



**HAL**  
open science

# Contribution à la prévision de l'érosion de cavitation à partir de simulations numériques : proposition d'un modèle à deux échelles pour l'estimation du chargement imposé en paroi par le fluide

Laurent Krumenacker

## ► To cite this version:

Laurent Krumenacker. Contribution à la prévision de l'érosion de cavitation à partir de simulations numériques : proposition d'un modèle à deux échelles pour l'estimation du chargement imposé en paroi par le fluide. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAI006 . tel-01170332

**HAL Id: tel-01170332**

**<https://theses.hal.science/tel-01170332v1>**

Submitted on 1 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mécanique des fluides**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Krumenacker Laurent**

Thèse dirigée par **Fortes-Patella Régiane**

préparée au **Laboratoire des écoulements géophysiques et industriels**  
et dans l'école doctorale **IMEP<sup>2</sup>**

## **Contribution à la prévision de l'érosion de cavitation à partir de simulations numériques: proposition d'un modèle à deux échelles pour l'estimation du chargement imposé en paroi par le fluide**

Thèse soutenue publiquement le **29 janvier 2015**,  
devant le jury composé de :

**M. Reboud Jean-Luc**

Professeur de l'université de Grenoble, Président

**M. Coutier-Delgosha Olivier**

Professeur des universités, ENSAM, Lille, Rapporteur

**M. Khelladi Sofiane**

Maître de conférences, Arts et métiers Paris Tech, Rapporteur

**M. Couzinet Anthony**

CETIM, Nantes, Examineur

**Mme. Fortes-Patella Régiane**

Professeur de l'université de Grenoble, LEGI, Directeur de thèse

**M. Archer Antoine**

EDF R&D, Chatou, Co-Encadrant de thèse





Cette thèse a été financée par Électricité de France (EDF R&D), le Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) et l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie.





## Remerciements

Même s'il n'y a qu'un individu face au jury, le doctorat est loin d'être un travail solo. Les pierres pour construire l'édifice sont nombreuses et prennent différentes formes. Cette partie du manuscrit est sans doute pour moi la plus importante car, plus que trois années de travail, elle me permet de remercier les personnes qui ont fait trois ans de vie.

Mes premières pensées vont bien entendu à ma famille qui m'a donné la possibilité de faire des choix, tout en me fournissant les outils pour que j'essaye de faire les bons.

Viennent ensuite les thésards du LEGI. Avant tout 'compagnons de galères', ils ont pu enfilé différentes casquettes : partenaires de vélo, d'escalade, de wake-board, de skis (alpin, de fond et de randonnée) ou plus simplement d'apéros. Merci donc à ceux qui sont partis - Jonathan, Laurianne (Les baywatchers), Jean, Olivier, Max - à ceux qui m'ont suivi tout du long - Antoine, Mouloud, Nico, Boris, Cornic - et aux petits nouveaux - Nat, Sylvia, Lucas et les Alexs.

Je tiens également à remercier les plus expérimentés et les loubards du labo - Stéphane, Henda, Eric, Fred (père Castor), Damien, Olivier (maître Shifu), Titi, Cyrille, Patrick, Gaby - qui m'ont à la fois conseillé, réconforté, débogué et m'ont remis à flot de façon très littéral parfois.

Je salue également les personnes rencontrées aux alentours des terrains de Foot ou d'Ultimate (Vive la FILF) et qui sont devenues bien plus que des connaissances par la suite : Florent, Romain, Stéphanie, Matthias, Olivier, Antoine (Goose!) Tomtom et Morlot l'inimaginable.

Je n'oublie pas les 'faisers de foudres'/'les créateurs de murs'/'les artilleurs' de l'équipe de Volley de l'INPG, champions Rhône-Alpes (qui après vérification est une région plus grande que la Belgique).

---

Je remercie également les personnes que je connaissais bien avant la thèse et qui ont eu la patience de me supporter depuis. Je pense notamment à mes potes d'école d'ingé - Messonn, l'Arpéjois, Standop, TT, Bulle, Charlotte, Latine, Delphouine, Gokou, Serrano, et plus généralement l'ensemble du X6 - mais aussi à mes potes de Lycée - Benjamin, Alexis, Guillaume, JB, Navet, Andries, Vincent, Clément.

Je finirais cette partie par remercier Antoine Archer pour sa patience et sa gentillesse tout au long de ces trois années. J'ai sûrement oublié de nombreuses personnes et je m'en excuse par avance.

Enfin une dernière citation faite par un homme qui a su capter l'essence même de mon travail et la retranscrire de façon presque intelligible. (C'est très idiot mais ça permet de mettre en perspective notre travail lorsque l'on est trop à fond).

*Sauf erreur de ma part, le terme constant de la modélisation paramétrique partielle du système de coordonnées ne doit pas être approximé comme la somme des altérés quadratique au premier ordre du vecteur de position. En effet, je me répète car besoin est, interpolate un résultat Bidimensionnel dans un espace pré-Hilbertien muni d'un opérateur de Cauchy non réflexif ne prend de sens que si l'on admet la convergence des sous fonctions propres du modèle de calibration. L'orientation polarisé d'un rayon fluide traversant une paroi mi-réfringente dans des conditions atmosphériques constantes ne dépends que de la masse volumique de la particule principale et du prix sur le marché de la saule sauvage pleine mer. Dans ce cadre, je réfute donc les conjectures corollaires de M le Maître de conférence, pour proposer une approche plus contiguë des écoulement non Newtoniens, au sens de Navier Stokes dans l'hypothèse d'une distribution pseudo-concave de l'environnement d'analyse décrite dans "mon amour pour les bulles" par jean Michel Cantouloup, et, si l'assemblée me le permet de saluer mes amis et ma famille.*

F.D.

---

## Résumé

Lors du fonctionnement d'une installation hydraulique, l'apparition de zone de cavitation dans l'écoulement peut entraîner un endommagement important sur la surface des matériaux. La quantification de l'intensité de cavitation sur les composants hydrauliques serait utile à la fois pour mieux concevoir les nouveaux équipements en projet, mais aussi pour améliorer la conduite et optimiser la maintenance des matériels existants. Au vu du grand nombre de paramètres régissant les écoulements cavitants, l'élaboration de lois de similitudes universelles à partir d'expériences est délicate. Avec l'augmentation des moyens de calculs, la simulation numérique est un outil pour étudier ce phénomène sur des géométries variées.

La principale difficulté de cette démarche réside dans la différence d'échelles existant entre les simulations numériques **U-RANS** servant à simuler l'écoulement cavitant et les mécanismes d'implosion de bulles jugés responsables de l'endommagement sur le solide. La méthode proposée dans ce manuscrit s'appuie sur un **post-traitement des simulations U-RANS** afin de caractériser une distribution de bulles et de simuler leurs comportements à de plus petites échelles spatiales et temporelles.

Dans un premier temps, notre travail consiste à expliciter les équations locales de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour un écoulement liquide/gaz comprenant deux espèces eau/air. Ce travail mène à l'élaboration de grandeurs de mélange prenant notamment en compte la présence de gaz incondensables au sein du fluide. Des hypothèses permettent de rendre ce système équivalent à ceux, utilisant une approche homogène, implémentés dans les codes de simulations d'écoulements cavitants instationnaires développés précédemment au laboratoire. La caractérisation des populations de bulles effectuée par le post-traitement prend ainsi en considération à la fois la tension superficielle et la présence de gaz incondensables.

Dans un deuxième temps, l'élaboration d'un code de calcul permettant la simulation de la dynamique d'un nuage de bulles est débutée. Ce dernier a pour ambition de tenir compte

---

à la fois des interactions entre les bulles et des déformations non sphériques que celles-ci peuvent subir à l'aide d'une méthode potentielle. Des premiers résultats de simulations sont présentés dans ce manuscrit et permettent de tenir compte de faibles déformations des bulles.

La dernière étape de ce travail consiste à proposer une méthode de chaînage entre ces deux échelles en initialisant le calcul de dynamique de bulles à l'aide des résultats du calcul **U-RANS**. L'énergie émise lors de l'implosion des bulles et impactant la surface solide est ainsi calculée, caractérisant de ce fait le chargement imposé par l'écoulement sur le matériau. Cette méthode est par la suite appliquée sur différentes géométries en comparant à chaque fois les résultats obtenus à des expériences. Nous comparons également nos résultats à des méthodes précédemment établies au sein du laboratoire afin d'évaluer la pertinence de cette approche.

**Mots-clés :** Erosion de cavitation, simulations numériques, dynamique de bulles

---

## Abstract

During the life's cycle of a hydraulic installation, the occurrence of cavitation can cause significant damages on the material's surface. The quantification of the cavitation intensity in different geometry can be useful to get better designs for new installations, but also to improve the operating and to optimize maintenance of existing equipments. The development of universal laws of similarity from experiments is difficult due to the large number of parameters governing cavitating flows. With the increase of computational performance, numerical simulations offer the opportunity to study this phenomenon in various geometries.

The main difficulty of this approach is the scale's difference existing between the numerical simulations **U-RANS** used to calculate the cavitating flow and mechanisms of bubble's collapse held responsible for damages on the solid. The proposed method in this thesis is based on a **post-treatment** of the **U-RANS** simulations to characterize a distribution of bubbles and to simulate their behavior at lower spatial and temporal scales.

Our first objective is to make explicit a system of equations corresponding to phenomena occurring locally in the two-phase flow. This work leads to the development of mixture variables taking into account the presence of non-condensable gases in the fluid. Assumptions are taken to make the system, after using the Reynolds averaging procedure, equivalent to those, using a homogeneous approach, implemented in the unsteady cavitating flows solvers previously developed in the laboratory. The characterization of bubbles made by this post-treatment takes into account both the surface tension and the presence of non-condensable gases.

The development of a solver for the simulation of the dynamic of a bubble cloud is started. It aims to take into account both the interactions between bubbles and non-spherical deformations with a potential method. First results of these simulations are presented and small non-spherical deformations occurring during the collapse can be observed.

---

Finally, we propose a chained method between these two systems initializing the bubble dynamic solver with results of **U-RANS** simulations. The energy emitted during the implosion of bubbles impacting the solid surface is calculated. So the aggressiveness of the flow on the material can be characterized. We apply this method on different flows to compare numerical and experimental results.

**Keywords :** Cavitation erosion, numerical simulations, bubble dynamic

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Nomenclature   | 13        |
| Table des figures  | 20        |
| Liste des tableaux   | 29        |
| <b>1. Introduction</b>   | <b>31</b> |
| 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation . . . . .                      | 33        |
| 1.1.1. La cavitation . . . . .   | 33        |
| 1.1.2. Mécanisme de l'érosion de cavitation . . . . .                              | 35        |
| 1.1.3. Comportement mécanique . . . . .  | 41        |
| 1.1.4. Contexte industriel . . . . .   | 47        |
| 1.2. Simulation numérique des écoulements cavitants . . . . .                      | 49        |
| 1.2.1. Simulation directe d'un milieu diphasique . . . . .                         | 49        |
| 1.2.2. Cas particulier de la dynamique de bulles . . . . .                         | 52        |
| 1.2.3. Simulation numérique des écoulements industriels cavitants . . . . .        | 56        |
| 1.3. Etat de l'art de la prédiction numérique de l'érosion de cavitation . . . . . | 60        |
| 1.3.1. Modélisation de la dynamique de bulle . . . . .                             | 60        |
| 1.3.2. Résolution de la dynamique de bulles . . . . .                              | 66        |
| 1.4. Méthode proposée et organisation du mémoire . . . . .                         | 73        |
| 1.4.1. Commentaires sur les méthodes existantes . . . . .                          | 73        |
| 1.4.2. Démarche suivie dans le mémoire . . . . .                                   | 75        |
| <b>2. Équations de la dynamique d'un fluide binaire diphasique</b>                 | <b>79</b> |
| 2.1. Suivi de l'interface . . . . .  | 85        |
| 2.1.1. Caractérisation des phases et de l'interface . . . . .                      | 85        |



---

|   |            |
|---|------------|
| 2.1.2. Coalescences et fissions des structures gazeuses . . . . .   | 86         |
| 2.1.3. Méthodes de suivi d'une population de bulles . . . . .   | 87         |
| 2.2. Équation de conservation de la masse . . . . .   | 89         |
| 2.2.1. Équation de conservation de masse pour les phases . . . . .  | 89         |
| 2.2.2. Équation de conservation de masse pour le milieu diphasique . . . . .  | 90         |
| 2.2.3. Modèles de fermeture . . . . .   | 93         |
| 2.2.4. Evaluation de l'importance des termes pour nos applications . . . . .  | 98         |
| 2.3. Équation de conservation de quantité de mouvement . . . . .  | 100        |
| 2.3.1. Equation de conservation de quantité de mouvement pour une phase   | 100        |
| 2.3.2. Equation de conservation de quantité de mouvement pour le mélange<br>homogène . . . . .                                    | 101        |
| 2.3.3. Modèle de fermeture . . . . .  | 102        |
| 2.3.4. Evaluation de l'importance des termes pour nos applications . . . . .  | 105        |
| 2.4. Equation de conservation de l'énergie . . . . .  | 106        |
| 2.4.1. Evolution de la température pour une phase . . . . .   | 106        |
| 2.4.2. Modèles de fermetures . . . . .  | 108        |
| 2.4.3. Evaluation de l'importance des termes pour nos applications . . . . .  | 115        |
| 2.5. Conclusion . . . . .   | 117        |
| <br>  |            |
| <b>3. Simulation d'un écoulement diphasique à l'aide d'un code URANS</b>  | <b>119</b> |
| 3.1. Equations de conservation phasiques moyennées . . . . .  | 122        |
| 3.1.1. Définition des opérateurs de moyenne . . . . .   | 122        |
| 3.1.2. Système d'équations moyennées . . . . .  | 125        |
| 3.2. Exemples de modèles de simulation des écoulements cavitants basés sur une<br>approche homogène . . . . .                     | 128        |
| 3.2.1. Utilisation d'une équation de transport du taux de vide . . . . .  | 128        |
| 3.2.2. Simulation reposant sur une modélisation des transferts de masse .   | 133        |
| 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cav-<br>itants par une approche monofluide . . . . . | 137        |
| 3.3.1. Pression homogène avec prise en compte de l'interface . . . . .  | 138        |
| 3.3.2. Considération de l'air dans l'écoulement . . . . .   | 143        |
| 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence<br>d'air . . . . .                             | 146        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 3.4.1.    | Hypothèses et équivalences de la loi d'état . . . . .   | 149        |
| 3.4.2.    | Données expérimentales et topologie du milieu diphasique . . . . .  | 152        |
| 3.4.3.    | Calibrage des lois d'états . . . . .  | 158        |
| 3.5.      | Conclusion . . . . .  | 171        |
| <b>4.</b> | <b>Implosions des structures cavitantes</b>   | <b>173</b> |
| 4.1.      | Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles . . . . .   | 176        |
| 4.1.1.    | Etat de l'art de l'implosion de bulles dans des conditions non symétriques                                | 176        |
| 4.1.2.    | Utilisation d'un potentiel de vitesse . . . . .   | 181        |
| 4.1.3.    | Décomposition du potentiel de vitesse . . . . .   | 185        |
| 4.1.4.    | Mise en place de l'algorithme de résolution . . . . .   | 190        |
| 4.2.      | Résultats de simulations . . . . .  | 197        |
| 4.2.1.    | Caractérisation de la dynamique de bulles . . . . .   | 198        |
| 4.2.2.    | Bulle isolée placée dans un milieu infini . . . . .   | 202        |
| 4.2.3.    | Implosion d'une bulle en proche paroi . . . . .   | 207        |
| 4.2.4.    | Implosion d'un nuage de bulles . . . . .  | 214        |
| 4.3.      | Conclusion sur l'algorithme <b>IDB</b> . . . . .  | 219        |
| <b>5.</b> | <b>Prévision de l'agressivité de l'écoulement</b>   | <b>221</b> |
| 5.1.      | Chaînage entre les simulations <b>U-RANS</b> et les simulations de la dynamique<br>de bulles . . . . .    | 223        |
| 5.1.1.    | Calcul de l'implosion des bulles . . . . .  | 223        |
| 5.1.2.    | Estimation du chargement sur le matériau . . . . .  | 227        |
| 5.2.      | Discussion et perspectives sur la méthode d'estimation de l'intensité de<br>cavitation proposée . . . . . | 230        |
| 5.2.1.    | Calcul d'une population de bulles moyennée . . . . .  | 231        |
| 5.2.2.    | Calcul de l'énergie émise par le collapse de chaque nuage de bulles .                                     | 232        |
| 5.2.3.    | Calcul de l'énergie reçue par la paroi . . . . .  | 233        |
| <b>6.</b> | <b>Application de la méthodologie à trois écoulements cavitants</b>                                       | <b>235</b> |
| 6.1.      | Profil NACA 65012 - EPFL . . . . .  | 238        |
| 6.1.1.    | Présentation de l'expérience . . . . .  | 238        |
| 6.1.2.    | Présentation des simulations réalisées . . . . .  | 242        |
| 6.1.3.    | Résultats des simulations . . . . .   | 252        |

|  |            |
|--|------------|
| 6.2. Profil symétrique - TUD . . . . .   | 276        |
| 6.2.1. Présentation de l'expérience et des simulations réalisées . . . . .   | 276        |
| 6.2.2. Résultats des simulations . . . . .   | 283        |
| 6.3. Diaphragme EPOCA - EDF R&D . . . . .  | 295        |
| 6.3.1. Présentation de l'expérience et des simulations réalisées . . . . .   | 295        |
| 6.3.2. Résultats des simulations . . . . .   | 298        |
| 6.4. Conclusion . . . . .  | 306        |
| <b>7. Conclusion et perspectives</b>   | <b>309</b> |
| <b>Annexes</b>   | <b>337</b> |
| <b>A. Détails sur la modélisation des écoulements diphasiques : <i>Compléments d'informations sur les chapitres 2. et 3.</i></b> | <b>339</b> |
| A.1 Présence de gaz dans l'écoulement . . . . .  | 340        |
| A.1.1 Air dissous et occlus . . . . .  | 340        |
| A.1.2 Loi de Henry . . . . .   | 340        |
| A.1.3 Quantité d'air dissous dans le milieu et fraction massique d'air totale  | 342        |
| A.2 Transport de particules sphériques dans un écoulement . . . . .  | 343        |
| A.2.1 Equation de Basset-Boussinesq-Oseen . . . . .  | 343        |
| A.2.2 Régime de Stokes . . . . .   | 345        |
| A.2.3 Hypothèse de non glissement dans les écoulements cavitants . . . . .   | 346        |
| A.3 Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie . . . . .                                 | 346        |
| A.3.1 Equation de conservation de l'énergie . . . . .  | 346        |
| A.3.2 Equation d'entropie dans les phases . . . . .  | 348        |
| A.3.3 Suivi de l'entropie à l'interface . . . . .  | 350        |
| A.3.4 Isentropie à l'interface . . . . .   | 354        |
| A.4 Etude paramétrique de la loi <b>B-STMA</b> . . . . .   | 357        |
| A.4.1 Méthode . . . . .  | 357        |
| A.4.2 Résultats de l'étude de sensibilité . . . . .  | 358        |
| <b>B. Présentation des codes de calcul</b>   | <b>367</b> |

*TABLE DES MATIÈRES*

---

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| B.1       | Description des codes de calcul utilisés . . . . .  | 367        |
| B.1.1     | Présentation de FineTurbo . . . . .   | 368        |
| B.1.2     | Code de calcul IZ . . . . .   | 370        |
| B.1.3     | Couche limite pariétale turbulente . . . . .  | 371        |
| B.2       | Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles . . . . . | 374        |
| B.2.1     | Hypothèse de Boussinesq . . . . .   | 375        |
| B.2.2     | Caractérisation des équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente . . . . .  | 379        |
| B.2.3     | Présence de bulles dans l'écoulement et turbulence . . . . .                              | 382        |
| <b>C.</b> | <b>Précision sur l'élaboration de l'algorithme IDB</b>                                    | <b>385</b> |
| C.1       | Décomposition du potentiel de vitesse en deux variables séparées . . . . .                | 386        |
| C.1.1     | Obtention de la forme de la caractéristique . . . . .                                     | 386        |
| C.1.2     | Respect des conditions limites . . . . .  | 388        |
| C.2       | Mise en place du système matriciel . . . . .  | 389        |
| C.2.1     | Notations et définitions des opérateurs . . . . .   | 390        |
| C.2.2     | Écriture matricielle . . . . .  | 392        |



# Nomenclature

## Sigles

|                |  |
|----------------|--|
| <b>B-STMA</b>  | Loi Barotrope - Sans Transfert de Masse d'Air            |
| <b>B-TMAI</b>  | Loi Barotrope - Transfert de Masse d'Air Instantané      |
| <b>CFL</b>     | Courant–Friedrichs–Lewy                                  |
| <b>DNS/SND</b> | Direct Numerical Simulation/Simulation Numérique Directe |
| <b>HEM</b>     | Homogeneous Equilibrium Model                            |
| <b>HRM</b>     | Homogeneous Relaxed Model                                |
| <b>IDB</b>     | Implosion De Bulles                                      |
| <b>LES/SGE</b> | Large Eddy Simulation/Simulation Grandes Echelles        |
| <b>M-IDB</b>   | Méthodes associé à l'algorithme d'Implosions De Bulles   |
| <b>MP-AS</b>   | Méthode Potentielle - Angle Solide                       |
| <b>MP-IH</b>   | Méthode Potentielle - Intégration sur la hauteur         |
| <b>TTV</b>     | Transport de taux de vide                                |
| <b>U-RANS</b>  | Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes                 |

## Ensembles mathématiques

|              |                               |
|--------------|-------------------------------|
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des entiers naturels |
| $\mathbb{Z}$ | Ensemble des entiers relatifs |
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des réels            |

---

|                |  |
|----------------|--|
| $\mathbb{C}$   | Ensemble des complexes   |
| $\mathbb{E}^L$ | Ensemble des couples identifiant l'ordre et le degré d'une harmonique sphérique            |
| $\mathbb{S}^2$ | Ensemble des fonctions de carré intégrables définies sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ |

## Type

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| $X$                      | Scalaire      |
| $\mathbf{X}$             | Vecteur       |
| $\underline{\mathbf{X}}$ | Tenseur       |
| $\underline{\mathbf{I}}$ | Tenseur unité |

## Indices et Exposants

|       |   |
|-------|---|
| $X_a$ | Indice désignant que la valeur $X$ concerne l'air                                   |
| $X_e$ | Indice désignant que la valeur $X$ concerne l'eau                                   |
| $X_M$ | Indice désignant que la valeur $X$ concerne le mélange air-eau                      |
| $X_I$ | Indice désignant que la valeur $X$ concerne l'interface                             |
| $X_R$ | Indice désignant que la valeur $X$ est une grandeur relative entre les deux phases  |
| $X_c$ | Indice désignant que la valeur $X$ est une grandeur caractéristique                 |
| $X^k$ | Exposant désignant que la valeur $X$ concerne la phase $k$                          |
| $X^t$ | Exposant désignant que la valeur $X$ concerne un phénomène tangentiel à l'interface |

