



HAL
open science

Étude expérimentale de la plasticité et des précurseurs à la rupture de milieux granulaires

Antoine Le Bouil

► **To cite this version:**

Antoine Le Bouil. Étude expérimentale de la plasticité et des précurseurs à la rupture de milieux granulaires. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université de Rennes, 2014. Français. NNT : 2014REN1S079 . tel-01127498

HAL Id: tel-01127498

<https://theses.hal.science/tel-01127498>

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Physique

Ecole doctorale SDLM

présentée par

Antoine Le Bouil

préparée à l'unité de recherche UMR UR1-CNRS 6251
Institut de Physique de Rennes

**Étude expérimentale
de la plasticité et des
précurseurs à la rupture
de milieux granulaires**

**Thèse soutenue à Rennes
le 1^{er} Décembre 2014**

devant le jury composé de :

Gérard LE CAËR

Directeur de recherche émérite, Institut de Physique
de Rennes / président du jury

David AMITRANO

Maître de Conférences, Université Joseph Fourier
Grenoble 1 / rapporteur

Loïc VANEL

Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1 /
rapporteur

Philippe GONDRET

Professeur, Université Paris-Sud Orsay / examina-
teur

Axelle AMON

Maître de Conférences, Université de Rennes 1 /
directrice de thèse

Jérôme CRASSOUS

Professeur, Université de Rennes 1 / directeur de
thèse

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu la région Bretagne et l'ANR StabInGraM pour avoir financé les travaux présentés dans cette thèse ainsi que l'Institut de Physique de Rennes pour m'avoir accueilli dans ses locaux.

Je remercie Axelle Amon et Jérôme Crassous, d'abord pour m'avoir proposé un sujet de thèse aussi riche et doté d'un dispositif expérimental aussi bien conçu ; ensuite de m'avoir laissé à la fois libre et de s'être montrés très disponibles. C'était un grand plaisir de travailler avec eux : deux chercheurs passionnés, de très haut niveau et bienveillants à l'égard de leur doctorant. Du premier au dernier jour, leurs encouragements m'ont porté.

Je remercie également toutes les personnes avec qui nous avons collaboré pour ce travail : Hervé Orain, Jean-Christophe Sangleboeuf, Cino Viggiani, Pierre Bésuelle pour la conception de l'expérience ; Patrick Chasle pour le développement technique ; Sean McNamara pour les simulations numériques ; Jean-Charles Potier pour les ajustements mécaniques ; ainsi que Eric Robin, Guillaume Raffy, Jérôme Weiss, David Amitrano et François Graner. J'associe aux collaborations, les participants au GDR MéPhy. Je remercie également les membres du jury Gérard Le Caër, Philippe Gondret, Annie Colin et tout particulièrement mes deux rapporteurs David Amitrano et Loïc Vanel.

Au sein de l'IPR, je remercie toute l'équipe du département Matière Molle pour leur état d'esprit et la bonne ambiance qui règne dans ce département. Je remercie aussi l'ensemble du personnel administratif de l'IPR pour leur bonne humeur et leur disponibilité.

Je remercie Lucie Guignier de m'avoir permis de la suppléer dans son poste de représentant des doctorants aux conseils scientifique et académique de l'université, un rôle que j'ai pris très au sérieux malgré le manque de considération de ces conseils à l'égard de nos demandes concernant la protection des doctorants, notamment des doctorants étrangers et le tri des déchets à l'université. Je souhaite remercier particulièrement Valérie Ferri pour son soutien précieux dans la préparation de ces conseils universitaires et pour son optimisme contagieux.

Que ce soit pour les discussions scientifiques, politiques ou autres, pour les parties de foot et de baby foot, pour les pauses café, les bières après le travail ou les soirées qui finissent tard, pour les sourires et les fous rires, pour tout ça MERCI !

Merci à toutes ces belles rencontres à l'IPR, à toutes ces amitiés naissantes : Benjamin, Patrick, Axelle, Jérôme L., Jérôme C., Valérie, Laurent, Mickaël, David, Federico, Lucie, Richard, Dalila, Imen, Thao, Arthur, Martin, Hugo, Baudoin, Matthieu, Louis, Alex, Thomas, Ronan, Sébastien, Jacopo, Damien, Pierre, Guillaume, Marion, Hiro, Laura, Sara, Jesica...

Je remercie également ma famille et mes amis de longue date et particulièrement mes parents de m'avoir encouragé à poursuivre mes études à des moments clés ainsi que ma compagne Charlotte pour m'avoir apporté son soutien inconditionnel avant et durant ces 3 ans de thèse malgré la distance.

Ma thèse s'est déroulée dans des conditions idéales grâce à toutes les personnes citées ici et c'est pour cette raison que mon choix de ne pas poursuivre dans cette voie s'est fait sereinement et sans regret.

Table des matières

Plan du manuscrit	5
I État de l'art	7
I.1 Introduction	7
I.1.1 Milieux granulaires	7
I.1.2 Transition solide-liquide	9
I.2 Plasticité et rupture des matériaux granulaires	9
I.2.1 Friction - dilatance	9
I.2.2 Localisation : hétérogénéité de la déformation	10
I.2.3 Tests mécaniques de compression	11
I.2.4 Interprétation des résultats des tests de compression biaxiale .	13
I.2.5 Lien micro-macro en simulation numérique	15
I.3 Plasticité des milieux amorphes	16
I.3.1 Les amorphes	16
I.3.2 Réorganisations localisées	17
I.3.3 Couplage	19
I.4 Méthodes de mesure des déformations d'un milieu granulaire	22
I.4.1 Mesures de champ	22
I.4.2 Diffusion multiple de la lumière	23
II Matériels et méthodes	25
Introduction	26
II.1 Partie mécanique	26
II.1.1 Test biaxial	26
II.1.2 Réalisation mécanique	27
II.1.3 Platine de translation motorisée	29
II.1.4 Capteurs de force et de pression	30

II.1.5	Pilotage et acquisition	32
II.1.6	Rigidité mécanique du système de mesure	34
II.2	Diffusion multiple de la lumière	36
II.2.1	Principe de la DWS	36
II.2.2	Mesure de déformation	38
II.2.3	Mesure du champ de déformation - Résolution spatiale	40
II.2.4	Paramétrages optiques du système	43
II.2.5	Dispositif optique et réglages	43
II.2.6	Cartes de corrélations	45
II.3	Suivi de particules	47
II.3.1	Introduction	47
II.3.2	Traitement d'images	48
II.3.3	Traitement des données	50
II.4	Échantillon : matériel et préparation	51
III	Résumé des résultats expérimentaux	55
III.1	Expériences typiques	55
III.1.1	Courbes de charge	55
III.1.2	Cartes de corrélations	57
III.1.3	Discussion	60
III.2	Variation de paramètres et observations particulières	60
III.2.1	Cohésion	60
III.2.2	Compacité	63
III.2.3	Rapport d'aspect de l'échantillon	65
III.2.4	Grains de sable	66
III.2.5	Effet tonneau	66
III.2.6	Nombre de bandes finales	67
III.2.7	Déformation quasi-statique - Fluage du matériau	69
III.2.8	Conclusion	69
IV	Outils d'analyse d'images	73
Introduction	73
IV.1	Corrélations	74
IV.1.1	Corrélations spatiales	74
IV.1.2	Fonction de corrélation spatio-temporelle	79

IV.2	Analyse directionnelle, détection de bandes de cisaillement	80
IV.2.1	Méthode	80
IV.2.1.1	Transformée de Hough	80
IV.2.1.2	Histogrammes de projection	82
IV.2.2	Cas tests	85
IV.3	Analyse multi-échelles	88
IV.4	Conclusion	90
V	Interprétation physique des mesures de déformation	93
V.1	Bandes de cisaillement permanentes	94
V.1.1	Modèle de Mohr-coulomb	94
V.1.2	Bandes de cisaillement finales	98
V.2	Plasticité avant la rupture	100
V.2.1	Orientation des bandes intermittentes	100
V.2.2	Problème de l'inclusion d'Eshelby	102
V.2.3	Étude numérique	103
V.2.4	Interprétation	104
V.3	Études sur la dynamique de déformation	106
V.3.1	Dynamique du réseau de bandes intermittentes	107
V.3.2	Dynamique de formation des bandes de cisaillement finales	111
V.3.3	Analyse multi-échelles	114
V.3.4	Discussion	115
V.4	Analyse complémentaire par suivi de particules	117
V.4.1	Champ de déplacement des billes	117
V.4.2	Variation de fraction volumique	118
V.5	Conclusion	121
	Conclusion	123
	Annexe A	125
	Annexe B	135
	Annexe C	141
	Bibliographie	161

Plan du manuscrit

La mise en mouvement d'un milieu granulaire n'est pas encore bien comprise. De nombreux travaux dans des géométries différentes (Couette cylindrique, avalanches sur un plan incliné, avalanches sur fond meuble, test de cisaillement, test de compression biaxial, triaxial...) tentent de comprendre la transition entre un état stable (assimilé à l'état solide) et un état de déformations plastiques (écoulement, assimilé à l'état liquide).

L'objectif de la thèse est de comprendre les mécanismes complexes qui régissent l'hétérogénéité des déformations et la transition solide-liquide d'un milieu granulaire. C'est dans ce but que nous avons développé un dispositif expérimental de test biaxial en déformation plane. Il présente l'intérêt d'appliquer des contraintes homogènes et bien contrôlées sur le matériau. Pour pouvoir visualiser de très petites déformations, nous avons utilisé une méthode de mesures interférométriques basée sur la diffusion multiple de la lumière, la DWS (Diffusing Wave Spectroscopy).

La réalisation des expériences de test biaxial avec visualisation par DWS nous a permis de mettre en évidence des comportements typiques pour les déformations observées, que nous avons pu modéliser.

Mon travail de thèse a donc porté sur la mise en place expérimentale du test et du banc de détection interférométrique, sur l'étude de la déformation d'un milieu granulaire soumis à un test biaxial en fonction de différents paramètres et à la caractérisation des comportements observés en utilisant différents outils d'analyse. Le manuscrit se découpe de la manière suivante : les milieux granulaires, la plasticité des milieux amorphes et les techniques de mesures de déformations de ce type de milieux sont introduits dans le chapitre I *État de l'art* ; l'ensemble du développement expérimental (mécanique et optique) est présenté dans le chapitre II *Matériels et méthodes* ; une partie des résultats expérimentaux est répertoriée dans le chapitre III *Résumé des résultats expérimentaux* ; les outils développés pour l'analyse d'images sont présentés au chapitre IV *Outils d'analyse d'images* ; enfin, la caractérisation

des déformations est décrite au chapitre V *Interprétation physique des mesures de déformation*.

Les publications réalisées au cours de la thèse sont situées en annexe.

Chapitre I

État de l'art

I.1 Introduction

I.1.1 Milieux granulaires

Un milieu granulaire est défini comme un ensemble de grains dont la taille est supérieure à 100 μm . On parle de poudre lorsque ce sont des grains de 1 à 100 μm ; la distinction est faite avec les particules plus fines car le type d'interactions entre les grains est différent. Les milieux granulaires sont omniprésents au quotidien, que ce soit dans l'industrie agro-alimentaire (céréales, aliments pour animaux...), dans l'activité minière, dans l'industrie chimique ou pharmaceutique, dans le génie civil (matériaux de construction) ou encore dans l'environnement (sable, roches...). Le comportement des milieux granulaires n'est pas régi par des lois simples, ce sont des milieux complexes, plusieurs raisons expliquent cela :

- ils sont constitués d'un grand nombre de particules ;
- leurs fluctuations thermiques sont négligeables devant leurs poids donc on ne peut pas utiliser les outils de la physique statistique ;
- la granularité est observable, c'est-à-dire que la distinction entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique est floue ;
- les interactions entre grains sont complexes et mettent en jeu des phénomènes non-linéaires comme la friction ou l'inélasticité des chocs ;
- ils sont fortement dissipatifs.

Différents types d'interactions entre les grains régissent le comportement d'un matériau granulaire. Lorsque deux grains sont en contact, la force normale entre les grains est une force de répulsion élastique due à la déformation des grains, par

exemple un contact élastique de Hertz. La force tangentielle provient, elle, du frottement entre les surfaces en contact, elle est régie par les lois de friction d'Amontons-Coulomb. Dans un écoulement, les collisions entre particules sont inélastiques et se traduisent par la perte d'énergie cinétique. Au-delà d'une certaine taille de grains, ce sont ces interactions (répulsion élastique, friction, collisions inélastiques) qui prédominent dans le milieu granulaire. Pour des grains plus petits, notamment dans le cas des poudres, d'autres types d'interactions interviennent : les forces électrostatiques ou les forces de Van Der Waals. Dans le cas d'une atmosphère humide, des ponts liquides peuvent se former entre les grains, une force de cohésion capillaire apparaît alors.

La complexité des interactions entre grains et du comportement global d'un milieu granulaire l'amène à se comporter, selon les conditions extérieures, comme les trois états de la matière. En effet, ils peuvent se comporter parfois comme un solide, par exemple dans un tas de sable, parfois comme un liquide, ils s'écoulent comme dans un sablier et enfin, ils se comportent parfois comme un gaz (dans une tempête de sable), voir figure I.1.



FIGURE I.1 – Le sable peut se comporter comme les différents états de la matière. À gauche : un château de sable (comportement solide) ; au centre : un sablier (comportement liquide) ; à droite : une tempête de sable (comportement gazeux).

L'omniprésence dans l'industrie ou dans l'environnement des matériaux granulaires et leur complexité ont fait d'eux l'objet de nombreuses études réalisées pour caractériser leurs comportements. Ils sont devenus, particulièrement depuis quelques dizaines d'années, une discipline à part entière de la physique tandis qu'ils sont un sujet central des recherches en géo-physique et mécanique des sols (stabilité des sols, construction d'ouvrages).

I.1.2 Transition solide-liquide

Un milieu granulaire soumis à des sollicitations extérieures faibles ou nulles se comporte comme un solide, il est stable. En effet, comme dans un tas de sable ou un silo rempli de grains, ces grains ne bougent pas, les chaînes de force assurent l'équilibre de l'ensemble et le milieu peut supporter son propre poids et des efforts extérieurs en se déformant de manière élastique. En revanche, si la contrainte appliquée au milieu est assez importante, le milieu granulaire est déstabilisé, les grains bougent et changent de voisins, il apparaît alors des déformations irréversibles, on parle d'écoulement granulaire. La transition solide-liquide est le passage de l'état d'équilibre stable à la mise en mouvement, il existe alors une limite de rigidité (on parle aussi d'état critique ou de seuil d'écoulement) à laquelle il y a déstabilisation d'un milieu granulaire ; dans ce cas, selon la géométrie et les contraintes appliquées au milieu, soit le milieu granulaire s'écoule comme dans une avalanche, soit il apparaît une bande de cisaillement (rupture) comme par exemple l'apparition d'une faille dans un sol.

Cette transition est parfois exprimée en terme de déblocage (unjamming) par opposition au blocage (jamming) introduit par Liu et Nagel [LN98]. En ce sens, les milieux granulaires, peuvent être vus comme des matériaux amorphes un peu particulier (des matériaux vitreux mous détaillés §I.3.1).

L'importance des chaînes de force et la sensibilité à la taille du système et à la préparation initiale sont évoquées pour interpréter la transition solide-liquide mais ce phénomène est encore peu compris et beaucoup de recherches sont actuellement en cours pour tenter de le décrire.

I.2 Plasticité et rupture des matériaux granulaires

I.2.1 Friction - dilatance

On peut décrire un milieu granulaire comme un milieu frottant. Le critère de plasticité, dans ce cas, est un critère de friction. Le matériau est rigide et rompt seulement lorsque la contrainte tangentielle τ est proportionnelle à la contrainte normale σ , on a alors

$$\tau = \mu\sigma. \tag{I.1}$$

où $\mu = \tan \delta$ est le coefficient de friction du matériau granulaire avec δ l'angle de friction, cet angle est aussi parfois dénommé ϕ . La friction macroscopique d'un milieu granulaire n'a pas pour seule origine le frottement entre les grains. En effet, la configuration géométrique, l'enchevêtrement des grains joue aussi un rôle (un ensemble de grains idéalement lisses, de coefficient de friction nul présente un coefficient de friction macroscopique non-nul).

La fraction volumique est définie comme

$$\phi = \frac{V_{grains}}{V_{total}}. \quad (I.2)$$

On parle de contractance lorsque la fraction volumique augmente au cours de la déformation et de dilatance lorsqu'elle diminue. Notons que le concept de dilatance a été introduit par Reynolds en 1885. Il a constaté qu'en comprimant un granulaire immergé dans un liquide, contrairement à l'intuition, le niveau de liquide diminue car l'espace entre les grains augmente. Si on considère le cas simple d'un milieu monodisperse (tous les grains de la même taille), intuitivement, un empilement dense (ϕ important) sera plus difficile à cisailier et à déstabiliser qu'un empilement peu dense.

L'illustration de la figure I.2 montre un empilement dense cisailé, les grains imbriqués les uns dans les autres doivent déplacer les grains voisins pour pouvoir bouger. Dans ce cas, les grains occupent de plus en plus d'espace au cours du cisaillement, la fraction volumique diminue, l'échantillon se dilate. La friction macroscopique reflète l'énergie nécessaire à libérer les grains des effets stériques, en plus du frottement entre les grains. On voit ici que friction et dilatance sont intimement liées à l'échelle des grains. À plus grande échelle, elle sont plus difficilement reliées car la déformation du milieu n'est pas homogène, on parle alors de localisation de la déformation.

I.2.2 Localisation : hétérogénéité de la déformation

Dans la limite des déformations élastiques, on peut dans certains cas assimiler un milieu granulaire à un milieu continu mais lorsqu'il entre dans le régime plastique cette considération n'a plus lieu d'être. En effet, lorsqu'un matériau granulaire est soumis à une contrainte homogène, sa déformation est hétérogène, c'est la localisation de la déformation. Les déformations se concentrent sur une zone d'épaisseur

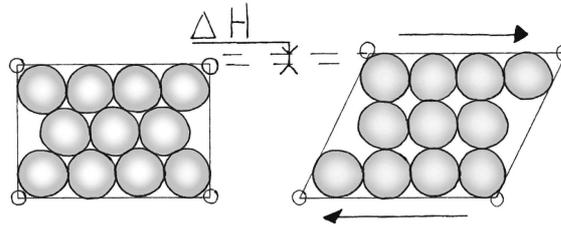


FIGURE I.2 – Test de cisaillement d'un empilement dense, l'échantillon se dilate (image tirée de [CdP03]).

finie, typiquement pour un milieu monodisperse, l'épaisseur est de l'ordre de la dizaine de grains. L'essentiel de la déformation apparaît dans cette zone, celle-ci peut être une bande de cisaillement où les grains glissent les uns sur les autres ou bien une bande compaction où les grains sont comprimés les uns sur les autres. Dans les deux cas, dans le reste du matériau les autres grains sont soit immobiles, soit se déplacent en bloc sans changer de voisins.

La localisation de la déformation est visible dans l'environnement, par exemple lors de failles de décrochement (voir figure I.3), et peut être mise en évidence dans des tests de compression.

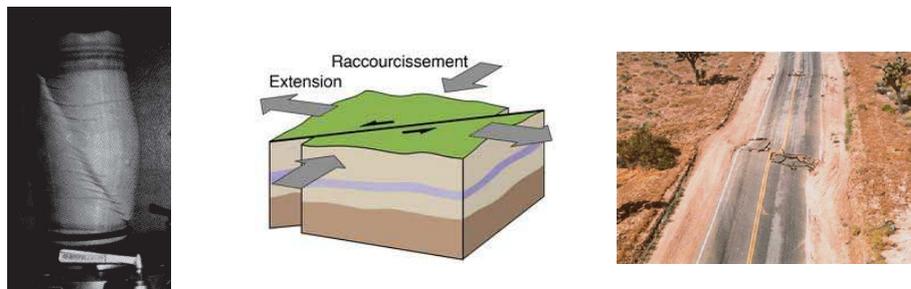


FIGURE I.3 – À gauche, bande de cisaillement dans un test de compression (tirée de [Des84]) ; au centre, schéma d'une faille de décrochement ; à droite, photo d'une faille de décrochement.

I.2.3 Tests mécaniques de compression

Les tests de compression sont particulièrement utilisés en mécanique des sols [ADAA77, Var80, Des84, DV04], ils permettent à la fois d'exercer sur un matériau des contraintes bien contrôlées et d'observer la localisation de la déformation. Le test principal est le test en cellule triaxiale, il consiste à appliquer sur un cylindre

une déformation verticale croissante $\Delta L/L = \varepsilon_1$ en mesurant simultanément la contrainte axiale tandis qu'une contrainte radiale constante σ_3 est appliquée (voir figure I.4).

Un autre test est le test biaxial en déformation plane, il consiste à appliquer sur un échantillon deux contraintes indépendantes $-\sigma_{xx}$ et $-\sigma_{yy}$ dans les deux directions parallèles aux deux murs rigides entre lesquels il est situé (voir figure I.4). L'hypothèse de déformation plane indique qu'il n'y a pas de déplacement dans la troisième direction et donc que les déformations d'un matériau dans le plan xy sont identiques sur toute la direction z. Cette hypothèse fait du test biaxial en déformation plane, un test quasi-2D. C'est ce test que nous avons utilisé durant la thèse, il est détaillé §II.1.1.

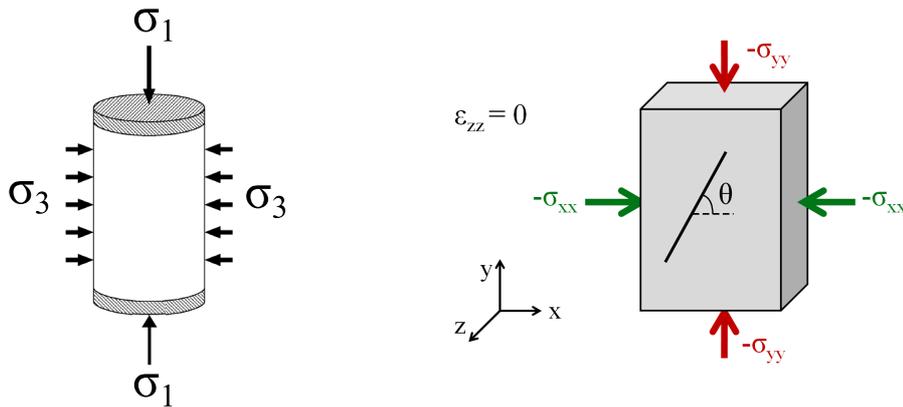


FIGURE I.4 – À gauche, schéma de test triaxial; à droite, schéma de test biaxial.

Les courbes de charge (différence de contraintes ou contrainte déviatorique en fonction de la déformation axiale) de ces deux types de tests sont similaires, on montre figure I.5 les courbes de charge d'un test triaxial dans le cas d'un empilement dense et d'un empilement lâche. La différence de contrainte de l'empilement dense présente un pic de contrainte tandis que celle de l'empilement lâche n'en présente pas. L'empilement se dilate s'il est dense à l'origine et se contracte s'il est lâche. Dans les deux cas, lorsque la contrainte croît, l'échantillon est déformé et on a des événements plastiques à l'échelle des grains, on parle alors de fluage. Ce n'est seulement que lorsque le matériau se rapproche de l'état critique qu'apparaît la rupture.

Les courbes de la figure I.5 permettent de mesurer l'importance de la fraction volumique dans les tests de compression. Ces deux types de tests font apparaître, au

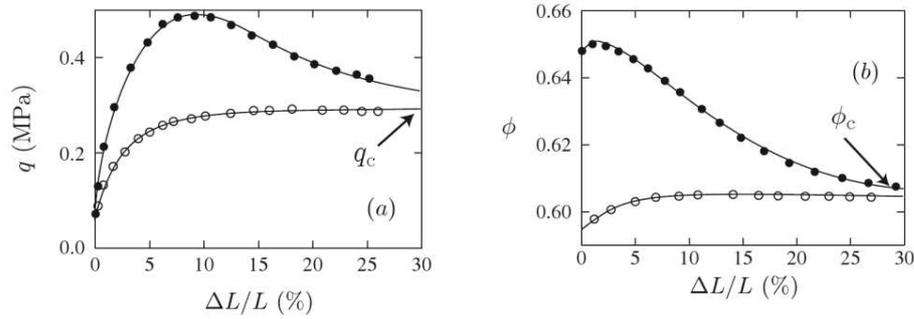


FIGURE I.5 – Courbes de charge et évolution de la fraction volumique pour un empilement dense (cercles pleins) et pour un empilement lâche (cercles creux) lors d’un test triaxial sur du sable, tiré de [AFP11].

delà d’une contrainte seuil, la localisation de la déformation en bandes de cisaillement (on parle de rupture du matériau). La description des bandes de cisaillement et notamment leur inclinaison ont fait l’objet de nombreuses recherches et sont encore une question ouverte.

I.2.4 Interprétation des résultats des tests de compression biaxiale

Plusieurs modèles ont été proposés pour interpréter l’apparition de la rupture et notamment l’inclinaison de la bande de cisaillement. Le modèle de Mohr-Coulomb propose une interprétation basée sur la friction du matériau et repose sur un critère de rupture, il est décrit plus longuement dans le chapitre V.1.1. Ce modèle prédit une inclinaison (angle θ entre la bande et la direction des contraintes minimales, voir figure I.4) des bandes de cisaillement

$$\theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{I.3})$$

qui dépend de ϕ l’angle de friction du matériau.

En 1970, Roscoe [Ros70] propose un modèle prenant en compte la dilatance du matériau et prédit une inclinaison

$$\theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2} \right) \quad (\text{I.4})$$

où l’angle de dilatance Ψ dépend des incréments de déformation $\delta\varepsilon_{xx}$ et $\delta\varepsilon_{yy}$. Dans

ce modèle, les bandes de cisaillement sont parallèles aux lignes d'extension nulle, c'est-à-dire 45° dans le cas isovolume (fraction volumique constante).

En 1977, aux vues des résultats expérimentaux éloignés des deux théories, Arthur *et al.* [ADAA77] propose une relation empirique de l'inclinaison de la bande de cisaillement finale

$$\theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi + \Psi}{4} \right). \quad (\text{I.5})$$

En 1979, Vardoulakis [Var79] prédit un résultat en accord avec Arthur en utilisant la théorie de la bifurcation tandis que Rice et Rudnicki prédisent également le même résultat en évoquant la théorie de la localisation de la déformation dans les matériaux élasto-plastiques.

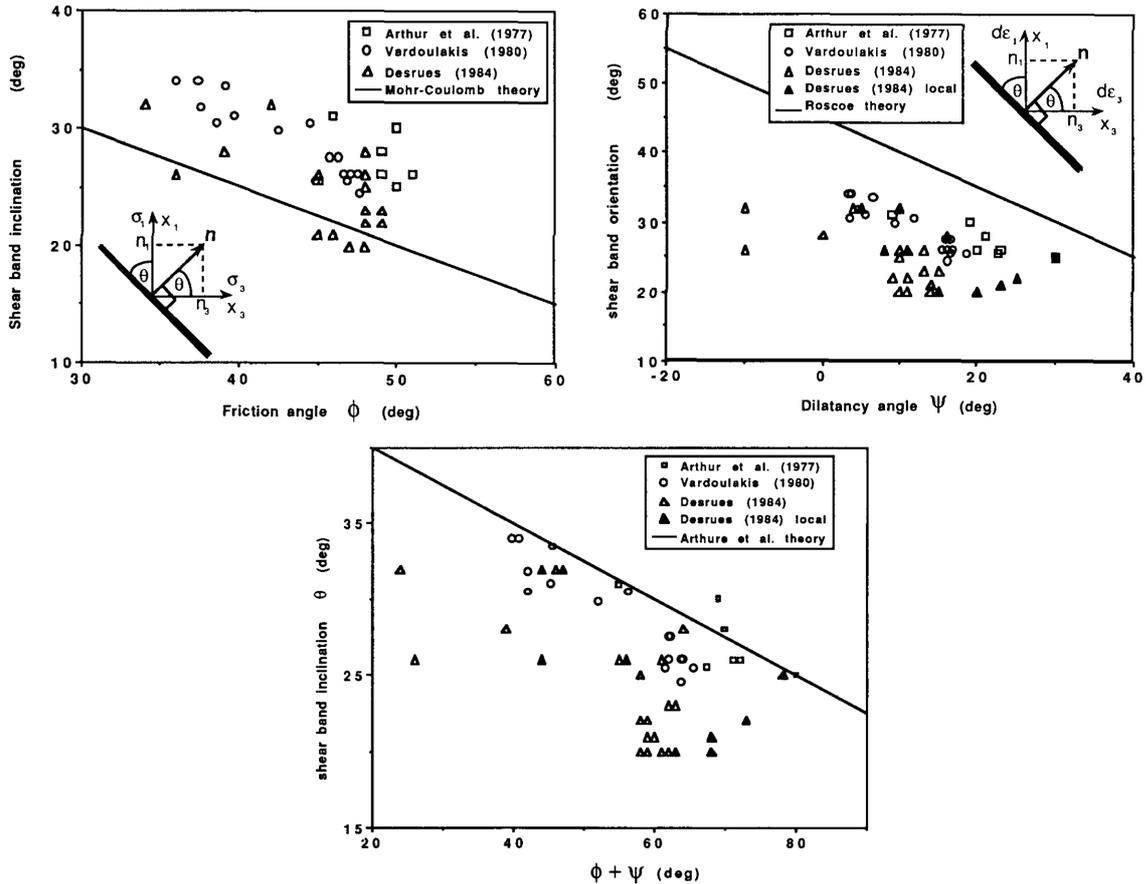


FIGURE I.6 – Comparatifs des inclinaisons des bandes de cisaillement entre les données expérimentales de [ADAA77, Var80, Des84], et les prédictions théoriques de Mohr-Coulomb, Roscoe et Arthur *et al.*

En 1990, Bardet [Bar90] établit un comparatif de données expérimentales de test

biaxial et des prédictions théoriques de Mohr-Coulomb, Roscoe et Arthur, figure I.6. L'inclinaison des bandes de cisaillement est défini ici par l'angle θ entre la bande de cisaillement et la verticale. On observe d'abord que les expériences bien que similaires présentent une dispersion importante de résultats. Pour un même angle de friction ou un même angle de dilatance, on observe des bandes de cisaillement d'une inclinaison variable de plus de 10° . Les résultats expérimentaux comparés à l'angle moyen $\Psi + \phi$ varie de plus d'environ 5° . La comparaison de l'ensemble des résultats expérimentaux aux théories montre que certains résultats expérimentaux coïncident avec les prédictions de Mohr-Coulomb tandis que d'autres coïncident avec les prédictions d'Arthur. On peut dire que l'ensemble des résultats est en moyenne borné entre l'angle de Mohr-Coulomb et l'angle d'Arthur. L'angle de Roscoe est assez éloigné des résultats expérimentaux. En résumé, l'orientation des bandes de cisaillement n'est pas un problème dont les réponses sont claires.

I.2.5 Lien micro-macro en simulation numérique

Depuis une quarantaine d'années, le développement des outils informatiques permet d'explorer le comportement granulaire en simulations numériques. Les résolutions spatiales et temporelles des expériences ne permettent pas, la plupart du temps, d'observer la dynamique de déformation d'un milieu granulaire à l'échelle des grains. Les simulations numériques ont pour objectif d'établir la relation entre l'échelle microscopique (interactions entre grains) et l'échelle macroscopique (bandes de cisaillement). C'est Cundall [CS79], en 1979 qui pose les bases de la méthode des éléments discrets pour simuler les milieux granulaires. Par la suite, de multiples études ont été réalisées portant sur différents aspects de la déstabilisation des milieux granulaires. On peut citer Combe et Roux [CR00] qui mentionnent l'importance de la géométrie des empilements de grains ; Alonso-Majoquin *et al.* [AMLHV05] qui traite de l'anisotropie du réseau de contact ; Tordesillas, qui met en avant le flambage des chaînes de force [Tor07] ou encore Welker et McNamara [WM11] qui évoquent l'évolution du nombre de contacts glissants. Une autre méthode est introduite par Moreau et Jean [Mor94, JM92] au début des années 90, la dynamique des contacts qui traite les contacts sans recouvrements contrairement à la méthode des éléments discrets. Cette méthode est notamment utilisée par Farhang Radjaï [RJMR96].

Malgré une avancée certaine de la compréhension de la dynamique à l'échelle des grains grâce aux simulations numériques, la recherche expérimentale tarde à se

développer comme l'exprime Sibille et Froiio [SF07] : « The development of discrete element methods (DEMs), provided powerful and flexible investigation tools. On the other hand, this has had the unfortunate effect that relatively few attempts have been made to develop finely-tuned experimental techniques for microscale investigations of granular materials. This has lead to the paradox of micromechanics of granular materials as a science based almost entirely on "virtual evidence". »

C'est dans cet esprit que la diffusion multiple de la lumière est utilisée au cours de la thèse, c'est-à-dire avec pour objectif d'accéder aux déformations à l'échelle microscopique.

I.3 Plasticité des milieux amorphes

I.3.1 Les amorphes

La structure des milieux granulaires est désordonnée, c'est-à-dire non cristalline, on parle de milieu amorphe. Par cette configuration de particules désordonnées, ils sont à rapprocher d'autres types de matériaux :

- les mousses liquides (bulles de gaz dans une phase liquide continue),
- les suspensions concentrées (particules solides dans un liquide : dentifrice, peinture, sang, maïzena...)
- les émulsions (gouttes de liquide dans un autre liquide non miscible : mayonnaise)
- les gels (colloïdaux ou de polymères).

Les verres et les verres métalliques sont également des matériaux amorphes à l'échelle atomique ou moléculaire. On appelle également l'ensemble de ces matériaux les matériaux vitreux. Leur organisation particulière commune leur confère des propriétés semblables : ils peuvent se comporter comme des solides élastiques, leur structure n'étant pas modifiée irréversiblement sous une faible contrainte ; ils peuvent également se comporter comme des liquides. Au delà d'une contrainte seuil, ils se déforment plastiquement, c'est la transition solide-liquide (§I.1.2). Pour les verres et les verres métalliques, c'est la température qui gouverne cette transition tandis que pour les autres milieux amorphes (granulaires, mousses, suspension colloïdales, émulsions) c'est la densité de particules qui semble gouverner leur comportement. En effet un milieu granulaire ou une suspension très dense sera dans un état bloqué (jamming) et une faible densité favorisera leur déblocage (unjamming). La tran-

sition solide-liquide est encore une question ouverte et les réorganisations localisées sont au coeur de cette question.

I.3.2 Réorganisations localisées

C'est l'étude des verres métalliques à la fin des années 70, par notamment Spaepen [Spa76] et Argon [Arg79] qui introduit en premier cette idée de réorganisations localisées dans les milieux amorphes. Ils proposent des modèles de réarrangements à l'échelle des atomes, voir figure I.7. Ces événements plastiques sont appelés STZ (Shear Transformation Zones).

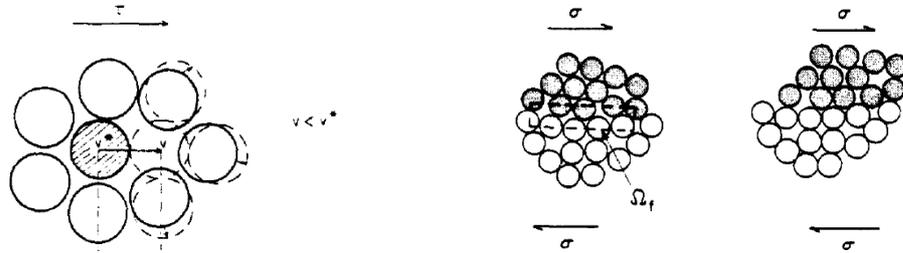


FIGURE I.7 – Réorganisation entre plusieurs atomes dans un verre métallique [Spa76] à gauche. STZ dans un verre métallique [Arg79] à droite.

Les verres métalliques n'étant pas directement observables à l'échelle atomique, ces types de réarrangements ont été visualisés expérimentalement dans d'autres matériaux amorphes. Les changements de voisins entre les bulles d'une mousse confinée entre deux plaques (en quasi-2D) sont les plus facilement observables. Ces réarrangements sont appelés T1 et on été observés par exemple par Kabla *et al.* [KSD07], voir figure I.8. Schall *et al.* [SW07], en 2007, visualisent en 3D des réarrangements plastiques dans des verres colloïdaux (particules sphériques de $1,5\mu\text{m}$ dans un mélange liquide). Amon *et al.* [ANB⁺12a] observent des zones de déformation localisées impliquant une dizaine de grains dans un milieu granulaire sous contraintes, ces réarrangements sont appelés points chauds.

En 1998, Falk et Langer [FL98] réalisent des simulations numériques en dynamique moléculaire d'un système non-cristallin 2D. Ils observent des réarrangements plastiques du type de ceux des verres métalliques, voir figure I.9. Plus récemment, en 2007, Kabla *et al.* [KSD07] réalisent des simulations numériques de mousses. Ils réalisent une moyenne de la contrainte cisailante après 100 réarrangement des bulles. Il apparaît que la contrainte redistribuée est de la forme d'un quadripôle.

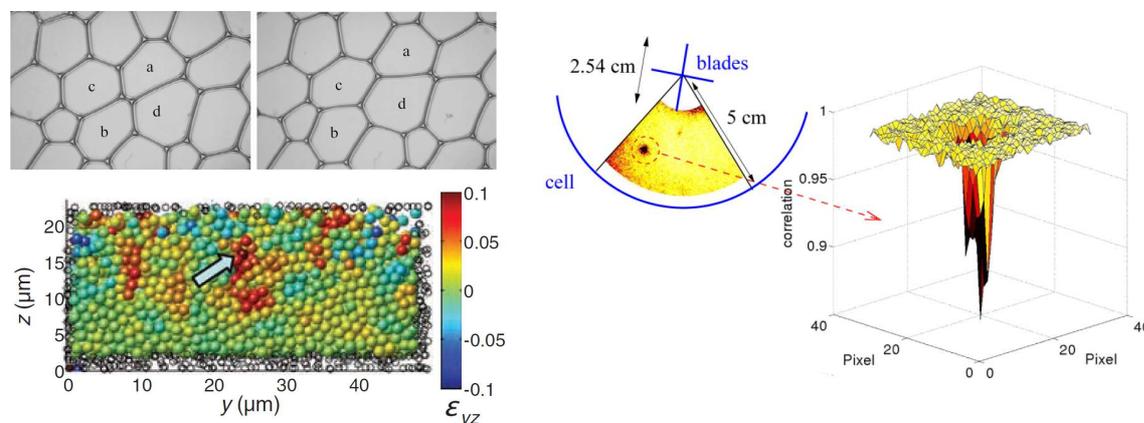


FIGURE I.8 – Observations de réarrangements localisés expérimentaux : T1 dans une mousse [KSD07] (en haut à gauche), STZ dans un verre colloïdal [SW07] (en bas à gauche), point chaud dans un milieu granulaire [ANB⁺12a].

On observe donc une redistribution des contraintes lors des réarrangements. Cette redistribution des contraintes est à la base de l'idée de couplage de réarrangements.

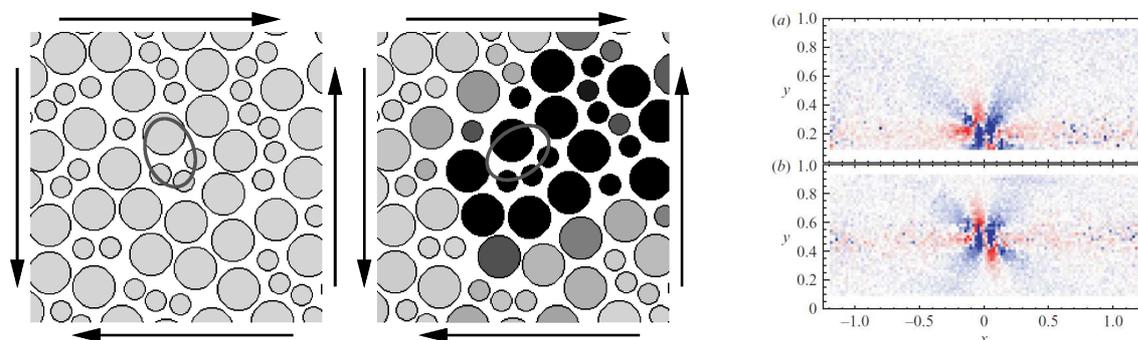


FIGURE I.9 – Simulations numériques montrant des réorganisations localisées. À gauche : STZ avant et après une réorganisation dans un solide amorphe [FL98]. À droite : variation de contrainte cisailante après un T1 dans une "mousse numérique" (moyenne sur 100 événements) [KSD07].

I.3.3 Couplage

En 1994, Bulatov et Argon [BA94] réalisent des simulations numériques de modèles élasto-plastiques 2D à plusieurs degrés de désordre initial (modèles cristallins à amorphes) mis sous contraintes. Ils observent que l'écoulement plastique d'un milieu désordonné est localisé, voir figure I.10. Ils interprètent la structuration de l'écoulement comme le fruit de nombreux réarrangements accompagnés de déséquilibre

des contraintes donnant lieu à la formation de bandes de cisaillement : « [...] in the initial disordered structure there are many local arrangements of LITs (Local Inelastic Transformations) with very high local misfit stresses, which later develop in multiple, but irregularly shaped shear bands. »

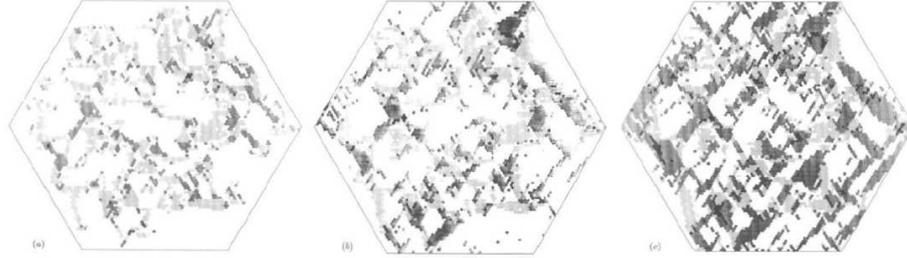


FIGURE I.10 – Structuration de la plasticité dans un milieu désordonné [BA94].

Picard *et al.* [PALB05] présentent, en 2005, un modèle d'écoulement dense de milieux désordonnés, ce modèle possède deux ingrédients principaux : des événements plastiques locaux et une redistribution des contraintes due à ces événements. Ces ingrédients mènent à une rhéologie complexe faisant apparaître notamment des événements collectifs intermittents et une longueur de corrélations des événements qui diverge à faibles taux de cisaillement.

Maloney et Lemaître [ML06], en 2006, proposent un modèle de cascades de réarrangements : un événement plastique redistribue les contraintes dans une symétrie quadripolaire de la même manière que la transformation d'une inclusion Eshelby [Esh57] (Le problème d'Eshelby est détaillé §V.2.2). La redistribution des contraintes favorise d'autres réarrangements dans les directions privilégiées, c'est du couplage à longue portée, voir figure I.11.

En 2009, Bocquet *et al.* [BCA09] proposent un modèle cinétique de la dynamique élasto-plastique des milieux amorphes, figure I.12. La fonction de redistribution des contraintes lors d'un événement plastique est, ici, une équation cinétique non-locale de type Boltzmann. Le taux local d'événements plastiques y est interprété comme une fluidité locale et est spatialement corrélé à la longueur de coopérativité. Celle-ci représente alors l'étalement spatial de l'activité plastique et diverge à l'approche du seuil de rigidité. Les auteurs mettent en relation cette longueur de coopérativité avec celle mesurée expérimentalement par Goyon *et al.* [GCO⁺08] dans des émulsions concentrées, figure I.12.

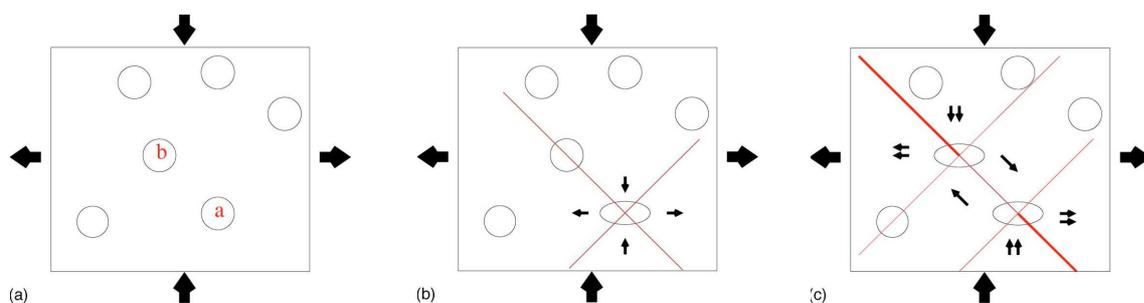


FIGURE I.11 – Représentation schématique d'un scénario d'apparition de bande de cisaillement [ML06].

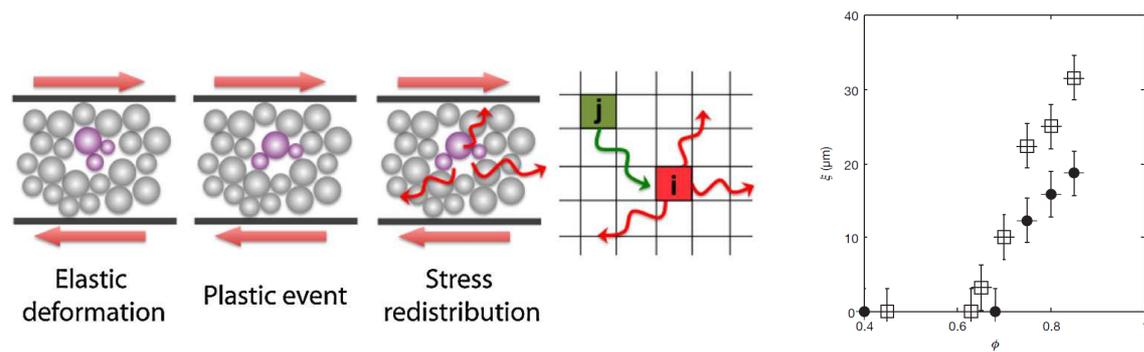


FIGURE I.12 – À gauche : modèle cinétique de la dynamique élasto-plastique proposé par Bocquet *et al.* [BCA09]. À droite : croissance de la longueur de coopérativité en fonction de la fraction volumique des émulsions concentrées de polydispersité de 20% (carrés) et 36% (cercles) [GCO⁺08].

Plus récemment, en 2012, Talamali *et al.* [TPVR12] proposent un modèle numérique de la plasticité des amorphes. Dans ce modèle, chaque événement plastique induit un champ de contrainte élastique à longue portée (type Eshelby). Ils observent une localisation progressive de la plasticité sous la forme de structures allongées orientées à $\pm 45^\circ$, voir figure I.13. L'intermittence et l'anisotropie des corrélations de la déformation plastique y sont analysées.

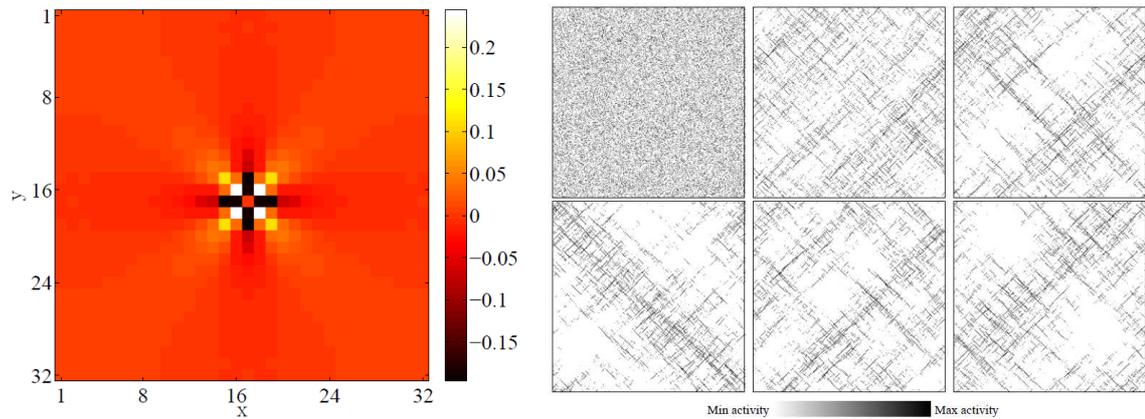


FIGURE I.13 – Événement quadripolaire type Eshelby (à gauche). Structuration de la plasticité observée pour des déformations $\varepsilon_p = 0.01, 0.10, 0.20, 0.30, 0.50, 1.00$ [TPVR12].

Expérimentalement, peu de résultats mettent en évidence des cascades de réarrangements, Schall *et al.*, en 2007, observent dans des verres colloïdaux, que la relaxation des contraintes est anisotrope autour des événements plastiques et qu'un réarrangement entraîne d'autres réarrangements dans son voisinage, voir figure I.14.

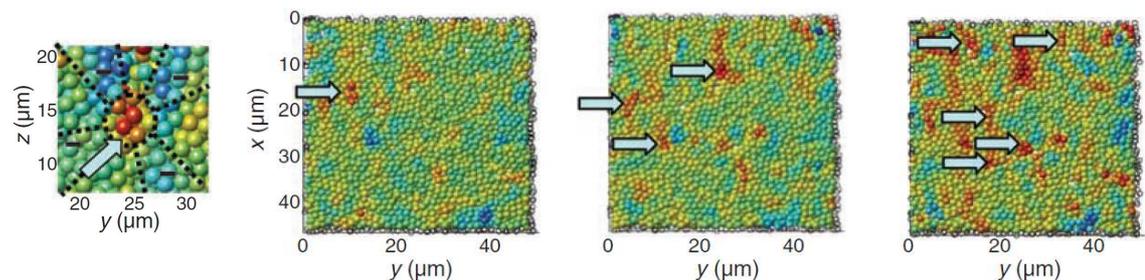


FIGURE I.14 – Événement plastique avec anisotropie (symétrie quadripolaire) de la déformation autour de l'événement, à gauche. Réarrangements favorisant d'autres réarrangements dans leurs voisinages, à droite [SW07].

Dans "Les milieux granulaires entre fluide et solide" [AFP11], les auteurs laissent

entendre que ce type de dynamique de couplages est attendu dans les milieux granulaires : « La première étape serait de caractériser l'événement élémentaire plastique dans ces matériaux qui serait l'équivalent d'un mouvement de dislocation dans les cristaux. [...] Ces événements induisent des fluctuations de contraintes à longue portée et seraient donc capables de donner lieu à des dynamiques complexes, le déclenchement d'un événement pouvant en entraîner un autre. »

Cependant, à notre connaissance, peu d'études portant sur des milieux frictionnels, ont montré un comportement coopératif tel que décrit dans ce paragraphe. On peut néanmoins citer Kuhn [Kuh99], qui dans une simulation numérique 2D de particules frictionnelles sous chargement biaxial, observe la structuration en microbandes intermittentes des cellules de vide entre les grains, figure I.15. Plus récemment, Gimbert *et al.* [GAW13] ont mis en évidence une structuration de la déformation d'un milieu granulaire dans une simulation numérique de test biaxial.

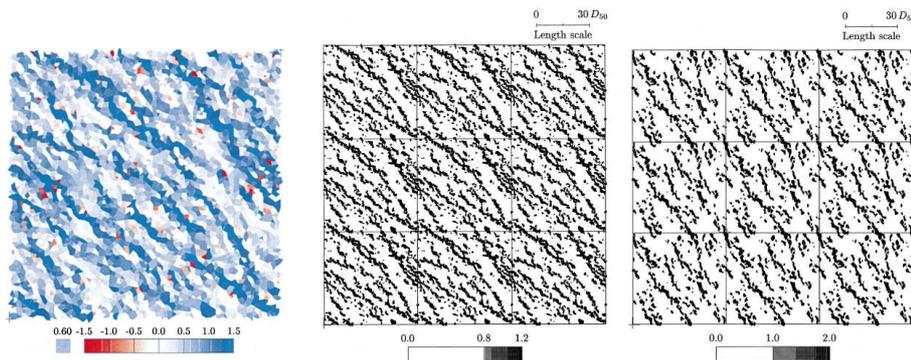


FIGURE I.15 – Réseaux de microbandes en test biaxial pour des déformations axiales de $\varepsilon = 0,02\%$ à gauche (pleine échelle de couleur) et au centre (grandes déformations) et $\varepsilon = 0,60\%$ (d'orientation moyenne avec l'horizontale de -56°). Seuls les cisaillements du côté droit sont représentés (angle de 0 à -90° avec l'horizontale) [Kuh99].

I.4 Méthodes de mesure des déformations d'un milieu granulaire

I.4.1 Mesures de champ

Comprendre la dynamique interne d'un milieu granulaire nécessite de pouvoir l'observer. Différentes techniques ont été développées permettant de visualiser les

milieux granulaires. Le suivi de particule (particule tracking) consiste à suivre la trajectoire des particules une par une. Il nécessite un algorithme de traitement d'image qui identifie chaque particule et les retrouve d'une image sur la suivante.

La PIV (Particule Image Velocimetry) aussi appelée DIC (Digital Image Correlation) est également très utilisée. Elle permet de reconnaître un motif ou une texture. L'idée est d'identifier un motif sur une première image et de calculer un coefficient de corrélation de ce motif avec l'image suivante. La corrélation maximale au voisinage du premier motif permet de quantifier le déplacement du motif. Cette technique peut être associée à d'autres techniques comme par exemple la tomographie à rayons X. La DIC peut être réalisée sur une surface ou sur un volume, on parle de DIC surface 2D (nécessite une caméra), DIC surface 3D (nécessite deux caméras) et DIC volume 3D (nécessite une visualisation 3D comme par exemple la tomographie à rayons X).

La stéréophotogrammétrie ou FRS (False Relief Stereophotogrammetry) est basée sur la comparaison de photographies prises à différents moments. En utilisant l'effet stéréoscopique, les paires successives de photographies sont perçues comme des reliefs fictifs et on peut en déduire la déformation au sein du matériau. Cette méthode est utilisée notamment en mécanique des sols par Desrues et Viggiani [DV04].

Les rayons X permettent de réaliser des radiographies 2D et la tomographie permet à partir de ces images de reconstruire le milieu sondé en 3D.

La microscopie confocale [SW07] permet de réaliser des images de très faibles profondeurs de champ et en prenant des images à différentes profondeurs, on peut recréer une représentation en 3D.

Des méthodes permettent de visualiser les chaînes de forces et les réseau de contact entre les grains comme par exemple la photo-élasticité ou l'empreinte sur papier carbone.

D'autres méthodes sont utilisées en mécanique des sols comme la diffraction des neutrons ou la diffraction des rayons X, l'imagerie par résonance magnétique, la tomographie de résistivité électrique, la tomographie neutrons ou encore la thermographie.

En plus des techniques optiques citées, les techniques acoustiques sont utilisées depuis de nombreuses années pour sonder les milieux granulaires. Elle peuvent être linéaires ou non-linéaires, passives ou actives. La tomographie à ultrasons est également utilisée en mécanique des sols.

I.4.2 Diffusion multiple de la lumière

La DWS (Diffusing Wave Spectroscopy) est une technique interférométrique basée sur la diffusion multiple de la lumière, elle permet la visualisation de petites déformations dans un matériau diffusant (la technique est détaillée §II.2). Les matériaux amorphes présentent, le plus souvent, les caractéristiques nécessaires à la diffusion multiple de la lumière, c'est-à-dire un matériau constitué de nombreux éléments identiques qui diffusent chacun la lumière. C'est la raison pour laquelle la technique de la DWS se prête bien à la mesure de déformations dans ce type de matériaux.

Cette technique a été utilisée comme une sonde de la matière molle pour la première fois par Pine *et al.* [PWCH88] en 1988 dans des suspensions colloïdales. Par la suite, de très nombreux travaux ont été réalisés sur des matériaux de nature très différente.

La première utilisation de DWS pour un matériau granulaire a été réalisée par Menon et Durian en 1997 [MD97] pour caractériser la dynamique d'un écoulement granulaire 3D. L'analyse théorique de Bicout [BM94] permet d'établir un lien entre les résultats de la DWS et les déformations hétérogènes ayant lieu dans une suspension colloïdale. Djaoui et Crassous [DC05] ont appliqué cette analyse expérimentalement aux milieux granulaires tandis que l'analyse numérique a été réalisée par Crassous [Cra07a]. L'obtention d'une information résolue spatialement par DWS sur les déformations d'un matériau divisé a été effectuée durant la thèse de Erpelding [Erp10, EAC08]. La résolution spatiale a permis des avancées expérimentales importantes sur la compréhension des déformations dans un milieu granulaire dans différentes géométries par Amon *et al.* [ANB⁺12b, ABC13].

Mon travail de thèse s'inscrit dans la continuité de ces travaux, la DWS y est appliquée dans une géométrie de test biaxial en déformation plane. Comparée aux autres méthodes de mesures de champ, cette technique de visualisation présente l'avantage de pouvoir détecter de très faibles déformations de l'ordre de 10^{-5} . L'ensemble du dispositif expérimental et notamment la technique de la DWS sont présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre II

Matériels et méthodes

Introduction

L'idée principale du montage expérimental développé et utilisé durant ma thèse est d'associer une technique optique interférométrique, la diffusion multiple de la lumière (Diffusing Wave Spectroscopy, DWS), permettant la visualisation des micro-déformations, à un test classique en mécanique des sols, le test biaxial en déformation plane. Ce dispositif a pour objectif d'observer la localisation de la déformation dans un milieu granulaire, il a été conçu et réalisé en s'inspirant des travaux J. Desrues et G. Viggiani [DV04] pour la partie mécanique et des travaux de M. Erpelding [Erp10] en thèse sous la direction de J. Crassous et A. Amon pour la partie visualisation de la déformation par DWS. Nous avons également développé une technique de suivi de particule pour obtenir le champ de déplacement des particules à la paroi. Ce montage expérimental, ainsi qu'une expérience typique sont décrits dans [LBAS⁺14].

Le test biaxial en déformation plane consiste à placer un échantillon de matériau granulaire entre deux murs rigides parallèles, imposant une déformation nulle dans la direction transversale aux murs, et à appliquer sur cet échantillon deux contraintes indépendantes dans les deux autres directions. Un des murs rigides est une plaque de verre, ceci permet la visualisation des micro-déformations au sein de l'échantillon par DWS en géométrie de rétro-diffusion (voir la photo, figure II.1), elle permet également le suivi de particules à la paroi.

