtement universel de ce groupe se décompose en* $\widetilde{G} = S \times K \times \mathbf{R}^k$*, où* K *est un groupe de Lie semi-simple compact, et* S *est dans la liste suivante :*

- $\{id\}$ *;*
- *le revêtement universel* $\widetilde{\operatorname{SL}(2, \mathbf{R})}$ *;*
- *un groupe de Heisenberg* $\operatorname{Heis}(2d + 1)$*,* $d \geqslant 1$ *;*
- *une famille dénombrable de produits semi-directs résolubles (non nilpotents) de la forme* $\mathbf{R} \ltimes \operatorname{Heis}(2d + 1)$*,* $d \geqslant 1$*.*

Réciproquement, pour chaque groupe de Lie $\widetilde{G}$ *de cette forme, il existe une variété lorentzienne compacte* (M, g) *telle que* $\operatorname{Isom}(M, g)_0$ *est revêtu par* $\widetilde{G}$*.*

Cette classification se fait donc à isomorphisme local près. À l'heure actuelle, il est encore très difficile d'obtenir une information générale sur $\operatorname{Isom}(M, g)/\operatorname{Isom}(M, g)_0$, qui

représente la "partie discrète" du groupe des isométries, et il est au moins tout aussi compliqué de comprendre les groupes discrets de transformations conformes d'une variété pseudo-riemannienne. C'est pour cette raison que dans ce travail, nous restreignons la question 1 à la composante neutre $\mathrm{Conf}(M,[g])_0$ du groupe conforme.

Soient $(M,[g])$ une structure conforme lorentzienne compacte, et $G = \mathrm{Conf}(M,[g])$. La *décomposition de Lévi* de $\mathfrak{g}$ nous assure qu'il existe une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ (pas nécessairement unique) telle que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, où $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ est le radical résoluble de $\mathfrak{g}$. Aussi, l'approche choisie pour aborder la question 1 consiste à commencer par comprendre quelles sont les sous-algèbres semi-simples $\mathfrak{s}$ que l'on peut trouver au sein de $\mathrm{Lie}(\mathrm{Conf}(M,[g]))$, et quelles sont les possibilités pour le radical résoluble de cette algèbre de Lie. Si l'on parvient à classer ces algèbres, il restera alors à déterminer quels sont les produits semi-directs possibles que l'on peut réaliser pour obtenir l'algèbre de Lie d'un groupe conforme.

Ainsi, on voudrait commencer par classer, à isomorphisme local près, tous les groupes de Lie semi-simples et tous les groupes de Lie résolubles qui peuvent agir fidèlement par transformations conformes d'une variété lorentzienne compacte. Ces problématiques avaient déjà été abordées par U. Bader et A. Nevo en 2002 ([BN02]) pour les groupes simples et C. Frances et K. Melnick en 2010 ([FM10]) pour les groupes nilpotents.

Ces questions sont traitées séparément dans les chapitres 6 et 7. Pour les actions de groupes de Lie semi-simples, on donne un résultat de classification à isomorphisme local près des groupes de Lie simples non compacts qui admettent une action conforme fidèle sur une variété lorentzienne compacte. C'est le théorème 6.1, dont nous reproduisons l'énoncé ci-dessous.

Théorème. *Soit H un groupe de Lie simple, connexe et non compact. Supposons que H agit fidèlement par transformations conformes sur une variété lorentzienne compacte (M,g), avec $\dim M \geqslant 3$. Alors, l'algèbre de Lie de H est isomorphe à l'une des algèbres de Lie ci-dessous :*

- $\mathfrak{o}(1,k)$, *pour* $k \geqslant 2$,
- $\mathfrak{su}(1,k)$, *pour* $k \geqslant 2$,
- $\mathfrak{o}(2,k)$, *pour* $k \geqslant 3$.

Réciproquement, pour chaque algèbre $\mathfrak{h}$ de cette liste, il existe un groupe de Lie H tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ et une variété lorentzienne compacte (M,g) telle que $H \subset \mathrm{Conf}(M,g)$.

Au chapitre 7, faute de donner une description générale des groupes de Lie résolubles admettant une action conforme, nous proposons une étude des actions conformes de groupes de Lie connexes nilpotents non abéliens sur des variétés lorentziennes compactes. On y démontre (théorème 7.1) que si H est un tel groupe, alors il existe un plongement $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{o}(2,n)$. Puisque réciproquement tout sous-groupe de Lie de $PO(2,n)$ agit conformément sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, la classification à isomorphisme local près des groupes de Lie nilpotents agissant sur une variété lorentzienne compacte se ramène donc à une question purement algébrique.

Aspects géométriques

La preuve du théorème 7.1 se fait en démontrant que si la dynamique de l'action conforme d'un groupe nilpotent est suffisamment *riche* (en particulier lorsque le groupe qui agit n'est pas abélien), alors la variété contient un ouvert *conformément plat*, c'est-à-

dire localement conformément difféomorphe à l'espace de Minkowski. Ceci va dans le sens d'une conjecture géométrique générale dûe à A. Lichnerowicz (1964, voir [Fer99]).

Rappelons que le groupe des isométries d'une variété riemannienne compacte est un groupe de Lie compact. Cependant, il arrive que son groupe conforme ne soit pas compact. C'est le cas de la sphère riemannienne standard, dont le groupe conforme est $PO(1,n+1)$. Lichnerowicz conjecturait que les variétés riemanniennes compactes admettant un groupe conforme non compact sont classables. Cette conjecture a été résolue par J. Ferrand et M. Obata (indépendamment et sur une période relativement longue), et le résultat a été étendu aux variétés riemanniennes non compactes. Mais pour en donner un énoncé, il faut reformuler l'hypothèse.

Groupes de transformations conformes essentielles. L'idée derrière la conjecture de Lichnerowicz (dans le cas compact) est que la non compacité du groupe conforme assure l'existence de transformations conformes qui *ne sont pas* des isométries. N'étant pas astreintes à préserver une métrique et sa connexion de Levi-Civita, de telles transformations peuvent avoir des propriétés remarquables. Il est par exemple possible d'observer des *dynamiques non linéarisables* au voisinage d'un point fixe ou encore des dynamiques *ne préservant aucun volume fini* (des contractions d'ouverts sur des fermés d'intérieur vide, par exemple). L'hypothèse faite dans la conjecture de Lichnerowicz est donc la présence de transformations "purement conformes".

Définition. Soient (M,g) une variété pseudo-riemannienne et H un sous-groupe fermé de $\mathrm{Conf}(M,[g])$. On dit que H est essentiel si pour toute métrique g' dans la classe conforme $[g]$, on a toujours $H \not\subset \mathrm{Isom}(M,g')$. Une structure conforme $(M,[g])$ est essentielle si $\mathrm{Conf}(M,[g])$ l'est.

On vérifie qu'une structure riemannienne compacte $(M,[g])$ est essentielle si et seulement si son groupe conforme est non compact. Le théorème de Ferrand et Obata s'énonce alors comme suit.

Théorème ([Fer96],[Oba72])**.** *Soit (M^n,g) une variété riemannienne, avec $n \geqslant 2$. Supposons que $(M,[g])$ est essentielle. Alors,*

- *si M est compacte, M est conformément équivalente à la sphère standard $\mathbf{S}^n$.*
- *si M est non compacte, M est conformément équivalente à l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$.*

Ce résultat donne ainsi une réponse définitive quant à la compréhension des structures conformes riemanniennes essentielles.

Les limites de cette approche en signature non riemannienne. Une question naturelle arrive : les structures conformes essentielles sont-elles classables en toutes signatures ? A-t-on un théorème analogue au théorème de Ferrand-Obata (avec les analogies $\mathbf{S}^n \leftrightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ et $\mathbf{E}^n \leftrightarrow \mathbf{R}^{p,q}$) ? Dans [Fra02], C. Frances a répondu négativement à ces questions. Ses travaux montrent en fait qu'en signature non riemannienne, il ne semble pas possible de déduire une conclusion *globale* de l'essentialité d'une structure conforme. La question qui semble à l'heure actuelle pertinente est

Question 2. *Une structure conforme pseudo-riemannienne compacte et essentielle doit-elle être conformément plate ?*

Nous proposons des réponses partielles à cette question, qui vont dans le sens d'une réponse positive. Nous considérons la même question sur une structure conforme lorentzienne compacte, mais avec comme hypothèse plus forte que le groupe conforme contient un sous-groupe H essentiel qui est simple non compact ou encore nilpotent non abélien. Nous parvenons alors à prouver que si la structure conforme est de plus analytique réelle, alors elle est conformément plate.

Caractérisation de l'inessentialité. Les premiers résultats que nous formulons à ce sujet donnent une caractérisation dynamique de l'essentialité d'un tel groupe H de transformations conformes : dans les deux cas (simple et nilpotent), l'inessentialité se traduit par le fait que l'action est localement libre partout. Supposer un tel groupe H essentiel se ramène donc à supposer qu'il existe des points de la variété dont les stabilisateurs sont non discrets.

Résultats de platitude conforme. Dans le cas où H est supposé connexe, nilpotent non abélien, et essentiel, nous pourrons directement trouver un point x de la variété en lequel le sous-groupe d'isotropie H_x contient un flot ayant une dynamique telle qu'un voisinage de x doit être conformément plat. Par analyticité, on conclut alors directement que la variété est conformément plate.

Dans le cas où H est supposé simple non compact, une telle approche ne nous a pas suffi pour conclure. Non seulement nous travaillerons dans des lieux où les points ont des isotropies non discrètes, mais en plus nous démontrerons qu'en certains de ces points, il existe un flot conforme local, linéaire et essentiel, et *qui ne provient pas de l'action de* H. Son existence sera donnée par le résultat d'intégrabilité des générateurs de Killing. C'est alors en considérant conjointement, et la dynamique de H, et la dynamique de ce flot local, que nous parvenons à prouver qu'un ouvert est conformément plat.

En régularité analytique réelle, nous obtenons ainsi :

Théorème. *Soit* (M, g) *une variété lorentzienne compacte, de dimension supérieure ou égale à* 3. *On suppose que* (M, g) *est analytique réelle. Supposons que le groupe de ses transformations conformes* $\mathrm{Conf}(M, g)$ *contient un sous-groupe de Lie connexe* H *qui est soit simple non compact, soit nilpotent non abélien. Alors,*

- *ou bien il existe une métrique* g_0 *conforme à* g *telle que* $H \subset \mathrm{Isom}(M, g_0)$ *;*
- *ou bien* $(M, [g])$ *est conformément plate.*

Vers un théorème de plongement. La question 2, dans toute sa généralité, est difficile et nous sommes encore loin de pouvoir y apporter une réponse complète. Pour le moment, le problème suivant semble plus abordable.

Question 3. *Si* $(M^n, [g])$ *est une structure conforme lorentzienne, compacte et essentielle, et si* $H = \mathrm{Conf}(M, [g])$*, existe-t-il un plongement* $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{o}(2, n)$ *?*

Cette dernière question est en effet plus faible que la question 2 car d'une façon générale, si H est un groupe de Lie qui agit conformément sur une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q) conformément plate, alors il existe un plongement $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{o}(p+1, q+1)$. Bien entendu, il n'est pas nécessaire de prouver la platitude conforme de la variété pour exhiber un tel plongement. Dans des travaux en cours, nous améliorons le théorème 6.1 sur la classification des groupes simples non compacts qui peuvent agir conformément et

nous sommes proche de prouver que toute sous-algèbre semi-simple sans facteur compact de $\mathrm{Lie}(\mathrm{Conf}(M^n, [g]))$ se plonge dans $\mathfrak{o}(2, n)$.

Notons pour finir qu'une réponse positive à la question 3 caractériserait définitivement les groupes de Lie qui peuvent agir conformément sur une variété lorentzienne compacte : ou bien l'action du groupe est inessentielle et on est ramené à la classification de Adams, Stuck et Zeghib, ou bien l'action est essentielle et dans ce cas le groupe serait localement isomorphe à un sous-groupe de $PO(2, n)$.

Notations

Sauf mention explicite du contraire, on désignera toujours par « variété » une variété différentielle réelle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ceci est tout de même rappelé par endroit). Si f est une application différentiable, on adoptera parfois la notation f_* pour désigner sa différentielle, mais tant que cela n'alourdit pas trop le texte on lui a préféré la notation $T_x f$. Les groupes de Lie sont réels et l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est notée avec le même symbole en fonte gothique (par exemple, $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$). Excepté pour le groupe structurel d'un fibré principal, les actions de groupe se font à gauche. Sauf si cela prête à confusion, nous notons L_g (resp. R_g) l'action gauche de $g \in G$ sur une variété sur laquelle le groupe G agit par la gauche (resp. droite). Les actions de groupes sont toujours supposées fidèles (ce fait sera souvent rappelé).

Définition. Soit G un groupe de Lie agissant différentiablement sur une variété M. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on appelle *champ fondamental* associé à X, et on note $X^* \in \mathfrak{X}(M)$, le champ défini sur M par $X^*(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} x$ (si l'action est à gauche).

Notations pour les géométries de Cartan. À partir du chapitre 3, on travaillera avec des géométries de Cartan. L'espace homogène modèle est toujours noté $\mathbf{X} = G/P$, et le fibré principal $\pi : \widehat{M} \to M$.

La notation avec des chapeaux pour le fibré a l'avantage de dire à première vue si un objet se situe sur la base du fibré ou bien dans l'espace total, et dans le deuxième cas on voit au-dessus de quoi il se situe. Par exemple $\widehat{x} \in \widehat{M}$ est dans la fibre de $x \in M$, $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ est un morphisme de fibrés qui se fait au-dessus d'une application $f : M \to N$.

On a choisi de noter P le sous-groupe d'isotropie car une partie importante de notre travail se fait avec la géométrie de Cartan canoniquement associée à une métrique conforme, et dans ce cas P est un sous-groupe parabolique de $G = PO(p+1, q+1)$. Le gros des résultats en géométrie conforme concerne des actions conformes de groupes de Lie, et nous notons toujours H le groupe qui agit.

Première partie

Structures géométriques rigides

Chapitre 1

G-structures de type fini et leurs automorphismes

Ce chapitre introductif a pour but de donner une présentation relativement générale de structures géométriques classiques et de certains résultats fondamentaux dont nous nous servirons dans cette thèse. On y expose la construction des prolongations des G-structures, et on démontre via un théorème de R.S. Palais sur les actions infinitésimales de groupes de Lie que le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini est un groupe de Lie. Outre la présentation et certains détails précisés, tout ce qui est présenté ici est déjà connu. Le lecteur pourra notamment se référer à [Kob72] et [Ste64] pour les questions qui traitent des G-structures et de leurs automorphismes.

1.1 G-structures

1.1.1 Fibrés des repères d'une variété différentielle

Définitions générales

Soit M une variété de dimension n. Nous considérerons un repère de T_xM comme la donnée d'un isomorphisme linéaire $u : \mathbf{R}^n \to T_xM$. La collection de tous les repères de tous les espaces tangents de M, notée $\mathcal{R}(M) = \{(x,u),\ u \text{ repère de } T_xM\}$ est appelé *fibré des repères d'ordre* 1 *de* M. Il admet une structure de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$-fibré principal pour l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ donnée par

$$\forall u \text{ repère en } x,\ \forall g \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\ u.g = u \circ g : \mathbf{R}^n \to T_xM.$$

La notion de fibré des repères se généralise à l'ordre $r \geqslant 1$.

Définition 1.1.1. Soient $r \geqslant 1$ et M une variété différentielle. On appelle r-repère en $x \in M$ tout r-jet en 0 d'une carte $\psi : 0 \in \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n \to x \in U \subset M$, c'est-à-dire une classe d'équivalence de cartes en x pour la relation d'équivalence « avoir le même développement de Taylor à l'ordre r en 0 ».

On définit le fibré des r-repères de M comme étant

$$\mathcal{R}^r(M) = \{(x,u),\ x \in M,\ u \ r\text{-repère en } x\}.$$

On appelle D^r le groupe des r-jets de difféomorphismes entre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^n$. Si $J^r f$ désigne le r-jet en 0 d'un tel difféomorphisme, la loi de composition est donnée

par $(J^r f)(J^r g) = J^r(f \circ g)$ (qui ne dépend que de $J^r f$ et $J^r g$). Le groupe D^r agit de façon naturelle sur $\mathcal{R}^r(M)$: si x est un point de M, ψ une carte en x, $u = J^r\psi$ le r-repère associé, et $J^r f \in D^r$, alors on prend

$$u.(J^r f) = J^r(u \circ f),$$

qui est toujours bien défini. La projection naturelle $\pi : \mathcal{R}^r(M) \to M$ admet alors une structure de D^r fibré principal pour cette action.

Remarque 1.1.2. On notera qu'à l'ordre $r = 1$, la définition de 1-repère coïncide avec celle que nous avons donnée dès le début et que D^1 est isomorphe à $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$.

Si f est une application différentiable de M vers une autre variété N, alors f définit via ses différentielles une application différentiable $\mathcal{R}^r(M) \to \mathcal{R}^r(N)$. Pour éviter les lourdeurs de notation, nous désignerons par $T^r f$ cette application. Par essence, $T^r f$ est un morphisme de D^r-fibrés principaux, au-dessus de f.

Forme canonique sur le fibré des repères d'ordre 1

À l'ordre 1, on définit sur $\mathcal{R}(M)$ la *forme canonique* $\theta \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathbf{R}^n)$, qui, en notant $\pi : \mathcal{R}(M) \to M$ la projection naturelle, est donnée par

$$\theta_u(X) = u^{-1}\left(T_u \pi X\right),$$

pour $X \in T_u\mathcal{R}(M)$. Cette forme, que l'on peut rencontrer dans la littérature sous le nom de "soldering form", est strictement horizontale, au sens où $\operatorname{Ker}\theta$ est exactement la distribution verticale de $\mathcal{R}(M)$. Elle vérifie également la propriété $(R_g)^*\theta = g^{-1}\theta$, où R_g désigne l'action droite de $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ sur $\mathcal{R}(M)$. Enfin, on a les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.1. *On se donne deux variétés M, N et un difféomorphisme $f : M \to N$. Soit $F : \mathcal{R}(M) \to \mathcal{R}(N)$ un isomorphisme de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$-fibrés principaux au-dessus de f. On note θ_M et θ_N les formes canoniques respectives de $\mathcal{R}(M)$ et $\mathcal{R}(N)$. Alors $F^*\theta_N = \theta_M$ si et seulement si $F = Tf$.*

Démonstration. Tout d'abord, pour tous $u \in \mathcal{R}(M)$ et $X \in T_u\mathcal{R}(M)$, en notant $\widetilde{F} = Tf$, nous avons $[\theta_N]_{\widetilde{F}(u)}(\widetilde{F}_* X) = \widetilde{F}(u)^{-1}(\pi_{N*}\widetilde{F}_* X) = (Tf \circ u)^{-1}(f_*\pi_{M*}X) = u^{-1}(\pi_{M*}X) = [\theta_M]_u(X)$.

Pour la réciproque, en considérant $F^{-1} \circ Tf$, on voit qu'il nous suffit de prouver que tout automorphisme de $\mathcal{R}(M)$ qui se fait au-dessus de l'identité et qui préserve la forme canonique θ est forcément l'identité. Soit ψ un tel automorphisme. Il existe donc $\rho : M \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{R}(M)$, $\psi(u) = u.\rho(\pi(u))$. Soit $x_0 \in M$. On trivialise le fibré des repères sur un voisinage U de x_0. Soit $s : U \to \pi^{-1}(U)$ la section correspondante. On note $\widetilde{\theta}$ la forme canonique lue dans cette trivialisation. En un point (x, g) et pour un vecteur tangent $(X, A_g) \in T_{(x,g)}(U \times \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n))$, nous avons $\widetilde{\theta}_{(x,g)}(X, A_g) = g^{-1}s(x)^{-1}X$. Nous avons également $\psi(x, g) = (x, g\rho(x))$. À présent, soit $(x(t), g(t))$ une courbe dans $U \times \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ qui passe par (x_0, e) en $t = 0$ telle que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(x(t), g(t)) = (X, A)$. On a

$$T_{(x_0,e)}\psi(X, A) = (X, B_{\rho(x_0)}),$$

où $B_{\rho(x_0)}$ est tangent à $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ en $\rho(x_0)$ (il ne nous intéresse pas). Nous avons alors

$$\begin{aligned}(\psi^*\widetilde{\theta})_{(x_0,e)}(X,A) &= \widetilde{\theta}_{(x_0,e)}(X,A)\\ &= (s(x_0).\rho(x_0))^{-1}.X\\ &= \rho(x_0)^{-1}\widetilde{\theta}_{x_0,e}(X,A)\end{aligned}$$

ceci pour tous (X,A). Par conséquent, $\rho(x_0) = \mathrm{id}$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 1.1.2. *Soient $H \subset \mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ un sous-groupe de Lie et $\pi : P \to M^n$ un H-fibré principal muni d'une 1-forme $\theta \in \Omega^1(P,\mathbf{R}^n)$ strictement horizontale et telle que $(R_h)^*\theta = h^{-1}\theta$. Alors, P est isomorphe à un sous-H-fibré principal de $\mathcal{R}(M)$ et θ est envoyée par cet isomorphisme sur la forme canonique de cette H-structure.*

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où $H = \mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$. À $u \in P$ on associe un repère $\sigma(u) : \mathbf{R}^n \to T_xM$, où $x = \pi(u)$, donné par

$$\sigma(u)(v) = T_u\pi X, \text{ pour tout } X \in T_uP \text{ tel que } \theta_u(X) = v.$$

L'application $\sigma : P \to \mathcal{R}(M)$ est bien définie par horizontalité de θ et la condition d'équivariance nous assure qu'elle commute à l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$. Pour vérifier sa régularité, on se donne une section locale $s : U \to \pi^{-1}(U)$ de P. On peut vérifier sans difficulté que pour tout $x \in U$,

$$\sigma(s(x))^{-1} : X \in T_xM \to \theta_{s(x)}\,(T_xsX) \in \mathbf{R}^n,$$

assurant d'une part que s est lisse sur U puisqu'elle commute à l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$, et d'autre part que σ envoie θ sur la forme canonique de $\mathcal{R}(M)$. □

1.1.2 Définition générale des G-structures et premiers exemples

Définition 1.1.3. Soient M une variété, $r \geqslant 1$ et G un sous-groupe de Lie de D^r. On appelle *G-structure* sur M, d'ordre r, la donnée d'une réduction du D^r-fibré principal $\mathcal{R}^r(M)$ en un sous G-fibré principal.

Comme nous allons le voir sur plusieurs exemples, une G-structure définit souvent une structure géométrique « classique », et on constate que les automorphismes de la structure correspondante sont exactement les difféomorphismes de M dont l'action sur $R^r(M)$ préserve la G-structure. Aussi, nous prenons la définition suivante.

Définition 1.1.4. Soient M et N deux variétés munies de G-structures d'ordre r ayant le même groupe structurel, notées $P_M \to M$ et $P_N \to N$ respectivement. Un isomorphisme entre ces deux G-structures est un difféomorphisme $f : M \to N$ tel que $T^rf(P_M) \subset P_N$.

Lorsque $M = N$, un isomorphisme de la G-structure de M sur elle-même est un *automorphisme*. Les automorphismes d'une G-structure $P \to M$ forment un groupe que nous noterons $\mathrm{Aut}(P \to M)$.

Dans toute la suite de ce texte, nous ne travaillerons qu'avec des G-structures d'ordre 1. Pour éviter les lourdeurs, nous omettrons de préciser l'ordre d'une G-structure (étant sous-entendu que ce dernier est toujours 1). Passons à une courte liste d'exemples.

1. La donnée d'une orientation sur une variété de dimension n est équivalente à celle d'une G-structure de groupe $\mathrm{GL}^+(n,\mathbf{R})$ (en déclarant quels sont les repères qui sont associé à l'atlas orienté de la variété).

2. La donnée d'une forme volume sur une variété orientée est équivalente à celle d'une G-structure de groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ (en déclarant quels sont les repères de volume unité).
3. La donnée d'une métrique de signature (p, q) sur une variété de dimension $n = p + q$ est équivalente à celle d'une G-structure de groupe $O(p, q)$ (en déclarant quels sont les repères orthonormés).
4. La donnée d'un parallélisme (*ie* celle d'un champ de repère global) est équivalente à celle d'une G-structure de groupe trivial $\{1\}$ (voir section 1.2.2).

Le lecteur pourra se référer au premier chapitre de [Kob72] pour plus d'exemples.

1.1.3 Prolongation des G-structures

Pour chaque groupe $G \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$, nous allons voir que modulo un choix algébrique qui n'implique que le groupe, il existe une correspondance, dite « prolongation », qui à toute G-structure $P \to M^n$ associe une $G^{(1)}$-structure $P^{(1)} \to P$ sur la variété P, espace total de la G-structure initiale, où $G^{(1)} \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R}^{n+\dim G})$ sera un groupe déterminé uniquement par G. Cette $G^{(1)}$-structure sera appelée *premier prolongement* de la G-structure, et vérifiera le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Pour toutes G-structures $P_M \to M$, $P_N \to N$ et pour tout isomorphisme $f : M \to N$ entre elles, alors $Tf : P_M \to P_N$ est un isomorphisme entre les $G^{(1)}$-structures $P_M^{(1)} \to P_M$ et $P_N^{(1)} \to P_N$.*

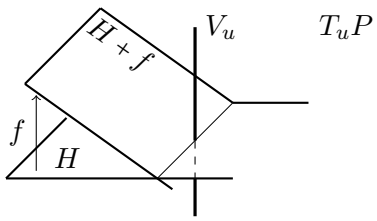
Remarque 1.1.5. Nous verrons que sous de bonnes hypothèses, tout isomorphisme $F : P_M \to P_N$ entre les $G^{(1)}$-structures est en fait induit par la différentielle d'un isomorphisme $f : M \to N$ entre les G-structures.

En particulier, pour toute G-structure $P \to M$, l'application $\{f \mapsto Tf\}$ plonge le groupe $\mathrm{Aut}(P \to M)$ dans $\mathrm{Aut}(P^{(1)} \to P)$. L'idée est alors que, selon le groupe G, les $G^{(1)}$-structures (voire les prolongations des prolongations ...) sont mieux comprises que les G-structures. Ce sera notamment le cas des G-structures que l'on qualifie de *type fini* ; et le plongement décrit ci-dessus nous permettra à la section 1.2 de prouver que le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini est un groupe de Lie.

L'objet de cette section est d'exposer la construction du premier prolongement d'une G-structure, et de prouver le théorème 1.1.

Le fibré des espaces horizontaux. Soit $P \xrightarrow{\pi} M$ une G-structure, dont on note θ la forme canonique. L'ensemble des sous-espaces horizontaux de T_uP admet une structure d'espace affine dirigé par $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$. On peut en effet faire agir $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ librement transitivement sur les espaces horizontaux de la façon suivante : si $H \subset T_uP$ et $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$, on définit $H + f$ comme étant le "graphe" de f, à savoir

$$H + f = \{X + (f \circ \theta_u(X))^*_u,\ X \in H\} \subset T_uP.$$



Les sous-espaces horizontaux des espaces tangents à P fibrent ainsi au-dessus de P, avec pour groupe structurel $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$.

Définition 1.1.6. On appelle *fibré des espaces horizontaux*, et on note $P^{hor} \to P$ ce fibré au-dessus de P.

Nous noterons P^{hor} l'espace total de ce fibré. On définit une action naturelle de G sur P^{hor} en prenant $(u, H).g = (u.g, (R_g)_* H)$, pour $(u, H) \in P^{hor}$ et $g \in G$.

Remarque 1.1.7. Cette action ne se fait pas par automorphismes de fibré principal. On a en fait pour tous $(u, H) \in P^{hor}$, $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ et $g \in G$

$$(u, H + f).g = (u, H).g + f^g,$$

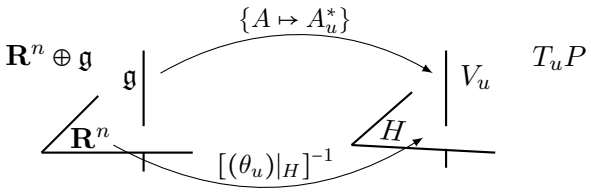
quand on définit $f^g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ par $f^g = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ f \circ g$.

Une connexion linéaire sur le fibré $P \to M$ est une section G-équivariante $s : P \to P^{hor}$ et la fibre de P^{hor} au-dessus de u peut être vue comme l'ensemble des Γ_u, pour Γ une connexion sur P. Par conséquent, l'existence d'une connexion sur P nous donne le

Lemme 1.1.3. *Le fibré $P^{hor} \to P$ est trivialisable.*

Le fibré des espaces horizontaux peut être interprété comme une réduction du fibré des repères $\mathcal{R}(P)$ de l'espace total de la G-structure. En effet, en tout point $u \in P$, la donnée d'un sous-espace horizontal de $T_u P$ définit un repère z, qui est un isomorphisme linéaire $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{g} \to T_u P$ donné par :

1. pour tout $A \in \mathfrak{g}$, $z(A) = A^*_u$;
2. pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, $z(v) = X$, où X est l'unique vecteur de H tel que $\theta_u(X) = v$.



On constate alors que si le repère z correspond à l'espace horizontal H, alors pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$, c'est $z \circ \rho(f)$ qui correspond à $H + f$, où $\rho : \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes défini par

$$\rho(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ f & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{g}).$$

Nous venons ainsi de décrire un plongement de fibré principal de P^{hor} dans $\mathcal{R}(P)$.

L'application structurelle. On considère l'application $c : P^{hor} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, définie de la façon suivante : si (u, H) est un espace horizontal de $T_u P$, nous prenons $c(u, H)(v_1, v_2) = \mathrm{d}\theta_u(X_1, X_2)$ où X_i est l'unique vecteur de H qui s'envoie par $T_u \pi$ sur v_i. En d'autre termes, $c(u, H)$ correspond à la torsion de n'importe quelle connexion linéaire sur P qui vaut H en u.

Définition 1.1.8. On définit cette application c comme étant l'*application structurelle* de la G-structure $P \to M$.

D'une façon générale, on définit une application linéaire

$$\partial : \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$$

par $\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}))$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n$, $\partial f(v_1, v_2) = f(v_2)v_1 - f(v_1)v_2$ et on constate aisément que l'application structurelle possède les propriétés d'équivariance suivantes, relatives à l'action de $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ premièrement, mais aussi par rapport à l'action de G sur les espaces horizontaux. Dans le fibré des espaces horizontaux de notre G-structure, nous avons pour tous $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ et $(u, H) \in P^{hor}$

$$c(u, H + f) = c(u, H) + \partial f. \tag{1.1}$$

L'application ∂ que nous venons d'exhiber va jouer un rôle important par la suite.

Définition 1.1.9. Pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, on appelle $\partial_{\mathfrak{g}}$ la restriction de ∂ à $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$.

Pour finir, nous avons également

$$c((u, H).g) = c(u, H).g$$

où $g \in G$ agit sur $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ par $(\alpha.g)(u, v) = g^{-1}\alpha(gu, gv)$, pour tous $u, v \in \mathbf{R}^n$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

La première prolongation $P^{(1)}$. Fixons (arbitrairement dans le cas général) un supplémentaire S de l'image $\mathrm{Im}\,\partial_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et notons p la projection linéaire sur $\mathrm{Im}\,\partial_{\mathfrak{g}}$ parallèlement à S. La relation (1.1) implique alors que $p \circ c$ est une submersion, de sorte que $c^{-1}(S)$ est une sous-variété de P^{hor}, que nous noterons $P^{(1)}$. De plus, si H_1 et $H_2 = H_1 + f$ sont deux sous-espaces horizontaux de $T_u P$ tels que $(u, H_1) \in P^{(1)}$ et $(u, H_2) \in P^{(1)}$, la relation (1.1) nous dit que $\partial_{\mathfrak{g}} f = c(u, H_2) - c(u, H_1) \in S$. Les espaces S et $\mathrm{Im}\,\partial_{\mathfrak{g}}$ étant en somme directe, on doit avoir $\partial_{\mathfrak{g}} f = 0$ (et réciproquement, si $\partial_{\mathfrak{g}} f = 0$, $(u, H_1) \in P^{(1)}$ si et seulement si $(u, H_2) \in P^{(1)}$). Ainsi, $P^{(1)}$ est un sous-fibré de P^{hor}, de groupe structurel $\mathrm{Ker}\,\partial_{\mathfrak{g}}$. Puisque $P^{hor} \to P$ se réalise comme une réduction du fibré des repères $\mathcal{R}(P)$, il en va de même pour la première prolongation.

Définition 1.1.10. On appelle *première prolongation* (associée au supplémentaire S) de la G-structure $P \to M$ le $\rho(\mathrm{Ker}\,\partial_{\mathfrak{g}})$-fibré principal $P^{(1)} \to P$ défini ci-dessus, qui est lui-même une réduction du fibré des repères $\mathcal{R}(P) \to P$.

Notons bien qu'en toute généralité, on ne peut que parler d'*une* première prolongation d'une G-structure, celle-ci étant déterminée une fois un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,\partial_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ choisi. Cependant, il y a des situations où un supplémentaire se distingue tout particulièrement. Ce sera notamment le cas dans la section 2.3.2 où l'on construit le fibré de Cartan associée à une structure conforme. Dans ce qui suit, nous supposerons que le choix a été fait et nous parlerons abusivement de *la* première prolongation.

Relèvement des isomorphismes. On se donne deux variétés M et N munies de G-structures notées $P_M \to M$ et $P_N \to N$ respectivement et on note $P_M^{(1)}$ et $P_N^{(1)}$ les premiers prolongements correspondants.

Si $f : M \to N$ est un isomorphisme de G-structures, en notant F l'application tangente Tf restreinte à P_M, nous savons par la proposition 1.1.1 que $F^*\theta_N = \theta_M$. Puisque $P_M^{(1)}$ et $P_N^{(1)}$ sont déterminés par les formes canoniques, $F : P_M \to P_N$ est un isomorphisme entre les deux prolongements.

Définition 1.1.11. On dit que la restriction de Tf à P_M est le *relevé* de f.

En particulier, étant donnée une G-structure $P \to M$, on a un plongement de groupes

$$\iota_1 : \mathrm{Aut}(P \to M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P^{(1)} \to P),$$

qui est essentiellement la différentiation. En fait, on peut même caractériser parmi les isomorphismes entre les premiers prolongements quels sont ceux qui sont des relevés, lorsque le groupe de la G-structure est connexe.

Lemme 1.1.4. *Soit $F : P_M \to P_N$ un isomorphisme entre les premiers prolongements. Si F commute avec l'action de G sur P_M et P_N, alors il est le relevé d'un isomorphisme $f : M \to N$ entre les G-structures initiales.*

En particulier, ι_1 est un isomorphisme de groupes dès que G est connexe.

Démonstration. Le difféomorphisme F est un isomorphisme de G-fibrés principaux par hypothèse. Appelons $f : M \to N$ le difféomorphisme qu'il induit entre les bases. Par hypothèse, on a $TF(P_M^{(1)}) = P_N^{(1)}$. Pour tout $z \in P_M^{(1)}$, si $u = \pi(z)$, nous avons $T_uF \circ z \in P_N^{(1)}$. Or les repères des premiers prolongements sont construits de sorte que

$$\forall v \in \mathbf{R}^n,\ \theta_u(z(v)) = v.$$

Nous voyons alors que $[\theta_N]_{F(u)}(T_uF \circ z(v)) = v = \theta_u(z(v))$. Ainsi, $(F^*\theta_N)_u$ et $(\theta_M)_u$ coïncident sur $z(\mathbf{R}^n)$. Comme F commute avec l'action de G et les formes canoniques étant horizontales, nous avons $F^*\theta_N = \theta_M$. Donc par la proposition 1.1.1, $F = Tf$, et F est bien le relevé d'un isomorphisme entre les G-structures.

Si G est connexe, comme la relation $T_uF \circ z \in P_N^{(1)}$ nous donne $F_*(A_M^*) = A_N^*$, pour tout $A \in \mathfrak{g}$, F doit commuter avec l'action de G. □

1.1.4 G-structures de type fini

Une idée naturelle est alors d'itérer la construction précédente et de définir par induction $P^{(k)} = (P^{(k-1)})^{(1)}$ pour $k \geqslant 1$ et $P^{(0)} = P$. La fibration $P^{(k)} \to P^{(k-1)}$ est ainsi une $G^{(k)}$-structure sur $P^{(k-1)}$, où $G^{(k)} \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)})$ est une suite de groupes linéaires définie par $G^{(k+1)} = (G^{(k)})^{(1)}$ et $G^{(0)} = G$.

Remarque 1.1.12. À chaque étape de la construction, il y a un choix à faire pour construire $P^{(k+1)}$ mais par contre la suite des groupes $G^{(k)}$ est, elle, bien déterminée.

Pour tout $k \geqslant 1$, on dispose alors d'un plongement

$$\iota_k : \mathrm{Aut}(P \to M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P^{(k)} \to P^{(k-1)}).$$

Définition 1.1.13. Une G-structure $P \to M$ est dite de *type fini* s'il existe $k \geqslant 1$ tel que $G^{(k)} = 1$, c'est-à-dire telle que la G-structure $P^{(k)} \to P^{(k-1)}$ est la donnée d'un parallélisme sur $P^{(k-1)}$.

Étant donné que le groupe structurel du premier prolongement est déterminé par le groupe structurel de la G-structure, on constate qu'être de type fini pour une G-structure est une propriété algébrique entièrement déterminée par le groupe G. C'est le contenu de la propriété suivante. Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, on définit $\mathfrak{g}_k$ comme étant l'ensemble des application k-linéaires et symétriques $\alpha : \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ telles que pour tous $v_1, \ldots, v_{k-1} \in \mathbf{R}^n$, on ait $\{v \mapsto \alpha(v, v_1, \ldots, v_{k-1})\} \in \mathfrak{g}$.

Proposition 1.1.5. *Une G-structure de groupe G est de type fini si et seulement s'il existe $k \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{g}_k = 0$.*

Démonstration. On renvoie au paragraphe 5. du premier chapitre de [Kob72]. □

Quelques exemples. Avant de poursuivre, finissons cette section par une liste bien sûr non exhaustive d'exemples de structures géométriques, dont la donnée est équivalente à celle d'une G-structure. Dans ces situations, déterminer si la G-structure est de type fini est purement calculatoire. Le lecteur trouvera les détails des calculs ainsi que des exemples supplémentaires dans le premier chapitre de [Kob72].

Structure géométrique	**Groupe**	**Type fini**
Parallélisme	$\{\mathrm{id}\}$	Oui, $k = 0$
Métrique pseudo-riemannienne	$O(p, q)$	Oui, $k = 1$
Classe conforme de métriques	$CO(p, q)$	Oui en dimension $\geqslant 3$, $k = 2$ Non en dimension 2
Forme volume	$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$	Non
Structure quasi-symplectiques	$\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$	Non

1.2 Le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini

L'objet de cette section est de donner une démonstration du résultat suivant.

Théorème 1.2 ([Kob72], Chap.I, Theorem 5.1)**.** *Soit M une variété munie d'une G-structure $P \to M$ de type fini, d'ordre $k \geqslant 1$. Alors, le groupe des automorphismes* $\mathrm{Aut}(P \to M)$ *admet une unique structure de groupe de Lie rendant son action sur M différentiable, et dont la dimension est majorée par* $\dim M + \dim \mathfrak{g} + \cdots + \dim \mathfrak{g}^{(k-1)}$.

Essentiellement, la preuve consistera à montrer que si $(M^n, \mathcal{P})$ est une variété munie d'un parallélisme (*ie* un champ de repères global $(X_1, \ldots, X_n)$), alors le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{P})$ est un groupe de Lie dont la dimension est majorée par n.

1.2.1 Les résultats de Palais sur les actions infinitésimales de groupes de Lie

À une action différentiable d'un groupe de Lie, on fait toujours correspondre une algèbre de Lie de champs de vecteurs, isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe qui agit si l'action est localement fidèle (*ie* de noyau discret).

Définition. Soit G un groupe de Lie agissant différentiablement sur une variété M. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a appelle *champ fondamental* associé à X, et on note $X^* \in \mathfrak{X}(M)$, le champ défini sur M par $X^*(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX}.x$ (si l'action est à gauche).

On vérifie aisément que pour toute action différentiable d'un groupe de Lie G, l'application $\{X \in \mathfrak{g} \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(M)\}$ est un antimorphisme d'algèbres de Lie, ce dernier étant injectif dès que l'action de G est localement fidèle. Ainsi, la donnée d'une action de G fournit une algèbre de Lie de champs de vecteur, de dimension finie et isomorphe à un quotient de $\mathfrak{g}$. Les travaux de Richard S. Palais sur les *actions infinitésimales* de groupes de Lie ([Pal57]), dont les théorèmes 1.3 et 1.4 sont extraits, s'intéressent à la réciproque. Palais prend la définition suivante.

Définition 1.2.1. Soient M une variété différentielle et G un groupe de Lie. Une action infinitésimale de G sur M est un morphisme d'algèbres de Lie $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$.

Théorème 1.3 (Palais, version globale)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de dimension finie et $\iota : X \in \mathfrak{g} \mapsto \overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ une action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ sur une variété différentielle M, avec ι injective. On suppose que $\mathfrak{g}$ admet une partie génératrice S telle que pour tout $X \in S$, le champ $\iota(X) = \overline{X}$ est complet.*

Alors, si $\widetilde{G}$ désigne le groupe de Lie connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe une (unique) action différentiable $\widetilde{G} \times M \to M$, de noyau discret, et telle que ι soit l'application $\{X \in \mathrm{Lie}(\widetilde{G}) \mapsto X^*\}$.

Démonstration. Le lecteur trouvera une preuve très détaillée de ce résultat dans [Pos01], Chapter 10, §3. □

Sous les hypothèses du théorème précédent, notons K le noyau de l'action de $\widetilde{G}$. Le théorème prouve ainsi que tous les champs $\overline{X}$ sont complets et que si $\mathcal{G} =< \phi^t_{\overline{X}},\ X \in \mathfrak{g},\ t \in \mathbf{R} >$ est le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$ engendré par les flots des $\overline{X}$, on a un isomorphisme naturel $\mathcal{G} \simeq \widetilde{G}/K$ tel que l'action des $g = \mathrm{e}^{tX} \in \widetilde{G}$ proches de l'identité corresponde à l'action des flots $\phi^t_{\overline{X}}$ pour t proche de 0.

Si on retire l'hypothèse de complétude des champs de vecteurs, les conclusions du théorème 1.3 tombent en défaut. Par exemple, la donnée d'un champ de vecteur X est équivalente à celle d'une action infinitésimale de $\mathbf{R}$. Demander si cette action s'intègre en une véritable action de $\mathbf{R}$ par difféomorphismes, c'est demander si le flot de X est défini à tout temps. Néanmoins, on a toujours, comme pour les champs de vecteurs, une notion d'intégration locale d'une action infinitésimale. Commençons par formaliser l'idée d'action locale de groupe de Lie.

Définition 1.2.2. Soient G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et M une variété. Soit $D \subset G \times M$ un voisinage de $\{e\} \times M$ tel que pour tout $x \in M$, $D^x = \{g \in G \mid (g, x) \in D\}$ est un voisinage connexe de l'identité de G. Une *action locale (gauche)* de G sur M, de domaine D, est une application différentiable $\phi : D \to M$ telle que :

1. pour tout $x \in M$, $\phi(e, x) = x$;
2. si $(h, x) \in D$, $(g, \phi(h, x)) \in D$, et $(gh, x) \in D$, alors $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$.

Comme pour une action globale, on peut toujours associer à une action locale d'un groupe de Lie un morphisme d'algèbres de Lie $\{X \in \mathfrak{g} \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(M)\}$. Citons alors pour finir la version général du théorème 1.3.

Théorème 1.4 (Palais, version locale)**.** *Soient G un groupe de Lie et M une variété. Supposons que l'on ait un morphisme $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. Alors, il existe une action locale de G telle que ι coïncide avec $\{X \mapsto X^*\}$.*

Nous ne donnons pas sa démonstration, et renvoyons le lecteur au chapitre II de [Pal57], Theorem XI et son corollaire.

1.2.2 Le groupe des automorphismes d'un parallélisme

Définition 1.2.3. Un *parallélisme* $\mathcal{P}$ sur une variété M^n est la donnée de n champs de vecteurs partout linéairement indépendants $(X_1, \dots, X_n)$. Par dualité, cela revient à se donner une 1 forme $\omega \in \Omega^1(M, \mathbf{R}^n)$ telle que pour tout x, $\omega_x : T_xM \to \mathbf{R}^n$ est un isomorphisme linéaire.

Un *isomorphisme* entre deux variétés munies de parallélismes $(M_1, \mathcal{P}_1)$ et $(M_2, \mathcal{P}_2)$ est un difféomorphisme $f : M_1 \to M_2$ tel que $f^*\omega_2 = \omega_1$, si ω_i est la 1-forme associée au parallélisme $\mathcal{P}_i$. Un *champ de Killing* est un champ de vecteur $X \in \mathfrak{X}(M)$ tel que $\mathcal{L}_X\omega = 0$, ce qui revient à demander que son flot est formé d'isomorphismes locaux. Notons que si g est la métrique riemannienne dont $(X_1, \dots, X_n)$ est un champ repère orthonormé, alors $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{P}) \subset \mathrm{Isom}(M, g)$ et en particulier les automorphismes agissent par isométries d'une distance qui induit la topologie de M. Pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, on note $\widetilde{X} = \omega^{-1}(X) \in \mathfrak{X}(M)$ le *champ ω-constant* associé à X. On a alors une notion d'*exponentielle* : pour tout $x \in M$ et $A \in \mathbf{R}^n$ suffisamment petit, on pose

$$\exp(x, A) = \phi^1_{\widetilde{A}}(x)$$

où $\phi^t_{\widetilde{A}}$ désigne le flot local du champ $\widetilde{A}$. Un argument d'inversion locale assure alors que cette exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage de $M \times \{0\}$ dans $M \times \mathbf{R}^n$ et un voisinage de la diagonale de $M \times M$. On vérifie immédiatement que si f préserve le parallélisme, $f(\exp(x, A)) = \exp(f(x), A)$ pour de petits A. En particulier, un automorphisme d'un parallélisme qui fixe un point coïncide localement avec l'identité.

Lemme 1.2.1. *Soit $f : M \to M$ une application différentiable qui préserve le parallélisme. Si f fixe un point x_0, alors f coïncide avec l'identité sur la composante connexe de x_0.*

Le résultat suivant illustre encore plus la rigidité d'un parallélisme.

Lemme 1.2.2. *Soit (f_k) une suite de $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{P})$. S'il existe $x_0 \in M$ tel que $(f_k(x_0))$ converge, et si M est connexe, alors il existe $f_\infty \in \mathrm{Aut}(M, \mathcal{P})$ tel que $(f_k) \to f_\infty$ pour la topologie compacte-ouverte.*

Démonstration. On note x_∞ la limite de $(f_k(x_0))$. Prouvons que (f_k) converge ponctuellement sur M. Si $x \in M$, donnons-nous γ un chemin de x_0 à x. Puisque les f_k préservent une distance riemannienne d sur M, les images $f_k(\gamma)$ restent dans un compact de M. Fixons alors un ouvert U relativement compact, qui contient $\gamma \cup \bigcup_{k \geqslant 0} f_k(\gamma)$, et tel qu'il existe $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n$ un voisinage ouvert de 0 tels que $\forall x \in U$, $\exp(x, .)$ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image $U_x := \exp(x, \mathcal{U})$. On prend maintenant un recouvrement fini de $\gamma \subset \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n} U_i$ tel que $x_n = x$ et pour tout i on ait $x_i \in \gamma \cap U_i \cap U_{i+1}$ et $U_i \subset U_{x_i}$. Nous disposons donc de $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathcal{U}$ tels que $x = x_n = \exp(x_{n-1}, u_{n-1}) = \cdots =$

$\exp(\exp(\dots(\exp(x_0,u_0),u_1)\dots,u_{n-2}),u_{n-1})$. Pour tout k, f_k est un automorphisme du parallélisme et commute donc à l'exponentielle, ce qui nous assure

$$f_k(x) = \exp(\exp(\dots(\exp(f_k(x_0),u_0),u_1)\dots,u_{n-2}),u_{n-1}).$$

Ceci montre bien que $(f_k(x))$ a une limite, que nous notons $f_\infty(x)$. Puisque les f_k préservent tous la distance d, l'application $f_\infty : x \mapsto f_\infty(x)$ est une isométrie de (M,d), donc un homéomorphisme de M. La construction de f_∞ montre que

$$f_\infty(x) = \exp(\exp(\dots(\exp(x_\infty,u_0),u_1)\dots,u_{n-2}),u_{n-1}),$$

où les u_i dépendent différentiablement de x, ce qui assure que f_∞ est lisse. Enfin, pour tous $x \in M$ et $u \in \mathbf{R}^n$ assez petit, nous avons $f_k(\exp(x,u)) = \exp(f_k(x),u) \to \exp(f_\infty(x),u)$, d'où $f_\infty(\exp(x,u)) = \exp(f_\infty(x),u)$. Puisque f_∞ est différentiable, ceci implique que f_∞ préserve le parallélisme $\mathcal{P}$ et que la convergence $f_k \to f_\infty$ est uniforme sur les compacts.

Pour conclure, comme on a $d(f_k^{-1}(x_\infty),x_0) = d(x_\infty,f_k(x_0)) \to 0$, $(f_k^{-1}(x_\infty))$ converge vers x_0. En appliquant ce qui vient d'être fait à la suite $(g_k) = (f_k^{-1})$, nous avons un difféomorphisme g_∞ qui préserve le parallélisme et tel que $g_\infty(x_\infty) = x_0$. Ainsi, $g_\infty \circ f_\infty(x_0) = x_0$ et $f_\infty \circ g_\infty(x_\infty) = x_\infty$. Par le lemme 1.2.1, $f_\infty \in \mathrm{Aut}(M,\mathcal{P})$ et $f_\infty^{-1} = g_\infty$. □

À présent, fixons-nous $(M,\mathcal{P})$ une variété munie d'un parallélisme. Notons G le groupe de ses automorphismes. Les lemmes précédents impliquent que l'action de G sur M est libre et propre sur chaque composante connexe, lorsque G est muni de la topologie de convergence sur les compacts. Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.5. *Le groupe G admet une unique structure de groupe de Lie réel qui rend son action sur M différentiable. De plus, la structure différentielle de G est compatible avec la (restriction à G de la) topologie compacte-ouverte.*

Démonstration. Le lemme 1.2.2 implique que les orbites de G sont fermées dans M. Nous allons prouver que ce sont des sous-variétés.

L'ensemble $\mathrm{Kill}(M,\mathcal{P})$ des champs de Killing de $(M,\mathcal{P})$ forme une sous-algèbre de champs de vecteurs, et puisque pour tout $x \in M$, l'évaluation $\{X \in \mathrm{Kill}(M,\mathcal{P}) \mapsto X_x \in T_xM\}$ est injective, cette algèbre est de dimension finie bornée par $\dim M$.

Définissons alors $\mathfrak{h}$ comme étant la sous-algèbre de $\mathrm{Kill}(M,\mathcal{P})$ engendrée par les champs de Killing complets. Le théorème 1.3 (et les commentaires qui suivent son énoncé) nous assure alors qu'il existe un groupe de Lie connexe H qui agit sur M par automorphismes de $\mathcal{P}$ et qui intègre l'action infinitésimale de $\mathfrak{h}$. L'action de G sur M étant libre et propre, les orbites de H sont des sous-variétés fermées de M. Les orbites de G sont alors des réunions d'orbites de H. La fin de la démonstration repose essentiellement sur le lemme suivant.

Lemme 1.2.3. *Soit (x_k) une suite de points dans une même G-orbite, $x_k \to x_\infty$, avec $x_k \neq x_\infty$ (nécessairement x_∞ est lui aussi dans cette orbite). Alors, il existe un champ de Killing complet X tel que quitte à extraire, $\omega(X(x_\infty))$ est la direction asymptotique de la suite (x_k).*

Remarque 1.2.4. Par direction asymptotique, on entend une limite dans $P^{n-1}(\mathbf{R})$ de $\mathbf{R}.u_k$, où l'on écrit $x_k = \exp(x_\infty,u_k)$.

Démonstration. Nous pouvons donc supposer qu'aucun des x_k n'est dans la H-orbite de x_∞. Premièrement, donnons-nous un voisinage U de x_∞ et un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tels que $\exp(x,u)$ est défini pour tous $x \in U$ et $u \in \mathcal{U}$ et supposons que les x_k sont tous dans U. Nous avons alors $u_k \in \mathcal{U}$ tels que $x_k = \exp(x_\infty, u_k)$. Quitte à extraire, on peut supposer que tous les u_k sont non nuls et que $u_k = \lambda_k v_k$, avec $(v_k) \to v \neq 0$ et $\lambda_k > 0$. Pour tout k, nous avons également $g_k \in G$ tel que $x_k = g_k x_\infty$. Fixons $a > 0$ tel que $tv \in \mathcal{U}$ pour $|t| < a$. Pour $0 < t < a$, donnons-nous $(n_k) \to \infty$ une suite d'entiers tels que $n_k\lambda_k \to t$ et $n_k\lambda_k < t$. Nous avons alors $g_k^{n_k} x_\infty = \exp(x_\infty, n_k\lambda_k v_k)$. Nous obtenons ainsi que $(g_k^{n_k} x_\infty) \to \exp(x_\infty, tv)$. Par le lemme 1.2.2, $g_k^{n_k}$ converge pour la topologie compacte-ouverte vers $g^t \in G$, qui vérifie donc $g^t.x_\infty = \exp(x_\infty, tv)$. Si g^t, $g^{t'}$ et $g^{t+t'}$ sont définis, nous avons $g^{t'}g^t x_\infty = g^{t'}\exp(x_\infty, tv) = \exp(g^{t'}x_\infty, tv) = \exp(x_\infty, (t+t')v) = g^{t+t'}x_\infty$. Nous avons donc $g^t g^{t'} = g^{t+t'}$ et les g^t engendrent un groupe à un paramètre d'automorphismes qui définit un champ de Killing complet X, qui est tel que $\omega_{x_\infty}(X(x_\infty)) = v$. □

Soit $x \in M$. Puisque l'action de H est localement libre, en notant $s = \dim H$ et en fixant $(X_1, \ldots, X_s)$ une base de $\mathfrak{h}$, nous avons $\mathcal{U}_1$ un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{n-s}$, $\mathcal{U}_2$ un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^s$, U un voisinage de x dans M et un difféomorphisme

$$\Phi : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to U$$

donné pour $u \in \mathcal{U}_1$ et $t \in \mathcal{U}_2$ par $\Phi(u,t) = \phi_{X_1}^{t_1} \circ \cdots \circ \phi_{X_s}^{t_s}(\exp(x,u))$. Le lemme que nous venons de démontrer nous assure que si les ouverts sont pris assez petits, alors $G.x \cap U = \Phi(\{0\} \times \mathcal{U}_2)$. En effet, si ça n'était pas le cas, nous aurions une suite $x_k \neq x$ dans $G.x$ qui converge vers x. Quitte à la perturber par de petits éléments de H, cette suite serait de la forme $x_k = \Phi((u_k, 0))$, et le lemme nous fournirait alors un champ de Killing complet qui devrait être transverse à l'orbite de H, ce qui n'est pas possible.

Nous pouvons alors terminer la preuve du théorème. Nous venons de démontrer que les orbites de G sont des sous-variétés plongées de M et que si x est fixé, l'application orbitale

$$G \to G.x$$

est un homéomorphisme lorsque G est muni de la topologie compacte-ouverte. En rapatriant la structure différentielle de la variété $G.x$ sur G, nous munissons G d'une structure de groupe de Lie réel, dont la structure différentielle est compatible avec la topologie compacte-ouverte. □

On notera que la preuve montre que le groupe H est la composante neutre de G, ce qui est cohérent *a posteriori* : H est le sous-groupe engendré par les sous-groupes à un paramètre de G.

1.2.3 Le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini

Donnons-nous une G-structure $P \to M$ de type fini, avec $G^{(k)} = \{\mathrm{id}\}$. Nous avons donc un "empilement" de fibrés

$$P^{(k)} \xrightarrow{G^{(k)}} P^{(k-1)} \to \cdots \to P^{(1)} \xrightarrow{G^{(1)}} P \xrightarrow{G} M.$$

D'après le théorème 1.5, le groupe des automorphismes de la {id}-structure $P^{(k)} \to P^{(k-1)}$, appelons-le $\mathcal{G}$, admet une structure de groupe de Lie qui rend son action sur $P^{(k-1)}$ différentiable. De plus, le théorème 1.1 nous fournit un plongement

$$\begin{array}{rccc} \iota_k : & \mathrm{Aut}(P \to M) & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & f & \mapsto & T^k f. \end{array}$$

Lemme 1.2.4. *L'image de ι_k est fermée dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Pour $k = 1$, donnons-nous une suite (f_n) d'automorphismes de la G-structure telle que $(Tf_n) \to F$ dans $\mathcal{G}$ (rappelons qu'en particulier, la convergence est celle de la convergence uniforme sur les compacts de P). Chaque Tf_n commute avec l'action de G sur P. En passant à la limite, F commute également avec l'action de G, et F est un automorphisme de fibré, au-dessus d'un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}(M)$. D'après la proposition 1.1.1, $f \in \mathrm{Aut}(P \to M)$ et $F = Tf$. Notons que $(f_n) \to f$ pour la topologie C^1.

Pour $k \geqslant 2$, on suppose que $T^k f_n$ converge (pour la topologie compacte-ouverte) vers $F^{(k)} \in \mathrm{Aut}(P^{(k)} \to P^{(k-1)})$. Puisque $T^k f_n = T(T^{k-1} f_n)$, ce qui vient d'être vu pour $k = 1$ montre qu'il existe $F^{(k-1)} \in \mathrm{Aut}(P^{(k-1)} \to P^{(k-2)})$ tel que $T^{k-1} f_n \to F^{(k-1)}$ en topologie C^1.

Une preuve par induction nous donne ainsi qu'il existe un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(P \to M)$ tel que $F^{(k)} = T^k f$ et (f_n) converge en topologie C^k vers f. □

Finalement, l'image de ι_k est un sous-groupe de Lie de $\mathcal{G}$ et on peut rapatrier cette structure différentielle sur $\mathrm{Aut}(P \to M)$, qui devient lui même un groupe de Lie, dont l'action sur M est différentiable. La topologie sous-jacente de la structure différentielle est compatible avec la topologie C^k. Enfin, ι_k devient un plongement de groupes de Lie, et nous avons

$$\dim \mathrm{Aut}(P \to M) \leqslant \dim \mathcal{G} \leqslant \dim P^{(k)} = \dim M + \dim \mathfrak{g} + \cdots + \dim \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Chapitre 2

Géométries de Cartan et le problème d'équivalence

Le « programme d'Erlangen » élaboré par Felix Klein en 1872 voulait définir les différentes géométries qui venaient alors de naître en termes de groupes de transformations, et ce de façon à les unifier. En termes modernes, une *géométrie de Klein* est simplement la donnée d'un espace homogène $\mathbf{X} = G/P$, G étant un groupe de Lie, et P un sous-groupe fermé de G. Étudier la « géométrie » de $\mathbf{X}$, c'est alors étudier des objets, des notions, liés à $\mathbf{X}$, et qui sont préservés par l'action par translation à gauche sur $\mathbf{X}$ du groupe G.

Dans les années 1920, Élie Cartan introduisit ce qu'il appela les « espaces généralisés », qui sont des *versions courbées* des géométries de Klein, dans le même sens que lorsqu'on affirme qu'une variété riemannienne est une version courbe de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, qui lui-même est vu comme l'espace homogène $(O(n) \ltimes \mathbf{R}^n)/O(n)$. Depuis, on a coutume de désigner ces « espaces » par le terme *géométries de Cartan*. Chaque géométrie de Cartan correspond donc à un espace homogène, que l'on appelle *espace modèle* de la géométrie.

L'objet de ce chapitre est d'introduire la notion de géométrie de Cartan, et de donner une construction de la géométrie de Cartan normalisée associée à une structure conforme pseudo-riemannienne. La construction que nous proposons suit d'assez près la section 1.6 du premier chapitre de [ČS09], et est très liée à ce que nous avons exposé au chapitre précédent sur les prolongations de G-structures.

Hypothèse globale. Dans toute cette partie, sauf mention explicite du contraire, G désigne toujours un groupe de Lie, P un sous-groupe fermé de G et $\mathbf{X} = G/P$ l'espace homogène associé. Nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

1. G est connexe ;
2. P ne contient aucun sous-groupe distingué non trivial de G, ce qui revient à supposer que P agit fidèlement (à gauche) sur $\mathbf{X}$.

2.1 Généralités

De façon informelle, une *géométrie de Cartan sur une variété M, d'espace modèle* $\mathbf{X}$, est une structure géométrique sur M, qui se définit dans le langage de la géométrie différentielle et qui partage les propriétés infinitésimales de $\mathbf{X}$.

2.1.1 Un peu de géométrie différentielle dans les espaces homogènes

Comme nous l'avons dit plus haut, une géométrie de Klein est la donnée d'un espace homogène $\mathbf{X} = G/P$. Dans cette section introductive, nous décrivons succinctement quelques objets essentiels qui sont rattachés à cette variété.

La forme de Maurer-Cartan

Définition 2.1.1 (Forme de Maurer-Cartan)**.** Soit G un groupe de Lie. On définit sur G la *forme de Maurer-Cartan* (gauche) qui est une 1-forme $\omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ donnée par

$$\forall g \in G,\ \forall X \in T_gG,\ (\omega_G)_g(X) = T_g(L_{g^{-1}})X \in \mathfrak{g}.$$

Cette forme est par essence laissée invariante par les translations à gauche de G et on vérifie sans difficulté que $(R_g)^*\omega_G = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_G$. Pour tout $g \in G$, $(\omega_G)_g : T_gG \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme linéaire, et par conséquent la forme de Maurer-Cartan définit sur G un parallélisme que nous notons $\mathcal{P}_{\omega_G}$. Un champ de vecteurs sur G est invariant à gauche si et seulement s'il s'écrit $\omega_G^{-1}(X)$ pour un certain $X \in \mathfrak{g}$. Ainsi, si $(X_1, \dots, X_m)$ est une base de $\mathfrak{g}$, le parallélisme en question est la donnée des m champs de vecteurs invariants à gauche associés aux X_i.

Proposition 2.1.1. *Soit G un groupe de Lie connexe. Alors, G s'identifie au groupe $\mathrm{Aut}(G, \mathcal{P}_{\omega_G})$ des automorphismes du parallélisme via $g \in G \mapsto L_g \in \mathrm{Diff}(G)$. Énonçons également la version infinitésimale de ce fait : si $X \in \mathfrak{X}(G)$ un champ de vecteurs sur G, alors*

$$\mathcal{L}_X\omega_G = 0 \iff X \text{ est invariant à droite.}$$

Démonstration. Par construction de ω_G, on a $(L_g)^*\omega_G = \omega_G$, et toute translation gauche de G sur lui-même est un automorphisme de $(G, \mathcal{P}_{\omega_G})$. Réciproquement, donnons-nous f un automorphisme du parallélisme. Appelons $g = f(e)$ l'image de l'élément neutre par f. L'automorphisme $L_{g^{-1}} \circ f$ fixe e, et par conséquent il doit coïncider avec l'identité de G par connexité (voir lemme 1.2.1). Ceci prouve bien que tout automorphisme est de la forme L_g, $g \in G$.

Un champ de vecteurs X vérifie $\mathcal{L}_X\omega_G = 0$ si et seulement si c'est un champ de Killing du parallélisme (voir section 1.2.2), c'est-à-dire si et seulement si son flot local est formé d'automorphismes du parallélisme. Son flot local est donc de la forme $L_{e^{tX}}$, pour $X \in \mathfrak{g}$, ce qui montre qu'il est invariant à droite. □

Proposition 2.1.2 (L'équation structurelle)**.** *La forme de Maurer-Cartan d'un groupe de Lie G vérifie la relation fondamentale*

$$\mathrm{d}\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0.$$

Démonstration. Voir [Sha96], Chap 3, §3. □

On appelle *équation structurelle* la relation ci-dessus, car elle caractérise localement le groupe de Lie G au sens du résultat suivant.

Théorème 2.1 ([Sha96], Ch.3, Theorem 6.1)**.** *Soit M une variété munie d'une 1-forme $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ telle qu'en tout $x \in M$, ω_x soit un isomorphisme linéaire et satisfaisant la*

relation $\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0$. *Alors, en tout point de* $x \in M$, *on peut trouver un difféomorphisme local* $f : U \to V$ *entre un voisinage ouvert* U *de* x *dans* M *et un voisinage ouvert* V *de* e *dans* G, *et tel que* $f^*\omega_G = \omega$.

Si on exclut certains phénomènes topologiques, on a également une version globale de ce résultat ([Sha96], Ch.3, Theorem 7.14).

Le géométrie de Cartan canonique

Prenons P un sous-groupe de Lie de G et notons $\mathbf{X} = G/P$. La projection naturelle $\pi : G \to \mathbf{X}$ admet une structure de fibré principal, de groupe structurel P, telle que l'action de P sur l'espace total G se fait par multiplication à droite. Si $A \in \mathfrak{p}$, on note A^* le champ de vecteurs fondamental associé sur G. Ces champs fondamentaux sont alors invariants à gauche. À ce fibré, on rattache ω_G la forme de Maurer-Cartan gauche de G. Ce que nous avons observé au paragraphe précédent nous assure :

1. $\forall g \in G$, $(\omega_G)_g : T_gG \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme linéaire ;
2. $\forall A \in \mathfrak{p}$, on a $\omega_G(A^*) = A$ partout ;
3. $\forall p \in P$, on a $(R_p)^*\omega_G = \mathrm{Ad}(p^{-1})\omega_G$.

Définition 2.1.2. Nous dirons que le P-fibré principal $\pi : G \to \mathbf{X}$, muni de la forme de Maurer-Cartan ω_G, est *la géométrie de Cartan canonique* associée à $\mathbf{X}$.

Comme ce sera le cas en toute généralité, la géométrie de Cartan canonique étant définie par un fibré au-dessus de $\mathbf{X}$ et une forme différentielle sur ce fibré, les automorphismes locaux d'une telle structures sont naturellement définis comme étant les difféomorphismes locaux de $\mathbf{X}$ qui se relèvent en des isomorphismes entre les restrictions des fibrés, et qui préservent la restriction de ω_G. Ils vérifient la propriété de globalisation ci-dessous.

