



**HAL**  
open science

# Intégration du retour d'expérience pour une stratégie de maintenance dynamique

Rony Rozas

► **To cite this version:**

Rony Rozas. Intégration du retour d'expérience pour une stratégie de maintenance dynamique. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1112 . tel-01138986

**HAL Id: tel-01138986**

**<https://theses.hal.science/tel-01138986v1>**

Submitted on 3 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Intégration du retour d'expérience pour une stratégie de maintenance adaptative

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 19 décembre 2014  
pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université Paris Est**

**Spécialité : Traitement du signal et des images**

par

**Rony ROZAS**

### Composition du jury :

*Rapporteurs :* Philippe Leray      Professeur des Universités, Polytech' Nantes  
                         Antoine Grall      Professeur des Universités, UTT

*Examineurs :* Philippe Weber      Maître de Conférence, Université de Lorraine CRAN

*Directeur :* Patrice Aknin      Directeur de recherche, IFSTTAR

*Co-Directeur :* Laurent Bouillaut      Chargé de recherche HDR, IFSTTAR

préparée à l'IFSTTAR - Grettia



*A Roseline et notre petite princesse Talina*



---

## Remerciements

Je tiens premièrement à remercier mes directeurs de thèses Patrice Aknin, actuellement Directeur scientifique de la SNCF, et Laurent Bouillaut, Chargé de recherche à l'IFSTTAR, d'avoir su m'accompagner tout au long de cette thèse. Je les remercie en particulier pour la confiance et les conseils avisés qu'ils m'ont fourni et qui par m'ont permis d'aller jusqu'au bout de ce projet.

Je remercie également mes rapporteurs M. Antoine Grall, Professeur des universités à l'UTT, et M. Philippe Leray, Professeur à Polytech'Nante, pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et l'attention qu'ils ont portée à mon travail. Merci également à M. Philippe Weber, maître de conférences à l'université de Lorraine, qui a accepté d'examiner mon travail.

J'aimerais poursuivre en remerciant l'ensemble des personnes avec qui j'ai collaboré sur le projet SurFer. Je pense en particulier aux acteurs de ce projets du coté de Bombardier, Guillaume Branger, Fabien Turgis et Quentin Coutadeur qui ont partagé avec moi leurs connaissances sur les parties techniques des systèmes d'accès voyageurs.

Je souhaite remercier tous mes collègues du laboratoire du Grettia avec qui j'ai eu plaisir de partager pendant ces dernières années. De peur d'oublier certains dans mes remerciements, Je préfère m'excuser d'avance. Je commencerais par remercier l'ensemble des membres permanents du Grettia, qui m'ont chaleureusement accueilli durant ces dernières années. Je pense en particulier à Latifa, Allou, Etienne, Olivier, Mustapha, Hugues, Sylvie, Jean-Louis, Michel. En écrivant ces remerciements j'ai une pensée particulière pour Joëlle et Annie qui assure à elle deux l'ensemble des fonctions supports du laboratoire, je n'ai pu qu'apprécier leur disponibilité.

En cette fin de thèse je pense évidemment à mes collègues doctorants en dernière année Josquin, Andry et Amine, et je leurs souhaite tous le courage dont il peuvent avoir besoins pour cette phase difficile de la thèse qui est la rédaction du manuscrit. Je remercie également tous mes anciens collègues, actuellement docteur, pour tout ces moments de partage que j'ai eu avec eux. Je pense en particulier à Inès, Faicel, Roland, Zohra, Raïssa, Guillaume, Nicolas et Hani. J'ai enfin un grand remerciement à faire mes autres amis-collègues qui ont su, pendant ce long travail, apporter la joie, le rire et la détente aussi nécessaires à la réussite de cette épreuve Matthieu, Moncef. Je ne saurais trop remercier Johanna et Dihya pour toute la joie, les encouragements, l'aide qu'elles m'ont apporté durant toutes ces années de thèse.

J'aimerais conclure ce préambule en remerciant ma famille, ma belle famille et mes amis qui ont toujours été d'un grand soutien et particulièrement ces dernières années. Je remercie ma compagne Roseline pour ses encouragement et son aide en particulier sur la relecture de mon manuscrit. Je ne peut pas terminer ces remerciements sans citer ma source de motivation principale, ma fille Talina.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Les Modèles graphiques probabilistes</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	6
1.2 Modèle graphique probabiliste	6
1.2.1 Introduction	6
1.2.2 Définition	7
1.2.3 Apprentissage	11
1.2.4 Inférence	14
1.3 Modèle graphique probabiliste dynamique	24
1.3.1 Introduction	24
1.3.2 Définition	25
1.3.3 Inférence	29
1.4 Conclusion	31
<b>2 Modélisation de la fiabilité et de la maintenance</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction	34
2.2 Présentation de la maintenance	34
2.2.1 Définition et objectifs de la maintenance	34
2.2.2 Type de maintenance	35
2.3 Modélisation d'un processus de dégradation	37
2.3.1 Modèle graphique de durée	40
2.3.2 Mesures de la fiabilité	44
2.4 Modélisation de la maintenance	46
2.4.1 État de l'art	46
2.4.2 Modèle <i>VirMaLab</i>	48
2.5 Conclusion	54
<b>3 Évaluation dynamique d'une stratégie de maintenance</b>	<b>55</b>
3.1 Introduction	56
3.2 Évaluation de stratégies de maintenance	57
3.2.1 Définition d'une fonction d'utilité	57

3.2.2	Méthodes classiques d'inférence . . . . .	59
3.3	Méthode d'inférence symbolique . . . . .	62
3.3.1	Transformation en expression algébrique . . . . .	62
3.3.2	Évaluation à partir d'expressions symboliques . . . . .	64
3.3.3	Cas d'étude applicatif . . . . .	66
3.4	Conclusion . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Détection de changement dans un modèle de dégradation</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	76
4.2	Algorithmes de détection de rupture . . . . .	77
4.2.1	Algorithme de détection paramétrique . . . . .	79
4.2.2	Algorithme de détection non-paramétrique . . . . .	82
4.2.3	Algorithme de détection par fenêtre glissante . . . . .	82
4.3	Tests d'hypothèses . . . . .	84
4.3.1	Définition . . . . .	84
4.3.2	Type de tests . . . . .	85
4.3.3	Principe de base . . . . .	86
4.3.4	Principaux tests de comparaison pour $K = 2$ échantillons . . . . .	88
4.4	Application . . . . .	95
4.5	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Optimisation de la maintenance du système d'accès voyageur d'un matériel ferroviaire</b>	<b>99</b>
5.1	Introduction . . . . .	100
5.1.1	Contexte de l'étude . . . . .	100
5.1.2	Projet SurFer . . . . .	101
5.2	Présentation du système d'accès voyageurs . . . . .	103
5.2.1	Réglages du système porte . . . . .	104
5.2.2	Risque d'indisponibilité et de sécurité . . . . .	106
5.3	Modélisation du système . . . . .	107
5.3.1	Description graphique . . . . .	107
5.3.2	Description probabiliste . . . . .	109
5.4	Action de maintenance et modélisation . . . . .	112
5.4.1	Politique de maintenance . . . . .	112
5.4.2	Modélisation de la maintenance . . . . .	113
5.5	Résultats . . . . .	115
5.5.1	Optimisation des périodes de reprise . . . . .	115
5.5.2	Adaptation dynamique des paramètres de maintenance . . . . .	120
5.6	Conclusion . . . . .	125
	<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>127</b>



---

<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>
<b>Annexe A Notations</b>	<b>147</b>
<b>Annexe B Démonstration</b>	<b>149</b>
<b>Annexe C Composition du parc de la SNCF en Île-de-France</b>	<b>151</b>
<b>Annexe D Éléments sur la théorie des probabilités</b>	<b>155</b>
D.1 Interprétation des probabilités . . . . .	155
D.2 Définitions et propriétés . . . . .	156
<b>Annexe E Éléments sur la théorie des graphes</b>	<b>159</b>
E.1 Introduction . . . . .	159
E.2 Définitions et représentation . . . . .	159
E.2.1 Graphes orientés . . . . .	159
E.2.2 Graphes non orientés . . . . .	161
E.2.3 Cas particuliers de graphes . . . . .	162
<b>Annexe F Quelques résultats sur les polynômes</b>	<b>165</b>
F.1 Définition . . . . .	165
F.2 Opérations sur les polynômes . . . . .	166
F.3 Méthodes d'évaluation . . . . .	167
F.3.1 Polynômes univariés . . . . .	168
F.3.2 Polynômes multivariés . . . . .	169

# Introduction générale

## Contexte et problématique

Dans de nombreux secteurs industriels, l'optimisation de la maintenance de systèmes de plus en plus complexes apparaît comme l'un des verrous technologiques à leur développement. C'est notamment le cas dans le domaine ferroviaire où l'infrastructure comme les matériels roulants sont soumis à des exigences de disponibilité, sécurité, coûts, rentabilités de plus en plus élevées.

Du fait de la complexité de ces systèmes et pour en comprendre intimement le fonctionnement, il est nécessaire de recourir à des simulations du comportement du système étudié sur son cycle de vie, en injectant dans la simulation les caractéristiques des stratégies de maintenance utilisée (type de maintenance, échéancier de surveillance, qualité des diagnostic, type d'actions de maintenance ...). Ainsi il devient possible, pour une fonction coût donnée, d'optimiser la maintenance.

Généralement, par "optimisation des politiques de maintenance", on entend le réglage, pour un contexte donné (modèles de dégradation, type et contexte d'exploitation, répartition des coûts ...), des paramètres de la stratégie de maintenance. Cette optimisation est généralement proposée sur un horizon temporel large (au delà de la durée de vie du système) et est réalisée une fois pour toute.

Cette thèse se propose d'aborder le problème du réajustement en ligne des référentiels de maintenance tenant compte d'un retour d'expérience cumulatif (défaillances observées au cours du temps). Il s'agit de s'adapter à un contexte possiblement variable (composants fournis par de nouveaux sous-traitants ou apparition de nouveaux modes de défaillance). L'objectif final est de proposer un outil d'optimisation dynamique qui ajuste automatiquement les caractéristiques des politiques de maintenance.

Ces travaux, ce sont déroulés au sein du laboratoire Génie des Réseaux de Transports Terrestres et Informatique Avancée (GRETTIA) de l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transport, de l'Aménagement et des Réseaux (IFST-TAR) dans le cadre du projet de recherche SurFer (Surveillance Active Ferroviaire),

piloté par la société Bombardier Transport et financé par le FUI (Fonds Uniques Interministériel) et dont l'objectif principale est l'amélioration de la disponibilité des matériels roulants ferroviaire.

## Organisation du manuscrit

Au cours de cette thèse nous nous sommes orientés vers une modélisation probabiliste de la dynamique des systèmes. Le chapitre 1 présente le formalisme des modèles graphiques probabilistes (MGP) qui sera utilisé tout au long de ce manuscrit. Ce formalisme repose sur la théorie des graphes et la théorie des probabilités et permet de représenter de manière intuitive des systèmes dont l'état évolue de manière non déterministe.

Le chapitre 2 aborde le problème de modélisation de systèmes dynamiques et de leur maintenance. Des approches stochastiques reposant sur les modèles graphiques probabilistes markoviens seront présentées. L'intérêt de ces modèles a été démontré à travers des études comparatives [Bouillaut 2009], [Bouillaut 2011], [Donat 2010] et leurs utilisations dans plusieurs applications industrielles [Donat 2009], [François 2011], [Rozas 2013]. L'objectif de cette thèse est de proposer une extension à ces modèles pour prendre en compte une éventuelle évolution de la dynamique de dégradation des systèmes modélisés. L'approche proposée consiste en un suivi des données d'apprentissage du modèle de dégradation et à des ré-évaluations conditionnelles des stratégies de maintenance.

Le chapitre 3 porte sur l'évaluation des politiques de maintenance dans le cadre d'une modélisation probabiliste de la dynamique de dégradation du système. Il s'agit de quantifier l'effet d'un réglage donné des paramètres de maintenance sur des indicateurs tels que le nombre de pannes ou le coût de maintenance. Les opérations d'inférence probabiliste étant coûteuses en terme de temps de calcul, il est difficilement envisageable de les intégrer tel quel dans un algorithme en-ligne. Plusieurs solutions seront proposées pour permettre de réduire la complexité algorithmique de la méthode d'évaluation des stratégies de maintenance.

Le chapitre 4 aborde le problème de détection de changement dans un modèle de dégradation. L'approche proposée consiste à suivre l'évolution des données décrivant le temps passé dans chaque état par les composants d'un système. L'objectif est de détecter un changement statistique dans ce flux de données. En fonction des hypothèses sur les données qui sont prises, différentes méthodes de détection de changement sont envisageables. Dans ce chapitre, quelques unes de ces méthodes sont présentées et comparées à une méthode originale.

Pour finir, le chapitre 5 expose notre méthodologie dans le cadre d'une application industrielle qui concerne la maintenance des systèmes d'accès voyageurs d'un matériel ferroviaire. L'objectif de cette application est de définir les périodes de reprise

des réglages du système pour garantir des niveaux de sécurité et de fiabilité élevé avec un coût de maintenance optimal. Les améliorations apportées au modèle utilisé sont intégrées dans cette application pour pouvoir prendre en compte une évolution de la dynamique du système à travers le suivie des données de retour d'expérience.



# Les Modèles graphiques probabilistes

## Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	<b>6</b>
1.2	Modèle graphique probabiliste . . . . .	<b>6</b>
1.2.1	Introduction . . . . .	6
1.2.2	Définition . . . . .	7
1.2.2.1	Propriété de factorisation de lois . . . . .	7
1.2.2.2	Notion de d-séparation . . . . .	7
1.2.3	Apprentissage . . . . .	11
1.2.3.1	Apprentissage à partir de données complètes . . . . .	11
1.2.3.2	Apprentissage à partir de données incomplètes . . . . .	13
1.2.4	Inférence . . . . .	14
1.2.4.1	Méthodes d'inférence exactes . . . . .	15
1.2.4.2	Méthodes d'inférence approchées . . . . .	18
1.2.4.3	Méthodes d'inférence symboliques . . . . .	21
1.3	Modèle graphique probabiliste dynamique . . . . .	<b>24</b>
1.3.1	Introduction . . . . .	24
1.3.2	Définition . . . . .	25
1.3.2.1	Réseau bayésien à deux tranches de temps . . . . .	25
1.3.2.2	Représentation d'un RBD . . . . .	26
1.3.2.3	Chaînes de Markov . . . . .	28
1.3.3	Inférence . . . . .	29
1.3.3.1	Algorithme Forward-backward . . . . .	29
1.3.3.2	Algorithme de l'interface . . . . .	30
1.4	Conclusion . . . . .	<b>31</b>

---

## 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils de modélisation utilisés tout au long de cette thèse, à savoir les modèles graphiques probabilistes (MGP ou PGM pour l'acronyme anglais *Probabilistic Graphical Models*) et notamment les réseaux bayésiens dynamiques. Ces outils qui allient la théorie des graphes et la théorie des probabilités, permettent de représenter de manière intuitive la connaissance sur des événements aléatoires. En effet, la théorie des graphes apporte un cadre pour la représentation de relations entre des variables aléatoires. La théorie des probabilités, quant à elle, permet de définir l'aspect quantitatif des MGP.

Les modèles graphiques probabilistes suscitent un grand intérêt dans de nombreux domaines de recherche, notamment en intelligence artificielle, en statistiques, et dans les domaines des sciences cognitives [Kayser 2004] et de la philosophie [Drouet 2007]. Cet intérêt pour les MGP s'explique principalement par leur simplicité de mise en place et leur capacité à modéliser la connaissance et le raisonnement dans l'incertain.

Ce chapitre se compose de deux grandes parties. La partie 1.2 aborde succinctement le formalisme des réseaux bayésiens, en présentant les notions de base et les méthodes d'utilisation de ces modèles à travers un exemple simple. La partie 1.3 présente l'extension markovienne des modèles graphiques probabilistes. Les chapitres suivants de ce manuscrit montreront à quel point ces modèles sont particulièrement bien adaptés à la représentation de systèmes dynamiques.

## 1.2 Modèle graphique probabiliste

### 1.2.1 Introduction

Les modèles graphiques probabilistes constituent une famille de modèles mathématiques permettant de mettre en place un raisonnement automatique dans l'incertain. Ils comprennent entre autres les Réseaux Bayésiens (RB), les Chaînes de Markov (CM) et les réseaux de Petri. Dans ce document, seul seront abordés les réseaux bayésiens et les chaînes de Markov.

Les MGP sont représentés par des graphes où les nœuds modélisent des variables aléatoires et les arcs des relations entre ces variables. Cette représentation présente le double avantage d'être modulaire et de permettre la ré-utilisation des résultats démontrés dans la théorie des graphes. Si besoin, quelques rappels sur la théorie des probabilités et la théorie des graphes sont donnés dans les annexes D et E.

L'objectif principal d'un réseau bayésien est de représenter de manière compacte la loi jointe d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  en utilisant les relations de dépendances entre les variables  $(X_1, \dots, X_n)$ . Un réseau bayésien est composé d'une partie qualitative donnée par un graphe, et d'une partie quantitative obtenue à partir de lois de probabilités conditionnelles entre certaines variables du graphe.

### 1.2.2 Définition

Dans un cadre général, les réseaux bayésiens définissent un modèle probabiliste sur un ensemble de variables continues ou discrètes. Dans ce document, nous nous restreindrons au cas des variables aléatoires discrètes et finies. Les définitions et les méthodes, énoncées par la suite, resteront dans le cadre des réseaux bayésiens discrets.

#### Définition 1 (Réseau Bayésien)

Un réseau bayésien (RB) est un couple  $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$  où :

- $\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$  est un graphe orienté sans circuit.  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  est l'ensemble des nœuds du graphe. Chaque  $X_i$  représente une variable aléatoire à valeur dans  $\mathcal{X}_i$ .  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des arcs du graphe décrivant les dépendances entre les variables.  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  tel que si  $(X_i, X_j) \in \mathcal{E}$ , alors un arc relie la variable  $X_i$  à la variable  $X_j$ .
- $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$  est un ensemble de lois de probabilités conditionnelles (LPC), tel que chaque  $p_i$  représente la distribution de la variable  $X_i$  conditionnellement à l'état de ses parents ( $Pa(X_i)$ ) dans  $\mathcal{G}$ .

#### 1.2.2.1 Propriété de factorisation de lois

Avec cette définition, un réseau bayésien permet de représenter de manière compacte la distribution de probabilité jointe sur l'ensemble des  $n$  variables du réseau. En effet, l'espace nécessaire au stockage de  $n$  lois de probabilités est moins important que l'espace nécessaire au stockage d'une table de probabilité jointe et l'égalité suivante exprime le lien entre la loi de probabilité jointe et les lois de probabilités conditionnelles dans un RB :

$$\mathbb{P}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i | Pa(X_i)) \quad (1.1)$$

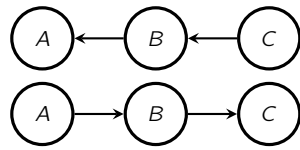
Cette décomposition d'une fonction globale en un produit de termes locaux, dépendant uniquement du nœud considéré et de ses parents dans le graphe, est une propriété fondamentale des Réseaux Bayésiens

#### 1.2.2.2 Notion de d-séparation

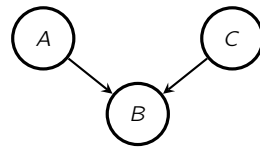
Il convient également de définir la notion de d-séparation (pour séparation dirigée) dans un réseau bayésien pour expliquer la circulation de l'information dans un réseau bayésien. Cependant, cette définition nécessite un rappel sur les différents types de connexions identifiables dans un graphe.



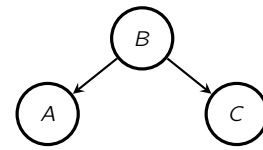
La figure 1.1 présente les différents types de connexions qui peuvent être rencontrées dans un réseau bayésien.



(a) Connexion en série en  $B$



(b) Connexion convergente en  $B$



(c) Connexion divergente en  $B$

Figure 1.1 – Les trois types de connexions entre trois variables aléatoires

Dans le cas des connexions en série en  $B$  (fig. 1.1a) et divergentes en  $B$  (fig. 1.1c), l'information peut circuler entre  $A$  et  $C$  sauf si la valeur de  $B$  est connue. Pour la connexion convergente en  $B$  (fig. 1.1b), l'information circule entre  $A$  et  $C$  dès lors qu'une information est disponible pour  $B$ . La notion de  $d$ -séparation peut alors être définie comme suit :

### Définition 2 ( $d$ -séparation)

Soit un réseau bayésien  $\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$  et  $A, B$  et  $C$  trois variables de  $\mathcal{X}$ . Les variables  $A$  et  $B$  sont  $d$ -séparées si et seulement si pour toute chaîne entre  $A$  et  $B$ , il existe une variable intermédiaire  $C$  telle que l'une des deux conditions suivant soit vérifiée :

- la connexion en  $C$  est série ou divergente et la valeur de  $C$  est connue
- la connexion en  $C$  est convergente et aucune information n'est disponible ni pour  $C$  ni pour ses descendants

L'exemple suivant, inspiré du domaine de l'automobile, est proposé pour illustrer les notions associées aux réseaux bayésiens :

**Exemple 1** (Modélisation d'un système par RB). Le réseau bayésien de la figure 1.2 modélise, de manière simplifiée, le système de démarrage d'une voiture. La modélisation du système utilise quatre variables aléatoires :

- la variable  $E$  représente l'état de la batterie, et prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{E} = \{\text{récente, ancienne}\}$
- la variable  $U$  représente la fréquence d'utilisation de la batterie, et prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{U} = \{\text{fréquente, normale}\}$
- la variable  $P$  représente la puissance délivrée au démarreur par la batterie, et prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{P} = \{\text{faible, moyenne, forte}\}$
- la variable  $C$  représente une estimation du niveau de carburant restant dans le réservoir de la voiture. L'ensemble des valeurs possibles pour cette variables est  $\mathcal{C} = \{\text{bas, haut}\}$ .
- la variable  $D$  modélise le démarrage de la voiture. Les valeurs possibles pour cette variable sont  $\mathcal{D} = \{\text{échoué, réussie}\}$

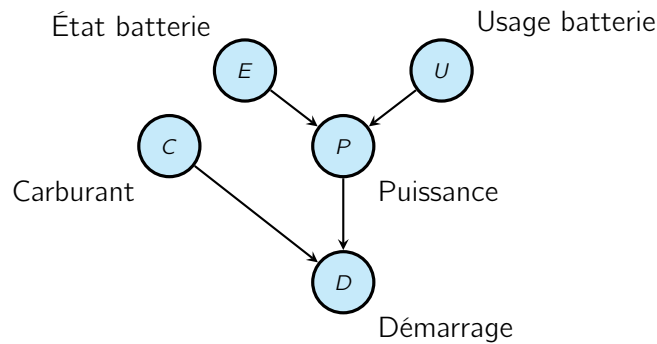


Figure 1.2 – Réseau bayésien modélisant le système de démarrage d'une voiture

La puissance délivrée par la batterie (représentée par la variable  $P$ ) dépend de l'état de la batterie ( $E$ ) et de l'utilisation ( $U$ ) qui en est faite. Ces relations de dépendance sont modélisées dans le réseau bayésien par des relations de parenté : les variables  $U$  et  $E$  sont les parents de la variable  $P$  (on note  $Pa(P) = \{U, E\}$ ). De même, le fait que le démarrage de la voiture dépende de la puissance délivrée au démarreur par la batterie est modélisée par la relation de parenté ( $Pa(D) = \{P\}$ ) entre les variables  $P$  et  $D$ .

Pour être complet, le réseau bayésien représenté à la figure 1.2 doit être accompagné de tables de probabilités conditionnelles pour chaque variable. Ces tables sont généralement remplies par des experts ou à partir de données expérimentales. Pour notre exemple, les lois de probabilités  $\mathbb{P}(E)$ ,  $\mathbb{P}(U)$ ,  $\mathbb{P}(C)$ ,  $\mathbb{P}(P|E, U)$  et  $\mathbb{P}(D|P, C)$  sont définies de manière empirique par la table 1.1.

Le petit exemple présenté ici illustre bien l'avantage en terme de stockage de l'information des réseaux bayésiens. En effet, en supposant qu'un nombre réel prenne une unité de mémoire pour être stocké, l'espace mémoire (aussi appelé complexité spatiale) nécessaire au stockage de la loi jointe des variables aléatoires  $E$ ,  $D$ ,  $U$  et  $P$  est :

$$Cs(\mathbb{P}(E, D, U, P)) = |\mathcal{E}||\mathcal{D}||\mathcal{U}||\mathcal{P}| = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48. \quad (1.2)$$

Alors que la complexité spatiale du réseau bayésien est égale à la somme des complexités spatiales des quatre LCP, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} Cs(\mathcal{M}) &= Cs(\mathbb{P}(E)) + Cs(\mathbb{P}(U)) + Cs(\mathbb{P}(C)) + Cs(\mathbb{P}(D|P, C)) + Cs(\mathbb{P}(P|E, U)) \\ &= |\mathcal{E}| + |\mathcal{U}| + |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}||\mathcal{P}||\mathcal{C}| + |\mathcal{P}||\mathcal{E}||\mathcal{U}| \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 = 30 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cette différence d'espace de stockage, peut s'avérer beaucoup plus importante dans de plus grands réseaux. D'une manière générale, la complexité spatiale d'un

**Table 1.1** Tables de probabilités associées aux variables du réseau bayésien modélisant le système de démarrage d'une voiture (figure 1.2)

$\mathbb{P}(E)$		$\mathbb{P}(C)$		$\mathbb{P}(D P)$			
État		Carburant		Carburant	Puissance	Démarrage	
récente	ancienne	haut	bas			réussi	échoué
0.80	0.20	0.50	0.50	haut	faible	0.01	0.99
				haut	moyenne	0.45	0.55
				haut	forte	1.00	0.00
				bas	faible	0.01	0.99
				bas	moyenne	0.15	0.85
				bas	forte	0.80	0.20

$\mathbb{P}(U)$		$\mathbb{P}(P E, U)$				
Utilisation		État	Usage	Puissance		
fréquent	normale			faible	moyenne	forte
0.15	0.85	récente	fréquent	0.10	0.15	0.75
		ancienne	fréquent	0.15	0.80	0.05
		récente	normale	0.02	0.08	0.90
		ancienne	normale	0.10	0.15	0.75

réseau bayésien  $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq i \leq n})$  est donnée par

$$CS(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^n \left[ |\mathcal{X}_i| \prod_{X_j \in Pa(X_i)} |\mathcal{X}_j| \right], \quad (1.4)$$

tandis que la complexité spatiale de la loi jointe  $p$  associée est donnée par :

$$CS(p) = \prod_{i=1}^n |\mathcal{X}_i|. \quad (1.5)$$

Plus généralement, la notion de dimension d'un réseau bayésien est utilisé pour représenter le nombre de paramètres nécessaires pour définir une loi de probabilité jointe représenté par un RB.

Soit  $X = (X_1, X_2 \dots X_n)$  un vecteur aléatoire composé de  $n$  variables aléatoires discrète dont la distribution jointe  $\mathbb{P}(X_1, X_2 \dots X_n)$  est représenté par le réseau bayésien  $\mathcal{G}$ . Si  $r_i$  est la modalité de la variable  $X_i$ , c'est à dire le nombre de valeurs que peut prendre cette variable, alors le nombre de paramètres nécessaires pour représenter la distribution de probabilité  $\mathbb{P}(X_i|Pa(X_i) = \pi_1)$  de la variable  $X_i$  sachant que les parents de  $X_i$  sont dans la configuration  $\pi_1$  et  $r_i - 1$ .

La dimension d'une variable  $X_i$  d'un réseau bayésien, c'est à dire le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour définir la distribution  $\mathbb{P}(X_i|Pa(X_i))$  est définie par :

$$Dim(X_i, \mathcal{G}) = (r_i - 1) q_i, \quad (1.6)$$

où  $q_i$  est le nombre de configurations possibles pour les parents de  $X_i$ , c'est-à-dire

$$q_i = \prod_{X_j \in Pa(X_i)} r_j \quad (1.7)$$

La dimension d'un réseau bayésien  $\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$  est la somme des dimensions des variables du RB. Mathématiquement, la dimension d'un RB est définie par :

$$Dim(\mathcal{G}) = \sum_{X_i \in \mathcal{X}} Dim(X_i, \mathcal{G}) \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Apprentissage

L'apprentissage d'un réseau bayésien consiste à déterminer, à partir de données ou d'informations plus subjectives (par exemple des avis d'experts), d'une part sa structure, c'est-à-dire les relations d'influence pouvant exister entre les variables, et d'autre part ses paramètres, c'est-à-dire l'ensemble des distributions de probabilités conditionnelles.

Dans la suite de cette section, nous nous intéresserons uniquement à l'apprentissage de paramètres, et nous considérerons que la structure du réseau bayésien à apprendre est déjà définie. En ce qui concerne l'apprentissage de structure, la thèse de [François 2006] et plus récemment [Daly 2011] passent en revue la plupart des méthodes existantes tout en les mettant en compétition sur plusieurs jeux de données.

#### 1.2.3.1 Apprentissage à partir de données complètes

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$  un vecteur aléatoire dont la distribution est définie à l'aide du réseau bayésien  $\mathcal{R} = \{\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D}\}$  et  $\mathbf{D}_X$  et une base d'exemples comprenant  $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) du vecteur  $\mathbf{X}$ . La base  $\mathbf{D}_X$  peut être représentée sous la forme d'une matrice à  $N$  lignes et  $D$  colonnes :

$$\mathbf{D}_X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,i} & \dots & X_{1,D} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{n,1} & \dots & X_{n,i} & \dots & X_{n,D} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & \dots & X_{N,i} & \dots & X_{N,D} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

où  $x_{n,d}$  est la  $n$ -ième observation de la  $d$ -ième variable de  $\mathbf{X}$ .

La méthode la plus courante pour apprendre les paramètres d'un réseau bayésien à partir de la base  $\mathbf{D}_X$  est la méthode du maximum de vraisemblance [Fisher 1922]. Cette méthode consiste à déterminer le jeu de paramètres noté  $\hat{\theta}$  qui maximise la vraisemblance, notée  $L(\theta)$  des données observées. La vraisemblance  $L(\theta)$  étant définie comme la probabilité d'observer  $\mathbf{D}_X$  avec les paramètres  $\theta$  :

$$L(\theta, \mathbf{D}_X) = \mathbb{P}(\mathbf{D}_X | \theta). \quad (1.10)$$

Par ailleurs, en utilisant l'hypothèse des données i.i.d. et la relation de factorisation de la loi jointe dans un réseau bayésien, la vraisemblance des données se réécrit :

$$L(\theta, \mathbf{D}_X) = \prod_{n=1}^N \prod_{d=1}^D \mathbb{P}(x_{n,d} | Pa(x_{n,d}), \theta_d), \quad (1.11)$$

où  $\theta_d$  est la  $d$ -ième composante du jeu de paramètres  $\theta$ .

En règle générale, pour simplifier les calculs, le logarithme de la vraisemblance, appelé log-vraisemblance et noté  $\ell(\theta)$  sera utilisé à la place de la vraisemblance. Avec le logarithme, l'égalité précédente devient :

$$\ell(\theta, \mathbf{D}_X) = \ln(L(\theta, \mathbf{D}_X)) = \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \ln(\mathbb{P}(x_{n,d} | Pa(x_{n,d}), \theta_d)). \quad (1.12)$$

La fonction du logarithme népérien étant négative sur l'intervalle  $[0, 1]$ , maximiser la somme des logarithmes des probabilités conditionnelles revient à maximiser un à un les éléments de la double somme. Par conséquent, le jeu de paramètres  $\hat{\theta}$ , qui maximise la log-vraisemblance  $\ell(\theta, \mathbf{D}_X)$ , est défini par le vecteur  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_D)$  tel que pour tout  $d \in \{1, \dots, D\}$  :

$$\hat{\theta}_d = \arg \max_{\theta_d} \sum_{n=1}^N \ln(\mathbb{P}(x_{n,d} | Pa(x_{n,d}), \theta_d)). \quad (1.13)$$

Définissons  $N_{i,j,k}$  comme le nombre d'occurrences dans la base  $\mathbf{D}_X$  où la variable  $X_i$  prend la  $j$ -ième valeur  $x_j \in \mathcal{X}_i$  de son domaine, alors que les parents de  $X_i$  sont dans la  $k$ -ième configuration possible  $\pi_k \in \prod Pa(\mathcal{X}_i)$ . Mathématiquement  $N_{i,j,k}$  est défini

$$N_{i,j,k} = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}(x_{n,i} = x_j) \mathbb{1}(Pa(X_i) = \pi_k), \quad (1.14)$$

où  $\mathbb{1}$  est la fonction indicatrice. L'estimation par maximum de vraisemblance de la LPC  $p_d$  associé à la  $d$ -ième variable est obtenue, pour toute valeur  $x_j \in \mathcal{X}_i$  et pour toute configuration  $\pi_k \in \prod Pa(\mathcal{X}_i)$  des parents de  $X_i$ , par :

$$\mathbb{P}(X_i = x_j | Pa(X_i) = \pi_k) = \hat{\theta}_{i,j,k} = \frac{N_{i,j,k}}{\sum_{j=1}^{|\mathcal{X}_i|} N_{i,j,k}}. \quad (1.15)$$

### 1.2.3.2 Apprentissage à partir de données incomplètes

Dans la pratique, les bases d'exemples utilisées pour l'apprentissage de paramètres d'un réseau bayésien sont souvent incomplètes. Certaines variables peuvent ne pas être observées dans certains exemples de la base  $\mathbf{D}_X$ . Concrètement une base incomplète possède des exemples pour lesquels il n'y a pas d'information sur certaines variables, par exemple la base d'exemple  $\mathbf{D}_X$  pour le vecteur aléatoire  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de variables binaires, définie ci-dessous, est incomplète :

$$\mathbf{D}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ 1 & ? & 0 & 1 \\ 1 & ? & ? & 1 \\ 1 & 1 & ? & ? \end{bmatrix} .$$

Dans la base  $\mathbf{D}_X$ , les « ? » représentent des informations manquantes. Les observations 5, 6, 7, 8 et 9 de  $\mathbf{D}_X$  sont incomplètes.

Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble construit à partir de la matrice  $D$ , et telle que l'ensemble  $\mathcal{D}$  contienne tous les éléments  $x_{n,k}$  de  $D$ . Il est possible de définir une partition de cette ensemble telle que  $\mathcal{D}_0 = \{x_{n,k} \in \mathcal{D} | x_{n,k} \neq ?\}$  représente l'ensemble des informations observées et  $\mathcal{D}_m = \{x_{n,k} \in \mathcal{D} | x_{n,k} = ?\}$  représente l'ensemble des informations manquantes. [Rubin 1976] distingue trois types de données manquantes en fonction du processus aléatoire qui les engendre.

**Types de données manquantes** Dans le cas des données dites MCAR (*Missing Completely At Random*) la probabilité qu'une observation soit manquante ne dépend ni des données observées ni des données non observées. En terme mathématique, cela ce traduit par :

$$\mathbb{P}(x_{i,j} = ? | \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_m) = \mathbb{P}(x_{i,j} = ?). \quad (1.16)$$

Dans ce type de situation l'apprentissage de paramètres est effectué, sans introduire aucun biais, en utilisant uniquement les données complètes.

Une donnée est dite MAR (*Missing At Random*), si la probabilité que cette donnée soit manquante ne dépend pas de sa valeur mais uniquement des autres données observées. Mathématiquement, cela ce traduit par :

$$\mathbb{P}(x_{i,j} = ? | \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_m) = \mathbb{P}(x_{i,j} = ? | \mathcal{D}_0). \quad (1.17)$$

Dans le cas des données NMAR (*Non Missing At Random*), le mécanisme qui provoque l'absence d'une donnée n'est pas aléatoire, et même la connaissance sur les

variables observées ne permet pas d'avoir des informations sur ce processus. Il n'est pas possible de simplifier  $\mathbb{P}(x_{i,j} = ? | \mathcal{D}_o, \mathcal{D}_m)$ . Le fait qu'une donnée soit manquante dépend à la fois des données observées et des données non observées.

Dans le cas de données MAR, qui est l'hypothèse la plus courante pour des données manquantes, l'estimation du jeu de paramètres  $\theta$  est généralement réalisée par l'algorithme EM (pour *Expectation-Maximization*), introduit par [Dempster 1977]. Il s'agit alors de remplacer les données manquantes par des valeurs qui permettent de maximiser la vraisemblance.

L'algorithme EM est une procédure itérative à deux étapes, qui sont répétées jusqu'à convergence du paramètre à estimer vers un optimum local. Le schéma itératif de l'algorithme EM est le suivant :

1. Choisir une valeur initiale pour le paramètre  $\theta^{(0)}$
2. Tant que la suite  $(\theta^{(i)})_i$  n'a pas convergé :
  - (a) Étape E : Calculer l'espérance de la log-vraisemblance complétée du jeu de paramètres  $\theta$ , en utilisant une distribution des données manquantes  $\mathbb{P}(\mathcal{D} | \theta^{(i)}) : Q(\theta, \theta^{(i)}) = E_{\theta^{(i)}}[\ell(\mathcal{D}_o, \mathcal{D}_m | \theta)]$
  - (b) Étape M : Estimer les nouveaux paramètres en maximisant de vraisemblance :  $\theta^{(i+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^{(i)})$

L'algorithme EM garantit une amélioration de la log-vraisemblance du jeu de paramètres courant à chaque itération :  $\ell(\theta^{(i)}) \leq \ell(\theta^{(i+1)})$ . Ce résultat a pour conséquence que l'algorithme EM converge vers un optimum local ou, dans des cas très rares, vers un optimum sur une dimension, appelé point de selle. La condition d'arrêt de l'algorithme est fixée à l'aide d'un seuil  $\epsilon$  comparé à l'écart de la log-vraisemblance entre deux itérations. C'est à dire, si  $\ell(\theta^{(i+1)}) - \ell(\theta^{(i)}) \leq \epsilon$ , l'algorithme s'arrête.

Une fois l'ensemble des LPC renseignées, l'utilisation d'un MGP est particulièrement intéressante de par la possibilité de propager les probabilités à travers le réseau afin de déduire des informations dans un contexte incertain. Cette opération de propagation d'information est appelée l'inférence bayésienne. La partie suivante présente les principales méthodes d'inférence existantes.

## 1.2.4 Inférence

L'inférence dans un réseau bayésien  $\mathcal{G}$ , représentant un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , se résume à un calcul de probabilités a posteriori. Connaissant les états d'un ensemble de variables (appelées variables d'observation  $\mathbf{X}_o \subset \mathbf{X}$ ), l'objectif est de répondre à une requête sur les probabilités des états d'un autre ensemble de variables (appelées variables cibles  $\mathbf{X}_r \subset \mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}_r \cap \mathbf{X}_o = \emptyset$ ) conditionnellement aux observations. La probabilité recherchée est  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r | \mathbf{X}_o)$ .

En théorie, un réseau bayésien permet de répondre à n'importe quelle requête  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r | \mathbf{X}_o)$ . Il suffit de générer la distribution jointe et de marginaliser cette distribution

sur l'ensemble des variables cibles  $\mathbf{X}_r$ . Malheureusement, cette approche de l'inférence est loin d'être satisfaisante. En effet, elle sous-entend le calcul de la distribution jointe, et supprime ainsi l'intérêt des réseaux bayésiens. De plus, elle se révèle extrêmement coûteuse en espace mémoire et en temps de calcul.

#### 1.2.4.1 Méthodes d'inférence exactes

Le premier algorithme d'inférence pour les réseaux bayésiens est proposé au début des années 80 par [Pearl 1986], mais son utilisation est restreinte aux réseaux les plus simples, les polyarbres (voir définition à l'annexe E). Il s'agit de protocoles de communication entre les nœuds d'un réseau par passage de messages asynchrones. Cette technique permet à chaque nœud du réseau d'échanger des informations avec les nœuds voisins, et assure ainsi une cohésion globale. La complexité de cet algorithme est polynomiale par rapport au nombre de variables du réseau.

Cette méthode, initialement limitée aux arbres, a été étendue aux réseaux quelconques par l'algorithme d'arbre de jonction (JT) [Jensen 1990, Lauritzen 1988]. Cet algorithme s'applique en trois étapes de transformation du graphe : la moralisation, la triangulation, et la construction de l'arbre de jonction correspondant ; suivie d'une étape de propagation de l'information par passage de messages, appelée induction, jusqu'à cohérence. Les notions de moralisation et de triangulation d'un graphe sont expliquées dans l'annexe E. La complexité algorithmique de l'algorithme JT est exponentielle par rapport à la taille de la plus grande clique.

A partir de l'algorithme de passage de messages, une autre méthode appelée algorithme "coupe cycle" ou plus souvent *cut-set conditioning* est proposée dans [Pearl 1986]. Elle consiste à instancier un certain nombre de variables de manière à ce que le graphe résultant soit un arbre. Pour chaque instantiation, la propagation de l'information s'effectue par passage de messages. Puis les résultats de toutes les instantiations sont combinés pour répondre à la requête. La complexité algorithmique de cette méthode d'inférence augmente de manière exponentielle en fonction de la taille de l'ensemble de coupe.

**Algorithme d'élimination de variables** L'algorithme d'élimination de variables, proposé initialement par [Nevin Lianwen Zhang 1994] et généralisé par [Dechter 1999], consiste à marginaliser la distribution de probabilité jointe d'un réseau, en procédant variable par variable. Chaque marginalisation sur une variable  $X_i$  donne lieu à une somme des probabilités de cette variable. Parfois, cette somme vaudra 1, ce qui conduira à l'élimination de la variable  $X_i$ . On procédera alors à la marginalisation sur une des variables restantes et ainsi de suite jusqu'à ce que la distribution soit marginalisée. Dans cet algorithme, un ordre pour l'élimination des variables doit être préalablement défini, et la complexité algorithmique de l'inférence dépend de ce choix. Trouver un ordre d'élimination de variable optimal est un problème NP-difficile [Dechter 1999].



L'algorithme 1 détaille le déroulement de la procédure d'élimination de variables appliquée au calcul de probabilité marginale d'un ensemble de variables requêtes ( $\mathbf{X}_r$ ) en prenant en compte les informations disponibles sur l'ensemble de variables observées ( $\mathbf{X}_o$ ).

---

**Algorithme 1** : Inférence par élimination de variables
 

---

**Entrées** :

- $\mathcal{P} = \{p_d\}_{1 \leq d \leq n}$  : un ensemble de LPC définissant la probabilité jointe d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$
- $\mathbf{X}_r$  : un vecteur de variables extraites de  $\mathbf{X}$  sur lesquelles portent la requête
- $\mathbf{X}_o$  : un ensemble de variables observées

**Sorties** :  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r | \mathbf{X}_o = obs)$  : la probabilité marginalisée de  $\mathbf{X}_r$

**début**

```

// Introduire les observations
 $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup (\mathbf{X}_o = obs)$ ;
/* Générer un ordre  $\prec$  pour l'ensemble  $\mathbf{X}_e$  des variables à
   éliminer ( $\mathbf{X}_e = \mathbf{X} - \mathbf{X}_r - \mathbf{X}_o$ ) */
 $x_1 \prec x_2 \cdots \prec x_d$ ;
pour  $i = 1, \dots, d$  faire
  /* Créer une structure  $\mathcal{B}_i$ , appelée bucket, contenant la
     LPC de la variable de bucket  $X_i$ , et l'ensemble des LPC
     associés */
   $\mathcal{B}_i \leftarrow \{p_i | X_i \in \text{Dom}(p_i)\}$ ;
  // Multiplier les LPC du bucket  $\mathcal{B}_i$ 
   $\lambda_i \leftarrow \prod_{p_i \in \mathcal{B}_i} p_i$ ;
  // Sommer  $\lambda_i$  sur  $X_i$ 
   $\lambda_i \leftarrow \sum_{X_i} \lambda_i$ ;
  // Réinsérer le résultat  $\lambda_i$  dans  $\mathcal{P}$ 
   $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \lambda_i$ ;
finpour
// En déduire  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r | \mathbf{X}_o = obs)$ 
 $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r | \mathbf{X}_o = obs) \leftarrow \prod_{p \in \mathcal{P}} p$ ;

```

**fin**

Reprenons l'exemple 1, précédemment introduit, pour illustrer les méthodes d'inférence dans les réseaux bayésiens, et notamment l'algorithme d'élimination de variables :

**Exemple 2** (illustration algorithme d'élimination). *A l'aide du réseau bayésien, défini par la figure 1.2 et la table 1.1, modélisant le démarrage d'une voiture, un usager souhaite connaître la probabilité que sa voiture démarre ce matin, sachant que son*

réservoir est plein, qu'il a changé sa batterie il y a moins d'un mois et qu'il n'utilise sa voiture que deux fois par semaine. L'information recherchée est la probabilité marginale de la variable  $D$  ayant connaissance des observations  $C = \text{« plein »}$ ,  $E = \text{« récente »}$  et  $U = \text{« normale »}$ .

En utilisant l'ordre d'élimination  $(E, U, P, C, D)$  l'algorithme d'élimination de variables se déroule comme suit :

La probabilité marginalisée de  $D$  est définie à partir de la loi jointe du réseau bayésien :

$$\mathbb{P}(D = \text{« réussi »}) = \sum_{E, U, P, C, D = \text{« réussi »}} \mathbb{P}(E, U, P, C, D), \quad (1.18)$$

et peut être réécrite en utilisant la formule 1.1 liant la probabilité jointe et les probabilités conditionnelles dans un RB :

$$\mathbb{P}(D = \text{« réussi »}) = \sum_{E, U, P, C, D = \text{« réussi »}} \mathbb{P}(E) \mathbb{P}(U) \mathbb{P}(C) \mathbb{P}(P|E, U) \mathbb{P}(D|P, C). \quad (1.19)$$

La somme 1.19 est décomposable en plusieurs sommes, et celles-ci sont calculées dès que possible suivant l'ordre d'élimination. Avec l'ordre d'élimination choisi, la probabilité marginale de  $D$  s'écrira :

$$\mathbb{P}(D = \text{« réussi »}) = \sum_{D = \text{« réussi »}} \sum_{P, C} \underbrace{\left[ \mathbb{P}(D|P, C) \mathbb{P}(C) \sum_U \underbrace{\left[ \mathbb{P}(U) \underbrace{\sum_E \mathbb{P}(E) \mathbb{P}(P|U, E)}_{\lambda_E} \right]}_{\lambda_U} \right]}_{\lambda_{P,C}} .$$

— Élimination de la variable  $E$  :

$\lambda_E$			
Puissance			
Utilisation	faible	moyenne	importante
fréquente	0.10	0.15	0.75
normale	0.02	0.08	0.90

— Élimination de la variable  $U$  :

$\lambda_U$		
Puissance		
faible	moyenne	importante
0.02	0.08	0.90

— Élimination de la variable  $P$  :

$\lambda_{P,C}$	
Démarrage	
réussi	échoué
0.94	0.06

— Résultat :  $\mathbb{P}(D = \text{« réussi »}) = 0.94$

#### 1.2.4.2 Méthodes d'inférence approchées

Il a été démontré par [Cooper 1990] qu'effectuer une inférence exacte est un problème NP-difficile c'est à dire qu'il est aussi difficile que tous les problèmes de la classe NP<sup>1</sup>. Cette démonstration est effectuée en montrant qu'il existe une transformation polynomiale d'un problème d'inférence probabiliste vers le problème NP-Difficile de référence : le problème de satisfaction de contrainte.

Concrètement, lorsque la dimension du réseau bayésien est trop importante, il est nécessaire de recourir à une alternative aux méthodes d'inférence exacte. Dans ce cas, les méthodes d'inférence approchée permettent d'établir un compromis entre la qualité de la solution et le temps de calcul.

Il est possible de distinguer deux familles principales parmi les méthodes d'inférences approchées. La première sous-classe d'algorithmes utilise des méthodes exactes sur un réseau simplifié. L'idée principale de ces méthodes est de simplifier la topologie du réseau. Citons, par-exemple l'algorithme d'inférence proposé par [Kjaerulff 1994] qui consiste à supprimer les relations de dépendance les plus faibles du graphe. La conséquence de la suppression de ces relations dans le réseau est une réduction de la taille des tables de probabilités, ce qui permet de réduire le temps de calcul en gardant l'erreur, due à l'approximation, faible.

1. La classe NP regroupe les problèmes qui peuvent être résolus par un algorithme polynômiale sur une machine non déterministe.

**Algorithme 2** : Algorithme de Metropolis-Hastings

---

```

// initialiser l'échantillon initial
 $\mathcal{X}_0^{ech} \sim q(x)$ ;
pour  $t = 1, \dots, N$  faire
    // Générer l'échantillon candidat
     $\mathcal{X}_{cand}^{ech} \sim q(x_t | x_{t-1})$ ;
    // Calculer la probabilité d'accepter le nouvel échantillon
     $\alpha(\mathcal{X}_{cand}^{ech}, \mathcal{X}_t^{ech}) \leftarrow \min \left\{ 1, \frac{\pi(x_t)q(x_t | x_{t-1})}{\pi(x_{t-1})q(x_{t-1} | x_t)} \right\}$ ;
     $u \sim \text{Uniform}(0, 1)$ ;
    si  $u < \alpha$  alors
        |  $\mathcal{X}_t^{ech} \leftarrow \mathcal{X}_{cand}^{ech}$  // accepter  $\mathcal{X}_{cand}^{ech}$ 
    sinon
        |  $\mathcal{X}_{t+1}^{ech} \leftarrow \mathcal{X}_t^{ech}$  // rejeter  $\mathcal{X}_{cand}^{ech}$ 
    fin
finpour

```

---

D'autres méthodes d'inférences approchées, appelées méthodes stochastiques ou d'échantillonnage, proposent d'utiliser la connaissance sur les distributions de probabilités des variables aléatoires du RB pour générer une base d'exemples indépendants. Cette base est ensuite utilisée pour en déduire une approximation de la distribution de la requête. Par exemple, pour une base de  $N$  exemples, où  $N_{x_r}$  est le nombre d'occurrences avec la configuration  $x_r$  pour le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_r$ , la probabilité marginale  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r = x_r)$  sera donnée par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_r = x_r) = \frac{N_{x_r}}{N}. \quad (1.20)$$

Bien entendu, l'approximation est d'autant meilleure que la taille  $N$  de la base est importante. Inversement, la complexité algorithmique des méthodes d'échantillonnage est d'autant plus importante que la taille  $N$  est grande.

**Simulation stochastique par chaîne de Monte-Carlo** Le principe des méthodes d'échantillonnage dans un réseau bayésien est de réaliser, pour les  $D$  variables du RB,  $N$  tirages aléatoires de manière à ce que la base d'exemples obtenue soit représentative de la loi jointe du réseau bayésien. Dans la pratique, pour générer un exemple, chaque variable dont les parents sont connus est tirée aléatoirement, jusqu'à ce que toutes les variables aient été simulées.

A partir de ce principe de base, diverses méthodes d'inférences ont été proposées. Elles se distinguent par leur façon de générer la base d'exemple. Ainsi, les méthodes MCMC (pour *Markov Chains Monte Carlo*) considèrent la base d'exemple comme une chaîne de Markov. Les deux algorithmes à base de MCMC les plus répandus sont les algorithmes de Metropolis-Hastings [Gelman 2003] et d'échantillonneur de Gibbs [Metropolis 1953].