Dans ce chapitre, nous aborderons d'abord la partie mécanique avec le test biaxial et ses caractéristiques techniques. Ensuite, nous présenterons la méthode de la diffusion multiple de la lumière puis la technique de suivi de particules à la paroi. Enfin,

l'échantillon et sa préparation seront évoqués.

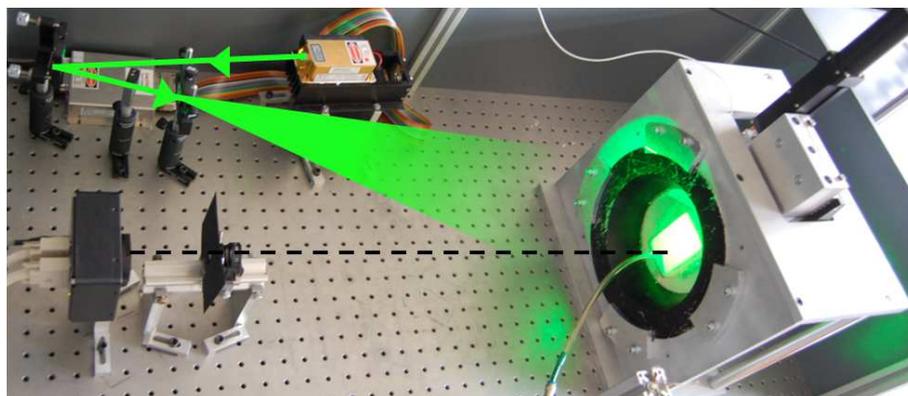


FIGURE II.1 – Photo de l'ensemble du dispositif expérimental permettant la visualisation par DWS (en rétro-diffusion) des déformations d'un milieu granulaire soumis à un test biaxial.

II.1 Partie mécanique

II.1.1 Test biaxial

Le test biaxial est une expérience typique de mécanique des sols qui permet de mettre sous contrainte un matériau de la même manière que certaines structures observées dans les sols, dans le milieu naturel ou en génie civil (versants, murs de soutènement, bandes de fondations, remblais). Il présente l'avantage que les contraintes macroscopiques appliquées au matériau sont homogènes. Ce type de test permet de relier contrainte et déformation du milieu (courbe de charge) et d'observer la localisation de la déformation.

Les notations et conventions de signes que nous utilisons pour décrire les contraintes et déformations du matériau sont indiquées sur le schéma figure II.2. Rappelons que le test biaxial en déformation plane consiste à appliquer sur un échantillon deux contraintes indépendantes $-\sigma_{xx}$ et $-\sigma_{yy}$ dans les deux directions parallèles aux deux murs rigides entre lesquels il est situé. $-\sigma_{yy}$ est la *contrainte axiale* et $-\sigma_{xx}$ est appelée *contrainte radiale* car la plupart des tests de compression de mécanique des sols sont des tests triaxiaux, réalisés sur des cylindres ; on garde cette appellation pour le test biaxial.

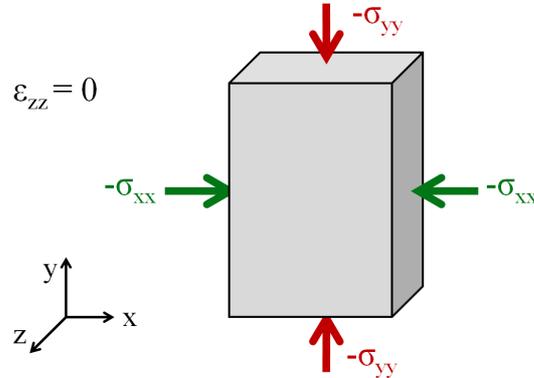


FIGURE II.2 – Schéma des conventions de notations. Les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont négatives en compression donc $-\sigma_{xx}, -\sigma_{yy} > 0$. On appelle contrainte radiale, la contrainte $-\sigma_{xx}$ en vert et contrainte axiale, la contrainte $-\sigma_{yy}$ en rouge. L'hypothèse de déformation plane conduit à considérer comme nulle la déformation dans la direction z , $\epsilon_{zz} = 0$.

Dans notre expérience, pour exercer la contrainte radiale $-\sigma_{xx}$, l'échantillon de matériau granulaire est mis en dépression entre une membrane en latex préformée (détails § II.4) et une plaque de verre à l'aide d'une pompe à vide (voir le schéma des contraintes, figure II.3). Le matériau est alors soumis à une pression de confinement P_{conf} qui a pour valeur la différence de pression entre l'extérieur et l'échantillon, on a $P_{conf} = P_{ext} - P_{éch} = -\sigma_{xx}$. Cette contrainte est quasi-constante durant la durée de l'expérience. L'étape de la préparation de l'échantillon est développée dans § II.4.

La seconde contrainte exercée sur le matériau est verticale $-\sigma_{yy}$, elle est imposée en partie par la pression de confinement et en partie par une plaque fixée à une platine motorisée. Celle-ci est située au dessus de l'échantillon et elle est installée sur un dispositif mécanique détaillé ci-après. Le déplacement de la platine s'effectue vers le bas (dans le sens de la compression de l'échantillon) à vitesse imposée et constante durant la durée de l'expérience tandis que la partie inférieure de l'échantillon est bloquée par une plaque fixe. La contrainte $-\sigma_{yy}$ croît alors au cours de la charge.

II.1.2 Réalisation mécanique

Pour soumettre l'échantillon de matériau granulaire au test biaxial, il est placé au sein d'un dispositif mécanique, figure II.4. Ce dispositif ainsi que l'ensemble du dispositif expérimental (mécanique et optique) est fixé sur une table optique

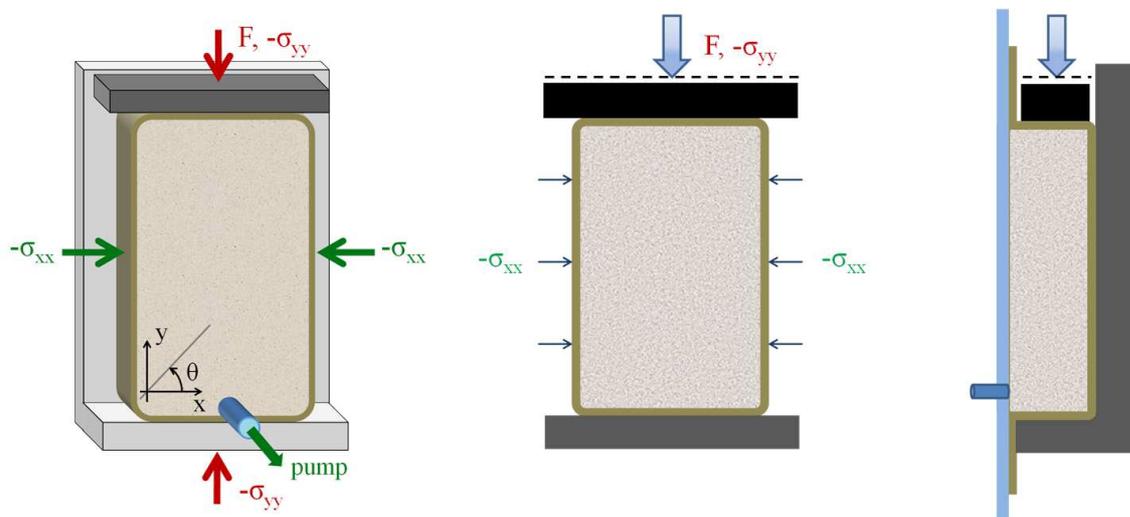


FIGURE II.3 – Schéma des contraintes exercées sur l'échantillon de matériau granulaire. De gauche à droite : vue en perspective, vue de face et vue de côté.

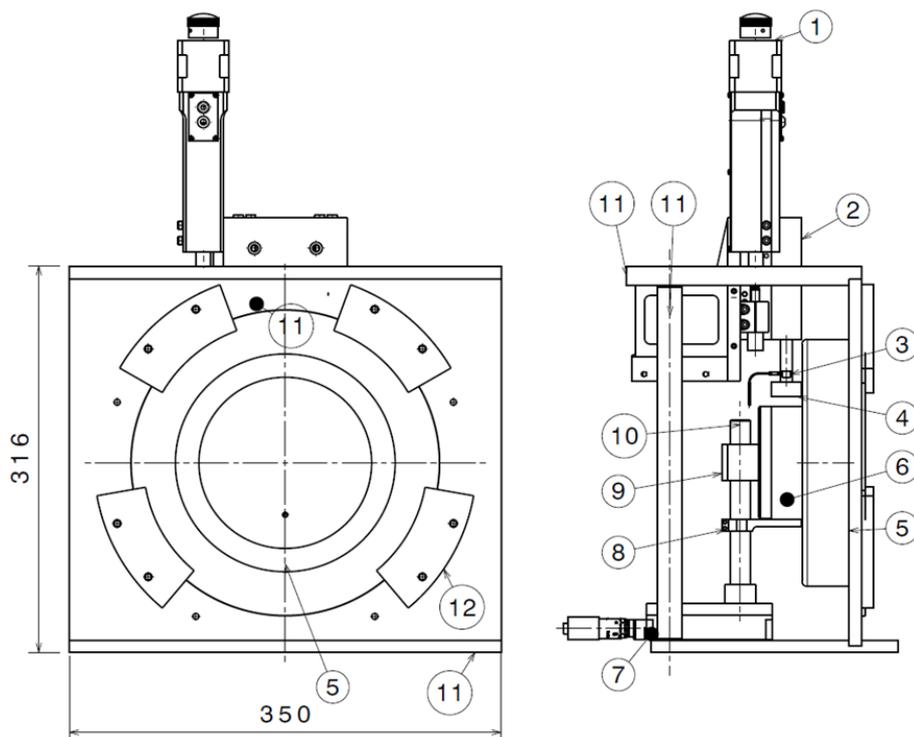


FIGURE II.4 – Plan du dispositif de test biaxial, vue de face et de côté. ① moteur, ② platine de translation motorisée, ③ capteur de force, ④ plaque supérieure, ⑤ hublot, ⑥ échantillon de matériau granulaire, ⑦ platine de translation manuelle, ⑧ plaque inférieure, ⑨ plaque arrière, ⑩ axe de positionnement, ⑪ bâti, ⑫ cales pour le hublot.

pour l'isoler des vibrations extérieures. L'échantillon ⑥ est situé entre deux murs parallèles et rigides, l'un d'eux est une plaque de verre collée sur une armature métallique circulaire formant un hublot ⑤ qui est fixé sur le bâti du dispositif ⑪ avec des cales ⑫ ; le second mur est une plaque ⑨ (la plaque arrière) positionnée sur un axe de positionnement ⑩. L'axe est fixé sur une platine de translation horizontale manuelle ⑦ permettant d'ajuster la position de la plaque arrière. Sur l'axe, est aussi fixée une plaque horizontale ⑧ (la plaque inférieure) qui permet de maintenir, de *bloquer* la partie inférieure de l'échantillon.

Pour exercer la contrainte axiale $-\sigma_{yy}$ sur la partie supérieure de l'échantillon, on utilise une platine de translation linéaire verticale ② montée sur un moteur pas à pas ①. La plaque en contact avec la partie supérieure de l'échantillon, la plaque supérieure ④ est fixée à la platine motorisée par un axe ; un capteur de force ③ (détaillé dans § II.1.4) est situé sur cet axe. Il permet de mesurer la contrainte axiale appliqué à l'échantillon.

II.1.3 Platine de translation motorisée

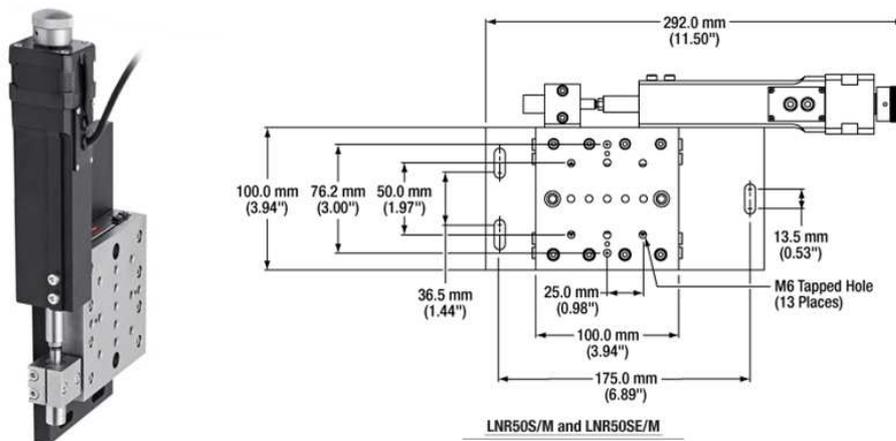


FIGURE II.5 – Photo et schéma avec cotations du moteur et de la platine de translation.

Le moteur pas à pas (DRV414 DC Servo Motor Actuator, Thorlabs) et la platine (LNR50 Series linear long-travel translation stage, Thorlabs), présentés figure II.5 sont tous deux fixés sur le bâti du dispositif expérimental. Le moteur guide la platine en translation verticale par contact de Hertz. Les données constructeur indiquent que la distance de translation de la platine est de 50 mm et sa charge maximum

est de 25 kg soit environ 245 N. Cette valeur fixe la contrainte maximum $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ appliquée au matériau. Nous avons effectué des tests de chargement qui confirment ces données avec une activation de la sécurité vers 240 N. Le pas du moteur est de 0,3 μm et la vitesse minimum est d'un pas par seconde soit 0,3 $\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le déplacement de la platine s'effectue à vitesse constante. Les données constructeur indiquent aussi que la précision de la position initiale de la platine est inférieure à 1 μm .

Un contrôleur (BDC101 DC Motor Controller, Thorlabs) avec un logiciel d'interface utilisateur permet de piloter la platine (voir § II.1.5). Son déplacement s'effectue à vitesse constante. La translation de la platine s'effectue selon l'axe vertical, on n'autorise pas de translation horizontale selon l'axe Ox . Certains dispositifs de test biaxiaux permettent un degré de liberté en plus en autorisant un glissement horizontal de la plaque inférieure ou supérieure. Dans ce cas, les motifs de déformation du matériau granulaire sont différents du cas sans translation horizontale (détails dans le chapitre III).

La platine et la plaque en contact avec l'échantillon (plaque supérieure) sont reliées par une tige. C'est sur cette tige qu'est situé le capteur de force (détaillé ci-après).

II.1.4 Capteurs de force et de pression

La contrainte axiale imposée par le déplacement de la platine sur l'échantillon est mesurée par un capteur de force (ELPF-T2M-500N, Measurements Specialities). Le capteur est situé entre un axe relié à la platine de translation et la plaque de compression en contact avec l'échantillon. C'est un capteur à 4 jauges de déformation reliées en pont de Wheatstone, voir figure II.6. Ce type de pont permet de quantifier des faibles variations de pression et d'obtenir précisément la contrainte appliquée. L'erreur possible sur le signal est ± 3 mV, ce qui correspond à une barre d'erreur sur le signal de force de $\pm 0,3$ N.

Le signal de sortie du pont est amplifié avec un amplificateur de tension de gain $\times 50$ avant d'être mesuré avec une carte d'acquisition BNC 21-20 de chez National Instruments. La linéarité du capteur avec l'amplificateur a été mesurée en plaçant des masses sur le capteur, voir figure II.7. Le constructeur indique une erreur de linéarité de 0,25% de l'étendue de mesure (full scale output, fso).

Le capteur permet d'obtenir la contrainte exercée par la platine sur le dessus de

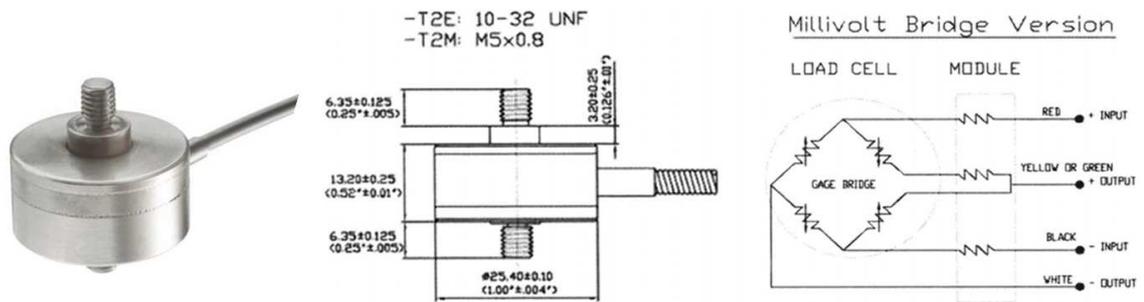


FIGURE II.6 – Photo, schéma avec cotations et schéma électrique du capteur de force.

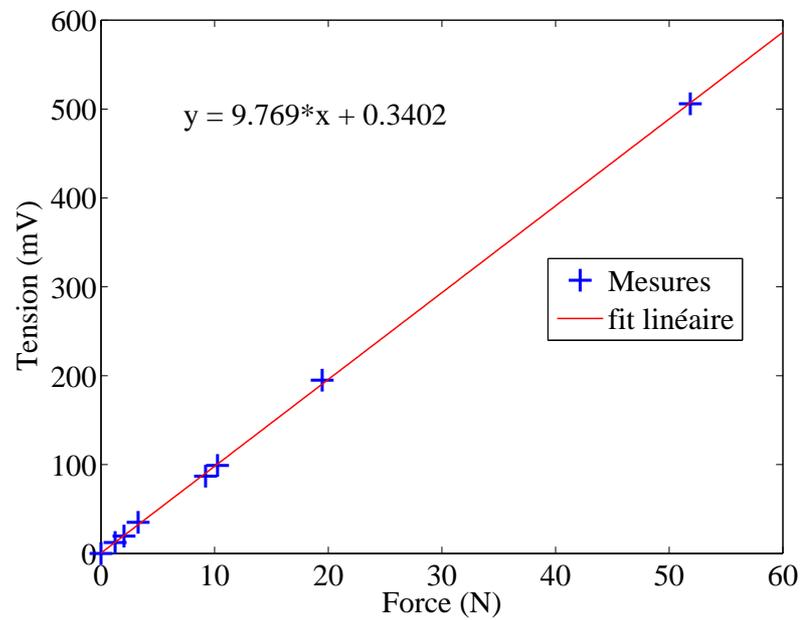


FIGURE II.7 – Test de linéarité du capteur, tension délivrée par le capteur en fonction de la force appliquée. La force est exercée sur le capteur en posant des masses dessus.

l'échantillon $-\sigma_{yy} = \frac{F}{S} - \sigma_{xx}$ avec F la force indiquée par le capteur et S la surface de contact initiale entre la plaque de compression et l'échantillon.

Pour imposer la contrainte radiale $-\sigma_{xx}$, on dépressurise l'échantillon avec une pompe à vide. On contrôle cette dépressurisation en utilisant un capteur de pression (DP2-40E, Panasonic) relié à une électrovanne *tout ou rien*, voir figure II.8. Le capteur de pression indique la pression différentielle entre l'air ambiant et la pression dans l'échantillon, c'est la pression de confinement P_{conf} et on a $P_{conf} = P_{ext} - P_{éch} = -\sigma_{xx}$. On indique préalablement au capteur deux pressions de consignes P1 (pression maximale de consigne) et P2 (pression minimale de consigne). Le capteur pilote l'électrovanne, ainsi lorsque la pression mesurée par le capteur est supérieure à P1, il délivre un signal qui ferme l'électrovanne et lorsque la pression mesurée est inférieure à P2, l'électrovanne n'est plus alimentée et elle est, dans ce cas, en position ouverte. L'étanchéité du système n'est pas parfaite, et donc lorsque l'électrovanne est fermée la pression de confinement diminue lentement. Avec ce système, la pression de confinement de l'échantillon oscille entre P1 et P2 au cours de la charge et vaut $P_{conf} = \frac{P1+P2}{2} \pm \frac{P1-P2}{2}$.

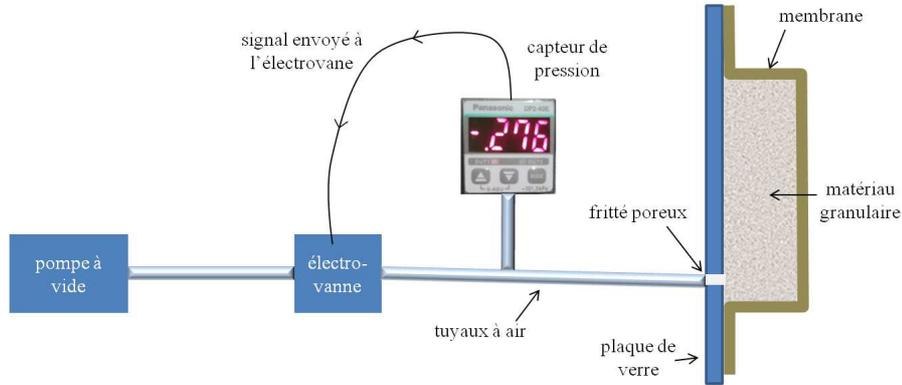


FIGURE II.8 – La pression de confinement au sein de l'échantillon est établie en dépressurisant l'échantillon avec une pompe à vide. Elle est choisie en donnant deux pressions de consigne P1 et P2 au capteur de pression. Ce dernier pilote une électrovanne *tout ou rien* qui ouvre et ferme le circuit d'aspiration relié à la pompe à vide en fonction de la pression de confinement mesurée P_{conf} et des pressions de consigne P1 et P2. On alors $P_{conf} = \frac{P1+P2}{2} \pm \frac{P1-P2}{2}$.

II.1.5 Pilotage et acquisition

Le pilotage de la platine et l'acquisition du signal de force sont réalisés dans un même programme (qui réalise également l'acquisition des images de la caméra) sous

Labview, voir figure II.9. Ce programme a été réalisé par Patrick Chasle. Il permet de commander la platine tandis que l'ensemble des données (positions, images et forces) est affiché et actualisé en temps réel sur l'interface. Rappelons que la pression de confinement est choisie directement sur le capteur de pression qui n'est pas relié au logiciel Labview.

Le moteur est piloté par le contrôleur (BDC101 DC Motor Controller, Thorlabs) qui propose une interface de contrôle pour le logiciel Labview. Cette interface permet d'initialiser en position haute la platine et également d'entrer les deux consignes d'une expérience de chargement que sont la vitesse de la platine durant la charge et sa position finale. La vitesse minimum est de $0,3 \mu\text{m.s}^{-1}$, soit un pas du moteur par seconde. La plupart des expériences a été réalisée avec une vitesse de chargement de $1,0 \mu\text{m.s}^{-1}$ qui assure un chargement quasi-statique.

Pour une expérience typique, le logiciel enregistre dans un fichier la position de la platine indiquée par le contrôleur et le temps correspondant à cette position à la fréquence d'une position par seconde. Il enregistre également la tension délivrée par le capteur de force à la fréquence de 100 signaux par seconde. Selon le système d'acquisition d'image (voir §II.2.5), le logiciel peut acquérir également les images de la caméra (1 image/s) et le temps auquel elles sont enregistrées.

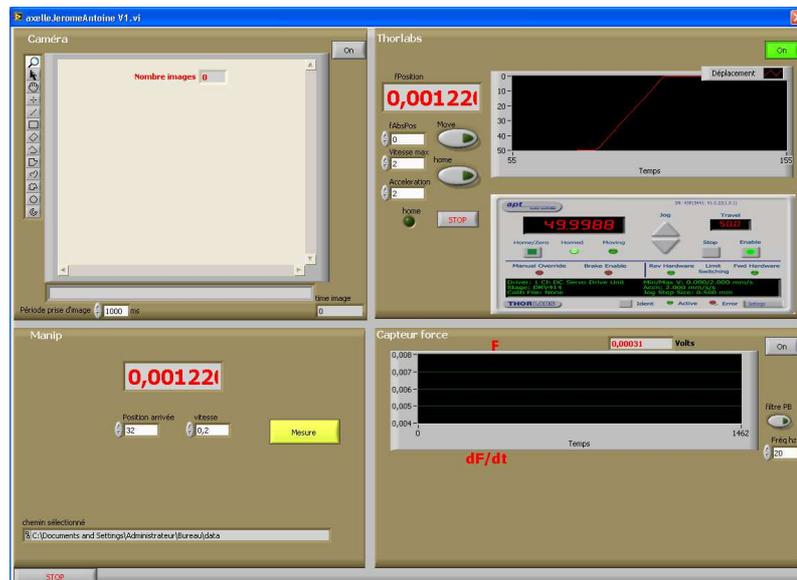


FIGURE II.9 – Interface graphique du logiciel Labview. En haut à gauche, les images de la caméra, en haut à droite, les commandes du contrôleur Thorlabs, en bas à gauche, les paramètres d'entrée, vitesse et position finale et en bas à droite, le signal du capteur de force.

II.1.6 Rigidity mécanique du système de mesure

Nous avons caractérisé la raideur de l'ensemble du système mécanique de compression. Dans un premier temps, nous avons mesuré la constante de raideur du capteur de force. Avec une platine de translation manuelle à vis micrométrique, nous avons imposé un déplacement connu au capteur de force (dans le sens de la compression) et relevé le signal de force correspondant (tous les 10 μm). Les résultats de deux tests réalisés dans ces conditions sont présentés sur la figure II.10. On mesure des raideurs $k_1 = 4,18 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ et $k_2 = 4,45 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$. On estime donc la constante de raideur du capteur de force à $k_c = (4,3 \pm 0,2) \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$. Le constructeur du capteur de force n'a pas précisé sa constante de raideur.

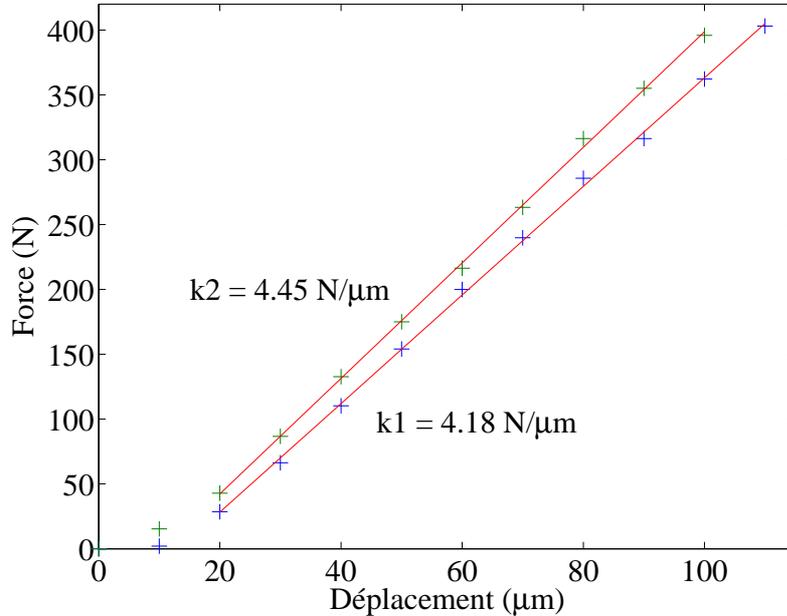


FIGURE II.10 – Test de raideur du capteur. Force indiquée en fonction du déplacement appliqué au capteur (jauge de déformation) par vis micrométrique. Les deux tests effectués donnent une raideur du capteur de $k_c = (4,3 \pm 0,2) \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$.

Pour quantifier la raideur de l'ensemble du système, nous avons utilisé une méthode de suivi de marqueurs développée au département Mécanique et Verres de l'IPR et référencée ici [CREA⁺11]. C'est une méthode développée initialement pour mesurer les modules élastiques d'une fibre optique en tension uniaxiale. Elle dispose d'une procédure d'analyse d'images interne et permet de suivre la position de quatre marqueurs au cours du temps. Nous avons donc placé quatre marqueurs sur le dispositif expérimental comme indiqué sur le schéma figure II.11 (a). Les marqueurs

A et B sont situés respectivement au dessus et en dessous du capteur de force, le marqueur C est situé sur la plaque inférieure et le marqueur D sur le bâti. On suit les positions x et y de chaque marqueur au cours d'une expérience de chargement typique. Le signal de force et les positions (en y) relatives de A et B nous indiquent une constante de raideur $k_c = (5 \pm 1) \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$, cette constante de raideur est en accord avec celle mesurée par compression directe à l'aide d'une vis micrométrique. Le signal de force et les positions (en y) relatives de C et D permettent de mesurer la raideur de l'ensemble de fixation de la plaque inférieure sur le bâti. De cette manière on obtient la raideur de la fixation de la plaque $k_p = 7,3 \times 10^5 \text{ N.m}^{-1}$.

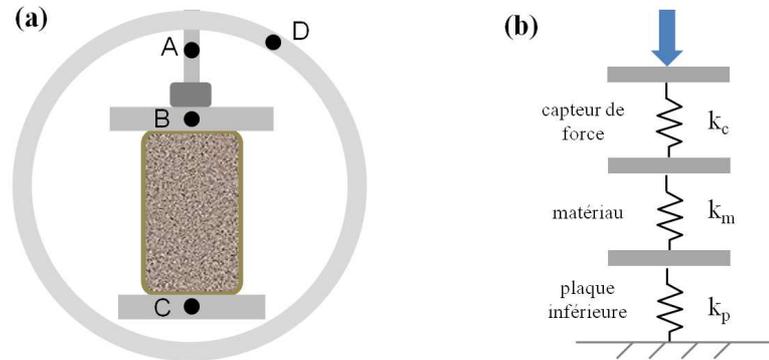


FIGURE II.11 – (a) Schéma du montage de suivi des marqueurs A, B, C, D; (b) Modèle mécanique des raideurs du système.

On peut estimer l'influence de la membrane en latex en calculant sa raideur, le module de Young du latex E_{latex} est d'environ 1 MPa, l'épaisseur de la membrane est environ 1 mm soit une section $S = 10^{-3} \times (25 + 25 + 55) \times 10^{-3} \approx 10^{-4} \text{ m}^2$ et une longueur (hauteur) $L = 85 \text{ mm}$. D'après la loi de Hooke, on a $\sigma = E \cdot \varepsilon$ soit $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$ soit une constante de raideur $k = \frac{F}{\Delta L} = E \cdot \frac{S}{L}$. Pour la membrane, on obtient donc $k_m \approx 10^6 \times \frac{10^{-4}}{10^{-1}} \approx 10^3 \text{ N.m}^{-1}$. La raideur de la membrane calculée de cette manière est sa raideur en traction. En compression, la membrane subit probablement du flambage. On peut raisonnablement conclure que la membrane est sans effet sur les contraintes mesurées.

On peut schématiser la raideur du système comme sur le schéma figure II.11 (b). On considère la raideur du capteur de force k_c , la raideur de la plaque inférieure k_p et la raideur du matériau granulaire k_m , on peut alors calculer la raideur équivalente k_e de l'ensemble système + matériau comme $\frac{1}{k_e} = \left(\frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_m}\right)$. Les valeurs typiques de module d'Young des milieux granulaires dépendent de la pression de confinement

du milieu [MGJS04]. Selon la pression de confinement de nos expériences, E_{grains} vaut entre 50 et 100 MPa, on a alors $k_c, k_p \gg k_m$, la raideur équivalente mesurée vaut alors $k_e \approx k_m$ et on mesure bien, dans ce cas, la déformation du matériau.

II.2 Diffusion multiple de la lumière

II.2.1 Principe de la DWS

Certains matériaux comme des mousses liquides, des suspensions colloïdales ou un ensemble de petites billes de verre ont la propriété de diffuser fortement la lumière. En effet, ils peuvent être composés d'éléments transparents (eau, verre, air) et pourtant apparaître blanc. Leur caractère hétérogène et désordonné leur confère une multitude d'interfaces donnant lieu à des fluctuations d'indice optique dans le milieu. Lorsqu'on éclaire ces matériaux diffusants, les ondes lumineuses sont diffusées lorsqu'elles rencontrent une de ces fluctuations d'indice optique. Si elles sont diffusées plusieurs fois, on parle de diffusion multiple de la lumière.

Dans un matériau désordonné, il existe une multitude de chemins optiques, ainsi deux ondes lumineuses incidentes en phase (lumière cohérente) peuvent se propager dans le matériau en suivant des chemins différents. Ces deux ondes peuvent alors être déphasées à l'issue de la propagation et, dans ce cas, elles sont en mesure d'interférer, voir figure II.12 (a). L'intensité de la lumière diffusée est alors le résultat d'interférences constructives et destructives, elle forme une image hétérogène, constituée de tâches aléatoires sombres et lumineuses appelées tâches de speckle. On appelle figure de speckle l'ensemble de ces tâches. Au sein du matériau, la lumière est diffusée dans toutes les directions et, selon la position du point d'observation par rapport à la zone incidente de la lumière, on parle de géométrie de transmission ou de géométrie de rétro-diffusion, voir figure II.12(b).

Lorsqu'un matériau possède une dynamique interne, c'est-à-dire que ses centres diffusants (billes, bulles, gouttes...) sont en mouvement relatif entre eux, les chemins optiques sont modifiés, voir figure II.12 (c). Dans ce cas, une interférence constructive entre deux ondes peut devenir destructive et *vice versa*, la figure de speckle est alors modifiée. On peut quantifier cette variation en réalisant une analyse de l'intensité de la lumière diffusée à différents instants, c-à-d pour différents états du matériau. L'analyse consiste à calculer une fonction de corrélation g_I de l'intensité diffusée entre deux états. Si (I_1) est l'intensité diffusée du matériau à l'état 1 et (I_2) l'intensité

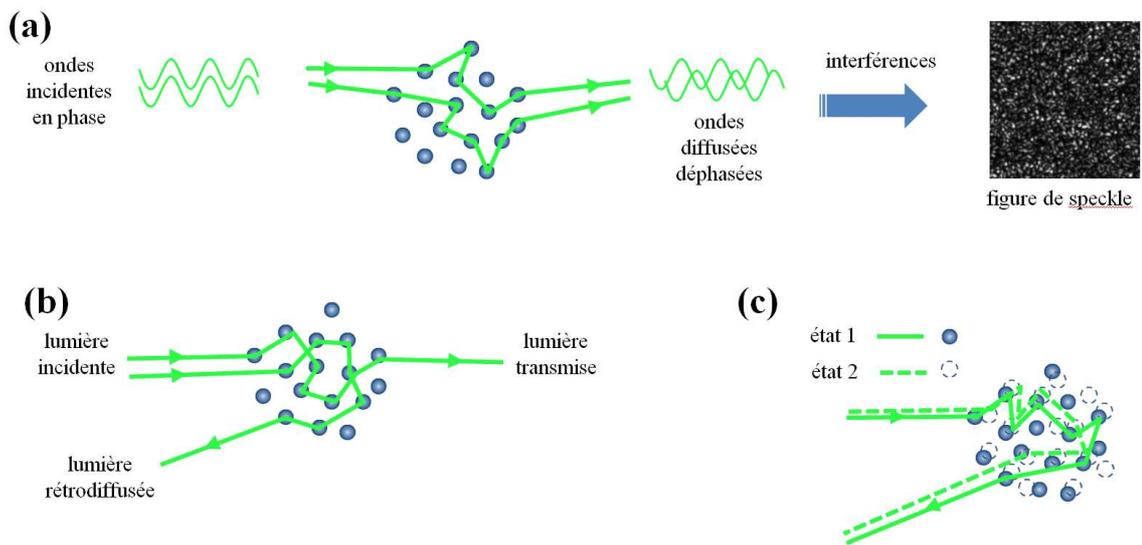


FIGURE II.12 – Principe de la DWS. (a) Deux ondes incidentes en phase suivent des chemins optiques différents et sont déphasées à l’issue de la propagation. L’image des interférences entre les ondes diffusées forme une figure de speckle. (b) Les ondes incidentes sont diffusées dans toutes les directions, on parle de lumière rétrodiffusée si la position du point d’observation est du côté des ondes incidentes et de lumière transmise s’il est de l’autre côté. (c) Au temps 1, les centres diffuseurs et le chemin optique d’une onde incidente sont à l’état 1; au temps 2, la position des centres diffuseurs est modifiée donc le chemin optique est modifié à l’état 2; dans ce cas, pour des ondes incidentes stationnaires les figures d’interférences aux temps 1 et 2 sont différentes.

diffusée du matériau à l'état 2 alors la fonction de corrélation normalisée de l'intensité diffusée entre les états 1 et 2 est définie comme :

$$g_I^{(12)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}, \quad (\text{II.1})$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne temporelle ou spatiale selon la méthode de mesure de déformation utilisée. La fonction de corrélation de l'intensité diffusée entre deux états est aussi appelée g_2 dans la littérature.

II.2.2 Mesure de déformation

La diffusion de la lumière par des particules sphériques est décrite par la théorie de Mie. Lorsque les particules sont petites devant la longueur d'onde de la lumière λ , c'est un cas limite de la diffusion de Mie, on parle de diffusion de Rayleigh, la particule diffuse autant de lumière vers l'avant que vers l'arrière, figure II.13 (a). La propagation de la lumière peut alors être décrite comme une marche aléatoire, c'est l'approximation de diffusion, figure II.13 (b). Pour des particules plus grandes que la longueur d'onde λ , comme les billes de verre utilisées pour nos expériences, d'après la théorie de Mie, la diffusion est plus importante *vers l'avant*, II.13 (c). Dans ce cas, dans le cadre de l'approximation de diffusion, on introduit une longueur de persistance, la longueur de transport (transport mean free path) l^* , c'est la longueur que la lumière doit parcourir avant de perdre son orientation initiale, figure II.13 (d).

Dans une géométrie de rétrodiffusion, les ondes lumineuses incidentes pénètrent dans le matériau, elles y subissent plusieurs diffusions et la lumière diffusée est observée du côté de la lumière incidente, autrement dit les ondes lumineuses sortent du matériau par la face par laquelle elles sont entrées. Il existe une multitude de chemins optiques entre *l'entrée* et *la sortie* du matériau. La distribution des longueurs de ces chemins optiques présente un pic autour de la valeur l^* . La longueur des chemins optiques la plus probable est donc de l'ordre de l^* . Ceci signifie que le volume typique de milieu diffusant sondé par une onde lumineuse est de l'ordre de $(l^*)^3$, voir figure II.14. La longueur de transport l^* dépend de la taille des particules. Un modèle de propagation de la lumière dans un milieu granulaire (billes de verre sphériques) [Cra07b] et des mesures [Cra07b, DC05, ABC13] ont montré que $l^* \simeq 3,3 d$ avec d le diamètre moyen des billes.

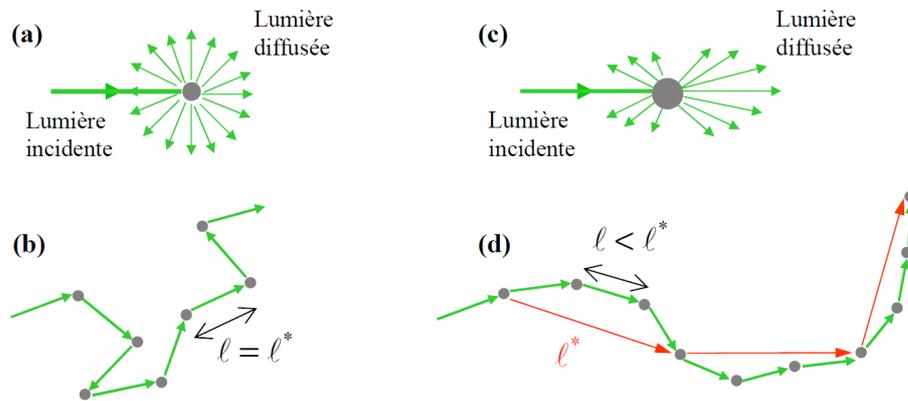


FIGURE II.13 – Image tirée de [Erp10], (a) diffusion de Rayleigh (b) la diffusion peut être décrite par une marche aléatoire dont le pas l^* vaut la distance l entre les centres diffuseurs. (c) Diffusion préférentielle *vers l'avant* décrite par la théorie de Mie ; (d) dans ce cas le pas de la marche aléatoire l^* est supérieure à la distance l .

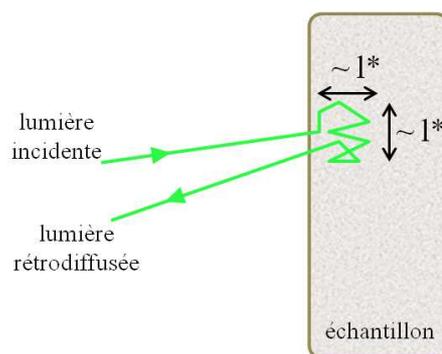


FIGURE II.14 – La lumière incidente sonde un volume typique de milieu diffusant de l'ordre de $(l^*)^3$.

Connaissant le volume typique du matériau sondé par une onde lumineuse, on peut relier la fonction de corrélation entre deux états $g_I^{(12)}$ à la déformation du matériau entre ces deux états. En effet, si la déformation du matériau entre l'état 1 et l'état 2 est considérée comme affine et homogène à l'échelle de la zone sondée $\approx (l^*)^3$, alors en rétro-diffusion, la fonction de corrélation peut être liée à la déformation moyennant certaines approximations explicitées dans [DC05, Cra07b, EAC08] :

$$\left|g_I^{(12)}\right| \approx \exp\left(-\eta k l^* \sqrt{f(\mathbf{U})}\right), \quad (\text{II.2})$$

où η est un facteur optique dont la valeur est comprise entre 1,5 et 2,5 ; k est le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et

$$f(\mathbf{U}) = \frac{1}{5}Tr^2(\mathbf{U}) + \frac{2}{5}Tr(\mathbf{U}^2) \quad (\text{II.3})$$

est une fonction des invariants quadratiques du tenseur de déformation \mathbf{U} de composantes $U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$

Si les déplacements des billes sont la somme d'un mouvement affine avec un tenseur de déformation \mathbf{U} et d'un mouvement décorrélé des billes, alors [BM94] :

$$\left|g_I^{(12)}\right| \approx \exp\left(-\eta k \sqrt{(l^*)^2 f(\mathbf{U}) + \langle \Delta r^2 \rangle}\right), \quad (\text{II.4})$$

avec $\langle \Delta r^2 \rangle$ le déplacement quadratique moyen du mouvement décorrélé des billes.

L'ordre de grandeur de la déformation $\sqrt{f(\mathbf{U})}$ observée en fonction des différents paramètres (taille de billes et longueur d'onde du laser) est discutée au paragraphe suivant.

II.2.3 Mesure du champ de déformation - Résolution spatiale

Dans notre expérience de test biaxial, la lumière incidente est un faisceau laser étendu (voir détails §II.2.5) sur toute la face de l'échantillon en contact avec la plaque de verre. On forme l'image de l'échantillon (objet) à travers une lentille et un diaphragme sur un capteur CCD (voir figure II.15), cette image est le fruit d'interférences de la lumière rétrodiffusée, c'est une figure de speckle. Chaque pixel du capteur CCD est un détecteur de la lumière diffusée. On a alors accès à une information en deux dimensions, le champ scalaire de l'intensité de la lumière diffu-

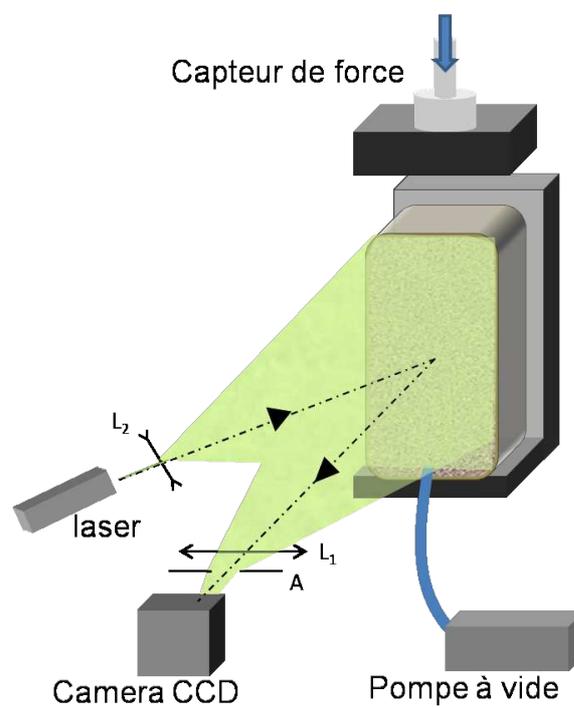


FIGURE II.15 – Schéma du dispositif optique expérimental. On étend un laser sur toute la face de l'échantillon, la lumière se propage dans l'échantillon et on forme l'image de la lumière rétrodiffusée de l'échantillon (figure de speckle) sur un capteur CCD à travers une lentille et un diaphragme.

sée. Ceci permet de réaliser des moyennes *spatiales* des corrélations d'intensité entre deux états. Pour ce faire, l'image de la lumière diffusée (figure de speckle) est divisée en zones carrées de $(N \times N)$ pixels (voir figure II.16). On appelle ces zones des méta-pixels. Dans le calcul de la fonction de corrélation, les corrélations d'intensités de la lumière diffusée sont alors moyennées sur un méta-pixel : $\langle I \rangle_{N \times N}$. De plus, pour s'affranchir au maximum de l'influence des fluctuations d'intensité, on normalise la fonction de corrélation et on calcule dans ce cas :

$$g_I^{(12)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2} \sqrt{\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle^2}}, \quad (\text{II.5})$$

où I_1 et I_2 sont les matrices intensité de la lumière diffusée d'un méta-pixel à l'état 1 et à l'état 2 ; où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne sur l'ensemble des pixels contenus dans un méta-pixel. Cette fonction de corrélation est calculée pour chaque méta-pixel et sa valeur est reliée à la déformation du matériau par l'équation II.2. La fonction de corrélation g_I prend des valeurs entre 0 et 1 ; elle est proche de 1 lorsque $I_1 \approx I_2$, dans ce cas la corrélation est importante et la déformation est faible ; elle est proche de 0 lorsque I_1 est très différent de I_2 , la corrélation est faible et la déformation est importante.

À partir de l'équation II.2, on peut calculer l'ordre de grandeur des déformations observées par DWS. On a

$$\sqrt{f(\mathbf{U})} = -\frac{\ln(g_I)}{\eta k l^*} \quad (\text{II.6})$$

avec $\eta \approx 2$; pour un laser de longueur d'onde 532 nm, $k = \frac{2\pi}{532 \cdot 10^{-9}} \text{ rad.m}^{-1}$; Pour des billes d'un diamètre de l'ordre de 100 μm , $l^* \approx 3,3 \times 10^{-4} \text{ m}$; dans le cas d'une déformation isovolume, $f(\mathbf{U}) = \frac{2}{5} \text{Tr}(\mathbf{U}^2)$.

Lorsque $g_I = 0,99$, on a

$$\sqrt{f(\mathbf{U})} = -\frac{\ln(0,99)}{\eta k l^*} \approx 1.10^{-6}. \quad (\text{II.7})$$

Lorsque $g_I = 0,01$, on a

$$\sqrt{f(\mathbf{U})} = -\frac{\ln(0,01)}{\eta k l^*} \approx 6.10^{-4}. \quad (\text{II.8})$$

Selon le bruit sur les g_I , les déformations mesurées sont de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-4} .

II.2.4 Paramétrages optiques du système

De la même manière que les méta-pixels, la taille des tâches de speckle fait l'objet d'un compromis entre une bonne définition des tâches (au moins deux pixels) et un grand nombre de tâches par méta-pixels. Nous considérons comme taille pertinente des tâches de speckle de 2,3 pixels en moyenne. L'ouverture du diaphragme permet de faire varier la taille des tâches de speckle.

On calcule la fonction de corrélations sur des zones de $(N \times N)$ pixels, la taille de ces zones détermine la résolution spatiale des cartes de corrélations. Si N est grand, les moyennes spatiales $\langle \cdot \rangle_{N \times N}$ sont calculées sur un grand nombre de pixels et donc un grand nombre de tâches de speckle, la statistique sur le calcul de la moyenne est pertinente. En revanche, plus les méta-pixels sont grands, moins il y en a sur l'image et la résolution de la carte de corrélation est faible. Inversement, si N est petit, la fonction de corrélation est calculée sur peu de pixels donc elle est plus sensible au bruit mais la résolution (nombre de méta-pixels) est importante. D'après [Erp10], pour des tâches de speckle de 2 à 3 pixels, $N = 16$ est un bon compromis entre pertinence statistique de la moyenne et résolution de la carte de corrélation ; la fonction de corrélation est donc calculée pour nos expériences sur des méta-pixels de (16×16) pixels.

Rappelons que le volume typique de milieu diffusant sondé par une onde lumineuse est de l'ordre de $(l^*)^3$. Il convient donc de calculer les moyennes spatiales sur des zones représentant une surface $(l^* \times l^*)$ dans l'espace objet, i.e. l'image d'un carré de $(l^* \times l^*)$ de l'échantillon est formée sur un méta-pixel de (16×16) pixels, voir figure II.16. Rappelons également que $l^* \simeq 3,3 d$ avec d le diamètre moyen des billes.

Pour résumer, la résolution spatiale est maximale et pertinente lorsqu'un méta-pixel (carré) de 16 pixels de côté sur le capteur correspond à un carré de 3,3 diamètres de grains dans l'espace objet et dans ce méta-pixel, les tâches de speckle sont d'une taille moyenne de 2,3 pixels. Ce sont ces paramètres qui guident les choix et les réglages du dispositif optique.

II.2.5 Dispositif optique et réglages

Rappelons que l'ensemble du dispositif expérimental est fixé sur une table optique (Newport SD Series) pour l'isoler des vibrations extérieures. Le montage optique a été réalisé pour utiliser la DWS en rétro-diffusion, c'est-à-dire que l'on éclaire et

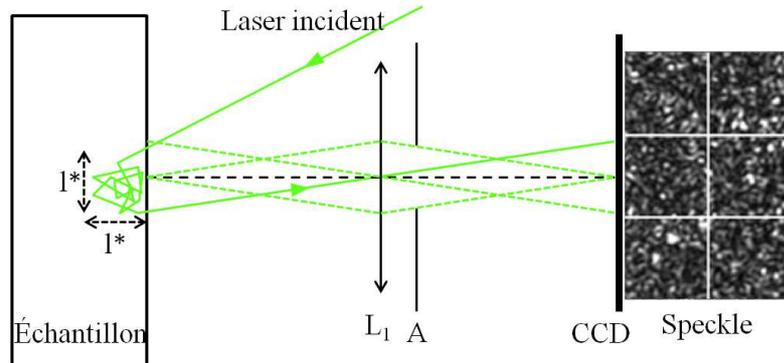


FIGURE II.16 – Schéma du chemin optique d'un rayon incident qui se propage dans le milieu granulaire et est rétrodiffusé à travers une lentille et un diaphragme sur l'écran de la camera. On forme l'image d'une zone carrée $l^* \times l^*$ de l'objet sur un métapixel de 16×16 pixels sur le capteur CCD ; à droite : exemple de 6 méta-pixels de tâches de speckle enregistrés avec la caméra.

on image la même face de l'échantillon. On enregistre alors la lumière rétro-diffusée (figures de speckle), on calcule *a posteriori* la fonction de corrélation entre deux images, pour chaque méta-pixel, on a ainsi accès à la carte de corrélations entre deux images.

Pour toutes nos expériences nous avons utilisé une source laser de puissance réglable de longueur d'onde $\lambda = 532$ nm et d'une puissance maximale de 75 mW (Compass 215M, Coherent). Afin d'éclairer toute la surface de l'échantillon sur la plaque de verre, nous avons étendu le faisceau avec deux lentilles divergentes et utilisé un miroir pour augmenter la longueur du chemin optique et gagner de la place, voir figure II.17. L'intensité du faisceau laser doit être assez importante pour avoir un bon rapport signal/bruit mais aussi ne pas excéder une valeur qui pourrait faire saturer les pixels sur le capteur CCD ou l'appareil photo. Afin d'éviter au maximum de capter de la lumière parasite, toutes les expériences ont été réalisées dans l'obscurité.

Nous avons utilisé deux systèmes d'acquisition d'images au cours de la thèse. Dans le premier système, les tâches de speckle étaient imagées à travers une lentille convergente de distance focale 150 mm (Melles Griot) et un diaphragme sur le capteur d'une caméra CCD (PT-41-04M60, DALSA), d'une résolution de 2352×1728 soit 4 mégapixels et d'une taille de pixel de $7,4 \mu\text{m} \times 7,4 \mu\text{m}$. La distance focale de la lentille est choisie pour obtenir un grandissement qui permet d'imager l'échantillon complet sur le capteur en accord avec la place disponible sur la table optique. La caméra est placée dans l'axe de l'échantillon, parallèlement à la plaque de verre. Le

temps d'exposition de l'image est de 50 ms, ainsi pour régler l'intensité de l'image, on fait varier la puissance du laser. L'ouverture du diaphragme permet de régler la taille des tâches de speckle.

Les premiers résultats d'analyse d'image des cartes de corrélations réalisées à partir des images de la caméra DALSA nous ont incité à augmenter la résolution spatiale des cartes de corrélations. Pour permettre cette meilleure résolution, nous avons diminué la taille des billes et changé de caméra. Nous avons choisi un appareil photo reflex numérique (D800E, Nikon) de 7360×4912 pixels effectifs soit 36 Mégapixels (7424×4924 pixels au total). Nous y ajoutons un objectif de 90 mm de distance focale avec diaphragme.

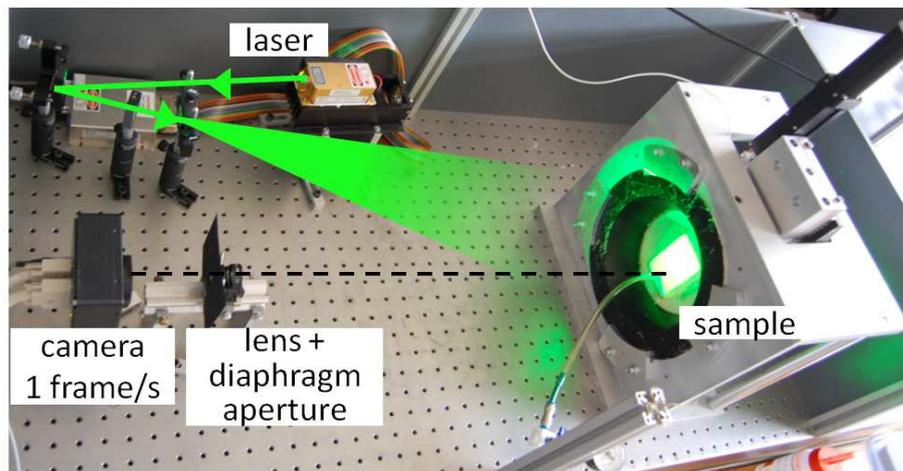


FIGURE II.17 – Photo du dispositif expérimental avec la caméra CCD.

II.2.6 Cartes de corrélations

Comme indiqué §II.2.4 et §II.2.5, les images (figures de speckle) sont enregistrées avec deux résolutions possibles selon les dispositifs optiques utilisés : soit 2352×1728 pixels, soit 7360×4912 pixels. Dans les deux cas, le traitement des images est identique. Afin d'obtenir une information sur la déformation du matériau, on compare deux images (image 1 et image 2). Chaque image représente la figure de speckle correspondant à une déformation axiale ε du matériau (ε_1 pour l'image 1 et ε_2 pour l'image 2). On calcule la fonction de corrélation g_I , définie équation II.5, pour chaque métapixel (zone de 16×16 pixels). De cette manière, on obtient une carte de corrélations (carte des valeurs de g_I), cette carte représente les déformations

du matériau pour un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Dans la suite, ces cartes de corrélations sont représentées avec une échelle de couleurs chaudes (noir-rouge-jaune-blanc) allant de 0 à 1 (voir figure II.18).

Pour les expériences réalisées avec une résolution d'image de 2352×1728 , nous appliquons une correction aux images de speckle avant de calculer la fonction de corrélation. Le bruit d'obscurité correspond au signal produit par la caméra lorsqu'elle n'est exposée à aucune lumière. Pour tenir compte de ce bruit, préalablement aux expériences, nous avons enregistré une série d'images de noir et calculé l'image moyenne de cette série. Puis avant le calcul de la fonction de corrélation nous avons soustrait à chaque image de speckle, pixel par pixel, l'image de noir moyenne. On appelle alors I_{c1} et I_{c2} les matrices de l'intensité corrigée (pixel par pixel) des métapixels des images 1 et 2. On a pour un métapixel i (m_i) : $I_{ci} = I_i(m_i) - I_{noir,moy}(m_i)$. La contribution du bruit d'obscurité pour un métapixel, notée σ_{obs}^2 , correspond à la largeur de l'histogramme de la distribution en intensité en calculant à partir d'une des images de noir et de l'image de noir moyenne :

$$I_{obs}(p) = I_{noir}(p) - I_{noir,moy}(p), \quad (\text{II.9})$$

où l'indice p signifie pixel. La largeur de l'histogramme σ_{obs}^2 est calculée pour chaque méta-pixel (indice m) comme :

$$\sigma_{obs}^2(m) = \langle I_{obs}(p)^2 \rangle_{p \in m} - \langle I_{obs}(p) \rangle_{p \in m}^2, \quad (\text{II.10})$$

La fonction de corrélation de l'équation II.5 devient alors avec les corrections :

$$g_I^{(12)} = \frac{\langle I_{c1} I_{c2} \rangle - \langle I_{c1} \rangle \langle I_{c2} \rangle}{\sqrt{\langle I_{c1}^2 \rangle - \langle I_{c1} \rangle^2 - \sigma_{obs}^2} \sqrt{\langle I_{c2}^2 \rangle - \langle I_{c2} \rangle^2 - \sigma_{obs}^2}}. \quad (\text{II.11})$$

Pour les expériences réalisées avec une résolution d'image de 7360×4912 pixels, les images de speckle ne sont pas corrigées et on utilise la fonction de corrélation II.5.