Proposition 2.1.3. *Soient* $\boldsymbol{X} = G/P$ *un espace homogène et* $f : U \to V$ *un difféomorphisme local entre des ouverts connexes de* $\boldsymbol{X}$. *On note* $\pi : G \to X$ *la projection naturelle et on suppose que* f *se relève en un morphisme de fibré* $\widehat{f} : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(V)$ *qui préserve la restriction de la forme de Maurer-Cartan. Alors,* $\widehat{f}$ *est la restriction à* $\pi^{-1}(U)$ *de la translation à gauche par un élément* $g_0 \in G$.

Démonstration. Soient $x = g.P \in U$. Notons $g' = \widehat{f}(g)$ et $g_0 = g'g^{-1}$. La composée $L_{g_0^{-1}} \circ \widehat{f}$, définie sur $\pi^{-1}(U)$, fixe donc g et préserve ω_G. Nous pouvons alors utiliser le

Lemme 2.1.4. *Soit* $(M^n, \mathcal{P})$ *une variété munie d'un parallélisme. Soit* $f : U \to V$ *un automorphisme local du parallélisme tel qu'il existe* $x_0 \in U \cap V$ *fixé par* x. *Alors, si* U *est connexe,* $U = V$ *et* $f = \mathrm{id}$.

Démonstration. L'ensemble $\{x \in U \mid f(x) = x\}$ est fermé dans U, mais aussi ouvert car si $f(x) = x$, alors pour tout $v \in \mathbf{R}^n$ dans un voisinage de 0, $f(\exp(x,v)) = \exp(x,v)$ (voir section 1.2.2 pour la notion d'exponentielle d'un parallélisme). Puisqu'il contient x_0, cet ensemble est tout U. □

Ainsi, nous devons avoir $\widehat{f} = L_{g_0}$ dans la composante connexe de g dans $\pi^{-1}(U)$. Cette relation s'étend alors à tout $\pi^{-1}(U)$ car ces deux applications commutent à l'action droite de P. □

2.1.2 Définition générale

Énonçons à présent la définition générale d'une géométrie de Cartan modelée sur l'espace homogène $\mathbf{X}$.

Définition 2.1.3. Soit M une variété différentielle. Une *géométrie (ou structure) de Cartan* sur M, modelée sur $\mathbf{X}$, et la donnée d'un triplet $(M, \widehat{M}, \omega)$ où $\widehat{M} \to M$ est un P-fibré principal et ω une 1-forme sur $\widehat{M}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, appelée *connexion de Cartan*, satisfaisant les conditions suivantes :

1. pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$, $\omega_{\widehat{x}} : T_{\widehat{x}}\widehat{M} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme linéaire ;
2. pour tout $X \in \mathfrak{p}$, $\omega(X^*) = X$, où X^* désigne le champ de vecteur fondamental sur $\widehat{M}$ associé à l'action (droite) de $\exp(tX)$;
3. pour tout $p \in P$, $(R_p)^*\omega = \mathrm{Ad}(p^{-1})\omega$.

Nous allons commencer par exposer quelques faits très généraux sur ces structures géométriques. Dans ce qui suit, on se donne $(M, \mathcal{C})$ une variété munie d'une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}$, dont on note $\pi : \widehat{M} \to M$ le P-fibré principal et ω la connexion de Cartan associés.

Commençons par noter que $\dim M = \dim \widehat{M} - \dim P = \dim \mathbf{X}$. Une géométrie de Cartan sur M est une structure géométrique que l'on peut restreindre aux ouverts U de M. Pour cela, il suffit de prendre pour fibré de Cartan $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ et $\omega|_{\pi^{-1}(U)}$ comme connexion de Cartan.

La première condition sur ω nous dit que la connexion de Cartan définit un parallélisme sur $\widehat{M}$, noté $\mathcal{P}_\omega$. Conformément à ce qui a été exposé précédemment en section 1.2.2 sur les parallélismes, nous noterons $\widetilde{X} := \omega^{-1}(X)$ le champ ω-constant associé à $X \in \mathfrak{g}$. Nous avons une application exponentielle sur $\widehat{M}$, définie sur un voisinage de $\widehat{M} \times \{0\} \subset \widehat{M} \times \mathfrak{g}$, et donnée, pour $\widehat{x} \in \widehat{M}$ et $A \in \mathfrak{g}$ suffisamment petit, par $\exp(\widehat{x}, A) = \phi^1_{\widetilde{A}}(\widehat{x})$. Par construction, à chaque $\widehat{x} \in \widehat{M}$ fixé, cette exponentielle réalise un difféomorphisme local entre un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$, appelé *domaine d'injectivité* en $\widehat{x}$, et un voisinage de $\widehat{x}$ dans $\widehat{M}$. La troisième condition sur ω nous donne la relation d'équivariance suivante

$$\exp(\widehat{x}.p, A) = \exp(\widehat{x}, \mathrm{Ad}(p)A).p.$$

Le parallélisme défini par ω est bien particulier puisqu'il "contient" les champs fondamentaux de l'action de P sur $\widehat{M}$. Il nous fournit l'identification

$$TM \simeq \widehat{M} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}. \tag{2.1}$$

où P agit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ par passage au quotient de sa représentation adjointe. Ceci provient du fait que pour tout $x \in M$ et tout $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on a un isomorphisme $\varphi_{\widehat{x}} : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{v} \in T_{\widehat{x}}\widehat{M} & \xrightarrow{\omega_{\widehat{x}}} & \mathfrak{g} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow \\ v \in T_xM & \xrightarrow{\varphi_{\widehat{x}}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \end{array} \tag{2.2}$$

en notant que deux choix pour $\widehat{v}$ diffèrent d'un vecteur vertical (que ω envoie dans $\mathfrak{p}$). L'équivariance de ω nous donne alors

$$\forall p \in P,\ \varphi_{\widehat{x}.p} = \overline{\mathrm{Ad}}(p^{-1})\varphi_{\widehat{x}}.$$

Bien entendu, l'exemple le plus élémentaire de géométrie de Cartan d'espace modèle $\mathbf{X}$ est la géométrie de Cartan canonique modelée sur $\mathbf{X}$ décrite à la section précédente. Les premiers exemples de géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$ sont donc les ouverts de $\mathbf{X}$ lui même, auxquels on restreint la géométrie de Cartan canonique. Comme on s'y attend, ces exemples sont exceptionnels au sein de toutes les variétés munies de géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$. En fait, à isomorphisme près, ils sont caractérisés localement par l'annulation d'une 2-forme définie sur l'espace total du fibré de Cartan, qu'on appelle la forme courbure.

2.1.3 Courbure d'une géométrie de Cartan

Définition 2.1.4. On appelle *forme courbure* la 2-forme sur $\widehat{M}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définie par $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

Notons que dans le cas d'un ouvert de $\mathbf{X}$, la forme courbure est identiquement nulle puisque la forme de Maurer-Cartan satisfait l'équation structurelle (proposition 2.1.2). Réciproquement, il s'avère que toute géométrie de Cartan dont la forme courbure Ω est identiquement nulle est localement isomorphe à son espace modèle. On parlera alors de géométrie de Cartan *plate*. On peut alors montrer que la donnée sur M d'une géométrie de Cartan plate modelée sur $\mathbf{X}$ n'est rien d'autre que la donnée d'une $(G, \mathbf{X})$-structure sur M ([ČS09], Rem 1.5.2).

Lemme 2.1.5. *La forme courbure est horizontale, ie $\Omega_{\widehat{x}}$ s'annule dès que l'un de ses arguments est tangent à la fibre $\widehat{x}.P$.*

Démonstration. Voir [Sha96], Chap 5, Corollary 3.10. □

Puisque ω trivialise le fibré tangent $T\widehat{M}$, la forme courbure définit une application $K : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, dite *application courbure*, et donnée par

$$K(\widehat{x})(X, Y) = \Omega_{\widehat{x}}(\widetilde{X}_{\widehat{x}}, \widetilde{Y}_{\widehat{x}}).$$

L'horizontalité de Ω assure alors que pour tout $\widehat{x}$, l'application $K(\widehat{x})$ passe au quotient en une application de $\mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ (que nous noterons tous $K(\widehat{x})$). Les propriétés d'équivariance de la connexion de Cartan ω assurent alors que la fonction courbure K est P-équivariante, lorsque l'on fait agir P par la droite sur $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$, via le produit tensoriel des représentations $\Lambda^2\overline{\mathrm{Ad}}^*$ et Ad. Pour finir, K vérifie la relation (voir [Sha96], p.192)

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ K(\widehat{x})(X, Y) = [X, Y] - \omega_{\widehat{x}}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]).$$

Notons qu'en toute rigueur, il faudrait évaluer $K(\widehat{x})$ sur les projections de X et Y sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

2.1.4 Isomorphismes et champs de Killing

Les hypothèses que nous avons faites sur le modèle $\mathbf{X}$ impliquent le résultat suivant, crucial lorsque l'on veut définir la notion d'isomorphisme entre géométries de Cartan. Le lecteur en trouvera la démonstration dans [ČS09], Proposition 1.5.3.

Lemme 2.1.6. *Soit $U \subset M$ un ouvert et F un automorphisme de fibré de $\pi^{-1}(U)$, au-dessus de l'identité de U et tel que $F^*\omega = \omega$ en restriction à $\pi^{-1}(U)$. Alors, $F = \mathrm{id}$.*

Prenons tout de même le temps de voir pourquoi ces hypothèses sur le modèle sont absolument nécessaires. L'action à gauche $L_p^{\mathbf{X}}$ d'un élément de P sur le modèle est définie par le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_p} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{L_p^{\mathbf{X}}} & \mathbf{X} \end{array}$$

Comme pour tout élément de G, L_p agit sur G en préservant la forme de Maurer-Cartan. Donc, s'il existait un $p \in P$ distinct du neutre et agissant trivialement sur $\mathbf{X}$, le lemme précédent tomberait immédiatement en défaut dans le cas de la géométrie de Cartan canonique.

Étant données deux géométries de Cartan $(M_i, \widehat{M_i}, \omega_i)$, $i = 1, 2$, sur le même modèle $\mathbf{X}$, un *isomorphisme* entre elles est un difféomorphisme $f : M_1 \to M_2$ qui se relève en un automorphisme de P-fibrés principaux $\widehat{f} : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ tel que $(\widehat{f})^* \omega_2 = \omega_1$. Un tel relèvement est nécessairement unique d'après le lemme précédent. Les *automorphismes* d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X}$ sont les isomorphismes de $(M, \mathcal{C})$ dans elle-même.

Théorème 2.2. *Les automorphismes d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X}$ forment un groupe de Lie dont la dimension est majorée par* $\dim G$.

Démonstration. Il suffit de voir que les automorphismes du parallélisme $(\widehat{M}, \mathcal{P}^\omega)$ qui commutent à l'action de P induisent exactement sur la base les automorphismes de la géométrie de Cartan. Les automorphismes de $(M, \mathcal{C})$ forment ainsi un sous-groupe fermé du groupe des automorphismes du parallélisme $\mathcal{P}_\omega$ (qui, rappelons-le, est muni de la topologie compacte-ouverte, voir le théorème 1.5). □

Définition 2.1.5 (Isomorphismes locaux et champs de Killing)**.** Soient $U, V \subset M$ deux ouverts de M. Un *isomorphisme local* entre U et V est un isomorphisme entre les géométries restreintes $(U, \pi^{-1}(U), \omega|_{\pi^{-1}(U)})$ et $(V, \pi^{-1}(V), \omega|_{\pi^{-1}(V)})$.

Un *champ de Killing (resp. champ de Killing local)* est un champ de vecteurs sur M (resp. sur un ouvert de M) dont le flot local est formé d'isomorphismes locaux.

Soit X un champ de Killing local défini sur un ouvert $U \subset M$. Alors, X se relève en un champ de vecteurs $\widehat{X}$ sur $\pi^{-1}(U)$ dont le flot local $\phi^t_{\widehat{X}} = \widehat{\phi^t_X}$ est le relevé à $\pi^{-1}(U)$ du flot de X. Automatiquement, $\widehat{X}$ commute à l'action droite du groupe structurel P et vérifie $\mathcal{L}_{\widehat{X}} \omega = 0$. Réciproquement, tout champ de vecteurs défini sur $\pi^{-1}(U)$ qui vérifie ces propriétés se projette naturellement sur un champ de Killing local défini sur U. En fait, on a même la proposition suivante.

Proposition 2.1.7. *Soit $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\widehat{M}$ qui préserve la forme de Cartan. Notons $U = \pi(\mathcal{U})$ et $V = \pi(\mathcal{V})$. Supposons $\mathcal{U}$ connexe et $\forall x \in U$, $\mathcal{U} \cap \pi^{-1}(x)$ connexe. Alors F s'étend en un isomorphisme de fibré $\widehat{f} : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(V)$ qui est le relevé d'un isomorphisme local $f : U \to V$.*

Soit $\mathcal{U} \subset \widehat{M}$ un ouvert connexe tel que $\forall x \in U$, $\mathcal{U} \cap \pi^{-1}(x)$ est connexe. Soit $\widehat{X}$ un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{L}_{\widehat{X}} \omega = 0$. Alors, $\widehat{X}$ est la restriction à $\mathcal{U}$ du relevé d'un champ de Killing X défini sur U.

Démonstration. Puisqu'ils doivent commuter à l'action du groupe structurel P, il n'y a qu'un seul choix possible pour étendre F et $\widehat{X}$ à l'ouvert saturé $\pi^{-1}(U)$. La seule chose à vérifier est que ces extensions sont bien définies et qu'elles préservent bien la connexion de Cartan. Expliquons-le par exemple dans le cas du champ de vecteurs. Un tel champ $\widehat{X}$ commute nécessairement avec les champs fondamentaux A^*, $A \in \mathfrak{p}$. Vu l'hypothèse que nous avons faite sur $\mathcal{U}$, si deux points $\widehat{x} \in \mathcal{U}$ et $\widehat{x}.p \in \mathcal{U}$ sont dans la même fibre, alors $\widehat{X}_{\widehat{x}.p} = (R_p)_* \widehat{X}_{\widehat{x}}$. Maintenant, si $\widehat{x} \in \pi^{-1}(U)$, il existe $p \in P$ tel que $\widehat{x}.p \in \mathcal{U}$, on définit $\widehat{X}_{\widehat{x}} := (R_{p^{-1}})_* \widehat{X}_{\widehat{x}.p}$ et cette définition est cohérente vu ce que vérifie $\widehat{X}$ sur $\mathcal{U}$. Étant donné que $(R_p)^* \omega = \mathrm{Ad}(p^{-1})\omega$, on a bien $\mathcal{L}_{\widehat{X}} \omega = 0$ sur tout $\pi^{-1}(U)$. □

2.1.5 Dérivation covariante universelle

On peut définir une notion générale de dérivation covariante dans une géométrie de Cartan. Ces définitions suivent de près celles que l'on peut trouver dans [Sha96], pp.194-200 et dans [Mel11].

Définition 2.1.6. Soient V un espace vectoriel et $\rho : P \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire. Soit $F : \widehat{M} \to V$ une application P-équivariante. Puisque la connexion de Cartan définit un parallélisme sur $\widehat{M}$, la différentielle $TF : T\widehat{M} \to TV$ peut être vue comme une nouvelle application $\mathcal{D}^1 F : \widehat{M} \to V \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$, que nous appellerons *dérivée covariante (universelle)* de F, et définie par

$$\forall \widehat{x} \in \widehat{M},\ \mathcal{D}^1 F(\widehat{x}) = (F(\widehat{x}), D^1 F(\widehat{x})), \text{ où } \forall A \in \mathfrak{g},\ D^1 F(\widehat{x})(A) = T_{\widehat{x}} F(\widetilde{A}_{\widehat{x}}).$$

On vérifie aisément que cette application est P-équivariante pour la représentation $\mathrm{Ad}^* \otimes \rho$ sur $\mathfrak{g}^* \otimes V$.

L'application tangente TF est alors complètement déterminée par la dérivée covariante $\mathcal{D}^1 F$. Puisqu'après avoir pris la dérivée covariante nous obtenons une nouvelle application équivariante à valeurs dans un nouvel espace, il est possible d'itérer cette construction pour obtenir la r-ième dérivée covariante $\mathcal{D}^r F$, définie après quelques identifications naturelles comme étant l'application équivariante

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}^r F : & \widehat{M} & \to & V \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V) \\ & \widehat{x} & \mapsto & (F(\widehat{x}), D^1 F(\widehat{x}), \ldots, D^r F(\widehat{x})), \end{array}$$

où $D^r F(\widehat{x})(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r) := (\widetilde{X_1}. \ldots . \widetilde{X_r}.F)(\widehat{x})$ et P agit par la droite sur chaque facteur $\mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V)$ de la façon suivante : pour tous $w \in \mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V)$ et $p \in P$,

$$w.p : X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \mapsto \rho(p).w(\mathrm{Ad}(p)X_1, \ldots, \mathrm{Ad}(p)X_r).$$

Nous expliquerons à la section 3.1 dans quelle mesure on retrouve la différentiation covariante classique lorsque la géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ est celle associée à une connexion linéaire. Pour finir,

Définition 2.1.7. La géométrie de Cartan est dite *sans torsion* si $\forall \widehat{x} \in \widehat{M}$, $K(\widehat{x}) \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{p}) \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$

2.2 Le problème d'équivalence

Résoudre le *problème d'équivalence* pour un certain type de structures géométriques classiques (métriques riemanniennes, connexions linéaires, classes conformes ...), c'est exhiber une géométrie de Klein $\mathbf{X}$ qui est naturellement munie d'une telle structure géométrique, et construire une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés munies de ce type de structures et la catégorie des variétés munies de géométries de Cartan d'espace modèle $\mathbf{X}$. On demande en plus qu'à $\mathbf{X}$ corresponde la géométrie de Cartan canonique. Assez souvent, il faut rajouter des conditions de normalisation pour que la correspondance soit bijective. Par exemple, on impose à la connexion de Cartan associée à une métrique riemannienne d'être *sans torsion* (la résolution du problème d'équivalence est alors équivalente à l'existence et l'unicité de la connexion de Levi-Civita).

2.2.1 Quelques exemples connus

Commençons par citer quelques exemples célèbres de structures géométriques pour lesquelles le problème d'équivalence a été résolu.

1. Soit $\mathbf{X} = (O(n) \ltimes \mathbf{R}^n)/O(n)$ l'espace euclidien. À chaque variété riemannienne (M^n, g) correspond naturellement une géométrie de Cartan sans torsion $(M^n, \mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X}$, et inversement une telle géométrie de Cartan sur M définit canoniquement une métrique riemannienne g dont la géométrie de Cartan associée est isomorphe à $(M, \mathcal{C})$. De plus, un difféomorphisme entre deux variétés (M, g) et (N, h) est une isométrie si et seulement si c'est un isomorphisme entre les géométries de Cartan correspondantes.
2. Si $n \geqslant 3$, soit $\mathbf{X} = PO(1, n+1)/P$ la sphère conforme riemannienne standard, où $P \subset PO(1, n+1)$ désigne le stabilisateur d'une direction isotrope de l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n+1}$. Il y a équivalence de catégories entre les variétés munies de structures conformes riemanniennes et les variétés munies de géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$, dites *normalisées*. C'est l'objet de la section 2.3.
3. Soit $\mathbf{X} = \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})/P$, où P est le stabilisateur d'une direction de $P^n(\mathbf{R})$. Il y a équivalence entre les variétés munies de classes projectives de connexions linéaires et les géométries de Cartan normalisées modelées sur $\mathbf{X}$. Le lecteur pourra se référer à [Sha96], Chap.8, Theorem 3.8.

Jusqu'à la fin de ce chapitre, l'objectif va être d'exposer comment on construit l'équivalence de catégories pour les structures conformes. Avant de nous lancer dans cette tâche, nous terminons cette section en exposant un exemple de structures géométriques pour lesquelles on comprend sans trop de difficulté comment résoudre le problème d'équivalence.

2.2.2 Le cas des G-structures munies de connexions linéaires

Dans cette section, nous allons voir comment associer naturellement une géométrie de Cartan à une variété munie d'une G-structure et d'une connexion linéaire compatible. L'exemple le plus naturel d'une telle situation est celui de la $O(p, q)$-structure définie par une métrique pseudo-riemannienne et où la connexion est la connexion de Levi-Civita définie par la métrique. Donnons-nous G_0 un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$.

La géométrie de Cartan associée. Fixons-nous M une variété, munie d'une G_0-structure que nous notons $\pi : P \to M$, et d'une connexion linéaire ∇ compatible avec la G_0-structure, c'est-à-dire telle que la distribution horizontale définie par ∇ sur $\mathcal{R}(M)$ est tangente à P et se restreint donc en une distribution horizontale $(H_u)_{u\in P}$ sur P. Appelons alors $\gamma \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}_0)$ la 1-forme connexion associée et θ la forme canonique (cf. section 1.1.1) de $\pi : P \to M$.

Soit $G := G_0 \ltimes \mathbf{R}^n$ l'extension affine de G_0. Définissons alors sur P la 1-forme $\omega = (\gamma, \theta)$ à valeurs dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathbf{R}^n$. On vérifie immédiatement que ω satisfait les axiomes d'une connexion de Cartan modelée sur $\mathbf{X} := G/G_0$. La géométrie de Cartan que nous venons de construire sera dite *associée* à la G_0-structure et à ∇.

La G_0-structure et la connexion définies par la géométrie de Cartan. Donnons-nous $(M, \widehat{M}, \omega)$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X} = G/G_0$. Le point important est que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbf{R}^n$ est une décomposition $\mathrm{Ad}(G_0)$-invariante (en d'autres termes, la géométrie de Klein G/G_0 est *réductive*). Par conséquent, si on note $\omega = (\gamma, \theta)$ les composantes de ω, γ vérifie la propriété d'équivariance d'une forme connexion et $\theta \in \Omega^1(\widehat{M}, \mathbf{R}^n)$ est une 1-forme strictement horizontale telle que $(R_{g_0})^*\theta = g_0^{-1}\theta$. D'après la proposition 1.1.2 on a un isomorphisme de G_0-fibrés $\phi : \widehat{M} \to P$, où $P \to M$ est une G_0-structure. La forme connexion γ est alors envoyée par ϕ sur une forme connexion $\gamma_0 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}_0)$.

Les isomorphismes coïncident. Nous venons d'exhiber une correspondance entre la catégorie des variétés de dimension n munies de G_0-structures et de connexions linéaires compatibles et celle des variétés munies de géométries de Cartan modelées sur G/G_0.

On peut alors aisément vérifier que si $P_M \to M$ et $P_N \to N$ sont deux G_0-structures munies de connexions linéaires, alors un difféomorphisme $f : M \to N$ est un isomorphisme entre les G_0-structures et les connexions si et seulement si c'est un isomorphisme entre les géométries de Cartan associées.

2.3 Problème d'équivalence pour les structures conformes

Résoudre le problème d'équivalence pour les structures conformes de signature (p, q), c'est exhiber une géométrie de Klein $\mathbf{X} = G/P$, qui est muni d'une classe conforme $[g_{p,q}]$ de signature (p, q) naturelle et invariante sous l'action du groupe G, et une correspondance

$$\left\{ \begin{array}{c} (M, [g]) \text{ variétés munies de structures} \\ \text{conformes de signature } (p, q) \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (M, \mathcal{C}) \text{ variétés munies de géométries} \\ \text{de Cartan d'espace modèle } \mathbf{X} \\ \text{normalisées} \end{array} \right\}$$

telles que si $(M_1, [g_1])$ et $(M_2, [g_2])$ sont deux structures conformes de même signature, et si $(M_1, \mathcal{C}_1)$, $(M_2, \mathcal{C}_2)$ sont les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$ correspondantes, alors un difféomorphisme $f : M_1 \to M_2$ est conforme si et seulement si c'est un isomorphisme entre les géométries de Cartan $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On demande de plus que $(\mathbf{X}, [g_{p,q}])$ s'envoie par cette correspondance sur la géométrie de Cartan canonique (voir la section 2.1.1).

La partie difficile de ce résultat est la construction de la géométrie de Cartan que l'on associe à une structure conforme, et c'est sur ce point que nous allons principalement nous concentrer.

Ce résultat a été démontré à l'origine par É. Cartan dans [Car23] dans le cas riemannien. Plus exactement, c'est en cherchant une notion de connexion pour les structures

conforme qu'il est parvenu plus tard ([Car52]) à une définition générale de géométrie de Cartan (« espace généralisé » dans la terminologie de l'époque). Le lecteur pourra trouver, dans une formulation moderne, une construction de la géométrie de Cartan normalisée associée à une classe conforme de métriques dans [Kob72] (Chap. IV), [Sha96] (Chap. 7) ou encore [ČS09] (Chap. 1).

2.3.1 L'espace modèle de la géométrie conforme

Un mauvais candidat

Étant donnée une variété $(M, [g])$ munie d'une classe conforme de signature (p, q) à laquelle on cherche à associer un fibré et une connexion de Cartan, une première approche consiste, par analogie avec le cas des métriques, à chercher à munir la $CO(p, q)$-structure associée $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$ d'une connexion de Cartan à valeurs dans l'extension affine $\mathfrak{co}(p, q) \ltimes \mathbf{R}^n$, où la composante sur $\mathfrak{co}(p, q)$ proviendrait d'une forme connexion sur $\mathcal{P}$, et celle sur $\mathbf{R}^n$ de la forme canonique de $\mathcal{P} \to M$.

Il n'y a pas d'espoir dans cette direction, et on peut le comprendre de plusieurs façons. Premièrement, on l'expliquera à la section 2.3.2, une structure conforme ne peut pas définir *naturellement* une connexion linéaire. Ensuite, si une telle construction était possible, l'espace modèle devrait être $(CO(p, q) \ltimes \mathbf{R}^n)/CO(p, q)$. Ce paragraphe a pour but d'expliquer pourquoi il n'est pas possible de résoudre le problème d'équivalence pour les structures conformes avec cet espace modèle.

Notons provisoirement $G = CO(p, q) \ltimes \mathbf{R}^n$, $P = CO(p, q)$ et $\mathbf{X} = G/P$. L'espace homogène $\mathbf{X}$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ et l'action de G sur $\mathbf{X}$ préserve la classe conforme de la forme quadratique standard $g_{p,q}$ de $\mathbf{R}^{p,q}$.

Supposons que le problème d'équivalence pour les structures conformes soit résolu pour la géométrie de Klein $\mathbf{X}$. Par définition, la géométrie de Cartan associée à $(\mathbf{X}, [g_{p,q}])$ est le fibré $\pi : G \to X$ muni de la forme de Maurer-Cartan ω_G de G comme connexion de Cartan. Rappelons que $\mathrm{Conf}(\mathbf{X}, [g_{p,q}]) = G$ (ceci est pour le moment en accord avec notre hypothèse). Or, les transformations conformes locales de $(\mathbf{X}, [g_{p,q}])$ doivent coïncider avec les automorphismes locaux de la géométrie de Cartan $(G \to \mathbf{X}, \omega_G)$. D'après le lemme 2.1.3, tout automorphisme local de cette géométrie de Cartan est en fait obtenu en restreignant l'action (globale) sur $\mathbf{X}$ d'un élément de G. Ceci impliquerait donc que toute transformation conforme locale de $\mathbf{R}^{p,q}$ est obtenue en restreignant une transformation conforme globale, ce qui est faux (il suffit par exemple de considérer une inversion centrée en l'origine dans le cas riemannien).

Il nous faut donc chercher du côté d'une autre géométrie de Klein, qui est également associée à une structure conforme pseudo-riemannienne, et qui vérifie un « théorème de Liouville » (*ie* telle que ses transformations conformes locales se globalisent).

L'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$

On se donne $n \geqslant 3$, et $p, q \geqslant 0$ tels que $p+q = n$. Notons $C^{p+1,q+1}$ le cône isotrope épointé de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$. On définit l'*univers d'Einstein* de signature (p, q) comme étant la quadrique projective lisse $\mathbf{Ein}^{p,q} = \pi(C^{p+1,q+1})$, où $\pi : \mathbf{R}^{n+2} \setminus \{0\} \to P^{n+1}(\mathbf{R})$ est la projection naturelle. Topologiquement, $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est compacte, doublement revêtue par le produit $\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^q$. La projection est le produit des antipodies des deux sphères. La forme quadratique

ambiante de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ induit naturellement une structure conforme de signature (p,q) sur cette variété. Décrivons la rapidement.

Soient $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ et $v \in C^{p+1,q+1}$ tels que $x = \pi(v)$. Alors, l'application tangente $T_v\pi : T_vC^{p,q} \to T_x\mathbf{Ein}^{p,q}$ est surjective de noyau $\mathbf{R}v$. Or $\mathbf{R}v$ est exactement le noyau de la restriction de la forme quadratique ambiante de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ à l'espace tangent $T_vC^{p,q} = v^\perp$. Cette dernière induit donc une forme quadratique non dégénérée de signature (p,q) sur le quotient $v^\perp/\mathbf{R}v$. Ainsi, $T_v\pi$ permet de rapatrier une forme quadratique de signature (p,q) sur $T_x\mathbf{Ein}^{p,q}$. Notons que le choix de v se fait à un scalaire près et qu'un choix différent de v, disons λv, multiplie par λ^2 la forme quadratique sur $T_x\mathbf{Ein}^{p,q}$ précédemment décrite. Nous obtenons donc une classe conforme de signature (p,q) sur notre quadrique. C'est toujours à celle-là que nous ferons référence en parlant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$.

Par essence, cette classe conforme est préservée par l'action projective de $O(p+1,q+1)$ sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. En fait, comme le montre le théorème ci-dessous qui est une généralisation à $\mathbf{Ein}^{p,q}$ du théorème de Liouville (formulé à l'origine sur $\mathbf{S}^n$), toute transformation conforme de l'univers d'Einstein est de cette forme.

Théorème 2.3 (Liouville)**.** *Si $n \geqslant 3$, tout difféomorphisme conforme local entre deux ouverts connexes de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est restriction de l'action projective d'un élément de $O(p+1,q+1)$. En particulier,* $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q}) \simeq PO(p+1,q+1)$.

Remarque 2.3.1. On a une équivalence conforme $\mathbf{Ein}^{0,n} \simeq \mathbf{S}^n$ entre l'univers d'Einstein de signature $(0,n)$ et la sphère $\mathbf{S}^n$ munie de sa métrique standard. On retrouve en particulier l'isomorphisme entre le groupe de Möbius et $PO(1,n+1)$.

De plus, $PO(p+1,q+1)$ agit transitivement sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et l'univers d'Einstein est un espace homogène sous $PO(p+1,q+1)$. La variété $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est donc difféomorphe au quotient $PO(p+1,q+1)/P$, où P désigne le stabilisateur dans $PO(p+1,q+1)$ d'une direction isotrope de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$. Nous verrons lors d'une étude plus détaillée et géométrique de l'univers d'Einstein un peu plus loin que P s'identifie via une *projection stéréographique* au groupe conforme (linéaire) de $\mathbf{R}^{p,q}$. Pour le moment, nous allons décrire ce sous-groupe de façon élémentaire.

L'algèbre $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$

Appelons q la forme quadratique standard de $\mathbf{R}^{p,q}$, dont on note $I_{p,q}$ la matrice. On se place dans une base $(e_1,\dots,e_{n+2})$ de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ dans laquelle sa forme quadratique s'écrit $2x_1x_{n+2} + q(x_2,\dots,x_{n+1})$. Dans cette base, l'algèbre $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$ est formée des matrices M réelles de taille $n+2$ telles que

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & I_{p,q} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} M \;+\; {}^tM \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & I_{p,q} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Il est bien connu que ces algèbres sont simples réelles, de rang réel égal à $\min(p+1,q+1)$. On obtient directement que

$$\mathfrak{o}(p+1,q+1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} a & u & 0 \\ \hline -I_{p,q}\,{}^tv & A & -I_{p,q}\,{}^tu \\ \hline 0 & v & -a \end{array} \right);\ a \in \mathbf{R},\ u,v \in \mathbf{R}^n,\ A \in \mathfrak{o}(p,q) \right\}.$$

En tant qu'espace vectoriel, cette algèbre se décompose en somme directe $\mathfrak{o}(p+1,q+1) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ où $g_0 \simeq \mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(p,q) \simeq \mathfrak{co}(p,q)$ est la sous-algèbre qui correspond aux éléments diagonaux par bloc, $g_1 \simeq \mathbf{R}^n$ correspond à ceux unipotents supérieurs et $g_{-1} \simeq \mathbf{R}^n$ à ceux unipotents inférieurs. Pour $a \in \mathbf{R}$, $A \in \mathfrak{o}(p,q)$, et $u, v \in \mathbf{R}^n$, nous notons

$$M_0(a,A) = \begin{pmatrix} a & & \\ & A & \\ & & -a \end{pmatrix},\ M_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ & 0 & -I_{p,q}\,{}^t u \\ & & 0 \end{pmatrix},\ M_{-1}(v) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -I_{p,q}\,{}^t v & 0 & \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule que $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_0$ préserve $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$, et y induit l'action linéaire de $\mathfrak{co}(p,q)$ sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $A \in \mathfrak{o}(p,q)$, $u, v \in \mathbf{R}^n$, on a

$$[M_0(a,A), M_1(u)] = M_1(au - uA) \text{ et } [M_0(a,A), M_{-1}(v)] = M_{-1}(-av - vA).$$

De plus, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_0$. Précisément, le crochet de deux éléments $M_1(u)$ et $M_{-1}(v)$ est la matrice

$$[M_1(u), M_{-1}(v)] = M_0(- < u, v >_{p,q}, I_{p,q}({}^t vu - {}^t uv)),$$

où $< u, v >_{p,q}$ désigne le produit scalaire de u et v dans $\mathbf{R}^{p,q}$.

Le stabilisateur d'une direction isotrope

Fixons-nous $x_0 = \pi(e_1) \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ comme origine de cet espace homogène et notons P son stabilisateur dans $PO(p+1,q+1)$. Une matrice $M \in \mathfrak{o}(p+1,q+1)$ est dans $\mathfrak{p}$ si en plus de vérifier (2.3), elle admet e_1 comme direction propre. On vérifie alors sans difficulté que

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} a & u & 0 \\ \hline 0 & A & -I_{p,q}\,{}^t u \\ \hline 0 & 0 & -a \end{array} \right);\ a \in \mathbf{R},\ u \in \mathbf{R}^n,\ A \in \mathfrak{o}(p,q) \right\}.$$

En tant qu'espace vectoriel, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ et puisque $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_0$ préserve $\mathfrak{g}_1$ et y induit l'action linéaire de $\mathfrak{co}(p,q)$ sur $\mathbf{R}^n$, $\mathfrak{p}$ s'identifie au produit semi-direct $\mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$, qui n'est autre que l'algèbre de Lie du groupe conforme de $\mathbf{R}^{p,q}$.

Au niveau du groupe, tout élément de P s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & A & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \exp(M_1(u)),$$

où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*,\ A \in O(p,q),\ M_1(u) \in \mathfrak{g}_1$.

En vue du travail que nous allons exposer en géométrie conforme lorentzienne, nous donnons une description un peu plus détaillée de l'algèbre $\mathfrak{o}(2,n)$.

Décomposition de Cartan de $\mathfrak{o}(2,n)$

On reprend la base choisie dans la description de $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$ ci-dessus, en choisissant pour forme quadratique sur $\mathbf{R}^{p,q}$ la forme $q(x) = 2x_1x_n + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2$. En combinant les

descriptions des algèbres $\mathfrak{o}(2,n)$ et $\mathfrak{o}(1,n-1)$ que l'on a données dans le cas général, on obtient qu'une matrice $M \in \mathfrak{o}(2,n)$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda & a & u_1 & b & 0 \\ \hline -d & \mu & v_1 & 0 & -b \\ \hline -{}^t u_2 & -{}^t v_2 & A & -{}^t v_1 & -{}^t u_1 \\ \hline -c & 0 & v_2 & -\mu & -a \\ \hline 0 & c & u_2 & d & -\lambda \end{array}\right);$$

avec $A \in \mathfrak{o}(n-2)$, $u_i, v_i \in \mathbf{R}^{n-2}$, $a,b,c,d,\lambda,\mu \in \mathbf{R}$. On note $\theta : X \in \mathfrak{o}(2,n) \mapsto -{}^t X \in \mathfrak{o}(2,n)$, qui est une involution de Cartan et on prend comme sous-espace de Cartan l'espace $\mathfrak{a}$ des matrices diagonales de $\mathfrak{o}(2,n)$:

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \mu & & & \\ & & & & \\ & & -\mu & & \\ & & & -\lambda & \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}.$$

Appelons α et β les deux racines définies par $\alpha(\lambda,\mu) = \lambda - \mu$ et $\beta(\lambda,\mu) = \mu$. Le couple (α,β) forme un système de racines simples et l'ensemble des racines restreintes est

$$\{-\alpha-2\beta,\ -\alpha-\beta,\ -\alpha,\ -\beta,\ \beta,\ \alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta\}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(2,n)$ admet alors la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{o}(2,n) = \mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha-\beta} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \underbrace{\mathfrak{g}_{-\beta} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{\beta}}_{\simeq \mathfrak{co}(1,n-1)} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+2\beta}. \tag{2.4}$$

On retrouve cette décomposition de Cartan dans la description matricielle de la façon suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathfrak{a} & \mathfrak{g}_{\alpha} & \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \mathfrak{g}_{\alpha+2\beta} & 0 \\ \hline \mathfrak{g}_{-\alpha} & \mathfrak{a} & \mathfrak{g}_{\beta} & 0 & \mathfrak{g}_{\alpha+2\beta} \\ \hline \mathfrak{g}_{-\alpha-\beta} & \mathfrak{g}_{-\beta} & \mathfrak{m} & \mathfrak{g}_{\beta} & \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \\ \hline \mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta} & 0 & \mathfrak{g}_{-\beta} & \mathfrak{a} & \mathfrak{g}_{\alpha} \\ \hline 0 & \mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta} & \mathfrak{g}_{-\alpha-\beta} & \mathfrak{g}_{-\alpha} & \mathfrak{a} \end{array}\right)$$

On notera que l'algèbre du stabilisateur du point $x_0 = \pi(e_1) \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ se décompose vectoriellement en $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_{-\beta} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+2\beta}$. On notera bien que le supplémentaire $\mathfrak{g}_{-1}$ de $\mathfrak{p}$ exhibé précédemment est ici le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha-\beta} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta}$.

Projections stéréographiques de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$

Nous revenons à des considérations géométriques. On se place en signature lorentzienne par souci de clarté, mais les objets que nous allons voir peuvent se définir en toute signature. Dans ce qui suit, $\pi : \mathbf{R}^{n+2} \to P^{n+1}(\mathbf{R})$ désigne la projection naturelle.

L'univers d'Einstein lorentzien est une *compactification conforme* de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ au sens où cet espace contient des ouverts denses qui sont conformément difféomorphes à l'espace de Minkowski. Une correspondance entre un tel ouvert et $\mathbf{R}^{1,n-1}$ sera appelée *projection stéréographique*, par analogie avec la projection stéréographique de la sphère riemannienne privée d'un point sur l'espace euclidien de même dimension. Par ailleurs, bien que nous nous contentions de ne présenter que le cas de la signature lorentzienne, la construction qui va suivre peut se généraliser en toute signature et on a une notion de projection stéréographique (conforme) de $\mathbf{Ein}^{p,q} \smallsetminus \{\text{fermé d'intérieur vide}\} \to \mathbf{R}^{p,q}$. En riemannien, on retrouve notamment dans le cas de $\mathbf{Ein}^{0,n} \simeq \mathbf{S}^n$ la projection stéréographique standard (le fermé est un singleton).

Rigoureusement, *une* projection stéréographique de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est définie par la donnée d'une direction isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$, d'un plan lorentzien P de $\mathbf{R}^{2,n}$ contenant cette direction et d'une isométrie linéaire entre $P^\perp$ et $\mathbf{R}^{1,n-1}$.

Ces choix nous permettent d'écrire la forme quadratique de $\mathbf{R}^{2,n}$ sous la forme $2x_0x_{n+1} + q(x_1, \dots, x_n)$, où q désigne la forme quadratique $q(x) = -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. La projection stéréographique correspondante est alors donnée par

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbf{R}^{1,n-1} & \to & \mathbf{Ein}^{1,n-1} \\ & x & \mapsto & \pi\left(-\frac{q(x)}{2}, x, 1\right). \end{array}$$

Appelons $p := \pi(e_0)$ le sommet de la projection stéréographique. L'image de s est l'ouvert dense $M_p := \pi(\{x_{n+2} \neq 0\}) \cap \mathbf{Ein}^{1,n-1}$. On peut constater que M_p ne dépend que du sommet de la projection et que son complémentaire est le *cône de lumière* C_p issu de p (voir [Fra02], §4.2.5), c'est-à-dire la réunion de toutes les géodésiques de lumière issues de p. L'ouvert M_p est appelé *composante de Minkowski* de p.

Remarque 2.3.2. Le choix de la deuxième direction isotrope du plan lorentzien définit en fait l'*origine* de la composante de Minkowski (l'image de $0 \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ par s) et le dernier degré de liberté restant avant de réaliser conformément $\mathbf{R}^{1,n-1}$ dans M_p est une "rotation lorentzienne".

Lemme 2.3.1. *Tout ouvert de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ conforme à Minkowski est de la forme M_p. De plus, toute application conforme $s : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_p$ est une projection stéréographique.*

Démonstration. Soient $U \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et $f : U \to \mathbf{R}^{1,n-1}$ un difféomorphisme conforme et soit $s : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_p$ une quelconque projection stéréographique. Par le théorème de Liouville (théorème 2.3), il existe $g \in PO(2,n)$ tel que $s \circ f$ soit la restriction de g à U, ce qui implique que $U = M_{g^{-1}p}$ (par invariance conforme des géodésiques lumières).

Si $s' : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_p$ est conforme, alors pour toute projection stéréographique de sommet p, $s^{-1} \circ s' = g \in \mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$, et $s' = s \circ g$ est bien une projection stéréographique de sommet p. □

Pour finir, nous observons que si $f \in \mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{1,n-1})$ fixe un point p, il doit préserver (dans son ensemble) le cône de lumière C_p issu de p, et donc également la composante de Minkowski M_p. Si on s'est fixé au préalable une projection stéréographique s de sommet p, s conjugue f à une transformation conforme de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Réciproquement, à toute transformation conforme de Minkowski correspond une transformation conforme de M_p, qui s'étend (de façon unique) par le théorème de Liouville en une transformation conforme de

$\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui préserve le cône de lumière C_p, donc le point p.

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{f} & M_p \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ \mathbf{R}^{1,n-1} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R}^{1,n-1} \end{array}$$

Ainsi, la donnée d'une projection stéréographique en $p \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ permet d'identifier $\mathrm{Stab}_{PO(2,n)}(p)$ avec $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1}) \simeq CO(1,n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$. Dans le cas où $p = \pi(e_1)$ et s est la projection stéréographique que l'on a décrite explicitement en coordonnées, cette identification correspond au niveau des algèbres de Lie à celle donnée plus haut dans le cas général de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$.

2.3.2 Le fibré de Cartan défini par une structure conforme

À partir de maintenant, M est une variété réelle de dimension $n = p + q$ munie d'une classe conforme de métriques $[g]$ de signature (p,q) et on note $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$ la $CO(p,q)$-structure définie par la classe conforme.

Connexions de Weyl

Un phénomène propre aux structures conformes (par opposition aux métriques) est l'existence de variétés munies de structures conformes (par exemple la sphère riemannienne standard) admettant des transformations conformes qui fixent un point sans être linéarisables au voisinage de ce point (*ie* conjuguées à leur différentielle au voisinage du point fixe). Ceci implique qu'une classe conforme ne définit pas de connexion linéaire particulière sur le fibré $\mathcal{P} \to M$ qui soit laissée invariante par toute transformation conforme car sinon on pourrait systématiquement linéariser un difféomorphisme conforme fixant un point grâce à l'exponentielle de la connexion.

Notons que cette observation nous permet à nouveau de voir que nous ne pourrons pas résoudre le problème d'équivalence pour les structures conformes en munissant le fibré de la $CO(p,q)$-structure $\mathcal{P} \to M$ d'une connexion de Cartan à valeurs dans $\mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$. En effet, si ω était une telle connexion de Cartan sur ce fibré, la composante de ω sur $\mathfrak{co}(p,q)$ serait une forme connexion, sensée être préservée par tout difféomorphisme conforme.

Cependant, nous allons voir qu'il existe une classe de connexions linéaires particulières sur le fibré $\mathcal{P} \to M$, les *connexions de Weyl*, laissée invariante dans son ensemble par l'action des difféomorphismes conformes. Le formalisme des prolongations de G-structures va nous permettre de les considérer dans leur ensemble.

Lemme 2.3.2. *Il existe sur le fibré $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$ une connexion linéaire sans torsion.*

Démonstration. On se donne une métrique g dans la classe conforme et on note $\mathcal{P}^g$ la réduction de $\mathcal{P}$ aux repères orthonormés pour g, *ie*

$$\mathcal{P}^g = \{(x,u),\ x \in M,\ u : \mathbf{R}^{p,q} \xrightarrow{\text{isom.}} (T_xM, g_x)\}, \text{ quand}$$
$$\mathcal{P} = \{(x,u),\ x \in M,\ u : \mathbf{R}^{p,q} \xrightarrow{\text{conf.}} (T_xM, [g_x])\}$$

On note $i : \mathcal{P}^g \to \mathcal{P}$ l'inclusion. Notons Γ^g la distribution horizontale sur $\mathcal{P}^g \to M$ donnée par la connexion de Levi-Civita de g. D'après [KN63], Chap. II, Proposition 6.1, il existe

une unique connexion linéaire Γ sur $\mathcal{P} \to M$ qui étend Γ^g, c'est-à-dire telle que $\forall u \in \mathcal{P}^g$, $i_*\Gamma^g_u = \Gamma_u$. Appelons $\pi^g : \mathcal{P}^g \to M$ et θ^g la forme canonique de $\mathcal{P}^g$. Nous voulons vérifier que Γ est sans torsion. Puisque $\pi^g = \pi_0 \circ i$, nous avons $i^*\theta = \theta^g$, et donc $i^*\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta^g$. Or, Γ^g est sans torsion. La différentielle covariante extérieure ([KN63], Chap.II, §5) $D^\Gamma\theta$ est ainsi nulle en restriction à $\mathcal{P}^g$, donc nulle sur tout $\mathcal{P}$ par $CO(p,q)$-équivariance. Cette dernière étant par définition la torsion de Γ, le lemme est démontré. □

Définition 2.3.3. On appelle *connexion de Weyl* toute connexion linéaire sans torsion définie sur le fibré $\mathcal{P} \to M$.

La première prolongation du fibré $\mathcal{P} \to M$

On reprend ici les notations et les objets de la section 1.1.3. Nous y avons vu que l'on définit les prolongations des G-structures comme des réductions du fibré des espaces horizontaux $\mathcal{P}^{hor} \to \mathcal{P}$, mais que ces constructions ne sont pas canoniques dans le cas général (elles dépendent du choix d'un supplémentaire dans un certain espace vectoriel). Le groupe structurel d'*une* première prolongation quant à lui ne dépend d'aucun choix et est défini comme étant le noyau d'une application linéaire $\partial_\mathfrak{g} : \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (définition 1.1.9).

Nous allons voir que dans le cas où la G-structure est celle associée à une classe conforme de métriques sur M, il n'y a qu'une seule façon de définir la première prolongation de $\mathcal{P} \to M$. Commençons par étudier l'application $\partial_\mathfrak{g}$ lorsque $G = CO(p,q)$.

Lemme 2.3.3. *L'application $\partial_{\mathfrak{co}(p,q)}$ est surjective, et son noyau $\mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$ s'identifie naturellement à $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. Notons que $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n))$ s'identifie canoniquement à $(\mathbf{R}^{n*})^{\otimes 2} \otimes \mathbf{R}^n$, l'espace des tenseurs $(2,1)$ sur $\mathbf{R}^n$ et appelons $\alpha : \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)) \to \mathbf{R}^{n*}$ la contraction définie par $\alpha(f) = \{v \mapsto \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(f(v))\}$.

On rappelle que $\partial : \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ se définit par $\partial f(v_1, v_2) = f(v_2)v_1 - f(v_1)v_2$ et que pour toute sous-algèbre $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n)$, $\partial_\mathfrak{g}$ est la restriction de ∂ à $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$.

Vérifions d'abord que la restriction de ∂ à $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(p,q))$ est injective. Notons $<,>_{p,q}$ le produit scalaire de $\mathbf{R}^{p,q}$. Soit $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(p,q))$ tel que $f(v_1)v_2 = f(v_2)v_1$ pour tous $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n$. Pour tout v_3, on a

$$\begin{aligned} < f(v_1)v_2, v_3 >_{p,q} &= - < v_2, f(v_1)v_3 >_{p,q} \\ &= - < f(v_3)v_1, v_2 >_{p,q} \\ &= < f(v_2)v_3, v_1 >_{p,q} \\ &= - < f(v_1)v_2, v_3 >_{p,q} \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $f = 0$ dès que $\partial f = 0$. Or, nous avons $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(p,q)) = \dim \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. La restriction de ∂ à $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(p,q))$ est donc surjective. *A fortiori*, il en va de même pour sa restriction à $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{co}(p,q))$.

Un calcul de dimension montre que le noyau de $\partial_{\mathfrak{co}(p,q)}$ est de dimension n. La contraction α va nous donner une façon naturelle d'identifier ce noyau à $\mathbf{R}^n$. Tout élément de $\mathfrak{co}(p,q)$ s'écrit $\lambda\,\mathrm{id} + A$, où $A \in \mathfrak{o}(p,q)$, et il est donc de trace nulle si et seulement si $\lambda = 0$. Par conséquent, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{co}(p,q))$, $\alpha(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(p,q))$. Ceci implique que α est injective sur $\mathrm{Ker}\,\partial_{\mathfrak{co}(p,q)}$. La contraction α identifie donc $\mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$ à $\mathbf{R}^{n*}$, que l'on identifie à $\mathbf{R}^n$ via la forme quadratique non dégénérée de $\mathbf{R}^{p,q}$. □

Remarque 2.3.4. Notons que sur $\operatorname{Ker}\partial_{\mathfrak{co}(p,q)}$, vu comme un sous-espace des tenseurs de type $(2,1)$, α coïncide avec la deuxième contraction possible. Ce qui nous montre que le choix de la contraction α n'a pas d'influence sur l'identification $\mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \simeq \mathbf{R}^n$ que l'on vient de décrire.

Remarque 2.3.5. Tout $f \in \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{co}(p,q))$ est de la forme $f(v) = \lambda(v)\,\mathrm{id} + M(v)$, où $\lambda \in \mathbf{R}^{n*}$ et $M \in \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(p,q))$. On a alors $\alpha(f) = \lambda$.

Remarque 2.3.6. En fait, on peut même donner explicitement la correspondance réciproque $\mathbf{R}^n \to \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$. En effet, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, définissons $f_u \in \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathfrak{co}(p,q))$ par

$$\forall v \in \mathbf{R}^n,\ f_u(v) = [M_{-1}(v), M_1(u)] \in \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{o}(p+1, q+1) \text{ (voir section 2.3.1)},$$

en identifiant $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{co}(p,q)$ comme expliqué à la section 2.3.1. Pour vérifier que $f_u(v_1).v_2 = f_u(v_2)v_1$, il suffit d'utiliser le fait que l'action linéaire d'un élément de $\mathfrak{co}(p,q)$ sur $\mathbf{R}^n$ correspond à l'action adjointe sur $\mathfrak{g}_{-1}$ de l'élément de $\mathfrak{g}_0$ qui lui est associé, et de traduire la relation de Jacobi dans $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$. Nous avons donc exhibé une correspondance $u \in \mathbf{R}^n \mapsto f_u \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$. Pour conclure, il nous suffit de vérifier que la forme linéaire $\alpha(f_u) \in \mathbf{R}^{n*}$ correspond par dualité à u, c'est à dire

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^n,\ \alpha(f_u)(v) =< u, v >_{p,q} .$$

Or, par définition $f_u(v) =< u, v >_{p,q} \mathrm{id} + I_{p,q}({}^t vu - {}^t uv) \in \mathfrak{co}(p,q)$, d'où $\alpha(f_u)(v) = \operatorname{Tr} f_u(v) =< u, v >_{p,q}$.

Rappelons que dans le cas général, un premier prolongement d'une G-structure se définit toujours modulo le choix d'un supplémentaire de $\operatorname{Im}\partial_{\mathfrak{g}}$ dans $\operatorname{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Or ici, $\partial_{\mathfrak{co}(p,q)}$ étant surjective, le seul supplémentaire est $\{0\}$, et il n'y a qu'un seul premier prolongement possible pour une $CO(p,q)$-structure. Si conformément aux notations de la section 1.1.3, on note toujours $c : \mathcal{P}^{hor} \to \operatorname{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ l'application structurelle, *la seule* première prolongation que nous pouvons considérer est $\mathcal{P}^{(1)} = c^{-1}(0)$.

Notons que pour tout $(u, H) \in \mathcal{P}^{hor}$, $c(u, H) = 0$ signifie que pour toute connexion linéaire Γ de $\mathcal{P} \to M$ telle que $\Gamma_u = H$, la torsion de Γ s'annule en u. Finalement, nous voyons que

$$\mathcal{P}^{(1)} = \{(u, \Gamma_u),\ u \in \mathcal{P},\ \Gamma \text{ connexion de Weyl de } \mathcal{P} \to M\}.$$

Dans le cas général, pour toute G-structure $P \to M$, le groupe structurel G admet une action naturelle (à droite) sur le fibré des espaces horizontaux P^{hor} donnée par $(u, H).g = (u.g, (R_g)_* H)$ pour tout sous-espace horizontal H de $T_u P$. En général, ceci ne définit pas une action de G sur les premières prolongations. Or dans le cas présent, puisque l'application structurelle c est $CO(p,q)$-équivariante, l'action de $CO(p,q)$ sur $\mathcal{P}^{hor}$ préserve $\mathcal{P}^{(1)} = c^{-1}(0)$. Les sections de $\mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ qui sont $CO(p,q)$-équivariantes sont alors exactement les connexions de Weyl de $\mathcal{P} \to M$. L'existence d'une connexion de Weyl assure en particulier que le fibré $\mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ est trivialisable. On notera $\pi_1 : \mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ la projection.

Structure de $(CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n)$-fibré principal sur $\mathcal{P}^{(1)} \to M$

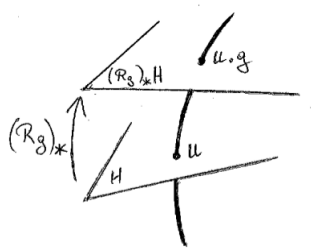
Notons $\pi = \pi_0 \circ \pi_1 : \mathcal{P}^{(1)} \to M$. L'espace $\mathcal{P}^{(1)}$ fibre ainsi au-dessus de M. Nous allons voir que cette fibration est principale, de groupe $CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$.

Rappelons comment la première prolongation se réalise comme une réduction du fibré des repères $\mathcal{R}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$. Un point de $\mathcal{P}^{(1)}$ au-dessus de $u \in \mathcal{P}$ est la donnée d'un certain

sous-espace horizontal H de $T_u\mathcal{P}$. Cet espace définit un repère de $T_u\mathcal{P}$, *ie* un isomorphisme linéaire $z_H : \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q) \to T_u\mathcal{P}$ tel que

- $\forall v \in \mathbf{R}^n$, $z_H(v)$ est l'unique $X \in H$ tel que $\theta_u(X) = v$;
- $\forall A \in \mathfrak{co}(p,q)$, $z_H(A) = A^*_u$, où A^* est le champ fondamental associé à A.

Nous avons expliqué au paragraphe précédent comment $CO(p,q)$ agit sur $\mathcal{P}^{(1)}$. Examinons à quoi cette action correspond lorsque l'on voit $\mathcal{P}^{(1)}$ comme une réduction du fibré $\mathcal{R}(P)$.



Action de $g \in CO(p,q)$ sur les espaces horizontaux de $\mathcal{P}^{(1)}$

Lemme 2.3.4. *Soit ρ_0 la représentation*

$$\rho_0 : g \in CO(p,q) \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & \mathrm{Ad}(g) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q)).$$

Pour tous $u \in \mathcal{P}$ et $H \subset T_u\mathcal{P}$ tels que $(u,H) \in \mathcal{P}^{(1)}$, si $z_H : \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q) \to T_u\mathcal{P}$ est le repère qui correspond à (u,H), alors le repère qui correspond à $(u.g, (R_g)_*H) \in \mathcal{P}^{(1)}$ est

$$T_uR_g \circ z_H \circ \rho_0(g) : \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q) \to T_{u.g}\mathcal{P}.$$

Démonstration. Appelons z' le repère de $T_{u.g}\mathcal{P}$ correspondant à $(u.g, (R_g)_*H)$. Par définition, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, $z'(v) = X$, où par définition X est l'unique vecteur de $(R_g)_*H$ tel que $\theta_{u.g}(X) = v$. Or, nous avons $\theta_{u.g}(X) = \theta_{u.g}(R_{g*}R_{g*}^{-1}X) = g^{-1}\theta_u(R_{g*}^{-1}X)$, par équivariance de la forme canonique θ (voir section 1.1.1). Ainsi, $\theta_u(R_{g*}^{-1}X) = g.v$, d'où $R_{g*}^{-1}X = z_H(g.v)$ et donc $z'(v) = (T_uR_g \circ z_H)(gv)$. Ensuite, si $A \in \mathfrak{co}(p,q)$, on a par définition $z'(A) = A^*_{u.g} = R_{g*}(\mathrm{Ad}(g)A)^*_u$. □

À partir de maintenant, $\mathcal{P}^{(1)}$ est considéré comme la réduction de $\mathcal{R}(P)$ décrite précédemment. On vient de détailler une action naturelle de $CO(p,q)$ sur $\mathcal{P}^{(1)}$. Pour des raisons techniques, on va provisoirement adopter la notation $z * g$ pour désigner l'action d'un $g \in CO(p,q)$ sur un élément $z \in \mathcal{P}^{(1)}$, c'est à dire

$$\forall z \in \mathcal{P}^{(1)},\ \forall g \in CO(p,q),\ z * g = (T_{\pi_1(z)}R_g) \circ z \circ \rho_0(g).$$

Proposition 2.3.5. *Le fibré $\pi : \mathcal{P}^{(1)} \to M$ est un fibré principal, de groupe structurel $P = CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$.*

Démonstration. On commence par exhiber une action naturelle d'un produit semi-direct $CO(p,q) \ltimes \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$ sur $\mathcal{P}^{(1)}$. On a déjà une action du facteur $CO(p,q)$. Or, comme nous l'avons vu en section 1.1.3, si on définit

$$\rho_1 : f \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \to \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \\ f & \mathrm{id} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q)),$$

alors $\mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ est un $\rho_1(\mathfrak{co}(p,q)^{(1)})$-sous-fibré principal du fibré des repères $\mathcal{R}(P) \to P$, et le résultat de l'action de $\rho_1(f)$ sur un repère z est $z \circ \rho_1(f)$.

Chaque facteur a donc une action naturelle sur l'espace total $\mathcal{P}^{(1)}$ et la question est maintenant de voir comment ces actions s'entremêlent. Commençons par poser pour tous $z \in \mathcal{P}^{(1)}$, $g \in CO(p,q)$, et $f \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$

$$z.(g,f) = (z * g) \circ \rho_1(f).$$

On calcule

$$[z.(g,f)].(g',f') = T_{\pi_1(z)} R_{gg'} \circ z \circ \rho_0(g) \circ \rho_1(f) \circ \rho_0(g') \circ \rho_1(f').$$

Or, $\rho_0(g'^{-1})\rho_1(f)\rho_0(g')$ est dans l'image de ρ_1 et correspond en fait à $\mathrm{Ad}(g'^{-1}) \circ f \circ g' \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$. Ainsi, nous avons

$$[z.(g,f)].(g',f') = z.(gg', f^{g'} + f'),$$

où l'on a noté $f^{g'}$ l'élément $\mathrm{Ad}(g'^{-1}) \circ f \circ g'$, ce qui signifie que nous venons de définir une action d'un produit semi-direct $CO(p,q) \ltimes \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$ sur $\mathcal{P}^{(1)}$. Cette action est libre, et transitive sur les fibres de $\pi : \mathcal{P}^{(1)} \to M$.

Pour terminer, il nous reste donc à voir que sous l'identification $\mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \simeq \mathbf{R}^n$ donnée au lemme 2.3.3, le produit semi-direct que nous venons d'exhiber correspond à l'extension affine $CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$. Or, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, on a $\mathrm{Tr}(f^g)(v) = \mathrm{Tr}\, f(gv)$. Par conséquent, en notant encore α la contraction de la preuve du lemme 2.3.3 la forme linéaire $\alpha(f^g)$ est obtenue en pré-composant $\alpha(f)$ par g, ce qui correspond à l'action transposée de g sur $\mathbf{R}^{n*}$, et donc à l'action linéaire sur $\mathbf{R}^n$, vu que l'on a choisi d'identifier $\mathbf{R}^n$ à son dual via le produit scalaire de $\mathbf{R}^{p,q}$. □

Quelques identifications

Avant de poursuivre, arrêtons-nous pour considérer les représentations ρ_0 et ρ_1. La première nous laisse fortement penser qu'elle provient d'une représentation adjointe, et nous allons voir que la deuxième également. On reprend la décomposition $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ décrite dans la section 2.3.1. Cette décomposition est relative à une base de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$, dont le premier vecteur est isotrope, et on appelle toujours P le stabilisateur de cette direction isotrope. Nous avons vu que $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$. On appelle G_0 le sous-groupe de P qui correspond à $\mathfrak{g}_0$. Ce dernier est formé de matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & A & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{ avec } a \in \mathbf{R}_+^*,\ A \in O(p,q).$$

L'action adjointe d'une telle matrice g préserve la décomposition $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ et s'y écrit

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}\, {}^t(A^{-1}) & & \\ & \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_0}(g) & \\ & & \lambda\, {}^t(A^{-1}) \end{pmatrix}.$$

On notera que l'on retrouve essentiellement l'action linéaire de $CO(p,q)$ sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$. Nous identifions alors $CO(p,q) \simeq G_0$ et $\mathbf{R}^n \simeq \mathfrak{g}_{-1}$ (via $v \mapsto M_{-1}(vI_{p,q})$), et dans ces conditions la représentation $\rho_0 : CO(p,q) \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q))$ devient $\mathrm{Ad}\,|_{\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0} : G_0 \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)$.