**Algorithme de Metropolis-Hastings** L'algorithme de Metropolis-Hastings permet de simuler une distribution  $\pi$  à partir d'une distribution candidate  $q$  dont le support est inclus dans celui de  $\pi$ . A partir d'un échantillon initial, généré de manière aléatoire suivant la distribution a priori  $q(x)$ , l'algorithme génère des échantillons candidats et accepte une transition entre les échantillons  $\mathcal{X}_t^{ech}$  et  $\mathcal{X}_{t+1}^{ech}$  avec la probabilité  $\alpha(\mathcal{X}_{t+1}^{ech}, \mathcal{X}_t^{ech})$  définie par :

$$\alpha(\mathcal{X}_{t+1}^{ech}, \mathcal{X}_t^{ech}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\mathcal{X}_{t+1}^{ech})q(\mathcal{X}_t^{ech}|\mathcal{X}_{t+1}^{ech})}{\pi(\mathcal{X}_t^{ech})q(\mathcal{X}_{t+1}^{ech}|\mathcal{X}_t^{ech})} \right\}. \quad (1.21)$$

Le principe général de la génération d'échantillon avec la méthode de Metropolis-Hastings est décrit dans l'algorithme 2.

**Échantillonneur de Gibbs** La méthode d'échantillonnage de Gibbs est particulièrement adaptée aux réseaux bayésiens. En effet, elle permet de générer des échantillons suivant une distribution jointe, en utilisant les distributions conditionnelles d'un réseau bayésien. Remarquons que la convergence n'est garantie que lorsque les probabilités sont toutes non nulles.

L'algorithme 3 décrit la méthode d'inférence approchée dans un RB par l'échantillonneur de Gibbs. Cette méthode permet de générer un ensemble de  $N$  échantillons dont la distribution tend vers la distribution jointe du réseau bayésien. Pour simplifier l'algorithme, il est supposé que les variables du RB sont rangées dans un ordre  $(X_1 \prec X_2 \cdots \prec X_d)$  tel que si  $X_j \in Pa(X_i)$  alors  $X_j \prec X_i$ . En prenant en compte cet ordre, un premier échantillon  $\mathcal{X}_t^{ech} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,d})$  est généré aléatoirement, puis les

autres échantillons sont générés conditionnellement au précédent exemple de la base.

---

**Algorithme 3** : Inférence approchée par échantillonneur de Gibbs
 

---

**Entrées :**

- $\mathcal{P} = \{p_d\}_{1 \leq d \leq n}$  : un ensemble de LPC définissant la probabilité jointe d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$
- $\mathbf{X}_r$  : un vecteur de variables extraites de  $\mathbf{X}$  sur lesquelles portent la requête
- $\mathbf{X}_o$  : un ensemble de variables observées

**Sorties** :  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r | \mathbf{X}_o = obs)$  : la probabilité marginalisé de  $\mathbf{X}_r$

**début**

```

// Générer une valeur aléatoire pour chaque  $X_i$  compatible
// avec  $\mathbf{X}_o$ 
pour  $i = 1, \dots, d$  faire
    si  $X_i \in \mathbf{X}_o$  alors
         $x_{1,i} \sim obs$ ;
    sinon
         $x_{1,i} \sim p_i(X_i | pa(X_i))$ ;
    finsi
finpour
pour  $t = 2, \dots, N$  faire
    /* Générer le nouvel échantillon fonction du précédent
    échantillon */
    pour  $i = 1, \dots, d$  faire
        si  $X_i \in \mathbf{X}_o$  alors
             $x_{t+1,i} \sim obs$ ;
        sinon
             $x_{t+1,i} \sim p_i(X_i | pa(X_i) = \pi_{t,i})$ ;
            // tq  $\pi_{t,i} = 1$ 'échantillon  $(x_{t,1}, \dots, x_{t,d})$  restreint à
             $Pa(X_i)$ 
        finsi
    finpour
finpour
fin

```

---

### 1.2.4.3 Méthodes d'inférence symboliques

Les méthodes d'inférences exactes précédemment présentées, ont toutes le point commun d'être des méthodes numériques, et nécessitent toutes une connaissance exacte des LPC. En pratique, les valeurs des tables de probabilités conditionnelles sont souvent sujettes à discussion, et cette imprécision a des conséquences plus ou moins importantes sur le résultat d'une requête d'inférence. Une question fréquente,

dans ce contexte, est de déterminer la sensibilité du résultat de l'inférence bayésienne par rapport aux informations disponibles et aux probabilités initiales du réseau.

La méthode la plus simple pour réaliser une analyse de sensibilité est de changer les valeurs des paramètres et de suivre l'impact de ce changement sur la probabilité obtenue après propagation de l'information dans le réseau. Cette méthode naïve est extrêmement coûteuse en temps de calcul, et dans la plupart des cas n'est pas envisageable.

L'inférence probabiliste symbolique (ou SPI, l'acronyme anglais pour *Symbolique Probabilistic Inférence*) a été introduite dans [Shachter 1990] et [D'Ambrosio 1994]. La caractéristique première de cette méthode d'inférence est que l'algorithme est orienté par le résultat, c'est-à-dire que seul les calculs nécessaires pour répondre à la requête sont effectués.

[Castillo 1995] propose une technique d'inférence symbolique similaire en remplaçant les valeurs numériques des paramètres initiaux par des paramètres symboliques, en utilisant des méthodes d'inférences classiques et des outils permettant d'effectuer des calculs symboliques. La probabilité résultante de l'inférence symbolique est une expression analytique dépendant des paramètres symboliques.

Sur le même principe, [Darwiche 1996] introduit une méthode pour transformer un réseau bayésien en une expression arithmétique, appelée *Query DAG* (Q-DAG). La réponse de la requête est obtenue en évaluant cette expression arithmétique, et la complexité de cette évaluation est polynomiale par rapport à la taille du Q-DAG.

Reprenons l'exemple 1, modélisant le système de démarrage d'une voiture, afin d'illustrer la méthode d'inférence symbolique :

**Exemple 3** (Illustration inférence symbolique). *Pour cet exemple, considérons que la requête est toujours la même que dans le précédent exemple, à savoir la détermination de la probabilité que la voiture démarre, c'est à dire  $\mathbb{P}(D)$ . Il y a bien de l'essence dans le réservoir, mais cette fois ci, il n'y a aucune information disponible sur l'état et l'utilisation de la batterie. Cette absence d'information est modélisée par des paramètres.*

Soit  $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$  un vecteur composé de deux réels compris entre 0 et 1 tel que les tables de probabilités des variables  $E$  et  $U$  soient définies par :

$\mathbb{P}(U)$		$\mathbb{P}(E)$	
Utilisation		État	
fréquente	normale	récente	ancienne
$\theta_1$	$1-\theta_1$	$\theta_2$	$1-\theta_2$

Comme précédemment, l'algorithme d'élimination de variables avec l'ordre d'élimination  $E, U, P, D$  est utilisé pour déterminer la probabilité marginalisée de  $D$ , à l'exception près que le résultat dépendra du jeu de paramètres  $\Theta$ .

— Élimination de la variable  $E$  :

$\lambda_E$			
Puissance			
Utilisation	faible	moyenne	importante
fréquente	$-0.05 \theta_2 + 0.15$	$-0.65 \theta_2 + 0.80$	$0.70 \theta_2 + 0.05$
normale	$-0.08 \theta_2 + 0.10$	$-0.07 \theta_2 + 0.15$	$0.15 \theta_2 + 0.75$

— Élimination de la variable  $U$  :

$\lambda_U$	
Puissance	
faible	$0.03 \theta_1 \theta_2 + 0.05 \theta_1 - 0.08 \theta_2 + 0.10$
moyenne	$-0.58 \theta_1 \theta_2 + 0.65 \theta_1 - 0.07 \theta_2 + 0.15$
importante	$0.55 \theta_1 \theta_2 - 0.70 \theta_1 + 0.15 \theta_2 + 0.75$

— Élimination de la variable  $P$  :

$\lambda_P$	
Démarrage	
réussi	$0.29 \theta_1 \theta_2 - 0.40 \theta_1 + 0.11 \theta_2 + 0.83$
échoué	$-0.29 \theta_1 \theta_2 + 0.40 \theta_1 - 0.12 \theta_2 + 0.18$

— Résultat :  $\mathbb{P}(D = \text{« réussi »}) = 0.29 \theta_1 \theta_2 - 0.40 \theta_1 + 0.11 \theta_2 + 0.83$

Quelques propriétés sur les expressions algébriques générées par une inférence symbolique ont été mises en évidence. Notamment, [Castillo 1995] démontre les propriétés suivantes :

**Théorème 1.** *La probabilité marginalisée a priori de n'importe quel ensemble de variables  $\mathbf{X}_r$  est un polynôme par rapport au vecteur de paramètres  $\Theta$ , de degré inférieur ou égale au minimum entre le nombre de paramètres et le nombre de nœuds. Autrement dit, cette probabilité est un polynôme de degré 1 pour tous les paramètres.*



Mathématiquement, cela se traduit par le fait que pour toute requête portant sur un ensemble  $\mathbf{X}_r$ ,

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_r) = \sum_{m_r \in \mathcal{M}} c_i m_i, \quad (1.22)$$

où  $c_i$  est un coefficient numérique associé au monôme  $m_i$  et  $\mathcal{M}$  un ensemble de monômes composé des produits des parties de l'ensemble des paramètres.

Cette propriété est facilement démontrable en utilisant la propriété 1.1 de factorisation de la probabilité jointe dans un réseau bayésien.

La cardinalité de l'ensemble  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire le nombre maximum de monômes intervenant dans l'expression analytique d'une probabilité marginale  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_r)$  est donnée par :

$$|\mathcal{M}| = \prod_{i=1}^n (1 + s_i), \quad (1.23)$$

où  $s_i$  est le nombre de paramètres associés à la variable  $X_i$ .

Soit  $q_i$  le nombre de configurations possibles pour les parents de la variable  $X_i$ . Formellement  $q_i$  est défini par :

$$q_i = \prod_{X_j \in \text{Pa}(X_i)} |\mathcal{X}_j|. \quad (1.24)$$

Le nombre maximum de paramètres associables à une variable  $X_i$  d'un réseau bayésien est  $q_i(|\mathcal{X}_i| - 1)$ . En utilisant l'équation 1.23, il est possible de déterminer le nombre maximum de monômes dans une expression analytique, si toutes les variables sont paramétrées :

$$\prod_{i=1}^d [1 + q_i(|\mathcal{X}_i| - 1)]. \quad (1.25)$$

## 1.3 Modèle graphique probabiliste dynamique

### 1.3.1 Introduction

Les modèles graphiques probabilistes ne permettent pas d'introduire des notions de dépendance temporelle. Cette faiblesse des MGP peut être problématique, notamment pour la représentation de modèles de survie.

L'extension des réseaux bayésiens dynamiques (RBD) initialement introduite par [Dean 1989] apporte une solution pour prendre en compte les dépendances temporelles. Concrètement, avec les RBD, il est possible de représenter l'évolution d'un vecteur aléatoire en fonction d'un paramètre  $t$ , qui désigne un temps discret. Le terme « dynamique » utilisé ici ne concerne pas la structure du réseau, qui reste inchangée au cours du temps, mais caractérise le processus modélisé.

Hormis les réseaux bayésiens dynamiques, d'autres formalismes tels que les modèles de Markov cachés [Rabiner 1993], les filtres de Kalman [Kalman 1960] ou les processus décisionnels de Markov [Puterman 2005], permettent de représenter des processus dynamiques. Mais tous ces formalismes peuvent être vus comme des cas particuliers des réseaux bayésiens dynamiques.

## 1.3.2 Définition

### 1.3.2.1 Réseau bayésien à deux tranches de temps

Un réseau bayésien à deux tranches de temps (2-TBN) est une représentation graphique de la distribution d'un vecteur aléatoire  $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{t,1}, \dots, X_{t,n})_{1 \leq t \leq T}$  en supposant l'hypothèse markovienne d'ordre 1. En d'autres termes, pour tout  $t \in [2, T]$  le vecteur  $\mathbf{X}_{t+1}$  est indépendant du vecteur  $\mathbf{X}_{t-1}$  conditionnellement au vecteur  $\mathbf{X}_t$ ; traduit mathématiquement par :

$$\mathbf{X}_{t-1} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t \quad (1.26)$$

Cette propriété permet de décrire un RBD à partir d'une distribution de probabilité initiale  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_0)$  et d'une loi de transition  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1})$ . D'une manière générale, la définition suivante est donnée pour un réseau bayésien à deux tranches de temps.

#### Définition 3 (Réseau bayésien dynamique)

Soit  $\mathbf{X}_t = (X_{t,1} \dots X_{t,n})$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{X}_t^* = \mathcal{X}_{t,1} \times \dots \times \mathcal{X}_{t,n}$ . Un réseau bayésien dynamique à deux tranches de temps est un couple de modèles graphiques probabilistes  $(\mathcal{M}^{ini}, \mathcal{M}^{\rightarrow})$  où :

—  $\mathcal{M}^{ini} = (\mathcal{G}^{ini}, \{p_1^{init} \dots p_n^{init}\})$  est un réseau bayésien définissant la distribution jointe du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_1 = (X_{1,1} \dots X_{1,n})$ , tel que

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_1) = \mathbb{P}(X_{1,1} \dots X_{1,n}) = \prod_{i=1}^n p_i^{init}.$$

—  $\mathcal{M}^{\rightarrow} = (\mathcal{G}^{\rightarrow}, \{p_1^{\rightarrow} \dots p_n^{\rightarrow}\})$  définit le modèle de transition du processus  $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T}$ , c'est-à-dire la distribution de probabilité de  $\mathbf{X}_{t+1}$  sachant  $\mathbf{X}_t$  pour tout  $t \geq 1$ . Dans ce cas la factorisation de  $\mathcal{M}^{\rightarrow}$  s'écrit :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t) = \mathbb{P}(X_{t+1,1} \dots X_{t+1,n} | X_{t,1} \dots X_{t,n}) = \prod_{i=1}^n p_i^{\rightarrow}.$$

La distribution jointe du vecteur aléatoire  $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{t,1}, \dots, X_{t,d})_{1 \leq t \leq T}$  sur un

horizon  $T$  peut être obtenue en déroulant le 2-TBN sur  $T$  tranches de temps :

$$\mathbb{P}((X_{t,1}, \dots, X_{t,d})_{1 \leq t \leq T}) = \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_{1,i} | pa(X_{1,i})) \prod_{t=2}^T \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_{t,i} | pa(X_{t,i})). \quad (1.27)$$

### 1.3.2.2 Représentation d'un RBD

Un RBD peut être représenté de deux manières équivalentes. La première consiste à représenter les deux modèles graphiques  $\mathcal{M}^{ini}$  et  $\mathcal{M}^{\rightarrow}$  en utilisant la représentation classique des réseaux bayésiens. Le modèle  $\mathcal{M}^{\rightarrow}$  ayant la particularité de ne pas représenter une loi jointe mais une loi conditionnelle, les conventions suivantes sont utilisées pour sa représentation :

- toutes les variables de la tranche  $t + 1$  sont dessinées
- seules les variables de la tranche  $t$  ayant au moins un arc vers une variable de la tranche  $t$  sont dessinées
- tous les arcs de la tranche  $t + 1$  sont dessinés.

La seconde possibilité pour représenter un RBD consiste à combiner les deux modèles  $\mathcal{M}^{ini}$  et  $\mathcal{M}^{\rightarrow}$  en supprimant les informations redondantes. En effet, la représentation des deux modèles peut se résumer à dessiner le RBD déroulé sur deux tranches de temps.

#### Définition 4 (Interface)

Soit un RBD à deux tranches de temps d'horizon  $T$ . L'interface gauche  $I_t^{\rightarrow}$  [Murphy 2002] est l'ensemble des nœuds de la tranche de temps  $t < T$  qui ont au moins un enfant dans la tranche de temps  $t + 1$ .

De manière analogue, l'interface droite  $I_t^{\leftarrow}$  [Kjaerulff 1995] est l'ensemble des nœuds de la tranche de temps  $t > 0$  qui ont, eux ou leurs enfant, un parent dans la tranche de temps  $t - 1$ .

Du fait de la structure répétitive d'un RBD, étant donné une interface pour une tranche de temps  $t$ , il est possible d'obtenir l'interface d'autres tranches de temps par translation de cette dernière.

**Théorème 2.** Soit un vecteur aléatoire  $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$  représenté par un RBD. En notant  $I_t^{\rightarrow}$ , respectivement  $I_t^{\leftarrow}$  l'interface gauche et l'interface droite pour une tranche de temps  $t$ , les propriétés suivantes sont vraies pour tout  $2 \leq t \leq T$  :

$$(X_{\tau})_{1 \leq \tau \leq t-1} \perp\!\!\!\perp (X_{\tau})_{t+1 \leq \tau \leq T} | I_t^{\rightarrow},$$

et pour tout  $1 \leq t \leq T$

$$(X_{\tau})_{1 \leq \tau \leq t} \perp\!\!\!\perp (X_{\tau})_{t+2 \leq \tau \leq T} | I_t^{\leftarrow}.$$

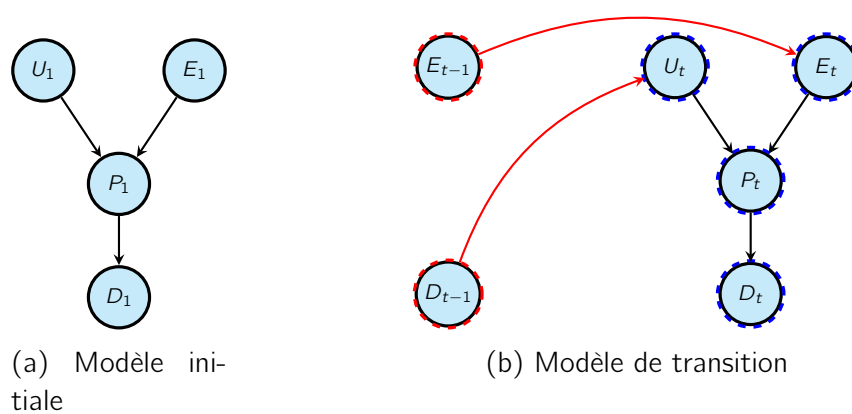


Figure 1.3 – Réseau bayésien dynamique modélisant l'évolution d'un système de démarrage d'une voiture. Les nœuds de l'interface avant  $I_{t-1}^{\rightarrow}$  et l'interface arrière  $I_t^{\leftarrow}$  sont dessinés respectivement en rouge et en bleu dans le modèle de transition.

L'exemple suivant est proposé pour illustrer le formalisme des réseaux bayésiens dynamiques :

**Exemple 4** (Modélisation d'un système par RBD). *Reprenons l'exemple 1, modélisant le système de démarrage d'une voiture en y apportant quelques modifications afin d'étendre la modélisation à un système dynamique. Pour ce fait, en plus des relations déjà introduites entre les variables d'une même tranche de temps, des relations sont ajoutées pour traduire les dépendances temporelles suivantes :*

- l'état courant de la batterie dépend de son état précédent
- l'utilisation de la batterie dépend du succès du démarrage à l'instant précédent.

*De plus la variable  $C$  relative au carburant est supprimé (le niveau de carburant est supposé suffisant pour assurer le démarrage de la voiture).*

*Ces relations sont modélisées dans un réseau bayésien dynamique dont la structure est donnée par la figure 1.3 et les LPC du modèle de transition sont données par la table 1.2. Les LPC des variables  $U$ ,  $E$ ,  $P$  et  $D$ , introduites dans la table 1.1, sont réutilisées pour définir le modèle initial du réseau bayésien dynamique. Remarquons, que la représentation utilisée pour dessiner le RBD de la figure 1.3 est celle mettant côte à côte le modèle de transition et le modèle initial.*

**Table 1.2** Tables de probabilités relatives au modèle de transition du RBD de la figure 1.3

$\mathbb{P}(E_t E_{t-1})$			$\mathbb{P}(U_t D_{t-1})$		
		$E_t$		$U_t$	
$E_{t-1}$	récente	ancienne	$D_{t-1}$	fréquente	normale
récente	0.80	0.20	réussi	0.15	0.85
ancienne	0	1	échoué	0.35	0.65

### 1.3.2.3 Chaînes de Markov

Dans cette partie, nous nous proposons de comparer les chaînes de Markov et les réseaux bayésiens dynamiques. Au même titre que les réseaux bayésiens dynamiques, les chaînes de Markov font partie de la famille des modèles graphiques probabilistes markoviens (MGP-M). Cette famille est composée des modèles graphiques probabilistes qui vérifient l'hypothèse Markovienne, énoncée ci-dessous.

La propriété de Markov faible, aussi appelée absence de mémoire, est que la seule connaissance du présent permet de prédire l'avenir. Mathématiquement, la propriété de Markov s'énonce de la manière suivante : Pour tout  $t \geq 2$ ,  $x \in \mathcal{E}$ , et  $(x_1, \dots, x_t) \in \mathcal{E}^t$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_t = x_t) \quad (1.28)$$

Le plus souvent, c'est la propriété de Markov forte qui est utilisée pour définir une homogénéité dans le temps. Mathématiquement, la propriété de Markov prend la forme suivante :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_t = x_t) = \mathbb{P}(X_2 = x | X_1 = x_1) \quad (1.29)$$

Une chaîne de Markov (CM) est une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  qui permet de modéliser une évolution stochastique d'un système dynamique. Les variables  $(X_n)$  prennent des valeurs dans un ensemble d'état  $E$  et représentent l'état du système à l'instant  $n$ .

Un exemple de chaîne de Markov à trois états est représenté dans la figure 1.4. Les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  prennent des valeurs dans l'ensemble d'état  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Supposons par exemple que  $X_1$  vaille  $E_1$ ,  $X_2$  prendra la valeur  $E_2$  avec la probabilité  $p$  et la valeur  $E_1$  avec la probabilité  $1 - p$ .

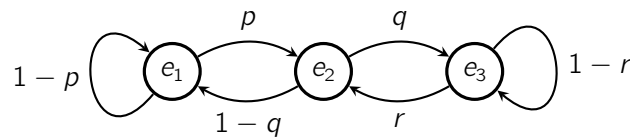


Figure 1.4 – Un exemple de chaîne de Markov à trois états.

Remarquons qu'il est également possible de représenter une chaîne de Markov en utilisant le formalisme des réseaux bayésiens dynamiques. Par exemple, la figure 1.5 représente la chaîne de Markov de la figure 1.4, sous la forme d'un réseau bayésien dynamique déroulé. La variable aléatoire  $X_t$ , modélisée dans cette figure, peut prendre les valeurs  $\{e_1, e_2, e_3\}$

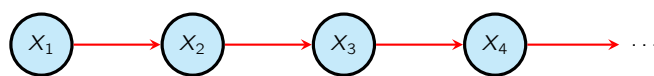


Figure 1.5 – Le réseau bayésien dynamique déroulé, associé à la chaîne de Markov de la figure 1.4

Un réseau bayésien dynamique étant composé de deux modèles probabilistes (modèle initial et modèle de transition), les méthodes d'apprentissage de paramètres et de structures de réseaux bayésiens simples, peuvent être très facilement adaptées aux RBD, en effectuant de manière indépendante l'apprentissage du modèle de transition et du modèle initial. En revanche, en ce qui concerne les méthodes d'inférences, le problème est plus spécifique.

### 1.3.3 Inférence

Le but de l'inférence dans un réseau bayésien dynamique est de déterminer la probabilité marginale à un instant  $t$ , d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_{r,t}$  extrait du vecteur  $\mathbf{X}_t$  ayant connaissance d'informations sur l'ensemble  $(\mathbf{X}_{o,t})_{1 \leq t \leq \tau}$ . [Murphy 2002] propose une classification des problèmes d'inférence dans les RBD ; il s'agit d'un problème de filtrage si  $\tau = t$ , d'un lissage si  $\tau > t$  ou d'un problème de prédiction si  $\tau < t$ .

Dans le cas général, l'inférence dans un modèle dynamique se déroule en deux phases. La première phase consiste à propager les observations vers le futur. Cette phase est suffisante pour les problèmes de filtrage et les problèmes de prédiction. Dans le cas des problèmes de lissage il est nécessaire de réaliser une seconde phase pour propager les observations récentes vers le passé.

La méthode la plus intuitive d'inférence dans un réseau bayésien dynamique est de dérouler ce dernier, sur  $T$  tranches de temps de manière à obtenir un grand réseau bayésien statique. Dès lors, n'importe quel algorithme d'inférence adapté au cas statique, peut être utilisé pour répondre à la requête. Le nombre de variables étant multiplié par la taille de l'horizon  $T$ , les méthodes d'inférence statiques sont d'autant plus coûteuses en temps de calcul et en espace mémoire utilisé. Dans la plupart des cas cette méthode n'est pas intéressante à appliquer.

#### 1.3.3.1 Algorithme Forward-backward

L'algorithme *Forward-Backward* est une méthode bien connue d'inférence dans des modèles de Markov cachés, qui peut facilement être généralisée dans le cas des RBD. Cet algorithme se décompose en deux phases :

- la phase *Forward* consiste à la propagation de l'information du passé vers le futur
- la phase *Backward* propage l'information dans la direction opposée.

Dans la phase *Forward*, l'algorithme calcule de manière récursive la probabilité jointe entre le vecteur  $\mathbf{X}_t$  à l'instant  $t$  et des observations passées. Cette probabilité est usuellement notée  $\alpha_t(x_t) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_{r,t} = x_t, y_0, \dots, y_t)$ . L'hypothèse Markovienne permet de simplifier l'expression de  $\alpha_t(x_t)$  et d'obtenir l'expression récursive suivante :

$$\alpha_{t+1}(x_{t+1}) = \mathbb{P}(y_{t+1}|x_{t+1}) \sum_{x_t \in \mathcal{X}_t} \mathbb{P}(x_{t+1}|x_t) \alpha_t(x_t), \quad (1.30)$$

avec pour valeur initiale  $\alpha_1 = \mathbb{P}(y_1|x_1) \mathbb{P}(x_1)$ .

Dans la phase *Backward* l'information est propagée du futur vers le passé en calculant la probabilité des observations futures sachant le vecteur  $\mathbf{X}_t$ , notée  $\beta_t(x_t) = \mathbb{P}(y_{t+1}, \dots, y_T | \mathbf{X}_{r,t} = x_t)$ . De façon similaire, le calcul de cette probabilité peut s'effectuer de manière récursive en utilisant l'expression suivante :

$$\beta_{t-1}(x_{t-1}) = \sum_{x_t \in \mathcal{X}_t} \beta_t(x_t) \mathbb{P}(x_t | x_{t-1}) \mathbb{P}(y_t | x_t), \quad (1.31)$$

avec  $\beta_T(x_T) = 1$  comme valeur de départ.

A partir des coefficients  $\alpha_t$  et  $\beta_t$ , il est possible de déterminer la loi  $\gamma_t(x_t) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_t = x_t | y_0, \dots, y_T)$  a posteriori du vecteur  $\mathbf{X}_t$  sachant l'ensemble des observations, et de répondre à la requête d'inférence. Le coefficient  $\gamma_t$  est calculé pour toute configuration  $x_t \in \mathcal{X}_t$  du vecteur  $\mathbf{X}_t$  avec :

$$\gamma_t(x_t) = \frac{\alpha_t(x_t) \beta_t(x_t)}{\sum_{x_t \in \mathcal{X}_t} \alpha_t(x_t) \beta_t(x_t)}. \quad (1.32)$$

### 1.3.3.2 Algorithme de l'interface

L'algorithme de l'interface, proposé par [Murphy 2002], exploite la propriété 2 sur l'interface avant  $I_t^\rightarrow$ , selon laquelle ce sous-ensemble de variables d-sépare le passé du futur. Une fois l'interface  $I_t^\rightarrow$  déterminée, l'algorithme consiste à construire une chaîne en répétant l'arbre de jonction construit à partir des variables de la tranche de temps  $t$  et de l'interface  $I_{t-1}^\rightarrow$  de la tranche précédente.

La construction de l'arbre de jonction doit respecter une unique règle, les interfaces de deux tranches successives  $I_{t-1}^\rightarrow$  et  $I_t^\rightarrow$  doivent être contenues dans deux cliques distinctes  $C_t$  et  $D_t$ . Une construction de l'arbre de jonction de la sorte, assure que la clique  $C_t$  est connectée à la clique  $D_{t+1}$  par l'interface  $I_t^\rightarrow$ . La figure 1.6 illustre le résultat de la construction de cette chaîne d'arbres.

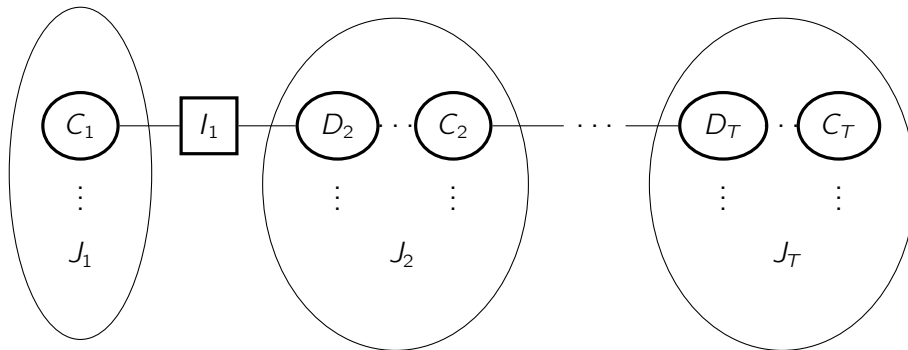


Figure 1.6 – Structure générale de la chaîne d'arbres utilisée par l'algorithme de l'interface.  $I_t$  est l'interface avant pour la tranche de temps  $t$ .  $J_t$  est l'arbre de jonction de la tranche  $t$  et  $C_t$  et  $D_t$  deux cliques de cet arbre.

L'inférence est effectuée dans chaque arbre de jonction et la circulation de l'information entre deux arbres s'effectue par passage de messages par l'intermédiaire de l'interface  $I_t^{\rightarrow}$ . Comme dans l'algorithme *Forward-Backward*, la propagation de l'information s'effectue vers l'avant puis vers l'arrière, pour assurer la cohérence avec l'ensemble des observations.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté des éléments sur le formalisme des modèles graphiques probabilistes. Les exemples du chapitre illustrent de manière simple les aspects intuitifs et pertinents de ces modèles. En outre, les méthodes présentées pour résoudre les problèmes d'apprentissage des paramètres ou d'inférence probabiliste contribuent à la performance de ces modèles comme outils de raisonnement dans l'incertain. Ceci explique en partie l'intérêt grandissant qu'est porté aux modèles probabilistes dans divers domaines tels que l'aide au diagnostic ou la sûreté de fonctionnement.

De plus, les modèles graphiques probabilistes dynamiques ouvrent de nouvelles perspectives pour la représentation de systèmes dynamiques. L'utilisation de ce type d'outil paraît tout à fait adéquate à la modélisation de processus d'évolution d'une dégradation ou à la modélisation de la maintenance d'un système. Ces outils donnent un cadre pour la modélisation et l'apprentissage de processus de vieillissement, l'intégration d'un modèle de maintenance et le calcul d'indicateurs pour la fiabilité.

Le chapitre suivant introduit un formalisme général pour la modélisation de la dégradation d'un système et de sa maintenance. Les notions introduites dans ce chapitre seront reprises pour introduire un modèle graphique probabiliste markovien spécifique pour la modélisation de processus de dégradation.





# Modélisation de la fiabilité et de la maintenance

## Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	<b>34</b>
2.2	Présentation de la maintenance . . . . .	<b>34</b>
2.2.1	Définition et objectifs de la maintenance . . . . .	34
2.2.2	Type de maintenance . . . . .	35
2.2.2.1	Maintenance corrective . . . . .	35
2.2.2.2	Maintenance préventive . . . . .	36
2.3	Modélisation d'un processus de dégradation . . . . .	<b>37</b>
2.3.0.3	Les modèles de dégradation en temps continu . . . . .	38
2.3.0.4	Les modèles de dégradation en temps discret . . . . .	39
2.3.1	Modèle graphique de durée . . . . .	40
2.3.1.1	Description graphique . . . . .	40
2.3.1.2	Description probabiliste . . . . .	42
2.3.2	Mesures de la fiabilité . . . . .	44
2.4	Modélisation de la maintenance . . . . .	<b>46</b>
2.4.1	État de l'art . . . . .	46
2.4.2	Modèle <i>VirMaLab</i> . . . . .	48
2.4.2.1	Description graphique . . . . .	48
2.4.2.2	Description probabiliste . . . . .	50
2.4.2.3	Modèle <i>VirMaLab</i> avec MGD . . . . .	52
2.4.2.4	Paramètres du modèle . . . . .	53
2.5	Conclusion . . . . .	<b>54</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter quelques notions générales de la maintenance et de souligner l'intérêt de la mise en place d'une stratégie de maintenance adaptée au système sur lequel porte l'étude. Ceci dans le but de poser le cadre de travail dans lequel s'inscrit cette thèse.

La première partie de ce chapitre est dédiée à la présentation de notions importantes concernant la maintenance industrielle. Cette partie sera également l'occasion d'introduire les enjeux de la maintenance de systèmes industriels.

Les parties 2.3 et 2.4 présenteront respectivement des modèles dédiés à la représentation de processus de dégradation et à la représentation de stratégies de maintenance. Différentes méthodes pour modéliser un processus de dégradation d'un système ainsi que la stratégie de maintenance mise en place pour ce système seront abordées. Une attention particulière sera donnée à deux modèles dont la pertinence a déjà été démontrée et qui seront réutilisés dans la suite de ce manuscrit. Ces modèles sont initialement introduits dans le mémoire de thèse de [Donat 2010]. Le lecteur pourra s'y référer pour consulter les démonstrations de certains résultats qui seront simplement présentés ici.

Ce chapitre se présente comme un état de l'art non-exhaustif des méthodes de modélisation de la fiabilité et de la maintenance.

## 2.2 Présentation de la maintenance

L'activité de maintenance a toujours existé. Elle se résumait essentiellement à des opérations de dépannage d'un équipement. Cette définition très basique de la maintenance n'intégrait aucune notion d'intervention préventive pour éviter la panne.

La notion actuelle de la maintenance est relativement récente. Jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle la maintenance se résume à une simple activité de réparation. Avec le développement des chemins de fer, de l'automobile et de l'aviation, entre 1900 et 1970, la notion d'entretien est souvent utilisée. Ce n'est qu'à partir de 1970, avec le développement de secteurs à risque, que la maintenance voit réellement le jour.

### 2.2.1 Définition et objectifs de la maintenance

La maintenance ne doit pas être vue comme une simple activité d'entretien ; c'est une activité qui intervient tout au long du cycle de vie du système, de sa conception à son démantèlement. Cette activité introduit de nombreuses sous-activités comme la conception d'un système qui facilite les interventions de maintenance, la gestion de ressources nécessaires à la maintenance, le suivi de l'évolution du système, l'élaboration de planning de maintenance, etc . . .

La maintenance est souvent définie comme « l'ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise » [Deloux 2008].

Les enjeux de la maintenance sont nombreux et couvrent des domaines très variés. En effet, cette activité a le plus souvent comme but final d'augmenter la disponibilité du système, mais elle peut avoir pour objectif de réduire les coûts d'entretiens, d'améliorer la sécurité ou d'augmenter la qualité de la production.

### 2.2.2 Type de maintenance

Les stratégies de maintenance sont différenciées par les éléments déclencheurs, les objectifs et les instants des actions de maintenance. La figure 2.1 synthétise la classification des différents types de maintenance. Deux grandes classes de maintenance sont identifiables : la maintenance corrective et la maintenance préventive. Les différentes stratégies de maintenance sont classées en fonction des opérations de maintenance effectuées et des événements déclencheurs de ces opérations.

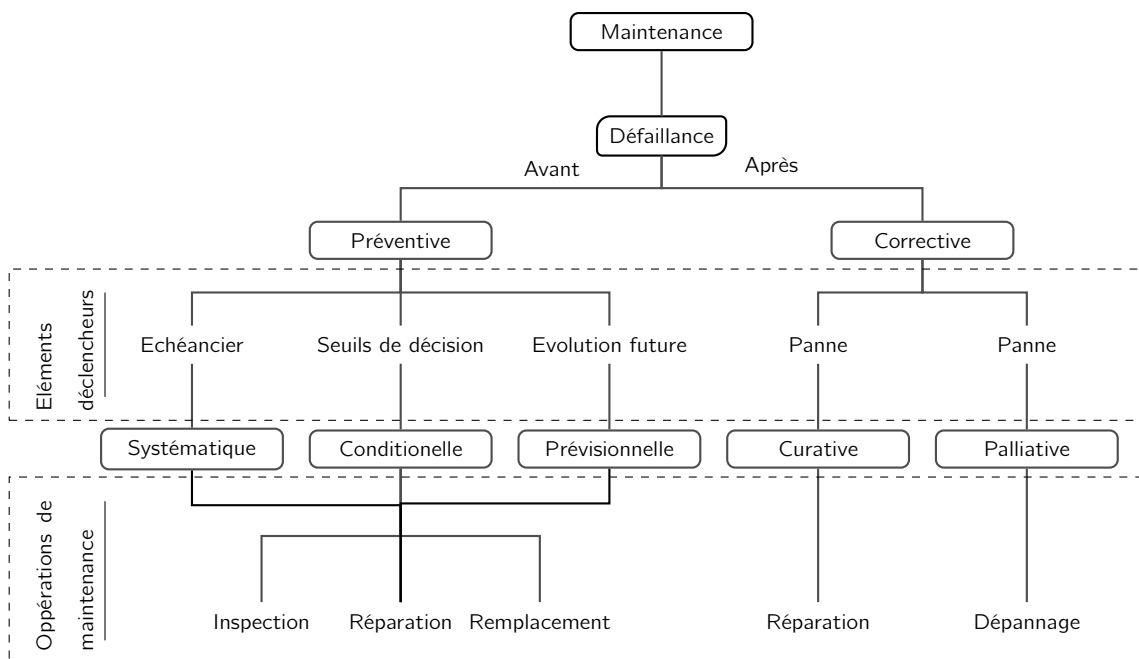


Figure 2.1 – Type de maintenance

#### 2.2.2.1 Maintenance corrective

La maintenance corrective est la stratégie de maintenance la plus simple à mettre en place. En effet, elle se résume à réaliser une action de maintenance dès lors qu'une

défaillance survient sur le système. Dans une stratégie de maintenance corrective les opérations de maintenance ne sont pas planifiées.

En fonction du caractère définitif ou pas de l'intervention, deux sous-catégories de la maintenance corrective sont définies :

- *maintenance palliative* : lorsque l'opération de maintenance est un dépannage, une réparation ou une remise en état à caractère provisoire.
- *maintenance curative* : lorsque l'opération de maintenance est une réparation, une modification ou une remise en état à caractère permanent.

L'inconvénient majeur de ce type de maintenance est de laisser apparaître un événement souvent redouté, la panne. Par conséquent, cette maintenance est utilisée lorsque l'indisponibilité du système n'a pas de conséquences majeures ou quand les contraintes de sécurité sont faibles.

### 2.2.2.2 Maintenance préventive

La maintenance préventive, contrairement à la corrective, est réalisée avant que la panne ne survienne, dans le but de réduire le risque de défaillance. Les interventions sont soit programmées à l'avance selon un échéancier, soit conditionnées par l'état de dégradation du système ou l'évolution prévue de la dégradation.

Établir une stratégie de maintenance préventive systématique sous-entend l'élaboration d'un échéancier contenant les dates d'interventions prévisionnelles. Ces dates sont définies soit de manière relative, en fonction de l'âge du système, soit de manière absolue, tous les  $T$  unités de temps.

Une synthèse des politiques de maintenance préventive est donnée par [Barlow 1996] et plus récemment par [Rausand 2004]. Il existe trois groupes de maintenance préventive :

- *maintenance systématique* : elle consiste à effectuer les opérations de maintenance à des instants prédéterminés. Le calendrier d'interventions est fixé de manière définitive et sans connaissance sur l'état courant du système. Il s'agit de déterminer au mieux les instants des actions de maintenance à partir d'indicateurs tels que le temps, le nombre de cycles de fonctionnement ou le nombre de pièces produites entre deux interventions.
- *maintenance conditionnelle* : elle consiste à déclencher les actions de maintenance conditionnellement à l'état courant du système. Ce type de maintenance nécessite la mise en place d'un dispositif de surveillance de la dégradation du système, appelé diagnostic. Le résultat d'une méthode de diagnostic peut être une information directe sur l'état du système ou des informations sur les durées de vie résiduelle (on parle alors de *maintenance prévisionnelle*). Dans tous les cas le principe reste de définir des seuils critiques sur des indicateurs, au delà desquels le risque de panne est considéré comme non acceptable.

- *maintenance prévisionnelle* : elle consiste à déclencher des actions de maintenance en se basant sur une estimation du temps de fonctionnement restant avant que la panne survienne. Ce type de maintenance peut être assimilée à de la maintenance conditionnelle ; la différence est que pour la maintenance prévisionnelle il est nécessaire d'extrapoler et de prédire l'évolution de l'état de dégradation du système.

Avoir recourt à une stratégie de maintenance préventive sous-entend d'avoir une indication sur l'instant probable de défaillance du système, l'objectif étant de planifier une intervention juste avant cet instant. La détermination de ces instants probables de défaillance est effectuée à partir d'une modélisation du système étudié. Dans le chapitre suivant, cette modélisation sera abordée plus en détail.

Par ailleurs, une maintenance préventive est intéressante, en considérant le coût comme critère d'évaluation, si les coûts induits par la perte de performance sont élevés et si les coûts de réparation et d'inspection sont relativement faibles par rapport aux premiers.

### Stratégie de maintenance et évaluation

Les actions de maintenance corrective et préventive sont complémentaires. En effet, dans la plupart des cas une politique de maintenance combinant ces deux types de maintenance est adoptée afin d'établir un compromis entre la fiabilité du système et son coût de maintenance.

## 2.3 Modélisation d'un processus de dégradation

La maintenance préventive, telle qu'elle est décrite dans la section 2.2.2, ouvre le champ à tout un domaine de la maintenance, qui consiste à utiliser les informations disponibles sur la fiabilité d'un système afin d'en optimiser la maintenance. Ce domaine, appelé maintenance basée sur la fiabilité (MBF en français et RCM pour l'acronyme anglais), est largement abordé dans la littérature scientifique. Il existe deux ouvrages de référence pour la MBF, il s'agit de [Nowlan 1978] et plus récemment de [Zwingelstein 1996].

L'optimisation des stratégies de maintenance d'un système complexe requiert un modèle dynamique permettant de simuler le comportement de ce système. La section suivante a pour objectif de présenter, dans les grandes lignes, les différentes méthodes de modélisation d'un système dynamique. Le nombre de travaux existant sur la modélisation de système dynamique étant relativement important, seuls les modèles les plus utilisés seront présentés dans cette partie.

La modélisation d'un système constitue en générale l'étape la plus délicate de la mise en place d'une stratégie de maintenance basée sur la fiabilité. En effet, c'est la

pièce centrale du modèle de maintenance. Il s'agit, dans cette étape de représenter au mieux le mécanisme d'évolution du système.

Il existe plusieurs approches possibles pour modéliser la dégradation d'un système :

- les modèles à dégradation continue ;
- les modèles à espace d'états finis (aussi appelé modèle multi-états).

### 2.3.0.3 Les modèles de dégradation en temps continu

Dans le cas d'une représentation d'un processus de dégradation par un modèle continu, l'état du système peut être déterminé par une valeur numérique à chaque instant. En général, l'évolution de la dégradation est représentée par une suite de valeurs  $(Z_t)_{t \geq 0}$  croissantes. L'hypothèse sous-jacente de ces modèles est de considérer que le processus de dégradation d'un système est dû à une dégradation continue. L'exemple des plaquettes de freins sur une voiture illustre bien ce type d'usure.

La classe des processus de Lévy, c'est à dire les processus stochastiques dont les accroissements sont stationnaires et indépendants, sont particulièrement bien adaptés à la modélisation de dégradation continue. Les processus Levy regroupent des processus largement utilisés dans la littérature pour modéliser une dégradation, telle que les processus Gamma, les processus de Poisson composés ou les processus de Wiener.

Parmi les nombreux auteurs utilisant des processus de Lévy pour modéliser une dégradation, quelques un sont des références incontournables, citons par exemple [Abdel-Hameed 1975] qui fut le premier à proposer d'utiliser un processus Gamma pour modéliser une défaillance se produisant de manière aléatoire. Plus récemment [van Noortwijk 2009] propose une application plus récente des processus gamma pour la maintenance. [Lam 2003] considère aussi que la dégradation suit un processus stochastique de type sauts. Les occurrences des sauts forment un processus de poisson homogène ou non homogène. Les auteurs supposent, par ailleurs, que l'instant de défaillance obéit à une loi de probabilité qui est fonction du niveau de dégradation courant du système et n'est donc pas défini par un seuil. [Barbour 1995] discute de l'efficacité d'une utilisation des processus de poisson composés pour la maintenance de système.

Dans la littérature, les processus gaussiens sont souvent utilisés pour modéliser l'évolution d'une dégradation. Citons par exemple les travaux de [Doksum 1992], [Wang 2005] ou [Whitmore 1997]. L'état du système est représenté par un processus gaussien  $(W_t)_{t \geq 0}$  vérifiant  $W_t = \sigma B_t + \mu t$  où  $\mu$  est la tendance,  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien et  $\sigma$  le coefficient de diffusion (avec  $\sigma > 0$ ). Ce type de modélisation permet de prendre en compte des réparations mineures du système. Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours compatible avec le processus de dégradation modélisé. Remarquons que les petites perturbations ( variations négatives ) résultantes de ce type de modèles peuvent être interprétées comme des erreurs de mesure.

### 2.3.0.4 Les modèles de dégradation en temps discret

Cette partie aborde le problème de la modélisation d'un système dynamique en temps discret avec un espace d'états finis. La terminologie de système dynamique en temps discret fait référence à un ensemble de composants pouvant être chacun dans un état qui évolue en fonction d'un paramètre  $t$  introduisant une notion d'ordre. Le paramètre  $t$  peut par exemple représenter un temps discret, une position, ... Remarquons que le terme dynamique ne concerne pas la structure du système qui reste inchangée, mais traduit plutôt des changements d'états des composants du système au cours du temps. Les adjectifs discret et finis traduisent le fait que l'espace des états est un ensemble dénombrable et fini.

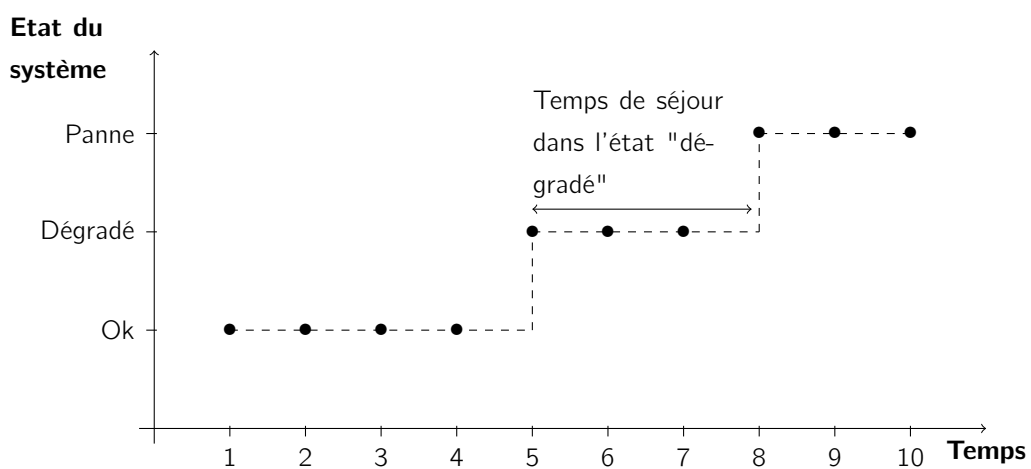


Figure 2.2 – Évolution d'un système dynamique avec un ensemble d'état discret et fini (trajectoire du système sur un horizon de dix pas de temps)

La figure 2.2 présente un exemple d'évolution d'un système dynamique avec trois états au cours d'un temps discret. Cette courbe est aussi appelée trajectoire du système. Une bonne modélisation du processus de dégradation doit tenir compte, au mieux, de toute l'information contenue dans les trajectoires observées du système.

Dans le cas des modèles de dégradation discrète, on suppose que l'ensemble possible des états du système est fini, chaque état représentant un niveau de dégradation du système (il peut alors exister une relation d'ordre partiel ou total entre les états). Il est courant que l'on distingue les modèles de dégradation à deux états des modèles avec plus de deux états. Cette distinction est faite principalement parce que ces deux catégories de modèle permettent de représenter deux types de défaillance différents. Les modèles de dégradation à deux états, aussi appelés modèles de durée de vie, sont plus adaptés pour modéliser les systèmes à défaillances soudaines (sans signe annonciateur), alors que les modèles avec plus de deux états permettent de prendre en compte des phénomènes de dégradation plus graduelle.

Les modèles de durée vie regroupe l'ensemble des représentations dans lesquels le système étudié ne peut être que dans deux états : soit en panne soit dans un



état de bon fonctionnement. Le principe de ces méthodes est de représenter la durée de vie du système à l'aide d'une variable aléatoire positive. Il s'agit d'estimer et de modéliser les lois décrivant le temps qui s'écoule entre plusieurs événements : la mise en service ou la dernière opération de maintenance et la panne.

Des outils tels que les chaînes de Markov [Aven 1999] permettent de représenter des transitions stochastiques entre différents états d'un système et sont par conséquent bien adaptés pour la modélisation discrète d'une dégradation. Par exemple, dans [Chan 2006] les auteurs se basent sur un processus de décision markovien pour construire une politique de maintenance optimale. L'inconvénient majeur de ce type de modélisation repose dans le fait que les temps de séjour dans chaque état sont distribués de manière géométrique. Cette limitation intrinsèque aux chaînes de Markov induit souvent une erreur entre la modélisation du processus et le processus réel qui peut avoir des conséquences importantes sur la stratégie de maintenance adoptée.

Inspirés par les modèles à variables de durée proposés par [Murphy 2002], les modèles graphiques de durée (MGD) permettent de dépasser cette limitation.

### 2.3.1 Modèle graphique de durée

Un modèle graphique de durée (MGD) est un outil de modélisation pour les processus dynamiques multi-états qui introduit une variable représentant explicitement le temps de séjour dans chaque état. Ce modèle permet de représenter n'importe quelle distribution de temps de séjour pour un état donné [Donat 2010]. Cette modélisation, reposant sur le formalisme des réseaux bayésiens dynamiques, permet de représenter de manière fidèle un ensemble de trajectoires d'états par un processus stochastique. Les descriptions graphiques et probabilistes de cette structure sont abordées dans les parties suivantes.

#### 2.3.1.1 Description graphique

Un modèle graphique de durée est un réseau bayésien dynamique à deux tranches de temps avec une structure particulière qui lui confère la capacité de pouvoir modéliser aussi bien les transitions entre les différents états du système que les durées d'un processus. Ce modèle s'articule autour de deux variables aléatoires ; la variable  $X_t$  représente l'état du système à l'instant  $t$ , et prend des valeurs dans l'ensemble des états possibles  $\mathcal{X}$ . Les durées passées dans chaque état sont représentées à l'aide de la variable aléatoire  $S_t$  à valeurs dans  $\mathcal{S} = 1, 2, \dots, T_{\mathcal{S}}$  où  $T_{\mathcal{S}}$  est la plus grande durée possible.

La structure générale d'un MGD est donnée en figure 2.3. Le modèle initial (figure 2.3a) décrit les relations pour une même tranche de temps et le modèle de transition (figure 2.3b) donne les relations entre les variables de deux tranches de temps consécutives. Pour une tranche de temps  $t$  donnée, la variable aléatoire

représentant le temps de séjour  $S_t$  dépend de l'état  $X_t$  dans lequel se trouve le système. De plus, pour toute tranche de temps  $t \geq 2$ , la variable  $S_t$  dépend également du temps de séjour à l'instant précédent. Cette relation entre  $S_{t-1}$  et  $S_t$  permet de réaliser un décompte dans les temps de séjour. Une fois ce décompte terminé, une transition d'état est déclenchée; ce qui explique que  $X_t$ , l'état du système à un instant  $t$ , dépende à la fois de l'état à l'instant précédent  $X_{t-1}$  et du décompte des temps de séjours, c-a-d de la variable  $S_{t-1}$ .