Concernant la résolution temporelle, elle est limitée par la vitesse de transfert-écriture de l'image. Pour la caméra, d'une résolution de 2352×1728 pixels, la vitesse est de 4 images/s, mais nous choisissons une vitesse d'acquisition de 1 image/s. Pour la plupart de nos expériences, la vitesse de chargement est $1 \mu\text{m/s}$. Dans ce cas, l'incrément de déformation axiale entre deux images est $\delta\varepsilon = \frac{10^{-6}}{85 \cdot 10^{-3}} \approx 10^{-5}$. C'est l'incrément de déformation minimal sur lequel on peut calculer la fonction de

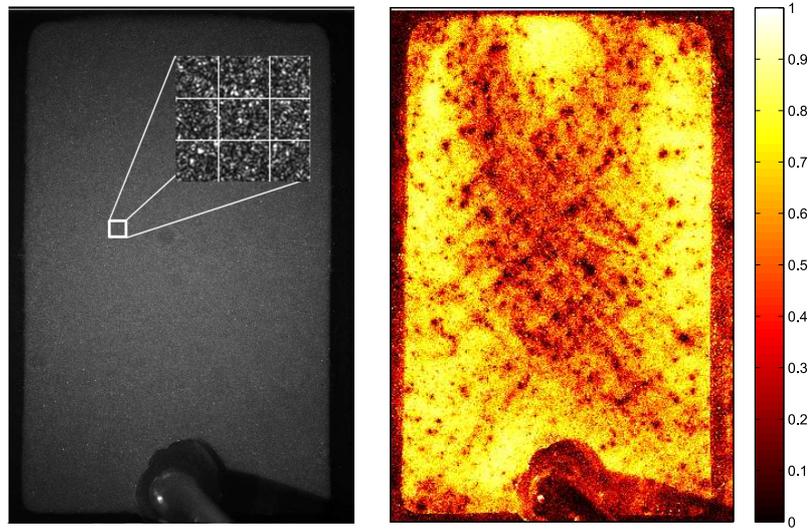


FIGURE II.18 – À gauche : image de speckle avec zoom sur une zone de 3×3 méta-pixels. À droite : carte de corrélation pour un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon = 3 \cdot 10^{-5}$ et l'échelle de couleur de la fonction de corrélation.

corrélation. Pour l'appareil photo (résolution de 7360×4912 pixels), le temps de transfert d'une image vers l'ordinateur est de 3 s. Si nous réalisons une acquisition d'image toutes les 3 s et que la vitesse de chargement est $1 \mu\text{m/s}$, l'incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon$ entre deux images est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-5}$.

Une image à la résolution de 7360×4912 pixels occupe environ 70 Mo de mémoire. Une expérience peut nécessiter l'enregistrement de 4000 images, soit un espace d'environ 300 Go de mémoire (ceci entraîne des difficultés de stockage et nécessite un *turn-over* important des disques durs).

II.3 Suivi de particules

II.3.1 Introduction

En complément de la diffusion multiple de la lumière, nous avons également effectué des expériences avec un dispositif de suivi des particules à la paroi. Cette méthode de mesure optique directe permet de repérer les billes de verre à la paroi et de suivre leur déplacement au cours du chargement. Pour ce faire, l'échantillon est éclairé en lumière blanche à travers la plaque de verre ; de cette manière, chaque bille en contact avec la paroi reflète la lumière. Les billes apparaissent alors comme

des points lumineux sur les images et sont donc facilement identifiables. Les images de l'échantillon sont enregistrées avec les dispositifs optiques déjà décrits §II.2.5.

II.3.2 Traitement d'images

Plusieurs étapes sont nécessaires pour réaliser le suivi des particules, d'abord nous traitons les images brutes pour détecter et répertorier les billes sur chaque image. Ensuite, nous relient les billes détectées sur une image aux mêmes billes de l'image suivante afin de pouvoir *suivre* la position de chaque bille au cours de la charge. De cette manière, on peut ainsi associer à chaque bille sa position sur une image et son déplacement pour atteindre sa position sur l'image suivante.

Le traitement des images brutes est représenté figure II.19, il s'effectue en réalisant les étapes suivantes :

1. On passe d'une image en couleurs à une image en noir et blanc.
2. On applique un filtre passe-bande pour éliminer les petites fréquences spatiales (par exemple les différences de contraste ou luminosité entre la gauche et la droite ou le haut et le bas de l'image) et pour éliminer les grandes fréquences spatiales (pour atténuer le bruit du signal).
3. On binarise l'image en choisissant le seuil qui permet d'observer un maximum de billes tout en évitant les défauts (visualisation d'un seul reflet pour plusieurs billes ou de plusieurs reflets sur une même bille).
4. Détection de particules, elles sont numérotées et répertoriées dans une liste avec l'aire du reflet et la position du centre de masse de chaque reflet.

À la suite de ce premier traitement, on dispose de la liste des reflets (leurs aires et leurs positions) de chaque image. En comparant les aires et positions des reflets d'une image à celles de l'image suivante, on peut relier les reflets d'une image à ceux de l'image suivante. On peut ainsi suivre le déplacement d'une bille au cours de son mouvement. Notons qu'on peut perdre des reflets d'une image sur la suivante, le taux de disparition est d'environ 5% par image. Nous avons tracé le champ de déplacement brut des billes sur la figure II.20. Le champ de déplacement correspond à un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon \approx 10^{-3}$, et il représente la moitié gauche d'un échantillon. C'est cet exemple qui est utilisé pour illustrer le traitement des données au paragraphe suivant.

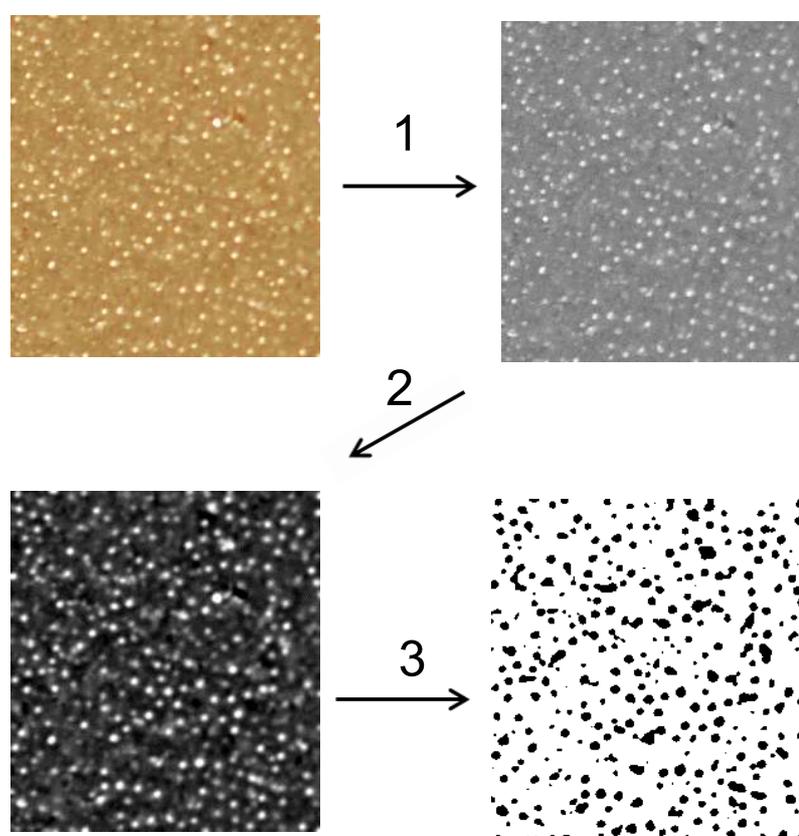


FIGURE II.19 – Traitement d’images pour détecter les billes, zoom sur une petite zone de l’image de l’échantillon. 1 : passage de la couleur au noir et blanc ; 2 : filtre passe-bande ; 3 : binarisation.

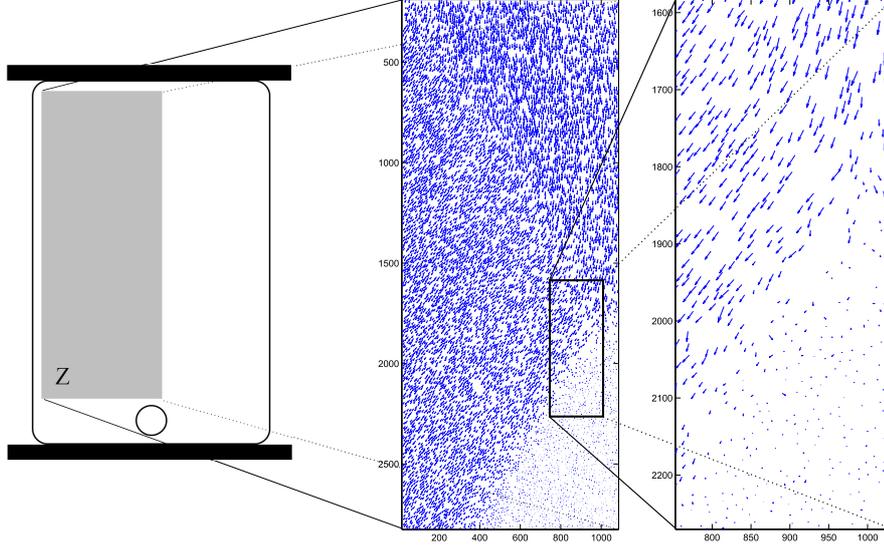


FIGURE II.20 – Champ de déplacement brut des billes correspondant à un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon \approx 10^{-3}$. Chaque bille est représentée par son vecteur déplacement. L'exemple montré représente la partie gauche de l'échantillon.

II.3.3 Traitement des données

À partir du champ de déplacement brut, on calcule le vecteur moyen du champ de déplacement sur des zones de 50×50 pixels. On obtient ainsi un champ de déplacement moyenné, voir figure II.21. À partir de ce champ moyenné, on peut alors calculer la divergence de ce champ de vecteurs. On a :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \operatorname{Tr}(\mathbf{U}) \quad (\text{II.12})$$

où \mathbf{u} est le vecteur déplacement et \mathbf{U} est le tenseur de déformation de composantes $U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$.

Cette information nous renseigne sur la variation de fraction volumique. En effet, en calculant la divergence moyenne du champ pour chaque image, et en intégrant cette moyenne au cours de la charge on obtient la déformation volumique $\varepsilon_V = \frac{V-V_0}{V_0}$ avec V le volume de l'échantillon au cours de la charge et V_0 le volume initial de l'échantillon. On parle de déformation volumique même si le champ de vecteur est en deux dimensions.

Dans les dispositifs de tests biaxiaux de mécanique des sols, la pression de confinement est le plus souvent exercée par un liquide dans lequel l'échantillon est plongé. Une simple mesure de la variation de volume de liquide dans la chambre de pression renseigne sur la variation volumique de l'échantillon. Avec notre dispositif, il est difficile de mesurer le volume total de l'échantillon, tandis que la divergence du champ de déplacement des billes à la paroi est simple à mettre en oeuvre, elle se révèle être une bonne alternative pour quantifier la variation volumique de l'échantillon.

On peut également calculer la norme du tenseur de déformation, que l'on appellera déformation scalaire dans la suite.

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} \quad (\text{II.13})$$

Pour le champ de déplacement moyenné figure II.21, la divergence et la norme $|\mathbf{U}|$ du tenseur de déformation correspondant sont représentées figure II.22 pour un incrément de déformation axiale de $\delta\varepsilon \approx 10^{-3}$. Sur la carte de déformation scalaire, on observe nettement deux bandes de cisaillement. Ces bandes sont aussi observées par DWS, comme nous le verrons dans la suite. La carte de la divergence du champ de déplacement laisse apparaître des variations de volume (dilatation et compression) un peu plus importante au niveau des bandes.

II.4 Échantillon : matériel et préparation

Pour la quasi-totalité des expériences réalisées, nous avons utilisé comme milieu granulaire, des billes de verre (Silibeads type S, Sigmund Linder) principalement composées de silice. Les tailles de billes étaient selon les expériences de 40 – 70 μm , 70 – 110 μm ou 200 – 300 μm . Une expérience a également été réalisée en utilisant du sable de granulométrie 300 – 400 μm .

Le milieu granulaire est situé dans une membrane en latex fabriquée sur un moule en plâtre. Le moule est de forme circulaire de diamètre 150 mm avec un parallélépipède dessus en son centre d'une taille de 85 × 55 × 25 mm³. Pour réaliser la membrane, on applique au pinceau plusieurs couches de latex liquide (figure II.23 a) avec un temps de séchage entre chaque couche. Entre 6 et 10 couches sont nécessaires pour obtenir une membrane d'une épaisseur convenable.

Pour placer le milieu granulaire dans la membrane, on dispose la membrane ho-

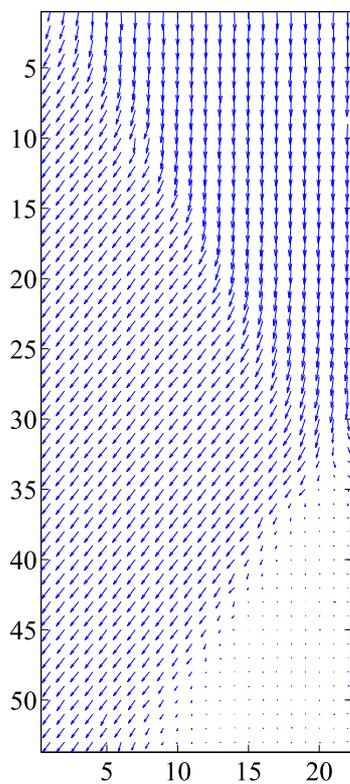


FIGURE II.21 – Champ de déplacement des billes de la figure II.20 moyenné spatialement sur des zones de 50×50 pixels.

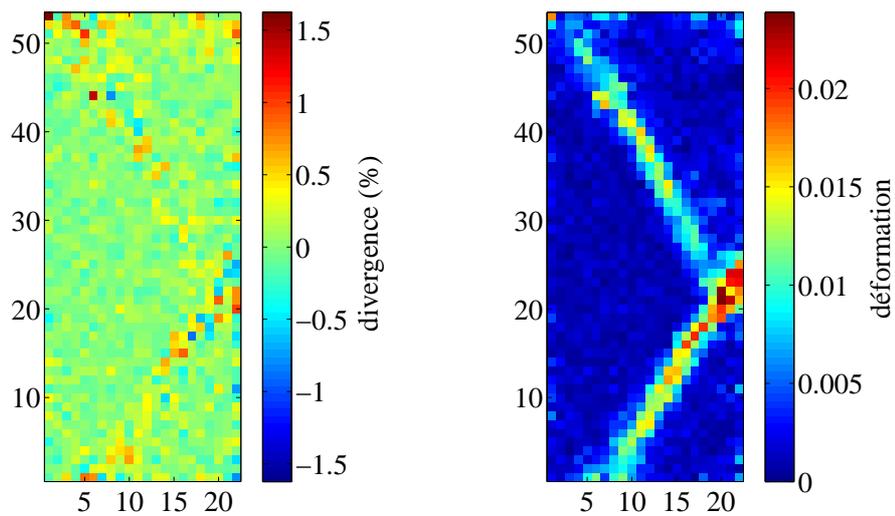


FIGURE II.22 – Divergence et déformation scalaire du champ de vecteur moyenné de la figure II.21.

horizontalement dans un contre-moule de manière à ce qu'elle forme une poche dans laquelle on y dépose les grains (figure II.23 b). Plusieurs modes de préparation sont possibles selon la compacité souhaitée, en effet, d'autres études ont montré que les compacités sont affectées par le mode de préparation de l'échantillon [AFP11]. Les compacités ne sont pas mesurées cependant nous avons varié les modes de préparation :

- Pour une compaction faible, on place une grille dans le fond de la membrane, on verse les grains, on relève la grille lentement et on aplatit la surface à l'aide d'un pinceau.
- Pour une compaction moyenne, on verse les grains et on secoue légèrement à la main le contre-moule afin d'aplanir la surface de l'échantillon.
- Enfin pour une compaction importante, on peut verser les grains par couches successives et taper sur la paroi du contre-moule après chaque couche versée.

Pour positionner l'échantillon sur le dispositif d'essai, on vient poser une plaque de verre sur l'échantillon (figure II.23 c), cette plaque de verre est fixée sur une armature circulaire en métal, formant ainsi un hublot. Elle est percée pour permettre la mise en dépression de l'échantillon, et un fritté de porosité 3 (diamètre équivalent du pore le plus gros : 17 à 40 μm) est collé dans le trou. Un tuyau souple est également fixé au trou. La mise en dépression s'effectue avec une pompe à vide (KNF Lab, Laboport) située à l'extrémité du tuyau tandis qu'un capteur de pression numérique (DP2-40E, Panasonic) relié à une électrovanne *tout ou rien* permet de réguler la pression de confinement. Le fonctionnement du capteur de pression et de l'électrovanne a été détaillé précédemment §II.1.4 (voir figure II.8). Pour permettre l'étanchéité entre la membrane et la plaque de verre, on badigeonne la partie de la membrane en contact avec la plaque de verre avec de la graisse à vide (silicone), en évitant que la graisse ne soit en contact avec les grains. Lors du contact entre la plaque et la membrane cette dernière est aspirée contre la plaque et l'échantillon est mis sous un vide partiel, il se rigidifie alors comme un "paquet de café" mis sous vide. À ce moment, on peut positionner l'ensemble *hublot + échantillon* dans le dispositif de chargement (figure II.23 d).

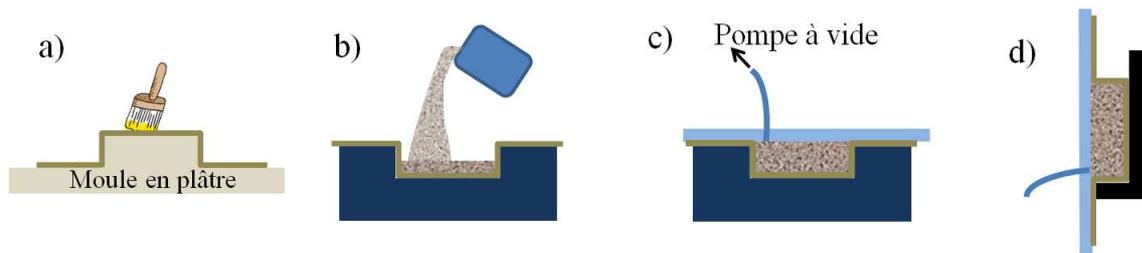


FIGURE II.23 – Schéma des étapes de préparation du milieu granulaire, a) application au pinceau de couches de latex liquide sur un moule en plâtre, b) versement des grains dans la membrane positionnée dans un contre-moule, c) mise en dépression de l'échantillon par pose de la plaque de verre reliée à la pompe à vide, d) positionnement de l'ensemble hublot+échantillon sur le dispositif de test biaxial.

Chapitre III

Résumé des résultats expérimentaux

Plus d'une trentaine d'expériences ont été réalisées durant la thèse. Dans ce chapitre, nous décrivons les résultats observés tandis que l'interprétation physique des observations aura lieu au chapitre V. La première partie présente les résultats classiquement observés en s'appuyant sur deux expériences typiques que nous appellerons A et B dans la suite, pour chacune d'elles, nous présenterons la courbe de charge et les cartes de corrélations. La seconde partie traite de résultats particuliers obtenus soit dans les mêmes conditions que les expériences typiques, soit en faisant varier un ou plusieurs paramètres.

III.1 Expériences typiques

III.1.1 Courbes de charge

Comme indiqué §II.1.5, pour chaque expérience nous disposons de la tension U délivrée par le capteur de force à la fréquence de 100 signaux par seconde et de la position y de la platine de translation à la fréquence de 1 position par seconde. Nous représentons dans la suite les résultats expérimentaux en traçant la contrainte $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale $\varepsilon = \delta/L$ où L est la hauteur initiale de l'échantillon et δ est la distance entre la position y de la platine et sa position initiale y_0 (voir figure III.1). On réalise d'abord une interpolation linéaire des positions de la platine pour faire correspondre une position de la platine à chaque valeur du signal de force. La tension délivrée par le capteur de force est multipliée par le rapport R (Newton/Volt) obtenu par calibration et divisée par la section initiale de l'échantillon S , ce qui permet d'obtenir donnant la contrainte déviatorique (nom

usuel en mécanique des sols) $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = U \times \frac{R}{S}$. Ainsi, pour toutes les expériences nous avons tracé la courbe de charge : contrainte déviatorique $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale ε .

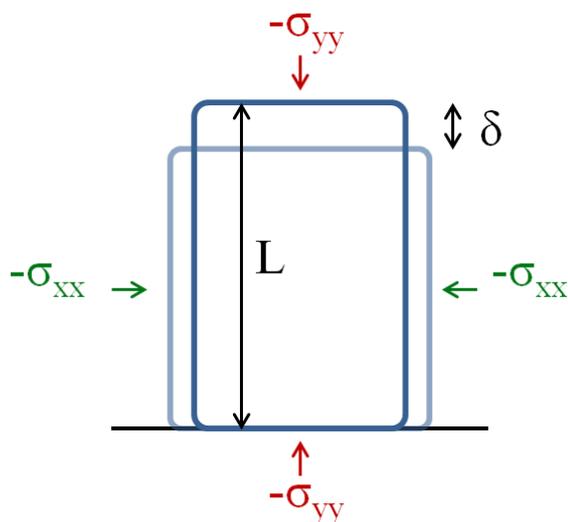


FIGURE III.1 – Schéma des contraintes

Les paramètres de l'expérience A sont les suivants :

- taille de billes : 200-300 μm ;
- état : grains propres (première utilisation depuis la sortie du sac) ;
- compacité : moyenne ;
- pression de confinement : $-\sigma_{xx} = 40\text{kPa}$;
- vitesse de chargement : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution du dispositif optique : 2352×1728 .

Les paramètres de l'expérience B sont les suivants :

- taille de billes : 70-110 μm ;
- état : grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- pression de confinement : $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de chargement : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution du dispositif optique : 7360×4912 .

Nous présentons ici les courbes de contraintes en fonction de la déformation axiale des expériences A (figure III.2) et B (figure III.3). La courbe de charge de l'expérience A présente un comportement quasi-linéaire jusqu'à environ $\varepsilon = 6\%$. Ensuite la pente

de la courbe diminue, la courbe présente un maximum vers $\varepsilon = 8,3\%$.

La courbe de charge de l'expérience B est différente, elle présente une baisse de pente plus tôt dans la charge, jusqu'à atteindre un palier vers $\varepsilon = 4,5\%$. Puis, la pente augmente à nouveau et est quasi-constante le reste de la charge.

Pour toutes les expériences, les courbes de la contrainte déviatorique en fonction de la déformation montrent, après la croissance initiale, soit un maximum de contrainte, soit un palier de contrainte. Ce maximum ou ce palier correspond, en termes de déformation, à l'apparition de la bande ou des bandes de cisaillement finales (permanentes) correspondant à la rupture de l'échantillon.

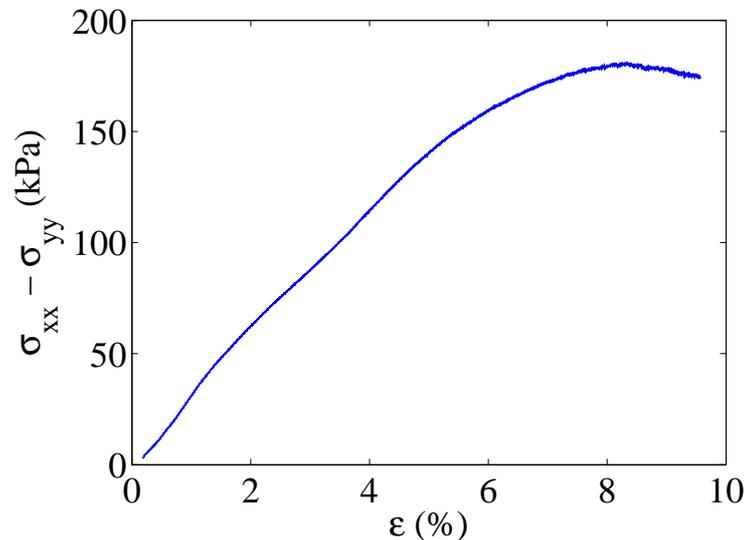


FIGURE III.2 – Courbe de charge de l'expérience A, contrainte déviatorique $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ exercée sur le matériau en fonction de sa déformation axiale ε . Pression de confinement : $-\sigma_{xx} = 40\text{kPa}$.

III.1.2 Cartes de corrélations

Pour chaque expérience nous réalisons des cartes de corrélations comme expliqué §II.2.6. Nous présentons ici des cartes de corrélations des expériences A (figure III.4) et B (figure III.5).

Lors des deux expériences, on observe plusieurs types de comportement sur les cartes de corrélations. La déformation y est toujours hétérogène et elle se traduit au début de la charge par des zones localisées d'intense déformations qui apparaissent sous la forme de points intermittents que nous appelleront points chauds dans la

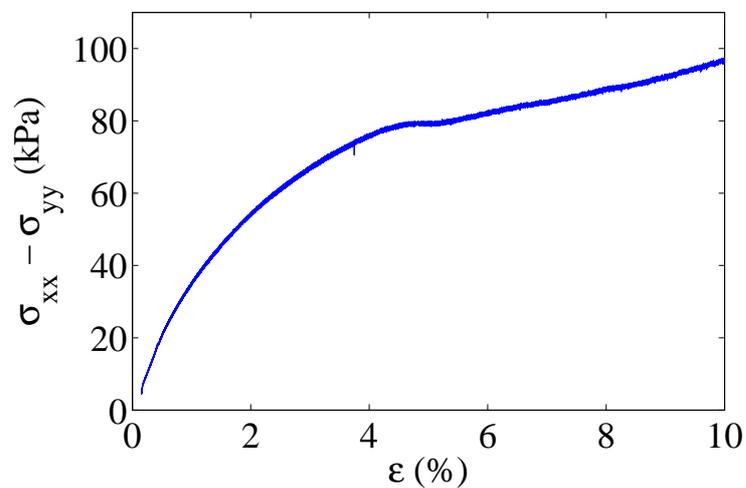


FIGURE III.3 – Courbe de charge de l'expérience B, contrainte déviatorique $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ exercée sur le matériau en fonction de sa déformation axiale ε . Pression de confinement : $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$.

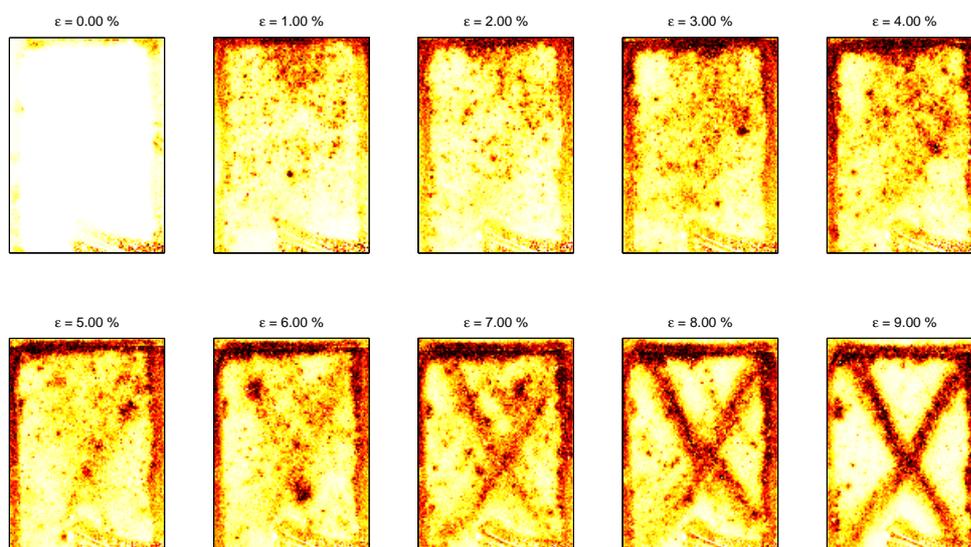


FIGURE III.4 – Cartes de corrélations de l'expérience A correspondant à un incrément de déformation $\Delta\varepsilon = 1,07.10^{-5}$.

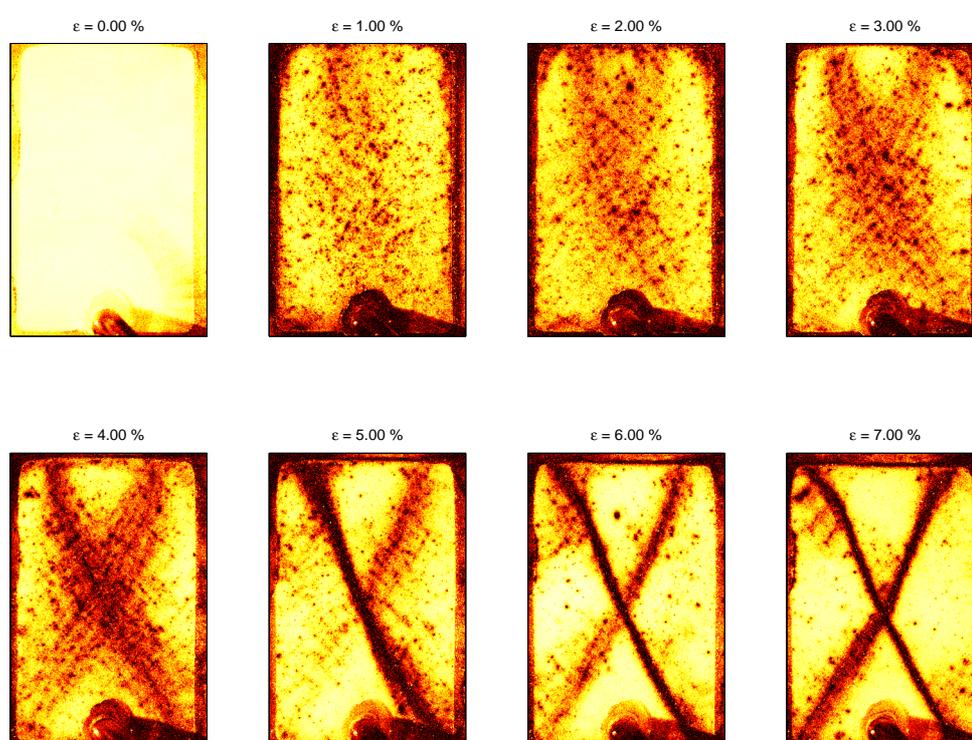


FIGURE III.5 – Cartes de corrélations de l'expérience B correspondant à un incrément de déformation $\Delta\epsilon = 3,2.10^{-5}$.

suite. Ensuite, ces point chauds tendent à s'aligner formant de petites bandes intermittentes, puis ces petites bandes s'organisent et forment un réseau intermittent et enfin on observe une ou deux grandes bandes permanentes.

III.1.3 Discussion

Les deux expériences A et B décrites dans ce paragraphe sont typiques des comportements observés. Aussi bien dans les courbes de charges que dans les cartes de corrélations, elles reflètent la majeure partie des expériences réalisées durant la thèse. Dans la suite, on présente des expériences dont le comportement diffère du comportement typique des expériences A et B.

III.2 Variation de paramètres et observations particulières

Toutes les expériences présentées ici le seront sous la forme d'un tableau avec : à gauche les paramètres, au centre la courbe de charge et à droite une carte de corrélations de la fin du chargement (après le maximum ou le palier de la courbe de charge). Les paramètres indiquent le numéro de l'expérience (correspondant à sa date de réalisation), la taille des billes, l'état des billes, la compacité, la pression de confinement, la vitesse de charge et la résolution du dispositif optique utilisé.

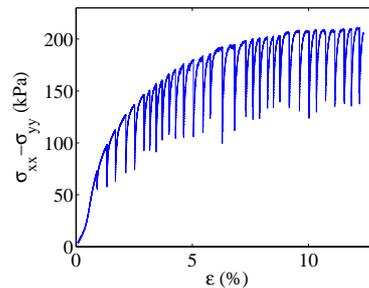
III.2.1 Cohésion

L'effet des forces de cohésion entre les grains a été testé dans ces expériences. Une première série d'expériences (150313 et 190313) a été menée avec des billes de verre auxquelles nous avons ajouté de l'huile de silicone VR500 (0,5 mL pour un échantillon de 117 mL dont ≈ 70 mL de billes de verre, soit environ 9 millions de billes de $200 - 300 \mu\text{m}$, ce qui correspond à une épaisseur moyenne d'huile de silicone de 200 nm sur chaque bille). L'effet de l'ajout de l'huile se traduit par une augmentation notable de l'angle d'avalanche des billes que nous avons mesuré et qui passe de 25° pour des billes sans huile à $40 - 45^\circ$ avec de l'huile.

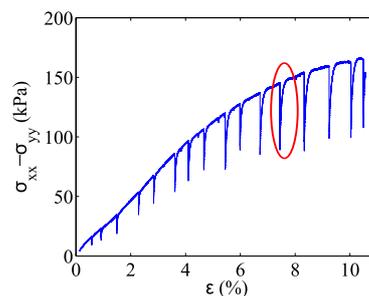
Les courbes de charge en fonction de la déformation montrent la même tendance que les expériences A et B, à une exception notable : nous observons la présence de chutes de contraintes brutales le long de la courbe de charge. La contrainte retrouve

sa valeur d'avant la chute après une déformation axiale de l'échantillon de l'ordre de 0,2%, voir figure III.6. Les chutes de contrainte sont plutôt faibles au début de la charge et augmentent au fur et à mesure de la charge. Les déformations observées sur les cartes de corrélations sont semblables à celles des expériences A et B excepté lors des chutes de contrainte. La carte de corrélation correspondant à la chute de contrainte est totalement décorrélée, ce qui correspond à une déformation importante ayant lieu dans tout l'échantillon. La carte de corrélation suivante est, au contraire, presque totalement décorrélée, ce qui correspond à peu de déformation dans l'échantillon. Les cartes de corrélations suivantes (durant le "temps" de relaxation) sont de plus en plus corrélées jusqu'au niveau de corrélation d'avant la contrainte.

- 150313
- billes : 200-300 μm ;
- grains avec huile de silicone ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



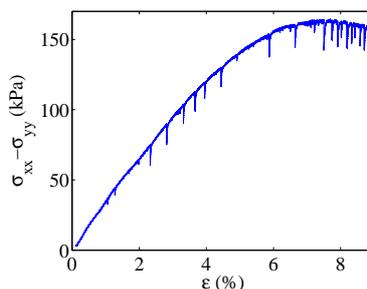
- 190313
- billes : 200-300 μm ;
- grains avec huile de silicone ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



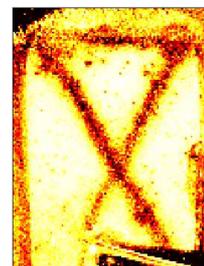
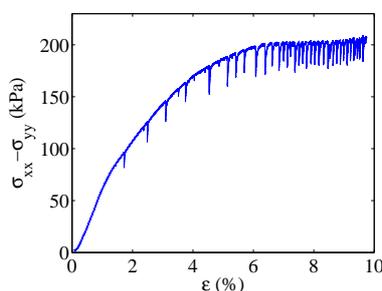
Une seconde série d'expériences (050312 et 090312) a été menée avec des billes qui ont été préalablement contaminées par de la graisse à vide ayant servi à effectuer l'étanchéité entre la membrane en latex et la plaque de verre. La courbe de charge et les déformations observées sont tout à fait similaires aux expériences réalisées avec de l'huile de silicone.

Ces expériences montrent la nécessité d'utiliser des billes propres si on veut éviter ces chutes de contrainte. Le tableau suivant présente quatre expériences (les deux premières avec huile de silicone et les deux suivantes avec l'échantillon pollué par la graisse à vide). Sur la courbe de charge de l'expérience 190313, une chute de contrainte est cerclée de rouge correspondant au zoom de la figure III.6.

- 050312
- billes : 200-300 μm ;
- état : grains "pollués" ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



- 090312
- billes : 200-300 μm ;
- état : grains "pollués" ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 45\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



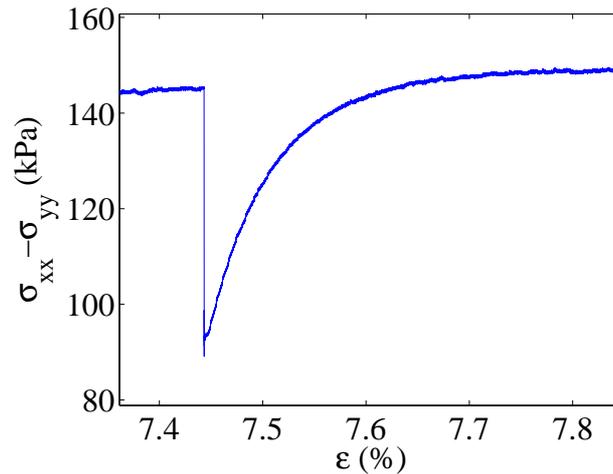


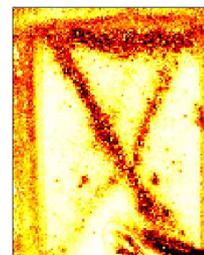
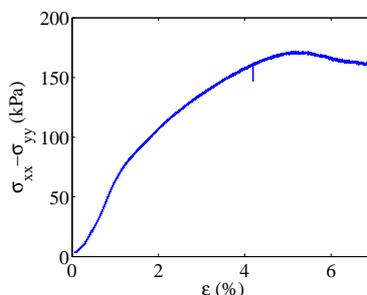
FIGURE III.6 – Exemple d'une chute de contrainte de l'expérience 190313.

III.2.2 Compacité

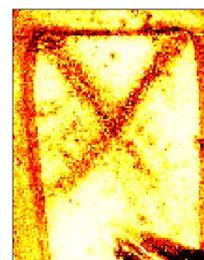
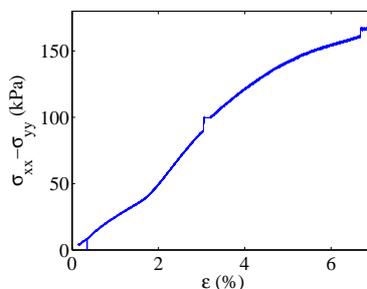
Le dispositif de préparation de l'échantillon dans la membrane en latex ne permet pas facilement de contrôler et de mesurer la compacité de l'échantillon de milieu granulaire. Nous avons cependant effectué des expériences visant à tester l'effet de variations de compacité. Nous avons effectué pour cela plusieurs types de compaction :

- pour une compacité faible : on place une grille (avec des mailles de 2,5 mm soit 10 tailles de bille) au fond de la membrane, on verse les grains dans la membrane lorsqu'elle est placée dans le contre-moule puis on lève lentement la grille ;
- pour une compacité moyenne : on verse lentement les grains et on applique 3 à 4 secousses pour aplanir la surface ;
- pour une compacité importante : on verse les grains par couches successives et à chaque couche, on tape plusieurs fois sur le contre-moule.

- 131212-1
- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : **importante** ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



- 131212-2
- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : **faible** ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



Lorsque la compacité de l'échantillon est importante, on observe une pente de la courbe de charge plus importante au début de la charge (de 0 à 2%) que lors de la suite du chargement. En revanche, lorsque l'échantillon est peu compacté (utilisation de la grille), la pente au début de la charge est plus faible que dans la suite du chargement.

On observe également que pour un matériau compacté la courbe de charge présente un maximum suivi d'une baisse de contrainte. Pour un matériau peu compacté on observera le plus souvent une courbe de charge sans pic avec un palier non suivi d'une baisse de contrainte. Cette observation est en accord avec la littérature notamment pour des expériences en cellules de cisaillement [AFP11].

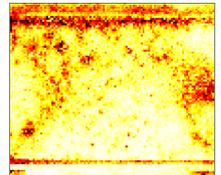
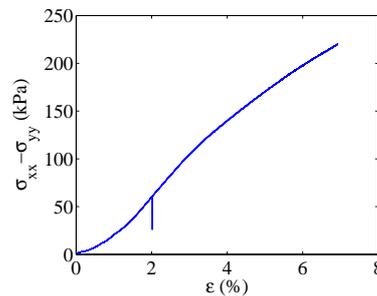
Sur les deux cartes de corrélation finales de ces tests, on observe une inclinaison des bandes de cisaillement très différente. L'échantillon de compacité importante présente des bandes d'un angle d'inclinaison important avec l'horizontale, tandis que les bandes de l'échantillon peu compacté sont moins inclinées par rapport à l'horizontale. Ceci est en accord avec la théorie de Mohr-Coulomb, l'inclinaison de la bande dépend du coefficient de friction qui croît avec la compacité du matériau.

III.2.3 Rapport d'aspect de l'échantillon

Des moules en plâtre ont été réalisés afin de concevoir des membranes en latex avec des rapports d'aspect différents des autres expériences. Les expériences n'ont pu être réalisées faute de temps. Cependant des expériences ont été effectuées avec des échantillons de mêmes dimensions que les autres expériences mais en plaçant l'échantillon horizontalement ; le rapport d'aspect est alors inversé. Nous n'avons pas pu atteindre le maximum de la charge car il est supérieur à la charge maximum supportable par le moteur. Cependant, nous pouvons observer, notamment sur l'expérience 210313, l'apparition de bandes cisaillement qui semblent être réfléchies sur la paroi supérieure de l'échantillon. Ces bandes réfléchies sur la paroi sont en accord avec la littérature [BR04], voir figure III.7(c).

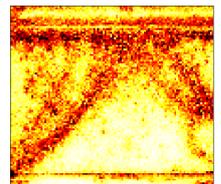
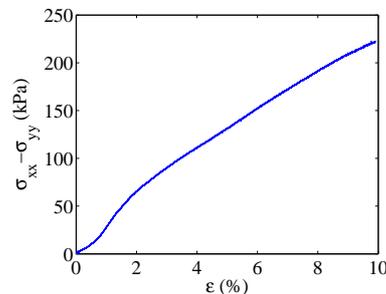
– 140313 échantillon horizontal

- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



– 210313 échantillon horizontal

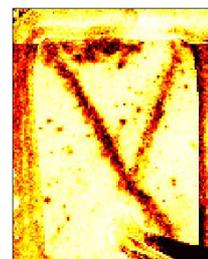
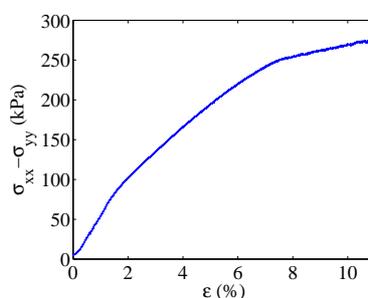
- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 14\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



III.2.4 Grains de sable

Nous avons réalisé une expérience en utilisant des grains de sable et non des billes de verre. En effet, les grains de sable diffusent également la lumière et permettent ainsi l'utilisation de la diffusion multiple de la lumière présentée §II.2. Le comportement du matériau composé de grains de sable est globalement similaire à celui composé de billes de verre, concernant la courbe de charge et les cartes de corrélations.

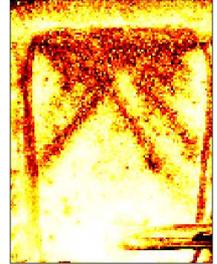
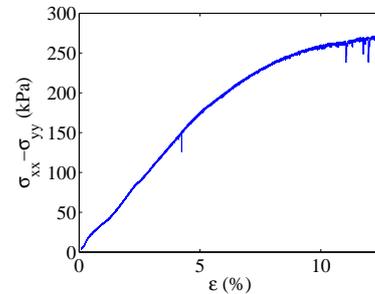
- 120313 grains de sable
- grains : 300-400 μm ;
- grains propres ;
- compacité : importante ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



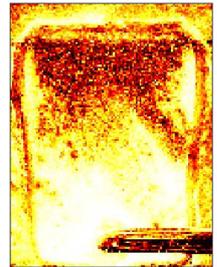
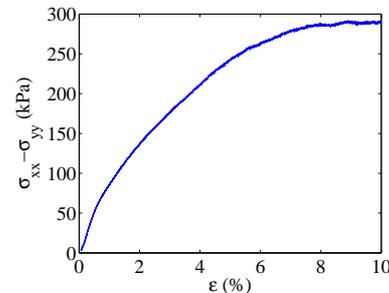
III.2.5 Effet tonneau

Sur plusieurs de nos expériences, nous avons observé les parois latérales de l'échantillon se bomber, se déformer. Ces déformations peuvent avoir lieu sur tout l'échantillon et lui donner alors la forme d'un tonneau. Elles peuvent aussi apparaître seulement sur le haut de l'échantillon, dans ce cas les déformations sont concentrées dans cette partie de l'échantillon. Pour ces expériences, les courbes contrainte - déformation sont similaires aux expériences sans effet tonneau.

- 061112 **effet tonneau**
- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 35\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



- 280812 **effet tonneau**
- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 50\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



III.2.6 Nombre de bandes finales

Sur toutes nos expériences, on observe parfois une bande finale, parfois deux bandes finales symétriques mais également parfois plus de deux bandes. D'après [BR04], basé sur les expériences de Desrues (1998), lorsque la translation horizontale (en x) de la platine de translation est autorisée, cela favorise la formation d'une seule bande de cisaillement (voire parfois deux bandes parallèles). En revanche, si la platine ne translate pas horizontalement, les plaques supérieure et inférieure restent coaxiales et on devrait observer plutôt deux bandes symétriques qui se croisent ayant ainsi la forme de la lettre X, voir figure III.7. Lors de nos expériences, de la graisse à parfois été placée entre la membrane et la platine de translation pour lubrifier le contact et ainsi favoriser le glissement horizontal de la membrane. Cependant il est difficile d'établir un lien précis entre la présence de graisse et l'apparition d'une seule bande de cisaillement finale. Par ailleurs, l'observation de plus de deux bandes semble due à l'effet tonneau de l'échantillon et l'écoulement particulier qui en découle.

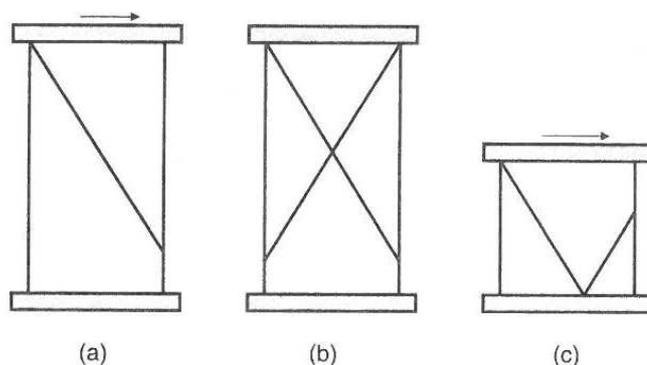
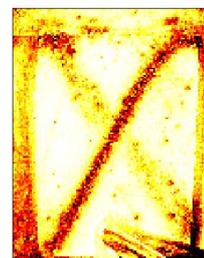
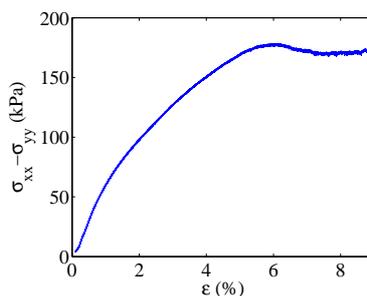
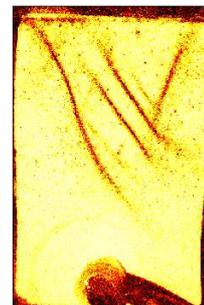
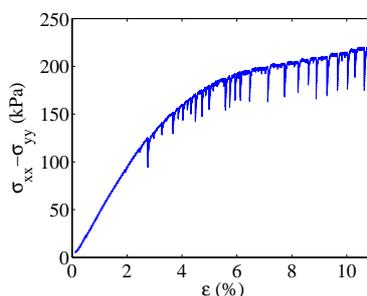


FIGURE III.7 – Schéma tiré de [BR04], (a) le déplacement horizontal de la platine est autorisé, on observe une seule bande de cisaillement ; (b) le déplacement horizontal de la platine n'est pas autorisé, on observe deux bandes de cisaillement symétriques ; (c) le rapport des dimensions est faible, ici hauteur = largeur, on observe deux bandes réfléchies sur la plaque inférieure.

- 181212 **une bande**
- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : importante ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352×1728 .



- 060913 **plusieurs bandes**
- billes : 40-70 μm ;
- grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 7360×4912 .



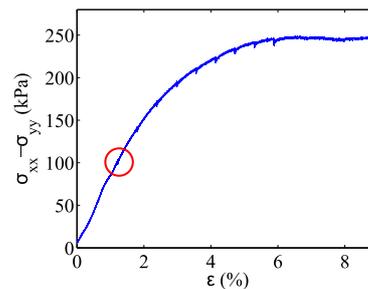
On note que la courbe de charge de l'expérience 060913 est composée également de chutes de pression. Ceci est probablement dû à la petite taille des billes utilisées (40 – 70 μm), les effets cohésifs sont, ainsi, plus importants.

III.2.7 Déformation quasi-statique - Fluage du matériau

Une expérience a été effectuée en réalisant des pauses au cours de la compression. Pour ceci, le déplacement de la platine marque une pause d'une minute toutes les dix minutes. On montre, figure III.8, la contrainte déviatorique en fonction du temps, on observe une relaxation de la contrainte sous la forme d'une décroissance exponentielle. Puis, après la pause, la contrainte croît rapidement à un niveau supérieur à celui d'avant la chute, ensuite la contrainte diminue rapidement pour retrouver le niveau de contrainte d'avant la pause et elle reprend la croissance d'avant la pause. La tendance générale de la courbe de charge et les déformations observées sur les cartes de corrélations ne sont cependant pas affectées par les pauses.

– 051212 **expérience avec pauses**

- billes : 200-300 μm ;
- grains propres ;
- compacité : moyenne ;
- $-\sigma_{xx} = 40\text{kPa}$;
- vitesse de charge : 1 $\mu\text{m/s}$;
- résolution : 2352 \times 1728.



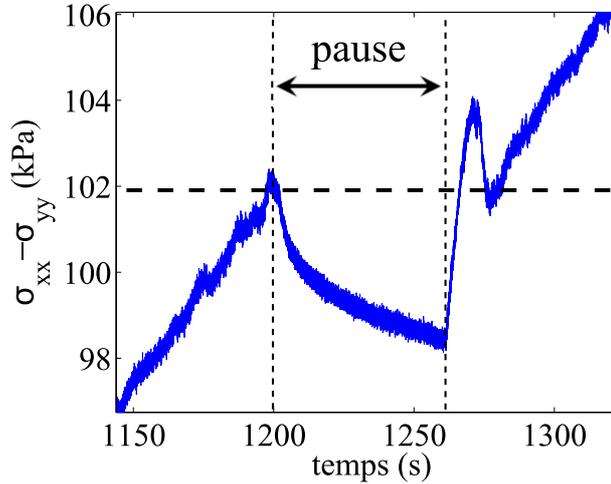


FIGURE III.8 – Zoom sur la contrainte en fonction du temps lors d’une pause du chargement (correspondant au cercle rouge sur la courbe de charge). On observe la relaxation de la contrainte pendant la pause, puis croissance et décroissance de la contrainte jusqu’au niveau d’avant la pause (≈ 102 kPa).

III.2.8 Conclusion

Les observations brutes des expériences telles qu’elles sont décrites dans ce chapitre, c’est-à-dire l’aspect de la courbe de charge et l’observation des bandes de cisaillement finales, sont des résultats typiques de ce qui est connu en mécanique des sols. En effet, par exemple dans [DV04], Desrues et Viggiani présentent les résultats de dizaines de test biaxiaux réalisés sur du sable ; tous ont en commun l’allure de la courbe de la contrainte déviatorique en fonction de la déformation axiale (croissante jusqu’à un palier ou un maximum) ainsi que l’apparition de bandes de cisaillement permanentes à l’approche du palier ou du maximum de la courbe de charge.

Nous observons que nos expériences réalisées sur des billes de verre ont le même comportement caractéristique que les expériences réalisées sur du sable (§III.2.4 et [DV04]). On peut considérer que les billes de verre constituent alors un bon système modèle pour l’observation de l’apparition de bandes de cisaillement dans un milieu granulaire.

On observe nettement l’influence de la cohésion sur la courbe de charge avec des chutes de contraintes, il convient d’être vigilant sur la propreté des grains et

l'humidité de l'air pour éviter ces chutes brutales de contrainte. La compaction du matériau granulaire a aussi une influence sur la courbe de charge, en effet, un matériau fortement compacté lui confère une raideur plus importante. Cependant, la compaction est peu maîtrisée puisque la pression de confinement et l'installation de l'échantillon granulaire dans le dispositif peuvent influencer sur sa compaction. L'effet tonneau discuté §III.2.5 est peut-être dû à une compaction hétérogène du matériau ou à une pression de confinement trop faible ou encore à une installation de l'échantillon légèrement inclinée par rapport à la verticale, il convient d'être vigilant également sur ces points.

Les résultats sur les mesures mécaniques (contrainte déviatorique en fonction de la déformation) ainsi que la visualisation de bandes permanentes au seuil de contraintes sont typiques des résultats de la littérature. La pertinence de ces résultats nous conforte dans la validation ou du moins la confiance accordée à cette technique de visualisation indirecte de la déformation. Un des points forts de notre dispositif de mesure de la déformation est l'accès à une résolution fine en terme de déformation axiale (incrément $\delta\varepsilon$ de l'ordre de 10^{-5}). Cette résolution fine nous permet d'observer une dynamique complexe avec des déformations hétérogènes intermittentes qui ont lieu avant l'apparition des bandes de cisaillement. C'est dans le but de caractériser cette dynamique complexe que les outils d'analyse d'image présentés au chapitre suivant ont été développés.

Chapitre IV

Outils d'analyse d'images

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons observé une dynamique complexe dans le matériau sous chargement. En effet, on observe des points chauds intermittents au début de la charge, puis des points qui tendent à s'aligner pour former des petites bandes intermittentes, ces petites bandes s'organisent en un réseau de bandes intermittentes avec des directions privilégiées. En fin de chargement, le réseau de bandes évolue jusqu'à l'apparition de la rupture finale (une ou deux grandes bandes de cisaillement permanentes). Ces différents modes de déformation sont illustrés figure IV.1.

On souhaite caractériser cette dynamique au sein du matériau en mettant en évidence :

- les tailles caractéristiques des structures (points chauds, réseaux, bandes de cisaillement) ;
- les directions privilégiées ;
- les "durées" caractéristiques (incrément de chargement $\delta\varepsilon$) des structures.

La mise en évidence de ces informations nécessite la création et l'utilisation d'outils d'analyse d'images. Les différents outils sont répertoriés et leurs modes opératoires sont détaillés dans ce chapitre. On présente d'abord les différents types de corrélations : corrélations spatiales (corrélations de paires), et corrélations spatio-temporelles. Ensuite, on aborde les outils d'analyse directionnelle : la transformée de Hough et les histogrammes de projection et enfin, les outils d'analyse multi-échelles

sont présentés.

Les représentations graphiques des résultats obtenus à partir de ces outils imposent des choix de paramètres et variables. En effet, on pourra regarder la dynamique de certaines quantités (moyennées ou non, par exemple g_I ou l'anisotropie de la déformation) en fonction de la charge. Mais la prise en compte de l'hétérogénéité de la déformation nous conduira à introduire des paramètres tels que la taille de la boîte d'analyse, ou encore des transformations des images successives.

Dans ce chapitre, seuls les outils d'analyse d'images sont détaillés, illustrés par quelques exemples et résultats ; les résultats principaux et leur interprétation physique seront discutés au chapitre suivant.

IV.1 Corrélations

Le terme de corrélation a été utilisé jusqu'à maintenant pour parler de la fonction de corrélation g_I , calculée sur les figures de speckle et définie au §II.2. Ainsi, la carte des g_I est appelée carte de corrélations. Dans ce chapitre *Outils d'analyse d'images*, nous utilisons à nouveau le terme de corrélation mais ici nous réalisons des corrélations spatiales et spatio-temporelles sur les cartes de g_I .

IV.1.1 Corrélations spatiales

L'objectif des corrélations spatiales est de déterminer les directions privilégiées et l'étendue spatiale des déformations du matériau. On calcule les corrélations spatiales de différentes manières, nous présentons ici trois fonctions de corrélations. Les résultats de ces fonctions seront représentés selon différents paramètres.

Les valeurs de g_I des cartes de corrélations sont faibles (proches de zéro) quand la déformation est importante. Par conséquent, pour traiter l'information de la déformation, on définit l'activité de chaque pixel de la carte de corrélation comme

$$a(\mathbf{r}) = 1 - g_I(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.1})$$

où \mathbf{r} est le vecteur position de chaque pixel. Les corrélations de paires consistent à calculer une fonction de corrélation entre deux points. Pour les trois fonctions de corrélations spatiales, on délimite une zone d'intérêt Z (voir figure IV.2) sur la carte de corrélations (carte des g_I) sur laquelle seront calculées les corrélations spatiales.

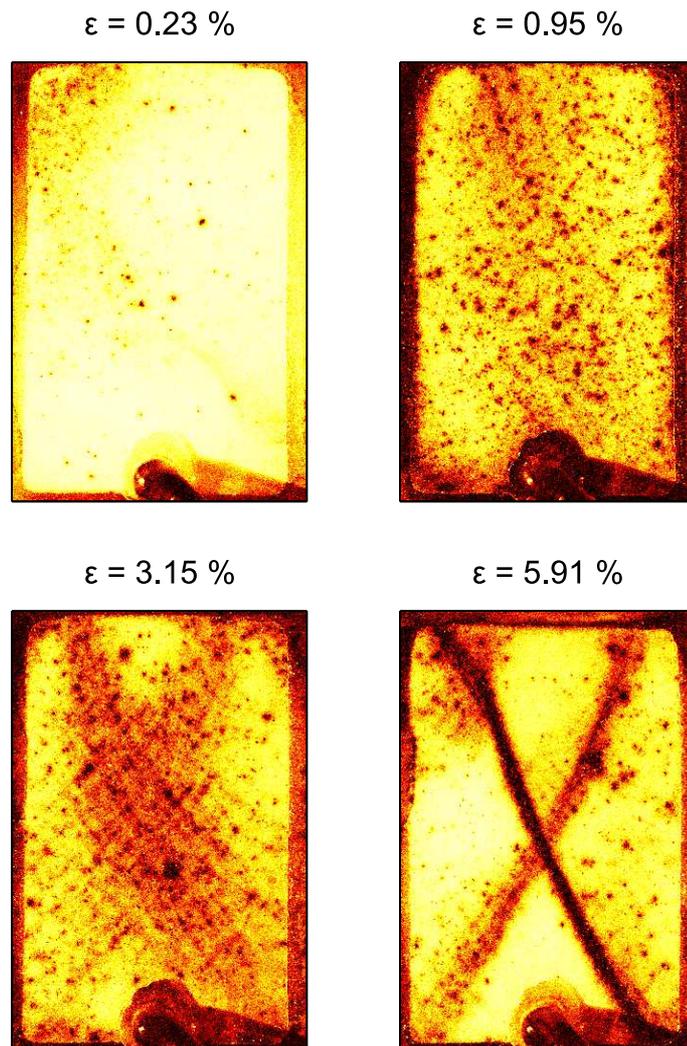


FIGURE IV.1 – Exemples de cartes sur lesquelles on voit des points chauds, des points alignés, un réseau de petites bandes et des grandes bandes de cisaillement

Cette zone d'intérêt permet d'exclure les bords de l'échantillon et le tuyau qui mène à la pompe à vide afin que ceux-ci n'influent pas dans le calcul de la fonction de corrélations spatiales et sur les résultats des directions privilégiées observées.