Maintenant, pour ρ_1, on reprend la remarque 2.3.6. Cette dernière suggère que la bonne identification $\mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \simeq \mathbf{R}^n$ est en fait $\mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \simeq \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{g}_1$, on lui associe $f_X \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$ défini par $\forall v \in \mathbf{R}^n$, $f_X(v) = [M_{-1}(v), X] \in \mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{co}(p,q)$. Nous avons vu que cette correspondance est bijective. Pour finir, on réalise $\mathfrak{g}_1$ lui-même dans P comme étant $\exp(\mathfrak{g}_1)$. Cependant, $\mathrm{Ad}(\exp(\mathfrak{g}_1))$ ne préserve pas $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$. Par contre, tout $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)$ préserve $\mathfrak{g}_1$, et on peut regarder l'action ψ d'un élément $p \in P$ induite au quotient donnée par

$$\psi(p) : \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\mathrm{Ad}(p)} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0.$$

Avec les identifications que nous avons faites ($\mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \simeq \exp(\mathfrak{g}_1) \subset P$, $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q) \simeq \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$, $CO(p,q) \simeq G_0$), on constate que l'on a

$$\begin{aligned}\{\rho_0 : CO(p,q) \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q))\} &\longleftrightarrow \{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0} : G_0 \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)\} \\ &\longleftrightarrow \{\psi : G_0 \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)\}\end{aligned}$$

et

$$\{\rho_1 : \mathfrak{co}(p,q)^{(1)} \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q))\} \longleftrightarrow \{\psi : \exp(\mathfrak{g}_1) \subset P \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)\}.$$

Pour finir, rappelons que $P = G_0.\exp(\mathfrak{g}_1)$, appelons $\pi_\ell : P \to G_0$ la projection sur la partie linéaire et reprenons l'action du produit semi-direct $CO(p,q) \ltimes \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$ sur $\mathcal{P}^{(1)}$. Celle-ci a été définie par $\forall z \in \mathcal{P}^{(1)}$, $\forall g \in CO(p,q)$, $\forall f \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$

$$z.(g,f) = T_{\pi_1(z)}R_g \circ z \circ \underbrace{(\rho_0(g) \circ \rho_1(f))}_{\in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q))}.$$

Avec toutes les identifications que nous venons de donner, $\mathcal{P}^{(1)}$ est maintenant formé de repères $z : \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \to T_{\pi_1(z)}\mathcal{P}$, le groupe structurel de $\mathcal{P}^{(1)}$ est P et son action est donnée précisément par $\forall p \in P$

$$z.p = T_{\pi_1(z)}R_{\pi_\ell(p)} \circ z \circ \psi(p).$$

2.3.3 La connexion de Cartan

La 1-forme canonique sur $\mathcal{P}^{(1)}$

Le fibré $\pi_1 : \mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ étant une réduction du fibré des repères $\mathcal{R}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$, il est muni d'une 1-forme canonique. On la note $\theta^1 \in \Omega^1(\mathcal{P}^{(1)}, \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)$. Par définition,

$$\forall X \in T_z\mathcal{P}^{(1)},\ (\theta^1)_z(X) = z^{-1} \circ (T_z\pi_1)X.$$

Nous notons $R_p^{(1)}$ l'action droite sur $\mathcal{P}^{(1)}$ d'un élément $p \in P$. Nous prenons cette précaution sur la notation car le groupe $G_0 \simeq CO(p,q)$ agit sur $\mathcal{P}^{(1)}$ (comme on l'a décrit à la section précédente), mais aussi sur $\mathcal{P}$ (c'est le groupe structurel de $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$). Par ailleurs, l'action de $g \in G_0$ sur $\mathcal{P}$ sera toujours notée R_g. La description qui a été faite précédemment de l'action de $CO(p,q) \simeq G_0 \subset P$ sur les repères de $\mathcal{P}^{(1)}$ nous donne alors

$$\forall g \in G_0,\ (R_g^{(1)})^*\theta^1 = \rho_0(g)^{-1}\theta^1 = \psi(g^{-1})\theta^1.$$

Démonstration. Pour tous $z \in \mathcal{P}^{(1)}$ et $X \in T_z\mathcal{P}^{(1)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
[(R_g^{(1)})^*\theta^1]_z(X) &= [\theta^1]_{R_g^{(1)}(z)}\left((T_zR_g^{(1)})X\right)\\
&= \left(R_g^{(1)}(z)\right)^{-1}\left[(T_{R_g^{(1)}(z)}\pi_1 \circ T_zR_g^{(1)})X\right]\\
&= \left(R_g^{(1)}(z)\right)^{-1}\left[T_z(R_g\circ\pi_1)X\right]\\
&= \left(R_g^{(1)}(z)\right)^{-1}\left[\left(T_{\pi_1(z)}R_g\circ T_z\pi_1\right)X\right]\\
&= \psi(g)^{-1}\circ z^{-1}\circ T_{\pi_1(z)}R_g^{-1}\left[\left(T_{\pi_1(z)}R_g\circ T_z\pi_1\right)X\right]\\
&= \psi(g)^{-1}\left[\theta^1\right]_z(X).
\end{aligned}$$

D'où $(R_g^{(1)})^*\theta^1 = \psi(g)^{-1}\theta^1$. □

De plus, par les propriétés élémentaires de la forme canonique d'un fibré des repères, nous avons

$$\forall p \in \exp(\mathfrak{g}_1) \subset P,\ (R_p^{(1)})^*\theta^1 = \psi(p^{-1})\theta^1.$$

Démonstration. Il suffit de revenir un peu en arrière et de reprendre l'ancien point de vue : puisque $p \in \exp(\mathfrak{g}_1)$, il lui correspond un $f \in \mathfrak{co}(p,q)^{(1)}$. Avec l'identification $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{co}(p,q) \simeq g_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$, si $z \in P^{(1)}$, on a $R_p^{(1)}(z) = z \circ \rho_1(f)$. Puisque la forme canonique θ d'un fibré des repères vérifie toujours $(R_g)^*\theta = g^{-1}\theta$, et puisqu'avec nos identifications $\rho_1(f) \leftrightarrow \psi(p)$, on a la propriété attendue. □

Finalement, puisque $P = G_0\exp(\mathfrak{g}_1)$ nous obtenons

Proposition 2.3.6. *L'espace total $\mathcal{P}^{(1)}$ est muni d'une 1-forme $\theta^1 \in \Omega^1(\mathcal{P}^{(1)}, \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0)$ telle que*

$$\forall p \in P,\ (R_p^{(1)})^*\theta^1 = \psi(p^{-1})\theta^1.$$

Pour tout $X \in \mathfrak{p}$, on note X^* le champ fondamental sur $\mathcal{P}^{(1)}$ associé à l'action de $R^{(1)}_{\exp(tX)}$. On a alors

Lemme 2.3.7. *Si $X_0 \in \mathfrak{g}_0$, alors pour tout $z \in \mathcal{P}^{(1)}$, $(\theta^1)_z(X^*_{0\,z}) = X_0$. Si $X_1 \in \mathfrak{g}_1$, alors pour tout $z \in \mathcal{P}^{(1)}$, $(\theta^1)_z(X^*_{1\,z}) = 0$.*

Démonstration. Le deuxième point est immédiat puisque θ^1 est définie comme étant la 1-forme canonique de $\pi_1 : \mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ et que l'action de $\exp(\mathfrak{g}_1)$ correspond à l'action du groupe structurel de ce fibré. Pour le premier point, on calcule

$$\begin{aligned}
(\theta^1)_z(X^*_{0\,z}) = z^{-1}\circ T_z\pi_1 X^*_{0\,z} &= z^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\pi_1(z.g^t))\\
&= z^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\pi_1(z)).g^t = z^{-1}X^*_{0\,\pi_1(z)}
\end{aligned}$$

où on note $g^t = \exp(tX_0) \in CO(p,q)$. Il y a un abus de notation car X_0^* désigne aussi le champ fondamental associé à $X_0 \in \mathfrak{co}(p,q)$ sur $\mathcal{P}$. Finalement, par définition des repères de $\mathcal{P}^{(1)}$, nous avons bien $(\theta^1)_z(X^*_{0\,z}) = X_0$. □

La forme canonique θ^1 se décompose en $\theta^1 = (\omega_{-1}, \omega_0)$, où $\omega_{-1} \in \Omega^1(\mathcal{P}^{(1)}, \mathfrak{g}_{-1})$ et $\omega_0 \in \Omega^1(\mathcal{P}^{(1)}, \mathfrak{g}_0)$. Nous aurons plus loin besoin du lemme ci-dessous que nous pouvons démontrer dès maintenant.

Lemme 2.3.8. *Soit $X = X_0 + X_1 \in \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. On a*

$$(\mathrm{d}\omega_0)_z(X^*_z, u) + [X_0, \omega_0(u)] + [X_1, \omega_{-1}(u)] = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'équivariance de θ^1 (proposition 2.3.6). On obtient $[R^{(1)}_{\exp(tX_0)}]^*\omega_0 = \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{-tX_0})\omega_0$, et en différenciant à $t = 0$, nous obtenons

$$\mathcal{L}_{X_0^*}\omega_0 = -[X_0, \omega_0].$$

Or, $\mathcal{L}_{X_0^*}\omega_0 = \mathrm{d}\omega_0(X_0^*, .)$ puisque $\omega_0(X_0^*) = X_0$. D'où $(\mathrm{d}\omega_0)_z(X_0^*, u) + [X_0, (\omega_0)_z(u)] = 0$, pour tout $u \in T_z\mathcal{P}^{(1)}$.

D'autre part, $[R^{(1)}_{\exp(tX_1)}]^*\omega_0 = \omega_0 - t[X_1, \omega_{-1}]$. Nous avons donc de la même façon

$$\mathcal{L}_{X_1^*}\omega_0 = -[X_1, \omega_{-1}] = \mathrm{d}\omega_0(X_1^*, .).$$

Ainsi, $\mathrm{d}\omega_0(X_1^*, u) + [X_1, \omega_{-1}(u)] = 0$. □

La condition de normalisation

Nous ne sommes à présent plus très loin d'avoir construit la géométrie de Cartan associée à la structure conforme $(M, [g])$. Pour terminer, nous allons rajouter la partie manquante à θ^1 pour en faire une connexion de Cartan : on cherche une 1-forme $\omega_1 \in \Omega^1(\mathcal{P}^{(1)}, \mathfrak{g}_1)$, vérifiant les bonnes propriétés d'équivariance et telle que $\omega = (\theta^1, \omega_1) \in \Omega^1(\mathcal{P}^{(1)}, \mathfrak{g})$ soit une connexion de Cartan. Posé tel quel, le problème n'admettra cependant pas une unique solution. Pour rendre une telle 1-forme ω_1 unique, l'idée est d'imposer une relation supplémentaire sur la courbure de la géométrie de Cartan correspondante. Ce sera la *condition de normalisation*.

Avant tout, commençons par considérer une géométrie de Cartan arbitraire $(M, \mathcal{C})$, modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, de connexion de Cartan ω. Pour $i \in \{-1, 0, 1\}$, on note ω_i la composante de ω sur $\mathfrak{g}_i$. Les composantes de la 2-forme courbure $\Omega = (\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1)$ sont alors données par :

$$\begin{aligned}
\Omega_{-1}(X, Y) &= \mathrm{d}\omega_{-1}(X, Y) + [\omega_0(X), \omega_{-1}(Y)] + [\omega_{-1}(X), \omega_0(Y)] \\
\Omega_0(X, Y) &= \mathrm{d}\omega_0(X, Y) + [\omega_1(X), \omega_{-1}(Y)] + [\omega_0(X), \omega_0(Y)] + [\omega_{-1}(X), \omega_1(Y)] \\
\Omega_1(X, Y) &= \mathrm{d}\omega_1(X, Y) + [\omega_0(X), \omega_1(Y)] + [\omega_1(X), \omega_0(Y)]
\end{aligned}$$

Nous allons prescrire une contrainte supplémentaire sur la courbure Ω de $(M, \mathcal{C})$ de sorte que la composante ω_1 de sa connexion de Cartan soit complètement déterminée par les autres composantes. La deuxième identité ci-dessus nous intéresse tout particulièrement puisque son deuxième membre met en jeu la composante ω_1, et ne dépend que de la valeur de $\omega_1(X)$, et non pas de la différentielle extérieure $\mathrm{d}\omega_1$.

La torsion. À partir de maintenant, nous noterons $\theta^1 = (\omega_{-1}, \omega_0)$ les composantes de la forme fondamentale θ^1.

Lemme 2.3.9. *La composante ω_{-1} est le pull-back $(\pi_1)^*\theta^0$, où $\theta^0 \in \Omega^1(\mathcal{P}, \mathbf{R}^n)$ désigne la 1-forme canonique de la $CO(p,q)$-structure $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$. Elle vérifie de plus*

$$\mathrm{d}\omega_{-1}(X,Y) + [\omega_0(X), \omega_{-1}(Y)] + [\omega_{-1}(X), \omega_0(Y)] = 0.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathcal{P}^{(1)}$, on note $V_z \subset T_z\mathcal{P}^{(1)}$ la direction verticale en z du fibré $\pi : \mathcal{P}^{(1)} \to M$. Puisque le groupe de ce fibré est P, la direction verticale se scinde naturellement en $V_z = (\mathfrak{g}_0)_z \oplus (\mathfrak{g}_1)_z$. D'après le lemme 2.3.7, $(\omega_{-1})_z$ s'annule sur la direction verticale V_z, tout comme $[(\pi_1)^*\theta^0]_z$.

Prenons un vecteur tangent $X \in T_z\mathcal{P}^{(1)}$, et montrons que $[\omega_{-1}]_z(X) = [(\pi_1)^*\theta^0]_z(X)$. Premièrement, nous pouvons supposer que $[\omega_0]_z(X) = 0$ quitte à lui retirer un élément de $(\mathfrak{g}_0)_z \subset V_z$. Ceci revient à supposer que $T_z\pi_1 X$ est dans l'espace horizontal de $T_{\pi_1(z)}\mathcal{P}$ associé à z. Dans ce cas, par définition de z, nous avons (voir section 2.3.2)

$$(\theta^1)_z(X) = (\omega_{-1})_z(X) = z^{-1}T_z\pi_1 X = \theta^0_{\pi_1(z)}(T_z\pi_1 X) = [(\pi^1)^*\theta^0]_z(X),$$

ce qui prouve le premier point.

La relation décrite entre ω_{-1} et ω_0 exprime alors le fait que la fibre de $\mathcal{P}^{(1)}$ est formée des espaces horizontaux Γ_u de $T_u\mathcal{P}$, pour Γ une connexion sans torsion de $\mathcal{P}$. □

Remarque 2.3.7. Ceci va en particulier nous dire que la connexion de Cartan que nous allons construire est *sans torsion*, c'est à dire que la 2-forme courbure Ω est à valeur dans $\mathfrak{p}$.

Étude ponctuelle. On fixe z et on travaille dans l'espace tangent $T_z\mathcal{P}^{(1)}$. Raisonnons par conditions nécessaires : on cherche une application linéaire $\ell : T_z\mathcal{P}^{(1)} \to \mathfrak{g}_1$ telle que

$$\omega_z^\ell := (\omega_{-1}, \omega_0, \ell) : T_z\mathcal{P}^{(1)} \to \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

soit un isomorphisme linéaire et $\forall A \in \mathfrak{p}$, on ait $\omega_z^\ell(A_z^*) = A$. Ceci va être le cas dès que

- $\ell(A_z^*) = A$, si $A \in \mathfrak{g}_1$;
- $\ell(A_z^*) = 0$, si $A \in \mathfrak{g}_0$.

Cependant, ces conditions ne déterminent pas ℓ de façon unique. On peut montrer sans difficulté que deux choix possibles ℓ_1 et ℓ_2 diffèrent d'une application $\psi : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_1$, au sens où on a

$$\ell_2 = \ell_1 + \psi \circ (\omega_{-1})_z.$$

À un choix de ℓ, nous associons un élément $\kappa_z^\ell \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ défini par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}_{-1},\ \kappa_z^\ell(X,Y) = \mathrm{d}\omega_0(\widetilde{X}_z^\ell, \widetilde{Y}_z^\ell),$$

où l'on a noté $\widetilde{X}_z^\ell = (\omega_z^\ell)^{-1}$. Nous verrons que ce κ_z^ℓ correspond à la composante sur $\mathfrak{g}_0$ de la fonction courbure de la géométrie de Cartan que l'on a presque construite. Commençons par examiner la dépendance en ℓ : si ℓ_1 et ℓ_2 diffèrent d'un $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1)$, on vérifie que

$$\kappa_z^{\ell_2} = \kappa_z^{\ell_1} + \partial_1\psi,$$

où $\partial_1\psi \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ se définit par $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$, $\partial_1\psi(X,Y) = [X, \psi(Y)] + [\psi(X), Y]$.

Normalisation.

Définition 2.3.8. On définit une contraction β de $\mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_0)$ vers $(\mathfrak{g}_{-1}{}^*)^{\otimes 2}$, qui est l'analogue de la contraction de Ricci en géométrie riemannienne, en prenant pour tous κ et $u,v,w\in\mathfrak{g}_{-1}$

$$\beta(\kappa)(v\otimes w)=\mathrm{Tr}\{u\mapsto\kappa(u,v).w\}.$$

Nous renvoyons à [ČS09] (Lemma 1.6.6) pour la démonstration du fait suivant, qui est purement algébrique.

Proposition 2.3.10. *Soit $\kappa\in\mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_0)$. Alors, il existe un unique $\psi\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_1)$ tel que $\beta(\kappa+\partial_1\psi)=0$.*

Prenons à présent $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan, modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, dont on note Ω la 2-forme courbure. Comme au début de ce paragraphe, décomposons $\Omega=(\Omega_{-1},\Omega_0,\Omega_1)$ par rapport à $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$. On définit $K_0:\widehat{M}\to\mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_0)$ par

$$\forall\widehat{x}\in\widehat{M},\ \forall X,Y\in\mathfrak{g}_{-1},\ K_0(\widehat{x})(X,Y)=[\Omega_0]_{\widehat{x}}(\widetilde{X}_{\widehat{x}},\widetilde{Y}_{\widehat{x}}),$$

où $\widetilde{X}=\omega^{-1}(X)$ et $\widetilde{Y}=\omega^{-1}(Y)$ désignent les champs ω-constants associés à X et Y. Nous pouvons à présent énoncer la

Définition 2.3.9 (Condition de normalisation)**.** Une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est dite *normalisée* si elle est sans torsion et si l'application K_0 satisfait $\beta(K_0(\widehat{x}))=0$, pour tout $\widehat{x}\in\widehat{M}$.

Théorème 2.4 (Principe d'équivalence des structures conformes)**.** *Le P-fibré principal $\pi:\mathcal{P}^{(1)}\to M$ admet une unique connexion de Cartan normalisée ω, qui étend la 1-forme canonique $\theta^1\in\Omega^1(\mathcal{P}^{(1)},\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0)$.*

Réciproquement, à toute géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et normalisée correspond une structure conforme $(M,[g])$ de signature (p,q) dont la géométrie de Cartan associée par le processus ci-dessus est isomorphe à $(M,\mathcal{C})$.

Démonstration.

Sens direct : fin de la construction de la connexion de Cartan.

Par la proposition 2.3.10, pour tout $z\in\mathcal{P}^{(1)}$, $\exists!\,\ell_z:T_z\mathcal{P}^{(1)}\to\mathfrak{g}_1$ tel que

$$\omega_z:=((\omega_{-1})_z,(\omega_0)_z,\ell_z):T_z\mathcal{P}^{(1)}\to\mathfrak{g}$$

soit un isomorphisme linéaire, vérifie $\omega_z(A^*_z)=A$ pour tout $A\in\mathfrak{p}$ et $\beta(\kappa^{\ell_z}_z)=0$. Pour le moment, ω_z est défini ponctuellement et on n'a pas d'information ni sur sa régularité, ni sur son comportement vis-à-vis de l'action de $R^{(1)}_p$.

Équivariance de ω. Pour $p\in P$ donné, appelons

$$\phi:=\mathrm{Ad}(p^{-1})\circ\omega_z\circ T_{z.p}R^{(1)}_{p^{-1}}:T_{z.p}\mathcal{P}^{(1)}\to\mathfrak{g}.$$

Nous allons démontrer que $\phi=\omega_{z.p}$, ce qui suffira pour conclure quant à l'équivariance de ω_z par rapport à l'action de P sur $\mathcal{P}^{(1)}$. Premièrement, par équivariance de $\theta^1=(\omega_{-1},\omega_0)$ (voir proposition 2.3.6), nous avons

$$\psi(p^{-1})\left((\omega_{-1})_z\circ T_{z.p}R^{(1)}_{p^{-1}},(\omega_0)_z\circ T_{z.p}R^{(1)}_{p^{-1}}\right)=((\omega_{-1})_{z.p},(\omega_0)_{z.p}).$$

Or $\psi(p^{-1})$ est obtenue en passant l'action adjointe $\mathrm{Ad}(p^{-1})$ au quotient dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$. Visuellement, ceci signifie que

$$\mathrm{Ad}(p^{-1}) = \begin{array}{c} \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0 \quad \mathfrak{g}_1 \\ \begin{pmatrix} \psi(p^{-1}) & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Par conséquent, nous avons un $\widetilde{\ell}_{z.p} : T_{z.p}\mathcal{P}^{(1)} \to \mathfrak{g}_1$ tel que

$$\phi = ((\omega_{-1})_{z.p}, (\omega_0)_{z.p}, \widetilde{\ell}_{z.p}). \tag{2.5}$$

De plus, pour tout $A \in \mathfrak{p}$, on a $\phi(A^*_{z.p}) = \mathrm{Ad}(p^{-1}).\omega_z((\mathrm{Ad}(p)A)^*_z) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\,\mathrm{Ad}(p)A = A$ car pour tout champ fondamental A^*, on a $(R^{(1)}_p)_* A^*_z = (\mathrm{Ad}(p^{-1})A)^*_{z.p}$. Ainsi, $\widetilde{\ell}_{z.p}$ doit être de la forme $\widetilde{\ell}_{z.p} = \ell_{z.p} + \psi \circ \omega_{-1}$, où $\psi : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_1$. Pour démontrer que $\widetilde{\ell}_{z.p} = \ell_{z.p}$ il va donc nous suffire de vérifier que

$$\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p} = 0.$$

Écrivons $p = g\exp(X)$, pour $g \in G_0$ et $X \in \mathfrak{g}_1$, et différencions la relation $(R^{(1)}_p)^*\theta^1 = \psi(p^{-1})\theta^1$. Nous obtenons $(R^{(1)}_p)^*\mathrm{d}\theta^1 = \psi(p^{-1})\mathrm{d}\theta^1$. Si on observe ce que l'on obtient sur la composante selon $\mathfrak{g}_0$, nous avons

$$(R^{(1)}_p)^*\mathrm{d}\omega_0 = -[X_1, g^{-1}\mathrm{d}\omega_{-1}] + \mathrm{Ad}(g^{-1})\mathrm{d}\omega_0. \tag{2.6}$$

À présent, prenons $X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$. Nous savons que par définition

$$\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p}(X,Y) = (\mathrm{d}\omega_0)_{z.p}(u,v),$$

où $u, v \in T_{z.p}\mathcal{P}^{(1)}$ sont tels que $\phi(u) = X$ et $\phi(v) = Y$. Or par définition de ϕ, nous devons avoir

$$\omega_z\left(T_{z.p}R^{(1)}_{p^{-1}}u\right) = \mathrm{Ad}(p)X \text{ et } \omega_z\left(T_{z.p}R^{(1)}_{p^{-1}}.v\right) = \mathrm{Ad}(p)Y.$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\left[\left(R^{(1)}_{p^{-1}}\right)^* \mathrm{d}\omega_0\right]_{z.p}(u,v) &= [\mathrm{d}\omega_0]_z\left(\omega_z^{-1}(\mathrm{Ad}(p)X), \omega_z^{-1}(\mathrm{Ad}(p)Y)\right) \text{ d'une part,} \\ &= [X_1, g^{-1}(\mathrm{d}\omega_{-1})_{z.p}(u,v)] + \mathrm{Ad}(g)\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p}(X,Y) \text{ d'après (2.6).}\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(g)\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p}(X,Y) \\ &\qquad = [\mathrm{d}\omega_0]_z\left(\omega_z^{-1}(\mathrm{Ad}(p)X), \omega_z^{-1}(\mathrm{Ad}(p)Y)\right) - [X_1, g^{-1}(\mathrm{d}\omega_{-1})_{z.p}(u,v)].\end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous traitons pour faire simple les cas $p \in G_0$ et $p \in \exp(\mathfrak{g}_1)$ séparément. Dans le premier cas, nous obtenons $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$, si $p = g \in G_0$,

$$\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p}(X,Y) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\kappa^{\ell_z}_z(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la contraction β est équivariante pour l'action naturelle de G_0 sur $\mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_0)$, et donc $\beta(\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.g}}_{z.g}) = \beta(\kappa^{\ell_z}_z) = 0$, pour tout $g \in G_0$.

Il faut maintenant traiter le cas $p = \exp(X_1) \in \exp(\mathfrak{g}_1)$. Examinons pour $X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$

$$[\mathrm{d}\omega_0]_z\left(\underbrace{\omega_z^{-1}(\mathrm{Ad}(p)X)}_{u'},\underbrace{\omega_z^{-1}(\mathrm{Ad}(p)Y)}_{v'}\right).$$

Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(p)X &= X + [X_1,X] + [X_1,[X_1,X]]\\ \mathrm{Ad}(p)Y &= Y + [X_1,Y] + [X_1,[X_1,Y]],\end{aligned}$$

et chacun des termes est dans $\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ respectivement. Nous avons alors $u' = u'_- + u'_0 + u'_+$ et $v' = v'_- + v'_0 + v'_+$, avec $u'_- = \omega_z^{-1}(X)$, $v'_- = \omega_z^{-1}(Y)$, $u'_0 = ([X_1,X])^*_z$, $v'_0 = ([X_1,Y])^*_z$, $u'_+ = ([X_1,[X_1,X]])^*_z$, $v'_+ = ([X_1,[X_1,Y]])^*_z$. Par le lemme 2.3.8, nous avons

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}\omega_0]_z(u',v') &= [\mathrm{d}\omega_0]_z(u'_-,v'_-) + [[X_1,X],[X_1,Y]] + [[X_1,[X_1,X]],Y] + [X,[X_1,[X_1,Y]]]\\ &= \kappa^{\ell_z}_z(X,Y) + \underbrace{[[X_1,X],[X_1,Y]] + [[X_1,[X_1,X]],Y] + [X,[X_1,[X_1,Y]]]}_{\kappa(X,Y)}\end{aligned}$$

Finalement, si $p = \exp(X_1)$, nous obtenons grâce à la relation (2.7)

$$\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p}(X,Y) = \kappa^{\ell_z}_z(X,Y) + \kappa(X,Y) - [X_1,(\mathrm{d}\omega_{-1})_{z.p}(u,v)].$$

Or, par définition $\phi(u) = X$ et $\phi(v) = Y$, et d'après la relation (2.5), ceci nous donne $(\omega_0)_{z.p}(u) = (\omega_0)_{z.p}(v) = 0$. Enfin, d'après le lemme 2.3.9

$$(\mathrm{d}\omega_{-1})_{z.p}(u,v) + [(\omega_0)_{z.p}(u),(\omega_{-1})_{z.p}(v)] + [(\omega_{-1})_{z.p}(u),(\omega_0)_{z.p}(v)] = (\mathrm{d}\omega_{-1})_{z.p}(u,v) = 0.$$

On conclut alors que $\beta(\kappa^{\widetilde{\ell}_{z.p}}_{z.p}) = 0$ en prouvant que $\beta(\kappa) = 0$.

Régularité de ω. Pour voir que les ℓ_z, $z \in \mathcal{P}^{(1)}$ s'assemblent en une 1-forme sur $\mathcal{P}^{(1)}$, on va d'abord démontrer qu'il existe une connexion de Cartan sur $\mathcal{P}^{(1)}$, *a priori* pas normalisée, qui est de la forme (θ^1,ω'_1). Ensuite on va montrer que la "différence" entre cette vraie 1-forme et la distribution P-équivariante (θ^1_z,ℓ_z) que nous venons de construire est lisse.

Rappelons que $\pi_1 : \mathcal{P}^{(1)} \to \mathcal{P}$ est la première prolongation de la $CO(p,q)$-structure $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$. Nous savons par le lemme 2.3.2 qu'il existe une connexion de Weyl sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire une section globale $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{(1)}$ qui est G_0-équivariante. Si on note toujours $\theta^1 = (\omega_{-1},\omega_0)$ les composantes sur $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_0$ de la forme canonique θ^1, alors

- $s^*\omega_0 = \gamma$, où $\gamma \in \Omega^1(\mathcal{P},\mathfrak{g}_0)$ est la forme connexion associée à la connexion de Weyl ;
- $s^*\omega_{-1} = \theta$, où θ est la forme canonique $\pi_0 : \mathcal{P} \to M$.

Ainsi, pour tout $u \in \mathcal{P}$, on a une décomposition

$$T_{s(u)}\mathcal{P}^{(1)} = T_u sH_u \oplus (\mathfrak{g}_0)_{s(u)} \oplus (\mathfrak{g}_1)_{s(u)},$$

où $H_u \subset T_u\mathcal{P}$ est le sous-espace horizontal en u défini par la connexion de Weyl. Si $X \in T_{s(u)}\mathcal{P}^{(1)}$ se décompose en $X_- + (A_0)^*_{s(u)} + (A_1)^*_{s(u)}$, nous définissons

$$\omega'_{s(u)}(X) := (\omega_{-1})_{s(u)}(X_-) + A_0 + A_1 \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

C'est-à-dire $\omega' = (\omega_{-1}, \omega_0, \omega'_1)$, où $\mathrm{Ker}(\omega'_1)_{s(u)} = T_u sH_u \oplus (\mathfrak{g}_0)_{s(u)}$, $\omega'_1(A_0^*) = 0$ et $\omega'_1(A_1^*) = A_1$.

Par conséquent, pour tout $z \in s(\mathcal{P})$, il existe $\psi_z : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_1$ tel que $(\omega'_1)_z = \ell_z + \psi_z \circ (\omega_{-1})_z$. De ceci on déduit que $\kappa_z^{\omega'_1} = 0 + \partial\psi_z$. Par conséquent, puisque ω'_1 est lisse en restriction à $s(\mathcal{P})$, ψ_z est également lisse en restriction à $s(\mathcal{P})$. Ceci assure que les ℓ_z, $z \in \mathcal{P}^{(1)}$, varient différentiablement dans la direction transverse à la fibre de $\mathcal{P}^{(1)}$, et par équivariance ceci est vrai sur tout $\mathcal{P}^{(1)}$.

Comment une géométrie de Cartan définit une structure conforme.

Pour la réciproque, donnons-nous un fibré de Cartan $\pi : \widehat{M} \xrightarrow{P} M$ muni d'une connexion de Cartan ω normalisée. Rappelons que pour tout $\widehat{x}$, on a une application $\varphi_{\widehat{x}} : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ qui vérifie la propriété d'équivariance $\varphi_{\widehat{x}.p} = \mathrm{Ad}(p)\varphi_{\widehat{x}}$ (voir diagramme (2.2), section 2.1.2). Or, modulo le choix d'une origine $x_0 \in \mathbf{Ein}^{p,q}$, l'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ s'identifie à $T_{x_0}\mathbf{Ein}^{p,q}$, et hérite donc d'une classe conforme de formes quadratiques non dégénérée de signature (p,q). De plus, comme pour tout espace homogène, la représentation d'isotropie de P en x_0 est conjuguée à la représentation $\overline{\mathrm{Ad}} : P \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ via l'identification $T_{x_0}\mathbf{Ein}^{p,q} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Ainsi, $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est munie d'une classe conforme $[Q]$ qui est $\overline{\mathrm{Ad}}(P)$-invariante.

Définissons alors pour tout x la classe conforme $[g_x]$ sur T_xM obtenue en rapatriant $[Q]$ par n'importe quel $\varphi_{\widehat{x}}$, pour $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$. Ceci a bien un sens par $\overline{\mathrm{Ad}}(P)$-invariance de $[Q]$ et nous voyons que toute géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ induit une structure conforme de signature (p,q) sur M. □

Deuxième partie

Orbites des isométries locales de structures rigides

Chapitre 3

Homogénéité locale des géométries de Cartan

Dans ce chapitre, nous présentons un énoncé donnant une condition nécessaire et suffisante, portant sur la courbure et ses dérivée covariantes, pour qu'une géométrie de Cartan soit localement homogène. Ce résultat est une généralisation d'un théorème de I.M. Singer datant de 1960 et qui fut formulé en géométrie riemannienne.

Singer définit une variété riemannienne infinitésimalement homogène d'ordre k comme étant une variété riemannienne (M, g) telle que pour tous points $x, y \in M$, il existe une isométrie linéaire $f : T_xM \to T_yM$ qui envoie $(\nabla^m R)_x$ sur $(\nabla^m R)_y$ pour tout $m \leqslant k$, où $\nabla^m R$ désigne la m-ième dérivée covariante du tenseur de courbure R, par rapport à la connexion de Levi-Civita ∇ de (M, g). Il prouva le résultat suivant.

Théorème ([Sin60])**.** *Soit (M^n, g) une variété riemannienne. Il existe un entier $k_M \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ tel que si (M, g) est infinitésimalement homogène à l'ordre k_M, alors elle est localement homogène.*

Rappelons que (M, g) est localement homogène dès que pour tous $x, y \in M$, il existe une isométrie locale $f : U \to V$ entre deux ouverts contenant x et y respectivement et telle que $f(x) = y$. Ainsi, si (M, g) est localement homogène, alors l'existence de telles isométries locales implique l'homogénéité infinitésimale *à tout ordre* $k \geqslant 1$. Donc non seulement Singer a prouvé que la réciproque est vraie, mais en plus que l'homogénéité infinitésimale à l'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ est suffisante pour assurer l'homogénéité locale de n'importe quelle variété riemannienne de dimension n.

Après Singer, plusieurs généralisations de ce théorème ont été présentées par divers auteurs. Dans [PS96], Podesta et Spiro ont commencé par étendre le résultat de Singer au cadre pseudo-riemannien. Ensuite, Opozda a donné une version du théorème pour les variétés munies de connexions affines analytiques ([Opo97]) et pour les G-structures munies de connexions linéaires compatibles ([Opo98]). Cependant, ses résultats ne mettent pas en évidence une borne analogue sur l'ordre des dérivées dans [Opo97] et on doit vérifier une condition algébrique supplémentaire dans [Opo98]. Dans un article récent ([GRGN13]), les auteurs donnent une formulation dans le cadre des structures homothétiques.

Nous allons voir à la section 3.1 qu'il est possible de définir une notion d'homogénéité infinitésimale dans une géométrie de Cartan et que cette définition coïncide avec la définition tensorielle de Singer dans le cadre pseudo-riemannien, et son extension naturelle pour

les connexions linéaires sans torsion en toute généralité. L'énoncé auquel nous parvenons est le suivant.

Théorème 3.1. *Soit $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan sur une variété M connexe, modelée sur $\boldsymbol{X} = G/P$. Notons $d = \dim P$. Si la géométrie est d-infinitésimalement homogène, alors elle est localement homogène.*

Comme nous allons le voir, dans le cas général, la définition que nous donnons de l'infinitésimale homogénéité ne peut pas être interprétée directement sur M, mais sur l'espace total du fibré de Cartan associé à $(M,\mathcal{C})$. Néanmoins, le théorème 3.1 implique le théorème initial de Singer et sa généralisation aux métriques pseudo-riemanniennes, essentiellement parce que la fonction courbure de la géométrie de Cartan associée à une métrique correspond canoniquement au tenseur de courbure riemannien de la métrique. En fait, dès que l'espace modèle est *réductif*, l'infinitésimale homogénéité telle que nous la définissons est une condition tensorielle qui peut être formulée sur la variété M (voir [Sha96], Ch.5, §3, *Covariant Derivative in Reductive Geometry*). Par exemple, si (M,∇) est une variété munie d'une connexion linéaire sans torsion, nous obtenons la généralisation attendue du théorème de Singer : dans ce cas, le théorème 3.1 implique que si quels que soient $x,y \in M$, et quel que soit $s \leqslant n^2$, il existe une application linéaire $f : T_xM \to T_yM$ telle que $f^*(\nabla^s R^\nabla)_y = (\nabla^s R^\nabla)_x$, alors (M,∇) est localement homogène.

La démonstration du théorème 3.1 sera relativement courte et directe, et on propose comme illustration de ce résultat une démonstration en quelques lignes d'un résultat célèbre de Gromov, énoncé pour les géométries de Cartan. Le lecteur trouvera dans la section suivante la définition d'une Aut^{loc}-orbite.

Théorème 3.2 (Théorème de l'orbite dense, [Gro88], 3.3.A)**.** *Soit $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\boldsymbol{X} = G/P$. On suppose que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe presque algébrique (ie d'indice fini dans son adhérence de Zariski). S'il existe une Aut^{loc}-orbite dans M qui est dense, alors M est localement homogène sur un ouvert dense.*

L'hypothèse d'algébricité n'est pas restrictive puisque la plupart des espaces modèles des géométries de Cartan définissant des structures classiques vérifient cette condition.

3.1 Définitions

On se donne $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur un espace homogène $\mathbf{X} = G/P$, on note $\pi : \widehat{M} \to M$ le fibré de Cartan et ω la connexion de Cartan associés. Comme dans le chapitre 2, Ω désigne la 2-forme courbure de cette géométrie de Cartan et $K : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}),\mathfrak{g})$ l'application courbure associée.

3.1.1 Orbites des automorphismes locaux, homogénéité locale

La Aut^{loc}-*orbite* d'un point $x \in M$ est l'ensemble des points $y \in M$ tels qu'il existe $f : U \to V$ un automorphisme local de $(M,\mathcal{C})$, avec $x \in U$ et $y \in V$, tel que $f(x) = y$. Sa Kill^{loc}-*orbite* est définie comme étant l'ensemble des points qui peuvent être atteints en suivant depuis x les flots d'un nombre finis de champs de Killing locaux. Bien sûr, toute Kill^{loc}-orbite est contenue dans une Aut^{loc}-orbite.

Définition 3.1.1 (Homogénéité locale)**.** Une géométrie de Cartan est dite *localement homogène* si elle contient une unique Aut^{loc}-orbite.

Si $\widehat{f}$ est le relevé d'un automorphisme local $f : U \to V$, nous avons $(\widehat{f})^*\Omega = \Omega$, et donc $K \circ \widehat{f} = K$ sur $\pi^{-1}(U)$. Par conséquent, nous voyons que si $\mathcal{O} \subset M$ est une Aut^{loc}-orbite, alors $K(\pi^{-1}(\mathcal{O}))$ est en fait une unique P-orbite dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$.

3.1.2 Homogénéité infinitésimale

Rappelons que l'on a défini à la section 2.1.5 une notion de dérivation covariante universelle d'applications équivariantes de $F : \widehat{M} \to E$ dans des espaces vectoriels admettant une action linéaire de P. Nous notons toujours $\mathcal{D}^r F$ la r-ième dérivée covariante de F.

Soit $V = \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ l'espace d'arrivée de l'application courbure K. Notons $\mathcal{W}^r := V \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V)$. Puisque tout automorphisme local f de $(M, \mathcal{C})$ vérifie $K \circ \widehat{f} = K$, si $\mathcal{O}$ est une Aut^{loc}-orbite, alors pour tout $r \geqslant 0$, $\mathcal{D}^r K(\pi^{-1}(\mathcal{O}))$ est réduit à une seule P-orbite dans $\mathcal{W}^r$. Ceci motive la définition suivante de l'homogénéité infinitésimale.

Définition 3.1.2. Si $r \geqslant 1$, la géométrie $(M, \mathcal{C})$ est dite *r-infinitésimalement homogène* si l'application P-équivariante $\mathcal{D}^r K$ est à valeurs dans une unique P-orbite dans $\mathcal{W}^r$.

3.1.3 Quelques commentaires.

Si on se place dans la situation où $(M, \mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan associée à une G-structure munie d'une connexion linéaire, disons simplement une connexion linéaire pour fixer les idées, nous avons vu à la section 2.2.2 que le fibré de Cartan associé est simplement le fibré des repères $\mathcal{R}(M)$.

D'une façon générale, tout tenseur T sur M peut être vu comme une application $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$-équivariante

$$T : \mathcal{R}(M) \to \mathcal{T}^{r,s}(\mathbf{R}^n),$$

où $\mathcal{T}^{r,s}(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace des tenseurs de type (r, s) sur $\mathbf{R}^n$, muni de l'action naturelle de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, et la dérivée covariante $\nabla_X T$, pour $X \in \mathfrak{X}(M)$, est la dérivée de Lie de cette application

$$\mathcal{L}_{X^h} T : \mathcal{R}(M) \to \mathcal{T}^{r,s}(\mathbf{R}^n),$$

X^h désignant l'unique champ de vecteur horizontal sur $\mathcal{R}(M)$ qui se projette sur X (voir [KN63], Ch.III, Proposition 1.3).

La connexion de Cartan ω sur $\mathcal{R}(M)$ associée à une connexion linéaire ∇ a été décrite à la section 2.2.2. Sa composante sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ est la 1-forme connexion associée à ∇, et sa composante sur $\mathbf{R}^n$ est la forme canonique de $\mathcal{R}(M)$. Il n'est alors pas difficile de constater que puisque la 2-forme courbure de la géométrie de Cartan se définit par $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}))$, les équations structurelles de Cartan (voir [KN63] Ch.III, Theorem 2.4) impliquent que la composante sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ de Ω correspond à la forme courbure telle que définie dans [KN63] Ch.II, §5, et la composante sur $\mathbf{R}^n$ correspond à la forme torsion ([KN63], p.120). Tout cela va nous assurer que si ∇ est sans torsion, alors l'application courbure de la géométrie de Cartan

$$K : \mathcal{R}(M) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n)$$

est telle que $\forall \widehat{x} \in \mathcal{R}(M)$, $K(\widehat{x})$ est à valeurs dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ et modulo $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^n$, K est l'application $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ équivariante qui correspond au tenseur de courbure R^∇ de la connexion.

Pour finir, demander que K soit à valeurs dans une seule orbite, c'est demander que quels que soient $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathcal{R}(M)$, il existe $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ tel que $K(\widehat{y}) = K(\widehat{x}).g$. Par définition, ceci signifie qu'il existe un repère u de T_xM et un repère u' de T_yM tels que $(R^\nabla)_x$ lu dans u' coïncide avec $(R^\nabla)_y$ lu dans u. En posant $f := u' \circ u^{-1} : T_xM \to T_yM$, nous obtenons bien $f^* R^\nabla_y = R^\nabla_x$.

À des ordres plus élevés, nous obtenons encore les définitions de l'homogénéité infinitésimale de Singer puisque $\mathcal{D}^1 K$ va correspondre à l'application associée à ∇R^∇ et on pourra itérer le processus.

3.2 Preuve de la généralisation du théorème de Singer

Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X} = G/P$, avec M connexe, dont on note toujours $\pi : \widehat{M} \to M$ le P-fibré principal et ω la connexion de Cartan. Sous les hypothèses du théorème 3.1, des sous-fibrés principaux de $\pi : \widehat{M} \to M$ apparaissent et c'est en les étudiant que l'on démontre l'homogénéité infinitésimale de $(M, \mathcal{C})$.

3.2.1 Sous-variétés parallèles d'une géométrie de Cartan

Définition 3.2.1. Une sous-variété $\Sigma \subset \widehat{M}$ est dite *parallèle* s'il existe un sous-espace $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tel que pour tout $\widehat{x} \in \Sigma$, $\omega(T_{\widehat{x}}\Sigma) = \mathfrak{h}$.

On voit apparaître de telles sous-variétés dans le contexte suivant.

Lemme 3.2.1. *Soit $F : \widehat{M} \to V$ une application à valeurs dans un espace vectoriel. Supposons que F est de rang constant et notons $\Sigma = F^{-1}(v_0)$ pour $v_0 \in V$. Si $\mathcal{D}^1 F : \widehat{M} \to V \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ est constante sur Σ, alors Σ parallèle.*

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{D}^1 F(\widehat{x}) = (F(\widehat{x}), D^1 F(\widehat{x}))$, où $D^1 F(\widehat{x})(A) = T_{\widehat{x}} F(\widetilde{A}_{\widehat{x}})$ (voir section 2.1.5). Ici, $D^1 F$ est constante égale à $w_0 \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ sur tout Σ. Puisque pour tout $\widehat{x} \in \Sigma$, $T_{\widehat{x}}\Sigma = \mathrm{Ker}\, T_{\widehat{x}} F$, on a

$$\begin{aligned} \omega(T_{\widehat{x}}\widehat{\Sigma}) &= \{A \in \mathfrak{g} \ : \ (\mathcal{L}_{\widetilde{A}}.F)(\widehat{x}) = 0\} \\ &= \{A \in \mathfrak{g} \ : \ D^1 F(\widehat{x})(A) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}\, w_0. \end{aligned}$$

Ainsi, Σ est parallèle. □

Si Σ est une sous-variété parallèle, il est naturel de considérer la restriction à Σ des champs ω-constants $\widetilde{X}$, pour $X \in \mathfrak{h}$. Par définition, ces champs sont tangents à Σ et nous les appelons *champs $(\mathfrak{h}, \omega)$-constants*. Ils définissent un parallélisme sur Σ que nous notons $\mathcal{P}^\Sigma$.

Si l'on dispose d'une sous-variété parallèle et si de plus l'application courbure de $(M, \mathcal{C})$ est constante sur cette sous-variété, on est pratiquement à même de démontrer que $(M, \mathcal{C})$ est localement homogène, comme le montre la propriété suivante.

Proposition 3.2.2 (Sous-variétés parallèles à courbure constante)**.** *Soit $\Sigma \subset \widehat{M}$ une sous-variété parallèle, que nous supposons connexe. On note $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ le sous-espace associé et K l'application courbure de $(M, \mathcal{C})$.*

1. *Si K est constante sur Σ, alors $(\Sigma, \mathcal{P}^\Sigma)$ est localement homogène.*

2. *Si de plus, le sous-espace* $\mathfrak{h}$ *est transverse à* $\mathfrak{p}$*, alors* $\pi|_\Sigma : \Sigma \to M$ *est une submersion et les composantes connexes de* $\pi(\Sigma)$ *sont des* Kill^{loc}*-orbites ouvertes. En particulier, si* $\pi(\Sigma) = M$*, alors* $(M, \mathcal{C})$ *est localement homogène.*

Démonstration. 1. Prenons Σ une sous-variété parallèle de $\widehat{M}$ telle que $\omega(T_{\widehat{x}}\Sigma) = \mathfrak{h}$. Supposons $K(\widehat{x}) = K_0 \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ sur Σ. La première étape est de démontrer que les champs $(\mathfrak{h}, \omega)$-constants sur Σ forment une sous-algèbre (de dimension finie) de $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Ce fait provient de la relation générale $K_{\widehat{x}}(X, Y) = [X, Y] - \omega_{\widehat{x}}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}])$ valable pour tout couple de champs ω-constants. En effet, si $X, Y \in \mathfrak{h}$, puisque $K \equiv K_0$ sur Σ, on doit avoir pour $\widehat{x} \in \Sigma$

$$\omega_{\widehat{x}}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = [X, Y] - K_0(X, Y).$$

Cette identité signifie en particulier que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ est ω-constant sur Σ. De plus, puisque $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ est tangent à Σ, nous avons $\omega_{\widehat{x}}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) \in \mathfrak{h}$, ce qui prouve que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ est lui-même $(\mathfrak{h}, \omega)$-constant.

Ceci nous amène à considérer le crochet de Lie $[,]'$ sur $\mathfrak{h}$ définit par $[X, Y]' = [X, Y] - K_0(X, Y)$. Il correspond naturellement au crochet (usuel) des champs de vecteurs $(\mathfrak{h}, \omega)$-constants sur Σ, et satisfait donc bien aux axiomes d'un crochet de Lie. Nous noterons $\mathfrak{h}'$ l'algèbre de Lie $(\mathfrak{h}, [,]')$ et fixons H' un groupe de Lie d'algèbre isomorphe à $\mathfrak{h}'$. Nous venons ainsi d'exhiber une action infinitésimale du groupe H' sur Σ, que nous notons $\iota : \mathfrak{h}' \hookrightarrow \Gamma(T\Sigma)$. D'après la version locale du théorème de Palais (Théorème 1.4), nous disposons d'une action locale de H' sur Σ qui intègre ι. Ceci signifie que pour tous $\widehat{x} \in \Sigma$ et $X \in \mathrm{Lie}(H')$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \exp(tX).\widehat{x} = -\iota(X)_{\widehat{x}}$.

Nous allons prouver que tout point de Σ admet un voisinage localement homogène, ce qui suffira pour établir le premier point par connexité. Prenons donc $\widehat{x}_0 \in \Sigma$. Puisqu'un champ ω-constant non nul ne s'annule nulle part, l'action locale de H' est partout localement libre sur Σ. Par conséquent, il existe U un voisinage ouvert de $\widehat{x}_0$ dans Σ et un voisinage ouvert V de e dans H' tels que l'application orbitale en $\widehat{x}_0$ nous fournit une identification $\psi : V \to U$. Supposons U et V connexes. Le point est à présent que sous cette identification, les champs $(\mathfrak{h}, \omega)$-constants sur U correspondent aux champs invariants à droite sur V (c'est une simple conséquence de la définition de l'action locale de H'). On peut reformuler ceci plus formellement en disant que si $\omega_{H'}$ désigne la forme de Maurer Cartan droite de H', nous avons $\psi^*(\omega|_{TU}) = \omega^{H'}|_{TV}$.

Finalement, pour tout $X \in \mathfrak{h}'$, notons $\widehat{X} = \psi_*({}^L X)$ le push-forward du champ invariant *à gauche* associé à X. Alors, puisque les champs invariants à gauche commutent avec les champs invariants à droite, nous voyons que pour tout X, $\widehat{X}$ commute avec tous les champs $(\mathfrak{h}, \omega)$-constants sur U. Ainsi, $\{\widehat{X},\ X \in \mathfrak{h}'\}$ est une algèbre de Lie de champs de Killing de $(U, \mathcal{P}^\Sigma)$. Puisqu'ils engendrent $T_{\widehat{x}}\Sigma$ en tout $\widehat{x}$, deux points quelconques de U peuvent être joints en suivant en un nombre fini de flots $\phi^t_{\widehat{X}}$. Ainsi, U est localement homogène et nous avons prouvé le premier point de la proposition.

2. Supposons maintenant que $\mathfrak{h}$ est transverse à $\mathfrak{p}$. Ceci implique que π restreinte à Σ est une submersion puisque $T_{\widehat{x}}\pi(\omega_{\widehat{x}}^{-1}(\mathfrak{h})) = T_{\widehat{x}}\pi(\omega_{\widehat{x}}^{-1}(\mathfrak{h} + \mathfrak{p})) = T_x M$. Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Si $X_1, X_2 \in \mathfrak{s}$, puisque la 2-forme courbure est horizontale, on a $[X_1, X_2] = [X_1, X_2]' \in \mathfrak{h}$, prouvant que $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}$. Prenons $S \subset P$ un sous-groupe de Lie connexe d'algèbre $\mathfrak{s}$. Notons que puisque les flots des champs $(\mathfrak{s}, \omega)$-constants correspondent à l'action droite sur $\widehat{M}$ d'éléments proches de l'identité de S, Σ est préservée par l'action de S.

Soit $\widehat{x}_0 \in \Sigma$ et $U \subset \Sigma$ son voisinage localement homogène exhibé précédemment. Prenons $\mathfrak{t}$ un supplémentaire arbitraire de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{h}$ et choisissons $0 \in \mathcal{U} \subset \mathfrak{t}$ un voisinage ouvert

de l'origine tel que $\exp_{\widehat{x}} : \mathcal{U} \to \Sigma$ réalise un difféomorphisme sur son image $\exp_{\widehat{x}}(\mathcal{U}) =: U' \subset U$. Si $\mathcal{U}$ est suffisamment petit, il existe V_S un voisinage convexe de l'identité dans S tel que $U_1 = U'.V_S \subset U$. Puisque les champs de vecteurs $\widehat{X}$ commutent aux champs $(\mathfrak{s},\omega)$-constants, si deux points $\widehat{x} \in U_1$ et $\widehat{x}.s \in U_1$ sont dans la même fibre, alors $\widehat{X}_{\widehat{x}.s} = (R_s)_*\widehat{X}_{\widehat{x}}$. Par conséquent, on peut bien définir une extension des champs $\widehat{X}$ à l'ouvert saturé $\pi^{-1}(\pi(U_1))$ en posant $\widehat{X}_{\widehat{x}.p} = (R_p)_*\widehat{X}_{\widehat{x}}$. Il nous reste à prouver que ces extensions à l'ouvert saturé sont des relevés de champs de Killing locaux de $(M,\mathcal{C})$.

Nous avons vu que par construction, pour tout $\widehat{x} \in U$, $(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega)_{\widehat{x}}(v) = 0$ pour tout $v \in T_{\widehat{x}}\Sigma$. Vérifions que $\widehat{X}$ satisfait :

1. pour tout $\widehat{x} \in \pi^{-1}(\pi(U_1))$, $(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega)_{\widehat{x}}$ s'annule sur toute direction verticale ;
2. la relation d'équivariance suivante valable pour $\widehat{x} \in \pi^{-1}(\pi(U_1))$ et $A \in \mathfrak{g}$

$$\left(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega\right)_{\widehat{x}.p}\left(\widetilde{A}\right) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\left(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega\right)_{\widehat{x}}\left(\widetilde{\mathrm{Ad}(p)A}\right) = 0.$$

Ces faits sont en fait vérifiés pour tout champ de vecteurs sur $\widehat{M}$ qui commute à l'action du groupe structurel P. Ceci vient des calculs suivants.

1. Puisque la 2-forme courbure est horizontale, nous avons pour tous $\widehat{x} \in \pi^{-1}(\pi(U_1))$ et $A \in \mathfrak{p}$, $\Omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}_{\widehat{x}}, \widetilde{A}_{\widehat{x}}) = \mathrm{d}\omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}_{\widehat{x}}, \widetilde{A}_{\widehat{x}}) + [\omega(\widehat{X}_{\widehat{x}}), A] = 0$. Soit $\widehat{x} \in \pi^{-1}(\pi(U_1))$. On calcule

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega)_{\widehat{x}}(\widetilde{A}) &= \mathrm{d}\omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}, \widetilde{A}) + (\widetilde{A}.\omega(\widehat{X}))_{\widehat{x}} \\
&= [A, \omega_{\widehat{x}}(\widehat{X})] + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \omega(\widehat{X})(\widehat{x}.\mathrm{e}^{tA}) \\
&= [A, \omega_{\widehat{x}}(\widehat{X})] + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R_{\mathrm{e}^{tA}}{}^*\omega)_{\widehat{x}}(\widehat{X}) \\
&= [A, \omega_{\widehat{x}}(\widehat{X})] + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{-tA})\omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Pour $A \in \mathfrak{g}$ et t suffisamment petit,

$$\begin{aligned}
\left[(\phi^t_{\widehat{X}})^*\omega\right]_{\widehat{x}.p}\left(\widetilde{A}\right) &= \left[(\phi^t_{\widehat{X}})^*\omega\right]_{\widehat{x}.p}\left((R_p)_*\,\widetilde{\mathrm{Ad}(p)A_{\widehat{x}}}\right) \\
&= \left[(R_p)^*\left(\phi^t_{\widehat{X}}\right)^*\omega\right]_{\widehat{x}}\left(\widetilde{\mathrm{Ad}(p)A_{\widehat{x}}}\right) \\
&= \left[\left(\phi^t_{\widehat{X}}\right)^*(R_p)^*\omega\right]_{\widehat{x}}\left(\widetilde{\mathrm{Ad}(p)A_{\widehat{x}}}\right) \\
&= \mathrm{Ad}(p^{-1})\left(\left(\phi^t_{\widehat{X}}\right)^*\omega\right)_{\widehat{x}}\left(\widetilde{\mathrm{Ad}(p)A_{\widehat{x}}}\right).
\end{aligned}$$

   En dérivant à $t = 0$, nous obtenons

$$\left(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega\right)_{\widehat{x}.p}\left(\widetilde{A}\right) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\left(\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega\right)_{\widehat{x}}\left(\widetilde{\mathrm{Ad}(p)A}\right) = 0.$$

Finalement, les champs $\widehat{X}$, $X \in \mathfrak{h}$ vérifient $\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega = 0$ sur $\pi^{-1}(\pi(U_1))$. Ce sont donc des relevés de champs de Killing locaux définis sur un voisinage de x_0 dans M. Ainsi, nous venons d'exhiber une algèbre de Lie $\mathfrak{h}' \subset \mathrm{Kill}^{loc}(x_0)$ définis sur un voisinage ouvert commun de x_0. Puisque $\pi|_\Sigma$ est une submersion, nous avons $\mathfrak{h}'_x = \{X(x), X \in \mathfrak{h}'\} = T_xM$ pour tout x dans ce voisinage. Par conséquent, toute composante connexe de $\pi(\Sigma)$ est localement homogène. □

3.2.2 Conclusion

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 3.1. Notons $d = \dim \mathfrak{p}$ et supposons que $(M, \mathcal{C})$ est d-infinitésimalement homogène. Les applications $\mathcal{D}^i K$ prennent ainsi valeurs dans une seule orbite dans $\mathcal{W}^i$, pour $i \leqslant d$. Fixons un point arbitraire $\widehat{x}_0$ dans $\widehat{M}$. Pour $0 \leqslant i \leqslant d$, soit $S_i = \mathrm{Stab}_P(\mathcal{D}^i K(\widehat{x}_0))$ et $\mathfrak{s}_i = \mathrm{Lie}(S_i)$. On a un entier $k(\widehat{x}_0) \leqslant d$ tel que $\mathfrak{s}_0 \supsetneq \mathfrak{s}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{s}_{k(\widehat{x}_0)} = \mathfrak{s}_{k(\widehat{x}_0)+1}$. Notons bien que si $\widehat{x}$ est un autre point, pour tout $i \leqslant d$, $\mathrm{Stab}_P(\mathcal{D}^i K(\widehat{x}))$ et $\mathrm{Stab}_P(\mathcal{D}^i K(\widehat{x}_0))$ sont conjugués dans P. Ce qui implique $k(\widehat{x}) = k(\widehat{x}_0) = k$. On appelle k *l'entier de Singer* de $(M, \mathcal{C})$. Rappelons le résultat suivant bien connu.

Lemme 3.2.3. *Soient $\pi : P \to M$ un G-fibré principal, dont la base est une variété connexe M, et $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Alors, P admet une réduction en un sous-H-fibré principal si et seulement si il existe une application G-équivariante $\Phi : P \to G/H$. Dans ce cas, pour tout $u \in P$, $\Phi^{-1}(\Phi(u))$ est un sous-fibré principal de P, dont le groupe structurel est conjugué à H.*

Pour chaque i, notons $\widehat{N_i}$ la composante connexe de la ligne de niveau $\mathcal{D}^i K^{-1}(\mathcal{D}^i K(\widehat{x}_0))$ qui contient $\widehat{x}_0$. Chaque $\widehat{N_i}$ est donc un sous-fibré principal de $\widehat{M}$, de groupe $(S_i)_0$, la composante neutre de S_i. Par définition de k, on doit avoir $\widehat{N_k} = \widehat{N_{k+1}}$. Notons $\widehat{N}$ ce sous-fibré et S son groupe.

La définition de l'entier de Singer fait que $\mathcal{D}^k K$ satisfait aux hypothèses du lemme 3.2.1. En effet, si $F = \mathcal{D}^k K$, alors $\mathcal{D}^1 F = (K, \ldots, D^k K, D^1 K, \ldots, D^{k+1} K)$ est nécessairement constante sur $\widehat{N}$ puisque $\mathcal{D}^{k+1} K$ est elle-même constante sur ce sous-fibré. Ainsi, $\widehat{N}$ est une sous-variété parallèle, mais également sous-fibré principal de $\widehat{M}$. De plus, K est constante sur $\widehat{N}$. Par conséquent, la proposition 3.2.2 implique que M est localement homogène.

3.3 Preuve du théorème de l'orbite dense

Le théorème 3.1 nous permet de faire une preuve très courte du théorème 3.2, qui est une formulation pour les géométries de Cartan du théorème de l'orbite dense de Gromov. Nous détaillons ceci dans le paragraphe qui suit.

Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan dont l'espace modèle $\mathbf{X} = G/P$ est supposé de type algébrique, et telle que le pseudo-groupe $\mathrm{Aut}^{loc}(M)$ admet une orbite dense $\mathcal{O}$ dans M. Soit $d = \dim P$. Soit $\Phi = \mathcal{D}^d K$ la d-ième dérivée covariante de la courbure. Puisque $\mathrm{Aut}^{loc}(M)$ agit sur $\widehat{M}$ en préservant toutes les dérivées de la courbure, $\mathcal{O}' = \Phi(\pi^{-1}(\mathcal{O}))$ est réduit à une seule P-orbite dans $\mathcal{W}^d$. Soit F l'adhérence de $\mathcal{O}'$ dans $\mathcal{W}^d$. Alors, l'application Φ est à valeurs dans F. Par hypothèse, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe presque algébrique. Puisque l'action de P sur $\mathcal{W}^d$ s'obtient via l'action adjointe de P sur $\mathfrak{g}$, chaque P-orbite dans $\mathcal{W}^d$ est ouverte dans son adhérence (pour la topologie Hausdorff de $\mathcal{W}^d$). Ainsi, $\mathcal{O}'$ est ouvert dans F et l'ouvert $\Phi^{-1}(\mathcal{O}')$ se projette sur un ouvert de M contenant $\mathcal{O}$, et qui doit donc être lui-même dense. Appelons-le U. La géométrie de Cartan restreinte $(U, \pi^{-1}(U), \omega)$ satisfait alors les hypothèses du théorème 3.1. Par conséquent, chaque composante connexe de U est localement homogène. Prenons $x, y \in U$ et $V_x, V_y \subset U$ des voisinages ouverts connexes de x et y respectivement. Ces voisinages sont localement homogènes. Puisque $\mathcal{O}$ est dense, elle rencontre V_x et V_y. Il existe donc bien un automorphisme local qui envoie x sur y.

Chapitre 4

Orbites des isométries locales d'une structure rigide

Le théorème de l'orbite dense que nous avons cité au chapitre précédent (théorème 3.2) s'énonce dans toute sa généralité dans le cadre des structures géométriques rigides, dites de type algébrique, qui ont été définies par Gromov dans [Gro88]. La démonstration consiste à le présenter comme un corollaire d'un résultat très fort qui, sans aucune hypothèse sur les isométries locales de la structure, assure que ces dernières ont des orbites qui sont des sous-variétés fermées à l'intérieur d'un ouvert dense. Ce chapitre a pour but de revisiter ce résultat et sa démonstration en l'énonçant dans le cadre des géométries de Cartan. L'élément central de la démonstration est un résultat d'intégration locale qui fait apparaître des champs de Killing locaux de la structure géométrique. Ce théorème d'intégration sera un point essentiel dans la démonstration du résultat principal du chapitre 6 en géométrie conforme lorentzienne. Mais avant tout, commençons par énoncer le résultat de Gromov.

Théorème ([Gro88])**.** *Soit (M, ϕ) une variété munie d'une structure géométrique rigide ϕ de type algébrique. Il existe un ouvert dense de M à l'intérieur duquel les Is^{loc}-orbites de ϕ sont des sous-variétés fermées.*

De façon informelle, la preuve de Gromov consiste à regarder pour un certain r_0 les orbites des « r_0-jets d'isométries », dites I^{r_0}-orbites, qui sont en quelques sortes les projections sur M des lignes de niveau du r_0-jet de l'application $\phi : \mathcal{R}^r(M) \to W$ qui définit la structure (voir [DG91], Chap.5 ou [Ben97]). Par un argument de rang constant, il démontre qu'en dehors d'un lieu exceptionnel qui est un fermé d'intérieur vide, ces ensembles forment des sous-variétés fermées. Le point clé est alors un résultat d'intégrabilité (un « théorème de Frobenius ») qui stipule que si l'ordre r_0 a été choisi assez grand, deux points suffisamment proches dans la même I^{r_0}-orbite sont en fait reliés par une isométrie locale de la structure, assurant ainsi que localement, I^{r_0}-orbites et Is^{loc}-orbites coïncident.

La preuve de Gromov, même simplifiée dans [Ben97] ou [Fer02], demeure difficile et technique, en raison notamment de la lourdeur du formalisme des fibrés de r-jets. De plus, même lorsque l'on considère une structure aussi élémentaire que la donnée d'un parallélisme global, la preuve ne se simplifie pas et reste difficilement accessible.

Récemment, K. Melnick a proposé un résultat analogue au théorème d'intégrabilité de Gromov dans le cadre des géométries de Cartan ([Mel11]). Le point de vue est plus proche de l'approche de Singer (présentée au chapitre 3) et généralise des résultats formulés

par Nomizu en géométrie riemannienne ([Nom60]). L'idée diffère donc en substance du théorème de Gromov : le résultat d'intégrabilité de Gromov consiste à dire qu'il suffit de préserver la *structure* ϕ jusqu'à un certain ordre pour être une isométrie locale, alors que celui présenté par Melnick va dire qu'il suffit de préserver la *courbure* jusqu'à un certain ordre pour être un automorphisme local de la géométrie de Cartan.

Par exemple, Melnick démontre que si $(M,\mathcal{C})$ est une géométrie de Cartan analytique et compacte, alors il existe un entier r_0 tel que $\forall x,y\in M$, il existe un $f\in \mathrm{Aut}^{loc}(M,\mathcal{C})$ tel que $y=f(x)$ si et seulement si $\mathcal{D}^{r_0}K(\widehat{x})=\mathcal{D}^{r_0}K(\widehat{y})$ pour certains $\widehat{x}\in\pi^{-1}(x)$ et $\widehat{y}\in\pi^{-1}(y)$ ([Mel11], Proposition 3.8).

Dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, on n'a pas un tel énoncé global et il est plus judicieux de considérer, dans le fibré de Cartan, les *directions tangentes* en lesquelles les r_0 premières dérivées covariantes de la courbure sont constantes, que l'on appelle « générateurs de Killing » d'ordre r_0, en accord avec la terminologie originelle de Nomizu. La question naturelle qui se pose est alors : existe-t-il un ordre r_0 tel que tout générateur de Killing d'ordre r_0 en un point est obtenu en évaluant (le relevé d') un champ de Killing local en ce point ? Melnick a répondu positivement à cette question lorsque l'on se restreint à un ouvert dense de M ([Mel11], Theorem 6.3), ce qui reste en adéquation avec les résultats de Gromov.

Cependant, bien que la preuve de Melnick soit convaincante dans le cas des structures de Cartan analytiques, il semble qu'il y ait une erreur dans la démonstration du résultat d'intégrabilité des générateurs de Killing dans le cas $\mathcal{C}^\infty$.

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration alternative de ce théorème dans le cas lisse. Bien que l'on réutilise la plupart des définitions de [Mel11] et qu'on énonce un résultat analogue, la preuve présentée ici diffère nettement, et l'existence des champs de Killing locaux va être fournie par le théorème "classique" de Frobenius d'intégration des distributions involutives de champs de k-plans. Le théorème central démontré dans ce chapitre est énoncé ci-après (le lecteur trouvera la définition précise d'un générateur de Killing dans la première section de ce chapitre).

Théorème 4.1 (Intégrabilité des générateurs de Killing)**.** *Soient $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur un espace homogène $\boldsymbol{X}=G/P$ et $m=\dim G$. Notons $\pi:\widehat{M}\to M$ le fibré de Cartan. Il existe un ouvert dense $\Omega\subset M$ tel que pour tous $\widehat{x}\in\pi^{-1}(\Omega)$ et $A\in\mathrm{Kill}^{m+1}(\widehat{x})$ générateur de Killing d'ordre $m+1$ en $\widehat{x}$, il existe un champ de Killing local de $(M,\mathcal{C})$, défini dans un voisinage de x, dont le relevé $\widehat{A}$ vérifie $\omega(\widehat{A}(\widehat{x}))=A$.*

On notera que dans ce théorème, on a un contrôle universel de l'ordre des générateurs de Killing qu'il faut considérer, au sens où il ne dépend que de l'espace modèle $\mathbf{X}$. Nous expliquons ensuite comment utiliser ce résultat pour retrouver le théorème de Gromov sur la structure des orbites des isométries locales, dans le cas des géométries de Cartan. On obtient la formulation suivante.

Théorème 4.2 (Structure des Aut^{loc}-orbites)**.** *Soit $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\boldsymbol{X}=G/P$. On suppose $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)\subset\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe presque algébrique (ie d'indice fini dans son adhérence de Zariski). Il existe alors un ouvert dense $\Omega\subset M$ dans lequel les orbites de $\mathrm{Aut}^{loc}(M,\mathcal{C})$ sont des sous-variétés fermées.*

Plus précisément, Ω admet une décomposition $\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_k$, où chaque Ω_i est un ouvert, préservé par les automorphismes locaux, et dans lequel les Aut^{loc}-orbites forment un feuilletage par sous-variétés fermées.

Notre travail va essentiellement se réduire au cas où la géométrie de Cartan est en fait la donnée d'un parallélisme sur M, ce qui constituera le cœur de la preuve. C'est

pourquoi on consacre la section 4.2 à la démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2 dans ce cas particulier. La question sera traitée de façon élémentaire, en évitant le formalisme des jets. La section 4.3 expliquera alors comment étendre ces résultats au cas d'une géométrie de Cartan générale.

En vue de la présentation de nos résultats sur les actions conformes lorentziennes de groupes de Lie simples au chapitre 6, nous donnons à la section 4.4 un énoncé et une démonstration du théorème d'intégrabilité des générateurs de Killing dans le cas des structures de Cartan analytiques. Il s'agit du théorème 4.4. Bien que Melnick avait déjà donné exactement le même énoncé dans [Mel11] (Theorem 3.11) avec une preuve correcte, nous en donnons une démonstration différente qui n'utilise pas la généralisation de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff démontrée dans [Mel11].