Bien que cette fonctionnalité ne soit pas présentée ici, la version originale des MGD permet la prise en compte d'un contexte d'utilisation du système. Il est également possible d'ajouter une relation de dépendance entre les variables  $X_{t-1}$  et  $S_t$  dans le modèle de transition pour représenter des systèmes dont la durée de séjour dans un état dépend de l'état précédent.

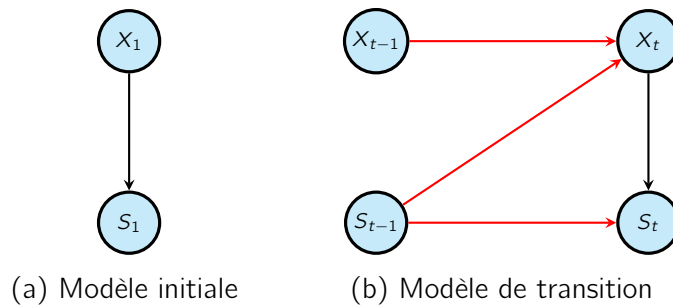


Figure 2.3 – Structure d'un MGD.  $X_t$ ,  $S_t$  représentant respectivement l'état du système et le temps de séjours restant à l'instant  $t$ .

### Propriétés dans un MGD

L'interface avant  $I_t^{\rightarrow}$  et l'interface arrière  $I_t^{\leftarrow}$  pour une tranche de temps  $t$  donnée sont respectivement définies par  $I_t^{\rightarrow} = \{X_{t-1}, S_{t-1}\}$  et  $I_t^{\leftarrow} = \{X_{t+1}, S_{t+1}\}$ . Le théorème 2 sur les interfaces se traduit par :

$$\forall t \in \{3, \dots, T\}, \quad X_{t-2}, S_{t-2} \perp\!\!\!\perp X_t, S_t | X_{t-1}, S_{t-1}, \quad (2.1)$$

et

$$\forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \quad X_t, S_t \perp\!\!\!\perp X_{t+2}, S_{t+2} | X_{t+1}, S_{t+1}. \quad (2.2)$$

La probabilité jointe de l'ensemble des variables d'une tranche  $t$  quelconque est donnée par l'expression récursive :

$$\mathbb{P}(X_t, S_t) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_1) \mathbb{P}(S_1 | X_1) & \text{si } t = 1 \\ \sum_{X_{t-1}, S_{t-1}} \mathbb{P}(X_{t-1}, S_{t-1}) \mathbb{P}(X_t | X_{t-1}, S_{t-1}) \mathbb{P}(S_t | X_t, X_{t-1}, S_{t-1}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.3.1.2 Description probabiliste

Les paragraphes suivants abordent l'aspect quantitatif des modèles graphiques de durée. Il s'agit donc de décrire et d'interpréter les différentes LPC associées au MGD.

La LPC associée à la variable  $X_1$  décrit la distribution initiale de l'état du système. Pour simplifier l'écriture des formules suivantes, la notation  $\alpha_1$  sera utilisée pour représenter cette LPC. Mathématiquement  $\alpha_1$  est une application de  $\mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  où  $\mathcal{X}$  désigne l'ensemble des valeurs possibles pour la variable  $X_1$ , et définie de la manière suivante :

$$\alpha_1(x) = \mathbb{P}(X_1 = x). \quad (2.4)$$

La distribution initiale des temps de séjours est donnée par la LPC associée à la variable  $S_1$ . Dans la suite, la notation  $F_1$  sera utilisée pour désigner cette LPC. La variable  $S_1$  a pour parent la variable  $X_1$  et est définie sur l'ensemble  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, TS\}$  où  $TS$  désigne la durée maximum possible dans chaque état. Par conséquent  $F_1$  est une application de  $\mathcal{X} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  définie par :

$$F_1(x, s) = \mathbb{P}(S_1 = s | X_1 = x). \quad (2.5)$$

Cette distribution décrit la dynamique du système. Elle permet de représenter tout type de processus dynamique, à condition qu'il puisse être discrétisé sur un ensemble de valeurs fini.

Pour un instant  $t \neq 1$ , la LPC associée à une variable  $X_t$  caractérise la façon dont le système passe d'un état à un autre. Cette LPC sera notée  $Q^\rightarrow$ . Dans le modèle graphique de transition d'un MGD la variable  $X_t$  a pour parents les variables  $X_{t-1}$  et  $S_{t-1}$  (2.3). Concrètement deux cas de figures peuvent apparaître en fonction du temps de séjour restant :

- Dans le premier cas, si à l'instant  $t - 1$  le temps de séjour dans l'état  $X_{t-1}$  est écoulé, le système subit une transition. Le nouvel état du système est déterminé à partir de la fonction  $Q$  définie pour tout  $(x', x) \in \mathcal{X}^2$  comme suit :

$$Q(x', x) = \mathbb{P}(X_t = x | X_{t-1} = x', S_{t-1} = 1) \quad (2.6)$$

- Dans le cas contraire, c'est-à-dire si à l'instant  $t - 1$  le temps de séjour restant n'est pas terminé ( $S \geq 2$ ), alors le système reste dans le même état.

Les transitions d'état du système sont caractérisées par la LPC  $Q^\rightarrow$  définie de la manière suivante :

$$Q^\rightarrow(x, x', s) = P(X_t = x | X_{t-1} = x', S_{t-1} = s) = \begin{cases} Q(x, x') & \text{si } s = 1 \\ I(x, x') & \text{sinon} \end{cases}, \quad (2.7)$$

$$\text{avec } l(x, x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La LPC associée à la variable  $S_t$  gère l'évolution du temps dans les états du système entre les tranches de temps  $t - 1$  et  $t$ . Dans le reste de ce manuscrit, cette LPC sera notée  $F^\rightarrow$ . Comme pour  $Q^\rightarrow$ , deux cas de figures peuvent être distingués en fonction de si il y a ou pas une transition d'état entre la tranche de temps  $t - 1$  et  $t$  :

- Dans le premier cas, en absence de transition ( $S_{t-1} \geq 2$ ), le temps de séjour restant à l'instant  $t - 1$  est réduit d'une unité. Dans ce cas la LPC qui sera notée  $C$ , est définie de manière déterministe.  $C$  est définie pour tout  $(s, s') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \{1\}$  par l'expression suivante :

$$C(s', s) = \mathbb{P}(S_t = s | S_{t-1} = s') = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s' - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (2.8)$$

- Dans le second cas, si une transition a eu lieu, le système commence un nouveau séjour dans l'état sélectionné. Le temps de séjour pour ce nouvel état est donné par la distribution  $F$  vérifiant pour tous  $(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathcal{S}$  :

$$F(s, x) = \mathbb{P}(S_t = s | X_t = x). \quad (2.9)$$

La distribution  $F$  peut être définie de manière identique à la distribution initiale de temps de séjour  $F_1$  de la manière suivante  $F(s, x) = F_1(s, x)$ .

La LPC  $F^\rightarrow$  associée aux temps de séjours est définie pour tous  $(s', s, x) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{X}$  par :

$$\begin{aligned} F^\rightarrow(s', s, x) &= \mathbb{P}(S_t = s | X_t = x, S_{t-1} = s') \\ &= \begin{cases} C(s', s) & \text{si } s' \geq 2 \\ F(s, x) & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

En utilisant les notations précédemment introduites, l'expression récursive 2.3 de la probabilité jointe des variables  $X_t$  et  $S_t$  pour une tranche de temps  $t$  se réécrit :

$$\Phi_t(x, s) = \begin{cases} \alpha_1(x) F_1(x, s) & \text{si } t = 1 \\ \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S} \\ x' \in \mathcal{X}}} \Phi_{t-1}(x', s') Q^\rightarrow(x, x', s) F^\rightarrow(s', s, x') & \text{sinon} \end{cases} , \quad (2.11)$$

avec

$$\Phi_t(x, s) = \mathbb{P}(X_t = x, S_t = s).$$

L'apprentissage des différentes LPC est réalisé à partir d'exemples de trajectoires pour le système étudié ; Une trajectoire étant définie comme une séquence d'états

par lesquels passent le système. De telles observations sont obtenues en faisant vieillir le système sans aucune intervention extérieure.

Remarquons qu'il est toujours possible de représenter un MGD par une chaîne de Markov à  $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{S}|$  états, en introduisant la notion de temps de séjour. Avec cette représentation, les états de la chaîne de Markov représentent un couple  $(x, s)$  (états, temps de séjour) des MGD.

Prenons l'exemple d'un système qui possède trois niveaux de dégradation  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ , tel que les temps de séjours dans les états  $E_1$  et  $E_2$  soient bornés à  $TS = 3$  et  $E_3$  soit un état bloquant. Le MGD modélisant ce système peut être représenté sous la forme de la chaîne de Markov suivante :

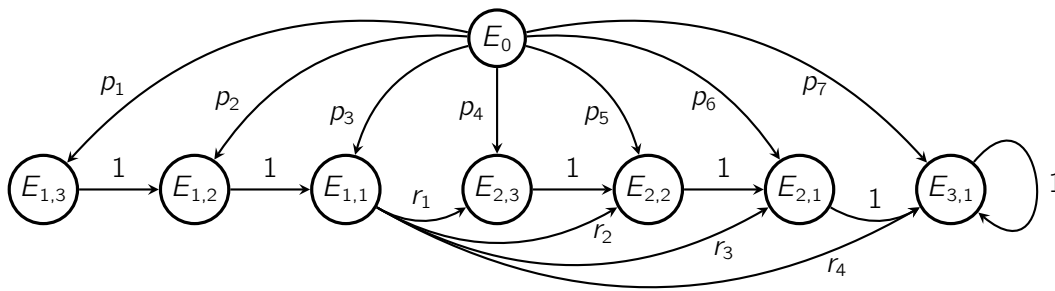


Figure 2.4 – Représentation d'un MGD à trois états  $(x_1, x_2, x_3)$  et des temps de séjours bornés à  $Ts = 3$ , sous la forme d'une chaîne de Markov

La famille de probabilités  $(p_1 \dots p_7)$  introduite dans la chaîne de Markov de la figure 2.4 est déduite des distributions  $\alpha_1$  et  $F_1$  du MGD équivalent. De même, la famille de probabilités  $(r_1 \dots r_4)$  est déduite de la distribution  $F^{\rightarrow}$ . Par exemple, la probabilité  $p_1$  est donnée par l'expression  $p_1 = \alpha_1(x_1) F_1(x_1, s_1)$ .

Une représentation d'un MGD sous la forme de chaîne de Markov présente l'inconvénient d'être plus lourde et moins intuitive par rapport à la représentation sous forme de RBD. De plus, le nombre important d'états introduits dans la chaîne de Markov augmente, de manière significative, la complexité algorithmique d'une inférence.

### 2.3.2 Mesures de la fiabilité

Nous introduisons ici la notion de fiabilité en temps discret [Xie 2002] pour un système dynamique. Pour définir la fiabilité, il est primordial de réaliser une partition de l'ensemble des états du système  $\mathcal{X}$  en deux sous-ensembles  $\mathcal{X}_U$  et  $\mathcal{X}_D$  regroupant respectivement l'ensemble des états de bon fonctionnement du système et l'ensemble des états de panne.

#### Définition 5 (Fiabilité)

Soit  $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$  une séquence d'états à valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{X}$ , et une partition

de  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ . La fiabilité du système représenté par  $X_t$ , est la fonction  $R$  (pour Reliability) définie par :

$$R : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow [0, 1] \\ t & \longmapsto R(t) = \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{X}_U, \dots, X_t \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

La fiabilité  $R(t)$  représente la probabilité qu'à un instant  $t$  le système ne soit pas tombé en panne. Cette fonction est décroissante, et cette monotonie a pour conséquence de réduire la pertinence de l'information représentée par la fonction de fiabilité à elle seule. C'est pour cette raison que d'autres mesures de fiabilité tel que le taux de défaillance ont été définies.

### Définition 6 (Taux de défaillance)

Soit  $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$  une séquence d'états à valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{X}$ , et une partition de  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ . Le taux de défaillance d'un système est la fonction du temps  $h$  définie par :

$$h : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow [0, 1] \\ t & \longmapsto h(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{X}_D | X_1 \in \mathcal{X}_U, \dots, X_{t-1} \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

Dans cette définition la probabilité considérée est la probabilité que le système tombe en panne à un instant  $t$  sachant qu'il a toujours été en bon état de fonctionnement auparavant. Le taux de défaillance  $h(t)$  est lié à la fonction de fiabilité  $R(t)$  par la relation suivante :

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \frac{R(t)}{R(t-1)} & \text{si } R(t-1) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Définition 7 (Durée de vie résiduelle)

Soit  $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$  une séquence d'états à valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{X}$ , et une partition de  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ . La durée de vie résiduelle du système à l'instant  $t$  est la fonction  $R_t$  définie par :

$$R_t : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow [0, 1] \\ i & \longmapsto R_t(i) = \mathbb{P}(X_{t+1} \in \mathcal{X}_U, \dots, X_{t+i} \in \mathcal{X}_U | X_1 \in \mathcal{X}_U, \dots, X_t \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

La durée de vie résiduelle correspond à la probabilité que le système reste encore  $i$  unités de temps dans un état non défaillant, sachant qu'il est déjà resté  $t$  unités de temps dans un état de bon fonctionnement.

### Définition 8 (Disponibilité)

Soit  $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$  une séquence d'états à valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{X}$ , et une partition de  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ . La disponibilité du système est la fonction du temps  $A$  définie

par :

$$A : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow [0, 1] \\ t & \longmapsto A(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

La disponibilité  $A(t)$  du système à l'instant  $t$  est la probabilité que le système soit en état de fonctionnement à cette instant.

D'autres indicateurs, comme le MTBF (pour *Mean Time Between Failure*) ou MTTR (pour *Mean Time To Repair*), sont souvent utilisées. L'indicateur MTBF désigne le temps moyen entre deux défaillances consécutives :

$$\text{MTBF} = \frac{\text{Sommes des temps de bon fonctionnement}}{\text{Nombre de défaillances}} .$$

La Somme des Temps de Bon Fonctionnement inclut les temps d'arrêt hors défaillance et les temps de micro arrêts.

L'indicateur MTTR, traduit littéralement par temps moyen pour réparer, exprime la moyenne des temps des tâches de réparation. Il est calculé en divisant, sur une période, le temps total de maintenance par le nombre d'interventions :

$$\text{MTTR} = \frac{\text{Temps d'arrêt total}}{\text{Nombre d'arrêts}} .$$

## 2.4 Modélisation de la maintenance

### 2.4.1 État de l'art

Les travaux sur la modélisation de la maintenance portent principalement sur la maintenance préventive. En effet, les politiques de maintenance préventive s'avèrent souvent plus avantageuses que les stratégies de maintenance purement corrective, en terme de disponibilité. Toutefois, une stratégie maintenance préventive n'est réellement efficace que si elle est correctement optimisée. De nombreux travaux traitent de cette recherche de paramètres optimaux pour une stratégie de maintenance préventive systématique. Notamment, dans [Barlow 1960] les auteurs décrivent une méthode pour déterminer une période de maintenance optimale, en utilisant comme critère d'optimalité la minimisation du coût total de maintenance. Dans le même ordre d'idée, il est possible de citer les travaux de [Courtois 2006] qui traitent de l'optimisation du temps moyen de bon fonctionnement (en excluant les temps de maintenance) pour un système multi-composants.

Par ailleurs, les progrès scientifiques sur les capteurs et méthodes de diagnostic permettent de surveiller l'état des systèmes industriels plus souvent et plus précisément. Cette évolution, explique en partie, le nombre croissant de travaux sur la maintenance conditionnelle. Citons, par exemple, les travaux de [Grall 2002] et de [Hong 2014] qui présentent des méthodes pour planifier les opérations d'inspection

et de remplacement de composant, d'un système mono-composant. Dans le même ordre d'idée, [Castanier 2005] propose un cadre de travail permettant de planifier et regrouper les opérations d'inspection et de remplacement de composant pour un système à deux composants. D'autre part, dans [Bouvard 2008] les auteurs exposent les avantages d'une stratégie de maintenance conventionnelle par rapport à une politique de maintenance périodique. Bien que performante d'un point de vue calculatoire, les études précédentes reposent sur des hypothèses restrictives quant à la modélisation du processus de dégradation du système.

D'autres part, de nombreuses études reposant sur l'utilisation de MGP se sont avérées pertinentes pour représenter les systèmes dynamiques et étudier leur fiabilité. En effet, le fort potentiel des MGP en matière de modélisation permet de représenter relativement intuitivement des systèmes complexes en décrivant leur comportement stochastique local. Ce gain de flexibilité en matière de représentation se fait néanmoins au détriment de conditions d'utilisation parfois plus restrictives, notamment la nécessité de travailler en temps discret. [Boudali 2005] et [Celeux 2006] ont donné des exemples d'études de fiabilité sur des systèmes composés de nombreuses variables interdépendantes à partir de MGP statiques. [Langseth 2007] et [Montani 2006] ont montré qu'il était possible de représenter les arbres de défaillance [Vesely 1981] avec un MGP. Plus récemment, [Medina-Oliva 2011] propose d'utiliser les MGP avec une approche basée sur une démarche d'ingénierie, c'est à dire qu'une étape de modélisation système du problème précède la passage vers un outil de simulation. [Weber 2003] ont utilisé les Modèles Graphiques Probabilistes Markoviens d'ordre un afin de modéliser des chaînes de Markov dépendant de variables exogènes pour étudier la fiabilité d'un système dynamique à temps discret en tenant compte de son contexte. L'intérêt majeur de cette technique est la possibilité de représenter de grands systèmes dont l'aspect dynamique est géré localement par des chaînes de Markov. Bien que suffisante dans certains cas, cette approche souffre de la limitation liée au temps de séjour géométrique. Par ailleurs, [Kang 1999a] ont proposé un MGP statique dédié à la modélisation de la maintenance, en incluant explicitement une couche diagnostic.

Parmi les MGP, les réseaux de Petri sont fréquemment utilisés pour la modélisation des performances des systèmes, [Simeu-Abazi 1999], [Lindemann 1998]. Leur pouvoir d'expression est en effet bien adapté à un usage industriel. On trouve souvent des travaux d'évaluation des performances de politiques de maintenance basés sur le formalisme des réseaux de Petri stochastiques, associé à la simulation de Monte Carlo [Dutuit 1997], [Clavareau 2008], [Zille 2009].

Parallèlement, les travaux de [Corset 2003] propose l'utilisation de modèle graphique probabiliste dans le cadre de la maintenance. Dans sa thèse, il propose d'utiliser les réseaux bayésiens pour modéliser l'évolution de la dégradation d'un système mécanique d'une centrale nucléaire. Par ailleurs, [Kang 1999b] a proposé une modélisation de la maintenance par un réseau bayésien statique, en y incluant une couche de diagnostics.



Toujours dans cette optique de représenter au mieux la maintenance, [Bouillaut 2011] définit un environnement général pour la modélisation de la maintenance, incluant des composante de diagnostic et d'utilité. Cette approche, baptisée *VirMaLab* (pour *Virtual Maintenance Laboratory*, littéralement Atelier virtuel de maintenance) permet de représenter à la fois des politiques de maintenance conditionnelles, systématiques et correctives.

Les paragraphes suivants présentent en détail le modèle *VirMaLab*. Dans cette approche, des composantes de diagnostic, de maintenance et d'utilité sont ajoutées aux modèles graphiques de durée.

## 2.4.2 Modèle VirMaLab

Les parties suivantes présentent la structure générale du modèle *VirMaLab*. Pour ne pas alourdir la représentation graphique, cette structure est présentée pour un système mono-composant, mais l'adaptation du modèle à un système multi-composants s'effectue de manière assez simple.

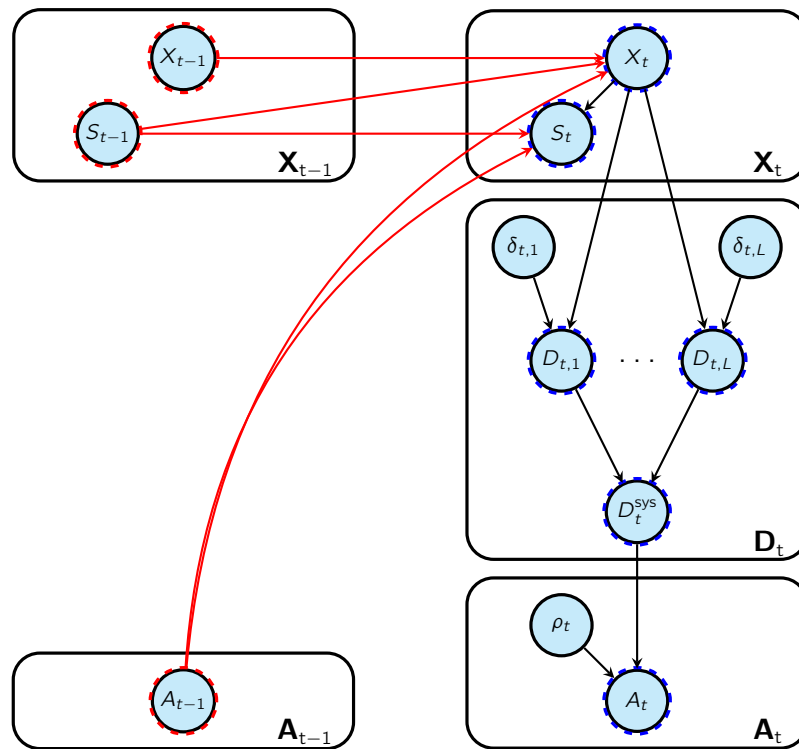
### 2.4.2.1 Description graphique

La structure générale d'un modèle *VirMaLab* est donnée par la figure 2.5. Ce modèle est composé de trois composantes principales ( $\mathbf{X}_t$ ,  $\mathbf{D}_t$ ,  $\mathbf{A}_t$ ) représentant respectivement le processus d'évolution du système, les mécanismes de diagnostics, et les actions de maintenance.

Le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_t$  représentant l'état du système à l'instant  $t$  est composé de l'ensemble des variables pouvant expliquer son évolution temporelle. Dans le modèle *VirMaLab* présenté par la figure 2.5, ce vecteur est composé de deux variables  $X_t$  et  $S_t$  représentant respectivement l'état du composant principal du système et les temps de séjours dans ces états. Le contenu de ce bloc  $\mathbf{X}_t$  n'est, bien entendu, pas fixé par le modèle. Il est donc possible de représenter l'évolution de systèmes avec plusieurs composants interagissant entre eux.

Le vecteur aléatoire  $\mathbf{D}_t$  réunit l'ensemble des méthodes de diagnostic du système. Ce vecteur est composé de  $L$  méthodes de diagnostic représentées par les variables  $D_{t,1}, \dots, D_{t,L}$ . Toutes ces méthodes de diagnostic sont contrôlées (activées ou désactivées à l'instant  $t$ ) par une variable binaire, définissant ainsi un ensemble de  $L$  variables de contrôle  $\delta_{t,1}, \dots, \delta_{t,L} \in \{0, 1\}$ . La variable  $D_t^{\text{sys}}$  permet d'effectuer la fusion des méthodes de diagnostic et donne un résultat général sur l'état du système.

Le vecteur aléatoire  $\mathbf{A}_t$  modélise les actions de maintenance applicables au système et l'activation de ces actions. Il est composé de la variable aléatoire  $A_t$  et  $\rho_t$ . La variable  $A_t$  représente l'action de maintenance effectuée sur le système à l'instant  $t$  et prend ses valeurs dans l'ensemble des actions  $\mathcal{A}$ . La variable  $\rho_t \in \{0, 1\}$  permet de déclencher une action de maintenance à l'instant  $t$ . Le cas où  $\rho_t = 1$  rend

Figure 2.5 – Structure du RBD associé au modèle *VirMaLab*

l'action de maintenance indépendante du résultat de diagnostic et permet de représenter des stratégies de maintenance systématique. Pour modéliser les instants où aucune action de maintenance n'est effectuée, l'action artificielle "néant" est ajoutée à l'ensemble  $\mathcal{A}$ . Notons qu'il est également possible de représenter une stratégie de maintenance systématique, en ajoutant une variable de contrôle au bloc  $A_t$  pour définir un calendrier d'interventions.

L'interface avant dans le modèle *VirMaLab*, pour une tranche de temps  $t$  est composé des variables  $X_{t-1}$ ,  $S_{t-1}$  et  $A_{t-1}$ . Dans ce modèle, le théorème 2 de l'interface, se traduit par l'expression suivante :

$$\forall t \in \{3, \dots, T\}, \quad \mathbf{X}_{t-2}, \mathbf{D}_{t-2}, \mathbf{S}_{t-2} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_t, \mathbf{D}_t, \mathbf{S}_t | X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}. \quad (2.12)$$

En se référant aux relations de dépendance entre les variables du modèle *VirMaLab* représentées dans la figure 2.5, la probabilité jointe des vecteurs  $\mathbf{X}_t$  et  $A_t$  est définie récursivement par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t, A_t) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathbf{X}_1) \sum_{\mathbf{D}_1} \mathbb{P}(\mathbf{D}_1 | X_1) \mathbb{P}(A_1 | \mathbf{D}_1) & \text{si } t = 1 \\ \sum_{X_{t-1}, A_{t-1}} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1}) \mathbb{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1}) \sum_{\mathbf{D}_t} \mathbb{P}(\mathbf{D}_t | X_t) \mathbb{P}(A_t | \mathbf{D}_t) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

avec pour tout  $t \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(\mathbf{D}_t | \mathbf{X}_t) = \mathbb{P}(D_t^{sys} | D_{t,1} \dots D_{t,L}) \prod_{l=1}^L \mathbb{P}(\delta_{t,l}) P(D_{t,l} | X_1, \delta_{t,l}),$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1}) = \mathbb{P}(X_t | X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}) \mathbb{P}(S_t | X_t, S_{t-1}, A_{t-1}).$$

et

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_1) = \mathbb{P}(X_1) \mathbb{P}(S_1 | X_1).$$

### 2.4.2.2 Description probabiliste

Dans un modèle *VirMaLab*, le processus de dégradation du système est caractérisé par la distribution initiale  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_1)$ , et la distribution de transition  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1})$ . Par la suite les notations  $\lambda_1$  et  $\Lambda$  seront utilisées pour représenter ces deux distributions. Soient  $\mathcal{X}$  l'ensemble des états du système et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des actions de maintenance. Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  la notation  $\lambda_1$  est définie par :

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}), \quad (2.14)$$

et pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$  et  $a' \in \mathcal{A}$ ,

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t = \mathbf{x} | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}', A_{t-1} = a') = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}', a'). \quad (2.15)$$

La distribution de transition  $\Lambda$  est définie par morceaux, en distinguant deux cas :

— si aucune intervention de maintenance n'a été effectuée ( $A_{t-1} = a \in \mathcal{A}_\emptyset$ ), le système évolue selon une loi de transition naturelle  $\Lambda^{sys}$  définie par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t = \mathbf{x} | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}', \mathbf{A}_{t-1} = \text{néant}) = \Lambda^{sys}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

— si une intervention de maintenance a été réalisée ( $A_{t-1} = a \notin \mathcal{A}_\emptyset$ ), le système évolue selon une loi de transition artificielle  $\Lambda^{act}$  définie par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t = \mathbf{x} | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}', A_{t-1} = a') = \Lambda^{act}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', a').$$

En résumé, la distribution de transition du système  $\Lambda$  est définie pour tout  $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  et  $a' \in \mathcal{A}$  par :

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}', a') = \begin{cases} \Lambda^{sys}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & \text{si } a' \in \mathcal{A}_\emptyset \\ \Lambda^{act}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', a') & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.16)$$

Les méthodes de diagnostic ont pour but de fournir une information sur l'état réel du système. Nous noterons  $\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_L$  les ensembles de résultats possibles pour chaque diagnostic  $D_1 \dots D_L$ . L'activation d'un diagnostic à un instant  $t$  est contrôlée par la variable binaire  $\delta_{t,l}$ . Chaque ensemble  $\mathcal{D}_l$  contient une valeur  $d_\emptyset$  qui permet de signifier de manière explicite que le diagnostic associé n'est pas activé. Les LPC pour les variables  $(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  sont définies de manière à caractériser les comportements probabilistes des diagnostics par rapport à l'état réel du système. En fonction de la valeur de la variable d'activation  $\delta_{t,l}$  deux cas sont à distinguer :

- Si  $\delta_{t,l} = 1$ , le diagnostic  $D_{t,l}$  est activé à l'instant  $t$ . Le résultat probabiliste de ce diagnostic est conditionné par l'état réel du système. La LPC  $\Delta_l(x, dl)$  donne le comportement de ce diagnostic. Formellement  $\Delta_l$  est défini pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et  $d_l \in \mathcal{D}_l$  par :

$$\mathbb{P}(D_{t,l} = dl | X_t = x, \delta_{t,l} = 1) = \Delta_l(x, d_l). \quad (2.17)$$

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter en fonction de l'état du système  $x$  et du résultat de diagnostic  $d_l$  :

- si le diagnostic  $D_{t,l}$  détecte une défaillance du système à l'instant  $t$  alors qu'en réalité il n'y en a pas eu,  $\Delta_l(x, d_l)$  correspond au taux de fausse alarme ;
  - si le diagnostic  $D_{t,l}$  ne détecte pas un défaut qui s'est réellement produit sur le système à l'instant  $t$ ,  $\Delta_l(x, d_l)$  correspond au taux de non détection ;
  - Dans le cas où le résultats du diagnostic  $D_{t,l}$  est conforme à l'état  $x$  du système,  $\Delta_l(x, d_l)$  correspond au taux de bonne détection.
- Si  $\delta_{t,l} = 0$ , le diagnostic  $D_{t,l}$  est désactivé à l'instant  $t$ . Le résultat du diagnostic ne dépend plus de l'état du système et vaudra toujours  $d_\emptyset$ . Formellement pour tout  $dl \in \mathcal{D}_l$  et pour tout  $x \in \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(D_{t,l} = dl | X_t = x, \delta_{t,l} = 0) = \mathbb{1}_{(d_l = d_\emptyset)}. \quad (2.18)$$

En résumé, les LPC associées aux méthodes de diagnostic sont définies par morceaux, telles que pour tout  $l = 1 \dots L$ , tout  $d_l \in \mathcal{D}_l$  et tout  $x \in \mathcal{X}$  :

$$\mathbb{P}(D_{t,l} = d_l | X_t = x, \delta_{t,l}) = \begin{cases} \Delta_l(x, d_l) & \text{si } \delta_{t,l} = 1 \\ \mathbb{1}_{(d_l = d_\emptyset)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.19)$$

Les résultats de chaque système de diagnostic à l'instant  $t$  sont ensuite fusionnés pour déduire un diagnostic final relatif à la variable  $D_t^{sys}$ . La LPC définissant la méthode de fusion des résultats intermédiaires de diagnostic est notée  $\Delta_t^{sys}$  et est définie pour tout  $d \in \mathcal{D}_t^{sys}$  par :

$$\mathbb{P}(D_t^{sys} = d | D_{t,1} = d_1 \dots D_{t,L} = d_L) = \Delta_t^{sys}(d_1, \dots, d_L, d). \quad (2.20)$$

Le choix d'effectuer une action de maintenance, ayant connaissance du résultat du diagnostic final, est contrôlé par la LPC associée à la variable aléatoire  $A_t$ . Cette LPC est notée  $\Gamma$  et est définie pour tout  $d \in \mathcal{D}_t^{sys}$  et tout  $a \in \mathcal{A}$  par :

$$\mathbb{P}(A_t = a | D_t = d) = \Gamma(d, a). \quad (2.21)$$

$\Gamma(d, a)$  représente la probabilité que l'action de maintenance  $a$  soit effectuée sachant que le résultat du diagnostic final est  $d$ . Dans la pratique, cette LPC est définie de manière déterministe et ne dépend pas du temps.

### 2.4.2.3 Modèle VirMaLab avec MGD

En reprenant et adaptant les notations introduites dans la partie 2.3.1, dans le cas d'une modélisation du processus de dégradation par un MGD, la probabilité décrivant l'état initial  $\mathbf{X}_1$  d'un système modélisé par un modèle *VirMaLab* est donnée par l'expression suivante :

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \lambda_1(x, s) = \alpha_1(x) F_1(x, s). \quad (2.22)$$

Les LPC de transition  $Q^{\rightarrow}$  et  $F^{\rightarrow}$  des variables  $X$  et  $S$  définies par les équations 2.7 et 2.10 sont redéfinies, pour prendre en compte les actions de maintenance, de la manière suivante :

$$Q^{\rightarrow}(x, s', x', a') = P(X_t = x | X_{t-1} = x', S_{t-1} = s' A_{t-1} = a'), \quad (2.23)$$

et

$$F^{\rightarrow}(x, s, s', a') = \mathbb{P}(S_t = s | X_t = x, S_{t-1} = s' A_{t-1} = a'). \quad (2.24)$$

Comme précédemment il peut s'avérer utile de les définir par morceaux en effectuant une disjonction de cas. La LPC de transition  $Q^{\rightarrow}$  est définie par morceaux par :

$$Q^{\rightarrow}(x, x', s', a') = \begin{cases} Q^{sys}(x, x') & \text{si } s' = 1 \text{ et } a' = \text{neant} \\ I(x, x') & \text{si } s' \geq 2 \text{ et } a' = \text{neant} \\ Q^{act}(x, x', a') & \text{si } a' \neq \text{neant} \end{cases}, \quad (2.25)$$

où  $Q^{sys}$  est la probabilité de passer de l'état  $x'$  à l'état  $x$  après une transition naturelle. De même, la LPC de transition  $F^{\rightarrow}$  est définie par morceaux par :

$$F^{\rightarrow}(x, s, s', a') = \begin{cases} F^{sys}(x, s) & \text{si } s' = 1 \text{ ou } a' \neq \text{neant} \\ C(s', s) & \text{si } s' \geq 2 \text{ et } a' = \text{neant} \end{cases}, \quad (2.26)$$

où  $F^{sys}$  représente la probabilité d'avoir un temps de séjour  $s$  dans l'état  $x$  après qu'une transition naturelle ou artificielle ait été déclenchée.

En tenant compte des définitions 2.25 et 2.26 les distributions  $\Lambda^{sys}$  et  $\Lambda^{act}$  décrivant les transitions naturelles et artificielles de l'état  $\mathbf{x}$  vers l'état  $\mathbf{x}'$  dans un modèle *VirMaLab* avec MGD sont définies par :

$$\begin{aligned} \Lambda^{sys}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \Lambda^{sys}(x, s, x', s') \\ &= \begin{cases} Q^{sys}(x, x') F^{sys}(x, s) & \text{si } s' = 1 \\ I(x, x') C(s', s) & \text{si } s' \geq 2 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

et

$$\Lambda^{act}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', a') = \Lambda^{act}(x, s, x', s', a') = Q^{act}(x, x', a') F^{sys}(x, s). \quad (2.28)$$

## 2.4.2.4 Paramètres du modèle

Les paramètres  $\mathcal{P} = (\lambda_1, \Lambda^{sys}, \Lambda^{act}, (\delta_{t,l})_{t \geq 1, 1 \leq l \leq L}, (\Delta_l)_{1 \leq l \leq L}, \Delta^{sys}, \Gamma)$  du modèle *VirMaLab* correspondent à l'ensemble des LPC associées aux différentes variables aléatoires du modèle. Il est possible de distinguer deux grandes classes de paramètres : les paramètres descriptifs et les paramètres de maintenance. Il est important de faire la distinction entre ces deux jeux de paramètres. En effet, lors de la phase d'optimisation d'une politique de maintenance, les paramètres descriptifs du modèle restent inchangés tandis que plusieurs valeurs sont testées pour les paramètres de maintenance. Le tableau 2.1 reprend l'ensemble des paramètres du modèle *VirMaLab*.

**Table 2.1** Tableau récapitulatif des paramètres du modèle *VirMaLab*

Notation	Description	LPC
$\lambda_1$	Etat initial	$\mathbb{P}(\mathbf{X}_1)$
$\Lambda^{sys}$	Transition naturelle	$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t   \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1} \notin \mathcal{A})$
$\Lambda^{act}$	Transition artificielle	$\mathbb{P}(\mathbf{X}_t   \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1} \in \mathcal{A})$
$\delta_{t,l}$	Activation du diagnostic $l$	$\mathbb{P}(\delta_{t,l})$
$\Delta_l$	Propriétés du diagnostic $l$	$\mathbb{P}(D_{t,l}   \mathbf{X}_t, \delta_{t,l})$
$\Delta^{sys}$	Politique de fusion des diagnostics	$\mathbb{P}(D_t^{sys}   D_{t,1}, \dots, D_{t,l})$
$\Gamma$	Politique des actions de maintenance	$\mathbb{P}(A_t   D_t)$

Les paramètres descriptifs regroupent l'ensemble des paramètres caractérisant les propriétés intrinsèques du système. Cet ensemble est notamment composé des LPC caractérisant l'état initial du système, les transitions d'état naturelles et artificielles, et les propriétés des méthodes de diagnostic. Dans la suite, la notation  $\mathcal{P}_{desc}$  sera utilisée pour représenter l'ensemble des paramètres descriptifs. Formellement l'ensemble de paramètres  $\mathcal{P}_{desc}$  est défini par :

$$\mathcal{P}_{desc} = (\lambda_1, \Lambda^{sys}, \Lambda^{act}, (\Delta_l)_{1 \leq l \leq L}). \quad (2.29)$$

L'ensemble de paramètres de maintenance est composé des LPC définissant la stratégie de maintenance, c'est à dire les instants d'activation des méthodes de diagnostic, la stratégie de fusion des résultats intermédiaires de diagnostic et la politique de décision concernant les actions de maintenance. Dans la suite, la notation  $\mathcal{P}_{maint}$  sera utilisée pour représenter l'ensemble des paramètres de maintenance. Formellement cet ensemble est défini par :

$$\mathcal{P}_{maint} = ((\delta_{t,l})_{t \geq 1, 1 \leq l \leq L}, \Delta^{sys}, \Gamma) \quad (2.30)$$

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre propose une description détaillée d'un modèle graphique probabiliste markovien (MGPM) spécifique utilisé dans le cadre de la modélisation de systèmes dynamiques complexes, appelé Modèle Graphique de Durée (MGD). Contrairement aux chaînes de Markov, cette approche autorise une liberté totale sur les lois de temps de séjour dans un état.

D'autre part, l'approche *VirMaLab* qui est également basée sur les MGPM a été présentée. Cette approche permet de représenter le processus de dégradation d'un système dynamique ainsi que ses moyens de diagnostic et de maintenance. L'un des principaux intérêts de ce modèle est sa flexibilité. Il permet notamment de tenir compte de différentes politiques de maintenance conjointement (corrective, préventive systématique, préventive conditionnelle). De plus, cette approche hérite des outils et méthodes d'analyse des MGPM. Dans le chapitre suivant nous présenterons en particulier une méthode d'inférence générique et son adaptation aux spécificités du modèle.

# Évaluation dynamique d'une stratégie de maintenance

## Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	<b>56</b>
3.2	Évaluation de stratégies de maintenance . . . . .	<b>57</b>
3.2.1	Définition d'une fonction d'utilité . . . . .	57
3.2.1.1	Utilité du système . . . . .	57
3.2.1.2	Utilité de la maintenance . . . . .	57
3.2.1.3	Utilité des diagnostics . . . . .	58
3.2.1.4	Fonction d'utilité . . . . .	59
3.2.2	Méthodes classiques d'inférence . . . . .	59
3.2.2.1	Méthode de l'interface gauche . . . . .	59
3.2.2.2	Méthode à complexité réduite . . . . .	61
3.3	Méthode d'inférence symbolique . . . . .	<b>62</b>
3.3.1	Transformation en expression algébrique . . . . .	62
3.3.2	Évaluation à partir d'expressions symboliques . . . . .	64
3.3.3	Cas d'étude applicatif . . . . .	66
3.3.3.1	Description du système . . . . .	66
3.3.3.2	Utilités . . . . .	69
3.3.3.3	Expressions algébriques . . . . .	70
3.3.3.4	Quelques résultats . . . . .	72
3.4	Conclusion . . . . .	<b>74</b>

---



### 3.1 Introduction

La mise en place d'une stratégie de maintenance est une opération qui peut mener à définir de nombreux paramètres. Le plus souvent, il s'agit de faire des choix sur la nature de la maintenance (préventive ou corrective), le type de tâche (contrôle, inspection, entretien, remplacement, renouvellement . . .) et les instants ou fréquence de réalisation de ces tâches. Cette stratégie peut également intégrer le choix des composants de remplacement, des fournisseurs, ou la gestion de ressources. L'ensemble de ces paramètres de maintenance est ajusté en fonction des contraintes que l'on souhaite satisfaire. Il s'agit dans un premier temps de définir des fonctions d'évaluation d'une stratégie de maintenance, aussi appelées fonctions d'utilité, pour traduire l'ensemble de ces contraintes. La mise en place d'une politique de maintenance peut être vue comme un problème de recherche de paramètres qui maximisent la fonction d'utilité et qui assure le respect des contraintes.

L'optimisation d'une politique de maintenance fait souvent intervenir plusieurs fonctions d'utilité. Dans ce cas, on parle de problème d'optimisation multi-objectifs [Collette 2002, Steuer 1989, Gandibleux 2002]. Il s'agit par exemple de minimiser une fonction homogène aux coûts de maintenance tout en maximisant la fiabilité ou la disponibilité du système.

Il existe plusieurs manières de traiter ce problème d'optimisation multi-objectif. La plus simple est de créer une nouvelle fonction objectif qui sera une composition linéaire de toutes les autres. Le problème est ensuite résolu avec des méthodes classiques d'optimisation combinatoire. L'inconvénient de cette démarche est que le choix des pondérations des fonctions objectifs joue un rôle important sur le résultat final. De plus, lorsque les critères d'optimisation sont antagonistes, cette méthode conduit à une solution possiblement très mauvaise selon un des critères.

Une seconde manière de faire est de considérer simultanément toutes les fonctions d'utilité. Dans ce cas, le résultat de l'évaluation d'une politique de maintenance est un vecteur où chaque composante est associée à une fonction d'utilité. Le résultat final n'est plus une solution unique mais un ensemble de solutions dites Pareto optimales [Pareto 1964] pour lesquelles on ne peut améliorer la valeur d'un critère sans dégrader celle d'un autre. Dans le domaine de la recherche opérationnelle, cet ensemble est appelé front de Pareto. La zone de recherche dans ce type de problème est souvent de taille très importante. Il est d'usage d'utiliser des méthodes de résolution approchée telles que les méta-heuristiques. Récemment une application de ces méthodes dans le cadre de l'optimisation de politique de maintenance préventive a été proposée dans [Ayadi 2013].

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode d'évaluation des stratégies de maintenance dans le cadre d'une modélisation suivant l'approche *VirMaLab*. Il s'agit dans un premier temps de décrire les étapes de construction des fonctions d'utilité puis de décrire la procédure complète pour évaluer ces fonctions. La méthode d'évaluation initialement proposée par [Donat 2010] est basée sur l'algorithme

de l'interface [Murphy 2002]. Une nouvelle méthode d'évaluation basée sur l'inférence symbolique dans les réseaux bayésiens [D'Ambrosio 1994] est proposée dans ce chapitre. Cette méthode a été développée dans le but de réduire le coût (en termes de nombres d'opérations) de l'évaluation d'une stratégie de maintenance donnée .

## 3.2 Évaluation de stratégies de maintenance

Rappelons que l'objectif premier du modèle *VirMaLab* est de permettre l'évaluation et la comparaison de stratégie de maintenance. Dans ce cadre, il est nécessaire de définir le ou les critère(s) d'évaluation, aussi appelée fonction d'utilité.

En pratique les fonctions d'utilités du système sont souvent homogènes à des grandeurs réelles, par exemple un coût ou une disponibilité. Toutefois, d'une manière générale une fonction d'utilité sera définie comme une grandeur calculable à partir de la loi jointe du vecteur aléatoire considéré et n'aura pas forcément de connotation économique.

### 3.2.1 Définition d'une fonction d'utilité

Supposons qu'à chaque instant  $t$ , le système, les méthodes de diagnostic et les actions de maintenance génèrent chacun une utilité. La figure 3.1 détaille comment sont associés ces dernières aux variables d'un modèle *VirMaLab* pour une tranche de temps  $t$  donnée.

Les nœuds  $U_{X_t}$  et  $U_{A_t}$  représentent des utilités relatives respectivement à l'état du système et à l'action de maintenance effectuée à l'instant  $t$ .

#### 3.2.1.1 Utilité du système

Soit  $u_{X_t}$  une fonction de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{R}$ , qui permet d'associer à tout état  $x \in \mathcal{X}$  du système une utilité  $u_{X_t}(x)$ . L'utilité  $U_{X_t}$  associée à la variable  $X$  est définie par :

$$U_{X_t} = \sum_{x \in \mathcal{X}} u_{X_t}(x) \lambda_t(x), \quad (3.1)$$

où  $\lambda_t(x)$  est la probabilité  $\mathbb{P}(X_t = x)$  que le système soit dans l'état  $x$ .

#### 3.2.1.2 Utilité de la maintenance

Soit  $u_{A_t}$  une fonction de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}$ , associant à toute action  $a \in \mathcal{A}$  une utilité  $u_{A_t}(a)$ . L'utilité  $U_{A_t}$  associée à la variable aléatoire  $A$  est définie par :

$$U_{A_t} = \sum_{a \in \mathcal{A}} u_{A_t}(a) \mathbb{P}(A_t = a). \quad (3.2)$$

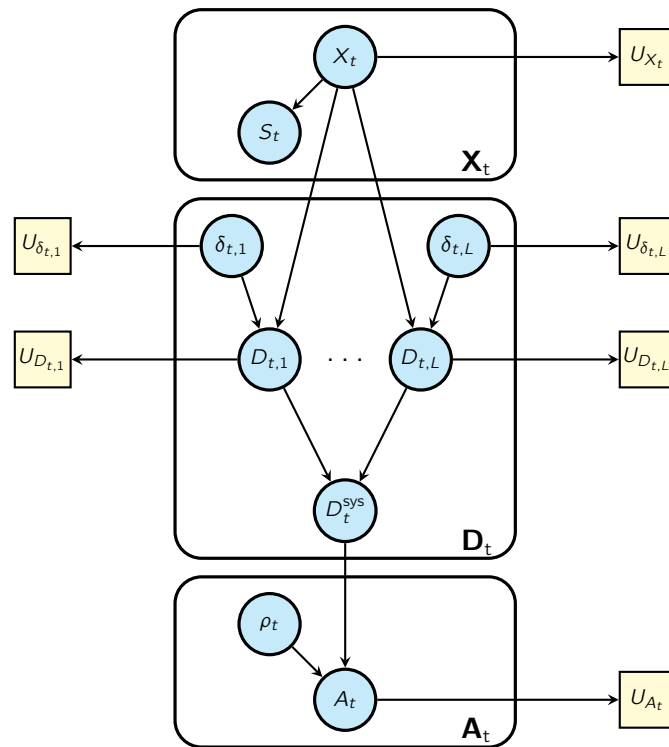


Figure 3.1 – Structure du RBD associé au modèle *VirMaLab* avec nœuds d'utilités

### 3.2.1.3 Utilité des diagnostics

Pour chaque système de diagnostic, le nœud  $U_{\delta_{t,l}}$  introduit une utilité liée à la réalisation du diagnostic, indépendamment du résultat fourni par ce dernier. Les nœuds  $U_{D_{t,l}}$  permettent eux de tenir compte du résultat d'un diagnostic pour le calcul de l'utilité associée. Ces nœuds sont notamment utiles lorsque le résultat d'un diagnostic nécessite une phase de confirmation.

Soit  $u_{\delta_{t,l}} \in \mathbb{R}$  une utilité associée à l'activation de la  $l$ -ième méthode de diagnostic. Pour tout  $l = 1 \dots L$ , l'utilité  $U_{\delta_{t,l}}$  associée à la variable  $\delta_{t,l}$  est définie par :

$$U_{\delta_{t,l}} = u_{\delta_{t,l}} \delta_{t,l}. \quad (3.3)$$

Dans cette définition, l'hypothèse prise implicitement est que l'utilité liée à la non-utilisation d'une méthode de diagnostic est nulle.

Soit  $u_{D_{t,l}}$  une fonction de  $\mathcal{D}_l$  dans  $\mathbb{R}$ , qui permet d'associer à tout résultat de diagnostic  $d_l \in \mathcal{D}_l$  une utilité  $u_{D_{t,l}}(d_l)$ . Pour tout  $l = 1 \dots L$ , l'utilité  $U_{D_{t,l}}$  associée à la  $l$ -ième méthode de diagnostic  $D_l$  est définie par :

$$U_{D_{t,l}} = \sum_{d_l \in \mathcal{D}_l} u_{D_{t,l}}(d_l) \mathbb{P}(D_{t,l} = d_l). \quad (3.4)$$

### 3.2.1.4 Fonction d'utilité

Une fois l'ensemble des utilités générées par le modèle, la fonction d'utilité qui permettra d'évaluer et de comparer des stratégies de maintenance n'est rien de plus qu'une combinaison du vecteur  $(U_{X_t}, U_{\delta_{t,1}} \dots U_{\delta_{t,l}}, U_{D_1} \dots U_{D_l}, U_{A_T})$ . Concrètement la fonction d'utilité, notée  $f^{util}$ , définit une manière de combiner les utilités de chaque composants du modèle.  $f^{util}$  peut par exemple être une somme, une moyenne, un maximum ou tout autre combinaison.

En notant  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{desc}, \mathcal{P}^{maint})$  l'ensemble des paramètres du modèle *VirMaLab* (dates d'activation des diagnostics, politique d'intervention, etc ...), une fonction d'utilité globale est définie mathématiquement par :

$$f^{util}(\mathcal{P}) = f^{util}((U_{X_t}(\mathcal{P}), U_{A_t}(\mathcal{P}), U_{D_t}(\mathcal{P}))_{1 \leq t \leq T}), \quad (3.5)$$

où

$$U_{D_t} = \sum_l U_{\delta_{t,l}} + U_{D_{t,l}}.$$

Il est important de noter que le calcul de l'utilité associée à une variable d'un réseau nécessite de connaître la distribution de cette variable. En effet, l'évaluation d'une fonction d'utilité nécessite le calcul au préalable, pour tout  $1 \leq t \leq T$ , des distributions suivantes :

- la distribution des états du système  $\lambda_t(x)$ ,
- les distributions des résultats des diagnostics  $(\mathbb{P}(D_{t,l}))_{1 \leq l \leq L}$ ,
- la distribution des actions de maintenance  $\mathbb{P}(A_t)$ .

## 3.2.2 Méthodes classiques d'inférence

### 3.2.2.1 Méthode de l'interface gauche

L'évaluation d'une stratégie de maintenance sur un horizon  $T$  dans un modèle *VirMaLab* se résume au calcul, pour tout  $t \in [1, T]$ , des distributions des variables  $X_t$ ,  $A_t$  et pour chaque méthode de diagnostic la distribution de  $D_{t,l}$ . En effet, une fois ces distributions déterminées, le calcul de fonction d'utilité s'effectue par un simple produit matriciel. Remarquons que l'utilité générée par l'activation des méthodes de diagnostic peut-être calculée directement, puisque les variables  $(\delta_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  ne possèdent pas de parents dans le modèle.