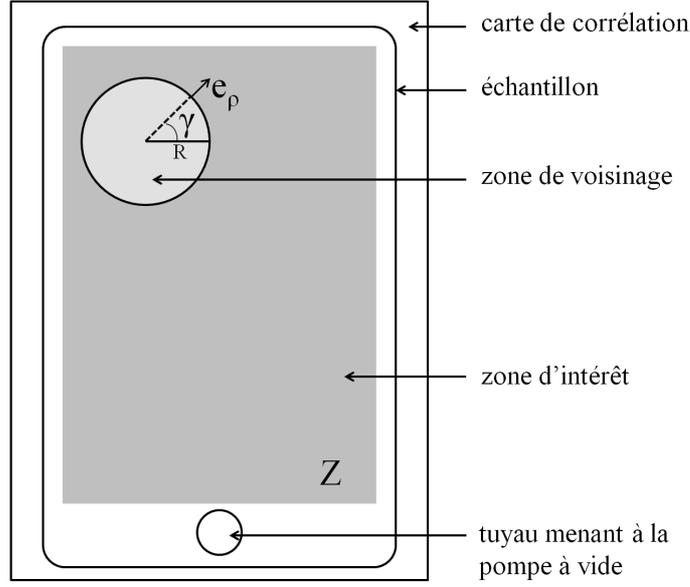


FIGURE IV.2 – Schéma d'une carte de corrélation avec la zone d'intérêt Z et une zone de voisinage.

Pour réaliser notre analyse de corrélation de paire, les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont définies comme

$$\psi_1(\mathbf{r}, \rho, \gamma) = \frac{[g_I(\mathbf{r}) - g_I(\mathbf{r} + \rho\mathbf{e}_\rho)]^2}{\bar{g}_I^2} \quad (\text{IV.2})$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, \rho, \gamma) = a(\mathbf{r}) \times a(\mathbf{r} + \rho\mathbf{e}_\rho) \quad (\text{IV.3})$$

où $g_I(\mathbf{r})$ est la valeur de g_I du point de coordonnée \mathbf{r} , $a(\mathbf{r})$ est la valeur de l'activité du point de coordonnée \mathbf{r} , \bar{g}_I est la valeur moyenne de g_I sur la zone Z et $\mathbf{e}_\rho = (\cos \gamma)\mathbf{e}_x + (\sin \gamma)\mathbf{e}_y$.

Pour ces deux premières fonctions de corrélations spatiales, on calcule les corrélations avec les points situés dans son voisinage à une distance ρ telle que $0 \leq \rho \leq R$, et pour $0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$ (voir figure IV.2).

La fonction de corrélation ψ_1 permet de mesurer la corrélation entre deux points (deux valeurs de g_I) indépendamment de leurs valeurs (proche de 0 ou de 1). C'est-à-dire que pour les deux couples de points (0;0) et (1;1), le résultat est similaire :

$\psi_1 = 0$ alors que pour un couple de points (0;1) ou (1;0), on a $\psi_1 = 1/\bar{g}_I^2$. Cette fonction présente l'inconvénient de ne pas faire la différence entre deux points corrélés correspondant à une déformation importante ($g_I \approx 0$) et deux points corrélés dont l'activité est faible ($g_I \approx 1$).

La fonction de corrélation ψ_2 présente l'avantage de faire la différence entre un couple de points dont les valeurs de g_I sont (0;0) et un couple de points (1;1). En effet, $\psi_2(0;0) = 1$ et $\psi_2(1;1) = 0$, tandis que $\psi_2(1;0) = 0$ et $\psi_2(0;1) = 0$.

Pour représenter ces fonctions de corrélations, on réalise une moyenne de $\psi(\mathbf{r}, \rho, \gamma)$ sur le voisinage (ρ allant de 0 à R) et sur l'ensemble des points de la zone d'intérêt ($\mathbf{r} \in Z$), équation IV.4. On obtient alors une fonction de corrélations spatiales $\bar{\psi}(\gamma)$ pour une carte de corrélations donnée, c'est-à-dire pour une déformation axiale ε donnée (voir figure IV.3). On peut ainsi suivre son évolution en traçant $\bar{\psi}(\gamma)$ au cours de la charge (voir figure IV.4).

$$\left\langle \langle \psi(\mathbf{r}, \rho, \gamma) \rangle_{0 < \rho < R} \right\rangle_{\mathbf{r} \in Z} = \bar{\psi}(\gamma) \quad (\text{IV.4})$$

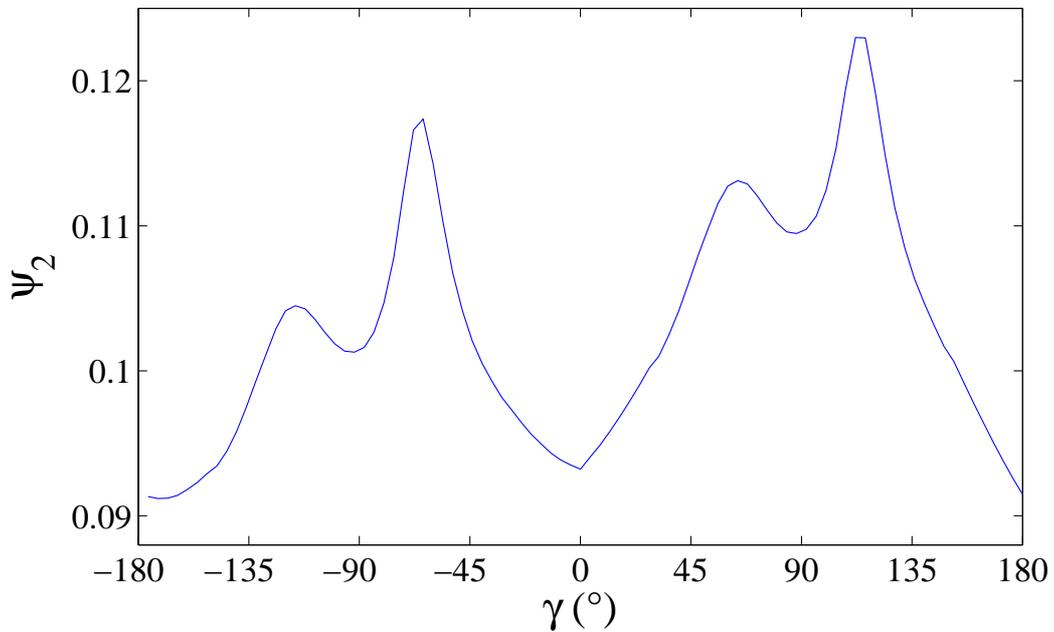


FIGURE IV.3 – Fonction de corrélation $\psi_2(\gamma)$ pour $\varepsilon = 5,91\%$ (voir la carte de corrélation figure IV.1)

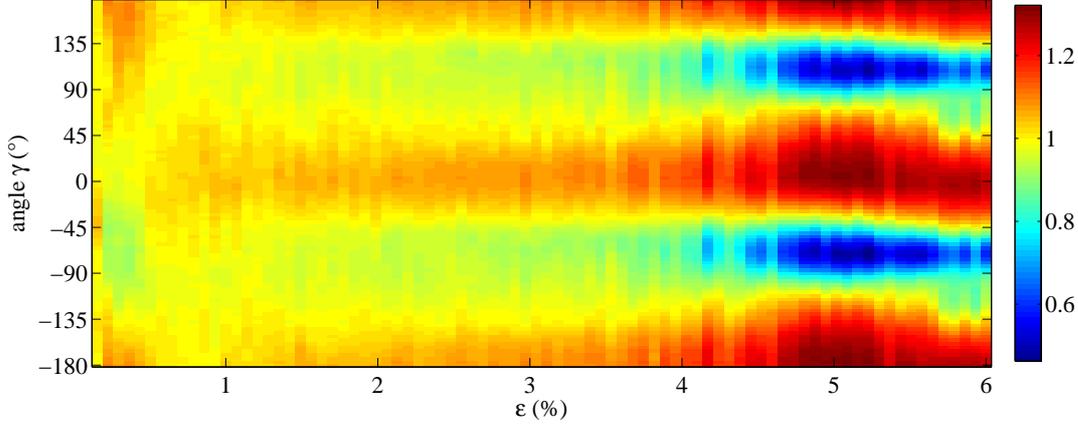


FIGURE IV.4 – Évolution de la fonction $\psi_1(\gamma)$ au cours de la charge

La troisième fonction de corrélations spatiales que nous avons utilisé est définie comme

$$\Psi(\mathbf{r}', \varepsilon) = \left[\frac{1}{N_p} \sum a(\mathbf{r}) \cdot a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \right] - \left[\frac{1}{N_p} \sum a(\mathbf{r}) \right] \cdot \left[\frac{1}{N_p} \sum a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \right] \quad (\text{IV.5})$$

avec N_p le nombre de paires de pixels constituée d'un pixel de coordonnée \mathbf{r} et d'un pixel de coordonnée $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$ définis tels que

$$\begin{cases} \mathbf{r} \in Z \\ \mathbf{r} + \mathbf{r}' \in Z \end{cases} \text{ et où } \sum \text{ est la somme sur les } N_p \text{ paires de pixels.}$$

Les résultats de cette fonction sont représentés dans le plan de \mathbf{r}' . Ces résultats sont bruités, donc pour faire émerger les orientations privilégiées, on moyenne la fonction $\Psi(\mathbf{r}', \varepsilon)$ sur plusieurs images successives :

$$\Psi_{\text{moy}}(\mathbf{r}', \varepsilon) = \frac{1}{N_I} \sum_{\varepsilon' = \varepsilon - \frac{N_I \cdot \delta\varepsilon}{2}}^{\varepsilon' = \varepsilon + \frac{N_I \cdot \delta\varepsilon}{2}} \Psi(\mathbf{r}', \varepsilon') \quad (\text{IV.6})$$

où ε est la déformation axiale autour de laquelle est calculée la moyenne ; $\delta\varepsilon$ est l'incrément de déformation entre chaque image ; N_I est le nombre d'images sur lesquelles la moyenne est calculée ; ε' est la déformation des images sur lesquelles la moyenne est calculée.

On peut tracer la fonction $\Psi_{moy}(\mathbf{r}', \varepsilon)$ qui représente la moyenne des fonctions $\Psi(\mathbf{r}', \varepsilon')$ prises autour d'une valeur de déformation axiale ε donnée (voir figure IV.5).

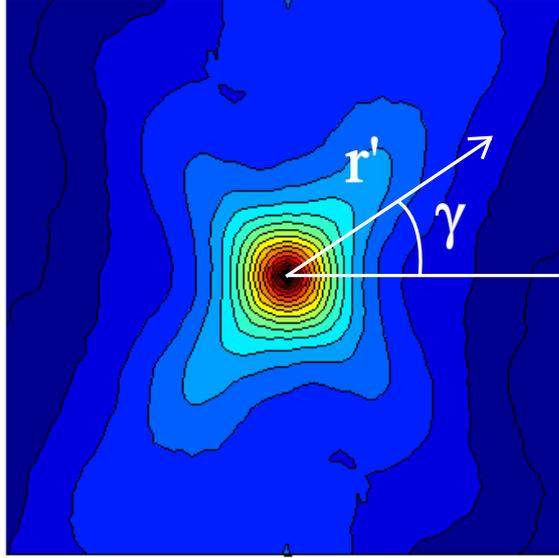


FIGURE IV.5 – Exemple de la fonction de corrélations spatiales $\Psi_{moy}(\mathbf{r}', \varepsilon)$, moyenne des $\Psi(\mathbf{r}', \varepsilon')$ autour de $\varepsilon = 3,30\%$.

IV.1.2 Fonction de corrélation spatio-temporelle

Nous avons observé que toute la dynamique de structuration de la déformation qui précède la ou les bandes de cisaillement finales, est intermittente. Dans le but d'étudier la persistance des événements (points chauds, réseau de petites bandes), on définit une fonction de corrélation spatio-temporelle :

$$\Psi^{(\Delta\varepsilon)}(\mathbf{r}', \varepsilon) = \left[\frac{1}{N_p} \sum a(\mathbf{r}, \varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon}{2}) \cdot a(\mathbf{r} + \mathbf{r}', \varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{2}) \right] - \left[\frac{1}{N_p} \sum a(\mathbf{r}, \varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon}{2}) \right] \cdot \left[\frac{1}{N_p} \sum a(\mathbf{r} + \mathbf{r}', \varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{2}) \right] \quad (\text{IV.7})$$

où $\Delta\varepsilon$ est l'intervalle de déformation sur lequel est calculée la corrélation spatio-temporelle.

IV.2 Analyse directionnelle, détection de bandes de cisaillement

Nous présentons ici deux techniques également utilisées pour détecter des orientations privilégiées : la transformée de Hough et les histogrammes de projection. On détaille le mode de calcul de chaque méthode, ils sont différents mais on démontre que les deux méthodes sont équivalentes. On applique ensuite les deux méthodes à des cas tests.

IV.2.1 Méthode

IV.2.1.1 Transformée de Hough

Dans la dynamique de déformation du matériau, nous avons observé que les points chauds intermittents tendent à s'aligner pour former des petites bandes de cisaillement. La transformée de Hough est un outil d'analyse d'images permettant notamment de mesurer l'alignement de points. La transformée de Hough a été développée par Paul Hough en 1962 [DH72, Mai85]. Elle permet la détection de formes particulières dans une image. Nous l'utilisons sous sa forme la plus simple (détection de droites) pour mesurer l'alignement des spots et obtenir la position et l'inclinaison des bandes de cisaillement.

Le principe de la transformée de Hough est de représenter une image A (en coordonnées cartésiennes $A(x,y)$) dans un espace de paramètres polaires (ρ, α) , appelé espace de Hough. Pour chaque pixel de l'image d'origine $A(x,y)$, on représente, dans l'espace de Hough, les paramètres polaires de l'ensemble des droites passant par ce pixel. Cet ensemble de droites est alors représenté par une sinusoïde dans l'espace de Hough, voir figure IV.6. La transformée de Hough d'une image A est donc un ensemble de sinusoïdes et chacune d'elles correspond à un point de l'image A . On peut pondérer les sinusoïdes par la valeur du pixel considéré.

Une droite quelconque est définie par l'équation $y = ax + b$ dans les coordonnées cartésiennes de l'image (voir figure IV.6). On peut définir cette droite avec ses paramètres polaires (ρ_1, α_1) où ρ_1 est la distance de la droite à l'origine (longueur du segment perpendiculaire à la droite passant par l'origine) et où α_1 est l'angle entre la normale à la droite et l'abscisse de l'image. Cette droite est alors représentée par un point (ρ_1, α_1) dans l'espace des paramètres polaires (ρ, α) , l'espace de Hough.

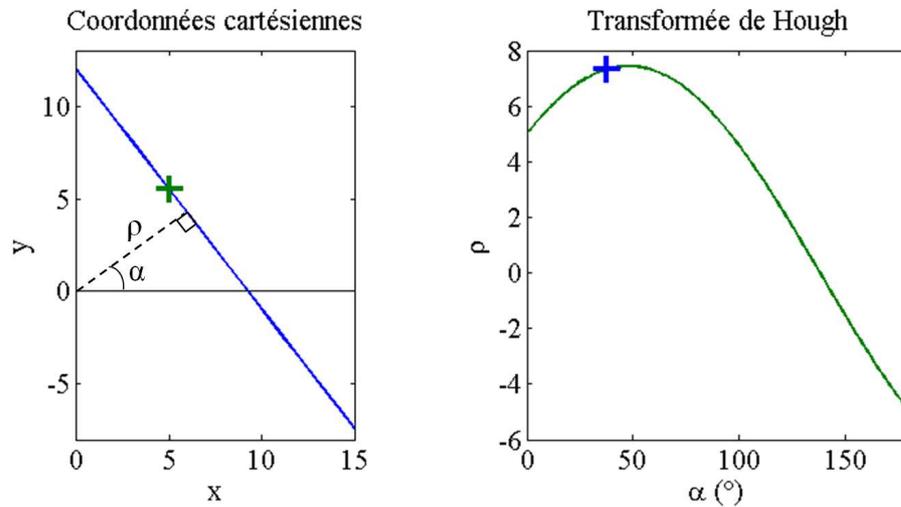


FIGURE IV.6 – à gauche : une droite d'équation $y = ax + b$ (en bleu) et de paramètres polaires (ρ_1, α_1) , et un point sur cette droite de coordonnées (x_0, y_0) (en vert); à droite : représentation dans l'espace de Hough de la droite par un point (ρ_1, α_1) en bleu et représentation de toutes les droites passant par le point vert en une sinusoïde d'équation $\rho = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$ (en vert) dans l'espace de Hough.

En utilisant les paramètres polaires de la droite (ρ, α) , l'équation de la droite $y = ax + b$ devient

$$y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}x + \frac{\rho}{\sin \alpha} \quad (\text{IV.8})$$

A partir de cette équation, on peut ainsi exprimer ρ en fonction de α :

$$\rho = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (\text{IV.9})$$

L'ensemble des droites passant par un point (x_0, y_0) sur l'image d'origine est alors représenté, dans l'espace de Hough, par une sinusoïde d'équation

$$\rho = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha \quad (\text{IV.10})$$

Si on considère une image binaire A composée de plusieurs points, alors plusieurs sinusoïdes sont tracées dans l'espace de Hough. Si plusieurs sinusoïdes se coupent en un même point, ce point représente alors une droite passant par plusieurs points de l'image d'origine. L'objectif de cette méthode est de détecter ces droites pour obtenir les orientations privilégiées de la figure de corrélation. Pour détecter les points de l'espace de Hough où se coupent plusieurs sinusoïdes, nous réalisons un

code qui incrémente ces points de l'espace de Hough pour chaque sinusoïde. De plus, de manière à pondérer ces intersections par l'intensité des points de l'image d'origine, la valeur de l'incrément est proportionnel à l'activité $(1 - g_I)$ du pixel (de la carte de corrélation) considéré.

IV.2.1.2 Histogrammes de projection

On appelle histogramme de projection, le profil observé en projetant une image dans une direction. On réalise ces histogrammes dans toutes les directions (de 0° à 180°). L'objectif de cette technique est de détecter et de mesurer l'influence d'une direction principale, et donc d'observer et de quantifier l'apparition d'une bande de cisaillement.

Pour une image donnée, on définit une droite d passant par l'origine O et formant un angle β avec l'abscisse de l'image (voir figure IV.7). On définit une droite d' normale à d et coupant d en H à la distance r de l'origine. La droite d' peut ainsi être définie comme l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ pour H fixé.

On réalise la moyenne de l'intensité de tous les pixels situés sur la droite d' , on appelle cette moyenne $\langle g_I^\perp \rangle_{d'}$. En faisant ensuite varier r sur toute la droite d , on calcule la moyenne $\langle g_I^\perp \rangle_{d'}(r)$ pour toutes les droites d' perpendiculaires à d . Cette moyenne est tracée en fonction de r et sous la forme $(1 - \langle g_I^\perp \rangle_{d'}(r))$, la courbe représente alors le profil de l'image projetée selon la direction β de la droite d (voir figure IV.8), c'est l'histogramme de projection dans la direction β . Les droites d' peuvent être petites (seulement quelques pixels, notamment proche des coins de l'image), dans ce cas la moyenne $\langle g_I^\perp \rangle_{d'}$ est calculée sur un faible nombre de points, elle est alors plus sensible au bruit des valeurs de g_I . Pour calculer une moyenne pertinente et ainsi limiter les effets de bords, on exige que la moyenne $\langle g_I^\perp \rangle_{d'}(r)$ soit calculée sur un nombre de points suffisant. On impose alors un seuil sur le nombre de points sur lesquels la moyenne est calculée.

Les histogrammes de projection sont réalisés dans toutes les directions, c'est-à-dire pour $0^\circ < \beta < 180^\circ$. Ainsi, pour rendre compte de tous les histogrammes de projection d'une image, on trace l'ensemble des profils (selon r) en fonction de l'angle β (voir figure IV.9).

La droite d' étant définie comme l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ pour $H(r \cos \beta, r \sin \beta)$ fixé. On peut exprimer cette condition en fonction de β et r :

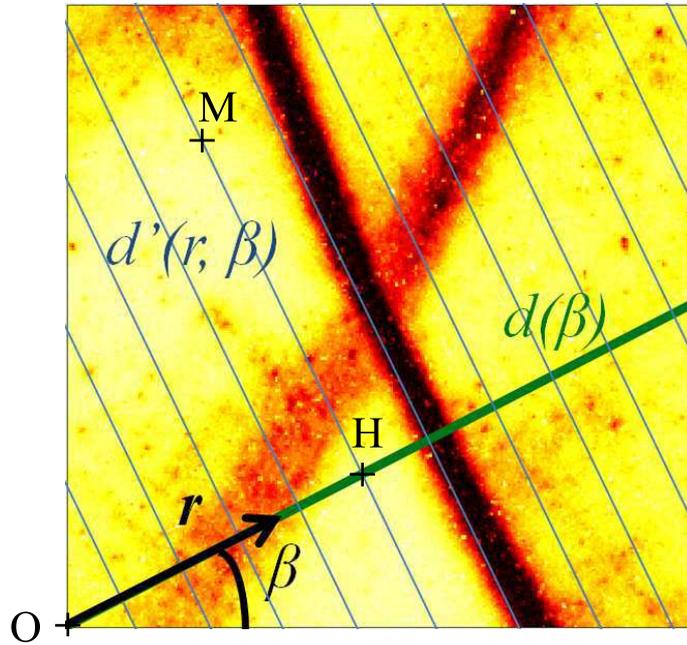


FIGURE IV.7 – Exemple d’une image de l’expérience B sur laquelle sont représentées une droite d d’inclinaison β (trait épais) et plusieurs droites d' normales à d (trait fin).

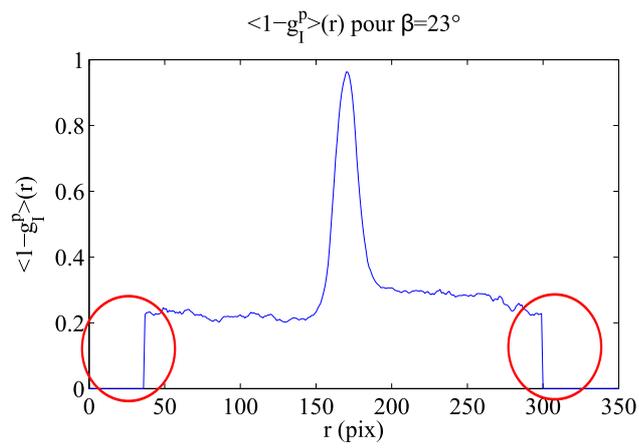


FIGURE IV.8 – Histogramme de projection de l’image figure IV.7 selon la droite d d’angle β . Cercles rouges : zones dont le nombre de points est inférieur au seuil.

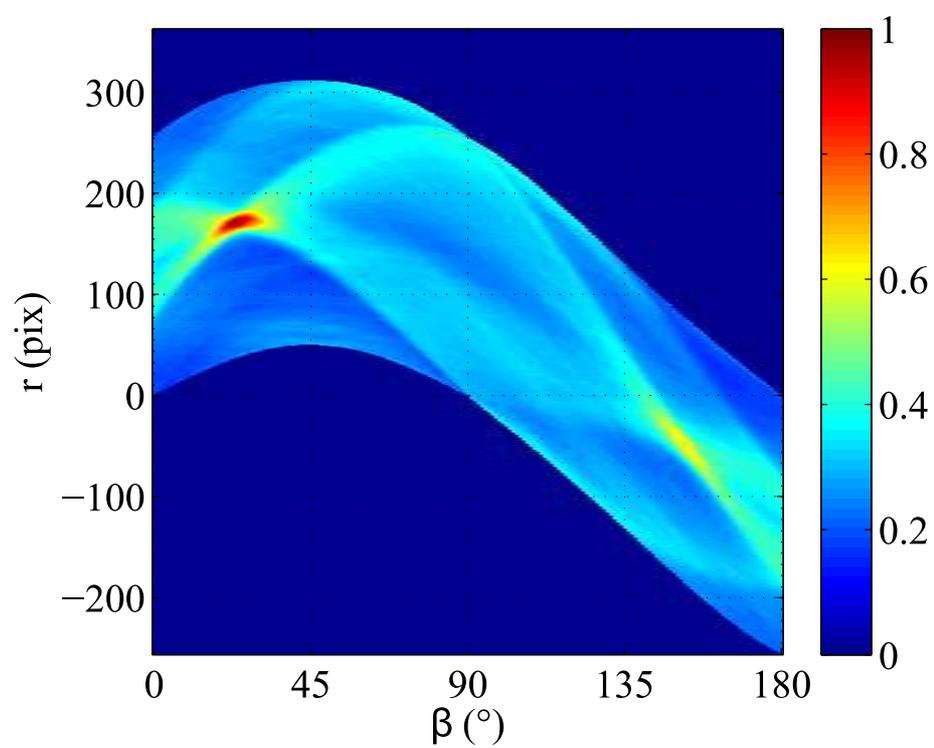


FIGURE IV.9 – Carte de l'ensemble des histogrammes de projection $1 - \langle g_T^\perp \rangle_{d'}$ (selon r) en fonction de l'angle β .

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{MH} &= 0 \\
\begin{pmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - r \cos \beta \\ y - r \sin \beta \end{pmatrix} &= 0 \\
r \cos \beta \times (x - r \cos \beta) + r \sin \beta \times (y - r \sin \beta) &= 0 \\
x \cos \beta + y \sin \beta &= r
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

On note ici que la correspondance entre les coordonnées cartésiennes et polaires est la même que pour la transformée de Hough, les deux transformations sont donc équivalentes.

L'ensemble des histogrammes de projection est tracé dans l'espace (r, β) . Ainsi, le point de coordonnées (x_0, y_0) de l'image d'origine est représenté, dans l'espace (r, β) , par la sinusoïde correspondant à la projection du point le long de toutes les droites, son équation est

$$r = x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta. \tag{IV.12}$$

Un point de coordonnées (r_0, β_0) dans l'espace (r, β) correspond à une droite d' de l'image d'origine d'équation

$$y = -\frac{\cos \beta_0}{\sin \beta_0} x + \frac{r_0}{\sin \beta_0} \tag{IV.13}$$

Les résultats des deux méthodes (transformée de Hough et histogrammes de projection) sont donc similaires comme nous le verrons dans le paragraphe suivant sur les cas tests. Les seules différences sont dues aux paramétrages différents de chaque méthode. La transformée de Hough correspond aux histogrammes de projection où on calculerait la somme plutôt que la moyenne de l'information contenue sur une droite d' . On perçoit ici que la méthode de la transformée de Hough est le résultat de projection de l'image dans toutes les directions. La méthode des histogrammes de projection donne plus d'importance aux zones proches des coins de l'image. Ces effets de bord seront limités (comme indiqué en début de paragraphe) en plaçant un seuil sur le nombre de points permettant de réaliser les moyennes.

IV.2.2 Cas tests

Nous appliquons la transformée de Hough et les histogrammes de projection à des cas "tests" typiques pour réaliser l'intérêt et percevoir les similitudes et différences des deux méthodes. On utilise cinq cas simples (a,b,c,d,e) qui sont des images bi-

naires et une image de l'expérience référence (non-binaire). Les images représentent :

- a : deux points ;
- b : des alignements de points ;
- c : une bande ;
- d : deux bandes symétriques ;
- e : une bande et deux points.

Les images tests utilisées sont de dimensions (256×256) pixels, qui est la taille des cartes de corrélations utilisées pour le traitement d'images de l'expérience référence. Pour les deux méthodes, la transformée de Hough et les histogrammes de projection, on utilise une échelle de couleur (bleu, vert, jaune, orange, rouge) allant de la valeur 0 en bleu à la valeur maximum, en rouge, de la transformée de Hough ou des histogrammes de projection.

Lors du test a (deux points), on observe que deux sinusoides sont représentées. Ces deux sinusoides se croisent en un point de coordonnées $(63,200)$. On a $\alpha = \beta = 63^\circ$, cela signifie que les deux points sont alignés sur une droite d'inclinaison $\theta = 63 - 90 = -27^\circ$ et distante de $r = \rho = 200$ pixels de l'origine. Cette droite correspond aussi à celle qui conduit à la superposition des deux points lors d'une projection. On comprend alors que les deux méthodes sont similaires.

Le test b représente 9 points alignés 3 par 3 et les tests avec les deux méthodes montrent bien 9 sinusoides qui se croisent 3 par 3 à un angle $\alpha = \beta \approx 120^\circ$. Les alignements de points sont donc inclinés d'environ $\theta = 120 - 90 = 30^\circ$. Les sinusoides se croisent également 3 par 3 pour des angles de 0° ou 180° soit selon des alignements de $\theta \approx \pm 90^\circ$, c'est-à-dire des alignements verticaux.

La transformée de Hough et les histogrammes de projection du test c montrent une intensité importante autour du point de coordonnées $(28,165)$. L'inclinaison de la droite est donc $\theta = 28 - 90 = -62^\circ$.

Le test d est une image de deux bandes à peu près symétriques. On observe sur la transformée de Hough et les histogrammes de projection que les deux zones intenses aux directions 30° et 150° correspondant aux orientations des droites $\theta = \pm 60^\circ$.

Le test e met en évidence une bande comme le test c à laquelle s'ajoute deux gros points dans les coins de l'image. On observe deux faisceaux de sinusoides assez larges qui représentent les gros points. Dans les histogrammes de projection, la sinusoides est d'une intensité plus grande (couleur plus chaude) que dans la transformée de Hough, cette différence est due aux effets de coins (peu de points sur lesquels on

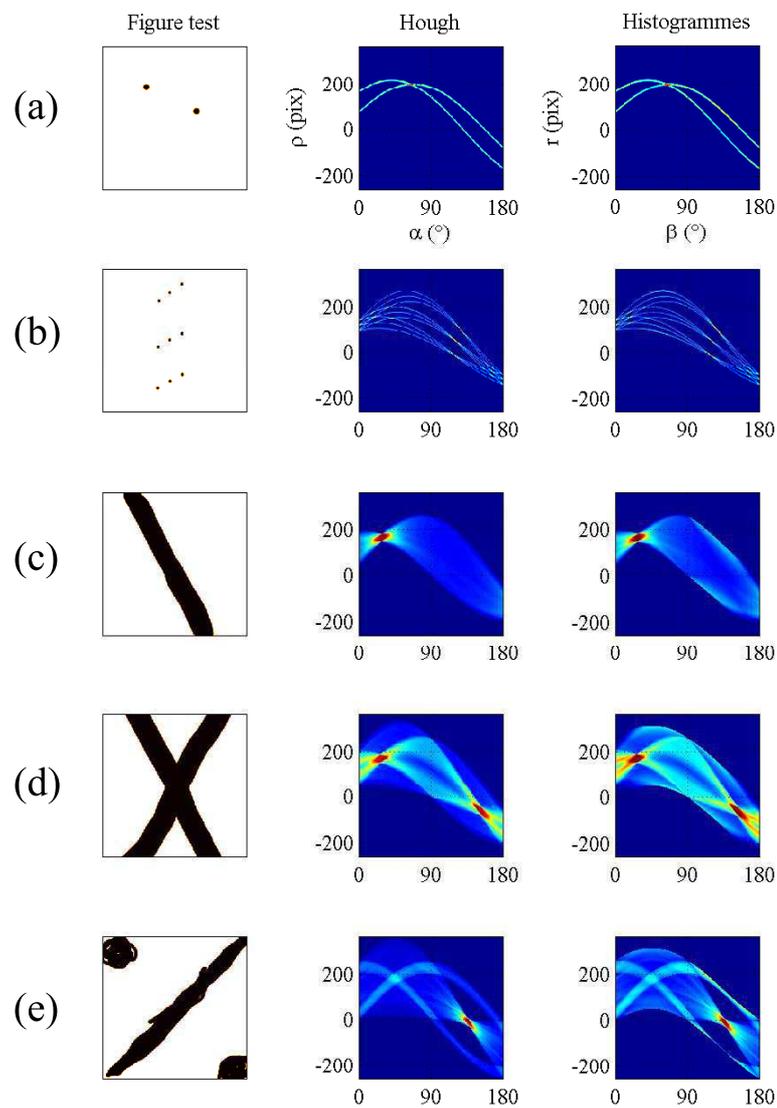


FIGURE IV.10 – à gauche cas test, au centre les transformées de Hough et à droite les histogrammes de projection. Les 5 cas test sont : (a) 2 points, (b) 9 points alignés, (c) une bande, (d) 2 bandes et (e) une bande et 2 gros points.

calcule la moyenne). La limitation de cet effet (en exigeant un nombre de points minimum sur lesquels on calcule les histogrammes) est visible sur les histogrammes de projection car pour $90^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$, les sinusoides représentant les deux points sont plus fines que celles de la transformée de Hough.

Nous avons effectué un test sur une image de l'expérience de référence (voir figure IV.11), plus complexe que les cas test, et non binaire, elle laisse apparaître une multitude de sinusoides et une zone plus intense pour α et β allant de 0 à 50° soit une inclinaison $-90^\circ \leq \theta \leq -40^\circ$.

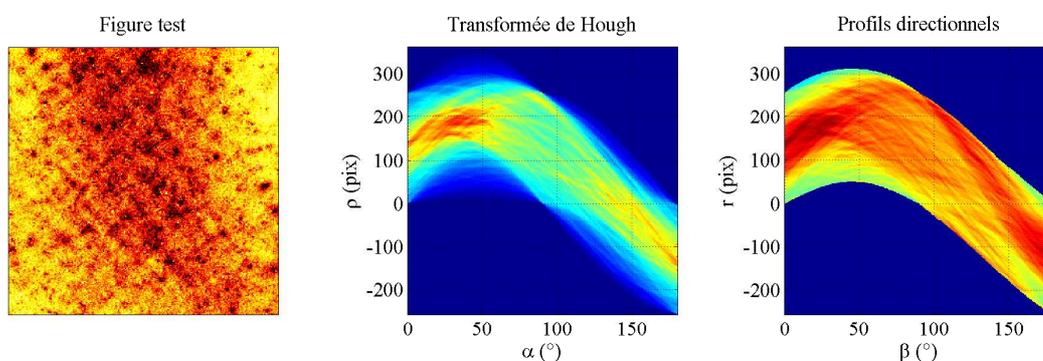


FIGURE IV.11 – Test sur une image de l'expérience référence

L'ensemble des cas tests permet d'établir la similarité entre les deux méthodes avec comme différence principale les effets de coins.

IV.3 Analyse multi-échelles

On souhaite, dans l'analyse multi-échelles, mettre en évidence une taille caractéristique des déformations observées et également étudier l'évolution de la distribution spatiale selon l'échelle considérée. Pour caractériser l'échantillon à différentes échelles, on divise la carte de corrélation en zones de différentes tailles. La première étape est de découper l'image en zones carrées de côté $\xi = 2^n$ pixels pour n allant de 0 à 8 (voir figure IV.12). On calculera des moments et des moyennes des g_I sur ces zones.

Pour suivre la taille caractéristique des déformations au cours du chargement, on définit la fonction :

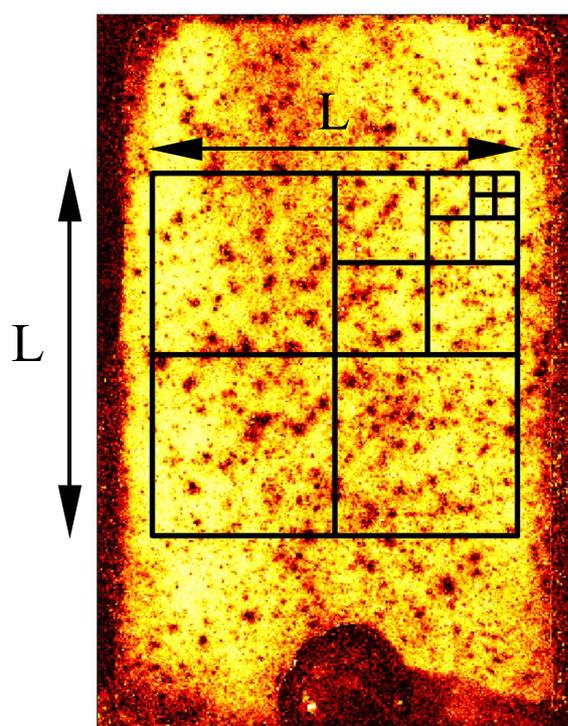


FIGURE IV.12 – Zones carrées de différentes tailles sur lesquelles ont été réalisées l'analyse multi-échelles

$$f(\xi) = \frac{\langle \langle g_I \rangle_\xi^2 \rangle_L - \langle g_I \rangle_L^2}{\langle g_I^2 \rangle_L - \langle g_I \rangle_L^2} \quad (\text{IV.14})$$

où $\langle \cdot \rangle_\xi$ est la moyenne des g_I sur une zone carrée de côté ξ et $\langle \cdot \rangle_L$ est la moyenne sur toute la zone de mesure (zone carrée de côté L). Cette fonction est normalisée à 1 et 0 pour respectivement $\xi = 1$ et $\xi = L$.

Nous avons appliqué cette fonction à des images tests (figure IV.13). Ces images tests ont été définies avec une taille caractéristique minimale de 2^n pixels pour n allant de 0 à 8. On a ainsi des images avec des zones carrées de différentes tailles caractéristiques de 2^n pour n allant de 0 à 8. Les valeurs en niveau de gris de ces zones de tailles caractéristiques 2^n sont données aléatoirement de 0 à 1. On a tracé la fonction $f(\xi)$ pour toutes les images tests, figure IV.14.

On observe sur la figure IV.14 que la fonction $f(\xi)$ commence à décroître lorsque la taille caractéristique de l'image test considérée vaut ξ .

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé les outils d'analyse d'image réalisés dans le but de caractériser la dynamique complexe des déformations observées dans le matériau au cours du chargement. Chacun de ces outils a été utilisé et leur application permet l'interprétation physique présentée dans le chapitre suivant.

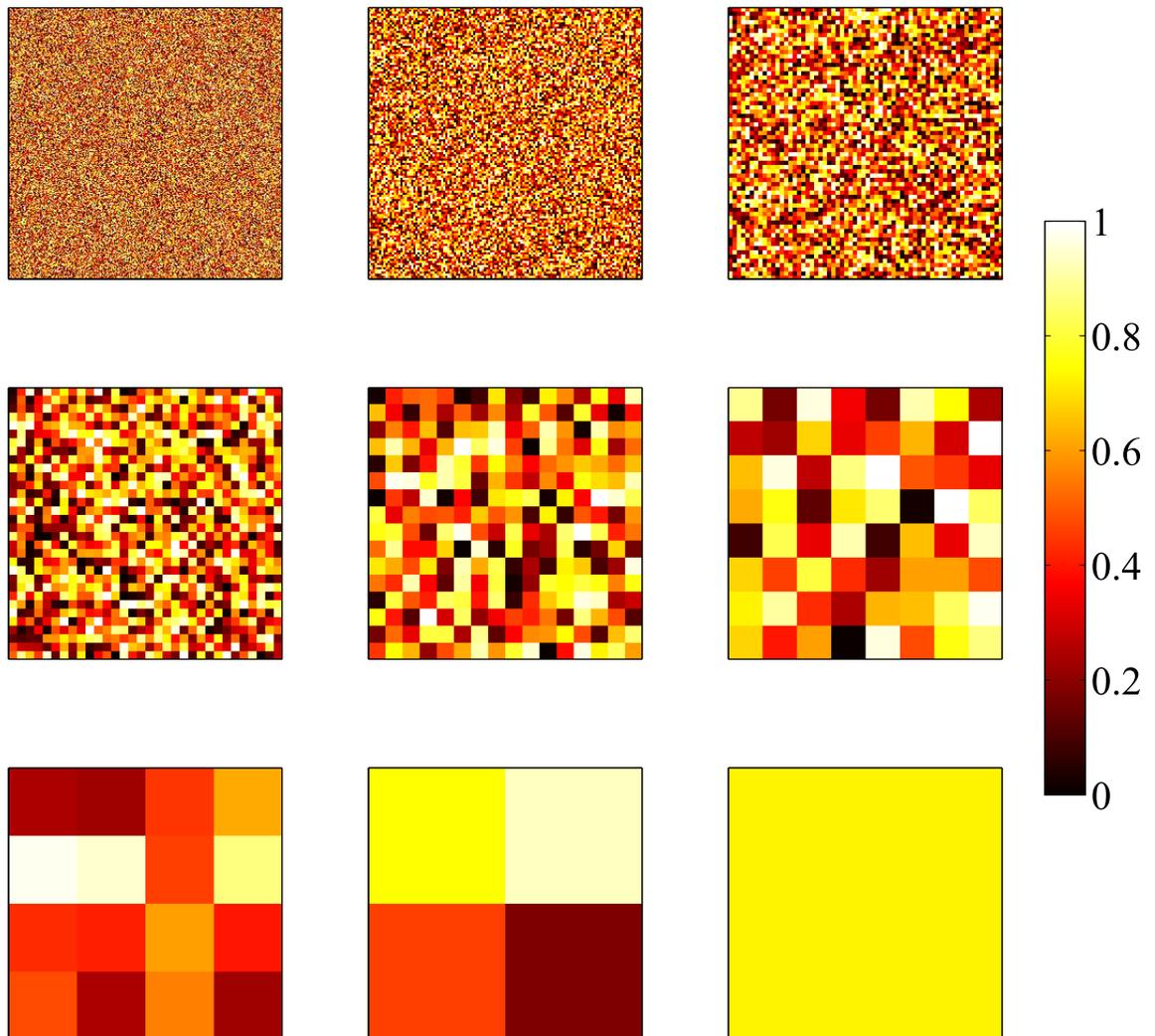


FIGURE IV.13 – Images tests de tailles caractéristiques 2^n pixels pour n allant de 0 à 8.

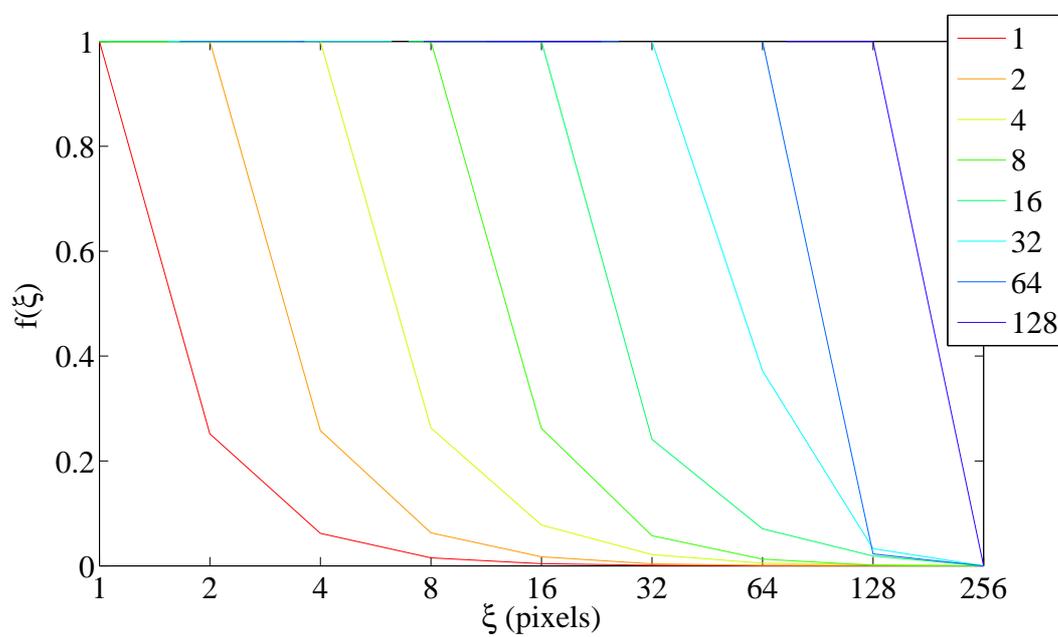


FIGURE IV.14 – La fonction $f(\xi)$ calculée pour les images tests et tracée en échelle semi-logarithmique. En légende : la taille caractéristique 2^n des images tests.

Chapitre V

Interprétation physique des mesures de déformation

Lors de nos expériences de chargement, comme nous l'avons vu au chapitre III, la dynamique des déformations hétérogènes ayant lieu au sein du matériau fait apparaître deux types de comportements systématiques. À la fin des expériences (après le maximum ou le palier de la courbe de charge), on observe une ou deux grandes bandes de cisaillement permanentes qui traversent l'échantillon de part en part. Ces bandes de cisaillement finales sont fréquemment observées dans ce type de test, on peut les décrire en utilisant le modèle de Mohr-Coulomb. Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons ce modèle, en particulier pour un test biaxial et nous comparons les résultats de l'expérience B (voir §III.1.1) au modèle de Mohr-Coulomb.

Durant la compression du matériau, avant le maximum ou le palier de la courbe de charge, on observe des petites bandes intermittentes (figure III.5), organisées en réseau et dont l'inclinaison est plus faible que les bandes finales permanentes. Ces petites bandes de cisaillement intermittentes n'ont, à notre connaissance, jamais été observées expérimentalement auparavant dans ce type de test. Dans la deuxième partie du chapitre nous donnons une interprétation de ce réseau en nous basant sur des idées issues de la plasticité des amorphes. Pour cela, nous décrivons le problème de l'inclusion d'Eshelby. Ensuite, une interprétation des petites bandes intermittentes est proposée à partir de la solution d'Eshelby et avec l'appui de simulations numériques.

Dans la troisième partie du chapitre, nous présentons trois études concernant

la dynamique des déformations au cours de la charge. La première s'intéresse à la dynamique spatiale et temporelle du réseau de bandes, la seconde à la formation des bandes de cisaillement finales et la troisième est un suivi de la taille caractéristique des déformations au cours de l'ensemble de la charge par analyse multi-échelles. On utilise pour cela différents outils d'analyse d'image présentés au chapitre IV.

Enfin, dans la dernière partie, les résultats du suivi de particules à la paroi sont présentés brièvement. On discute d'abord du champ de déplacement des billes, et ensuite de la variation de fraction volumique du matériau.

V.1 Bandes de cisaillement permanentes

Nous avons vu au chapitre III que toutes les expériences présentaient à la fin du chargement (après le maximum ou le palier de la courbe de charge) une ou deux bandes de cisaillement permanentes. Dans un premier temps, nous décrivons le modèle de Mohr-Coulomb pour le test biaxial. Ensuite, à partir de l'observation expérimentale d'une bande permanente et de sa caractérisation par les histogrammes de projection, nous mesurons l'orientation de la bande et la comparons avec la prédiction du modèle de Mohr-Coulomb.

V.1.1 Modèle de Mohr-coulomb

Le modèle de Mohr-Coulomb [Ned92] est un modèle permettant de décrire la rupture d'un milieu granulaire. Il est basé sur le concept de friction interne du matériau et repose sur un critère de rupture sur le rapport contrainte tangentielle sur contrainte normale, négligeant les variations de fraction volumique.

Le matériau idéal de Mohr-Coulomb est défini comme cédant le long d'un plan, s'il existe dans le matériau un plan repéré par sa normale \mathbf{n} selon lequel on a

$$|\tau| = \mu\sigma, \quad (\text{V.1})$$

c'est le critère de rupture du matériau (voir figure V.1). σ et τ sont les contraintes normale et tangentielle au plan \mathbf{n} et μ est le coefficient de friction du matériau et vaut

$$\mu = \tan\phi, \quad (\text{V.2})$$

avec ϕ , l'angle de friction du matériau.

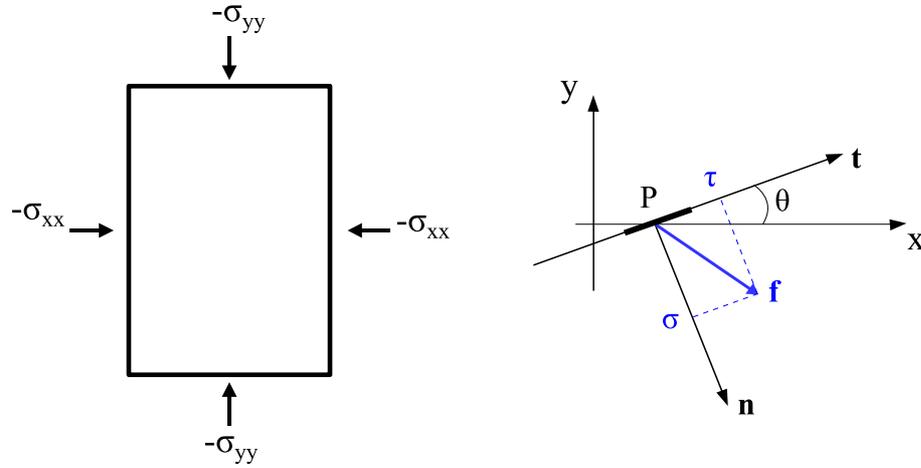


FIGURE V.1 – À gauche : les contraintes appliquées au matériau dans la configuration du test biaxial. À droite : schéma du plan \mathbf{n} et des contraintes associées σ et τ . \mathbf{f} est la force par unité de surface s'exerçant sur le plan. $\mathbf{f} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} \cdot \sin \theta \\ \sigma_{yy} \cdot \cos \theta \end{pmatrix}$

Lorsqu'on considère un matériau cohésif, le critère de rupture devient

$$|\tau| = \mu\sigma + c, \quad (\text{V.3})$$

où c caractérise la cohésion. Nous traitons dans la suite, le modèle non cohésif, $c = 0$.

Dans la configuration du test biaxial en déformation plane, on applique sur le matériau une contrainte horizontale $-\sigma_{xx}$ et une contrainte verticale $-\sigma_{yy}$ (figure V.1). Dans la troisième direction, orthogonale au plan de la figure V.1, la déformation est nulle et la contrainte inconnue. On suppose que la réponse du système est uniforme dans cette direction et on se limite donc à une description bidimensionnelle du système. En supposant l'état de contrainte homogène dans l'échantillon, le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & -\sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.4})$$

Considérons un plan d'inclinaison θ avec l'horizontale, repéré par sa normale \mathbf{n} , les contraintes normales et tangentielles s'exerçant sur le plan sont (voir figure V.1) :

$$\sigma = -\sigma_{xx} \sin^2 \theta - \sigma_{yy} \cos^2 \theta, \quad (\text{V.5})$$

$$\tau = -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{yy} \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{V.6})$$

En posant

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad (\text{V.7})$$

$$r = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad (\text{V.8})$$

on obtient dans le repère (σ, τ) les équations d'un cercle de centre $(\sigma_0, 0)$ et de rayon r :

$$\sigma - \sigma_0 = r \cos(-2\theta), \quad (\text{V.9})$$

$$\tau = r \sin(-2\theta). \quad (\text{V.10})$$

Ce cercle s'appelle le cercle de Mohr et est représenté sur la figure V.2. Les contraintes normale et tangentielle au plan d'inclinaison θ avec l'horizontale ont pour valeurs les coordonnées (σ, τ) du cercle de Mohr correspondant à un angle de -2θ .

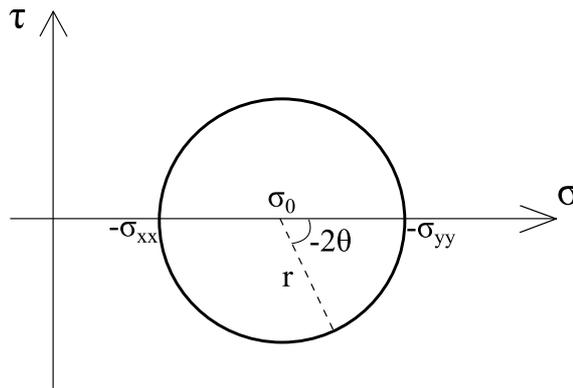


FIGURE V.2 – Cercle de Mohr de centre $(\sigma_0, 0)$ et de rayon r .

Lors d'un test biaxial classique, la contrainte $-\sigma_{xx}$ est constante durant tout le test tandis que la contrainte $-\sigma_{yy}$ croît jusqu'à ce que le critère de rupture soit

atteint (voir figure V.3).

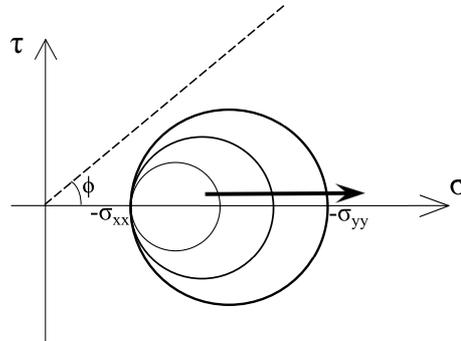


FIGURE V.3 – La contrainte latérale $-\sigma_{xx}$ reste fixe au cours du chargement tandis que la contrainte axiale $-\sigma_{yy}$ croît au fur et à mesure de la charge, faisant ainsi croître le cercle de Mohr. La droite en pointillés représente le critère de rupture $|\tau| = \mu\sigma$ avec $\mu = \tan\phi$.

C'est-à-dire, graphiquement lorsque le cercle de Mohr est en contact avec les droites d'équation $|\tau| = \mu\sigma$. Dans ce cas représenté sur la figure V.4, dans le triangle OAO' rectangle en A (et respectivement OBO' rectangle en B), on a

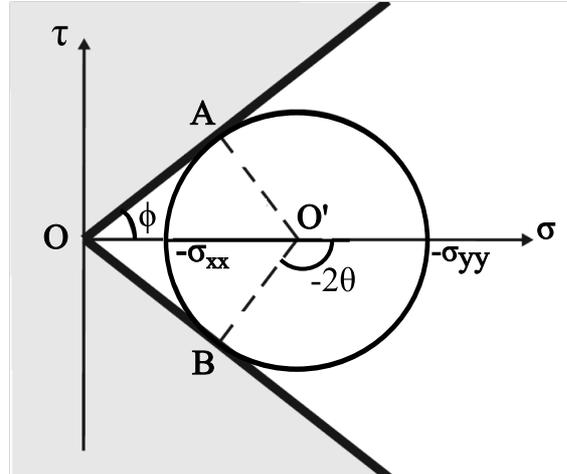


FIGURE V.4 – Cercle de Mohr lorsque le critère de rupture $|\tau| = \tan\phi \cdot \sigma$ est atteint.

$$\sin\phi = \frac{r}{\sigma_0} \quad (\text{V.11})$$

soit d'après les équations V.7 et V.8

$$\sin\phi = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}^R}{-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}^R} \quad (\text{V.12})$$

où $-\sigma_{yy}^R$ est la contrainte verticale pour laquelle le matériau subit la rupture, σ_{xx} étant une constante. On peut ainsi prédire la contrainte à la rupture $-\sigma_{yy}^R$ ou bien l'angle de friction ϕ selon les données du problème. Une fois connu l'angle de friction ϕ du matériau, on peut déterminer graphiquement l'inclinaison θ du plan de cisaillement, on a alors

$$\pm 2\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \quad (\text{V.13})$$

soit

$$\theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{V.14})$$

Le modèle de Mohr-Coulomb permet ainsi de prédire également l'inclinaison θ du plan de cisaillement.

V.1.2 Bandes de cisaillement finales

Observons la courbe de charge de l'expérience B, un palier apparaît pour la déformation axiale $\varepsilon \approx 4,6\%$ (voir figure V.5(a)). En considérant que la rupture du matériau a lieu à ce palier (ou au maximum de la courbe de charge), on peut calculer l'angle θ du plan de cisaillement prédit par le modèle de Mohr-Coulomb. Au palier de la courbe de charge, la contrainte déviatorique vaut $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}^R = 80$ kPa tandis que la contrainte latérale vaut $-\sigma_{xx} = 30$ kPa. D'après l'équation V.12, on calcule l'angle de friction $\phi \approx 35^\circ$ et d'après l'équation V.14 on obtient comme prédiction l'inclinaison du plan de cisaillement $\theta = \pm \left(45 + \frac{35}{2} \right) \approx \pm 63^\circ$.

Après le palier de la courbe de charge, prenons une carte de corrélation pour la déformation axiale $\varepsilon = 4,6\%$ (voir figure V.5(b)), on observe une bande de cisaillement bien nette et une seconde moins nette. Pour mesurer l'inclinaison de ces bandes nous avons utilisé deux outils d'analyse d'images présentés au chapitre IV, les histogrammes de projection et la transformée de Hough. On réalise la transformée de Hough sur la carte de corrélations de $\varepsilon = 4,6\%$, tandis que les histogrammes de projection sont réalisés sur une moyenne sur 50 images des cartes de corrélations correspondant à un $\Delta\varepsilon \approx 0,18\%$. On observe un maximum des profils directionnels et de la transformée de Hough pour $\alpha \approx \beta \approx 25^\circ$ soit une inclinaison avec l'horizontale d'environ -65° (voir §IV.2.1). L'orientation de la bande de cisaillement principale, mesurée graphiquement, est donc en accord avec le prédiction du modèle de Mohr-Coulomb, réalisée à partir de la courbe de charge.