Dans la section 4.5, on étend le théorème sur l'agencement des Aut^{loc}-orbites d'une géométrie de Cartan à des structures géométriques plus générales, que nous appelons structures de Cartan enrichies, et on termine ce chapitre en expliquant comment retrouver le théorème de Singer énoncé au chapitre précédent grâce au théorème 4.2, avec cependant une borne moins fine.

4.1 Définitions

Dans tout ce chapitre, $(M, \mathcal{C})$ est une géométrie de Cartan modelée sur un espace homogène $\mathbf{X} = G/P$, qui satisfait les hypothèses standard données au tout début du chapitre 2. Conformément aux notations du chapitre 2, on note $V = \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ l'espace d'arrivée de l'application courbure K de la géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ et $\mathcal{D}^r K : \widehat{M} \to \mathcal{W}^r$ est la r-ième dérivée covariante de K, où $\mathcal{W}^r$ désigne l'espace vectoriel

$$\mathcal{W}^r = V \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V).$$

On a vu à la section 2.1.5 que pour tout r, l'application $\mathcal{D}^r K$ est P-équivariante pour une action naturelle de P sur l'espace $\mathcal{W}^r$, qui se définit via la représentation adjointe de P sur $\mathfrak{g}$.

Définition 4.1.1. Nous dirons que l'espace modèle $\mathbf{X}$ est de type algébrique si le groupe $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est quasi-algébrique, c'est-à-dire s'il est d'indice fini dans son adhérence de Zariski.

Avant tout, rappelons que la Aut^{loc}-*orbite* d'un point x dans une variété munie d'une géométrie de Cartan est l'ensemble des points y tels qu'il existe un automorphisme local envoyant x sur y. Sa Kill^{loc}-*orbite* est définie comme étant l'ensemble des points qui peuvent être atteints en suivant depuis x les flots d'un nombre finis de champs de Killing locaux. Bien sûr, toute Kill^{loc}-orbite est contenue dans une Aut^{loc}-orbite.

4.1.1 Générateurs de Killing

Définition 4.1.2 (Générateurs de Killing)**.** Pour tout $A \in \mathfrak{g}$, on définit l'application linéaire

$$\llcorner A : \mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V) \to \mathrm{Hom}(\otimes^{r-1} \mathfrak{g}, V),$$

donnée par $\forall W \in \mathrm{Hom}(\otimes^r \mathfrak{g}, V),\ \forall X_1, \ldots, X_{r-1} \in \mathfrak{g}$,

$$(W \llcorner A)(X_1, \ldots, X_{r-1}) = W(A, X_1, \ldots, X_{r-1}).$$

On étend $\llcorner A$ en une application linéaire $\mathcal{W}^r \to \mathcal{W}^{r-1}$ définie par

$$(W_0, \dots, W_r) \llcorner A = (W_1 \llcorner A, \dots, W_r \llcorner A).$$

Pour $r \geqslant 1$, on dit que A est un *générateur de Killing* d'ordre r en $\widehat{x}$ si

$$\mathcal{D}^r K(\widehat{x}) \llcorner A = 0.$$

On note $\mathrm{Kill}^r(\widehat{x}) \subset \mathfrak{g}$ l'ensemble des générateurs de Killing d'ordre r en $\widehat{x}$ et $\mathrm{Kill}^\infty(\widehat{x}) = \bigcap_{r=1}^\infty \mathrm{Kill}^r(\widehat{x})$.

Remarque 4.1.3. Si X est un champ de Killing local de $(M, \mathcal{C})$ et si $\widehat{X}$ désigne son relevé à $\widehat{M}$, alors en tout x où X est défini et pour tout $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on a $\widehat{X}(\widehat{x}) \in \mathrm{Kill}^\infty(\widehat{x})$.

Pour $1 \leqslant r < \infty$, $\mathrm{Kill}^r(\widehat{x}) = \omega_{\widehat{x}}(\mathrm{Ker}\, T_{\widehat{x}}(\mathcal{D}^{r-1}K))$ et pour tout $p \in P$, on a $\mathrm{Kill}^r(\widehat{x}.p) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\,\mathrm{Kill}^r(\widehat{x})$. Par conséquent si $x \in M$, la dimension $\dim \mathrm{Kill}^r$ est constante dans la fibre $\pi^{-1}(x)$. Nous pouvons donc prendre la définition ci-dessous.

Définition 4.1.4. Si $1 \leqslant r < \infty$, nous notons $k_r(x) = \dim \mathrm{Kill}^r(\widehat{x})$ pour tout $\widehat{x}$ au-dessus de x.

Pour $r \geqslant 1$, $\mathrm{Kill}^r(\widehat{x})$ est le noyau d'une application linéaire qui dépend continûment de $\widehat{x}$. Par conséquent, les applications $k_r : M \to \mathbf{N}$ sont semi-continues supérieurement.

4.1.2 Champs de Killing locaux

Si $x \in M$, on note $\mathrm{Kill}^{loc}(x)$ l'espace vectoriel des germes de champs de Killing locaux définis au voisinage de x. Cet espace est de dimension finie car pour tout $\widehat{x}$ dans la fibre au-dessus de x, l'application $X \in \mathrm{Kill}^{loc}(x) \mapsto \widehat{X}(\widehat{x})$ est injective ($\widehat{X}$ désigne le relevé à l'espace total du champ de Killing local X, et c'est un champ de Killing d'un parallélisme). En fait, $\mathrm{Kill}^{loc}(x)$ est plus qu'un espace abstrait de germes en x de champs de vecteurs.

Lemme 4.1.1. *Pour tout $x \in M$, il existe U un voisinage ouvert de x tel que tout champ de Killing local en x est restriction d'un champ de Killing défini sur un ouvert qui contient U.*

Démonstration. On se donne $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable décroissante de voisinages de x telle que $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} U_i = \{x\}$. Pour tout i, on note $\mathrm{Kill}_i^{loc}(x)$ l'espace des champs de Killing définis sur U_i. On a pour tout i une inclusion $\mathrm{Kill}_i^{loc}(x) \hookrightarrow \mathrm{Kill}^{loc}(x)$. On a également pour tout i, $\mathrm{Kill}_i^{loc} \hookrightarrow \mathrm{Kill}_{i+1}^{loc}$ (par restriction). Puisque $\mathrm{Kill}^{loc}(x)$ est de dimension finie, nous avons un i_0 tel que $\mathrm{Kill}_{i_0}^{loc}(x) \simeq \mathrm{Kill}^{loc}(x)$, ce qui montre que tout champ de Killing local s'étend au moins sur U_{i_0}. □

À partir de maintenant, nous considérerons $\mathrm{Kill}^{loc}(x)$ comme une algèbre de Lie de champs de vecteurs définis sur un ouvert commun.

Définition 4.1.5. Pour tout $x \in M$, on note $d^{\mathrm{Kill}}(x) = \dim \mathrm{Kill}^{loc}(x)$ la dimension de l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux définis au voisinage de x.

Lemme 4.1.2. *L'application $\{x \in M \mapsto d^{\mathrm{Kill}}(x)\}$ est semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert connexe de x sur lequel tous les champs de Killing locaux en x sont définis. Alors, pour tout $y \in U$ et tout $X \in \mathrm{Kill}^{loc}(x)$, X induit un champ de Killing local en y. Puisqu'un champ de Killing défini sur un ouvert connexe ne peut s'annuler sur un ouvert sans être nul partout où il est défini, nous avons une injection $\mathrm{Kill}^{loc}(x) \hookrightarrow \mathrm{Kill}^{loc}(y)$, et ceci pour tout $y \in U$. Nous avons donc $d^{\mathrm{Kill}}(x)$ qui minore d^{Kill} sur U. □

4.1.3 Lieu d'intégrabilité

Comme nous l'avons déjà remarqué, puisque le relevé d'un flot d'automorphismes locaux de $(M,\mathcal{C})$ préserve la fonction courbure K et *toutes* ses dérivées covariantes $\mathcal{D}^r K$, pour tous $r \geqslant 0$ et $\widehat{x} \in \widehat{M}$, on a toujours l'inclusion

$$\mathrm{Kill}^r(\widehat{x}) \supset \omega_{\widehat{x}}\big(\{\widehat{X}(\widehat{x}),\ X \in \mathrm{Kill}^{loc}(x)\}\big). \tag{4.1}$$

Le théorème 4.1 que nous voulons prouver dit donc que si $r = \dim G + 1$, alors il y a égalité dans l'inclusion précédente sur $\pi^{-1}(U)$, où U est un ouvert dense de M. Nous définissons maintenant le lieu d'intégrabilité d'ordre r de $(M,\mathcal{C})$ comme étant le projeté du lieu de $\widehat{M}$ où il y a égalité dans l'inclusion (4.1).

Définition 4.1.6 (Lieu d'intégrabilité)**.** Si $r \geqslant 1$, on définit le *lieu d'intégrabilité* d'ordre r de $(M,\mathcal{C})$ comme étant $\mathrm{Int}_r(M,\mathcal{C}) = \{x \in M \mid k_r(x) = d^{\mathrm{Kill}}(x)\}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons plus simplement M_r^{int} pour $\mathrm{Int}_r(M,\mathcal{C})$.

4.1.4 Une formulation plus précise du théorème d'intégrabilité

A priori, ces lieux d'intégrabilité peuvent très bien être vide. Nous allons en fait avoir une formulation un peu plus forte du théorème 4.1, qui s'énonce comme suit.

Théorème 4.3. *Soit $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\boldsymbol{X} = G/P$ et $m = \dim G$. Alors, $\mathrm{Int}_{m+1}(M,\mathcal{C})$ est un ouvert dense de M.*

Commençons par voir le

Lemme 4.1.3. *Pour tout $r \geqslant 1$, le lieu d'intégrabilité $\mathrm{Int}_r(M,\mathcal{C})$ est un ouvert (éventuellement vide) de M.*

Démonstration. Rappelons que les applications k_r sont toutes semi-continues supérieurement et que d^{Kill} quant à elle est semi-continue inférieurement. Soit $x \in \mathrm{Int}_r(M,\mathcal{C})$. Nous avons un ouvert $U \ni x$ tel que $k_r(x)$ majore k_r sur U et $d^{\mathrm{Kill}}(x)$ minore d^{Kill} sur U. Mais alors, pour tout $y \in U$

$$d^{\mathrm{Kill}}(x) \leqslant d^{\mathrm{Kill}}(y) \leqslant k_r(y) \leqslant k_r(x).$$

Puisque $k_r(x) = d^{\mathrm{Kill}}(x)$, on a égalité partout, ce qui montre que $d^{\mathrm{Kill}} \equiv k_r$ sur U, *ie* $U \subset \mathrm{Int}_r(M,\mathcal{C})$. □

Objet de la démonstration du théorème 4.1

Ainsi, il va suffire de montrer que $\mathrm{Int}_{m+1}(M,\mathcal{C})$ est dense, et nous allons démontrer qu'il contient un ouvert dense *a priori* plus petit.

Dans toute la suite de ce chapitre, on définit $\Omega_{m+2} \subset M$ comme étant

$$\Omega_{m+2} = \{x \in M \mid k_1, \ldots, k_{m+2} \text{ sont localement constantes en } x\}.$$

Puisque les applications k_r sont semi-continues supérieurement, Ω_{m+2} est un ouvert dense de M. De plus, puisque pour tout automorphisme local $f \in \mathrm{Aut}^{loc}(M,\mathcal{C})$ et $r \geqslant 1$, $k_r \circ f = k_r$, cet ouvert est Aut^{loc}-invariant.

La démonstration du théorème 4.1 va se résumer à prouver l'inclusion

$$\Omega_{m+2} \subset \mathrm{Int}_{m+1}(M,\mathcal{C}).$$

4.2 Les résultats de Gromov pour les parallélismes

Dans cette section, on démontre les théorèmes 4.1 et 4.2 dans le cas particulier où la géométrie de Cartan est la donnée d'un parallélisme sur M. Le théorème 4.1 assure l'existence d'un champ de Killing local et la preuve consiste à exhiber ce champ en construisant son graphe en utilisant des méthodes standards d'intégration de distributions involutive.

La structure géométrique définie par un parallélisme est un cas élémentaire de géométrie de Cartan. Nous commençons par détailler ce point.

Considérons $(M,\mathcal{P})$ une variété de dimension n munie d'un parallélisme, *ie* un ensemble de n champs de vecteurs $(X_1,\dots,X_n)$ qui sont partout linéairement indépendants. Appelons $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ le parallélisme dual sur le fibré cotangent. Définissons alors $\widehat{M} = M$ et $\pi : \widehat{M} \to M$ comme étant l'identité. C'est une fibration principale, de groupe structurel $\{0\}$. Appelons enfin G le groupe additif $\mathbf{R}^n$ et $P = \{0\}$. Il est alors immédiat que la 1-forme $\omega \in \Omega^1(\widehat{M},\mathbf{R}^n)$ est une connexion de Cartan. La géométrie de Cartan que nous venons d'exhiber sera appelée *la* géométrie de Cartan associée à $(M,\mathcal{P})$. On notera bien que si $(M_1,\mathcal{P}_1)$ et $(M_2,\mathcal{P}_2)$ sont deux variétés munies de parallélismes, un difféomorphisme $f : M_1 \to M_2$ est un isomorphisme entre les parallélismes si et seulement si $f^*\omega_2 = \omega_1$, c'est-à-dire si et seulement si c'est un isomorphisme entre les géométries de Cartan correspondantes.

Réciproquement, si $(M,\mathcal{C})$ est une géométrie de Cartan d'espace modèle G/P avec $G = \mathbf{R}^n$ et $P = \{0\}$, la fibration $\pi : \widehat{M} \to M$ est un difféomorphisme qui nous permet d'identifier M et $\widehat{M}$, la connexion de Cartan devient un parallélisme sur T^*M et nous prenons pour $\mathcal{P}$ le parallélisme antédual sur TM.

Dans une telle situation, puisque l'espace total de la fibration coïncide avec la base, nous omettrons les notations avec des "chapeaux" jusqu'à la fin de cette section.

À partir de maintenant, on fixe $(M,\mathcal{P})$ une variété munie d'un parallélisme donné par n champs de vecteurs $(X_1,\dots,X_n)$, et on note ω la connexion de Cartan associée. Toutes les définitions et propriétés que nous avons établies à la section 4.1 (générateurs de Killing, lieu d'intégrabilité, ouvert Ω_{m+2} etc..) sont donc valables dans ce contexte. Rappelons que si $X \in \mathbf{R}^n$, nous notons $\widetilde{X} = \omega^{-1}(X)$ le champ ω-constant qui lui est associé. Les champs ω-constants sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des champs X_i qui définissent le parallélisme. Pour finir, il existe des fonctions $\gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que

$$\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ [X_i,X_j] = \sum_k \gamma_{ij}^k X_k.$$

L'application courbure K de $(M,\mathcal{C})$ est alors donnée par

$$K(x)(e_i,e_j) = [e_i,e_j] - \omega_x([X_i,X_j]) = -(\gamma_{ij}^1(x),\dots,\gamma_{ij}^n(x)).$$

4.2.1 Intégration des générateurs de Killing

Comme nous l'avons dit à la section 4.1.4, la preuve du théorème 4.1 se ramène à démontrer l'inclusion $\Omega_{n+2} \subset \mathrm{Int}_{n+1}(M,\mathcal{C})$. Le problème est donc le suivant : on s'est donné $A \in \mathrm{Kill}^{n+1}(x_0)$ un générateur de Killing d'ordre $n+1$ en un point $x_0 \in \Omega_{n+2}$, et nous voulons trouver un champ de vecteurs défini dans un voisinage de x_0 qui commute avec les n champs de vecteurs du parallélisme $\mathcal{P}$. Puisque ce problème est local, sans perte de généralité, nous supposons que $M = U \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert connexe tel que $\Omega_{n+2} = M$, ou de façon équivalente, tel que les fonctions $k_1,\dots,k_{n+2}$ sont constantes sur M. Le parallélisme

$\mathcal{P}$ nous fournit une trivialisation particulière de TM qui est l'application $\phi : (x,v) \in TM \mapsto (x,\omega_x(v)) \in M \times \mathbf{R}^n$. Tous nos calculs et nos raisonnements seront faits dans cette trivialisation. Exemple notable, un champ de vecteurs sur M sera une application $M \to \mathbf{R}^n$. Si f est un difféomorphisme local, nous noterons $f_* : M \times \mathbf{R}^n \to M \times \mathbf{R}^n$ l'action de sa différentielle, lue à travers ϕ.

Pour exhiber le champ de vecteurs du théorème 4.1, nous allons construire son graphe dans $M \times \mathbf{R}^n$. On identifie canoniquement $T_{(x,u)}(M \times \mathbf{R}^n)$ et $T_xM \times \mathbf{R}^n$. Notons $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ la base standard du second facteur $\mathbf{R}^n$ et considérons Δ le champ de n-plans dans $M \times \mathbf{R}^n$ défini par

$$\Delta_{(x,u)} = \mathrm{Vect}(X_i - \sum_{jk} u_j \gamma_{ij}^k \, \partial_k \, , \; 1 \leqslant i \leqslant n). \tag{4.2}$$

Nous nous intéressons à cette distribution en raison du lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit X un champ de vecteurs sur M. Alors, X est un champ de Killing si et seulement si son graphe dans $M \times \mathbf{R}^n$ intègre la distribution Δ.*

Démonstration. Soit $\Gamma_X = \{(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) = (x, X(x)), \; x \in M\}$ le graphe de X, lu dans la trivialisation ϕ. Alors pour tout $x \in M$, l'espace tangent (de dimension$n$) $T_{(x,X(x))}\Gamma_X$ est engendré par les $X_i(x) + \sum_k (X_i.u_k)(x)\partial_k \in T_xM \times \mathbf{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Quand on développe les équations $[X_i, \sum_j u_j X_j](x) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtient que X est un champ de Killing si et seulement si pour tous $1 \leqslant i, k \leqslant n$

$$(X_i.u_k)(x) + \sum_j u_j(x)\gamma_{ij}^k(x) = 0.$$

Ainsi, si X est un champ de Killing, l'espace tangent $T_{(x,X(x))}\Gamma_X$ est en fait engendré par les

$$X_i(x) - \sum_{jk} u_j(x)\gamma_{ij}^k(x)\partial_k, \; 1 \leqslant i \leqslant n,$$

ce qui signifie que $T_{(x,X(x))}\Gamma_X = \Delta_{(x,X(x))}$.

Réciproquement, si nous supposons que $T_{(x,X(x))}\Gamma_X = \Delta_{(x,X(x))}$, alors $T_{(x,X(x))}\Gamma_X$ contient $X_i(x) - \sum_{jk} u_j(x)\gamma_{ij}^k(x)\partial_k$ pour tout i. Ainsi, nous devons avoir pour tous i, k, $(X_i.u_k)(x) = \sum_j u_j(x)\gamma_{ij}^k(x)$. □

Le lemme qui suit apparaît dans [Mel11] (Proposition 6.2). Il s'agit en fait d'une adaptation aux géométries de Cartan d'un lemme donné par Nomizu dans [Nom60] en géométrie riemannienne (Lemma 3), et l'idée de la preuve reste inchangée. Ce résultat est pour nous un ingrédient essentiel, nous en donnons donc une démonstration détaillée.

Lemme 4.2.2. *Soient $x \in M$, $X \in \mathbf{R}^n$ dans le domaine d'injectivité de $\exp_x$, $A \in \mathrm{Kill}^s(x)$ et $\gamma(t) = \exp_x(tX) = \phi^t_{\widetilde{X}}(x)$, $t \in [-1,1]$. Supposons que pour un $s \geqslant 1$, les applications k_s et k_{s+1} sont constantes et coïncident sur un voisinage de γ. Nous avons alors pour tout t*

$$\left(\phi^t_{\widetilde{X}}\right)_* A \in \mathrm{Kill}^s(\gamma(t)).$$

Démonstration. Par hypothèse, $\mathrm{Kill}^s(\gamma(t)) = \mathrm{Kill}^{s+1}(\gamma(t))$ et ces espaces sont de dimension constante. Posons $A_t = (\phi^t_{\widetilde{X}})_* A$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ un voisinage de 0 sur lequel $\exp_x$ réalise un difféomorphisme sur son image. Nous définissons un champ de vecteurs $\check{A}$ sur $\exp(x, \mathcal{U})$ en posant $\check{A}(\exp(x,Y)) = (\phi^1_{\widetilde{Y}})_* A$. Notons que pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et t on a

$$(\widetilde{A_t}.f)(\gamma(t)) = (\check{A}.f)(\gamma(t)).$$

Nous voulons prouver que pour tout $1 \leqslant r \leqslant s$ l'application $t \mapsto D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t$ est identiquement nulle. Nous commençons par calculer ses dérivées

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (\widetilde{A_t}.D^{r-1}K)(\gamma(t)) \quad = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (\check{A}.D^{r-1}K)(\phi^t_{\widetilde{X}}(x)) \\ &= (\widetilde{X}.\check{A}.D^{r-1}K)(\gamma(t_0)) \\ &= (\check{A}.\widetilde{X}.D^{r-1}K)(\gamma(t_0))\end{aligned}$$

puisque $[\check{A}, \widetilde{X}](\gamma(t)) = 0 \Rightarrow (\mathcal{L}_{\widetilde{X}}\mathcal{L}_{\check{A}}f)(\gamma(t)) = (\mathcal{L}_{\check{A}}\mathcal{L}_{\widetilde{X}}f)(\gamma(t))$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t &= (\check{A}.\widetilde{X}.D^{r-1}K)(\gamma(t)) \\ &= (\widetilde{A_t}.\widetilde{X}.D^{r-1}K)(\gamma(t)) \\ &= (D^{r+1}K(\gamma(t)) \llcorner A_t) \llcorner X.\end{aligned}$$

Pour $r \geqslant 1$, soit $\mathcal{C}^r_x : \mathfrak{g} \to \mathcal{W}^{r-1}$ l'application linéaire $\{X \mapsto \mathcal{D}^r K(x) \llcorner X\}$. Nous obtenons finalement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{C}^r_{\gamma(t)}(A_t) = \mathcal{C}^{r+1}_{\gamma(t)}(A_t) \llcorner X. \tag{4.3}$$

Soient $n_s = \dim \mathrm{Hom}(\otimes^s \mathbf{R}^n, V)$ et $(w_{s,1}, \ldots, w_{s,n_s})$ une base de $\mathrm{Hom}(\otimes^s \mathbf{R}^n, V)$, pour $s \geqslant 0$. Il existe des formes linéaires $f^{i,j}_x \in (\mathbf{R}^n)^*$, $i \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$ telles que pour $r \geqslant 1$,

$$\mathcal{C}^r_x = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant r-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n_i}} f^{i,j}_x w_{i,j}.$$

Puisque $\mathrm{Kill}^r = \mathrm{Ker}\,\mathcal{C}^r$ pour tout r et Kill^s est de dimension constante le long de γ, le rang de la famille $(f^{ij}_{\gamma(t)},\ 0 \leqslant i \leqslant s-1,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i) \subset (\mathbf{R}^n)^*$ ne dépend par de t. Enfin, $\mathrm{Kill}^s(\gamma(t)) = \mathrm{Kill}^{s+1}(\gamma(t))$ implique que pour tout $0 \leqslant j \leqslant n_s$,

$$\mathrm{Ker}\, f^{s,j}_{\gamma(t)} \supset \bigcap_{\substack{0 \leqslant i \leqslant s-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n_i}} \mathrm{Ker}\, f^{ij}_{\gamma(t)}.$$

Par conséquent, les applications $f^{s,j}_{\gamma(t)}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ des $f^{i,j}_{\gamma(t)}$, $i \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$ (par le théorème du rang constant). Ainsi, les équations (4.3) pour $1 \leqslant r \leqslant s$ nous donnent un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 impliquant les $f^{i,j}_{\gamma(t)}(A_t)$, $0 \leqslant i \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Puisque $A \in \mathrm{Kill}^s(x)$, la condition initiale de ce système est nulle, d'où $A_t \in \mathrm{Kill}^s(\gamma(t))$ pour tout t. □

Nous pouvons à présent passer à la preuve proprement dite. Soient $x_0 \in M$ et $A \in \mathrm{Kill}^{n+1}(x_0)$. Il existe un entier $s_0 \leqslant n+1$ tel que

$$k_1(x_0) > \cdots > k_{s_0}(x_0) = k_{s_0+1}(x_0).$$

Puisque les applications $k_1, \ldots, k_{n+2}$ sont constantes sur M, k_{s_0} et k_{s_0+1} sont constantes et égales. On définit

$$\Sigma = \{(x, v) \mid v \in \mathrm{Kill}^{s_0}(x)\} \subset M \times \mathbf{R}^n.$$

Notons que pour un champ de Killing arbitraire X, nous avons nécessairement $X(x) \in \mathrm{Kill}^\infty(x)$ partout où X est défini. Ainsi, le graphe que nous cherchons à exhiber est nécessairement inclus dans Σ et contient le point (x_0, A).

Lemme 4.2.3. *Σ est une sous-variété de $M \times \mathbf{R}^n$.*

Démonstration. Prenons $x \in M$ et soit $B = B(0,\delta) \subset \mathbf{R}^n$ une boule (pour une norme arbitraire) telle que $\exp_x$ est définie et injective sur B. Si $Y \in B$ et $y = \exp_x(Y)$, puisque $\mathrm{Kill}^{s_0}(y)$ et $\mathrm{Kill}^{s_0}(x)$ ont même dimension, on doit avoir $\mathrm{Kill}^{s_0}(y) = (\phi^1_{\widetilde{Y}})_* \mathrm{Kill}^{s_0}(x)$, par le lemme 4.2.2. Ainsi, $\mathrm{Kill}^{s_0}(x)$ dépend de façon lisse de x et Σ est bien une sous-variété de $M \times \mathbf{R}^n$. □

Nous prouvons à présent que Δ se restreint en une distribution de Σ, et que cette distribution restreinte est involutive. À partir de maintenant, pour éviter les lourdeurs dans les calculs, nous noterons $V_i = V_i(x, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{jk} u_j \gamma^k_{ij}\, \partial_k$.

Lemme 4.2.4. *La distribution Δ est partout tangente à Σ.*

Démonstration. D'après le lemme 4.2.2, $(\phi^t_{X_i})_* : M \times \mathbf{R}^n \to M \times \mathbf{R}^n$ préserve Σ si t est suffisamment petit. Prenons $(x, u_1, \ldots, u_n) = (x, u) \in \Sigma$ et posons $c(t) = (\phi^t_{X_i})_*(x, u)$. Alors, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} c(t) \in T_{(x,u)}\Sigma$. Calculons ce vecteur tangent. Par définition de ϕ, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} c(t) = (X_i(x), \sum_j u_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \omega((T_x\phi^t_{X_i})X_j(x))).$$

De plus,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \omega((T_x\phi^t_{X_i})X_j(x)) = (\mathcal{L}_{X_i}\omega)_x (X_j(x)) = (\mathrm{d}\omega)_x(X_i, X_j),$$

puisque $\omega(X_i)$ est constante égale à e_i. La 2-forme courbure de la géométrie de Cartan associée au parallélisme $\mathcal{P}$ est $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = \mathrm{d}\omega$ puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{R}^n$ est abélienne. Par conséquent, $(\mathrm{d}\omega)_x(X_i, X_j) = \Omega_x(X_i, X_j) = K(x)(e_i, e_j) = -(\gamma^1_{ij}(x), \ldots, \gamma^n_{ij}(x))$. Finalement, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} c(t) = X_i(x) - \sum_{jk} u_j \gamma^k_{ij}(x)\partial_k = X_i - V_i \in T_{(x,u)}\Sigma.$$

Ainsi, pour tout i, $X_i - V_i$ est tangent à Σ et nous avons $\Delta_{(x,u)} \subset T_{(x,u)}\Sigma$. □

Désormais, nous considérerons Δ comme une distribution dans $T\Sigma$.

Lemme 4.2.5. *Restreinte à Σ, la distribution Δ est involutive.*

Démonstration. Calculons le crochet de $X_1 - V_1$ et $X_2 - V_2$.

$$\begin{aligned}
[X_1, V_2] &= \sum_{jk} (X_1.\gamma^k_{2j}) u_j\, \partial_k \\
[V_1, X_2] &= -\sum_{jk} (X_2.\gamma^k_{1j}) u_j\, \partial_k \\
[V_1, V_2] &= \sum_{jklm} \gamma^k_{1j}\gamma^l_{2m}(\delta_{km} u_j\, \partial_l - \delta_{jl} u_m\, \partial_k), \text{ où } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j,\ 0 \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

On note C_p la composante de $[X_1 - V_1, X_2 - V_2]$ sur ∂_p, pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$C_p = \sum_j \left(\sum_k \gamma^k_{j1}\gamma^p_{k2} + \gamma^k_{2j}\gamma^p_{k1} \right) u_j - \sum_j (X_1.\gamma^p_{2j}) u_j + \sum_j (X_2.\gamma^p_{1j}) u_j.$$

La relation de Jacobi qui fait intervenir X_1, X_2 et X_j nous donne

$$\forall p,\ \forall j,\ \sum_k \gamma^k_{j1}\gamma^p_{k2} + \gamma^k_{2j}\gamma^p_{k1} + \gamma^k_{12}\gamma^p_{kj} = X_j.\gamma^p_{12} + X_1.\gamma^p_{2j} + X_2.\gamma^p_{j1}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} C_p &= \sum_j \left[(X_j.\gamma^p_{12})u_j - \sum_k \gamma^k_{12}\gamma^p_{kj}u_j \right] \\ &= \left(\sum_j u_j X_j \right).\gamma^p_{12} - \sum_k \gamma^k_{12} \sum_j \gamma^p_{kj}u_j \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} [X_1 - V_1, X_2 - V_2] &= [X_1, X_2] + \sum_p C_p \partial_p \\ &= \sum_k \gamma^k_{12} X_k - \sum_p \left(\sum_k \gamma^k_{12} \sum_j \gamma^p_{kj}u_j \right) \partial_p + \sum_p \left(\sum_j u_j X_j \right).\gamma^p_{12}\,\partial_p \\ &= \sum_k \gamma^k_{12} \left(X_k - \sum_{jp} \gamma^p_{kj}u_j\,\partial_p \right) + \sum_p \left(\sum_j u_j X_j \right).\gamma^p_{12}\,\partial_p \\ &= \underbrace{\sum_k \gamma^k_{12}(X_k - V_k)}_{\in \Delta} + \sum_p \left(\sum_j u_j X_j \right).\gamma^p_{12}\,\partial_p \end{aligned}$$

Puisque $(x,u) \in \Sigma$, $(u_1,\dots,u_n) \in \mathrm{Kill}^{s_0}(x)$ est un générateur de Killing d'ordre $s_0 \geqslant 1$ en x, nous obtenons $[(u_1X_1 + \cdots + u_nX_n).K](x) = 0$. Le second terme de la somme est donc nul. Ainsi $[X_1 - V_1, X_2 - V_2] \in \Delta$. Bien entendu, ce calcul reste valide pour un crochet arbitraire $[X_i - V_i, X_j - V_j]$ et nous avons prouvé que Δ est involutive. □

Conclusion La distribution Δ s'intègre en un feuilletage $\mathcal{F}$ de Σ. Considérons la feuille $\mathcal{F}_0$ qui contient (x_0, A) et notons $p : \Sigma \to M$ la projection sur le premier facteur. Puisque $X_1,\dots,X_n$ sont partout dans l'image de l'application tangente de $p|_{\mathcal{F}_0}$, cette application est un difféomorphisme local de $\mathcal{F}_0$ vers M par inversion locale. Dans un voisinage suffisamment petit de x_0, prenons $\widehat{A}(x) = p|^{-1}_{\mathcal{F}_0}(x)$. Alors $\widehat{A}$ est un champ défini sur un voisinage de x_0 dont le graphe intègre Δ. Par le lemme 4.2.1, $\widehat{A}$ est un champ de Killing local et $\widehat{A}(x_0) = A$.

4.2.2 Orbites des automorphismes locaux d'un parallélisme

Nous considérons toujours une variété M de dimension n munie d'un parallélisme $\mathcal{P}$, et nous notons ω la connexion de Cartan de la géométrie de Cartan associée. Nous allons maintenant prouver le théorème 4.2 dans ce contexte géométrique. Posons $\Omega = \mathrm{Int}_{n+1}(M,\mathcal{P})$.

Cet ouvert Ω est dense par la preuve qui précède et, par définition du lieu d'intégrabilité, les applications k_{n+1} et d^{Kill} coïncident sur Ω. Comme elles sont respectivement semi-continues supérieures et inférieures, et à valeurs entières, elles sont nécessairement localement constantes sur Ω.

On commence par étudier les Kill^{loc}-orbites dans Ω. Fixons $x_0 \in \Omega$ et notons $\mathcal{O}$ sa Kill^{loc}-orbite. L'orbite $\mathcal{O}$ est nécessairement incluse dans la composante connexe U de Ω qui contient x_0. L'application k_{n+1} est constante égale à k^0_{n+1} sur U. Ceci signifie que $\mathrm{Kill}^{n+1}(x)$ est de dimension constante k^0_{n+1} sur U. Ainsi, l'application $\mathcal{D}^n K : U \to \mathcal{W}^n$ est de rang constant $n-k^0_{n+1}$ puisque $\mathrm{Kill}^{n+1}(x) = \omega_x(\mathrm{Ker}\, T_x\mathcal{D}^n K)$ pour tout $x \in U$. Par conséquent, ses lignes de niveau sont des sous-variétés (plongées) de U. Soit $\mathcal{F} \subset U$ la composante connexe de la ligne de niveau $\mathcal{D}^n K^{-1}(\mathcal{D}^n K(x_0))$ dans U contenant x_0. Notons premièrement que $\mathcal{F}$ est préservée par les flots des champs de Killing de $\mathcal{P}$. Par construction, le théorème 4.1 nous assure que pour tout $x \in \mathcal{F}$, $T_x\mathcal{F} = \mathrm{Kill}^{loc}(x)|_x = \{X(x),\ X \in \mathrm{Kill}^{loc}(x)\}$ puisqu'on a $\omega_x(T_x\mathcal{F}) = \omega_x(\mathrm{Ker}\, T_x\mathcal{D}^n K) = \mathrm{Kill}^{n+1}(x)$ et $x \in \mathrm{Int}(M,\mathcal{P})$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{F}$, la Kill^{loc}-orbite de x est contenue dans $\mathcal{F}$ et est de dimension $k^0_{n+1} = \dim \mathcal{F}$. Par connexité, $\mathcal{O} = \mathcal{F}$.

Nous venons donc de voir que pour $x \in U$, la Kill^{loc}-orbite de x est exactement la composante connexe contenant x de la ligne de niveau de $\mathcal{D}^n K$ qui passe par x.

Considérons à présent $\mathcal{O}'$ une Aut^{loc}-orbite dans Ω. Il suffit de prouver que l'intersection entre $\mathcal{O}'$ et n'importe quelle composante connexe de Ω est une sous-variété fermée de cette composante. Soient U une composante connexe de Ω et $x \in U \cap \mathcal{O}'$. Alors $\mathcal{O}' \cap U$ est inclus dans $\mathcal{D}^n K^{-1}(\mathcal{D}^n K(x)) \cap U$. Puisque $\mathcal{O}'$ est préservée par les flots des champs de Killing locaux, ce qui a été prouvé ci-dessus implique que $\mathcal{O}' \cap U$ est une union de composantes connexes de $\mathcal{D}^n K^{-1}(\mathcal{D}^n K(x)) \cap U$, et est par conséquent une sous-variété fermée de U.

4.3 Des parallélismes aux géométries de Cartan générales

Soit $(M,\mathcal{C})$ une variété munie d'une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X} = G/P$. Nous notons toujours $\pi : \widehat{M} \to M$ le P-fibré principal associé et ω la connexion de Cartan. Cette dernière définit un parallélisme sur $\widehat{M}$, noté $\mathcal{P}_\omega$: on identifie une fois pour toute $\mathfrak{g}$ avec l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ et on note $(e_1,\dots,e_m)$ sa base standard. Soient $X_i = \omega^{-1}(e_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $\mathcal{P}_\omega = (X_1,\dots,X_m)$.

Ainsi, nous avons deux structures géométriques différentes, sur deux variétés différentes : une géométrie de Cartan sur M, à savoir $(M,\mathcal{C})$, et un parallélisme sur $\widehat{M}$, à savoir $(\widehat{M},\mathcal{P}_\omega)$. Nous avons par conséquent deux applications courbure.

1. L'application courbure $K : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^m)$ de la géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$;
2. l'application courbure $K^{\mathcal{P}_\omega} : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^m)$ de $(\widehat{M},\mathcal{P}_\omega)$, comme définie dans la section 4.2.

Ces applications vérifient $K(\widehat{x}) = [,]_{\mathfrak{g}} + K^{\mathcal{P}_\omega}(\widehat{x})$, dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^m)$, pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$, puisqu'on a pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$, $K(\widehat{x})(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{g}} - \omega_{\widehat{x}}([\widetilde{X},\widetilde{Y}])$. Par conséquent, pour tout $r \geqslant 1$, $D^r K = D^r K^{\mathcal{P}_\omega}$ en tant qu'applications sur $\widehat{M}$.

On déduit de ceci que pour tous $\widehat{x} \in \widehat{M}$ et $A \in \mathfrak{g}$, A est un générateur de Killing d'ordre $r \geqslant 1$ en $\widehat{x}$ de $(M,\mathcal{C})$ si et seulement si c'est un générateur de Killing d'ordre r en $\widehat{x}$ de $(\widehat{M},\mathcal{P}_\omega)$. Les lieux d'intégrabilité $\mathrm{Int}_r(\widehat{M},\mathcal{P}_\omega)$ coïncident donc avec $\pi^{-1}(\mathrm{Int}_r(M,\mathcal{C}))$.

4.3.1 Théorème d'intégrabilité

Nous commençons par expliquer comment déduire de l'étude précédente le théorème 4.1 sur l'intégrabilité des générateurs de Killing dans le cas d'une géométrie de Cartan générale. C'est la partie la plus directe. Par la proposition 2.1.7, nous savons que si un

champ de vecteur $\widehat{X}$ est défini sur un ouvert U de $\widehat{M}$ tel que $U \cap \pi^{-1}(x)$ est connexe pour tout x, alors si $\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega = 0$, $\widehat{X}$ s'étend de façon unique à $\pi^{-1}(\pi(U))$ en un champ de vecteur qui est le relevé d'un champ de Killing local défini sur $\pi(U)$. Ceci avec les remarques faites ci-dessus nous donne

$$\forall r \geqslant 1,\ \mathrm{Int}_r(\widehat{M}, \mathcal{P}_\omega) = \pi^{-1}\left(\mathrm{Int}_r(M, \mathcal{C})\right).$$

En particulier, $\mathrm{Int}_{m+1}(M, \mathcal{C})$ est le projeté d'un ouvert dense et saturé de $\widehat{M}$, en appliquant le travail mené sur les parallélismes à la section 4.2.1 à $(\widehat{M}, \mathcal{P}_\omega)$.

4.3.2 Agencement des orbites

Le théorème 4.2 sur les Aut^{loc}-orbites sera plus difficile à établir en toute généralité. Ce que nous avons démontré dans le cas des parallélismes nous assure que dans $\pi^{-1}(\mathrm{Int}_{m+1}(M, \mathcal{C}))$, les orbites des automorphismes locaux du parallélisme $\mathcal{P}_\omega$ sont des sous-variétés fermées. De plus, la proposition 2.1.7 implique que les orbites des automorphismes locaux de $(M, \mathcal{C})$ sont les projections sur M des orbites des automorphismes locaux de $(\widehat{M}, \mathcal{P}_\omega)$. Il nous reste à prouver que ces projections sont bien des sous-variétés. Ce ne sera pas le cas si nous considérons les orbites dans tout le lieu $\mathrm{Int}_{m+1}(M, \mathcal{C})$, et il va falloir réduire un peu plus ce lieu.

Rappelons que dans le théorème 4.2, nous avons supposé que le modèle $\mathbf{X} = G/P$ est de type algébrique. En particulier, le groupe $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ agit algébriquement sur $\mathfrak{g}$ et les P-orbites dans tous les espaces $\mathcal{W}^r$ sont des sous-variétés localement fermées. Nous allons utiliser la propriété suivante, propre aux actions algébriques.

Proposition 4.3.1. *Soit G un groupe algébrique réel et $G \times V \to V$ une action algébrique de G sur une variété algébrique réelle V. Soit $v \in V$ et v' sur la frontière de l'orbite $G.v$. Alors,* $\dim G.v' < \dim G.v$.

Soit $\Phi : \widehat{x} \in \pi^{-1}(M^{int}_{m+1}) \mapsto \mathcal{D}^m K(\widehat{x}) \in \mathcal{W}^m$. On définit $d : x \in M^{int}_{m+1} \mapsto \dim(P.\Phi(\widehat{x}))$, pour tout $\widehat{x}$ au-dessus de x (rappelons que Φ est P-équivariante). Cette application d est semi-continue inférieurement et Aut^{loc}-invariante puisque $w \in \mathcal{W}^m \mapsto \dim P.w$ est elle-même semi-continue inférieurement et $\Phi \circ \widehat{f} = \Phi$ pour tout $f \in \mathrm{Aut}^{loc}$. Par conséquent, il existe $\Omega \subset M^{int}_{m+1}$ un ouvert dense Aut^{loc}-invariant sur lequel d est localement constante. Puisque k_{m+1} et d sont localement constantes sur cet ouvert, Ω se décompose en une union finie d'ouverts $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_l$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant l$, les applications k_{m+1} et d sont constantes égales à k^i_{m+1} et d_i sur Ω_i. Si on suppose cette décomposition minimale, chaque Ω_i doit être Aut^{loc}-invariant. Nous allons prouver que pour tout i, les Aut^{loc}-orbites dans Ω_i sont des sous-variétés fermées qui ont même dimension, ce qui terminera la preuve.

Soit $\widehat{\Omega}_i = \pi^{-1}(\Omega_i)$. On note $\Phi_i = \Phi|_{\widehat{\Omega}_i}$. Par construction, Φ_i est de rang constant $m - k^i_{m+1}$ sur $\widehat{\Omega}_i$. Soit $\mathcal{O}$ la Aut^{loc}-orbite d'un point $x \in \Omega_i$. Soit $\mathcal{P}_i$ la restriction à $\widehat{\Omega}_i$ du parallélisme $\mathcal{P}_\omega$. Prenons $\widehat{x}$ au-dessus de x et notons $\mathcal{O}'$ la Aut^{loc}-orbite de $\widehat{x}$ pour la structure $(\widehat{\Omega}_i, \mathcal{P}_i)$. Comme nous l'avons vu à la section 4.2.2, $\mathcal{O}'$ est en fait une union de composantes connexes de la ligne de niveau $\Phi_i^{-1}(\Phi_i(\widehat{x}))$. D'après la proposition 2.1.7, $\mathcal{O} = \pi(\mathcal{O}')$. Cette observation nous invite à considérer la réunion des Aut^{loc}-orbites de *tous les points* $\widehat{x}$ dans la fibre $\pi^{-1}(x)$, à savoir $\pi^{-1}(\mathcal{O})$.

Fixons $\widehat{x}$ dans $\pi^{-1}(x)$, et notons $w = \Phi_i(\widehat{x})$. Vérifions que $\Phi_i^{-1}(P.w) = \pi^{-1}(\mathcal{O})$ est une sous-variété fermée de $\widehat{\Omega}_i$, saturée par la P-action.

Premièrement, $\Phi_i^{-1}(P.w)$ est bien une sous-variété car Φ_i est de rang constant et $P.w$ est une sous-variété de $\mathcal{W}^m$ incluse dans l'image de Φ_i. Notons que $\dim \Phi_i^{-1}(P.w) = \dim P.w + (\dim \widehat{\Omega}_i - \operatorname{Rk} \Phi_i) = d_i + k^i_{m+1}$.

Soit $\widehat{x}_n$ une suite dans $\Phi_i^{-1}(P.w)$ convergeant vers un point $\widehat{x}_\infty$ dans $\widehat{\Omega}_i$. La limite $\Phi_i(\widehat{x}_\infty)$ est dans l'adhérence de $P.w$ (pour la topologie Haussdorff) de $\mathcal{W}^m$, et *a fortiori* dans son adhérence de Zariski. Puisque la P-action sur $\mathcal{W}^m$ est algébrique, si $\Phi_i(\widehat{x}_\infty)$ n'appartenait pas à $P.w$, la proposition 4.3.1 impliquerait $\dim(P.\Phi_i(\widehat{x}_\infty)) < d_i$, contredisant $\widehat{x}_\infty \in \widehat{\Omega}_i$. Ainsi, $\widehat{x}_\infty \in \Phi_i^{-1}(P.w)$.

Pour finir, puisque la projection π est ouverte, $\pi(\Phi_i^{-1}(P.w))$ est une sous-variété fermée de Ω_i. De plus, $\pi(\Phi_i^{-1}(w)) = \pi(\Phi_i^{-1}(P.w))$. Puisque l'orbite $\mathcal{O}'$ est une union de composantes connexes de $\Phi_i^{-1}(w)$ et parce que $\mathcal{O} = \pi(\mathcal{O}')$, $\mathcal{O}$ est une union de composantes connexes de la sous-variété $\pi(\Phi_i^{-1}(P.w))$. Ainsi $\mathcal{O}$ est elle-même une sous-variété fermée de Ω_i. De plus, $\dim \mathcal{O} = \dim \Phi_i^{-1}(P.w) - \dim P = d_i + k^i_{m+1} - \dim \mathfrak{p}$. Cette dimension ne dépend pas de l'orbite choisie $\mathcal{O} \subset \Omega_i$.

Notons que $\dim P.w + \dim \operatorname{Kill}^{m+1}(\widehat{x}) \geqslant \dim P$, car $\operatorname{Lie}(\operatorname{Stab}_P(w)) = \operatorname{Kill}^{m+1}(\widehat{x}) \cap \mathfrak{p}$.

4.4 Le théorème d'intégrabilité pour les structures analytiques réelles

Si on suppose que la structure de Cartan $(M, \mathcal{C})$ est analytique réelle, on peut espérer qu'il y a suffisamment de régularité pour que le lieu d'intégrabilité soit M entière. Ça n'est pas le cas en toute généralité. Cependant,

Théorème 4.4. *Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan analytique réelle, avec M compacte. Il existe $r_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$, tout $A \in \operatorname{Kill}^{r_0}(\widehat{x})$ s'intègre au voisinage de $\widehat{x}$ en un champ de Killing local.*

Rappelons que ce résultat est dû à Melnick ([Mel11], Theorem 3.11). On notera bien que cette fois l'entier r_0 n'est pas universel et dépend *a priori* de la structure $(M, \mathcal{C})$. Bien entendu, si $m = \dim G$, $\operatorname{Int}_{m+1}(M, \mathcal{C})$ est toujours un ouvert dense de M. Ce théorème nous dit que dans le cas analytique compact, il existe toujours un r_0 *a priori* plus grand tel que $\operatorname{Int}_{r_0}(M, \mathcal{C}) = M$.

Nous allons voir qu'il est possible de construire un parallélisme analytique réel $\mathcal{P}$ sur $M = \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall r \geqslant 1,\ \operatorname{Int}_r(M, \mathcal{P}) \subsetneq M,$$

montrant ainsi qu'il n'est pas possible de se passer de l'hypothèse de compacité.

4.4.1 Le théorème d'intégrabilité en analytique

Rappelons que $\operatorname{Kill}^\infty(\widehat{x}) = \bigcap_{r \geqslant 1} \operatorname{Kill}^r(\widehat{x})$.

Définition 4.4.1. Définissons $k(x) = \dim \operatorname{Kill}^\infty(\widehat{x})$ pour tout $\widehat{x}$ au-dessus de x. Pour tout $x \in M$, la suite $(k_m(x))$ décroît puis est constante égale à $k(x)$. On appelle $m(x)$ le plus petit entier m tel que $k_m(x) = k(x)$.

En toute généralité, puisque les applications k_m sont semi-continues supérieurement, $\{x \mapsto k(x)\}$ l'est aussi. Le lieu Ω_∞ où cette application k est localement constante est donc un ouvert dense de M, et on a

Lemme 4.4.1. *Sur l'ouvert Ω_∞, l'application $\{x \mapsto m(x)\}$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. Soient $x \in \Omega_\infty$ et $U \subset \Omega_\infty$ un voisinage connexe de x tel que $\forall y \in U,\ k_{m(x)}(y) \leqslant k_{m(x)}(x) = k(x)$ (par semi-continuité supérieure de $k_{m(x)}$). Nous avons alors

$$\forall y \in U,\ k(y) = k(x) \geqslant k_{m(x)}(y) \geqslant k(y).$$

Ainsi, pour tout y dans U, on a $k_{m(x)}(y) = k(y)$ et donc $m(y) \leqslant m(x)$. □

Nous arrivons au point clé qui va distinguer les structures analytiques du cas général.

Proposition 4.4.2. *Si la structure de Cartan $(M,\mathcal{C})$ est analytique réelle, alors l'application $\{x \mapsto k(x)\}$ est localement constante sur M, ie $\Omega_\infty = M$.*

Démonstration. La preuve s'appuie sur un résultat similaire au lemme 4.2.2, adapté au contexte analytique. Voici son énoncé.

Lemme 4.4.3. *Soient $\widehat{x} \in \widehat{M}$, $X \in \mathfrak{g}$ dans le domaine d'injectivité de $\exp_{\widehat{x}}$ et $\gamma(t) = \exp(\widehat{x}, tX)$, $t \in [-1,1]$. Alors pour tout t et tout $A \in \mathrm{Kill}^\infty(\widehat{x})$, nous avons*

$$\omega_{\gamma(t)}\left(\left(\phi^t_{\widetilde{X}}\right)_* \widetilde{A}_{\widehat{x}}\right) \in \mathrm{Kill}^\infty(\gamma(t)).$$

Démonstration. Notons $A_t = \omega_{\gamma(t)}(\widehat{A}(\gamma(t))) \in \mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ un voisinage de 0 sur lequel $\exp_{\widehat{x}}$ réalise un difféomorphisme sur son image. Pour tout $Y \in \mathcal{U}$, la formule $\widehat{A}(\exp(\widehat{x},Y)) = (\phi^1_{\widetilde{Y}})_* A$ définit un champ sur $\exp(\widehat{x},\mathcal{U})$. Remarquons que pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{M})$ et pour tout t, nous avons

$$(\widetilde{A_t}.f)(\gamma(t)) = (\widehat{A}.f)(\gamma(t)).$$

Nous voulons prouver qu'à tout ordre r, l'application analytique $t \mapsto D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t$ est identiquement nulle. Pour cela on va prouver que toutes ses dérivées à $t = 0$ son nulles. Comme dans le lemme 4.2.2, on calcule

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (\widetilde{A_t}.D^{r-1}K)(\gamma(t)) \quad = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (\widehat{A}.D^{r-1}K)(\phi^t_{\widetilde{X}}(\widehat{x})) \\ &= (\widetilde{X}.\widehat{A}.D^{r-1}K)(\gamma(t_0)) \\ &= (\widehat{A}.\widetilde{X}.D^{r-1}K)(\gamma(t_0))\end{aligned}$$

car $[\widehat{A},\widetilde{X}](\gamma(t)) = 0 \Rightarrow (\mathcal{L}_{\widetilde{X}}\mathcal{L}_{\widehat{A}} f)(\gamma(t)) = (\mathcal{L}_{\widehat{A}}\mathcal{L}_{\widetilde{X}} f)(\gamma(t))$ pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{M})$. Nous voyons alors qu'à tout ordre,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t = (\widehat{A}.\widetilde{X}^n.D^{r-1}K)(\gamma(t)).$$

En nous plaçant à $t = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\right|_{t=0} D^r K(\gamma(t)) \llcorner A_t &= (\widehat{A}.\widetilde{X}^n.D^{r-1}K)(\widehat{x}) = (\widetilde{A_0}.\widetilde{X}^n.D^{r-1}K)(\widehat{x}) \\ &= (\ldots((D^{r+n}K(\widehat{x}) \llcorner A) \llcorner X)\ldots) \llcorner X \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque $A \in \mathrm{Kill}^\infty(\widehat{x})$. Ce qui termine la preuve. □

Ce lemme implique donc que pour tout $\widehat{y}$ dans un voisinage exponentiel de $\widehat{x}$ dans $\widehat{M}$, on a $\dim \mathrm{Kill}^\infty(\widehat{y}) \geqslant \dim \mathrm{Kill}^\infty(\widehat{x})$, prouvant que l'application $\{x \mapsto k(x)\}$ est semi-continue inférieurement en x. Comme elle est également semi-continue supérieurement, ceci implique qu'elle est localement constante au voisinage de x, *ie* $x \in \Omega_\infty$. □

En combinant les deux résultats précédents, nous obtenons que l'application m est semi-continue supérieurement sur M. Elle est donc bornée par compacité. Ceci signifie qu'il existe $r_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$, $\mathrm{Kill}^{r_0}(\widehat{x}) = \mathrm{Kill}^{r_0+1}(\widehat{x}) = \cdots = \mathrm{Kill}^\infty(\widehat{x})$, et ces espaces sont de dimension constante sur chaque composante connexe de M. Nous pouvons alors reprendre exactement la même démonstration que dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ pour prouver que pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$, tout générateur de Killing $A \in \mathrm{Kill}^{r_0}(\widehat{x})$ s'intègre au voisinage de $\widehat{x}$ en un champ de Killing local. Expliquons ceci.

Comme dans la preuve du cas général, on commence par traiter le cas où $(M, \mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan associée à un parallélisme. Nous avons $r_0 \geqslant 1$ tel qu'en tout $x \in M$, $\mathrm{Kill}^{r_0}(x) = \mathrm{Kill}^{r_0+1}(x)$ et ces deux espaces sont de dimension constante au voisinage de x. On suppose comme à la section 4.2.1 que M est réduite à ce voisinage. On peut appliquer le lemme 4.2.2 avec $s = r_0$. Ce dernier va impliquer de la même façon que

$$\Sigma = \{(x, v) \mid x \in M, v \in \mathrm{Kill}^{r_0}(x)\}$$

est une sous-variété de $TM = M \times \mathbf{R}^n$. De même, le lemme 4.2.2 implique que la distribution Δ définie en (4.2) est tangente à Σ. Le lemme 4.2.5 nous assure alors que restreinte à Σ, la distribution Δ est involutive et on a alors existence pour tout $A \in \mathrm{Kill}^{r_0}(x)$ d'un champ de Killing local en x qui intègre ce générateur de Killing.

À présent, si $(M, \mathcal{C})$ est une géométrie de Cartan autre qu'un parallélisme, on généralise ce qui vient d'être fait en l'appliquant à la structure géométrique $(\widehat{M}, \mathcal{P}_\omega)$ (voir début de la section 4.3), et le théorème 4.4 est établi.

4.4.2 Quelques exemples explicites

Comme annoncé, nous allons donner une famille d'exemples de parallélismes sur $\mathbf{R}^2$, choisis les plus élémentaires possibles de façon à pouvoir calculer l'application courbure et ses dérivées covariantes, mais sans non plus être triviaux afin de pouvoir observer des choses intéressantes.

Fixons $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ne s'annulant pas. Appelons $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $Y = \psi(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$, et soit $\mathcal{P}_\psi$ le parallélisme qu'ils définissent sur $\mathbf{R}^2$. Notons ω la connexion de Cartan sur M définie par ce parallélisme. L'espace d'arrivée $V = \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathbf{R}^2), \mathbf{R}^2)$ de la courbure s'identifie avec $\mathbf{R}^2$ via $K \mapsto K(e_1, e_2)$ et nous considérerons que la courbure est à valeurs dans $\mathbf{R}^2$. On a alors

$$K : x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mapsto K(x)(e_1, e_2) = -\omega_x([X, Y]) = -(0, \psi'(x_1)/\psi(x_1)).$$

Notons que pour tout tenseur $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$ avec $A_i \in \{e_1, e_2\}$, on a $D^r K(x)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r) = (\mathcal{L}_{X_1} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{X_r} K)(x)$, pour $X_i \in \{X, Y\}$. Ainsi, si l'un des A_i vaut e_2, alors $D^r K(x)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r) = 0$. En particulier,

$$\forall x \in \mathbf{R}^2,\ e_2 \in \mathrm{Kill}^\infty(x).$$

En notant $\phi = \psi'/\psi$, $D^r K(x)$ est donc déterminé par $D^r K(x)(e_1 \otimes \cdots \otimes e_1) = -(0, \phi^{(r)}(x_1))$. Nous voyons alors que $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\forall r \geqslant 1$,

$$e_1 \in \mathrm{Kill}^r(x) \iff \phi'(x_1) = \cdots = \phi^{(m)}(x_1) = 0$$
$$e_1 \in \mathrm{Kill}^\infty(x) \iff x_1 \text{ est un zéro d'ordre infini de } \phi.$$

Notons enfin que si l'application ψ est analytique, alors $k(x)$ vaut partout 1 ou partout 2, car si l'application ϕ admet un zéro d'ordre infini, alors elle est constante par analyticité. On retrouve que $\Omega_\infty = M$ dans ce cas particulier.

Nécessité de l'hypothèse de compacité dans le théorème 4.4

Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application analytique telle qu'il existe une suite de points $(t_n) \to +\infty$ et une suite d'entier strictement croissante (k_n) vérifiant

$$\forall n \geqslant 1,\ \phi(t_n) = \cdots = \phi^{(k_n)}(t_n) = 0 \text{ et } \phi^{(k_n+1)}(t_n) \neq 0.$$

Choisissons alors $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution non triviale de l'équation différentielle $\psi' = \phi\psi$. Cette application est également analytique et si on considère le parallélisme $\mathcal{P}_\psi$ tel que défini ci-dessus, on voit que si $x_n = (t_n, 0)$ alors quel que soit $r \geqslant 1$, pour n assez grand $x_n \notin \mathrm{Int}_r(\mathbf{R}^2, \mathcal{P}_\psi)$. En effet, dès que $k_n > r$, on a $e_1 \in \mathrm{Kill}^r(x_n)$ alors que e_1 n'est pas l'évaluation d'un champ de Killing local en x_n (sinon t_n devrait être une racine d'ordre infini de ϕ).

4.5 Extensions aux géométries de Cartan généralisées

Si on s'intéresse aux orbites des automorphismes locaux d'une certaine géométrie de Cartan qui préservent également un tenseur, on ne peut *a priori* pas trouver une autre structure de Cartan qui modélise la structure résultant de l'union de la géométrie de Cartan initiale et du (ou des) tenseurs. Nous avons à l'esprit la démonstration d'un théorème de D'Ambra dont l'énoncé est le suivant.

Théorème. *Soit (M, g) une variété lorentzienne, compacte, simplement connexe et analytique (réelle). Alors, son groupe d'isométries* $\mathrm{Isom}(M, g)$ *est compact.*

D'Ambra a utilisé le résultat de Gromov sur la structure des Is^{loc}-orbites de (M, φ), où φ est la structure résultant de l'union de la métrique g et d'un ensemble bien choisi de champs de vecteurs $(X_1, \ldots, X_s)$. Précisément, le théorème dit que sur un ouvert dense de M, les orbites des difféomorphismes locaux qui préservent la métrique g *et* qui commutent à chaque champ de vecteurs X_i sont des sous-variétés fermées.

Aussi, on peut remarquer que formulé tel quel, le théorème 4.2 a une faiblesse en comparaison au théorème de Gromov puisque les structures géométriques A-rigides incluent des structures similaires à φ, alors que ce n'est *a priori* pas le cas des géométries de Cartan. La motivation de cette section est de combler cette lacune et de donner une formulation du théorème 4.2 dans un cadre géométrique plus large que les structures de Cartan.

4.5.1 Structures de Cartan généralisées

Dans toute géométrie de Cartan, le fibré tangent TM est naturellement isomorphe à $\widehat{M} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, où P agit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ via la représentation $\overline{\mathrm{Ad}}$ (voir relation (2.1), dans la section 2.1.2). Par conséquent, un grand nombre d'objets géométriques sur M peuvent être définis comme étant des applications P-équivariantes de $\widehat{M}$ vers une certaine variété munie d'une action de P. Par exemple, on peut voir les tenseurs de type (r,s) sur M comme des applications P-équivariantes $\widehat{M} \to \mathcal{T}^s_r(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$, où $\mathcal{T}^s_r(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ désigne l'espace des tenseurs de type (r,s) sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, muni de la P-action induite par $\overline{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(P)$. De plus, tout champ de k-plans sur M peut être vu comme une application P-équivariante $\widehat{M} \to Gr_k(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$, où $Gr_k(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ désigne la grassmanienne de dimension k de $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, P y agissant via sa représentation adjointe sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Définition 4.5.1. Soit $\mathbf{X} = G/P$ une géométrie de Klein et W une variété munie d'une action à droite du groupe P. Une *structure de Cartan généralisée* $(M,\mathcal{C},\varphi)$ de type $(\mathbf{X},W)$ sur une variété M est la donnée d'une géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X}$ et d'une application P-équivariante $\varphi : \widehat{M} \to W$.

Les automorphismes locaux d'une telle structure sont les automorphismes locaux $f : U \to V$ de $(M,\mathcal{C})$ dont le relevé $\widehat{f}$ vérifie $\varphi \circ \widehat{f} = \varphi$ sur $\pi^{-1}(U)$. Un champ de Killing local $(M,\mathcal{C},\varphi)$ au voisinage d'un point $x \in M$ est un champ de vecteur X défini sur un voisinage de x dont le flot est formé d'automorphismes locaux de $(M,\mathcal{C},\varphi)$.

Remarque 4.5.2. Dans les exemples donnés ci-dessus, les automorphismes des géométries de Cartan généralisées ne sont rien d'autre que les automorphismes qui préservent la structure de Cartan initiale et le tenseur ou le champ de k-plan correspondants sur M.

Dans ce qui suit, $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$ désigne les automorphismes locaux de la géométrie de Cartan généralisée $(M,\mathcal{C},\varphi)$, et $\mathrm{Kill}^{loc}_\varphi(x)$ l'ensemble des champs de Killing locaux définis près de $x \in M$. Si $X \in \mathrm{Kill}^{loc}_\varphi(x)$ est défini sur $U \subset M$, X admet un relevé $\widehat{X}$ à $\pi^{-1}(U)$ tel que

1. $\widehat{X}$ commute à l'action droite de P ;
2. $\mathcal{L}_{\widehat{X}}\omega = 0$;
3. si $\phi^t_{\widehat{X}}$ désigne son flot local, $\varphi \circ \phi^t_{\widehat{X}} = \varphi$ sur $\pi^{-1}(U)$.

Réciproquement, un champ de vecteurs sur $\pi^{-1}(U)$ satisfaisant ses trois conditions est le relevé d'un champ de Killing local de $(M,\mathcal{C},\varphi)$.

Généralisation des résultats

Le théorème 4.2 s'étend naturellement à ce cadre géométrique, lorsque l'on suppose P et W algébriques et la P-action sur W algébrique.

Théorème 4.5. *Soit $(M,\mathcal{C},\varphi)$ une géométrie de Cartan généralisée de type $(\boldsymbol{X},W)$. Supposons $\boldsymbol{X}$ de type algébrique, P et W algébriques, et l'action de P sur W algébrique. Alors il existe un ouvert dense Ω de M dans lequel $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-orbites sont des sous-variétés fermées.*

Précisément, Ω admet une décomposition $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ où chaque Ω_i est un ouvert préservé par les automorphismes locaux et dans lequel les $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-orbites sont des sous-variétés fermées qui ont toutes même dimension.

La preuve va également s'appuyer sur un résultat d'intégration de champs de Killing locaux. Avant de la commencer, nous aurons besoin de définitions supplémentaires.

Définition 4.5.3. Soit W une variété munie d'une action à droite de P. On lui associe un fibré $B(W)$ au-dessus de W défini par

$$B(W) = \{(w, \alpha),\ w \in W,\ \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, T_w W)\}.$$

Si $\varphi : \widehat{M} \to W$ est une application P-équivariante, on définit une application $\mathcal{T}\varphi : \widehat{M} \to B(W)$ en posant pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$

$$\mathcal{T}\varphi(\widehat{x}) = (\varphi(\widehat{x}), T_{\widehat{x}}\varphi \circ \omega_{\widehat{x}}^{-1}) \in B(W).$$

Cette application $\mathcal{T}\varphi$ est P-équivariante si on munit $B(W)$ de l'action de P donnée par

$$(w, \alpha).p = (w.p, T_w R_p \circ \alpha \circ \mathrm{Ad}(p^{-1})),$$

où R_p désigne l'action de P sur W. On définit alors par induction pour $r \geqslant 0$

$$B^0(W) = W \text{ et } \mathcal{T}^0\varphi = \varphi$$
$$B^{r+1}(W) = B(B^r(W)) \text{ et } \mathcal{T}^{r+1}\varphi = \mathcal{T}(\mathcal{T}^r\varphi).$$

Le groupe P agit à droite sur chaque fibré $B^r(W)$ et l'application $\mathcal{T}^r\varphi : \widehat{M} \to B^r(W)$ est P-équivariante.

Remarque 4.5.4. Dans la situation particulière où W est un espace vectoriel, nous avons, après plusieurs identifications naturelles, $\mathcal{T}^r\varphi = \mathcal{D}^r\varphi$.

Remarque 4.5.5. Notons que $B(W) = (W \times \mathfrak{g})^* \otimes TW$. Puisque le fibré tangent d'une variété quasi-projective lisse est lui-même quasi-projectif, si on suppose W algébrique et l'action de P algébrique, alors pour tout $r \geqslant 1$, $B^r(W)$ est algébrique et P y agit algébriquement.

Remarque 4.5.6. Si f est un automorphisme local de $(M, \mathcal{C}, \varphi)$, on vérifie que pour tout $r \geqslant 1$, $\mathcal{T}^r\Phi \circ \widehat{f} = \mathcal{T}^r\Phi$, où $\Phi = (K, \varphi)$ et $\widehat{f}$ désigne le relevé de f (K est l'application courbure de $(M, \mathcal{C})$).