Posons  $\Delta(x, d) = \mathbb{P}(D_t^{sys} = d | X_t = x)$  la LPC définissant le résultat final du diagnostic en fonction de l'état du système  $x$ . La LPC  $\Delta$  est définie, pour tout  $x \in \mathcal{X}$  par :

$$\Delta(x, d) = \mathbb{P}(D_t^{sys} = d | X_t = x) = \sum_d \Delta^{sys}(d_1, \dots, d_l, d) \prod_{l=1}^L \Delta_l(x, d_l) \quad (3.6)$$

Pour simplifier l'écriture des expressions suivantes, la notation  $\Phi_t = \mathbb{P}(X_t, A_t)$  sera utilisée pour désigner la distribution de l'interface gauche de la tranche  $t + 1$ . En reprenant les notations introduites dans le chapitre précédent,  $\Phi_t$  est définie pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  et  $a \in \mathcal{A}$  par :

$$\Phi_t(\mathbf{x}, a) = \begin{cases} \lambda_1(x) \Gamma(a, d) \Delta(x, d) & \text{si } t = 1 \\ \Gamma(a, d) \Delta(x, d) \sum_{x' \in \mathcal{X}, a' \in \mathcal{A}} \Phi_{t-1}(\mathbf{x}', a') \Lambda(x, x', a') & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.7)$$

Il est intéressant de remarquer que le calcul de  $\lambda_t(x) = \mathbb{P}(X_t = x)$  est une étape intermédiaire dans le calcul de la distribution de l'interface  $\Phi_t$ . En effet,  $\lambda_t$  est définie pour tout  $t \leq T$  et tout  $x \in \mathcal{X}$  par :

$$\lambda_t(x) = \begin{cases} \lambda_1(x) & \text{si } t = 1 \\ \sum_{x' \in \mathcal{X}, a' \in \mathcal{A}} \Phi_{t-1}(x', a') \Lambda(x, x', a') & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.8)$$

D'autre part, la distribution de l'action de maintenance effectuée à l'instant  $t$  est calculée pour tout  $a \in \mathcal{A}$  en marginalisant  $\Phi_t$  sur  $x$ . La distribution  $\mathbb{P}(A_t)$  est définie pour tout  $t \leq T$  et tout  $a \in \mathcal{A}$  par :

$$\mathbb{P}(A_t = a) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \Phi_t(x, a). \quad (3.9)$$

Pour tout  $l = 1 \dots L$ , la distribution  $\mathbb{P}(D_{t,l})$  du résultat du  $l$ -ième diagnostic est obtenue par le produit des LPC  $\lambda$  et  $\Delta_{t,l}$ . Pour tout  $l = 1 \dots L$  et tout  $t \leq T$ ,  $\mathbb{P}(D_{t,l})$  est définie par :

$$\mathbb{P}(D_{t,l} = d_l) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} \lambda_t(x) \Delta_{t,l}(x, d_l) & \text{si } \delta_{t,l} = 1 \\ \mathbb{1}_{(l='na')} & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3.10)$$

A partir des résultats précédents, un algorithme d'évaluation d'une politique de maintenance peut être écrit. L'algorithme 4 présente une méthode générique et itérative pour évaluer une fonction d'utilité dans un modèle *VirMaLab*.

Dans le cas d'une utilisation des MGD pour représenter l'évolution de l'état du système, l'équation 3.7 définissant l'expression de l'interface  $\Phi_t$  se réécrit pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $s \in \mathcal{S}$  et  $a \in \mathcal{A}$  :

$$\Phi_t(x, s, a) = \begin{cases} \alpha_1(x) F_1(x, s) \Gamma(a, d) \Delta(x, d) & \text{si } t = 1 \\ \Gamma(a, d) \Delta(x, d) \sum_{\substack{x' \in \mathcal{X}, s' \in \mathcal{S} \\ a' \in \mathcal{A}}} \Phi_{t-1}(x', s', a') Q^\rightarrow(x, x', s', a') F^\rightarrow(x, s, s', a') & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.11)$$

**Algorithme 4** : Evaluation d'une fonction d'utilité d'un modèle *VirMaLab***Entrées** :

1.  $\mathcal{V} = (\lambda_1, \Lambda^{sys}, \Lambda^{act}, (\delta_{t,l})_{t \geq 1, 1 \leq l \leq L}, (\Delta_l)_{1 \leq l \leq L}, \Delta^{sys}, \Gamma)$  : Un ensemble de LPC définissant un modèle *VirMaLab*
2.  $T$  : l'horizon de calcul
3.  $((u_x)_{x \in \mathcal{X}}, (u_\delta)_{\delta \in \{0,1\}}, (U_{d_l})_{d_l \in \mathcal{D}_l}, (U_a)_{a \in \mathcal{A}})$  : des vecteurs définissant une utilité pour chaque valeur des variables  $X_t, \delta_{t,l}, D_{t,l}$  et  $A_t$
4.  $f^{util}$  : une fonction d'utilité

**Sorties** :  $f^{util}(\mathcal{P})$  : l'évaluation d'une stratégie de maintenance

**pour chaque**  $t = 1, \dots, T$  **faire**

Calculer  $\Phi_t$  (équation 3.7) ;  
Calculer  $\lambda_t(x)$  (équation 3.8) ;  
En déduire  $U_{X_t}$  (équation 3.1) ;

**pour**  $l = 1, \dots, L$  **faire**

Calculer  $U_{\delta_{t,l}}$  (équation 3.3) ;  
Calculer  $\mathbb{P}(D_{t,l})$  (équation 3.10) ;  
En déduire  $U_{D_{t,l}}$  (équation 3.4) ;

**finpour**

Calculer  $\mathbb{P}(A_t)$  (équation 3.9) ;  
En déduire  $U_{A_t}$  (équation 3.2) ;

**finprch**

Evaluer  $f^{util}((U_{X_t}, U_{D_t}, U_{A_t})_{1 \leq t \leq T})$  ;

**3.2.2.2 Méthode à complexité réduite**

En utilisant les définitions par morceaux de  $Q^\rightarrow$  et  $F^\rightarrow$  données par les équations 2.25 et 2.26, [Donat 2010] propose une manière simplifiée pour le calcul de la distribution de l'interface  $\Phi_t$  définie par l'équation 3.11. Le calcul de  $\Phi_t$  se réécrit, pour tout  $t \geq 2$  tout  $x \in \mathcal{X}$  tout  $s \in \mathcal{S}$  et tout  $a \in \mathcal{A}$  comme suit :

$$\Phi_t(x, s, a) = \left[ \Psi_t^{sys}(x, s) + \Psi_t^{det}(x, s) + \Psi_t^{act}(x, s) \right] \Gamma(a, d) \Delta(x, d), \quad (3.12)$$

avec

$$\Psi_t^{sys}(x, s) = \sum_{x'} \Phi_{t-1}(x', 1, a_\emptyset) Q^{sys}(x, x') F^{sys}(x, s), \quad (3.13)$$

$$\Psi_t^{det}(x, s) = \Phi_{t-1}(x, s+1, a_\emptyset), \quad (3.14)$$

et

$$\Psi_t^{act}(x, s) = F^{sys}(x, s) \sum_{x', d'} Q^{act}(x, x', a') \sum_{s'} \Phi_{t-1}(x', s', a'), \quad (3.15)$$

La démonstration de ces résultats peut être effectuée en découpant la somme définie dans le calcul de  $\Phi_t$  et en procédant par disjonction de cas. Cette astucieuse

réorganisation de la somme permet de réduire la complexité algorithmique du calcul de l'interface  $\Phi_t$  pour une tranche de temps  $t \geq 2$ . En effet, La complexité algorithmique du calcul de l'interface  $\Phi_t$  est  $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_s^2|\mathcal{A}|)$  en utilisant l'expression de l'équation 3.11. Tandis que l'expression de  $\Phi_t$  définie par l'équation 3.12 permet d'avoir une complexité algorithmique en  $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_s|\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|)$ . Reste que le coût calculatoire de l'algorithme 4 est lourd.

### 3.3 Méthode d'inférence symbolique

L'idée principale de cette nouvelle méthode est d'utiliser l'inférence symbolique dans les réseaux bayésiens pour déterminer les expressions algébriques des distributions  $\mathbb{P}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  et  $\mathbb{P}(A_t)$  en fonction des LPC de l'ensemble de variables  $I_{t-1}^{\rightarrow}/\{A_{t-1}\} \cup \mathcal{X}^{dec}$ , où  $\mathcal{X}^{dec}$  représente l'ensemble des variables de décision du modèle. Les expressions ainsi obtenues sont des polynômes qui permettent de réduire considérablement la complexité algorithmique de la méthode d'évaluation d'une stratégie de maintenance présentée dans la section précédente.

#### 3.3.1 Transformation en expression algébrique

La nouvelle méthode d'évaluation proposée se compose de deux étapes. La première consiste à déterminer les différentes expressions algébriques des distributions cibles, c'est à dire  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$ . L'algorithme 5 présente la méthodologie pour obtenir les différentes expressions algébriques. Concrètement ces expressions sont obtenues en effectuant une inférence symbolique avec un horizon  $T = 2$ . Dans l'algorithme,  $\Theta_t$  représente un vecteur contenant l'ensemble des paramètres des LPC des variables de l'interface  $I_{t-1}^{\rightarrow}/\{A_{t-1}\} \cup \mathcal{X}^{desc}$ . Concrètement,  $\Theta_t$  est un vecteur de paramètres de taille

$$n = |\mathcal{X}| - 1 + 2|\mathcal{X}|(T_s - 1) + 2^L, \quad (3.16)$$

qui définit entièrement les LPC des variables  $X_1$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $(\delta_{1,l})_{1 \leq l \leq L}$ .

Pour rappel, les notations  $\lambda_1$ ,  $F_1$  et  $F^{\rightarrow}$  ont été introduites dans le chapitre 2 pour représenter respectivement les LPC des variables  $X_1$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ . Ces notations seront de nouveau utilisées ici.

Les distributions des variables de diagnostic  $D_{t,1} \dots D_{t,L}$  en fonction de  $\Theta_t$  sont obtenues pour tout  $l = 1 \dots L$  par :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l}) = \sum_{X_t, \delta_{t,l}} \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_t) \mathbb{P}(\delta_{t,l}) \mathbb{P}(D_{t,l}|X_t, \delta_{t,l}). \quad (3.17)$$

A partir de ce résultat et du théorème 1, il est possible de déduire que pour tout résultat de diagnostic  $d_l \in \mathcal{D}$ , la probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_l = d_l)$  est un polynôme multivarié

---

**Algorithme 5** : Calcul des expressions analytiques des distributions  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  dans un modèle *VirMaLab*

---

**Entrées** :  $\mathcal{V} = (\lambda_1, \Lambda^{sys}, \Lambda^{act}, (\delta_{t,l})_{t \geq 1, 1 \leq l \leq L}, (\Delta_l)_{1 \leq l \leq L}, \Delta^{sys}, \Gamma)$  : Un ensemble de LPC définissant un modèle *VirMaLab*

**Sorties** :  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  : Distribution de probabilité en fonction de  $\Theta_t$

**début**

Poser  $\Theta_t$  ;

**pour**  $l = 1 \dots L$  **faire**

  Calculer  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})$  (équation 3.17)

**finpour**

Calculer  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  (équation 3.21);

Calculer  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$  (équation 3.22);

En déduire  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$  (équation 3.23);

**fin**

---

de degré inférieur ou égal à 2 avec comme inconnues les paramètres associés aux LPC de  $X_1$  et  $\delta_{t,l}$ . En d'autres termes, le nombre maximum d'inconnues qui apparaissent dans l'expression de la probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_l = d_l)$  est  $|\mathcal{X}|$ .

Soit  $\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$  avec  $m = |\mathcal{X}|$  les paramètres de  $\Theta_t$  associés à la LPC de  $X_1$ . La forme générale de l'expression de la probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_l = d_l)$  pour  $d_l \in \mathcal{D}$  est :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_l = d_l) = \delta_l \left( a_{(l,0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{(l,i)} \alpha_i) \right) + (1 - \delta_l), \quad (3.18)$$

où les  $a_{(l,0)}, a_{(l,1)} \dots a_{(l,m-1)}$  sont des coefficients réels dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

En posant  $a'_{(l,0)} = a_{(l,0)} - 1$  l'équation précédente se ré-écrit :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_l = d_l) = \delta_l \left( a'_{(l,0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{(l,i)} \alpha_i) \right) + 1, \quad (3.19)$$

En se référant aux résultats sur les polynômes présentés dans le chapitre F (en Annexe), il est possible d'en déduire que le nombre maximum de monômes intervenant dans ce polynôme est :

$$M_{\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_l=d_l)} = m + 1 = |\mathcal{X}| + 1 \quad (3.20)$$

La distribution de la variable  $A_t$  en fonction de  $\Theta_t$  est calculée à partir de l'expression suivante :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t) = \sum_{D_{t,1} \dots D_{t,l}, D_t^{sys}} \mathbb{P}(A_t | D_t^{sys}) \mathbb{P}(D_t^{sys} | D_{t,1} \dots D_{t,L}) \prod_{l=1}^L \mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l}). \quad (3.21)$$

D'après le théorème 1, l'expression de cette distribution est un polynôme multivarié de degré inférieur ou égale à  $L + 1$  avec comme inconnues les paramètres associés



aux LPC de  $X_1$  et  $(\delta_{t,i})_{1 \leq i \leq L}$ . En d'autre termes, le nombre maximum d'inconnues qui apparaissent dans l'expression de la probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = a)$  est  $|\mathcal{X}| + L - 1$ . D'autre part, le nombre maximum de monômes intervenant dans l'écriture de ce polynôme est  $2^L$ .

En reprenant les notations précédemment introduites, pour une action  $a \in \mathcal{A}$  quelconque la probabilité de cette action s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = a) &= a_{(a,0)} + a_{(a,1)} \delta_1 \left( a'_{(1,0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{(1,i)} \alpha_i) \right) + \cdots + a_{(a,L)} \delta_L \left( a'_{(L,0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{(L,i)} \alpha_i) \right) \\ &+ a_{(a,L+1)} \delta_1 \delta_2 \left( a'_{(1,0)} a'_{(2,0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{(1,i)} a_{(2,i)} \alpha_i) \right) + \cdots + a_{(a,2L)} \delta_1 \delta_L \left( a'_{(1,0)} a'_{(L,0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{(1,i)} a_{(L,i)} \alpha_i) \right) \\ &\vdots \\ &+ a_{(a,2^L-1)} \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_L \left( a'_{1,0} \cdots a'_{L,0} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_{1,i} \cdots a_{L,i} \alpha_i) \right), \end{aligned}$$

où les  $a_{(a,0)}, a_{(a,1)} \cdots a_{(a,2^L-1)}$  sont des coefficients réels dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

La distribution jointe des variables  $X_{t+1}$  et  $S_{t+1}$  en fonction de  $\Theta_t$  est obtenue à partir de l'action de maintenance effectuée, de l'état du système à l'instant  $t$  et de la matrice de transition du système. L'équation suivante traduit le calcul de cette distribution :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1}) = \sum_{A_t} \mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t) \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_t) \mathbb{P}_{\Theta_t}(S_t | X_t) \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1} | X_t, S_t, A_t). \quad (3.22)$$

L'expression de cette probabilité est un polynôme multivarié de degré inférieur ou égale à  $L + 4$  avec comme inconnues les paramètres associés aux LPC de  $X_1$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $(\delta_{t,i})_{1 \leq i \leq L}$ . En d'autre termes, le nombre maximum d'inconnues qui apparaissent dans l'expression de la probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = a)$  est  $|\mathcal{X}| + 2T_S(|\mathcal{X}| - 1) + L - 1$ . D'autre part, le nombre maximum de monômes intervenant dans l'écriture de ce polynôme est  $2^L$ .

La distribution de la variable  $X_{t+1}$  en fonction de  $\Theta_t$  est obtenue en marginalisant la distribution  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$  sur la variable  $S_{t+1}$  :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}) = \sum_{S_{t+1}} \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1}). \quad (3.23)$$

### 3.3.2 Évaluation à partir d'expressions symboliques

La seconde partie de la méthode d'évaluation consiste à utiliser ces expressions de manière récursive pour calculer les distributions cibles sur un horizon  $T$  donné.

L'algorithme 6 résume le processus d'évaluation d'une stratégie de maintenance dans un modèle *VirMaLab* à partir des expressions analytiques des distributions  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  en fonction de  $\Theta_t$ .

---

**Algorithme 6** : Évaluation d'une fonction d'utilité dans un modèle *VirMaLab* à partir des expressions algébriques des distributions sur un horizon  $T$

---

**Entrées** :

- $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  : Distributions de probabilité en fonction de  $\Theta_t$
- $T$  : Horizon de calcul
- $(\lambda_1, F_1, F^{\rightarrow}, Q^{\rightarrow})$  : Distributions initiales et de transition du MGD
- $((u_x)_{x \in \mathcal{X}}, (u_\delta)_{\delta \in \{0,1\}}, (U_{d_l})_{d_l \in \mathcal{D}_l}, (U_a)_{a \in \mathcal{A}})$  : Vecteurs définissant une utilité pour chaque valeur des variables  $X_t$ ,  $\delta_{t,l}$ ,  $D_{t,l}$  et  $A_t$
- $f^{util}$  : une fonction d'utilité

**Sorties** :  $f^{util}(\mathcal{P})$  : Évaluation d'une stratégie de maintenance  
**début**

Poser  $\Theta_1$  en fonction des LPC  $\lambda_1, F_1$  et  $F^{sys}$ ;

**pour**  $l = 1, \dots, L$  **faire**

    Calculer  $U_{\delta_{t,l}}$  (équation 3.3) ;

    Calculer  $\mathbb{P}(D_{t,l})$  (équation 3.10) ;

    En déduire  $U_{D_{t,l}}$  (équation 3.4) ;

**finpour**

**pour**  $i = 2 \dots T$  **faire**

    Calculer  $\mathbb{P}(A_t)$  ;

    En déduire  $U_{A_t}$  (équation 3.2) ;

    Calculer  $\mathbb{P}(X_{t+1})$  En déduire  $U_{X_t}$  (équation 3.1) ;

    Calculer  $\mathbb{P}(X_{t+1}, S_{t+1})$  ;

    Déduire de  $\mathbb{P}(X_{t+1})$  et  $\mathbb{P}(X_{t+1}, S_{t+1})$  les valeurs de  $\Theta_t$  (équation 3.24) ;

**finpour**

Évaluer  $f^{util}((U_{X_t}, U_{D_t}, U_{A_t})_{1 \geq t \geq T})$  ;

**fin**

---

Pour un instant  $t$  donné, les résultats numériques des distributions de probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  sont obtenus en remplaçant l'ensemble des inconnues du vecteur  $\Theta_t$  par les valeurs numériques correspondantes. À partir de ces distributions, il est possible de déterminer les valeurs du vecteur  $\Theta_{t+1}$ . Ces deux opérations sont ré-itérées jusqu'à ce que l'ensemble des distributions pour  $t = 1 \dots T$  aient été déterminées.

Pour obtenir  $\Theta_{t+1}$  à partir de l'ensemble des distributions précédemment citées, il faut établir les LPC  $\lambda_{t+1}$ ,  $F_{t+1}$  et  $F^{\rightarrow}$ . La LPC  $\lambda_{t+1}$  est obtenue directement à partir

de la distribution  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ . La LPC  $F_{t+1}$  est déterminée à partir des distributions  $\mathbb{P}(X_{t+1}, S_{t+1})$  et  $\mathbb{P}(X_{t+1})$  de la manière suivante :

$$F_{t+1} = \mathbb{P}(S_{t+1}|X_{t+1}) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X_{t+1}, S_{t+1})}{\mathbb{P}(X_{t+1})} & \text{si } \mathbb{P}(X_{t+1}) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3.24)$$

La LPC  $F^{\rightarrow}$  reste identique tout au long de l'inférence.

### 3.3.3 Cas d'étude applicatif

#### 3.3.3.1 Description du système

Le système considéré ici est une barrière automatique d'accès au parking d'un magasin possédant trois états de fonctionnement. Dans l'état normal, le système distribue un ticket à l'utilisateur puis autorise le passage. Quand le système ne peut pas distribuer de ticket, il fonctionne en mode dégradé. La barrière est en panne quand elle n'est pas en mesure d'autoriser le passage.

Dans cet exemple, le système est modélisé par un couple de variables  $X_t$  et  $S_t$  représentant respectivement l'état du système et le temps restant à passer dans cet état à l'instant  $t$ , exprimé en jours. L'ensemble des états de fonctionnement est noté  $\mathcal{X} = \{\text{ok}, \text{deg}, \text{panne}\}$ . L'ensemble des valeurs possibles pour la variable de temps de séjour  $S_t$  est noté  $\mathcal{S}$ . Dans un premier temps l'ensemble  $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ , pour avoir des expressions de tailles raisonnables et ainsi faciliter leurs écritures dans ce manuscrit qui puissent être facilement. Dans la pratique la borne supérieure  $T_S$  des temps de séjour est bien supérieure. Le choix  $T_S = 3$  dans cet exemple, Les états du système sont ordonnés par ordre de gravité croissante ( $\text{ok} \prec \text{deg} \prec \text{panne}$ ).

Le système peut être ausculté par deux méthodes de diagnostic. La première méthode  $D_{t,1}$  permet de détecter l'état panne de manière certaine. La seconde notée  $D_{t,2}$  permet de détecter l'état de dégradation du système précurseur de la panne. L'activation de l'une ou de l'autre des méthodes de diagnostic, à un instant  $t$ , est commandée par les variables de décision  $\delta_{t,1}$  et  $\delta_{t,2}$  à valeur dans  $\{\text{active}, \text{inactive}\}$ .

La figure 3.2 présente la structure du modèle *VirMalab* pour la modélisation du système et de sa stratégie de maintenance. La variable  $A_t$  représente l'action de maintenance effectuée à l'instant  $t$ .

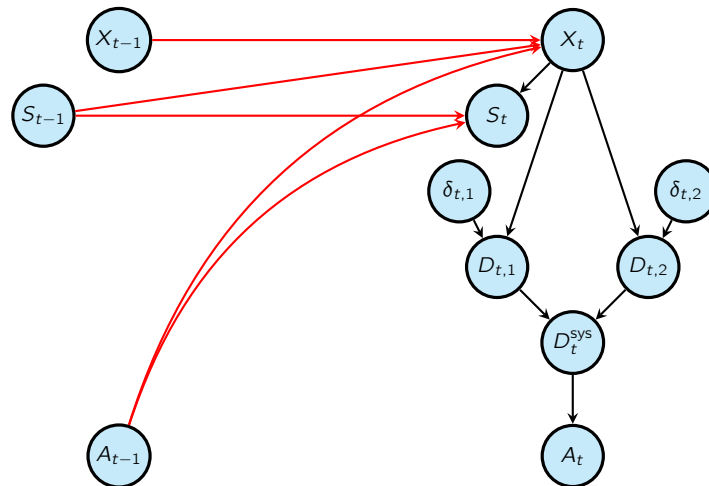


Figure 3.2 – Structure du modèle *VirMaLab* associé au système d'une barrière automatique

Si la variable  $\delta_{t,l}$  de contrôle de la méthode de diagnostic  $l \in \{1, 2\}$  prend la valeur 'inactive' alors le résultat du test est 'na' (pour non activé). Dans le cas contraire le résultat dépend de l'état du système et des taux de fausse alarme et bonne détection du système de diagnostic. Les LPC données dans la table 3.1 décrivent les comportements des deux méthodes de diagnostic en fonction des variables d'activation  $\delta_{t,1}$  et  $\delta_{t,2}$  et de l'état du système.

**Table 3.1** LPC des méthodes de diagnostic  $D_{1,1}$  et  $D_{1,2}$

		$\mathbb{P}(D_{1,2} X_1, \delta_{1,1})$					$\mathbb{P}(D_{1,2} X_1, \delta_{1,2})$		
		Résultat					Résultat		
X	$\delta_{1,1}$	na	ok	def	X	$\delta_{1,2}$	na	ok	def
ok	inactive	1	0	0	ok	inactive	1	0	0
deg	inactive	1	0	0	deg	inactive	1	0	0
panne	inactive	1	0	0	panne	inactive	1	0	0
ok	active	0	1	0	ok	active	0	1	0
deg	active	0	1	0	deg	active	0	0.2	0.8
panne	active	0	0	1	panne	active	0	1	0

La politique de fusion des résultats des deux méthodes de diagnostic est définie de manière à réduire le risque d'erreur de non détection d'un défaut. Pour que l'exemple reste simple le résultat des diagnostics sont indifférenciés dans cette politique. Le résultat retenu pour le diagnostic final est celui dont la criticité est la plus élevée. La LPC de la variable  $D_t^{sys}$  décrite ci-dessous permet de traduire cela sous une forme probabiliste.

		$\mathbb{P}(D_t^{\text{sys}} D_{t,1}, D_{t,2})$		
		Résultat final		
$D_{t,1}$	$D_{t,2}$	na	ok	def
na	na	1	0	0
ok	na	0	1	0
def	na	0	0	1
na	ok	0	1	0
ok	ok	0	1	0
def	ok	0	0	1
na	def	0	0	1
ok	def	0	0	1
def	def	0	0	1

À chaque instant  $t \geq 2$ , l'état du système  $X_t$  dépend de l'action de maintenance  $A_{t-1}$  sélectionnée à l'instant précédent, de l'état précédent  $X_{t-1}$  et du temps restant à passer dans cet état  $S_{t-1}$ . La réparation a pour effet de remettre le système à neuf quel que soit son état précédent.

			$\mathbb{P}(X_t X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$		
			État		
$X_{t-1}$	$S_{t-1}$	$A_{t-1}$	ok	deg	panne
ok	1	rien	0	1	0
deg	1	rien	0	0	1
panne	1	rien	0	0	1
ok	2	rien	1	0	0
deg	2	rien	0	1	0
panne	2	rien	0	0	1
ok	3	rien	1	0	0
deg	3	rien	0	1	0
panne	3	rien	0	0	1
*	*	rep	1	0	0

Il s'agit enfin de définir la politique d'action de maintenance, c'est à dire l'opération de maintenance en fonction du résultat du diagnostic final. La LPC de la variable  $A_t$  donnée ci-dessous, traduit de manière probabiliste la politique d'action choisie.

		$\mathbb{P}(A_t D_t^{\text{sys}})$	
		Action	
$D_t^{\text{sys}}$		rien	rep
na		1	0
ok		1	0
def		0	1

## 3.3.3.2 Utilités

L'objectif de cette partie est de construire une fonction d'utilité permettant d'évaluer la politique de maintenance du système. Les utilités qui seront définies dans cet exemple sont homogènes à des grandeurs économiques. Une utilité négative correspondra à un coût et une utilité positive correspondra à un bénéfice. Les paragraphes suivants définissent les utilités associées à chacune des variables du modèle.

Dans un premier temps, définissons l'utilité relative à l'état du système. Pour ce faire, nous considérons que l'état de fonctionnement de la barrière influe directement sur le chiffre d'affaire du magasin. Si la barrière fonctionne correctement le gain est estimé à 40€. Si le système est en mode dégradé, c'est à dire qu'il ne distribue pas de ticket, alors l'utilisateur ne payera pas sa place de parking, le gain pour le magasin est réduit à 30€. Dans le cas d'une panne de la barrière le manque à gagner pour le magasin est estimé à 50€. Numériquement, l'utilité du système par unité de temps relativement à son état est caractérisée par la fonction  $u_{X_t}$  suivante :

$X_t$	ok	deg	panne
$u_{X_t}$	40	30	-50

Concernant les méthodes de diagnostic, seule leur activation engendre un coût. La méthode 1 étant plus complexe que la méthode 2 son coût est plus élevé. Les utilités relatives aux activations des méthodes de diagnostic sont définies par  $u_{\delta_{t,1}}$  et  $u_{\delta_{t,2}}$  :

$\delta_{t,1}$	active	inactive	$\delta_{t,2}$	active	inactive
$u_{\delta_{t,1}}$	0	-5	$u_{\delta_{t,2}}$	0	-2

Dans cet exemple, nous n'introduisons pas d'utilité relative aux résultats des diagnostics. Autrement dit, quel que soit le résultat des diagnostics  $D_{t,1}$  et  $D_{t,2}$  les utilités  $u_{D_{t,1}}$  et  $u_{D_{t,2}}$  sont nulles. Enfin, le coût d'une intervention sur le système est de 25€. L'utilité  $u_{A_t}$  par unité de temps de l'action de maintenance est :

$A_t$	rien	rep
$u_{A_t}$	0	-25

Les utilités  $U_{X_t}$ ,  $U_{\delta_{t,1}}$ ,  $U_{\delta_{t,2}}$  et  $U_{A_t}$  induites par le système et sa stratégie de maintenance sont calculées à chaque instant  $t$  comme suit :

- $U_{X_t} = \sum_{x \in \mathcal{X}_t = \mathcal{S}} \mathbb{P}(X) u_X(x)$  pour l'utilité du système
- $U_{\delta_{t,1}} = \delta_{t,1} u_{\delta_{t,1}}$  et  $U_{\delta_{t,2}} = \delta_{t,2} u_{\delta_{t,2}}$  pour les utilités des méthodes de diagnostics
- $U_{A_t} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A_t = a) u_A(a)$  pour l'utilité de l'action de maintenance

La fonction objectif, qui sera utilisée dans la suite de cet exemple, est une utilité totale moyenne sur un horizon temporel  $T$  :

$$f^{\text{util}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [U_{X_t} + U_{\delta_{t,1}} + U_{\delta_{t,2}} + U_{A_t}]. \quad (3.25)$$

### 3.3.3.3 Expressions algébriques

Dans cette section, les expressions algébriques des distributions  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1}, S_{t+1})$ ,  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t)$  et  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,l})_{1 \leq l \leq L}$  sont calculées en appliquant l'algorithme 5. Pour faciliter la lecture du document, les expressions obtenues sont simplifiées. Si le lecteur le souhaite, il pourra se référer à le chapitre B (en annexe) pour avoir le détail des calculs.

Notons, que la simplification et la factorisation des expressions algébriques permettent également de réduire le nombre d'opérations effectuées dans la phase d'évaluation de ces expressions.

Il n'existe pas d'algorithme pour transformer les expressions en garantissant un nombre d'opérations minimum. Cependant, certaines méthodes approchées permettent d'avoir des solutions convenable. Par exemple, [Ceberio 2004] propose une adaptation du schéma d'Horner pour l'évaluation des polynômes multivariés. D'autre part, [Peña 2000] se base sur une décomposition en polynômes irréductibles pour réduire le nombre de multiplications. Le détail de ces algorithmes est donné dans le chapitre annexe B.

Définissons  $\Theta_T = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, d_1, d_2)$  un vecteur de paramètres tel que les LPC des variables  $X_1$ ,  $S_1$ ,  $\delta(1, 1)$  et  $\delta(1, 2)$  soient définies comme indiqué dans la table 3.2.

Le résultat du diagnostic  $D_{t,1}$  en fonction du vecteur de paramètre  $\Theta_t$  est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,1} = 'na') &= (1 - d_1), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,1} = 'ok') &= d_1 (\alpha_1 + \alpha_2), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,1} = 'def') &= d_1 (1 - \alpha_1 + \alpha_2).\end{aligned}\tag{3.26}$$

La distribution du résultat du diagnostic  $D_{t,2}$  en fonction de  $\Theta_t$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,2} = 'na') &= (1 - d_2), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,2} = 'ok') &= d_2 (1 - 0.8 \alpha_2), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(D_{t,2} = 'def') &= 0.8 d_2 \alpha_2.\end{aligned}\tag{3.27}$$

La probabilité d'effectuer ou pas une action de maintenance à l'instant  $t$  en fonction de  $\theta_t$  est définie par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = 'rien') &= -(1 - d_1 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) (1 - 0.8 \alpha_2 d_2), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = 'rep') &= 1 + (1 - d_1 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) (1 - 0.8 \alpha_2 d_2).\end{aligned}\tag{3.28}$$

**Table 3.2** LPC paramétrées des variables  $X_1$ ,  $S_1$ ,  $\delta(1, 1)$  et  $\delta(1, 2)$ 

$\mathbb{P}(X_1)$			$\mathbb{P}(S_1 X_1)$			
État			Temps de séjour			
ok	deg	panne	X	1	2	3
$\alpha_1$	$\alpha_2$	$1 - \alpha_1 - \alpha_2$	ok	$\beta_{11}$	$\beta_{12}$	$1 - \beta_{12} - \beta_{11}$
			deg	$\beta_{21}$	$\beta_{22}$	$1 - \beta_{22} - \beta_{21}$
			panne	1	0	0

$\mathbb{P}(\delta_{1,1})$		$\mathbb{P}(S_t X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$					
Activation		Temps de séjour					
active	inactive	$X_{t-1}$	$S_{t-1}$	$A_{t-1}$	1	2	3
$d_1$	$1 - d_1$	x1	1	rien	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$1 - \gamma_{11} - \gamma_{12}$
		x2	1	rien	$\gamma_{21}$	$\gamma_{22}$	$1 - \gamma_{21} - \gamma_{22}$
		x3	1	rien	1	0	0
		x1	2	rien	1	0	0
		x2	2	rien	1	0	0
		x3	2	rien	1	0	0
		x1	3	rien	0	1	0
		x2	3	rien	0	1	0
		x3	3	rien	1	0	0
		*	*	rep	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$1 - \gamma_{11} - \gamma_{12}$

$\mathbb{P}(\delta_{1,2})$	
Activation	
active	inactive
$d_2$	$1 - d_2$

Pour simplifier l'écriture des expressions des distributions suivantes, nous noterons  $e_1$  la sous-expression égale à la probabilité qu'aucune action de maintenance ne soit réalisée à l'instant  $t$ . Concrètement  $e_1$  est définie par :

$$e_1 = \mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rien'}) \\ = -(1 - d_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2))(1 - 0.8\alpha_2 d_2). \quad (3.29)$$

La distribution de l'état  $X_{t+1}$  du système à l'instant  $t + 1$  en fonction de  $\Theta_t$  est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'ok'}) &= 1 - e_1(1 - \alpha_1(1 - \beta_{11})) \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'deg'}) &= e_1((1 - \beta_{21})\alpha_2 + \alpha_1\beta_{11}) \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'panne'}) &= e_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2(1 - \beta_{21})). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les dernières expressions à déterminer sont celles de la distribution jointe des variables  $X_{t+1}$  et  $S_{t+1}$  en fonction de  $\Theta_t$ . Les trois expressions suivantes donnent la



valeur de cette distribution dans le cas où le système est dans l'état 'ok' à l'instant  $t + 1$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'ok'}, S_{t+1} = 1) &= (1 - e_1) \gamma_{11} + e(\alpha_1 \beta_{12}), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'ok'}, S_{t+1} = 2) &= (1 - e_1) \gamma_{12} + e \alpha_1 (1 - \beta_{11} - \beta_{12}), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'ok'}, S_{t+1} = 3) &= (1 - e_1) (1 - \gamma_{12} - \gamma_{11}).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Si le système est dans l'état 'def' à l'instant  $t + 1$ , la probabilité jointe de  $X_{t+1}$  et  $S_{t+1}$  est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'def'}, S_{t+1} = 1) &= e_1 (\alpha_2 \beta_{22} + \alpha_1 \beta_{11} \gamma_{21}), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'def'}, S_{t+1} = 2) &= e_1 (\alpha_2 (1 - \beta_{21} - \beta_{22}) + \alpha_1 \beta_{11} \gamma_{22}), \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'def'}, S_{t+1} = 3) &= e_1 \alpha_1 \beta_{11} (1 - \gamma_{21} + \gamma_{22})\end{aligned}\quad (3.32)$$

Dans le cas où le système est en panne à l'instant  $t + 1$ , la distribution de  $X_{t+1}$  et  $S_{t+1}$  est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'panne'}, S_{t+1} = 1) &= e_1 (\alpha_2 \beta_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'panne'}, S_{t+1} = 2) &= 0 \\ \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'panne'}, S_{t+1} = 3) &= 0\end{aligned}\quad (3.33)$$

### 3.3.3.4 Quelques résultats

Dans les paragraphes suivants, nous illustrerons l'utilisation des expressions algébriques pour évaluer l'utilité  $U_t$  à un instant  $t$ . Pour ce faire, la première itération de l'algorithme 6 sera exécutée. Définissons les valeurs numériques du vecteur initial de paramètres  $\Theta_1$  comme suit :

$$\begin{aligned}\Theta_7 &= (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, d_1, d_2) \\ \Theta_1 &= (0.9 \quad 0.1 \quad 0.10 \quad 0.80 \quad 0.50 \quad 0.40 \quad 0.10 \quad 0.80 \quad 0.50 \quad 0.40 \quad 1 \quad 1)\end{aligned}$$

Les distributions  $\mathbb{P}(D_{t,1})$ ,  $\mathbb{P}(D_{t,2})$ ,  $\mathbb{P}(A_t)$ ,  $\mathbb{P}(X_{t+1})$  et  $\mathbb{P}(X_{t+1}, S_{t+1})$  pour  $t = 1$  sont obtenues par substitution des valeurs des éléments de  $\Theta_t$  dans les expressions algébriques 3.26, 3.27, 3.28, 3.30 et 3.31. La table 3.3 présente les résultats obtenues pour toutes ces distributions.

**Table 3.3** Évaluation des distributions des variables  $D_{1,1}$ ,  $D_{1,2}$ ,  $A_1$ ,  $X_2$  et  $(X_2, S_2)$  avec  $\Theta_t = (0.9, 0.1, 0.10, 0.80, 0.50, 0.40, 0.10, 0.80, 0.50, 0.40, 1, 1)$

$\mathbb{P}(D_{1,1})$			$\mathbb{P}(D_{1,1})$			$\mathbb{P}(A_1)$		$\mathbb{P}(X_2)$		
na	ok	def	na	ok	def	rien	rep	ok	deg	panne
0	0.92	0.08	0	1	0	0.92	0.08	0.83	0.10	0.07

$\mathbb{P}(X_2, S_2)$									
$X_2$	ok			deg			panne		
$S_2$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	0.42	0.39	0.01	0.08	0.01	0.01	0.07	0.00	0.00

A partir de ces distributions les nouvelles valeurs du vecteur de paramètres  $\Theta_t$  pour  $t = 2$  sont déterminées :

$$\begin{aligned} \Theta_t &= (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, d_1, d_2) \\ \Theta_2 &= (0.83, 0.10, 0.51, 0.47, 0.77, 0.14, 0.10, 0.80, 0.50, 0.40, 0, 0) \end{aligned}$$

Considérons que l'activation des méthodes de diagnostic s'effectue avec une période  $\pi_1$  pour la méthode 1 et une période  $\pi_2$  pour la méthode 2. Le tableau suivant présente l'utilité moyenne journalière (equation 3.25) calculée sur un horizon  $T = 20$  jours pour l'ensemble des solutions envisageables, c'est-à-dire  $\pi_1$  et  $\pi_2$  compris entre 1 et 6 jours :

**Table 3.4** Utilité moyenne journalière en fonction des périodes d'auscultation

$\pi_1$ (en jours)	$\pi_2$ (en jours)					
	1	2	3	4	5	6
1	4.76	3.55	3.99	3.18	2.15	2.42
2	4.22	2.67	2.70	2.16	0.14	0.54
3	4.58	0.81	<b>5.69</b>	-0.03	-1.02	-0.89
4	2.53	1.40	0.50	1.92	-3.69	-2.19
5	1.49	-0.92	0.92	-2.95	-0.29	2.40
6	2.02	-1.79	2.90	-1.19	-1.71	-0.28

Les résultats présentés permettent de conclure que la meilleure politique de maintenance pour ce système est d'effectuer tous les 3 jours une inspection avec les deux méthodes de diagnostic.

La figure 3.3 établit un comparatif des temps de calcul en fonction de l'horizon

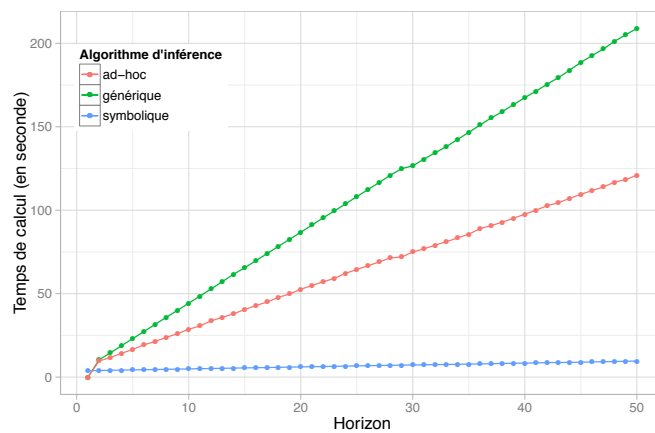


Figure 3.3 – Temps moyens de calcul de la table 3.4 en fonction de l'horizon et de l'algorithme d'inférence utilisé

et de l'algorithme d'inférence utilisé. L'ordinateur utilisé pour ces tests est équipé d'un processeur Intel Xeon W3550 Quad Core cadencé à 3,07 Ghz et de 12 Go de mémoire vive. Le temps de calcul avec l'algorithme à base d'inférence symbolique inclue le temps de création et de simplification des expressions symboliques qui est d'environ 3,77 secondes pour  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{S}| = 3$  et  $|\mathcal{A}| = 2$ .

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre présente une méthodologie pour l'évaluation de stratégies de maintenance dans le cadre d'une modélisation suivant l'approche *VirMaLab*. Cette méthodologie passe par la construction d'une fonction d'utilité. Il s'agit dans un premier temps de définir des utilités pour chaque état du système et pour chaque opération de maintenance. Différentes méthodes d'agrégation de ces dernières sur l'horizon temporel d'évaluation  $T$  sont proposées pour la construction d'une fonction d'utilité.

D'autre part, l'évaluation d'une politique de maintenance nécessite de calculer les distributions probabilistes décrivant l'état du système et la stratégie de maintenance. Trois méthodes d'inférence ont été proposées pour calculer ces distributions. La première méthode consiste à appliquer l'algorithme de l'interface présenté dans le chapitre 1. Une première amélioration est apportée à cette méthode d'inférence en tenant compte du caractère déterministe par morceaux de certaines LPC du modèle *VirMaLab*. La seconde proposition d'amélioration consiste à transformer le modèle en expressions algébriques simplifiées et à les évaluer par la suite.

Bien qu'il soit difficile d'évaluer l'apport de cette nouvelle méthode sur la complexité algorithmique, dans la pratique les temps de calcul sont considérablement réduits. L'exemple proposé dans ce chapitre permet de montrer l'intérêt des méthodes symboliques pour ce type d'inférence.

# Détection de changement dans un modèle de dégradation

## Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	<b>76</b>
4.2	Algorithmes de détection de rupture . . . . .	<b>77</b>
	4.2.0.5 Détection de changement hors ligne . . . . .	78
	4.2.0.6 Détection de changement en ligne . . . . .	78
4.2.1	Algorithme de détection paramétrique . . . . .	79
	4.2.1.1 Carte de contrôle de Shewhart . . . . .	80
	4.2.1.2 Algorithme CUSUM . . . . .	80
	4.2.1.3 Algorithme GLR . . . . .	81
4.2.2	Algorithme de détection non-paramétrique . . . . .	82
4.2.3	Algorithme de détection par fenêtre glissante . . . . .	82
4.3	Tests d'hypothèses . . . . .	<b>84</b>
4.3.1	Définition . . . . .	84
4.3.2	Type de tests . . . . .	85
	4.3.2.1 Classement par finalité . . . . .	85
	4.3.2.2 Tests paramétriques et tests non paramétriques . . . . .	85
4.3.3	Principe de base . . . . .	86
	4.3.3.1 Risques d'erreur et puissance du test . . . . .	87
4.3.4	Principaux tests de comparaison pour $K = 2$ échantillons . . . . .	88
	4.3.4.1 Test de Mann-Whitney . . . . .	88
	4.3.4.2 Test de Ansari-Bradley . . . . .	90
	4.3.4.3 Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	92
4.4	Application . . . . .	<b>95</b>
4.5	Conclusion . . . . .	<b>96</b>

---

## 4.1 Introduction

L'évaluation et la réévaluation régulière de l'adéquation du modèles au système physique qu'il respresente est un point d'importance. En effet, un modèle qui tend à s'éloigner de son objet risque d'entraîner des résultats erronés et de fausses interprétations. Il est donc impératif de s'assurer de la validité d'un modèle avant d'en tirer des conclusions. Pour cela, le statisticien est appelé à faire des tests pour détecter d'éventuels changements des paramètres du modèle, estimer s'il y a lieu le ou les instants de changement, identifier les paramètres sujets à un changement et enfin estimer leur amplitude.

Dans le cadre des MGD, présentés dans la section 2.3.1, les paramètres du modèle (c'est-à-dire toutes les LPCs) sont apprises à partir d'un ensemble d'exemples de trajectoires naturelles du système [Donat 2010]. Dans l'idéal, ces observations sont obtenues en laissant vieillir le système sans intervenir jusqu'à la panne. Les données d'apprentissage attendues sont des séquences d'états et de temps de séjour pour chaque état.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode permettant de détecter un changement de paramètres dans un modèle de dégradation à partir d'un flux de données. Concrètement, ce problème peut être assimilé à une détection de rupture dans une suite temporelle. L'objectif est de détecter un changement dans le flux de données le plus tôt possible (en minimisant les délais de détection) en garantissant un taux de fausses alarmes faible. Plusieurs articles et ouvrages sont consacrés à ce sujet [Basseville 1995] [Basseville 1996] [Lai 1995].

Les méthodes de détection de changement sont principalement utilisées pour effectuer un diagnostic de fautes ou de la segmentation de signal [Andre-obrecht 1988]. En ce qui concerne le diagnostic de fautes, il est courant que la distinction entre les fautes matérielles et les fautes de processus [Favier 1984] soit faite. [Verron 2008] ont proposé une méthode basée sur les réseaux bayésien pour diagnostiquer les fautes issues d'un système industriel qui peuvent provoquer des dérives qualité et d'en trouver les causes possibles. Cette méthode inclut une sélection des variables les plus informatives du système. Ainsi, elle se base sur ces variables importantes pour diagnostiquer les fautes. En effet, bien que ces deux applications semblent très proches, le modèle utilisé pour faire la détection de changement ne sera pas le même. Dans notre cas nous nous intéresseront principalement à la détection de fautes de processus.

Les méthodes utilisées pour effectuer une détection de changement font souvent appel à des tests statistiques afin de trancher entre une hypothèse de stationnarité de la série et une hypothèse traduisant un changement. La section 4.3 fait un rappel sur quelques notions importantes concernant les tests d'hypothèses.

Il est important de souligner que la propriété de stationnarité pour le cas des séries temporelles ne fait pas référence à une série de valeurs constantes, mais plutôt à une invariance dans le temps des propriétés de la suite. La propriété de non-stationnarité se présente généralement sous deux formes : une rupture ou une tendance.

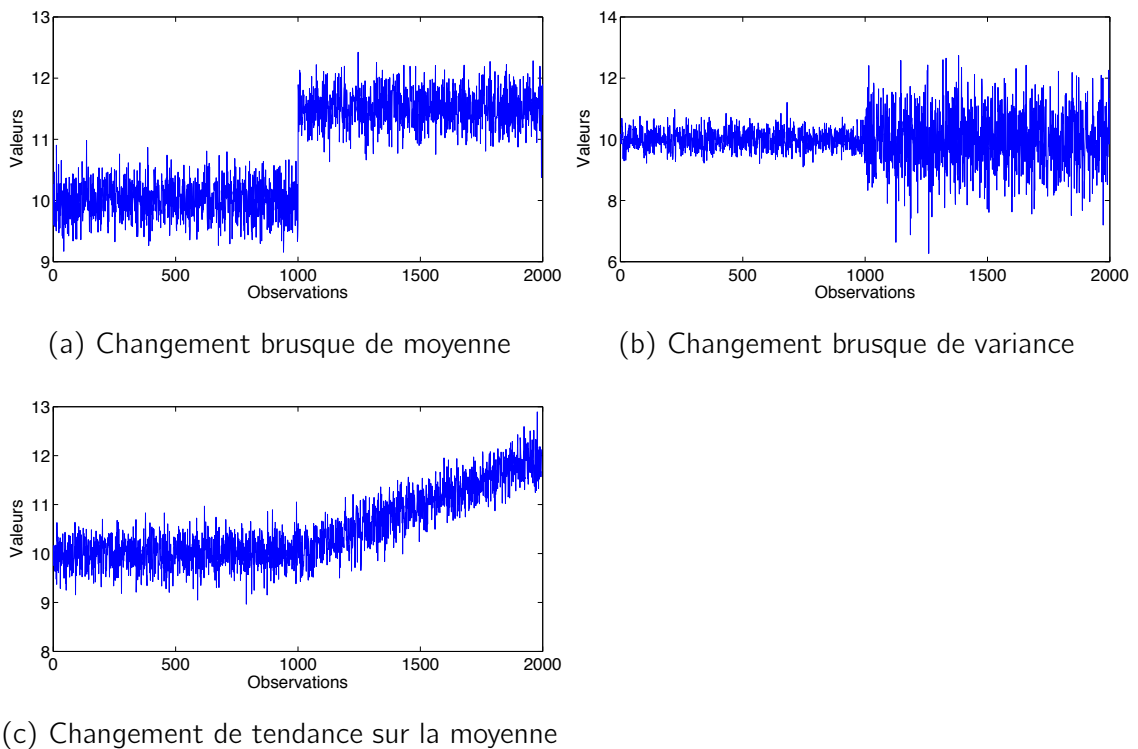


Figure 4.1 – Exemple de série temporelle non-stationnaire

Une rupture désigne une modification subite dans les propriétés d'un processus aléatoire. Elle suppose que ces propriétés restent invariantes avant et après l'instant de rupture. Une tendance traduit un changement plus lent, dans les propriétés d'une variable aléatoire.

Il est important de faire la distinction entre ces deux types de non-stationnarité car certains algorithmes efficaces dans un cas le seront moins dans un autre. De plus, en raison du caractère aléatoire des séries temporelles, il n'est pas rare que ces dernières présentent des fluctuations notables dans le temps sans pour autant que cela traduise une non-stationnarité. La figure 4.1 présente différents types de changement qui peuvent apparaître dans une série temporelle.

## 4.2 Algorithmes de détection de rupture

Les algorithmes de détection de rupture peuvent être répartis en deux grandes familles, les algorithmes en ligne et les algorithmes hors ligne [Basseville 1995].

Notons, qu'il existe plusieurs packages sous R pour effectuer de la détection de changement. Citons par exemple le package *BCP Bayesian analysis of Change Point*, proposé par [Erdman 2007], qui repose sur une approche bayésienne du problème de détection de changement. De même, le package *changept* proposé par [Killick 2011], met à disposition une série de méthodes de détection de changements

multiples, dans une série temporelle. Plus récemment, le package *CPM* (*Change Point Model*), proposé par [Ross 2013], regroupe des méthodes de détection de changements paramétriques et non-paramétriques, aussi bien pour la détection hors ligne que la détection en ligne. Ce dernier package est construit à partir des travaux de [Hawkins 2003], [Zamba 2006] et [Ross 2011].

#### 4.2.0.5 Détection de changement hors ligne

Dans le cadre de la détection de changement hors ligne, à l'instant où la recherche de point de rupture est effectuée, toutes les données sont disponibles. Il s'agit alors de choisir l'hypothèse la plus vraisemblable entre l'hypothèse "sans point de changement" et l'hypothèse "avec un changement". Étant donnée une série d'observations  $X_1, \dots, X_N$ , les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : X_i \sim p_{\theta_0} & \forall i = 1, \dots, N \\ \mathcal{H}_1 : X_i \sim p_{\theta_0} & \forall i = 1, \dots, t_c - 1 \\ & y_i \sim p_{\theta_1} & \forall i = t_c, \dots, N \end{cases} \quad (4.1)$$

Les critères de performance d'un algorithme de détection de rupture hors ligne sont sa capacité à détecter les points de changement et son aptitude à ne pas se déclencher intempestivement. En d'autres termes un "bon" algorithme doit être à la fois suffisamment sensible pour détecter tous les points de changement et peu sensible aux bruits. Il est courant dans les problèmes de détection de rupture hors ligne de maximiser le taux de bonne détection, aussi appelé puissance du test, avec un taux de fausses alarmes fixé.