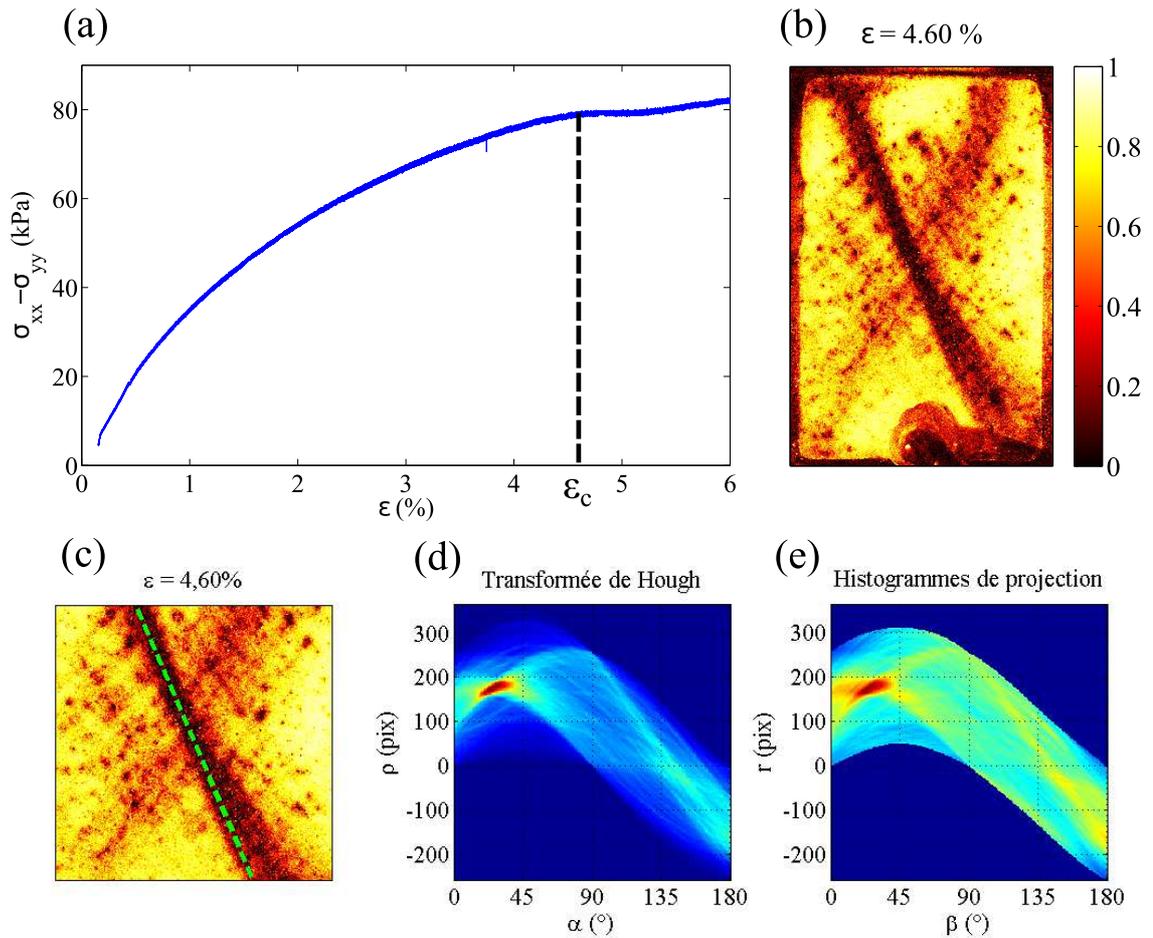


FIGURE V.5 – (a) Courbe de charge de l'expérience B avec un palier pour la déformation axiale critique $\varepsilon_C \approx 4,6\%$, $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ vaut alors environ 80 kPa. (b) Carte de corrélation de la bande de cisaillement finale à $\varepsilon_C \approx 4,6\%$ pour un incrément de déformation de $\Delta\varepsilon = 3,2 \cdot 10^{-5}$. (c) Région d'intérêt sur laquelle sont réalisées la transformée de Hough (TH) et les histogrammes de projection (HP). En pointillés verts : la droite correspondant aux maximums (identiques) de la TH et des HP. (d) Transformée de Hough. (e) Histogrammes de projection.

V.2 Plasticité avant la rupture

Le modèle de Mohr-Coulomb permet d'expliquer la ou les bandes de cisaillement finales, cependant, avant l'apparition de ces bandes permanentes on observe des petites bandes intermittentes. Dans cette partie, nous étudierons l'inclinaison des petites bandes intermittentes observées dans notre expérience, puis nous présenterons un modèle issu de la plasticité des matériaux amorphes, le problème d'Eshelby. Ensuite, nous étudierons les résultats de simulations numériques de tests biaxiaux. Enfin, nous proposerons une interprétation physique des déformations observées expérimentalement basée sur le couplage de réarrangements localisés. Cette partie a fait l'objet d'une publication [LBAMC14].

V.2.1 Orientation des bandes intermittentes

Avant le maximum ou le palier de la courbe de charge, on observe un réseau de bandes intermittentes. L'angle d'inclinaison moyen entre l'horizontale et ces bandes est inférieur à l'orientation de Mohr-Coulomb.

On montre, sur la figure V.6(a), une carte de corrélations qui présente un réseau de bandes pour $\varepsilon = 3,30\%$, pour la même expérience que celle présentée à la figure V.5. Sur la carte de corrélation, on délimite une zone centrale de taille $l \times l$, au centre de la figure V.6(b) et sur laquelle on calcule la corrélation spatiale $\psi^{(0)}(\varepsilon, r)$ définie §IV.1.1 équation IV.5. $\psi^{(0)}(\varepsilon, r)$ est moyennée sur 100 images soit sur un incrément de déformation de $\delta\varepsilon \approx 3,2 \cdot 10^{-3}$ et est représentée figure V.6(c).

On observe sur cette figure que la corrélation décroît avec la distance mais qu'elle décroît moins vite dans des directions symétriques qui sont les directions du réseau de bandes figure V.6(b) et qu'on appellera $\theta_E \approx \pm 53^\circ$. On montre figure V.7 la décroissance de la fonction de corrélation spatiale le long de ces directions privilégiées. Ces directions sont à peu près constantes avant l'apparition des bandes de cisaillement finales et elles sont clairement différentes de l'inclinaison des bandes finales.

Pour interpréter ces micro-bandes de nature différentes de celles des bandes de cisaillement finales, nous nous basons sur un modèle issu de la description de la plasticité des amorphes qui repose sur des événements plastiques localisés au sein d'une matrice élastique. Nous présentons d'abord le modèle permettant de trouver une solution analytique à ce type de problème.

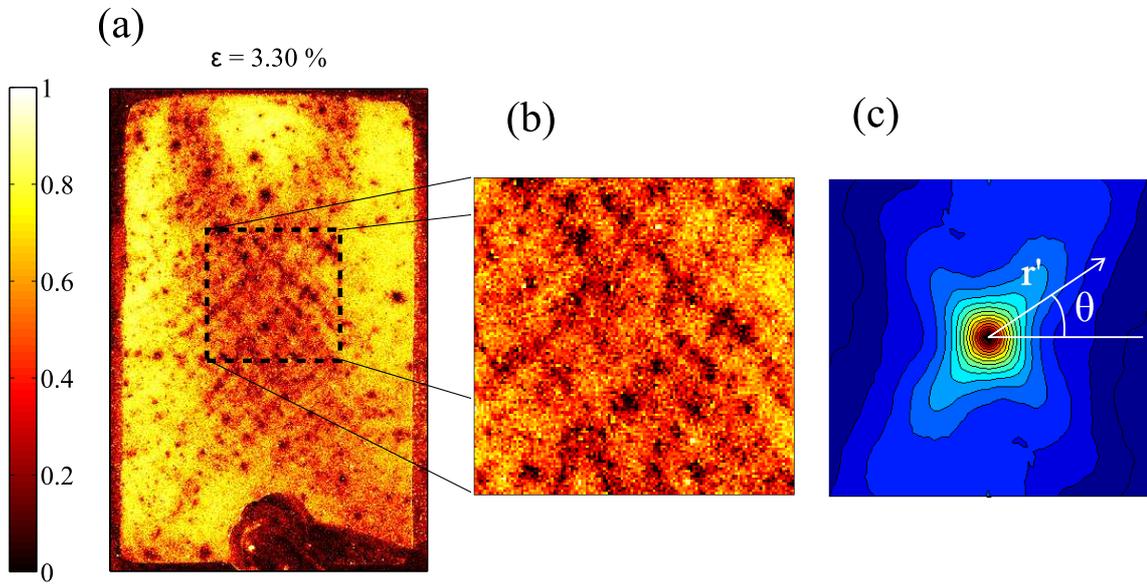


FIGURE V.6 – (a) carte de corrélations pour $\varepsilon = 3,30\%$; (b) zoom sur la zone centrale, région d'intérêt sur laquelle est calculée la fonction de corrélation spatiale. (c) moyenne de la fonction de corrélation spatiale.

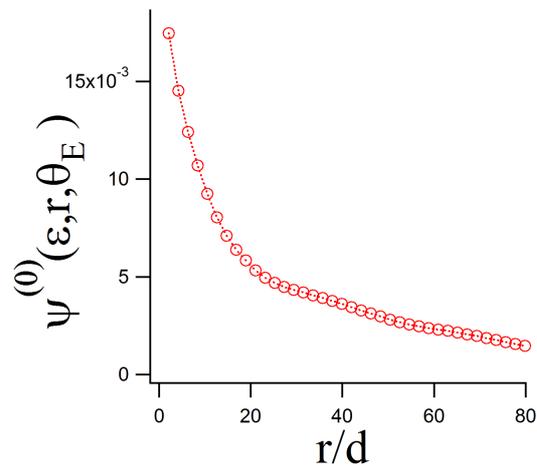


FIGURE V.7 – Décroissance lente de la fonction de corrélation spatiale pour les angles $\theta_E \approx \pm 53^\circ$ en fonction de r en tailles de billes.

V.2.2 Problème de l'inclusion d'Eshelby

Le problème de l'inclusion d'Eshelby consiste à considérer un matériau homogène, isotrope, élastique et infini. Dans cette matrice élastique, on considère une inclusion qui va subir une modification de forme spontanée qui correspond à l'événement plastique localisé. Le principe de la résolution du problème est de réaliser une expérience de pensée (figure V.8) qui consiste à

- retirer l'inclusion de la matrice, elle subit alors un changement de forme spontanée correspondant à une déformation \mathbf{e}^* .
- lui appliquer une contrainte pour lui rendre sa forme initiale,
- la replacer dans la matrice et relâcher la contrainte.

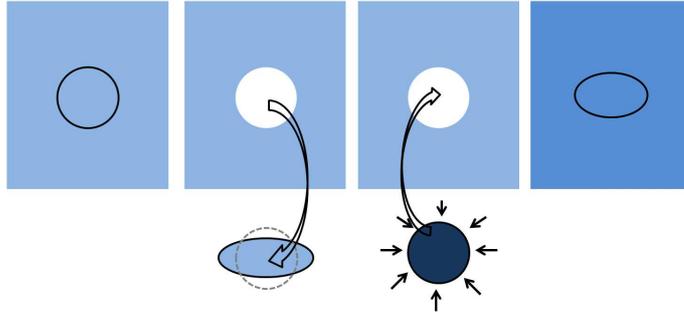


FIGURE V.8 – Inclusion Eshelby

Si on considère que la déformation libre associée à l'inclusion est en accord avec les conditions imposées par le test biaxial en déformation plane, c'est-à-dire

$$\mathbf{e}^* = \begin{pmatrix} e_{xx}^* & 0 & 0 \\ 0 & e_{yy}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.15})$$

on peut calculer la contrainte $\tilde{\sigma}$ redistribuée dans la matrice élastique loin de l'inclusion. On s'intéresse plus particulièrement à la dépendance angulaire de la contrainte déviatorique, le calcul de $\tilde{\sigma}$ donne $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} \propto f(\theta)$ avec :

$$f(\theta) = (e_{xx}^* - e_{yy}^*) \left[-\frac{15}{4} \cos(4\theta) + \frac{8\nu - 7}{4} \right] - \frac{9}{2} (e_{xx}^* + e_{yy}^*) \cos(2\theta) \quad (\text{V.16})$$

où ν est le coefficient de Poisson de la matrice.

Si $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} > 0$, la contrainte déviatorique redistribuée s'ajoute à la contrainte déviatorique appliquée et la déformation croît dans ces directions. La valeur est maximum pour

$$\cos(2\theta_E^*) = \left(\frac{3}{10}\right) \frac{e_{yy}^* + e_{xx}^*}{e_{yy}^* - e_{xx}^*}. \quad (\text{V.17})$$

Dans le cas d'une déformation \mathbf{e}^* isovolume, $\theta_E^* = 45^\circ \pmod{90^\circ}$, voir la représentation de $f(\theta)$ figure V.9. Dans le cas où la déformation ne s'effectue pas à volume constant, et en considérant $e_{yy}^* < 0$ et $e_{xx}^* > 0$, c'est-à-dire que la déformation plastique de l'inclusion suit la déformation macroscopique de l'échantillon on peut montrer que θ_E^* croît si l'événement plastique est dilatant et décroît s'il est contractant.

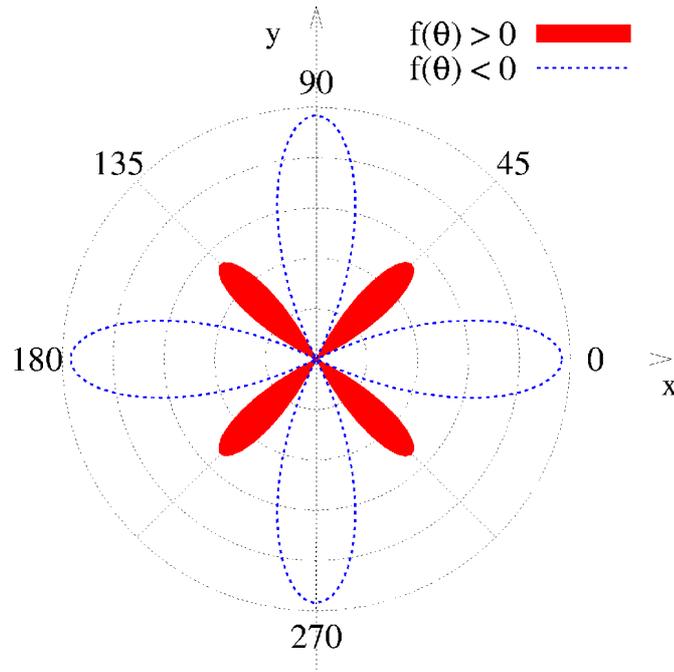


FIGURE V.9 – Résultat du calcul d'Eshelby montrant la répartition spatiale de la redistribution des contraintes, $f(\theta) > 0$ dans les directions autour de $\theta = 45^\circ \pmod{90^\circ}$ dans le cas où $\text{Tr}(\mathbf{e}^*)=0$.

V.2.3 Étude numérique

Durant la thèse, nous avons entamé une collaboration avec Sean McNamara (Institut de Physique de Rennes) pour associer à notre travail expérimental des simulations numériques par la méthode des éléments discrets (Discrete Element Me-

thod, DEM). Dans le cadre de cette collaboration, Sean McNamara a modélisé un test biaxial en 2D dans des conditions similaires à celles de l'expérience. En effet, une pression constante sur une paroi et une vitesse constante sur une autre paroi sont imposées tandis que les deux autres parois sont fixes, voir figure V.10(a).

La simulation est réalisée avec un nombre $N = 256^2$ grains et leurs positions sont enregistrées pour des incréments de déformation $\delta\varepsilon = 10^{-5}$, soit du même ordre de grandeur que les incréments de déformation des cartes de corrélations de nos expériences. On calcule la variation de distance moyenne des grains avec leurs voisins pour l'incrément de déformation $\delta\varepsilon$. Les grains sont représentés d'une couleur de plus en plus sombre pour une déformation locale de plus en plus importante, de manière à avoir une visualisation des déplacements relatifs similaire à celle des expériences.

Une première étude numérique consiste à modifier les constantes élastiques de quelques grains situés au centre de la "boîte" (en les rendant plus mous) durant un test biaxial. Le résultat est présenté sur la figure V.10(b). On observe une déformation importante dans la zone des grains mous et, autour des grains mous, une distribution anisotrope de la déformation, cette dernière étant plus importante dans les directions proches de 45° . Ceci indique une redistribution des contraintes favorables dans ces directions.

On réalise également des simulations de test biaxial sans modification des constantes élastiques, on y observe des réarrangements spontanés (figure V.10(c)) impliquant plusieurs billes avec des déformations plus importante dans les directions proches de 45° , comme dans le cas du réarrangement provoqué. De plus, on observe des petites bandes d'orientations prédites par Eshelby et qui forment un réseau. Le comportement similaire entre les simulations et les expériences valide l'hypothèse de la déformation plane.

V.2.4 Interprétation

On considère qu'un réarrangement impliquant quelques grains peut être modélisé comme un petit élément subissant une déformation plastique au sein d'une matrice élastique, c'est le problème de l'inclusion d'Eshelby. Dans le cadre de cette interprétation, propre aux matériaux amorphes décrits au §I.3, une réorganisation des grains a lieu lorsque localement une contrainte seuil est dépassée et cette réorganisation provoque elle-même une redistribution des contraintes dans le matériau autour de

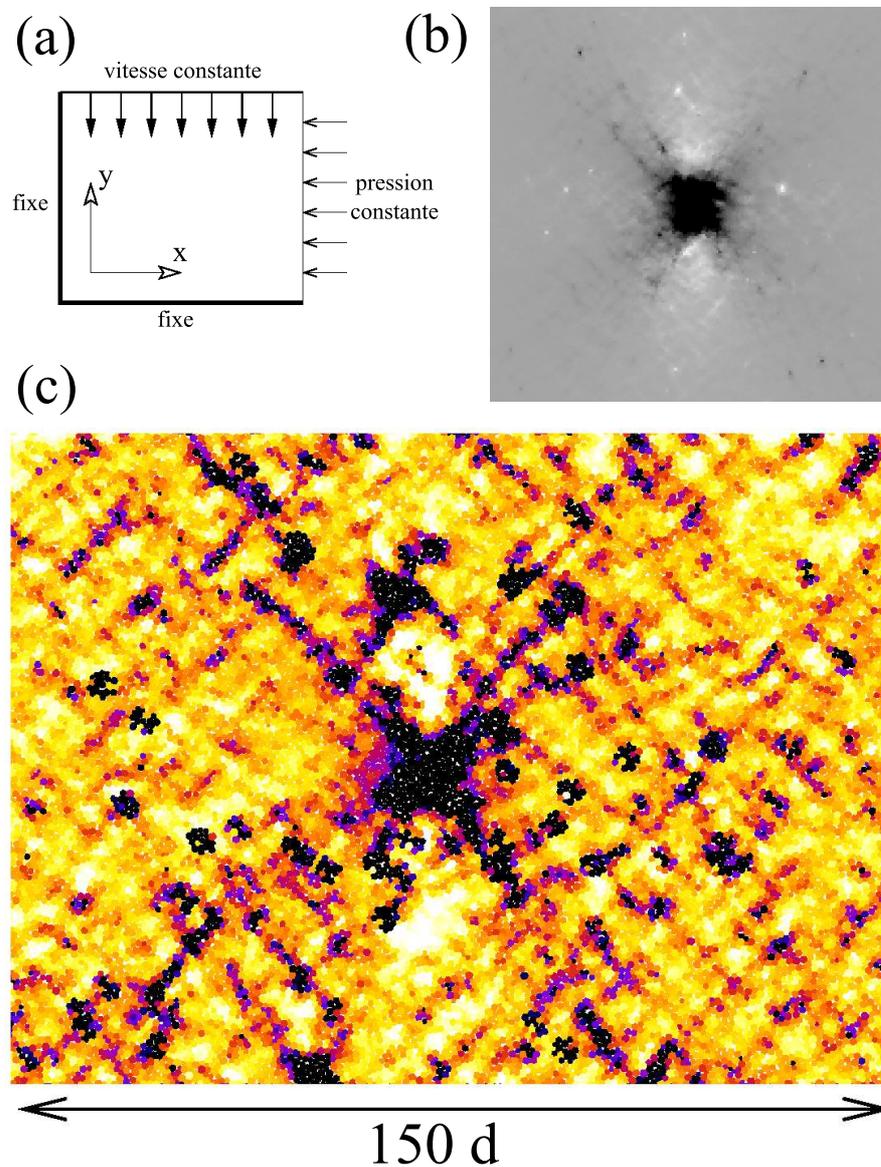


FIGURE V.10 – (a) Conditions aux limites des simulations numériques de test biaxial. (b) Événement provoqué en modifiant les constantes élastiques d'un ensemble de grains situés au centre de la boîte. (c) Carte de déformations d'une simulation numérique de test biaxial dans laquelle on observe un événement plastique spontané impliquant plusieurs grains (au centre) et des déformations importantes autour de ce réarrangement plutôt dans les directions $\pm 45^\circ$. Plus loin du réarrangement central, on observe des petites bandes orientées dans des directions proches de 45° .

l'événement plastique localisé. Cette redistribution est favorable dans des directions prédites par Eshelby, proches de $\pm 45^\circ$ et jusqu'à 54° dans le cas d'un événement dilatant. L'augmentation des contraintes dans certaines directions favorise d'autres réarrangements le long de ces dernières (figure V.12), ceux-ci, tels une réaction en chaîne, en favorisent d'autres et ainsi de suite... On parle alors de cascade de réarrangements, liée à un couplage à grande distance permettant de décrire la dynamique collective émergente.

L'observation de petites bandes intermittentes dans les directions prédites par Eshelby peut être interprétée comme le résultats de plusieurs événements le long de ces bandes. La visualisation du réseau de bandes intermittentes dans nos expériences mais aussi dans les simulations numériques constitue, en ce sens, une preuve indirecte de la dynamique de couplages de réarrangements décrite plus haut.

Cette interprétation ne faisant pas intervenir la friction comme dans Mohr-Coulomb, on peut s'interroger sur le lien entre le réseau de bandes intermittentes et les bandes de cisaillement permanentes. Dans la partie suivante, nous étudions la dynamique du réseau de bandes et celle de la formation des bandes de cisaillement finales.

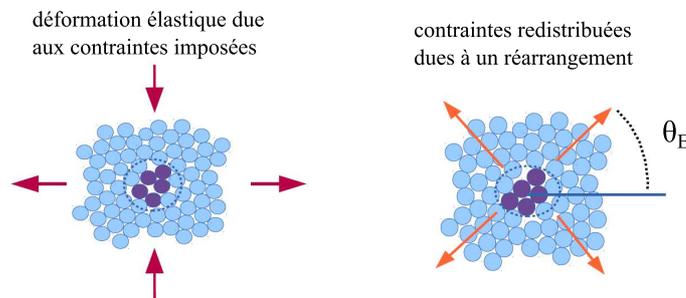


FIGURE V.11 – À gauche : déformation d'un ensemble de grains. À droite : redistribution des contraintes.

V.3 Études sur la dynamique de déformation

Dans les deux parties précédentes, nous avons caractérisé deux modes de déformation différents qui ont lieu lors d'une unique expérience :

- à la rupture, au delà d'une contrainte seuil apparaît une ou deux bandes de cisaillement permanentes. Ce mode de déformation plastique est interprété par un modèle frictionnel : Mohr-Coulomb (§V.1) ;

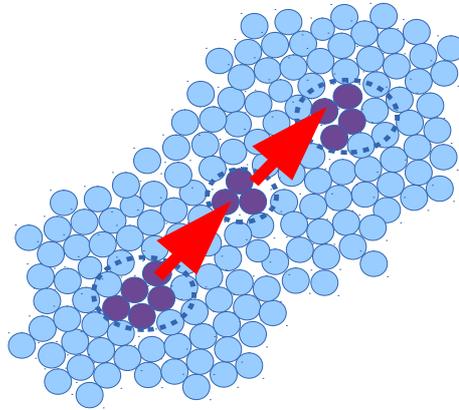


FIGURE V.12 – Événements couplés : une réorganisation favorisant une autre puis une autre etc... formant ainsi une cascade d'événements le long de petites bandes d'orientation prédites par Eshelby.

- avant la rupture, un réseau de petites bandes intermittentes est présent, il est assimilé à une succession de réarrangements locaux propre à la plasticité des milieux amorphes (§V.2).

Pour une déformation axiale ε de 3 à 5 %, on observe les deux modes de déformation avec des petites bandes intermittentes se superposant à la formation de grandes bandes de cisaillement finales. Comment se passe la transition entre les deux phénomènes ? Sont-ils couplés ? Sont-ils en compétition l'un avec l'autre ?

C'est pour tenter de répondre à ces questions que nous étudions la dynamique de ces modes de déformation. D'abord, nous utilisons les fonctions de corrélation spatiale et spatio-temporelle pour étudier la dynamique des bandes intermittentes. Puis, les histogrammes de projection sont appliqués sur des cartes de corrélation moyennées sur plusieurs images pour caractériser la dynamique d'apparition des bandes de cisaillement finales. Enfin, une analyse multi-échelle est réalisée pour suivre l'évolution de la taille caractéristique des déformations au cours de la charge.

V.3.1 Dynamique du réseau de bandes intermittentes

Afin d'analyser la dynamique du réseau de bandes intermittentes, on utilise la fonction de corrélation spatio-temporelle définie §IV.1.2 et on définit une fonction χ qui dépend de $\Psi^{(\Delta\varepsilon)}$ et qui permet de quantifier la partie anisotrope de Ψ (voir figure V.13) :

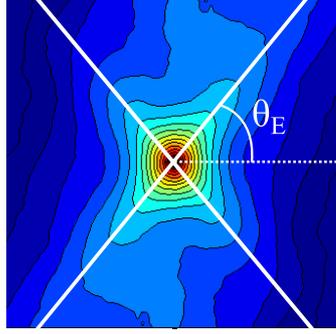


FIGURE V.13 – La fonction χ est la valeur de Ψ selon les angles $\pm\theta_E$ (lignes blanches) à laquelle on soustrait la valeur moyenne Ψ_{iso} le long de θ .

$$\chi^{(\Delta\varepsilon)}(\varepsilon, r) = \frac{1}{2}[\Psi^{(\Delta\varepsilon)}(\varepsilon, r, \theta_E) + \Psi^{(\Delta\varepsilon)}(\varepsilon, r, -\theta_E)] - \Psi_{iso}^{(\Delta\varepsilon)}(\varepsilon, r) \quad (\text{V.18})$$

avec $\Psi_{iso}^{(\Delta\varepsilon)}(\varepsilon, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^{(\Delta\varepsilon)}(\varepsilon, r, \theta) d\theta$ la partie isotrope de $\Psi^{(\Delta\varepsilon)}$. Dans un premier temps on étudie uniquement la dépendance spatiale $\Delta\varepsilon = 0$, la figure V.14 montre $\chi^{(0)}(\varepsilon, r)$ en fonction de r/d (d , le diamètre moyen des billes) pour différentes valeurs de ε . L'allure générale de ces fonctions est celle d'une courbe en cloche présentant un maximum qui peut être obtenu par un ajustement quadratique. On observe que les valeurs des $\chi^{(0)}(\varepsilon, r)$ croissent avec la charge ε : la valeur du maximum augmente ainsi que la position de ce dernier.

Pour quantifier la croissance de la partie anisotrope de la corrélation et la croissance de son extension spatiale en fonction de r au cours de la charge, on définit deux quantités :

- l'intégrale $A(\varepsilon) = \int_{r=0}^{r=\ell/2} \chi^{(0)}(\varepsilon, r) dr$, c'est-à-dire l'aire sous chaque courbe ;
- et la distance caractéristique $\xi(\varepsilon)$ pour laquelle la partie anisotrope est maximum, c'est-à-dire le maximum des ajustements.

On trace ces deux quantités au cours de la charge figure V.15, on constate que l'intégrale $A(\varepsilon)$ et la distance caractéristique $\xi(\varepsilon)$ augmentent avec la déformation axiale ε jusqu'à la rupture du matériau. Nous avons comparé nos résultats avec la longueur de coopérativité tracée sur la même figure et définie par Henann *et al.* dans [HK13] comme $\zeta = \frac{A \cdot d}{\sqrt{\mu_c - \mu}}$ avec $A = 0,48$, μ provenant de l'analyse de Mohr-Coulomb : $\mu = \tan\phi$ avec $\sin\phi = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$ et μ_c est la valeur de μ à la rupture. On observe que si l'allure des courbes est similaire, l'ordre de grandeur des longueurs

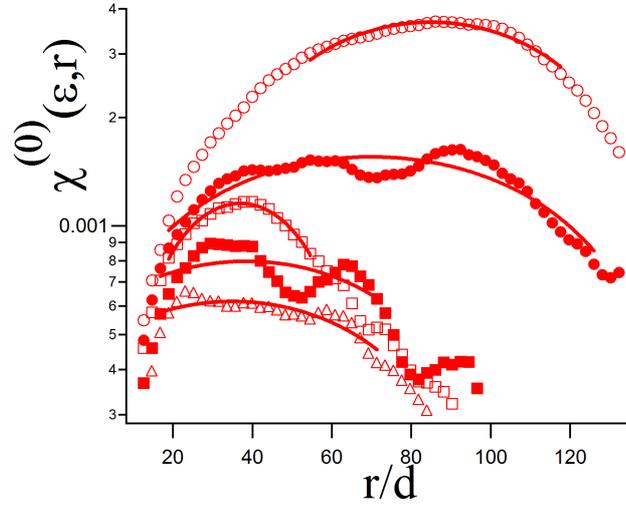


FIGURE V.14 – $\chi^{(0)}(\varepsilon, r)$ en fonction de r/d pour différentes valeurs de déformation axiale $\varepsilon = 1,6\%$ (triangles creux), $\varepsilon = 2,3\%$ (carrés pleins), $\varepsilon = 3,7\%$ (carrés creux), $\varepsilon = 4,0\%$ (cercles pleins), $\varepsilon = 4,4\%$ (cercles creux). Les lignes sont les ajustements quadratiques autour des maximums.

de corrélations mesurées et de la longueur de coopérativité issue du modèle est très différent.

Les petites bandes de cisaillement organisées en réseau sont intermittentes. Pour caractériser la persistance des micro-bandes, nous avons calculé la fonction de corrélation spatio-temporelle $\chi^{(\Delta\varepsilon)}$ pour différents $\Delta\varepsilon$ (voir §IV.1.2).

On trace $(\chi^{(\Delta\varepsilon)}/\chi^{(0)})(\varepsilon, \xi(\varepsilon))$ en fonction de $\Delta\varepsilon$ pour des déformations axiales ε données (3,3%, 4,0% et 4,4%), voir figure V.16. On observe que la fonction de corrélation chute rapidement pour $\varepsilon = 3,3\%$ et $\varepsilon = 4,0\%$ tandis qu'elle demeure significative pour $\varepsilon = 4,4\%$. Ceci montre que la persistance des micro-bandes augmente lorsqu'on s'approche de la rupture.

L'augmentation significative de la longueur de couplage des micro-bandes et de leur persistance correspond à des valeurs de la déformation pour lesquelles les directions de rupture finale commencent à apparaître sous la forme de larges bandes diffuses à l'intérieur desquelles les micro-bandes sont localisées. Il est donc nécessaire de caractériser l'apparition de ces bandes diffuses et c'est ce que nous allons faire dans la suite.

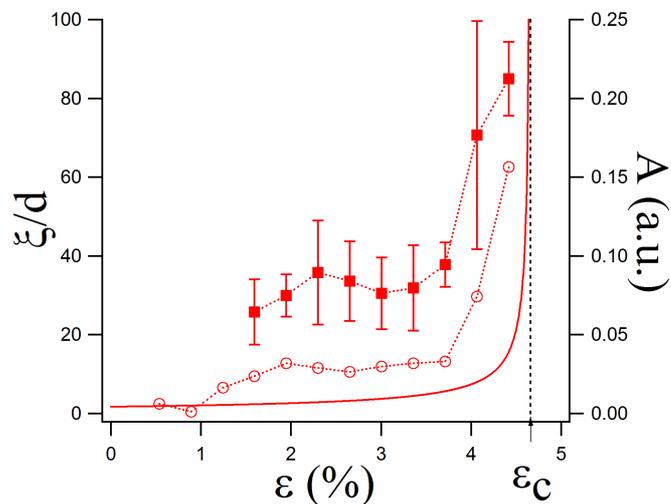


FIGURE V.15 – Longueurs ξ/d (carrés pleins) et amplitude moyenne A (cercles creux) en fonction de la déformation axiale ε . La ligne pointillée noire indique la déformation axiale à la rupture $\varepsilon_c \approx 4,66\%$. La courbe pleine rouge est la longueur de coopérativité.

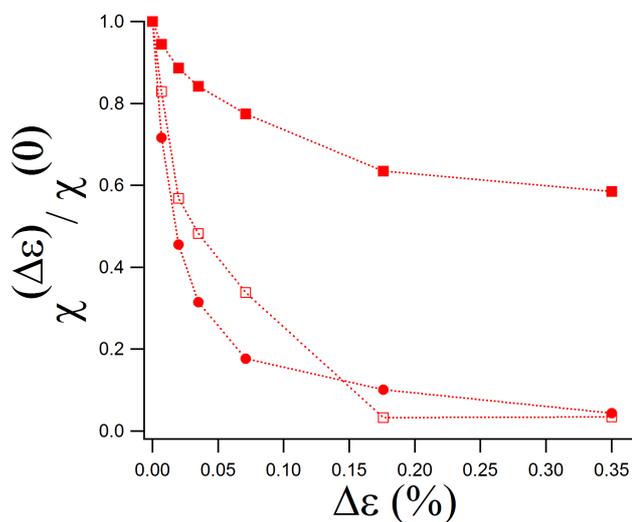


FIGURE V.16 – Relaxation de $(\chi^{(\Delta\varepsilon)}/\chi^{(0)})(\varepsilon, \xi(\varepsilon))$ en fonction de l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon$ pour $\xi(\varepsilon = 3,3\%) = 33d$ (cercles pleins), $\xi(\varepsilon = 4,0\%) = 70d$ (carrés creux) et $\xi(\varepsilon = 4,4\%) = 85d$ (carrés pleins).

V.3.2 Dynamique de formation des bandes de cisaillement finales

Pour étudier la dynamique de formation des bandes de cisaillement finales, nous avons appliqué les histogrammes de projection (présentés §IV.2.1.2). Pour ceci, nous avons réalisé cette étude sur des cartes de corrélations moyennes, en effet, les cartes sont moyennées sur 50 images soit sur un incrément de déformation axiale $\Delta\epsilon \approx 0,18\%$. On présente figure V.17 les images moyennées et les histogrammes de projection correspondant à des déformations proches de 2, 3, 4, et 5%. Pour chaque figure, on encercle en noir le maximum de la carte des histogrammes de projection et on trace en pointillés verts, la droite correspondant aux coordonnées de ce maximum sur la carte de corrélations moyennée. On observe que la plasticité s'organise dès $\epsilon = 2\%$ le long d'une direction générale correspondant initialement sur les histogrammes de projection à un maximum diffus qui s'affirme progressivement. La direction principale est initialement proche de la verticale et diminue jusqu'à atteindre l'angle de Mohr-Coulomb.

Pour caractériser l'apparition des bandes de cisaillement finales, nous avons suivi l'intensité et la largeur de la bande principale au cours de la charge. On s'intéresse également à l'évolution de l'inclinaison de la bande principale. Pour cela, pour chaque carte de corrélations moyennée, on relève le maximum d'intensité de l'ensemble des histogrammes de projection. Ensuite, on mesure la largeur à mi-hauteur sur l'histogramme correspondant, comme indiqué sur la figure V.18, enfin on relève l'angle β correspondant au maximum. Ces 3 données sont tracées au cours de la charge à partir de $\epsilon = 2,2\%$, déformation axiale à partir de laquelle il est possible d'identifier clairement un maximum d'intensité et de mesurer une largeur à mi-hauteur.

Sur la figure V.18(b), on trace l'évolution de l'inclinaison de la bande de cisaillement au cours de la charge. L'inclinaison est donnée par l'angle du maximum des profils directionnels. On observe une inclinaison θ très inclinée -75° pour $\epsilon = 2,2\%$ puis qui croît jusqu'à environ $-65^\circ \pm 2^\circ$ au delà de $\epsilon = 4,0\%$. Le fait que l'inclinaison de la bande soit proche de -75° au début de la charge est probablement dû au fait que la déformation principale imposée à l'échantillon est verticale. En effet, on observe que la majorité des décorrélatons sur les cartes de corrélations pour ϵ allant de $2,2\%$ à $\epsilon = 4,0\%$ ont lieu sur une large bande verticale.

Sur la figure V.18(c), on trace l'évolution de l'intensité du maximum au cours

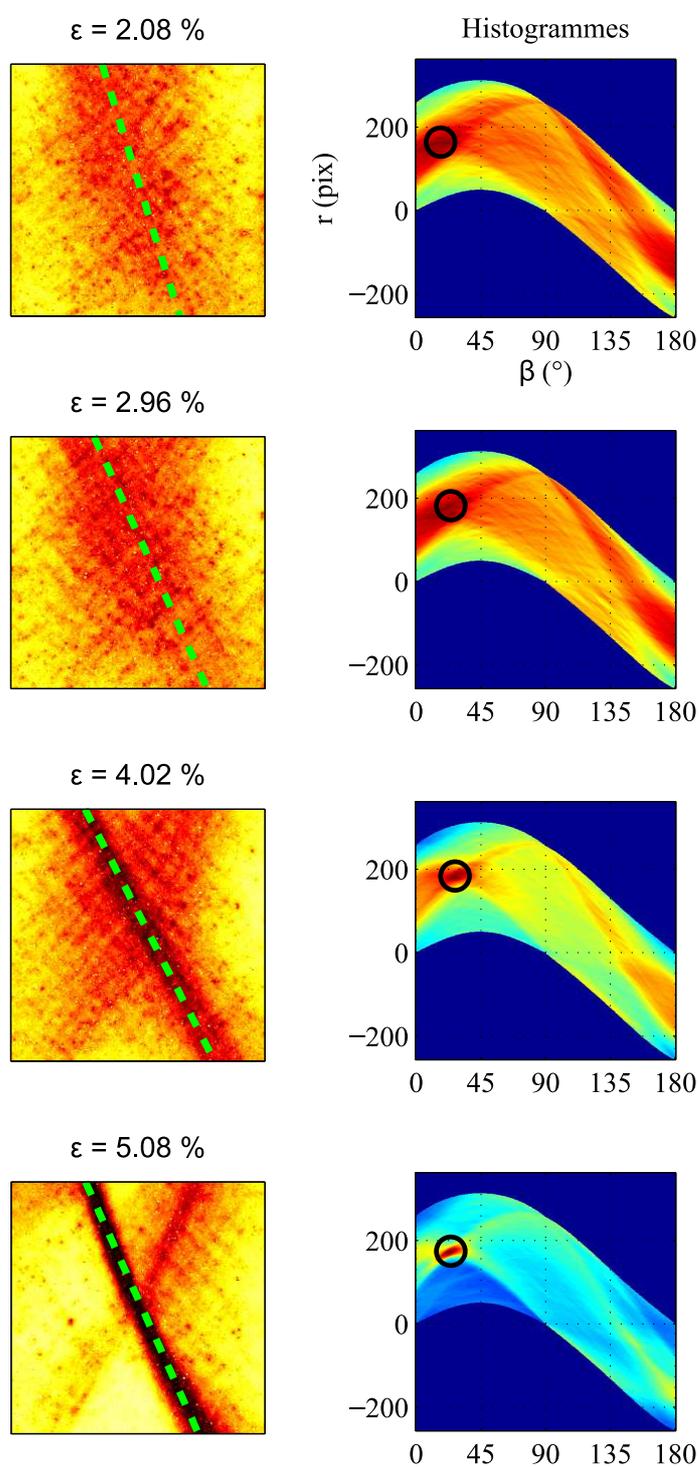


FIGURE V.17 – Cartes de corrélations moyennées pour des déformations proches de 2, 3, 4, et 5% et pour chacune l'ensemble des histogrammes de projection correspondants. Le maximum des histogrammes est cerclé en noir et la droite correspondante est tracée en pointillés verts sur les cartes de corrélations.

de la charge. On observe une croissance à partir de $\varepsilon = 2\%$ et une augmentation de la pente à partir de $\varepsilon = 3,5\%$ jusqu'à une valeur proche de ε_c , on observe ensuite un palier de 4,7 à 6,0%.

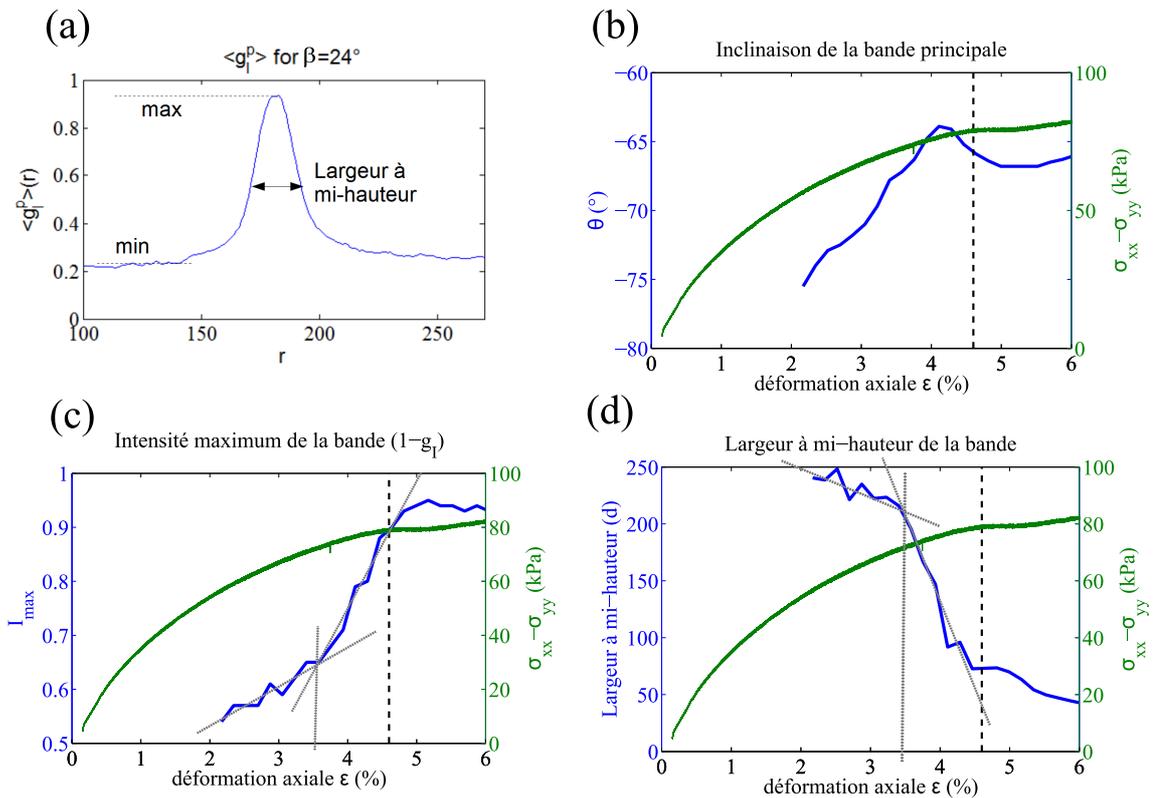


FIGURE V.18 – (a) Mesure de la largeur à mi-hauteur de la bande de cisaillement (voir §IV.2.1.2). (b) Inclinaison de la bande de cisaillement principale au cours de la charge. (c) Intensité maximale de la bande de cisaillement principale ($1 - g_I$) au cours de la charge. (d) Largeur à mi-hauteur de la bande de cisaillement principale au cours de la charge.

Sur la figure V.18(d), on trace l'évolution de la largeur à mi-hauteur de la bande au cours de la charge. La largeur décroît durant toute la charge avec une pente plus importante à partir de $\varepsilon \approx 3,5$ jusqu'à la rupture, elle décroît ensuite plus lentement. La zone des prémices de la bande de cisaillement principale s'affine donc tout au long de la charge avec l'essentiel de l'apparition de la bande finale entre $\varepsilon \approx 3,5\%$ et la rupture.

Nous avons observé que la dynamique de formation de la bande finale a lieu principalement à partir de $\varepsilon = 3,5\%$, déformation à partir de laquelle l'intensité de la bande (ou des prémices de la bande) croît fortement et la largeur de la bande diminue fortement jusqu'à la rupture vers $\varepsilon = 4,6\%$.

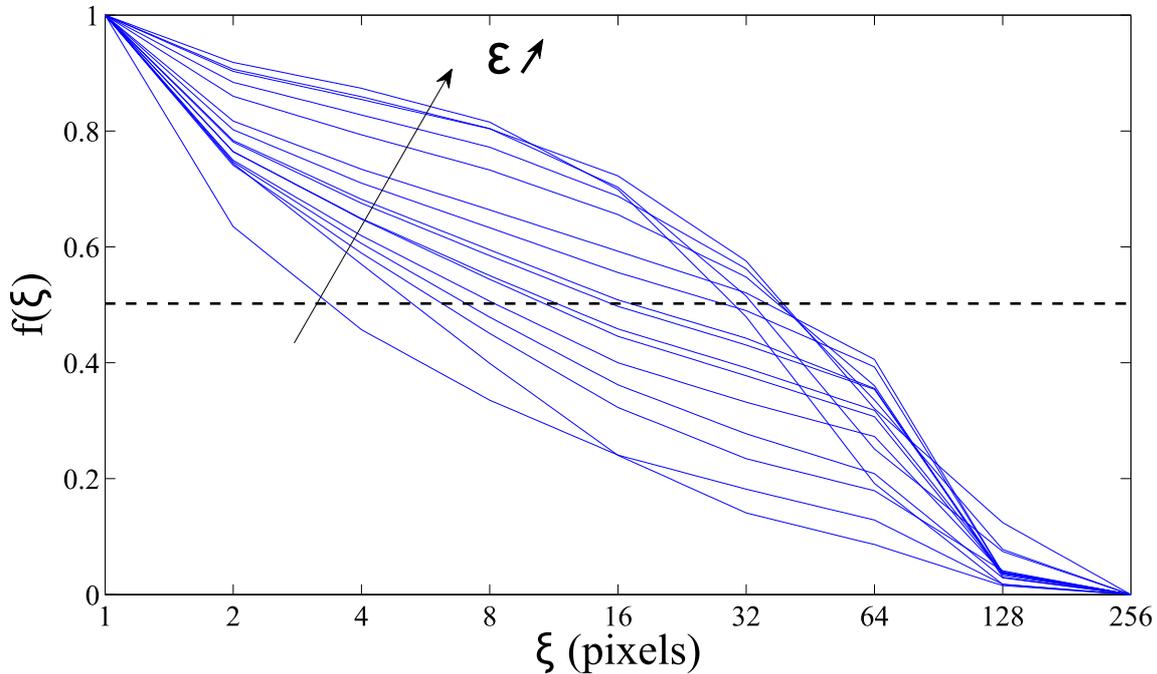


FIGURE V.19 – Allure de $f(\xi)$ au cours de la charge en fonction de la taille de boîte ξ . La taille caractéristique des déformations est définie comme ξ tel que $f(\xi) = 0,5$.

V.3.3 Analyse multi-échelles

Les deux études précédentes, sur la dynamique des bandes intermittentes et sur la dynamique d'apparition de la bande de cisaillement finale, sont difficiles à relier. En effet, les outils d'analyse d'images utilisés (respectivement la fonction de corrélation spatiale et les histogrammes de projection sur des images moyennées) servent à caractériser l'un ou l'autre des deux modes de déformation. Pour tenter d'établir un lien entre les deux, nous suivons l'évolution de la taille caractéristique des déformations par analyse multi-échelle, outil qui a été présenté au §IV.3.

Nous avons tracé la fonction $f(\xi)$ équation IV.14 §IV.3 pour quelques images au cours de la charge de l'expérience B, figure V.19. D'après l'étude sur les images tests (figure IV.14), le point d'inflexion de la fonction $f(\xi)$ devrait correspondre à la taille caractéristique des déformations observées. Cependant le point d'inflexion des fonctions $f(\xi)$ de l'expérience est difficile à obtenir notamment en début de charge où les courbes sont convexes. On choisit de définir la taille caractéristique des déformations par la taille de boîte ξ pour laquelle $f(\xi) = 0,5$. On observe que cette taille croît au cours de la charge.

Nous avons tracé l'ensemble des fonctions $f(\xi)$ au cours de la charge, figure V.20.

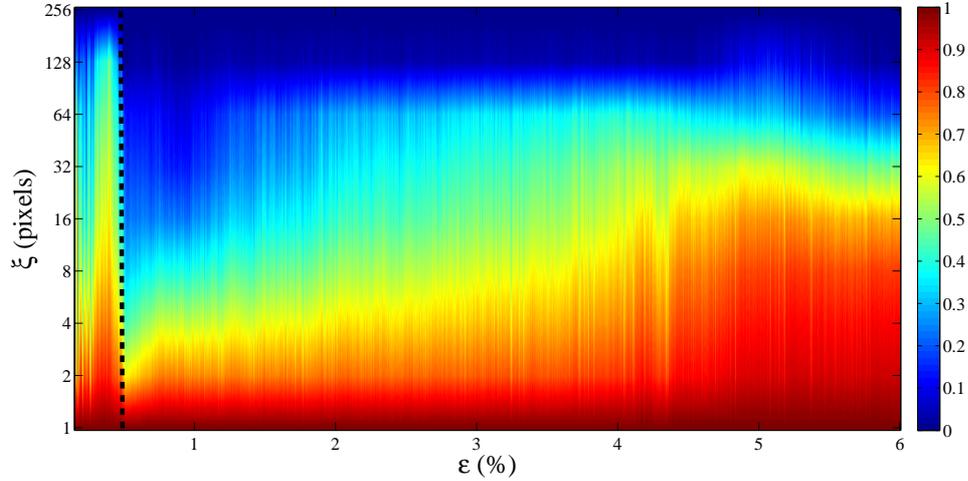


FIGURE V.20 – Carte de l’ensemble des fonctions $f(\xi)$ au cours de la charge. En tout début de charge, de 0 à 0,4%, la décorrélation observée sur tout l’échantillon est importante, seule la dynamique à partir de 0,5% nous intéresse.

On peut donc suivre la taille caractéristique des déformations (taille de boîtes pour laquelle la valeur de $f(\xi) = 0,5$ soit la couleur verte sur la figure V.20). Cette taille caractéristique des déformations est tracée figure V.21. On constate une croissance de cette taille caractéristique au cours de la charge qui va de $\xi = 4$ pixels au début de la charge à $\xi = 32$ pixels à la fin de la charge. La taille de 32 pixels correspond à une taille d’environ 70 d (1 pixel $\approx 2,1d$). La largeur de la bande de cisaillement finale de 70 d est tout à fait cohérente avec la figure V.18(d) à ε_c et sur les deux figures, on observe que cette valeur décroît ensuite (après ε_c , la bande s’affine). Aux petites déformations, la taille $\xi = 4$ pixels correspond à environ 10 d et correspond à la largeur des micro-bandes ainsi qu’à la taille typique d’un événement localisé.

La dynamique de croissance de la taille caractéristique entre ces deux extrêmes (10 d à 70 d) est complexe, nous avons tenté de la caractériser par le rapport des moments normalisés M_q . On trace sur la figure V.22, la fonction $M_q = \frac{\langle D^q \rangle^{(1/q)}}{\langle D^{(1/q)} \rangle^q}$ où $D = -\ln(g_I)$ et $q = 1,5$. Ces résultats sont en cours d’analyse.

V.3.4 Discussion

L’étude sur la dynamique du réseau de bandes intermittentes et l’étude sur la formation des bandes de cisaillement montrent clairement qu’à partir de $\varepsilon = 3,5\%$, le réseau de bandes intermittentes et les bandes de cisaillement finales cohabitent.

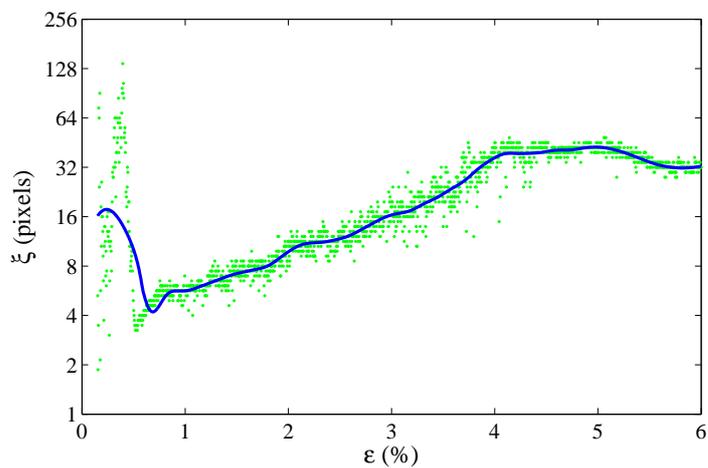


FIGURE V.21 – Évolution de la taille caractéristique des déformations (valeurs de ξ pour lesquelles $f(\xi) = 0,5$) au cours de la charge.

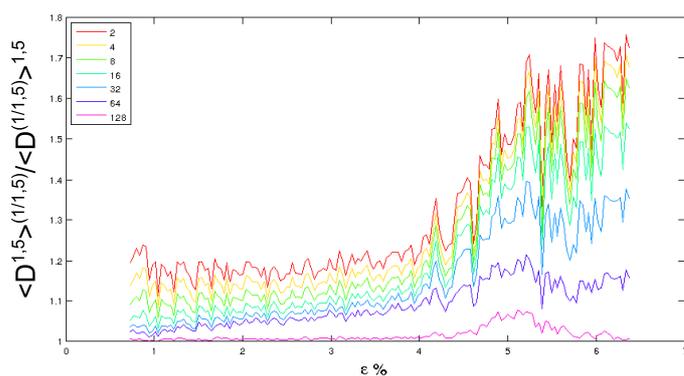


FIGURE V.22 – Évolution du rapport de moments normalisés $M_q = \frac{\langle D^q \rangle^{(1/q)}}{\langle D^{(1/q)} \rangle^q}$ au cours de la charge pour $q = 1,5$ pour des valeurs de ξ allant de 2 à 128.

Par exemple, sur la figure V.15, bien que nous ayons pris soin de choisir une région d'analyse suffisamment petite pour minimiser l'influence de l'apparition des bandes finales dans l'analyse de la dynamique des micro-bandes, à partir de 3,5%, elle n'est sans doute pas complètement négligeable. Le lien entre le réseau de petites bandes intermittentes et la bande de cisaillement frictionnelle est complexe et pas encore compris. L'apparition de la bande de cisaillement principale ne semble pas être le fruit de plusieurs petites bandes qui coalescent, ni d'une seule bande qui croît plus que les autres. Il semble que la friction n'intervienne dans la structuration de la déformation qu'au delà d'une certaine déformation axiale à partir de laquelle les directions des bandes de cisaillement principales apparaissent peu à peu tandis que des réarrangements continuent d'avoir lieu. On observe ainsi de petites bandes intermittentes se formant dans une zone plastique dont la forme se modifie dessinant progressivement le lieu des bandes finales.

V.4 Analyse complémentaire par suivi de particules

Nous présentons dans cette dernière partie les résultats des mesures de suivi de particules complémentaires des analyses en DWS. Cette étude porte sur un autre test que celui analysé dans ce chapitre mais avec les mêmes contraintes biaxiales, c'est-à-dire la même phénoménologie globale, voir figure V.26 (notons cependant que cette expérience ne présente pas de maximum ou de plateau bien marqué). Nous présentons d'abord nos mesures du champ de déplacement. Puis, à partir de la divergence du vecteur vitesse, nous déduisons la variation de fraction volumique de l'échantillon.

V.4.1 Champ de déplacement des billes

On étudie le champ de déplacement des billes dans le plan xy , pour cela on calcule le vecteur déplacement de chaque reflet de bille comme indiqué §II.3 (voir figure V.23). On observe l'apparition progressive des bandes de cisaillement finales en moyennant les déplacements sur de petites zones d'environ $5d$ (d : diamètre de grains) comme expliqué §II.3 et en suivant le déplacement moyen selon x et selon y (figures respectives V.24 et V.25). Chaque image des figures correspond à une moyenne sur une déformation axiale $\delta\varepsilon \approx 10^{-3}$.

On observe sur les champs de déplacement finaux (figure V.23) qu'après la rup-

ture différents blocs du matériaux sont en translation les uns par rapport aux autres. Avant la rupture (figures V.24 et V.25), on n'observe pas de micro-structure. En effet, la résolution spatiale des champs de déplacement est de 5 d tandis que l'épaisseur des micro-bandes est de l'ordre de 10 d. D'autre part, ces champs sont moyennés sur des incréments de déformation de 0,1%, incrément pour lequel on a déjà quasiment perdu la persistance des micro-bandes (voir figure V.16).

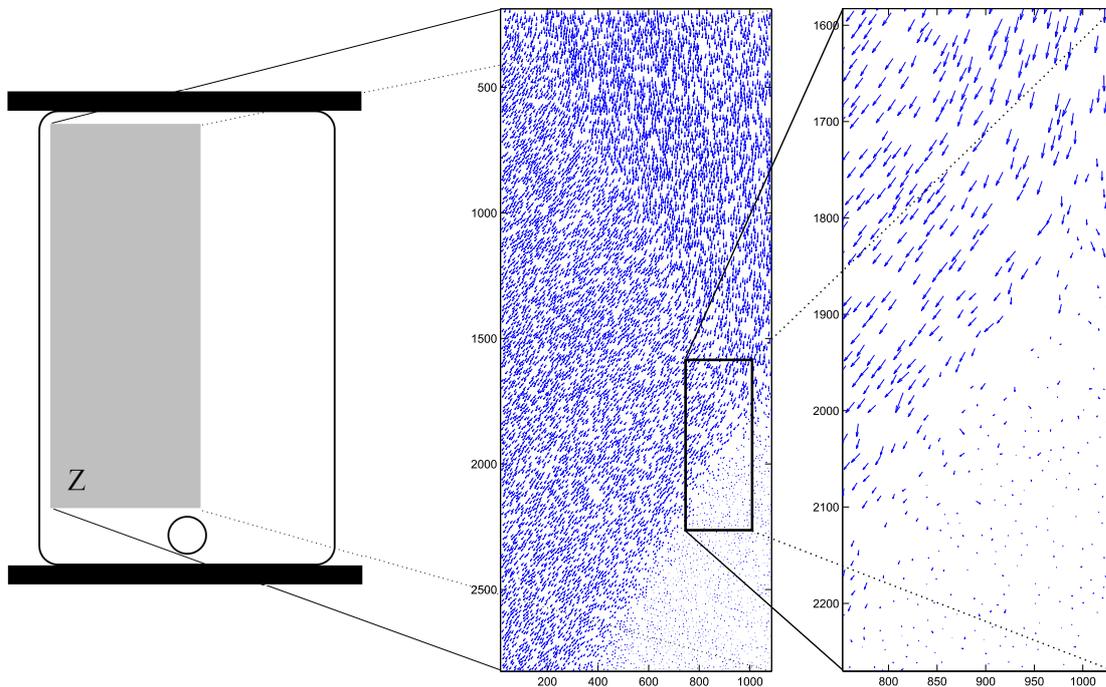


FIGURE V.23 – Champ de déplacement brut des billes correspondant à un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon \approx 10^{-3}$ autour de la déformation axiale $\varepsilon = 8,7\%$. Chaque bille est représentée par son vecteur déplacement. L'exemple montré représente la partie gauche de l'échantillon.