Définition 4.5.7 (Générateurs de Killing)**.** Soit $(M, \mathcal{C}, \varphi)$ une géométrie de Cartan généralisée de type $(\mathbf{X}, W)$. Notons $K : \widehat{M} \to V = \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ l'application courbure de $(M, \mathcal{C})$ et $\Phi = (K, \varphi) : \widehat{M} \to V \times W$. Pour $r \geqslant 1$ et $\widehat{x} \in \widehat{M}$, on définit l'espace des générateurs de Killing d'ordre r en $\widehat{x} \in \widehat{M}$ comme étant

$$\mathrm{Kill}^r_\varphi(\widehat{x}) = \omega_{\widehat{x}}\left(\mathrm{Ker}\, T_{\widehat{x}}(\mathcal{T}^{r-1}\Phi)\right).$$

Ces espaces vérifient pour tout $p \in P$ la relation $\mathrm{Kill}^r_\varphi(\widehat{x}.p) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\,\mathrm{Kill}^r_\varphi(\widehat{x})$ et on définit pour $x \in M$, $k_r(x) = \dim \mathrm{Kill}^r_\varphi(\widehat{x})$, pour tout $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$.

On a alors $k_{r+1}(x) \leqslant k_r(x)$ pour tout $x \in M$ et $r \geqslant 1$ et l'application $\{x \mapsto k_r(x)\}$ est semi-continue supérieurement et $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-invariante pour tout $r \geqslant 1$. En tout $\widehat{x}$, on a, comme dans le cas des géométries de Cartan "classiques"

$$\mathrm{Kill}^r_\varphi(\widehat{x}) \supset \omega_{\widehat{x}}\left(\{\widehat{X}(\widehat{x}),\ X \in \mathrm{Kill}^{loc}_\varphi(x)\}\right)$$

et on définit $\mathrm{Int}_r(M, \mathcal{C}, \varphi)$ le lieu d'intégrabilité d'ordre r de $(M, \mathcal{C}, \varphi)$ comme étant le projeté du lieu de $\widehat{M}$ où il y a égalité dans l'inclusion ci-dessus. On a alors le théorème d'intégrabilité suivant.

Théorème 4.6. *Si $m = \dim G$, alors $\mathrm{Int}_{m+1}(M, \mathcal{C}, \varphi)$ est un ouvert dense de M.*

Comme nous allons le voir, la preuve réutilise essentiellement les même arguments. On commence par introduire l'ouvert dense $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-invariant

$$\Omega_{m+2} = \{x \in M \mid k_1, \ldots, k_{m+2} \text{ sont localement constantes en } x\}.$$

L'objet de la preuve est à nouveau de prouver que $\Omega_{m+2} \subset \mathrm{Int}_{m+1}(M, \mathcal{C}, \varphi)$.

4.5.2 Éléments de preuves

Preuve du théorème 4.6

On se donne un point $\widehat{x}_0 \in \pi^{-1}(\Omega_{m+2})$. Il suffit de trouver un champ $\widehat{A}$ défini sur un voisinage convexe de $\widehat{x}_0$ qui est un champ de Killing local de $(\widehat{M}, \mathcal{P}_\omega)$ et dont le flot local préserve φ. Nous traitons donc le cas où $(M, \mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan associée à un parallélisme $(M, \mathcal{P})$.

Dans cette situation, φ est une application lisse $M \to W$. Prenons $x_0 \in \Omega_{n+2}$ et $A \in \mathrm{Kill}^{n+1}_\varphi(x_0)$. Comme dans la section 4.2.1, nous pouvons supposer que $M = U$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ sur lequel les fonctions $k_1, \dots, k_{n+2}$ sont constantes. On peut alors travailler dans la trivialisation de TM donnée par $\mathcal{P}$ et si f est un difféomorphisme local de M, nous notons $f_* : M \times \mathbf{R}^n \to M \times \mathbf{R}^n$ son action différentielle lue dans la trivialisation donnée par la connexion de Cartan. Il existe $1 \leqslant s \leqslant n+1$ tel que $k_s = k_{s+1}$ sur M.

Lemme 4.5.1. *Soit $x_0 \in M$. Supposons que pour $s \geqslant 1$, les applications k_s et k_{s+1} sont localement constantes et égales dans un voisinage de x_0. Alors, pour $X \in \mathfrak{g}$ suffisamment petit et $t \in [-1, 1]$, nous avons*

$$\left(\phi^t_{\widetilde{X}}\right)_* \mathrm{Kill}^s_\varphi(x_0) = \mathrm{Kill}^s_\varphi(\phi^t_{\widetilde{X}}(x_0)).$$

Démonstration. Soient (U, ψ_0) une carte locale de W au voisinage de $w_0 = \phi(x_0)$. Soit $\mathcal{U} = \psi_0(U) \subset \mathbf{R}^{\dim W} =: E_0$. Nous allons commencer par voir que la carte ψ_0 nous fournit à tout rang $r \geqslant 1$ une trivialisation locale $\psi_r : B^r(W)|_U \to \mathcal{U} \times E_r$ où E_r est un espace vectoriel. Commençons par trivialiser $B^1(W)|_U$.

Définissons $\psi_1(w, \alpha) = (\psi_0(w), T_w\psi_0 \circ \alpha)$ pour $w \in U$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}(V, T_wW)$. Alors, si l'on convient que $E_1 = \mathrm{Hom}(V, E_0)$, nous avons une alors une trivialisation $\psi_1 : \pi_1^{-1}(U) \to \mathcal{U} \times E_1$.

Supposons que l'on ait construit $\psi_r : (\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_r)^{-1}(U) \to \mathcal{U} \times E_r$. Soit alors $(b, \beta) \in (\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_{r+1})^{-1}(U)$, avec $b \in (\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_r)^{-1}(U)$ et $\beta \in \mathrm{Hom}(V, T_b(B^r(W)))$. Définissons alors $\psi_{r+1}(b, \beta) = (\psi_r(b), T_b\psi_r \circ \beta) \in \mathcal{U} \times (E_r \oplus \mathrm{Hom}(V, E_r))$. Posons alors $E_{r+1} = E_r \oplus \mathrm{Hom}(V, E_r)$ et nous venons de construire une trivialisation locale $\psi_{r+1} : B^{r+1}(W)|_U \to \mathcal{U} \times E_{r+1}$.

Posons $\overline{\phi} = \psi_0 \circ \phi$ définie sur un voisinage de x_0 et à valeurs dans E_0. Rappelons que pour une application à valeurs dans un espace vectoriel $F : M \to E$, la dérivée covariante $\mathcal{D}F : M \to E \oplus \mathrm{Hom}(V, E)$ est définie par $\mathcal{D}F(x) = (F(x), T_xF \circ \omega_x^{-1})$. En fait, on a une identification naturelle $B_V(E) \simeq E \oplus \mathrm{Hom}(V, E)$, et sous cette identification, $\mathcal{T}F = \mathcal{D}F$. Nous allons alors prouver que

$$\forall r \geqslant 1, \ \psi_r \circ \mathcal{T}^r\phi = \mathcal{D}^r\overline{\phi}. \tag{4.4}$$

On commence par $r = 1$. On a $\psi_1(\mathcal{T}\phi(x)) = (\psi_0(\phi(x)), T_{\phi(x)}\psi_0 \circ T_x\phi \circ \omega_x^{-1}) = (\overline{\phi}(x), T_x\overline{\phi} \circ \omega_x^{-1}) = \mathcal{D}\overline{\phi}(x)$. Si l'on suppose que l'identité est vraie pour $r \geqslant 1$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\psi_{r+1} \circ \mathcal{T}^{r+1}\phi(x) &= (\psi_r(\mathcal{T}^r\phi(x)), T_{\mathcal{T}^r\phi(x)}\psi_r \circ T_x(\mathcal{T}^r\phi) \circ \omega_x^{-1}) \\
&= (\mathcal{D}^r\overline{\phi}(x), T_x\mathcal{D}^r\overline{\phi} \circ \omega_x^{-1}) \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{D}^r\overline{\phi})(x) = \mathcal{D}^{r+1}\overline{\phi}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, si nous notons $\mathrm{Kill}^r_{\overline{\phi}}(x)$ les générateurs de Killing de l'application $\overline{\phi}$, nous avons $\mathrm{Kill}^r_\phi(x) = \mathrm{Kill}^r_{\overline{\phi}}(x)$ sur un voisinage de x_0. Il suffit donc d'établir le lemme lorsque la variété W est un espace vectoriel, ce qui a déjà été fait. □

Définissons

$$\Sigma_\varphi = \{(x,u) \in M \times \mathbf{R}^n \mid u \in \mathrm{Kill}^s_\varphi(x)\}$$

et soit Δ la distribution dans $M \times \mathbf{R}^n$ définie au lemme 4.2.1 :

$$\Delta_{(x,u)} = \mathrm{Vect}(X_i - \sum_{jk} u_j \gamma^k_{ij}\, \partial_k\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Le lemme 4.5.1 nous assure que Σ_φ est une sous-variété de $M \times \mathbf{R}^n$ et que Δ est partout tangente à Σ_φ (la preuve est exactement la même que celle des lemmes 4.2.3 and 4.2.4). Les mêmes calculs que ceux de la preuve du lemme 4.2.5 donnent $\Delta|_{T\Sigma_\varphi}$ involutive puisque pour tout $(x,u) \in \Sigma_\varphi$, $u \in \mathrm{Kill}^1(x)$ est un générateur de Killing d'ordre 1 de $(M,\mathcal{P})$.

La distribution Δ s'intègre alors en un feuilletage de Σ_φ. Soit $\mathcal{F}_0$ la feuille contenant (x_0,A). Notons $p : \Sigma \to M$ la projection sur le premier facteur. L'application $p|_{\mathcal{F}_0}$ est un difféomorphisme local de $\mathcal{F}_0$ vers M par inversion locale. Dans un voisinage assez petit de x_0, posons $\widehat{A}(x) = p|^{-1}_{\mathcal{F}_0}(x)$. Alors, $\widehat{A}$ vérifie :

1. le graphe de $\widehat{A}$ intègre la distribution Δ, *ie* $\widehat{A}$ est un champ de Killing local de $(M,\mathcal{P})$, d'après le lemme 4.2.1.
2. pour tout x où $\widehat{A}$ est défini, $T_x\varphi(\widehat{A}(x)) = 0$, puisque $(x,\widehat{A}(x)) \in \Sigma_\varphi \Rightarrow \widehat{A}(x) \in \mathrm{Kill}^1_\varphi(x)$.

Le second point implique que $\varphi(\phi^t_{\widehat{A}}(x))$ ne dépend pas de t et $\varphi \circ \phi^t_{\widehat{A}} = \varphi$ pour de petits t et dans un voisinage de x_0. Ainsi, $\widehat{A} \in \mathrm{Kill}^{loc}_\varphi(x_0)$ et le théorème 4.6 est prouvé.

Preuve du théorème 4.5

Soient $\Phi = (K,\varphi)$ et $\Psi = \mathcal{T}^m\Phi : \widehat{M} \to B^m(V \times W)$, où $V = \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}),\mathfrak{g})$ désigne l'espace d'arrivée de l'application courbure K. Par hypothèse, P agit algébriquement sur $V \times W$, donc aussi sur $B^m(V \times W)$. Cette application Ψ est de rang localement constant sur $\pi^{-1}(\Omega_{m+2})$ puisque $\mathrm{Kill}^{m+1}_\varphi(\widehat{x}) = \omega_{\widehat{x}}(\mathrm{Ker}\, T_{\widehat{x}}(\mathcal{T}^m\Phi))$ et k_{m+1} est localement constante sur Ω_{m+2}. Définissons $d : M \to \mathbf{N}$ par $d(x) = \dim P.\Psi(\widehat{x})$ pour tout $\widehat{x}$ au-dessus de x. L'application d est semi-continue supérieurement et $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-invariante. Par conséquent, il existe un ouvert $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-invariant $\Omega \subset \Omega_{m+2}$ sur lequel d et k_{m+1} sont localement constantes. Cet ensemble admet une décomposition minimale $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ telle que chaque Ω_i est un ouvert $\mathrm{Aut}^{loc}_\varphi$-invariant sur lequel k_{m+1} et d sont constantes égales à k^i_{m+1} et d_i respectivement. Ainsi, pour $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}_i$, si $w = \Psi(\widehat{x})$, $\Psi^{-1}(P.w)$ est une sous-variété fermée de $\widehat{\Omega}_i$ (d'après la proposition 4.3.1), saturée par l'action de P. La projection $\pi(\Psi^{-1}(P.w))$ est alors une sous-variété fermée de Ω_i. Par construction, nous avons

$$\forall \widehat{x} \in \Psi^{-1}(P.w),\ T_{\widehat{x}}(\Psi^{-1}(P.w)) = \{\widehat{X}(\widehat{x}),\ X \in \mathrm{Kill}^{loc}_\varphi(x)\}.$$

Nous pouvons alors appliquer le même raisonnement qu'à la section 4.3.2 et conclure que les Aut^{loc}-orbites dans Ω_i sont des unions de composantes connexes de $\pi(\Phi^{-1}(P.w))$, et sont ainsi des sous-variétés fermées qui ont toutes même dimension.

4.6 Une autre approche du théorème de Singer

Nous terminons ce chapitre en expliquant comment l'on peut déduire la généralisation du théorème de Singer présentée au chapitre précédent du théorème 4.1, si on a supposé

que la variété est infinitésimalement homogène à un degré plus élevé que dans le théorème 3.1.

Soit $(M,\mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X} = G/P$, et $m = \dim G$. Supposons M connexe et $(M,\mathcal{C})$ $(m+1)$-infinitésimalement homogène, c'est à dire $\mathcal{D}^{m+1}K : \widehat{M} \to \mathcal{W}^{m+1}$ est à valeurs dans une seule P-orbite. Alors, pour tout $r \leqslant m$, $\mathcal{D}^r K$ est également à valeurs dans une seule P-orbite dans $\mathcal{W}^r$. Par conséquent, toutes les applications $K, \mathcal{D}^1K, \ldots, \mathcal{D}^{m+1}K$ sont de rang constant sur $\widehat{M}$. La preuve du théorème 4.1 montre que ceci implique $M = M^{int}_{m+1}$. Puisque $\mathcal{D}^{m+1}K$ est P-équivariante, pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$, $\mathrm{Ker}(T_{\widehat{x}}\mathcal{D}^{m+1}K) + T_{\widehat{x}}(\widehat{x}.P) = T_{\widehat{x}}\widehat{M}$, ce qui implique $\pi_* \mathrm{Ker}(T_{\widehat{x}}\mathcal{D}^{m+1}K) = T_xM$. Ainsi, le théorème 3.1 nous donne $T_xM = \{X(x),\ X \in \mathrm{Kill}^{loc}(x)\}$ et $(M,\mathcal{C})$ est localement homogène.

Troisième partie

Actions conformes de groupes de Lie sur des variétés compactes

Chapitre 5

Autour d'un théorème de plongement

Ce chapitre présente quelques résultats généraux et techniques autour de l'étude des actions de groupes de Lie qui préservent une géométrie de Cartan. Le théorème central qui est décrit ici est une formulation dans le cadre des géométries de Cartan, due à U. Bader, C. Frances et K. Melnick d'un théorème de plongement, initialement donné par R.J. Zimmer ([Zim86], Theorem A) dans le cas d'actions de groupes de Lie simples non compacts qui préservent des G-structures de volume fini. L'énoncé général de ce théorème est un peu abrupt et nous expliquons comment le mettre en oeuvre dans le cadre d'actions conformes de groupes de Lie sur des variétés pseudo-riemanniennes.

5.1 Historique

5.1.1 Applications de Gauss

La notion d'application de Gauss telle qu'on la trouve formulée dans [DG91] se définit comme suit. Si H est un groupe de Lie qui agit différentiablement sur une variété M, on dispose d'une application

$$\begin{aligned} \sigma : M &\to \mathrm{Gr}(\mathfrak{h}) \\ x &\mapsto \mathfrak{h}_x \end{aligned}$$

où $\mathfrak{h}_x$ désigne l'algèbre de Lie du stabilisateur de x dans H. Lorsque l'on fait agir H par action adjointe sur les espaces de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$, cette application devient H-équivariante.

Prenons un autre exemple. Supposons que l'action de H préserve une métrique pseudo-riemannienne g sur M. En tout point $x \in M$, la restriction de g_x à l'espace tangent à l'orbite $T_x(H.x) \simeq \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$ se rapatrie sur $\mathfrak{h}$ en une forme quadratique q_x (en décrétant que $\mathfrak{h}_x \subset \mathrm{Ker}\, q_x$) et l'application

$$\begin{aligned} \sigma' : M &\to S^2(\mathfrak{h}^*) \\ x &\mapsto q_x \end{aligned}$$

ainsi définie est H-équivariante pour l'action de H sur les formes quadratiques sur $\mathfrak{h}$ définie par $h.q(X) = q(\mathrm{Ad}(h^{-1})X)$.

En prélude à la définition de *point de Zimmer* que nous allons donner plus loin, observons sur ces deux exemples ce que l'on peut dire de point $x \in M$ s'envoyant par σ ou σ' sur un point fixé par l'action de H sur la variété à l'arrivée.

Dans le premier cas, si x est un tel point, cela signifie que l'algèbre de Lie de son stabilisateur est un idéal de $\mathfrak{h}$. Ainsi, si on est par exemple dans le cas où H est un groupe de Lie simple et connexe, l'orbite d'un point $x \in M$ tel que $H.\sigma(x) = \{\sigma(x)\}$ est soit réduite à $\{x\}$, soit de dimension maximale $\dim \mathfrak{h}$.

Dans le deuxième cas, si $x \in M$ est tel que $H.\sigma'(x) = \{\sigma'(x)\}$, cela signifie que la forme quadratique q_x sur $\mathfrak{h}$ est laissée invariante par toute l'action adjointe de H. Comme nous aurons l'occasion de le voir à plusieurs reprises dans les chapitres qui vont suivre, une telle propriété est très restrictive. Parfois on peut même entièrement déterminer une telle forme quadratique et on connaît alors la signature de l'orbite d'un tel point.

5.1.2 Dynamique algébrique mesurée

Formalisons ce que nous venons d'observer. On a l'action d'un groupe de Lie H sur une variété M qui se fait en préservant une certaine structure géométrique, on lui a associé une application H-équivariante

$$\sigma : M \to V$$

où V est une variété munie d'une action du groupe H et on s'est rendu compte qu'il y a des choses intéressantes à dire sur les points de M qui s'envoient par σ dans le lieu $\{v \in V \mid H.v = \{v\}\}$ des points de V fixés par l'action de H. On aimerait donc comprendre le lieu $\sigma(M) \cap \{v \in V \mid H.v = \{v\}\}$. Est-il non vide ? Peut on localiser ses points ?

Dans les deux cas que nous avons décrits la variété V a une structure de variété algébrique réelle, et si par exemple on suppose le groupe H algébrique, l'action de H sur V est algébrique. Par H-équivariance, on a alors une action algébrique de H sur l'adhérence de Zariski de $\sigma(M)$ dans V. L'idée centrale est que des propriétés dynamiques de H sur M vont se retrouver dans l'action de H sur V, et que la rigidité des actions algébriques va assurer l'existence de points fixes. C'est ce que donne résultat suivant remonte à A. Borel et H. Fürstenberg, et que l'on peut trouver dans [Zim84a], Theorem 3.2.5.

Théorème 5.1 (Théorème de densité de Borel)**.** *Soit H un groupe algébrique agissant algébriquement sur une variété algébrique V. Supposons que l'action de H préserve une mesure finie μ sur V. Alors, le sous-groupe H_0 de H formé par les éléments qui agissent trivialement sur le support* $\mathrm{Supp}(\mu)$ *de la mesure est un sous-groupe normal, algébrique et cocompact de H.*

De façon informelle, ce théorème nous dit que si une action algébrique préserve une mesure finie, alors elle est quasiment triviale sur le support de la mesure. Prenons un cas élémentaire : supposons H algébrique, simple et non compact. Si on construit une action algébrique de H sur une variété algébrique, de sorte que H agit en préservant une mesure finie μ, alors on est assuré que H agit trivialement sur le support de μ puisque par simplicité le sous-groupe algébrique H_0 ne peut qu'être $\{e\}$ ou H et $\{e\}$ n'est pas cocompact puisque H est non compact.

Reprenons notre situation où H est un groupe de Lie agissant sur M et $\sigma : M \to V$ est une application H-équivariante. Si H préserve une mesure finie μ sur M, alors à l'arrivée H préserve $\sigma_*\mu$ sur V. Si par exemple H est simple, algébrique et non compact, alors tout point dans $\mathrm{Supp}(\mu) \subset M$ s'envoie par σ dans $\{v \in V \mid H.v = \{v\}\}$.

5.1.3 Le théorème de plongement de Zimmer et ses conséquences en géométrie lorentzienne

C'est à partir de méthodes proches de ce qu'on vient de décrire que Zimmer a démontré un important théorème de plongement, dont nous rappelons l'énoncé.

Théorème 5.2 ([Zim86], Theorem A)**.** *Soient M une variété compacte et $P \to M$ une G-structure (d'ordre arbitraire), où G est un groupe algébrique réel. Supposons que cette G-structure définit naturellement une densité sur M. Soit H un groupe de Lie simple non compact agissant non trivialement sur M par automorphismes de cette G-structure. Alors, il existe un plongement d'algèbres de Lie $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$.*

En fait, on peut choisir le plongement ι de sorte qu'on ait une représentation $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^N)$ et un sous-espace $V \subset \mathbf{R}^N$ tels que $\iota(\mathfrak{h})$ préserve V et $\iota(\mathfrak{h})$ restreinte à V soit conjuguée à $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$.

Une très belle illustration de ce résultat est le corollaire suivant donné par Zimmer.

Corollaire 5.1.1 ([Zim86], Theorem B, 1))**.** *Un groupe de Lie simple non compact qui admet une action non triviale par isométries sur une variété lorentzienne compacte est soit compact, soit localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.*

Ces travaux de Zimmer furent le point de départ d'importantes avancées dans la compréhension du groupe des isométries d'une variété lorentzienne compacte, qui aboutirent en 1995 à la classification à isomorphisme local près des groupes d'isométries possibles pour une variété lorentzienne compacte.

Théorème 5.3 ([AS97], [Zeg98a])**.** *Soient (M^n, g) une variété lorentzienne compacte, avec $n \geqslant 2$, et $G = \mathrm{Isom}(M, g)_0$ la composante neutre de son groupe d'isométries. Le revêtement universel de ce groupe se décompose en $\widetilde{G} = S \times K \times \mathbf{R}^k$, où K est un groupe de Lie semi-simple compact, et S est dans la liste suivante :*

- *$\{id\}$;*
- *le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})}$;*
- *un groupe de Heisenberg $\mathrm{Heis}(2d+1)$, $d \geqslant 1$;*
- *une famille dénombrable de produits semi-directs résolubles (non nilpotents) de la forme $\mathbf{R} \ltimes \mathrm{Heis}(2d+1)$, $d \geqslant 1$.*

Réciproquement, pour chaque groupe de Lie $\widetilde{G}$ de cette forme, il existe une variété lorentzienne compacte (M, g) telle que $\mathrm{Isom}(M, g)_0$ est revêtu par $\widetilde{G}$.

5.2 Théorème de plongement pour les géométries de Cartan

Dans un travail récent ([BFM09]), Bader, Frances et Melnick ont proposé une version du théorème de plongement de Zimmer adaptée au cadre des géométries de Cartan. Dans cette section, nous décrivons le cadre précis de cet énoncé et nous expliquons les grandes lignes de sa démonstration.

5.2.1 Applications de Gauss dans les géométries de Cartan

On part du cadre général d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$, modelée sur $\mathbf{X} = G/P$, dont on note $\pi : \widehat{M} \to M$ le fibré et ω la connexion de Cartan. On considère un groupe de Lie H qui agit sur M par automorphismes de la géométrie de Cartan. L'action de H sur

M se relève en une action de H sur l'espace total $\widehat{M}$ qui préserve le parallélisme $\mathcal{P}_\omega$ défini par la connexion de Cartan.

Cette action de H sur $\widehat{M}$ (la donnée d'une action infinitésimale de H suffirait) définit pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$ une application linéaire injective $\iota_{\widehat{x}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ qui est donnée par

$$\forall X \in \mathfrak{h},\ \iota_{\widehat{x}}(X) = \omega_{\widehat{x}}(X_{\widehat{x}}) \tag{5.1}$$

où $X_{\widehat{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX}\widehat{x}$ désigne le champ de vecteurs associé à l'action de e^{tX} sur $\widehat{M}$. Rappelons que le groupe des automorphismes d'une géométrie de Cartan agit librement (et proprement) sur $\widehat{M}$, c'est pour cela que $\iota_{\widehat{x}}$ est injective. Dans le cas général, cette application ne respecte pas les crochets de Lie et c'est la courbure qui en est la cause comme le montre le lemme suivant.

Lemme 5.2.1 ([BFM09], Lemma 2.1)**.** *Pour tous $\widehat{x} \in \widehat{M}$ et $X, Y \in \mathfrak{h}$, on a en notant Ω la forme courbure*

$$\iota_{\widehat{x}}([X,Y]) - [\iota_{\widehat{x}}(X), \iota_{\widehat{x}}(Y)] = \Omega_{\widehat{x}}(X_{\widehat{x}}, Y_{\widehat{x}}).$$

Démonstration. Pour éviter les confusions, nous distinguons exceptionnellement $X \in \mathfrak{h}$ du champ $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\widehat{M})$ qui lui est associé . Par définition, nous avons

$$\mathrm{d}\omega(\overline{X}, \overline{Y}) + [\omega(\overline{X}), \omega(\overline{Y})] = \Omega(\overline{X}, \overline{Y}).$$

D'autre part, comme pour tous champs de vecteurs, nous avons

$$\mathrm{d}\omega(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{X}.\omega(\overline{Y}) - \overline{Y}.\omega(\overline{X}) - \omega([\overline{X}, \overline{Y}]).$$

Puisque $\phi_X^t \in \mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$, on a $\omega([\overline{X}, \overline{Y}]) = \overline{X}.\omega(\overline{Y})$. Or l'action de H étant à gauche, $[\overline{X}, \overline{Y}] = -\overline{[X,Y]}$. Tout cela nous donne

$$\begin{aligned}
\Omega_{\widehat{x}}(\overline{X}, \overline{Y}) &= [\omega(\overline{X}), \omega(\overline{Y})] - \overline{Y}.\omega(\overline{X}) \\
&= [\iota_{\widehat{x}}(X), \iota_{\widehat{x}}(Y)] - \omega_{\widehat{x}}([\overline{Y}, \overline{X}]) \\
&= [\iota_{\widehat{x}}(X), \iota_{\widehat{x}}(Y)] - \iota_{\widehat{x}}([X,Y]).
\end{aligned}$$

□

On vérifie sans difficulté que lorsque l'on change de point dans une même fibre, on a la relation d'équivariance

$$\forall p \in P,\ \iota_{\widehat{x}.p} = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(p^{-1}) \circ \iota_{\widehat{x}}.$$

On vérifie de même que

$$\forall h \in H,\ \iota_{h.\widehat{x}} = \iota_{\widehat{x}} \circ \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(h^{-1}).$$

Définissons alors l'application

$$\iota : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$$

en prenant $\iota(\widehat{x}) = \iota_{\widehat{x}}$. On fait agir le groupe $H \times P$ par la gauche sur $\widehat{M}$ par $(h,p).\widehat{x} = h.\widehat{x}.p^{-1}$ et sur $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ par $(h,p).\alpha = \mathrm{Ad}(p) \circ \alpha \circ \mathrm{Ad}(h^{-1})$ (notons que $h.\widehat{x}.p^{-1}$ a un sens car l'action de H commute avec celle de P). L'application ι est alors $H \times P$ équivariantes pour ces actions.

Définition 5.2.1. D'une façon générale, si (V, ρ) une représentation linéaire gauche de $\mathrm{Ad}(H) \times \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)$ sur un espace vectoriel V de dimension finie, nous appelons *application de Gauss* de la géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ une application $H \times P$-équivariante $\phi : \widehat{M} \to V$.

Si on note $E = P\backslash V$ l'espace des orbites de P sur V, alors ϕ descend en une application H-équivariante

$$\psi : M \to E.$$

Définition 5.2.2. Soit S un sous-groupe fermé de H, (V, ρ) une représentation de $\mathrm{Ad}(H)\times \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)$ et $\phi : \widehat{M} \to V$ une application de Gauss. On appelle *point de Zimmer* pour (ϕ, S) tout point $x \in M$ tel que $\psi(x)$ est fixé par S dans E.

Notons que x est un point de Zimmer si pour tout $\widehat{x}$ dans la fibre au-dessus de x, on a $S.\phi(\widehat{x}) \subset P.\phi(\widehat{x})$.

5.2.2 Étude des points de Zimmer sur quelques exemples

Revenons dans la situation où $\phi = \iota$ et $V = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Soient x un point de Zimmer pour un certain sous-groupe S et $\widehat{x}$ dans la fibre au-dessus de x. Ceci signifie que pour tout $h \in H$, il existe un $p \in P$ tel que $h.\iota(\widehat{x}) = p.\iota(\widehat{x})$. Notons $\mathfrak{h}^{\widehat{x}} = \iota_{\widehat{x}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$. Nous avons alors $\mathrm{Ad}(p)\mathfrak{h}^{\widehat{x}} \subset \mathfrak{h}^{\widehat{x}}$, et plus précisément

$$\forall X \in \mathfrak{h},\ \mathrm{Ad}(p)\iota_{\widehat{x}}(X) = \iota_{\widehat{x}}(\mathrm{Ad}(s)X),$$

et $\iota_{\widehat{x}}$ conjugue ainsi l'action de $\mathrm{Ad}(p)$ sur $\mathfrak{h}^{\widehat{x}}$ à celle de $\mathrm{Ad}(s)$ sur $\mathfrak{h}$. Si on considère alors $P^{\widehat{x}}$ l'ensemble des $p \in P$ tels que $\mathrm{Ad}(p)\mathfrak{h}^{\widehat{x}} \subset \mathfrak{h}^{\widehat{x}}$ et tels que $\mathrm{Ad}(p)$ induise sur $\mathfrak{h}^{\widehat{x}}$ l'action adjointe $\mathrm{Ad}(s)$ d'un élément $s \in S$ sur $\mathfrak{h}$, nous avons finalement :

Proposition 5.2.2. *Pour tout point de Zimmer x associé à ι et S, si $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on a existence d'un sous-groupe algébrique $P^{\widehat{x}} \subset P$ et d'un morphisme algébrique surjectif $\rho_{\widehat{x}} : \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P^{\widehat{x}}) \to \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$ tels que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P^{\widehat{x}})\mathfrak{h}^{\widehat{x}} \subset \mathfrak{h}^{\widehat{x}}$ et, en identifiant $\mathfrak{h}^{\widehat{x}}$ et $\mathfrak{h}$, pour tout $p \in P^{\widehat{x}}$, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(p)$ s'écrit dans une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus S$*

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(s) & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{Ad}(s) = \rho_{\widehat{x}}(\mathrm{Ad}(p)) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$.

On condense cela en disant que l'action adjointe de $P^{\widehat{x}}$ sur $\mathfrak{g}$ s'envoie surjectivement sur l'action adjointe de S sur $\mathfrak{h}$. De façon informelle, en un point de Zimmer, on arrive à trouver des propriétés algébriques du groupe qui agit au sein de propriétés algébriques de la structure géométrique considérée. Nous verrons dans ce qui suit que, si S est bien choisi, la donnée d'un point de Zimmer pour (ι, S) est une information extrêmement riche.

À présent, ne considérons plus seulement l'application ι, et prenons pour $r \geqslant 1$

$$\phi = (\iota, \mathcal{D}^r K) : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \oplus \mathcal{W}^r.$$

On choisit comme représentation de $\mathrm{Ad}(H) \times \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)$ sur $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \oplus \mathcal{W}^r$ la même représentation que ci-dessus sur $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, et sur $\mathcal{W}^r$, on prend $(\mathrm{Ad}(h), \mathrm{Ad}(p)).w = w.\,\mathrm{Ad}(p)^{-1}$ où l'action de $\mathrm{Ad}(p)$ sur $w \in \mathcal{W}^r$ est celle donnée à la section 2.1.5. Puisque H agit par automorphismes de $(M, \mathcal{C})$, $\forall h \in H$, si $\widehat{h}$ désigne le relevé à $\widehat{M}$ de l'action de h sur M, nous savons que $\mathcal{D}^r K = \mathcal{D}^r K \circ \widehat{h}$. Ceci assure que ϕ ainsi défini est une application de Gauss (pour la représentation que nous venons de décrire). Notons ρ cette représentation. Pour tout sous-groupe $S \subset H$, nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 5.2.3. *Pour tout point de Zimmer x associé à (ϕ, ρ), si $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on a existence d'un sous-groupe algébrique $P^{\widehat{x}} \subset P$ tel que :*

1. *on a un morphisme algébrique surjectif $\rho_{\widehat{x}} : \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P^{\widehat{x}}) \to \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$ ayant les mêmes propriétés que dans la proposition 5.2.2 ;*
2. *pour tout $p \in P^{\widehat{x}}$, on a $\mathcal{D}^r K(\widehat{x}).\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(p) = \mathcal{D}^r K(\widehat{x})$. En particulier,*

$$\mathfrak{p}^{\widehat{x}} \subset \mathrm{Kill}^r(\widehat{x}).$$

Ainsi, si le point de Zimmer x se trouve de plus dans un domaine d'intégrabilité $\mathrm{Int}_r(M, \mathcal{C})$ bien choisi (voir la section 4.1), tout $A \in \mathfrak{p}^{\widehat{x}}$ est en fait l'évaluation en $\widehat{x}$ du relevé à $\widehat{M}$ d'un champ de Killing local défini au voisinage de x. En particulier, si $(M, \mathcal{C})$ est analytique est compacte, et si r_0 est l'entier fourni par le théorème 4.4, alors $\phi = (\iota, \mathcal{D}^{r_0} K)$ est une application de Gauss dont tous les points de Zimmer font apparaître des champs de Killing locaux.

5.2.3 Énoncé du théorème de Bader-Frances-Melnick et esquisse de la preuve

L'énoncé que nous donnons est une adaptation quasi-immédiate du Théorème 1.2 de [BFM09]. Son intérêt est de faire apparaître des points de Zimmer pour une certaine catégorie de groupes.

Définition 5.2.3. Soit $S \subset H$ un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie. On dit que S a la propriété (*) si l'adhérence de Zariski $\overline{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)}^{Z} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ ne contient aucun sous-groupe propre qui soit algébrique, distingué et cocompact.

Théorème 5.4 ([BFM09])**.** *Soit H un groupe de Lie agissant par automorphismes d'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$, modelée sur $\boldsymbol{X} = G/P$. Soit $S \subset H$ un sous-groupe qui a la propriété (*) et qui agit en préservant une mesure finie μ sur M.*

Alors, pour toute représentation (V, ρ) de $\mathrm{Ad}(H) \times \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)$ et toute application de Gauss $\phi : \widehat{M} \to V$, l'ensemble des points de Zimmer pour (ϕ, S) est de mesure pleine pour μ.

Comparaison avec le théorème de Zimmer. Contrairement au théorème A de [Zim86], ce théorème s'énonce pour des actions de groupes de Lie qui n'ont pas nécessairement à être simple. Si S est par exemple n'importe quel sous-groupe résoluble de H qui vérifie la propriété (*) (un groupe à un paramètre par exemple), et si la variété M est compacte, alors S va automatiquement laisser invariantes des mesures finies sur M car tout groupe résoluble est moyennable. En revanche, ce théorème s'énonçant dans le cadre des géométries de Cartan, il n'est valable que pour des structures géométriques rigides alors que le théorème de Zimmer est quant à lui vrai pour toute G-structure, pas nécessairement de type fini, munie d'un volume fini préservé par les automorphismes.

Grandes lignes de la démonstration. Notons $\psi : M \to W = V/P$ l'application H-équivariante induite par ϕ et $W_0 = \{w \in W \mid S.w = w\}$. Le théorème affirme que $(\psi_* \mu)(W_0) = 1$. Notons $S' = \overline{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$. Soit ν une mesure finie S-invariante et ergodique sur W.

Premièrement, on peut supposer que l'espace quotient W admet une structure de variété algébrique sur laquelle S' agit algébriquement (par un argument de stratification de l'action algébrique de $\mathrm{Ad}(P)$ sur V et en appliquant ce qui va suivre dans chaque strate de mesure non nulle).

Étant donnée une mesure μ sur une variété algébrique sur laquelle agit un groupe algébrique, le stabilisateur de la mesure est toujours algébrique ([Zim84a], Theorem 3.2.4). Par conséquent, ν doit être S'-invariante.

Il existe alors une S'-orbite $S'.w \subset W$ qui est de mesure pleine pour ν car la projection $W \to W/S'$ qui est S'-invariante doit être ν-essentiellement constante par ergodicité. Nous récupérons ainsi une mesure S'-invariante ν' sur l'espace homogène S'/S'_w où S'_w désigne le stabilisateur de w. Par un théorème de Chevalley, S'_w étant un sous-groupe algébrique, on peut identifier S'/S'_w à une variété quasi-projective, sur laquelle S' agit algébriquement en préservant une mesure finie.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de densité de Borel (théorème 5.1 cité plus haut). L'hypothèse (*) nous dit que $S'_w = S'$ et que la mesure ν est en fait un Dirac sur un point de W fixé par S. En particulier, nous avons $\nu(W_0) = 1$ et ceci est valable pour toute mesure S-invariante et ergodique ν sur W. Puisque $\psi_*\mu$ est un barycentre de mesures ergodiques S-invariantes, on a nécessairement $(\psi_*\mu)(W_0) = 1$.

5.2.4 Liens avec le théorème initial

On explique ici comment retrouver à partir du résultat de Bader, Frances et Melnick le théorème de plongement 5.2 tel que formulé par Zimmer dans le cas où la G-structure est celle associée à une métrique pseudo-riemannienne. On se donne H un groupe de Lie simple et non compact, qui agit par isométries d'une variété pseudo-riemannienne compacte (M, g) de signature (p, q). Notons $G = O(p, q) \ltimes \mathbf{R}^n$, $P = O(p, q)$ et $\pi : \widehat{M} \to M$ et $\omega \in \Omega^1(\mathcal{P}, \mathfrak{o}(p, q) \ltimes \mathbf{R}^n)$ le fibré de Cartan et la connexion de Cartan sans torsion définis par la métrique (voir section 2.2.2).

Premièrement, les isométries d'une variété pseudo-riemannienne compacte agissent toujours en préservant une mesure finie. Appelons-la μ. On sait ([Mor05], Theorem 4.6.3) que tout groupe simple et linéaire est d'indice fini dans son adhérence de Zariski. En particulier, $\overline{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(H)}^{Zar}$ n'admet aucun sous-groupe normal et cocompact. Par conséquent, le théorème 5.4 nous assure que μ-presque tout point de M est un point de Zimmer.

Si x est un tel point et $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, nous avons un sous-groupe algébrique $P^{\widehat{x}} \subset P$ et un morphisme surjectif $\rho_{\widehat{x}} : P^{\widehat{x}} \to \mathrm{Ad}(H)$. En le dérivant en id, ce morphisme nous fournit un morphisme surjectif $\alpha : \mathfrak{p}^{\widehat{x}} \to \mathrm{ad}(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{h}$. La décomposition de Lévi nous permet de décomposer $\mathfrak{p}^{\widehat{x}} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, où $\mathfrak{s}$ est une algèbre semi-simple et $\mathfrak{r}$ est le radical résoluble de $\mathfrak{p}^{\widehat{x}}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est simple, l'idéal $\alpha(\mathfrak{r})$ est nul, et α se restreint en un morphisme surjectif d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_k$ sur $\mathfrak{h}$, où les $\mathfrak{s}_i$ sont des idéaux simples. Nécessairement, il existe un idéal $\mathfrak{s}_i$ tel que $\alpha|_{\mathfrak{s}_i} : \mathfrak{s}_i \to \mathfrak{h}$ soit un isomorphisme. Ce $\mathfrak{s}_i$ est donc une copie de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}(p, q)$.

5.3 Sur des mises en oeuvre du théorème de plongement

Nous expliquons maintenant comment l'on peut mettre en oeuvre le théorème 5.4 dans l'étude d'actions de groupes. Nous ferons un usage répété des propositions qui vont suivre dans les chapitres 6 et 7, c'est pourquoi nous avons préféré les isoler.

5.3.1 Localisation des points de Zimmer

On commence par donner une situation où non seulement on sait qu'il existe des points de Zimmer, mais où en plus on peut dans une certaine mesure les localiser.

On suppose que M est compacte et on se place dans le cas d'une action par automorphismes d'un groupe de Lie H sur une géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$. On fixe $S \subset H$ un sous-groupe fermé, une représentation (V,ρ) de $\mathrm{Ad}(H) \times \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(P)$ et $\phi : \widehat{M} \to V$ une application de Gauss.

Proposition 5.3.1. *Si S est moyennable et vérifie la propriété (*), tout fermé S-invariant de M contient un point de Zimmer pour (ϕ, S).*

Démonstration. Il s'agit de la propriété du point fixe pour les groupes moyennables. Celle-ci nous assure que si G est un groupe moyennable qui agit affinement et continûment sur un convexe compact $K \subset E$ d'un espace vectoriel topologique localement convexe E, alors G a un point fixe dans K.

Si $F \subset M$ est fermé et S-invariant, par compacité les mesures de probabilité sur F forment un compact convexe de l'espace des mesures signées, sur lequel S agit affinement.

On a ainsi existence d'une mesure finie S-invariante μ, dont le support est contenu dans F. Il n'y a plus qu'à appliquer le théorème 5.4. □

En pratique, nous saurons que l'adhérence de toute S-orbite dans M contient un point de Zimmer.

5.3.2 Cas d'une action localement libre sur une structure conforme

Ici, nous supposons que $X = \mathbf{Ein}^{p,q}$ et $(M,\mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan normalisée associée à une structure conforme $[g]$ sur M et que l'action de H sur M est localement libre partout. Cela signifie que les orbites sur M sont de dimension maximale ou encore que dans le fibré de Cartan, les orbites sont transverses aux fibres. En tout point $x \in M$, la structure conforme de M induit une classe conforme de forme quadratique $[Q_x]$ sur $\mathfrak{h}$ via l'application orbitale et nous avons :

Proposition 5.3.2. *Soient $S \subset H$ un sous-groupe fermé et x un point de Zimmer pour (ι, S). Alors $\mathrm{Ad}_h(S) \subset \mathrm{Conf}(\mathfrak{h}, Q_x)$.*

Démonstration. Rappelons que l'on a une classe conforme $[Q]$ de signature (p,q) sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, $\overline{\mathrm{Ad}}(P)$-invariante, qui est telle que par construction de la géométrie de Cartan, pour tous $x \in M$ et $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, l'isomorphisme $\varphi_{\widehat{x}} : (M,[g_x]) \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{p},[Q])$ est conforme (voir la deuxième partie de la preuve du théorème 2.4). La définition de $\varphi_{\widehat{x}}$ fait que

$$\forall X \in \mathfrak{h},\ \varphi_{\widehat{x}}(X_x) = \iota_{\widehat{x}}(X) + \mathfrak{p} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{p},$$

où X_x désigne l'évaluation en x du champ de Killing conforme associé à X. Nous avons alors pour tout $X \in \mathfrak{h}$, $Q_x(X) = g_x(X_x) = Q(\iota_{\widehat{x}}(X) + \mathfrak{p})$. Si $s \in S$, nous savons qu'il existe $p \in P$ tel que $\iota_{\widehat{x}}$ conjugue l'action de $\mathrm{Ad}(s)$ sur $\mathfrak{h}$ et celle de $\mathrm{Ad}(p)$ sur $\mathfrak{h}^{\widehat{x}}$. Et donc

$$Q_x(\mathrm{Ad}(s)X) = Q(\mathrm{Ad}(p)\iota_{\widehat{x}}(X) + \mathfrak{p}) = \lambda Q(\iota_{\widehat{x}}(X) + \mathfrak{p}), = \lambda Q_x(X),$$

pour $\lambda > 0$. La classe conforme $[Q_x]$ est bien $\mathrm{Ad}(S)$-invariante. □

Ce résultat peut dans un premier temps être considéré comme une information algébrique sur H. Mais on notera bien que cette forme quadratique Q_x correspond à la restriction de la classe conforme $[g]$ à l'espace tangent en x à l'orbite $H.x$. La proposition 5.3.2 nous offre donc également de l'information géométrique. Par exemple, s'il s'avère que dans tous les cas une direction $X \in \mathfrak{h}$ est nécessairement isotrope pour Q_x, cela signifie que le flot associé $e^{tX} \in \mathrm{Conf}(M, [g])$ est de type lumière en tout point de Zimmer.

5.3.3 Cas général d'une action de groupe sur une structure conforme

On retire l'hypothèse d'une action localement libre et on note $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie du stabilisateur de tout point $x \in M$.

Lemme 5.3.3. *Si x est un point de Zimmer,* $\mathrm{Ad}(S)\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{h}_x$.

Démonstration. Rappelons que pour tout $X \in \mathfrak{h}$, on a $X \in \mathfrak{h}_x \iff \iota_{\widehat{x}}(X) \in \mathfrak{p}$ pour tout $\widehat{x}$ dans la fibre au-dessus de x. Pour tout $s \in S$, on a $p \in P$ tel que $\iota_{\widehat{x}} \circ \mathrm{Ad}(s) = \mathrm{Ad}(p) \circ \iota_{\widehat{x}}$, ce qui prouve que le stabilisateur est $\mathrm{Ad}(s)$-invariant. □

En particulier, $\mathfrak{h}_x$ est un idéal de $\mathfrak{h}$ lorsque $S = H$. De façon similaire au cas précédent, on appelle $[Q_x]$ la classe conforme de formes quadratiques induite par $[g_x]$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$ via l'application orbitale en x.

Lemme 5.3.4. *L'application $\varphi_{\widehat{x}} : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ envoie conformément $T_x(H.x)$ sur $\mathfrak{h}^{\widehat{x}} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, lorsque $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est muni de la classe conforme $\overline{\mathrm{Ad}}(P)$-invariante $[Q]$.*

En particulier, si on note $\overline{\mathrm{Ad}}(s)$ l'action de $\mathrm{Ad}(s)$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$, nous avons

Proposition 5.3.5. *Pour tout $s \in S$,* $\overline{\mathrm{Ad}}(s) \in \mathrm{Conf}(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x, [Q_x])$.

Nous pouvons dès lors repérer la faiblesse de cette approche : si on est en un point de Zimmer dont l'orbite est de petite dimension, la forme quadratique $[Q_x]$ pourra être nulle, et la proposition précédente n'apportera plus aucune information. Cependant, dans une telle situation, nous sommes assurés que le stabilisateur est de « grande » dimension. Et nous pouvons espérer que l'isotropie de certains éléments nous apporte des contraintes géométriques assez forte.

Chapitre 6

Actions conformes de groupes de Lie simples

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux groupes de Lie simples non compacts qui agissent fidèlement par transformations conformes d'une variété lorentzienne compacte de dimension supérieure ou égale à 3. Dans ce contexte, trois objets sont mis en scène : un groupe de Lie H, une variété lorentzienne compacte (M, g), et une dynamique de H sur M qui préserve la classe conforme $[g]$. Nous abordons donc cette situation avec trois types de questionnement. La première approche sera d'ordre algébrique et cherchera à classer les groupes de Lie simples non compacts pouvant agir sur une variété lorentzienne compacte. Les deux autres, intimement liées, seront de natures géométrique et dynamique : étant donné un tel groupe de Lie, on se demande sur quelle(s) géométrie(s) il peut agir, et quels peuvent être les motifs de sa dynamique.

La situation analogue pour les actions *isométriques* de groupes de Lie simples non compacts est bien comprise depuis les années 1980. À cette époque, les travaux de Zimmer sur les actions de groupes de Lie simples non compacts sur des G-structures ([Zim84b],[Zim86], [Zim87]) avaient ouvert tout un champ de recherche autour du groupe des isométries des variétés lorentziennes compactes. Dans [Zim86], Zimmer donne comme illustration spectaculaire de son théorème de plongement (Theorem A) que si un groupe de Lie simple non compact H agit par isométries sur une variété lorentzienne compacte (M, g), alors H est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Sa preuve montrait également que l'action de ce groupe de Lie devait être localement libre (*ie* à stabilisateurs discrets) presque partout sur M. Peu de temps après, Gromov démontre qu'une telle action est en fait partout localement libre, que sur chaque orbite on retrouve la métrique de Killing de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et que l'orthogonal des orbites s'intègre en un feuilletage par sous-variétés riemanniennes géodésiquement complètes, prouvant ainsi qu'un revêtement de (M, g) est isométrique à un produit tordu $\widetilde{\mathbf{AdS}}_3 \times_f N$, où $\forall x \in \widetilde{\mathbf{AdS}}_3$, $\{x\} \times N$ est riemannienne et géodésiquement complète ([Gro88], § 5.4.A et son corollaire, voir également [Zeg98b], Théorème 1.13). L'action du groupe préserve ainsi ce feuilletage et l'action transverse est obtenue en quotientant celle de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ sur $\widetilde{\mathbf{AdS}}_3$

Les méthodes développées par Zimmer dans la situation des actions isométriques ne peuvent cependant pas s'étendre telles quelles à l'étude des actions conformes. En effet, le résultat central utilisé est un théorème de plongement ([Zim86], Theorem A), qui fait l'hypothèse (cruciale) que l'action du groupe préserve une mesure finie. Les isométries d'une variété pseudo-riemannienne compacte préservent toujours une mesure finie, mais

ça n'est pas le cas pour les transformations conformes et c'est ce qui augmente grandement la difficulté.

Le premier résultat principal de ce chapitre est de nature algébrique et caractérise, à isomorphisme local près, les groupes de Lie simples non compacts pouvant agir conformément sur une variété lorentzienne compacte. Bien sûr, préserver une structure conforme est moins restreignant que de préserver une métrique et on a cette fois plusieurs groupes possibles, non localement isomorphes entre-eux.

Théorème 6.1. *Soit H un groupe de Lie simple, connexe et non compact. Supposons que H agit fidèlement par transformations conformes sur une variété lorentzienne compacte (M, g), avec $\dim M \geqslant 3$. Alors, l'algèbre de Lie de H est isomorphe à l'une des algèbres de Lie ci-dessous :*

- $\mathfrak{o}(1, k)$, *pour* $k \geqslant 2$,
- $\mathfrak{su}(1, k)$, *pour* $k \geqslant 2$,
- $\mathfrak{o}(2, k)$, *pour* $k \geqslant 3$.

Réciproquement, pour chaque algèbre $\mathfrak{h}$ de cette liste, il existe un groupe de Lie H tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ et une variété lorentzienne compacte (M, g) telle que $H \subset \mathrm{Conf}(M, g)$.

D'une façon générale, pour toute structure géométrique dite « rigide » (voir [Gro88], [DG91]), le simple fait d'admettre un automorphisme (global) non trivial est un phénomène exceptionnel. D'Ambra et Gromov suggèrent même que ce phénomène est suffisamment rare pour qu'il soit possible de classer les géométries $(M, \mathcal{S})$ dont le groupe des automorphismes est suffisamment « gros ». Dans le contexte considéré ici, il parait raisonnable d'espérer que si (M, g) est lorentzienne et compacte, le fait de supporter l'action conforme d'un groupe simple non compact a des implications fortes sur la structure conforme $(M, [g])$. Le deuxième résultat central de ce chapitre va dans cette direction et donne un résultat de platitude conforme dans le cas des structures analytique réelles.

Théorème 6.2. *Soit $(M, [g])$ une structure conforme lorentzienne sur une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3. On suppose $(M, [g])$ réelle analytique. Supposons qu'il existe un groupe de Lie simple, connexe et non compact H qui agit conformément sur $(M, [g])$. On a alors l'alternative :*

- *ou bien il existe une métrique g_0 dans la classe conforme $[g]$ telle que H agit sur M par isométries de g_0, et dans ce cas H est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$;*
- *ou bien $(M, [g])$ est conformément plate.*

Les algèbres de Lie simples non compactes étant fondamentalement des assemblages de copies de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, nous allons principalement nous concentrer sur des actions conformes de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ dites *essentielles*, c'est-à-dire ne préservant aucune métrique conforme à g. Comme on l'a rappelé, si l'action d'un groupe localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ se fait par isométries, alors elle est localement libre partout. Le point de départ pour étudier les actions essentielles est un résultat dynamique, énoncé ci-dessous, qui assure la réciproque de ce fait.

Théorème 6.3. *Soit H un groupe de Lie simple, connexe et non compact qui agit conformément sur une variété lorentzienne compacte (M, g) de dimension supérieure ou égale à 3. Si l'action de H est partout localement libre, alors elle préserve une métrique g_0 conforme à g (et H est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$).*

Ceci signifie qu'une action conforme d'un groupe localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est essentielle si et seulement s'il existe une orbite de dimension inférieure ou égale à 2. Notre travail va alors exhiber un champ de Killing conforme, défini et linéarisable au voisinage d'une telle orbite et dont la dynamique impose à ce voisinage d'être conformément plat.

Cadre et notations. Dans tout ce chapitre, M désigne une variété différentielle réelle, lisse, compacte de dimension $n \geqslant 3$, munie d'une classe conforme $[g]$ de métriques lorentziennes, dont on note $(M,\mathcal{C})$ la géométrie de Cartan normalisée, modelée sur $\mathbf{X} = \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, qui lui est associée. On notera toujours $G = PO(2,n)$ et $P = CO(1,n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$, de sorte que $\mathbf{X} = G/P$, ainsi que $\pi : \widehat{M} \to M$ et $\omega \in \Omega^1(\widehat{M},\mathfrak{g})$ le P-fibré principal et la connexion de cette géométrie de Cartan. Nous noterons toujours $K : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}),\mathfrak{g})$ l'application courbure de cette géométrie de Cartan, ainsi que $\mathcal{D}^r K : \widehat{M} \to \mathcal{W}^r$, $r \geqslant 1$ ses dérivées covariantes (voir section 2.1.5).

Définition 6.0.1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique lorentzienne q et $V' \subset V$ un sous-espace. La restriction de q à V' est soit non dégénérée de signature lorentzienne ou riemannienne, soit dégénérée, positive avec une dégénérescence de dimension 1 (ce que nous désignerons abusivement par « signature $(0,+,\ldots,+)$ »). Une telle forme quadratique sera dite *sous-lorentzienne*.

6.1 Classification des groupes de Lie simples non compacts qui peuvent agir conformément

Dans cette section, on commence comme annoncé par dresser la liste, à isomorphisme local près, des groupes de Lie simples non compacts qui admettent une action conforme sur une variété lorentzienne compacte.

6.1.1 Contraintes sur le rang réel

Dès les années 2000, une brèche a été ouverte dans la compréhension des actions conformes de groupes de Lie semi-simples sur des variétés pseudo-riemanniennes compactes. En fait, Zimmer avait présenté un résultat de contrôle du rang réel d'un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact agissant sur une G-structure, avec G un groupe linéaire algébrique, sans nécessairement préserver de mesure finie ([Zim87], Theorem 1). Appliqué au cas de la $CO(p,q)$-structure associée à une structure conforme pseudo-riemannienne $(M,[g])$ de signature (p,q), avec $p \leqslant q$, ce théorème nous assure que si un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact H admet une action conforme sur (M,g), alors $\mathrm{Rg}_{\mathbf{R}}(H) \leqslant p+1$. Partant de ce constat, Bader et Nevo s'intéressent dans [BN02] à la situation où le groupe est simple, non compact et de rang maximal égal à $p+1$. Ils démontrent que nécessairement, un tel groupe est localement isomorphe à $PO(p+1,k+1)$, avec $p \leqslant k \leqslant q$. Chacun de ces groupes de rang $p+1$ admettant une action conforme sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, la question algébrique avait donc été complètement traitée en toute signature lorsque le rang réel du groupe est maximal.

En signature lorentzienne $p = 1$, la problématique se ramène donc à étudier le cas des actions conformes de groupes simples non compacts de rang inférieur ou égal à 2. En rang 2, les résultats de Bader et Nevo assurent que le groupe est nécessairement localement isomorphe à $PO(2,k)$, avec $k \geqslant 3$, et il nous reste donc à comprendre les actions de groupes

de Lie simples non compacts de rang 1. La classification des algèbres de Lie semi-simples réelles nous permet de dresser la liste de ces groupes à isomorphisme local près. Ce sont, pour $k \geqslant 2$, les groupes $O(1,k)$, $SU(1,k)$, $Sp(1,k)$ et F_4^{-20}. Pour prouver le théorème 6.1 nous sommes donc ramenés à démontrer que tout groupe localement isomorphe à $Sp(1,k)$, $k \geqslant 2$, ou F_4^{-20} n'agit conformément sur aucune variété lorentzienne compacte. Ceci va découler d'une incompatibilité structurelle entre ces groupes et le groupe $O(2,n)$, qui en quelques sortes régit la géométrie lorentzienne conforme. Nous commençons donc par donner quelques précisions sur ces groupes.

6.1.2 Préliminaires algébriques

Soit $n \geqslant 3$. Commençons par rappeler comment l'on définit les algèbres $\mathfrak{o}(1,n-1)$, $\mathfrak{su}(1,n-1)$, $\mathfrak{sp}(1,n-1)$ en tant qu'algèbres de matrices. Notons

$$J_{1,n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & I_{n-2} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Appelons $\mathbf{H}$ le corps non commutatif des quaternions, et si M est une matrice à coefficients dans $\mathbf{C}$ ou dans $\mathbf{H}$, nous notons $M^* = {}^t\overline{M}$.

Définition 6.1.1. On définit pour $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}(1,n-1) &= \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}) \mid M^* J_{1,n-1} + J_{1,n-1} M = 0\} \\
\mathfrak{su}(1,n-1) &= \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0 \text{ et } M^* J_{1,n-1} + J_{1,n-1} M = 0\} \\
\mathfrak{sp}(1,n-1) &= \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{H}) \mid M^* J_{1,n-1} + J_{1,n-1} M = 0\}.
\end{aligned}$$

Pour $k \geqslant 1$, nous définissons également

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}(k) &= \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}) \mid M^* + M = 0\} \\
\mathfrak{su}(k) &= \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0 \text{ et } M^* + M = 0\} \\
\mathfrak{sp}(k) &= \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{H}) \mid M^* + M = 0\}.
\end{aligned}$$

Proposition 6.1.1. *Pour $n \geqslant 3$, les algèbres $\mathfrak{o}(1,n-1)$, $\mathfrak{su}(1,n-1)$ et $\mathfrak{sp}(1,n-1)$ sont simples de rang 1, et leurs décompositions en espaces de racines restreintes respectives sont*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}(1,n-1) &= \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(n-2) \oplus \mathfrak{g}_\alpha, \text{ avec } \dim \mathfrak{g}_\alpha = n-2 \\
\mathfrak{su}(1,n-1) &= \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbf{R} \oplus \mathfrak{u}(n-2) \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}, \text{ avec } \dim \mathfrak{g}_\alpha = 2n-4 \text{ et } \dim \mathfrak{g}_{2\alpha} = 1 \\
\mathfrak{sp}(1,n-1) &= \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{sp}(n-2) \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}, \text{ avec } \dim \mathfrak{g}_\alpha = 4n-8 \\
&\quad \text{et } \dim \mathfrak{g}_{2\alpha} = 3,
\end{aligned}$$

où le facteur $\mathbf{R}$ est dans chaque décomposition un sous-espace de Cartan, α désigne à chaque fois une racine restreinte et $\mathfrak{g}_\alpha$ ou $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ l'espace de racine correspondant.

Démonstration. Si M est une matrice à coefficients réels, on a

$$M \in \mathfrak{o}(1,n-1) \iff M = \begin{pmatrix} a & u & 0 \\ -{}^t v & N & -{}^t u \\ 0 & v & -a \end{pmatrix},$$

avec $a \in \mathbf{R}$, $u, v \in \mathbf{R}^{n-2}$ et $N \in \mathfrak{o}(n-2)$. Ceci nous donne une décomposition de $\mathfrak{o}(1,n-1)$ de la forme

$$\mathfrak{o}(1,n-1) = \underbrace{\mathbf{R}^{n-2}}_{\text{bloc inférieur}} \oplus \underbrace{\mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(n-2)}_{\text{blocs diagonaux}} \oplus \underbrace{\mathbf{R}^{n-2}}_{\text{bloc supérieur}} .$$

L'action adjointe sur $\mathfrak{o}(1,n-1)$ des matrices diagonales de la forme $\begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & -a \end{pmatrix}$ est $\mathbf{R}$-diagonalisable. On vérifie en effet que son action adjointe est

- une homothétie de rapport $-a$ sur le bloc inférieur,
- triviale sur le facteur compact $\mathfrak{o}(n-2)$,
- une homothétie de rapport a sur le bloc supérieur.

Par conséquent, le facteur $\mathbf{R}$ du bloc diagonal est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{o}(1,n-1)$ et si on choisit comme racine $\alpha : \begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & -a \end{pmatrix} \mapsto a \in \mathbf{R}$, on a bien la décomposition en espaces de racines restreintes annoncée.

Si M est une matrice à coefficients complexes, on a

$$M \in \mathfrak{su}(1,n-1) \iff M = \begin{pmatrix} z & u & b \\ -{}^t\overline{v} & N & -{}^t\overline{u} \\ c & v & -\overline{z} \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Tr} M = 0,$$

avec $z \in \mathbf{C}$, $b, c \in i\mathbf{R}$, $N \in \mathfrak{u}(n-2)$ et $u, v \in \mathbf{C}^{n-2}$. La condition $\operatorname{Tr} M = 0$ impose que la partie imaginaire de z est $-\operatorname{Tr} N/2i$. La diagonale s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} a - \operatorname{Tr} N/2 & & \\ & N & \\ & & a - \operatorname{Tr} N/2 \end{pmatrix},$$

avec $a \in \mathbf{R}$, $N \in \mathfrak{u}(n-2)$. Ceci nous fournit une décomposition (en sous-espaces vectoriels)

$$\mathfrak{su}(1,n-1) = \underbrace{i\mathbf{R} \oplus \mathbf{C}^{n-2}}_{\text{blocs inférieurs}} \oplus \underbrace{\mathbf{R} \oplus \mathfrak{u}(n-2)}_{\text{blocs diagonaux}} \oplus \underbrace{\mathbf{C}^{n-2} \oplus i\mathbf{R}}_{\text{blocs supérieurs}} .$$

Un calcul montre que l'action adjointe du facteur $\mathbf{R}$ diagonal est diagonalisable, et en notant $\alpha : \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix} \mapsto a \in \mathbf{R}$, que la décomposition ci-dessus est bien la décomposition en espaces de racines restreintes annoncée.

Si M est une matrice à coefficients dans $\mathbf{H}$, nous avons

$$M \in \mathfrak{sp}(1,n-1) \iff M = \begin{pmatrix} a & u & b \\ -{}^t\overline{v} & N & -{}^t\overline{u} \\ c & v & -\overline{a} \end{pmatrix},$$

avec $a \in \mathbf{H}$, b, c quaternions purs, $u, v \in \mathbf{H}^{n-2}$ et $N \in \mathfrak{sp}(n-2)$. Cette présentation fait apparaître la décomposition en espaces de racines restreintes de $\mathfrak{sp}(1,n-1)$. En effet,

puisque l'algèbre de Lie associée à l'algèbre associative $\mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(3)$ (via la décomposition partie réelle - quaternions purs), nous pouvons décomposer $\mathfrak{sp}(1, n-1)$ en

$$\mathfrak{sp}(1,n-1) = \underbrace{\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(i,j,k) \oplus \mathbf{H}^{n-2}}_{\text{blocs inférieurs}} \oplus \underbrace{\mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{sp}(n-2)}_{\text{blocs diagonaux}} \oplus \underbrace{\mathbf{H}^{n-2} \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(i,j,k)}_{\text{blocs supérieurs}}, \quad (6.1)$$

qui, pour le moment, n'est qu'une somme directe d'espaces vectoriels. Or, en définissant $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{sp}(n-2)$ et $\mathfrak{a}$ comme étant le facteur $\mathbf{R}$ dans le bloc diagonal, un calcul élémentaire nous montre que

- $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{sp}(1, n-1)$;
- $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ agit diagonalement sur $\mathfrak{sp}(1, n-1)$. Précisément, l'action adjointe d'un élément $\begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & -a \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{a}$ est
  - une homothétie de rapport $-2a$ sur le facteur $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(i,j,k)$ triangulaire inférieur.
  - une homothétie de rapport $-a$ sur le facteur $\mathbf{H}^{n-2}$ triangulaire inférieur,
  - une homothétie de rapport a sur le facteur $\mathbf{H}^{n-2}$ triangulaire supérieur,
  - une homothétie de rapport $2a$ sur le facteur $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(i,j,k)$ triangulaire supérieur,

  Ainsi, $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{sp}(1, n-1)$ et en notant α la racine

$$\alpha : \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix} \mapsto a,$$

la décomposition (6.1) nous donne bien la décomposition en espace de racines restreintes annoncée. □

Algèbres de Heisenberg, classiques ou quaternioniennes. Les algèbres $\mathfrak{su}(1, n-1)$ et $\mathfrak{sp}(1, n-1)$ contiennent des sous-algèbres nilpotentes d'indice 2 qui jouent un rôle très important. Nous en donnons une définition intrinsèque, puis les identifions dans $\mathfrak{su}(1, n-1)$ et $\mathfrak{sp}(1, n-1)$ via les décompositions détaillées dans la proposition précédente.

Définition 6.1.2. Soit $k \geqslant 1$. Appelons $\omega_{\mathbf{C}}$ la forme symplectique standard de $\mathbf{C}^k$ (*ie* la partie imaginaire du produit scalaire hermitien standard) et $\omega_{\mathbf{H}}$ la forme définie sur $\mathbf{H}^k$ et donnée par $\omega_{\mathbf{H}}(u,v) = u\overline{{}^t v} - v\overline{{}^t u}$ pour $u, v \in \mathbf{H}^k$. On notera que $\omega_{\mathbf{H}}(u,v)$ est un quaternion pur.

On définit $\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2k+1)$ l'*algèbre de Heisenberg classique* de dimension $2k+1$ comme étant l'espace vectoriel $\mathbf{C}^k \oplus \mathbf{R}.Z$, Z étant un élément extérieur à $\mathbf{C}^k$, que l'on munit de la structure d'algèbre de Lie dont le centre est la droite dirigée par Z et telle que si $z, z' \in \mathbf{C}^k$, $[z, z'] = \omega_{\mathbf{C}}(z, z')Z$.