Parmi les nombreux travaux qui traitent de la détection de rupture hors-ligne, nous pouvons citer les travaux de [Picard 1985], à titre illustratif. Dans cet article, l'auteur présente une série de méthodes pour effectuer une détection hors-ligne d'un point de rupture dans une série temporelle. Dans le cas de changements multiples, [Lavielle 1999] s'intéresse à la fois au cas où le nombre de changements est connu et au cas où ce nombre est inconnu.

#### 4.2.0.6 Détection de changement en ligne

La détection de changement en ligne est effectuée à partir d'un échantillon d'observations de taille variable  $X_1 \dots X_n$ . Les observations arrivent en continu et la taille de l'échantillon  $n$  augmente à chaque nouvelle observation. Il s'agit de détecter, le plus rapidement possible, la présence ou pas d'un point de rupture parmi cette série d'observations. La détection de rupture en ligne est effectuée avec une règle d'arrêt de la forme :

$$t_a = \inf\{n | g_n \leq h\} \quad (4.2)$$

où le *temps d'alarme*  $t_a$  est l'instant de changement détecté par l'algorithme,  $g_n$  une fonction sur l'ensemble des observations et  $h$  un seuil.

Si au temps  $t_a$  il n'y a pas eu de réels changement dans la série, il s'agit d'une fausse alarme. Dans le cas où  $t_a$  n'est pas une fausse alarme, si  $t_r$  est l'instant réel de changement alors la quantité  $t_a - t_r$  représente le retard à la détection.

Dans le cadre d'une détection de rupture en ligne, les critères de performance d'un algorithme sont le délai de détection, qui est lié à la capacité de l'algorithme de produire une alarme lorsqu'un changement a lieu, et le temps moyen entre deux fausses alarmes. L'instant d'alarme optimal est généralement choisi de manière à minimiser le délai de détection pour un temps moyen entre deux fausses alarmes fixé.

---

**Algorithme 7** : Forme générale d'un algorithme de détection de changement en-ligne

---

**Entrées :**

**Sorties :**

**début**

```

tant que algorithme non stoppé et nouvelle donnée présente faire
    // Calculer le résidu pour l'ensemble des observations  $X_k$ 
    // Choisir entre  $\mathcal{H}_0$  (avec changement) et  $\mathcal{H}_1$  (sans
    // changement)
    si  $\mathcal{H}_1$  acceptée alors
        // Enregistrer le temps d'alarme
         $t_a \leftarrow k$ ;
        // Stopper ou relancer l'algorithme
         $stop \leftarrow \text{Vrai}$  ;
    finsi
fintq
fin

```

---

### 4.2.1 Algorithme de détection paramétrique

Dans le cadre des algorithmes de détection paramétriques, le problème de détection de changement se formalise simplement comme suit. Considérons une séquence d'observations  $X_1, \dots, X_n$  avec une densité de probabilité paramétrique  $\mathbb{P}_\theta$ . Avant un instant de changement inconnu  $t_r$  le paramètre  $\theta$  prend la valeur  $\theta_0$ , et après le changement il prend la valeur  $\theta_1 \neq \theta_0$ .

Le rapport de Log-vraisemblance (*Log-Likelihood Ratio*) est une grandeur mathématique souvent utilisée dans les méthodes de détection de changement paramétriques. Cette quantité est définie pour la  $i$ -ème observation d'une série et pour deux densités paramétriques  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  et  $\mathbb{P}_{\theta_1}$  supposées connues par :

$$s_i = \log \frac{\mathbb{P}_{\theta_1}(X_i)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(X_i)}, \quad (4.3)$$

où  $\theta_0$  et  $\theta_1$  représentent les paramètres de deux densités différentes ( $\theta_1 \neq \theta_0$ ). Une propriété importante du rapport de vraisemblance est que son espérance change de



signe en fonction du paramètre  $\theta$  :

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(s_i) < 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\theta_1}(s_i) > 0 \quad (4.4)$$

#### 4.2.1.1 Carte de contrôle de Shewhart

La carte de contrôle de Shewhart proposée dans [Shewhart 1931] est l'une des premières procédures de détection de changement. Elle utilise un partitionnement de de l'ensemble des observations en plusieurs séquences d'échantillons de taille  $N$ . La présence d'un point de changement n'est possiblement détectée qu'après l'observation de  $N$  nouvelles données. La fonction de décision de ce test est définie pour  $N$  observations par :

$$g_t = \sum_{i=t-N+1}^t s_i, \quad (4.5)$$

où  $s_i$  est le rapport de vraisemblance défini dans l'équation 4.3.

La règle de décision est construite à partir d'une valeur seuil  $h$ . La présence d'un changement est confirmée si la statistique  $g_t$  dépasse le seuil  $h$  et dans le cas contraire la série est considérée comme stationnaire.

De par la conception de cette procédure de contrôle, la position exacte du point de changement détecté ne peut pas être déterminée. Il est juste possible de détecter sa présence dans une fenêtre de données de taille  $N$ . Par convention, le temps d'alarme  $t_a$  est positionné à la fin de la fenêtre contenant le présumé point de changement, et est défini par :

$$t_a = \inf\{t = N, 2N, \dots : g_t \geq h\}. \quad (4.6)$$

#### 4.2.1.2 Algorithme CUSUM

Le test *cumulative sum* (CUSUM) *control chart*, proposé par [Page 1954], est l'une des méthodes les plus populaires pour détecter un changement de moyenne dans une série de données. Le principe de base de la méthode CUSUM est d'utiliser le fait que le rapport de vraisemblance  $s_i$  est décroissant avant un changement et croissant après.

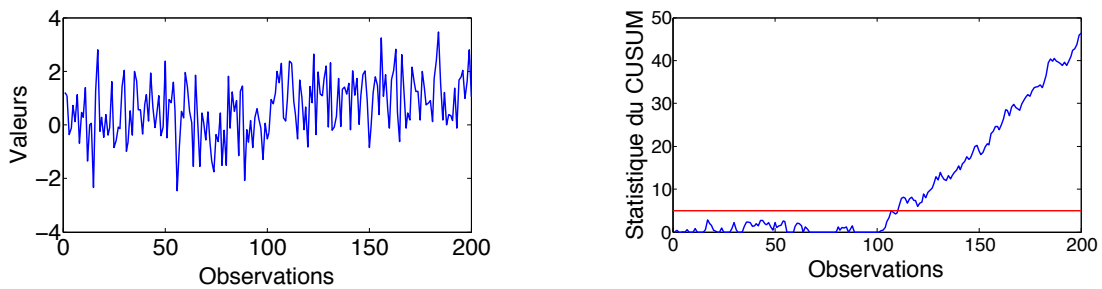
La procédure CUSUM utilise le même temps d'alarme  $t_a$  défini par l'équation 4.6 avec une statistique  $g_t$  définie comme suit :

$$g_t = \sum_{i=1}^n S_t - m_t, \quad (4.7)$$

avec

$$S_t = \sum_{i=1}^t s_i, \quad (4.8)$$

où  $s_i$  est le rapport de vraisemblance défini dans l'équation 4.3 et  $m_t = \min_{1 \leq i \leq t} \{S_i\}$ .



(a) Données simulées avec un point de changement à la 100-ième observation

(b) Statistique du CUSUM avec un seuil de décision  $h = 5$

Figure 4.2 – Exemple d’application de la procédure du CUSUM sur un jeu de données simulé à partir de deux lois normales  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\mathcal{N}(1, 1)$ .

Le temps d’alarme  $t_a$  est défini à partir d’un seuil  $h$  par :

$$t_a = \inf\{k : g_k \geq h\} \quad (4.9)$$

Il est à noter qu’il existe une forme récursive de la statistique de l’algorithme du CUSUM, ce qui peut se révéler particulièrement intéressant pour les problèmes de détection en-ligne.

$$g_t = (g_{t-1} + s_t)^+, \quad (4.10)$$

avec  $g_0 = 0$ ,  $(x)^+ = \max\{0, x\}$  et où  $s_t$  est le rapport de vraisemblance défini dans l’équation 4.3. Le temps d’alarme est défini de la même manière que dans la version classique du CUSUM (équation 4.9)

La figure 4.2 présente l’évolution de la statistique du CUSUM sur un jeu de données simulées. Les 100 premières observations sont générées suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et les observations suivantes sont générées suivant une loi normale  $\mathcal{N}(1, 1)$ . En définissant le seuil de décision  $h = 5$ , la procédure du CUSUM permet de détecter un changement à la 107-ième observation (donc avec un délai de détection de 7 unités).

### 4.2.1.3 Algorithme GLR

La règle du CUSUM traite le cas où les valeurs prises par le paramètre  $\theta$  ( $\theta_0$  et  $\theta_1$ ) sont supposées connues. Dans la réalité des choses, supposer que la valeur  $\theta_0$  est connue n’est pas très restrictif car il s’agit de la valeur du paramètre  $\theta$  avant le changement. Il est possible d’imaginer que cette valeur soit estimée dans une phase préliminaire, à partir d’un jeu de données « standard ». Par contre, supposer que la valeur du paramètre  $\theta$  après le changement soit connue peut être quelque peu contraignant. En effet, cela sous-entend que la nature et les conséquences du changement soient connues avant qu’ils ne se produisent. Le *test du rapport de vraisemblance généralisé* (abrégé GLR, pour *Generalized Likelihood Ratio*), proposé

par [Lorden 1971], apporte une solution à ce type de problème. L'idée principale du test GLR est de considérer un ensemble  $\Theta$  de valeurs possibles pour le paramètre  $\theta_1$  et de retenir uniquement la valeur la plus probable de cet ensemble.

### 4.2.2 Algorithme de détection non-paramétrique

Les méthodes de détection de changement vues jusqu'ici, nécessitent que la forme de la distribution des observations soit connue. Dans cette classe de problèmes, seuls les paramètres de la distribution avant et après l'instant de changement sont inconnus. Cependant cette hypothèse, sur la forme de la distribution, est rarement vérifiable.

De plus, les MGD ont été introduits pour éviter de faire des hypothèses trop restrictives sur la distribution des temps de séjours, laquelle peut être de nature quelconque. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de détection de changement dites "libre de distribution", aussi appelées méthodes de détection non-paramétriques.

Il existe quelques travaux sur la détection de changement dans le cas où la forme générale de la distribution des observations est inconnue. La plupart d'entre eux se place dans le cadre de la détection hors ligne. Citons par exemple [Bhattacharya 1981], [Carlstein 1988] et [Jones 1998].

Du fait de la difficulté liée à la méconnaissance de la nature du changement, beaucoup de travaux sur la détection non paramétrique de changement se restreignent à des changements de moyenne ou de médiane. La méthode la plus courante pour détecter de tels changements est d'utiliser le rang<sup>1</sup> des observations, comme par exemple dans [Hackl 1991], [Gordon 1994] ou [Chakraborti 2008].

Plus récemment, [Ross 2011] propose une adaptation du test d'hypothèse pour réaliser une détection de changement en ligne. L'idée de base est de ne considérer que les  $n$  dernières observations. Cette astuce permet de résoudre le problème d'augmentation constant du jeu de données dans le cas d'une détection en ligne. L'algorithme, présenté dans cette partie, reprend cette idée de fenêtre glissante d'observations.

### 4.2.3 Algorithme de détection par fenêtre glissante

L'algorithme que nous proposons ici utilise une fenêtre glissante de taille  $N$ . Cette fenêtre est positionnée de manière à ce qu'elle ne contienne que les dernières observations disponibles. Toutes les  $n$  nouvelles observations, la fenêtre est décalée et l'algorithme essaie de séparer la fenêtre en deux segments. La séparation est effectuée de manière à ce que les observations du premier ensemble respectent une propriété  $p_0$  et celles du second ensemble une propriété  $p_1$ , avec  $p_0 \neq p_1$ . Pour ce

---

1. Le rang d'une observation correspond à sa position dans un ensemble ordonné.

faire, un test statistique est utilisé pour trancher entre l'hypothèse de stationnarité de la série dans la fenêtre ou l'hypothèse alternative qui traduit un changement.

Le pseudo-code de la procédure de détection de changement par fenêtre glissante est décrit dans l'algorithme 8. Elle considère en entrée une séquence d'observations  $\mathcal{X}^{obs}$  dont la taille augmente et elle renvoie les instants de changement détectés.

---

**Algorithme 8** : Algorithme de détection de rupture
 

---

**Entrées** :

- $\mathcal{X}^{obs}$  : séquence d'observations
- Paramètres :
  - $N$  : taille de la mémoire
  - $n$  : nombre de nouvelles observations avant détection
  - $d$  : taille minimale de l'ensemble d'observations comparées
  - $c$  : seuil de décision

**Sorties** :  $t_a$  : liste des temps de rupture estimés

**début**

```

t ← Taille( $\mathcal{X}^{obs}$ );
tant que Vrai faire
  // Si au moins n nouvelles données disponibles
  si (Taille( $\mathcal{X}^{obs}$ ) - t) ≥ n alors
    t ← Taille( $\mathcal{X}^{obs}$ );
    pour k = n - N + d ... n - d faire
      /* Calculer la distance entre les deux séquences
        d'observations de part et d'autre de k          */
       $D_N(k, n) \leftarrow$  Distance( $[X_{n-N} \dots X_{k-1}], [X_k \dots X_n]$ );
    finpour
    // Choisir la valeur de k qui maximise la distance  $D_N$ 
     $E_N(n) \leftarrow \max_{d \leq k \leq N-d} D_N(k, n)$ ;
    // Mémoriser  $t_a$  si  $E - n(n)$  supérieur au seuil c
    si  $E_N(n) \geq c$  alors
      |  $t_a(n) \leftarrow$  Vrai;
    finsi
  finsi
fintq
 $t_a(c) \leftarrow \min\{n \leq N | \mathbb{1}_{E_n(n) \geq c}\}$ ;

```

**fin**


---

La figure 4.3 détaille le comportement de l'algorithme de détection de rupture sur une série numérique temporelle. Dans cet exemple, la taille de la fenêtre d'observation est  $N = 10$ , le nombre de nouvelles données avant de faire glisser la fenêtre est  $n = 4$

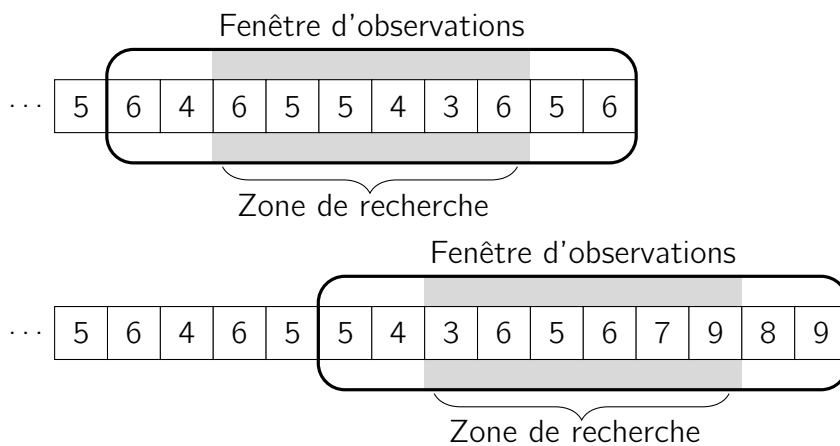


Figure 4.3 – Représentation schématique du mécanisme de recherche d'un point de rupture.

et la taille minimum des ensembles à comparer est  $d = 2$ . La partie grisée dans la fenêtrée d'observation représente la zone de recherche du point de rupture. La figure représente deux étapes de recherche de point de rupture. Dans la première configuration de la fenêtrée, l'algorithme va estimer la distance entre les ensembles  $\{6, 4\}$  et  $\{6, 5, 5, 4, 3, 6, 5, 6\}$  puis entre  $\{6, 4, 6\}$  et  $\{5, 5, 4, 3, 6, 5, 6\}$  et ainsi de suite. Dans la seconde configuration, la fenêtrée d'observation a été décalée de  $n$  observations et la recherche d'un point de rupture est ré-itérée.

Jusqu'à présent, une partie importante de l'algorithme de détection de rupture par fenêtrée glissante, a volontairement été mise de côté. Il s'agit de la partie concernant l'évaluation de la distance entre les deux ensembles d'observations. Il existe une multitude de tests statistiques (aussi appelés tests d'hypothèses) qui permettent de répondre à cette problématique. La section suivante présente quelques tests d'hypothèses pouvant être utilisés pour évaluer une distance entre deux ensembles de valeurs.

## 4.3 Tests d'hypothèses

### 4.3.1 Définition

En statistique, un test d'hypothèse est une démarche permettant de rejeter ou ne pas rejeter une hypothèse statistique à partir d'un jeu de données, appelé échantillon. Il permet de trancher entre deux hypothèses, l'une dite "nulle" ou fondamentale (notée habituellement  $\mathcal{H}_0$ ) et l'autre appelée hypothèse "alternative" (notée  $\mathcal{H}_1$ ).

Un test d'hypothèses est une règle de décision qui permet, sur la base des données observées avec un risque d'erreur déterminé, d'accepter ou de refuser une hypothèse statistique.

### 4.3.2 Type de tests

D'ordinaire, les tests d'hypothèses sont classés en deux catégories : les tests paramétriques qui reposent sur une comparaison de paramètres de distribution et les tests non paramétriques. Mais il est également possible de distinguer différentes familles de tests en fonction du type de l'hypothèse de travail  $\mathcal{H}_0$  utilisée.

#### 4.3.2.1 Classement par finalité

Les tests d'hypothèses peuvent être utilisés à des fins différentes. Par exemple, il est possible de confronter un paramètre calculé sur un échantillon à une valeur pré-établie. Ce type de test est appelé *test de conformité*. Un exemple concret d'utilisation serait le cas où l'on souhaite vérifier que la probabilité d'obtenir une face d'un dé est  $1/6$ .

Il est également possible de vérifier la compatibilité des données avec une distribution choisie a priori. Ce type de tests est appelé *test d'adéquation*. Les plus couramment utilisés sont les tests pour vérifier l'hypothèse de normalité des données.

Les tests d'hypothèses sont couramment utilisés pour vérifier la corrélation de deux variables aléatoires. Ce type de tests est appelé *test d'indépendance*.

Le dernier type de tests, qui nous intéresse plus particulièrement, consiste à vérifier que  $K$  ( $K \geq 2$ ) échantillons ou groupes proviennent d'une même population. Ce type de tests est appelé *test d'homogénéité*.

#### 4.3.2.2 Tests paramétriques et tests non paramétriques

Les tests paramétriques requièrent que les données soient issues d'une distribution connue à un jeu de paramètres près. Dans ce cas, les caractéristiques des données peuvent être résumées à l'aide de paramètres estimés sur l'échantillon. La procédure de test ne porte alors que sur ces paramètres. L'hypothèse de normalité des données est la plus souvent utilisée. Dans ce cas, la moyenne et la variance suffisent pour caractériser complètement la distribution.

Dans la pratique, on ne peut pas toujours se placer dans le cadre précédent. La distribution de l'échantillon est souvent totalement inconnue. L'avantage principal des tests non paramétriques est qu'ils ne nécessitent aucune hypothèse sur la distribution des données. On qualifie souvent ces tests de *distribution free*. Un second avantage, non négligeable, des tests non-paramétriques est qu'ils sont applicables même sur des échantillons de petite taille. Dans la pratique, les approximations sont déjà pleinement efficaces, dès que les effectifs atteignent un niveau modéré (de l'ordre de 20 à 30 observations, en fonction du test). Beaucoup de tests non-paramétriques passent par une transformation des données en rang. Cette transformation permet

de travailler aussi bien avec des données qualitatives que des données ordinales. De plus, le recours au rang introduit une propriété très appréciable lors du traitement de problèmes réels : la robustesse par rapport aux points aberrants.

La comparaison entre les tests paramétriques et les tests non-paramétriques est fréquente dans la littérature. Pour résumer, les tests non paramétriques élargissent le champ d'application des procédures statistiques, en ne faisant aucune hypothèse sur les distributions des données. En contrepartie, ils sont moins puissants que les tests paramétriques lorsque la distribution des données réelles est en bonne adéquation avec le modèle statistique proposé.

### 4.3.3 Principe de base

Le principe de tout test statistique est de poser une hypothèse de travail et de prédire les conséquences de cette dernière pour un échantillon. La comparaison entre cette prédiction et les observations permet d'accepter ou de rejeter l'hypothèse de travail. Cette comparaison s'effectue à partir de règles de décision objectives. Définir les hypothèses de travail, et vérifier les conditions d'application de ces dernières constituent des étapes importantes des tests statistiques.

Une fois les hypothèses nulle  $\mathcal{H}_0$  et alternative  $\mathcal{H}_1$  définies, tous les tests statistiques reposent sur le calcul d'une variable de décision  $D$ . Elle peut être une mesure de distance entre deux échantillons dans le cas d'un test d'homogénéité ou une mesure entre un échantillon et une distribution de probabilité dans le cas d'un test d'adéquation. La variable de décision est posée de telle sorte qu'une valeur importante de cette variable traduise une faible probabilité que l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  soit vraie. En règle générale, cette variable de décision se base sur une statistique qui se calcule à partir des observations (moyenne, variance ...).

Les tests d'hypothèses reposent tous sur le fait que si  $\mathcal{H}_0$  est vraie alors la distribution de la variable de décision  $D$  est connue. Il est alors possible de calculer, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , la probabilité d'obtenir pour la statistique du test  $D$  une valeur au moins égale à la statistique obtenue à partir de l'échantillon testé. Cette probabilité est appelée la valeur  $p$  (*p-value* en anglais). Mathématiquement, si  $d$  est la statistique obtenue à partir de l'échantillon test, alors la *p-value* est définie par :

$$p\text{-value} = \mathbb{P}(D \geq d). \quad (4.11)$$

La *p-value* est ensuite comparée à une valeur seuil  $\alpha$  préalablement choisie (généralement  $\alpha = 0.05$ ). L'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est rejetée si la *p-value* est inférieure au seuil  $\alpha$ . Il n'est pas rare que le seuil  $\alpha$  sur la *p-value* soit transformé en seuil  $c_\alpha$  sur la variable de décision  $D$ . Dans ce cas, la décision du rejet de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est prise si la valeur de  $D$  est supérieure à  $c_\alpha$ .

Remarquons qu'un test d'hypothèses ne permettra jamais de conclure à l'acceptation, proprement dite, de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  mais plutôt au non-rejet de cette hypothèse.

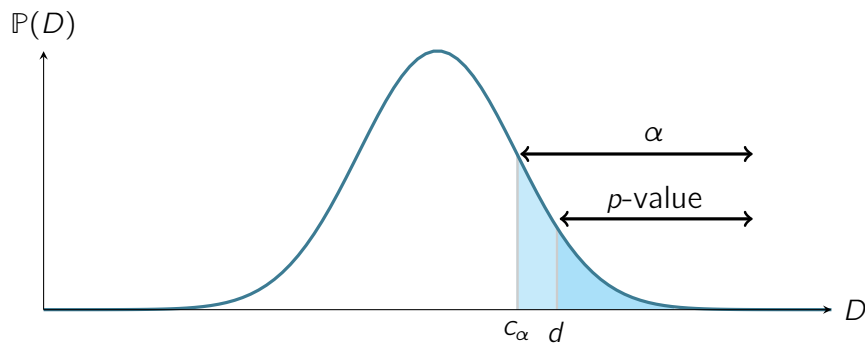


Figure 4.4 – Représentation de la  $p\text{-value}$  (zone en bleu foncé) et du seuil  $\alpha$  (zone en bleu clair) sur la distribution d'une variable de décision  $D$

La figure 4.4 représente la  $p\text{-value}$  et le seuil  $\alpha$  sur un exemple où la variable de décision  $D$  suit une loi normale sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon est  $d$  alors la  $p\text{-value}$  correspond à la zone en bleu foncé. La zone en bleu clair correspond à la zone de rejet de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Le cas représenté dans la figure 4.4 correspond à un rejet de l'hypothèse nulle. Remarquons que la décision de rejet ou pas de  $\mathcal{H}_0$  peut être prise à partir de  $c_\alpha$  ou de  $d$ .

#### 4.3.3.1 Risques d'erreur et puissance du test

Lorsque la décision prise à l'aide du test d'hypothèses ne correspond pas à la réalité on parle d'erreur du test. Deux cas de figure peuvent subvenir : soit l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est rejetée à tort, soit l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  est choisie alors que l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est valide. Dans le premier cas, l'erreur commise est appelée risque de première espèce associée au paramètre  $\alpha$  du test d'hypothèses. L'expression du risque de première espèce  $\alpha$ , aussi appelé puissance du test, est :

$$\alpha = P(\text{rejeter } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ vraie})$$

La probabilité pour que  $\mathcal{H}_0$  soit acceptée alors qu'elle est fautive, notée  $\beta$ , correspond au risque de deuxième espèce. Sa valeur dépend du contexte, et peut être difficilement évaluable (voire impossible à évaluer). Mathématiquement, le risque d'erreur de seconde espèce est défini par :

$$\beta = P(\text{ne pas rejeter } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1 \text{ vraie})$$

En général, pour les raisons précédemment énoncées, seul le risque  $\alpha$  est utilisé comme critère de décision. La puissance d'un test d'hypothèses est définie par  $\eta = 1 - \beta$ .



### 4.3.4 Principaux tests de comparaison pour $K = 2$ échantillons

#### 4.3.4.1 Test de Mann-Whitney

Le test de *Man-Whitney* est un test non-paramétrique pour comparer deux échantillons. Historiquement, ce test a été introduit pour la comparaison d'échantillons de même taille par [Wilcoxon 1945] sous le nom de *Wilcoxon test*, puis généralisé pour des échantillons de tailles différentes par [White 1952].

Un test équivalent a été introduit et proposé indépendamment par [Festingier 1946] et [Mann 1947], pour prendre en considération le cas des échantillons de tailles différentes ou de petites tailles .

Le test de Mann-Whitney repose sur une notion de rang. L'idée de base est de substituer aux valeurs leur numéro d'ordre dans l'ensemble des données.

Soit  $X = x_1, \dots, x_n$  et  $Y = y_1, \dots, y_m$  deux échantillons de tailles respectives  $n$  et  $m$  et  $Z = z_1, \dots, z_{n+m}$  une séquence ordonnée de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  telle que  $z_1 \leq z_2 \dots z_{n+m}$ . Soit  $r_{i1}$  le rang de  $x_i$  dans  $Z$  et  $r_{i2}$  le rang de  $y_i$  dans  $Z$ . Pour chaque échantillon, la somme des rangs peut être calculée :

$$T_x = \sum_{i=1}^n r_{i1}, \quad T_y = \sum_{i=1}^m r_{i2}. \quad (4.12)$$

Ces valeurs correspondent aux statistiques de Wilcoxon.

La statistique  $U$  du test de Mann-Whitney est la plus grande valeur entre deux sous-statistiques  $U_x$  et  $U_y$  :

$$U = \max(U_x, U_y), \quad (4.13)$$

où  $U_x$ ,  $U_y$  représente le nombre d'observations de l'échantillon  $X$  (respectivement  $Y$ ) qui ont une valeur plus petite qu'une observation de l'échantillon  $Y$  (respectivement  $X$ ) :

$$U_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{x_i > y_j}, \quad U_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{x_i < y_j} \quad (4.14)$$

Ces deux statistiques peuvent également être calculées à partir des statistiques  $T_x$  et  $T_y$  du test de Wilcoxon, avec les relations suivantes :

$$U_x = nm + \frac{n(n+1)}{2} - T_x, \quad U_y = nm \frac{m(m+1)}{2} - T_y \quad (4.15)$$

Il est facile de remarquer que la somme des statistiques  $T_x$  et  $T_y$  est égale à la somme des rangs de toutes les observations de l'échantillon  $Z$ , c'est-à-dire la somme des entiers de 1 à  $n+m$  :

$$T_x + T_y = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}. \quad (4.16)$$

Cette remarque permet de déduire la proposition suivante sur la somme des statistique de Mann-Whitney  $U_x$  et  $U_y$  :

$$U_x + U_y = nm \quad (4.17)$$

Un autre résultat important concernant la statistique de Mann-Whitney porte sur la distribution de  $U$ . En effet, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  la distribution  $\mathbb{P}_{n,m}(U)$  de la statistique de Mann-Whitney pour des échantillons de taille  $m$  et  $n$  (avec  $n + m = N$ ) est définie par la relation de récurrence :

$$\mathbb{P}_{n,m}(U) = \frac{n}{n+m} \mathbb{P}_{n-1,m}(U-N) + \frac{m}{n+m} \mathbb{P}_{n,m-1}(U), \quad (4.18)$$

avec pour tout  $i = 1 \dots n$  et  $j = 1 \dots m$

$$\mathbb{P}_{i,0}(U) = \mathbb{P}_{0,j}(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } U = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathbb{P}_{i,j}(U) = 0 \text{ si } U < 0.$$

A partir de cette relation de récurrence, dans [Mann 1947], la distribution  $p_{n,m}(U)$  de la statistique de Mann-Whitney a pu être déterminée pour des échantillons de taille comprise entre 3 et 8. L'auteur a également démontré la propriété suivante : pour des échantillons de taille supérieure à 8, la distribution de  $U$  peut être approximée par une loi normale de moyenne  $\mu_U$  et de variance  $\sigma_U$ , définies comme suit :

$$\mu_U = \frac{nm}{2} \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{mn(n+m+1)}{12}}$$

Pour un seuil de risque  $\alpha$ , il est possible de déterminer un seuil de décision  $c_\alpha$  tel que  $\mathbb{P}(U \leq c_\alpha | \mathcal{H}_0) = \alpha$ . La décision de rejet ou pas de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est prise en fonction du seuil  $c_\alpha$  :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 : \mu_x \neq \mu_y & \text{si } U \leq c \\ \mathcal{H}_0 : \mu_x = \mu_y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour illustrer le test de Mann-Whitney, prenons un exemple numérique. Considérons les deux échantillons suivants :

$$X = (5.8, 3.2, 8.4, 4.1, 6.9, 5.3, 1.7, 3.2, 2.5, 7.4)$$

et

$$Y = (8.1, 5.5, 3.4, 7.9, 4.6, 1.6, 8.5, 7.1, 8.7, 5.7).$$

La séquence ordonnées des observations combinées de  $X$  et de  $Y$  est :

$$Z = (1.6, \underline{1.7}, \underline{2.5}, \underline{3.2}, \underline{3.2}, 3.4, \underline{4.1}, 4.6, \underline{5.3}, 5.5, \\ 5.7, \underline{5.8}, \underline{6.9}, 7.1, \underline{7.4}, 7.9, 8.1, \underline{8.4}, 8.5, 8.7)$$

Dans cette séquence, les observations provenant de l'échantillon  $X$  sont soulignées. Les statistiques de Wilcoxon pour ces échantillons sont :

$$T_x = 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 + 12 + 13 + 15 + 18 = 88$$

et

$$T_y = 1 + 6 + 8 + 10 + 11 + 14 + 16 + 17 + 19 + 20 = 122.$$

Si l'objectif est de montrer que les valeurs de l'échantillon  $X$  ont tendance à être plus petites que celles de l'échantillon  $Y$ , alors seule la statistique  $T_x$  est prise en compte. La  $p$ -value correspondante est :

$$\mathbb{P}(T_x = 88) = 0.2121$$

Par conséquent, avec un risque d'erreur  $\alpha = 0.05$  l'hypothèse alternative, selon laquelle les échantillons  $X$  et  $Y$  ne suivent pas la même distribution, est acceptée.

En utilisant les équations 4.15, les statistiques du test de Mann-Whitney sont :

$$U_x = 5 + 1 + 8 + 2 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 6 = 33$$

et

$$U_y = 9 + 6 + 4 + 9 + 5 + 0 + 10 + 8 + 10 + 6 = 67.$$

La conclusion avec le test de Mann-Whitney est identique à celle donnée plus haut pour le test de Wilcoxon.

#### 4.3.4.2 Test de Ansari-Bradley

Le test de Ansari-Bradley proposé par [Freund 1957] et [Ansari 1960] est un test non-paramétrique pour vérifier si deux échantillons ont la même dispersion.

Ce test nécessite que les deux échantillons aient la même moyenne. Sous cette condition, et si les observations sont identiquement distribuées, la distribution de la statistique du test ne dépend pas de la distribution des échantillons. Si les échantillons n'ont pas la même moyenne, [Ansari 1960] recommande de soustraire la différence des moyennes des deux séries  $\mu_x - \mu_y$  à toutes les observations du premier échantillon.

Comme pour le test de Mann-Whitney, des rangs sont assignés à toutes les observations de  $Z$ . La seule différence est que la numérotation commence des deux extrémités. Ainsi, si  $m + n$  est un nombre pair, les rangs assignés aux observations de  $Z$  seront :

$$1, 2, \dots, (m+n)/2, (m+n)/2, \dots, 2, 1,$$

et si  $m + n$  est impair :

$$1, 2, \dots, (m+n-1)/2, (m+n+1)/2, (m+n-1)/2, \dots, 2, 1$$

La statistique du test de Ansari-Bradley est :

$$W = \sum_{i=1}^n r_{i1}, \quad (4.19)$$

où  $r_{i1}$  représente le rang de la  $i$ -ème observation de l'échantillon  $X$  dans la séquence  $Z$ . Cette statistique peut s'écrire sous une autre forme, plus pratique :

$$W = \sum_{i=1}^p i \mathbb{1}_{z_i \in X} + \sum_{i=p+1}^{n+m} (m+n+1-i) \mathbb{1}_{z_i \in X}, \quad (4.20)$$

avec

$$p = \lceil (m+n+1)/2 \rceil.$$

La distribution  $P_{n,m}(W)$  de la statistique de Ansari-Bradley pour des échantillons de taille  $n$  et  $m$  (avec  $n+m = N$ ) a été déterminée, à partir de résultats en combinatoire, par [Ansari 1960]. Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , la distribution  $\mathbb{P}_{n,m}(W)$  est définie de manière récursive par :

$$\mathbb{P}_{n,m}(W) = \frac{n}{n+m} \mathbb{P}_{n-1,m}(W) + \frac{m}{n+m} \mathbb{P}_{n,m-1}(W-N), \quad (4.21)$$

avec pour tout  $i = 1 \dots n$  et  $j = 1 \dots m$

$$\mathbb{P}_{i,0}(W) = \mathbb{P}_{0,j}(W) = \begin{cases} 0 & \text{si } W = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathbb{P}_{i,j}(W) = 0 \text{ si } W < 0.$$

De plus, pour des échantillons de plus de 8 observations, la distribution  $P_{m,n}$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est proche d'une loi normale de moyenne  $\mu_W$  et de variance  $\sigma_W$ , définies par :

$$\mu_W = \frac{1}{4} \quad \sigma_W = \sqrt{\frac{n}{48mN}}$$

A partir de ces définitions de  $P_{n,m}(W)$ , il est possible de déterminer, pour un seuil d'erreur  $\alpha$ , un seuil de décision  $c_\alpha$  tel que  $\mathbb{P}_{n,m}(W \geq c_\alpha) = \alpha$ . Le choix entre l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  est effectué à partir du seuil  $c_\alpha$ , en suivant la règle de décision :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 : G(u) \equiv F(u) & \text{si } U \leq c_\alpha \\ \mathcal{H}_0 : G(u) \equiv F(\theta u), \theta \neq 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $G(U)$  et  $F(U)$  sont les fonctions de répartition empiriques des deux échantillons comparés.

Reprenons l'illustration numérique précédente, avec les deux séries :

$$X = (5.8, 3.2, 8.4, 4.1, 6.9, 5.3, 1.7, 3.2, 2.5, 7.4)$$

et

$$Y = (8.1, 5.5, 3.4, 7.9, 4.6, 1.6, 8.5, 7.1, 8.7, 5.7).$$

La séquence ordonnée des observations combinées de  $X$  et de  $Y$  est :

$$Z = (1.6, \underline{1.7}, \underline{2.5}, \underline{3.2}, \underline{3.2}, 3.4, \underline{4.1}, 4.6, \underline{5.3}, 5.5, \\ 5.7, \underline{5.8}, \underline{6.9}, 7.1, \underline{7.4}, 7.9, 8.1, \underline{8.4}, 8.5, 8.7)$$

où les observations provenant de l'échantillon  $X$  sont soulignées. La statistique du test d'Ansari-Bradley est :

$$W = 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 + 9 + 8 + 6 + 3 = 56$$

La  $p$ -value correspondante est :

$$\mathbb{P}(W = 56) = 0.8792$$

En conclusion, avec un risque d'erreur  $\alpha = 0.05$ , l'hypothèse alternative  $\mathcal{H}_1$ , selon laquelle la dispersion des deux échantillons n'est pas la même, est acceptée.

#### 4.3.4.3 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le *test de Kolmogorov-Smirnov* (K-S Test), proposé par [Massey Jr 1951], est un test non paramétrique unidimensionnel pour vérifier l'égalité de distributions de probabilités continues. Il peut être utilisé pour comparer un échantillon avec une distribution de probabilité de référence (test d'adéquation), ou pour comparer deux échantillons (test de comparaison).

La statistique de Kolmogorov-Smirnov quantifie une distance entre la fonction empirique de distribution de l'échantillon et la fonction de distribution cumulative de la distribution de référence, ou entre les fonctions de distribution empiriques des deux échantillons.

**Adéquation d'un échantillon à une loi** : Dans ce cas, l'objectif est de comparer la fonction de répartition empirique  $F_n$  de l'échantillon  $X = x_1, \dots, x_n$  et la fonction de répartition  $F_0(x) = \mathbb{P}(x_1 \leq x)$  de la distribution de référence.

Pour un échantillon  $X = (x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  variables aléatoires i.i.d. la fonction de répartition empirique  $F_n(x)$  est calculée comme suit :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \geq x}.$$

L'objectif du K-S test est de trancher entre l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ), selon laquelle la fonction de répartition  $F_0(x)$  et  $F(x)$  sont identiques, et l'hypothèse contraire :

$$\mathcal{H}_0 : F = F_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : F \neq F_0.$$

Soit un échantillon  $x_1, \dots, x_n$  de  $n$  variables i.i.d,  $F(x)$  et  $F_n(x)$  les fonctions de répartition théorique et empirique de cet échantillon. Le premier résultat est obtenu grâce à la théorie des grands nombres, il assure la convergence de  $F_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F(x).$$

De plus, les propriétés suivantes, sur lesquelles reposent le test de Kolmogorov-Smirnov, peuvent être énoncées :

**Théorème 3.** *La distribution  $\mathbb{P}(\sqrt{n} \max_x \{|F(x) - F_n(x)|\} \leq c)$  ne dépend pas de la distribution de l'échantillon.*

**Théorème 4.** *La limite de la distribution  $\mathbb{P}(\sqrt{n} \max_x \{|F(x) - F_n(x)|\} > c)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  est*

$$\mathbb{P}(\sqrt{n} \max_x \{|F(x) - F_n(x)|\} > c) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha(c) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 c} \quad (4.22)$$

où  $1 - \alpha(c)$  est la fonction de répartition de la distribution de Kolmogorov-Smirnov.

La statistique du K-S test est définie par :

$$D_n = \sqrt{n} \max_x \{|F_0(x) - F_n(x)|\} \quad (4.23)$$

où  $F_n(x)$  est la fonction de répartition empirique de l'échantillon et  $F_0$  une fonction de répartition quelconque.

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , les fonctions de répartition  $F$  et  $F_0$  sont égales, le théorème 4 se traduit par  $\mathbb{P}(D_n > c) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha(c)$ . Autrement dit, en se fixant un seuil de décision  $c$  sur la statistique  $D_n$  et en tranchant entre les hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : F = F_0 & \text{si } D_n \leq c \\ \mathcal{H}_1 : F \neq F_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

le risque d'erreur de première espèce est  $\alpha(c)$ .

**Comparaison de deux échantillons** : Il est également possible d'utiliser ce test pour comparer deux séries. Soit un échantillon  $x_1, \dots, x_n$  de taille  $n$  avec une fonction de répartition empirique  $F_n(x)$  et  $y_1, \dots, y_m$  un échantillon de taille  $m$  avec une fonction de répartition empirique  $G_m(x)$ . La statistique du K-S test s'écrit :

$$D_{n,m} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \max_x \{|F_n(x) - G_m(x)|\}. \quad (4.24)$$

Il s'agit alors de trancher entre l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ), selon laquelle les deux échantillons ont la même fonction de répartition empirique, et l'hypothèse alternative ( $\mathcal{H}_1$ ) :

$$\mathcal{H}_0 : F_n = G_m \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : F_n \neq G_m$$

Dans le cadre d'une comparaison de deux échantillons, le théorème 4 reste valide et le seuil de décision  $c$  peut être choisi en fonction du risque d'erreur de première espèce  $\alpha$ . Les valeurs de seuil  $c_\alpha$  pour des valeurs courantes de risque d'erreur ( $\alpha = 0.10, 0.05, 0.02$  et  $0.01$ ) sont données dans le tableau C.1.

La figure 4.5 permet de visualiser la statistique de Kolmogorov-Smirnov pour la comparaison de deux échantillons. Les deux courbes de la figure représentent les fonctions de répartition empiriques des deux échantillons. La statistique de Kolmogorov-Smirnov est la plus grande distance entre les deux fonctions de répartition.

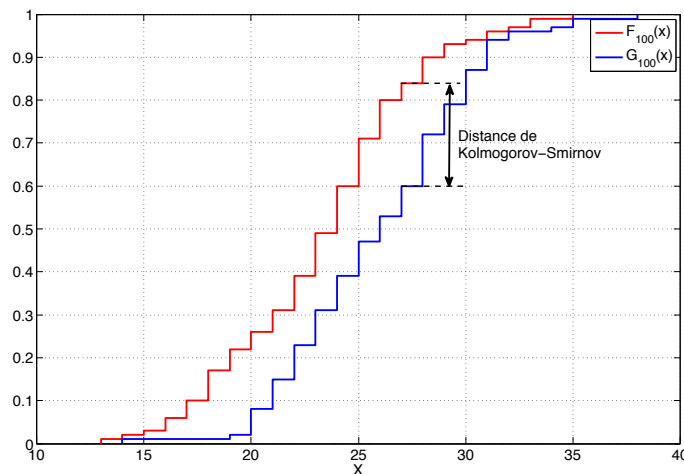


Figure 4.5 – Statistique de Kolmogorov-Smirnov pour la comparaison de deux échantillons de taille  $n = 100$ . Les tracés rouge et bleu représentent la fonction de répartition empirique pour chacun des échantillons.

La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov peut se révéler quelque fois très sensible au bruit puisqu'elle ne prend en compte que la plus grande distance entre les fonctions de répartition empiriques des échantillons comparés. Le test de Cramér-von Mises [Anderson 1962] reprend le principe de comparaison de fonction de répartition du K-S test mais au lieu de se focaliser sur l'écart maximal, il compile tous les écarts sous la forme de la somme de carrés des différences. La statistique de ce test s'écrit :

$$T_{n,m} = \frac{nm}{(n+m)^2} \sum_{i=1}^{n+m} [F_n(x) - G_m(x)]^2. \quad (4.25)$$

Il semble logique de penser que le test de Cramér-von Mises soit plus puissant que le test de Kolmogorov-Smirnov, mais ce résultat n'a pas été démontré.

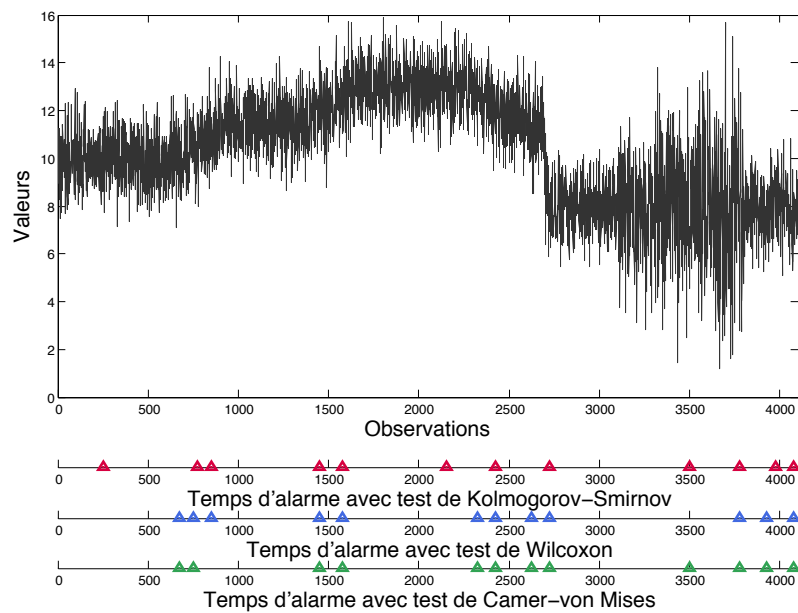


Figure 4.6 – Résultats de l'algorithme de détection de rupture avec les tests de Kolmogorov-Smirnov et Wilcoxon sur une série temporelle générée aléatoirement

## 4.4 Application

Dans cette partie une application de l'algorithme de détection par fenêtre glissante est proposée. A titre comparatif, les statistiques de Kolmogorov-Smirnov de Wilcoxon et de Cramèr-von Mises sont utilisées pour effectuer la mesure de distance entre deux ensembles de données. L'algorithme est appliqué sur un jeu de données simulées intégrant différents types de changements (lent, rapide, brusque ...).

La figure 4.6 présente le jeu de données utilisé pour tester l'algorithme de détection de changement. Ce jeu de données est composé de 4100 observations. Les données sont générées, par paquets de 100 observations, suivant une loi de weibull dont les paramètres (forme et échelle) évoluent au cours du temps. Les triangles rouges, bleus et verts correspondent aux instants de changements détecté avec les statistiques respectives de Kolmogorov-Smirnov, Wilcoxon et Cramèr-von Mises.

Dans les trois cas les paramètres utilisés pour l'algorithme de détection de rupture sont les mêmes. La fenêtre glissante est composée des 100 dernières observations et se décale toutes les 25 nouvelles observations. La taille minimale des ensembles de données, pour effectuer leurs comparaisons, est fixée à 25. La valeur seuil, au-delà de laquelle un instant de changement est détecté, est choisie de manière à ce que le risque de première espèce soit  $\alpha = 0.01$ .

Après chaque changement détecté, la moyenne et la variance des 100 observations suivantes sont calculées. L'évolution des moyennes et des variances avec les trois tests statistiques peut être tracée et comparée à celle de référence. Cependant, il est difficile de faire un comparatif correct à partir d'un seul exemple. Pour pallier



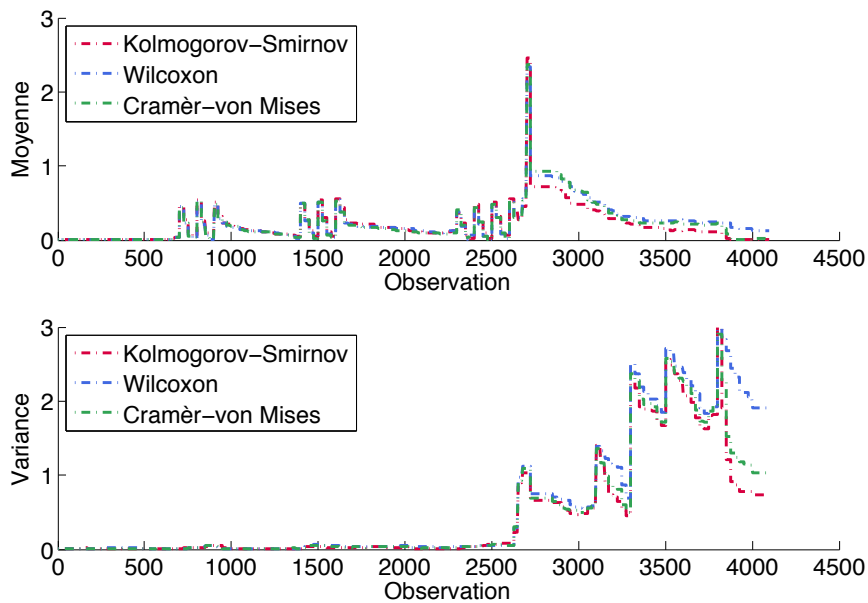


Figure 4.7 – Écart moyen entre la moyenne et la variance réelle estimées après avec les statistiques de Kolmogorov-Smirnov, de Wilcoxon et de Cramèr-von Mises.

à cette difficulté, l'expérience est ré-itérée 100 fois avec des jeux de données différents suivant les mêmes distributions. La figure 4.7 présente la moyenne, sur les 100 expériences, des écarts entre les moyennes et variances réelles et celles estimées en utilisant les tests de Kolmogorov-Smirnov, de Wilcoxon et de Cramèr-von Mises.

Le test de Kolmogorov-Smirnov permet d'avoir, en moyenne, de meilleurs résultats sur les jeux de données considérés. Les trois tests ont un comportement similaire sur la première partie des séries de données. Cette partie correspond à des zones de changements lents, de changements rapides ou de stationnarité. La différence entre les trois tests est visible à partir de la 2600-ième observation.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre présente un inventaire de méthodes pour détecter des changements dans les paramètres d'un modèle de dégradation. Cette détection d'instant de changement est réalisée en effectuant un suivi des données utilisées pour l'apprentissage des lois de temps de séjour. L'hypothèse sous-jacente qui est faite est qu'un changement dans les données d'apprentissage influent sous les paramètres du modèle de dégradation.

Deux grandes classes de méthode existent pour réaliser une détection de changement dans une série temporelle. Les méthodes paramétriques nécessitent de faire des hypothèses sur la distribution des données alors que les méthodes non-paramétriques se passent de toute considération. Les méthodes non-paramétriques sont privilégiées

dans notre approche pour ne pas perdre la généralité des modèles graphiques de durée.

Une nouvelle méthode non-paramétrique de détection de changement basée sur les tests d'hypothèses est proposée dans ce chapitre. Cette méthode consiste en une série de comparaisons d'échantillons. La simplicité de l'algorithme proposé permet d'avoir une méthode bien adaptée à la détection en ligne.



# Chapitre 5

## Optimisation de la maintenance du système d'accès voyageur d'un matériel ferroviaire

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	<b>100</b>
5.1.1	Contexte de l'étude . . . . .	100
5.1.2	Projet SurFer . . . . .	101
5.2	Présentation du système d'accès voyageurs . . . . .	<b>103</b>
5.2.1	Réglages du système porte . . . . .	104
5.2.2	Risque d'indisponibilité et de sécurité . . . . .	106
5.3	Modélisation du système . . . . .	<b>107</b>
5.3.1	Description graphique . . . . .	107
5.3.2	Description probabiliste . . . . .	109
5.3.2.1	Distributions initiales . . . . .	109
5.3.2.2	Distributions de transition . . . . .	110
5.3.2.3	Distribution des temps de séjours . . . . .	112
5.4	Action de maintenance et modélisation . . . . .	<b>112</b>
5.4.1	Politique de maintenance . . . . .	112
5.4.2	Modélisation de la maintenance . . . . .	113
5.5	Résultats . . . . .	<b>115</b>
5.5.1	Optimisation des périodes de reprise . . . . .	115
5.5.2	Adaptation dynamique des paramètres de maintenance . . . . .	120
5.6	Conclusion . . . . .	<b>125</b>

---

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Contexte de l'étude

Pour un maintien, et si possible une amélioration de la qualité de service des transports ferrés en Île-de-France, la Société Nationale des Chemins de fer Français (SNCF) a lancé depuis les années 2000 une opération de renouvellement de son parc d'automotrices<sup>1</sup>. En effet, la conception technique des trains de banlieue, même des plus récents, remonte à près de 20 ans. Les plus anciens circulent sur le réseau depuis 35 ans. Les automotrices inox de type Z5300 et Z6100, aussi appelées "petit-gris", représentaient plus de 30% du parc de la SNCF, au début des années 2000. Les inconvénients de ce matériel sont nombreux et bien connus des usagers. Il s'agit de problèmes de confort, de difficultés d'ouverture des portes, de problèmes de sécurité (ouverture des portes possible en marche), de pannes fréquentes, et de problèmes de régulation du chauffage.