V.4.2 Variation de fraction volumique

Comme indiqué §II.3.3, on peut obtenir la variation de fraction volumique à partir du champ de déplacement des billes. On observe d'abord une compaction jusqu'à environ 2,6% puis une dilatation ensuite, ce qui correspond au comportement attendu dans ce type de test. Sur la figure de la divergence locale V.27 à la fin de

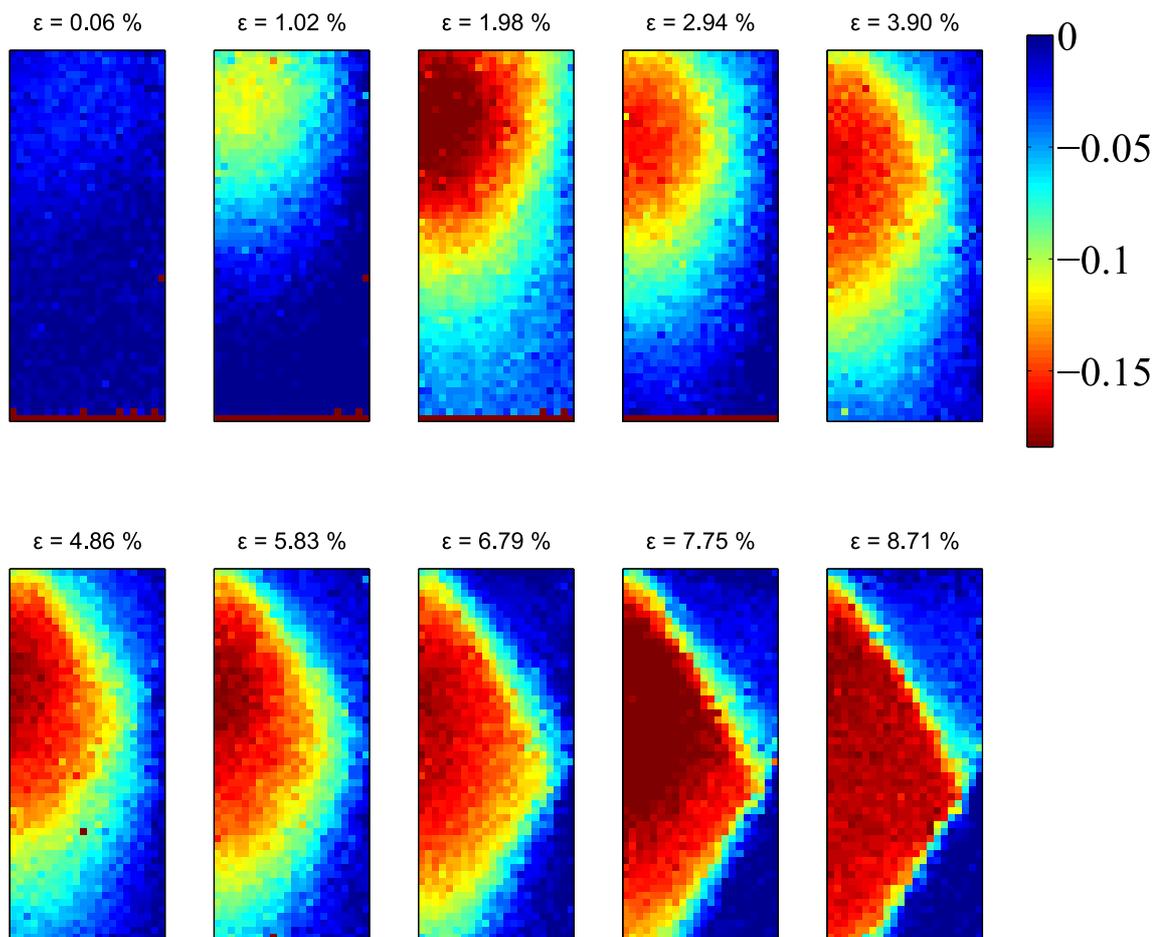


FIGURE V.24 – Champ de déplacement (de la moitié gauche de l'échantillon) selon l'axe Ox pour des incréments de déformation de $\delta\varepsilon = 0,11\%$. L'échelle de couleurs est exprimée en diamètre de grains.

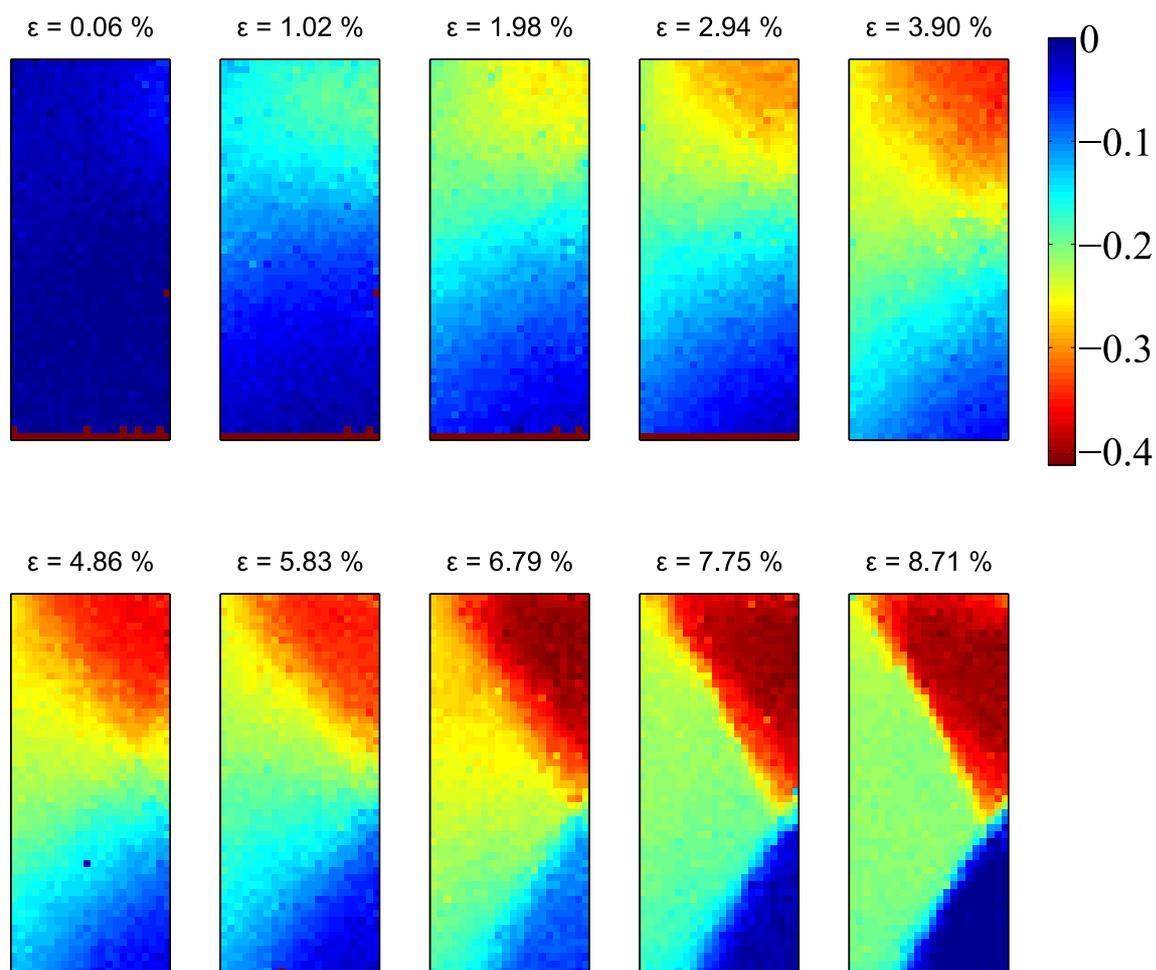


FIGURE V.25 – Champ de déplacement selon l'axe Oy pour des incréments de déformation de $\delta\varepsilon = 0,11\%$. L'échelle de couleurs est exprimée en diamètre de grains.

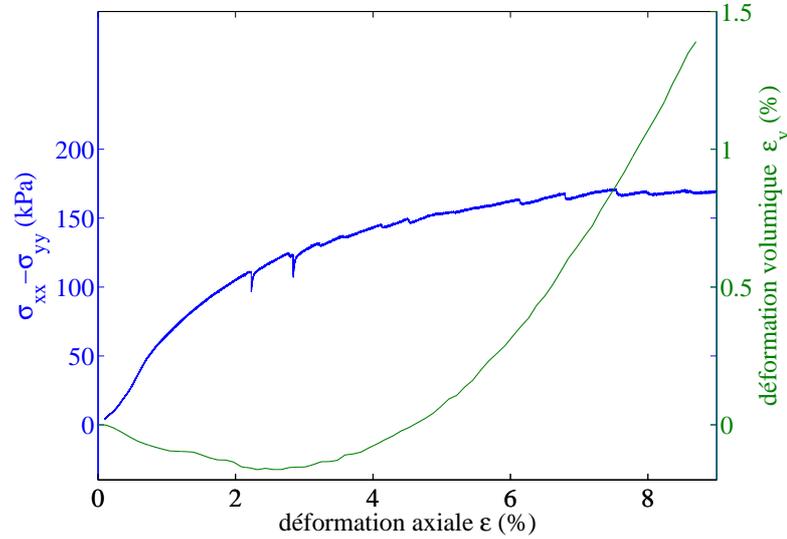


FIGURE V.26 – Courbe de charge et déformation volumique ε_V au cours de la charge.

la charge (bandes finales) on peut voir des valeurs supérieures et inférieures à la tendance moyenne dans le reste de l'échantillon. L'image de la déformation scalaire est comparable aux images de DWS, on observe nettement les bandes de cisaillement finales dans lesquelles la déformation est importante devant le reste de l'échantillon.

Nous avons tenté de réaliser des expériences avec une double visualisation : par suivi de particules à la paroi et par DWS. Par manque de temps, nous n'avons pas obtenu de résultats exploitables mais les résultats présentés ici en terme de champs de déplacement, de déformation volumique et de déformation scalaire sont prometteurs et l'association des deux techniques de visualisation sur une même expérience permettrait une caractérisation globale avec l'association du champ de déplacement des billes à la surface et du champ de déformation par DWS, donnant également la variation de fraction volumique de l'échantillon.

V.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons caractérisé deux modes de déformation plastique au cours de la charge : d'abord des réarrangements locaux avec redistribution des contraintes de type Eshelby qui donne lieu à au couplage longue-distance de ces réarrangements formant ainsi un réseau de petites bandes intermittentes. Ensuite, on

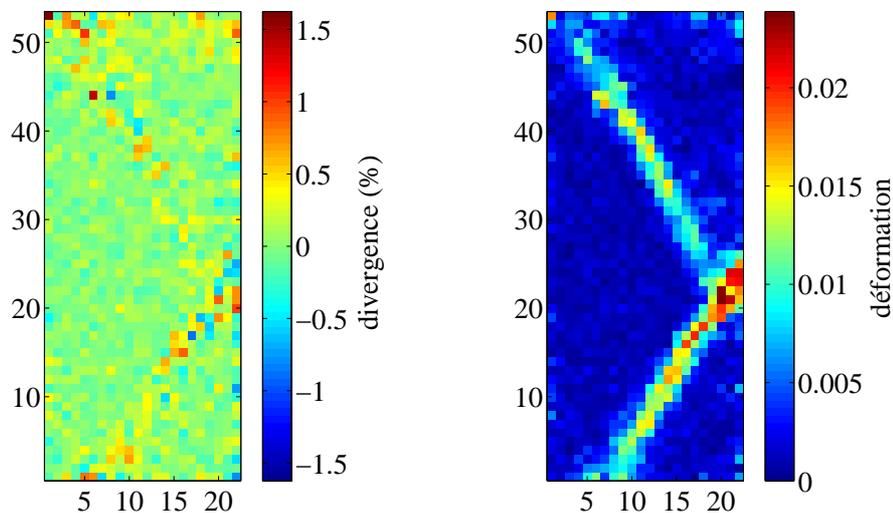


FIGURE V.27 – Divergence et déformation scalaire du champ de vecteur moyenné de la figure II.21.

observe un mode de rupture de type Mohr-Coulomb. Les études sur la dynamique de ces deux types de déformation ont mis en lumière qu'il existait une relation entre les deux. Les bandes finales commencent à se former tôt dans la courbe de charge. Elles forment initialement de larges bandes diffuses qui contiennent les bandes intermittentes. L'étude du couplage entre ces deux modes est un travail en cours.

La visualisation directe par suivi de particule à la paroi nous a permis de valider notre étude tant avec la variation de fraction volumique de l'échantillon qu'avec la visualisation des bandes finales. Les résolutions spatiales et en déformation de cette méthode ne permettent pas encore de contribuer à la compréhension fine de la dynamique de formation des bandes.

Conclusion

Notre travail portait sur l'étude des micro-déformations d'un milieu granulaire dans un test biaxial. Ce travail s'est découpé en trois grandes parties : Le développement du dispositif expérimental, la réalisation d'expériences et l'analyse des déformations observées.

Nous avons développé un dispositif expérimental original de test biaxial en déformation plane qui permet d'observer les déformations d'un milieu granulaire par DWS. Le dispositif permet également de suivre les particules à la paroi. Le test biaxial s'effectue sur un système modèle : des billes de verre d'une taille de l'ordre de la centaine de micromètres. Ce dispositif nous permet d'appliquer des contraintes axiales et latérales homogènes et bien contrôlées, et d'obtenir à l'aide d'un capteur de force, une courbe de charge (contrainte déviatorique en fonction de la déformation axiale). Les courbes obtenues lors de nos expériences correspondent aux courbes de charge typiques de ce type de test en mécanique des sols.

Les déformations observées à la rupture, c'est-à-dire au maximum de la courbe de charge, sont des bandes de cisaillement permanentes qui correspondent également aux déformations typiques observées dans ces conditions. L'inclinaison des bandes, leur épaisseur et leur interprétation sont encore des sujets ouverts. Nous utilisons le modèle de Mohr-Coulomb pour les décrire. En étudiant la dynamique d'apparition de ces bandes de cisaillement finales, nous avons pu observer que les prémices de ces bandes apparaissaient tôt dans la charge, soit avant la rupture.

En revanche, d'autres types de déformations apparaissent avant la rupture. Celles-ci n'ont à notre connaissance jamais été observées expérimentalement. En effet, on observe une dynamique intermittente de petites bandes organisées en réseau dont l'inclinaison est différente des bandes finales (Mohr-Coulomb). Nous avons comparé l'inclinaison des bandes aux solutions du problème de l'inclusion d'Eshelby utilisé pour décrire la plasticité des amorphes. Nous interprétons ces petites bandes comme une cascade de réarrangements localisés.

Même si nos analyses, notamment l'analyse multi-échelle, montrent une croissance de la taille caractéristique des déformations, la formation de la bande de cisaillement finale ne peut être vue comme la croissance ou la percolation des micro-bandes intermittentes. Les deux dynamiques (micro-bandes intermittentes et bande permanente frictionnelle) sont couplées de manière complexe et cette compréhension est le sujet d'une thèse qui débute actuellement.

En plus de ces questions liées au couplage entre les événements et la réponse associée du matériau, les nombreuses expériences présentées dans cette thèse, effectuées dans différentes conditions, soulèvent de nombreuses questions d'intérêt aussi bien pour la mécanique des sols que pour la compréhension physique du processus de formation des bandes : pourquoi l'inclinaison des bandes semble dépendre du diamètre des billes ? Quelle est la dynamique d'évolution de la bande de cisaillement finale, une fois cette dernière formée ? Quel est l'effet des bords et coins ainsi que du rapport d'aspect de l'échantillon ? Pourquoi l'inclinaison de la bande n'est-elle pas uniforme sur tout l'échantillon ?

À l'évidence, la rupture de Mohr-Coulomb et sa dynamique de formation sont loin d'être des sujets clos. Cette thèse a permis de comprendre certains aspects de la déformation plastique d'un milieu granulaire mais il reste beaucoup de choses à faire !

Annexe A

A biaxial apparatus for the study of heterogeneous and intermittent strains in granular materials

Antoine Le Bouil · Axelle Amon · Jean-Christophe Sangleboeuf ·
Hervé Orain · Pierre Bésuelle · Gioacchino Viggiani ·
Patrick Chasle · Jérôme Crassous

Received: 20 June 2013 / Published online: 14 January 2014
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Abstract We present an experimental apparatus specifically designed to investigate the precursors of failure in granular materials. A sample of granular material is placed between a latex membrane and a glass plate. A confining effective pressure is applied by applying vacuum to the sample. Displacement-controlled compression is applied in the vertical direction, while the specimen deforms in plane strain. A diffusing wave spectroscopy visualization setup gives access to the measurement of deformations near the glass plate. After describing the different parts of this experimental setup, we present a demonstration experiment where extremely small (of order 10^{-5}) heterogeneous strains are measured during the loading process.

Keywords Granular materials · Plane strain · Diffusing wave spectroscopy · Shear band

1 Introduction

Describing the mechanical behavior of granular materials is a very challenging task, especially when dealing with strain localization phenomena that eventually leads to macroscopic

failure. Strain localization (often referred to as shear banding) has quite a practical relevance, as stability and deformation characteristics of earth structures are often controlled by the soil behavior within the zones of localized strain [1–3]. Yet, the mechanisms responsible for the formation of these zones in granular materials are still subject to debate. While the formation of a shear band is now generally interpreted as a bifurcation problem in continuum mechanics (e.g. [4,5]), its theoretical and numerical treatment still presents special problems for granular materials (see for example the monograph by Vardoulakis and Sulem [6] and the review paper by Bésuelle and Rudnicki [7]). While the issues of orientation and thickness of shear bands have been debated for decades, other, more intricate issues have more recently attracted the interest of experimental research in this field: among the others, the occurrence of temporary or “non-persistent” modes of localization, that is, localized regions which form during the test and eventually “disappear” (see for example [8]). From an experimental standpoint, temporary modes of strain localization are inherently more difficult to observe and characterize than final, persistent shear bands. Not only they are transient, but they are also characterized by less intense shear strain. Many optical methods are available for measuring strain fields in a deforming granular assembly (see [9]). However, many of them fail to detect these temporary patterns of strain localization, because their spatial and temporal resolution is not fine enough (it should be mentioned, though, that recently the performance of digital image correlation (DIC) based methods has been significantly improving thanks to the increasingly higher resolution of existing cameras). In this paper, we present a full-field method that has the capability to detect fine non persistent regions of localized strain. First we present the experimental setup, specifically designed to resolve strains as small as 10^{-5} , as well as the interferometric method for measuring strain (Sect. 2). In Sect. 3 we

A. Le Bouil · A. Amon · P. Chasle · J. Crassous (✉)
IPR-UMR 6251, University Rennes 1, 35042 Rennes Cedex, France
e-mail: jerome.crassous@univ-rennes1.fr

A. Amon
e-mail: axelle.amon@univ-rennes1.fr

J.-C. Sangleboeuf · H. Orain
LARMAUR-ERL CNRS 6274, University Rennes 1,
35042 Rennes Cedex, France

P. Bésuelle · G. Viggiani
Laboratoire 3SR, UJF-Grenoble 1, Grenoble-INP, CNRS UMR 5521,
Grenoble, France

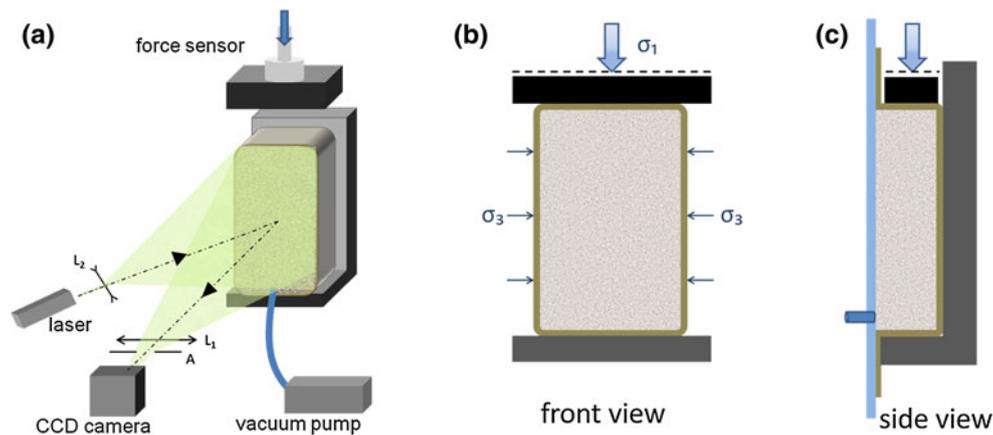


Fig. 1 Sketch of the experimental setup. The material is placed between a glass plate and a latex membrane. **a** The *front* is illuminated by a laser beam which is expanded by the lens L_2 in order to light the whole sample. Multiple light scattering occurs in the grains assembly and part of the light is backscattered. The *front side* of the sample is imaged by the lens L_1 on the CCD camera. The size of the speckle spots

is controlled by the diaphragm aperture A . The vacuum pump maintains a depressurization inside the sample at the origin of the stress σ_3 on the lateral walls. A force sensor on the top of the loading plate measures the stress σ_1 corresponding to the imposed displacement. **b** *Front view* with the applied stresses. **c** *Side view* showing the plane strain configuration: the displacements are blocked by the front (glass plate) and back walls

discuss the experimental protocols, and in Sect. 4 we discuss the results of a typical experiment, showing the potential of the experimental setup.

2 Experimental setup

2.1 Overview of the setup

The experimental setup consists of a plane strain apparatus coupled with a dynamic light scattering setup. The schematic drawing of the setup is shown in Fig. 1. The granular material is placed between a latex membrane and a glass plate, and a vacuum is applied in the granular material. A confining effective pressure σ_3 results from the applied vacuum. The granular material is compressed on the top through the displacement of a plate. The displacement of the top plate and the force exerted on it are measured during the compression. In front of the apparatus, on the side of the glass window, a light scattering setup is placed. The front of the granular material is illuminated with an extended laser beam. The light which is scattered by the granular material is recorded by a camera imaging the front of the sample. We analyze the scattered light in order to access to information about the deformation of the granular material.

2.2 Mechanical part

The drawing of the mechanical part of the setup is shown on Fig. 2. The granular sample (Fig. 2 ⑥) of size $(85 \times 55 \times 25) \text{ mm}^3$ is submitted to a biaxial test in plane strain conditions. To limit the gravity effects and homogenize the

force along out-of-the-plane direction, the granular matter is maintained by depressurization between a glass plate and a latex membrane. A motorized translation stage (Fig. 2 ①, ②, Thorlabs) is used for the compression. The loading plate (Fig. 2 ④) is fixed on the linear long-travel translation stage (Fig. 2 ③, Thorlabs LNR50 Series) which is driven by a stepper motor (DC Servo Motor Actuator, Thorlabs DRV414). The DC Motor Controller (Thorlabs BDC101) allows to pilot the translation stage. The two main controls are the speed of the stage (length of the step per second) and the stop position. Between the loading plate and the translation stage a 500 N force sensor (Fig. 2 ③, Measurements Specialities) gives the force applied on the sample.

2.3 Spatially resolved diffusing wave spectroscopy

The measurement of the deformation of the granular material is obtained with a spatially resolved home-made diffusing wave spectroscopy (DWS) setup described in detail elsewhere [10]. DWS is an interference technique using scattering of coherent light by strongly diffusive materials. A light beam emerging from a laser source enters the sample (Fig. 3), and is scattered many times. The different exiting rays interfere on the camera sensor and produce a speckle pattern consisting of dark and bright spots (see right part of Fig. 3). A displacement of the scatterers modifies the path length of the rays. This produces changes in the phases of the scattered waves. Those phase variations induce modifications of the speckle pattern. The variation of the speckle pattern is then characterized by the computing of the correlation function of the scattered light.

Fig. 2 Front (left) and side (right) views of the biaxial apparatus. ① motor, ② motorized translation stage, ③ force sensor, ④ loading plate, ⑤ glass window, ⑥ sample of granular material, ⑦ translation stage, ⑧ bottom plate, ⑨ back plate, ⑩ positioning axis, ⑪ structure, ⑫ wedges holding the glass window

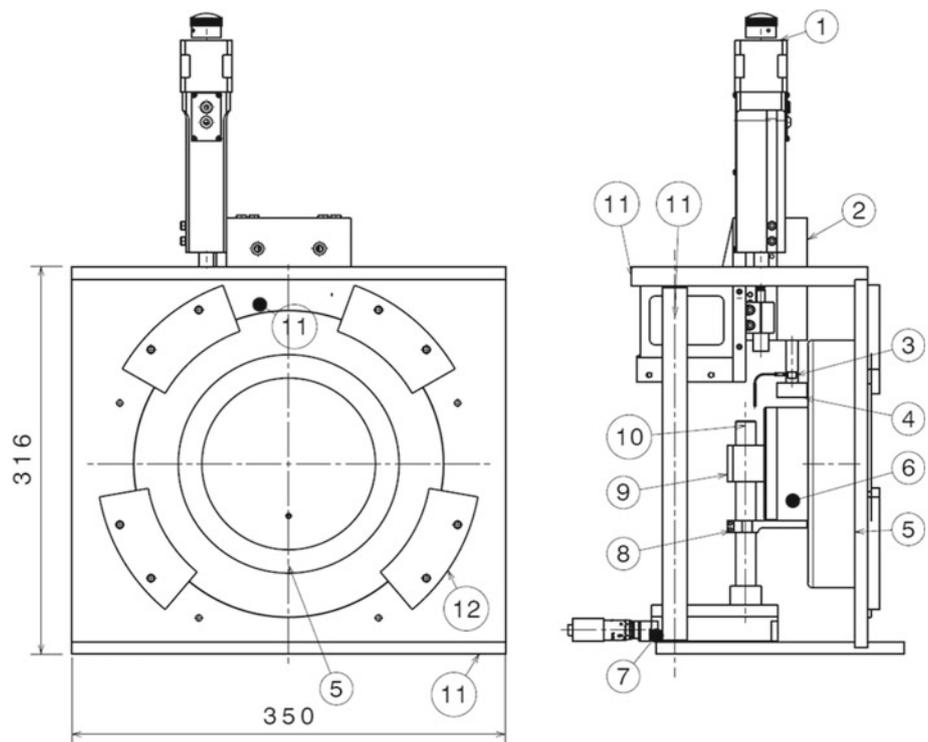
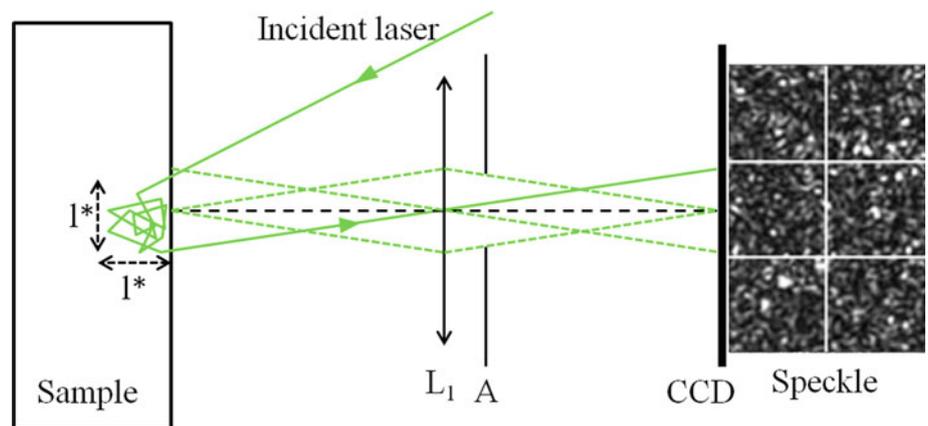


Fig. 3 Example of an incident ray path undergoing multiple scattering inside the granular media and backscattered through the lens and the diaphragm aperture on the camera. Right example of 6 meta-pixels of the speckle pattern recorded with the camera



As shown in Fig. 1a, we are in a backscattering geometry for DWS, meaning that the backscattered light is collected. In practice, the glass window side of the sample is illuminated by a laser source of wavelength $\lambda = 532 \text{ nm}$ and maximum output power 75 mW (Compass 215M from Coherent). The beam is expanded with the lens L_2 (see Fig. 1a) in order to illuminate the whole front face of the sample. The image of the front is done using a lens L_1 of focal length 100 mm, allowing a magnification in agreement with the whole optical system (sample-camera). The speckle pattern is recorded with a camera (PT-41-04M60 from DALSA) with $2,352 \times 1,728$ resolution and pixel size $7.4 \mu\text{m}$.

Speckle analysis The speckle pattern is recorded by the camera. Correlations of the scattered intensities are

calculated between two images 1 and 2 in the following way. First the speckle images are divided into square regions that we called meta-pixels (see image on right of Fig. 3). For each meta-pixel, the correlation function $g_I^{(12)}$ between the two intensities I_1 and I_2 is computed as,

$$g_I^{(12)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2} \sqrt{\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle^2}}, \quad (1)$$

where I_1 and I_2 are the matrices of intensities of the meta-pixel considered, and averages are performed over all the pixels of the meta-pixel. The correlation function (Eq. 1) is normalized so that $g_I^{(12)} = 1$ if $I_1 = I_2$, and $g_I^{(12)} = 0$ if the intensities are uncorrelated. The link between the displacements of the beads and the value of the correlation function may be estimated from a model of light propagation into

the granular material. As the bead assembly strongly scatters light, rays follow random walks inside the material. The transport mean free path, i.e. the persistent length of the random walk of light in the material is denoted by l^* . Typically, for a granular material, this optical constant is few diameters of grains. We will discuss the value of l^* and its implication on the spatial resolution of the deformation maps that we obtain in Sect. 3.3. If the deformation of the material between the two images 1 and 2 can be considered as affine and homogeneous on the scale of a meta-pixel, the correlation function can be expressed in backscattering geometry as [10–12]:

$$g_I^{(12)} \approx \exp(-\eta k l^* \sqrt{f(\mathbf{U})}), \quad (2)$$

where η is an optical factor of order 1, and $f(\mathbf{U}) = \frac{1}{5} \text{Tr}^2(\mathbf{U}) + \frac{2}{5} \text{Tr}(\mathbf{U}^2)$ is a function of the invariant of the strain tensor $\mathbf{U} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. If the bead displacements is the sum of an affine motion with a strain tensor \mathbf{U} and an uncorrelated motion of the beads, we then expect [13]:

$$g_I^{(12)} \approx \exp\left(-\eta k \sqrt{(l^*)^2 f(\mathbf{U}) + \langle \Delta r^2 \rangle}\right), \quad (3)$$

with $\langle \Delta r^2 \rangle$ the average of the quadratic displacement of the uncorrelated motion of the beads.

3 Experimental protocol

Here we summarize the different steps of the protocol of fabrication of the latex membrane and of preparation of the granular material. The limitations and the sensitivity of both the mechanical device and the optical setups are detailed. The control of the camera and the acquisition of images, the force sensor monitoring and the displacement control are all ensured by a Labview interface on a computer.

3.1 Preparation of the membrane and granular sample

As shown in Fig. 4a, the latex membrane is made by spreading successive layers of liquid latex with a paintbrush on a plaster mold of the required dimensions. After drying it generates a planar membrane with a hollow of the size of the sample. The same membrane can be used for several tests. To prepare the sample, the membrane is laid in a counter-mold horizontally and the granular material is poured in the hollow (Fig. 4b). A compaction protocol is applied to the pile according to the desired volume fraction. The glass plate is then placed over the membrane (Fig. 4c). A flexible pipe connects the vacuum pump to the glass plate and the sample is pressed on the glass instantly by depressurization. We use vacuum grease between the annular part of the latex membrane and the glass plate for better sealing and adherence. The grease

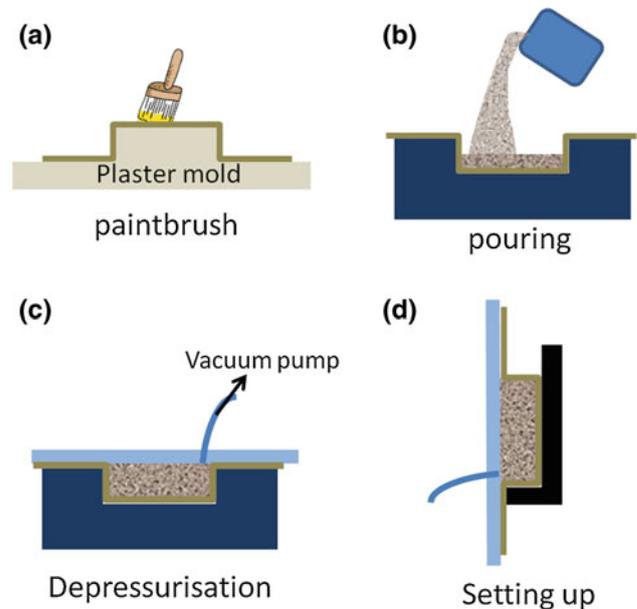


Fig. 4 Steps for preparing a sample. **a** Confection of the latex membrane on a plaster mold. **b** The latex membrane is fitted into a counter mold and the granular material is poured and possibly compacted. **c** The glass plate is laid overall, and partial vacuum is created in the sample. **d** The sample is placed on the biaxial apparatus

is viscous and does not creep into the bulk solid during the whole time of the experiment. A pressure sensor and an air valve allow the measurement and control of the depressurization using a feedback loop. Then the window (Fig. 2 ⑤), bearing the sample, is fixed on the structure of the biaxial apparatus using wedges (Fig. 2 ⑬). Because of residual air leakages and long duration experiments, the pump and the pressure control system are active during the whole loading experiment. To achieve plane strain conditions, the back plate and the bottom plate are brought in contact with the sample using a translation stage (Fig. 2 ⑦). The loading is applied using a plate larger than the sample in the σ_3 direction (more than 55 mm, see Fig. 1b), and slightly smaller than the sample thickness in the other direction (<25 mm, see Fig. 1c). The distances between the glass plate and the loading plate on one hand and between the back plate and the loading plate on the other hand are approximately of 1 mm. Our apparatus does not give the position of the granular material with respect to the motorized translation stage ②.

3.2 Mechanical stiffness of the system

Several tests have been conducted to characterize the apparatus. The range of the force sensor is limited to 500N and its calibration has been made using known loads. Its stiffness has been investigated and the spring constant of the sensor has been measured in two different ways. First, using a stiff micrometer stage we have imposed a known

deformation to the sensor, and have measured the force on the sensor. We obtained a stiffness for the sensor of $k_{sens} = (4.3 \pm 0.2) \times 10^6 \text{ N m}^{-1}$. We have also tracked the deformation of the sensor by following the displacement of markers above and below the sensor using a method described in [14], and have measured $k_{sens} = (5 \pm 1) \times 10^6 \text{ N m}^{-1}$. Other tests were conducted to measure the stiffness of the bottom plate and the stiffness of the whole loading device. The stiffness of the whole system has been tested in a Hertz contact configuration and is found to be $k_{sys} = 7.3 \times 10^5 \text{ N m}^{-1}$. The stiffness of a block of material of section S , length L and of Young modulus E is $k_{mat} = SE/L$. For $S \approx 1.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ and $L \approx 85 \text{ mm}$, $k_{sys} = k_{mat}$ for $E = 44 \text{ MPa}$. This gives an estimation of the limit value of the Young modulus above which the correction due to the apparatus stiffness must be taken into account. The motorized linearized stage is limited to a maximal loading of 250 N. Tests confirm this value, with an activation of security around 240 N. Estimation of the membrane rigidity from the values of latex elastic modulus show that the elasticity of the membrane is negligible.

3.3 Optical protocol and sensitivity

The first optical issue is to acquire a suitable speckle pattern. The focal length of the lens and the distances between the sample, the lens and the camera have to be in agreement with the magnification allowing to image the whole surface of the sample on the camera. Then the diaphragm aperture (see Fig. 3) allows adjustment of the size of the speckle spots. This size is determined from the Fourier transform of the image of intensity. The size of the speckle spot is fixed to ≈ 2.3 pixels which is a good compromise between the necessity to have the maximum number of speckle spots, and the need for the speckle spots to be at least few pixels.

Concerning the time resolution, the stepper motor frequency is limited to one step per second, the acquisition rate of the images to 4 frames/s, and we acquire 1 image per motor step. The correlation maps are calculated between 2 images using Eq. (1). These two images can be spaced out by a specific time interval.

The spatial resolution of the deformation map that we obtain is dependent on both the camera used and of the granular material. As for the camera, the correlation functions must be calculated on large enough areas in order to minimize the statistical error when evaluating Eq. (1). In practice, the noise on the correlation function is kept to an acceptable level if the size of a meta-pixel is at least 16×16 pixels. With a speckle size of 2.3 pixels, this corresponds to ~ 50 speckle spots per meta-pixel. Concerning the material, the resolution is limited by the light scattering process inside the granular media. Photons that enter the granular material at a given point typically exit the media at a distance smaller or of order l^* and have mainly probed zones inside the material

of size l^* . So, as shown on Fig. 3, a photon that emerges from a given point of the material have explored a volume of order $(l^*)^3$. The information about the deformation of the material is thus naturally averaged over this volume as shown in Fig. 3. The spatial resolution is thus limited to l^* by the scattering process. The optimal choice of the optical setup is when a meta-pixel on the camera is the image of an area of order $l^* \times l^*$ on the object. If we call L the largest dimension of the material sample, the optimum of resolution is attained with our 2,352 pixel width camera when $L/l^* = 2352/16 \approx 150$. For a sample size of $L = 85 \text{ mm}$, this corresponds to an optimal value of $l^* \approx 0.6 \text{ mm}$. For spherical glass beads, model of light propagation into granular material [12] and experiments [11, 12, 15] show that $l^* \approx 3.3 d$, with d the mean bead diameter. For Fontainebleau sand, we measured $l^* \approx 2.0 d$ [15]. So optimal value for grains diameter is typically $d = 200\text{--}300 \mu\text{m}$ depending on the material.

It should be stressed that those resolution considerations hold for the best spatial resolution. With this resolution, one meta-pixel corresponds to deformation that are averaged on typical sizes of l^* i.e. of few d . Larger beads may be also used: we made DWS studies with glass beads of diameter $d = 500 \mu\text{m}$ in a different experimental geometry [16, 17]. Smaller beads may also be used but with a spatial resolution larger than l^* . Keeping the same spatial resolution may however be achieved by zooming on a smaller part of the sample, or with an image acquisition device with better spatial resolution such as high resolution camera.

4 A demonstration experiment

In order to show the potential of the apparatus that we built, we propose here a demonstration experiment where we compress a model granular system made of cohesionless nearly spherical glass beads.

4.1 Settings

We used for this experiment glass beads of $200\text{--}300 \mu\text{m}$ diameter in a membrane of dimension 85 mm height, 55 mm width and 25 mm depth. Concerning the preparation of the sample, the grains are poured inside the membrane and then softly shaken by hand for a regular compaction before the depressurization. The confining pressure is fixed to a value $\sigma_3 = 30 \text{ kPa}$. Using the mean value of the grains diameter, the transport mean free path can be estimated to $l^* \approx 0.66 \text{ mm}$. The obtained image is divided in squares of 16×16 pixels which correspond to squares of $(0.64 \times 0.64) \text{ mm}^2$ on the sample. The typical noise of the correlation function g_I is 0.03. For a quasi-static loading we chose for the velocity of the top plate $1 \mu\text{m/s}$ which is approximately a vertical strain

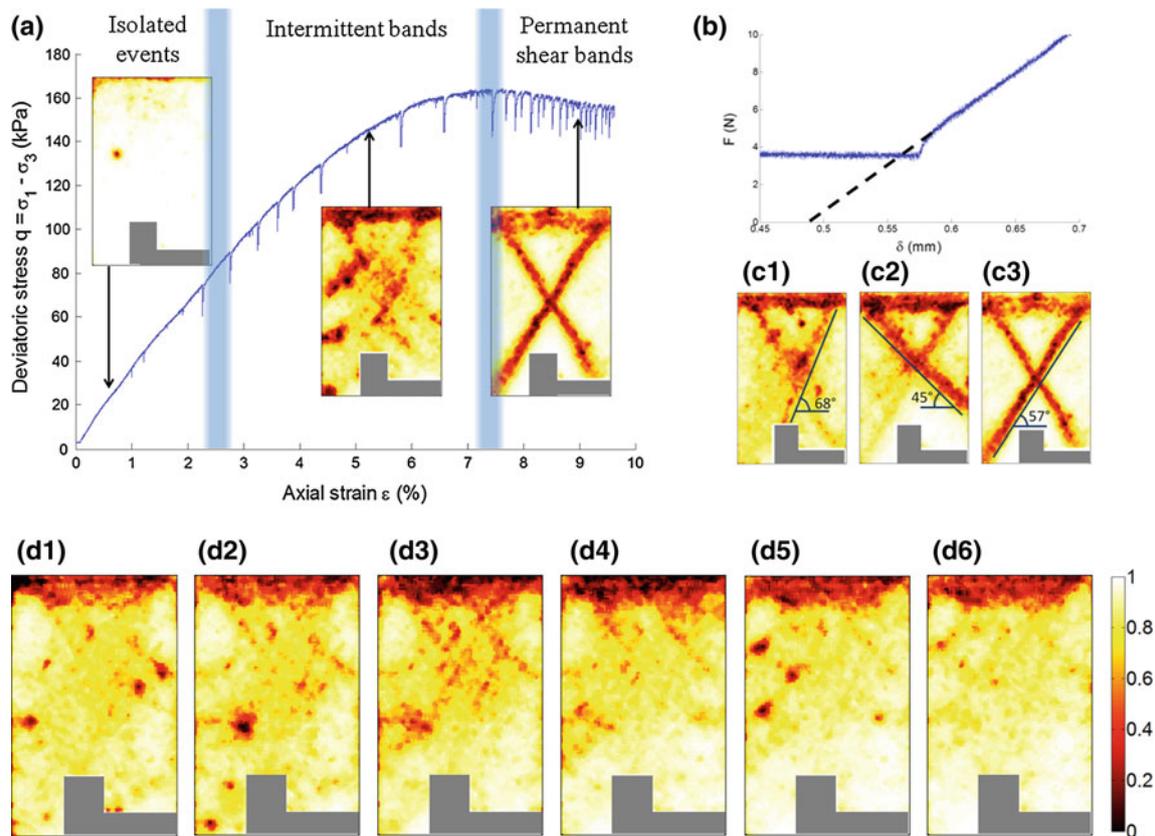


Fig. 5 **a** Loading curve: Difference of stresses $q = \sigma_1 - \sigma_3$ versus vertical strain ϵ for a confining stress $\sigma_3 = 30$ kPa and associated correlation maps computed for an incremental vertical strain of $\Delta\epsilon \simeq 1.2 \times 10^{-5}$. **b** Zoom of the beginning of the loading process. The offset position for the displacement is defined from the extrapolation at zero applied force.

c Different maps of correlation showing deformation bands with different angles of inclination (see text). **d** Successive snapshots of deformation showing the intermittency of the deformation map (see text) and the correlation function g_l colorscale

of 1.2×10^{-5} between 2 motors steps. We acquire one frame per second.

4.2 Stress strain curve

The loading curve showing the difference of stresses versus the vertical strain is presented on Fig. 5a. The vertical strain is obtained as $\epsilon = (\delta - \delta_0)/L$, with $L = 85$ mm and δ the loading plate displacement. The value of the offset of displacement δ_0 for which the vertical deformation ϵ is null is determined by the linear extrapolation of the force-displacement curve at zero force (see Fig. 5b). The difference of stresses $q = \sigma_1 - \sigma_3$ is obtained using $q = F/S$, with F the measured force, and $S = 1.37 \times 10^{-3}$ m² the section of the material. The stress versus strain curve of the material is typical of soil mechanics experiments, with first a quasi-linear part. Then the slope decreases until a maximum of the curve is reached, followed by a slow stress relaxation. We also observe small stress drops during the loading process. Such stress drops are not systematically observed. In some similar experiments not shown here, we do not observe them

during the loading. Such drops are reported in the literature [18], they correlate typically with an instability in part of the force network. This is in agreement with the fact that we do not observe them during the compression of a bulk elastic material of same Young modulus value.

4.3 Strain maps

Some typical maps of correlations between two successive images (corresponding to an vertical strain increment of $\Delta\epsilon \simeq 1.2 \times 10^{-5}$) are shown on Fig. 5d.

These are roughly representative of the three distinct ways to deform. At the beginning of the loading, we first observe a background of deformation with some isolated reorganizations already observed and described in another experiment [18]. At a vertical deformation of order $\epsilon \simeq 0.02$, we begin to see some decorrelated areas that occur in the form of small bands. Such bands are intermittent: they appear and disappear as the loading proceeds. The positions of such bands seem to be arbitrary: the ending points may be on the boundaries of the sample or not. Those bands may cross each other,

or a band may start from another one. We observe several orientations (see Fig. 5c1, c2) from $\simeq 45^\circ$ to $\simeq 68^\circ$. A 45° angle corresponds to the Roscoe angle θ_R for non dilating material. Those bands share some analogies with the micro-bands described by Kuhn [19] or Tordesillas et al. [20] in numerical discrete element method (DEM) simulations. More inclined bands with a angle $\simeq 68^\circ$ are also observed. This angle is in agreement with the angle of shear bands predicted by the Mohr–Coulomb criterium $\theta_C = 45^\circ + \phi/2 \simeq 68^\circ$, with $\sin \phi = (\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3) \simeq 0.733$ at the maximum load. At the end of the loading, we observe two permanent symmetric bands which start from the corners of the sample, and form the shape of the letter X. Their inclination is $\simeq 57^\circ$ (see Fig. 5c3). We note θ_G this geometric angle. Such symmetric bands are widely reported in the literature. Near the loading peak the situation is confused, displaying intermittent bands at θ_R and θ_C but also some parts of the future permanent bands at θ_G .

4.4 Intermittency

In conventional biaxial test experiments, the map of strain is measured during axial (vertical) strain increments of typically $\Delta\epsilon \sim 10^{-3}$. The great sensitivity of our optical method for strains measurement allows the determination of strain for vertical deformation increments as small as typically $\Delta\epsilon \sim 10^{-5}$. As a consequence we are able to investigate the instantaneous micro-deformations of the sample. This is an important difference with more conventional setup. The instantaneous deformation seems to show important temporal fluctuations during the loading. Figure 5d shows six consecutive instantaneous maps of deformation around the mean vertical strain $\epsilon_0 = 3.74 \times 10^{-2}$. The deformation maps correspond to successive vertical strain increment, i.e. the image d_i , for $i = 1$ to 6 corresponds to map of deformation between vertical strain $\epsilon_0 + (i - 1)\Delta\epsilon$ and $\epsilon_0 + i\Delta\epsilon$ with $\Delta\epsilon \simeq 1.2 \times 10^{-5}$. As it can be seen in Fig. 5d the areas of instantaneous deformation fluctuate strongly. The typical size of the heterogeneities and the inclination of the bands of localized strain are roughly the same during the snapshot sequence. However the positions of these zones fluctuate strongly from one image to the other. This seems to indicate that this part of the loading is associated to some kind of intermittent deformation of the granular material. In contrast, the shear bands observed after the load peak are rather permanent, and do not show very important fluctuations.

5 Conclusions and future work

We presented in this paper a biaxial apparatus that has been designed to measure tiny deformations in granular samples. By analysing the evolution of the scattered light, we are able

to obtain a map of the deformation of the granular material. The level of correlation is related to the local affine deformation of the material and to the fluctuations of positions around this affine deformation. Finally a test experiment on a granular material composed of glass spheres shows that deformation modes during an increment of vertical deformation are very various.

The obtained information about the deformations of the material is different from similar experiments using more conventional DIC methods see e.g. [21, 22]). We do not track individually the positions of the particles. Moreover, information on the separate component of the strain tensor are not obtained: we are not, for example, able to distinguish between small dilatation or shear of the material. However, the ability to measure small incremental deformations allows to obtain a very different information on the material deformation. The emergence of localization may be tracked at the early stages of the deformation where conventional DIC is limited to deformation during large strain increment near the load peak, though evolutions are in progress with very high resolution cameras. If necessary, the tracking of individual particles on a part of the front face may be obtained to complement the DWS interferometric imaging. For this, images in white light have to be recorded by the same or by another camera.

We focused in this paper on the description of the apparatus and on the experimental methods. Our demonstration experiment shows a very complex road leading to the failure, with numerous regimes of shear bands inclinations. In future work, we will investigate experimentally the evolution of those intermittent micro-failures toward the final rupture in a simple nearly mono-disperse and non cohesive granular material made of glass beads. Studies on cohesive material or on the nucleation of failure from a defect inside the material may also be considered with our apparatus.

Acknowledgments We acknowledge the financial supports of ANR “STABINGRAM” No. 2010-BLAN-0927-01 and Région Bretagne “MIDEMADE”. We thank Jean-Charles Potier for mechanical design, Eric Robin for help with the measurement of apparatus stiffness, and Sean McNamara for fruitful discussions.

References

1. Schofield, A.N., Wroth, C.P.: Critical State Soil Mechanics. McGraw-Hill, New York (1968)
2. Davis, R.O., Selvadurai, A.P.S.: Plasticity and Geomechanics. Cambridge University Press, Cambridge, MA (2002)
3. Nedderman, R.M.: Statics and Kinematics of Granular Materials. Cambridge University Press, Cambridge, MA (1992)
4. Rice, J.R.: The localization of plastic deformation. In: Koiter, W.T. (ed.) Theoretical and Applied Mechanics, pp. 207–220. North-Holland, Amsterdam (1976)

5. Rudnicki, J.W., Rice, J.R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids* **23**, 371–394 (1975)
6. Vardoulakis, I., Sulem, J.: *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional, Glasgow (1995)
7. Bésuelle, P., Rudnicki, J.W.: Localization: shear bands and compaction bands. In: Guéguen, Y., Boutéca, M. (eds.) *Mechanics of Fluid-Saturated Rocks*. International Geophysics Series, vol. 89, pp. 219–321. Academic Press, New York (2004)
8. Hall, S.A., Muir, D.W., Ibraim, E., Viggiani, G.: Localised deformation patterning in 2d granular materials revealed by digital image correlation. *Granul. Matter* **12**, 1–14 (2010)
9. Viggiani, G., Hall, S.A.: Full-field measurements in experimental geomechanics: historical perspective, current trends and recent results. In: Viggiani, G., Hall, S.A., Romero, E. (eds.) *Advanced Experimental Techniques in Geomechanics*, pp. 3–67 (2004)
10. Erpelding, M., Amon, A., Crassous, J.: Diffusive wave spectroscopy applied to the spatially resolved deformation of a solid. *Phys. Rev. E* **78**, 046104 (2008)
11. Djaoui, L., Crassous, J.: Probing creep motion in granular materials with light scattering. *Granul. Matter* **7**, 185–190 (2005). doi:10.1007/s10035-005-0210-5
12. Crassous, J.: Diffusive wave spectroscopy of a random close packing of spheres. *Eur. Phys. J. E* **23**, 145–152 (2007)
13. Bicout, D., Maret, G.: Multiple light scattering in taylor-couette flow. *Physica A* **210**, 87–112 (1994)
14. Chean, V., Robin, E., El Abdi, R., Sangleboeuf, J.-C., Houizot, P.: Use of the mark-tracking method for optical fiber characterization. *Opt. Laser Technol.* **43**, 1172–1178 (2011)
15. Amon, A., Bertoni, R., Crassous, J.: Experimental investigation of plastic deformations before a granular avalanche. *Phys. Rev. E* **87**, 012204 (2013)
16. Crassous, J., Metayer, J.-F., Richard, P., Laroche, C.: Experimental study of a creeping granular flow at very low velocity. *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **03**, P03009 (2008)
17. Richard, P., Valance, A., Métayer, J.-F., Sanchez, P., Crassous, J., Louge, M., Delannay, R.: Rheology of confined granular flows: scale invariance, glass transition, and friction weakening. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 248002 (2008)
18. Amon, A., Nguyen, V.B., Bruand, A., Crassous, J., Clément, E.: Hot spots in an athermal system. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 135502 (2012)
19. Kuhn, M.R.: Structured deformation in granular materials. *Mech. Mater.* **31**(6), 407–429 (1999)
20. Tordesillas, A., Muthuswamy, M., Walsh, S.: Mesoscale measures of nonaffine deformation in dense granular assemblies. *J. Eng. Mech.* **134**(12), 1095–1113 (2008)
21. Desrues, J., Viggiani, G.: Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* **28**(4), 279–321 (2004)
22. Rechenmacher, A.L.: Grain-scale processes governing shear band initiation and evolution in sands. *J. Mech. Phys. Solids* **54**(1), 22–45 (2006)

Annexe B

Emergence of Cooperativity in Plasticity of Soft Glassy Materials

Antoine Le Bouil, Axelle Amon, Sean McNamara, and Jérôme Crassous
*Université de Rennes 1, Institut de Physique de Rennes (UMR URI-CNRS 6251),
 Bât. 11A, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes, France*

(Received 23 July 2013; revised manuscript received 28 February 2014; published 18 June 2014)

The elastic coupling between plastic events is generally invoked to interpret plastic properties and the failure of amorphous soft glassy materials. We report an experiment where the emergence of a self-organized plastic flow is observed well before the failure. For this we impose an homogeneous stress on a granular material, and measure local deformations for very small strain increments using a light scattering setup. We observe a nonhomogeneous strain that appears as transient bands of mesoscopic size and a well-defined orientation, which is different from the angle of the macroscopic frictional shear band that appears at the failure. The presence and the orientation of those microbands may be understood by considering how localized plastic reorganizations redistribute stresses in a surrounding continuous elastic medium. We characterize the length scale and persistence of the structure. The presence of plastic events and the mesostructure of the plastic flow are compared to numerical simulations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.246001

PACS numbers: 83.50.-v, 62.20.F-, 62.20.M-, 83.80.Fg

Amorphous materials have intermediate mechanical properties between solids and liquids. At low stress, they behave as elastic solids, but deform plastically and flow when the stress increases. These generic behaviors, observed in many different systems such as concentrated emulsions [1], colloidal systems [2], foams [3] or molecular glasses [4] with apparently universal plastic or rheological laws [5,6], suggest that such materials may be described using a common framework [1,7,8]. At the center of those descriptions is the hypothesis of localized reorganizations. Such events have been observed in many different studies [3,4,9,10]. Each event modifies locally the mechanical equilibrium, causing the surrounding material to deform, and creating internal stresses. These stresses may then provoke other events, leading to a succession or avalanche of events [11,12]. The coupling between events, and its relevance to an avalanchelike cascade scenario for the description of the final persistent shear band is still an open question [12,13].

Several experimental works show isolated reorganizations followed by localized flow structures, suggesting the existence of such coupling. Conclusions remain elusive in direct observation of colloidal glasses due to the dominance of thermal activity over the triggered events [9]. In athermal systems such as granular materials [10] or foams [3], the steps between the accumulation of individual events and the appearance of shear bands remain unclear. Very recent numerical and theoretical results suggest that reorganization events may indeed couple in order to produce bands [12,14–18]. However, the bands observed numerically resulting from the interacting local events are transient and correspond to self-healing microcracks, of a different nature than the final persistent shear bands. To our knowledge such transient microbands forming a clear intermittent structure have never been reported experimentally.

We present in this Letter the first direct experimental evidence showing the progressive emergence of cooperative effects during plastic deformations of an amorphous material. For this, we use a very sensitive light scattering setup to monitor the homogeneous biaxial compression of a granular material. We then show that the plastic flow at the early stage of the loading of a granular material is concentrated along self-healing microbands. The orientation of those transient microbands are clearly different from the Mohr-Coulomb angle of the final permanent shear band. We show that the orientations of those microbands are given by the Eshelby solution [19] for the long-range stress redistribution induced by local plastic reorganizations in an elastic material. We also show that the transient microbands are more prominent as the rupture is approached.

Experimental setup.—We deform an assembly of glass spheres by imposing a homogeneous stress with a biaxial apparatus. We recall here the main features of the setup described extensively elsewhere [20]: The material (glass beads, diameter $d = 90 \pm 20 \mu\text{m}$, volume fraction ≈ 0.60) is placed between a preformed latex membrane (size $85 \times 55 \times 25 \text{ mm}$) and a glass plate. A pump produces a partial vacuum inside the membrane, creating a confining stress $-\sigma_{xx}$. The confined sample is positioned on a metallic structure [in light gray on Fig. 1(a)]. The glass plate is not represented on Fig. 1(a) and is at the front. The back metallic plate and the front glass plate forbid displacement normal to the x - y plane, ensuring plane-strain conditions. The bottom of the sample rests on a fixed plate, while the upper plate (dark gray) is displaced by a step motor. The stress on the moving plate is $-\sigma_{yy} = -\sigma_{xx} + F/S$, where F is the force measured by a sensor fixed to the plate, and S is the section of the sample. Although there is probably some

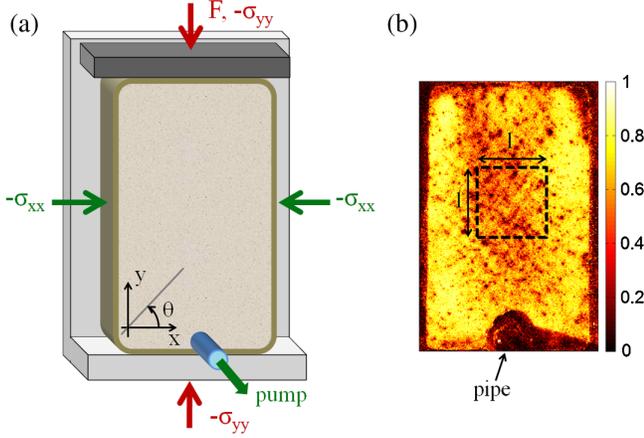


FIG. 1 (color online). (a) Schematic representation of the biaxial setup. The granular material is enclosed between a latex membrane and a glass plate (not represented here). A partial vacuum inside the membrane creates a confining stress $-\sigma_{xx}$. The sample is compressed at a fixed velocity along the y axis through a moving plate (upper plate, dark gray). The light gray back plate as well as the glass plate at the front forbid displacements along the z direction ensuring plane-strain conditions. For compression, $-\sigma_{xx}, -\sigma_{yy} > 0$. (b) A map of correlation $g_I(\epsilon, \mathbf{r})$ with a color scale. The dashed area of side $l \approx 270d$ is the region of interest for the spatial correlation calculation.

solid friction between the granular material and the plates, we do not observe noticeable differences of deformation between the upper and lower part of the sample. The stress gradient due to gravity is negligible, and the value of confining stress is such that cohesion effects and the crushing of particles are unimportant. The global macroscopic deformation is calculated as $\epsilon = -\epsilon_{yy} = \delta/L$ with δ the upper plate displacement and L the sample height [see left inset of Fig. 2(a)]. The compressions are done at fixed deformation rate $de/dt = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. We checked that we were in the quasistatic limit.