## Moyennes

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $\overline{X^k}$          | Moyenne au sens de Reynolds sur la phase $k$     |
| $X^{k'}$                  | Fluctuation au sens de Reynolds sur la phase $k$ |
| $\widetilde{X^k}$         | Moyenne au sens de Favre sur la phase $k$        |
| $X^{k''}$                 | Fluctuation au sens de Favre sur la phase $k$    |
| $\overline{\overline{X}}$ | Moyenne sur l'interface                          |
| $X'''$                    | Fluctuation sur l'interface                      |

## Opérateurs

|   |   |
|---|---|
| $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$                     | Produit scalaire                            |
| $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$                    | Produit vectoriel                           |
| $\nabla [X]$                                      | Gradient                                    |
| $\nabla \cdot \square$                            | Divergence d'un vecteur ou d'un tenseur     |
| $\nabla \wedge \square$                           | Rotationnel                                 |
| $\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{B}}$ | Produit tensoriel contracté double          |
| $\langle f g \rangle$                             | Produit scalaire défini sur $\mathcal{S}^2$ |

## Variables physiques

|              |   |                    |
|--------------|---|--------------------|
| $\dot{m}$    | Débit massique surfacique                             | $kg.m^{-2}.s^{-1}$ |
| $j$          | Vitesse de diffusion des espèces                      | $m.s^{-1}$         |
| $\mathbf{q}$ | Vecteur de densité de flux de chaleur dans les phases | $W.m^{-2}$         |
| $\mathbf{u}$ | Vitesse   | $m.s^{-1}$         |
| $c$          | Célérité du son                                       | $m.s^{-1}$         |
| $e$          | Energie interne massique                              | $J.kg^{-1}$        |
| $g$          | Energie de Gibbs massique                             | $J.kg^{-1}$        |
| $h$          | Enthalpie massique                                    | $J.kg^{-1}$        |
| $m$          | Masse   | $kg$               |
| $p$          | Pression  | $Pa$               |
| $s$          | Entropie massique                                     | $J.kg^{-1}.K^{-1}$ |
| $T$          | Température   | $K$                |
| $X$          | Rapport massique des phases                           | —                  |
| $Y$          | Rapport massique des espèces                          | —                  |

### Lettres Grecques

|            |                                    |   |
|------------|------------------------------------|---|
| $\alpha_k$ | Taux de présence de la phase k     | — |
| $\chi_k$   | Fonction indicatrice de la phase k | — |



|                      |                                    |             |
|----------------------|------------------------------------|-------------|
| $\rho$               | Masse volumique                    | $kg.m^{-3}$ |
| $\underline{\tau}$   | Tenseur des contraintes visqueuses | $N.m^{-2}$  |
| $\underline{\tau}_t$ | Tenseur de Reynolds                | $N.m^{-2}$  |

## Phénomènes d'interface

|                  |   |                    |
|------------------|---|--------------------|
| $\mathbb{S}_I$   | Terme de création d'entropie à l'interface                        | $W.m^{-2}.K^{-1}$  |
| $\mathbb{S}_k$   | Terme de création d'entropie phasique                             | $W.m^{-3}.K^{-1}$  |
| $L$              | Terme de transfert de quantité de mouvement à l'interface         | $N.m^{-3}$         |
| $\mathbf{n}_I^k$ | Vecteur normale orienté vers l'extérieure de la phase k           | —                  |
| $H_I^k$          | Courbure moyenne de l'interface selon le vecteur $\mathbf{n}_I^k$ | $m^{-1}$           |
| $M$              | Terme de transfert de masse à l'interface                         | $kg.m^{-3}.s^{-1}$ |
| $Q$              | Terme de transfert de quantité d'énergie totale à l'interface     | $W.m^{-3}$         |
| $R^k$            | Rayon de l'interface selon le vecteur $\mathbf{n}_I^k$            | $m$                |

### Lettres Grecques

|            |                                     |          |
|------------|-------------------------------------|----------|
| $\delta_I$ | Fonction indicatrice de l'interface | $m^{-1}$ |
| $\zeta$    | Taux de présence interfaciale       | $m^{-1}$ |

## Dynamique de bulles

|                   |  |                 |
|-------------------|--|-----------------|
| $\check{n}_B$     | Densité volumique de bulles  | $m^{-4}$        |
| $\mathcal{Y}_m^l$ | Harmonique sphérique de degré $l$ et d'ordre $m$   | —               |
| $\dot{N}_B$       | Débit de bulles  | $s^{-1}$        |
| $\dot{N}_d$       | Taux d'impact sur l'échantillon défini comme le nombre d'impacts par unité de surface et par unité de temps              | $m^{-2}.s^{-1}$ |
| $\dot{S}_d$       | Taux d'endommagement surfacique, surface des indentations par unité de surface et par unité de temps                     | $s^{-1}$        |
| $\dot{V}_d$       | Taux d'endommagement volumique, volume des indentations par unité de surface et par unité de temps - vitesse de marquage | $m.s^{-1}$      |
| $\dot{W}_{er}$    | Intensité de cavitation local instantanée  | $W.m^{-2}$      |

TABLE DES MATIÈRES

---

|                         |   |              |
|-------------------------|---|--------------|
| $\eta_i^l$              | Caractéristique liée à la bulles $i$ et aux harmoniques sphériques de degré $l$ | $s$          |
| $\dot{W}_{er}$          | Intensité de cavitation local moyennée temporellement                           | $W.m^{-2}$   |
| $A_{implo}$             | Coefficient d'amplification de l'énergie $E_{er}$ par nombre de bulles          | —            |
| $D_{sym}$               | Coefficient de vitesse de dissymétrisation de l'interface                       | —            |
| $E_b$                   | Energie totale contenue dans un volume $V$                                      | $J$          |
| $E_{er}$                | Energie potentiellement érosive émise par l'implosion d'un nuage de bulles      | $J$          |
| $l_{max}$               | Degré de filtrage de la simulation  | —            |
| $N_B$                   | Nombre de bulles  | —            |
| $n_B$                   | Nombre volumique de bulles  | $m^{-3}$     |
| $P_{er}$                | Puissance potentiellement érosive émise par l'implosion d'un nuage de bulles    | $W$          |
| $t_R$                   | Temps de Rayleigh   | $s$          |
| $u_{max}^p$             | Vitesse maximale de l'interface selon une direction privilégiée                 | $m.s^{-1}$   |
| $V_B$                   | Volume des bulles   | $m^3$        |
| $w$                     | Energie cinétique volumique   | $J.m^{-3}$   |
| <b>Lettres Grecques</b> |   |              |
| $\phi$                  | Potentiel de vitesse  | $m^2.s^{-1}$ |

### Constantes physiques

|          |  |                    |
|----------|--|--------------------|
| $B$      | Paramètre de la loi de Tait                              | $Pa$               |
| $c_p$    | Capacité thermique massique à pression constante         | $J.kg^{-1}.K^{-1}$ |
| $c_v$    | Capacité thermique massique à volume constant            | $J.kg^{-1}.K^{-1}$ |
| $C_a$    | Coefficient de transfert de masse d'air à l'interface    | —                  |
| $C_e$    | Coefficient de transfert de masse d'eau à l'interface    | —                  |
| $D_d$    | Diffusivité moléculaire dans le milieu                   | $m^2.s^{-1}$       |
| $D_{th}$ | Diffusivité thermique dans le milieu                     | $m^2.s^{-1}$       |
| $H_e$    | Constante de Henry (concentration par unité de pression) | $s^2.m^{-2}$       |

TABLE DES MATIÈRES

|                         |   |                     |
|-------------------------|---|---------------------|
| $H_e^*$                 | Rapport entre la masse volumique de l'air dans la phase liquide et la phase gazeuse à température constante | —                   |
| $K$                     | Vitesse de transfert de masse à l'interface   | $m.s^{-1}$          |
| $k_B$                   | Constante de Boltzmann  | $J.K^{-1}$          |
| $L_a$                   | Enthalpie de dissolution  | $J.kg^{-1}$         |
| $L_e$                   | Enthalpie de changement de phase ou chaleur latente de vaporisation   | $J.kg^{-1}$         |
| $M_m$                   | Masse molaire de l'espèce i   | $kg.mol^{-1}$       |
| $n$                     | Paramètre de la loi de Tait   | —                   |
| $p_{sat}$               | Pression de vapeur saturante  | $Pa$                |
| $R_g$                   | Constante des gaz parfaits  | $J.mol^{-1}.K^{-1}$ |
| $r_i$                   | Constante spécifique du gaz i   | $J.kg^{-1}.K^{-1}$  |
| $U_T$                   | Conductivité thermique de l'interface   | $W.m^{-2}.K^{-1}$   |
| <b>Lettres Grecques</b> |   |                     |
| $\kappa$                | Indice adiabatique  | —                   |
| $\lambda$               | Conductivité thermique dans le milieu   | $W.m^{-1}.K^{-1}$   |
| $\mu$                   | Viscosité dynamique   | $Pa.s$              |
| $\nu$                   | Viscosité cinématique   | $m^2.s^{-1}$        |
| $\sigma$                | Tension superficielle de l'eau/air  | $N.m^{-1}$          |

### Nombres adimensionnels

|         |                            |
|---------|----------------------------|
| $E_c$   | Nombre de Eckert           |
| $J_a$   | Nombre de Jakob            |
| $N_u$   | Nombre de Nusselt          |
| $P_e^m$ | Nombre de Péclet massique  |
| $P_e^t$ | Nombre de Péclet thermique |
| $P_r$   | Nombre de Prandtl          |
| $R_e$   | Nombre de Reynolds         |

## TABLE DES MATIÈRES

---

$R_e^p$  Nombre de Reynolds particulaire

$S_h$  Nombre de Sherwood

$S_t$  Nombre de Stanton

### **Lettres Grecques**

$\gamma$  Rapport entre la distance à la paroi et le rayon de la bulle

$\gamma_B$  Rapport de distance entre le rayon des bulles et la distance minimale séparant deux bulles voisines

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Diagramme d'état de l'eau . . . . .  | 33 |
| 1.2  | Visualisations d'écoulements cavitant [142] . . . . .  | 34 |
| 1.3  | Érosion de cavitation sur une roue de pompe [5] . . . . .  | 35 |
| 1.4  | Propagation de l'onde de surpression générée lors du collapse d'une bulle créée par impulsion laser. [167] . . . . . | 36 |
| 1.5  | Premier collapse d'une bulle générée par étincelle [230] . . . . .   | 37 |
| 1.6  | Vitesse du microjet obtenue en fonction de la distance à la paroi [111] .  | 42 |
| 1.7  | Vitesse du microjet obtenue avec la formulation de Plesset et Chapman  | 42 |
| 1.8  | Courbe de Wöhler et caractérisation des domaines de résistances à la fatigue . . . . .                               | 44 |
| 1.9  | Perte de masse et vitesse d'érosion par unité de surface en fonction de la durée d'exposition [40] . . . . .         | 45 |
| 1.10 | Illustration de la méthode Front-Tracking . . . . .  | 49 |
| 1.11 | Fonction de l'interface pour une interface rectangulaire . . . . .   | 50 |
| 1.12 | Illustration de l'algorithme de reconstruction de l'interface PLIC . . . . .   | 50 |
| 1.13 | Illustration d'une interface diffuse . . . . .   | 51 |
| 1.14 | Simulation de l'implosion d'un nuage de bulle à l'aide d'un super-calculateur [195] . . . . .                        | 52 |
| 1.15 | La loi d'état et célérité du son définies dans CATUM [212] . . . . .   | 63 |
| 1.16 | Détection de la création des ondes de surpression dans le milieu dans la méthode de Schmidt [227] . . . . .          | 64 |
| 1.17 | Illustration du scénario en cascade proposée par Reboud et Fortes-Patella [69, 73] . . . . .                         | 67 |
| 1.18 | Simulation d'un écoulement cavitant autour d'un hydrofoil par Ochiai [165] . . . . .                                 | 68 |

TABLE DES FIGURES

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.19 | Simulation d'un écoulement cavitation autour d'une hélice à l'aide du solveur <b>3DynaFS</b> [126]. . . . .                                   | 70  |
| 1.20 | Représentation de la disparition d'un nuage obtenu à l'aide du solveur Fresco [149] . . . . .   | 71  |
| 1.21 | Evolution temporelle des dimensions du nuage de bulle et de la pression acoustique émise dans la méthode proposée par Van Loo [149] . . . . . | 72  |
| 1.22 | Schématisation de la mise en place des étapes de la méthode . . . . .   | 77  |
| 2.1  | Considérations effectuées dans le chapitre 2. . . . .   | 81  |
| 2.2  | Allure de différentes lois de distribution en comparaison avec une distribution de taille de bulle expérimentale [252] . . . . .              | 88  |
| 2.3  | Variation de la pression de vapeur saturante avec la température pour de l'eau . . . . .  | 96  |
| 2.4  | Illustration du modèle du double film . . . . .   | 96  |
| 2.5  | Caractérisation de la courbure de l'interface . . . . .   | 103 |
| 2.6  | Variation de la loi de la masse volumique en fonction de la pression avec la loi de Tait . . . . .  | 111 |
| 3.1  | Considérations effectuées dans le chapitre 3. . . . .   | 121 |
| 3.2  | Représentation de la loi barotrope . . . . .  | 136 |
| 3.3  | Représentation de la célérité du son définie par la loi barotrope et par la loi de Wallis . . . . .   | 137 |
| 3.4  | Représentation de la fonction $f_I^c(M)$ au voisinage de l'interface de la bulle $i$ . . . . .  | 139 |
| 3.5  | Représentation des paramètres de la loi barotrope . . . . .   | 147 |
| 3.6  | Représentation des paramètres de la loi barotrope modifiée . . . . .  | 148 |
| 3.7  | Mesure d'une population de bulles dans trois tunnels de cavitations [84, 124, 172] et dans l'océan de Los Angeles [166] . . . . .             | 155 |
| 3.8  | Distribution de tailles de bulles dans le sillage d'un cylindre placé dans un écoulement cavitant [202] . . . . .                             | 156 |
| 3.9  | Topologie du milieu avec la phase gazeuse comme phase dispersée . . .   | 157 |
| 3.10 | Topologie du milieu sans considération de phase dispersée . . . . .   | 157 |
| 3.11 | Topologie du milieu avec la phase liquide comme phase dispersée . . .   | 158 |
| 3.12 | Evolution des grandeurs dans le mélange pour la loi <b>B-TMAI</b> . . . . .   | 162 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.13 | Evolution des grandeurs dans le mélange pour la loi <b>B-TMAI</b> . . . . .  | 164 |
| 3.14 | Représentation des pressions phasiques, du rayon des structures et de la masse volumique du fluide homogène, en fonction de la pression homogène avec la loi <b>B-TMAI</b> . . . . . | 165 |
| 3.15 | Evolution des pressions phasiques en fonction de la pression homogène pour le modèle <b>B-STMA</b> . . . . .   | 169 |
| 3.16 | Représentation des pressions phasiques, du rayon des structures et de la masse volumique du fluide homogène pour la loi <b>B-STMA</b> . . . . .                                      | 170 |
| 4.1  | Considérations effectuées dans le chapitre 4. . . . .  | 175 |
| 4.2  | Représentation de la masse volumique et de la pression dans le cas de l'interaction onde de pression-bulle simulée par la méthode de Beig [16]                                       | 177 |
| 4.3  | Distribution de bulles initiales utilisée pour le calcul d'implosion de bulles réalisée par Schmidt [227] . . . . .  | 178 |
| 4.4  | Couplage entre les codes de simulation GEMINI et 3DYNAFS-BEM <sup>©</sup> .  | 179 |
| 4.5  | Aperçu des déformations des bulles lors de l'implosion du nuage de bulles [195] . . . . .  | 179 |
| 4.6  | Schématisation du nuage par la méthode de Brennen [245] . . . . .  | 180 |
| 4.7  | Implosion d'un nuage de 400 bulles soumis à une pression sinusoïdale à l'aide du solveur <b>PHANTOM-CLOUD</b> <sup>©</sup> [126] . . . . .   | 181 |
| 4.8  | Représentation des coordonnées sphériques . . . . .  | 186 |
| 4.9  | Représentation de la partie réelle des fonctions harmoniques sphériques pour $l \leq 2$ . . . . .  | 187 |
| 4.10 | Temps nécessaire à la propagation de l'information issue des différentes harmoniques . . . . .   | 190 |
| 4.11 | Exemple de discrétisation de la sphère par la méthode Healpix pour $N_{side} = 1, 2, 8, 4$ . . . . .   | 195 |
| 4.12 | Profil de bulle ne correspondant pas au critère de l'algorithme . . . . .  | 196 |
| 4.13 | Représentation du volume de contrôle entourant un nuage de bulles . .  | 200 |
| 4.14 | Représentation d'une bulle sphérique placée dans un milieu infini . . .  | 202 |
| 4.15 | Evolution des énergies en fonction du rayon de la bulle . . . . .  | 204 |
| 4.16 | Evolution temporelle du rayon dans le cas d'une bulle isolée - $R_0 = 5.10^{-5}$ m, $p_\infty = 50000$ Pa, $p_{a_0}^g = 5000$ Pa . . . . .   | 206 |

TABLE DES FIGURES

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.17 | Evolutions temporelles des puissances et énergies évaluées sur la surface du volume de contrôle . . . . .  | 208 |
| 4.18 | Représentation du deuxième cas d'étude - deux bulles placées dans un milieu infini . . . . .   | 209 |
| 4.19 | Schéma du dispositif expérimental utilisé par Isselin [111] . . . . .  | 209 |
| 4.20 | Profil de la bulle simulée à son volume initiale (bulle isolée, $l_{max} = \{0, 1, \}$ ) ou au moment de l'arrêt de l'algorithme <b>IDB</b> ( $l_{max} = \{2, 3, 4\}$ )  | 211 |
| 4.21 | Evolution temporelle de la fonction $C_{ml}$ dans le cas présenté et pour $\gamma = 5$ . . . . .   | 214 |
| 4.22 | Disposition des bulles dans le nuage pour $N_B = 3 \times 3 \times 3$ . . . . .  | 215 |
| 4.23 | Equivalence du comportement des bulles dans une disposition $N_B = 3 \times 3 \times 3$ . . . . .  | 216 |
| 4.24 | Evolution temporelle du rayon des bulles en fonction de la position dans le nuage pour $\gamma_B = 4$ . . . . .  | 216 |
| 4.25 | Evolution temporelle de la pression maximale relevée sur une <b>paroi plane</b> située à $20R_0$ du centre du nuage pour une bulle isolée et pour un nuage constitué de $N_B = 3 \times 3 \times 3$ bulles . . . . . | 217 |
| 4.26 | Evolution temporelle de la puissance $P_{er}$ émise par un nuage . . . . .   | 218 |
| 5.1  | Considérations effectuées dans le chapitre 5. . . . .  | 222 |
| 5.2  | Représentation d'une distribution de bulles dans un maillage bidimensionnel . . . . .  | 224 |
| 5.3  | Représentation du déplacement de la population de bulles pendant un intervalle de temps $\delta t$ . . . . .   | 226 |
| 5.4  | Equivalence considérée entre l'implosion du nuage de bulle et l'implosion d'une bulle isolée . . . . .   | 228 |
| 5.5  | Surface impactée par l'implosion d'une bulle . . . . .   | 229 |
| 5.6  | Puissance $P_{er}$ reçue par la surface $S_w$ . . . . .  | 230 |
| 6.1  | Profil d'essai instrumenté NACA 65012 pour la mesure du coefficient de pression [171] . . . . .  | 239 |
| 6.2  | Schéma du tunnel de cavitation de l'EPFL [171] . . . . .   | 239 |
| 6.3  | Position des mesures de marquage sur le profil [171] . . . . .   | 242 |
| 6.4  | Stratégie de découpage en blocs pour les calculs IZ . . . . .  | 244 |



|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.5  | Maillage réalisé pour le profil EPFL sur IZ avec une incidence de $i = 4^\circ$   | 244 |
| 6.6  | Maillage réalisé pour le profil EPFL sur IZ avec une incidence de $i = 6^\circ$   | 244 |
| 6.7  | Stratégie de découpage en blocs pour les calculs Fine-Turbo . . . . .   | 245 |
| 6.8  | Maillage réalisé pour le profil EPFL sur Fine-Turbo avec une incidence de $i = 4^\circ$ . . . . .   | 245 |
| 6.9  | Maillage réalisé pour le profil EPFL sur Fine-Turbo avec une incidence de $i = 6^\circ$ . . . . .   | 245 |
| 6.10 | Maillage IZ à $4^\circ$ (cas C) et $6^\circ$ d'incidence (cas F) - Taille de première maille adimensionnelle $y^+$ moyennée le long du profil . . . . .         | 246 |
| 6.11 | Maillage Fine-Turbo à $4^\circ$ (cas C) et $6^\circ$ (cas F) d'incidence - Taille de première maille adimensionnelle $y^+$ moyennée le long du profil . . . . . | 246 |
| 6.12 | Evolution de la valeur de $\sigma_c^{amont}$ au cours de la simulation (IZ -CAS F)  | 247 |
| 6.13 | Fonction de distribution de la valeur de $\sigma_c^{amont}$ au cours de la simulation   | 248 |
| 6.14 | Résidus de calcul à chaque pas de temps au cours de la simulation du cas A - IZ . . . . .   | 250 |
| 6.15 | Résidus de calcul à chaque pas de temps au cours de la simulation du cas A - Fine-Turbo . . . . .   | 251 |
| 6.16 | Résidus de calcul pour chaque pseudo-pas de temps pendant deux périodes temporelles de la simulation cas A - Fine-Turbo . . . . .                               | 251 |
| 6.17 | Spectre fréquentiel associé à la variation temporelle du taux de vide pour le CAS F - IZ . . . . .  | 253 |
| 6.18 | Représentation spatio-temporelle du taux de vide maximal dans la veine projetée sur le profil . . . . .   | 253 |
| 6.19 | Visualisation du jet rentrant en fermeture de poche de cavitation pour le cas F -IZ : les flèches représentent la direction du vecteur vitesse . . .            | 254 |
| 6.20 | Pression moyenne le long du profil EPFL . . . . .   | 256 |
| 6.21 | $P_{wave}$ pour le cas F -IZ à un instant donné . . . . .   | 257 |
| 6.22 | Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode <b>MP-IH</b> . . .              | 258 |
| 6.23 | Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode <b>MP-AS</b> . . .              | 258 |
| 6.24 | Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée par les <b>MP-AS</b> et <b>MP-IH</b> - cas F, IZ . . . . .   | 259 |