Les figures C.2 et C.1 (en annexe) présentent l'ensemble des matériels roulants utilisés par la SNCF pour les missions Transiliennes et leurs répartition en 2006.

L'objectif, à cette date, est de faire disparaître les automotrices de type RIB/RIO (Rame inox de Banlieue, Rame inox omnibus), Z5300 et Z6100. Le retrait du service des "petit-gris" commence en 2000 pour les automotrices de type Z5300 et en 2002 pour le Z6100. Elles sont progressivement remplacées par des automotrices à deux niveaux : les Z2N. La famille des Z2N est composée des automotrices de type Z5600, Z8800, Z20500, Z20900 et Z22500. Toutefois, ces premiers programmes de renouvellement du matériel roulant n'ont pas suffi à faire disparaître complètement les automotrices en inox.

En février 2004, un appel d'offre est lancé par la SNCF pour la conception et la réalisation d'un nouveau train destiné au réseau ferré de banlieue en Île-de-France. Le nouveau matériel attendu par la SNCF, est un matériel innovant, performant, fiable et confortable. Alstom, Siemens et Bombardier font chacun des propositions en réponse à cet appel d'offre. En 2006 le marché est attribué à Bombardier avec sa proposition : le Spacium 3.06.

Le Spacium 3.06 possède plusieurs dénominations qui sont utilisées dans des contextes différents. Du côté de la SNCF, la dénomination utilisée est Z50000 ou Francilien. Chez Bombardier, il est plus courant d'utiliser le nom du projet : NAT (pour Nouvelle Automotrice Transilienne). Dans la suite du manuscrit, c'est la dénomination NAT qui sera utilisée le plus souvent.

La NAT représentée figure 5.1 est une rame automotrice de dernière génération. C'est une automotrice électrique à un niveau composée de 7 ou 8 caisses. Elle dispose

---

1. Une automotrice est un véhicule ferroviaire à traction électrique, composé d'une seule caisse, aménagé pour le transport de voyageurs, aptes à tracter une ou plusieurs remorques. À la SNCF, on le distingue de l'autorail qui est propulsé par un moteur thermique.

de deux accès voyageur par caisse, un de chaque côté. D'un point de vue pratique et esthétique, elle satisfait complètement les exigences de la SNCF.



Figure 5.1 – Vue extérieure et intérieure de l'automotrice Spacium 3.06 de Bombardier

Les caractéristiques principales de cette automotrice sont :

- une absence de cloisons entre les voitures, qui offre une visibilité à l'intérieur de la rame de plus de 100 mètres d'un seul tenant
- de grandes fenêtres, qui offrent une luminosité exceptionnelle
- un design intérieur innovant et coloré dessiné pour rompre avec la morosité des anciens trains
- un design extérieur qui rappelle celui du TGV avec sa face avant inclinée.

### 5.1.2 Projet SurFer

Les défaillances entraînant une immobilisation des trains en exploitation sont des événements redoutés par les constructeurs de matériels ferroviaires et leurs exploitants. Elle peuvent entraîner des insatisfactions des voyageurs, une dégradation de l'image de marque de la société exploitante ou des risques de pénalités financières.

Les accès voyageurs sont des équipements critiques d'un train, pouvant entraîner des perturbations du trafic et des interruptions du service ferroviaire. Il est estimé que 30% à 40% des défaillances d'un train en service commercial sont causées par les accès voyageurs [Cauffriez 2013].

Pour satisfaire les contraintes de fiabilité exigées par la SNCF, Bombardier a initié le projet SurFer (Surveillance Ferroviaire Active). Ce projet est réalisé en collaboration avec l'IFSTTAR (Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'aménagement et des Réseaux), le laboratoire TEMPO (Thermique Ecoulement Mécanique Matériaux Mise en Forme Production) de l'UVHC (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis) ainsi qu'avec deux entreprises valenciennes :

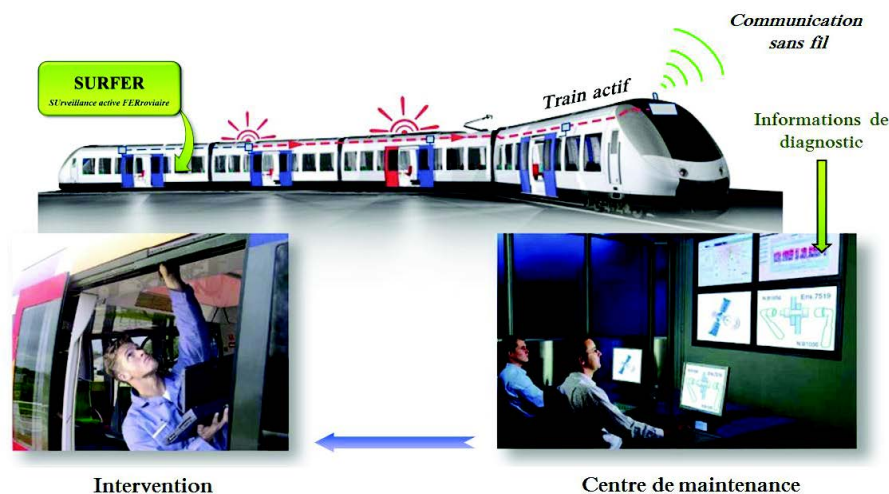


Figure 5.2 – Approche de surveillance active embarquée SURFER

la société PROSYST et le groupe HIOLES INDUSTRIES. Ce projet lancé en juin 2010 pour une durée de trois ans est financé par le FUI (Fonds Unique Interministériel), la région Nord-Pas-de-Calais et labellisé par les pôles de compétitivité *I-trans* et *Advancity*.

Le projet SurFer a pour objectif d'accroître la disponibilité des matériels roulants ferroviaires et d'optimiser les tâches de maintenance des trains, en particulier celles relatives aux portes d'accès. A travers ce projet, Bombardier souhaite pouvoir proposer des produits plus fiables avec un coût d'exploitation réduit. Dans cette optique, le projet SurFer cible la disponibilité des équipements embarqués dans les trains de passagers, avec pour objectif d'étudier, de développer et de mettre au point en situation réelle les fonctions suivantes :

- Surveillance, diagnostic de pannes et diagnostic prédictif embarqué,
- Aide au dépanneur pour la maintenance corrective et préventive,
- Optimisation dynamique des plans de maintenance tenant compte de l'état des équipements surveillés sur l'ensemble d'une flotte. Ce dernier point est particulièrement intéressant pour les matériels de nouveau type dont il faut ajuster fortement le plan de maintenance en début de vie.

L'approche de surveillance SURFER s'inscrit dans une démarche de diagnostic embarqué, nécessitant de traiter les données au plus près des équipements surveillés pendant leur fonctionnement (surveillance en-ligne). Les exploitants de matériels ferroviaire souhaitant améliorer la disponibilité de leurs flottes de trains et optimiser les coûts de maintenance peuvent ainsi exiger le déploiement de la solution SURFER sur de nouveaux investissements ou équiper leurs flottes actuelles à posteriori. La problématique majeure est de passer d'une approche de surveillance centralisée, où le diagnostic est réalisé à distance, à une approche de surveillance active embarquée, où le diagnostic est implanté à bord du système train (figure5.2).

Cette thèse s'inscrit dans le dernier objectif sur l'optimisation dynamique de plan

de maintenance des accès voyageurs. Notons que le projet SurFer a conduit à la production de deux autres thèses de doctorat : [Turgis 2013] et [Le Mortellec 2014].

## 5.2 Présentation du système d'accès voyageurs

Sur la NAT, le système d'accès voyageurs est composé de trois sous-systèmes :

- la porte, composée de deux vantaux
- une marche mobile, pour faciliter l'accès au train en cas de quai bas
- un comble-lacune, pour permettre l'accès au train aux Utilisateurs en Fauteuils Roulants (UFR)

La figure 5.3 représente l'extérieur de la NAT en version courte (7 caisses) et le système d'accès voyageurs d'une voiture d'extrémité.

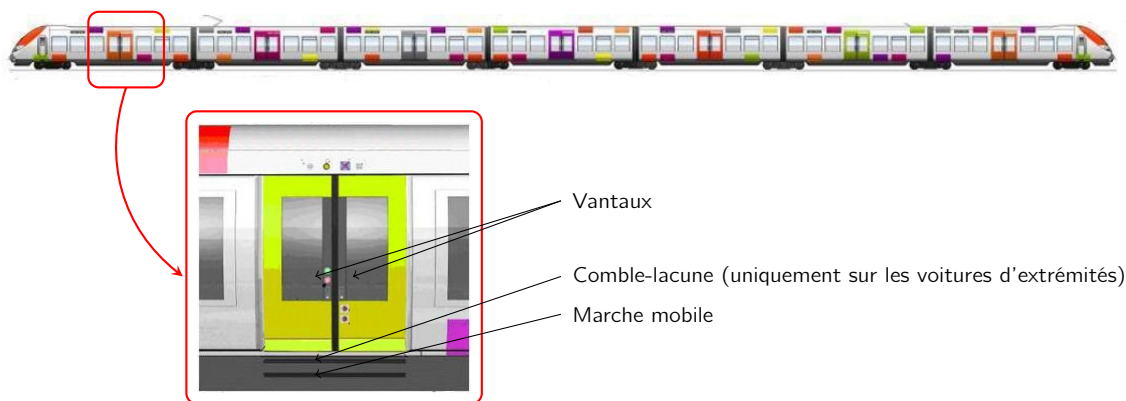


Figure 5.3 – Architecture extérieure du train NAT (version courte : 7 caisses) et système d'accès voyageurs

Les dispositifs de marche mobile et de comble-lacune constituent des innovations importantes pour rendre le train accessible en autonomie aux personnes à mobilité réduite (PMR) et aux UFR. Seuls les accès des voitures d'extrémités sont équipés du système de comble-lacune. Contrairement à la porte, la défaillance de l'un des deux sous-systèmes de marche mobile ne représente pas une panne grave.

La position des principaux composants constituant le système de porte de la NAT est donnée par la figure 5.4. Lors des phases d'ouverture et de fermeture des portes, les vantaux suivent un mouvement de translation, avec des directions opposées, selon l'axe  $x$ .

Chaque voiture de la NAT est équipée d'une porte par face située au centre de la voiture. La porte a une largeur libre de passage d'environ deux mètres (l'une des plus larges en exploitation en Europe). Elle est composée de deux vantaux (numéroté 1 sur la figure 5.4) animés d'un mouvement de coulissement extérieur. La porte est motorisée par un moto-réducteur à courant continu, qui est accouplé à un système de vis sans fin (numéroté 5 sur la figure 5.4) convertissant le mouvement initial de



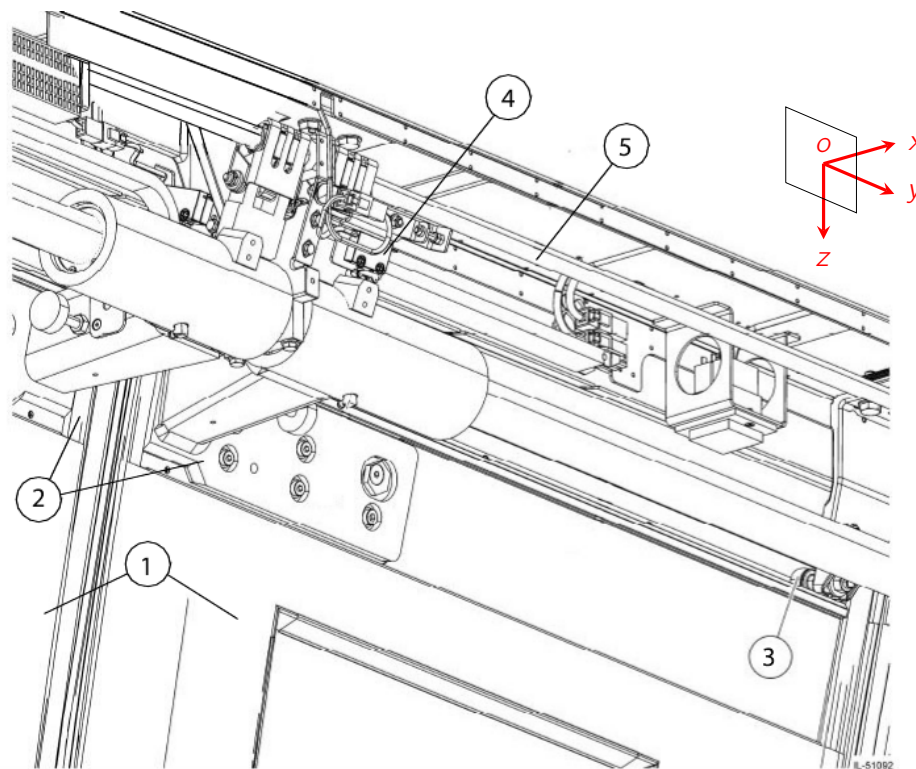


Figure 5.4 – Composants principales du système de porte de la NAT. L'axe  $x$  correspond à l'axe suivant lequel les usagers rentrent ou sortent du train. L'axe  $y$  coïncide avec l'axe de déplacement du train. L'axe  $z$  correspond à l'axe vertical.

rotation en un mouvement de translation. La vis sans fin est à pas inversés en son milieu donnant à chaque vantail un mouvement de translation symétriquement opposé. La liaison entre les vantaux et le châssis est assurée par les supports (numéroté 2 sur la figure 5.4). Le capteur de fin de course (numéroté 4 sur la figure 5.4) est un contacteur qui permet de s'assurer que les vantaux soient en position de fermeture. Le galet (numéroté 3 sur la figure 5.4) est une petite roulette fixée au châssis du train, qui permet de limiter les mouvements de rotation des vantaux.

### 5.2.1 Réglages du système porte

Les supports des vantaux autorisent une certaine liberté dans leurs positionnements. En effet, la hauteur du seuil de porte représentée par la figure 5.5b peut être plus ou moins importante en fonction du réglage. Cette hauteur est évaluée à partir de quatre mesures prises aux points  $A$  et  $B$ , comme indiqué sur la figure 5.5b.

La position des vantaux peut être également ajustée de manière à basculer de façon continue d'une position dite en à une position en A. Ce réglage, appelé "V", est effectué à partir des cotes  $a$  et  $X$  représentés sur la figure 5.5a. Dans le cas nominal, les vantaux forment un V moyen (la cote  $a$  est supérieure à  $X$  de 3mm avec une marge de réglage de 1.5mm,  $a = X + 3mm^{+1.5}$ ).

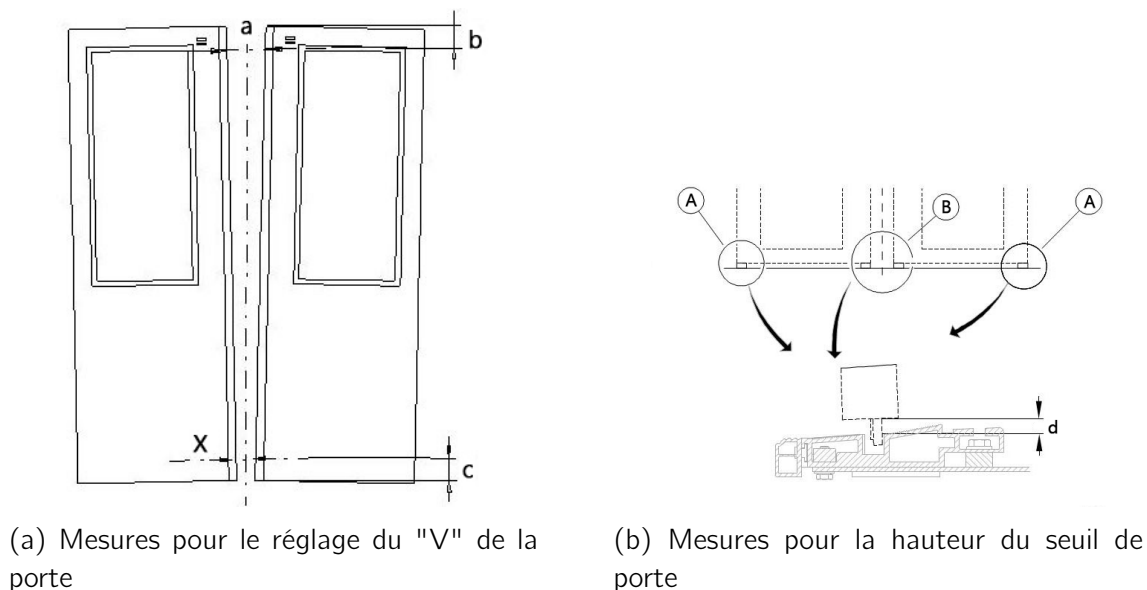


Figure 5.5 – Mesures pour le réglage de la position de la porte

Le cas où les vantaux forment un  $A$  ( $a < X$ ) est un événement redouté. Dans cette configuration, la porte présente un risque important de sécurité. En effet, le capteur de fermeture des portes (Fin de Course, abrégé FdC) étant positionné dans leurs parties hautes, la configuration en  $A$  crée un espace dans la partie basse de la porte, à la fermeture. Dans le meilleur des cas, cet espace laissé entre les vantaux pose un problème d'étanchéité des portes et dans le pire des cas il peut permettre l'introduction d'un objet, ou coincer un membre inférieur d'un voyageur.

Inversement, un  $V$  trop grand ( $a \geq X + 4.5mm$ ) entraîne un risque d'indisponibilité du train. En effet, dans cette configuration le capteur de fin de course ne peut plus détecter la fermeture des portes. L'erreur est signalée au poste de conduite et le train est contraint de rester à quai.

Les autres réglages du système de portes ne concernent pas directement les vantaux mais ont un impact sur leur fonctionnement. Il s'agit des réglages de position du capteur de fin de course et de position du galet. La position du capteur de fin de course est réglable selon l'axe  $x$ . Ce positionnement est important pour les fonctions de détection d'obstacle et de détection de fermeture. En effet, si le capteur de fin de course est réglé trop en avant, les vantaux laissent un espace quand les portes sont fermées et la détection d'obstacle n'est plus assurée. Inversement, un réglage trop en arrière du capteur de fin de course rend la détection de la fermeture des portes impossible.

Le réglage du capteur de fin de course (FdC) est évalué à partir de la différence  $\delta = (b - c)$  de deux mesures de distance entre les vantaux. La première mesure  $b$  est effectuée avec une fermeture automatique des portes, c'est-à-dire une fermeture classique jusqu'à ce que les vantaux atteignent le FdC. La seconde mesure  $c$  est effectuée après une fermeture manuelle des portes, c'est à dire sans tenir compte du FdC.

La position du galet est réglable en hauteur selon l'axe  $y$ . Ce galet joue un rôle de garde-fou en empêchant les vantaux de passer dans une configuration en A si un obstacle gêne la fermeture de la porte. Si le galet est positionné trop haut, il risque de ne pas accomplir sa mission et la porte peut se retrouver en A. Inversement, si le galet est positionné trop bas, il peut créer des frottements avec les vantaux et gêner voir même bloquer l'ouverture et la fermeture des portes.

## 5.2.2 Risque d'indisponibilité et de sécurité

Le blocage du mécanisme de porte est un événement redouté. En effet, une défaillance de ce type entraîne une fin de mission anticipée du train, un retour non planifié à l'atelier, une perturbation du trafic et des répercussions sur la qualité de service.

De plus, la plus grande crainte des exploitants ferroviaires concerne la sécurité des usagers. Au niveau des accès voyageurs, cette sécurité se traduit par une fonctionnalité indispensable qui consiste à détecter un obstacle à la fermeture des portes afin de bloquer le démarrage du train.

Les niveaux de risque de verrouillage sur obstacle et de blocage en fonction de toutes les configurations de réglages possibles sont données dans la table 5.1. Les configurations non présentes dans la table ne présentent aucun risque.

Le risque de verrouillage sur obstacle ne dépend que des réglages du "V", du galet, et du capteur de fin de course.

Le risque de blocage ne dépend que du réglage de hauteur de seuil de porte et de la position du galet.

**Table 5.1** Tables de décision pour les risques de blocage et de fermeture sur obstacle

Risque de verrouillage sur obstacle				Risque de blocage		
Configuration				Configuration		
V	Galet	FdC	Risque	Seuil	Galet	Risque
A	inf	inf	nul	bas	inf	fort
A	inf	sup	très faible	bas	norm	fort
A	sup	inf	moyen	bas	sup	fort
A	sup	sup	fort	haut	inf	fort
N	inf	inf	nul	haut	norm	faible
N	inf	sup	très faible	haut	sup	faible
N	sup	inf	moyen			
N	sup	sup	fort			
V	inf	inf	nul			
V	inf	sup	très faible			
V	sup	inf	moyen			
V	sup	sup	fort			

## 5.3 Modélisation du système

### 5.3.1 Description graphique

La modélisation de la dégradation et de la maintenance du système de porte est réalisée suivant l'approche *VirMaLab*. Les principaux réglages (dé-réglages) pouvant influencer la disponibilité du train ou la sécurité des porte sont modélisés. Il s'agit des réglages de "V", de hauteur de seuil, de position du capteur de fin de course et de position du galet. Ces réglages sont représentés par des variables aléatoires dont les valeurs évoluent au cours du temps. La complexité de l'évolution du réglage du "V" impose une modélisation par un MGD. En revanche, pour l'évolution des autres réglages l'hypothèse d'une distribution de temps de séjour géométrique a été adoptée sans difficulté. Cette hypothèse permet de réduire considérablement le nombre de paramètres des modèles de transitions. Elle est, par conséquent, plus adaptée dans le cas où la taille de l'ensemble d'apprentissage est petit.

La figure 5.6 présente le modèle associé à la maintenance du système porte de la NAT suivant l'approche *VirMaLab*. Les méthodes de diagnostics n'apparaissent pas dans ce modèle car elle se limitent à des mesures réalisées par les opérateurs de maintenance lors des retours périodiques de la rames en atelier. Ces mesures permettent de vérifier si les seuils de réglage de certain éléments sont respectés.

Le réglage du "V" (la valeur  $a - x$ ) à l'instant  $t$  est représenté par la variable aléatoire  $V_t$ . L'ensemble des valeurs possibles pour la différence  $(a - x)$  a été discrétisée et réduit à un ensemble de trois valeurs. La variable  $V_t$  peut prendre ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{V} = \{A, NL, V\}$ . La valeur  $A$  correspond à un réglage en  $A$  avec  $a - x \leq 0$ . La valeur  $NL$  (pour un "V" Nominal ou Léger) correspond à un réglage dans la zone de tolérance avec  $0 < a - x \leq 5$ . La dernière valeur  $V$  correspond à un réglage de "V" excessif avec  $a - x > 5$ .

La variable  $S_t$  représente le temps de séjour (en mois) de la variable  $V_t$  dans chacun des états possibles. La valeur de  $S_t$  est comprise entre 0 et 120. Le couple de variables  $\{V_t, S_t\}$  constitue un MGD.

La variable  $H_t$  représente la hauteur du seuil de porte et prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{\text{"bas"}, \text{"haut"}\}$ . En accord avec les experts de Bombardier, l'hypothèse selon laquelle la hauteur de seuil de porte est fonction du réglage du "V" a été retenue. Par conséquent, pour un instant  $t$  donné, la valeur de la variable  $H_t$  dépend uniquement de la valeur de la variable  $V_t$ . Cette hypothèse de corrélation des variables  $H_t$  et  $V_t$  est vérifiable à partir de considérations géométriques.

La variable  $G_t$  représente la distance discrétisée entre les galets et les vantaux. Elle prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{\text{"petit"}, \text{"normal"}, \text{"grand"}\}$ . La valeur "petit" correspond à un espacement entre les galets et les vantaux inférieurs à 0,5mm. La valeur "normal" correspond à un espacement compris entre 0,5 et 3mm. La valeur "grand" correspond à un espacement supérieur à 3mm. L'hypothèse selon laquelle

les temps de séjour dans chacun des états de  $G_t$  seraient distribués géométriquement a été retenue. En conséquence, à un instant  $t$  quelconque, la valeur de la variable  $G_t$  ne dépend que de sa valeur à l'instant précédent  $G_{t-1}$ .

La variable  $F_t$  représente le réglage du capteur de fin de course de fermeture et prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{\text{'inf'}, \text{'norm'}, \text{'sup'}\}$ . La valeur 'inf' correspond a une mesure inférieure à 3mm. Dans la plupart des cas, la conséquence d'un tel réglage est une erreur liée au fait que les capteurs de FdC ne soient pas activés à la fermeture des portes. La valeur 'norm' correspond à une mesure du réglage du FdC comprise entre 3mm et 6mm. La valeur 'sup' correspond à une mesure du réglage du FdC supérieure à 6mm. Dans cette dernière configuration, le risque de verrouillage sur obstacle est très important.

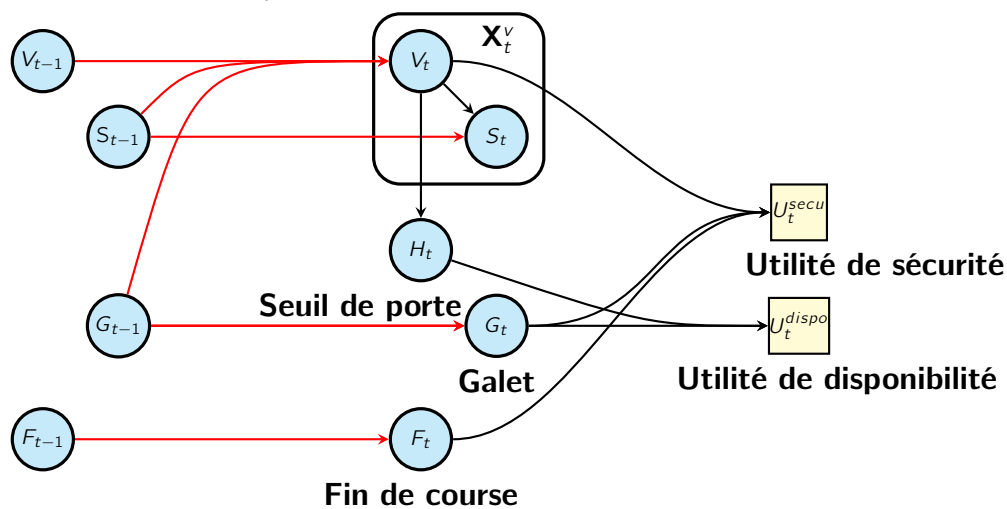


Figure 5.6 – Modèle *VirMalab* associé à la maintenance du système d'accès voyageur

Comme pour le galet, le taux de défaillance du fin de course est constant. Ce qui est traduit dans le modèle par le fait qu'à un instant  $t$  quelconque, la valeur de la variable  $F_t$  ne dépend que de sa valeur à l'instant précédent  $F_{t-1}$ .

Les risques d'indisponibilité et de verrouillage sur obstacle sont traduits respectivement par les nœuds d'utilités  $U_t^{dispo}$  et  $U_t^{secur}$ . A chaque instant  $t$  il est possible d'évaluer ces deux niveaux de risque en fonction de l'état des réglages de la porte. L'utilité  $U_t^{dispo}$ , associée au risque d'indisponibilité, est déterminée à partir des probabilités marginales des variables H et G. A partir de la matrice de décision exprimée dans la table 5.1, l'utilité  $U_t^{dispo}$  est définie pour tout  $t \geq 1$  par :

$$U_t^{dispo} = (1 - \epsilon) (\mathbb{P}(H_t = \text{'bas'}) + \mathbb{P}(H_t = \text{'haut'}, G_t = \text{'inf'})) + \epsilon (\mathbb{P}(H_t = \text{'haut'}, G_t \neq \text{'inf'})), \quad (5.1)$$

où  $\epsilon$  est un réel compris entre 0 et 1 traduisant un niveau de risque faible. Dans la suite, la valeur choisit pour le paramètre  $\epsilon$  sera 0,03.

L'utilité  $U_t^{secur}$ , associée au risque de verrouillage sur obstacle, est déterminée à partir des probabilités marginales des variables V, H et F. A partir de la matrice de

décision exprimée dans la table 5.1, l'utilité  $U_t^{secu}$  est définie pour tout  $t \geq 1$  par :

$$\begin{aligned} U_t^{secu} = & \epsilon_1 ((\mathbb{P}(G_t = 'inf', F_t = 'sup')) \\ & + \epsilon_2 ((\mathbb{P}(G_t = 'sup', F_t = 'inf')) \\ & + (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) ((\mathbb{P}(G_t = 'sup', F_t = 'sup'))), \end{aligned} \quad (5.2)$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont deux réels compris entre 0 et 1 traduisant des niveaux de risques faibles et moyens.

## 5.3.2 Description probabiliste

### 5.3.2.1 Distributions initiales

Cette partie présente les distributions initiales des variables du modèle de maintenance associée au système porte. Ces distributions caractérisent l'état du système au début de la simulation.

La distribution initiale de la variable  $V$ , relative à la position des vantaux, est définie pour tout  $x \in \{A, NL, V\}$ , par la LPC suivante :

$\mathbb{P}(V_{t=1} = x)$		
$V_{t=1}$		
A	NL	V
$\lambda_{V,1}$	$\lambda_{V,2}$	$1 - \lambda_{V,1} - \lambda_{V,2}$

où  $\lambda_{V,1}$  et  $\lambda_{V,2}$  sont deux paramètres réels compris entre 0 et 1 tel que :  $\lambda_{V,1} + \lambda_{V,2} \leq 1$ .

La distribution initiale de la variable  $G$ , associée au réglage du galet, est définie pour tout  $x \in \{\text{inférieur}, \text{normal}, \text{supérieur}\}$ , par la LPC suivante :

$\mathbb{P}(G_{t=1} = x)$		
$G_{t=1}$		
inférieur	normal	supérieur
$\lambda_{G,1}$	$\lambda_{G,2}$	$1 - \lambda_{G,1} - \lambda_{G,2}$

où  $\lambda_{G,1}$  et  $\lambda_{G,2}$  sont deux paramètres réels compris entre 0 et 1 tels que :

$$\lambda_{G,1} + \lambda_{G,2} \leq 1$$

La distribution initiale de la variable  $H$ , associée au réglage du seuil de porte, est définie pour tout  $x \in \{\text{petit}, \text{normal}, \text{grand}\}$ , par la LPC suivante :

$\mathbb{P}(H_{t=1} = x)$		
$H_{t=1}$		
petit	normal	grand
$\lambda_{H,1}$	$\lambda_{H,2}$	$1 - \lambda_{H,1} - \lambda_{H,2}$

où  $\lambda_{H,1}$  et  $\lambda_{H,2}$  sont deux paramètres réels compris entre 0 et 1 tels que :

$$\lambda_{H,1} + \lambda_{H,2} \leq 1$$

La distribution initiale de la variable D, associée au réglage du FdC, est définie pour tout  $x \in \{\text{petit}, \text{normal}, \text{grand}\}$ , par la LPC suivante :

$\mathbb{P}(H_{t=1} = x)$		
$H_{t=1}$		
petit	normal	grand
$\lambda_{D,1}$	$\lambda_{D,2}$	$1 - \lambda_{D,1} - \lambda_{D,2}$

où  $\lambda_{D,1}$  et  $\lambda_{D,2}$  sont deux paramètres réels compris entre 0 et 1 tels que :

$$\lambda_{D,1} + \lambda_{D,2} \leq 1$$

### 5.3.2.2 Distributions de transition

La matrice de transition qui traduit l'évolution du réglage du galet est la suivante :

$\mathbb{P}(G_t   G_{t-1})$			
$G_t$			
$G_{t-1}$	inf	norm	sup
inf	1.00	0.00	0.00
norm	0.00	$\alpha_G$	$1 - \alpha_G$
sup	0.00	0.00	1.00

où  $\alpha_G$  est un paramètre réel compris entre 0 et 1.

Remarquons, que cette matrice traduit le fait que les états 'inf' et 'sup' sont des états bloquant le réglage du galet. En d'autres termes, si le réglage du galet se retrouve dans une de ces deux configurations, il ne peut plus changer d'état. La configuration où le galet se retrouve dans la position 'inf' est un événement rare. Par conséquent, l'apprentissage de la probabilité de cet événement est une opération très longue. Dans l'état actuelle des choses la probabilité de transition vers l'état 'inf' n'a pas été déterminée. Les paramètres de cette matrice sont amenés à être modifiés par la suite.

La distribution de la variable  $G$  à un instant  $t$  quelconque est obtenue à partir de la distribution initiale de  $G$  et de la matrice de transition. Pour tout  $x \in \{\text{inf, norm, sup}\}$  et tout  $t > 0$  cette distribution est calculée de la manière suivante :

$\mathbb{P}(G_t = x)$		
$G_t$		
inférieur	normal	supérieur
$\lambda_{G,1}$	$\lambda_{G,2} * (\alpha_G)^t$	$1 - \lambda_{G,1} - \lambda_{G,2} * (\alpha_G)^t$

La matrice de transition qui traduit l'évolution du réglage du FdC est la suivante :

$\mathbb{P}(D_t D_{t-1})$			
$D_t$			
$D_{t-1}$	petit	normal	grand
petit	1.00	0.00	0.00
normal	$\alpha_{D,1}$	$\alpha_{D,2}$	$1 - \alpha_{D,1} - \alpha_{D,2}$
grand	0.00	0.00	1.00

où  $\alpha_D$  est un paramètre réel compris entre 0 et 1.

Les remarques sur la forme de cette matrice, sont similaires à la matrice de transition du réglage du galet. Les états 'petit' et 'grand' sont des états bloquant et la seule transition possible est celle de 'normal' vers 'grand'. Comme pour le galet, ceci est la conséquence de contraintes mécaniques sur le système de porte.

La distribution de la variable  $D$  à un instant  $t$  quelconque est calculée, pour tout  $x \in \{\text{petit, normal, grand}\}$  et tout  $t > 0$  cette distribution, de la manière suivante :

$\mathbb{P}(D_t = x)$		
$D_t$		
inférieur	normal	supérieur
$\lambda_{D,1} + \lambda_{D,2} \alpha_{D,1}^t$	$\lambda_{D,2} \alpha_{D,2}^t$	$1 - \lambda_{D,1} - \lambda_{D,2} \alpha_{D,1}^t \alpha_{D,2}^t$

La loi de transition naturelle du réglage de la position des vantaux est définie par la LPC de la variable  $V_t$  quand le temps de séjour dans l'état précédent  $V_{t-1}$  est écoulé, c'est à dire  $S_{t-1} = 1$ . Cette distribution dépend de la valeur de la variable  $G$  à  $t - 1$ . En effet, une transition vers l'état A est impossible si le réglage du galet est 'petit' ou 'normal'. En revanche, quand le réglage du galet est 'grand' les probabilités de transition de NL vers A et de V vers A sont non nulles. Ces règles traduisent des contraintes mécaniques sur le système de portes. La distribution de transition naturelle de la variable  $V$  est définie comme suit :



$\mathbb{P}(V_t   V_{t-1}, S_{t-1} = 1, G_{t-1})$				
		$V_t$		
$G_{t-1}$	$V_{t-1}$	A	NL	V
petit/normal	A	1	0	0
petit/normal	NL	0	0	1
petit/normal	V	0	0	1
grand	A	1	0	0
grand	NL	$\beta$	0	$1 - \beta$
grand	V	$\gamma$	0	$1 - \gamma$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont deux paramètres réels compris entre 0 et 1.

### 5.3.2.3 Distribution des temps de séjours

La distribution des temps de séjours pour le réglage du V est définie par une distribution discrète. Les états A et V étant considérés comme bloquants, seule la distribution de temps de séjour dans l'état "NL" est définie.

Notons que même dans le cas de l'utilisation des MGD, il peut être nécessaire de poser des hypothèses sur les distributions de temps de séjours. Par exemple, si le nombre de données est faible, poser l'hypothèse selon laquelle les temps de séjours suivent une loi de Weibull discrète permet de réduire significativement le nombre de paramètres à apprendre. De plus, les lois de Weibull sont souvent utilisées dans le domaine de l'analyse de durée de vie car elles permettent d'avoir des approximations correctes des lois réelles.

Les temps de séjour pour les variables associées aux réglages du galet et du FdC sont distribuées géométriquement. A chaque instant  $t$  la probabilité de changement d'état est la même.

## 5.4 Action de maintenance et modélisation

Les opérations de maintenance sur le système d'accès voyageur de la NAT sont de plusieurs ordres et nombreuses (environ 170 actions). Il peut s'agir d'un simple contrôle visuel des composants, d'un graissage des différents éléments mécaniques, d'une reprise des réglages, ou d'un remplacement de composant.

### 5.4.1 Politique de maintenance

Il est courant chez les exploitants ferroviaires que les opérations de maintenance de plusieurs sous-systèmes du train soient effectuées dans une même visite à l'atelier [Cheng 2002]. Cette politique de regroupement des actions de maintenance est utilisée dans le but de réduire l'indisponibilité du matériel dû à l'arrêt en atelier.

L'exploitant de la NAT (SNCF) planifie les opérations de maintenance sur les trains en suivant le schéma donné dans la figure 5.7.

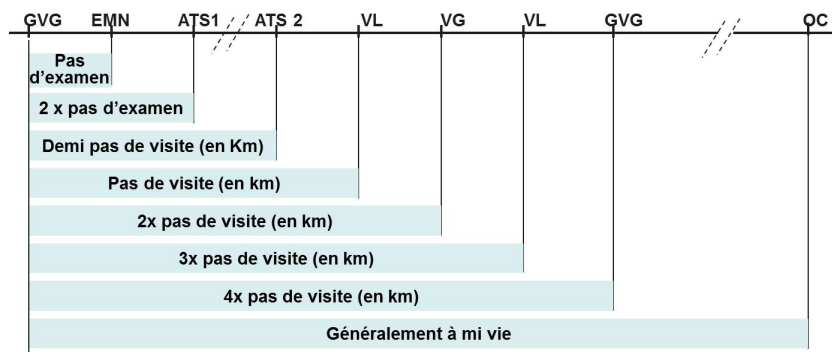


Figure 5.7 – Organisation de la maintenance à la SNCF

Les visites sont de types différents et de complexités plus ou moins importantes :

- la *Visite Limitée* (VL) consiste essentiellement en des essais et des contrôles des différentes fonctions du train.
- la *Visite Générale* (VG) est semblable à la VL en un peu plus détaillée.
- la *Grande Visite Générale* (GVG) est une visite complète du matériel roulant. Elle est planifiée sur deux semaines et comporte des opérations sur les parties mécaniques, électriques et sur la caisse du train.
- les *Opérations Caisses* (OC) regroupent l'ensemble des actions effectuées sur la partie caisse du train. Cette partie comprend notamment les portes d'accès, les portes internes, les sanitaires et l'aménagement.
- les *Autres Travaux Systématiques* (ATS) permettent d'intervenir sur les composants qui nécessitent une période d'inspection inférieure à la plus petite durée inter-visite.
- l'*Examen MécaNique* (EMN) est une inspection des parties mécaniques (bogies, pantographes, semelles de freins) du train.

Les opérations de maintenance du système d'accès voyageurs doivent s'inscrire dans cette échancier.

## 5.4.2 Modélisation de la maintenance

Pour compléter le modèle de maintenance, présenté par la figure 5.6, il reste à introduire les actions de maintenance. La figure 5.8 représente le modèle de maintenance mise à jour avec cette considération. Dans ce système, les principales opérations de maintenance sont des reprises partielles ou totales de l'ensemble des réglages.

Dans le modèle représenté figure 5.8, l'action de maintenance effectuée à l'instant  $t$  est représentée par la variable  $A_t$ . Seules les opérations de reprise des réglages sont

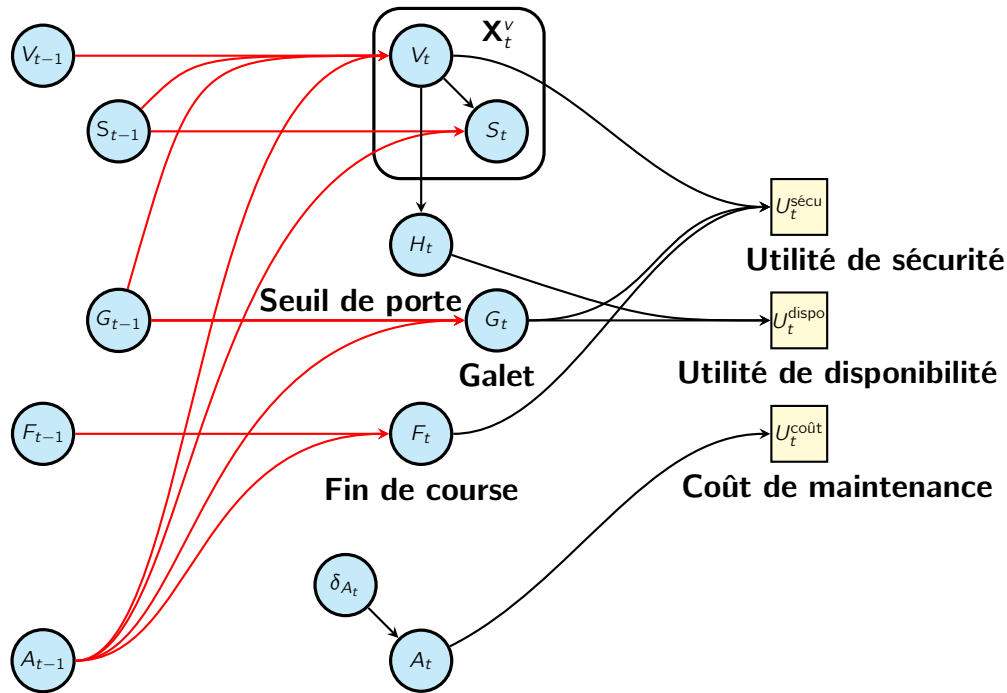


Figure 5.8 – Modèle *VirMalab* associé à la maintenance du système d'accès voyageur considérées dans notre modèle. L'action de maintenance peut être soit une reprise partielle des réglages soit une reprise intégrale de tous les réglages.

La reprise partielle consiste au réglage du "V", du FdC et du Seuil de porte. La reprise complète comprend tous les réglages de la reprise partielle et le réglage de la position du galet. Cette opération est plus complexe et plus coûteuse que la reprise partielle car elle impose la dépose de certains éléments de la porte. La variable  $A_t$  prend ses valeurs dans l'ensemble { "aucune", "partielle", "complète" }.

Si l'action de maintenance  $A_t$  effectuée à l'instant  $t$  est une reprise partielle, les variables  $V_{t+1}$  et  $F_{t+1}$  prennent les valeurs respectives "NL" et "normal" correspondant aux réglages nominaux. De plus, la distribution des temps de séjour dans l'état "NL", c'est-à-dire  $\mathbb{P}(S_{t+1}|V_{t+1})$  est réinitialisée.

Dans le cas d'une reprise intégrale des réglages à l'instant  $t$  ( $A_t = \text{"complète"}$ ), les conséquences sur les LPC des variables  $V_{t+1}$  et  $F_{t+1}$  et  $S_{t+1}$  sont les mêmes que pour une reprise partielle. De plus, ce choix d'action aura également des conséquences sur la variable  $G_{t+1}$  qui prendra la valeur "normal".

L'activation d'une ou de l'autre des actions de maintenance à un instant  $t$  est commandée par la variable de décision  $\delta_{A_t}$ . Si  $\delta_{A_t} = 0$  aucune action de maintenance n'est déclenché, si  $\delta_{A_t} = 1$  une reprise partielle des réglages est effectuée et si  $\delta_{A_t} = 2$  tous les réglages sont repris. Pour des raisons de logistique, il est préférable que le planning des actions de maintenance soit périodique. De ce fait, les périodes  $\pi^1$  et  $\pi^2$  sont définies de manière à ce que la reprise partielle soit activée avec la période  $\pi^1$  et la reprise complète avec la période  $\pi^2$ .

L'optimisation principale du plan de maintenance consiste à trouver les périodes

$\pi^1$  et  $\pi^2$  pour les opérations de reprises partielles et totales minimisant le coût de maintenance tout en assurant que les risques de sécurité et d'indisponibilité restent sous les seuils respectifs  $\nu^1$  et  $\nu^2$ . Formellement, il s'agit de résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pi^{1*}, \pi^{2*}) = \arg \min_{(\pi^1, \pi^2)} f^{\text{coût}}(\pi^1, \pi^2) \\ \text{Sous les contraintes :} \\ f^{\text{sécu}}(\pi^1, \pi^2) \leq \nu^1 \\ f^{\text{dispo}}(\pi^1, \pi^2) \leq \nu^2 \\ \pi^1 \leq \pi^2 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Avec les fonctions d'utilité  $f^{\text{coût}}$ ,  $f^{\text{sécu}}$  et  $f^{\text{dispo}}$  définies comme suit :  
Pour tout couple de période de maintenance  $(\pi^1, \pi^2)$  les fonctions d'utilités  $f^{\text{coût}}$ ,  $f^{\text{sécu}}$  et  $f^{\text{dispo}}$  sont définies, pour un horizon temporel  $T$  par :

$$f^{\text{coût}}(\pi^1, \pi^2) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T U_t^{\text{coût}} + c_1 U_t^{\text{sécu}} + c_2 U_t^{\text{dispo}}, \quad (5.4)$$

$$f^{\text{sécu}}(\pi^1, \pi^2) = \max_{t \in \{1 \dots T\}} U_t^{\text{sécu}} \quad (5.5)$$

et

$$f^{\text{dispo}}(\pi^1, \pi^2) = \max_{t \in \{1 \dots T\}} U_t^{\text{dispo}} \quad (5.6)$$

où  $c_1$ ,  $c_2$  sont des coûts respectivement associés au risque de sécurité et à l'indisponibilité du système.

## 5.5 Résultats

### 5.5.1 Optimisation des périodes de reprise

L'outil développé au cours de cette thèse permet d'évaluer les risques d'indisponibilité ( $f^{\text{dispo}}$ ) et de perte de la fonction de détection d'obstacles ( $f^{\text{secur}}$ ) des accès voyageur de la NAT pour différentes valeurs de période de maintenance  $\pi^1$  et  $\pi^2$ . En fonction du type de visite la périodicité est exprimée en jours années ou kilomètre parcourue.

La table 5.2 présente l'organisation actuelle de la maintenance sur la NAT. Les principales actions de maintenance et leurs périodicités y sont définies.

L'exemple suivant présente les fonctions d'utilités liées au risque d'indisponibilité et de perte de la fonction de détection d'obstacles en fonction des périodes de maintenance  $\pi^1$  et  $\pi^2$ . Dans l'étude paramétrique réalisée, nous avons fait varier les périodes de renouvellement partielle et complète  $\pi^1$  et  $\pi^2$  de 1 à 100 semaines. L'horizon d'étude choisi est de 600 semaines.

**Table 5.2** Organisation des visites sur le système d'accès voyageur de la NAT

Périodicité	Travaux à effectuer
<b>ATS</b> (112 jours)	Contrôle local de l'ouverture portes - marches UFR/PMR Test des fonctions de condamnation
<b>ATP</b> (365 jours)	Contrôle de la fonction de détection d'obstacle
<b>ATP</b> (3285 jours)	Remplacement de la courroie du mécanisme de porte Remplacement de la courroie des combles lacunes
<b>VL</b> (200 000 km)	Contrôle et réglage du capteur de fin de course Graissage des joints Contrôle des courroies Examen visuellement
<b>VG</b> (400 000 km)	Toutes les tâches décrites en VL Contrôle et réglage des galets de portes Nettoyage et graissage de la vis sans fin Contrôle et réglage du "V" Contrôle et réglage du jeu vantail/seuil Contrôle l'effort de l'ouverture manuel
<b>GVG</b> (800 000 km)	Toutes les tâches décrites en VG Contrôle du contact des butées
<b>OC</b> (18 ans ou 3 000 000 km)	Dépose des vantaux Remplacement du moto-réducteur du mécanisme de porte Remplacement du fin de course remplacement des pièces d'usure
<b>EAV</b> (Essais Après Visite)	Test de l'ouverture et la fermeture des portes Test du fonctionnement des combles lacunes

Du fait de la relative "jeunesse" du projet SurFer, les données disponibles ne permettent pas de définir correctement toutes les distributions de temps de séjours des différents composants. Par conséquent, à titre illustratif, les données d'apprentissage pour la distribution de temps de séjour dans l'état "NL" des vantaux sont générés suivant un mélange de loi normale. Le temps  $x$  passé dans la position "NL" par les vantaux est défini par :

$$x \sim 0.53\mathcal{N}(28, 4) + 0.27\mathcal{N}(45, 4) + 0.07\mathcal{N}(50, 2) + 0.13\mathcal{N}(30, 10) \quad (5.7)$$

Les paramètres du modèle utilisé pour cette expérimentation sont les suivants :

- $\alpha_G = 0.949$  pour définir la matrice de transition des états de dérèglement des galets
- $\gamma = 0.003$  et  $\beta = 0.007$  pour définir la matrice de transition naturelle des états de dérèglement des vantaux
- $\alpha_{D,1} = 0$  et  $\alpha_{D,2} = 0.929$  pour la matrice de transition des états de dérèglement des capteurs de fin de course

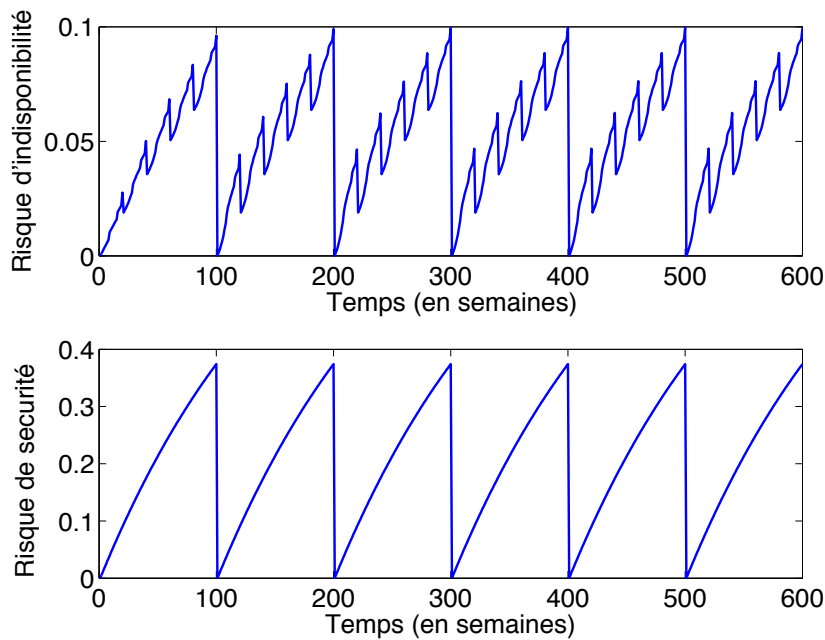


Figure 5.9 – Évolution des indicateurs de risque de verrouillage sur obstacle et d'indisponibilité sur un horizon temporel de 600 semaines

—  $(\lambda_{V,1}, \lambda_{V,2}) = (\lambda_{G,1}, \lambda_{G,2}) = (\lambda_{D,1}, \lambda_{D,2}) = (\lambda_{H,1}, \lambda_{H,2}) = (0, 1)$  pour traduire le fait que tous les réglages sont normaux à l'état initial.