Strain heterogeneities are observed using a dynamic light scattering setup [21]. An expanded 532 nm laser beam illuminates the material. Because of the coherence of the light source, interferences occur and a speckle pattern forms. The image of the front side of the sample is recorded by a 7360×4912 camera. Two different speckle images are compared using a correlation method explained elsewhere [21]. Images are subdivided in square zones, and for each zone we calculate the normalized correlation function

$$g_I^{(1,2)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2} \sqrt{\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle^2}}, \quad (1)$$

where I_1 and I_2 are the intensity matrices of a same zone in two different images, and $\langle \dots \rangle$ indicates the average over the zone. Each zone becomes a pixel in a correlation map [see Fig. 1(b) and the movie in the Supplemental Material [22]], corresponding to a volume of surface $\sim 2.1d \times 2.1d$

in the x - y plane and of depth of few d . The decorrelation of the scattered light comes from relative bead motions. We thus measure a combination of affine and nonaffine bead displacements, and the rotation of nonspherical beads. In the following, we present maps based on images made at sample deformations ϵ and $\epsilon + 3.2 \times 10^{-5}$, and we note $g_I(\epsilon, \mathbf{r})$ the value of the normalized correlation at compression ϵ and at position \mathbf{r} [see Fig. 1(b)].

Plastic flow structure.—Figure 2(a) shows the evolution of the stress difference $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ as a function of the deformation ϵ . At the beginning of the loading, $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ increases with ϵ , and then attains a plateau, consistent with numerous preceding studies, where a granular material was prepared near the critical state volume fraction [23]. The stress plateau at $\epsilon_c = 4.66\%$ corresponds to the failure of the sample, confirmed by the correlation map shown in Fig. 2(a) (rightmost inset). The deformation is dominated by two symmetric shear bands where $g_I(\epsilon, \mathbf{r})$ is low, corresponding to highly localized deformation. The inclination of the bands is $\theta \approx 65^\circ$, in agreement with a Mohr-Coulomb analysis $\theta_{MC} = 45 + \varphi_c/2 \approx 63^\circ$ for a frictional material, with φ_c the internal friction angle [24]. $\varphi_c = \arcsin[(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})]$ at failure ($\epsilon = \epsilon_c$). Those bands are permanent in the sense that they do not evolve with ϵ once they appear (see the movie in the Supplemental Material [22]).

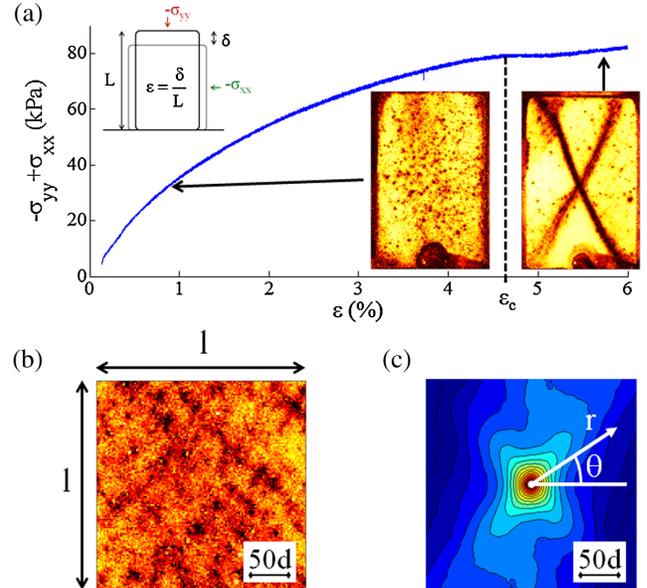


FIG. 2 (color online). (a) Applied stresses difference versus deformation ($-\sigma_{xx} = 30 \text{ kPa}$). Inset: Left, notations; right: maps of $g_I(\epsilon, \mathbf{r})$ before failure ($\epsilon = -\epsilon_{yy} = 0.91\%$) and after failure ($\epsilon = 5.82\%$). (b) Enlargement of the region of interest of the deformation map before failure ($\epsilon = 3.30\%$) showing the mesoscale strain heterogeneities. (c) Correlation function $\Psi^{(0)}(\epsilon, \mathbf{r})$ of g_I at $\epsilon = 3.30\%$ showing the plastic flow structure in a square of size $l \approx 270d$ in the \mathbf{r} plane.

Figure 2(b) shows a map of deformation before failure. The deformation is strongly heterogeneous with a complicated fine structure at small scale. In contrast with the permanent shear bands observed after failure, this deformation pattern fluctuates strongly during the loading (see the movie in the Supplemental Material [22]). To investigate the spatial structure and intermittency of the plastic flow, we consider the spatial correlation function of $g_I \equiv 1 - g_I$:

$$\begin{aligned} \Psi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, \mathbf{r}) = & \langle g_I'(\epsilon + \Delta\epsilon/2, \mathbf{r}') g_I'(\epsilon - \Delta\epsilon/2, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle \\ & - \langle g_I'(\epsilon + \Delta\epsilon/2, \mathbf{r}') \rangle \langle g_I'(\epsilon - \Delta\epsilon/2, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\langle \dots \rangle$ is an average over 100 correlation maps, i.e., a deformation of 3.2×10^{-3} , and over \mathbf{r}' , for \mathbf{r}' and $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$ covering the region of interest on Fig. 1(b). Figure 2(c) shows a plot of $\Psi^{(0)}(\epsilon, \mathbf{r})$. Along two symmetric directions $\theta = \pm\theta_E$ with $\theta_E \approx 53^\circ$ the correlation decays slowly with r [see Fig. 4(a)]. The direction of the anisotropy θ_E is almost constant during the loading, and is clearly different from θ_{MC} .

Localized plastic events.—To explain the observed structure of the plastic flow we first investigate theoretically the consequences of a single, isolated reorganization somewhere in the granular material. Consider a plastic deformation that relaxes stress within a small volume, but redistributes it in the surrounding material. We consider that the surrounding region behaves as a linear elastic material [25], that we will suppose isotropic with Poisson ratio ν . Eshelby gave an analytical solution to this 3D problem [19]: Let \mathbf{e}^* be the strain tensor of the reorganization [see Fig. 3(a)]. We suppose $e_{xy}^* = 0$, i.e., that \mathbf{e}^* is coaxial to the applied stress tensor and $e_{zz}^* = e_{xz}^* = e_{yz}^* = 0$ because of the plane-strain configuration, leaving only e_{xx}^* and e_{yy}^* as the nonzero strain components. Far from the rearrangement, the additional stress originating from the rearrangement in the x - y plane is $\tilde{\sigma}$, with $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} \propto f(\theta)$, where

$$\begin{aligned} f(\theta) = & (e_{xx}^* - e_{yy}^*) \left[-\frac{15}{4} \cos(4\theta) + \frac{8\nu - 7}{4} \right] \\ & - \frac{9}{2} (e_{xx}^* + e_{yy}^*) \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

If $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} > 0$ the redistributed stress adds to the applied stress, increasing strain along those directions. Its maximum occurs for $\cos(2\theta_E^*) = (3/10)(e_{yy}^* + e_{xx}^*) / (e_{yy}^* - e_{xx}^*)$. In the case of an isovolumic transformation, $\theta_E^* = 45^\circ \pmod{90^\circ}$. Figure 3(b) shows $f(\theta)$ in this case. For a local rearrangement in agreement with the macroscopic deformation of the sample, i.e., e_{xx}^* and e_{yy}^* of opposite signs, θ_E^* increases (respectively, decreases) for a dilating (respectively, contracting) rearrangement, with extremal values

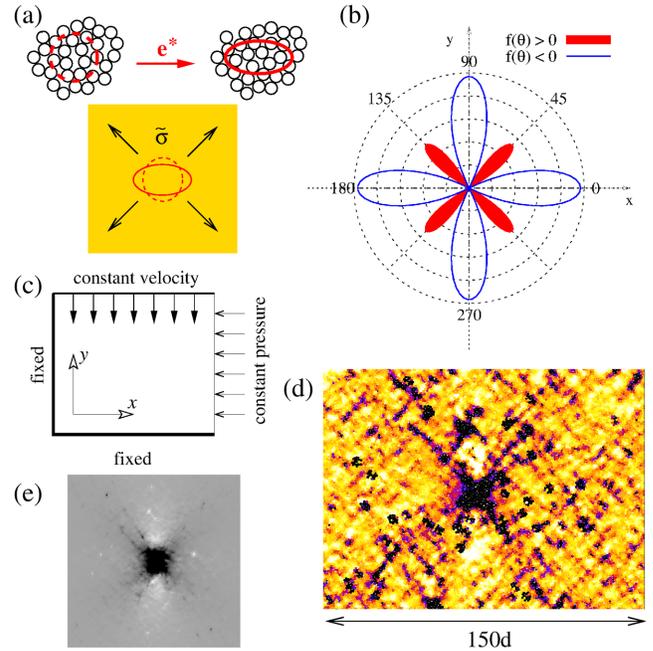


FIG. 3 (color online). (a) Schematic representation of a local plastic event specifying the tensors \mathbf{e}^* (linked to the deformation of the inclusion) and $\tilde{\sigma}$ (stress redistribution in the surrounding medium due to the plastic event). (b) Angular distribution of $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} \propto f(\theta)$ in the case of an isovolumic transformation of the inclusion ($\nu = 0.33$). (c) Boundary conditions of the numerical simulations. (d) Example of a deformation map from numerical simulation displaying a local event and microbands. (e) Synthetic local reorganization obtained numerically by a modification of the elastic constants of few grains.

$\frac{1}{2} \cos^{-1}(\pm 3/10)$. The largest possible value for θ_E^* is then 54° , which is close to the value of $\theta_E \approx 53^\circ$ of the experiment. This reorganization structure has been shown in numerical studies of molecular glasses [12,14] and cellular foam [3], but the existence of such an elastic redistribution in frictional granular material is still an open question. Indeed, the existence of an elastic limit for such a system is still a matter of debate [25]. We performed numerical bidimensional discrete element method simulations of a biaxial compression test [see Fig. 3(c) for boundary conditions]. Figure 3(d) shows results from a simulation of $N = 256^2$ grains, using a visualization method inspired by the experimental technique: Positions of the grains are recorded at strain increments of $\delta\epsilon = 10^{-5}$. Two successive system states are compared, and for each grain, a local strain (average relative change in distance to its neighbors) is calculated. Those grains whose local strain is large are dark. We can generate a plastic event in the simulation by softening a small number of grains in the sample [see Fig. 3(e)] and we obtain a local deformation in accordance with the analytical solution of Fig. 3(b). Figure 3(d) shows that such local events also occur during the compression of the granular material.

Coupling between localized events and plastic flow structure.—Along the directions where $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy}$ is positive, the additional stress has the same sign as the applied stress, possibly triggering new reorganizations. We therefore expect deformation to be organized in microbands whose orientations are given by the Eshelby solution. This structure is visible in the numerical experiments where very transient localized lines inclined at $\theta \approx \pm 45^\circ$ are present [see Fig. 3(d)]. The resulting images display the same phenomenology as the experimental results: Well before failure, deformation is concentrated in short diagonal microbands (probably similar to those reported in other studies [18,26,27]), and at failure, a shear band appears (not shown here). The agreement between 2D simulation and 3D experiments supports our plane-strain hypothesis.

Spatial and temporal correlations.—Coming back to our experimental data, we focus on the evolution of the anisotropic part of $\Psi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r, \theta) = \Psi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, \mathbf{r})$ during the loading, which we define as

$$\chi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r) = \frac{1}{2} [\Psi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r, \theta_E) + \Psi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r, -\theta_E)] - \Psi_{\text{iso}}^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r) \quad (4)$$

with $\Psi_{\text{iso}}^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^{(\Delta\epsilon)}(\epsilon, r, \theta) d\theta$, the isotropic part of $\Psi^{(\Delta\epsilon)}$. Figure 4(b) shows the evolution of $\chi^{(0)}(\epsilon, r)$ in the function of r for different values of ϵ . We observe that the anisotropic part of the correlation function increases as the loading increases. We consider a twofold characterization of $\chi^{(0)}$. First, the integral $A(\epsilon) = \int_{r=0}^{r=\ell/2} \chi^{(0)}(\epsilon, r) dr$ estimates the strength of the anisotropy. Second, the characteristic distance $\xi(\epsilon)$ at which the correlation is maximum $(\partial\chi^{(0)}/\partial r)(\epsilon, \xi(\epsilon)) = 0$ is computed using a quadratic fit [plain line of Fig. 4(b)] of the experimental curves near the maximum. Figure 4(c) shows that both the integral A and the characteristic length ξ/d of the anisotropy increase as the loading progresses toward rupture. Finally, the transient nature of the observed structure can be shown by considering the scale of deformation at which the plastic flow persists. For this, we considered the evolution of $(\chi^{(\Delta\epsilon)}/\chi^{(0)})(\epsilon, \xi(\epsilon))$ with $\Delta\epsilon$ at a given ϵ . Figure 4(d) shows that close to rupture, for $\epsilon = 4.4\%$ and $\xi(\epsilon = 4.4\%) = 85d$, the deformation persists after a deformation increment $\Delta\epsilon \approx 0.3\%$. On the contrary, further from the failure ($\epsilon = 3.3\%$), the deformation decays over a typical increment of deformation $\Delta\epsilon \approx 0.02\%$.

From the structure of the plastic flow, a characteristic length ξ revealing the cooperativity of the fluctuation of plastic flow emerges. The values of ξ are in quantitative agreement with numerical simulations of the granular material [26] where fluctuations coupled on distance $\sim (10-40)d$ are reported. Theoretically [30] a nonlocal rule for the mean plastic flow is expected to emerge from those fluctuations. Such nonlocal flow rules have been proposed to describe granular plastic flow [31]. Figure 4(c)

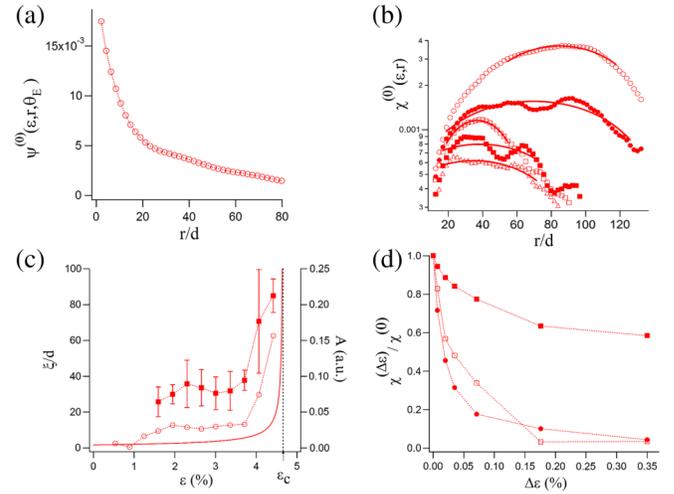


FIG. 4 (color online). (a) $\Psi^{(0)}$ as function of r for $\epsilon = 2.7\%$, showing a fast decay at a short distance ($r/d \lesssim 10$) followed by a slow decay. (b) $\chi^{(0)}(\epsilon, r)$ versus r/d for increasing values of deformations $\epsilon = 1.6\%$ (open triangle), $\epsilon = 2.3\%$ (filled square), $\epsilon = 3.7\%$ (open square), $\epsilon = 4.0\%$ (filled circle), $\epsilon = 4.4\%$ (open circle). Lines are quadratic fits around maximum. (c) Length ξ/d (filled square) and mean amplitude A (open circle) (see text) as functions of the deformation ϵ . Error bars are given by the uncertainty of the quadratic fit of $\chi^{(0)}$ around maximum. The black dotted line indicates the deformation at rupture $\epsilon_c \approx 4.66\%$. The plain line is the cooperativity length [28] expected from the nonlocal flow rule of granular material [29]. (d) Relaxation of $(\chi^{(\Delta\epsilon)}/\chi^{(0)})(\epsilon, \xi(\epsilon))$ as a function of the deformation increment $\Delta\epsilon$ for $\xi(\epsilon = 3.3\%) = 33d$ (filled circle), $\xi(\epsilon = 4.0\%) = 70d$ (open square), and $\xi(\epsilon = 4.4\%) = 85d$ (filled square).

shows the expected evolution of the cooperativity length [28] proposed in [29] during the loading. The cooperativity length of the mean flow is smaller than ξ . This is probably due to the coarse-graining process described in [30].

Conclusion.—In summary, a careful experimental study of the plastic flow of an athermal amorphous material reveals a mesoscopic structure of the strain since the early stage of the loading process: Deformation concentrates in transient short microbands of well-defined orientation. We connect those orientations with the elastic long-range stress redistribution due to localized plastic reorganizations. We show an increasing characteristic length and persistence during the loading. However, the relationship between these transient microbands and the final permanent frictional shear bands is more complex than the description of a final persistent shear-band formation as a mere growing cascade of local rearrangements. The final shear band does not arise from a coalescence of microbands, nor is it initiated by a single microband that reaches the boundary and becomes locked. Instead, as the movie in the Supplemental Material [22] shows, the two types of deformation, oriented in two different directions, coexist near failure. We observe a hierarchical structure with a mesoscopic pattern embedded in a large scale shear band.

The modelization of the final persistent shear band needs to describe the complex interaction between the microbands and the larger scale localization. The careful characterization of the birth of the permanent shear band is a work in progress.

This work has been supported by ANR (Grant No. 2010-BLAN-0927-01) and Région Bretagne (MideMade). We thank P. Chasle, H. Orain, J.-C. Sangleboeuf, P. Bésuelle and C. Viggiani for help with the biaxial apparatus, and GDR Mephy for fruitful discussions.

-
- [1] J. Goyon, A. Colin, G. Ovarlez, A. Ajdari, and L. Bocquet, *Nature (London)* **454**, 84 (2008).
- [2] R. Besseling, L. Isa, P. Ballesta, G. Petekidis, M. E. Cates, and W. C. K. Poon, *Phys. Rev. Lett.* **105** 268301 (2010).
- [3] A. Kabla, J. Scheibert, and G. Debregeas, *J. Fluid Mech.* **587**, 45 (2007).
- [4] A. Tanguy, F. Léonforte, and J.-L. Barrat, *Eur. Phys. J. E* **20**, 355 (2006).
- [5] P. Sollich, F. Lequeux, P. Hebraud, and M. E. Cates, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2020 (1997).
- [6] C. Derec, A. Ajdari, and F. Lequeux, *Eur. Phys. J. E* **4**, 355 (2001).
- [7] G. Katgert, B. P. Tighe, M. E. Möbius, and M. van Hecke, *Europhys. Lett.* **90**, 54002 (2010).
- [8] V. B. Nguyen, T. Darnige, A. Bruand, and E. Clément, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 138303 (2011).
- [9] P. Schall, D. A. Weitz, and F. Spaepen, *Science* **318**, 1895 (2007).
- [10] A. Amon, V. B. Nguyen, A. Bruand, J. Crassous, and E. Clément, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 135502 (2012).
- [11] M. L. Falk, and J. S. Langer, *Phys. Rev. E* **57**, 7192 (1998).
- [12] C. E. Maloney and A. Lemaître, *Phys. Rev. E* **74**, 016118 (2006).
- [13] K. A. Dahmen, Y. Ben-Zion, and J. T. Uhl, *Nat. Phys.* **7**, 554 (2011).
- [14] M. Tsamados, A. Tanguy, F. Léonforte, and J.-L. Barrat, *Eur. Phys. J. E* **26**, 283 (2008).
- [15] S. M. Talamali *et al.*, *C. R. Méc* **340**, 275 (2011).
- [16] K. Martens, L. Bocquet, and J.-L. Barrat, *Soft Matter* **8**, 4197 (2012).
- [17] R. Dasgupta, H. G. Hentschel, and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **109** 255502 (2012).
- [18] F. Gimbert, D. Amitrano, and J. Weiss, *Europhys. Lett.* **104**, 46001 (2013).
- [19] J. D. Eshelby, *Proc. R. Soc. A* **241**, 376 (1957).
- [20] A. Le Bouil, A. Amon, J.-C. Sangleboeuf, H. Orain, P. Bésuelle, G. Viggiani, P. Chasle, and J. Crassous, *Granular Matter* **16**, 1 (2014).
- [21] M. Erpelding, A. Amon, and J. Crassous, *Phys. Rev. E* **78**, 046104 (2008).
- [22] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.112.246001> for the successive maps of incremental deformation during the loading shown in Fig. 2(a). The value of the imposed strain is indicated in percent. The color scale is the same as Fig. 1(b).
- [23] *Critical State Soil Mechanics*, edited by A. N. Schofield, and C. P. Wroth (McGraw-Hill, New York, 1968)
- [24] *Statics and Kinematics of Granular Materials*, edited by R. M. Nedderman (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [25] H. A. Makse, N. Gand, D. L. Johnson, and L. Schwartz, *Phys. Rev. E* **70**, 061302 (2004).
- [26] M. R. Kuhn, *Mech. Mater.* **31**, 407 (1999).
- [27] S. A. Hall, D. Muir Wood, E. Ibraim, and G. Viggiani, *Granular Matter* **12** 1 (2010).
- [28] The cooperativity length is [29] $\zeta = Ad/\sqrt{\mu_c - \mu}$, with $A = 0.48$. We define here μ from the Mohr-Coulomb analysis: $\mu = \tan(\varphi)$ with $\varphi = \arcsin[(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})]$, and μ_c with the value of μ at failure.
- [29] D. L. Henann and K. Kamrin, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **110**, 6730 (2013).
- [30] L. Bocquet, A. Colin, and A. Ajdari, *Phys. Rev. Lett.* **103** 036001 (2009).
- [31] K. Kamrin, and G. Koval, *Phys. Rev. Lett.* **108** 178301 (2012).

Annexe C



Analysis of image vs. position, scale and direction reveals pattern texture anisotropy

Roland Lehoucq¹, Jérôme Weiss^{2,3}, Bérengère Dubrulle⁴, Axelle Amon⁵, Antoine Le Bouil⁵, Jérôme Crassous⁵, David Amitrano³ and François Graner^{6*}

¹ Laboratoire AIM-Paris-Saclay, CEA/DSM/Irfu, CNRS UMR 7158, Université Paris Diderot, CEA Saclay, Gif-sur-Yvette, France

² Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, CNRS UMR 5183, Université Joseph Fourier, Grenoble, France

³ ISTerre, CNRS UMR 5275, Université Joseph Fourier, Grenoble, France

⁴ Laboratoire SPHYNX, SPEC, CNRS URA 2464, CEA Saclay, Gif-sur-Yvette, France

⁵ Institut de Physique de Rennes, CNRS UMR 6251, Université de Rennes 1, Rennes, France

⁶ Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, CNRS UMR 7057, Université Paris Diderot, Paris, France

Edited by:

Colm O'Dwyer, University College
Cork, Ireland

Reviewed by:

Luis Manuel Colon-Perez, University
of Florida, USA

Akio Nakahara, Nihon University,
Japan

*Correspondence:

François Graner, Laboratoire Matière
et Systèmes Complexes, UMR 7057
CNRS, Université Paris Diderot,
10 rue Alice Domon et Léonie
Duquet, F-75205 Paris Cedex 13,
France

e-mail: francois.graner@
univ-paris-diderot.fr

Pattern heterogeneities and anisotropies often carry significant physical information. We provide a toolbox which: (i) cumulates analysis in terms of position, direction and scale; (ii) is as general as possible; (iii) is simple and fast to understand, implement, execute and exploit. It consists in dividing the image into analysis boxes at a chosen scale; in each box an ellipse (the inertia tensor) is fitted to the signal and thus determines the direction in which the signal is more present. This tensor can be averaged in position and/or be used to study the dependence with scale. This choice is formally linked with Leray transforms and anisotropic wavelet analysis. Such protocol is intuitively interpreted and consistent with what the eye detects: relevant scales, local variations in space, privileged directions. It is fast and parallelizable. Its several variants are adaptable to the users' data and needs. It is useful to statistically characterize anisotropies of 2D or 3D patterns in which individual objects are not easily distinguished, with only minimal pre-processing of the raw image, and more generally applies to data in higher dimensions. It is less sensitive to edge effects, and thus better adapted for a multiscale analysis down to small scale boxes, than pair correlation function or Fourier transform. Easy to understand and implement, it complements more sophisticated methods such as Hough transform or diffusion tensor imaging. We use it on various fracture patterns (sea ice cover, thin sections of granite, granular materials), to pinpoint the maximal anisotropy scales. The results are robust to noise and to users choices. This toolbox could turn also useful for granular materials, hard condensed matter, geophysics, thin films, statistical mechanics, characterization of networks, fluctuating amorphous systems, inhomogeneous and disordered systems, or medical imaging, among others.

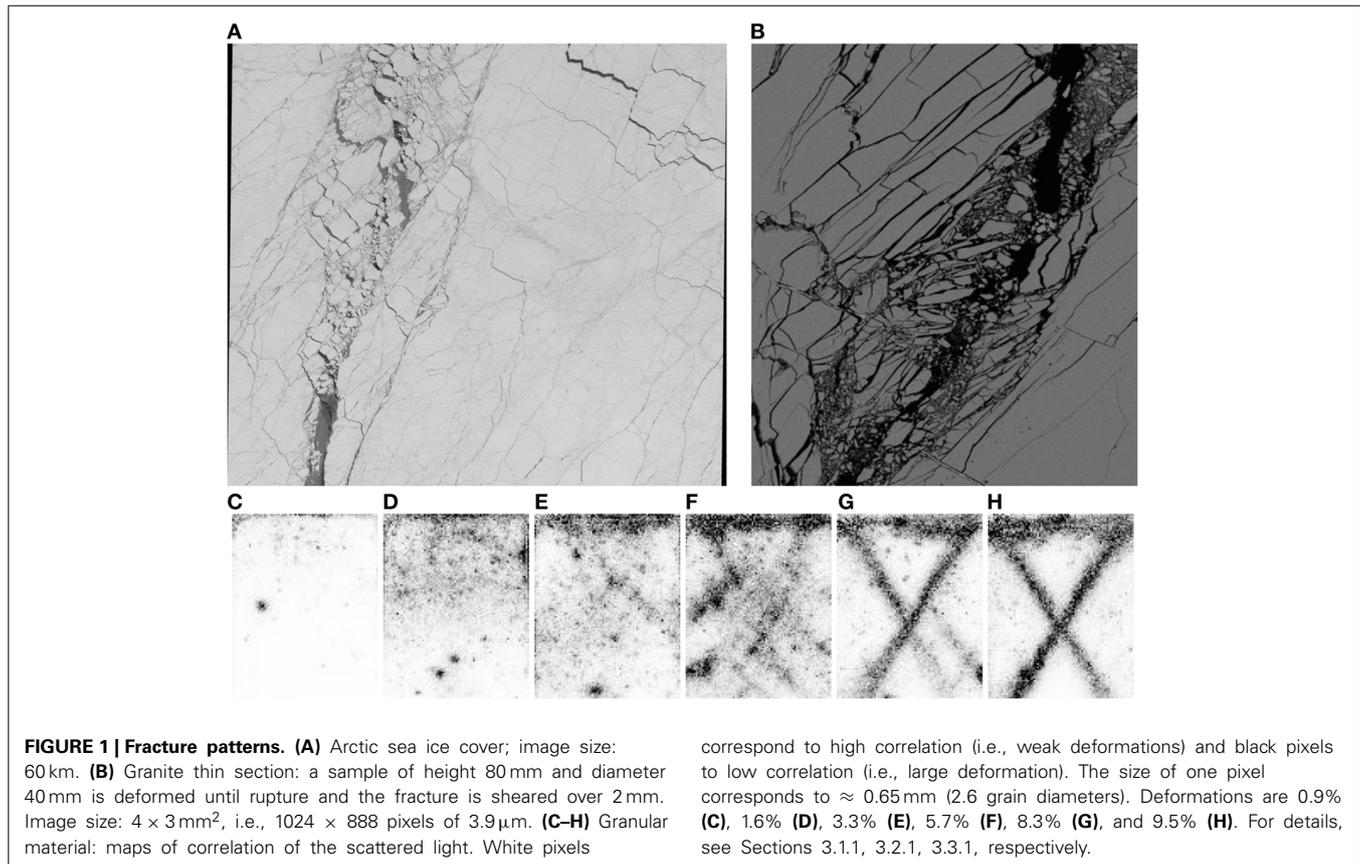
Keywords: patterns, multi-scale, image analysis, anisotropy, fracture, heterogeneous materials

1. INTRODUCTION

Inhomogeneous systems require specific tools for their quantification, whether for data analysis, or comparison with numerical and analytical modeling. Analysis of patterns to extract relevant physical information is a fruitful approach in a wide range of systems [1]. It strongly depends on the type of pattern. Patterns made of well-defined individual units such as biological tissues, grains in polycrystals, foams and emulsions, display immediately accessible information; they can be described by specific tools which take into account their topology (e.g., connections between individual objects) [2]. Patterns in which identifiable individual objects are present at several different scales, such as transport or telecommunication networks, fiber bundles or polymer gels, may reveal more information under a multiscale analysis. Finally, patterns which involve several scales and objects too intricately to be separately identified, ranging from stars and galaxies to colloidal

materials, diphasic systems and porous media, can rather be statistically characterized, for instance by their texture [3].

Even in these latter class of less obviously decomposable patterns, it is important to determine the local anisotropy, for instance in nuclear magnetic resonance images (MRI) of brain [4]. For fractures patterns, tools exist to characterize their structure, heterogeneity, topology and correlations [5]. However, in addition, preferential directions are clearly visible by eye: they depend on both scale and position (**Figure 1**). It is important to make this observation quantitative, especially since mechanical descriptions often require to take into account directions, for instance of principal stresses and strains. Several good methods already exist to quantitatively reveal and characterize the local anisotropy. Our goal is to complement them by providing a method which: (i) cumulates analysis in terms of position, direction and scale; (ii) applies to a set of patterns as general as possible;



(iii) is simple and fast to understand, implement, execute and exploit.

The outline of this paper is as follows. Section 2 exposes the principle of the method. Section 3 applies it to three experimental examples. Section 4 compares this method with existing ones. Section 5 concludes. The “Supplementary Material” presents various tests of measurement robustness.

2. METHOD OUTLINE

At each step of the proposed method, the users can select variants and validation criteria according to their own scientific requirements, their practical applications, and the features of interest in the patterns they study. These choices are not necessarily based on a mathematical justification and should not be validated using visual detection only.

2.1. IMAGES

2.1.1. Input data

An image is a signal, encoded through pixels, each pixel position \vec{M} having integer coordinates.

The pixels constitute an array, usually in two or three-dimensions. It can be in any higher dimension, for instance for series of images depending on parameters, like a movie. For simplicity of explanations and especially of representation, examples below are in 2D, but the formalism is indifferent to the dimension.

The information is any physical quantity $I(\vec{M})$, that is, a field defined over the pixels. In examples below, I is a binary

number, 0 or 1, or a gray level, an integer number for instance between 0 and 255. The formalism generalizes to I being a positive scalar, that is a continuous gray level; a vector with three positive components, such as RGB images; or even a higher order tensor.

2.1.2. Pre-processing

Only few, basic image pre-processing steps are required.

Without loss of generality, we consider a signal to be analyzed which is coded in white (large I), over a black (low I) background. Otherwise, a symmetry transform should be applied to the image before starting the analysis: $I \rightarrow 1 - I$ for a binary image, $I \rightarrow 255 - I$ for a gray level image.

It is useful to eliminate isolated white pixels using a slight filtering of the image, such as opening (erosion-dilatation), median filter or low pass filter.

A gray level image can be used as it is, $I = 0$ to 255; or first thresholded, $I = S$ to 255, where the threshold S is selected according to the noise level and the signal considered to be relevant; or binarized, $I = 0$ or 1, where 1 represents the signal and 0 the background.

In the examples below, analysing binarized image yields qualitatively the same results (orientation and scale of maximal anisotropy) as analysing gray level images, and quantitatively the signal to noise ratio is larger (data not shown), while the validation of the results by visual observation of the image is much easier.

2.2. FORMALISM

2.2.1. Boxes

We introduce a scale ℓ , and a list of positions \vec{r} inside the image; \vec{r} does not need to coincide exactly with a pixel position (its coordinates need not be integers).

Consider any function $f(\vec{M})$ defined over the image \vec{M} . The approximation of f at scale ℓ , noted $\tilde{f}(\vec{r}, \ell)$ defined as the value of f over an analyzing box at scale ℓ , centered at \vec{r} , is:

$$\tilde{f}(\vec{r}, \ell) = \sum_{\vec{M}} \phi \left(\frac{\vec{M} - \vec{r}}{\ell} \right) f(\vec{M}) \tag{1}$$

where ϕ is a smoothing function with compact support, which defines the analysis box.

The box can be a circle of center \vec{r} and radius ℓ , or a square of center \vec{r} and side 2ℓ . The sum $\sum_{\vec{M}} \phi f$ over all pixels in the analysis box is then denoted $\sum_{\text{box}} f$. The box centers \vec{r} can for instance be placed at each pixel of the image (sliding boxes) or at each node of a larger grid.

Some boxes overlap image boundaries, and are thus incomplete. There are various possibilities to deal with them, which can be selected according to the image. First, one can ignore these incomplete boxes in the analysis. Second, one can add as many black pixels as necessary to complete them without artificial signal. Third, one can put artificial periodic boundary conditions, and complete them with pixels coming from the opposite side of the image. Fourth, one can make the outer boxes coincide with the image edges: then if the image size is not a multiple of the box size, in order to tile the whole image the boxes should have variable overlaps.

2.2.2. Inertia tensor

Setting now $f \equiv I$ in Equation (1), we define the signal intensity in the box at the chosen scale ℓ as:

$$\tilde{I}(\vec{r}, \ell) = \sum_{\vec{M}} \phi I(\vec{M}) = \sum_{\text{box}} I. \tag{2}$$

If $\tilde{I}(\vec{r}, \ell) = 0$ we stop the analysis for the corresponding box. Otherwise, we define the signal barycenter \vec{G} within the box by setting $f \equiv I\vec{M}$ in the Equation (1), for the numerator:

$$\vec{G} = \frac{1}{\tilde{I}(\vec{r}, \ell)} \sum_{\vec{M}} \phi I(\vec{M}) \vec{M} = \frac{\sum_{\text{box}} I\vec{M}}{\sum_{\text{box}} I}. \tag{3}$$

We then measure the inertia tensor of the signal within the box, taken at the barycenter G , through:

$$\overline{\overline{\mathbf{P}}}(\vec{r}, \ell) = \sum_{\vec{M}} \phi I(\vec{M}) \overrightarrow{GM} \otimes \overrightarrow{GM}. \tag{4}$$

In Equation (4), the center \vec{r} of the analysing box should be distinguished from the barycenter G of the signal in this box. By

construction, $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$ is a symmetric tensor. In 2D, it writes:

$$\overline{\overline{\mathbf{P}}}(\vec{r}, \ell) = \sum_{\text{box}} \begin{pmatrix} X^2 & XY \\ XY & Y^2 \end{pmatrix} I, \tag{5}$$

where (X, Y) are the coordinates of \overrightarrow{GM} .

2.2.3. Some variants

Equation (5) admits several variants.

I could be a vector or a higher rank tensor. Correspondingly, $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$ would be a tensor which rank is the rank of I plus two.

To give the same weight to pixels close to the barycenter and close to the box boundary, one can set $f \equiv I/|\overrightarrow{GM}|^2$ in Equation (1) and define the direction tensor:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{Q}}}(\vec{r}, \ell) &= \sum_{\vec{M}} \phi \frac{I(\vec{M})}{|\overrightarrow{GM}|^2} \overrightarrow{GM} \otimes \overrightarrow{GM} \\ &= \sum_{\text{box}} \frac{1}{X^2 + Y^2} \begin{pmatrix} X^2 & XY \\ XY & Y^2 \end{pmatrix} I. \end{aligned} \tag{6}$$

By definition, $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$ depends on $\cos^2 \theta$, $\cos \theta \sin \theta$ et $\sin^2 \theta$, and so on 2θ , where θ is the angle between \overrightarrow{GM} and the x axis. Note that since the denominator of Equation (6) can vanish for $M = G$, it is reasonable to introduce a cut-off and sum only over the pixels that are at least 1 pixel away from the barycenter G . Comparing Equation (2) with Equation (6) shows that the trace of the direction tensor is:

$$\text{Tr} \overline{\overline{\mathbf{Q}}}(\vec{r}, \ell) = \sum_{\text{box}} I = \tilde{I}(\vec{r}, \ell). \tag{7}$$

The choice between $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$ and $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$ does not introduce any qualitative difference. In some boxes the result can be quantitatively different, but after averaging over boxes, both yield similar statistical results. $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$ is more sensitive to the directions close to the box center, $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$ is more robust to noise and reflects better the directions at the box scale. This test, as well as other tests of robustness with respect to variants (binarization, box shape, box position) and to noise, is presented in the ‘‘Supplementary Material.’’

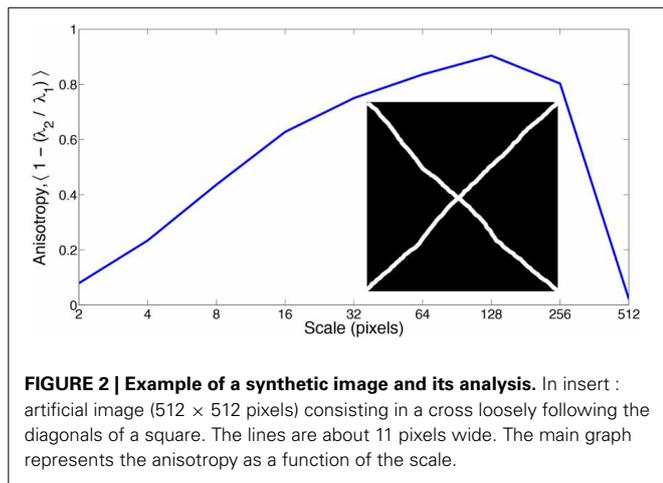
2.3. MEASUREMENTS AND REPRESENTATIONS

Different measurements can be performed. Their dependence with scale, position and orientation can be quantitatively represented using for instance graphs, maps and polar plots, respectively. In 3D images, measurements are similar as in 2D, but representations are less legible.

2.3.1. Graphs

Graphs can evidence the quantitative aspects of the dependence with scale.

First, the scale is fixed. For each box, the inertia tensor is measured. Since it is symmetric, it can be diagonalized, and has two real eigenvalues $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Its anisotropy $1 - \lambda_2/\lambda_1$ calculated. Then the anisotropies of each (non-empty) box are averaged and



their standard deviation recorded. Repeating this measurement at different scales yields a graph of the average anisotropy $\langle 1 - \lambda_2 / \lambda_1 \rangle$ vs. scale, plotted with bars reflecting the spatial variations of the anisotropy values.

An artificial example is shown in insert of **Figure 2**. The structure is a cross loosely following the diagonals of a square. The main part of **Figure 2** shows the average of the anisotropy vs. scale. As expected, it displays a maximum at the scale where the eye notes the maximal anisotropy. For small enough scales the main pattern contained in a box is a part of one of the diagonals, so that the anisotropy is high, and increases with the scale. For a size of 128 or 256 pixels, which correspond to 1/8th and one quarter of the image, the pattern contains one diagonal and the anisotropy is maximal. For the larger scale, due to its symmetry, the whole pattern is globally isotropic, the anisotropy curve drops almost to zero. In cases where it would be important to distinguish a cross from a uniform image, one should adapt Equation (5) to characterize a quadrupolar rather than dipolar anisotropy.

An alternative measurement is performed as follows. The tensor in each box is calculated, then all these tensors are averaged, and the resulting average tensor is diagonalized. This determines the anisotropy of the average tensor, which is a single tensor per image. At the largest scale where there is a single box as large as the image, this measurement coincides with the preceding one. However, it is usually much smaller than the average of each tensor's anisotropy, especially when the average tensor takes into account contributions in various directions. In that case, each box has a strong anisotropy, so that the average of anisotropies is large, but since boxes have various directions, the average tensor is globally isotropic, hence its anisotropy is very low. This is called the “powder effect” in crystallography, where different anisotropic grains together contribute to an isotropic signal. Such graph is useful to emphasize the appearance of correlated anisotropy at large scale.

2.3.2. Maps

Maps evidence qualitative features of the spatial variations.

At a given scale, in each box (and thus at each position) the inertia tensor is measured. No average is performed. Each tensor is diagonalized. In each box, the anisotropy or direction can

be separately represented, for instance as a color map. Or they can be represented together, using the classical representation of the inertia tensor as an ellipse, with axis lengths λ_1 and λ_2 in the directions corresponding to their respective eigenvectors¹: the map is then a juxtaposition of different ellipses.

One can rescale each ellipse by inscribing it in a square of the same size as the box where it is measured. Thus, the ellipse size reflects the scale of measurement. For a map constructed at a given scale, all ellipses have a comparable size. There could be an alternative possibility, where each ellipse size is proportional to the intensity of the signal within the box.

At each position, several ellipses measured at different scales can be superimposed. In order to keep some legibility, it is possible to represent only the eigenvectors rather than the whole ellipses. Or to plot the same number of ellipses at all scales (which means removing several boxes at small scales). **Figure 3A** shows an example for an artificial pattern with two well-defined length scales. At small scale, the ellipse is aligned with each small structure, while at large scale the ellipse reflects the global arrangement of the pattern.

A map can become more illuminating when superimposed on the initial image (**Figure 3A**) or combined with a quantitative graph: in **Figure 3B**, the transition region between both length scales is visible around 64–128 pixels, especially for the anisotropy of the average tensor, which evidences an effective correlation scale for the anisotropy.

2.3.3. Polar plots

Roses are quantitative representations that focus on the dependence with orientation, rather than the anisotropy itself.

For a given scale, in each box (that is, at each position) the inertia tensor is measured. It is diagonalized and only the direction θ of the eigenvector associated with its main eigenvalue λ_1 is recorded. The histogram of θ is represented: since for an eigenvector θ and $\theta + \pi$ play the same role, they are both plotted simultaneously. The same measurement can be repeated at different scales: in **Figure 3C**, the change in the principal direction is clearly visible at 128 pixels, where many non-empty boxes contain only a tiny amount of signal.

3. RESULTS

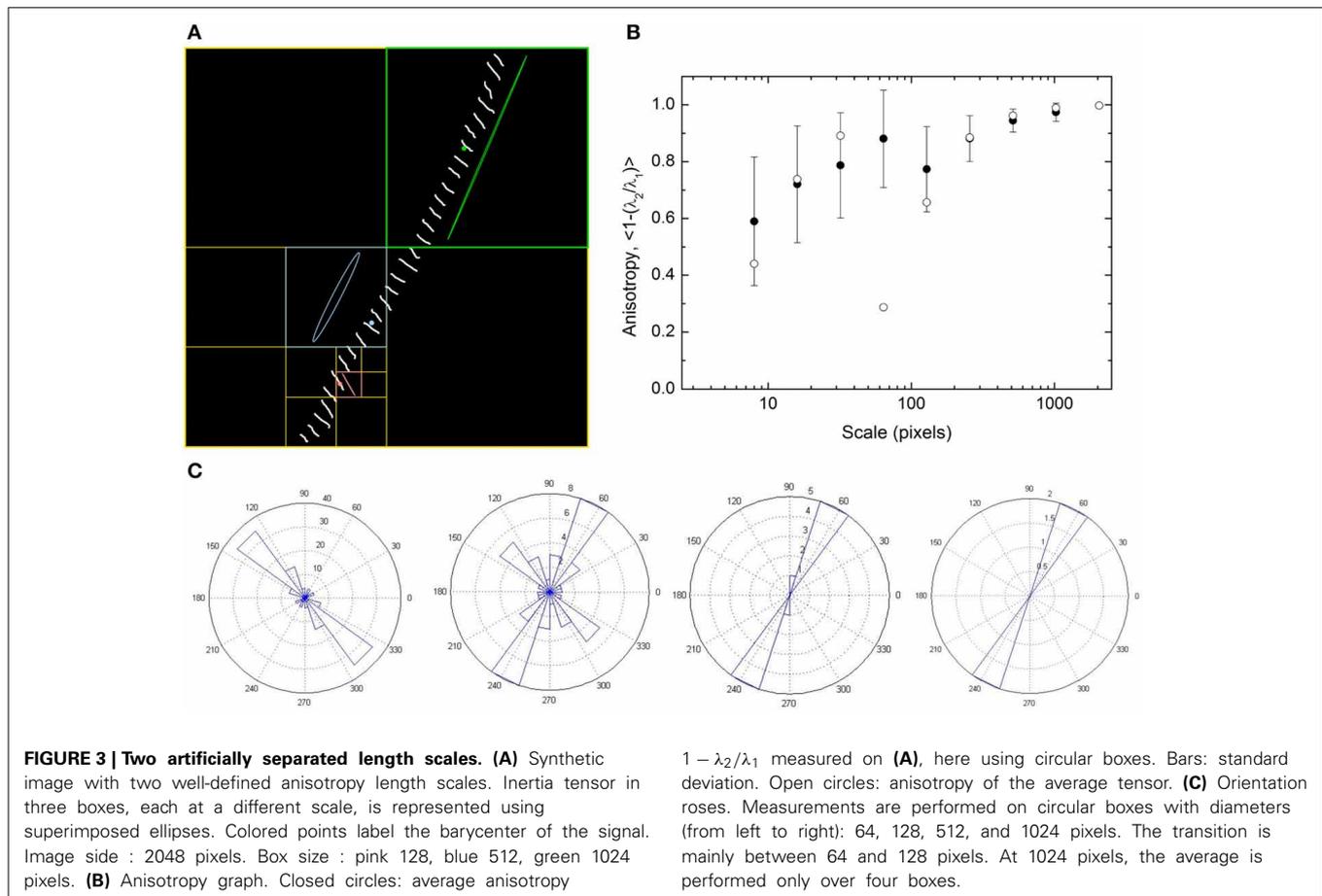
Examples are fracture patterns in ice, granite thin sections, granular medium (**Figure 1**). Unless specified, all measurements presented below are performed in square boxes.

3.1. SEA ICE FRACTURING

3.1.1. Data

The image analyzed is a visible wavelength satellite photograph of the Arctic sea ice cover, taken by “Système Pour l’Observation de la Terre” (SPOT) in early spring on April 6th, 1996, centered around 80°11’N, 108°33’W (**Figure 1A**). It contains 5977 × 5977 pixels, each pixel being 10 m, i.e., the image covers about 60 × 60 km². The thickness ~ 1–3 m of the sea ice cover is much smaller than the lateral extension of the image. Due to this aspect ratio, the ice sheet can be considered as two-dimensional.

¹<http://rsbweb.nih.gov/ij/>



Owing to the much stronger albedo of snow-covered sea ice (>0.6) compared to open ocean (<0.2) [6], newly opened fractures appear much darker than the surrounding sea ice. This is clearly visible on the gray-level (I_g) histogram (**Figure 4A**) of the image where ice values are centered around $I_g = 140$. The gray-levels result from several physical independent factors (sea ice vs open water, but also local roughness of the surface, type of snow, ...) and from measurement noise. The different secondary peaks observed below $I_g = 125$ may correspond to different levels of (recent) refreezing stages, from purely open water to thin, snow-free ice. In the sea ice terminology, these fractures are called “leads.” They differ in nature and origin from the so-called “polynya” which are open water areas inside the ice pack resulting from warm water upwelling or wind-induced drift away from a fixed boundary; there is no polynya in **Figure 1A**. This albedo difference can be used to convert this grayscale image to a binary image of only fractures or ice, as done in Weiss and Marsan [7] and Marcq and Weiss [8].

The fracture network is typical of winter pack ice and has been already analyzed in terms of fracture density and associated scaling properties [7]. It was shown that this network defines an ensemble of ice fragments (“flocs”) power-law distributed in size, whereas the fracture density is characterized by multifractal properties, both observations arguing for the scale invariant character of sea ice fracturing [7, 9]. In these

previous analyses, the anisotropy of the fracture pattern was not considered.

3.1.2. Analysis

At the scale of an individual fracture, the anisotropy arises from fracture mechanics: the average fracture opening is much smaller than the fracture length (see **Figure 1A**). We now ask whether this anisotropy is preserved for fracture networks, and whether it depends on the spatial scale.

Figure 4B shows the anisotropy $\langle 1 - \lambda_2/\lambda_1 \rangle$ vs. scale for binary images obtained from the grayscale image of **Figure 1A** using different thresholds, $I_{th} = 95, 115, 125$. For gray levels $I_g \leq I_{th}$, a binary value $I_b = 1$ is assigned to the image (water), and $I_b = 0$ instead (ice). No additional image processing was performed on the raw grayscale image. Two anisotropy measures are shown at each scale: the index averaged over all square boxes covering the image at a given scale, $\langle 1 - \lambda_2/\lambda_1 \rangle$ (closed symbols), and the index of the averaged tensor (open symbols). These averages are performed on non-empty boxes, but without additional weighting based on the total intensity contained in the box.

A similar analysis performed on the raw grayscale image (not shown) leads to a similar evolution with scale, but very small anisotropies. This is mainly due to (i) the reinforcement of contrast induced by binarization, and (ii) the fact that the averages are performed in this case over all boxes, including many “ice-only”

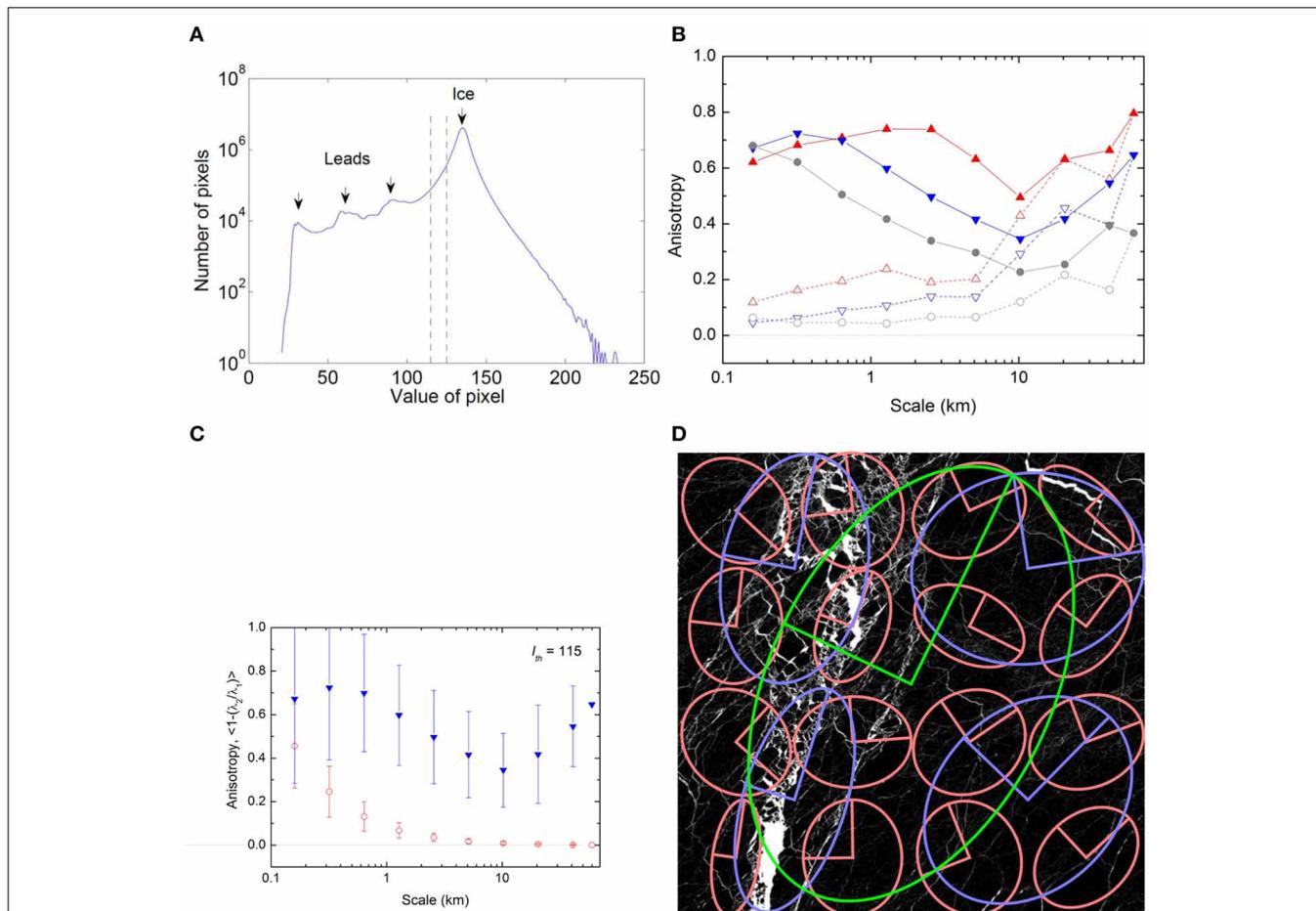


FIGURE 4 | Analysis of the sea ice image (Figure 1A). (A) Gray-level histogram of the raw image. The dashed vertical lines indicate the range of threshold values used for binarization. **(B)** Anisotropy vs. scale, for different values of the threshold. Solid lines, closed symbols: anisotropy (averaged over all boxes) vs scale for binary images obtained from different thresholds (red upward triangles: $I_{th} = 95$, blue downward triangles: $I_{th} = 115$, gray circles: $I_{th} = 125$). Dashed lines, open symbols: anisotropy of the average tensor, same symbol and color code. **(C)** Test

of significance. Blue triangles: anisotropy vs scale for $I_{th} = 115$ [same data as in **(B)**]. Errors bars correspond to the standard deviation over the different boxes of the same size. Red open circles: same measurement on a random image of the same size, with the same proportion of black pixels: in this case, as expected, the anisotropy is zero at large scales, but increases toward small scales as the result of pixelation (see text for details). **(D)** Anisotropy ellipses, drawn at scales of whole (green), half (purple) and quarter (pink) of image width.

or “water-only” boxes over which the gray-level results from noise or processes not related to fracturing.

The evolution of the averaged index $\langle 1 - \lambda_2/\lambda_1 \rangle$ is qualitatively similar whatever the threshold I_{th} : a maximum anisotropy at the scale of the entire image (5977 pixels, ~ 60 km), a minimum observed at ~ 10 km (1024 pixels), and an increase toward smaller scales. Anisotropies are larger for lower thresholds I_{th} . This might indicate that a part of noise not related to fracturing is included in the binary image when using a threshold too close to the gray-level histogram maximum ($I_g = 140$) corresponding to ice (Figure 4A).

On the other hand, this example also illustrates the intrinsic limitations of anisotropy measurements at small scales as the result of pixelisation. Figure 4C shows the averaged index $\langle 1 - \lambda_2/\lambda_1 \rangle$ calculated for a spatially randomly reshuffled version of the sea ice image binarized with $I_{th} = 115$. The resulting image contains the same number of non-empty ($I_b = 1$) pixels as the

original binary image, though randomly distributed in space, i.e., without expected anisotropy. The associated anisotropy is indeed negligible above 1 km (128 pixels), but becomes non-negligible compared to the averaged index of the original image for $L = 32$ pixels (320 m) and below. This can be easily understood by the possibility to obtain by chance an anisotropic distribution of filled pixels for such small boxes.

The large anisotropy obtained at the image scale (60 km) is clearly the signature of the large faulting system crossing the left part of the image, with fragmented material inside. This is confirmed by the corresponding ellipse inclined at about 60° (Figure 4D). Large values obtained below ~ 2 km probably correspond to the strong anisotropy of the narrow fractures observed on both sides of this system. These small scales fractures may have different orientations, thus explaining that the anisotropy of the averaged tensor is small below 10 km: in other words, the correlation length associated to the orientation of this secondary

fracturing network is small; $L = 10$ km appears as a transition scale between two fracturing systems, at least in terms of anisotropy.

Figure 4D shows the ellipses constructed at this scale, which eccentricity is indeed, in average, much reduced compared to the ellipse corresponding to the global scale. Such transition scale was not observed in terms of fracture density, which is characterized by multifractal, i.e., scale invariant, properties [7]. Obviously, a much more comprehensive analysis of sea ice fracturing networks from various images covering a wide range of spatial scales would be needed to conclude on the ubiquitous (or not) character of such transition scale for sea ice fracturing anisotropy. The present analysis simply demonstrates the ability of our methodology to reveal the anisotropy of fracture patterns at different scales, with minimal pre-processing of the raw image (simple binarization).

3.2. THIN SECTIONS OF GRANITE

3.2.1. Data

Figure 1B shows fractures in compressed granite [10]. The rock is compressed in laboratory, enough for allowing cracks to develop. At the onset of damage, their direction of propagation is parallel to the direction of major stress which induces a strong damage anisotropy. Beyond a given threshold of crack density, the damage becomes localized along shear bands characterized by a concentration of cracks which produces a granular material which geometry is conditioned by the orientation of cracks and the amount of deformation. At this stage a strong anisotropy of the grain shape is expected. Deformation then develops mainly within the granular material; grains fragment, becoming more and more isotropic.

At the end of the experiment, epoxy resin is injected in the sample to preserve its structure during machining of a thin section. The images are obtained by scanning electron microscopy where gray levels reflect the atomic mass. The resin appears in black, so that cracks and grain boundaries are easy to identify. The analysis of the anisotropy should identify areas that experienced strong deformation (more isotropic) and also a progression from damaged areas (anisotropic) to granular areas (less anisotropic when approaching of the area of high deformation).

3.2.2. Analysis

Figure 1B was analyzed like sea ice (Section 3.1.2). The contrast between the non-fractured granite (I_g around 120) and the resin/fractures (I_g close to 0) is excellent, thus making the binarization straightforward. Consequently, the anisotropy measurements weakly depend on the selected threshold I_{th} . The results presented in **Figure 5** were obtained for $I_{th} = 50$ and do not change for $I_{th} = 30$ or 70.

Figure 5A shows the ellipses constructed at different scales (from 32 to 128 pixels) and centered at different positions. Along the main inclined fault containing fragmented material, the anisotropy is small at scale 64 pixels, illustrating the relative isotropy of the highly fragmented gouge. It slowly increases toward larger scales, probably as a result of partial sampling of the anisotropy of the fault itself. Fractured zones on both sides of the main fault show very strong anisotropies at small scales

associated to single elongated fractures, as well as sharp rotations of principal directions when several fractures are included within the box. This distinction between a fault with fragmented gouge, surrounded by zones of intense fracturing without fragmentation, was also observed on the sea ice image (**Figure 1A**), for spatial scales 7 orders of magnitude larger.

Figure 5B shows a colored map of the anisotropy index $\langle 1 - \lambda_2/\lambda_1 \rangle$ calculated at the scale $L = 64$ pixels (gray boxes correspond to empty boxes). This shows quantitatively the gradient of anisotropy from the gouge material inside the fault to the much more anisotropic peripheral fractured zones. This result highlights the differences between fracture and fragmentation processes: while fractures are initiated locally under tension (mode I) with opening much smaller than fracture length, i.e., characterized by a strong anisotropy, fragmentation under shear is a complex multiscale process involving friction, grain rotation and comminution (e.g., [11–14]) that leads to relatively isotropic grain shapes. The present analysis clearly reveals this transition from one mechanism to another across the fault plane.