TABLE DES FIGURES

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.25 | Sélection des cellules dans lesquelles la dynamique de bulles est calculé pour un instant de la simulation IZ - cas F . . . . .   | 260 |
| 6.26 | Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode <b>M-IDB</b> . . . . .  | 261 |
| 6.27 | Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ par la méthode <b>IDB</b> - cas F, IZ . . . . .   | 262 |
| 6.28 | Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ par la méthode <b>IDB</b> - cas F, IZ - pour différents pas de temps $dt_{URANS}$ . . . . .                               | 262 |
| 6.29 | Dépendance du niveau de filtrage sur la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ écrêtée par la méthode <b>IDB</b> - cas F, IZ . . . . .  | 263 |
| 6.30 | Dépendance de l'échantillonnage temporelle sur la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ par la méthode <b>IDB</b> - cas F, IZ . . . . .  | 264 |
| 6.31 | Dépendance de la durée de la simulation sur l'estimation de la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ par la méthode <b>IDB</b> - cas F, IZ . . . . .                             | 265 |
| 6.32 | Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ par la méthode <b>IDB</b> et avec une population de bulles établie à l'aide de la loi <b>B-TMAI</b> - cas F, IZ . . . . . | 265 |
| 6.33 | Sources de l'endommagement obtenu avec la loi <b>B-TMAI</b> . . . . .   | 266 |
| 6.34 | Estimation de l'agressivité de l'écoulement moyennée sur le profil obtenue par la méthode <b>M-IDB</b> pour différentes valeur de $\sigma$ . . . . .  | 267 |
| 6.35 | Tailles des bulles en fonction du taux de vide définies par la loi <b>B-STMA</b> pour différentes valeurs de $\sigma$ . . . . .   | 267 |
| 6.36 | Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée $\dot{W}_{er}$ par la méthode <b>IDB</b> pour différentes valeurs de la quantité d'air introduite $Y_a^l$ . . . . .                      | 269 |
| 6.37 | Influence de la quantité de gaz incondensable présent dans le fluide sur les dimensions et les rayons des bulles en fonction du taux de vide . . . . .  | 270 |
| 6.38 | Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode <b>M-IDB</b> et $Y_a^l = 5ppm$ . . . . .                        | 270 |
| 6.39 | Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode <b>M-IDB</b> et $Y_a^l = 20ppm$ . . . . .                       | 271 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.40 | Comparaison de l'agressivité de l'écoulement estimée sur le profil <b>EPFL</b> pour des vitesses $u_c$ égales . . . . .   | 274 |
| 6.41 | Comparaison de l'agressivité de l'écoulement estimée sur le profil <b>EPFL</b> pour des paramètres de cavitation $\sigma_c$ égaux mais des vitesses différentes | 275 |
| 6.42 | Profil d'essai pour l'expérience réalisée à l'université de Darmstadt [66]  | 276 |
| 6.43 | Illustration de tunnel de cavitation pour l'expérience réalisée à l'université de Darmstadt [66] . . . . .  | 277 |
| 6.44 | Illustration de la veine d'essai pour l'expérience réalisée à l'université de Darmstadt [66] . . . . .  | 277 |
| 6.45 | Stratégie de découpage en blocs pour les calculs IZ pour la géométrie <b>TUD</b> . . . . .  | 280 |
| 6.46 | Maillage représentant la géométrie <b>TUD</b> pour le solveur IZ . . . . .  | 280 |
| 6.47 | Evolution du $y^+$ moyen le long du profil <b>TUD</b> pour le maillage IZ - Cas E ( $u_c = 16m.s^{-1}$ ) . . . . .  | 280 |
| 6.48 | Stratégie de découpage en blocs pour les calculs Fine-Turbo pour la géométrie <b>TUD</b> . . . . .  | 281 |
| 6.49 | Maillage représentant la géométrie <b>TUD</b> pour le solveur Fine-Turbo .  | 281 |
| 6.50 | Evolution du $y^+$ moyen le long du profil <b>TUD</b> pour le maillage Fine-Turbo - Cas E ( $u_c = 16m.s^{-1}$ ) . . . . .                                      | 281 |
| 6.51 | Position des capteurs de pression le long du profil <b>TUD</b> [188] . . . . .  | 282 |
| 6.52 | Position des capteurs de pression le long du profil <b>TUD</b> [188] . . . . .  | 282 |
| 6.53 | Position des profils de vitesse [58] . . . . .  | 282 |
| 6.54 | Lâcher de cavitation sur le profil <b>TUD</b> pour le cas A avec Fine-Turbo à un instant donné . . . . .  | 284 |
| 6.55 | Diagramme spatio-temporel du taux de vide maximal projeté sur la surface du profil <b>TUD</b> Cas A . . . . .   | 285 |
| 6.56 | Spectre fréquentiel du signal de pression calculé par le capteur 2 - CAS E  | 286 |
| 6.57 | Pression moyenne obtenue le long du profil <b>TUD</b> pour le cas E . . . . .   | 286 |
| 6.58 | Profil de vitesse horizontale $u_x$ en fonction de l'axe vertical $y$ (Expérience issue de [58]) . . . . .  | 287 |
| 6.59 | Profil de vitesse verticale $u_y$ en fonction de l'axe horizontal $x$ (Expériences issus de [58]) - cas A . . . . .   | 288 |

TABLE DES FIGURES

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6.60  | Estimation de l'agressivité de l'écoulement moyennée pour le profil <b>TUD</b> cas A . . . . .   | 290 |
| 6.61  | Simulation de l'écoulement autour du profil <b>TUD</b> dans le cas A -IZ à un instant donné . . . . .                                    | 291 |
| 6.62  | Aggressivité de l'écoulement sur le profil <b>TUD</b> pour une même vitesse initiales avec le solveur IZ . . . . .                       | 292 |
| 6.63  | Aggressivité de l'écoulement sur le profil <b>TUD</b> pour une même vitesse initiale $u_c = 1.8 \text{ m.s}^{-1}$ - Fine-Turbo . . . . . | 293 |
| 6.64  | Aggressivité de l'écoulement sur le profil <b>TUD</b> pour un même paramètre de cavitation amont $\sigma_c = 2.3$ . . . . .              | 294 |
| 6.65  | Schéma de la boucle EPOCA . . . . .  | 295 |
| 6.66  | Stratégie de découpage en blocs pour les calculs Fine-Turbo pour la géométrie du diaphragme . . . . .                                    | 296 |
| 6.67  | Maillage réalisé au niveau du diaphragme pour les simulations . . . . .  | 297 |
| 6.68  | Positionnement des capteurs de pression statique pour le diaphragme EPOCA . . . . .  | 297 |
| 6.69  | Positions des mesures par tomographie X nommées P1 à P7 . . . . .  | 297 |
| 6.70  | Profil de pression sur le diamètre intérieur du conduit an aval du diaphragme - [160] . . . . .  | 299 |
| 6.71  | Taux de vide moyen obtenu pour la simulation cas 2 au passage du col   | 300 |
| 6.72  | Profil du taux de vide dans la veine pour le cas 3 - position 1 à 4 . . .  | 301 |
| 6.73  | Profil du taux de vide dans la veine pour le cas 3 - position 4 à 7 . . .  | 301 |
| 6.74  | Photographie prise au cours de l'essai du diaphragme $\beta = 0,4$ sur la boucle EPOCA . . . . .   | 302 |
| 6.75  | Représentation de la dynamique de l'écoulement pour les quatre configurations testées à des instants différents . . . . .                | 304 |
| 6.76  | Prévision de l'agressivité de l'écoulement pour la géométrie EPOCA . .   | 305 |
| A.4.1 | Influence du paramètre $c_{min}$ sur la loi <b>B-STMA</b> . . . . .  | 361 |
| A.4.2 | Influence du paramètre $Y_a^l$ sur la loi <b>B-STMA</b> . . . . .  | 362 |
| A.4.3 | Influence de $p_{cuve}$ sur la loi <b>B-STMA</b> . . . . .   | 363 |
| A.4.4 | Influence de $p_{LOI}$ sur la loi <b>B-STMA</b> . . . . .  | 364 |
| A.4.5 | Influence de $\alpha_{min}$ sur la loi <b>B-STMA</b> . . . . .   | 365 |

*TABLE DES FIGURES*

---

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| B.1.1 | calcul des gradients par le théorème de Gauss. [177] . . . . .  | 369 |
| B.1.2 | passage du maillage orthogonale au repère curviligne local [37] . . . . .   | 371 |
| B.1.3 | technique du maillage décalé utilisé dans IZ [37] . . . . .   | 371 |
| B.2.4 | Représentation du spectre de l'énergie en turbulence homogène isotrope<br>dans un cas monophasique incompressible . . . . . | 378 |

# Liste des tableaux

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Étude de l'influence de la vitesse de l'écoulement $\ \mathbf{u}_c\ $ sur les paramètres $\dot{N}_d$ et $\dot{V}_d$ ; synthèse de quelques résultats obtenus par différentes techniques de dépouillement. [36] | 47  |
| 1.2 | Exemple de modélisation des écoulements cavitants pour un formalisme U-RANS  | 58  |
| 1.3 | Récapitulatif des méthodes de prédiction du chargement en paroi sans 'calcul sous-maille'  | 74  |
| 1.4 | Récapitulatif des méthodes de prédiction du chargement en paroi avec explicitation du calcul de l'interface  | 75  |
| 2.1 | Caractéristiques de l'eau et du fréon R-114 à saturation [90]  | 95  |
| 4.1 | Comparaison des résultats de simulations pour une bulle isolée avec le modèle analytique   | 206 |
| 4.2 | Variation de l'énergie potentielle érosive en fonction de la distance au centre de la bulle  | 207 |
| 4.3 | Résultats des simulations pour une bulle en proche paroi en fonction de $l_{max}$  | 211 |
| 4.4 | Influence de la distance à la paroi sur l'implosion d'une bulle  | 213 |
| 4.5 | Influence du nombre de bulles et sur la distance inter-bulle sur l'énergie retransmise au liquide  | 219 |
| 5.1 | Temps de calcul nécessaire au calcul d'un nuage de bulles constitué de $N_B$ bulles avec l'algorithme <b>IDB</b> ( $l_{max} = 0$ )   | 227 |
| 6.1 | Conditions du tunnel de cavitation retenues pour les comparaisons simulations/expériences  | 242 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.2  | Critère de convergence du calcul pour la passage à l'itération suivante utilisé dans le solveur IZ . . . . .                              | 249 |
| 6.3  | Résultats des simulations pour le cas EPFL . . . . .  | 255 |
| 6.4  | Comparaison entre les résultats d'expérience et de simulation en terme d'agressivité de l'écoulement . . . . .                            | 272 |
| 6.5  | Récapitulatif des conditions d'essais et des mesures réalisées pour le profil <b>TUD</b> . . . . .  | 279 |
| 6.6  | Résultats des simulations pour la géométrie <b>TUD</b> . . . . .  | 283 |
| 6.7  | Comparaison entre les résultats d'expérience et de simulation en terme d'agressivité de l'écoulement pour les essais <b>TUD</b> . . . . . | 289 |
| 6.8  | Récapitulatif des conditions d'essais considérées pour l'étude du diaphragme  | 298 |
| 6.9  | Comparaison des pressions avant et après le diaphragme obtenues numériquement   | 300 |
| 6.10 | Récapitulatif des résultats d'érosion pour la géométrie EPOCA . . . . .   | 303 |
| 6.11 | Temps <b>CPU</b> nécessaire au post-traitement des résultats des simulations IZ<br>- cas F (600 pas de temps calculés) . . . . .          | 308 |

# Introduction

## Sommaire

---

|   |           |
|---|-----------|
| 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation . . . . .                                     | <b>33</b> |
| 1.1.1. La cavitation . . . . .  | 33        |
| 1.1.2. Mécanisme de l'érosion de cavitation . . . . .   | 35        |
| 1.1.2.1. Implosion des cavités . . . . .  | 36        |
| 1.1.2.2. Amplitude des ondes de surpression sphériques . . . . .                                  | 39        |
| 1.1.2.3. Impact sur le matériau provoqué par la formation<br>d'un microjet . . . . .              | 40        |
| 1.1.3. Comportement mécanique . . . . .   | 41        |
| 1.1.3.1. Rappel des principaux phénomènes pouvant affecter<br>les matériaux métalliques . . . . . | 41        |
| 1.1.3.2. Marquage et érosion . . . . .  | 44        |
| 1.1.4. Contexte industriel . . . . .  | 47        |
| 1.2. Simulation numérique des écoulements cavitants . . . . .                                     | <b>49</b> |
| 1.2.1. Simulation directe d'un milieu diphasique . . . . .  | 49        |
| 1.2.2. Cas particulier de la dynamique de bulles . . . . .  | 52        |
| 1.2.2.1. Dynamique d'une bulle isolée . . . . .   | 52        |
| 1.2.2.2. Extension du problème au cas d'un nuage de bulles . . . . .                              | 54        |
| 1.2.3. Simulation numérique des écoulements industriels cavitants . . . . .                       | 56        |
| 1.3. Etat de l'art de la prédiction numérique de l'érosion de cavitation . . . . .                | <b>60</b> |



|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.3.1.   | Modélisation de la dynamique de bulle . . . . .                           | 60        |
| 1.3.1.1. | Pression en paroi issue d'un calcul <b>U-RANS</b> . . . . .               | 61        |
| 1.3.1.2. | Pression en paroi issue de la simulation d'un fluide<br>parfait . . . . . | 62        |
| 1.3.1.3. | Définition d'une énergie potentielle . . . . .                            | 64        |
| 1.3.2.   | Résolution de la dynamique de bulles . . . . .                            | 66        |
| 1.3.2.1. | Proposition de Ochiai . . . . .   | 66        |
| 1.3.2.2. | Proposition de Chahine . . . . .  | 69        |
| 1.3.2.3. | Méthodologie proposée par Van Loo [149] . . . . .                         | 70        |
| 1.4.     | Méthode proposée et organisation du mémoire . . . . .                     | <b>73</b> |
| 1.4.1.   | Commentaires sur les méthodes existantes . . . . .                        | 73        |
| 1.4.2.   | Démarche suivie dans le mémoire . . . . .                                 | 75        |

---

## 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation

### 1.1.1. La cavitation

La cavitation correspond au passage d'un état liquide à un état gazeux par diminution de la pression. Elle fut observée pour la première fois par Toricelli avant d'être mise évidence par les expériences de Berthelot [19]. On la définit comme étant la rupture du milieu continu liquide sous l'effet de contraintes excessives (dépressions importantes, choc ...) [76]. Généralement, l'apparition de structures de cavitation est supposée possible lorsque la pression du fluide est inférieure ou égale à la pression de vapeur saturante du fluide, celle-ci étant une propriété du fluide (Fig 1.1).

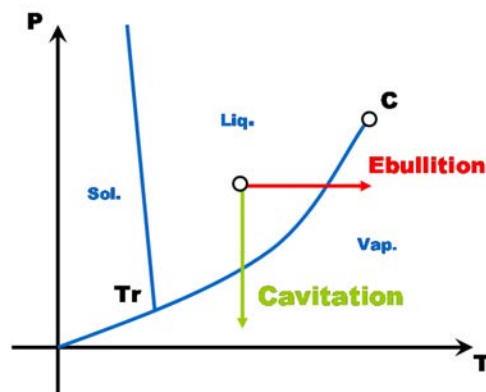
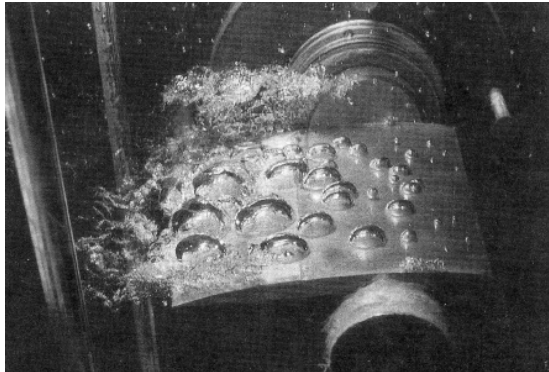


FIGURE 1.1 – Diagramme d'état de l'eau

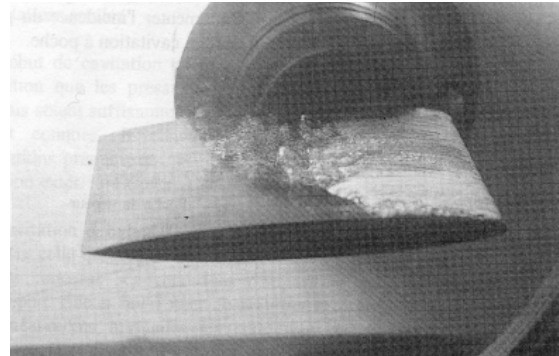
Ces structures gazeuses sont dès lors générées dans des zones de fortes dépressions et peuvent être engendrées par :

- une géométrie entraînant des survitesses, comme un rétrécissement de la section de passage (venturi ) ou bien le contournement d'un obstacle (hydrofoil [123]).
- une zone de fort cisaillement, telle que la pénétration d'un jet liquide à forte vitesse dans un fluide au repos ou les écoulements à fortes rotations (vortex).
- un mouvement oscillatoire créant des champs de pression alternatifs.
- une dépressurisation rapide (coup de bélier, écoulement de brèche).

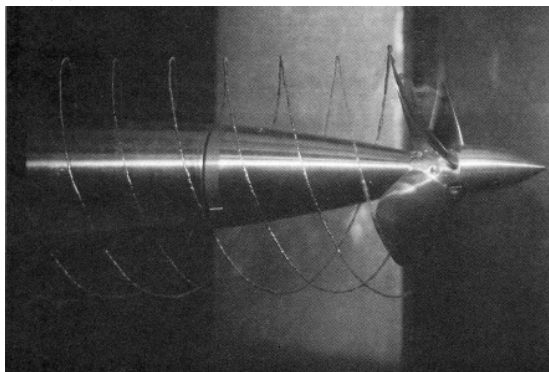
La cavitation peut se présenter sous différentes formes en fonction des types d'écoulement rencontrés (Fig. 1.2) : bulles isolées, poches attachées, filaments tourbillonnaires,...



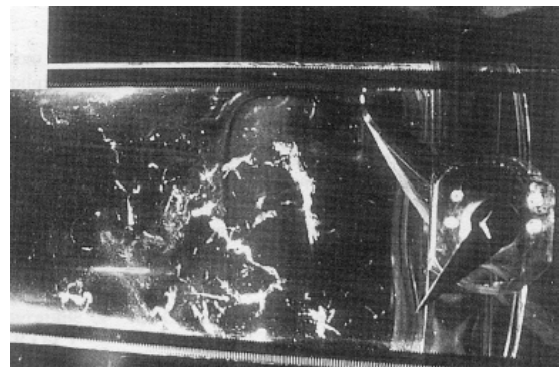
(a) cavitation par bulles sur un profil



(b) cavitation par poche sur un profil



(c) cavitation de tourbillon d'extrémité d'aile



(d) cavitation par tourbillons dans un sillage

FIGURE 1.2 – Visualisations d'écoulements cavitant [142]

L'apparition de ces zones gazeuses dans l'écoulement peut avoir plusieurs conséquences : l'altération des performances des machines [43] ( diminution de la portance, du rendement, augmentation de la traînée), la génération de bruit et de vibrations dans le système [5], ou bien encore l'**érosion** des parois solides avoisinantes [75], objet de notre étude.

### 1.1.2. Mécanisme de l'érosion de cavitation

L'influence néfaste de la cavitation, et notamment de l'érosion de cavitation, sur les performances d'une hélice de bateau fut constatée par Parsons au début du XX<sup>ème</sup> siècle [170]. Depuis cette époque, des études expérimentales se sont multipliées afin de comprendre l'origine de cet endommagement. La création d'une onde de surpression suite à l'implosion d'une bulle de gaz isolée fut vite mise en évidence [139, 164] et fut tenue dans un premier temps comme responsable de la détérioration des matériaux.

Des approches théoriques et analytiques ont également été développées dans le but de modéliser ce phénomène [174, 184]. Elles permirent d'établir le fait que la stabilité des bulles repose notamment, sur un équilibre entre la tension superficielle et les pressions de part et d'autre de l'interface. Les bulles subissant une augmentation importante de pression du liquide se déforment de façon à retrouver un équilibre ou disparaissent par condensation. Le mouvement de l'interface peut être alors à l'origine d'ondes de surpression de forte amplitude qui en percutant une surface, endommagent le matériau (Fig. 1.3).

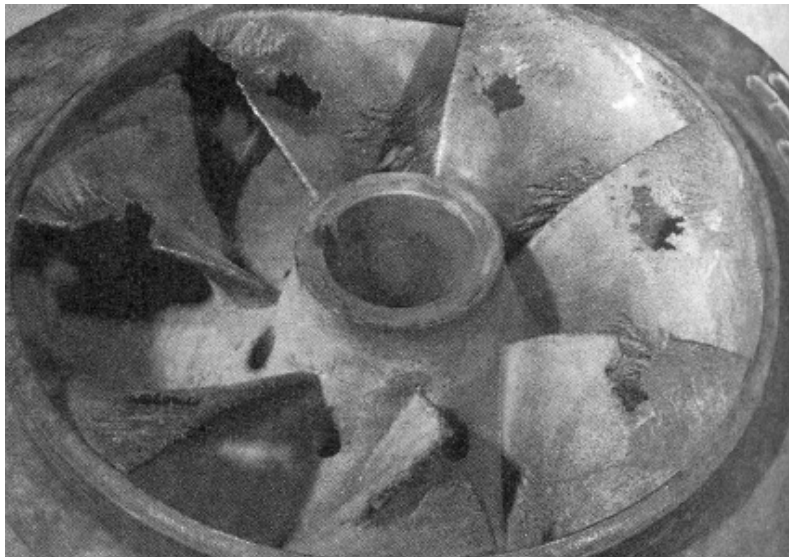


FIGURE 1.3 – Érosion de cavitation sur une roue de pompe [5]

Des études expérimentales et analytiques ont permis l'estimation des ordres de grandeurs de ces phénomènes [47, 72, 103, 147] :

- Le temps caractéristique de la phase d'implosion d'une bulle de  $0,1\text{mm}$  sous une différence de pression de 1 bar est de l'ordre de  $10\ \mu\text{s}$
- Les vitesses d'interface de la bulle peuvent aller jusqu'à plus de  $100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- Les surpressions générées peuvent avoir des amplitudes supérieures au  $\text{GPa}$ .

### 1.1.2.1. Implosion des cavités

Les études menées sur la dynamique de bulles ont permis de distinguer différents mécanismes d'implosion des structures gazeuses. A notre connaissance, la littérature en distingue trois types pouvant endommager le matériau.

#### L'émission d'ondes de surpression sphériques :

Au cours de sa déformation, l'interface adopte un mouvement radial oscillant autour d'une position d'équilibre, chaque cycle générant une onde de surpression sphérique [79, 174].