On définit $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(4k+3)$ l'*algèbre de Heisenberg quaternionienne* de dimension $4k+3$ comme étant l'espace vectoriel $\mathbf{H}^k \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(Z_i, Z_j, Z_k)$, où Z_i, Z_j, Z_k sont trois éléments linéairement indépendants et extérieurs à $\mathbf{H}^k$, que l'on munit de la structure d'algèbre de Lie dont le centre est $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(Z_i, Z_j, Z_k)$ et telle que si $q, q' \in \mathbf{H}^k$, alors en écrivant $\omega_{\mathbf{H}}(q, q') = a.i + b.j + c.k$, on a $[q, q'] = aZ_i + bZ_j + cZ_k$.

Par construction, l'idéal dérivé de ces algèbres coïncide avec leurs centres respectifs, et en particulier les algèbres de Heisenberg (classiques ou quaternioniennes) sont nilpotentes d'indice 2.

Pour terminer ce paragraphe, nous montrons comment réaliser $\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2k+1)$ dans $\mathfrak{su}(1,k+1)$ et $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(4k+3)$ dans $\mathfrak{sp}(1,k+1)$. Dans les deux cas, il suffit de reprendre les présentations matricielles dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{H})$ respectivement et de considérer les éléments qui sont strictement triangulaires supérieurs. En effet, en prenant $n = k+2$, si nous conservons les notations de la proposition 6.1.1, alors que ce soit pour $\mathfrak{su}(1,n-1)$ ou $\mathfrak{sp}(1,n-1)$, les matrices triangulaires supérieures correspondent au sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, qui est bien une sous-algèbre car $[\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}] = 0$ et $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_{2\alpha}$. On vérifie alors aisément que dans $\mathfrak{su}(1,n-1)$

$$\forall u, v \in \mathbf{C}^k,\ \left[\begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ & 0 & -{}^t\overline{u} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ & 0 & -{}^t\overline{v} \\ & & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\omega_{\mathbf{C}}(u,v) \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{2\alpha},$$

et dans $\mathfrak{sp}(1,n-1)$

$$\forall u, v \in \mathbf{H}^k,\ \left[\begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ & 0 & -{}^t\overline{u} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ & 0 & -{}^t\overline{v} \\ & & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_{\mathbf{H}}(u,v) \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}.$$

L'algèbre simple non compacte de rang 1 exceptionnelle. L'algèbre $\mathfrak{f}_4^{-20}$ ne peut pas être comprise de la même façon comme une algèbre de matrices (essentiellement parce que les *octonions* ne forment pas une algèbre associative). Ceci ne nous gênera pas car nous n'aurons besoin que de savoir que c'est une algèbre simple, et qui vérifie le lemme ci-dessous.

Lemme 6.1.2. *L'algèbre $\mathfrak{f}_4^{-20}$ contient une copie de $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$.*

Démonstration. Le système de racines de cette algèbre est également de type $(BC)_1$, *ie* l'ensemble des racines restreintes est de la forme $\{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ ([Kna02], p.717). On a donc une sous-algèbre unipotente $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$. On a $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 8$ et $\dim \mathfrak{g}_{2\alpha} = 7$ et de la même façon qu'avec les algèbres symplectiques, il est judicieux d'introduire une algèbre de nombres. Notons $\mathbf{O}$ l'algèbre des octonions de Cayley. Rappelons que l'on peut la définir comme étant $\mathbf{O} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ muni du produit

$$(q_1, q_2).(q_1', q_2') = (q_1 q_1' - q_2' \overline{q_2}, \overline{q_1} q_2' + q_1' q_2),$$

et que ce produit en fait une algèbre unitaire (d'unité $(1,0)$), qui n'est pas associative. La conjugaison naturelle sur $\mathbf{O}$, que nous notons σ pour éviter les confusions, est donnée par

$$\sigma(q_1, q_2) = (\overline{q_1}, -q_2).$$

On peut alors identifier $\mathfrak{g}_\alpha \simeq \mathbf{O}$ et $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ avec les octonions purs $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(i,j,k) \oplus \mathbf{H}$ de sorte que le crochet $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_{2\alpha}$ corresponde à $(x_1, x_2) \in \mathbf{O} \times \mathbf{O} \mapsto x_1 \sigma(x_2) - x_2 \sigma(x_1)$.

Ainsi, si $V_{\mathbf{H}} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ désigne la première copie de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{O}$, le crochet restreint à $V_{\mathbf{H}} \times V_{\mathbf{H}}$ est à valeur dans le sous-espace de dimension 3 de $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ correspondant à $\mathrm{Vect}(i,j,k)$, et on vérifie directement que $V_{\mathbf{H}} \oplus \mathrm{Vect}(i,j,k)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{f}_4^{-20}$ isomorphe à $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$. □

6.1.3 Exclusion des algèbres $\mathfrak{sp}(1,k)$, $k \geqslant 2$, et de $\mathfrak{f}_4^{-20}$

Dans toute cette section, $\mathfrak{h}$ désigne une algèbre de Lie qui est soit de la forme $\mathfrak{sp}(1,k)$, pour $k \geqslant 2$, soit isomorphe à $\mathfrak{f}_4^{-20}$. Par le lemme 6.1.2, nous savons que dans tous les cas $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie simple qui contient une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$. Nous allons démontrer qu'aucun groupe de Lie dont l'algèbre est isomorphe à $\mathfrak{h}$ ne peut agir conformément sur une variété lorentzienne compacte. Pour cela, on suppose qu'il existe une variété lorentzienne compacte (M,g) et un groupe de Lie H avec $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$, tels que H agit fidèlement sur M par transformations conformes.

On note $(M,\mathcal{C})$ la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui est associée à $(M,[g])$, et $\pi : \widehat{M} \to M$ désigne le fibré de Cartan associé. Notons $G = PO(2,n)$ et P le stabilisateur dans G d'un point de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Puisque nous avons une action $H \hookrightarrow \mathrm{Aut}(M,\mathcal{C})$, nous disposons d'une application de Gauss $\iota : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$ donnée par $\iota(\widehat{x})(X) = \omega_{\widehat{x}}(X_{\widehat{x}})$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$ (voir section 5.2.1).

Un plongement fourni par le théorème 5.4

Appelons S le sous-groupe connexe de H dont l'algèbre est l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$ exhibée précédemment. Le sous-groupe $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ est unipotent, et par conséquent il en va de même pour son adhérence de Zariski dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$. Un sous-groupe unipotent de $\mathrm{GL}(N,\mathbf{R})$ n'admet aucun sous-groupe algébrique distingué et cocompact. De plus, puisque S est moyennable (car il est résoluble), son action sur M (qui est compacte) préserve une mesure finie. Nous pouvons donc déduire du théorème 5.4 que pour toute application de Gauss ϕ, il existe dans M des points de Zimmer pour (ϕ,S).

On applique ceci avec $\phi = \iota$. L'étude des points de Zimmer de ι faite en section 5.2.2 montre que l'on a existence d'un sous-groupe algébrique $P' \subset P$ et d'un morphisme algébrique surjectif

$$\rho : P' \to \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$$

(ceci découle du contenu de la proposition 5.2.2). Puisque P' est algébrique, il admet une décomposition, dite *décomposition de Lévi algébrique*, $P' = (LT) \ltimes U$, où L, T et U sont des sous-groupes algébriques de P', avec L semi-simple réel, U unipotent et T un tore dans P' (voir [Mor05], Theorem 4.4.7). Précisons que par « tore », on entend un groupe algébrique formé de matrices simultanément diagonalisables sur $\mathbf{C}$ (pas seulement $i\mathbf{R}$), qui peut donc contenir des éléments hyperboliques.

Rappelons que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$ est lui-même un groupe matriciel unipotent. Il n'admet en particulier aucun sous-groupe semi-simple non trivial et donc $\rho(L) = \{\mathrm{id}\}$. De plus, le morphisme ρ étant algébrique, il doit envoyer tout élément elliptique (resp. hyperbolique) de P' sur un élément elliptique (resp. hyperbolique) de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$. Par conséquent, tout le tore T s'envoie par ρ sur l'identité et finalement $\rho(L) = \rho(T) = \{\mathrm{id}\}$.

Ainsi, $\rho|_U$ est surjectif et nous avons ainsi exhibé un sous-groupe unipotent $U \subset P$ et un morphisme algébrique surjectif

$$U \to \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S).$$

Sous-groupes unipotents de P

On choisit une base de $\mathbf{R}^{2,n}$ de sorte que l'algèbre de Lie de P soit l'algèbre matricielle décrite à la section 2.3.1. Appelons $\mathfrak{u}_{\max}$ la sous-algèbre unipotente de $\mathfrak{p}$ qui est formée

par l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & t & u_1 & \cdots & u_d & \alpha & 0 \\ & 0 & v_1 & \cdots & v_d & 0 & -\alpha \\ & & & & & -v_1 & -u_1 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & -v_d & -u_d \\ & & & & & 0 & -t \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

où $d = n-2$. Si on se restreint aux matrices pour lesquelles $t = 0$, on obtient une copie dans $\mathfrak{u}_{\max}$ de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2d+1)$ telle que les éléments de $\mathbf{C}^d$ sont les $(u_1 + iv_1, \ldots, u_d + iv_d)$ et le centre correspond aux matrices pour lesquelles $u_i = v_i = 0$ pour tout i. Cette dernière sous-algèbre est un idéal de $\mathfrak{u}_{\max}$ et $\mathfrak{u}_{\max}$ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbf{R} \ltimes \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$. L'action par dérivation de $\mathbf{R}$ sur $\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$ dans ce produit semi-direct est

$$t.(u + iv, \alpha) = (tv, 0) \in \mathbf{C}^d \oplus \mathbf{R}.$$

Appelons $U_{\max} \subset P$ le sous-groupe connexe qui intègre cette sous-algèbre.

Proposition 6.1.3. *Tout sous-groupe unipotent U de P est conjugué dans P à un sous-groupe de U_{max}.*

Démonstration. Rappelons tout d'abord que P est de la forme

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ & A & * \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} \in O(2,n) \ ; \ a \in \mathbf{R}^*, \ A \in O(1,n-1) \right\}.$$

En particulier, les matrices de U devant être unipotentes, toute matrice de U a une diagonale avec un coefficient $a = 1$ et une matrice $A \in O(1,n-1)$ unipotente. Si on appelle $\pi_l : P \to O(1,n-1)$ l'application qui à un élément de P associe la matrice A donnée dans la description ci-dessus, π_l est un morphisme de groupes de Lie et l'image de U par π_l est un sous-groupe unipotent de $O(1,n-1)$. On détermine alors la forme des sous-groupes unipotents de $O(1,n-1)$.

Lemme 6.1.4. *Soit $\mathfrak{u}$ une sous-algèbre unipotente de $\mathfrak{o}(1,n-1)$. Alors, il existe une direction isotrope de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ qui est dans le noyau de toutes les matrices de $\mathfrak{u}$.*

Démonstration. On note $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{u}$. Par hypothèse, $E = \bigcap_{Z \in \mathfrak{z}} \ker Z \neq 0$. Ce sous-espace est préservé par tous les éléments de $\mathfrak{u}$. Il en va donc de même pour son orthogonal $E^\perp$ relativement au produit scalaire lorentzien ambiant de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Les matrices de $\mathfrak{u}$ se restreignent donc en une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(E^\perp)$, formée d'endomorphismes nilpotents. Par le théorème d'Engel ([Kna02], Theorem 1.35), il existe une direction de $E^\perp$ dans le noyau de tous les éléments de $\mathfrak{u}$. Ainsi, $E \cap E^\perp \neq 0$ et contient une direction qui est dans le noyau de tous les éléments de $\mathfrak{u}$. □

Par conséquent, tout sous-groupe unipotent de $O(1,n-1)$ se réalise dans le stabilisateur d'un vecteur isotrope de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. D'après la description que nous en avons faite à la section

2.3.1, un tel stabilisateur est conjugué, dans $O(1,n-1)$, à

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & A & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \in O(1,n-1) \ ; \ A \in O(n-2) \right\}.$$

Par compacité, $O(n-2)$ ne contient aucun élément unipotent. Ainsi, tout sous-groupe unipotent de P_0 est formé d'éléments ayant une composante triviale sur le facteur $O(n-2)$ décrit ci-dessus.

Finalement, il existe $g \in O(1,n-1)$ tel que $\mathrm{Ad}(g)\pi_l(\mathfrak{u})$ est une sous-algèbre de l'algèbre abélienne

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ & 0 & -{}^t u \\ & & 0 \end{pmatrix}, \ u \in \mathbf{R}^n \right\} \subset \mathfrak{o}(1,n-1).$$

Nous devons donc avoir $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(g)\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}_{\max}$, où $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(g)$ désigne l'action adjointe de $g \in O(1,n-1) \subset P$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. □

Ainsi, nous pouvons supposer que le groupe unipotent $U \subset P$ exhibé précédemment est en fait un sous-groupe de $U_{\max}$.

Incompatibilité algébrique

Nous sommes en mesure de démontrer que l'action conforme d'un tel groupe H sur (M,g) ne peut pas exister. Ceci va être la conséquence d'un résultat purement algébrique, que l'on peut résumer de façon informelle comme étant l'impossibilité d'avoir une surjection $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur une autre algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ lorsque $\dim[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] < \dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Lemme 6.1.5. *Si* $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}_{\max} \simeq \mathbf{R} \ltimes \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$ *est une sous-algèbre, il n'existe aucun morphisme d'algèbres de Lie surjectif de* $\mathfrak{u}$ *sur l'algèbre* $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$.

Démonstration. On se donne Z_i, Z_j et Z_k trois éléments linéairement indépendants du centre de $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$ et U, U_i, U_j, U_k des éléments de $\mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$ dont les relations de crochet sont décrites par le tableau ci-dessous.

[.,.]	U	U_i	U_j	U_k
U	0	Z_i	Z_j	Z_k
U_i	$-Z_i$	0	Z_k	$-Z_j$
U_j	$-Z_j$	$-Z_k$	0	Z_i
U_k	$-Z_k$	Z_j	$-Z_i$	0

.

Supposons qu'il existe un morphisme surjectif $f : \mathfrak{u} \to \mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$, où $\mathfrak{u}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{u}_{\max}$. Nous avons vu que l'algèbre $\mathfrak{u}_{\max}$ est un produit semi-direct $\mathbf{R} \ltimes \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$. Choisissons X_1, X_2, X_3, X_4 des antécédents dans $\mathfrak{u}$ de U, U_i, U_j, U_k.

Sous-lemme. *Les* X_i *n'ont pas de composante sur le facteur* $\mathbf{R}$ *du produit semi-direct* $\mathbf{R} \ltimes \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$.

Démonstration. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on écrit $X_i = (t_i, X_i')$ où $X_i' \in \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$. Nous avons alors $t_2X_1 - t_1X_2$, $t_3X_1 - t_1X_3$, $t_4X_1 - t_1X_4 \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$. Notons $D = f(\mathfrak{u} \cap [\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3), \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)]) \subset \mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7)$. Nous avons $\dim D \leqslant 1$. Or,

$$\begin{aligned} f([t_2X_1 - t_1X_2, t_3X_1 - t_1X_3]) &= -t_1t_2Z_j + t_1t_3Z_i + t_1^2Z_k \\ f([t_2X_1 - t_1X_2, t_4X_1 - t_1X_4]) &= -t_1t_2Z_k + t_1t_4Z_i - t_1^2Z_j \\ f([t_3X_1 - t_1X_3, t_4X_1 - t_1X_4]) &= -t_1t_3Z_k + t_1t_4Z_j + t_1^2Z_i. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} t_1t_3 & -t_1t_2 & t_1^2 \\ t_1t_4 & -t_1^2 & -t_1t_2 \\ t_1^2 & t_1t_4 & -t_1t_3 \end{pmatrix} \leqslant 1.$$

En particulier le mineur $\begin{vmatrix} t_1t_4 & -t_1^2 \\ t_1^2 & t_1t_4 \end{vmatrix}$ doit être nul. On en déduit $t_1 = 0$. On prouve de la même façon que $t_2 = t_3 = t_4 = 0$. □

On note encore $D = f(\mathfrak{u} \cap [\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3), \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)])$. Ce que nous venons d'établir dans le lemme précédent assure que $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2n-3)$, nous devons avoir

$$\begin{aligned} f([X_1, X_2]) &= [U, U_i] = Z_i \in D \\ f([X_1, X_3]) &= [U, U_j] = Z_j \in D. \end{aligned}$$

Ceci contredit $\dim D \leqslant 1$, et donc l'existence de f. □

Nous pouvons conclure. L'hypothèse d'existence d'une action conforme de H sur (M,g) nous a assuré celle d'un morphisme surjectif d'un groupe unipotent $U \subset U_{\max}$ sur $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$, où $S \subset H$ est un groupe qui intègre $\mathfrak{s} = \mathfrak{heis}^{\mathbf{H}}(7) \subset \mathfrak{h}$. En dérivant ce morphisme, on obtient un morphisme surjectif de $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}_{\max}$ sur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{s})$, et par simplicité de $\mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{s}) \simeq \mathfrak{s}$. Le lemme précédent nous assure que ceci n'est pas possible.

6.2 Caractérisation des actions inessentielles de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$

Rappelons qu'une action conforme d'un groupe de Lie sur une structure conforme $(M,[g])$ est dite inessentielle s'il existe une métrique g_0 conforme à g pour laquelle l'action du groupe se fait par isométries. Comme nous l'avons rappelé en introduction à ce chapitre, si (M,g) est une variété lorentzienne compacte, à isomorphisme local près $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est le seul groupe de Lie simple non compact pouvant agir par isométries sur (M,g), et si une telle action existe, alors toutes les orbites sont de dimension égale à 3.

Dans cette section nous démontrons que cette propriété des orbites caractérise les actions conformes inessentielles des groupes de Lie localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ sur des variétés lorentziennes compactes. Nous verrons à la section 6.5 que si H est un groupe de Lie simple non compact non localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, alors une action conforme de H sur une variété lorentzienne compacte ne peut pas être localement libre partout. Par conséquent, le théorème 6.3 sera une conséquence de l'énoncé ci-dessous.

Théorème 6.4. *Soient (M,g) une variété lorentzienne compacte de dimension $\dim M \geqslant 3$ et H un groupe de Lie connexe et localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Étant donné une action conforme de H sur M, si toutes les orbites sont de dimension 3, alors l'action est*

inessentielle, c'est-à-dire il existe une métrique g_0 dans la classe conforme $[g]$ telle que $H \subset \mathrm{Isom}(M, g_0)$.

Démonstration. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. On peut donc se donner trois éléments $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$ qui vérifient les relations $[X, Y] = Y$, $[X, Z] = -Z$ et $[Y, Z] = X$. Une action conforme de H sur (M, g) définit un triplet de champs de vecteurs conformes, que nous notons par abus X, Y, Z, qui sont partout linéairement indépendants et vérifient les mêmes relations de crochets que dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$.

On appelle $(M, \mathcal{C})$ la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ associée à $(M, [g])$. Conformément au chapitre 5, nous notons toujours $\iota : \widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ l'application de Gauss associée à l'action de H par automorphismes de $(M, \mathcal{C})$ ($\widehat{M}$ désigne l'espace total du fibré de Cartan). On considère le sous-groupe de Cartan $S = \{\mathrm{e}^{tX},\ t \in \mathbf{R}\} \subset H$.

Lemme 6.2.1. *En tout point de Zimmer $x \in M$ pour (ι, S), l'orbite $H.x$ est lorentzienne, X_x est de type espace, Y_x et Z_x sont isotropes et orthogonaux à X_x.*

Démonstration. Soit x un tel point. Nous sommes dans la situation de la proposition 5.3.2. Celle-ci nous assure que la classe conforme $[Q_x]$ sur $\mathfrak{h}$, qui correspond à la restriction de $[g_x]$ à l'espace tangent à l'orbite $H.x$, est invariante par l'action adjointe $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$.

Le point clé ici est que Q_x, en tant que restriction d'une forme quadratique lorentzienne, a ses sous-espaces totalement isotropes de dimension au plus 1. Notons a_t l'endomorphisme $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(X^t)$. Nous avons $\lambda(t) > 0$ tel que $a_t^* Q_x = \lambda(t) Q_x$. Supposons $Q_x(Y) \neq 0$. Nous voyons alors que $Q_x(a_t Y) = \mathrm{e}^{2t} Q_x(Y) = \lambda(t) Q_x(Y)$. D'où $\lambda(t) = \mathrm{e}^{2t}$. Mais alors, en notant B_x la forme polaire de Q_x, nous aurions $B_x(a_t X, a_t Z) = \mathrm{e}^{2t} B_x(X, Z) = B_x(X, \mathrm{e}^{-t} Z)$, d'où $X \perp Z$. On obtient de même $Q_x(X) = Q_x(Z) = 0$. Les vecteurs X et Z doivent donc former un plan isotrope, ce qui est exclus. Ainsi, Y est isotrope et par symétrie, Z l'est également. Ces deux vecteurs ne pouvant être orthogonaux, nous obtenons $B_x(a_t Y, a_t Z) = \lambda(t) B_x(Y, Z) = B_x(Y, Z)$, d'où $\lambda(t) = 1$ et donc $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S) \subset O(Q_x)$. Par conséquent, nous devons avoir $B_x(X, Y) = B_x(a_t X, a_t Y) = \mathrm{e}^t B_x(X, Y)$ et $B_x(X, Z) = B_x(a_t X, a_t Z) = \mathrm{e}^{-t} B_x(X, Z)$ pour tout t. Il en découle que X est également orthogonal à Y et Z pour Q_x. Comme $[Q_x]$ correspond à la restriction de $[g]$, cela signifie que dans $T_x M$, le plan $\mathrm{Vect}(Y_x, Z_x)$ est lorentzien et X_x lui est orthogonal. Par conséquent, X_x est de type espace. □

Considérons à présent $U = \{x \in M \mid g_x(X, X) > 0\}$. Puisque $S \subset H$ vérifie la propriété (*) et est moyennable, on a existence de points de Zimmer pour (ι, S), et l'ouvert U est non vide par ce qui précède. De plus, U est invariant par le flot de X. Si U n'était pas M entière, son complémentaire serait un fermé, non vide, S-invariant. Par conséquent, par la propriété 5.3.1, U^c devrait contenir des points de Zimmer pour (ι, S), ce qui est absurde d'après ce que l'on vient de voir. Finalement, le champ X est partout de type espace.

Le théorème découle alors de la proposition suivante qui est plus générale. □

Proposition 6.2.2. *Soit G un groupe simple, connexe agissant conformément sur une variété pseudo-riemannienne compacte (M, g). Soit $\mathfrak{a}$ un espace de Cartan de $\mathfrak{g}$. On suppose qu'il existe un élément régulier de $\mathfrak{a}$ qui est partout de type espace. Alors, l'action de G est inessentielle.*

La preuve de cette propriété s'appuie sur le fait suivant (qui est une technique bien connue, déjà utilisée dans [Oba72], voir aussi [Laf88], §B. Lemma 11, dans le cas riemannien). Nous en donnons une formulation générale car nous le réutiliserons de façon moins élémentaire au chapitre 7.

Lemme 6.2.3. *Soient (M, g_0) une variété pseudo-riemannienne et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{X}(M)$ une algèbre de champs de vecteurs conformes. Si $X \in \mathfrak{h}$ est partout de type espace, la métrique $g := \frac{g_0}{g_0(X,X)}$ est préservée par les flots des éléments du centralisateur $\mathfrak{z}_h(X)$.*

Démonstration (Lemme 6.2.3). Soit Y commutant avec X. Notons $\lambda(x,t)$ la distorsion conforme du flot ϕ_Y^t relativement à la métrique g_0, *ie* $\forall x \in M,\ t \in \mathbf{R}$, $[(\phi_Y^t)^* g_0]_x = \lambda(x,t)(g_0)_x$. Nous avons pour tous $x \in M$ et $u, v \in T_xM$

$$g_{\phi_Y^t(x)}(\phi_{Y*}^t u, \phi_{Y*}^t v) = \frac{(g_0)_{\phi_Y^t(x)}(\phi_{Y*}^t u, \phi_{Y*}^t v)}{(g_0)_{\phi_Y^t(x)}(X_{\phi_Y^t(x)}, X_{\phi_Y^t(x)})} = \frac{\lambda(x,t)(g_0)_x(u,v)}{\lambda(x,t)(g_0)_x(X_x, X_x)} = g_x(u,v),$$

parce que $[Y,X] = 0 \Rightarrow T_x\phi_Y^t X_x = X_{\phi_Y^t(x)}$. Nous avons bien $(\phi_Y^t)^* g_0 = g_0$. □

Démonstration (Proposition 6.2.2). Soient Φ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ la décomposition en espaces de racine associée. Soit $X \in \mathfrak{a}$ régulier partout de type espace. Si g_0 est une métrique quelconque dans la classe conforme de M, posons $g = \frac{g_0}{g_0(X,X)}$.

Puisque $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(X)$ (X est dans l'espace de Cartan), le lemme 6.2.3 nous assure que $(\phi_Y^t)^* g = g$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}_0$. Ainsi, tout le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g}_0) \subset H$ agit isométriquement pour g.

Soient maintenant α une racine et $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$. Puisque $[X,Z] = \alpha(X)Z$, on doit avoir $(\phi_X^t)_* Z(x) = \mathrm{e}^{-\alpha(X)t} Z(\phi_X^t x)$. La relation $(\phi_X^t)^* g = g$ nous donne alors

$$g_x(Z,Z) = \mathrm{e}^{-2\alpha(X)t} g_{\phi_X^t(x)}(Z,Z) \text{ et } g_x(Z,Y) = \mathrm{e}^{-\alpha(X)t} g_{\phi_X^t(x)}(Z,Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}_0$. Comme $\{x \mapsto g_x(Z,Y)\}$ et $\{x \mapsto g_x(Z,Z)\}$ sont bornées sur M par compacité, on déduit de $\alpha(X) \neq 0$ qu'en tout point et pour toute racine α, $\mathfrak{g}_\alpha$ est totalement isotrope et orthogonal à $\mathfrak{g}_0$.

On appelle $\lambda(x,t)$ la distorsion conforme du flot de Z. De la relation $[Z,X] = -\alpha(X)Z$ on déduit

$$\forall x, t,\ (\phi_Z^t)_* X(x) = X(\phi_Z^t(x)) + \alpha(X)t\, Z(\phi_Z^t(x)).$$

Nous avons alors $\lambda(x,t) g_x(X,X) = g_{\phi_Z^t(x)}(X,X) = g_x(X,X) > 0$ car par construction, l'application $\{x \mapsto g_x(X,X)\}$ est constante égale à 1 sur M. D'où $\lambda(x,t) = 1$, et donc les sous-groupes engendrés par les espaces de racine agissent isométriquement. On en déduit qu'un voisinage de l'identité de G est contenu dans $\mathrm{Isom}(M,g)$, on conclut par connexité. □

Remarque 6.2.1. On peut affaiblir l'hypothèse de ce dernier lemme. Supposons qu'on ait $X_0 \in \mathfrak{a}$ partout de type espace. Par continuité de $\{(X,x) \mapsto g_x(X,X)\}$ (pour une métrique arbitraire), pour tout $x \in M$ on a un voisinage U_x de x et un voisinage $\mathcal{V}_x \subset \mathfrak{a}$ de X_0 tel que pour tout $y \in U_x$ et $X \in \mathcal{V}_x$, X_y est de type espace. Par compacité, on a $x_1, \ldots, x_n$ tels que $M = \bigcup U_{x_i}$. L'ouvert $\bigcap \mathcal{V}_{x_i} \subset \mathfrak{a}$ contient nécessairement un élément régulier X qui, par construction, est partout de type espace.

Comme nous l'avons expliqué en début de chapitre, la preuve du théorème 6.2 se ramène essentiellement à l'étude des action conformes essentielles de groupes localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Nous allons donc consacrer les sections 6.3 et 6.4 à la démonstration du théorème intermédiaire suivant.

Théorème 6.5. *Soient H un groupe de Lie connexe et localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ et $(M,[g])$ une structure conforme lorentzienne réelle analytique, avec $\dim M \geqslant 3$, sur laquelle H agit conformément. S'il existe une H-orbite de dimension inférieure ou égale à 2, alors $(M,[g])$ est conformément plate.*

Ce que nous venons de démontrer sur les actions conformes localement libres nous donnera alors immédiatement le théorème 6.2 dans le cas des groupes localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Nous terminerons alors le chapitre en prouvant à la section 6.5 qu'un groupe de Lie simple non compact, non localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, qui agit conformément sur une variété lorentzienne compacte contient toujours un sous-groupe localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ qui agit essentiellement.

Plan de la preuve du théorème 6.5

La démonstration va s'organiser comme suit. On se fixe un groupe de Lie H connexe et localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ agissant conformément et essentiellement sur une variété lorentzienne compacte (M,g). Notre attention va bien sûr se concentrer sur le lieu de M où les H-orbites sont de dimension inférieure ou égale à 2 puisque c'est la non vacuité de cet ensemble qui caractérise l'essentialité de l'action de H.

1. La première étape, qui va être l'objet de la section 6.3, est de démontrer qu'on a l'alternative
   - ou bien il existe une H-orbite de dimension 1 ;
   - ou bien il existe un compact $K \subset M$, qui est H-invariant, et dans lequel toutes les H-orbites sont de dimension 2.
2. Dans la première situation, des résultats antérieurs vont nous permettre de démontrer directement la platitude de $(M,[g])$ si celle-ci est supposée réelle analytique.
3. C'est donc dans la deuxième situation que se situe le gros du travail. On y consacre la section 6.4. On va démontrer qu'il existe un point de K dont la H-orbite est dégénérée et qui admet un voisinage sur lequel est défini un champ conforme local qui fixe ce point, dont le flot est défini à tout temps positif, et dont la dynamique préserve et contracte exponentiellement une certaine distribution d'hypersurfaces dégénérées sur un segment lumière.

   L'existence d'un tel champ conforme local va découler du théorème 4.4 d'intégrabilité des générateurs de Killing dans le cas analytique. L'hypothèse d'analyticité est ici centrale car le compact K peut être d'intérieur vide et inclus dans le complémentaire du lieu d'intégrabilité si on ne suppose pas la structure analytique.

   On montrera alors qu'un tel phénomène dynamique ne peut se produire que sur un ouvert conformément plat, et puisque la structure conforme est supposée analytique, cela impliquera que $(M,[g])$ est conformément plate.

6.3 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$-orbites de dimension au plus 2

Dans toute cette section, H est un groupe de Lie connexe et localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. On suppose que H agit par transformations conformes sur une variété lorentzienne compacte (M,g) de dimension $n \geqslant 3$, de sorte qu'il existe une orbite de dimension inférieure ou égale à 2. Rappelons le résultat élémentaire ci-dessous, valable pour toute action $\mathcal{C}^1$ d'un groupe de Lie sur une variété différentielle.

Lemme 6.3.1. *L'application* $\{x \in M \mapsto \dim \mathrm{Stab}_H(x)\}$ *est semi-continue supérieurement sur* M.

Pour $i \in \{0,1,2\}$, nous noterons $F_{\leqslant i} = \{x \in M \mid \dim H.x \leqslant i\}$, $F_0 := F_{\leqslant 0}$. Le lemme précédent nous assure que les $F_{\leqslant i}$ sont des fermés H-invariants de M. Par connexité de H, $F_0 = \{x \in M \mid H.x = x\}$ est l'ensemble des points fixés par l'action de H. Notre hypothèse d'essentialité est ainsi équivalente à $F_{\leqslant 2} \neq \varnothing$. La première étape de notre travail va être de donner quelques propriétés des $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$-orbites à l'intérieur de ce fermé, et on commence par étudier la situation lorsqu'il existe des points globalement fixés par l'action de H.

6.3.1 Description locale des orbites voisines d'un point fixe de l'action

Le lecteur trouvera la définition d'une action locale de groupe de Lie à la définition 1.2.2. Étant donné une action locale d'un groupe de Lie H sur une variété M, l'*orbite locale* d'un point x est l'ensemble des points y de la forme $y = h.x$, où $h \in H$ est tel que $h.x$ est bien défini.

Proposition 6.3.2. *S'il existe* $x \in M$ *tel que* $H.x = \{x\}$, *alors* H *est isomorphe à* $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *et l'ensemble* F_0 *des points de* M *qui sont fixés par tout* H *forme une sous-variété compacte de codimension* 3. *De plus,* $(M,[g])$ *induit une structure conforme riemannienne sur cette variété.*

Tout point dans un voisinage de F_0 *et qui n'est pas sur* F_0 *a une orbite de dimension* 2. *Précisément, il existe un voisinage ouvert* $U \supset F_0$ *et un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de* U *par des sous-variétés lorentziennes de dimension* 3 *tel que chaque feuille* $\mathcal{F}_x$ *est préservée par l'action d'éléments proches de l'identité de* H.

L'action globale de H *sur* M *se restreint ainsi en une action locale de* H *sur chaque feuille, et cette action locale est de plus conjuguée (différentiablement) à celle de* $SO_0(1,2)$ *sur un voisinage de l'origine de l'espace de Minkowski de dimension* 3. *Chaque feuille contient donc un et un seul point qui est globalement fixé par* H *et tous les autres points ont des orbites locales qui sont des sous-variétés de dimension* 2. *Ces dernières se divisent alors en trois types, dits « $\mathbf{H}^2$ », « $\mathbf{dS}^2$ » et « conique » (par analogie avec Minkowski). Enfin, les orbites locales de type $\mathbf{H}^2$ sont riemanniennes, celles de type $\mathbf{dS}^2$ sont lorentziennes ou de signature* $(0+)$ *et celles de type coniques sont de signature* $(0+)$.

Remarque 6.3.1. À quelques détails près, cette proposition se généralise à une action conforme de $O(1,k)$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$ qui admet des points fixes. Ce qui est décrit ici est en fait exactement la situation qui se produit pour une action de $\rho : PO(1,k) \to PO(2,n)$ sur l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ donnée par le plongement

$$h \in O(1,k) \mapsto \begin{pmatrix} h & \\ & \mathrm{id} \end{pmatrix} \in O(2,n),$$

lorsque l'on a muni $\mathbf{R}^{2,n}$ de coordonnées dans lesquelles la forme quadratique s'écrit $-x_1^1 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 + x_{k+3}^2 + \cdots + x_{n+2}^2$. Le lieu des points fixes de cette action est la sous-quadrique projective correspondant à $x_1 = \cdots = x_{k+1} = 0$, qui est conformément équivalente à $\mathbf{Ein}^{0,n-k-1} \simeq \mathbf{S}^{n-k-1}$.

Remarque 6.3.2. Une action conforme essentielle d'un groupe localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ sur une variété lorentzienne compacte peut très bien n'avoir aucun point fixe. Il suffit de considérer l'action de $O(1,2)$ sur la variété de Hopf $(M,[g])$ de dimension 3

obtenue en quotientant $\mathbf{R}^{1,2} \setminus \{0\}$ par le groupe engendré par une homothétie $\lambda\,\mathrm{id}$, avec $\lambda \neq 0$. Cette action est bien définie et conforme car $O(1,2)$ normalise le groupe $< \lambda\,\mathrm{id} >$, et toutes les orbites sont de dimension 2.

Définition de l'holonomie d'un automorphisme fixant un point

D'une façon générale, si $(M,\mathcal{C})$ est une géométrie de Cartan modelée sur un espace homogène G/P, si $\pi : \widehat{M} \to M$ est le fibré de Cartan associé et si f est un automorphisme de $(M,\mathcal{C})$ qui fixe un point x, alors son relevé $\widehat{f}$ préserve la fibre au-dessus de x. En particulier, si $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$ est donné, alors il existe unique $p \in P$ tel que $\widehat{f}(\widehat{x}) = \widehat{x}.p^{-1}$. Cet élément p est appelé *holonomie* de f en $\widehat{x}$, et nous le noterons $\mathrm{hol}_{\widehat{x}}(f)$. Notons que $\{f \in \mathrm{Aut}(M,\mathcal{C}) \mapsto \mathrm{hol}_{\widehat{x}}(f)\}$ est injective dès que M est connexe. Dans le cas d'une action de groupe, nous prenons la définition suivante.

Définition 6.3.3. Soit H un groupe de Lie agissant fidèlement par automorphismes d'une géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$, modelée sur un espace homogène G/P, avec M connexe. Notons $\pi : \widehat{M} \to M$ le fibré de Cartan de cette géométrie. Supposons que H fixe globalement un point $x \in M$, *ie* $H.x = \{x\}$. Pour tout $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, l'application

$$h \in H \mapsto \mathrm{hol}_{\widehat{x}}(h) \in P$$

est un morphisme injectif de groupes, appelé *morphisme d'holonomie* en $\widehat{x}$.

L'élément central qui va permettre cette étude est un résultat de linéarisation des actions conformes de groupes simples auquel nous consacrons le paragraphe qui suit.

Généralités autour de la linéarisation des transformations conformes.

Rappelons que d'une façon générale, si un groupe de Lie H agit différentiablement sur une variété M et si on note H_x le stabilisateur de $x \in M$, alors on a une représentation linéaire $\rho_x : H_x \to \mathrm{GL}(T_xM)$, dite *représentation d'isotropie* en x, définie par

$$\forall h \in H_x,\ \rho_x(h) = T_x h.$$

Définition 6.3.4 (Linéarisabilité)**.** Soient H un groupe de Lie et M une variété sur laquelle H agit différentiablement. Supposons qu'il existe $x \in M$ tel que $H.x = \{x\}$. On dit que l'action de H est *linéarisable* en x s'il existe

- un ouvert $\mathcal{U} \subset T_xM$ contenant 0 et un ouvert $U \subset M$ contenant x ;
- un difféomorphisme $\psi : \mathcal{U} \to U$ tel que $\psi(0) = x$;
- un voisinage ouvert de l'identité $V \subset H$ et $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ un autre voisinage de 0

tels que $\forall h \in V$, $\rho_x(h)\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ et $\forall v \in \mathcal{U}'$, $h.\psi(v) = \psi(\rho_x(h)v)$.

Considérons à présent des transformations conformes pseudo-riemanniennes. Nous changeons exceptionnellement nos notations dans ce paragraphe : $(M,[g])$ est une structure conforme de signature (p,q), $G = PO(p+1,q+1)$ et $P \subset G$ est le stabilisateur d'une direction isotrope de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$, et $(M,\mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q} = G/P$ qui lui est associée. On note $\pi : \widehat{M} \to M$ le fibré de Cartan et ω la connexion de Cartan.

Proposition 6.3.3. *Soit $(M,\mathcal{C})$ la géométrie de Cartan associée à une structure conforme de signature (p,q). Pour tout $\widehat{x}$ dans l'espace total du fibré de Cartan, il existe un difféomorphisme local*

$$\psi_{\widehat{x}} : \mathcal{U} \to U$$

entre un ouvert $\mathcal{U} \subset T_xM$ contenant 0 et un ouvert $U \subset M$ contenant x tel que

- $T_0\psi_{\widehat{x}} = \mathrm{id}_{T_xM}$;
- *pour toute transformation conforme f fixant x et telle que $\mathrm{hol}_{\widehat{x}}(f) \in CO(p,q) \subset P$, il existe $0 \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tel que $T_xf\,\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ et $\forall v \in \mathcal{U}'$, $\psi_{\widehat{x}}(T_xfv) = f(\psi_{\widehat{x}}(v))$.*

Démonstration. On reprend la description faite à la section 2.3.1 de l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+1,q+1)$. Cette dernière se scinde (vectoriellement) en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{p}$. Cette décomposition n'est pas préservée par l'action adjointe de tout P, mais par contre elle l'est pour les éléments dans la partie linéaire $CO(p,q) \subset P$. De plus, ces éléments induisent sur $\mathfrak{g}_{-1}$ l'action linéaire de $CO(p,q)$ sur $\mathbf{R}^{p,q}$.

La géométrie de Cartan $(M,\mathcal{C})$ est choisie telle que l'isomorphisme $\varphi_{\widehat{x}} : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ (cf. (2.2), section 2.1.2) rapatrie une certaine classe conforme naturelle $[Q]$ de signature (p,q) sur $[g_x]$ (cf. théorème 2.4). Appelons $\alpha : X \in \mathfrak{g}_{-1} \mapsto X + \mathfrak{p} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, qui est un isomorphisme linéaire par transversalité de $\mathfrak{g}_{-1}$. On commence par expliquer comment l'holonomie est reliée à représentation d'isotropie sous les hypothèses du lemme.

Lemme 6.3.4. *Soit f une transformation conforme telle que $f(x) = x$ et $p = \mathrm{hol}_{\widehat{x}}(f) \in CO(p,q)$. Alors, $(\varphi_{\widehat{x}})^{-1} \circ \alpha : \mathfrak{g}_{-1} \to T_xM$ conjugue $\mathrm{Ad}(p^{-1})|_{\mathfrak{g}_{-1}}$ à T_xf.*

Démonstration. Notons $\varphi = (\varphi_{\widehat{x}})^{-1} \circ \alpha$. Cette application est donnée par $\varphi(X) = \pi_*\widetilde{X}_{\widehat{x}}$. Si $\widehat{f}$ désigne le relevé de f à $\widehat{M}$, puisque $\pi \circ \widehat{f} = f \circ \pi$ et $\widehat{f}$ commute aux champs ω-constants, nous avons

$$\begin{aligned} T_xf.\varphi(X) &= \pi_*(T_{\widehat{x}}\widehat{f}.\widetilde{X}_{\widehat{x}}) = \pi_*\widetilde{X}_{\widehat{f}(\widehat{x})} = \pi_*\widetilde{X}_{\widehat{x}.p^{-1}} \\ &= \pi_*(R_p)_*\widetilde{X}_{\widehat{x}.p^{-1}} = \pi_*(\widetilde{\mathrm{Ad}(p^{-1})X})_{\widehat{x}}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Ad}(p^{-1})X \in \mathfrak{g}_{-1}$, nous avons bien $T_xf.\varphi(X) = \varphi(\mathrm{Ad}(p^{-1})X)$. □

Notons $\beta_{\widehat{x}} = \alpha^{-1} \circ \varphi_{\widehat{x}} : T_xM \to \mathfrak{g}_{-1}$. Rappelons que nous disposons d'une application exponentielle dans le fibré de Cartan définie pour des $A \in \mathfrak{g}$ dans un voisinage de 0 par

$$\exp(\widehat{x}, A) = \phi^1_{\widetilde{A}}(\widehat{x}),$$

où $\widetilde{A}$ est le champ ω-constant associée à A. À $\widehat{x}$ fixé, cette exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$, appelé *domaine d'injectivité* de l'exponentielle en $\widehat{x}$, sur un voisinage $\widehat{U}$ de $\widehat{x}$ dans $\widehat{M}$, et la différentielle en 0 de cette application est exactement $\omega_{\widehat{x}}^{-1}$. Appelons $\mathcal{U}_{\widehat{x}} = \omega_{\widehat{x}}^{-1}(\mathcal{U}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}_{-1})$, prenons $\mathcal{U} = T_{\widehat{x}}\pi(\mathcal{U}_{\widehat{x}}) \subset T_xM$ et $U = \pi(\widehat{U}) \subset M$, et définissons

$$\psi_{\widehat{x}} : \mathcal{U} \to U$$

en prenant $\psi_{\widehat{x}}(v) = \pi(\exp(\widehat{x}, \beta_{\widehat{x}}(v)))$. On calcule d'abord la différentielle en 0 de $\psi_{\widehat{x}}$:

$$\begin{aligned} T_0\psi_{\widehat{x}} &= T_{\widehat{x}}\pi \circ \omega_{\widehat{x}}^{-1} \circ \beta_{\widehat{x}} \\ &= T_{\widehat{x}}\pi \circ \omega_{\widehat{x}}^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \varphi_{\widehat{x}} \\ &= \mathrm{id}_{T_xM}, \end{aligned}$$

par construction même de $\varphi_{\widehat{x}}$.

Lemme 6.3.5. *Soient $X \in \mathfrak{g}$, $\widehat{x} \in \widehat{M}$ et $p \in P$. Supposons que les champs ω-constants $\widetilde{X}$ et $\widetilde{\mathrm{Ad}(p)X}$ aient des flots définis jusqu'au temps 1. Alors,*

$$\exp(\widehat{x}.p, X) = \exp(\widehat{x}, \mathrm{Ad}(p)X).p$$

et cette identité a bien un sens (les exponentielles sont définies).

Démonstration. En notant R_p l'action (droite) de p sur $\widehat{M}$, cette propriété provient de l'identité

$$(R_p)^* \widetilde{X} = \widetilde{\mathrm{Ad}(p)X},$$

elle-même découlant de l'équivariance de la connexion de Cartan. □

Notons enfin que puisque le relevé $\widehat{f}$ commute aux champs ω-constant, si $X \in \mathfrak{g}$ est dans le domaine d'injectivité de l'exponentielle en $\widehat{x}$ et en $\widehat{f}(\widehat{x})$, alors

$$\widehat{f}(\exp(\widehat{x}, X)) = \exp(\widehat{f}(\widehat{x}), X).$$

On se donne $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ un sous-voisinage de 0 dans T_xM tel que $T_xf\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ et tel que $\beta_{\widehat{x}}(\mathcal{U}') \subset \mathfrak{g}_{-1}$ soit dans le domaine d'injectivité de l'exponentielle en $\widehat{f}(\widehat{x}) = \widehat{x}.p^{-1}$. Nous avons alors pour tout $v \in \mathcal{U}'$

$$\begin{aligned}
f(\psi_{\widehat{x}}(v)) &= f \circ \pi(\exp(\widehat{x}, \beta_{\widehat{x}}(v))) = \pi \circ \widehat{f}(\exp(\widehat{x}, \beta_{\widehat{x}}(v))) \\
&= \pi(\exp(\widehat{f}(\widehat{x}), \beta_{\widehat{x}}(v))) = \pi(\exp(\widehat{x}.p^{-1}, \beta_{\widehat{x}}(v))) \\
&= \pi(\exp(\widehat{x}, \mathrm{Ad}(p^{-1})\beta_{\widehat{x}}(v))), \text{ par le lemme 6.3.5} \\
&= \pi(\exp(\widehat{x}, \beta_{\widehat{x}}(T_xfv))), \text{ par le lemme 6.3.4} \\
&= \psi_{\widehat{x}}(T_xfv),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Nous donnons à présent un résultat de linéarisabilité d'actions conformes de groupes de Lie simples. Ce résultat est déjà bien connu (voir par exemple [ZF05]), nous proposons tout de même une démonstration avec le formalisme des géométries de Cartan.

Théorème 6.6 ([ZF05])**.** *Soit H un groupe de Lie simple agissant conformément sur une variété pseudo-riemannienne. Soit x un point fixé par l'action. Alors, l'action de H est linéarisable au voisinage de x.*

Démonstration. Soit $\widehat{x}$ un point dans la fibre de x. Puisque $H.x = \{x\}$, notons $\iota : H \hookrightarrow P = CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$ le morphisme d'holonomie en $\widehat{x}$. Puisque ι est injectif, nous confondrons H avec son image dans P.

Lemme 6.3.6. *Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$ une sous-algèbre de Lie simple. Il existe $p \in P = CO(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$ tel que $\mathrm{Ad}(p)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{co}(p,q)$.*

Démonstration. Appelons $\pi_l : \mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n \to \mathfrak{co}(p,q)$ la projection sur la partie linéaire. C'est un morphisme d'algèbres de Lie. On considère sa restriction $\pi_l|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{co}(p,q)$. Cette restriction ne peut être nulle car sinon $\mathfrak{h}$ serait incluse dans une algèbre abélienne. Par simplicité de $\mathfrak{h}$, elle doit être injective. Il existe donc $\tau : \mathfrak{h} \to \mathbf{R}^n$ et un morphisme injectif $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{co}(p,q)$ tels que

$$\mathfrak{h} = \{(\rho(X), \tau(X)), X \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n.$$

La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{co}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$ fait que τ doit vérifier la relation

$$\forall X, Y \in \mathfrak{h},\ \tau([X,Y]) = \rho(X)\tau(Y) - \rho(Y)\tau(X).$$

Si on considère ρ comme une représentation de $\mathfrak{h}$ sur $\mathbf{R}^n$, la relation ci-dessus nous dit que τ est un 1-cocyle. Or, par le théorème de Whitehead (voir [Rag72], Preliminaries, §3.1), pour toute algèbre de Lie simple (sur un corps de caractéristique nulle) et toute représentation de dimension finie, le premier groupe de cohomologie est nul. Par conséquent, τ est un cobord, et ceci nous assure qu'il existe $V \in \mathbf{R}^n$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{h}$, on ait $\tau(X) = \rho(X).V$. On vérifie alors que si $p = \exp(0,-V) \in P$, alors $\mathrm{Ad}(p)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{co}(p,q)$. □

Appliquons ce lemme à $T_e\iota\,\mathfrak{h}$. On a $p \in P$ tel que $\mathrm{Ad}(p)(T_e\iota\,\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{co}(p,q)$. On vérifie simplement que le morphisme d'holonomie en $\widehat{x}.p^{-1}$ s'obtient en conjuguant celui en $\widehat{x}$ par p. Ainsi, quitte à déplacer $\widehat{x}$ dans la fibre au-dessus de x, le plongement ι est à valeurs dans $CO(p,q)$.

Nous considérons alors le difféomorphisme local $\psi_{\widehat{x}} : \mathcal{U} \subset T_xM \to U \subset M$ donné par la proposition 6.3.3. La proposition nous assure que chaque élément du groupe est linéarisable sur un sous-domaine $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Un argument standard nous assure enfin que si l'on se restreint aux éléments de H qui sont dans un voisinage compact de l'identité, ces derniers sont linéarisables sur un ouvert commun, ce qui termine la preuve. □

Représentation d'isotropie

On revient à présent à notre situation et on reprend les notations fixées en début de section : (M,g) est une variété lorentzienne de dimension $n \geqslant 3$ supportant l'action conforme d'un groupe de Lie H localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, $G = PO(2,n)$ et $P \subset G$ est le stabilisateur d'une direction isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$, et $(M,\mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ associée à $(M,[g])$. On note toujours $\pi : \widehat{M} \to M$ le fibré de Cartan, et ω la connexion de Cartan. Nous avons fait l'hypothèse que H fixe un point de M.

Ce que nous venons de détailler sur la linéarisation des actions conformes de groupes de Lie simples ramène l'analyse de l'action de H au voisinage de l'un de ses points fixes x_0 à la compréhension de la représentation d'isotropie $\rho_{x_0} : h \in H \mapsto T_{x_0}h \in \mathrm{GL}(T_{x_0}M)$. En fait, la preuve du théorème 6.6 montre que ρ_{x_0} est conjuguée au morphisme d'holonomie de H en un point $\widehat{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ bien choisi dans la fibre au-dessus de x_0. Le lemme 6.3.6 montre que le morphisme d'holonomie en $\widehat{x}_0$ est un morphisme *injectif* de groupes de Lie

$$H \hookrightarrow CO(1,n-1)$$

En différenciant ce morphisme, nous obtenons un morphisme injectif $f : \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \to \mathfrak{co}(1,n-1)$. Or par simplicité de $\mathfrak{h}$, $f(\mathfrak{h}) = f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) \subset [\mathfrak{co}(1,n-1),\mathfrak{co}(1,n-1)] = \mathfrak{o}(1,n-1)$ et f est ainsi à valeurs dans $\mathfrak{o}(1,n-1)$.

Proposition 6.3.7. *Soit $f : \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \to \mathfrak{o}(1,n-1)$ un morphisme injectif d'algèbres de Lie. Alors il existe un isomorphisme $u : \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \to \mathfrak{o}(1,2)$ et $a \in \mathrm{Int}(\mathfrak{o}(1,n-1))$ tels que $f = a \circ \iota \circ u$, où ι est l'injection naturelle*

$$A \in \mathfrak{o}(1,2) \mapsto \begin{pmatrix} A & \\ & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(1,n-1).$$

Démonstration. Donnons-nous (X, Y, Z) un $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$-triplet (cf. conventions en début de chapitre). Commençons par voir que $\mathbf{R}.X$ s'envoie par f sur un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{o}(1, n-1)$. Pour cela, notons que f induit une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ sur $\mathfrak{o}(1, n-1)$, simplement donnée par $\mathrm{ad}_{\mathfrak{o}(1,n-1)} \circ f$. En décomposant cette représentation en somme de représentations irréductibles, et en utilisant la classification des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, nous voyons que l'action adjointe de $f(X)$ sur $\mathfrak{o}(1, n-1)$ est $\mathbf{R}$-diagonalisable. Ainsi, $\mathfrak{o}(1, n-1)$ admet une décomposition de Cartan pour laquelle $\mathbf{R}.f(X)$ est un sous-espace de Cartan.

Donnons nous alors $a' \in \mathrm{Int}(\mathfrak{o}(1, n-1))$ tel que $a'(f(X)) =: X_0$ appartient au sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{o}(1, n-1)$ (associé à $\theta(X) = -{}^tX$), dont nous noterons $\{\alpha, -\alpha\}$ le système de racines restreintes. Les relations de crochet dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ nous assurent alors qu'à permutation des racines près, $a'f(Y) \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $a'f(Z) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Enfin, la relation $[Y, Z] = X$ implique que $a'f(Y)$ et $a'f(Z)$ sont conjugués par θ. On compose alors à nouveau $a'f$ par un autre automorphisme intérieur qui va envoyer $a'f(Y)$ sur le bon vecteur de $\mathfrak{g}_\alpha$, et on obtient le plongement voulu. □

Nous pouvons alors énoncer le

Corollaire 6.3.8. *Si l'action de H fixe un point x_0, alors H est isomorphe à* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Démonstration. Par le la proposition 6.3.7, quitte à conjuguer à l'arrivée et par connexité de H, le morphisme d'holonomie est en fait à valeurs dans le sous-groupe de $SO_0(1, n-1)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & \mathrm{id} \end{pmatrix},\ A \in SO_0(1,2) \right\} \subset SO_0(1, n-1).$$

Nous avons donc un morphisme injectif $H \hookrightarrow SO_0(1,2) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Ce dernier est nécessairement surjectif par connexité. □

Jusqu'à la fin de cette section sur l'étude locale au voisinage d'un point fixe, H désigne le groupe de Lie $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Par conséquent, si g est une métrique arbitraire dans la classe conforme (son choix n'a pas d'importance ici), on a une isométrie $(T_{x_0}M, g_{x_0}) \simeq \mathbf{R}^{1,n-1}$ telle que, modulo une identification $H \simeq SO_0(1,2)$, la représentation d'isotropie en x_0 est le morphisme

$$\rho_{x_0} : A \in SO_0(1,2) \mapsto \begin{pmatrix} A & \\ & I \end{pmatrix} \in SO_0(1, n-1). \tag{6.2}$$

Feuilletage d'un voisinage d'un point fixe

Le théorème 6.6 nous assure que l'action de H est linéarisable au voisinage de x_0. Le difféomorphisme local qui linéarise est $\psi_{\widehat{x}_0} : \mathcal{U} \subset T_{x_0}M \to U \subset M$ (fourni par la proposition 6.3.3), pour un point $\widehat{x}_0$ bien choisi dans la fibre de x_0. Appelons $V \subset H$ le voisinage de l'identité dont les éléments sont linéarisés, et $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ le sous-domaine sur lequel ils sont conjugués à leur différentielle par $\psi_{\widehat{x}_0}$ et notons $U' = \psi_{\widehat{x}_0}(\mathcal{U}')$. Pour fixer les idées, nous décrétons que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont deux boules centrées en 0, pour une norme euclidienne arbitraire sur $T_{x_0}M$.

Nous reprenons l'identification $(T_{x_0}M, g_{x_0}) \simeq \mathbf{R}^{1,n-1}$ et nous décomposons orthogonalement $\mathbf{R}^{1,n-1} = \mathbf{R}^{1,2} \oplus \mathbf{R}^{n-3}$ en accord l'expression (6.2) de la représentation d'isotropie. Quand nous parlerons de « $\mathbf{R}^{n-3}$ » ou « $\mathbf{R}^{1,2}$ », nous ferons référence aux sous-espaces de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ dans cette décomposition. Pour tout $x \in U'$, $\psi_{\widehat{x}_0}^{-1}(x)$ est de la forme

$(v_1, v_2) \in \mathcal{U}' \subset \mathbf{R}^{1,2} \oplus \mathbf{R}^{n-3}$. Définissons

$$\mathcal{F}_x = \psi_{\widehat{x_0}}(\mathcal{U} \cap (\mathbf{R}^{1,2} \times \{v_2\})).$$

Puisque $\mathcal{U}$ est une boule, tous les $\mathcal{F}_x$ sont des sous-variétés connexes de U, et elles feuillettent U (voir figure ci-dessous). Par construction, si $V \subset H$ désigne le voisinage de l'identité dont les éléments sont linéarisés sur U', pour tout $h \in V$ et tout $y \in \mathcal{F}_x \cap U'$, on a $h.y \in \mathcal{F}_x$. L'action globale de H se restreint donc en une action locale sur chaque feuille $\mathcal{F}_x \cap U'$.

Les points fixes. Premièrement, nous voyons que $F_0 \cap U' = \psi_{\widehat{x_0}}(\mathcal{U}' \cap \mathbf{R}^{n-3})$, l'inclusion $\subset$ provenant du fait que tout vecteur de $\mathcal{U}'$ qui a une composante sur $\mathbf{R}^{1,2}$ ne peut pas être fixé par tout $\rho_{x_0}(SO_0(1,2))$, et pour l'inclusion $\supset$, par linéarisation tout point de $\psi_{\widehat{x_0}}(\mathcal{U}' \cap \mathbf{R}^{n-3})$ est fixé par tout un voisinage de l'identité de H, donc par tout H par connexité. Ainsi, dans U', les points qui sont fixés par H forment une sous variété de dimension $n-3$ et nous voyons que F_0 rencontre chaque feuille de $\mathcal{F}_x$ en un et un seul point (cf figure). Puisque ce que nous décrivons est valable au voisinage de *tout point fixe*, F_0 est une sous-variété de codimension $n-3$ de M car les difféomorphismes de linéarisation $\psi_{\widehat{x}}$ en donnent des cartes. Cette sous-variété est nécessairement fermée puisqu'être fixé par H est une condition fermée, et M étant compacte, nous savons que F_0 est compacte. Nous allons démontrer plus bas que F_0 est de signature riemannienne.

Orbites locales dans les feuilles. Appelons q la forme quadratique de $\mathbf{R}^{1,2}$. Pour $x \in \mathbf{R}^{n-3}$ et $\lambda \in \mathbf{R}^*$, appelons

$$\mathcal{O}(x,\lambda) = \psi_{\widehat{x_0}}(\mathcal{U} \cap (\{q = \lambda\} \times \{x\})) \text{ et}$$
$$\mathcal{O}'(x,\lambda) = \psi_{\widehat{x_0}}(\mathcal{U}' \cap (\{q = \lambda\} \times \{x\}))$$

et si $\lambda = 0$, on prend les mêmes définitions excepté que dans les deux cas on retire le point $\psi_{\widehat{x_0}}(0,x)$. La forme de la représentation d'isotropie mise en évidence en (6.2) nous assure alors que

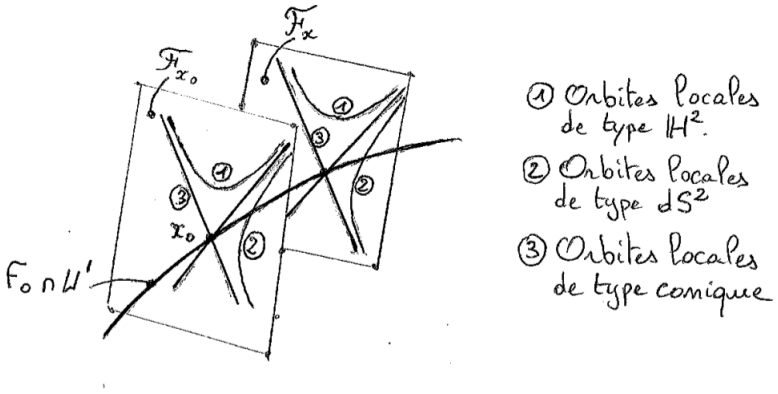
$$\forall h \in V,\ \forall x \in \mathbf{R}^{n-3},\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ h.\mathcal{O}'(x,\lambda) \subset \mathcal{O}(x,\lambda).$$

Par conséquent,

Lemme 6.3.9. *Pour tous $x \in \mathbf{R}^{n-3}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathcal{O}'(x,\lambda)$ est contenu dans une seule orbite locale de H.*

Démonstration. Pour le voir il suffit de constater que dans $\mathcal{U}' \cap (\{q = \lambda\} \times \{x\}) \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$, deux points u_1 et u_2 peuvent être joints en appliquant un nombre fini d'éléments de V : $\exists g_1, \ldots, g_s \in V \subset H$ tels que $u_2 = g_s.\ldots.g_1.u_1$ et tel que $\forall i,\ g_i.\ldots.g_1.u_1 \in \mathcal{U}' \cap (\{q = \lambda\} \times \{x\})$. Ceci est vérifié par connexité de $\mathcal{U}' \cap (\{q = \lambda\} \times \{x\})$ ($\mathcal{U}'$ est une boule). On peut en effet choisir un chemin γ joignant u_1 à u_2 et un sous-voisinage $V' \subset V$ tels que $\forall u \in \gamma$, $V'.u \subset \mathcal{U}' \cap (\{q = \lambda\} \times \{x\})$. On peut alors recouvrir γ par un nombre fini de voisinages $V'.u_i$, ce qui va nous fournir les éléments $g_1, \ldots, g_s \in V$. □

Par analogie avec l'espace de Minkowski, si $\lambda < 0$ on dit que $\mathcal{O}'(x,\lambda)$ est une orbite locale de type $\mathbf{H}^2$, si $\lambda > 0$ on dit que $\mathcal{O}'(x,\lambda)$ est une orbite locale de type $\mathbf{dS}^2$ et si $\lambda = 0$ on dit que $\mathcal{O}'(x,\lambda)$ est une orbite locale de type conique (en toute rigueur, il faudrait dire "est contenu dans une orbite locale de type" ...). Le dessin ci-dessous résume la situation.



Allure locale des orbites au voisinage de x_0

Chaque orbite locale est bien-entendu contenue dans une orbite *globale* du groupe H sur M. Pour tout $y \in \mathcal{O}'(x,\lambda)$, il existe un voisinage de l'identité $V' \subset H$ tel que $V'.y \subset \mathcal{O}'(x,\lambda)$. Toute orbite locale $\mathcal{O}'(x,\lambda)$ étant une sous-variété de dimension 2 de U', la H-orbite $H.y$ est nécessairement de dimension 2. Ceci est donc valable pour tout point de U' qui n'est pas dans F_0.

Signature des orbites

Le difféomorphisme local $\psi_{\widehat{x}_0} : \mathcal{U} \subset T_{x_0}M \to U \subset M$ n'ayant aucune raison d'être conforme, on n'a pas immédiatement de l'information sur la signature des orbites que nous venons d'exhiber. Cependant, la connaissance de l'isotropie et de sa dynamique va nous permettre de déterminer quelle est la signature des H-orbites des points de U'.

Signatures de F_0 et des feuilles $\mathcal{F}_x$. Comme annoncé, nous démontrons que F_0 est une sous-variété riemannienne de $(M,[g])$. En effet, l'étude que nous venons de mener montre que pour tout $x_0 \in F_0$, si $\psi_{\widehat{x}_0}$ est le difféomorphisme local de la propriété 6.3.3 pour un $\widehat{x}_0$ bien choisi, alors $T_{x_0}F_0 = T_0\psi_{\widehat{x}_0}E$, où $E \subset T_{x_0}M$ est un certain sous-espace euclidien de codimension 3. Or, la même proposition 6.3.3 nous assure que $T_0\psi_{\widehat{x}} = \mathrm{id}_{T_xM}$ pour tous x et $\widehat{x}$. L'espace tangent $T_{x_0}F_0$ est donc de signature riemannienne, et ceci en tout point de F_0. On notera également qu'en tout $x_0 \in F_0$, F_0 et la feuille $\mathcal{F}_{x_0}$ contenant x_0 sont orthogonales. Ceci implique que $T_{x_0}\mathcal{F}_{x_0}$ est de signature lorentzienne. Ainsi, si $y \in \mathcal{F}_{x_0}$ est suffisamment proche de x_0, l'espace tangent $T_y\mathcal{F}_{x_0}$ est également de signature lorentzienne. Donc quitte à réduite les ouverts $\mathcal{U}'$ et U', toutes les feuilles sont de signature lorentzienne.

Stabilisateurs de points dans les $\mathcal{O}(x,\lambda)$. La dernière information que nous donne la linéarisation de l'action est relative aux stabilisateurs des points voisins de x_0.

Donnons-nous une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbf{R}^{1,2}$ dans laquelle q s'écrit $-x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Dans $\mathbf{R}^{1,2}$, le stabilisateur sous-l'action linéaire de $SO_0(1,2)$ de tout point proportionnel à e_1 est $SO(2)$, celui d'un point proportionnel à e_2 est $SO(1,1)$ et celui du vecteur isotrope e_1+e_2 est le sous-groupe unipotent $U = \{u_t, t \in \mathbf{R}\}$, où

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 & t & -t^2/2 \\ & 1 & -t \\ & & 1 \end{pmatrix} \in SO_0(1,2).$$

Ces informations vont passer à travers la linéarisation. On définit des courbes dans U' comme suit. Pour tout $x \in \mathbf{R}^{n-3}$,on prend $\Delta_T(x) = \psi_{\widehat{x}_0}((\mathbf{R}_+.e_1 \times \{x\}) \cap \mathcal{U}')$, $\Delta_E(x) = \psi_{\widehat{x}_0}((\mathbf{R}_+.e_2 \times \{x\}) \cap \mathcal{U}')$ et $\Delta_L(x) = \psi_{\widehat{x}_0}((\mathbf{R}_+.(e_1+e_2) \times \{x\}) \cap \mathcal{U}')$. Tout point de Δ_T est situé sur une orbite locale de type $\mathbf{H}^2$, tout point de Δ_E sur une orbite locale de type $\mathbf{dS}^2$ et tout point de Δ_L sur une orbite locale de type conique. On notera enfin que chacune de ces courbes est incluse dans les feuilles et que chaque orbite locale de type $\mathbf{H}^2$ rencontre une courbe $\Delta_T(x)$ une et une seule fois, tout comme chaque orbite de type $\mathbf{dS}^2$ rencontre une courbe $\Delta_E(x)$ une et une seule fois et que chaque orbite de type conique contient une et une seule courbe $\Delta_L(x)$.