La figure 5.9 présente l'évolution des paramètres sur un horizon de 150 semaines avec une reprise partielle des réglages toutes les 20 semaines et une reprise intégrale toutes les 100 semaines. A chaque instant  $t$ , les deux courbes donnent la probabilité que le système présente un risque de perte de fonction de détection d'obstacle ou d'indisponibilité. Les effets des reprises partielles et générales des réglages sont visibles sur les deux courbes. A chaque reprise partielle, le niveau de risque d'indisponibilité baisse de 0,01 à 0,03. La reprise globale des réglages a pour conséquence de remettre les indicateurs de risque de sécurité et d'indisponibilité à zéro. Bien que le risque d'indisponibilité après une reprise partielle soit identique à celui observé à l'état initial, la distribution des temps de séjour n'est pas la même pour l'état "NL" du vantail. C'est le cas, par exemple, après la reprise totale des réglages à la 100-ième semaine, l'évolution du risque d'indisponibilité augmente plus vite qu'à l'instant initial. Au bout d'un certain nombre d'actions de maintenance réalisées, un équilibre se forme et l'évolution des indicateurs devient périodique. Dans l'exemple d'évolution des indicateurs présenté figure 5.9, la périodicité est visible dès la 2<sup>ième</sup> reprise intégrale.

A partir des deux indicateurs présentés dans la figure 5.9, il est possible de construire deux autres indicateurs adaptés à un horizon large. Il s'agit de l'évolution des utilités moyennes de disponibilité et de sécurité. Mathématiquement ces nouvelles utilités sont définies par les équations suivantes :

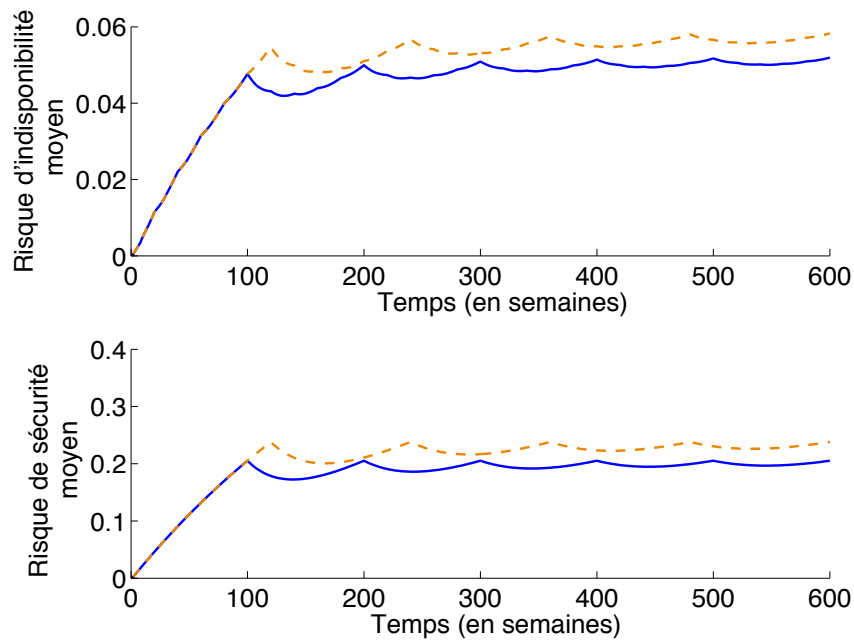


Figure 5.10 – Évolution des indicateurs de risque moyen de verrouillage sur obstacle et d'indisponibilité moyennée sur un horizon temporel de 600 semaines et pour deux plans de maintenance différents ( $\pi^1 = 20, \pi^2 = 100$  pour la courbe bleue et  $\pi^1 = 20, \pi^2 = 120$  pour la courbe orange en pointillés).

$$U_{moy}^{secu}(t) = \frac{1}{t} \sum_{t'=1}^t U_{t'}^{secu} \quad (5.8)$$

$$U_{moy}^{dispo}(t) = \frac{1}{t} \sum_{t'=1}^t U_{t'}^{dispo} \quad (5.9)$$

La figure 5.10 présente l'évolution des deux indicateurs moyens de sécurité et de disponibilité  $U_{moy}^{secu}$  et  $U_{moy}^{dispo}$  avec des périodes de reprise des réglages  $\pi^1 = 20, \pi^2 = 100$  pour la courbe bleue et  $\pi^1 = 20, \pi^2 = 120$  pour la courbe orange en pointillé. Cette vision permet de masquer le phénomène de périodicité généré par les actions de maintenance et met en exergue une information plus importante qui est le taux de défaillance moyen attendu pour un plan de maintenance donnée. En admettant que le processus de dégradation du système ne change pas au cours du temps, l'évolution de l'utilité moyenne tend vers une valeur qui approxime le nombre théorique de défaillances du système. Dans l'expérience réalisée, les courbes d'évolution des utilités moyennes représentées dans la figure 5.10 permettent de conclure qu'avec la stratégie de maintenance ( $\pi^1 = 20, \pi^2 = 100$ ) les risques moyens d'indisponibilité et de sécurité tendent respectivement vers 0,050 et 0,20 alors qu'avec la stratégie de maintenance ( $\pi^1 = 20, \pi^2 = 120$ ) ces indicateurs tendent vers 0,055 et 0,23 .

Les résultats complets de cette étude sont présentés dans les figures 5.11a et

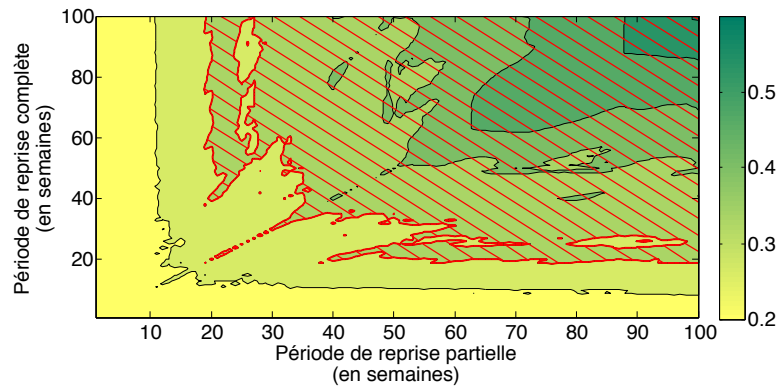
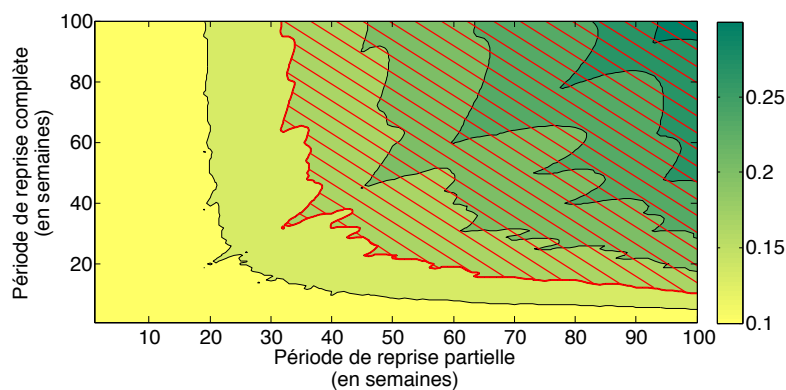
(a) Risque d'indisponibilité moyen ( $f^{\text{dispo}}$ )(b) Risque de verrouillage sur obstacle moyen ( $f^{\text{secur}}$ )

Figure 5.11 – Risques d'indisponibilité et de perte de la détection d'obstacle en fonction de la politique de maintenance

5.11b représentant respectivement les niveaux de risques d'indisponibilité et de sécurité moyens asymptotiques pour chaque couple  $(\pi^1, \pi^2)$ .

Les limites de zones tracées en rouge sur les figures 5.11a et 5.11b définissent les valeurs maximales admissibles pour les risques d'indisponibilité et de sécurité moyens. Ces valeurs "seuil" sont fixées à  $\nu_1 = 0,4$  pour l'indisponibilité et  $\nu_2 = 0,15$  pour la sécurité. L'ensemble des solutions admissibles du problème sont tous les couples  $(\pi^1, \pi^2)$  qui se situent en bas des deux tracés rouges (zone non hachurée).

Le choix d'une solution dans cet ensemble est effectué en fonction du coût de la politique de maintenance et de la possibilité d'inscrire le plan de maintenance du sous-système dans la stratégie globale de maintenance. Dans le cas présent, si la fonction de coût est définie avec les constantes suivantes (à titre d'exemple) :

- un coût d'indisponibilité  $c_1$  de 2000€
- un coût lié au risque de sécurité  $c_2$  de 6000€
- un coût pour une reprise partielle des réglages de 500€
- un coût pour une reprise intégrale des réglages de 1500€



alors la stratégie de maintenance qui minimise la fonction de coût complète sur un horizon temporel de 600 semaines peut-être obtenue en faisant une comparaison exhaustive de toutes les solutions admissibles. Dans ce cas, cette stratégie de maintenance sera ( $\pi^1 = 15, \pi^2 = 60$ ).

Suite à un changement de fournisseurs de pièces de rechange ou une sollicitation plus importante du système, la dynamique de dégradation des composants peut être amenée à évoluer. Généralement ce changement a pour conséquence que les paramètres de maintenance ne soient plus adéquats. La partie suivante aborde cette éventualité en proposant d'appliquer les algorithmes de détection de changement et de suivie de l'évolution des indicateurs de sécurité sur des dérives simulées de comportement de dégradation des composants.

### 5.5.2 Adaptation dynamique des paramètres de maintenance

La démarche proposée pour ajuster les périodes de maintenance de manière dynamique est composée des trois étapes suivantes :

1. Les données de retour d'expérience sont analysées en continu à l'aide de l'algorithme de détection de changement proposé dans le chapitre 4. Il s'agit dans cette étape de surveiller l'évolution des paramètres du modèle de dégradation de chaque composant. Si un changement est détecté, l'étape suivante est réalisée.
2. Les fonctions d'utilité pour le risque d'indisponibilité  $f^{\text{dispo}}$  et pour le risque de verrouillage sur obstacle  $f^{\text{sécu}}$  sont ré-évaluées avec les paramètres courants de maintenance en utilisant les nouveaux paramètres des modèles de dégradation sur un horizon  $T$ . Si les contraintes sur ces fonctions ne sont plus respectées l'étape suivante est réalisée, dans le cas contraire l'étape précédente est reprise.
3. La recherche d'une nouvelle solution optimale qui respecte les contraintes est effectuée. Dans cette application, toutes les solutions peuvent être évaluées afin de déterminer la meilleure. Dans la pratique, le nombre d'actions de maintenance peut-être plus beaucoup plus important. Dans ce cas, le dénombrement exhaustif des solutions n'est plus possible. L'algorithme d'évaluation d'une stratégie de maintenance proposée dans le chapitre 3 permet d'envisager des méthodes d'optimisation approchées.

Le schéma de la figure 5.12 récapitule l'agencement des étapes de la mise en place d'une stratégie de maintenance dynamique. En résumé, l'apprentissage des paramètres du modèle de dégradation est déclenché après chaque instant de changement détecté sur le flux de données. Les indicateurs de performance de la stratégie de maintenance sont calculés pour les paramètres de maintenance courant. Une détection de changement sur la valeur de ces indicateurs déclenche la ré-optimisation des paramètres de maintenance.

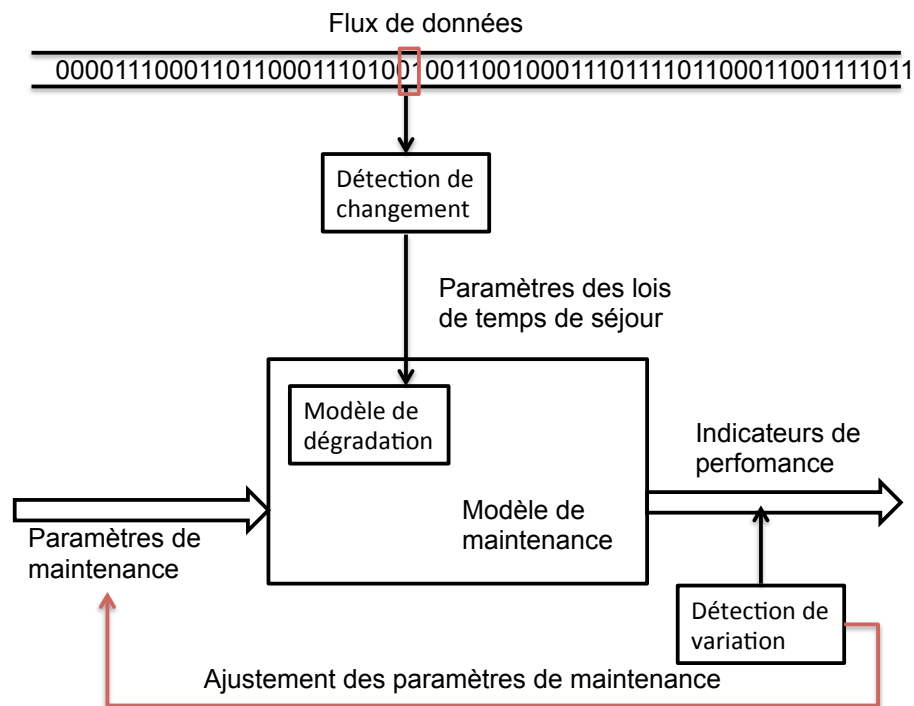


Figure 5.12 – Schéma récapitulatif de la stratégie dynamique de maintenance

L'évaluation de la performance des algorithmes proposés dans cette thèse est réalisée à partir de plusieurs ensembles de données simulés. Les paragraphes suivants expliquent la démarche utilisée pour créer ces jeux de données tests.

Chaque jeu de données est composé de deux séries temporelles représentant respectivement les temps de séjour dans l'état nominal des vantaux et du galet. Les séries de données sont générées par lot de 10 correspondant à une semaine d'acquisition de données. Les temps de séjour pour le galet sont générés suivant une loi géométrique dont le paramètre évolue au cours du temps. De même les temps de séjour associés aux vantaux sont générés suivant une loi de Weibull dont le paramètre d'échelle évolue au cours du temps. Les paragraphes suivants présentent un exemple de scénario dans lequel les lois de temps de séjours des galets et des vantaux dérive conjointement.

La figure 5.13 présente un exemple de scénario d'évolution des paramètres  $\gamma$  de forme et  $\mu$  d'échelle de la distribution de Weibull discrétisée utilisée pour générer les temps de séjour associés au vantail. La loi Weibull discrétisée est définie mathématiquement pour tout entier naturel  $x \in \mathbb{N}$  par :

$$\text{wbld}(x) = e^{-((x+1)/\mu)^\gamma} - e^{-(x/\mu)^\gamma}.$$

Dans les scénarios d'évolution considérés par la suite, seul le paramètre d'échelle des lois de weibull sera modifié, le paramètre de forme restant fixé à 4 tout au long du scénario. Les courbes bleues correspondent aux valeurs des paramètres définies par la simulation. Ces paramètres sont utilisés pour générer une série temporelle de données

illustrée par la figure 5.14. La série de données ainsi obtenue représente un ensemble de temps de séjour dans l'état 'NL' des vantaux.

L'algorithme 8 de détection de changement par fenêtre glissante présenté dans le chapitre 4 est appliqué sur la série temporelle générée. Les paramètres utilisés pour l'algorithme sont les suivants :

- taille de la fenêtre :  $N = 600$
- pas de déplacement de la fenêtre :  $n = 300$
- taille minimale d'une séquence :  $d = 300$
- calcul de la distance entre deux séquences : test de Kolmogorov-Smirnov
- seuil de décision :  $c = c_\alpha$  avec  $\alpha = 0.01$

Les instants de changement détectés par l'algorithme sont représentés par des traits rouges sur la figure 5.14. Après chaque instant de changement détecté les paramètres de la loi de Weibull sont ré-appris sur les données disponibles. Les courbes rouges de la figure 5.13 correspondent aux paramètres appris sur la séquence de données après la détection d'un changement. Sur cette simulation, l'algorithme de détection de changement présente de bonnes performances, puisqu'il détecte tous les changements de paramètres simulés.

De même, un exemple de scénario d'évolution des temps de séjour dans l'état "N" du galet est présenté. Cette dérive de comportement est définie l'évolution du paramètre de la loi géométrique donnée par la figure 5.15. La série de données générée avec ces paramètres pour représenter les temps de séjour relatives à l'état 'N' du galet ainsi que les instants de changement détectés sont représentés par la figure 5.16. Dans cet exemple de scénario, l'algorithme déclenche une fausse alarme et ne détecte pas le second changement de paramètres.

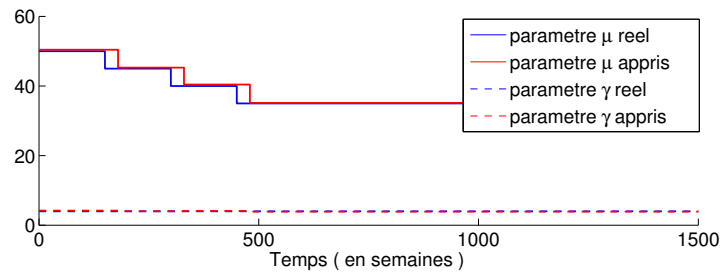


Figure 5.13 – Exemple de scénario d'évolution des paramètres de la distribution de Weibull pour la génération des données de temps de séjour pour le vantail

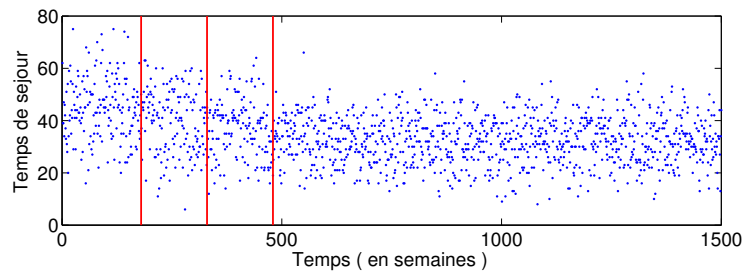


Figure 5.14 – Série temporelle de données représentant les temps de séjour dans l'état "NL" du vantail et générées suivant une loi de Weibull discrétisée avec des paramètres variables au cours du temps (fig. 5.13 ). Les traits rouges correspondent aux instants de détection de changement

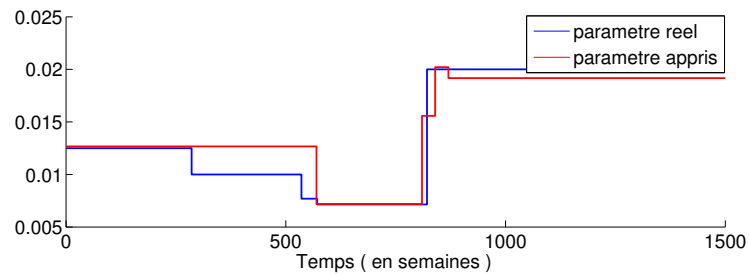


Figure 5.15 – Exemple de scénario d'évolution du paramètre de la loi géométrique pour la génération des données de temps de séjour pour le galet

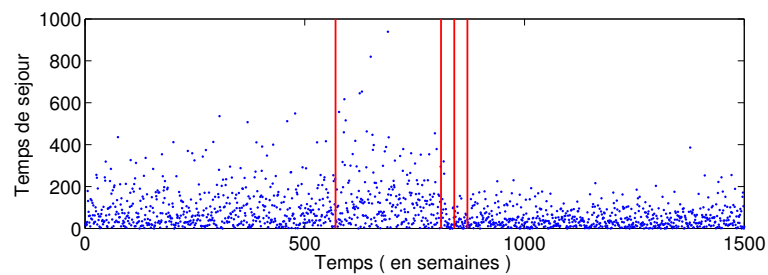


Figure 5.16 – Série temporelle de données représentant les temps de séjours dans l'état N du galet et généré suivant une loi géométrique avec un paramètre variable au cours du temps (fig. 5.15 ). Les traits rouges correspondent aux instants de détection de changement

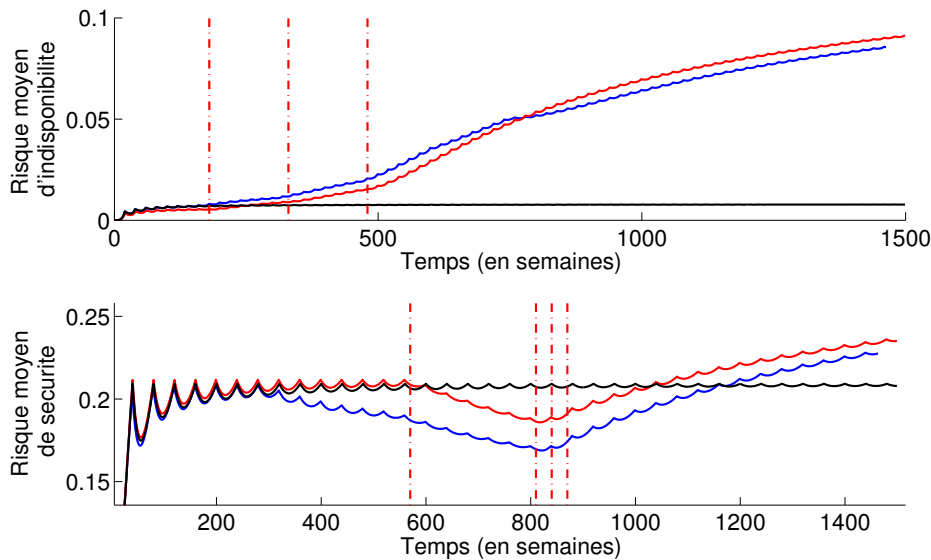


Figure 5.17 – Évolution des indicateurs moyens de risque d'indisponibilité et de sécurité

La figure 5.17 présente l'évolution des niveaux moyens de risque d'indisponibilité et de sécurité avec une période  $\pi^1 = 20$  semaines de reprise partielle des réglages et une période  $\pi^2 = 40$  semaines pour la reprise totale des réglages. Les indicateurs cumulés correspondent à  $U_{moy,t}^{secu}$  et  $U_{moy,t}^{dispo}$  définis par les équations 5.8 et 5.9 et définissent pour un instant  $t$  la disponibilité et le niveau de sécurité moyen depuis le début de la simulation.

Les courbes noires décrivent l'évolution de ces deux indicateurs dans le cas où il n'y a pas d'évolution des paramètres de dégradation utilisés pour générer les séries de données. Dans ce cas, les paramètres utilisés sont ceux définis initialement et restent constants sur toute la période de simulation. Ces courbes convergent rapidement vers des valeurs de niveau de risque de sécurité et d'indisponibilité qui correspondent au niveau attendu en appliquant la stratégie de maintenance.

Les courbes bleues décrivent l'évolution des indicateurs moyens calculés en utilisant les paramètres choisis pour faire la simulation. Ces courbes servent de référence, pour évaluer les performances de notre modèle de suivi d'évolution des indicateurs.

Les instants indiqués par les traits rouges en pointillés sont les instants de changements détectés dans les deux séries temporelles de données de temps de séjour. L'indicateur de sécurité étant essentiellement défini à partir de l'état des galets, seuls les instants de changement dans la série de temps de séjours du galet sont reportés sur la courbes représentant cette indicateur. De même, les instants de changement reportés sur la courbe représentant le risque d'indisponibilité au cours du temps correspondent aux changements détectés dans la série temporelle relative au temps de séjour dans l'état "NL" des vantaux.

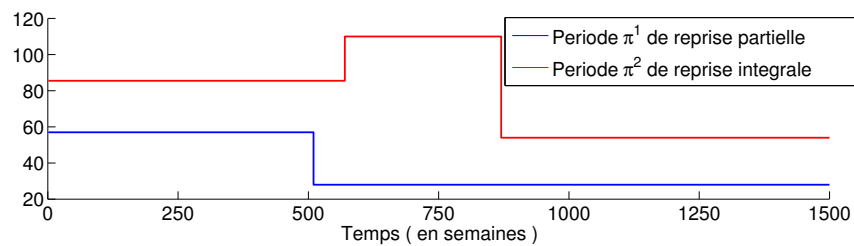


Figure 5.18 – Stratégie de maintenance adaptatif pour le scénario 1 d'évolution des paramètres

Après chaque instant de changement, les paramètres du modèle de dégradation sont réappris à partir des données disponibles à cet instant. L'évaluation des indicateurs continue avec ces nouvelles valeurs. Les deux courbes rouges décrivent l'évolution des indicateurs moyens calculés en utilisant les paramètres appris.

Les algorithmes mis en place permettent d'avoir un suivi de l'évolution des indicateurs avec une distance maximale entre la courbe théorique (bleue) et la courbe estimée (rouge) de 0.01 pour le risque de sécurité et 0.008 pour le risque d'indisponibilité. Ces distances relativement faibles par rapport aux écarts entre les courbes sans prise en compte de la dérive (courbes noires) montrent des performances satisfaisantes de l'approche proposée pour effectuer un suivi des indicateurs de performance de la maintenance.

Une fois le mécanisme de suivi de l'évolution des indicateurs défini, la stratégie mise en place pour avoir une politique de maintenance dynamique consiste à définir des seuils sur les indicateurs de disponibilité et de sécurité pour déclencher la ré-optimisation du plan de maintenance, c'est à dire une recherche des périodes de reprise des réglages  $\pi^1$  et  $\pi^2$  qui garantissent le respect des contraintes et minimise la fonction d'utilité. La figure 5.18 présente le résultat de l'adaptation des périodes de maintenance  $\pi^1$  et  $\pi^2$  en réponse à l'évolution des données de temps de séjours avec des valeurs maximales pour l'indicateur de sécurité de 0,5 et 0,1 pour le risque d'indisponibilité.

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre a détaillé l'application de l'approche *VirMaLab* afin de modéliser et d'évaluer différentes stratégies de maintenance du système d'accès voyageur de la NAT. Le travail de modélisation réalisé illustre bien la flexibilité de l'approche utilisée. Cette application fait aussi bien intervenir des modèles graphiques de durée que des processus markoviens pour la modélisation de la dégradation des composants.

L'objectif de ces travaux était de proposer un outil d'aide à la décision pour ajuster dynamiquement la stratégie de maintenance lorsqu'une évolution des lois de dégradation est détectée. Pour ce faire, deux indicateurs ont été définis pour évaluer la disponibilité et le niveau de sécurité du système. Des opérations de maintenance

préventives et systématiques sont réalisées périodiquement pour garantir les niveaux de fiabilité fixés par l'exploitant. Le but est de déterminer la périodicité des actions de maintenance de manière à respecter les contraintes du problème et à avoir un coût de maintenance minimum.

Une démarche pour conserver des paramètres de maintenance adéquat tout au long du cycle de vie du système à été décrite. Cette approche intègre un algorithme de détection de changement appliqué sur les données de retour d'expérience. Une ré-évaluation et ré-optimisation de la politique de maintenance est effectuée quand cela est nécessaire.

Un des points sensibles de l'approche proposée est le calibrage des paramètres de l'algorithme de détection de changement. Une des améliorations envisageables de la méthodologie proposée serait la mise en œuvre d'un mécanisme d'adaptation automatique des seuils de détection de changement. Par exemple dans le cas où plusieurs instants de changement ont été détectés dans les séries de données REX et que ceux-ci n'ont pas ou peu d'impact sur les indicateurs de performance de la maintenance, il serait judicieux de rendre l'algorithme de détection de changement moins sensible.

# Conclusion générale et perspectives

## Synthèse des travaux

Le problème étudié dans cette thèse porte essentiellement sur l'ajustement dynamique des paramètres d'une stratégie de maintenance. Nous avons abordé dans un premier temps la problématique de représentation d'un système dynamique et de sa stratégie de maintenance. Les outils de modélisation considérés dans cette thèse reposent sur des approches stochastiques en utilisant le formalisme des Modèles Graphiques Probabilistes (MGP) et plus particulièrement celui des MGP Markoviens (MGPM). Ces formalismes ont été utilisés pour modéliser des processus de dégradation à lois de durées discrètes quelconques à travers une structure particulière d'un MGPM appelé Modèle Graphique de Durée (MGD). Ce type d'approche permet de représenter de manière intuitive des systèmes dynamiques complexes (multi-états, avec des taux de défaillance non constants).

D'autre part les MGP sont aussi utilisés pour modéliser la maintenance de systèmes complexes (multi-composants, éventuellement interagissant). Cette approche appelée *VirMaLab* à l'avantage d'être générique et permet de représenter des stratégies de maintenance conditionnelles, systématiques ou correctives. Elle s'appuie sur une modélisation en trois blocs. Le premier module permet de représenter le processus de dégradation du système. La généralité de l'approche permet d'utiliser n'importe quel type de modèle pour cette partie. Le second bloc concerne la modélisation des procédures de diagnostic (auscultations en temps continu ou périodique, cadres de discernement, taux de bonnes détections, de fausses alarmes...) et des actions de maintenance (de toutes natures, correctives, préventives...). Le dernier bloc permet d'évaluer une stratégie de maintenance à travers la construction de fonctions d'utilité.

Une fois le cadre de travail posé, nous avons proposé une solution pour l'ajustement dynamique des paramètres de maintenance en fonction des données de Retour d'EXpérience (REX). Le premier verrou rencontré dans la mise en place d'une solution à ce problème est lié au temps d'évaluation d'une stratégie de maintenance. En effet, cette évaluation est obtenue par des opérations d'inférences probabilistes qui



peuvent être coûteuses en temps de calcul en fonction de la complexité du modèle. Sur certaines applications l'opération de recherche de paramètres optimaux de maintenance peut durer plusieurs jours. La solution proposée pour palier à ce problème est basée sur la méthode d'inférence symbolique dans un MGP. Elle consiste, dans un premier temps, à établir des expressions algébriques pour passer d'une tranche de temps à la suivante dans un MGPM. Ces expressions sont ensuite simplifiées de manière à réduire le nombre d'opérations nécessaires à leurs évaluations.

Le second problème traité dans cette thèse concerne la détection de changements de paramètres d'un modèle de dégradation. Le principe de base est de suivre l'évolution des données d'apprentissage des paramètres du modèle. L'algorithme proposé est construit sur un schéma de tests d'hypothèses successifs. Il permet de travailler sans aucune hypothèse restrictive sur la distribution des données. Cette méthode est par conséquent très bien adaptée à une utilisation conjointe avec les MGD qui eux aussi autorisent l'utilisation de distributions quelconques pour les lois de dégradation. La démarche proposée pour conserver des paramètres de maintenance optimaux tout au long du cycle de vie d'un système consiste à déclencher une ré-évaluation de la stratégie de maintenance si un changement de modèle de dégradation est détecté dans les données REX.

## Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont ouvert de nouvelles pistes de recherche sur la méthode d'évaluation des stratégies de maintenance et sur la détection de changements de paramètres du modèle de dégradation.

La suite directe de ces travaux de recherche est l'application des algorithmes proposés sur des données réelles. En effet, la temporalité du projet SurFer ne nous a pas permis d'obtenir suffisamment de données de retour d'expérience pour alimenter un modèle de dégradation avec une dérive de comportement. Notons que ce passage de données simulées à données réelles peut introduire de nouvelles problématiques, comme celles concernant la qualité et la censure des données.

D'autre part, les performances de l'algorithme d'inférence symbolique proposé pour évaluer une stratégie de maintenance dans le cadre d'une modélisation suivant l'approche *VirMaLab* dépendent fortement du nombre de la taille des expressions algébriques établie pour passer d'une tranche de temps à la suivante. Or, la taille des expressions algébriques augmente avec le nombre d'inconnues du problème. Autrement dit, plus la borne supérieure des temps de séjour, le nombre d'états et de méthodes de diagnostic sont grands, plus le nombre de paramètres sera grand et plus les expressions manipulées seront de taille importante. Une idée pour réduire le nombre de paramètres serait d'utiliser une approximation polynomiale de la loi de temps de séjour.

En se plaçant dans le cadre des problèmes de détection de changements dans un modèle de dégradation, il peut sembler intéressant de proposer une méthode avec un seuil adaptatif. En effet, la méthode proposée dans ce manuscrit repose sur des tests d'homogénéité avec des seuils sur les risques de première espèce (la probabilité de rejeter l'hypothèse d'homogénéité alors que celle-ci est vraie). Les résultats obtenus au cours de cette thèse ont montré que l'impact d'une même dérive (changement de la moyenne ou de la variance des données) sur l'évaluation de la stratégie de maintenance dépend de la distribution initiale des données. Par exemple, si la moyenne des données de temps de séjour augmente d'une unité, la variation sur l'utilité d'une stratégie de maintenance n'est pas la même si la moyenne avant le changement est petite ou grande. Une idée pourrait être d'ajuster le seuil de l'algorithme de détection de changement en tenant compte des conséquences sur l'utilité de la stratégie de maintenance.



# Bibliographie

- [Abdel-Hameed 1975] Mohamed Abdel-Hameed. *A gamma wear process*. Reliability, IEEE Transactions on, vol. 24, no. 2, pages 152–153, 1975. (Cité en page 38.)
- [Anderson 1962] TW Anderson. *On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion*. The Annals of Mathematical Statistics, pages 1148–1159, 1962. (Cité en page 94.)
- [Andre-obrecht 1988] Regine Andre-obrecht. *A new statistical approach for the automatic segmentation of continuous speech signals*. Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 36, no. 1, pages 29–40, 1988. (Cité en page 76.)
- [Ansari 1960] Abdur Rahman Ansari et Ralph A Bradley. *Rank-sum tests for dispersions*. The Annals of Mathematical Statistics, pages 1174–1189, 1960. (Cité en pages 90 et 91.)
- [Aven 1999] Terje Aven et Uwe Jensen. *Stochastic models in reliability*. Springer, 1999. (Cité en page 40.)
- [Ayadi 2013] Ines Ayadi. *Optimisation des politiques de maintenance préventives dans un cadre de modélisation par modèles graphiques probabilistes*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2013. (Cité en page 56.)
- [Barbour 1995] Andrew D Barbour, Ourania Chryssaphinou et Maigorzata Roos. *Compound Poisson approximation in reliability theory*. Reliability, IEEE Transactions on, vol. 44, no. 3, pages 398–402, 1995. (Cité en page 38.)
- [Barlow 1960] Richard Barlow et Larry Hunter. *Optimum preventive maintenance policies*. Operations Research, vol. 8, no. 1, pages 90–100, 1960. (Cité en page 46.)
- [Barlow 1996] Richard E Barlow et Frank Proschan. *Mathematical theory of reliability*. Numéro 17. Siam, 1996. (Cité en page 36.)
- [Basseville 1995] Michele Basseville et Igor V Nikiforov. *Detection of abrupt changes : theory and applications*. Journal of the Royal Statistical Society-Series A Statistics in Society, vol. 158, no. 1, page 185, 1995. (Cité en pages 76 et 77.)

- [Basseville 1996] Michèle Basseville, Marie-Odile Cordieret *al.* *Surveillance et diagnostic de systèmes dynamiques : approches complémentaires du traitement de signal et de l'intelligence artificielle*. 1996. (Cité en page 76.)
- [Bhattacharya 1981] PK Bhattacharya et Dargan Frierson Jr. *A nonparametric control chart for detecting small disorders*. *The Annals of Statistics*, pages 544–554, 1981. (Cité en page 82.)
- [Boudali 2005] Hichem Boudali et Joanne Bechta Dugan. *A discrete-time Bayesian network reliability modeling and analysis framework*. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 87, no. 3, pages 337–349, 2005. (Cité en page 47.)
- [Bouillaut 2009] L. Bouillaut, R. Donat, A. Neji et P. Aknin. *Estimation of Multi-component Systems reliability : comparison of two Graphical Model Approaches*. In proceedings of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, June 2009. (Cité en page 2.)
- [Bouillaut 2011] L Bouillaut, O François, P Aknin, R Donat, S Bondeux et S Dubois. *VirMaLab-atelier virtuel de maintenance : un outil d'aide à la décision pour l'optimisation des politiques de maintenance*. *Recherche Transports Sécurité*, vol. 27, no. 4, pages 241–257, 2011. (Cité en pages 2 et 48.)
- [Bouvard 2008] Keomany Bouvard, Samuel Artus, Christophe Bérenguer, Vincent Cocquempotet *al.* *Maintenance cost study for deteriorating systems : age-replacement policy vs. condition-based maintenance policy*. *International Journal of Materials & Structural Reliability*, vol. 6, no. 2, pages 167–179, 2008. (Cité en page 47.)
- [Carlstein 1988] Edward Carlstein. *Nonparametric change-point estimation*. *The Annals of Statistics*, pages 188–197, 1988. (Cité en page 82.)
- [Castanier 2005] Bruno Castanier, Antoine Grall et Christophe Bérenguer. *A condition-based maintenance policy with non-periodic inspections for a two-unit series system*. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 87, no. 1, pages 109–120, 2005. (Cité en page 47.)
- [Castillo 1995] Enrique Castillo, José Manuel Gutiérrez et Ali S Hadi. *Parametric structure of probabilities in Bayesian networks*. In *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, pages 89–98. Springer, 1995. (Cité en pages 22 et 23.)
- [Cauffriez 2013] Laurent Cauffriez, P Loslever, N Caouder, F Turgis et R Copin. *Robustness study and reliability growth based on exploratory design of experiments and statistical analysis : a case study using a train door test bench*. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 66, no. 1-4, pages 27–44, 2013. (Cité en page 101.)
- [Ceberio 2004] Martine Ceberio et Vladik Kreinovich. *Greedy algorithms for optimizing multivariate Horner schemes*. *ACM SIGSAM Bulletin*, vol. 38, no. 1, pages 8–15, 2004. (Cité en pages 70 et 169.)

- [Celeux 2006] Gilles Celeux, Franck Corset, André Lannoy et Benoit Ricard. *Designing a Bayesian network for preventive maintenance from expert opinions in a rapid and reliable way*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 91, no. 7, pages 849–856, 2006. (Cité en page 47.)
- [Chakraborti 2008] Subhabrata Chakraborti, Mark A van de Wiele *et al.* A nonparametric control chart based on the mann-whitney statistic. Institute of Mathematical Statistics, 2008. (Cité en page 82.)
- [Chan 2006] GK Chan et S Asgarpoor. *Optimum maintenance policy with Markov processes*. Electric Power Systems Research, vol. 76, no. 6, pages 452–456, 2006. (Cité en page 40.)
- [Cheng 2002] Yung-Hsiang Cheng. *Transfert de savoir-faire en matière d'exploitation ferroviaire à grande vitesse entre la SNCF et les compagnies ferroviaires implantées à Taiwan et en Corée du Sud*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2002. (Cité en page 112.)
- [Clavareau 2008] Julien Clavareau et Pierre-Etienne Labeau. *Modélisation des stratégies de remplacement de composants et de systèmes soumis à obsolescence technologique*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 2008. (Cité en page 47.)
- [Collette 2002] Yann Collette et Patrick Siarry. Optimisation multiobjectif. Ed. Techniques Ingénieur, 2002. (Cité en page 56.)
- [Cooper 1990] Gregory F. Cooper. *The Computational Complexity of Probabilistic Inference Using Bayesian Belief Networks*. Artif. Intell., vol. 42, no. 2-3, pages 393–405, 1990. (Cité en page 18.)
- [Corset 2003] Franck Corset. *Aide à l'optimisation de maintenance à partir de réseaux bayésiens et fiabilité dans un contexte doublement censuré*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2003. (Cité en page 47.)
- [Courtois 2006] Pierre-Jacques Courtois et Philippe Delsarte. *On the optimal scheduling of periodic tests and maintenance for reliable redundant components*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 91, no. 1, pages 66–72, 2006. (Cité en page 46.)
- [Daly 2011] Rónán Daly, Qiang Shen et Stuart Aitken. *Learning Bayesian networks : approaches and issues*. The Knowledge Engineering Review, vol. 26, no. 02, pages 99–157, 2011. (Cité en page 11.)
- [D'Ambrosio 1994] Bruce D'Ambrosio. *Symbolic Probabilistic Inference in Large BN20 Networks*. In UAI, pages 128–135, 1994. (Cité en pages 22 et 57.)
- [Darwiche 1996] Adnan Darwiche et Gregory Provan. *Query DAGs : A practical paradigm for implementing belief-network inference*. In Proceedings of the Twelfth international conference on Uncertainty in artificial intelligence, pages 203–210. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1996. (Cité en page 22.)

- [Dean 1989] Thomas Dean et Keiji Kanazawa. *A model for reasoning about persistence and causation*. Computational intelligence, vol. 5, no. 2, pages 142–150, 1989. (Cité en page 24.)
- [Dechter 1999] Rina Dechter. *Bucket Elimination : A Unifying Framework for Reasoning*. Artif. Intell., vol. 113, no. 1-2, pages 41–85, 1999. (Cité en page 15.)
- [Deloux 2008] Estelle Deloux. *Politiques de maintenance conditionnelle pour un système à dégradation continue soumis à un environnement stressant*. PhD thesis, Université de Nantes, 2008. (Cité en page 35.)
- [Dempster 1977] A. P. Dempster, N. M. Laird et D. B. Rubin. *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. 1977. (Cité en page 14.)
- [Doksum 1992] Kjell A Doksum et Arnljot Hbyland. *Models for Variable-Stress Accelerated Life Testing Experiments Based on Wener Processes and the Inverse Gaussian Distribution*. Technometrics, vol. 34, no. 1, pages 74–82, 1992. (Cité en page 38.)
- [Donat 2009] Roland Donat. *Modélisation de la Fiabilité et de la Maintenance par Modèles Graphiques Probabilistes - Application à la Prévention des Ruptures de Rails*. PhD thesis, INSA de Rouen, Novembre 2009. (Cité en page 2.)
- [Donat 2010] Roland Donat, Philippe Leray, Laurent Bouillaut et Patrice Aknin. *A dynamic Bayesian network to represent discrete duration models*. Neurocomputing, vol. 73, no. 4-6, pages 570–577, 2010. (Cité en pages 2, 34, 40, 56, 61 et 76.)
- [Drouet 2007] Isabelle Drouet. *Causalité et probabilités : réseaux bayésiens, propensionnisme*. PhD thesis, Université Panthéon-Sorbonne-Paris I, 2007. (Cité en page 6.)
- [Dutuit 1997] Yves Dutuit, E Châtelet, J-P Signoret et Philippe Thomas. *Dependability modelling and evaluation by using stochastic Petri nets : application to two test cases*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 55, no. 2, pages 117–124, 1997. (Cité en page 47.)
- [Erdman 2007] Chandra Erdman et John W Emerson. *bcp : an R package for performing a Bayesian analysis of change point problems*. Journal of Statistical Software, vol. 23, no. 3, pages 1–13, 2007. (Cité en page 77.)
- [Favier 1984] G. Favier et A. Smolders. *Adaptive smoother-predictors for tracking maneuvering targets*. In Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on, volume 23, pages 831–836, 1984. (Cité en page 76.)
- [Festinger 1946] Leon Festinger. *The significance of difference between means without reference to the frequency distribution function*. Psychometrika, vol. 11, no. 2, pages 97–105, 1946. (Cité en page 88.)
- [Fisher 1922] R. A. Fisher. *On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, vol. 222, pages 309–368, 1922. (Cité en page 12.)

- [François 2011] O François, L Bouillaut, S Duboiset *al.* *A multi-nets approach for modeling and evaluating rail maintenance strategies*. In 9th World Congress on Railway Research, WCRR 2011, 2011. (Cité en page 2.)
- [François 2006] Olivier François. *De l'identification de structure de réseaux bayésiens à la reconnaissance de formes à partir d'informations complètes ou incomplètes*. PhD thesis, french National Institute of Applied Sciences (INSA) of Rouen, 2006. (Cité en page 11.)
- [Freund 1957] JE Freund et AR Ansari. *Two-way rank sum tests for variance*. Virginia Polytechnic Institute technical report to office of ordnance research and National Science Foundation, vol. 34, 1957. (Cité en page 90.)
- [Gandibleux 2002] Xavier Gandibleux. *Multiple criteria optimization : state of the art annotated bibliographic surveys*, volume 52. Springer, 2002. (Cité en page 56.)
- [Gelman 2003] Andrew Gelman, John B Carlin, Hal S Stern et Donald B Rubin. *Bayesian data analysis*. CRC press, 2003. (Cité en page 19.)
- [Gordon 1994] Louis Gordon et Moshe Pollak. *An efficient sequential nonparametric scheme for detecting a change of distribution*. *The Annals of Statistics*, pages 763–804, 1994. (Cité en page 82.)
- [Grall 2002] A Grall, C Berenguer et L Dieulle. *A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems*. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 76, no. 2, pages 167–180, 2002. (Cité en page 46.)
- [Hackl 1991] Peter Hackl et Johannes Ledolter. *A control chart based on ranks*. *Journal of Quality Technology*, vol. 23, no. 2, pages 117–124, 1991. (Cité en page 82.)
- [Hawkins 2003] Douglas M Hawkins, QIU PEIHUA et WOOK KANG CHANG. *The changepoint model for statistical process control*. *Journal of quality technology*, vol. 35, no. 4, pages 355–366, 2003. (Cité en page 78.)
- [Hong 2014] HP Hong, Wenxing Zhou, S Zhang et W Ye. *Optimal condition-based maintenance decisions for systems with dependent stochastic degradation of components*. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 121, pages 276–288, 2014. (Cité en page 46.)
- [Jensen 1990] F. V. Jensen, S. L. Lauritzen et K. G. Olesen. *Bayesian updating in recursive graphical models by local computations*. 1990. (Cité en page 15.)
- [Jones 1998] L Allison Jones et William H Woodall. *The performance of bootstrap control charts*. *Journal of Quality Technology*, vol. 30, no. 4, pages 362–375, 1998. (Cité en page 82.)
- [Kalman 1960] Rudolph Emil Kalman *et al.* *A new approach to linear filtering and prediction problems*. *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pages 35–45, 1960. (Cité en page 25.)



- [Kang 1999a] CW Kang et MW Golay. *A Bayesian belief network-based advisory system for operational availability focused diagnosis of complex nuclear power systems*. Expert Systems with Applications, vol. 17, no. 1, pages 21–32, 1999. (Cité en page 47.)
- [Kang 1999b] CW Kang et MW Golay. *A Bayesian belief network-based advisory system for operational availability focused diagnosis of complex nuclear power systems*. Expert Systems with Applications, vol. 17, no. 1, pages 21–32, 1999. (Cité en page 47.)
- [Kayser 2004] Daniel Kayser, François Levyet *al.* *Modélisations symboliques du raisonnement causal*. Intellectica, vol. 38, pages 291–323, 2004. (Cité en page 6.)
- [Killick 2011] Rebecca Killick et Idris A Eckley. *Changepoint : an R package for changepoint analysis*. R package version 0.6, URL <http://CRAN.R-project.org/package=changepoint>, 2011. (Cité en page 77.)
- [Kjaerulff 1994] Uffe Kjaerulff. *Reduction of computational complexity in bayesian networksthrough removal of weak dependences*. In Proceedings of the tenth international conference on uncertainty in artificial intelligence, pages 374–382. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1994. (Cité en page 18.)
- [Kjaerulff 1995] Uffe Kjaerulff. *dHugin : A computational system for dynamic time-sliced Bayesian networks*. International journal of forecasting, vol. 11, no. 1, pages 89–111, 1995. (Cité en page 26.)
- [Knuth 1968] D Knuth. *The Art of Computer Programming 1 : Fundamental Algorithms 2 : Seminumerical Algorithms 3 : Sorting and Searching*, 1968. (Cité en page 168.)
- [Lai 1995] Tze Leung Lai. *Sequential changepoint detection in quality control and dynamical systems*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), pages 613–658, 1995. (Cité en page 76.)
- [Lam 2003] Yeh Lam et Yuan Lin Zhang. *A geometric-process maintenance model for a deteriorating system under a random environment*. Reliability, IEEE Transactions on, vol. 52, no. 1, pages 83–89, 2003. (Cité en page 38.)
- [Langseth 2007] Helge Langseth et Luigi Portinale. *Bayesian networks in reliability*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 92, no. 1, pages 92–108, 2007. (Cité en page 47.)
- [Lauritzen 1988] Steffen L Lauritzen et David J Spiegelhalter. *Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), pages 157–224, 1988. (Cité en page 15.)
- [Lavielle 1999] Marc Lavielle. *Detection of multiple changes in a sequence of dependent variables*. Stochastic Processes and their Applications, vol. 83, no. 1, pages 79–102, 1999. (Cité en page 78.)

- [Le Mortellec 2014] Antoine Le Mortellec. *Proposition d'une architecture de surveillance active à base d'agents intelligents pour l'aide à la maintenance de systèmes mobiles-Application au domaine ferroviaire*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2014. (Cité en page 103.)
- [Lindemann 1998] Christoph Lindemann. *Performance modelling with deterministic and stochastic Petri nets*. ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, vol. 26, no. 2, page 3, 1998. (Cité en page 47.)
- [Lorden 1971] Gary Lorden. *Procedures for reacting to a change in distribution*. The Annals of Mathematical Statistics, pages 1897–1908, 1971. (Cité en page 82.)
- [Mann 1947] Henry B Mann et Donald R Whitney. *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*. The annals of mathematical statistics, vol. 18, no. 1, pages 50–60, 1947. (Cité en pages 88 et 89.)
- [Massey Jr 1951] Frank J Massey Jr. *The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit*. Journal of the American statistical Association, vol. 46, no. 253, pages 68–78, 1951. (Cité en page 92.)
- [Medina-Oliva 2011] Gabriela Medina-Oliva. *Modélisation conjointe des connaissances multi-points de vue d'un système industriel et de son système de soutien pour l'évaluation des stratégies de maintenance*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2011. (Cité en page 47.)
- [Metropolis 1953] Nicholas Metropolis, Arianna W Rosenbluth, Marshall N Rosenbluth, Augusta H Teller et Edward Teller. *Equation of state calculations by fast computing machines*. The journal of chemical physics, vol. 21, page 1087, 1953. (Cité en page 19.)
- [Montani 2006] Stefania Montani, Luigi Portinale, Andrea Bobbio et D Codetta-Raiteri. *Automatically translating dynamic fault trees into dynamic bayesian networks by means of a software tool*. In Availability, Reliability and Security, 2006. ARES 2006. The First International Conference on, pages 6–pp. IEEE, 2006. (Cité en page 47.)
- [Murphy 2002] P. Murphy. *Dynamic Bayesian Networks : Representation, Inference and Learning*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 2002. (Cité en pages 26, 29, 30, 40 et 57.)
- [Nevin Lianwen Zhang 1994] David Poole Nevin Lianwen Zhang. *A simple approach to Bayesian network computations*. 1994. (Cité en page 15.)
- [Nowlan 1978] F Stanley Nowlan et Howard F Heap. *Reliability-centered maintenance*. Rapport technique, DTIC Document, 1978. (Cité en page 37.)
- [Ostrowski 1954] AM Ostrowski. *On two problems in abstract algebra connected with Horner's rule*. In Studies in Mathematics and Mechanics presented to Richard von Mises, pages 40–48, 1954. (Cité en page 168.)