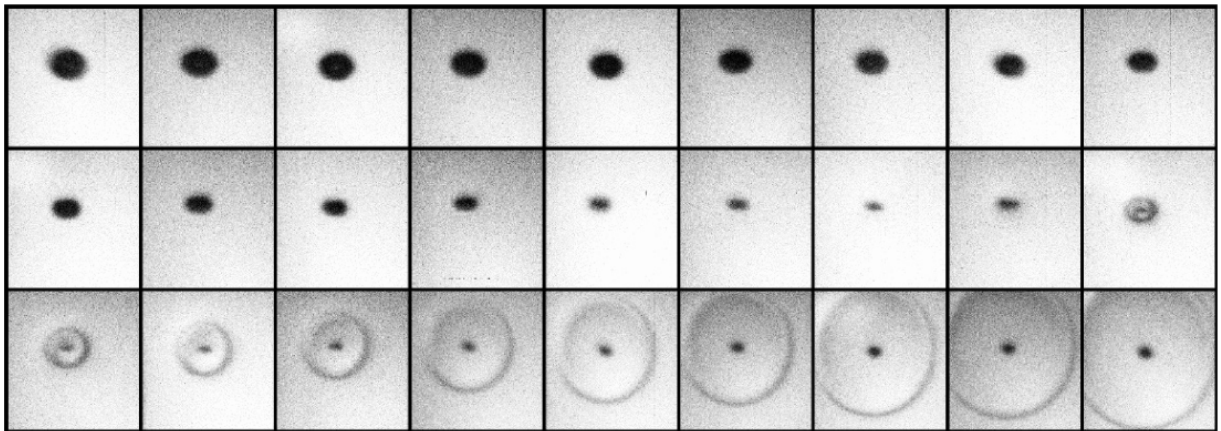


FIGURE 1.4 – Propagation de l'onde de surpression générée lors du collapse d'une bulle créée par impulsion laser. [167]

#### la formation d'un microjet :

Proche de la paroi, les conditions de symétrie permettant un mouvement purement radial de l'interface ne sont plus respectées. Dès lors, un microjet liquide, traversant la bulle de part en part dans la direction de la paroi, peut apparaître et imposer une

### 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation

---

forte pression sur le matériau [17, 39, 164, 173]. L'existence de ce microjet dépend en partie du rapport  $\gamma$  entre la taille de la bulle  $R$  et sa distance à la paroi  $L$ . En fonction notamment de ce paramètre, l'énergie du jet peut ne pas être suffisante pour traverser la bulle, un contre-jet, orienté dans la direction opposée, se forme alors et n'impacte pas le solide [111].

$$\gamma = \frac{L}{R} \quad (1.1)$$

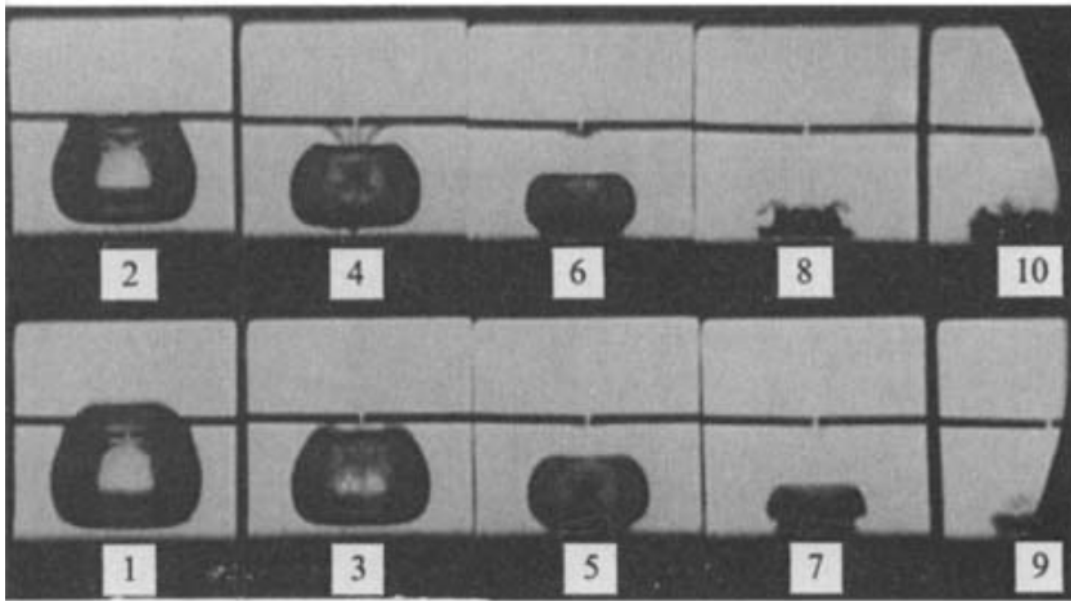


FIGURE 1.5 – Premier collapse d'une bulle générée par étincelle pour un  $\gamma = 0.94$  [230]

#### La formation d'un tore de vapeur :

Un dernier mécanisme issu du précédent a également pu être mis en évidence. Sous certaines conditions, le microjet provoque la division de la bulle en un tore de vapeur constitué de plusieurs 'bulles filles'. Celles-ci implosent à leur tour [111, 229] et génèrent alors des dommages sur le matériau. La modélisation numérique de cette implosion, réalisée par Chahine [35], a montré que d'un point de vue érosif, le colapsus d'un tore de vapeur peut être plus dommageable que celui d'une simple bulle de vapeur.

Ces trois dynamiques d'implosion engendrent des réponses du matériau différentes et les mécanismes responsables de l'érosion sont distincts selon les études menées.

- Selon, Hammit [98] l'érosion de cavitation est imputable aux microjets. En effet, leur vitesse pouvant atteindre la centaine de  $m.s^{-1}$  [29, 121], ils sont à même d'engendrer des pressions d'impact de l'ordre de la centaine de  $MPa$ . La comparaison des formes des trous obtenus, menée par Benjamin [17], étayent cette hypothèse en trouvant une bonne concordance avec l'impact d'un microjet liquide. De même, Lush et Peters [151] étudiant le comportement d'une bulle attachée à une paroi, soumise à une onde de choc, en ont déduit que le microjet était le principal facteur de l'érosion de cavitation pour cette configuration.
- Pour d'autres auteurs, ce sont les ondes de surpression émises lors du collapsus qui endommagent le matériau. Fujikawa et Akamatsu [79] utilisant un tube à chocs pour étudier la dynamique de la bulle en proche paroi sur un matériau photoélastique, en ont conclu que les vitesses des microjets obtenus étaient trop faibles pour marquer les échantillons, laissant alors les ondes de surpression seules responsables des indentations. Fortes-Patella [68] a également comparé des déformations de paroi obtenues numériquement à l'aide d'une onde de surpression et d'un microjet, avec des indentations issues de campagne d'essais de marquage (effectués sur une vanne Papillon [54] et sur un venturi [80]) et a trouvé une meilleure correspondance avec les premières.
- Finalement, des essais réalisés par Van der Meulen et Van der Renesse [238] ont conclu que lorsque la bulle était proche d'une paroi ( $0.26 < \gamma < 4$ ), la création puis l'implosion du tore de vapeur était responsable du marquage obtenu sur la matériau. Les recherches de Kato [122] et de Tomita [230] ont permis l'observation d'indentations en forme d'arc de cercle et de cratères lunaires justifiant l'approche du tore de vapeur.

Les mécanismes d'implosion et d'érosion de cavitation dépendraient finalement de plusieurs paramètres. En première approche, les expériences menées par Tomita et Shima [230] ont permis d'identifier l'importance du rapport  $\gamma$  sur la dynamique de bulle. Quand

## 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation

---

ce dernier est compris entre 0.5 et 1, les impacts seraient causées par des microjets tandis qu'en dehors de cette gamme de valeurs, les indentations résulteraient des ondes de surpression émises lors des collapsus d'une bulle ( $\gamma > 1$ ) ou d'un tore ( $\gamma < 0.5$ ). L'étude de l'implosion de bulles générées par claquage optique, Isselin [111] a obtenu une classification équivalente sur le paramètre  $\gamma$ .

- Pour  $\gamma < 0.6$ , l'érosion serait causée par la formation d'un jet impactant la surface
- Pour  $0.6 < \gamma < 2.6$  le marquage serait causé à la fois par un microjet et par l'implosion d'un tore de vapeur.
- Pour  $2.6 < \gamma < 4$ , un contre-jet se formerait à la fin du collapsus.
- Pour  $\gamma > 4$ , la présence de la paroi devient négligeable et la bulle implose de façon sphérique.

### 1.1.2.2. Amplitude des ondes de surpression sphériques

Lors de l'implosion d'une bulle, l'interface subit alternativement deux phases :

- **Cycle de détente** : La bulle se dilate conduisant à une diminution de la pression interne des gaz. Par effet d'inertie, la bulle dépasse sa position d'équilibre mécanique et atteint un rayon maximal.
- **Cycle de compression** : La pression du liquide étant plus forte que la pression du gaz, la bulle se contracte de nouveau jusqu'à atteindre un rayon minimal.

La sphère de gaz alterne ainsi les phases de compression et de détente autour d'une position d'équilibre. Le mouvement oscillatoire s'amortit à chaque cycle par des effets visqueux et par l'émission des ondes de surpression. A noter que ce mécanisme est relativement similaire à la formation des ondes de surpression induites par l'explosion de charges en milieu sous marin [42, 236].

Dans ces deux configurations, l'amplitude de pression décroît avec la distance ( $r$ ) parcourue en  $\left(\frac{1}{r}\right)^n$  avec  $n \approx 1.5$  pour de fortes amplitudes  $P > 0.5GPa$  et  $n \approx 1$  sinon [68]. A noter que la propagation des ondes peut être altérée par la présence de structures



diphasiques dans le milieu.

L'amplitude des ondes de surpression générées par l'implosion de bulles dépend en première approximation de la différence de pression entre le milieu liquide et gazeux, et de la taille de ces structures. Hammit [98] montra également l'influence de la présence de gaz incondensable, limitant l'amplitude du mouvement de l'interface et l'amplitude de l'onde émise. De plus, même si les premiers modèles d'implosion supposaient la condensation et la vaporisation de l'eau instantanées aux interfaces, les études menées par Tong [232], ont montré que les vitesses de collapse pouvaient être suffisamment importantes pour que cette hypothèse ne soit plus valable ce qui influe sur les amplitudes des ondes de surpressions émises obtenues numériquement.

### 1.1.2.3. Impact sur le matériau provoqué par la formation d'un microjet

L'impact d'un microjet sur le matériau a fait l'objet de nombreuses études [30,145,169]. En assimilant ce mécanisme à une colonne d'eau percutant le solide, ces analyses ont permis la détermination des efforts transmis à la paroi. La pression en paroi  $p_s$  dépend de la célérité des ondes longitudinales  $c_s$  et de la masse volumique  $\rho_s$  du solide ainsi que de celles établies pour le liquide  $c_l$  et  $\rho_l$ .

$$p_s = \frac{\rho_s c_s \rho_l c_l}{\rho_s c_s + \rho_l c_l} v_{jet} \quad (1.2)$$

En fonction du matériau et du fluide, notamment pour de l'eau et un matériau métallique, cette formulation peut se simplifier uniquement en fonction des paramètres du milieu ( $\rho_s = 2705 kg.m^{-3}$  et  $c_s = 6200 m.s^{-1}$  pour de l'aluminium 1050A -  $\rho_s \approx 7500 kg.m^{-3}$  et  $c_s = 5800 m.s^{-1}$  pour de l'acier par exemple)

$$p_s \approx \rho_l c_l v_{jet} \quad (1.3)$$

La durée d'application de cette contrainte peut être estimée par rapport au dimension du jet et à la célérité du son dans le liquide. Son ordre de grandeur est alors de l'ordre de  $30ns$ .

$$\tau_p = \frac{R_{jet}}{c_M} \quad (1.4)$$

## 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation

---

Les expériences menées par Isselin [111] ont permis la détermination de vitesses de microjet (Fig. 1.6) et l'obtention de pressions maximales en paroi -  $250MPa$  pour  $\gamma$  proche de 0,6. Tomita [231] et Vogel [239] ont obtenu des ordres de grandeurs similaires - respectivement  $v_{jet} = 85m.s^{-1}$  pour  $\gamma = 1.2$  et  $v_{jet} = 100m.s^{-1}$  pour  $\gamma = 0.85$ , l'ensemble de ces expériences étant réalisées à pression atmosphérique.

En 1971, Plesset et Chapman [174] proposèrent une corrélation afin de déterminer les vitesses des microjets formés (Eq. (1.5)) dépendant majoritairement de la pression environnante et du paramètre  $\gamma$ .

$$\|\mathbf{v}_{jet}\| = 8.97\gamma^2 \sqrt{\frac{p_M^l - p_{sat}}{\rho_M^l}} \quad (1.5)$$

Parallèlement à ces expériences, Isselin a également pu observer numériquement, à l'aide du code de calcul **2DynaFS**, une dépendance des vitesses du jet à la quantité de gaz occlus dans la bulle.

La formation de micro-jet n'étant obtenue qu'en proche paroi, cette corrélation est limitée à une certaine gamme de  $\gamma$  et fournit des vitesses en adéquation avec les expériences seulement pour  $\gamma < 0.7$  (Fig 1.7). En revanche, les différences entre les résultats expérimentaux et le modèle théorique confirment la contribution d'autres paramètres tels que la tension de surface, ou bien la présence d'air dans la bulle.

### 1.1.3. Comportement mécanique

Parallèlement à la caractérisation du chargement en paroi induit par la dynamique de bulles, le comportement du matériau a fait l'objet de différentes recherches [40,70,119,185] visant à modéliser la réponse du solide face à ces sollicitations.

#### 1.1.3.1. Rappel des principaux phénomènes pouvant affecter les matériaux métalliques

Des essais simples tels que des essais de traction, de cisaillement, ou de flexion permettent la classification du comportement du matériau selon de trois mécanismes élémentaires :

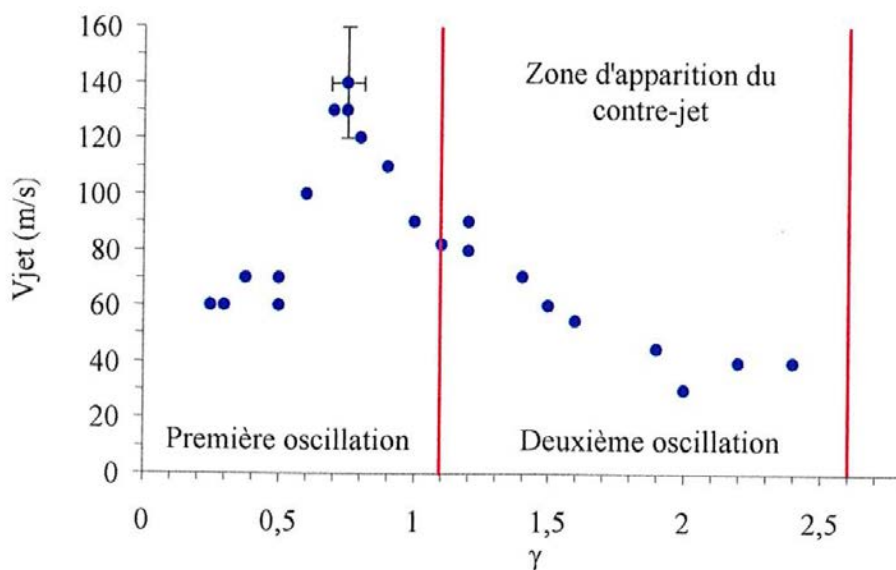


FIGURE 1.6 – Vitesse du microjet obtenue en fonction de la distance à la paroi dans le cadre de l’implosion d’une bulle proche paroi générée par claquage optique [111]

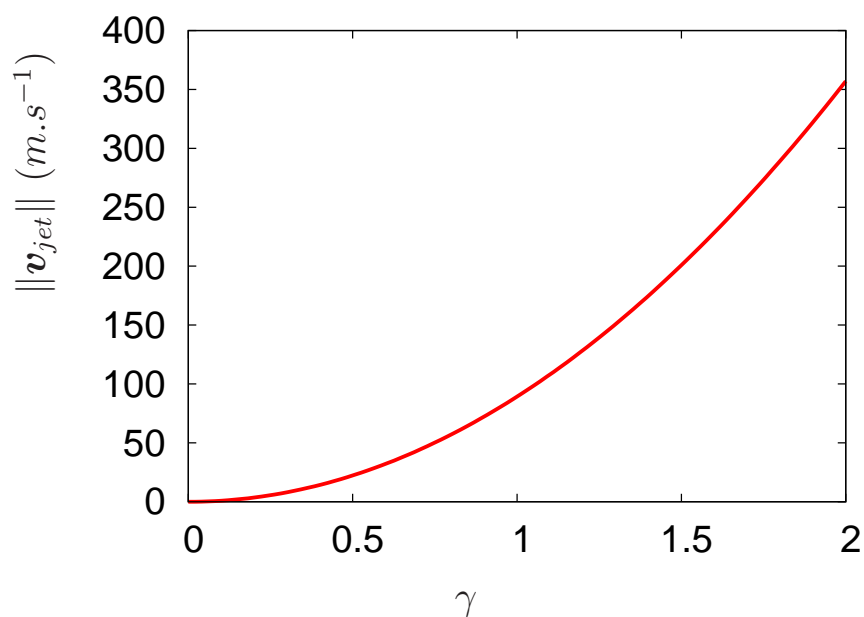


FIGURE 1.7 – Vitesse du microjet obtenue avec la formulation de Plesset et Chapman à pression atmosphérique en fonction du paramètre  $\gamma$

### L'élasticité :

L'application d'une contrainte à un matériau entraîne dans un premier temps une

## 1.1. *Écoulements cavitants et érosion de cavitation*

---

modification réversible dite **élastique**. Dans ce type de déformation, le solide retrouve son état initial lorsque la contrainte n'est plus appliquée.

### **La plasticité :**

Au delà d'une certaine contrainte, appelée 'limite d'élasticité', le solide se déforme de façon permanente et ne retrouve pas sa forme initiale lorsque les contraintes sont retirées, on parle alors de déformation **plastique**. Les modifications de la structure interne du matériau sous l'effet de ces contraintes conduisent son durcissement. Ce phénomène est appelé '**écrouissage**'. En augmentant encore la contrainte exercée et dépassant ainsi la '**contrainte de rupture**', les forces intermoléculaires ne sont plus assez fortes pour assurer la cohésion du solide et des fissures apparaissent dans le matériau.

### **La viscosité :**

La viscosité caractérise la sensibilité du couple contrainte-déformation à la durée de la sollicitation mécanique. Elle se caractérise par deux mécanismes principaux : le fluage et la relaxation des contraintes. Dans le premier, la viscosité se traduit par la déformation progressive d'un matériau soumis à une contrainte constante. La relaxation établit la relation antagoniste, c'est à dire la diminution des contraintes dans le solide soumis à une déformation constante.

Dans le cas de métaux à température ambiante, la viscosité du matériau est généralement négligeable. Le comportement du solide est alors modélisé par des lois de comportement dites élasto-plastiques telles que le modèle de Saint Venant ou celui de Prager.

A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, Wöhler mit en évidence le fait que la contrainte à la rupture dynamique est plus faible que la contrainte à la rupture statique. Un matériau, soumis à des cycles de charge et de décharge répétés, peut donc se rompre sans pour autant que les contraintes exercées soient supérieures à la contrainte de rupture statique. On parle alors de **rupture à la fatigue**. En effet, à chaque cycle de sollicitations, des glissements irréversibles se produisent dans le solide et causent la propagation de fissures au delà d'un certain nombre de chargements.

Le nombre de cycles qu'un matériau peut subir avant rupture est caractérisé par des courbes de Wöhler définissant trois domaines de fatigue distincts (Fig. 1.8).

- **Le domaine d'endurance illimitée** : Les contraintes exercées sont en deçà d'une contrainte seuil, dite 'limite de fatigue'. Le matériau peut dans ce cas subir un nombre infini de cycles de chargement sans jamais rompre. En fonction du matériau (aciers à haute résistance, métaux non ferreux), cette limite peut ne pas exister.
- **Le domaine de fatigue limité** : Les contraintes sont comprises entre la 'limite à la fatigue' et la 'limite élastique'. La rupture du matériau apparaît après un plus grand nombre de cycles de chargement.
- **Le domaine de fatigue oligocyclique** : Les contraintes appliquées entre chaque chargement sont supérieures à la 'limite élastique' du matériau mais inférieures à la 'contrainte de rupture'. La détérioration du matériau se ressent alors au bout de quelques cycles de chargement.

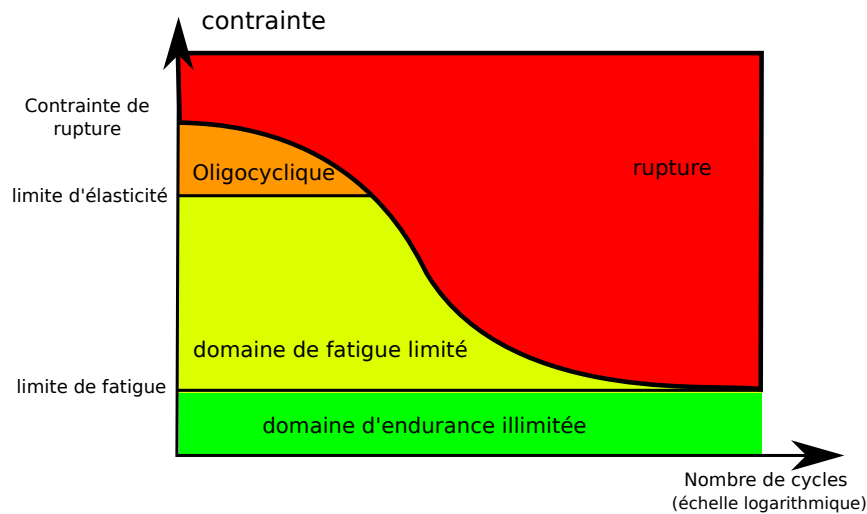


FIGURE 1.8 – Courbe de Wöhler et caractérisation des domaines de résistances à la fatigue

### 1.1.3.2. Marquage et érosion

Le suivi de l'endommagement du matériau soumis à un écoulement cavitant permet d'identifier trois périodes temporelles (Fig. 1.9) :

### 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation

- **La période d'incubation** se traduisant par la déformation du solide, appelée **marquage**, sous forme d'indentations sans arrachements de matière : l'énergie est alors progressivement accumulée dans le solide.
- **La période d'accélération** dans laquelle la vitesse d'érosion augmente brutalement. Les contraintes exercées de façon cycliques sur le matériau provoquent la création et la propagation de fissures dans le matériau jusqu'à arrachement de matière.
- **La période stationnaire** durant laquelle la vitesse de perte de masse se stabilise et devient quasiment constante au cours du temps. Cette perte de masse, que l'on peut également caractérisée par une vitesse d'érosion appelée également vitesse de marquage, est la donnée principale recherchée par les industriels.

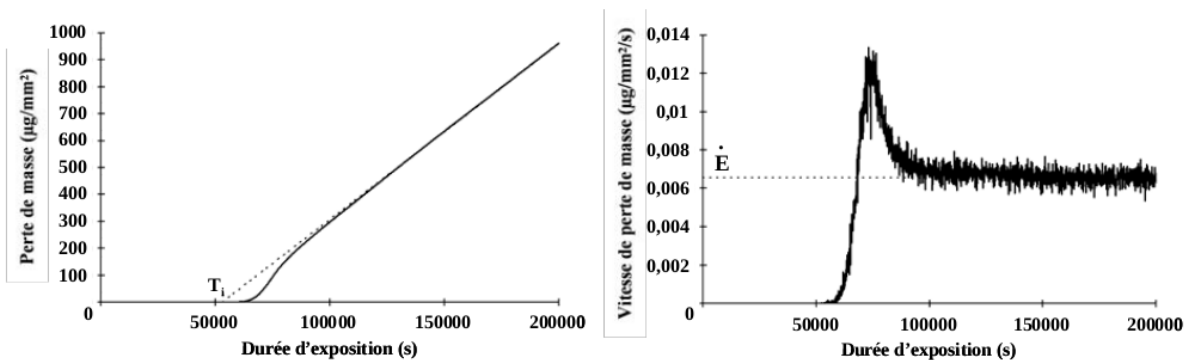


FIGURE 1.9 – Perte de masse et vitesse d'érosion par unité de surface en fonction de la durée d'exposition [40]

Devant les difficultés à mesurer expérimentalement les chargements en paroi, Knapp [129] proposa de caractériser l'agressivité de l'écoulement à partir de la vitesse de marquage de la période d'incubation. Cette démarche a par la suite été reprise par différents auteurs [40, 75]. L'utilisation des modèles proposés par Karimi ou Reboud permettent alors d'estimer **la vitesse d'érosion obtenue dans la période stationnaire à l'aide des indentations obtenues dans la période d'incubation** [18, 119, 186].