Lemme 6.3.10. *Pour tout $x \in \mathbf{R}^{n-3}$, tout point de $\Delta_T(x)$ (resp. $\Delta_E(x)$, $\Delta_L(x)$) admet pour stabilisateur (pour l'action globale de H sur M) le sous-groupe $SO(2)$ (resp. $SO(1,1)$, U).*

Démonstration. Soient $x \in \mathbf{R}^{n-3}$ et $t \in \mathbf{R}$ tels que $(te_1, x) \in \mathcal{U}'$. Nous voyons que pour tout $h \in SO(2) \cap V$, $h.\psi_{\widehat{x}_0}(te_1, x) = \psi_{\widehat{x}_0}(te_1, x)$. Ceci montre que $SO(2) \subset \mathrm{Stab}_H(\psi_{\widehat{x}_0}(te_1, x))$, et puisque ce stabilisateur est de dimension 1, nous avons égalité. On montre de la même façon que $SO(1,1)$ est le stabilisateur de tout point de $\Delta_E(x)$ et que U est le stabilisateur de tout point de $\Delta_L(x)$. □

Ainsi,
- chaque orbite locale de type $\mathbf{H}^2$ est incluse dans une orbite globale qui est difféomorphe à $H/SO(2)$;
- chaque orbite locale de type $\mathbf{dS}^2$ est incluse dans une orbite globale qui est difféomorphe à $H/SO(1,1)$;
- chaque orbite locale de type conique est incluse dans une orbite globale qui est difféomorphe à H/U.

Nous pouvons alors utiliser le résultat ci-dessous pour conclure quant à la signature des orbites locales.

Lemme 6.3.11. *Soit $I \in \{SO(2), SO(1,1), U\}$ un tel sous-groupe de $SO_0(1,2)$. Si l'espace homogène $SO_0(1,2)/I$ admet une classe conforme sous-lorentzienne laissée invariante par $SO_0(1,2)$, cette dernière est*
- *riemannienne si $I = SO(2)$;*
- *lorentzienne ou dégénérée si $I = SO(1,1)$;*
- *dégénérée si $I = U$.*

Démonstration. Notons $[g]$ cette classe conforme, $\mathcal{O} = SO_0(1,2)/I$ et $x_0 = I \in \mathcal{O}$. Il est encore une fois judicieux de considérer la représentation d'isotropie en x_0. Dans les trois cas, on analyse cette classe conforme en la transportant par un difféomorphisme $SO_0(1,2)$-équivariant de $\mathcal{O}$ sur le demi-hyperboloïde supérieur, l'hyperboloïde à une nappe ou le cône épointé de $\mathbf{R}^{1,2}$ suivant ce qu'est I. Dans les trois cas, on connaît explicitement la représentation d'isotropie de I sur l'espace tangent $T_{x_0}\mathcal{O}$.

Dans le cas $I = SO(2)$, puisque l'action linéaire de I sur $T_{x_0}\mathcal{O}$ est transitive sur les droites, il ne peut laisser invariante aucune direction isotrope et g est nécessairement riemannienne.

Dans le cas $I = SO(1,1)$, son action sur $T_{x_0}\mathcal{O}$ préserve deux directions. Si g était riemannienne, le groupe conforme d'un plan riemannien étant de la forme $\mathbf{R}_+^* \times O(2)$, cela impliquerait que $SO(1,1)$ agit par homothéties sur $T_{x_0}\mathcal{O}$, ce qui n'est bien sûr pas le cas.

Dans le cas $I = U$, son action sur $T_{x_0}\mathcal{O}$ ne peut pas préserver les deux directions isotropes d'une métrique lorentzienne en dimension 2, et par le même argument que ci-dessus, si g était riemannienne, U devrait agir par homothéties sur $T_{x_0}\mathcal{O}$, ce qui n'est pas le cas. □

Ainsi, les orbites locales de type $\mathbf{H}^2$ sont riemanniennes, celles de type $\mathbf{dS}^2$ sont lorentziennes ou dégénérées et celles de type conique sont dégénérées.

6.3.2 Adhérence des orbites riemanniennes

L'étude précédente est locale, elle ne donne des informations que sur des petits morceaux d'orbites au voisinage d'un point fixe mais rien sur des phénomènes dynamiques globaux tels que la récurrence. Par exemple, il est *a priori* possible que deux, voire une infinité d'orbites locales de type $\mathbf{H}^2$ associées à des λ distincts appartiennent en fait à la même orbite globale. Cependant, tous les phénomènes ne peuvent pas se produire comme le montre le lemme suivant.

Lemme 6.3.12. *Toute H-orbite de signature riemannienne ne contient aucun point fixe dans son adhérence.*

Démonstration. Soit $H.x$ une orbite riemannienne. Supposons $\overline{H.x} \cap F_0 \neq \varnothing$. On a donc (h_n) une suite qui tend vers l'infini dans H telle que $h_n.x \to x_0 \in F_0$. On reprend les objets et les notations de la section précédente. Pour n assez grand, $h_n.x$ rentre dans l'ouvert de linéarisation U' autour de x_0. Puisque $H.x$ est riemannienne, $h_n.x$ se situe nécessairement sur des orbites locales de type $\mathbf{H}^2$. L'orbite $H.x$ en tant qu'espace homogène est donc $H/SO(2)$. Disons que $h_n.x \in \mathcal{O}(x_n, \lambda_n)$ avec $x_n \in \mathbf{R}^{n-3} \to 0$ et $\lambda_n \to 0$ par valeurs inférieures. Puisque $\mathcal{O}(x_n, \lambda_n)$ est une orbite locale qui rencontre la courbe $\Delta_T(x_n)$, quitte à modifier h_n, nous pouvons supposer que $h_n.x$ est sur la courbe $\Delta_T(x_n)$. En particulier, le stabilisateur de $h_n.x$ dans H est $SO(2)$, et ce quel que soit n. Or, $h_n.x$ est une suite qui part à l'infini dans $H.x$ vu comme l'espace homogène $H/SO(2)$. Son stabilisateur ne peut donc pas rester constant égal à $SO(2)$, car le normalisateur de $SO(2)$ dans H est $SO(2)$ lui-même. Ceci termine la preuve. □

En particulier, nous observons que si la variété contient des points fixés par tout H, alors il existe des orbites de dimension 2 dont l'adhérence ne contient aucun point fixe (il suffit de prendre n'importe quelle orbite contenant une orbite locale de type $\mathbf{H}^2$ voisine de n'importe quel point fixe).

6.3.3 Une alternative

On démontre enfin qu'en toute généralité (*ie* avec ou sans existence de points fixes), on a l'alternative de la proposition ci-dessous.

Proposition 6.3.13. *Soit (M, g) une variété lorentzienne compacte de dimension $n \geqslant 3$ munie d'une action conforme essentielle d'un groupe de Lie H localement isomorphe à* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. *Alors,*

- *ou bien il existe une H-orbite de dimension 1 ;*
- *ou bien il existe un compact $K \subset M$, qui est H-invariant, et dans lequel toutes les orbites sont de dimension 2.*

Remarque 6.3.5. Visuellement, on peut penser dans le deuxième cas à la situation où $(M,[g])$ est la variété de Hopf décrite à la remarque 6.3.2. Le compact est alors M toute entière.

Démonstration. Supposons qu'il n'existe aucune orbite de dimension 1. On a une alternative très simple. Ou bien il n'existe aucun point fixe dans M, et puisqu'on a supposé qu'il n'y a aucune orbite de dimension 1, le fermé $F_{\leqslant 2}$ convient. Ou bien il existe des points fixes, et dans ce cas il existe des orbites riemanniennes de dimension 2 et par le lemme 6.3.12, si $\mathcal{O}$ est n'importe quelle orbite riemannienne, $K \coloneqq \overline{\mathcal{O}}$ ne contient aucun point fixe. □

6.4 Platitude conforme pour les actions essentielles analytiques

Nous pouvons à présent passer à la preuve à proprement parler du théorème 6.5. Nous désignons toujours par H un groupe de Lie localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ agissant conformément et essentiellement sur une variété lorentzienne compacte $(M,[g])$ de dimension au moins 3. On appelle $(M,\mathcal{C})$ la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, et on note $\pi : \widehat{M} \to M$ le fibré de Cartan associé. Nous supposons maintenant que M et la structure conforme $[g]$ sont analytiques réelles. On notera bien qu'*a priori* H peut être autre chose que $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$.

6.4.1 Platitude sous l'existence d'orbites de dimension 1

S'il existe une H-orbite de dimension 1 dans M, on va pouvoir conclure rapidement que $(M,[g])$ est conformément plate en invoquant le résultat suivant.

Théorème 6.7 ([FM13], Théorème 1.2)**.** *Soient (M,g) une variété lorentzienne analytique et X un champ de Killing conforme admettant une singularité en x_0. On a l'alternative :*

- *ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0 ;*
- *ou bien $(M,[g])$ est conformément plate sur un voisinage de x_0.*

Dans tous les cas, X est analytiquement conjuguée à son holonomie en x_0

L'hypothèse d'analyticité est bien nécessaire, puisque l'on peut construire des exemples de variété lorentziennes lisses, non conformément plates, et admettant des champs de Killing conformes non linéarisables au voisinage d'une singularité. Le lecteur pourra également consulter [Fra12c] (Chapitre 3, §3.4) pour avoir les grandes lignes de la démonstration.

Proposition 6.4.1. *S'il existe une H-orbite de dimension 1, alors $(M,[g])$ est conformément plate.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ une H-orbite de dimension 1. Toute sous-algèbre de dimension 2 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ est conjuguée à l'algèbre affine $\mathfrak{aff}(\mathbf{R})$. Choisissons alors un point $x_0 \in \mathcal{O}$ dont l'algèbre du stabilisateur est $\mathfrak{h}_{x_0} = \mathfrak{aff}(\mathbf{R}) = \mathrm{Vect}(X,Y)$. On va démontrer que le flot ϕ_Y^t du champ de vecteur conforme associé à Y n'est pas linéarisable au voisinage de x_0, ce qui sera suffisant avec le théorème 6.7.

L'orbite $\mathcal{O}$ est un espace homogène de dimension 1 sous l'action d'un groupe localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Dans [Ghy01], on donne la classification des espaces homogènes de dimension 1. Dans le cas où le groupe qui agit est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, ce sont toujours des relevés de l'action projective de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ sur $\mathbf{S}^1 \simeq \mathbf{R}P^1$ (on obtient le cercle dans le cas des revêtements finis $\mathrm{PSL}_k(2,\mathbf{R})$ et la droite pour $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$). Dans tous les cas, le flot ϕ_Y^t a la même dynamique au voisinage de x_0 dans $\mathcal{O}$: il s'agit de l'action projective de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au voisinage de $[1:0]$ dans $\mathbf{R}P^1$. On a notamment une paramétrisation locale $\alpha : [0,\varepsilon[\to \mathcal{O}$ telle que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha'(0) \neq 0$ et

$$\forall s \in [0,\varepsilon[,\ \forall t > 0,\ \phi_Y^t(\alpha(s)) = \alpha\left(\frac{s}{1+ts}\right).$$

Supposons alors que ϕ_Y^t est linéarisable sur un voisinage de x_0 (dans M). Donnons-nous $0 \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \subset T_{x_0}M$ des voisinages ouverts de l'origine et $\psi : \mathcal{U} \to U \subset M$ un difféomorphisme local tels que $\psi(0) = x_0$ et pour de petits t, on ait $T_{x_0}\phi_Y^t\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ et $\forall u \in \mathcal{U}'$, $\phi_Y^t(\psi(u)) = \psi(T_{x_0}\phi_Y^t u)$. Quitte à changer d'échelle, nous supposons que ceci est valable pour $t = 1$ et on note $F := \phi_Y^1$. Quitte à réduire l'intervalle $[0,\varepsilon[$, nous pouvons supposer que la courbe α est dans $\psi(\mathcal{U}')$. Comme F applique la courbe α sur elle-même (et donc en restant dans l'ouvert de linéarisation), on peut linéariser l'action de ses itérées F^k sur la courbe α. Notons $\beta = \psi^{-1} \circ \alpha : [0,\varepsilon[\to T_{x_0}M$. Par linéarisation, nous avons

$$\forall k > 0,\ \forall s \in [0,\varepsilon[,\ (T_{x_0}F)^k\beta(s) = \beta\left(\frac{s}{1+ks}\right) \tag{6.3}$$

C'est à ce niveau que l'on peut voir la contradiction. Dans [Fra12b] (Lemma 4.6), on démontre, par des considérations sur les sous-espaces caractéristiques de $T_{x_0}F$, que d'une façon générale un tel phénomène dynamique ne peut être obtenu en itérant une matrice que si $\beta'(0) = 0$. Or, la paramétrisation de α a été obtenue en prenant une carte affine de $\mathbf{R}P^1$ au voisinage de $[1:0]$, on est donc assuré que $\alpha'(0) \neq 0$, ce qui contredit donc la linéarisabilité de F. □

6.4.2 Preuve du théorème principal

Nous rentrons à présent dans le coeur de la preuve du théorème 6.5.

Hypothèse globale. À partir de maintenant, nous supposons qu'il n'existe aucune H-orbite de dimension 1.

D'après la proposition 6.3.13, il existe donc un compact H-invariant $K_0 \subset M$, dans lequel toutes les H-orbites sont de dimension égale à 2. Par compacité et analyticité de $(M,[g])$, le théorème 4.4 nous donne un $r_0 > 0$ tel que tout générateur de Killing d'ordre r_0 en un point $x \in M$ s'intègre au voisinage de x en un champ de Killing local. Prenons $S \subset H$ le sous-groupe connexe engendré par l'algèbre affine $\mathfrak{aff}(\mathbf{R}) = \mathrm{Vect}(X,Y)$. On calcule que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ est engendré par

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 \\ & 1 & -t \\ & & 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}\right\} \text{ et } \left\{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^s & & \\ & 1 & \\ & & \mathrm{e}^{-s} \end{pmatrix},\ s \in \mathbf{R}\right\}.$$

Ainsi, son adhérence de Zariski dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ est le groupe

$$\left\{\begin{pmatrix} x & & \\ & 1 & \\ & & x^{-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 \\ & 1 & -t \\ & & 1 \end{pmatrix};\ x \in \mathbf{R}^*,\ t \in \mathbf{R}\right\},$$

qui est en fait le produit semi-direct $\mathbf{R}^* \ltimes \mathbf{R}$, pour l'action de $\mathbf{R}^*$ sur $\mathbf{R}$ par multiplication, c'est-à-dire le groupe affine de la droite réelle. Ainsi, S vérifie la propriété (*) et est moyennable (car résoluble).

On désigne par ι l'application $\widehat{M} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ associée à l'action de H (voir (5.1) section 5.2.1), et $\mathcal{D}^{r_0}K$ fait référence à la r_0-ième dérivée covariante de l'application courbure K.

Puisque K_0 est H-invariant, d'après les propositions 5.3.1 et 5.2.3, il existe $x_0 \in K_0$ un point de Zimmer pour $(S, \iota, \mathcal{D}^{r_0}K)$. Nous le choisissons et le fixons jusqu'à la fin de la preuve.

D'après la proposition 5.2.3, cela signifie que pour tout $\widehat{x}_0 \in \widehat{M}$ au-dessus de x_0, il existe un sous-groupe algébrique $P^{\widehat{x}_0} \subset P$ tel que

1. l'action adjointe de $P^{\widehat{x}_0}$ sur $\iota_{\widehat{x}_0}(\mathfrak{h})$ "se surjecte" sur $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$;
2. tout $A \in \mathfrak{p}^{\widehat{x}_0}$ s'intègre au voisinage de $\widehat{x}_0$ en un champ de Killing local $\widehat{A}$ tel que $\widehat{A}(\widehat{x}_0) = X$.

Signature de l'orbite de x_0

L'algèbre de Lie du stabilisateur $\mathrm{Stab}_H(x_0)$, que nous notons toujours $\mathfrak{h}_{x_0}$, est une droite de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ qui est préservée par $\mathrm{Ad}(S)$, d'après le lemme 5.3.3. Nécessairement, $\mathfrak{h}_{x_0} = \mathbf{R}.Y$. Par la proposition 5.3.5, on dispose d'une forme quadratique Q_{x_0} sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_{x_0}$, de forme polaire B_{x_0}, sous-lorentzienne et qui est conformément invariante par $\overline{\mathrm{Ad}}(S)$. Rappelons que cette forme quadratique s'obtient par restriction de g_{x_0} à l'espace tangent en x_0 à l'orbite $H.x_0$, pour toute métrique g dans la classe conforme.

Supposons que $\overline{Z}$ soit isotrope. Alors pour tout t, $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tY})\overline{Z} = \overline{Z} + t\overline{X}$ l'est également. Nous devrions donc avoir $2tB_{x_0}(\overline{Z}, \overline{X}) + t^2 Q_{x_0}(\overline{X}) = 0$ pour tout t. Le plan $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_{x_0}$ devrait être totalement isotrope, ce qui est impossible pour une forme sous-lorentzienne. Donc $\overline{Z}$ ne peut pas être isotrope. Comme $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX})\overline{Z} = \mathrm{e}^t\overline{Z}$, la distorsion conforme de $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX})$ par rapport à Q_{x_0} doit être e^{2t}. Par conséquent, nous avons $Q_{x_0}(\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX}).X) = \mathrm{e}^{2t}Q_{x_0}(\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX}).X) = Q_{x_0}(\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX}).X)$ et $B_{x_0}(\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX}).X, \overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX}).Z) = \mathrm{e}^t B_{x_0}(\overline{X}, \overline{Z}) = \mathrm{e}^{2t}B_{x_0}(\overline{X}, \overline{Z})$. Ainsi, $\overline{X}$ doit être isotrope et orthogonal à $\overline{Z}$. Le plan $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_{x_0}$ est donc dégénéré de pseudo-signature (0+), la dégénérescence étant portée par $\overline{X}$.

Géométriquement, ceci signifie que le plan tangent à l'orbite en x_0 est dégénéré, la dégénérescence étant portée par X_{x_0}. Ainsi, l'orbite $H.x_0$ est dégénérée de pseudo-signature (0+). L'orbite de x_0 sous le flot ϕ_X^t est donc une courbe immergée de type lumière.

Travail algébrique sur l'holonomie

Avec les notations de la propriété 5.2.2, nous avons un morphisme algébrique surjectif $\rho_{\widehat{x}_0} : P^{\widehat{x}_0} \to \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$. Considérons un sous-groupe à un paramètre (p^t) qui s'envoie par $\rho_{\widehat{x}_0}$ sur $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})$, et écrivons sa décomposition de Jordan $p^t = p_h^t p_u^t p_e^t$ en produit commutatif d'éléments hyperbolique, unipotent et elliptique (voir [Mor05], §4.3). Puisque le groupe $P^{\widehat{x}_0}$ est algébrique, cette décomposition est interne (*ie* $\forall t$, $p_h^t, p_u^t, p_e^t \in P^{\widehat{x}_0}$) et par unicité

de la décomposition de Jordan, p_h^t, p_u^t et p_e^t sont des sous-groupes à un paramètre de $P^{\widehat{x_0}}$. Or, comme $\rho_{\widehat{x_0}}$ est algébrique, il envoie élément hyperbolique sur élément hyperbolique, et de même pour unipotent et elliptique. Puisqu'à l'arrivée, $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})$ est hyperbolique, en utilisant à nouveau l'unicité de la décomposition de Jordan, $\rho_{\widehat{x_0}}(p_u^t) = \rho_{\widehat{x_0}}(p_e^t) = 1$, et p_h^t est donc un antécédent de $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})$. En d'autres termes, nous pouvons choisir un groupe à un paramètre de $P^{\widehat{x_0}}$, formé d'éléments hyperboliques, qui s'envoie par $\rho_{\widehat{x_0}}$ sur $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})$. Appelons toujours $(p^t)_{t\in\mathbf{R}}$ ce groupe à un paramètre.

Lemme 6.4.2. *Un groupe à un paramètre hyperbolique dans P est nécessairement conjugué (dans P) à un groupe à un paramètre dans $\exp(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}(2,n)$ est le sous-espace de Cartan mis en évidence à la section 2.3.1.*

Démonstration. On se donne une base $(e_1,\dots,e_{n+2})$ de $\mathbf{R}^{2,n}$, comme à la section 2.3.1, de sorte que P soit le stabilisateur de la direction isotrope $\mathbf{R}.e_1$. Soit p^t un sous-groupe à un paramètre hyperbolique de P. Il est de la forme $p^t = \exp(tM)$ où

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda & u & 0 \\ \hline & A & -J\,{}^t u \\ \hline & & -\lambda \end{array}\right),$$

avec $A \in \mathfrak{o}(1,n-1)$. Puisque p^t est hyperbolique, A doit être $\mathbf{R}$-diagonalisable. Le sous-groupe à un paramètre $\exp(tA)$ est donc hyperbolique et par algébricité de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{o}(1,n-1)} : O(1,n-1) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{o}(1,n-1))$, $\mathrm{Ad}(\exp(tA)$ est également $\mathbf{R}$-diagonalisable, ce qui signifie que A engendre un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{o}(1,n-1)$. Quitte à changer (orthogonalement) la base $(e_2,\dots,e_{n+1})$, A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & 0 & \\ & & -\mu \end{pmatrix},$$

donc quitte à conjuguer *dans* P, nous avons

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda & u & 0 \\ \hline & \mu & \\ & 0 & -J\,{}^t u \\ & -\mu & \\ \hline & & -\lambda \end{array}\right).$$

On utilise alors un lemme affine élémentaire. Pour $v \in \mathbf{R}^n$ notons $\mathcal{T}_v$ la translation de vecteur v.

Lemme 6.4.3. *Soit $f \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ une transformation affine de la forme*

$$f = A \circ \mathcal{T}_v, \ \text{où } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors, il existe une translation $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ telle que gfg^{-1} s'écrit $A \circ \mathcal{T}_{v'}$, avec $v' \in \mathbf{R}^n$ tel que $A\mathcal{T}_{v'} = \mathcal{T}_{v'}A$

Démonstration du lemme. Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n)$, on a $f(u) = (f_1(u_1), \dots, f_n(u_n))$ où l'on note $f_i(u_i) = \lambda_i u_i + v_i$. On définit alors $u^0 \in \mathbf{R}^n$ par

- si $\lambda_i \neq 1$, $u_i^0 \in \mathbf{R}$ est le point fixe de f_i ;
- si $\lambda_i = 1$, $u_i^0 = 0$.

Ainsi, si $\lambda_i \neq 1$, nous avons $f_i(u_i + u_i^0) - u_i^0 = \lambda_i u_i$. Appelons alors $g = \mathcal{T}_{-u^0}$, et observons gfg^{-1}. Nous avons pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $gfg^{-1}(u) = (f_1'(u_1), \dots, f_n'(u_n))$, où $f_i' = f_i$ si $\lambda_i = 1$ et $f_i'(u_i) = \lambda_i u_i$ si $\lambda_i \neq 1$. Ainsi, $gfg^{-1} = A \circ \mathcal{T}_{v'}$, où $v_i' = 0$ si $\lambda_i \neq 1$ et $v_i' = v_i$ sinon. En particulier, $Av' = v'$. Enfin, $A \circ \mathcal{T}_{v'} \circ A^{-1} = \mathcal{T}_{Av'} = \mathcal{T}_{v'}$. □

Reprenons notre flot hyperbolique $\{p^t\}_{t \in \mathbf{R}} \subset P$. Nous savons que $P \simeq CO(1, n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$ et que nous cette identification, la partie linéaire de p^t est

$$A^t = \mathrm{e}^{\lambda} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mu} & & \\ & \mathrm{id} & \\ & & \mathrm{e}^{\mu} \end{pmatrix} \in CO(1, n-1).$$

Nous sommes donc dans le champ d'application du lemme affine. Utilisons-le avec p^1. Puisque le g exhibé dans sa preuve est une translation, nous savons que p^1 se conjugue dans P à un produit commutatif $A^1 \mathcal{T}_{v'}$. Or, dans P les translations sont des éléments unipotents. Finalement, gp^1g^{-1} est hyperbolique et se décompose en un produit commutatif entre un élément hyperbolique et un élément unipotent. Nous pouvons à nouveau invoquer l'unicité dans la décomposition de Jordan pour conclure que p^1 est conjugué dans P à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda} & & & & & \\ & \mathrm{e}^{\mu} & & & & \\ & & \mathrm{id} & & & \\ & & & \mathrm{e}^{-\mu} & & \\ & & & & \mathrm{e}^{-\lambda} & \end{pmatrix}.$$

Appelons

$$h^t = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & & & & & \\ & \mathrm{e}^{\mu t} & & & & \\ & & \mathrm{id} & & & \\ & & & \mathrm{e}^{-\mu t} & & \\ & & & & \mathrm{e}^{-\lambda t} & \end{pmatrix}.$$

Nous venons de démontrer que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $h^n = p^n$. Nous devons donc avoir $h^t = p^t$ à tout temps. □

Donnons-nous $A = (\lambda, \mu) \in \mathfrak{a}$ tel que $p^t = p_0 \exp(tA) p_0^{-1}$, pour $p_0 \in P$. Rappelons que le fait que x_0 est un point de Zimmer nous donne pour tout $\widehat{x}_0$ dans sa fibre un sous-groupe algébrique $P^{\widehat{x}_0}$ vérifiant la propriété 5.2.3. On vérifie directement que si on change de point dans la fibre, disons que l'on se place en $\widehat{x}_0.p$, alors on a $P^{\widehat{x}_0 \cdot p} = pP^{\widehat{x}_0}p^{-1}$. Ainsi, quitte à déplacer le point $\widehat{x}_0$ dans la fibre $\pi^{-1}(x_0)$, on peut supposer que $p^t = \exp(tA) \in P^{\widehat{x}_0}$ et s'envoie par $\rho_{\widehat{x}_0}$ sur $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{e}^{tX})$.

Rappelons qu'il existe une unique classe conforme $[Q]$ de formes quadratiques lorentziennes sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ qui est préservée par $\overline{\mathrm{Ad}}(P)$. Si on note $\varphi_{\widehat{x}}$ l'identification définie par le

diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} T_{\widehat{x}}\widehat{M} & \xrightarrow{\omega_{\widehat{x}}} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \pi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ T_xM & \xrightarrow{\varphi_{\widehat{x}}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \end{array}$$

nous avons

$$\varphi_{\widehat{x}}^*[Q] = [g_x].$$

Si on prend comme coordonnées sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ le système défini par

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ x_1 & * & * & * & * \\ \vdots & * & * & * & * \\ x_n & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix} + \mathfrak{p}$$

alors, $[Q]$ est la classe conforme de la métrique $2x_1x_n+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2$. Dans ces coordonnées, la matrice de $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tA})$ agissant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t} & & & & \\ & \mathrm{e}^{-\lambda t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathrm{e}^{-\lambda t} & \\ & & & & \mathrm{e}^{(-\lambda-\mu)t} \end{pmatrix}.$$

Remarque 6.4.1. On notera que ces coordonnées sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ sont fournies par l'identification $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha-\beta} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta}$, où $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\mathfrak{g}_{-\alpha-\beta}$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta}$ sont les espaces de racines de $\mathfrak{g}$ associés à l'espace de Cartan $\mathfrak{a}$ décrits en (2.4), à la section 2.3.1. Rappelons que $\alpha(\lambda,\mu) = \lambda - \mu$ et $\beta(\lambda,\mu) = \mu$.

Or, par définition de p^t, $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tA})$ préserve $\iota_{\widehat{x}_0}(\mathfrak{h})$ et y agit comme $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})$ sur $\mathfrak{h}$. En particulier, $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tA})$ doit fixer la projection $\iota_{\widehat{x}_0}(X)$ de $\iota_{\widehat{x}_0}(X)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Nous avons vu que cette dernière est isotrope pour la forme quadratique Q sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ qui est conformément $\overline{\mathrm{Ad}}(P)$-invariante. D'après l'expression de Q, si $\overline{\iota_{\widehat{x}_0}(X)}$ a une composante non nulle sur $\mathfrak{g}_{-\alpha-\beta}$, alors il a une composante non nulle sur $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ et sur $\mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta}$. Or, dans ce cas nous devrions avoir $\lambda = \lambda+\mu = \lambda-\mu = 0$, *ie* $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tA}) = \mathrm{id}$ ce qui est absurde. Ainsi, nous avons $\overline{\iota_{\widehat{x}_0}(X)} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ (ou $\mathfrak{g}_{-\alpha-2\beta}$) et $\lambda = \mu$ (ou $\lambda = -\mu$ respectivement). Par symétrie, nous supposerons jusqu'à la fin de la preuve que nous sommes dans la première situation et que $A = (1,1)$.

Le champ fourni par le théorème d'intégrabilité des générateurs de Killing

Nous avons $A \in \mathfrak{p}^{\widehat{x}_0}$. Par la proposition 5.2.3, ceci implique que A est un générateur de Killing d'ordre r_0 en $\widehat{x}_0$. Le choix de r_0 et le théorème 4.4 font qu'il existe un champ de Killing local A^* défini au voisinage de x_0, qui s'annule en x_0 et dont le relevé $\widehat{A}$ est tel que $\widehat{A}(\widehat{x}_0) = A$. Ouvrons une courte parenthèse sur la notion d'holonomie de champ de Killing.

Définition 6.4.2. Si $(M,\mathcal{C})$ est une géométrie de Cartan d'espace modèle G/P, si $X \in \mathrm{Kill}(M,\mathcal{C})$ est un champ de Killing tel que $X(x) = 0$ pour $x \in M$ et si $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$, on associe à X un $X_h \in \mathfrak{p}$, appelé *holonomie* de X en $\widehat{x}$, qui est donné par $X_h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mathrm{hol}_{\widehat{x}}(\phi_X^t)$.

On peut vérifier sans difficulté que si $\widehat{X}$ désigne le relevé de X à l'espace total $\widehat{M}$, alors

$$X_h = \omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}(\widehat{x})).$$

On trouvera dans [Fra12b] des résultats généraux qui permettent de relier la dynamique du champ de vecteur X au voisinage du point fixe x à des propriétés de son holonomie X_h. Dans notre situation, l'holonomie de A^* en $\widehat{x}_0$ est le $A \in \mathfrak{p}^{\widehat{x}_0}$ que nous avons mis en évidence. Puisque nous en avons une très bonne connaissance, nous n'aurons pas besoin d'invoquer les résultats de [Fra12b].

Par définition, pour des temps t petits, nous avons $\mathrm{hol}_{\widehat{x}_0}(\phi^t_{A^*}) = \mathrm{e}^{tA}$ qui est dans la partie linéaire de $P = CO(1, n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$. On peut donc d'emblée appliquer la proposition 6.3.3 et conclure que $\phi^t_{A^*}$ est linéarisé par le difféomorphisme $\psi_{\widehat{x}_0}$ sur un voisinage de x_0. La preuve de la dite proposition montre que précisément, pour de petits temps t, le flot $\phi^t_{A^*}$ est conjugué au champ linéaire

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tA})|_{\mathfrak{g}_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \mathrm{e}^{-t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathrm{e}^{-t} & \\ & & & & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Mais *a priori*, ceci n'est valable que pour de petits temps. En fait,

Proposition 6.4.4. *Quitte à réduire son ouvert de définition, le flot du champ A^* est défini à tout temps positifs et conjugué à la restriction de l'action adjointe de son holonomie $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tA})|_{\mathfrak{g}_{-1}}$.*

Démonstration. En identifiant convenablement $T_{x_0}M$ avec $\mathbf{R}^n$, la linéarisabilité du flot local de A^* nous assure qu'on a un difféomorphisme local $f : \mathbf{R}^n \to M$ entre $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n$ un voisinage de 0 et un voisinage de x_0 (sur lequel A^* est défini) tel que le pull-back de A^* par f est le champ

$$V = \begin{vmatrix} 0 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \\ -2x_n \end{vmatrix},$$

défini sur $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n$. Si $\mathcal{U}$ a été bien choisi, le flot de V sur $\mathcal{U}$ est défini à tout temps positif car

$$\phi^t_V = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \mathrm{e}^{-t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathrm{e}^{-t} & \\ & & & & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Il en va donc de même pour le flot de A^* sur $f(\mathcal{U})$ et f conjugue ϕ^t_V et $\phi^t_{A^*}$ à tout temps positif. □

Dynamique du flot $\phi^t_{A^*}$

On reprend les notations de la preuve de la proposition 6.3.3. Nous avons une identification $\beta_{\widehat{x}_0} : T_{x_0}M \to \mathfrak{g}_{-1}$ et pour des $v \in T_{x_0}M$ assez petits, nous avons défini $\psi_{\widehat{x}_0}(v) = \pi(\exp(\widehat{x}_0, \beta_{\widehat{x}_0}(v)))$.

On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{g}_{-1}$ dans laquelle $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tA})|_{\mathfrak{g}_{-1}}$ a la forme (6.4), la forme quadratique Q décrite dans les rappels de début de chapitre a une expression proportionnelle à $2x_1x_n + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2$. Lorsque nous avons démontré que l'on pouvait se ramener à $(\lambda, \mu) = (1, 1)$, nous avions établi que nécessairement $\overline{\iota_{\widehat{x}_0}(X)} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ (la barre signifiant que l'on projette des éléments de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$). Ceci signifie avec les notations que nous venons d'introduire, $\beta_{\widehat{x}_0}(X_{x_0}) \in \mathfrak{g}_{-1}$ est colinéaire à e_1. Nous pouvons donc supposer que $\beta_{\widehat{x}_0}(X_{x_0}) = e_1$. En particulier, la direction tangente X_{x_0} est fixée par la différentielle du flot $T_{x_0}\phi^t_{A^*}$. On a en fait mieux.

Lemme 6.4.5. *Si l'ouvert U de définition de A^* est connexe, les champs de Killing conformes X et A^* commutent sur U. Par conséquent, les courbes $\{\psi_{\widehat{x}_0}(tX_{x_0}),\ t \text{ petit}\}$ et $\{\mathrm{e}^{tX}.x_0,\ t \text{ petit}\}$ coïncident au voisinage de x_0.*

Démonstration. Notons $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(\widehat{M})$ le relevé du champ de Killing X et $\widehat{A}$ le relevé de A^*. Par définition du champ A^* fourni par le théorème d'intégrabilité, en notant $A = \omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{A}_{\widehat{x}_0}) \in \mathfrak{p}^{\widehat{x}_0}$, l'action adjointe $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{e}^{tA})$ préserve le sous-espace $\iota_{\widehat{x}_0}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ et y induit l'action adjointe de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{e}^{tX})$. Ceci implique notamment que $[A, \iota_{\widehat{x}_0}(X)] = 0$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, soit $[\omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{A}_{\widehat{x}_0}), \omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{X}_{\widehat{x}_0})] = 0$. D'après le lemme 5.2.1, nous avons la relation

$$\omega_{\widehat{x}_0}([\widehat{A}, \widehat{X}]_{\widehat{x}_0}) = [\omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{A}_{\widehat{x}_0}), \omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{X}_{\widehat{x}_0})] + \Omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{A}_{\widehat{x}_0}, \widehat{X}_{\widehat{x}_0}).$$

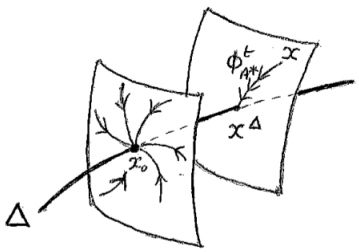
Or, $\widehat{A}_{\widehat{x}_0}$ est tangent à la fibre en $\widehat{x}_0$. Ceci implique par le lemme 2.1.5 que $\Omega_{\widehat{x}_0}(\widehat{A}_{\widehat{x}_0}, \widehat{X}_{\widehat{x}_0}) = 0$. Finalement, $[\widehat{A}, \widehat{X}]_{\widehat{x}_0} = 0$. Nous savons que si le relevé d'un champ de Killing s'annule en un point, alors il est nul sur la composante connexe de ce point (il préserve un parallélisme sur $\widehat{M}$). Le crochet des relevés de deux champs de Killing étant lui même le relevé d'un champ de Killing, nous avons $[\widehat{A}, \widehat{X}] = 0$ sur $\pi^{-1}(U)$.

Les flots locaux de A^* et de X commutent sur l'ouvert U. En particulier, le flot de X, à savoir e^{tX}, préserve les points de U qui sont fixés par A^*. Puisque $\psi_{\widehat{x}_0}$ conjugue $\phi^t_{A^*}$ au flot linéaire (6.4), e^{tX} doit préserver la courbe $\{\psi_{\widehat{x}_0}(tX_{x_0}), t \text{ petit}\}$. □

Notons $\Delta = \{\mathrm{e}^{tX}.x_0,\ t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$, pour ε assez petit, la portion d'orbite de e^{tX} qui est contenue dans U. Rappelons que X_{x_0} est une direction isotrope de $T_{x_0}M$, ce qui implique que Δ est une courbe lumière dans U. Soit $x = \psi_{\widehat{x}_0}(te_1 + v_0) \in U$, avec t petit et v_0 dans un voisinage de l'origine $\mathcal{V} \subset \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. On définit $\mathcal{F}_x \subset U$ une hypersurface par

$$\mathcal{F}_x = \psi_{\widehat{x}_0}(\{te_1 + v,\ v \in \mathcal{V}\}).$$

Ces hypersurfaces feuillettent U, le flot $\phi^t_{A^*}$ les préserve individuellement. Chaque feuille rencontre Δ en un unique point, et si $x \in U$, on note $x^\Delta \in \Delta$ le point à l'intersection entre Δ et la feuille $\mathcal{F}_x$ qui contient x. Le flot $\phi^t_{A^*}$ contracte à vitesse exponentielle chaque feuille $\mathcal{F}_x$ sur x^Δ. Ce phénomène dynamique va nous permettre de prouver que M est conformément plate sur l'ouvert U.



Dynamique du flot $\phi^t_{A^*}$, pour $t > 0$

Rappelons qu'il existe W un tenseur de type $(3,1)$ sur M, appelé tenseur de Weyl, invariant par les difféomorphismes conformes de $(M,[g])$ et qui *détecte* la platitude conforme au sens où W est nul sur un ouvert si et seulement si cet ouvert est localement conformément difféomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. On note $(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ le champ de repères de U associé à la carte $\psi_{\widehat{x}_0} : \mathcal{U} \to U$ et la base $(e_1,\dots,e_n)$ de $T_{x_0}M$ avec laquelle nous travaillons. On vérifie le lemme suivant sans difficulté.

Lemme 6.4.6. *Le champ de repères $(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ vérifie dans l'ouvert de carte, pour tout $t \geqslant 0$*

1. $(\phi^t_{A^*})_* \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$;
2. $(\phi^t_{A^*})_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\partial}{\partial x_i}$, *pour* $2 \leqslant i \leqslant n-1$;
3. $(\phi^t_{A^*})_* \frac{\partial}{\partial x_n} = \mathrm{e}^{-2t}\frac{\partial}{\partial x_n}$.

Démonstration. Notons $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$ et $\lambda_n = 2$. Pour tout $u \in \mathcal{U}$, si on note $x = \psi_{\widehat{x}_0}(u)$, nous avons pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\begin{aligned} T_x\phi^t_{A^*}\frac{\partial}{\partial x_i}(x) &= T_x\phi^t_{A^*}T_u\psi_{\widehat{x}_0}e_i = T_u(\phi^t_{A^*}\circ\psi_{\widehat{x}_0})e_i \\ &= T_u(\psi_{\widehat{x}_0}\circ T_{x_0}\phi^t_{A^*})e_i = e^{-\lambda_i t}T_{u'}\psi_{\widehat{x}_0}(e_i), \end{aligned}$$

où l'on a noté $u' = T_{x_0}\phi^t_{A^*}u$. Nous obtenons bien

$$T_x\phi^t_{A^*}\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi^t_{A^*}(x)).$$

□

On notera qu'en tout point de Δ, $\frac{\partial}{\partial x_1}$ est colinéaire à X. Nous notons

$$\mathcal{H}_x = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Lemme 6.4.7. *Le tenseur de Weyl est nul en x_0.*

Démonstration. Donnons-nous g une métrique arbitraire dans la classe conforme de M. Pour $x \in U$ et $t > 0$, notons $\lambda(x,t)$ la distorsion conforme du flot ϕ^t relativement à g, qui, rappelons-le, se définit par $\forall x,t,\ [(\phi^t_{A^*})^*g]_x = \lambda(x,t)g_x$.

Fait 1. *Quitte à réduire l'ouvert U, les hyperplans $\mathcal{H}_x$ sont tous dégénérés de signature $(0+\cdots+)$, et la dégénérescence est portée par $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$.*

Démonstration. Notons que c'est le cas en x_0. Pour tout champ de k-plans, « être de signature riemannienne » est une condition ouverte. Ici, quitte à réduire U, nous pouvons donc supposer que le champ de $(n-2)$-plans $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$ est de signature riemannienne sur tout U. Prenons alors $u(x)$ une combinaison linéaire, à coefficients constants, et non nulle, des champs $\frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $2\leqslant i\leqslant n-1$. Par définition de $\lambda(x,t)$, si on note $x^t=\phi^t_{A^*}(x)$, nous avons, pour tout $t>0$, $\lambda(x,t)g_x(u,u)=g_{x^t}(\mathrm{e}^{-t}u(x^t),\mathrm{e}^{-t}u(x^t))=\mathrm{e}^{-2t}g_{x^t}(u(x^t),u(x^t))$. Ainsi, nous avons $\lambda(x,t)\sim C(x)\mathrm{e}^{-2t}$ lorsque $t\to+\infty$, où

$$C(x)=\frac{g_{x^\Delta}(u(x^\Delta),u(x^\Delta))}{g_x(u(x),u(x))}>0.$$

Les relations

$$\mathrm{e}^{-3t}g_{\phi^t_{A^*}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi^t_{A^*}(x)),u(\phi^t_{A^*}(x))\right)=\lambda(x,t)g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(x),u(x)\right)\text{ et}$$
$$\mathrm{e}^{-4t}g_{\phi^t_{A^*}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi^t_{A^*}(x)),\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi^t_{A^*}(x))\right)=\lambda(x,t)g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(x),\frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right)$$

impliquent alors $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)\perp u(x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)\perp\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ car sinon nous aurions $\lambda(x,t)=O(\mathrm{e}^{-3t})$, voire $\lambda(x,t)=O(\mathrm{e}^{-4t})$, contredisant dans tous les cas $\lambda(x,t)\sim_{t\to+\infty}C(x)\mathrm{e}^{-2t}$. Ceci étant valable quel que soit le choix de $u(x)$, le fait est prouvé. □

Pour tout $x\in U$, et tout sous-espace $E\subset T_xM$, on note

$$W_x(E,E,E)=\{W_x(u,v,w),\ u,v,w\in E\}\text{ et}$$
$$\mathrm{Im}\,W_x=W_x(T_xM,T_xM,T_xM).$$

Fait 2. *Pour tout $x\in U$, $W_x(\mathcal{H}_x,\mathcal{H}_x,\mathcal{H}_x)=0$ et $\mathrm{Im}\,W_x\subset\mathcal{H}_x$.*

Démonstration. On munit U d'une métrique riemannienne arbitraire, notée $\|.\|_x$. Soient $i,j,k\geqslant 2$. Nous avons alors par invariance conforme de W, pour $t>0$

$$(\phi^t_{A^*})_*W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_j}(x),\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)=$$
$$\mathrm{e}^{-rt}W_{\phi^t_{A^*}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi^t_{A^*}(x)),\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi^t_{A^*}(x)),\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi^t_{A^*}(x))\right),\quad(6.5)$$

où $r\geqslant 3$. Supposons par l'absurde que $W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_j}(x),\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)\neq 0$ et décomposons le sous la forme

$$W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_j}(x),\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)=\sum_{m=0}^{n}\alpha_m\frac{\partial}{\partial x_m}(x).$$

En appelant $m_0=\min\{m\ :\ \alpha_m\neq 0\}$, nous avons

$$(\phi^t_{A^*})_*W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_j}(x),\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)=\sum_{m=m_0}^{n}\alpha_m\mathrm{e}^{-\lambda_m t}\frac{\partial}{\partial x_m}(\phi^t_{A^*}(x)),$$

avec $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = 2$. D'où

$$\left\| (\phi^t_{A^*})_* W_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x), \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right) \right\|_{\phi^t_{A^*}(x)} \sim C \mathrm{e}^{-\lambda_{m_0} t}.$$

Mais comme $\left\| W_{\phi^t_{A^*}(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi^t_{A^*}(x)), \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi^t_{A^*}(x)), \frac{\partial}{\partial x_k}(\phi^t_{A^*}(x)) \right) \right\|_{\phi^t_{A^*}(x)}$ reste borné quand $t \to +\infty$, l'équation (6.5) nous donne alors une contradiction. Par $\mathbf{R}$-multilinéarité, nous obtenons le premier point.

Pour la deuxième assertion, on regarde $(\phi^t_{A^*})_* W_x(u, v, w)$, avec $u, v, w \in T_x M$. En décomposant ces vecteurs dans le champ de repères, on constate que

$$\| (\phi^t_{A^*})_* W_x(u, v, w) \|_{\phi^t_{A^*}(x)} = O(\mathrm{e}^{-t}),$$

et par le même raisonnement que ci-dessus, $W_x(u, v, w)$ ne peut pas avoir de composante sur $\frac{\partial}{\partial x_1}$. □

Fait 3. *Soit $x \in U$ et H' un hyperplan dégénéré de $T_x M$. Supposons $W_x(H', H', H') = 0$ et $\operatorname{Im} W_x \subset H'$. Alors, $\mathcal{H}_x \neq H' \Rightarrow W_x = 0$.*

Démonstration. Soient $e_1, e_n \in T_x M$ les directions dégénérée respectives de H' et $\mathcal{H}_x$. On suppose que $H' \neq \mathcal{H}_x$. Le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_n)$ est alors lorentzien et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_n)^\perp$ est euclidien. Si on se donne $(e_2, \ldots, e_{n-1})$ une base orthonormée de F, quitte à renormer e_1 et e_n, g_x s'écrit $2x_1x_n + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Par construction, $\mathcal{H}_x = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$, $H' = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Par commodité, nous noterons . le produit scalaire lorentzien g_x. Par hypothèse, $\operatorname{Im} W \subset \mathcal{H}_x \cap H' = F$. Le lemme se ramène à montrer pour $2 \leqslant j \leqslant n-1$

$$W(e_1, e_n, e_1) = W(e_n, e_1, e_n) = W(e_1, e_j, e_n) = W(e_1, e_n, e_j) = W(e_j, e_n, e_1) = 0.$$

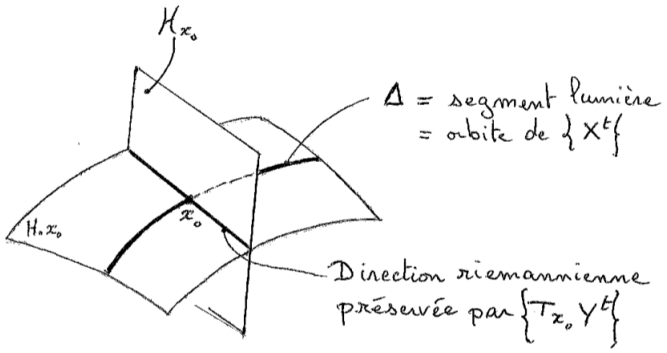
La preuve est immédiate en utilisant les symétries du tenseur de Weyl. Par exemple, si on se donne $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $W(e_1, e_n, e_1).e_k = W(e_1, e_k, e_1).e_n = 0$, car $e_1, e_k \in H'$. Ainsi, $W(e_1, e_n, e_1) \in F \cap F^\perp = 0$. □

Nous allons plutôt exploiter la contraposée de ce dernier fait : si le tenseur de Weyl est non nul en un point x, alors $\mathcal{H}_x$ est le seul hyperplan dégénéré de $T_x M$ qui vérifie $W_x(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_x) = 0$ et $\operatorname{Im} W_x \subset \mathcal{H}_x$. En particulier, nous observons que si $f \in \mathrm{Conf}(M)$ vérifie $f(x) = x$, et si $W_x \not\equiv 0$ alors $T_x f \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x$.

Supposons que $W_{x_0} \neq 0$ et intéressons-nous à l'action du stabilisateur de x_0 dans H. Elle préserve $T_{x_0}(H.x_0)$ et l'hyperplan $\mathcal{H}_{x_0}$, donc leur intersection. Puisque la direction dégénérée de $T_{x_0}(H.x_0)$ est distincte de celle de $\mathcal{H}_{x_0}$, $T_{x_0}(H.x_0) \cap \mathcal{H}_{x_0}$ est une droite riemannienne de $T_{x_0}(H.x_0)$, préservée par $D_{x_0} Y^t$. Nous allons voir que ceci est une contradiction. Rappelons le résultat suivant.

Lemme. *Soit $x_0 \in G/H$ un point dans un espace homogène. On note $\Phi : T_{x_0} G/H \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ l'isomorphisme linéaire associé à l'application orbitale en x_0. Alors, Φ conjugue la représentation d'isotropie en x_0 de H sur $T_{x_0} G/H$ à la représentation $\overline{\mathrm{Ad}}$ de H sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Dans, notre cas, l'espace homogène en question est H/H_{x_0}, où H_{x_0} désigne le stabilisateur de x_0 dans H. L'étude de cette orbite a montré que la métrique dégénérée s'identifie par Φ à la forme quadratique q sur $\mathfrak{h}/\mathbf{R}.Y$ telle que $q(\overline{X}) = 0$ et $q(\overline{Z}) > 0$ (les "barres" précisent qu'on est dans $\mathfrak{h}/\mathbf{R}.Y$). Une direction riemannienne dans $T_{x_0}(H.x_0)$ est donc de la forme $\overline{Z} + \lambda \overline{X}$.



Position de l'hyperplan $\mathcal{H}_{x_0}$ relativement à l'orbite $H.x_0$

Nous savons que H_{x_0} contient le groupe à 1 paramètre $\{Y^t\}_{t\in\mathbf{R}}$. Par le lemme ci-dessus, l'action différentielle de $T_{x_0}Y^t$ sur l'espace tangent $T_{x_0}(H.x_0)$ est conjuguée par Φ à l'action de $\overline{\mathrm{Ad}}(Y^t)$ sur $\mathfrak{h}/\mathbf{R}.Y$. Ceci implique que la classe conforme $[q]$ est laissée invariante par $\overline{\mathrm{Ad}}(Y^t)$ et que ce dernier doit donc préserver une direction riemannienne de $\mathfrak{h}/\mathbf{R}.Y$, disons $\overline{Z}+\lambda\overline{X}$. Finalement, nous devrions donc avoir

$$\forall t,\ \overline{\mathrm{Ad}}(Y^t)(\overline{Z}+\lambda\overline{X}) \text{ colinéaire à } \overline{Z}+\lambda\overline{X}.$$

Ceci est impossible puisque $\overline{\mathrm{Ad}}(Y^t)\overline{Z} = \overline{Z}+t\overline{X}$ et $\overline{\mathrm{Ad}}(Y^t)\overline{X} = \overline{X}$. Nous venons donc de contredire l'hypothèse $W_{x_0}\neq 0$. □

Fin de la preuve

Puisque $W_{x_0}=0$, nous devons avoir $W\equiv 0$ sur Δ puisque W est préservé par e^{tX}. Montrons que ceci implique $W\equiv 0$ sur tout U. Reprenons $\|.\|_x$ notre métrique riemannienne, soient $x\in U$ et $u,v,w\in T_xM$.

À nouveau, nous utilisons le fait que pour tout $x\in U$ et $v\in T_xM$, si $v\neq 0$, alors $\|\phi^t_*v\|_{\phi^t(x)}\geqslant M\mathrm{e}^{-2t}$ et si $\|\phi^t_*v\|_{\phi^t(x)}=O(\mathrm{e}^{-2t})$, alors v est proportionnel à $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$. Par conséquent, en considérant les vitesses de contraction sous le flot de ϕ^t, nous avons pour tous i,j,k,

1. $W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_j}(x),\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)=0$ dès que au moins deux des trois indices sont supérieurs ou égaux à 2.
2. $W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right)$ est proportionnel à $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$, pour $2\leqslant i\leqslant n-1$, et nul lorsque $i=n$.

Ainsi, en développant nous obtenons

$$W_x(u,v,w)=\sum_{i=2}^{n-1}\lambda_i W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right).$$

Or, pour tout i,

$$g_x\left(W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=g_x\left(W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=0,$$

et puisqu'il est proportionnel à $\frac{\partial}{\partial x_n}$, $W_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ est orthogonal à $\mathcal{H}_x$, donc à $\mathcal{H}_x\oplus\mathbf{R}\frac{\partial}{\partial x_1}=T_xM$, par conséquent il est nul. Ainsi, $W\equiv 0$ sur U, et donc sur M par analyticité.

6.5 Extension aux groupes non localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$

On termine ce chapitre en énonçant et en prouvant une proposition qui va nous assurer que le théorème intermédiaire 6.5 implique bien le théorème 6.2 en toute généralité (pour des groupes de Lie non localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$).

Premièrement, nous rappelons un résultat de Frances et Zeghib ([ZF05], Theorem 3) qui poursuit les travaux de Bader et Nevo sur les actions conformes de groupes de Lie simples non compacts de rang maximal.

Théorème ([ZF05], extrait du Theorem 3)**.** *Soit H un groupe de Lie simple, connexe et non compact, de rang 2 et agissant conformément sur une variété lorentzienne compacte (M,g) de dimension au moins 3. Alors, H est localement isomorphe à un $PO(2,k)$, $k\geqslant 3$ et $(M,[g])$ est conformément équivalente à un quotient du revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}^{1,n-1}}/\Gamma$ par un groupe monogène infini $\Gamma\subset\widetilde{SO_0(2,n)}$.*

En particulier, lorsque le groupe H est de rang maximal égal à 2, la variété doit être conformément plate (sans hypothèse d'analyticité), et l'action n'est pas localement libre partout.

Proposition 6.5.1. *Soit H un groupe de Lie simple et non compact, de rang 1, agissant conformément essentiellement sur une variété lorentzienne compacte. Alors, H contient un sous-groupe localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ dont l'action sur la variété est également essentielle.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{h}_\alpha$ un espace de racine de $\mathfrak{h}$, pour une racine α associée à un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$.

Le sous-groupe (de dimension 1) $A=\exp(\mathfrak{a})\subset H$ vérifie la propriété (*) puisque son action adjointe sur $\mathfrak{h}$ est par définition diagonale. Puisqu'il est de dimension 1, ce sous-groupe est moyennable. Par conséquent, la proposition 5.3.1 nous donne l'existence d'un point de Zimmer x pour (ι,A). On note $\mathfrak{h}_x$ l'algèbre de Lie du stabilisateur de x dans H.

On se donne $X\in\mathfrak{a}$ tel que $\alpha(X)=1$. La propriété 5.3.5 nous assure qu'il existe une classe conforme sous-lorentzienne $[Q_x]$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$ qui est invariante par l'action quotient $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX})$ (rappelons que $\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})\mathfrak{h}_x=\mathfrak{h}_x$). Pour tous $v\in\mathfrak{h}_\alpha$ et $v'\in\mathfrak{h}_{-\alpha}$, on a en notant $\overline{v}$ et $\overline{v'}$ les projections (éventuellement nulles) sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$, $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX})\overline{v}=\mathrm{e}^{t}\overline{v}$ et $\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX})\overline{v'}=\mathrm{e}^{-t}\overline{v'}$. Si on peut trouver $v\in\mathfrak{h}_\alpha$ tel que $Q_x(\overline{v})\neq 0$, alors on est assuré que $\forall u\in\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$, $Q_x(\overline{\mathrm{Ad}}(\mathrm{e}^{tX})u)=\mathrm{e}^{2t}Q_x(u)$ par invariance conforme, et donc on obtient que nécessairement $Q_x(\overline{v'})=0$ pour tout choix de v'. Par symétrie, on en déduit que nous sommes face à l'alternative suivante :

1. ou bien $\mathfrak{h}_\alpha$ et $\mathfrak{h}_{-\alpha}$ se projettent tous deux dans des sous-espaces totalement isotropes de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$;
2. ou bien la projection de l'un d'eux contient une direction non isotrope, et alors l'autre se projette dans un sous-espace totalement isotrope.

Ainsi, pour toute paire $(\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_{-\alpha})$ d'espaces de racines conjugués, l'un des deux est projeté dans une droite de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$. Finalement, soit tous les espaces de racines de $\mathfrak{h}$ sont de dimension 1, et vu la liste des possibilités pour H que nous avons dressée à la première section de ce chapitre, $\mathfrak{h}\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$; soit il existe un espace de racine $\mathfrak{h}_\alpha$ tel que $\mathfrak{h}_\alpha\cap\mathfrak{h}_x\neq 0$. Dans ce dernier cas, si $e_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha\cap\mathfrak{h}_x$, on vérifie directement que quelle que soit $\mathfrak{h}$, on peut trouver $f_\alpha\in\mathfrak{h}_{-\alpha}$ tel que $[e_\alpha,f_\alpha]=X=:h_\alpha$. Le triplet $(e_\alpha,f_\alpha,h_\alpha)$ vérifie ainsi les relations

de crochet de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$. Il s'intègre donc en un sous-groupe de H localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, dont l'action n'est pas localement libre partout par construction. Par conséquent, il ne peut s'agir d'une action par isométries d'une métrique lorentzienne. □

Bilan pour la preuve du théorème 6.3. Soit H un groupe de Lie simple non compact qui agit conformément sur une variété lorentzienne compacte. Supposons que son action est partout localement libre. La preuve de la proposition ci-dessus et le théorème de Frances et Zeghib cité plus haut montrent que nécessairement, $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$. Le travail fait à la section 6.2 nous assure alors que l'action de H est inessentielle.

Bilan pour la preuve du théorème 6.2. Soit H un groupe de Lie simple non compact qui agit par transformations conformes d'une variété lorentzienne compacte et analytique. On suppose que l'action est essentielle. Si H est de rang 2, le résultat de Frances et Zeghib donne directement la conclusion. Si H est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, nous avons démontré dans les sections 6.3 et 6.4 que la variété est conformément plate (théorème 6.5). Si H n'est pas localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ et de rang 1, il contient un sous-groupe H' qui est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ et qui agit essentiellement. Le théorème 6.5 nous assure que la variété est conformément plate.

Chapitre 7

Actions conformes de groupes de Lie nilpotents

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux actions conformes de groupes de Lie nilpotents et connexes sur des variétés lorentziennes compactes. Comme pour les groupes simples, l'enjeu est double. Nous voulons à la fois décrire la famille des groupes de Lie nilpotents et connexes qui peuvent se réaliser dans le groupe conforme d'une variété lorentzienne compacte, et on espère également tirer de l'information géométrique de l'existence d'une telle action, via sa dynamique.

Si $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie nilpotente, on note $n(\mathfrak{h})$ son indice de nilpotence, c'est-à-dire le plus petit k tel que $\mathfrak{h}_k = 0$, où $(\mathfrak{h}_i)$ désigne la suite centrale descendante de $\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}_{i+1} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_i]$). L'indice de nilpotence d'un groupe de Lie nilpotent connexe est celui de son algèbre de Lie. Par défaut, on entend toujours que les groupes agissent fidèlement.

Là encore, la situation analogue est bien comprise dans le cadre des actions isométriques. Dans [Zim86], Zimmer prouvait que si un groupe de Lie nilpotent connexe H agit par isométries sur une variété lorentzienne compacte, alors $n(\mathfrak{h}) \leqslant 2$ (Theorem B). Le théorème 5.3 dû à Adams, Stuck et Zeghib nous assure que s'il n'est pas abélien, alors un tel groupe est localement isomorphe à un produit direct $\mathrm{Heis}(2d+1) \times \mathbf{R}^k$ où $\mathrm{Heis}(2d+1)$ désigne le groupe de Heisenberg de dimension $2d+1$. La démonstration du théorème montre que l'action est localement libre sur un ouvert dense et que si $k = 0$, alors elle est localement libre partout. Cependant, la situation géométrique est plus difficile à comprendre et à notre connaissance il n'y a pas de description des variétés lorentziennes compactes qui supportent une action isométrique (fidèle) d'un tel groupe.

Dans [FM10], Frances et Melnick s'intéressent aux actions de groupes de Lie nilpotents connexes sur des structures conformes pseudo-riemanniennes compactes. Ils donnent une borne optimale sur l'indice de nilpotence du groupe qui agit, et décrivent géométriquement la situation lorsque l'indice de nilpotence du groupe est maximal. En signature lorentzienne, on obtient le résultat suivant.

Théorème ([FM10], Theorem 1.1, Theorem 1.2)**.** *Soient (M, g) une variété lorentzienne compacte et H un groupe de Lie nilpotent connexe agissant conformément sur M. Alors, l'indice de nilpotence de H est majoré par 3. Si l'indice est maximal égal à 3, alors $(M, [g])$ est conformément équivalente à un quotient $\Gamma\backslash\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, où Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1})$.*

Dans la situation où l'indice de nilpotence est maximal, la question est donc intégra-

lement traitée puisque par platitude conforme de $(M,[g])$, l'algèbre de $\mathfrak{h}$ doit se plonger dans $\mathfrak{o}(2,n)$ et par conséquent tout groupe de Lie nilpotent connexe d'indice de nilpotence 3 qui agit conformément sur une variété compacte est localement isomorphe à un sous-groupe de $O(2,n)$.

À l'opposé, la situation la plus difficile à traiter (en l'état actuel des connaissances) est celle de l'action d'un groupe de Lie abélien, *ie* le cas d'un indice égal à 1. On sait cependant qu'il n'y a rien à espérer en termes de classification des géométries possibles dans le cas d'actions de groupes de Lie abéliens compacts. En effet, *quelle que soit* (M,g) lorentzienne, si g_0 est n'importe quelle métrique riemannienne $\mathbf{T}^k$-invariante sur $\mathbf{T}^k$, le produit $(M\times\mathbf{T}^k, g\oplus g_0)$ admet une action isométrique de $\mathbf{T}^k$. En revanche, l'existence d'une famille de flots conformes non relativement compacts et commutant deux à deux dans $\mathrm{Conf}(M,g)$ semble être plus contraignante.

Dans ce travail, notre contribution est au niveau de la situation intermédiaire des variétés lorentziennes compactes munies de l'action conforme d'un groupe de Lie nilpotent connexe H d'indice 2. L'exemple typique est fourni par des actions conformes de groupes de Heisenberg $\mathrm{Heis}(2d+1)$.

Sur le plan algébrique, on obtient un résultat qui caractérise à isomorphisme local près les groupes de Lie nilpotents connexes qui peuvent agir conformément sur une variété lorentzienne compacte.

Théorème 7.1. *Soit H un groupe de Lie nilpotent connexe admettant une action fidèle et conforme sur une variété lorentzienne compacte de dimension $n\geqslant 3$. L'indice de nilpotence de H est au plus 3 et*

- *soit $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{o}(2,n)$;*
- *soit $\mathfrak{h}$ est abélienne.*

En indice de nilpotence au moins 2, cet énoncé est optimal au sens où il existe des exemples pour chaque cas.

La compréhension des groupes de Lie nilpotents connexes non abéliens qui peuvent agir conformément sur une variété lorentzienne compacte se ramène alors à la classification des sous-algèbres nilpotentes non abéliennes de $\mathfrak{o}(2,n)$.

Toujours dans la même optique que dans le chapitre 6, on démontre un résultat de nature géométrique sur les actions conformes de groupes de Lie nilpotents connexes. Nous donnons un énoncé de platitude conforme de variétés lorentziennes compactes lorsque celles-ci supportent une action conforme *essentielle* d'un groupe de Lie nilpotent connexe, excepté lorsque ce groupe est abélien.

Théorème 7.2. *Soit H un groupe de Lie nilpotent connexe agissant fidèlement et conformément sur une variété lorentzienne compacte (M,g), avec $\dim M\geqslant 3$.*

- *Si $n(\mathfrak{h})=3$, alors $(M,[g])$ est conformément équivalente à un quotient $\Gamma\backslash\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, où $\Gamma\subset\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1})$ est un sous-groupe discret.*
- *Si $n(\mathfrak{h})=2$, alors l'algèbre se décompose en $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est une algèbre abélienne et $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}')=[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. Cette décomposition n'est pas unique, mais quelle qu'elle soit, si $H'\subset H$ désigne le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$, alors*

  1. *l'action de H est inessentielle si et seulement si H' agit localement librement, et dans ce cas $\mathfrak{h}'\simeq\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2d+1)$, pour $d\geqslant 1$.*

2. *Si l'action de H est essentielle, alors il existe un ouvert de $(M,[g])$ qui est conformément plat.*

Comme nous l'avons dit, la situation en indice de nilpotence égal à 3 était déjà connue et notre contribution se situe au niveau $n(\mathfrak{h}) = 2$. Notons que pour le point 1., on peut déduire le sens direct de l'équivalence des travaux de Adams, Stuck [AS97] et Zeghib [Zeg98a] sur les groupes d'isométries des variétés lorentziennes compactes (voir [AS97], Corollary 7.7). Cependant, ceci découlera de façon immédiate de notre preuve et nous n'aurons pas besoin d'évoquer ces travaux antérieurs.

Les démonstrations que nous proposons ne s'étendent pas au cas des groupes de Lie abéliens, car il est plus difficile d'obtenir des informations géométriques sur la variété lorsque l'action n'est pas assez riche pour garantir l'apparition de phénomènes dynamiques qui fournissent des contraintes sur la géométrie. La structure de groupe *minimale* qui va assurer l'existence d'un ouvert conformément plat est celle de Heis(3), et les résultats géométriques du théorème 7.2 vont s'articuler autour du résultat intermédiaire ci-dessous.

Théorème 7.3. *Soient (M,g) une variété lorentzienne compacte, avec $\dim M \geqslant 3$, et H un groupe de Lie connexe localement isomorphe à* Heis(3)*. Si H agit fidèlement et conformément sur M et si l'action de H n'est pas localement libre partout, alors (M,g) contient un ouvert conformément plat et l'action de H est essentielle.*

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Premièrement, on démontre à la section 7.1 le sens "H' agit localement librement $\Rightarrow$ H agit inessentiellement" du théorème 7.2. Les techniques employées seront similaires à la preuve du théorème 6.3. Dans un deuxième temps, nous allons démontrer le théorème 7.3 dans la section 7.2, qui, nous l'expliquerons, impliquera l'énoncé complet du théorème 7.2. Enfin, à la section 7.3, nous expliquerons comment déduire le résultat algébrique du théorème 7.1 de ce qui a précédé.