- [Page 1954] ES Page. *Continuous inspection schemes*. Biometrika, vol. 41, no. 1/2, pages 100–115, 1954. (Cité en page 80.)
- [Pan 1966] V Ja Pan. *On means of calculating values of polynomials*. Uspehi Mat. Nauk, vol. 21, no. 1, page 127, 1966. (Cité en page 168.)
- [Pankiewicz 1968] W Pankiewicz. *Algorithms : Algorithm 337 : calculation of a polynomial and its derivative values by Horner scheme*. Communications of the ACM, vol. 11, no. 9, page 633, 1968. (Cité en page 169.)
- [Pareto 1964] Vilfredo Pareto. *Cours d'economie politique*. Librairie Droz, 1964. (Cité en page 56.)
- [Pearl 1986] Judea Pearl. *Fusion, Propagation, and Structuring in Belief Networks*. Artif. Intell., vol. 29, no. 3, pages 241–288, 1986. (Cité en page 15.)
- [Peña 2000] Juan Manuel Peña. *On the multivariate Horner scheme*. SIAM journal on numerical analysis, vol. 37, no. 4, pages 1186–1197, 2000. (Cité en page 70.)
- [Picard 1985] Dominique Picard. *Testing and estimating change-points in time series*. Advances in applied probability, pages 841–867, 1985. (Cité en page 78.)
- [Puterman 2005] ML Puterman. *Markov Decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming*, 2005. (Cité en page 25.)
- [Rabiner 1993] Lawrence Rabiner et Bing-Hwang Juang. *Fundamentals of speech recognition*. 1993. (Cité en page 25.)
- [Rausand 2004] M. Rausand et A. Høyland. *System reliability theory : Models, statistical methods, and applications*. Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section. Wiley, 2004. (Cité en page 36.)
- [Ross 2011] Gordon J. Ross, Dimitris K. Tasoulis et Niall M. Adams. *Nonparametric Monitoring of Data Streams for Changes in Location and Scale*. Technometrics, vol. 53, no. 4, pages 379–389, 2011. (Cité en pages 78 et 82.)
- [Ross 2013] Gordon J Ross. *Parametric and nonparametric sequential change detection in R : The cpm package*. Journal of Statistical Software, 2013. (Cité en page 78.)
- [Rozas 2013] Rony Rozas, Laurent Bouillaut, Patrice Aknin, Allou Same, Olivier Francois, Guillaume Brangeret *al.* *A rollingstock door system's dynamic maintenance strategies based on a sensitivity analysis through bayesian networks*. In 10th World Congress on Railway Research (WCRR 2013), 2013. (Cité en page 2.)
- [Rubin 1976] Donald B Rubin. *Inference and missing data*. Biometrika, vol. 63, no. 3, pages 581–592, 1976. (Cité en page 13.)
- [Shachter 1990] Ross D. Shachter, Bruce D'Ambrosio et Brendan Del Favero. *Symbolic Probabilistic Inference in Belief Networks*. In AAAI, pages 126–131, 1990. (Cité en page 22.)

- [Shewhart 1931] Walter A Shewhart. *Economic control of quality of manufactured product*. New York, vol. 501, 1931. (Cité en page 80.)
- [Simeu-Abazi 1999] Zineb Simeu-Abazi et Chadi Sassine. *Maintenance integration in manufacturing systems by using stochastic Petri nets*. International Journal of Production Research, vol. 37, no. 17, pages 3927–3940, 1999. (Cité en page 47.)
- [Steuer 1989] Ralph E Steuer. Multiple criteria optimization : theory, computation, and application. Krieger Malabar, 1989. (Cité en page 56.)
- [Turgis 2013] Fabien Turgis. *Amélioration de la fiabilité d'un système complexe- Application ferroviaire : accès voyageurs*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2013. (Cité en page 103.)
- [van Noortwijk 2009] J.M. van Noortwijk. *A survey of the application of gamma processes in maintenance*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 94, no. 1, pages 2 – 21, 2009. (Cité en page 38.)
- [Verron 2008] Sylvain Verron, Teodor Tiplica et Abdessamad Kobi. *Fault detection and identification with a new feature selection based on mutual information*. Journal of Process Control, vol. 18, no. 5, pages 479–490, 2008. (Cité en page 76.)
- [Vesely 1981] William E Vesely, Francine F Goldberg, Norman H Roberts et David F Haasl. *Fault tree handbook*. Rapport technique, DTIC Document, 1981. (Cité en page 47.)
- [Wang 2005] Xiao Wang et Vijay Nair. *A class of degradation model based on nonhomogeneous Gaussian process*. Rapport technique, Technical Report, University of Michigan, 2005. (Cité en page 38.)
- [Weber 2003] Philippe Weber, Lionel Jouffet *al.* *Reliability modelling with dynamic bayesian networks*. In In 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS'03), Washington, DC, USA, pages 57–62, 2003. (Cité en page 47.)
- [White 1952] Colin White. *The use of ranks in a test of significance for comparing two treatments*. Biometrics, vol. 8, no. 1, pages 33–41, 1952. (Cité en page 88.)
- [Whitmore 1997] GA Whitmore et Fred Schenkelberg. *Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation*. Lifetime data analysis, vol. 3, no. 1, pages 27–45, 1997. (Cité en page 38.)
- [Wilcoxon 1945] Frank Wilcoxon. *Individual comparisons by ranking methods*. Biometrics bulletin, vol. 1, no. 6, pages 80–83, 1945. (Cité en page 88.)
- [Xie 2002] M Xie, O Gaudoin et C Bracquemond. *Redefining failure rate function for discrete distributions*. International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, vol. 9, no. 03, pages 275–285, 2002. (Cité en page 44.)

- [Zamba 2006] KD Zamba et Douglas M Hawkins. *A multivariate change-point model for statistical process control*. Technometrics, vol. 48, no. 4, pages 539–549, 2006. (Cité en page 78.)
- [Zille 2009] Valérie Zille. *Modélisation et évaluation des stratégies de maintenance complexes sur des systèmes multi-composants*. PhD thesis, Troyes, 2009. (Cité en page 47.)
- [Zwingelstein 1996] Gilles Zwingelstein. *La maintenance basée sur la fiabilité : Guide pratique d'application de la rcm*. Hermès, 1996. (Cité en page 37.)

# Table des figures

1.1	Les trois types de connexions entre trois variables aléatoires . . . . .	8
1.2	Réseau bayésien modélisant le système de démarrage d'une voiture . . . . .	9
1.3	Réseau bayésien dynamique modélisant l'évolution d'un système de démarrage d'une voiture. Les nœuds de l'interface avant $I_{t-1}^{\rightarrow}$ et l'interface arrière $I_t^{\leftarrow}$ sont dessinés respectivement en rouge et en bleu dans le modèle de transition. . . . .	27
1.4	Un exemple de chaîne de Markov à trois états. . . . .	28
1.5	Le réseau bayésien dynamique déroulé, associé à la chaîne de Markov de la figure 1.4 . . . . .	28
1.6	Structure générale de la chaîne d'arbres utilisée par l'algorithme de l'interface. $I_t$ est l'interface avant pour la tranche de temps $t$ . $J_T$ est l'arbre de jonction de la tranche $t$ et $C_t$ et $D_t$ deux cliques de cet arbre. . . . .	30
2.1	Type de maintenance . . . . .	35
2.2	Évolution d'un système dynamique avec un ensemble d'état discret et fini (trajectoire du système sur un horizon de dix pas de temps . . . . .	39
2.3	Structure d'un MGD. $X_t$ , $S_t$ représentant respectivement l'état du système et le temps de séjours restant à l'instant $t$ . . . . .	41
2.4	Représentation d'un MGD à trois états $(x_1, x_2, x_3)$ et des temps de séjours bornés à $Ts = 3$ , sous la forme d'une chaîne de Markov . . . . .	44
2.5	Structure du RBD associé au modèle <i>VirMaLab</i> . . . . .	49
3.1	Structure du RBD associé au modèle <i>VirMaLab</i> avec nœuds d'utilités . . . . .	58
3.2	Structure du modèle <i>VirMaLab</i> associé au système d'une barrière automatique . . . . .	67
3.3	Temps moyens de calcul de la table 3.4 en fonction de l'horizon et de l'algorithme d'inférence utilisé . . . . .	74
4.1	Exemple de série temporelle non-stationnaire . . . . .	77
4.2	Exemple d'application de la procédure du CUSUM sur un jeux de données simulé à partir de deux lois normales $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(1, 1)$ . . . . .	81
4.3	Représentation schématique du mécanisme de recherche d'un point de rupture. . . . .	84
4.4	Représentation de la <i>p-value</i> (zone en bleu foncé) et du seuil $\alpha$ (zone en bleu clair) sur la distribution d'une variable de décision $D$ . . . . .	87

4.5	Statistique de Kolmogorov-Smirnov pour la comparaison de deux échantillons de taille $n = 100$ . Les tracés rouge et bleu représentent la fonction de répartition empirique pour chacun des échantillons. . . . .	94
4.6	Résultats de l'algorithme de détection de rupture avec les tests de Kolmogorov-Smirnov et Wilcoxon sur une série temporelle générée aléatoirement . . . . .	95
4.7	Écart moyen entre la moyenne et la variance réelle estimées après avec les statistiques de Kolmogorov-Smirnov, de Wilcoxon et de Cramèr-von Mises. . . . .	96
5.1	Vue extérieure et intérieure de l'automotrice Spacium 3.06 de Bombardier . . . . .	101
5.2	Approche de surveillance active embarquée SURFER . . . . .	102
5.3	Architecture extérieure du train NAT (version courte : 7 caisses) et système d'accès voyageurs . . . . .	103
5.4	Composants principales du système de porte de la NAT. L'axe $x$ correspond à l'axe suivant lequel les usagers rentrent ou sortent du train. L'axe $y$ coïncide avec l'axe de déplacement du train. L'axe $z$ correspond à l'axe vertical. . . . .	104
5.5	Mesures pour le réglage de la position de la porte . . . . .	105
5.6	Modèle <i>VirMalab</i> associé à la maintenance du système d'accès voyageur	108
5.7	Organisation de la maintenance à la SNCF . . . . .	113
5.8	Modèle <i>VirMalab</i> associé à la maintenance du système d'accès voyageur	114
5.9	Évolution des indicateurs de risque de verrouillage sur obstacle et d'indisponibilité sur un horizon temporel de 600 semaines . . . . .	117
5.10	Évolution des indicateurs de risque moyen de verrouillage sur obstacle et d'indisponibilité moyennée sur un horizon temporel de 600 semaines et pour deux plans de maintenance différents ( $\pi^1 = 20, \pi^2 = 100$ pour la courbe bleue et $\pi^1 = 20, \pi^2 = 120$ pour la courbe orange en pointillés). . . . .	118
5.11	Risques d'indisponibilité et de perte de la détection d'obstacle en fonction de la politique de maintenance . . . . .	119
5.12	Schéma récapitulatif de la stratégie dynamique de maintenance . . . . .	121
5.13	Exemple de scénario d'évolution des paramètres de la distribution de Weibull pour la génération des données de temps de séjour pour le vantail . . . . .	123
5.14	Série temporelle de données représentant les temps de séjour dans l'état "NL" du vantail et générées suivant une loi de Weibull discrétisée avec des paramètres variables au cours du temps (fig. 5.13 ). Les traits rouges correspondent aux instants de détection de changement	123
5.15	Exemple de scénario d'évolution du paramètre de la loi géométrique pour la génération des données de temps de séjour pour le galet . . . . .	123



5.16	Série temporelle de données représentant les temps de séjours dans l'état N du galet et généré suivant une loi géométrique avec un paramètre variable au cours du temps (fig. 5.15 ). Les traits rouges correspondent aux instants de détection de changement . . . . .	123
5.17	Évolution des indicateurs moyens de risque d'indisponibilité et de sécurité . . . . .	124
5.18	Stratégie de maintenance adaptatif pour le scénario 1 d'évolution des paramètres . . . . .	125
C.1	Répartition du parc de matériel roulant de la SNCF en 2006 . . . . .	151
C.2	Matériels roulants utilisés pour les missions transiliennes par la SNCF	152
E.1	Exemple d'un graphe orienté . . . . .	160
E.2	Exemple d'un graphe non-orienté . . . . .	161
E.3	Cas particulier de graphe . . . . .	163

## Liste des tableaux

1.1	Tables de probabilités associées aux variables du réseau bayésien modélisant le système de démarrage d'une voiture (figure 1.2) . . . . .	10
1.2	Tables de probabilités relatives au modèle de transition du RBD de la figure 1.3 . . . . .	27
2.1	Tableau récapitulatif des paramètres du modèle <i>VirMaLab</i> . . . . .	53
3.1	LPC des méthodes de diagnostic $D_{1,1}$ et $D_{1,2}$ . . . . .	67
3.2	LPC paramétrées des variables $X_1$ , $S_1$ , $\delta(1,1)$ et $\delta(1,2)$ . . . . .	71
3.3	Évaluation des distributions des variables $D_{1,1}$ , $D_{1,2}$ , $A_1$ , $X_2$ et $(X_2, S_2)$ avec $\Theta_t = (0.9, 0.1, 0.10, 0.80, 0.50, 0.40, 0.10, 0.80, 0.50, 0.40, 1, 1)$ . . . . .	73
3.4	Utilité moyenne journalière en fonction des périodes d'auscultation . . . . .	73
5.1	Tables de décision pour les risques de blocage et de fermeture sur obstacle . . . . .	106
5.2	Organisation des visites sur le système d'accès voyageur de la NAT . . . . .	116
C.1	Valeurs du seuil de décision $c_\alpha$ pour le K-S test en fonction de la taille $n$ de l'échantillon et de l'erreur de première espèce $\alpha$ . . . . .	153





# Appendices



# Annexe A

## Notations

### A.0.0.1 Notations générales

LPC	Loi de Probabilité Conditionnelle
v.a.	Variable Aléatoire
RB	Réseaux Bayésiens
RBD	Réseaux Bayésiens Dynamiques
MGP	Modèle Graphique Probabiliste
MGPM	Modèle Graphique Probabiliste Markovien
MGD	Modèle Graphique de Durée
REX	Retour d'EXpérience
SURFER	SURveillance FERroviaire active
VirMaLab	Virtual Maintenance Laboratory
$\mathbb{1}_{cond}$	vaut 1 si cond vrai 0 sinon
$Pa(x)$	ensemble des parents de x
$t_a$	temps d'alarme
$t_c$	temps de changement
$\mathcal{H}_0$	hypothèse nulle
$\mathcal{H}_1$	hypothèse alternative

**A.0.0.2 Modèle graphique de durée**

$\mathcal{X}$	ensemble des états du système
$\mathcal{S}$	ensemble des temps de séjours
$T_S$	borne supérieur des temps de séjours, $ \mathcal{S} $
$\alpha_t$	distribution de probabilité de l'état du système, $\mathbb{P}(X_t)$
$F_1$	LPC des temps de séjour initiale, $\mathbb{P}(S_1 X_1)$
$F_{sys}$	LPC des temps de séjour pour $t \geq 2$ , $\mathbb{P}(S_t X_t)$
$Q$	lois de transition de l'état du système, $\mathbb{P}(X_{t+1} X_t, S_t = 1)$

**A.0.0.3 Modèle VirMaLab**

$\lambda_1$	etat initial, $\mathbb{P}(\mathbf{X}_1)$
$\Lambda^{sys}$	transition naturelle, $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1} \notin \mathcal{A})$
$\Lambda^{act}$	transition artificielle, $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1} \in \mathcal{A})$
$\delta_{t,l}$	activation du diagnostic, $l \mathbb{P}(\delta_{t,l})$
$\Delta_l$	propriétés du diagnostic $l$ , $\mathbb{P}(D_{t,l} \mathbf{X}_t, \delta_{t,l})$
$\Delta^{sys}$	politique de fusion des diagnostics, $\mathbb{P}(D_t^{sys} D_{t,1}, \dots, D_{t,l})$
$\Gamma$	politique des actions de maintenance, $\mathbb{P}(A_t D_t)$
$\mathcal{X}$	ensemble des états du système
$\mathcal{D}$	ensemble des résultats de diagnostic
$\mathcal{A}$	ensemble des actions de maintenance
$\mathcal{A}_\emptyset$	ensemble des actions sans conséquence sur le système
$\mathcal{A}_1$	ensemble complémentaire de $\mathcal{A}_\emptyset$ dans $\mathcal{A}$
$Q_{sys}$	lois de transition naturelle de l'état, $\mathbb{P}(X_{t+1} X_t, A \in \mathcal{A}_\emptyset)$
$Q_{act}$	lois de transition artificielle de l'état, $\mathbb{P}(X_{t+1} X_t, A \in \mathcal{A}_1)$

**A.0.0.4 Application Ferroviaire**

NAT	Nouvelle Automotrice Transillienne
PMR	Personne à Mobilité Réduite
FdC	Capteur de Fin de Course
UFR	Unité en Fauteuil Roulant
ATP	Autres Travaux Programmées
ATS	Autres Travaux Spécifiques
VL	Visite Limitée
VG	Visite Générale
GVG	Grande Visite Générale

## Démonstration

Les équations suivantes donnent les étapes de simplification de la probabilité que l'action de maintenance à l'instant  $t$  soit 'rien' en fonction de  $\Theta_t$ , c'est à dire la probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rien'})$ , utilisée dans la section 3.3.3.1. L'équation initiale est obtenue en introduisant les variables du vecteur de paramètre  $\Theta_t$  dans l'équation 3.21 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rien'}) &= (1 - d_1)(1 - d_2) + (1 - d_1)d_2(1 - 0.8\alpha_2) \\
 &\quad + d_1(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - d_2) + (1 - 0.8\alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) d_1 d_2 \\
 &= \underbrace{(1 - d_1)(1 - d_2) + d_1(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - d_2)}_{\text{Mise en facteur de } (1 - d_2)} \\
 &\quad + \underbrace{(1 - d_1)d_2(1 - 0.8\alpha_2) + (1 - 0.8\alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) d_1 d_2}_{\text{Mise en facteur de } d_2(1 - 0.8\alpha_2)} \\
 &= (1 - d_2)(1 - d_1 + d_1(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 &\quad + \underbrace{d_2(1 - 0.8\alpha_2)(1 - d_1 + d_1(\alpha_1 + \alpha_2))}_{\text{Mise en facteur de } (1 - d_1 + d_1(\alpha_1 + \alpha_2))}) \\
 &= (1 - \underbrace{d_1 + d_1(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\text{Mise en facteur de } d_1})(1 - d_2 + d_2(1 - 0.8\alpha_2)) \\
 &= (1 - d_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2))(1 - 0.8\alpha_2 d_2)
 \end{aligned}$$

Le nombre d'opérations nécessaires pour l'évaluation de  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rien'})$  passe de 10 multiplications et 11 additions avant simplification à 4 multiplications et 4 additions. La simplification obtenue est optimal en nombre de multiplication puisque le polynôme est de degré 4.

La probabilité  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rep'})$  est évaluable avec une addition supplémentaire :

$$\mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rep'}) = 1 - \mathbb{P}_{\Theta_t}(A_t = \text{'rien'}).$$

Les équations suivantes donnent les étapes de simplification de la distribution de l'état du système à l'instant  $t + 1$  en fonction de  $\Theta_t$ , c'est à dire  $\mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1})$ .

L'équation initiale est obtenue en introduisant les variables du vecteur de paramètre  $\Theta_t$  dans l'équation 3.23 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'ok'}) &= \underbrace{e_1 \alpha_1 \beta_{12} + e_1 \alpha_1 (1 - \beta_{11} - \beta_{12}) - e_1 + 1}_{\text{Mise en facteur } e_1} \\
 &= 1 + e_1(-1 + \underbrace{\alpha_1 \beta_{12} + \alpha_1 (1 - \beta_{11} - \beta_{12})}_{\text{Mise en facteur de } \alpha_1}) \\
 &= 1 - e_1(1 - \alpha_1(1 - \beta_{11}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'deg'}) &= \underbrace{e_1 \alpha_1 \beta_{11} + e_1 \alpha_2 \beta_{22} + e_1 \alpha_2 (1 - \beta_{12} - \beta_{22})}_{\text{Mise en facteur } e_1} \\
 &= e_1(\underbrace{\alpha_2 \beta_{22} + \alpha_2 (1 - \beta_{12} - \beta_{22})}_{\text{Mise en facteur de } \alpha_2} + \alpha_1 \beta_{11}) \\
 &= e_1((1 - \beta_{21}) \alpha_2 + \alpha_1 \beta_{11})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\Theta_t}(X_{t+1} = \text{'panne'}) &= \underbrace{e_1 \alpha_2 \beta_{21} + e_1 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)}_{\text{Mise en facteur } e_1} \\
 &= e_1(1 - \alpha_1 - \underbrace{\alpha_2 + \alpha_2 \beta_{21}}_{\text{Mise en facteur de } \alpha_2}) \\
 &= e_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2(1 - \beta_{21}))
 \end{aligned}$$

## Composition du parc de la SNCF en Île-de-France

La figure C.1 donne la composition du parc d'automotrices de la SNCF, pour les missions transilliennes en 2006.

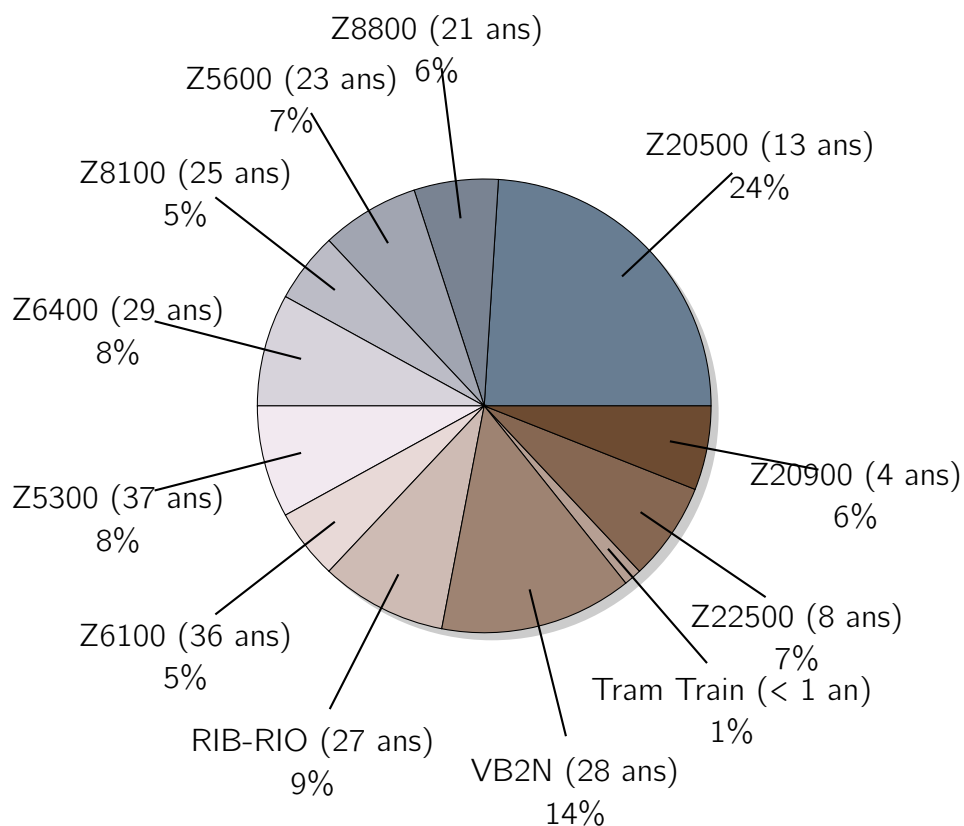


Figure C.1 – Répartition du parc de matériel roulant de la SNCF en 2006





Z20500



Z8800



Z5600



Z8100



Z6400



Z5300



Z6100



RIB-RIO



Tram



VB2N



Z22500



Z20900



B82500



Z50000

Figure C.2 – Matériels roulants utilisés pour les missions transiliennes par la SNCF

**Table C.1** Valeurs du seuil de décision  $c_\alpha$  pour le K-S test en fonction de la taille  $n$  de l'échantillon et de l'erreur de première espèce  $\alpha$ 

Taille $n$ de l'échantillon	Seuil de décision $c_\alpha$			
	Risque d'erreur de première espèce $\alpha$			
	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.95	0.975	0.99	0.995
2	0.77639	0.84189	0.9	0.92929
3	0.63604	0.7076	0.78456	0.829
4	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424
5	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853
6	0.46799	0.51926	0.57741	0.61661
7	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581
8	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179
9	0.38746	0.43001	0.4796	0.51332
10	0.36866	0.40925	0.45662	0.48893
11	0.35242	0.39122	0.4367	0.4677
12	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905
13	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247
14	0.31417	0.3489	0.3897	0.41762
15	0.30397	0.3376	0.37713	0.4042
16	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201
17	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086
18	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062
19	0.27136	0.30143	0.33685	0.36117
20	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241
21	0.25858	0.28724	0.32104	0.34427
22	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
23	0.24746	0.2749	0.30728	0.32954
24	0.24242	0.26931	0.30104	0.32286
25	0.23768	0.26404	0.29516	0.31657
26	0.2332	0.25907	0.28962	0.31064
27	0.22898	0.25438	0.28438	0.30502
28	0.22497	0.24993	0.27942	0.29971
29	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
30	0.21756	0.2417	0.27023	0.28987
40	0.18913	0.21012	0.23494	0.25205
plus de 40	$1.22 / \sqrt{n}$	$1.36 / \sqrt{n}$	$1.51 / \sqrt{n}$	$1.63 / \sqrt{n}$



## Éléments sur la théorie des probabilités

La théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la représentation du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertains. Elle forme un tout cohérent dont les concepts, les méthodes et les résultats interviennent dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies.

### **D.1 Interprétation des probabilités**

Lors de l'étude d'un événement aléatoire, la notion de probabilité peut être abordée de plusieurs manières différentes.

L'interprétation de la probabilité d'un événement comme la fréquence avec laquelle cet événement se produit au cours de longues séries d'expériences est la plus intuitive. La mesure ainsi définie est appelée probabilité expérimentale, car résultant de la répétition d'une expérience, et est donnée simplement par le rapport du nombre d'expériences qui réalise  $A$  sur le nombre d'expériences total. De cette manière la probabilité de vivre au dessous du seuil de pauvreté dans un pays est obtenue en faisant le rapport du nombre d'individus pauvre sur la population du pays.

L'interprétation classique des probabilités est basée sur le principe d'équiprobabilité entre les événements semblables. L'idée de base est de répartir la masse de probabilités sur l'ensemble des événements possibles. Par exemple, lors d'un lancer de dés à six faces, de manière intuitive, la probabilité d'obtenir une des six faces est la même pour chaque face.

L'interprétation subjective des probabilités est utilisée quand il n'y a aucune information particulière sur la fréquence de répétition de l'événement considéré. La mesure de probabilité se rapproche alors d'un degré de croyance.

## D.2 Définitions et propriétés

Quelque soit l'interprétation utilisée pour définir la notion de probabilité, la théorie des probabilités définit un ensemble de règles immuables, appelé axiomatique de Kolmogorov. La définition formelle d'une mesure de probabilité est définie par rapport à cette axiomatique.

### Définition 9 (Probabilité)

Soit  $\Omega$  un ensemble fini non vide. On note  $2^\Omega$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ . On appelle probabilité toute application  $P$  définie sur  $2^\Omega$  à valeur dans  $[0; 1]$ , et satisfaisant les axiomes suivants

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \in 2^\Omega, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Propriété 1.** A partir des deux axiomes principaux définissant une probabilité les théorèmes suivantes sont déductibles :

- Propriété 1 :  $P(\emptyset) = 0$
- Propriété 2 :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Propriété 3 :  $P(A) \leq P(B)$  ssi  $A \subset B$
- Propriété 4 :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

### Définition 10 (Variable aléatoire)

Soit  $\Omega$  un ensemble muni d'une probabilité  $P$ . Une variable aléatoire (v.a.)  $X$  est une fonction de l'ensemble fondamental  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Lorsque la variable  $X$  ne prend que des valeurs discrètes, on parle de variable aléatoire discrète.

Supposons que nous disposons d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \dots \times \mathcal{X}_n$ . On note  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \dots \times \mathcal{X}_n$  une réalisation ou instantiation de ces variables. La distribution de probabilité jointe de l'ensemble  $X$  est définie par :

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

et on appelle :

$$p(x_i) = p(X_i = x_i) = \sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n} p(x_1, \dots, x_n)$$

la distribution de probabilité marginale de la  $i^{\text{ème}}$  variable.

La connaissance d'une occurrence d'un évènement peut modifier les probabilités des autres évènements. Ainsi, chaque fois que de nouvelles informations deviennent disponibles, l'estimation des probabilités des évènements peut évoluer, ce qui nous mène à l'introduction du concept de *probabilité conditionnelle*.

**Définition 11 (Probabilité conditionnelle)**

Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles de variables aléatoires, sachant que la probabilité de  $Y$  est non nulle, la probabilité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$  est définie par :

$$P(X|Y) = \frac{P(X, Y)}{P(Y)}$$

Remarque : Deux évènements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si  $P(A \cup B) = P(A).P(B)$  ou encore si  $P(B|A) = P(B)$  (l'information sur la réalisation de  $A$  n'apporte rien à l'évènement  $B$ ) et  $P(A|B) = P(A)$ .

**Théorème 5** (Théorème de Bayes). *Étant donnés  $X$  et  $Y$  deux ensembles de variables aléatoires, le théorème de Bayes permet de déterminer la probabilité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$  à partir des probabilités de  $X$ , de  $Y$  et de  $Y$  sachant  $X$ , avec la formule suivante :*

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

**Définition 12 (Indépendance)**

étant donnés  $X$  et  $Y$  deux ensembles de variables aléatoires,  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, noté  $\langle X \perp_p Y \rangle$ , si et seulement si  $P(X|Y) = P(X)$ .

**Définition 13 (Indépendance conditionnelle)**

étant donnés  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois ensembles de variables aléatoires,  $X$  est indépendante conditionnellement de  $Y$  sachant  $Z$ , noté  $\langle X \perp Y|Z \rangle$  si seulement si  $P(X|Y, Z) = P(X|Z)$



# Annexe **E**

## Éléments sur la théorie des graphes

### E.1 Introduction

Les graphes sont des outils de modélisation qui permettent de représenter des entités et les relations entre ces dernières. Ils offrent un cadre de travail pour de nombreux modèles graphiques tels que les réseaux bayésiens, les chaînes de Markov, et les réseaux de pétri.

Les graphes sont classés en trois grandes familles : les graphes non-orientés, les graphes semi-orientés et les graphes orientés. Pour définir les modèles graphiques probabiliste seule la dernière catégorie est nécessaire. Cependant il est courant de voir intervenir les notions de graphe non orientés dans certains algorithmes d'inférence.

Cette partie a pour objectif d'introduire quelques éléments de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension des réseaux bayésiens.

### E.2 Définitions et représentation

#### E.2.1 Graphes orientés

##### Définition 14 (Graphe orienté)

*Un graphe orienté est un couple  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  où*

- $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_d\}$  est un ensemble de  $d$  nœuds et*
- $\mathcal{E}$  est une partie de l'ensemble des couples  $(v_i, v_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .*

Si  $a = (u, v)$  est un arc du graphe  $\mathcal{G}$ ,  $u$  est l'extrémité initiale et  $v$  l'extrémité finale.

Le graphe représenté par la figure E.1 est composé de cinq nœuds  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  et six arcs  $\mathcal{E} = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_5, v_2)\}$



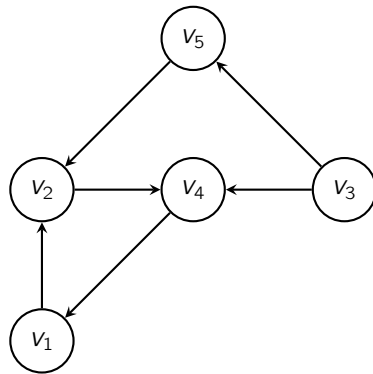


Figure E.1 – Exemple d'un graphe orienté

**Définition 15 (Parent, Enfant, Racine , Feuille)**

- Soit  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un graphe orienté. Les définitions suivantes sont données :
- **Parent** : Le nœud  $v_i$  est parent de  $v_j$ , si et seulement si  $(v_i, v_j)$  est un arc de  $\mathcal{G}$  c-à-d si  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ . L'ensemble des parents du nœud  $v_j$  est noté  $pa(v_j) = \{v_i | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$ .
  - **Enfant** : Le nœud  $v_j$  est enfant de  $v_i$ , si et seulement si  $(v_i, v_j)$  est un arc de  $\mathcal{G}$  c-à-d si  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ . L'ensemble des enfants du nœud  $v_i$  est noté  $en(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$ .
  - **Racine** : Le nœud  $v_j$  est une racine du graphe s'il n'a pas de parent, c-à-d si  $pa(v_j) = \emptyset$
  - **feuille** : Le nœud  $v_j$  est une feuille du graphe s'il n'a pas d'enfant, c-à-d si  $en(v_j) = \emptyset$

Pour illustrer les précédentes définitions, dans l'exemple de graphe présenté dans la figure E.1 les parents du nœud  $v_4$  sont les nœuds  $v_2$  et  $v_3$  ( $pa(v_4) = \{v_2, v_3\}$ ) ; les nœuds  $v_4$  et  $v_5$  sont enfants du nœud  $v_3$  ( $en(v_3) = \{v_4, v_5\}$ )

**Définition 16 (Chemin, Cycle)**

- Soit  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un graphe orienté. Les définitions suivantes sont données :
- **Chemin** : Un chemin de taille  $n$  est un  $n$ -uplet  $(v_1, \dots, v_n)$  d'éléments de  $\mathcal{V}$  tels que pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$  il existe un arc entre les nœuds  $v_i$  et  $v_{i+1}$  c-à-d  $\forall i \in \{1, \dots, n - 1\}, (v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{E}$
  - **Cycle** : Un cycle est un chemin  $(v_1, \dots, v_n)$  tel que  $v_1 = v_n$  et les nœuds  $u_1, \dots, u_{n-1}$  sont deux à deux distincts.

La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arcs qui le composent. La *distance* entre deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  est égale à la longueur du chemin le plus court entre  $v_i$  et  $v_j$ .

A titre d'exemple le graphe représenté par la figure E.1 contient le chemin de taille 3 :  $(v_3, v_5, v_2)$  et le cycle  $(v_1, v_2, v_4)$

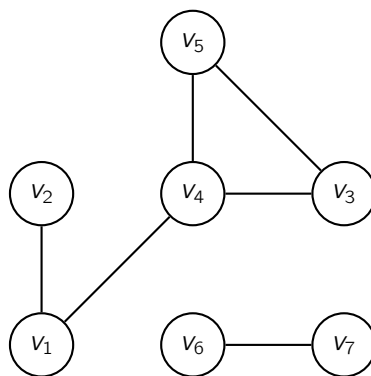


Figure E.2 – Exemple d'un graphe non-orienté

## E.2.2 Graphes non orientés

### Définition 17 (Graphe non-orienté)

Un graphe non-orienté  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  est un graphe orienté symétrique. C'est-à-dire pour tout arc  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  il existe un arc symétrique  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ .

La figure E.2 représente un exemple de graphe non orienté à sept nœuds.

Dans le cas des graphes non orientés, le terme "arc" est remplacé par le terme "arête" pour désigner un lien entre deux sommets. De même, les notions de *parents* et d'*enfants*, introduites pour les graphes orientés, n'ont plus vraiment de sens et sont remplacées par une notion de *voisinage*. De plus, les termes "chaîne" et "cycle" seront substitués aux termes "chemin" et "circuit" réservés aux graphes orientés. Les définitions d'une chaîne et d'un cycle sont semblables à celles données pour les graphes orientés.

### Définition 18 (Chaîne, Cycle)

Soit  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un graphe non orienté. Les définitions suivantes sont données :

- **Chaîne** : Une chaîne de taille  $n$  est un  $n$ -uplet  $(v_1, \dots, v_n)$  d'éléments de  $\mathcal{V}$  tels que pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  il existe un arc entre les nœuds  $v_i$  et  $v_{i+1}$  c-à-d  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, (v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{E}$
- **Circuit** : Un circuit est un chemin  $(v_1, \dots, v_n)$  tel que  $v_1 = v_n$  et les nœuds  $v_1, \dots, v_{n-1}$  sont deux à deux distincts.

### Définition 19 (Composante connexe)

Une composante connexe dans un graphe quelconque, est un ensemble maximal de sommets tels que pour toute paire de sommets  $v_i$  et  $v_j$ , appartenant à cet ensemble il existe une chaîne reliant  $v_i$  à  $v_j$

Un graphe est dit connexe si tous ses sommets sont dans la même composante connexe. Par exemple, le graphe de la figure E.2 n'est pas connexe, car il est composé de deux composantes connexes  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  et  $\{v_6, v_7\}$ .

## E.2.3 Cas particuliers de graphes

### E.2.3.1 Graphe acyclique, graphe complet, clique

#### Définition 20 (Graphe acyclique)

Un graphe acyclique (DAG pour l'acronyme anglais *Directed Acyclic Graph*) est un graphe orienté qui ne possède pas de cycle.

#### Définition 21 (Graphe complet, Clique)

Un graphe est dit complet si tous les nœuds de ce graphe sont deux à deux reliés par des arêtes. Concrètement  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  est complet si  $\mathcal{E} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .

Une clique d'un graphe  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  est un sous-ensemble de sommets  $\mathcal{C} \in \mathcal{V}$  tel que le sous-graphe  $\mathcal{G} = (\mathcal{C}, \mathcal{E}_{|\mathcal{C} \times \mathcal{C}})$  soit complet.

Un sous-graphe d'un graphe orienté ou non est le graphe obtenu en supprimant certains sommets et tous les arcs ou arêtes incidents aux sommets supprimés.

La taille de la clique est le nombre de sommets qui la composent. Une clique est dite maximale si elle n'est pas strictement incluse dans une autre clique.

A partir d'un graphe orienté sans circuit, il est possible de construire un graphe non orienté, en supprimant l'orientation des arcs et en reliant les parents de chaque sommet entre eux, ce graphe est appelé graphe moral.

### E.2.3.2 Graphe moral

#### Définition 22 (Graphe moral)

Soit  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un graphe orienté sans circuit. Le graphe moral  $\mathcal{G}_m = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_m)$  de  $\mathcal{G}$  est le graphe non orienté tel que :

- si  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  alors  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}_m$
- pour chaque sommet  $v_k \in \mathcal{V}$ , si  $v_i, v_j \in pa(v_k)$  alors  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}_m$ .

L'opération de moralisation, utilisée notamment dans l'algorithme d'inférence dans les réseaux bayésiens de Pearl, consiste à transformer un graphe orienté sans circuit en un graphe moral.

### E.2.3.3 Arborescence, arbre, polyarbre

Il existe plusieurs cas particuliers de graphe acyclique. Les arbres, arborescences et polyarbre font partie de cette catégorie de graphe. La particularité de ces graphes leur confère des propriétés avantageuses pour les algorithmes de parcours de graphe.

#### Définition 23 (Arbre, Polyarbre, Arborescence)

Un arbre est un graphe non-orienté  $G = (V, E)$ , connexe et sans cycle.

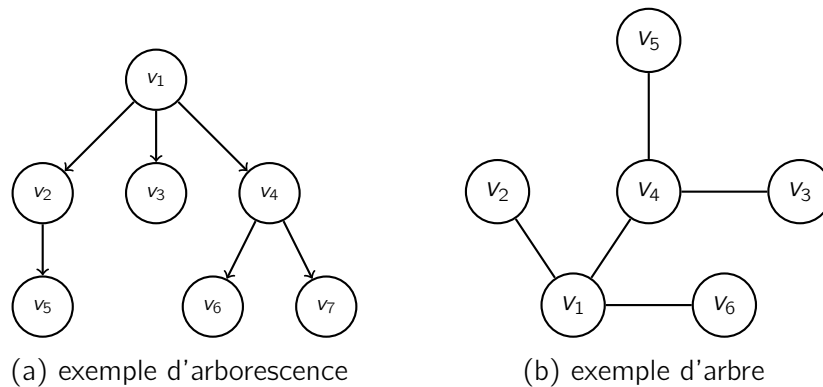


Figure E.3 – Cas particulier de graphe

*Un polyarbre est un graphe orienté  $G = (V, E)$ , connexe et acyclique tel qu'il existe au maximum une chaîne entre deux sommets de  $V$ .*

*Une arborescence est un polyarbre tel que chaque sommet  $V$  n'a qu'un parent.*

La notion d'arborescence est l'adaptation de la définition d'un arbre pour les graphes orientés.

Les sommets n'ayant pas d'enfants sont généralement appelés les feuilles de l'arbre ou de l'arborescence. La figure E.3 présente des exemples d'arborescence d'arbre et de polyarbre.

#### **Définition 24 (Graphe triangulé)**

*Un graphe non orienté  $G = (V, E)$  est triangulé si et seulement si chaque cycle de longueur supérieure à quatre possède une corde, c'est-à-dire si deux sommets non consécutifs dans le cycle sont voisins.*

La triangulation d'un graphe n'est pas unique et la recherche de la triangulation optimale (au sens du nombre d'arêtes ajoutées minimum) est un problème NP-Complet



# Annexe **F**

## Quelques résultats sur les polynômes

### F.1 Définition

En mathématiques, un polynôme est une expression formée uniquement de produits et de sommes de constantes et d'indéterminées. Avant de définir un polynôme, il faut commencer par définir un monôme.

#### Définition 25 (Monôme)

*Un monôme est le produit d'un nombre réel, appelé coefficient, et d'un nombre fini de variables élevées chacune à une puissance entière positive. L'expression générale d'un monôme à  $r$  inconnues est de la forme :*

$$\mathcal{M}_r = a x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_r^{b_r},$$

*où  $a$  est un réel,  $(x_1, \dots, x_r)$  un vecteur d'inconnues et  $(b_1, \dots, b_r)$  un vecteur d'entiers positifs*

Le degré d'un monôme est la somme des puissances de chaque variable du monôme. En reprenant les notations précédentes le degré d'un monôme  $\mathcal{M}_r$  est :

$$\deg(\mathcal{M}_r) = \sum_{i=1}^r b_i. \tag{F.1}$$

Par convention, le degré d'un monôme constant est 0 et le degré d'un polynôme nul est  $-\infty$ .

Le tableau suivant présente quelques exemples de monômes :

Exemples de monômes	-4	$x$	$3x^2$	$-5xy$	$2xy^2z^3$
Nombre de variables	0	1	1	2	3
Degré	0	1	2	2	6

**Définition 26 (polynôme)**

Un polynôme est une somme finie de monômes. la forme générale d'un polynôme est :

$$\mathcal{P} = m_1 + m_2 + \dots + m_s,$$

où les  $m_1 \dots m_s$  sont des monômes.

Le nombre d'inconnues d'un polynôme est la taille de l'ensemble réunissant toutes les inconnues de chaque monôme. Le degré d'un polynôme est le degré maximum de ses monômes. Autrement dit :

$$\deg(\mathcal{P}) = \max\{\deg(m_1), \deg(m_2), \dots, \deg(m_s)\} \quad (\text{F.2})$$

La forme la plus simple de polynômes est un polynôme à une variable, appelé polynôme univarié. La forme générale d'un polynôme univarié est :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (\text{F.3})$$

où  $a_0, \dots, a_n$  sont des valeurs constantes réelles appelées coefficients du polynôme et  $n$  est le degré du polynôme.

**Définition 27**

*Polynôme multivarié* Un polynôme multivarié est un polynôme d'au moins deux variables.

Le tableau suivant présente deux exemples de polynômes. Le premier est un polynôme univarié de degré 2 et le second un polynôme multivarié à 3 inconnues de degré 4.

Exemples de polynômes	$2x^2 + 3x - 1$	$3xy^2 + 2x^2z + 3xyz^2 - 2$
Nombre de variables	1	3
Degré	2	4

**Propriété 2.** Le nombre maximum de monômes d'un polynôme de degré  $n$  à  $r$  variables est le nombre de parti à  $r$  éléments inclus dans un ensemble de  $n+r$  éléments.

$$M_r(n) = \binom{r+n}{r} = \frac{(r+n)!}{n! r!} \quad (\text{F.4})$$

**F.2 Opérations sur les polynômes**

La multiplication d'un polynôme  $P$  de coefficient  $(a_0, \dots, a_n)$  et de degré  $r$  par une constante  $\lambda \neq 0$  est le polynôme  $\lambda P$  de coefficient  $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$  et de degré  $r$ .

La somme, la soustraction ou le produit de deux polynômes  $P$  et  $Q$  est un polynôme. En revanche, la division de deux polynômes n'en est pas forcément un.

**Théorème 6.** *Le degré d'une somme de deux polynômes est inférieur ou égal au maximum des degrés des deux polynômes.*

$$\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$$

**Théorème 7.** *Le degré du produit de deux polynômes non nuls est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes.*

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

## F.3 Méthodes d'évaluation

Évaluer un polynôme à  $r$  variables  $(x_1, \dots, x_r)$  en un point  $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  c'est calculer sa valeur avec les affectations  $x_1 = \alpha_1, \dots, x_r = \alpha_r$ . La méthode "naïve" pour effectuer ce calcul consiste à évaluer chaque monôme séparément puis à effectuer la somme des résultats.

Dans le cas d'un polynôme de degré  $n$  à  $r$  variables, le nombre  $M_{\text{naïve}}(n, r)$  de multiplications nécessaires pour le polynômes est :

$$M_{\text{naïve}}(n, r) = \frac{r(n+r)!}{(r+1)!(n-1)!} \quad (\text{F.5})$$

**Démonstration :** A partir de la proposition 2 il est possible de déduire que le nombre de monômes de degré  $n$  constructible avec  $r$  variables est :

$$\binom{r+n}{r} - \binom{r+n-1}{r} \quad (\text{F.6})$$

Sachant que  $n$  multiplications sont nécessaires pour évaluer un monôme de degré  $n$ , le nombre  $M_{\text{naïve}}(n, r)$  de multiplications à effectuer pour évaluer un polynôme de degré  $n$  à  $r$  variables est :

$$\begin{aligned} M_{\text{naïve}}(n, r) &= \left( \binom{r+1}{r} - \binom{r}{r} \right) + 2 \left( \binom{r+2}{r} - \binom{r+1}{r} \right) + \dots + n \left( \binom{r+n}{n} - \binom{r+n-1}{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i \left( \frac{(r+i)!}{i! r!} - \frac{(r+i-1)!}{(i-1)! r!} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)! - i(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{r(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \\ &= \frac{r(n+r)!}{(r+1)!(n-1)!} \end{aligned}$$

□



Il est possible de réduire ce nombre en utilisant les résultats des monômes sans coefficients de degrés  $n$  à partir des monôme de degré  $n-1$ . Par exemple, le monôme  $xy^2z$  peut être calculé à partir du monôme  $xyz$  en le multipliant par  $y$ . Avec cette astuce le nombre  $M_{\text{naive2}}(n, r)$  de multiplications pour évaluer un polynôme à  $r$  variables de degrés  $n$  est :

$$M_{\text{naive2}} = \frac{2(n+r)!}{n!r!} - r - 2 \quad (\text{F.7})$$

### F.3.1 Polynômes univariés

Prenons l'exemple du polynôme  $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ . Pour calculer  $P(3)$  avec la méthode "naïve" il faut  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  multiplications et 5 additions. De même, si on généralise pour évaluer un polynôme  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  univarié de degré  $n$  il faudra  $(n^2 + n)/2$  multiplications et  $n$  additions si tous les coefficients  $a_0, \dots, a_n$  sont non nuls. Il est possible de réduire le nombre de multiplications nécessaires à  $2n - 1$  en calculant les puissances de  $x$  itérativement. De plus, la méthode "naïve" requiert un espace mémoire important. Si  $b$  représente la taille en octets du stockage en mémoire d'un nombre réel, la méthode naïve utilise environ  $2nb$  octets.

#### F.3.1.1 Schéma d'Horner

Le schéma d'Horner [Knuth 1968] permet d'évaluer un polynôme avec un nombre de multiplications réduit. Le principe est une mise en facteur successive de l'inconnue  $x$ . Le polynôme se ré-écrit comme suit :

$$\begin{aligned} P(x) &= \underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}_{\text{mise en facteur de } x} \\ &= \left( \underbrace{a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_3 x^2 + a_2 x + a_1}_{\text{mise en facteur de } x} \right) x + a_0 \\ &= \dots \\ &= (\dots (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3}) \dots) x + a_0 \end{aligned}$$

Sous cette forme le nombre maximum d'opérations nécessaires à l'évaluation du polynôme  $P(x)$  est de  $n$  multiplications et  $n$  additions. Le schéma d'Horner permet aussi de réduire l'espace mémoire nécessaire pour évaluer un polynôme. Avec cette méthode, si  $b$  représente la taille en octets du stockage en mémoire d'un nombre réel, l'évaluation d'un polynôme de degré  $n$  utilise environ  $n$  octets.

Dans le cas d'un polynôme univarié, la méthode d'Horner est optimale, c'est à dire qu'il n'existe pas d'algorithme pour calculer un polynôme quelconque en utilisant moins d'opérations. Dans [Ostrowski 1954] la preuve a été faite que le nombre d'additions est minimal et dans [Pan 1966] la démonstration de la minimalité du nombre

de multiplications est faite. Cependant, dans le cas multivarié la méthode d'Horner n'est pas optimal.

En reprenant l'exemple précédent avec le polynôme  $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ . En suivant le schéma d'Horner le polynôme se ré-écrit sous la forme  $P(x) = (((((3x - 2)x + 7)x + 2)x + 5)x - 3$ . Sous cette forme 5 multiplications et 5 additions suffisent à l'évaluation de ce polynôme.

La méthode d'Horner peut aussi être étendue pour évaluer les  $k$  premières dérivées d'un polynôme avec  $kn$  additions et multiplications [Pankiewicz 1968].

### F.3.2 Polynômes multivariés

Contrairement au cas univarié, il n'existe pas d'algorithme optimal, en terme de nombre d'opérations effectuées, pour évaluer un polynôme multivarié. Cependant, quelques méthodes de réduction du nombre de multiplications ont été proposées.

Par exemple, [Ceberio 2004] propose une adaptation du schéma d'Horner aux polynômes multivariés. L'approche consiste à choisir une variable et à appliquer la méthode d'Horner en considérant les autres variables comme des constantes. Ce schéma est appliqué récursivement aux variables restantes. L'ordre de sélection des variables influe sur le nombre d'opérations de l'expression finale. Le problème consiste à trouver le meilleur ordre de sélection pour minimiser le nombre d'opérations. [Ceberio 2004] propose une heuristique gloutonne pour résoudre ce problème. Le principe de cette heuristique est de construire l'ordre itérativement en choisissant à chaque fois la variable qui réduit le plus le nombre de multiplications.

Prenons l'exemple du polynôme  $P(x, y, z) = x^3y + x^2z + x^2yz$  en utilisant l'ordre  $(x, z, y)$  la transformation est la suivante :

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \underbrace{x^3y + x^2z + x^2yz}_{\text{Mise en facteur de } x^2} \\ &= x^2(xy + \underbrace{z + yz}_{\text{Mise en facteur de } z}) \\ &= x^2(xy + z(1 + y)). \end{aligned}$$

Sous cette forme l'évaluation du polynôme requiert 4 multiplications et 2 additions. Avec l'ordre  $(y, z, x)$ , l'expression obtenue est  $P(x, y, z) = y(x^2(x + z)) + x^2z$  et nécessite 5 multiplications et 2 additions.



# Abstract

---

The optimization of maintenance strategies is a major issue for many industrial applications. It involves establishing a maintenance plan that ensures security levels, security and high reliability with minimal cost and respecting any constraints. The increasing number of works on optimization of maintenance parameters in particular in scheduling preventive maintenance action underlines the importance of this issue.

A large number of studies on maintenance are based on a modeling of the degradation of the system studied. Probabilistic Models Graphics (PGM) and especially Markovian PGM (M-PGM) provide a framework for modeling complex stochastic processes. The issue with this approach is that the quality of the results is dependent on the model. More system parameters considered may change over time. This change is usually the result of a change of supplier for replacement parts or a change in operating parameters.

This thesis deals with the issue of dynamic adaptation of a maintenance strategy, with a system whose parameters change. The proposed methodology is based on change detection algorithms in a stream of sequential data and a new method for probabilistic inference specific to the dynamic Bayesian networks.

Furthermore, the algorithms proposed in this thesis are implemented in the framework of a research project with Bombardier Transportation. The study focuses on the maintenance of the access system of a new automotive designed to operate on the rail network in Ile-de-France. The overall objective is to ensure a high level of safety and reliability during train operation.

**Keywords** : Reliability, Probabilistic Models, Dynamic Bayesian Network, Maintenance Policy.