La caractérisation de la période d'incubation peut être effectuée à l'aide de différents paramètres :

- **Le taux d'impact sur l'échantillon** défini comme étant le nombre d'impacts par unité de surface et par unité de temps :

$$\dot{N}_d = \frac{N}{\Delta S \Delta t} \quad (1.6)$$

- **Le taux d'endommagement volumique**, rapport du volume total des indentations par unité de surface et par unité de temps :

$$\dot{V}_d = \frac{V_{total}}{\Delta S \Delta t} \quad (1.7)$$

- **Le taux d'endommagement surfacique**, surface des indentations par unité de surface et par unité de temps.

$$\dot{S}_d = \frac{S_{endommagée}}{\Delta S \Delta t} \quad (1.8)$$

Différents essais de marquage ont permis de caractériser expérimentalement la période d'incubation en fonction des paramètres hydrauliques de l'écoulement. Le tableau 1.1 récapitule certains résultats obtenus en terme d'influence de la vitesse de l'écoulement. La dépendance des paramètres  $\dot{N}_d$  et  $\dot{V}_d$  vis à vis des diverses méthodes de dépouillement et des différents métaux est importante et aucune corrélation expérimentale universelle n'a pu être établie à partir de ces seules expériences.

En partant de ces comportements mécaniques, l'érosion de cavitation à été modélisée à l'aide de différentes approches :

**Le modèle d'érosion basé sur le phénomène d'écrouissage ;**

Dans ce modèle élaboré par Karimi [119], l'endommagement du matériau est caractérisé par la relation contrainte-déformation et par son profil d'écrouissage ( durcissement d'un matériau sous l'effet de sa déformation plastique) à mesure qu'il absorbe l'énergie apportée par la surpression en paroi.

**Le modèle d'érosion par fatigue oligocyclique :**

Développé par Reboud [186], cette approche relie l'énergie absorbée par le matériau

### 1.1. Écoulements cavitants et érosion de cavitation

| Technique de dépouillement | Référence | Dépendance vis à vis de la vitesse   | Couple Matériau/fluide                        |
|----------------------------|-----------|--|---|
| Interférométrie            | [13]      | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^6$<br>$\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^4$   | Acier inox/Mercure<br>Acier inox/eau          |
|                            | [140]     | $\dot{V}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^3$<br>$\dot{V}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^8$   | Cuivre/eau<br>Acier inox/eau                  |
| Optique 2D                 | [224]     | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^6$   | Aluminium/eau                                 |
|                            | [122]     | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^5$   | Indium/eau                                    |
| Rugosimétrie 3D            | [81]      | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^7$   | Acier inox/eau                                |
| Profilométrie 3D           | [216]     | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^{3.5}$ et $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^5$<br>$\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^4$ et $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^5$<br>$\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^{5.5}$ et $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^7$ | Aluminium/eau<br>Cuivre/eau<br>Acier inox/eau |
|                            | [72]      | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^{3.5}$ et $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^5$   | Aluminium/eau                                 |
|                            | [71]      | $\dot{N}_d \approx \ \mathbf{u}_c\ ^5$   | Cuivre/eau<br>Aluminium/eau<br>Acier inox/eau |
|                            |           |  |   |

TABLEAU 1.1 – Étude de l’influence de la vitesse de l’écoulement  $\|\mathbf{u}_c\|$  sur les paramètres  $\dot{N}_d$  et  $\dot{V}_d$ ; synthèse de quelques résultats obtenus par différentes techniques de dépouillement. [36]

au fur et à mesure des sollicitations, à sa durée de vie, et par suite à son endommagement progressif.

Ce travail de doctorat se concentrant sur l’aspect fluide de l’érosion de cavitation, nous n’approfondirons pas davantage ces modèles. Le lecteur pourra néanmoins trouver de plus amples informations dans la thèse de Choffat [40] traitant plus particulièrement du sujet.

#### 1.1.4. Contexte industriel

La cavitation peut survenir à différents endroits des circuits hydrauliques : au niveau de diaphragmes, de tubes de venturi, sur les pales des inducteurs ou bien encore sur les hélices des navires. Par conséquent, la cavitation est un sujet d’étude concernant une multitude de domaines industriels variés allant de l’aérospatiale, jusqu’à un contexte médical [219]



en passant par la production énergétique.

L'objectif à long terme est disposer d'un moyen de quantification de l'intensité de cavitation dans les composants hydrauliques, à la fois pour mieux concevoir les nouveaux équipements en projet, mais aussi pour améliorer la conduite et optimiser la maintenance des matériels existants.

La diversité des paramètres régissant un écoulement cavitant rend difficile l'élaboration de loi de similitude concernant l'endommagement du matériau à partir d'essais expérimentaux. La simulation numérique offre dès lors la possibilité d'étudier ce phénomène sur des géométries variées tout parcourant une plage de paramètres importante.

Cette étude a pour ambition de proposer une méthode numérique permettant la prédiction de l'**agressivité** de l'écoulement - sa tendance à endommager le matériau par le phénomène d'érosion de cavitation - en paroi des machines hydrauliques. Nous nous intéresserons à la détermination d'une **intensité de cavitation** caractérisant la sollicitation du fluide sur le matériau. L'utilisation de modèles de comportement solide permettrait par la suite, la prévision de la vitesse d'érosion du matériau.

Cette thèse s'insère dans le cadre des travaux de recherche menés au sein de l'équipe « Energétique » du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, **LEGI**, et est menée en collaboration avec des partenaires industriels - EDF-R&D et CETIM. Des études précédentes avec le CNES et la SNECMA, ont également fourni un retour d'expérience et un savoir faire quant à l'étude numérique des écoulements cavitants.

## 1.2. Simulation numérique des écoulements cavitants

La simulation numérique des écoulements diphasiques est utilisée dans de nombreux domaines, tels que l'étude de la combustion [60], ou dans les bioréacteurs. Elle contribue également à l'amélioration des techniques de conversion d'énergie, notamment en ce qui concerne la sûreté des réacteurs nucléaires à eau pressurisée [22].

Dans le cas d'écoulement diphasique, l'une des principales difficultés réside dans la présence de discontinuités des grandeurs physiques (masse volumique, température, vitesse, pression) aux interfaces. En fonction des applications ciblées, plusieurs solutions sont envisageables : les méthodes de simulation numérique direct, **DNS** ou **SND** ou les méthodes de simulations moyennées ou filtrés [20].

### 1.2.1. Simulation directe d'un milieu diphasique

Les méthodes de simulations directes permettent la résolution de l'intégralité des échelles de l'écoulement. Selon les techniques employées, l'interface et les discontinuités peuvent être traitées de façons différentes :

#### **Front Tracking :**

La méthode dite de Front-Tracking, ou suivi d'interface, utilise deux maillages : le premier fixe pour les grandeurs volumiques et le second mobile afin de définir les interfaces à l'aide de marqueurs (Fig. 1.10). Un couplage entre ces deux maillages permet le suivi des structures diphasiques à chaque itération [215, 234, 235].



FIGURE 1.10 – Illustration de la méthode Front-Tracking

**Level Set :**

Dans la méthode Level Set, ou ligne de niveau, l'interface est modélisée par une fonction définie sur tout le volume, prenant des valeurs positives dans une phase et négatives dans l'autre. Le suivi de l'interface consiste alors dans le suivi temporel de cette fonction [225].

$$\Phi_I \begin{cases} > 0 & \text{Dans la phase 1} \\ = 0 & \text{A l'interface} \\ < 0 & \text{Dans la phase 2} \end{cases} \quad (1.9)$$

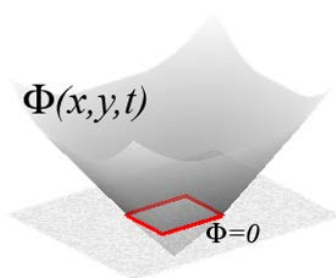


FIGURE 1.11 – Fonction de l'interface pour une interface rectangulaire

**Volume of Fluid :**

La méthode Volume of fluid, **VOF**, représente chacune des phases par une fonction caractéristique  $\chi_g$  et  $\chi_l$  valant 1 ou 0 [105, 135]. La détermination de la forme de l'interface peut se réaliser à l'aide de différents algorithmes tel que la méthode PLIC, Piecewise-Linear Interface Calculation, (Fig. 1.12) ou SM, sous maille, [8,112].

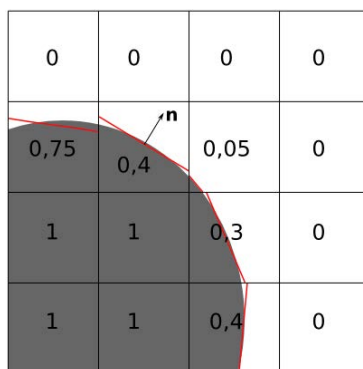
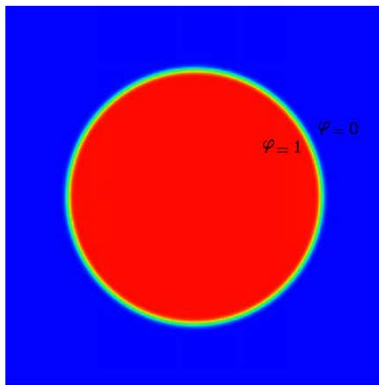


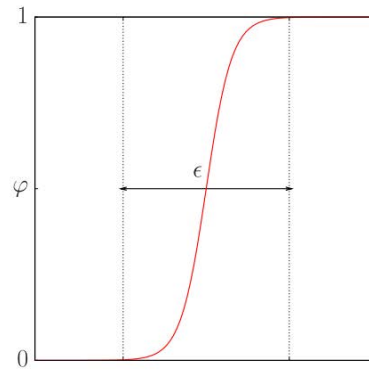
FIGURE 1.12 – Illustration de l'algorithme de reconstruction de l'interface PLIC

**Interfaces diffuses :**

Les modèles à interfaces diffuses, tels que le modèle de Cahn-Hilliard [150], consistent à modéliser les interfaces comme des zones de transition dans lesquelles les grandeurs sont continues afin d'éviter les sauts de masse volumique ou de vitesse. Les phases sont ainsi identifiées par une fonction caractéristique  $\phi$  évoluant continûment dans l'interface d'épaisseur  $\epsilon$  (Fig. 1.13).



(a) Exemple de modélisation d'une bulle de gaz ( $\varphi = 1$ ) à l'équilibre dans un liquide ( $\varphi = 0$ )



(b) Profil du paramètre d'ordre  $\varphi$  à travers l'interface

FIGURE 1.13 – Illustration d'une interface diffuse

Les méthodes de Front-Tracking ont l'avantage de faciliter le calcul des relations de saut et des normales à l'interface. En revanche, l'opération de reconstruction du maillage à chaque pas de temps empêche son utilisation actuelle sur de grandes configurations et rend la considération de plusieurs bulles complexe. Les autres méthodes présentées, dites eulériennes, sont plus robustes aux regroupements et aux fissions de différentes structures [107], mais ont tendance à diffuser numériquement l'interface [193].

La littérature comprend d'autres techniques de **DNS** élaborées pour des milieux diphasiques, certaines alliant les avantages des méthodes présentées précédemment. On pourra notamment citer la méthode front-tracking/VOF [155] utilisée dans le code du CEA **Trio\_U** ou bien encore la méthode de couplage Level Set-VOF [157]. Ces méthodes numériques nécessitent néanmoins des temps **CPU** conséquents et restent à l'heure actuelle limitées à des applications de recherche. A l'avenir, l'augmentation des moyens de calculs

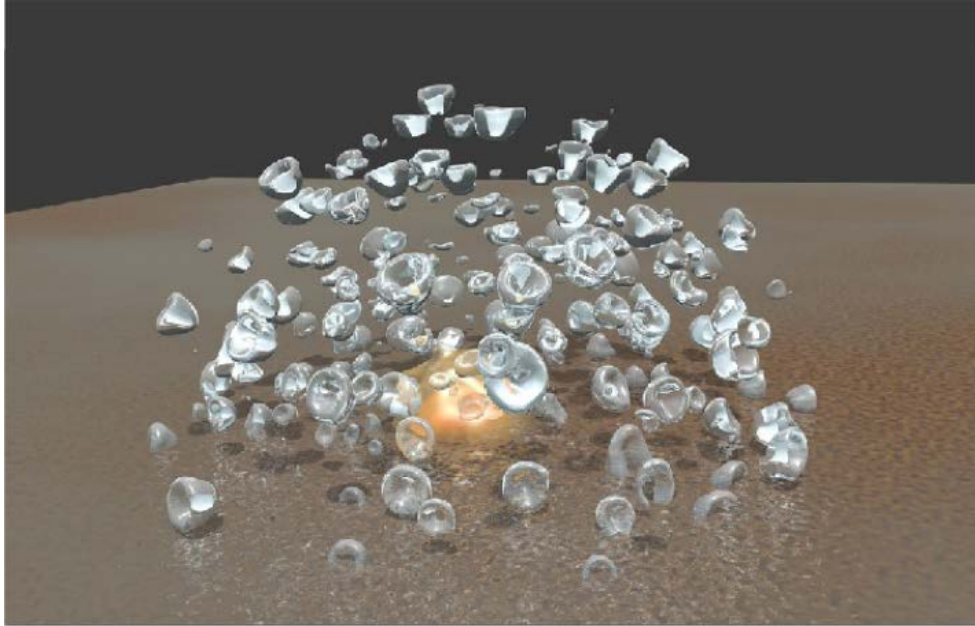


FIGURE 1.14 – Simulation de l’implosion d’un nuage de bulle à l’aide d’un super-calculateur [195]

pourraient les démocratiser : une équipe de chercheurs a récemment réalisé la simulation directe de l’implosion d’un nuage de bulles (Fig. 1.14) à l’aide d’un super calculateur de 11 Pflops [195].

### 1.2.2. Cas particulier de la dynamique de bulles

Les méthodes présentées précédemment permettent la simulation de structures diphasiques de diverses formes. Dans le cadre de l’implosion d’une bulle isolée, les conditions de symétrie autorisent la considération de systèmes d’équations plus simples, sans pour autant nécessiter d’opérateurs de moyennes ou de filtrages.

#### 1.2.2.1. Dynamique d’une bulle isolée

Lord Rayleigh [184] fut le premier à proposer une équation décrivant l’évolution du rayon d’une bulle isolée (Eq. (1.10)). Dans ce travail précurseur, de nombreuses hypothèses ont été effectuées : la tension de surface et la viscosité sont négligées, la condensation et la vaporisation à l’interface sont instantanées et la phase liquide est supposée incompressible.

## 1.2. Simulation numérique des écoulements cavitants

---

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement dans l'ensemble du liquide permet alors d'obtenir une équation différentielle d'ordre 2 sur le rayon de la bulle ( $R$ ) dépendant des conditions de pression dans le fluide à l'infini et de la pression de vapeur saturante.

$$R \frac{d^2}{dt^2} [R] + \frac{3}{2} \left( \frac{d}{dt} [R] \right)^2 = \frac{p_{sat} - p_\infty}{\rho_e^l} \quad (1.10)$$

Avec ces hypothèses, le temps d'implosion de la bulle est approximativement donné par le **temps de Rayleigh**,  $t_R$  :

$$t_R = R_0 \sqrt{\frac{\rho_e^l}{p_\infty - p_{sat}}} \quad (1.11)$$

Par la suite, de nombreux auteurs proposèrent des systèmes comportant moins d'hypothèses. On peut notamment citer les travaux de Beeching [15], et Poristsky [176] incluant tour à tour la présence de gaz occlus dans la bulle ( $p_a^g$  étant la pression des gaz incondensables dans la bulle), les effets de la tension superficielle (la tension de surface est notée  $\sigma$ ) et les contraintes visqueuses aux interfaces. Ces considérations ont abouti à l'obtention de l'équation de Rayleigh-Plesset [174].

$$\begin{cases} R \frac{d^2}{dt^2} [R] + \frac{3}{2} \left( \frac{d}{dt} [R] \right)^2 = \frac{p_B}{\rho_e^l} \\ p_B = p_{sat} + p_a^g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu_e^l}{R} \frac{d}{dt} [R] \end{cases} \quad (1.12)$$

De même, grâce aux travaux successifs de Herring [101] et de Keller [179], l'équation de Keller incluant la compressibilité du fluide a été élaborée ( $c_\infty$  représente la célérité du son dans le milieu).

$$\begin{cases} \left( 1 - \frac{1}{c_\infty} \frac{d}{dt} [R] \right) R \frac{d^2}{dt^2} [R] + \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3c_\infty} \frac{d}{dt} [R] \right] \left( \frac{d}{dt} [R] \right)^2 = \left[ 1 + \frac{1}{c_\infty} \frac{d}{dt} [R] + \frac{R}{c_\infty} \frac{d}{dt} \right] \frac{p_B}{\rho} \\ p_B = p_{sat} + p_a^g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu_e^l}{R} \frac{d}{dt} [R] \end{cases} \quad (1.13)$$

Les travaux de Gilmore [86] considérant l'enthalpie appliquée à l'interface plutôt que la pression du liquide, ou de Prosperetti [180] incluant la participation d'une dérivée temporelle troisième du rayon peuvent également être cités.

Dans leur étude, Fujikawa et Akamatsu [79], ne considérant plus les transferts de masse comme instantanés, ajoutent des nouveaux termes dans les équations de conservation. On notera  $\dot{m}_M^g$  le débit massique surfacique et  $\ddot{m}_M^g$  sa dérivée temporelle.

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{d^2}{dt^2} [R] \left[ 1 - \frac{2}{c_\infty} \frac{d}{dt} [R] + \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l c_\infty} \right] + \frac{3}{2} \left( \frac{d}{dt} [R] \right)^2 \left[ 1 + \frac{4}{3\rho_M^l c_\infty} - \frac{4}{3c_\infty} \frac{d}{dt} [R] \right] \\ = \frac{\ddot{m}_M^g R}{\rho_M^l c_\infty} \left[ 1 - \frac{1}{c_\infty} \frac{d}{dt} [R] + \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l c_\infty} \right] - \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l} \left( \frac{d}{dt} [R] + \frac{\dot{m}_M^g}{2\rho_M^l} \right) \\ + \frac{p_\infty - p_B}{\rho_M^l} - \frac{R}{\rho_M^l c_\infty} \frac{d}{dt} [p_B] \\ p_B = p_e^g + p_a^g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu_M^l}{R} \left( \frac{d}{dt} [R] - \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l} \right) + \left( \frac{1}{\rho_M^l} - \frac{1}{\rho_M^g} \right) \dot{m}_M^g{}^2 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

L'établissement de ces systèmes reposent intégralement sur le choix des hypothèses prises :

- En considérant un transfert de masse instantané à l'interface, le système établi par Fujikawa (1.14) devient équivalent au système de Keller (1.13).
- De même, ce dernier, (1.13), est similaire à l'équation de Rayleigh Plesset (1.12) pour un milieu incompressible ( $c_\infty = \infty$ ).

Ces équations permettent la prévision de l'évolution du rayon de la bulle mais également le calcul de son influence sur le reste du milieu liquide incluant notamment les ondes de surpressions émises lors des cycles de détente/compression.

### 1.2.2.2. Extension du problème au cas d'un nuage de bulles

Les travaux portant sur la dynamique d'un **nuage de bulles** ont débuté avec les travaux de Foldy [67]. Ce dernier étudia l'impact d'un rideau de bulles sur la propagation d'une onde de surpression. En considérant une approche moyennée, différents travaux [108, 131] ont permis par la suite d'étendre cette étude à des ondes de chocs. Ces méthodologies ont identifié des variations de la vitesse de propagation d'une onde sonore à la traversée du rideau de bulles, dépendantes notamment de sa fréquence.

## 1.2. Simulation numérique des écoulements cavitants

---

Kumar, Brennen et d'Agostino [48, 133] proposèrent un système d'équation linéarisé permettant de simuler le comportement d'un nuage de bulles soumis à un champ de pression acoustique harmonique.

$$p_\infty(t) = p_\infty^0 + p_a \cos(\omega t) \quad (1.15)$$

Ils ont ainsi pu mettre en avant l'apparition de fréquences de résonance du système plus faibles que la fréquence de Minaert [28]  $\omega_0$ , obtenue dans le cas d'une bulle isolée (Eq. (1.16)).

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3p_\infty}{\rho_e^l}} \quad (1.16)$$

avec  $p_\infty$  la pression maximale du champ de pression acoustique et  $R_0$  la taille initiale de la bulle.

Ces résultats sont en concordance avec les observations menées par Yoon [250] et Dontsov [53]. Ces dernières révèlent également une diminution de la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans un milieu diphasique.

D'autres auteurs ont également simulé ce phénomène en considérant des phénomènes non linéaires [163, 243, 244, 254]. Ces études ont notamment mené à l'extension de l'équation de Rayleigh-Plesset qui est toutefois limitée à des variations de pression de faibles amplitudes :

$$R_i \frac{d^2}{dt^2} [R_i] + \frac{3}{2} \left( \frac{d}{dt} [R_i] \right)^2 = \frac{1}{\rho_e^l} \left[ p_a^{g0} \left( \frac{R_i^0}{R_i} \right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{R_i} + p_{sat} - 4 \frac{\mu_e^l}{R_i} \frac{d}{dt} [R_i] - p_\infty(t) \right] - \sum_{j \neq i} \frac{R_j^2 \frac{d^2}{dt^2} [R_j] + 2R_j \frac{d}{dt} [R_j]^2}{r_{ij}} \quad (1.17)$$

avec  $r_{ij}$  la distance séparant les centres de bulles  $i$  et  $j$ .

L'ensemble de ces études reflètent la complexité de l'implosion d'un nuage de bulles. La répartition spatiale et les caractéristiques des populations de bulles (dimension, quantité de gaz occlus,..) créent des fréquences de résonance ou des phénomènes d'amortissement.



Les forces de Bjerkness primaire et secondaire [143] ont, de plus, tendance à modifier la disposition de ces bulles (rapprochement, éloignement des bulles les unes par rapport aux autres). Les fréquences caractéristiques du système sont alors d'autant plus difficiles à prédire.

Pour autant, et du fait de ces interactions importantes, les ondes de surpression et les dommages obtenus expérimentalement lors de l'implosion d'un nuage de bulles, peuvent être bien plus importants sur le matériau [191, 220] que ceux causés par une bulle isolée. En effet, une onde de surpression impactant une bulle modifie le mouvement de son interface et les caractéristiques de la surpression émise lors de son propre collapsus. L'effet d'amplification du nuage est donc un paramètre important dans la prévision de l'érosion de cavitation.

Les extensions des modèles Rayleigh-Plesset à un nuage de bulles ont pour objectif la prédiction de ces effets d'amplification, sans pour autant discrétiser l'intégralité du milieu liquide comme dans les méthodes **Level-Set** ou **VOF**. Ils limitent ainsi les coûts en temps **CPU** de la simulation. Néanmoins, même si les études actuelles menées sur ce sujet considèrent de plus en plus de phénomènes physiques [7, 82], la conservation de l'aspect sphérique des bulles tout au long de la simulation limite les possibilités de ces modèles.