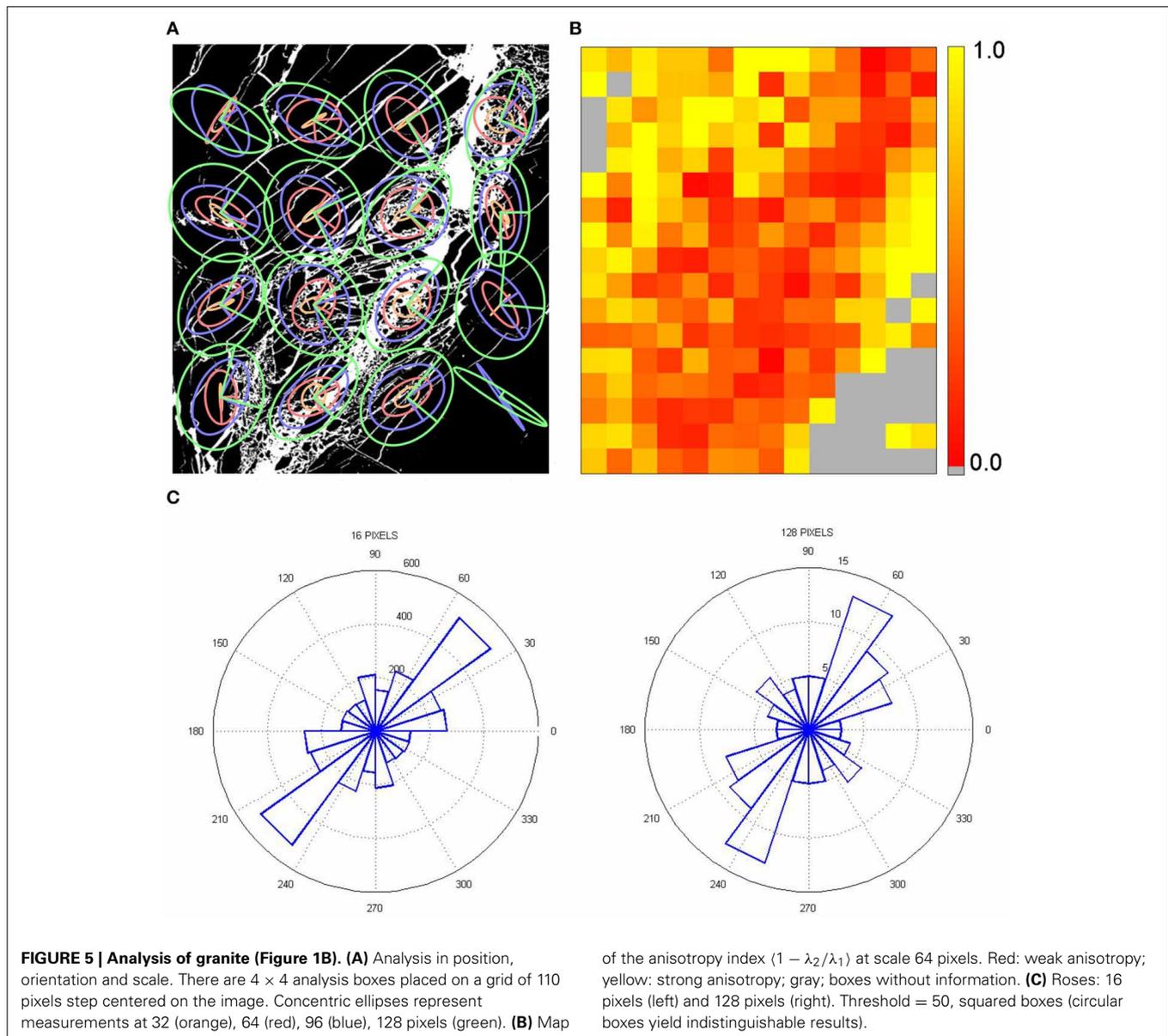
This space analysis quantifies what the eye detects qualitatively. It can be complemented by an angle analysis, which clearly identifies the main directions of anisotropy (**Figure 5C**). The scale analysis is similar to **Figure 4B**, but less pronounced, and with a minimum around 100–200 pixels (data not shown).

3.2.3. Simulations

We also analyse numerical simulations of progressive damage: for details see Ref. Amitrano [15]. Briefly, a finite element model is progressively loaded in order to increase the stress supported by the material. The strength of each element is chosen at random. To mimic the effect of increasing crack density, when the stress in a element reaches its strength, its elastic modulus is decreased by a constant factor less than unity. A model on a 256×128 grid is plotted here as a corresponding 512×256 pixels image, so each grid unit is covered by 4 pixels.

The diffuse and isotropic damage progressively evolves toward localized and anisotropic damage. Due to elastic interactions, the damage becomes progressively localized until the rupture of the whole sample, like in natural materials (**Figure 1B**). The damage parameter is $D = 1 - E/E_0$, where E is the current elastic modulus and E_0 is the initial elastic modulus. **Figures 6A–C** show the increments in damage D at three of the last steps, during damage localization.

Figure 6B shows the ellipse analysis for step 38 and **Figure 6D** shows the mean anisotropy at different scales for all the steps. To detect possible biases related to changes in damage intensity, we also performed the analysis for the same damage distribution but spatially spread at random (dotted lines in **Figure 6D**). The pattern of anisotropy can be considered to be significant as a clear departure from random images exists (except for largest scale in the initial steps). The anisotropy evolves toward the macro-failure with a clear dependence on scale. Anisotropy progressively decreases for small scales (32 pixels) whereas for large scale it increases suddenly when the macrofailure occurs. The intermediate scale of 64 pixel shows no particular trend and appears as a transition scale.



3.3. GRANULAR MATERIAL

3.3.1. Data

Mohr-Coulomb analysis predicts that failure in granular material occurs along surfaces where the ratio of tangential stress over normal stress attains a material dependent ratio, called internal friction coefficient [16]. However, mechanisms of plasticity of disordered material suggest that preferential orientations for deformations are related to the stress redistribution after localized deformations (directions of the Eshelby stress tensor [17]) which are given by elastic properties and geometry of localized deformations. The determination of the anisotropy at different scales may allow to see the competition between those two failure mechanisms.

Ref. Le Bouil et al. [18] designed an experiment in order to look at the precursors of failure. Briefly, a granular material composed of glass beads of diameter $d = 0.25$ mm is placed between

a latex membrane and a transparent glass plate. A confining pressure $-\sigma_{xx}$ is applied laterally along the horizontal axis x , and the material is compressed slowly in the perpendicular direction z , with a pressure $-\sigma_{zz}$. The granular material is illuminated with a laser light, and the scattered light detected with a camera. The coherence of the scattered light is measured with a normalized correlation function which is 1 if no deformation takes place, and which is lower than 1 when deformation takes place [19, 20].

The map of the scattered light correlation between successive images is calculated (Figures 1C–H). It shows an evolution of the correlation of the scattered intensity between two successive images acquired at the global axial deformations $\varepsilon = \Delta L/L$ and $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ with $\Delta\varepsilon \approx 1 \times 10^{-5}$.

White pixels correspond to well-correlated scattered light (i.e., weak deformation of the material), and gray pixels to decorrelated scattered light (i.e., important deformation of the material).

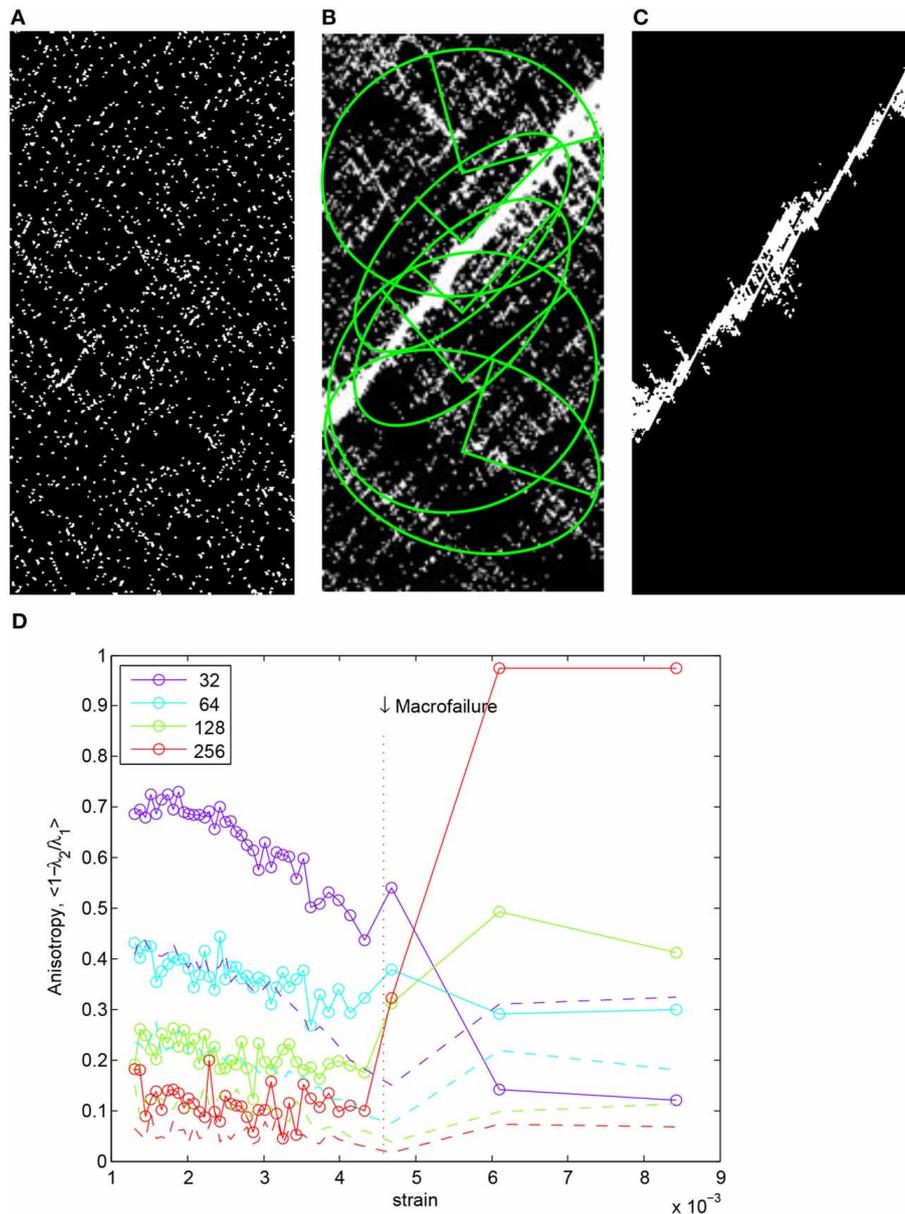


FIGURE 6 | Simulations of progressive damage in granite compression. (A–C) Snapshots of the incremental damage. The cells that experienced damage during the step appear in white and the others in black. The whole simulation is decomposed in 40 steps of incremental damage, each step corresponding to an equal number of damage events. (A) Step 34, (B) step

38, (C) step 39. On (B), anisotropy ellipses at image width are superimposed. (D) Mean anisotropy at different scales (32, 64, 128, 256 pixels) for each strain step. Steps are spaced in order to ensure an equal number of damage events in each step. Dotted lines correspond to the same damage distribution but spatially spread at random.

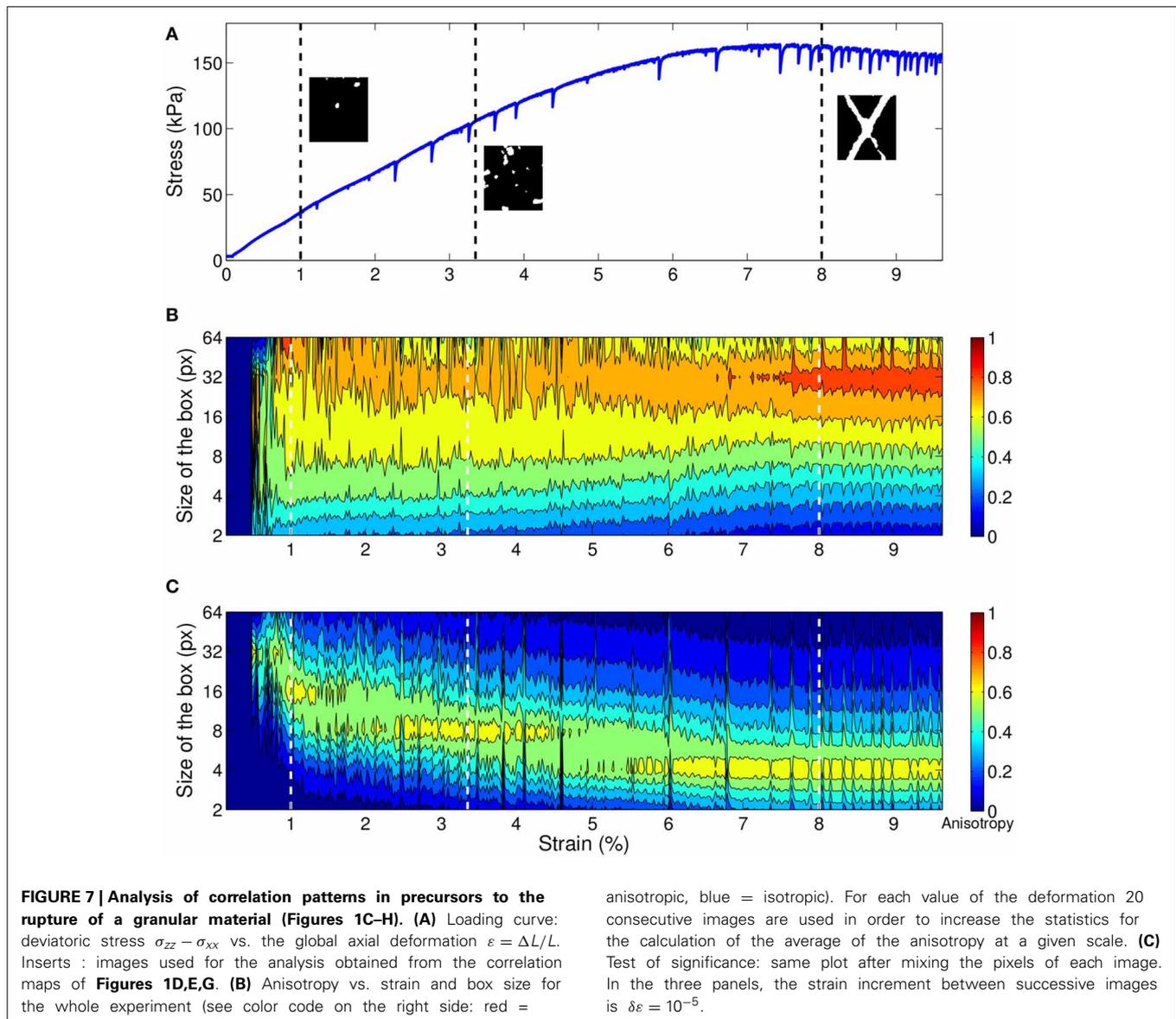
Figures 1C–H shows that the mesoscopic reorganizations occurring between ε and $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ evolves during the loading process. At the early stage of the loading process (Figures 1C,D) reorganizations occurs under the form of localized zone of deformations, called spots, and already described [21] together with a smooth and diffuse decorrelation. Around $\varepsilon \sim 3.5\%$ (Figure 1E) some largely deformed zones appear. At this point decorrelated zones show anisotropy (Figures 1E,F). Two orientations appear (with a vertical symmetry reflecting the symmetry of the loading), and become permanent (Figure 1G). Finally, at the latest stage

of the loading process, two well-defined shear bands appear (Figure 1H).

3.3.2. Analysis

Figure 7A shows the evolution of the deviatoric stress $\sigma_{zz} - \sigma_{xx}$ vs. the global axial deformation $\varepsilon = \Delta L/L$.

Figure 7B shows in colorscale the evolution of the anisotropy vs. the size of the boxes used for the image analysis, and vs. the deformation of the sample. Large enough ensemble for the average anisotropy at a given scale are obtained by



using 20 consecutive images as representative of the same pattern.

In order to reduce pixel noise at small scales which is very high in the original maps of correlation, and to reduce the effect of a gradient of deformation present at the beginning of the loading (**Figure 1D**), before anisotropy calculation the maps have been pre-treated as follows : median filter of radius 3, subtraction of the average gradient in deformation along the vertical direction, binarization.

The resulting analysis (**Figure 7B**) shows that from a strain of about 1%, the anisotropy is maximal for scales between 8 and 64 pixels. The decrease of the anisotropy at the largest scale can be understood by the fact that bands tend to appear in two symmetric directions so that at large scale the anisotropy decreases. In this particular case, a quadrupolar rather than dipolar analysis would allow a more detailed description of the conjugate bands system at large scale (Section 2.3.1). Below 1% the data are still

partly obscured by the overall gradient of deformation over the sample. The scale of maximum anisotropy increase slightly for strains between 1% and 5% and then stabilizes between 32 and 64 at the end of the process. At given scales, above a size of 16, the anisotropy increases with the deformation.

A test of the accuracy of multiscale analysis is the comparison of the result of the same algorithm applied on an image composed of the same pixels values as the original one, but where the positions of the pixels have been randomly mixed so that potential spatial structurations have been destroyed. Such randomization has been applied on all the images used for the analysis of the emergence of anisotropy in the biaxial test and the result is displayed on **Figure 7C**. A significant anisotropy appears at decreasing scales during the loading. At small deformation, anisotropy appears only at the largest scales, then the maximal value of the anisotropy appear at smaller and smaller scales. Anisotropy coming from pixel noise is expected for a pattern

containing random pixels, yet such noise can only appear when it contains at least two non-zero pixels. Indeed, when a box contains only one non-zero pixel, the barycenter of the box is located on that pixel and the anisotropy is null. It explains why for the images containing few information, as the first example where only 1.2% of the pixels are non-zero (top left inset of **Figure 7A**), anisotropy only appears for large enough boxes of analysis. When the amount of information increases, pixel noise appears at smaller scales, as the probability for two pixels to be in a smaller box increases.

A test performed with $\bar{\bar{Q}}$ instead of \bar{P} (not shown) evidences only a weak effect on **Figure 7B**. Conversely, the analysis of a random image yields a result very different from **Figure 7C**: a strong anisotropy is visible at small scales due to boxes with a small number of white pixels, with but especially without strain.

4. DISCUSSION

Our formalism can be related with two existing ones: the Leray regularization, and the optimal anisotropic wavelet transform. The inertia tensor can be compared with existing measurements, such as the anisotropic pair correlation function, the Fourier transform, the Hough transform and the diffusion tensor imaging.

4.1. LINK WITH EXISTING THEORETICAL FORMALISMS

4.1.1. Link with Leray regularization

Let us first explain the historical context of Leray’s work. The Navier-Stokes equations (NSE) take the form of partial differential equations describing for the fluid velocity. These types of equations are not suitable for non-differentiable fields, so that one needs both new tools and more general descriptions of the fluid equations to deal with singular fields, as already recognized by Onsager [22]. However, the NSE can still be meaningful in the sense of distributions, i.e., after smearing with smooth test functions $\phi(x, t)$. Leray [23] worked over a suitable formalism to construct weak solutions of a partial differential equation with singularities, like Euler equation, through a sequence of filtered velocity field u obtained by smearing it at scale with special test functions $\phi_\ell(x, t) = \ell^{-3}\phi(x/\ell)$. The corresponding velocity field are smooth, and obeys smoothed version of the NSE that describe the behavior of u in a larger phase space, including both the physical space and the scale space. Limiting behaviors for viscosity $\nu \rightarrow 0$ weak solutions of the NSE can then be obtained through limits of u as $\ell \rightarrow 0$. Leray regularization is an example of function ϕ with interesting properties, albeit (or because) intrinsically anisotropic.

In the spirit of Leray, we introduce a scale transform, with the important difference that we specifically want to extract unbiased anisotropy information. We introduce a spatial coarse-graining (which can be extended to spatio-temporal coarse graining) such that:

$$\bar{u}(b, \ell, t) = \int \frac{d^3x}{\ell^3} u(x, t) F(\vec{k} \cdot (\vec{b} - \vec{x})), \tag{8}$$

where \vec{b} , \vec{x} and \vec{k} are vectors ($|\vec{k}| = 1/\ell$), and F is any C_∞ non-negative function decaying to zero sufficiently rapidly at infinity

(more quickly than x^{-2}) and such that $\int F(x)dx = 1$ [24–26]. An example is the Gaussian $F(x) = \exp(-x^2/\sigma)/(2\pi\sigma)$.

To achieve the link with the inertia tensor, consider the scalar quantity I and take its transform according to Equation (8). By definition, it has the interesting property:

$$\begin{aligned} \partial_{k_j} \bar{I}(b, \ell, t) &= \int \frac{d^3x}{\ell^3} (b_j - x_j) I(x, t) F'(\vec{k} \cdot (\vec{b} - \vec{x})), \\ \partial_{k_j} \partial_{k_i} \bar{I}(b, \ell, t) &= \int \frac{d^3x}{\ell^3} (b_j - x_j)(b_i - x_i) I(x, t) \\ &\quad \times F''(\vec{k} \cdot (\vec{b} - \vec{x})), \end{aligned} \tag{9}$$

so that $\partial_{k_j} \partial_{k_i} \bar{I}(b, \ell, t)$ is nothing but $\bar{\bar{P}}$, the inertia tensor of I . Hence Equation (4) appears as a particular case of Leray transform.

This suggests how to generalize Equation (4). If the signal I is a vector rather than scalar quantity, the inertia tensor can be replaced by the scale tensor:

$$\begin{aligned} S_{ij}(\bar{u}) = \partial_{k_j} \bar{u}_i(b, \ell, t) &= \int \frac{d^3x}{\ell^3} (b_j - x_j) u_i(x, t) \\ &\quad \times F'(\vec{k} \cdot (\vec{b} - \vec{x})). \end{aligned} \tag{10}$$

The trace and the antisymmetric part of S yield the divergence and the rotational in scale space, respectively.

4.1.2. Link with optimal anisotropic wavelet transform

The inertia tensor can be compared with the Optimal Anisotropic Wavelet Transform (OAWT) introduced by Ouillon et al. [27] and used in characterization of fracture patterns or heterogeneous porous media [28]. The basic ingredient of OAWT is an anisotropic wavelet, depending on 3 parameters: the scale a , the orientation θ and the anisotropy factor σ . The final output is a rose diagram, representing the typical orientation of a given portion of the image as a function of scale. Its obtention requires the computation at each scale of all the wavelet coefficients as a function of σ and θ . An appropriate decimation of these wavelets coefficients through appropriate thresholding enables, for each scale a , to keep only “optimized” coefficients with given orientation θ_{opt} and anisotropy σ_{opt} . The rose diagram is then obtained as a histogram of the optimized orientations or each scale. This method therefore provides the typical orientation as a function of scale at the expense of a waste of computations: most of the computed coefficients are not used.

By comparison, the inertia tensor converges to an isotropic wavelet transform when the wavevector is isotropic. The final output of our method are ellipses, which axes are along the direction of anisotropy and which orientation provides the typical orientation at each scale and each point of the image. The computation of these ellipses requires the obtention of the inertia tensors, that are nothing but the second scale derivatives (derivation with respect to the wavevector) of the Leray-like transform (Section 4.1.1) and are very simple to implement numerically. The inertia tensor therefore provides a more direct and conceptually simple way to obtain the same information as the OAWT.

4.2. COMPARISON WITH SOME EXISTING METHODS

4.2.1. Anisotropic pair correlation function

The pair correlation function of an image is:

$$g(\vec{r}) = \frac{\langle I(\vec{x}) I(\vec{x} + \vec{r}) \rangle}{\langle I(\vec{x})^2 \rangle} \quad (11)$$

The average is here taken over all pixels \vec{x} in a box. The pair correlation function characterizes the dependence in scale $r = |\vec{r}|$ and in direction θ of vector \vec{r} .

Classical uses of $g(\vec{r})$ average over the direction θ of vector \vec{r} and only the dependence in scale, $g(r)$, is plotted. A standard use of this function $g(\vec{r})$ is to perform the average over all positions \vec{x} : the box is equal to the whole image. A problem in that case is that $\vec{x} + \vec{r}$ does not necessarily belong to the image, and thus image boundary effects have to be taken into account.

Figure 8 plots the pair correlation function for granite images in conditions similar to **Figure 5C**. Since here we are interested in anisotropy, we can alternatively plot $g(\theta)$ for a fixed r , which yields an analysis in direction (**Figures 8A,B**). Superimposing plots at different values of r yields an analysis in scale and direction (**Figure 8C**).

The pair correlation function detects well the large scale anisotropy. However, if the pattern contains small scale anisotropic structures in various directions, the pair correlation function does not detect an anisotropy at small scale (**Figure 8C**). This drawback is reminiscent of the anisotropy of our average tensor (**Figure 4B**).

By splitting the image into smaller boxes (like for the inertia tensor), the pair correlation function too can be measured vs. position, and thus in principle detect small scale anisotropy. However, in practice, the drawback of the pair correlation function is its edge effect, which becomes stronger and stronger when boxes get smaller. We have performed several tests and improvements of pair correlation function on both the granite and granular patterns without being able to significantly measure any small scale anisotropy (data not shown).

4.2.2. Fourier transform

Fourier transform decomposes an image into a set of spatial frequencies which reflect the existence, the spacing and direction of geometric patterns. In each box of a grid, after appropriate windowing (multiplication by a square cosine) that minimizes the edge effects, the local Fourier transform can be calculated. Its norm is maximum in the center of the Fourier space and its decrease is anisotropic. It is possible to quantify the anisotropy of this Fourier transform, for instance by binarizing it and measuring the anisotropy of the resulting cloud of points, yielding the initial pattern's local main direction [29].

Since only the norm (and not the phase) of the Fourier is used, the analysis is insensitive to possible translations of the pattern. This is convenient when different images are averaged, for instance in ensemble average over different experiments. Fourier transform is useful at a fixed scale. However, it suffers the same edge effects as the pair correlation function (Section 4.2.1), so that for a true analysis in terms of both position and scale, the optimal anisotropic wavelet transform (Section 4.1.2) or the inertia tensor are more suitable.

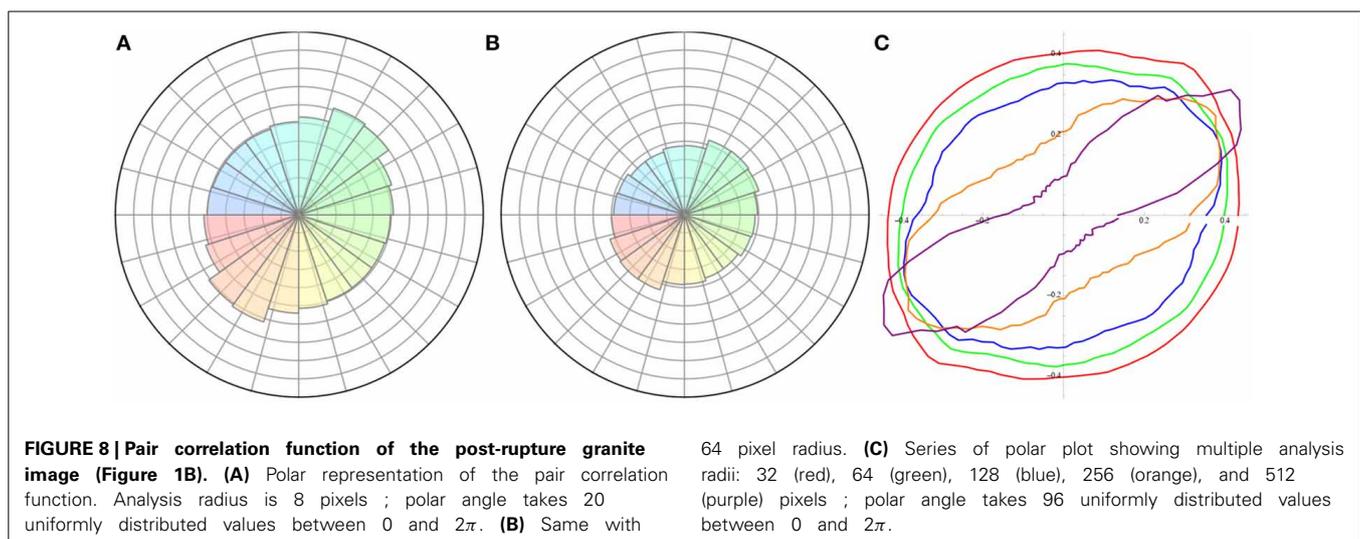
4.2.3. Hough transform

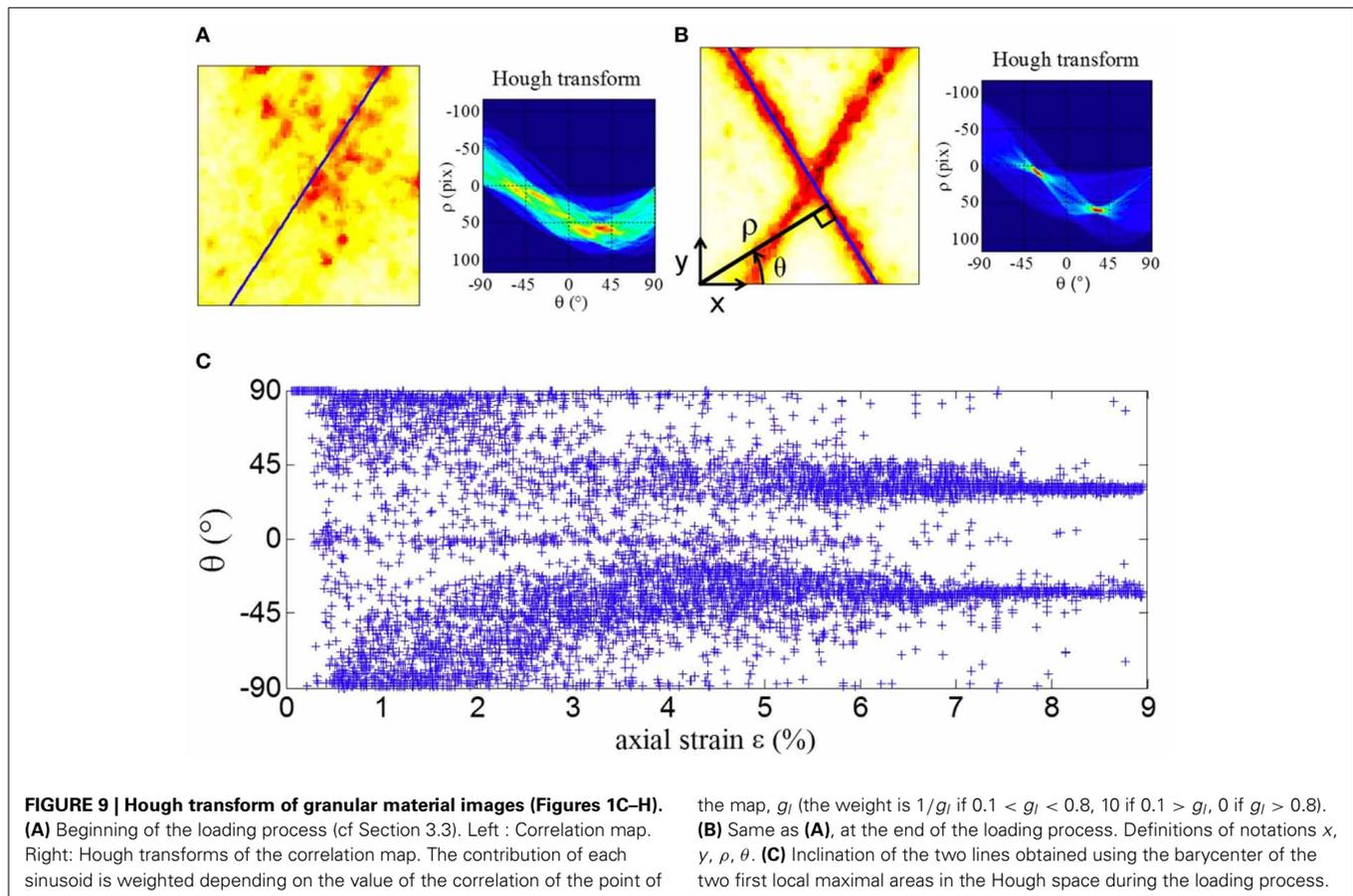
The Hough transform is a tool allowing to detect lines in pictures [30]. We use it on the granular image patterns (**Figures 1C–H**) to find the preferential direction of the intermittent and permanent shear bands.

The method is based on a characterization of lines in the plane by two polar parameters (ρ, θ) , ρ being the distance between the considered line and the origin, and θ the polar angle between the normal to the line and the abscissa. Using this parametrization the whole set of possible lines going through a given point (x_0, y_0) can be written :

$$\rho = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta, \quad (12)$$

so that the ensemble of concurrent lines associated to a single point in the plane is represented by a sinusoid in the (ρ, θ) parameter space, the so-called *Hough space*. For an image containing N





points, the representation in the Hough space will contain N sinusoids (Figures 9A,B). The intersections of those sinusoids give values of the parameters corresponding to lines going through several points of the pattern. For example, the Hough transform of Figure 9A displays several values of the parameters (ρ, θ) for which numerous sinusoids intersect. Lines corresponding to those values of the parameters are drawn in blue on Figures 9A,B, using barycenters of the maximal areas in the plane of parameters (ρ, θ).

As Figure 9A, left displays numerous scattered spots, several intersections are seen in the Hough space (Figure 9A, right) and the areas corresponding to intersections of sinusoids are wide. On the other hand, in Figure 9B, left, where two very clear inclinations are seen on the image, the Hough transform (Figure 9B, right) displays two clear intersections of most sinusoids, indeed corresponding to the principal inclinations in the image.

Figure 9C shows the successive inclinations of the major lines obtained using the Hough transform. For each value of the axial strain, the values of the parameters of the barycenters of the local maximal areas in the Hough space are used. At the beginning of the loading process, the inclinations obtained are scattered but follow a general trend: a monotonous evolution from two symmetric positions starting from almost horizontal to lines inclined at $\pm 30^\circ$.

Since Hough transform and inertia tensor provide different types of outputs, they are complementary rather than directly

comparable. Hough transform is highly accurate to analyse the position and direction of well-formed linear structures, such as fibers. The inertia tensor is multiscale; it probes various types of anisotropic structures, not only lines; and it is simpler.

4.2.4. Tensor imaging

In nuclear magnetic resonance images (MRI), normally performed in 3D, it is possible to determine in each voxel the local diffusion coefficient of water molecules. Diffusion can be anisotropic: water diffuses more quickly along one direction than along another; a diffusion tensor, rather than a scalar coefficient, can be determined voxel by voxel. Such diffusion tensor imaging (DTI) can be analyzed to determine privileged directions (oriented distribution function, or ODF), using specific representations like q-ball imaging (QBI). This is instrumental to evaluate the presence and position of fibers, for instance in brain or muscle, using a set of techniques collectively called “tractography” [4, 31].

Both DTI and inertia tensor measure a local anisotropy, which can help to identify fibers by investigate how aligned are the anisotropy directions of neighboring voxels. Both use tensorial formalisms, which make them mathematically robust, adaptable to both 2D and 3D, and amenable to similar representations; both are suitable for averages over different images (for which Fourier transform is sometimes better, see Section 4.2.2). Beside that, DTI and inertia tensor differ strongly; since they use different

types of inputs, they are complementary rather than directly comparable.

DTI is a subpixel resolution technique, in the sense that it helps finding fibers even where the actual image obtained by MRI is uniform or at least isotropic. Rather than the anisotropy of the pattern itself, it investigates the anisotropy of a physical property defined at each voxel, which is itself a tensor (the diffusion tensor). Since the scale of study is determined by the timing, amplitude and shape of the gradient pulses, DTI can be made multiscale by performing a new experiment for each scale, even at scales smaller than the voxel size [32].

In other fields, other tensors can be imaged. In mechanics, a local stress or strain tensor can be defined at the scale of resolution of the analysis, or after coarse graining at the scale of a box up to the system size scale [33].

The inertia tensor, much simpler than tensor imaging, is based on a scalar value at each voxel, and determines the anisotropy of the spatial distribution of this scalar among voxels. The anisotropy is a property of the pattern, irrespective of the physical quantity encoded in the scalar value. It is directly multiscale, at scales larger than the voxel size. It detects fibers at scales larger than the voxel size (which Hough transform performs more accurately, see Section 4.2.3). It also probes other types of anisotropic structures.

Equation (4) is tensorial, and thus equally valid in three dimensions, where the analog of Equation (5) is:

$$\overline{\mathbf{P}}(\vec{r}, \ell) = \sum_{\text{box}} \begin{pmatrix} X^2 & XY & XZ \\ XY & Y^2 & YZ \\ XZ & YZ & Z^2 \end{pmatrix} I. \quad (13)$$

The set of measurements based on a 3D tensor can be inspired from mechanics: normal differences, ratios of eigenvalues, 2D invariant. Numbers ranging from 0 to 1 to quantify the anisotropy can be inspired from MRI: standard deviation of the three eigenvalues ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) normalized by their average $\langle \lambda_i \rangle$ (“relative anisotropy”) or by their root mean square $\langle \lambda_i^2 \rangle^{1/2}$ (“fractional anisotropy”); or 1 minus the “volume ratio” (defined as the product of the eigenvalues divided by their average cubed), $1 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / \langle \lambda_i \rangle^3$.

Representations can also be inspired from mechanics or MRI: ellipsoids, bars, color maps.

5. CONCLUSION

In summary, the proposed method for anisotropy analysis consists in dividing the image into analysis boxes at a chosen scale; in each box an ellipse (the inertia tensor) is fitted to the signal and thus determines the direction in which the signal is more present. This tensor can be averaged in position and/or be used to study the dependence with scale. While this choice is motivated more by the search for simplicity than by any mathematical reason, it is linked with the formalisms of Leray transforms and anisotropic wavelet analysis.

Such protocol is intuitively interpreted, and consistent with what the eye detects: relevant scales, local variations in space, privileged directions. It is fast and parallelizable. It constitutes a versatile toolbox with several variants adaptable to the users’ data

and needs. It is useful to statistically characterize anisotropies of 2D or 3D patterns in which individual objects are not easily distinguished, with only minimal pre-processing of the raw image, and more generally applies to data in higher dimensions. It is less sensitive to edge effects, and thus better adapted for a multiscale analysis down to small scale boxes, than comparable methods such as pair correlation function or Fourier transform. Easy to understand and implement, it complements more sophisticated methods such as Hough transform or diffusion tensor imaging.

We successfully use it on various fracture patterns (which differ by seven orders of magnitude in spatial scales: the sea ice cover, thin sections of granite, and granular materials), to pinpoint the maximal anisotropy scales. The results are robust to noise and to users’ choices. It is possible to distinguish the case where all regions are isotropic, from the case where all regions have anisotropies but in different directions (“powder effect”). Beside the field of fracture, this toolbox could turn useful for granular materials, hard condensed matter, geophysics, thin films, statistical mechanics, characterization of networks, fluctuating amorphous systems, inhomogeneous and disordered systems, or medical imaging, among others.

AUTHOR CONTRIBUTIONS

Roland Lehoucq, Jérôme Weiss, Bérengère Dubrulle, David Amitrano, François Graner have contributed to design the research; Jérôme Weiss, David Amitrano, Axelle Amon, Antoine Le Bouil, Jérôme Crassous have contributed to acquire the data; Roland Lehoucq, Jérôme Weiss, Axelle Amon, Antoine Le Bouil, Jérôme Crassous, David Amitrano, François Graner have contributed to analyse the data; Roland Lehoucq, Jérôme Weiss, Bérengère Dubrulle, Axelle Amon, Jérôme Crassous, David Amitrano, François Graner have contributed to interpret the results; Roland Lehoucq, Jérôme Weiss, Bérengère Dubrulle, Axelle Amon, François Graner have contributed to draft the manuscript; all authors have contributed to revise the manuscript and have given final approval.

FUNDING

François Graner belongs to the CNRS consortiums “Foams and Emulsions,” which provided travel funding, and “CellTiss.”

ACKNOWLEDGMENTS

Antoine Le Bouil, Axelle Amon, and Jérôme Crassous thank Guillaume Raffy for discussions about Hough transform. We thank Cyprien Gay and Davide Faranda for critical reading of the manuscript.

SUPPLEMENTARY MATERIAL

The Supplementary Material for this article can be found online at: <http://www.frontiersin.org/journal/10.3389/fphy.2014.00084/abstract>

REFERENCES

1. Mecke K, Stoyan D. (eds). *Morphology of Condensed Matter - Physics and Geometry of Spatially Complex Systems, Lecture Notes in Physics 600*. Heidelberg: Springer (2002).

2. Graner F, Dollet B, Raufaste C, Marmottant P. Discrete rearranging disordered patterns, part I: Robust statistical tools in two or three dimensions. *Eur Phys J E* (2008) **25**, 349. doi: 10.1140/epje/i2007-10298-8
3. Jiao Y, Stillinger FH, Torquato S. A superior descriptor of random textures and its predictive capacity. *Proc Natl Acad Sci USA*. (2009) **106**, 17634. doi: 10.1073/pnas.0905919106
4. Le Bihan D, Mangin JF, Poupon C, Clark CA, Pappata S, Molko N, et al. Diffusion tensor imaging: concepts and applications. *J Magn Reson Imaging*. (2001) **13**, 534. doi: 10.1002/jmri.1076
5. Veatne JN, Rimstad E, Hope SM, Korsnes R, Hansen A. Fracture networks in sea ice. *Front Phys*. (2014) **2**:21. doi: 10.3389/fphy.2014.00021
6. Fichefet T, Morales Maqueda MA. On modelling the sea-ice-ocean system. *Modél. Coupl. Climatol.* (1995) **76**, 343–420.
7. Weiss J, Marsan D. Scale properties of sea ice deformation and fracturing. *CR Phys*. (2004) **5**, 683–685. doi: 10.1016/j.cry.2004.08.003
8. Marcq S, Weiss J. Influence of sea ice lead-width distribution on turbulent heat transfer between the ocean and the atmosphere. *Cryosphere* (2012) **6**, 143–156. doi: 10.5194/tc-6-143-2012
9. Weiss J, Marsan D. Scale properties of fracture and faulting in ice on Earth. *Surv Geophys*. (2003) **24**, 185–227. doi: 10.1023/A:1023293117309
10. Dyer H, Amitrano D, Boullier AM. Scaling properties of fault rocks. *J Struct Geol*. (2012) **45**, 125–136. doi: 10.1016/j.jsg.2012.06.016
11. Heilbronner R, Keulen N. Grain size and grain shape analysis of fault rocks. *Tectonophysics* (2006) **427**, 199–216. doi: 10.1016/j.tecto.2006.05.020
12. Sammis CG, King G, Biegel R. The kinematics of gouge deformation. *PAGEOPH* (1987) **125**, 777. doi: 10.1007/BF00878033
13. Sammis CG, Biegel R. Fractals, fault gouge, and friction, *PAGEOPH* (1989) **131**, 255–271. doi: 10.1007/BF00874490
14. Sammis CG, King GCP. Mechanical origin of power law scaling in fault zone rock. *Geophys Res Lett*. (2007) **34**, L04312. doi: 10.1029/2006GL028548
15. Amitrano D. Brittle-ductile transition and associated seismicity: Experimental and numerical studies and relationship with the b-value. *J Geophys Res*. (2003) **108 B1**, 2044. doi: 10.1029/2001JB000680
16. Nedderman RM. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. New York, NY: Cambridge University Press (1992).
17. Eshelby JD. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and related problems. *Proc R Soc Lond A* (1957) **241**, 376–396. doi: 10.1098/rspa.1957.0133
18. Le Bouil A, Amon A, Sangleboeuf JC, Orain H, Bésuelle P, Viggiani G, et al. A biaxial apparatus for the study of heterogeneous and intermittent strains in granular materials. *Granul Matter* (2014) **16**, 1–8. doi: 10.1007/s10035-013-0477-x
19. Crassous J. Diffusive wave spectroscopy of a random close packing of spheres. *Eur Phys J E* (2007) **23**, 145. doi: 10.1140/epje/i2006-10079-y
20. Erpelding M, Amon A, Crassous J. Diffusive wave spectroscopy applied to the spatially resolved deformation of a solid. *Phys Rev E* (2008) **78**:046104. doi: 10.1103/PhysRevE.78.046104
21. Amon A, Nguyen VB, Bruand A, Crassous J, Clément E. Hot spots in an athermal system. *Phys Rev Lett*. (2012) **108**:135502. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.135502
22. Onsager L. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cim.* (1949) **6**(Suppl.), 279–287, see also 249, 261.
23. Leray J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.* (1934) **63**, 193248. doi: 10.1007/BF02547354
24. Eyink GL. The Renormalization Group method in statistical hydrodynamics. *Phys Fluids A* (1994) **6**, 3063–3078. doi: 10.1063/1.868131 .
25. Eyink GL, Sreenivasan KR. Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence. *Rev Mod Phys.*(2006) **78**, 87135. doi: 10.1103/RevModPhys.78.87
26. Eyink GL. Dissipative anomalies in singular Euler flows. *Physica D* (2008) **237**, 1956–1968. doi: 10.1016/j.physd.2008.02.005 .
27. Ouillon G, Sornette D, Castaing C. Organisation of joints and faults from 1-cm to 100-km scales revealed by optimized anisotropic wavelet coefficient method and multifractal analysis. *Nonlin Proc Geophys.* (1995) **2**, 158. doi: 10.5194/npg-2-158-1995
28. Qi X, Neupauer RM. Wavelet analysis of characteristic length scales and orientation of two-dimensional heterogeneous porous media. *Adv Water Resour* (2010) **33**, 514. doi: 10.1016/j.advwatres.2010.02.003
29. Bosveld F, Bonnet I, Guirao B, Tlili S, Wang Z, Petitalot A, et al. Mechanical control of morphogenesis by Fat/Dachsous/Four-Jointed planar cell polarity pathway. *Science* (2012) **336**, 724. doi: 10.1126/science.1221071
30. Duda RO, Hart PE. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Comm ACM* (1972) **15**, 11–15. doi: 10.1145/361237.361242
31. Descoteaux M. *High Angular Resolution Diffusion MRI: From Local Estimation to Segmentation and Tractography*. Human-computer interaction, Ph.D. thesis (in english), Université Nice Sophia Antipolis (2008). Available online at: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00457458>
32. Ingo C, Magin RL, Colon-Perez L, Triplett W, Mareci TH. On random walks and entropy in diffusion-weighted magnetic resonance imaging studies of neural tissue. *Magn Reson Med.* (2014) **71**, 617–627. doi: 10.1002/mrm.24706
33. Marsan D, Stern H, Lindsay R, Weiss J. Scale dependence and localization of the deformation of Arctic sea ice. *Phys Rev Lett.* (2004) **93**:178501. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.178501

Conflict of Interest Statement: The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.

Received: 10 September 2014; accepted: 31 December 2014; published online: 15 January 2015.

Citation: Lehoucq R, Weiss J, Dubrulle B, Amon A, Le Bouil A, Crassous J, Amitrano D and Graner F (2015) Analysis of image vs. position, scale and direction reveals pattern texture anisotropy. *Front. Phys.* **2**:84. doi: 10.3389/fphy.2014.00084

This article was submitted to *Interdisciplinary Physics*, a section of the journal *Frontiers in Physics*.

Copyright © 2015 Lehoucq, Weiss, Dubrulle, Amon, Le Bouil, Crassous, Amitrano and Graner. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY). The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) or licensor are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.

Bibliographie

- [ABC13] Axelle Amon, Roman Bertoni, and Jérôme Crassous. Experimental investigation of plastic deformations before a granular avalanche. *Phys. Rev. E*, 87 :012204, Jan 2013.
- [ADAA77] J.F.R. Arthur, T. Dunstan, Q.A.J. Assadi, and A. Assadi. Plastic deformation and failure in granular material. *Geotechnique*, 27 :53–74, 1977.
- [AFP11] Bruno Andreotti, Yoël Forterre, and Olivier Pouliquen. *Les milieux granulaires entre fluide et solide*. EDP Sciences, 2011.
- [AMLHV05] F. Alonso-Marroquín, S. Luding, H. J. Herrmann, and I. Vardoulakis. Role of anisotropy in the elastoplastic response of a polygonal packing. *Physical Review E*, 71(051304), 2005.
- [ANB⁺12a] A. Amon, V. B. Nguyen, A. Bruand, J. Crassous, and E. Clément. Hot spots in an athermal system. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :135502, Mar 2012.
- [ANB⁺12b] A. Amon, V. B. Nguyen, A. Bruand, J. Crassous, and E. Clément. Hot spots in an athermal system. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :135502, Mar 2012.
- [Arg79] A. S. Argon. Plastic deformation in metallic glasses. *Acta Metall.*, 27 :47–58, Jan 1979.
- [BA94] V. V. Bulatov and A. S. Argon. A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior : Iii. plasticity in ordered versus disordered solids. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2 :203–222, 1994.
- [Bar90] J.-P. Bardet. A comprehensive review of strain localization in elastoplastic soils. *Computers and geotechnics*, 10 :163–188, 1990.
- [BCA09] Lydéric Bocquet, Annie Colin, and Armand Ajdar. Kinetic theory of plastic flow in soft glassy materials. *Physical Review Letters*, 2009.

- [BM94] D. Bicoût and G. Maret. Multiple light scattering in taylor-couette flow. *Physica A*, 210 :87–112, 1994.
- [BR04] Pierre Bésuelle and John W. Rudnicki. Localization : shear bands and compaction bands. *Mechanics of fluid saturated rocks*, 2004.
- [CdP03] Sylvain Courrech du Pont. *Avalanches granulaires en milieu fluide*. PhD thesis, Paris XI, 2003.
- [CR00] Gaël Combe and Jean-Noël Roux. Strain versus stress in a model granular material : A devil’s staircase. *Physical Review Letters*, 85(17) :3628–3631, 2000.
- [Cra07a] J. Crassous. Diffusive wave spectroscopy of a random close packing of spheres. *Eur. Phys. J. E*, 23 :145–152, 2007.
- [Cra07b] J. Crassous. Diffusive wave spectroscopy of a random close packing of spheres. *Eur. Phys. J. E*, 23 :145–152, 2007.
- [CREA⁺11] V. Chean, E. Robin, R. El Abdi, JC. Sangleboeuf, and P. Houizot. Use of the mark-tracking method for optical fiber characterization. *Optics and Laser Technology*, 43 :1172–1178, 2011.
- [CS79] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29 No. 1 :47–65, 1979.
- [DC05] Linda Djaoui and Jérôme Crassous. Probing creep motion in granular materials with light scattering. *Granular Matter*, 7 :185–190, 2005. 10.1007/s10035-005-0210-5.
- [Des84] Jacques Desrues. *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. PhD thesis, Institut de Mécanique de Grenoble, 1984.
- [DH72] Richard O. Duda and Peter E. Hart. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Communications of Association for Computing Machinery*, 15(1) :11–15, 1972.
- [DV04] Jacques Desrues and Gioacchino Viggiani. Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(4) :279–321, 2004.
- [EAC08] M. Erpelding, A. Amon, and J. Crassous. Diffusive wave spectroscopy applied to the spatially resolved deformation of a solid. *Phys. Rev. E*, 78 :046104, Oct 2008.

- [Erp10] Marion Erpelding. *Etude expérimentale de micro-déformations dans des matériaux hétérogènes par diffusion de la lumière*. Thèse, Université de rennes1, 2010.
- [Esh57] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241 :376–396, 1957.
- [FL98] M. L. Falk and J. S. Langer. Dynamics of viscoplastic deformation in amorphous solids. *Physical Review E*, 57(6) :7192–7205, 1998.
- [GAW13] Florent Gimbert, David Amitrano, and Jérôme Weiss. Crossover from quasi-static to dense flow regime in compressed frictional granular media. *EPL (Europhysics Letters)*, 104, 2013.
- [GCO⁺08] J. Goyon, A. Colin, G. Ovarlez, A. Adjari, and L. Bocquet. Spatial cooperativity in soft glassy flows. *Nature*, 454 :84–87, 2008.
- [HK13] David L. Henann and Ken Kamrin. A predictive, size-dependent continuum model for dense granular flows. *PNAS*, 2013.
- [JM92] M. Jean and J Moreau. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies colletions. *Proc.of Contact Mech. Int. Symp.*, pages 31–48, 1992.
- [KSD07] Alexandre Kabla, Julien Scheibert, and Georges Debregeas. Quasi-static rheology of foams. part 2. continuous shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 587 :45–72, 2007.
- [Kuh99] Matthew R. Kuhn. Structured deformation in granular materials. *Mechanics of Materials*, 31(6) :407 – 429, 1999.
- [LBAMC14] A. Le Bouil, A. Amon, S. McNamara, and J. Crassous. Emergence of cooperativity in plasticity of soft glassy materials. *Physical Review Letters*, 112 :246001, 2014.
- [LBAS⁺14] Antoine Le Bouil, Axelle Amon, Jean-Christophe Sangleboeuf, Hervé Orain, Pierre Bésuelle, Cino Viggiani, Patrick Chasle, and Jérôme Crassous. A biaxial apparatus for the study of heterogeneous and intermittent strains in granular materials. *Granular Matter*, 2014.
- [LN98] Andrea J. Liu and Sidney R. Nagel. Jamming is not just cool any more. *Nature*, 1998.

- [Mai85] Henry Maitre. Un panorama de la transformation de Hough. *Traitement du signal*, 2(4) :305–317, 1985.
- [MD97] N. Menon and D. J. Durian. Diffusing-wave spectroscopy of dynamics in a three-dimensional granular flow. *Science*, 275 :1920, 1997.
- [MGJS04] Hernan A. Makse, Nicolas Gland, David L. Johnson, and Lawrence Schwartz. Granular packings : Nonlinear elasticity, sound propagation and collective relaxation dynamics. *Physical Review E*, 70 :061302, 2004.
- [ML06] Craig E. Maloney and Anaël Lemaître. Amorphous systems in athermal, quasistatic shear. *Physical Review E*, 74(016118) :1–22, 2006.
- [Mor94] J Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *Eur. J. Mech.*, 13(4) :93–114, 1994.
- [Ned92] R.M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
- [PALB05] Guillemette Picard, Armand Ajdari, François Lequeux, and Lydéric Bocquet. Slow flows of yield stress fluids : Complex spatiotemporal behavior within a simple elastoplastic model. *Phys. Rev. E*, 71 :010501, Jan 2005.
- [PWCH88] D. J. Pine, D. A. Weitz, P. M. Chaikin, and E. Herbolzheimer. Diffusing-wave spectroscopy. *Physical Review Letters*, 60(12) :1134, 1988.
- [RJMR96] Farhang Radjai, Michel Jean, Jean-Jacques Moreau, and Stéphane Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Physical Review Letters*, 77(2) :274–277, 1996.
- [Ros70] K. H. Roscoe. The influence of strains in soil mechanics. *Géotechnique*, 20 :29–170, 1970.
- [SF07] Luc Sibille and Francesco Froiio. A numerical photogrammetry technique for measuring microscale kinematics and fabric in schneebeli materials. *Granular Matter*, 9 :183–193, 2007.
- [Spa76] Frans Spaepen. A microscopic mechanism for steady state inhomogeneous flow in metallic glasses. *Acta Metallurgica*, 25 :407–415, 1976.

- [SW07] Peter Schall and Frans Weitz, David A. and Spaepen. Structural rearrangements that govern flow in colloidal glasses. *Science*, 318 :1895–1899, 2007.
- [Tor07] A. Tordesillas. Force chain buckling, unjamming transitions and shear banding in dense granular assemblies. *Philosophical Magazine*, 2007.
- [TPVR12] Mehdi Talamali, Viljo Petäjä, Damien Vandembroucq, and Stéphane Roux. Strain localization and anisotropic correlations in a mesoscopic model of amorphous plasticity. *Comptes Rendus Mécanique*, 340 :275–288, 2012.
- [Var79] I. Vardoulakis. Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples. *Acta Mechanica*, 32 :35–54, 1979.
- [Var80] I. Vardoulakis. Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, 4 :103–119, 1980.
- [WM11] Philipp Welker and Sean McNamara. Precursors of failure and weakening in a biaxial test. *Granular Matter*, 13 :93–105, 2011.

Résumé

Comme tous les milieux amorphes, lorsque les milieux granulaires sont soumis à une contrainte suffisamment importante, ils présentent de la localisation de la déformation. Lors de la rupture d'un matériau granulaire, on assiste ainsi à la formation de bandes de cisaillement. Cette transition solide-liquide est encore largement incomprise.

Dans le but de caractériser cette dynamique et d'observer des précurseurs à la rupture, nous avons développé un dispositif expérimental original de test biaxial en déformation plane. Il consiste à appliquer une compression uni-axiale quasi-statique à un échantillon granulaire modèle constitué de micro-billes de verre soumis à une pression de confinement. La compréhension des mécanismes physiques mis en jeu nécessite d'observer de très faibles déformations, pour cela nous utilisons une méthode interférométrique basée sur la diffusion multiple de la lumière.

Lors des expériences, nous avons mis en évidence deux types de déformation distincts caractérisés par une dynamique et des angles caractéristiques différents. Avant la rupture, on observe une dynamique intermittente de micro-bandes organisées en réseau. Il s'agit de la première observation de ce type de dynamique que nous interprétons comme une cascade de réarrangements localisés de type Eshelby. Cette dynamique collective émergente ne fait pas intervenir la friction et s'inscrit dans le cadre de la plasticité des amorphes. À la rupture, nous observons des bandes permanentes dont l'inclinaison est donnée par l'angle de friction interne (Mohr-Coulomb). Au cours de la charge, ces deux types de déformation cohabitent, révélant une transition complexe d'un écoulement plastique à une localisation sur des bandes frictionnelles.

Abstract

Granular materials belong to amorphous media and display localization of deformation when submitted to a large enough stress. Indeed, shear bands appear at the failure of a granular medium and this solid/liquid transition is still an open question.

In order to characterize this dynamics and to observe rupture precursors, we developed an experimental device of plane strain biaxial test. It consists in a quasistatic uniaxial compression of a model granular sample made of glass microbeads under confinement pressure. We used an original interferometric method based on multiple light scattering to probe tiny deformations.

Our experiments evidenced two types of deformation, those two behaviors differ in their dynamics and their characteristic angle. We observed for the first time an organization of the deformation in an intermittent microbands network from the early stage of the loading. We interpreted this behavior as a cascade of Eshelby-like localized rearrangements. This emerging collective dynamics is not due to friction and can be understood in the framework of amorphous media plasticity. At the failure, permanent shear bands of inclination governed by internal friction angle (Mohr-Coulomb) appear. During the loading, both types of strain coexist displaying a complex transition between plastic flow and frictional shear bands.