Convention et notations. Par défaut, on entendra toujours que les actions de groupes sont fidèles. Vu qu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous noterons $\mathfrak{heis}(2d+1)$ pour $\mathfrak{heis}^{\mathbf{C}}(2d+1)$. Rappelons comment elle se définit.

Définition 7.0.1 (Algèbres de Heisenberg)**.** L'algèbre de Lie $\mathfrak{heis}(2d+1)$ s'obtient en munissant l'espace vectoriel réel $\mathbf{C}^d \oplus \mathbf{R}.Z$ où Z est un élément extérieur à $\mathbf{C}^d$ du crochet de Lie tel que $\mathbf{R}.Z$ est exactement le centre et vérifiant les relations de crochets

$$[e_k, ie_k] = Z,$$

où $(e_1,\dots,e_d)$ désigne la base standard de $\mathbf{C}^d$ (tous les autres crochets sont nuls). Si ω désigne la forme symplectique standard de $\mathbf{C}^d$ (*ie* la partie imaginaire du produit hermitien standard $\overline{z}.{}^t z'$ sur $\mathbf{C}^d$), on peut condenser cela en

$$\forall X, Y \in \mathbf{C}^d,\ [X,Y] = \omega(X,Y)Z.$$

Cette algèbre est nilpotente d'indice 2 puisque $[\mathfrak{heis}(2d+1), \mathfrak{heis}(2d+1)] = \mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(2d+1))$.

Présentation matricielle. L'algèbre $\mathfrak{heis}(2d+1)$ admet une représentation matricielle dans $\mathfrak{o}(2,d+2)$ (pour la forme quadratique de $\mathbf{R}^{2,d+2}$ explicitée en 2.3.1) donnée par

$$(u+iv)+\alpha Z \mapsto M(u,v,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & \cdots & u_d & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & \cdots & v_d & 0 & -\alpha \\ & & & & & -v_1 & -u_1 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & -v_d & -u_d \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $u, v \in \mathbf{R}^d$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

Rappelons qu'un sous-groupe S d'un groupe de Lie H a la propriété (*) si l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(S)$ dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ ne contient aucun sous-groupe propre qui soit algébrique, distingué et cocompact.

Lemme 7.0.2. *Soit H un groupe de Lie nilpotent connexe. Alors, il satisfait la propriété (*).*

Démonstration. L'algèbre $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ est matricielle et formée de matrices nilpotentes. Par le théorème d'Engel, cela implique par connexité que $\mathrm{Ad}(H)$ est unipotent. Un tel groupe linéaire est algébrique, et n'admet aucun quotient algébrique compact. □

En particulier, pour toute action d'un groupe connexe nilpotent H par automorphismes d'une géométrie de Cartan sur une variété compacte, tout fermé H-invariant contient un point de Zimmer (pour toute représentation).

Définition 7.0.2. Soit Q une forme quadratique sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ d'un groupe H, de forme polaire B. Soit $S \subset H$ un sous-groupe connexe. Alors, l'action adjointe de S sur $\mathfrak{h}$ est conforme pour Q si et seulement si Q est *conformément* $\mathrm{ad}(\mathfrak{s})$*-alternée*, c'est-à-dire, en notant B_X la forme définie par $\forall Y, Z \in \mathfrak{h},\ B_X(Y,Z) = B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z])$,

$$\forall X \in \mathfrak{s},\ \exists \lambda_X \in \mathbf{R} \mid B_X = \lambda_X B.$$

7.1 Actions conformes localement libres de groupes nilpotents d'indice 2

Dans cette partie, nous montrons le théorème ci-dessous, qui nous donnera la moitié du point 1. du théorème 7.2, avec une précision géométrique supplémentaire.

Théorème 7.4. *Soient (M,g) une variété lorentzienne compacte et H un groupe de Lie connexe nilpotent d'indice 2 agissant conformément sur M. On peut décomposer $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est abélienne et $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}') = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. Si H' est le sous-groupe connexe de H associé à $\mathfrak{h}'$ et si H' agit localement librement sur M, alors tout H préserve une métrique conforme à g et on a $\mathfrak{h}' \simeq \mathfrak{heis}(2d+1)$, $d \geqslant 1$. De plus, les orbites de H' sont dégénérées et la dégénérescence est dirigée par le centre Z de $\mathfrak{heis}(2d+1)$.*

Ce que nous précisons sur la signature des orbites peut être déduit *a posteriori* du fait que l'action est inessentielle (on trouve ce fait dans la preuve des résultats de [AS97] et [Zeg98a] sur les actions par isométries de groupes nilpotents connexes sur des variétés

lorentziennes compactes). Ici, on le démontrera avant de prouver que l'action conforme se fait en fait par isométries.

On se donne maintenant (M, g) une variété lorentzienne compacte et on va démontrer le théorème 7.4. Comme précédemment, nous notons $(M, \mathcal{C})$ la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui est associée à la structure conforme $(M, [g])$.

Rappelons que l'on a donné au chapitre 6 une méthode standard pour faire apparaître une métrique invariante par le centralisateur d'un flot de type espace. C'est le lemme 6.2.3, dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

Lemme 7.1.1. *Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{X}(M)$ une algèbre de champs de vecteurs conformes. Si $X \in \mathfrak{h}$ est partout de type espace, la métrique $g_0 := \frac{g}{g(X,X)}$ est préservée par le centralisateur $\mathfrak{z}_h(X)$.*

7.1.1 Le cas des groupes de Heisenberg

Nous allons commencer par prouver ce résultat pour un groupe H localement isomorphe à $\mathrm{Heis}(2d+1)$, pour $d \geqslant 1$.

Proposition 7.1.2. *Si un groupe de Lie connexe localement isomorphe à $\mathrm{Heis}(2d+1)$ agit conformément sur (M, g) et si son action est partout localement libre, alors il agit isométriquement pour une métrique g_0 conforme à g. De plus, les orbites sont toutes dégénérées et la dégénérescence est portée par le centre de $\mathfrak{heis}(2d+1)$.*

Démonstration. Nous disposons d'une action infinitésimale de $\mathfrak{h} = \mathfrak{heis}(2d+1) = \mathbf{C}^d \oplus \mathbf{R}Z$, que nous confondrons comme d'habitude avec l'algèbre de champs de Killing conformes correspondante.

Commençons par voir que $\mathbf{C}^d$ est partout de signature riemannienne, c'est-à-dire que tous les champs de vecteurs conformes dans le facteur $\mathbf{C}^d$ sont de type espace. Ceci va découler du résultat intermédiaire suivant.

Lemme 7.1.3. *Soient $X \in \mathbf{C}^d$ et $F \subset M$ un fermé invariant par le flot ϕ_X^t. Alors F contient un point x_0 en lequel $g_{x_0}(X, X) > 0$.*

Démonstration. Fixons Y tel que $[X, Y] = Z$ et notons $S = \{\mathrm{e}^{tX}\}$. Ce groupe satisfait la propriété (*), et on a existence dans F d'un point de Zimmer x_0 pour (ι, S) (par la propriété 5.3.1). La propriété 5.3.2 nous assure alors que la forme quadratique B_{x_0} sur $\mathfrak{h}$ obtenue par restriction de g_{x_0} à l'espace tangent à l'orbite est conformément $\mathrm{ad}(X)$-alternée (Définition 7.0.2).

Voyons qu'elle est en fait $\mathrm{ad}(X)$-alternée. Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $B_X = \lambda B$, d'où $\lambda B(Z, Z) = \lambda B(X, Z) = \lambda B(X, X) = 0$. Le plan engendré par X et Z ne pouvant être totalement isotrope, nous avons $\lambda = 0$ et donc $B_X = 0$.

On constate alors que Z est isotrope et orthogonal à X puisque $B(Z, Z) = B([X, Y], Z) = -B(Y, [X, Z]) = 0$ et $B(Z, X) = B([X, Y], X) = B(Y, [X, X]) = 0$. Ce qui prouve que le plan $\mathrm{Vect}(X, Z)$ est dégénéré et que le noyau est dirigé par Z. La direction X est donc de type espace en x_0. □

Nous pouvons alors considérer, à $X \in \mathbf{C}^d$ fixé, l'ouvert $U = \{x \in M \mid g_x(X, X) > 0\}$, non vide par ce qui précède. Si U n'était pas tout M, nous pourrions considérer $F = M \smallsetminus U$. Puisque le flot de X préserve la causalité et commute avec X, F satisferait l'hypothèse du

lemme précédent et contiendrait un point en lequel X serait de type espace. D'où $U = M$, X est donc partout de type espace et ceci pour tout $X \in \mathbf{C}^d$.

Fixons alors $X \in \mathbf{C}^d$. Comme rappelé dans le lemme 7.1.1, quitte à normaliser la métrique g par $g(X,X)$, nous pouvons supposer que le centralisateur de X agit par isométries de g.

Déterminons la signature des orbites $H.x$. Rappelons que Z désigne un élément de $\mathfrak{h}$ qui engendre le centre.

Lemme 7.1.4. *Le champ Z est partout isotrope.*

Démonstration. Prenons $x \in M$ et notons $x^t = \phi_X^t(x)$ l'orbite du flot de X issue de x. L'application $\{t \mapsto g_{x^t}(Z,Z)\}$ est constante puisque Z et X commutent et ϕ_X^t agit par isométries de g. Ensuite, on choisit $Y \in \mathfrak{h}$ tel que $[X,Y] = Z$. On a alors

$$\begin{aligned} g_x(Y,Z) &= g_{x^t}((\phi_X^t)_* Y_x, (\phi_X^t)_* Z_x) \\ &= g_{x^t}(Y - tZ, Z) \\ &= g_{x^t}(Y,Z) - t\underbrace{g_{x^t}(Z,Z)}_{\text{constante}}. \end{aligned}$$

Par compacité de M, $\{t \mapsto g_{x^t}(Y,Z)\}$ est bornée et on doit avoir $g_{x^t}(Z,Z) = 0$. Ceci étant valable quel que soit x, le lemme est prouvé. □

Lemme 7.1.5. *Pour tout $Y \in \mathfrak{h}$, le champ Z est partout orthogonal au champ Y.*

Démonstration. Prenons $x \in M$ et notons $x^t = \phi_X^t(x)$ l'orbite du flot de X issue de x. Soit $Y \in \mathfrak{h}$ ne commutant pas avec X. Quitte à normaliser Y, $[X,Y] = Z$, et la preuve du lemme précédent montre que $\{t \mapsto g_{x^t}(Y,Z)\}$ est constante. Or, nous avons

$$\begin{aligned} g_x(Y,Y) &= g_{x^t}((\phi_X^t)_* Y_x, (\phi_X^t)_* Y_x) \\ &= g_{x^t}(Y,Y) - 2t g_{x^t}(Y,Z), \end{aligned}$$

Par le même argument, comme $g(Y,Y)$ est une fonction bornée sur M, on doit avoir $g_x(Y,Z) = 0$. Ainsi, à x fixé, l'application $Y \in \mathfrak{h} \mapsto g_x(Y,Z)$ est nulle sur $\mathfrak{h} \smallsetminus \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X)$. Or, comme X n'est pas central, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X)$ est un hyperplan de $\mathfrak{h}$, ce qui permet de conclure. □

Finalement, la structure conforme de M induit sur l'espace tangent $T_x(H.x)$ une classe conforme dégénérée de signature $(0, +\cdots+)$, et le noyau est dirigé par Z_x. Nous pouvons alors conclure. Prenons $Y \in \mathbf{C}^d$ tel que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X) \oplus \mathbf{R}.Y = \mathfrak{h}$ et notons $\lambda(x,t)$ la distorsion conforme du flot ϕ_Y^t par rapport à la métrique g. Puisque par construction $g(X,X) = 1$ partout, nous avons

$$\lambda(x,t) g_x(X,X) = g_{\phi_Y^t(x)}(X,X) + 2t g_{\phi_Y^t(x)}(X,Z) + t^2 g_{\phi_Y^t(x)}(Z,Z) = g_{\phi_Y^t(x)}(X,X)$$

par ce qui précède. Pour tous $x \in M$ et $t \in \mathbf{R}$, on a finalement $\lambda(x,t) = 1$, ce qui signifie que le flot ϕ_Y^t est formé d'isométries de g et termine la preuve. □

7.1.2 Cas général

On prend maintenant un groupe de Lie nilpotent connexe H d'indice 2. Nous avons $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, on choisit alors $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{a}$, on se donne S tel que $\mathfrak{h} = S \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ et on prend $\mathfrak{h}' := S \oplus [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ puisqu'elle contient $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ et nous avons alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}') = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}$ en tant qu'algèbres de Lie.

Supposons à présent que H agit par transformations conformes d'une variété lorentzienne compacte (M,g), et que le sous-groupe connexe $H' \subset H$ tel que $\mathrm{Lie}(H') = \mathfrak{h}'$ agit localement librement. Commençons par vérifier le lemme suivant.

Lemme 7.1.6. *Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre nilpotente d'indice 2, et soit Q une forme quadratique sur $\mathfrak{n}$ sous-lorentzienne et conformément $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$-alternée (définition 7.0.2). Alors* $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 1$.

Démonstration. L'idéal $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ étant central, nous devons avoir $\forall X \in \mathfrak{n}$, $\forall Y,Z \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, $B_X(Y,Z) = 0$ et donc $\lambda_X B(Y,Z) = 0$. Ainsi, s'il existe X tel que $\lambda_X \neq 0$, nous avons $\forall Y,Z \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, $B(Y,Z) = 0$, *ie* $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ isotrope pour B. Puisque B est sous-lorentzienne on obtient bien $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 1$ car $\mathfrak{n}$ n'est pas abélienne. Nous pouvons donc supposer que λ_X est nul pour tout X, ce qui revient à supposer que B est $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$-alternée. Et dans ce cas, si $Y,Y',Z,Z' \in \mathfrak{n}$, nous avons bien

$$B([Y,Z],[Y',Z']) = -B(Z,[Y,[Y',Z']]) = 0.$$

Ainsi, $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ est totalement isotrope pour Q. Cette dernière étant sous-lorentzienne, nous avons $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \leqslant 1$, et le lemme est établi puisque $\mathfrak{n}$ n'est pas abélienne. □

Puisqu'il existe des points de Zimmer pour (ι,H'), la proposition 5.3.2 combinée avec le lemme précédent nous assure que $[\mathfrak{h}',\mathfrak{h}'] = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ est de dimension 1. Nous pouvons alors utiliser le résultat algébrique énoncé comme suit, qui est en fait directement inspiré de lemmes que l'on peut trouver dans [AS97].

Lemme 7.1.7 ([AS97], Lemma 7.1 et 7.5)**.** *Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente d'indice de nilpotence égal à 2 et telle que* $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 1$. *Alors, il existe une algèbre abélienne $\mathfrak{a}$ et $d \geqslant 1$ tels que $\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{heis}(2d+1) \oplus \mathfrak{a}$.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$, fixons $\mathfrak{s}$ un supplémentaire de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{n}$ et définissons $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, qui est alors un idéal de $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{a}$ est un supplémentaire de $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ dans $\mathfrak{z}$, nous avons $\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{a}$, en tant qu'algèbres de Lie. Prouvons alors que $\mathfrak{n}_0$ est une algèbre de Heisenberg. Premièrement, $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = [\mathfrak{n}_0,\mathfrak{n}_0]$. Ensuite, $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_0) = \mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{n}_0 = [\mathfrak{n}_0,\mathfrak{n}_0]$. Donnons-nous alors $Z \in \mathfrak{n}_0$ dirigeant le centre. Nous avons alors ω une 2-forme alternée sur $\mathfrak{s}$ définie par $[X,Y] = \omega(X,Y)Z$. Enfin, puisque $\omega(X,\mathfrak{s}) = 0 \iff X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_0) \cap \mathfrak{s} = 0$, ω est non dégénérée. Ainsi, $\mathfrak{s}$ est de dimension paire $2d$ et à isomorphisme près, $(\mathfrak{s},\omega)$ est $\mathbf{C}^d$ muni de sa forme symplectique standard. Nous avons bien $\mathfrak{n}_0 \simeq \mathfrak{heis}(2d+1)$. □

Ainsi, nous devons avoir $\mathfrak{h}' \simeq \mathfrak{heis}(2d+1)$, pour $d \geqslant 1$. La proposition 7.1.2 nous fournit une métrique g dans la classe conforme telle que $H' \subset \mathrm{Isom}(M,g)$. On sait alors que les orbites du centre de $\mathfrak{h}'$ sont partout de type lumière, et orthogonales à l'espace tangent à l'orbite $T_x(H'.x)$. Puisqu'elle est isomorphe à $\mathfrak{heis}(2d+1)$, $\mathfrak{h}'$ se décompose en $\mathfrak{h}' = \mathbf{C}^d \oplus \mathbf{R}.Z'$. Fixons alors $X_0 \in \mathbf{C}^d$ et posons $g_0 := \frac{g}{g(X_0,X_0)}$. Pour tout $X \in \mathfrak{h}'$, si nous l'écrivons $X = X_1 + \lambda Z$ relativement à la décomposition $\mathfrak{h}' = \mathbf{C}^d \oplus \mathbf{R}.Z$, nous avons

$T_x\phi_X^t(X_0)_x = (X_0)_{\phi_X^t(x)} - \omega(X_1, X_0)tZ_{\phi_X^t(x)}$ (où ω désigne la forme symplectique standard de $\mathbf{C}^d$). Nous avons donc

$$g((X_0)_{\phi_X^t(x)}, (X_0)_{\phi_X^t(x)}) = g(T_x\phi_X^t(X_0)_x, T_x\phi_X^t(X_0)_x) = g((X_0)_x, (X_0)_x),$$

puisque ϕ_X^t est une isométrie de g. Par conséquent, nous avons pour tout $x \in M$

$$\left[(\phi_X^t)^* g_0\right]_x = \frac{\left[(\phi_X^t)^* g\right]_x}{g((X_0)_{\phi_X^t(x)}, (X_0)_{\phi_X^t(x)})} = \frac{g_x}{g((X_0)_x, (X_0)_x)} = (g_0)_x$$

Ceci nous assure que H' agit également par isométries de g_0. Rappelons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}$. Pour $U \in \mathfrak{a}$, comme ϕ_U^t commute avec le champ X_0, par le lemme 7.1.1 on doit également avoir $\phi_U^t \in \mathrm{Isom}(M, g_0)$. Finalement, tout H agit par isométries de g_0.

7.2 Actions conformes essentielles

À présent, nous passons à l'étude des groupes de Lie nilpotents connexes dont l'action est essentielle et démontrons le théorème 7.2. Nous allons fondamentalement nous appuyer sur l'étude des actions conformes essentielles du groupe de Heisenberg de dimension 3 et la majeure partie de cette section est dévouée à la preuve du théorème 7.3 annoncé en début de chapitre. Rappelons son énoncé.

Théorème. *Soit (M, g) une variété lorentzienne compacte. On suppose qu'un groupe de Lie connexe localement isomorphe à* Heis(3) *agit conformément sur M, et que l'action n'est pas localement libre partout. Alors, il existe un ouvert de M qui est conformément plat et l'action du groupe est essentielle.*

Dans toute cette partie, (M, g) est une variété lorentzienne compacte, et $(M, \mathcal{C})$ est la géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ associée à la structure conforme $(M, [g])$. Comme d'habitude, $\pi : \widehat{M} \to M$ désigne le fibré de Cartan et ω la connexion de Cartan. On suppose qu'il existe un groupe de Lie connexe H, localement isomorphe au groupe de Heisenberg Heis(3), qui agit conformément sur (M, g) et qu'il existe un point x de M tel que $\dim H.x \leqslant 2$.

Notation. Dans cette section, $\mathfrak{h}$ désigne $\mathfrak{heis}(3)$ l'algèbre de Heisenberg de dimension 3 dont on note X, Y, Z une base telle que $[X, Y] = Z$ et Z central. D'une façon générale, on appelle « $\mathfrak{heis}(3)$-triplet » (dans une algèbre de Lie réelle) tout triplet d'éléments linéairement indépendants qui vérifient ces relations.

7.2.1 Holonomie de champs de vecteurs et platitude conforme

On va faire apparaître des ouverts conformément plats grâce au lemme 7.2.1 énoncé un peu plus loin, qui est un point important dans la preuve du Théorème 1.2 de [FM13]. Avant de l'énoncer, nous rappelons ce que l'on entend par l'*holonomie* d'un champ de vecteurs conformes (notion qui a déjà été rencontrée à la section 6.3.1) et expliquons ce qu'on entend par « être une translation de type lumière ».

Si $f \in \mathrm{Conf}(M, g)$ fixe un point $x \in M$ et si $\widehat{f}$ désigne le relevé de f à $\widehat{M}$, alors $\widehat{f}$ préserve la fibre $\pi^{-1}(x)$. Ainsi, pour tout $\widehat{x}$ se projetant sur x, il existe un unique $p \in P$

tel que $\widehat{f}(\widehat{x}) = \widehat{x}.p^{-1}$, noté $p = \mathrm{hol}_{\widehat{x}}(f)$ et que l'on appelle *holonomie* de f en $\widehat{x}$. Si X est un champ de Killing conforme de (M, g) qui s'annule en x, on appelle holonomie de X en $\widehat{x} \in \pi^{-1}(x)$ l'élément $X_h \in \mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{hol}_{\widehat{x}}(\phi_X^t) = \mathrm{e}^{tX_h}$. On vérifie aisément que si $\widehat{X}$ désigne le relevé de X à $\widehat{M}$, on a $X_h = \omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}(\widehat{x}))$.

Propriétés dynamiques d'éléments de P sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$

On rappelle (voir section 2.3.1) qu'à tout point $x \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ correspond un ouvert dense $M_x \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ appelé composante de Minkowski de x et une famille de difféomorphismes conformes $s_x : M_x \to \mathbf{R}^{1,n-1}$ appelées *projections stéréographiques*. Par le théorème de Liouville, deux projection s_x et s'_x "diffèrent" d'un élément de $a \in \mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ au sens où $s'_x = a \circ s_x$. Le complémentaire C_x d'une composante de Minkowski est le *cône de lumière* issu de x, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les géodésiques de lumières issues de x. L'invariance conforme des géodésiques de lumière fait que si $g \in PO(2, n)$ fixe un point $x \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, g doit préserver la composante de Minkowski M_x associée à x. Si on lit l'action de g sur M_x dans une projection stéréographique, on obtient une transformation conforme de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. *A priori*, ce qu'on observe doit dépendre de la projection stéréographique en x que l'on a choisie. Nous allons voir que cependant, certaines propriétés sont indépendantes du choix de la projection.

Fixons s une projection stéréographique de sommet x et soit $g \in PO(2, n)$ fixant x. Si s conjugue la restriction $g|_{M_x}$ à $f \in \mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$, alors une autre projection stéréographique conjuguera $g|_{M_x}$ à un certain afa^{-1}, pour $a \in \mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$. Rappelons que dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$, les translations forment un sous-groupe distingué. Mieux, « être une translation de type temps, espace ou lumière » est une propriété invariante par conjugaison dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$. Nous pouvons donc prendre la définition suivante.

Définition 7.2.1. Soient $x \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et $g \in \mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{1,n-1})$ fixant x. Nous dirons que g *est une translation de type espace/temps/lumière de M_x* si à travers une (en fait toute) projection stéréographique de sommet x, la restriction de g à M_x est une translation de type espace/temps/lumière de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$.

On revient aux holonomies. Si un champ conforme X de (M, g) fixant $x \in M$, on dit que l'holonomie X_h de X en $\widehat{x}$ est une translation de type espace/temps/lumière si le flot $\mathrm{e}^{tX_h} \in P$ est formé de translations de type espace/temps/lumière de la composante de Minkowski M_{x_0}, où $x_0 \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est tel que $P = \mathrm{Stab}_G(x_0)$. On notera que si on change le point $\widehat{x}$ en $\widehat{x}.p$, pour $p \in P$, alors X_h est changé en $\mathrm{Ad}(p^{-1})X_h$, ce qui assure que la notion est bien définie.

Nous pouvons à présent énoncer le

Lemme 7.2.1 ([FM13], extrait du Théorème 4.3)**.** *Soient (M, g) une variété lorentzienne et X un champ de Killing conforme s'annulant au voisinage de $x_0 \in M$. Si l'holonomie de X est une translation de type lumière de $\mathbf{R}^{1,n-1}$, alors X n'est pas linéarisable au voisinage de x_0 et il existe un ouvert U conformément plat qui contient x_0 dans son adhérence.*

L'enjeu pour pouvoir démontrer l'existence d'ouverts conformément plats va donc être d'exhiber des champs de Killing conformes qui fixent des points et dont l'holonomie en ces points est une translation de type lumière. Une fois cette existence démontrée, nous serons de plus assurés que l'action de H est *essentielle* car un flot d'isométries d'une métrique pseudo-riemannienne qui fixent un point est systématiquement linéarisé par l'exponentielle de la connexion de Levi-Civita.

7.2.2 Préliminaires algébriques sur des représentations de $\mathfrak{heis}(3)$

On commence par démontrer quelques résultats d'ordre algébrique.

Proposition 7.2.2. *Soit (X,Y,Z) un $\mathfrak{heis}(3)$-triplet dans $\mathfrak{p} = \mathfrak{co}(1,n-1) \ltimes \mathbf{R}^{1,n-1}$. Alors, Z n'a pas de composante sur la partie linéaire $\mathfrak{co}(1,n-1)$ et de plus, sa composante sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$ est isotrope.*

Démonstration. Pour voir que Z n'a pas de composante sur $\mathfrak{co}(1,n-1)$, il suffit de prouver le lemme suivant (on n'aura qu'à considérer le morphisme $\mathfrak{heis}(3) \to \mathfrak{co}(1,n-1)$ obtenu en projetant le $\mathfrak{heis}(3)$-triplet sur la partie linéaire).

Lemme 7.2.3. *Tout morphisme de $\mathfrak{heis}(3) \to \mathfrak{co}(1,n-1)$ s'annule sur le centre.*

Démonstration. S'il ne s'annule pas sur le centre, un tel morphisme est injectif. Supposons alors que l'on dispose d'un triplet (X,Y,Z) dans $\mathfrak{co}(1,n-1) = \mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(1,n-1)$ tel que $Z \neq 0$, $[X,Y] = Z$ et $[Z,X] = [Z,Y] = 0$. Notons tout d'abord que $Z \in \mathfrak{o}(1,n-1)$ car $[\mathfrak{co}(1,n-1), \mathfrak{co}(1,n-1)] = \mathfrak{o}(1,n-1)$. Donc, quitte à remplacer X et Y par leurs projections sur $\mathfrak{o}(1,n-1)$, nous pouvons supposer que X, Y et Z sont pris dans $\mathfrak{o}(1,n-1)$. Nous avons donc une représentation $\pi : \mathfrak{heis}(3) \to \mathfrak{o}(1,n-1)$. Nous allons prouver qu'il existe une direction isotrope $\mathbf{R}.v \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ qui est préservée par tous les $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{heis}(3)$.

D'après le théorème de Lie, si $\pi : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n)$ est une représentation complexe d'une algèbre de Lie résoluble, alors il existe un vecteur propre $v \in \mathbf{C}^n$ commun à tous les $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{h}$. Ainsi, si $\pi : \mathfrak{heis}(3) \to \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^k)$ est une représentation réelle, nous avons $v = v_1 + iv_2 \in \mathbf{C}^n$ et $\lambda : \mathfrak{heis}(3) \to \mathbf{C}$ tels que $\pi(X)v = \lambda(X)v$ pour $X \in \mathfrak{heis}(3)$. Or, puisque $Z = [X,Y]$, $\pi(Z)v = (\lambda(X)\lambda(Y) - \lambda(Y)\lambda(X))v = 0$. Comme les entrées de $\pi(Z)$ sont réelles, nous avons $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,\pi(Z)$, et nous venons de prouver que pour toute représentation réelle de $\mathfrak{heis}(3)$, on a $\dim \mathrm{Ker}\,\pi(Z) \geqslant 1$.

Dans le cas de notre représentation $\pi : \mathfrak{heis}(3) \to \mathfrak{o}(1,n-1)$, notons $E = \mathrm{Ker}\,\pi(Z)$. Puisque Z est central, E est stabilisé par tout $\pi(\mathfrak{heis}(3))$, et il en va de même pour $E^\perp$, où l'orthogonal est pris relativement au produit scalaire lorentzien ambiant de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Comme nous avons supposé $\pi(Z) \neq 0$, on a $E \subsetneq \mathbf{R}^{1,n-1}$ et nous pouvons considérer la représentation $\pi' : \mathfrak{heis}(3) \to \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E^\perp)$, où $\pi'(X) = \pi(X)|_{E^\perp}$. D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, $\dim \mathrm{Ker}\,\pi'(Z) \geqslant 1$. Ainsi, $\dim E \cap E^\perp \geqslant 1$. Comme nous sommes en signature lorentzienne, $D = E \cap E^\perp$ est une droite isotrope de $\mathbf{R}^{1,n-1}$, préservée par tout $\pi(\mathfrak{heis}(3))$.

Ainsi, à conjugaison près dans $O(1,n-1)$, nos trois champs sont dans $(\mathfrak{co}(n-2) \ltimes \mathbf{R}^{n-2} \subset \mathfrak{o}(1,n-1)$. Le crochet sur cette sous-algèbre est donné par

$$[(a_1,A_1,u_1),(a_2,A_2,u_2)] = (0,[A_1,A_2],a_1u_2 - a_2u_1 + u_2A_1 - u_1A_2),$$

pour $(a_i,A_i,u_i) \in (\mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(n-2)) \ltimes \mathbf{R}^{n-2}$. Pour $T \in \{X,Y,Z\}$, on note a_T, A_T et u_T les composantes de T sur $\mathbf{R}$, $\mathfrak{o}(n-2)$ et $\mathbf{R}^{n-2}$ respectivement.

Notons premièrement que puisque $Z = [X,Y]$, $a_Z = 0$ et $A_Z = [A_X, A_Y]$. Voyons alors que $A_Z = 0$. Notons B la forme de Killing de $\mathfrak{o}(n-2)$. Nous avons alors $B(A_Z,A_Z) = B([A_X,A_Y],A_Z) = -B(A_Y,[A_X,A_Z]) = 0$. D'où $A_Z = 0$ puisque B est définie négative.

Exprimons alors que Z commute à X et Y : ceci est équivalent à $u_ZA_X = -a_Xu_Z$ et $u_ZA_Y = -a_Yu_Z$. Or, une matrice de $\mathfrak{o}(n-2)$ a un spectre réel réduit à 0. Puisque $u_Z \neq 0$, ceci implique que $a_X = a_Y = 0$ et $u_Z \in \mathrm{Ker}\,A_X \cap \mathrm{Ker}\,A_Y$. Nous obtenons enfin que $u_Z = u_YA_X - u_XA_Y$. Voyons alors que ceci est contradictoire :

Notons $<,>$ le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^{n-2}$. Alors $< u_Z, u_Z >=< u_X A_Y, u_Z > - < u_Y A_X, u_Z >= - < u_X, u_Z A_Y > + < u_Y, u_Z A_X >= 0$. Donc, $u_Z = 0$, d'où $Z = 0$, ce qui est exclus. □

Notons à présent $<,>_{\min}$ le produit scalaire lorentzien de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Les éléments de $\mathfrak{p}$ sont de la forme $(\lambda, M, U) \in (\mathbf{R} \oplus \mathfrak{o}(1, n-1)) \ltimes \mathbf{R}^n$. Nous savons que $\lambda_Z = 0$ et $M_Z = 0$ et nous allons prouver $< U_Z, U_Z >_{\min} = 0$.

La relation $[X, Z] = 0$ nous donne $\lambda_X U_Z - M_X U_Z = 0$. Ainsi

$$\lambda_X < U_Z, U_Z >_{\min} =< M_X U_Z, U_Z >_{\min} = - < U_Z, M_X U_Z >_{\min} = 0.$$

Nous pouvons donc supposer que $\lambda_X = 0$, et donc que $M_X U_Z = 0$. De même, la relation $[Y, Z] = 0$ nous permet de supposer que $\lambda_Y = 0$ et $M_Y U_Z = 0$. Enfin, nous tirons de $Z = [X, Y]$ que $U_Z = M_Y U_X - M_X U_Y$. Nous avons alors

$$< U_Z, U_Z >_{\min} =< U_Z, M_Y U_X - M_X U_Y >_{\min} = 0.$$

Dans tous les cas, U_Z est une direction isotrope de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. □

7.2.3 Existence d'un point où l'holonomie de Z est une translation de type lumière

Rappelons que nous avons une action conforme essentielle d'un groupe de Lie H localement isomorphe à Heis(3). Nous confondons l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ avec le $\mathfrak{heis}(3)$-triplet de champs de vecteurs conformes fourni par l'action de H. Nous démontrons ici le lemme suivant.

Lemme 7.2.4. *Pour tout fermé H-invariant $F \subset M$ qui contient une orbite de dimension inférieure ou égale à 2, il existe $x \in F$ tel que l'élément central $Z \in \mathfrak{h}$ s'annule en x et a une holonomie qui est une translation de type lumière.*

Points fixes de l'action Supposons qu'il existe un point $x \in F$ dont le stabilisateur est de dimension 3. Pour tout $\widehat{x}$ au-dessus de x, en dérivant le morphisme d'holonomie en $\widehat{x}$, nous obtenons un plongement $\mathfrak{h} \to \mathfrak{p} = \mathfrak{co}(1, n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$. La proposition 7.2.2 implique alors directement que $Z_{\widehat{x}} \in \mathfrak{p}$ est une translation lumière. On peut donc supposer que H agit sans point fixe sur F.

Orbites de dimension 1. Dans ce cas, s'il existe une orbite de dimension 1, l'hypothèse précédente fait que $\{x \in F \mid \dim H.x = 1\}$ est un fermé H-invariant non vide. Il contient donc un point de Zimmer x pour (ι, H) (proposition 5.3.1). Son stabilisateur H_x est un sous-groupe de dimension 2 de H. Il n'y a donc pas beaucoup de possibilités comme le montre le lemme suivant.

Lemme 7.2.5. *Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{heis}(3)$ une sous-algèbre de dimension 2. Alors, $\mathfrak{a}$ est de la forme $\mathfrak{a} = \mathrm{Vect}(u, Z)$, avec $u \in \mathrm{Vect}(X, Y)$.*

Démonstration. Tout d'abord, cette algèbre $\mathfrak{a}$ est nécessairement abélienne, car sinon elle serait isomorphe à l'algèbre affine et donc ne pourrait pas se réaliser comme une sous-algèbre d'une algèbre nilpotente.

Donnons-nous u, v engendrant $\mathfrak{a}$ et notons $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ leurs composantes sur $\mathbf{C} = \mathrm{Vect}(X, Y)$. Comme $\omega(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = 0$, quitte à les permuter, nous pouvons supposer que $\widetilde{u} \neq 0$ et $\widetilde{v} = \lambda \widetilde{u}$. Ainsi, $v - \lambda u$ est central et non nul. D'où $Z \in \mathfrak{a}$. Ainsi, $\mathfrak{a}$ est engendrée par $\widetilde{u}$ et Z. □

Ainsi, quitte à changer la présentation de $\mathfrak{heis}(3)$, nous pouvons supposer que $\mathfrak{h}_x = \mathrm{Vect}(Y, Z)$. Fixons alors $\widehat{x}$ dans la fibre au-dessus de x et notons $\mathfrak{p}^{\widehat{x}}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{p}$ donnée par la proposition 5.2.2. Puisque $\iota_{\widehat{x}} : \mathfrak{h}_x \to \mathfrak{p}$ est (toujours) un morphisme d'algèbres, nous avons $[Z_{\widehat{x}}, Y_{\widehat{x}}] = 0$ dans $\mathfrak{p}$. Par définition de $\mathfrak{p}^{\widehat{x}}$, il existe $X' \in \mathfrak{p}^{\widehat{x}}$ tel que $[X', Y_{\widehat{x}}] = \iota_{\widehat{x}}([X, Y]) = Z_{\widehat{x}}$ et $[X', Z_{\widehat{x}}] = \iota_{\widehat{x}}([X, Z]) = 0$.

Nous constatons alors que le triplet $(X', Y_{\widehat{x}}, Z_{\widehat{x}})$ d'éléments de $\mathfrak{p}$ vérifie les relations de crochet de $\mathfrak{heis}(3)$. La proposition 7.2.2 nous assure alors que $Z_{\widehat{x}} \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ et est isotrope. Nous pouvons donc supposer qu'il n'existe pas d'orbite de dimension inférieure ou égale à 1.

Orbites de dimension 2. Nous nous sommes ramenés à supposer que l'action de H sur F n'a que des orbites de dimension 2 ou 3 et qu'il existe une orbite de dimension 2. La preuve du lemme qui suit est directement inspirée d'un lemme que l'on peut trouver dans [AS97], formulé de façon optimale dans un cadre plus général.

Lemme 7.2.6 ([AS97], Lemma 6.5)**.** *Sous nos hypothèses, il existe un point $x \in F$ tel que l'algèbre de Lie de son stabilisateur est $\mathfrak{h}_x = \mathbf{R}.Z$*

Démonstration. Soient $Y' \in \mathfrak{h}_y$ dans l'algèbre du stabilisateur d'un certain point $y \in F$ et X' tel que $[X', Y'] = Z$. Notons $a_t = \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX'})$. En notant $y^t = \mathrm{e}^{tX'}.y$, nous avons $a_t(Y') \in \mathfrak{h}_{y^t}$ et $a_t(Y') = Y' + tZ$. Ainsi, pour tout t, $Z + \frac{Y'}{t} \in \mathfrak{h}_{y^t}$. On conclut en prenant grâce à la compacité de M un point $x \in F$ obtenu comme limite d'une suite y^{t_k}. □

Puisque Z est central, le fermé $\{x \in F \mid Z_x = 0\}$ est H-invariant. Il contient donc un point de Zimmer x pour (ι, H). Nous savons que $Z_{\widehat{x}}$ est vertical. Par le lemme 5.2.1, combiné avec le fait que la 2-forme Ω est horizontale, nous avons alors $[\iota_{\widehat{x}}(Y), \iota_{\widehat{x}}(Z)] = \iota_{\widehat{x}}([Y, Z]) = 0$. Comme précédemment, la proposition 5.2.2 nous assure l'existence d'un $X' \in \mathfrak{p}$ tel que $[X', \iota_{\widehat{x}}(Y)] = \iota_{\widehat{x}}(Z)$ et $[X', \iota_{\widehat{x}}(Z)] = 0$. Ainsi, $(X', \iota_{\widehat{x}}(Y), \iota_{\widehat{x}}(Z))$ est un $\mathfrak{heis}(3)$-triplet de $\mathfrak{o}(2, n)$. Nous avons alors le fait suivant.

Proposition 7.2.7. *Soit $\pi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{o}(2, n)$ un plongement. On a alors l'alternative suivante :*

1. *ou bien il existe une direction isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$ préservée par $\pi(\mathfrak{h})$, et $\mathfrak{h}$ se réalise ainsi dans l'algèbre du stabilisateur d'un point de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$;*
2. *ou bien il n'existe aucune direction isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$ fixée par $\pi(\mathfrak{h})$, et dans ce cas, à conjugaison près dans $O(2, n)$, le centre de $\mathfrak{h}$ est envoyé sur l'espace de racine $\mathfrak{g}_{\alpha+2\beta}$ (cf. section 2.3.1).*

Dans tous les cas, le groupe à un paramètre dans $PO(2, n) = \mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{1,n-1})$ associé à $\pi(Z)$ fixe un point x_0 de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et est formé de translations de type lumière de la composante de Minkowski M_{x_0} (cf. définition 7.2.1).

Démonstration. Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 7.2.2 nous permet d'affirmer que si $E = \mathrm{Ker}\,\pi(Z)$, alors $E \cap E^\perp \neq 0$, et donc que $\dim E \cap E^\perp = 1$ ou 2 puisque nous sommes en signature $(2, n)$. Toujours parce que Z est central, $E \cap E^\perp$ est préservé par tout $\pi(\mathfrak{heis}(3))$.

Si $\dim E \cap E^\perp = 1$, $\pi(\mathfrak{h})$ est réalisée dans le stabilisateur d'une direction isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$, *ie* dans une algèbre conjuguée dans $O(2, n)$ à $\mathfrak{p} = \mathfrak{co}(1, n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$. On est bien dans le premier cas, et par la proposition 7.2.2, $\pi(Z)$ correspond à une translation de type lumière d'une composante de Minkowski.

Si $\dim E \cap E^\perp = 2$, ce plan totalement isotrope se projette dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ sur une géodésique de lumière et $\pi(\mathfrak{h})$ se réalise dans l'algèbre du stabilisateur de cette géodésique. Comme $\pi(Z)$ est nul en restriction à $E \cap E^\perp$, si ϕ^t est le flot dans $O(2,n)$ associé à $\pi(Z)$, ϕ^t fixe point par point cette géodésique lumière. Fixons $(e_1, \dots, e_{n+2})$ une base de $\mathbf{R}^{2,n}$ comme en 2.3.1. Puisque $PO(2,n)$ agit transitivement sur les géodésiques de lumière de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, à conjugaison près dans $PO(2,n)$, $\pi(\mathfrak{h})$ est dans l'algèbre de Lie du stabilisateur de la géodésique lumière $\pi(\mathrm{Vect}(e_1, e_2))$. Cette algèbre est composée des matrices de $\mathfrak{o}(2,n)$ de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M & L & C \\ \hline & A & -{}^tL \\ \hline & & N \end{array}\right),$$

où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}$, $A \in \mathfrak{o}(n-2)$, $L = \begin{pmatrix} u_3 & \cdots & u_n \\ v_3 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & -\alpha \end{pmatrix}$. La partie strictement triangulaire est une copie de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{heis}(2n-3)$, les éléments L correspondant à $\mathbf{C}^{n-2}$ et C aux éléments centraux (cf. début du chapitre).

L'élément $\pi(Z)$ n'a pas de composante sur $\mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$ puisque les deux premiers vecteurs de base correspondent à $E \cap E^\perp$. La composante de $\pi(Z)$ sur $\mathfrak{o}(n-2)$ est également nulle (sinon on aurait une copie de $\mathfrak{heis}(3)$ dans $\mathfrak{o}(n-2)$). Finalement, $\pi(Z) \in \mathfrak{heis}(2n-3)$. S'il est dans le centre de $\mathfrak{heis}(2n-3)$, on est dans le deuxième cas de la proposition. Par conséquent, nous supposons jusqu'à la fin de la preuve que $\pi(Z) = (u, v, \alpha) \in \mathfrak{heis}(2n-3)$, avec u ou v non nul.

Pour $T \in \{X, Y, Z\}$, on note M_T la composante de T sur $\mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$ et A_T celle sur $\mathfrak{o}(n-2)$. Premièrement, puisque $M_Z = 0$, $\{M_X,\ X \in \mathfrak{h}\}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$. On vérifie facilement que les sous-algèbres abéliennes propres de $\mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$ sont de dimension 1 ou 2, et que celles de dimension 2 sont engendrées vectoriellement par une homothétie non nulle et une matrice quelconque.

Si cette algèbre est nulle, nous sommes dans le cas 1. de l'alternative. Si elle est de dimension 2, prenons $Y \in \mathfrak{h}$, avec M_Y une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$. Comme $[Y, Z] = 0$, nous devons avoir $uA_Y = M_Y u = \lambda u$ et $vA_Y = \lambda v$. Le spectre de A_Y étant imaginaire pur, nous devrions avoir $u = v = 0$, ce qui est exclus. Le cas intéressant à traiter reste donc celui où la sous-algèbre $\{M_X,\ X \in \mathfrak{h}\}$ est de dimension 1.

Dans ce cas, nous nous fixons $X \in \mathfrak{h}$ tel que $M_X \neq 0$ et choisissons $Y \in \mathfrak{h}$ telle que $[X, Y] = Z$ et $M_Y = 0$. Si M_X admet une valeur propre réelle, nous sommes dans le premier cas. Nous pouvons donc, quitte à changer la base (e_1, e_2), supposer que

$$M_X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

avec $b \neq 0$. Puisque $[X, Z] = 0$, on doit avoir

$$\begin{cases} uA_X = au - bv \\ vA_X = bu + av \end{cases}.$$

Dans ces conditions, $u = 0 \iff v = 0$. On peut donc supposer u et v non nuls. S'ils étaient proportionnels, nous aurions $\lambda \neq 0$ tel que $a = -\lambda b$ et $b = \lambda a$, ce qui serait absurde. Ainsi, $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est un plan stable par A_X. Cette dernière y induit un endomorphisme antisymétrique, conjugué à ${}^tM_X$, dont le spectre est donc $\{a \pm ib\}$. Ainsi, nous

avons nécessairement $a = 0$. Enfin, quitte à faire un changement de base orthonormée dans $\mathrm{Vect}(e_3, \dots, e_n)$, nous supposerons $P = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$, c'est-à-dire que u et v s'écrivent $(u_1, u_2, 0 \dots, 0)$ et $(v_1, v_2, 0, \dots, 0)$. Notons enfin que puisque M_Y est nulle, A_Y est nulle en restriction à P. Finalement, nous nous sommes ramenés à la configuration suivante :

$$X = \left(\begin{array}{c|ccc|c} J & & * & & * \\ \hline & -J & & & \\ & 0 & * & & * \\ & \vdots & & & \\ \hline & & & & -J \end{array}\right), Y = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & C & * & & * \\ \hline & 0 & & & \\ & 0 & * & & * \\ & \vdots & & & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \text{ et } Z = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & C' & 0 & & * \\ \hline & & & & \\ & & 0 & & * \\ & & & & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$.

Nous allons voir que ceci n'est pas possible en considérant les blocs 4×4 supérieurs gauches. En effet, premièrement, $[X, Z] = 0$ implique $JC' + C'J = 0$, soit $v = \pm uJ$. D'autres part, $[X, Y] = Z$, d'où $JC + CJ = C'$. De ceci, on tire aisément que $C' = 0$, ce qui était exclus. □

Remarque 7.2.2. Les deux cas décrits dans cette proposition se produisent. Pour le premier c'est évident, et pour le deuxième, il existe des copies de $\mathfrak{heis}(3)$ dans $\mathfrak{o}(2, n)$ qui ne fixent aucun point sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Pour voir cela, on peut par exemple considérer dans $\mathfrak{o}(2, 4)$

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 & -2 & 0 \\ \hline & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{array}\right), \quad Y = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{et } Z = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ce triplet satisfait les relations de crochet de $\mathfrak{heis}(3)$. Or, le lieu des points fixés par le flot de Z est précisément la géodésique lumière associée au plan totalement isotrope $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ alors que le flot de X ne fixe aucune direction dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

En appliquant cette proposition au triplet $(X', \iota_{\widehat{x}}(Y), \iota_{\widehat{x}}(Z))$, nous avons $\iota_{\widehat{x}}(Z) \in \mathfrak{p}$ qui est conjugué *dans* $O(2, n)$ à un vecteur isotrope de la composante $\mathbf{R}^{1,n-1}$ de $\mathfrak{p}$. Il nous reste à voir qu'il est possible de trouver un $p \in P$ tel que $\mathrm{Ad}(p)\iota_{\widehat{x}}(Z)$ est un vecteur isotrope de la composante $\mathbf{R}^{1,n-1}$ de $\mathfrak{p}$.

Un lemme sur les translations de type lumières de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$

Si $\psi^t \in \mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{1,n-1})$ est un flot conforme qui fixe un point x, et qui correspond à une translation de type lumière, on démontre facilement en utilisant l'homogénéité de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ que les points fixés par ψ^t forment une géodésique de lumière issue de x (on se ramène à un exemple basique).

Lemme 7.2.8. *Soit ψ^t un flot conforme de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui correspond à une translation de type lumière dans une composante de Minkowski M_{x_0}. On note Δ la géodésique de lumière formée par ses points fixes. Alors, pour tout $x \in \Delta$ et toute projection stéréographique s_x de sommet x, $s_x^{-1} \circ \psi^t \circ s_x$ est une translation de type lumière de Minkowski.*

Démonstration. On choisit e_0 un vecteur isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$ tel que $x_0 = \pi(e_0)$. Si $x = x_0$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc $x \neq x_0$ et on choisit e_1 un vecteur isotrope de $\mathbf{R}^{2,n}$ tel que $x = \pi(e_1)$. On a alors $\Delta = \pi(\mathrm{Vect}(e_0, e_1))$. Puisque ψ^t agit trivialement sur Δ, son relevé dans $O(2,n)$ fixe e_0 et e_1. On choisit maintenant $e_{n+1} \in \mathbf{R}^{2,n}$ isotrope tel que $\mathrm{Vect}(e_0, e_{n+1})$ est lorentzien et orthogonal à e_1 et on fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_0, e_{n+1})^\perp$ de sorte que la restriction de la forme quadratique s'écrive $2x_1x_n + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2$. On a alors des expressions explicites de projections stéréographiques en x_0 et en x :

$$s_{x_0} : y \in \mathbf{R}^{1,n-1} \mapsto \pi(-\frac{q(y)}{2}, y_1, \dots, y_n, 1)$$
$$s_x : y \in \mathbf{R}^{1,n-1} \mapsto \pi(y_1, -\frac{q(y)}{2}, y_2, \dots, y_{n-1}, 1, y_n)$$

Rappelons que dans la base $(e_0, \dots, e_{n+1})$, le stabilisateur P de $\pi(e_0)$ dans $PO(2,n)$ est le produit semi-direct

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & A & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u & -uJ\,{}^t u/2 \\ & \mathrm{id} & -J\,{}^t u \\ & & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbf{R}^*,\ A \in O(1, n-1),\ u \in \mathbf{R}^{1,n-1} \right\}$$

où le deuxième facteur correspond exactement au sous-groupe distingué des éléments qui agissent comme des translations de Minkowski à travers toute projection stéréographique de sommet $\pi(e_0)$. Le flot ψ^t, vu dans $O(2,n)$, est donc dans ce sous-groupe distingué, et fixe de plus les deux premiers vecteurs de base e_0 et e_1. Puisque le vecteur de la translation est isotrope, cela implique

$$\psi^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha t & 0 \\ & & & & -\alpha t \\ & & \mathrm{id} & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On voit alors qu'à travers s_{x_0}, ce flot est conjugué à la translation de vecteur (isotrope) $(0, \dots, 0, \alpha)$ et à travers s_x à celle de vecteur $(\alpha, 0, \dots, 0)$. □

Nous pouvons conclure. Appelons $\phi^t \in P$ le flot associé à $\iota_{\widetilde{x}}(Z)$ et x_0 le point de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ tel que $P = \mathrm{Stab}(x_0)$. La proposition 7.2.7 nous donne un $g \in O(2,n)$ tel que $\psi^t = g\phi^t g^{-1} \in P$ est dans le sous-groupe distingué formé par les translations et correspond à une translation de type lumière. Appelons Δ la géodésique lumière fixée par ψ^t. Puisque ϕ^t fixe x_0, on a $x = gx_0 \in \Delta$. Soit alors s_{x_0} une projection stéréographique de sommet x_0 et notons $s_x := g.s_{x_0}$. Nous avons $s_{x_0}^{-1} \circ \phi^t \circ s_{x_0} = s_x^{-1} \circ g\phi^t g^{-1} \circ s_x = s_x^{-1} \circ \psi^t \circ s_x$. Par le lemme 7.2.8, $s_{x_0}^{-1} \circ \phi^t \circ s_{x_0}$ est bien une translation lumière de Minkowski.

7.2.4 Conclusion

Nous pouvons alors conclure la preuve du théorème 7.3. Par hypothèse, le fermé $\{x \in M \mid \dim H.x \leqslant 2\}$ est non vide. Le lemme 7.2.4 nous donne ainsi l'existence d'un point fixé

par le centre et tel que l'holonomie du centre correspond à un flot de translations de type lumière d'une composante de Minkowski de l'univers d'Einstein. Par le lemme 7.2.1, un voisinage de ce point est conformément plat. De plus, on sait qu'au voisinage de ce point fixe, Z n'est pas linéarisable. Son flot ne préserve donc aucune métrique, et l'action de H est essentielle.

7.2.5 Démonstration du théorème 7.2

Prenons maintenant H un groupe de Lie connexe nilpotent d'indice 2, et décomposons son algèbre de Lie en $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}$ comme à la section 7.1, où $\mathfrak{a}$ est abélienne et $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}') = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. On appelle H' le sous-groupe connexe associé à H' et on suppose que H agit conformément sur une variété lorentzienne compacte (M, g).

Nous avons déjà démontré que si H' agit localement librement, alors l'action de H est inessentielle. Pour finir la preuve du théorème 7.2, nous devons montrer que si H' n'agit pas localement librement, alors l'action de H est essentielle et $(M, [g])$ est conformément plate. Le théorème 7.3 sera suffisant pour conclure si on prouve le lemme ci-dessous.

Lemme 7.2.9. *Si l'action de H' n'est pas localement libre partout, alors H' contient un sous-groupe localement isomorphe à* Heis(3) *qui n'agit pas localement librement partout.*

Démonstration. Comme à l'accoutumée, nous confondons l'algèbre de Lie d'un groupe qui agit fidèlement avec l'algèbre de champs de vecteurs correspondante. Nous allons exhiber un élément de la forme $Z = [X, Y]$ qui s'annule en un point de M.

Le cas favorable est $\dim[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 1$. En effet, nous savons qu'il existe un élément de $\mathfrak{h}'$ qui s'annule quelque part. Si cet élément est dans $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, c'est fini. Sinon, cet élément n'est pas central car $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}') = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, et une adaptation directe du lemme 7.2.6 nous assure que la droite $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ est dirigée par un élément qui s'annule quelque part.

Sous-lemme. *Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente d'indice 2. Si $\forall X \in \mathfrak{h}$ on a $\dim[X, \mathfrak{h}] \leqslant 1$, alors $\dim[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 1$.*

Démonstration. On fixe $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Il s'agit de démontrer que $\forall Y \in \mathfrak{h}$, on a $\mathrm{ad}(Y)\mathfrak{h} \subset \mathrm{ad}(X)\mathfrak{h}$. Si $[X, Y] \neq 0$, comme $[X, Y] \in [X, \mathfrak{h}] \cap [Y, \mathfrak{h}]$, on est assuré que $[X, \mathfrak{h}] = [Y, \mathfrak{h}]$ (ce sont des droites). Si $[X, Y] = 0$, soit Y est central et il n'y a rien à faire, soit on peut choisir $Z \notin \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}(X) \cup \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}(Y)$ et par ce qui précède, $\mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} = \mathrm{ad}(Z)\mathfrak{h} = \mathrm{ad}(Y)\mathfrak{h}$. □

Ainsi, si $\dim[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \geqslant 2$, on peut trouver un X tel que $\dim[X, \mathfrak{h}] \geqslant 2$. Dans ce cas, il existe nécessairement $Z \in [X, \mathfrak{h}]$ qui s'annule quelque part.

En effet, si $Z \in [X, \mathfrak{h}]$ est tel que $\forall x \in M$, $Z_x \neq 0$, alors en choisissant $Y \in \mathfrak{h}$ tel que $[X, Y] = Z$ on obtient un $\mathfrak{heis}(3)$-triplet qui ne s'annule nulle part (par le lemme 7.2.6), et par le théorème 7.4, on sait que ce triplet s'intègre en une action isométrique d'un groupe localement isomorphe à Heis(3) et que Z a des orbites partout de type lumière. Ceci étant valable $\forall Z \in [X, \mathfrak{h}]$, si aucun $Z \in [X, \mathfrak{h}]$ ne s'annulait quelque part sur M, alors le sous-espace

$$\{Z_x,\ Z \in [X, \mathfrak{h}]\} \subset T_x M$$

serait partout de type lumière, contre-disant $\dim[X, \mathfrak{h}] \geqslant 2$.

Finalement, il existe toujours dans $\mathfrak{h}'$ un crochet $[X, Y]$ qui s'annule quelque part. Si on le note Z, alors (X, Y, Z) est un $\mathfrak{heis}(3)$-triplet qui n'agit pas localement librement. □

7.3 Caractérisation algébrique des groupes de Lie nilpotents non abélien qui peuvent agir conformément

On termine dans cette section en expliquant comment prouver le théorème 7.1. Il va nous suffire de faire le bilan de ce qui a été vu. Soit H un groupe nilpotent connexe non abélien tel qu'il existe (M, g) lorentzienne compacte de dimension n, supportant une action conforme de H.

Nous savons qu'en toute généralité $n(H) \leqslant 3$ et que s'il y a égalité, H est localement isomorphe à un sous-groupe de $O(2, n)$ ([FM10], Theorem 1.2). Pour le cas $n(H) = 2$, il suffit de distinguer selon que l'action est essentielle ou non.

Si l'action est inessentielle, alors $\mathfrak{h}$ est isomorphe à une somme directe d'algèbres de Lie $\mathfrak{heis}(2d+1) \oplus \mathbf{R}^k$ par le théorème 7.4, et le groupe correspondant à $\mathfrak{heis}(2d+1)$ agit localement librement partout. En fait, les résultats antérieurs sur les actions isométriques de groupes de Lie sur des variétés lorentziennes compactes ([D'A88], Corollary 3.3) assurent que dans ce cas, toute l'action est localement libre sur un ouvert dense de M. En particulier, $2d+1+k \leqslant n$ et on vérifie sans difficulté que dans ces conditions, $\mathfrak{heis}(2d+1) \oplus \mathbf{R}^k$ se plonge dans $\mathfrak{o}(2, n)$.

Si l'action est essentielle, nous avons démontré que $(M, [g])$ est conformément plate sur un ouvert U. On peut conclure avec le

Lemme 7.3.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), avec $p + q \geqslant 3$ et $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Kill}(M, [g])$ une algèbre de Lie (de dimension finie) de champs de Killing conformes. Si cette variété est conformément plate, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ s'injecte dans $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$.*

Démonstration. On appelle $\iota_{\widehat{x}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{o}(p+1, q+1)$ l'application linéaire injective définie par $\iota_{\widehat{x}}(X) = \omega_{\widehat{x}}(\widehat{X}(\widehat{x}))$ où $\widehat{X}$ désigne le relevé de X à l'espace total du fibré de Cartan associé à la structure conforme $(M, [g])$. Cette application a été introduite au début du chapitre 5 pour des structures de Cartan générales. Or, puisque $(M, [g])$ est supposée conformément plate, la 2-forme courbure de la géométrie de Cartan associée est identiquement nulle. Par conséquent, le lemme 5.2.1 assure que pour tout $\widehat{x}$, $\iota_{\widehat{x}}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. □

Finalement, dans tous les cas, un groupe de Lie nilpotent, connexe et non abélien qui agit conformément sur une variété lorentzienne compacte est nécessairement localement isomorphe à un sous-groupe de $PO(2, n)$. Réciproquement, tout sous-groupe nilpotent non abélien de $PO(2, n)$ agit conformément sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui est une variété lorentzienne et compacte. Ainsi

Théorème 7.5. *Soit H un groupe de Lie nilpotent, connexe, non abélien. Ce groupe H agit conformément sur une variété lorentzienne compacte de dimension n si et seulement si $\mathfrak{h}$ se plonge dans $\mathfrak{o}(2, n)$*

Bibliographie

[AS97] S. Adams et G. Stuck : The isometry group of a compact Lorentz manifold. i. *Inventiones Mathematicae*, 129(2):239–261, 1997.

[Ben97] I. Benoist : Orbites des structures géométriques rigides (d'après M. Gromov). *Progress in Math*, pages 1–17, 1997.

[BFM09] U. Bader, C. Frances et K. Melnick : An embedding theorem for automorphism groups of Cartan geometries. *Geometric and Functional Analysis*, 19(2):333–355, 2009.

[BN02] U. Bader et A. Nevo : Conformal actions of simple Lie groups on compact pseudo-Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 60(3):355–387, 2002.

[Car23] É. Cartan : Les espaces à connexion conforme. *Ann. Soc. pol. math.*, 2:171–221, 1923.

[Car52] É. Cartan : Les espaces généralisés. *Notice sur les travaux scientifiques. Oeuvres complètes, Partie I, Vol. I*, pages 72–85, 1952.

[ČM13] A. Čap et K. Melnick : Essential Killing fileds of parabolic geometries : projective and conformal structures. *Central European Journal of Mathematics*, 11(12):2053–2061, 2013.

[ČS00] A. Čap et H. Schichl : Parabolic geometries and canonical Cartan connections. *Hokkaido Math. Journal*, 29(3):453–505, 2000.

[ČS09] A. Čap et J. Slovák : *Parabolic Geometries I : Background and General Theory*, volume 154 de *Mathematical Surveys and Monographs*. Am. Math. Soc., 2009.

[D'A88] G. D'Ambra : Isometry groups of Lorentz manifolds. *Invent. Math.*, 92:555–565, 1988.

[DG91] G. D'Ambra et M. Gromov : Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in Differential Geometry (Cambridge, MA, 1990)*, pages 19–111, 1991.

[Fer96] J. Ferrand : The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Math. Ann.*, 304(2):277–291, 1996.

[Fer99] J. Ferrand : Histoire de la réductibilité du groupe conforme des variétés riemanniennes (1964-1994). *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 17:9–25, 1998-1999.

[Fer02] R. Feres : Rigid geometric structures and actions of semi-simple Lie groups. *Publications de la SMF, séries Panoramas et Synthèses*, 13:121–166, 2002.

[FM10] C. Frances et K. Melnick : Conformal action of nilpotent groups on pseudo-Riemannian manifolds. *Duke Math. Journal*, 153(3):511–550, 2010.

[FM13] C. FRANCES et K. MELNICK : Formes normales pour les champs conformes pseudo-riemanniens. *Bulletin de la SMF*, 141(3):377–421, 2013.

[Fra02] C. FRANCES : *Géométrie et dynamique lorentziennes conformes.* Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2002.

[Fra07] C. FRANCES : Conformal vector fields, and singularities of twistor spinors. *Annals of global analysis and geometry*, 32(4):277–295, 2007.

[Fra12a] C. FRANCES : About pseudo-Riemannian Lichnerowicz conjecture. *Preprint, arXiv :1211.0635*, 2012.

[Fra12b] C. FRANCES : Local dynamics of conformal vector fields. *Geometriae Dedicata*, 158(1):35–39, 2012.

[Fra12c] C. FRANCES : *Quelques problèmes de géométrie conforme vus sous l'angle des géométries de Cartan.* Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud 11, 2012.

[Ghy01] E. GHYS : Groups acting on the circle. *Enseign. Math.*, 47(3-4):329–407, 2001.

[GRGN13] E. GARCIA-RIO, P. GILKEY et S. NIKCEVIC : Homothety curvature homogeneity, available on. *Preprint : arXiv :1309.5332v1*, 2013.

[Gro88] M. GROMOV : Rigid transformations groups. *Géométrie différentielle*, pages 65–139, 1988.

[KN63] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU : *Foundations of Differential Geometry.* John Wiley & Sons, 1963.

[Kna02] A. W. KNAPP : *Lie Groups Beyond an Introduction, second edition.* Birkhäuser, 2002.

[Kob72] S. KOBAYASHI : *Transformation groups in differential geometry.* Springer, 1972.

[Laf88] J. LAFONTAINE : *The theorem of Felong-Ferrand Obata, in Conformal Geometry.* Friedr. Vieweg, Sohn, Braunsweig and Wiesbaden, 1988.

[Mel11] K. MELNICK : A Frobenius theorem for Cartan geometries, with applications. *L'Enseignement Mathématique (Série II)*, 57(1-2):57–89, 2011.

[Mor05] D. W. MORRIS : *Ratner's theorems on unipotent flows.* University of Chicago Press, 2005.

[Nom60] K. NOMIZU : On local and global existence of Killing fields. *Ann. of Math.*, 72(2):105–112, 1960.

[Oba72] M. OBATA : The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 6:247–258, 1971/1972.

[Opo97] B. OPOZDA : Affine version of Singer's theorem on locally homogeneous spaces. *Ann. Global. Anal. Geom*, (2):187–199, 1997.

[Opo98] B. OPOZDA : On locally homogeneous G-structures. *Geom. Dedicata*, (2):215–223, 1998.

[Pal57] R.S. PALAIS : A global formulation of Lie theory of transformation groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, (22), 1957.

[Pos01] M.M. POSTNIKOV : *Geometry VI, Riemannian Geometry.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Book 91). Springer, 2001.

[PS96] F. PODESTÀ et A. SPIRO : Introduzione ai Gruppi di Transformazione. *Rapp. Tecnico Dip. Mat. Univ. Ancona*, 1996.

[Rag72] M. S. RAGHUNATHAN : *Discrete subgroups of Lie groups.* Springer-Verlag, 1972.

[Sha94] I. R. SHAFAREVICH : *Basic algebraic geometry.* Springer, 1994.

[Sha96] R.W. SHARPE : *Differential geometry, Cartan's generalisation of Klein's Erlangen program.* Springer, 1996.

[Sin60] I. SINGER : Infinitesimally homogeneous spaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:685–697, 1960.

[Ste64] S. STERNBERG : *Lectures on differential geometry.* American Mathematical Soc., 1964.

[Zeg98a] A. ZEGHIB : The identity component of the isometry group of a compact Lorentz manifold. *Duke Math. J. 92*, 129(2):321–333, 1998.

[Zeg98b] A. ZEGHIB : Sur les espaces-temps homogènes. *Geometry and Topology Monographs*, 1:551–576, 1998.

[ZF05] A. ZEGHIB et C. FRANCES : Some remarks on conformal pseudo-riemannian actions of semi-simple Lie groups. *Mathematical Research Letters*, 12(1):49–56, 2005.

[Zim84a] R. J. ZIMMER : *Ergodic theory and semisimple groups.* Birkhäuser, 1984.

[Zim84b] R. J. ZIMMER : Semisimple automorphism groups of G-structures. *J. Differential Geometry*, 19:117–123, 1984.

[Zim86] R. J. ZIMMER : On the automorphism group of a compact Lorentz manifold and other geometric manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 83(3):411–424, 1986.

[Zim87] R. J. ZIMMER : Split rank and semisimple automorphism groups of G-structures. *J. Differential Geometry*, 26:169–173, 1987.