### 1.2.3. Simulation numérique des écoulements industriels cavitants

Les dynamiques des écoulements diphasiques observées à l'échelle d'un nuage de bulles ( $10^{-4}/10^{-5}m$ ) et à l'échelle de géométries industrielles ( $10^{-1} - 1m$ ) reposent sur des considérations différentes. Tandis que les premières sont dépendantes du mouvement de chaque interface, les secondes sont majoritairement influencées par le déplacement global des structures gazeuses. Les performances de calcul actuelles ne permettant pas l'utilisation de méthodes de **DNS** sur des configurations industrielles de grandes tailles, il est nécessaire d'utiliser des opérateurs de moyennes - méthodes **RANS/U-RANS** - ou de filtrage - simulation aux grandes échelles, **SGE** - sur les équations de conservation afin de représenter la dynamique de ces écoulements.

Malgré les progrès récents des techniques de **SGE** concernant la simulation des écoulements diphasiques [22, 192, 234], leurs coûts en temps **CPU** et leur capacité à simuler de grands nombres de Reynolds ( $Re > 10^5$ ) ne fournissent pas encore la souplesse nécessaire à une utilisation industrielle. Dans ce contexte, et à l'heure actuelle, seules les méthodes moyennées **RANS/U-RANS** ou les solveurs résolvant les équations d'Euler semblent offrir une robustesse suffisante à l'étude d'écoulements cavitants autour de géométries complexes.

La modélisation **U-RANS** des écoulements cavitants se distinguent en différents modèles. La littérature présente des systèmes pouvant comprendre jusqu'à 10 équations (modèle proposé par Saurel et Le métayer [205]), incluant des équations de conservation pour chaque phase ainsi que des équations topologiques contrôlant la forme et le nombre d'inclusions de la phase dispersée. Les phénomènes contrôlant la dynamique des écoulements cavitants ainsi que le système d'équation correspondant seront présentés plus en détail au chapitre 2.

En fonction du nombre d'hypothèses prises, une multitude de modélisations de l'écoulement cavitant peut être établie. Le tableau 1.2 cite des exemples de systèmes comprenant de 7 à 3 équations reposant sur l'égalité de grandeurs entre les phases :

- l'égalité des vitesses,
- l'égalité des pressions,
- l'égalité des températures,
- l'égalité des enthalpies libres.

Il est toutefois possible d'obtenir des systèmes différents pour un même nombre d'équations en faisant d'autres hypothèses.

### **Les modèles à 7 équations dit 2-fluides :**

Ces modèles résolvent l'ensemble des équations de conservation pour chacune des phases [159]. Ils peuvent prendre explicitement en compte les effets de déséquilibre

| Nombres d'équations   | 7 équations [159]               | 6 équations [94]        | 5 équations [206]                                    | 4 équations [134]   | 3 équations [89]   |
|---|---------------------------------|-------------------------|--|---|--|
| Equations résolues  | 2 CDM<br>2 QQM<br>2 CDE<br>1 TI | 2 CDM<br>2 QDM<br>2 CDE | 2 CDM<br>1 QDM<br>1 CDE<br>1 TI                      | 1 CDM<br>1 QDM<br>1 CDE<br>1 TI                                     | 1 CDM<br>1 QDM<br>1 CDE  |
| hypothèses  |                                 | $p_M^l = p_M^g$         | $p_M^l = p_M^g$<br>$\mathbf{u}_M^g = \mathbf{u}_M^l$ | $p_M^l = p_M^g$<br>$\mathbf{u}_M^g = \mathbf{u}_M^l$<br>$T^l = T^g$ | $p_M^l = p_M^g$<br>$\mathbf{u}_M^g = \mathbf{u}_M^l$<br>$T^l = T^g$<br>$g_M^l = g_M^g$ |
| CDM : conservation de la masse // QDM : conservation de quantité de mouvement // CDE : conservation de l'énergie // TI : transport de l'interface diffuse |                                 |                         |  |   |  |

TABLEAU 1.2 – Exemple de modélisation des écoulements cavitants pour un formalisme U-RANS

(pression, vitesse, température et enthalpie libre) mais restent difficiles à utiliser en écoulements industriels en raison de leur coût de calcul élevé.

### Le modèle réduit à 6 équations de Neptune :

Le code Neptune [94] considère l'égalité de pression entre les phases, ce qui permet de remplacer l'équation de transport de l'interface par une des équations de conservations de quantité de mouvement.

### Les modèles réduits à 5 équations :

Pour modéliser les écoulements présents dans les injecteurs diesel, Saurel [206] propose un modèle à deux températures permettant de restituer des effets de déséquilibre thermique.

### Les modèles relaxés à 4 équations :

Pour des applications en ébullition et évaporation flash, un modèle à 4 équations a été développé : le modèle **HRM** (Homogeneous Relaxation Model). Il est composé de trois lois de conservation pour le mélange et d'une équation pour l'interface. Cette dernière contient un terme source de relaxation basé sur un temps de retour à l'équilibre du système. Ce temps est difficile à déterminer et peut être estimé soit à partir de données expérimentales [11, 55], soit par des analyses théoriques, tel que les travaux de Helluy [100] reposant sur l'optimisation de l'entropie du mélange.

Enfin, une famille de modèles, dits à 'transport de taux de vide' (**TTV**) a été développée. Ces modèles incluent une équation pour le taux de présence de la phase gazeuse dont le terme source modélise la condensation et l'évaporation [134]. Ce dernier repose généralement sur des paramètres déterminés empiriquement.

### Les modèles à 3 équations :

Ces modèles reposent sur l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique des phases (mécanique, thermique, enthalpie libre) appelé Homogeneous Equilibrium Model, **HEM** [212]. Ils impliquent dès lors des transferts de masse instantanées aux interfaces. Néanmoins une métastabilité du fluide peut être introduite empiriquement à travers des lois d'états [50, 183] que nous illustrerons par la suite (cf. 3.2.2.).

Dans certaines applications, comme dans le cas de l'eau froide, les effets thermiques peuvent être négligés et l'équation de conservation de l'énergie n'est dès lors plus nécessaire à la résolution du système.

Ce travail de doctorat se base sur l'utilisation de deux solveurs (décrits brièvement en annexe B.1) utilisant un modèle à deux équations barotrope (équivalent au modèle à trois équations sans considération de l'équation d'énergie), considérant tous deux un unique fluide représentatif des deux phases de l'écoulement. Ces codes proposent également des modèles **TTV** qui ne seront pas utilisés dans ce doctorat.

- IZ, un code développé au sein du LEGI pour le compte du CNES [46].
- Fine-Turbo un code industrielle développé par Numeca-international dont le modèle cavitant a été implémenté dans le cadre de la thèse de Coutier-Delgosha [44].

### 1.3. Etat de l'art de la prédiction numérique de l'érosion de cavitation

Les modèles **U-RANS** permettant d'obtenir des simulations relativement fiables, différents auteurs se sont proposés d'utiliser ces résultats afin de caractériser l'endommagement causé par la cavitation. La difficulté de cette démarche réside dans la différence d'échelle existante entre les phénomènes simulés et les chargements en paroi responsables de l'érosion de cavitation. En effet, comme nous le présenterons plus en détail par la suite (cf 3.1.1.), les simulations **U-RANS** reposent sur un opérateur de moyenne ne conservant qu'une partie de la dynamique de l'écoulement, l'autre partie étant modélisée à travers les termes de turbulences et les lois d'état.

De plus, les interactions fluide/structure liées à l'érosion n'étant pas retranscrites par les modèles **U-RANS**, l'utilisation d'un modèle de comportement solide peut être nécessaire (cf 1.1.3.1.). Ces derniers utilisant les pressions appliquées en paroi à tout instant comme conditions d'entrée, l'objectif des simulations fluide est dès lors de fournir cette donnée. Néanmoins la différence d'échelle entre les simulations **U-RANS** et le phénomène d'érosion empêche, à priori, l'obtention exacte de ce chargement.

Face à cette difficulté, différentes approches peuvent être adoptées afin de prédire l'agressivité de l'écoulement ou intensité de cavitation. Nous allons, dans cette partie, présenter certaines d'entre elles en les distinguant selon la manière dont la dynamique de bulles est appréhendée. Dans un premier temps, nous étudierons les méthodes dans lesquelles, elle est implicite et caractérisée par les modèles de fermeture de la simulation et dans un second temps, les méthodes dans lesquelles une résolution spécifique des mouvements des interfaces est retenue.

#### 1.3.1. Modélisation de la dynamique de bulle

Les premières méthodes que l'on puisse rencontrer dans la littérature sont celles dans lesquelles la dynamique des structures diphasiques, c'est à dire la description des mouvements des interfaces, sont modélisées. Si la population de bulles peut, par ailleurs, ne jamais être explicitée, son effet sur la paroi est évalué de différentes façons.

### 1.3.1.1. Pression en paroi issue d'un calcul U-RANS

Le chargement en paroi étant nécessaire à la simulation de la réponse du matériau, les grandeurs basées sur la pression peuvent être, a priori, de bons indicateurs de l'**agressivité de l'écoulement**. Dans ce contexte, Li [146] propose un modèle, basé sur une simulation d'écoulements cavitant par une approche **TTV**, dans laquelle il définit une intensité érosive à partir de la variation temporelle de pression en paroi.

$$I_{erosion} = \frac{1}{N} \sum I_i \quad \text{avec} \quad I_i = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [p_M] & \text{si } \frac{\partial}{\partial t} [p_M] \geq \left[ \frac{\partial}{\partial t} [p_M] \right]_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $N$  représente le nombre d'événements correspondant à une variation de pression supérieure à une valeur seuil  $\left[ \frac{\partial}{\partial t} [p_M] \right]_0$ .

La comparaison des résultats avec des essais expérimentaux réalisés sur des profils NACA0015 et NACA0018 ont permis de déterminer les valeurs seuils, respectivement  $3.10^9 Pa.s^{-1}$  et  $7.10^8 Pa.s^{-1}$ , faisant correspondre les surfaces endommagées obtenues numériquement avec celles mesurées expérimentalement.

La proposition de Dular et Coutier [58] repose, quant à elle, sur la formation de microjets en paroi. La simulation numérique de l'écoulement cavitant est effectuée à l'aide d'un modèle à deux équations (équivalent au modèle à trois équations sans considération de l'équation d'énergie). La création et la destruction des structures diphasiques sont alors modélisées par une loi d'état. La phase liquide, supposée compressible grâce à l'utilisation de la loi de Tait (cf 2.4.2.1.), autorise la propagation des ondes de surpressions issus de la disparition des bulles. Celles-ci atteignant d'autres bulles en proche paroi provoquent la création d'un microjet dont les vitesses sont déterminées à l'aide de la relation obtenue par Plesset et Chapman (Eq. (1.5)).

Afin d'utiliser cette modélisation, le rayon du microjet et la distance à la paroi adimensionnelle  $\gamma$ , sont pris respectivement à  $10\mu m$  et 1.1 [139, 174], paramètres considérés

comme les valeurs les plus probables dans ce type d'écoulement. La pression contribuant à la déformation est supposée être la différence entre la pression exercée par le microjet et la pression nécessaire à la déformation du matériau  $p_y$ . Elle correspond à une vitesse de microjet limite  $v_{crit}$ , dépendant des paramètres  $B$  et  $n$  de la loi de Tait.

$$p_{def} = v_{def} \rho_M^l c_M^l \quad (1.19)$$

Avec :

$$v_{def} = v_{jet} - v_{crit} \quad \text{et} \quad v_{crit} = \sqrt{\frac{p_y}{\rho_M^l} \left( 1 - \left( 1 + \frac{p_y}{B} \right)^{-1/n} \right)}$$

Les autres caractéristiques du microjet sont, tour à tour, obtenues grâce à des corrélations et des mesures d'indentation par profilométrie laser menées au sein de EDF R&D [187].

$$t_{def} = \frac{r_{jet}}{c_M^l} \quad d_{trou} = v_{def} t_{def} \quad r_{trou} = 26,7 d_{trou} \quad S_{trou} = \pi r_{trou}^2 \quad (1.20)$$

D'après des travaux menées par Dular [56], l'endommagement surfacique pendant la période d'incubation est linéaire et peut donc être déterminé par la simulation de l'écoulement pendant une courte période  $\tau$ .

$$\dot{S}_d = \frac{1}{S_{ref} \tau} \sum_{t=0}^{\tau} S_{trou} \quad (1.21)$$

### 1.3.1.2. Pression en paroi issue de la simulation d'un fluide parfait

La considération de l'écoulement d'un fluide parfait permet la réduction du problème à un système hyperbolique conservatif résoluble grâce à des schémas de type Godunov. La simulation est alors régie par les équations d'**Euler** et l'ensemble des échelles de l'écoulement sont accessibles. Néanmoins, l'erreur de troncature de ce type de schéma est de l'ordre  $\mathcal{O}(\rho_M c_M \Delta x)$  avec  $\Delta_x$  la longueur caractéristique d'une taille de maille. La considération des ondes de surpressions dans la phase liquide nécessite dès lors une discrétisation spatiale très fine. De même les méthodes d'intégrations temporelles condi-

### 1.3. Etat de l'art de la prédiction numérique de l'érosion de cavitation

tionnent le **CFL** de la simulation et ainsi sa discrétisation temporelle  $\Delta t$ .

$$CFL = \frac{\|\mathbf{u}\| \Delta t}{\Delta x} \quad (1.22)$$

Le code CATUM [212] adopte cette approche dans le cadre des écoulements cavitants. L'égalité de pression entre les phases est supposée et la masse volumique est déterminée grâce à une loi d'état basée sur un équilibre thermodynamique des deux phases. Dans les phases pures, la loi de Tait et la loi des gaz parfaits sont respectivement utilisées pour le liquide et le gaz. La célérité dans la zone diphasique est calculée à l'aide de la formulation de Wallis (cf 3.2.2.1.).

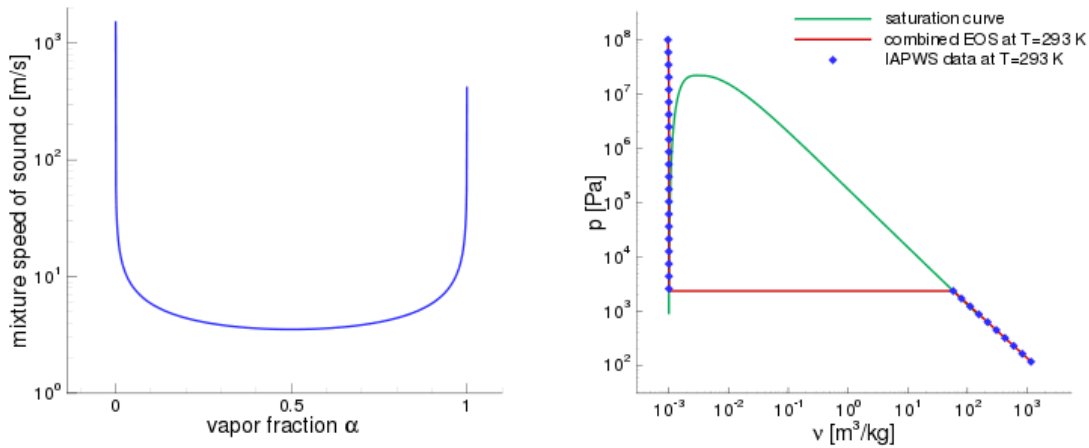


FIGURE 1.15 – La loi d'état et célérité du son définies dans CATUM par rapport à la courbe de saturation et les données IAPWS ( $v = \frac{1}{\rho_M}$ ) à 293 K [212]

A l'aide de ce solveur, une prédiction numérique plus fine des pressions en paroi peut être obtenue [209,210]. Afin de distinguer les surpressions issues de l'implosion de structures gazeuses, seules responsables de l'endommagement du matériau, une méthode de détection des implosions a été mise en place [227]. Celle-ci est basée sur le changement de signe de la divergence de vitesse et donc en première approximation, à l'augmentation du volume des structures gazeuses (fig 1.16).



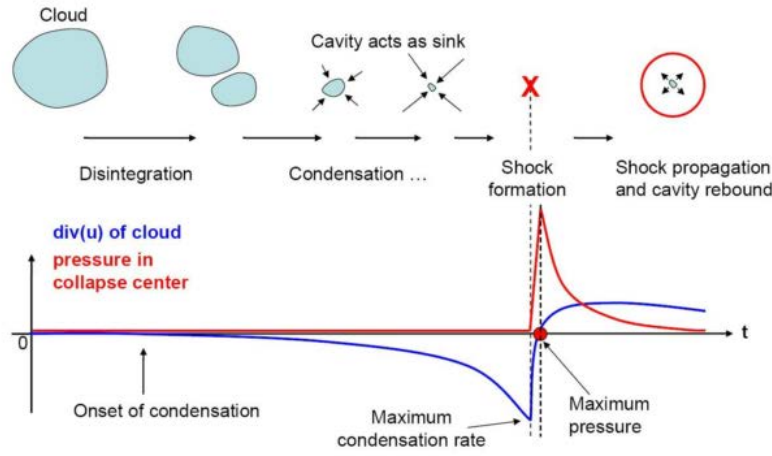


FIGURE 1.16 – Détection de la création des ondes de surpression dans le milieu dans la méthode de Schmidt [227]

A chaque implosion, une pression maximale locale est relevée et est répertoriée en tant qu'onde de surpression potentiellement érosive pour le matériau. La loi de décroissance en  $\frac{1}{r}$  de l'amplitude permet de déterminer la pression obtenue en paroi à chaque pas de temps. Des corrections empiriques basées sur des expériences [77] ont permis de faire concorder la force obtenue sur des capteurs avec les estimations numériques, indépendamment de la discrétisation temporelle et spatiale de la géométrie.

### 1.3.1.3. Définition d'une énergie potentielle

L'énergie potentielle d'une bulle de gaz [36] peut être définie grâce au produit de son volume par la différence de pression entre la pression du liquide à l'infini et la pression de vapeur saturante.

$$E_{pot} = V_{gaz} (p_{\infty} - p_{sat}) \quad (1.23)$$

La disparition totale de cette bulle provoque ainsi le transfert de cette énergie vers le liquide. La dérivée temporelle de cette énergie établit alors une puissance correspondant à la destruction des structures de gaz.

$$P_{pot} = V_{gaz} \frac{d}{dt} [p_{\infty} - p_{sat}] + (p_{\infty} - p_{sat}) \frac{d}{dt} [V_{gaz}] \quad (1.24)$$

Les grandeurs physiques de l'écoulement étant moyennées par l'utilisation de la

### 1.3. Etat de l'art de la prédiction numérique de l'érosion de cavitation

---

méthode **U-RANS**, chaque bulle perd son caractère individuel. Certains modèles de prédiction de l'érosion de cavitation proposent alors d'étendre cette approche énergétique au volume de gaz simulé.

Dans cette démarche Reboud et Fortes-Patella [73] proposent un scénario en cascade prédisant le volume des indentations obtenues en paroi (fig 1.17).

- La simulation de l'écoulement cavitant repose sur un modèle à trois équations (sans considération de l'équation d'énergie). Les deux phases sont supposées incompressibles et la zone de mélange est décrite par la loi barotrope définie par Delannoy (cf 3.2.2.2.).
- En négligeant la partie relative à la dérivée temporelle de la pression, une énergie potentielle volumique liée à l'implosion des structures de vapeur est définie par la connaissance de la divergence de la vitesse :

$$\frac{P_{pot}}{V} = -(p_M - p_{sat}) \frac{\rho_M}{\rho_M^l - \rho_M^v} \nabla \cdot [\mathbf{u}_M] \quad (1.25)$$

- Des corrélations obtenues par Challier [36] permettent de quantifier la part de cette puissance correspondant à la propagation des ondes de surpressions. Ces relations sont issues de l'étude de l'implosion d'une bulle isolée et dépendent de la pression partielle des gaz incondensables.

$$\frac{P_{wave}}{V} = \eta^* \frac{P_{pot}}{V} \quad \text{avec} \quad \eta^* = 0.029 \left( \frac{p_a^g}{p_m} \right)^{-0.54} \quad (1.26)$$

La pression des gaz dissous est déterminée par le modèle théorique proposé par Brennen [27] reposant sur la connaissance de la concentration d'air dans le milieu liquide ( $c_a^*$  exprimé en ppm).

$$p_a^g = 69c_a^* \quad (1.27)$$

- La puissance reçue en paroi est obtenue en intégrant celle issue des ondes de surpression sur le domaine liquide au dessus de la paroi. Une fonction de pondération, par rapport à la distance à la paroi  $h_{paroi}$ , permet de considérer une diminution de

l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation.

$$\frac{P_{mat}}{\Delta S} = \int_0^\infty \frac{P_{wave}}{V} f(h_{paroi}) dh_{paroi} = \eta^{**} \frac{P_{wave}}{V} \quad (1.28)$$

La fonction de pondération est calculée à partir d'une distance maximale d'érosion  $E_{agr}$  et d'un coefficient  $n$  correspondant à la diminution de l'amplitude de pression par rapport à la distance parcourue. Il est généralement défini à 1.

$$f(h_{paroi}) = \begin{cases} \left( \frac{E_{agr}}{h_{paroi} + E_{agr}} \right)^n & \text{Si } h_{paroi} < E_{agr} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

- Finalement, l'endommagement sur le matériau est calculé grâce à une fonction obtenue précédemment par Fortes-Patella [69], reliant linéairement l'énergie reçue à la paroi au volume déformé grâce à un paramètre  $\beta$  dépendant du matériau. Le taux d'endommagement volumique  $\dot{V}_d$  peut dès lors être obtenu.

$$\dot{V}_d = \frac{1}{\beta} \frac{P_{mat}}{\Delta S} \quad (1.29)$$

### 1.3.2. Résolution de la dynamique de bulles

Afin de palier à la différence d'échelle existant entre les simulations numériques issues d'un calcul **U-RANS** et les phénomènes liés à l'érosion de cavitation, il est également possible de résoudre en parallèle la dynamique de bulles à l'aide d'une résolution plus fine. L'avantage de ce procédé est de ne considérer qu'un nombre raisonnable de bulles pour ce second algorithme, rendant un calcul de 'type' Rayleigh Plesset réalisable pour des applications industrielles.

#### 1.3.2.1. Proposition de Ochiai

Dans sa proposition, Ochiai [165] utilise deux systèmes d'équations différents pour prédire l'érosion de cavitation sur un hydrofoil.

- A l'échelle du profil, un solveur basé sur une approche **TTV** et incluant une

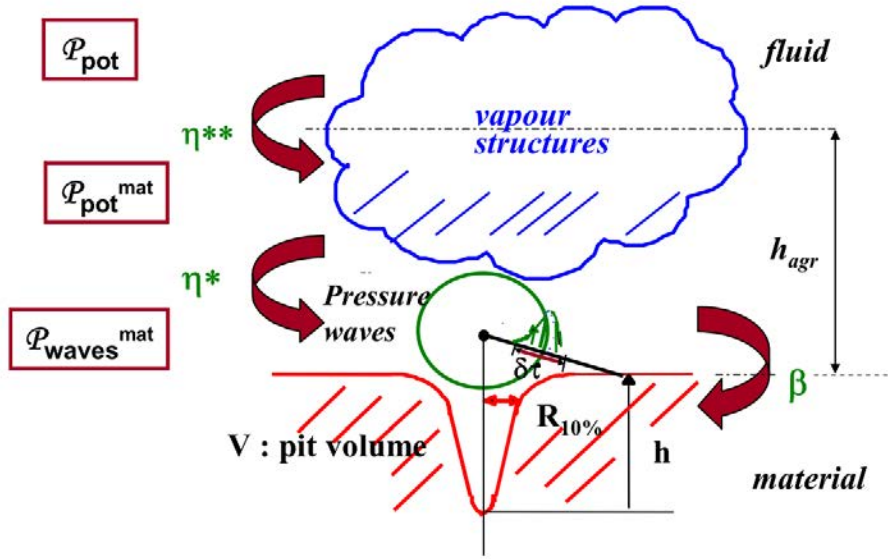


FIGURE 1.17 – Illustration du scénario en cascade proposée par Reboud et Fortes-Patella [69, 73]

cinquième équation pour considérer la présence de gaz incondensables (assimilés à de l'air) dans l'écoulement est utilisé. L'air est supposé occlus dans les phases gazeuses. Les phases pures considèrent la loi d'état de Tamman pour la phase liquide et la loi des gaz parfaits pour la phase gazeuse.

Le terme de transfert de masse pour l'eau est basé sur la relation de Hertz-Knudsen-Langmuir (cf. 2.2.3.2.) dans laquelle la température de la bulle est considérée égale à la température du liquide.

$$M_e^g = \alpha_g \alpha_l A C_{e/c} \frac{p_{sat}(T^l) - p_e^g}{\sqrt{2\pi r_e T^l}} \quad \text{avec} \quad A = \frac{C_a}{\sqrt[3]{\alpha_g \alpha_l}} \quad (1.30)$$

$\alpha_g \alpha_l A$  correspond à une estimation de l'aire interfaciale tandis que  $C_e$  et  $C_c$  sont des coefficients de transfert à l'évaporation et à la condensation.  $C_a$  est un autre coefficient déterminant la distribution de rayons de bulle.  $C_e$  et  $C_c$  n'étant pas équivalents, le modèle de transfert de masse repose donc sur deux constantes,  $C_e C_a$  et  $C_c C_a$  à priori indéterminées, prises par défaut à  $10^3 m^{-1}$  et  $1 m^{-1}$ .

- Parallèlement à la simulation de l'écoulement macroscopique, des bulles sphériques sont placées dans l'écoulement. Leurs rayons, positions initiales et fréquence d'initialisation dans le milieu sont des paramètres du modèle. Dans le cas présenté [165], 5 bulles de rayon  $100\mu m$  sont initialisées toutes les  $\frac{2}{\|\mathbf{u}_{ref}\|}ms$  au niveau du bord d'attaque du profil (Fig. 1.18).

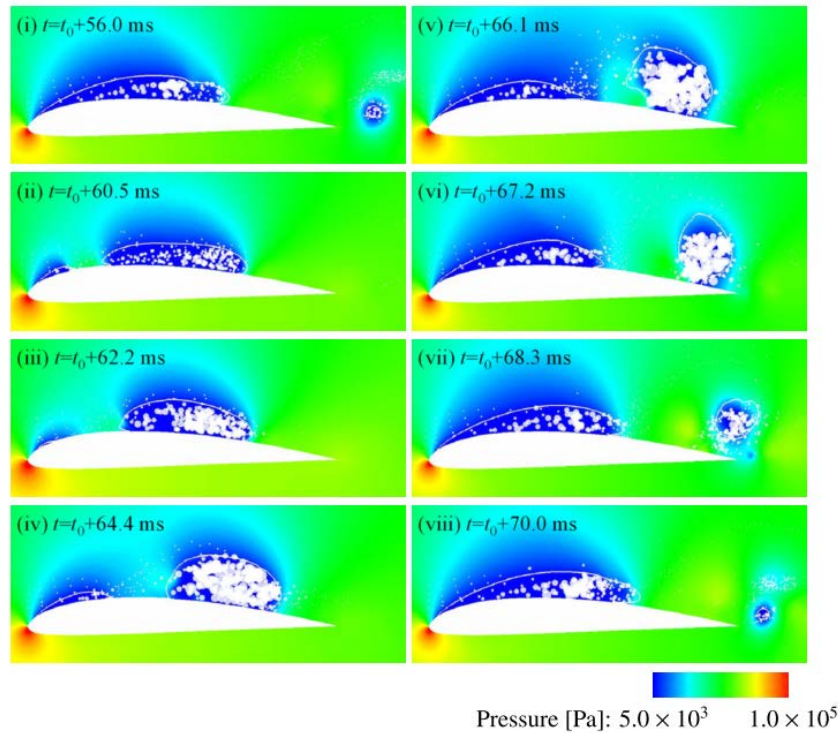


FIGURE 1.18 – Simulation d'un écoulement cavitant autour d'un hydrofoil, représentation de la pression, de l'isocontour de taux de vide  $\alpha_g = 10\%$  et du positionnement et de la taille des bulles dans la démarche de Ochiai [165]

Le déplacement des bulles est régi par une équation de transport incluant les forces de traînée, de masse ajoutée et de gradient de pression. Les bulles sont supposées rebondir de façon élastique sur les parois solides. Leurs oscillations radiales sont calculées au travers d'une équation de type Rayleigh-Plesset considérant la compressibilité du fluide ainsi que les transferts de masses aux interfaces. La température de la bulle est également calculée via une équation de conservation de l'énergie.

Un chaînage est réalisé entre ces deux calculs : les grandeurs de la simulation macroscopique sont interpolées pour fournir les conditions de calcul des oscillations de bulle. Le pas de temps utilisé pour la résolution de la dynamique de bulles est 100 fois inférieur à celui du code **U-RANS**. Des instabilités peuvent néanmoins apparaître dans le calcul des oscillations de bulle.

Le mouvement oscillatoire radial des bulles permet de prédire les ondes de surpression atteignant la paroi  $p_w$ . L'énergie d'impact est alors calculée grâce à la formulation donnée par Soyama [221]. La puissance acoustique surfacique  $P_{surf}$  est ainsi évaluée par :

$$P_{surf} = \sum \frac{p_w^2}{2\rho_M^l c_M^l} \frac{\tau}{t_{cal}} \quad (1.31)$$

où  $\tau \approx 0.1\mu s$  est une estimation de la durée d'impact des ondes de surpression impactant la surface et  $t_{cal}$  la durée physique de la simulation.

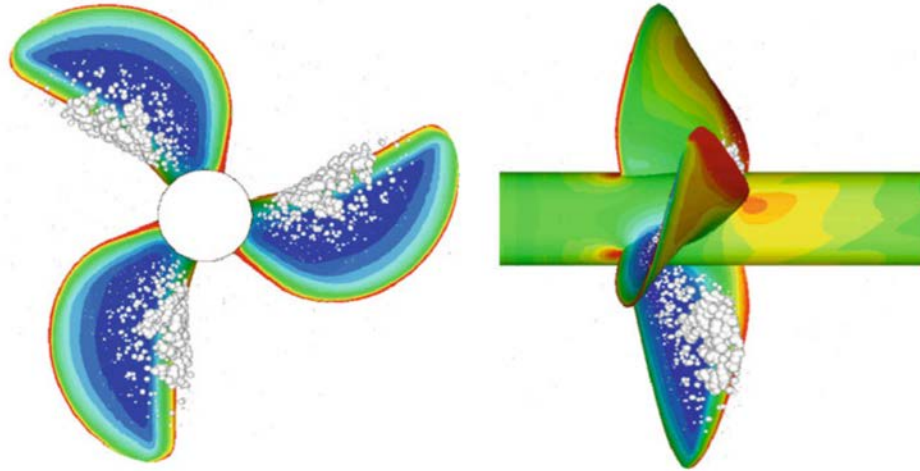
### 1.3.2.2. Proposition de Chahine

La méthode proposée par Kim et Chahine [126] s'appuie sur l'utilisation du solveur **3DynaFS-Vis** et d'une méthode lagrangienne de suivi de particules **DynaFS-Dsm**© :

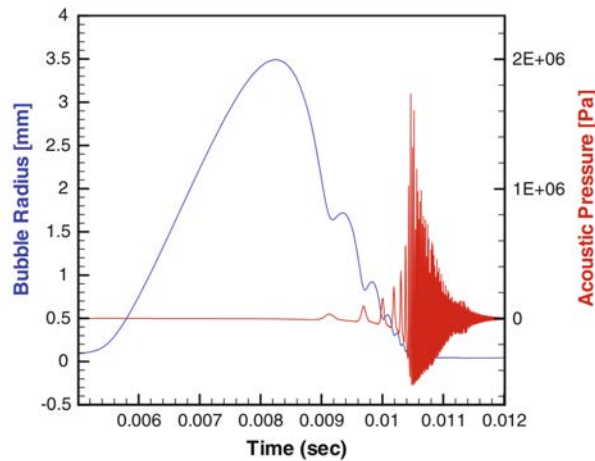
- Le solveur fluide ne considère que la phase liquide de l'écoulement. Il repose sur la résolution des équations de Navier Stokes instationnaires incompressibles de conservation de masse et de quantité de mouvement.
- Une population de bulles caractérisée par un rayon initial  $R_0$  ( $10 - 200\mu m$  avec une distribution volumique en  $N(R) \sim R^{-4}$ ) et un taux de vide moyen  $\alpha_0$  ( $2.9 \cdot 10^{-6}$ ), est dans le même temps inséminée dans le liquide. Ces bulles sont transportées dans l'écoulement à l'aide d'une équation de transport. Leurs oscillations sont contrôlées par une équation de type Rayleigh-Plesset dans laquelle la pression à l'infini est prise égale à la pression moyenne sur la surface de la bulle (méthode **SAP** [34]).

Les bulles rencontrant une zone de faible pression connaissent une augmentation de leurs rayons et l'on peut ainsi voir la formation d'un agglomérat de bulles dans la simula-

tion (Fig. 1.19a). La phase d'implosion de ces structures permet de calculer les ondes de surpressions émises et par conséquent le chargement en paroi (Fig. 1.19b).



(a) Pression du liquide et développement des bulles dans l'écoulement



(b) Illustration de la dynamique de bulles de dimension initiale de  $50\mu m$  - rayon de bulle et pression acoustique mesurée en paroi

FIGURE 1.19 – Simulation d'un écoulement cavitation autour d'une hélice à l'aide du solveur **3DynaFS** [126].

### 1.3.2.3. Méthodologie proposée par Van Loo [149]

Dans ses travaux, Van Loo [149] s'interroge sur la possibilité de coupler les méthodologies développées pour l'implosion d'un nuages de bulles avec des simulations

### 1.3. Etat de l'art de la prédiction numérique de l'érosion de cavitation

**U-RANS.** Il propose donc dans un premier temps, de calculer la formation des nuages de cavitation à l'aide du solveur *Fresco*. Ce solveur fluide repose sur un modèle **TTV** dont le terme source est issu de l'équation de Rayleigh-Plesset (cf 3.2.1.2.). Sa proposition consiste alors à recréer l'implosion des nuages de bulles obtenus avec le solveur **U-RANS** (Fig. 1.20) à l'aide du modèle de simulations de dynamiques de bulles basé sur la linéarisation du collapse d'un nuage proposé par Brennen [133].

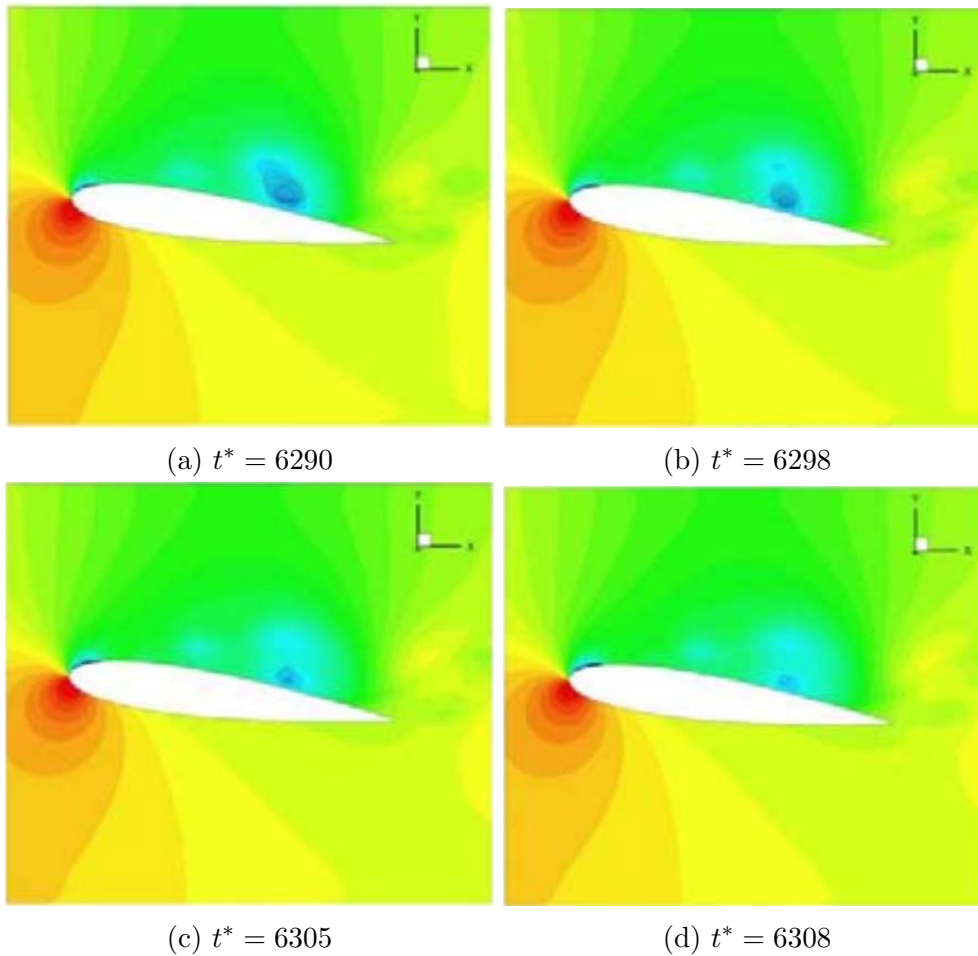


FIGURE 1.20 – Représentation de la disparition d'un nuage obtenu à l'aide du solveur *Fresco* - Représentation de la pression (bleu zone de basse pression) [149]

L'initialisation de ce calcul s'effectue en supposant que le nuage de bulle est initialement à l'équilibre. Afin de recréer un nuage équivalent à celui obtenu dans la simulation **U-**



**RANS**, une méthode basée sur un 'paramètre d'interaction du nuage'  $\beta$  est définie.

$$\beta = \alpha_0 (1 - \alpha_0) \frac{A_0^2}{R_0^2} \quad (1.32)$$

Ce paramètre est lui-même établi grâce à la définition d'une taille initiale de bulle  $R_0$  ( $= 10^{-4}m$ ) et du nuage  $A_0$  ( $\approx 100R_0$ ), ainsi que d'un taux de vide initiale  $\alpha_0$  ( $10^{-2} - 5\%$ ). Les conditions de pression imposées sur ce nuage, responsables de l'implosion du nuage, sont extraites des simulations **U-RANS**.

L'implosion de ce nuage à un pas de temps plus faible permet une résolution plus fine de la dynamique de bulles et donc de l'émission des ondes de surpression dans le milieu. Cette méthode permet de déterminer le chargement en paroi (Fig 1.21).

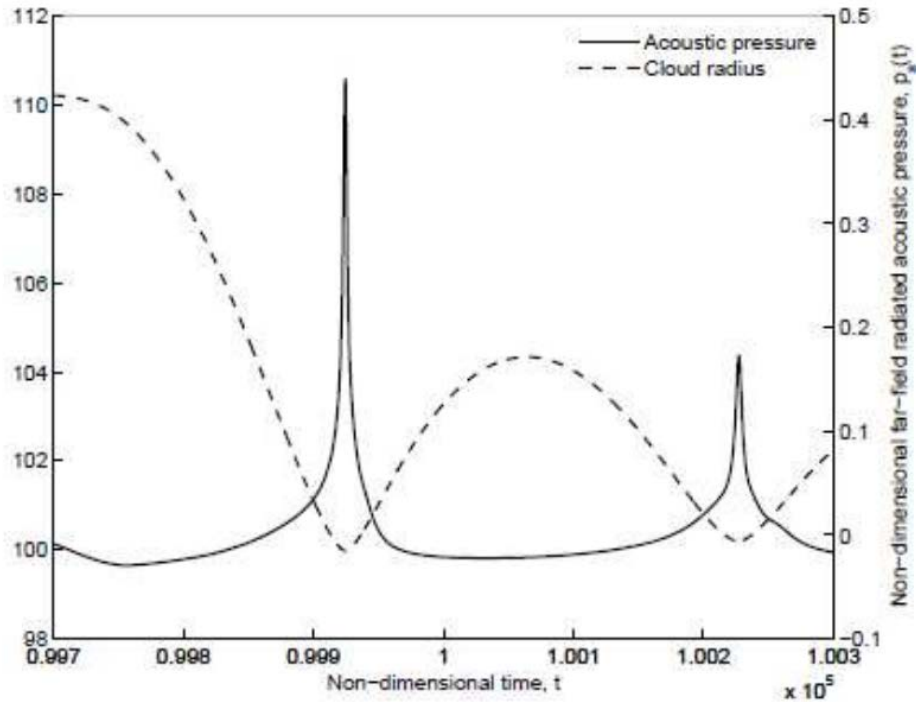


FIGURE 1.21 – Evolution temporelle des dimensions du nuage de bulle et de la pression acoustique émise à une distance de l'ordre de grandeur de la géométrie du profil [149]

## 1.4. Méthode proposée et organisation du mémoire

### 1.4.1. Commentaires sur les méthodes existantes

Dans les modèles modélisant la dynamique de bulles, les phénomènes à l'échelle de la bulle tels que la coalescence, le fractionnement, la croissance, ou bien encore l'implosion de bulles sont retranscrits à l'échelle de la simulation **U-RANS** par l'intermédiaire des lois d'état et des modèles de turbulence. Les intensités de cavitation déterminées à l'aide de ces seules simulations ne peuvent dès lors reproduire exactement le chargement en paroi responsable de l'endommagement du matériau.

Au vu de sa discrétisation spatiale et temporelle, la méthode proposée par Schmidt fait figure d'exception dans cette classification. En revanche elle repose sur un équilibre thermodynamique des deux phases sans considérer d'interface. Elle se distingue donc des hypothèses utilisés par les systèmes de type 'Rayleigh-Plesset' généralement utilisés pour caractériser les ondes de surpression issus de l'implosion de bulles. De plus, elle présente un coût de calcul conséquent. Le tableau 1.3 propose une synthèse de ces différentes approches.

Les méthodes simulant la dynamique de bulles sont très influencées par une distribution de 'germes de cavitation' évoluant sans prise en compte de phénomènes de fission ou de coalescence. Chacune des méthodes présentées précédemment propose un couplage différent entre les deux échelles (cf Tab 1.4) :

- Ochiai utilise une simulation de l'écoulement à l'aide d'une approche **TTV**. Le solveur **U-RANS** propose dès lors une modélisation des changements d'état. Dans le même temps, une population de bulles est inséminée dans l'écoulement. Dans cette méthode, le milieu diphasique est donc représenté, à la fois, par les résultats du calcul **U-RANS** et par le suivi des bulles inséminées. Un décalage entre les zones diphasiques décrites par ces deux algorithmes peut apparaître, notamment à cause de la considération d'une vitesse de glissement dans l'équation de transport des bulles, en contradiction avec l'hypothèse d'égalité des vitesses des phases utilisées dans la simulation **U-RANS** (cf 2.3.2.).
- La simulation **U-RANS** utilisée par Chahine ne considère, quant à elle, que la phase

| Méthodes implicitant la dynamique de bulles |  |  |                                  |   |
|---|--|--|----------------------------------|---|
| Références                                  | Li [146]                                     | Dular [58]   | Schmidt [209, 210]               | Reboud et Fortes-Patella [73]                   |
| Simulation de l'écoulement macroscopique    | <b>U-RANS</b> - TTV                          | <b>U-RANS</b> - barotrope                            | <b>Euler - HEM</b> - 3 équations | <b>U-RANS</b> - barotrope                       |
| Obtention du chargement en paroi            | -  | Corrélation sur la formation d'un microjet           | Chargement en paroi              | Energie potentielle et intégration sur la paroi |
| Grandeur caractéristique de l'endommagement | Variation temporelle de la pression en paroi | Pourcentage de surface endommagée par unité de temps |                                  | Vitesse de marquage en $m^3.m^{-2}.s^{-1}$      |

TABLEAU 1.3 – Récapitulatif des méthodes de prédiction du chargement en paroi sans 'calcul sous-maille'

liquide. La population de bulles n'est représentée que par le suivi et la croissance de la population des bulles inséminées. Néanmoins, les pressions et masses volumiques obtenues par le solveur **U-RANS**, ne prenant pas en compte les changements d'état, peuvent différer des valeurs physiques.

- Enfin, tandis que les deux modèles précédents simulent la croissance des bulles depuis un état initial en amont de la zone diphasique, la méthodologie proposée par Van Loo considère un nuage de bulles obtenu à l'aide de la simulation **U-RANS** et restant en adéquation avec la définition d'une population de germes de cavitation. Cette méthode a l'avantage de ne nécessiter que la variation lagrangienne de pression au moment de l'implosion. Néanmoins, son utilisation n'a été présentée que dans le cas de lâchers de cavitation et des démarches supplémentaires sont à adopter pour d'autres types d'écoulement, tels que ceux présentant une poche de cavitation stable.

#### 1.4. Méthode proposée et organisation du mémoire

| Méthodes explicitant la dynamique de bulles |                           |                                    |   |                                |
|---|---------------------------|------------------------------------|---|--------------------------------|
| Références                                  |                           | Ochiai [165]                       | Chahine [126]                                     | Van Loo [149]                  |
| Simulation de l'écoulement macroscopique    |                           | <b>U-RANS</b> - TTV                | <b>U-RANS</b> - phase liquide                     | <b>U-RANS</b> - TTV            |
| Simulation de la dynamique de bulles        | Modèle                    | Keller                             | Keller avec méthode <b>SAP</b>                    | Modèle multi-bulles de Brennen |
|   | Initialisation des bulles | en amont de la poche de cavitation | en amont de la poche de cavitation                | avant l'implosion de bulles    |
|   | Trajectoire des bulles    | équation de quantité de mouvement  | équation de quantité de mouvement                 | -                              |
| Grandeur caractéristique de l'endommagement |                           | Puissance surfacique               | Pression en paroi issue de la dynamique de bulles |                                |

TABLEAU 1.4 – Récapitulatif des méthodes de prédiction du chargement en paroi avec explicitation du calcul de l'interface

#### 1.4.2. Démarche suivie dans le mémoire

La difficulté de notre démarche réside dans le passage entre les caractéristiques de l'écoulement au niveau du profil et les phénomènes se produisant à l'échelle des bulles. Dans les méthodes présentées ci-dessus, les simulations **U-RANS** négligent les termes de tension superficielle contrôlant pourtant les dimensions des bulles à l'équilibre (au travers de la loi de Laplace - Eq. (2.45)). De plus, hormis la méthode de Ochiai [165], la présence de gaz dissous dans la simulation **U-RANS** n'est pas pris en compte. Dans le cadre d'une bulle isolée, la quantité de gaz occlus dans la bulle influe l'amplitude de l'onde de surpression générée lors de l'implosion [36] et certaines expériences montrent une influence de la quantité d'air dissous sur les résultats d'érosion (cf Introduction chapitre 2.). Dans cette étude, nous allons proposer une méthode de post-traitement des simulations **U-RANS**, simulant les implosions de bulles et permettant de considérer des hypothèses similaires que ce soit au niveau de la simulation **U-RANS** et au niveau de l'implosion de bulles :

- La population de bulles sera établie à l'aide de la simulation **U-RANS**. Nous y

intégrerons à la fois les efforts liés aux **tensions de surface** et la **présence de gaz incondensables** au sein du fluide.

- Dans cette démarche, les lâchers et les poches de cavitation sont supposées être constitués d'un ensemble de bulles. Pour chaque pas de temps du calcul, la dynamique des bulles quittant le milieu diphasique et subissant une variation de pression importante est simulée. La destruction de ces structures et la génération des ondes de surpressions correspondantes s'opèrent donc tout au long de la simulation.

Cet algorithme permet de calculer les pressions en paroi et d'en déterminer une grandeur d'**agressivité**, la seconde étant le résultat principal de cette étude.

Notre premier travail consiste à définir et à modéliser les phénomènes physiques locaux (Chap 2.) se produisant au sein des écoulements diphasiques. Il aboutit à la mise en place d'un système d'équation bâti sur les équations de Navier-Stokes pour un fluide **diphasique** (liquide/gaz) et **binaire** (eau/gaz incondensable) afin de quantifier la pression des gaz dans les bulles au moment de leurs implosions.

Ce travail de thèse s'inscrivant dans une démarche de post-traitement, aucun développement dans les solveurs utilisés n'est effectué.

Le chapitre 3. est consacré à la simulation **U-RANS**, à une présentation des lois d'état existantes ainsi qu'à la considération d'une population de bulles aux travers de la loi d'état barotrope intégrée dans IZ et Fine-Turbo (cf 3.2.2.2.).

Un algorithme permettant la simulation numérique de l'implosion d'un nuage de bulles est proposé au cours du chapitre 4. Le système présenté a la particularité de considérer un ensemble de bulles pouvant se déformer non sphériquement et basée sur un potentiel de vitesse. Cette section nous permet de définir également les grandeurs liées à l'agressivité de l'écoulement pour notre étude.

Un chaînage de ces deux approches est proposée dans le chapitre 5. pour aboutir à la quantification de l'intensité de cavitation en paroi.

#### 1.4. Méthode proposée et organisation du mémoire

Finalement, notre étude s'achève sur la mise en application de cette méthode. Des comparaisons entre les résultats de simulations et des expériences sont effectuées d'un point de vue hydrodynamique (longueur de poche, fréquence de lâcher, pressions relevées,...) et en termes d'agressivité de l'écoulement sur trois géométries : deux hydrofoils étudiés respectivement à l'EPFL et à l'université de Darmstadt et un diaphragme testé par EDF R&D.

La mise en place des différents systèmes d'équations présentés dans ce manuscrit peut être schématisé par la figure 1.22. Les passages entre les systèmes seront clarifier tout au long du document.

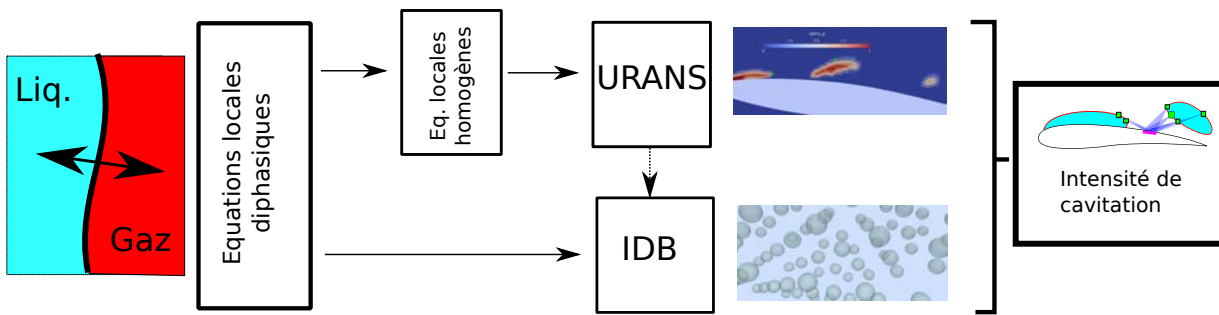


FIGURE 1.22 – Schématisation de la mise en place des étapes de la méthode



# Équations de la dynamique d'un fluide binaire diphasique

## Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| 2.1. Suivi de l'interface . . . . .   | <b>85</b>  |
| 2.1.1. Caractérisation des phases et de l'interface . . . . .                               | 85         |
| 2.1.2. Coalescences et fissions des structures gazeuses . . . . .                           | 86         |
| 2.1.3. Méthodes de suivi d'une population de bulles . . . . .                               | 87         |
| 2.2. Équation de conservation de la masse . . . . .   | <b>89</b>  |
| 2.2.1. Équation de conservation de masse pour les phases . . . . .                          | 89         |
| 2.2.2. Équation de conservation de masse pour le milieu diphasique . .                      | 90         |
| 2.2.3. Modèles de fermeture . . . . .   | 93         |
| 2.2.3.1. Diffusion moléculaire . . . . .  | 93         |
| 2.2.3.2. Débit massique surfacique d'eau à l'interface . . . . .                            | 93         |
| 2.2.3.3. Débit massique surfacique d'air à l'interface . . . . .                            | 95         |
| 2.2.4. Évaluation de l'importance des termes pour nos applications . .                      | 98         |
| 2.3. Équation de conservation de quantité de mouvement . . . . .                            | <b>100</b> |
| 2.3.1. Equation de conservation de quantité de mouvement pour une phase . . . . .           | 100        |
| 2.3.2. Equation de conservation de quantité de mouvement pour le mélange homogène . . . . . | 101        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.3.3.   | Modèle de fermeture . . . . .                                   | 102        |
| 2.3.3.1. | Force interfaciale . . . . .                                    | 102        |
| 2.3.3.2. | Tenseur de viscosité . . . . .                                  | 104        |
| 2.3.4.   | Evaluation de l'importance des termes pour nos applications . . | 105        |
| 2.4.     | Equation de conservation de l'énergie . . . . .                 | <b>106</b> |
| 2.4.1.   | Evolution de la température pour une phase . . . . .            | 106        |
| 2.4.2.   | Modèles de fermetures . . . . .                                 | 108        |
| 2.4.2.1. | Lois d'état . . . . .   | 108        |
| 2.4.2.2. | Flux de chaleur . . . . .                                       | 111        |
| 2.4.2.3. | Changement de phase . . . . .                                   | 112        |
| 2.4.2.4. | Echange d'énergie à l'interface . . . . .                       | 113        |
| 2.4.3.   | Evaluation de l'importance des termes pour nos applications . . | 115        |
| 2.5.     | Conclusion . . . . .  | <b>117</b> |

---

Afin de pouvoir établir les caractéristiques des populations de bulles dans notre écoulement, il est nécessaire de comprendre à la fois l'origine mais aussi l'ensemble des phénomènes inhérents à la croissance et à la destruction de ces structures diphasiques. Au cours de ce chapitre, nous présenterons différents modèles présents dans la littérature permettant de décrire ces évolutions.

Nous profiterons également de cette section pour mettre en place le système d'équations régissant la dynamique de bulle **au niveau local**. Le formalisme homogène permettant de déterminer l'ensemble des deux phases comme un seul fluide sera également introduit. Il représente la base de la plupart des modèles de simulations **U-RANS** (Fig. 2.1).

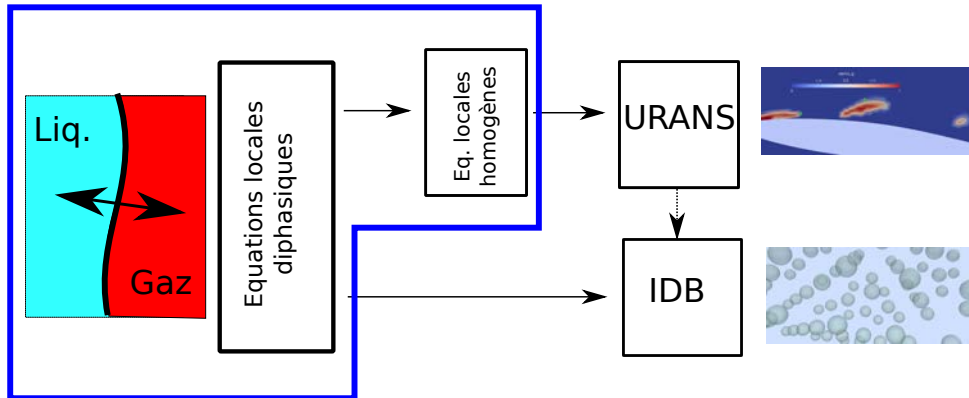


FIGURE 2.1 – Considérations effectuées dans le chapitre 2.

Nous avons précisé en introduction que le changement d'état d'un liquide correspond à la rupture de liaisons moléculaires causées, dans le cas de la cavitation, par des contraintes excessives. Cependant, pour une eau pure, ces liaisons sont suffisamment fortes pour résister à des pressions négatives très importantes. En effet, Guennoun [95] montra que pour une eau dégazée, un écoulement pouvait s'instaurer autour d'un profil NACA 0009 (lisse) et supporter des pressions absolues inférieures à 1 bar sans subir de changements d'état. Cette expérience prouve que la diminution de pression seule ne suffit pas à la vaporisation du liquide. D'autres facteurs sont donc à prendre en considération afin de déterminer l'origine de la cavitation dans les écoulements industriels.

L'eau utilisée pour ces applications provient généralement de rivières ou de bassins. Par nature, elle contient des impuretés sous forme solide (dues à l'érosion des sols et des conduites) ou sous forme gazeuse (suite à la dissolution des gaz dans le milieu). La présence de ces impuretés créent des inhomogénéités dans le milieu, fragilisant ainsi les liaisons moléculaires et facilitant l'apparition de la cavitation.

Etant, au moins en partie, responsables de la génération de structures diphasiques, ces 'impuretés' doivent être prises en compte dans notre modélisation. En fonction de leur localisation dans le fluide, deux types de nucléations peuvent être distinguées [117] :

### La nucléation de paroi :

Dépendamment du caractère hydrophobe ou hydrophile ainsi que de la rugosité du matériau, du gaz peut se loger au sein des imperfections du solide créant ainsi un

premier site préférentiel pour le changement d'état.

**La nucléation homogène :**

Le fluide transportant des éléments solides dans le milieu (de la rouille par exemple), le phénomène précédent peut donc également se produire au niveau de ces particules. De plus, l'écoulement peut transporter de petites bulles de gaz incondensable (leurs dimensions caractéristiques sont données par le seuil de Blake [21]). Des sites favorisant le changement de phase sont donc présents au sein du liquide. La nucléation homogène est dépendante du nombre de germes de cavitation, de leurs dimensions et de leurs contenances en gaz incondensable. Ces paramètres définissent la **qualité de l'eau**.

En plus de favoriser la cavitation, l'influence de l'air sur l'endommagement du matériau été à la fois montré par des études théoriques ([174,179]) et par des campagnes expérimentales. Pour deux teneurs en oxygène distinctes (0.3 ppm et 11 ppm) Lecoffre [5] a ainsi obtenu un nombre d'impacts liés à la cavitation variant jusqu'à 40%. Farhat [65] conclut de ses expériences sur les tourbillons de cavitation, qu'au delà d'une certaine teneur en air (1.8ppm dans le cas étudié), l'intensité des implosions liées à la cavitation diminuait fortement. Les travaux de Dular [57] ont également montré l'influence de la quantité d'air dissous au sein de l'écoulement en observant jusqu'à 50 fois moins d'endommagement pour des écoulements ayant une forte concentration en air dans le liquide ( $> 45mg.l^{-1}$  contre  $< 15mg.l^{-1}$ ).

Pour notre modélisation, nous considérerons dès lors le fluide comme un milieu multi-espèces comprenant à la fois de l'eau et des gaz incondensables. Ces derniers seront représentés par une seule espèce qui aura la masse molaire de l'air. Ils peuvent se présenter sous formes gazeuses mais aussi sous forme dissoute dans le liquide. Les particules solides ou les rugosités en paroi ne seront pas modélisées. Le milieu considéré est donc un fluide :

- **binaire** : comprenant deux espèces : eau et air
- **diphasique** : présent sous deux états différents, liquide et gaz

Afin de clarifier les notations, nous utiliserons les exposants  $l$  et  $g$  pour désigner respectivement la phase liquide et la phase gazeuse, et les indice  $e$ ,  $a$  et  $M$  pour désigner les

---

espèces “eau“ et “air“ et le mélange binaire.

Le caractère dual (binaire, diphasique) de l'écoulement complexifie son étude. En effet, la résolution complète de la dynamique du milieu implique la détermination de 13 variables :

- la vitesse de l'interface séparant la phase gazeuse et liquide (soit 1 variable),
- un champ de vitesse et de masse volumique pour chaque couple espèce/phase (soit 8 variables),
- un champ de pression et de température pour chacune des phases (soit 4 variables).

Nous allons désormais présenter les modèles et les équations associées à l'obtention de l'ensemble de ces variables. Les hypothèses effectuées pour la mise en place du système seront introduites tout au long de ce chapitre mais sont rassemblées ici afin de faciliter la lecture du manuscrit.

**Hypothèse 1** L'interface représente une discontinuité entre les phases. Elle ne possède pas de masse et les seules énergies interfaciales sont celles correspondant aux tensions de surface et aux enthalpies de changement de phase.

**Hypothèse 2** La tension de surface est supposée constante et égale à la tension de surface du couple eau liquide/air.

**Hypothèse 3** L'ensemble des gaz dissous est représenté par un unique gaz.

**Hypothèse 4** Les phases sont en équilibre thermodynamique locale (mécanique, thermique, chimique).

**Hypothèse 5** Les transferts à l'interface s'opèrent de façon isentropique.

**Hypothèse 6** Les seules forces volumiques agissant sur le fluide sont les forces gravitationnelles.

**Hypothèse 7** Les fluides sont supposés Newtoniens et l'hypothèse de Stokes est appliquée.

**Hypothèse 8** Les gaz suivent la loi des gaz parfaits.

**Hypothèse 9** La phase liquide respecte la loi de Tait. La présence des gaz dissous ne modifie pas la loi d'état de la phase liquide.

**Hypothèse 10** Les flux de chaleurs sont modélisés par la loi de Fourier.

**Hypothèse 11** La diffusion moléculaire est modélisée par la loi de Fick.

**Hypothèse 12** Les transferts de masse d'eau à l'interface sont modélisés par l'équation de Hertz-Knudsen-Langmuir.

**Hypothèse 13** Les transferts de masse de gaz incondensable à l'interface sont représentés à l'aide du modèle du double film.

**Hypothèse 14** Les viscosités  $\mu_i^k$ ,  $\nu_i^k$ , les coefficients calorifiques  $c_p^k$ ,  $c_v^k$ , la diffusivité thermique  $\lambda_i^k$  et molaire  $D_{d_i}^k$  sont des constantes pour chaque couple espèce/phase, indépendantes des conditions de pression et de la température. De même la constante de Henry  $H_e$  et les enthalpies de changement de phase sont considérées comme constantes.

## 2.1. Suivi de l'interface

Les écoulements cavitants sont fortement dépendants du couplage entre les deux phases du fluide et donc de la définition des interfaces. La connaissance des caractéristiques topologiques du milieu telles que le nombre d'inclusions, leurs répartitions spatiales ou bien leurs formes est donc nécessaire à la simulation de ce type d'écoulement.

### 2.1.1. Caractérisation des phases et de l'interface

Au niveau moléculaire, l'interface entre une phase liquide et gazeuse peut se définir comme la zone dans laquelle les molécules transitent de l'état liquide à l'état gazeux. Ce changement de phase ne se fait pas brutalement et l'interface possède en toute rigueur une épaisseur. Néanmoins, celle-ci peut être négligée dans les considérations de la mécanique des milieux continus, en raison de ses très faibles dimensions. L'interface représente alors une discontinuité, ne possédant ni épaisseur, ni masse (**H. 1**).

Dans ce contexte, les travaux de Kataoka [120] et de Ishii [109] ont permis de mettre en place un formalisme mathématique représentant chacune des phases par une fonction indicatrice  $\chi_k$ .

$$\chi_k(M(x, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si le point } M(x, t) \text{ se trouve dans la phase } k \text{ à l'instant } t. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

L'évolution volumique de ces phases y est alors contrôlée par la vitesse de l'interface  $\mathbf{u}_I$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k] + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (2.2)$$

De par leur définition, les fonctions caractéristiques  $\chi_k$ , n'évoluent qu'aux frontières liquide/gaz. De part et d'autres de l'interface, les fonctions caractéristiques de chaque phase valent 0 ou 1, leur gradient est par conséquent infini au niveau de l'interface et nul ailleurs. Il peut dès lors se définir comme une distribution de Dirac, notée  $\delta_I$ .

$$\|\nabla \chi_k\| = \delta_I \quad (2.3)$$

Le vecteur normal à l'interface  $\mathbf{n}_I^k$  est défini comme le vecteur unitaire dirigé selon le

gradient de la fonction caractéristique et orienté vers l'extérieur de la phase  $k$ .

$$\mathbf{n}_I^k = -\frac{\nabla\chi_k}{\|\nabla\chi_k\|} \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Coalescences et fissions des structures gazeuses

Au cours de leurs déplacements dans le fluide, les structures gazeuses peuvent subir différents phénomènes modifiant la **topologie** de l'écoulement.

#### Déformation par contraintes mécaniques :

L'équilibre mécanique de l'interface est régi par la différence de pression entre les deux phases et les efforts de tension de surface. Les bulles de gaz étant des structures compressibles, une variation de l'un de ces efforts entraînent une déformation de l'interface dans le but de retrouver un état d'équilibre. De façon similaire, la condensation et la vaporisation impliquant un transfert de masse entre les deux phases du milieu peuvent générer un tel déséquilibre.

#### Coalescence :

Les éléments de la phase dispersée peuvent rentrer en collision. Deux bulles se rencontrant rebondissent l'une sur l'autre ou fusionnent (phénomène de **coalescence**). Lorsque le taux de présence de la phase dispersée est importante, il devient nécessaire de prendre en compte les collisions interparticulaires [2].

#### Fission ou fractionnement :

A l'inverse, une contrainte mécanique excessive sur l'interface peut provoquer la division d'une structure en plusieurs éléments. Ce phénomène a déjà été évoqué auparavant lors de la formation des tores de vapeur en proche paroi (cf 1.1.2.1.).

Contrairement aux méthodes de **SND** permettant le suivi des interface et la considération (éventuelle) de ces différents mécanismes, la connaissance précise de la topologie diphasique du milieu dans un système moyenné type **U-RANS** est impossible. Néanmoins, des méthodes statistiques ont été mises en place afin de représenter au mieux les populations de bulles.

### 2.1.3. Méthodes de suivi d'une population de bulles

Plusieurs auteurs ont proposé, non plus de suivre le mouvement de chaque particule individuellement, mais de décrire l'évolution d'une population de bulles donnant naissance aux deux méthodes les plus couramment rencontrées dans la littérature.

- Dans la méthode des classes [9], la population de bulles est représentée par un nombre fini de classes, chacune d'elles ayant des termes de créations et de disparitions propres. Plus le nombre de classes considérées est élevé, plus la méthode peut décrire des populations complexes mais le temps de calcul requis devient important.
- Dans la méthode des moments, la population de bulles est décrite par des fonctions représentant la probabilité de présence d'une bulle de taille définie à un endroit de l'espace. Elles fournissent dès lors une description plus ou moins détaillée des bulles dépendamment de la complexité de la fonction choisie. Initialement considéré uniquement comme dépendant de la vitesse de l'écoulement [190, 253], ce formalisme a par la suite été étendu afin de considérer d'autres paramètres tels que le rayon de bulle ou bien la température [1, 83, 161]. Il peut désormais représenter des phénomènes de fission et de coalescence.

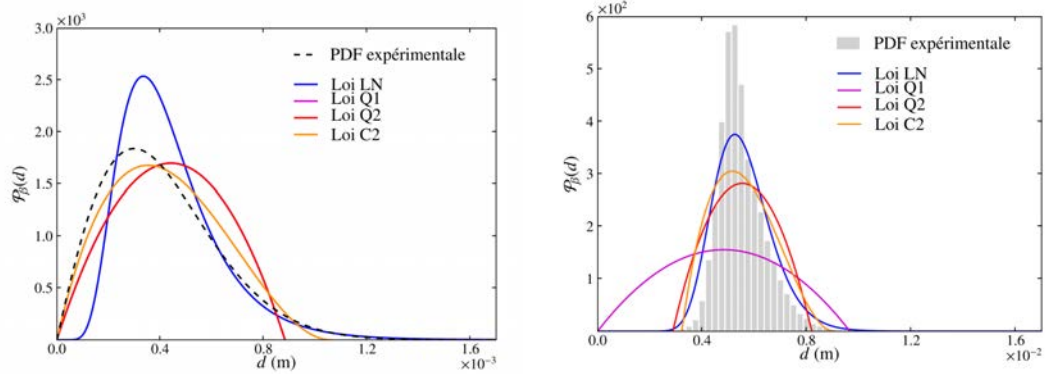
La phase dispersée est généralement représentée par des sphères. Les fonctions de distribution sont alors caractérisées par le nombre de bulles volumiques  $\check{n}_B(R)$  ayant un rayon compris entre  $R$  et  $R + dr$ . Le nombre total de bulles par unité de volume est donné par l'intégrale de cette distribution.

$$n_B = \int_{-\infty}^{\infty} \check{n}_B(R) dR \quad (2.5)$$

A partir de cette fonction, l'aire interfaciale et le taux de présence des phases peuvent également être évalués.

Peu de modèles de simulations **U-RANS** utilisent ce type de modélisation pour des écoulements cavitants. A notre connaissance, seul Wang et Greif [242] adopte la





(a) Données expérimentales tirées de la banque de données DEBORA

(b) Données expérimentales tirées de la banque de données MTLOOP

FIGURE 2.2 – Comparaison de l'allure de différentes lois de distribution par rapport à une distribution de taille de bulle expérimentale d'un écoulement à bulles sans changement de phase [252]

méthode des moments en considérant une population de bulles décrite par les moments d'ordre 1, 2 et 3 d'une fonction de distribution. Dans d'autres types d'applications, ces dernières se rencontrent plus fréquemment. Pour le cas d'écoulements bouillants à bulles dispersées par exemple, Zaepffel [252] proposa plusieurs modélisations de cette distribution à travers des lois Log-normale, quadratiques à un ou deux paramètres et une loi cubique à deux paramètres. Il a ainsi pu obtenir des modèles de distributions de bulles en accord avec des expériences issues de bases de données DEBORA et MTLOOP (fig 2.2).

Le choix de la fonction dépend du degré de précision que l'on souhaite apporter au modèle. Pour chaque paramètre indépendant de la loi choisie, une équation supplémentaire est requise. La loi de distribution la plus simple est une distribution de Dirac, ou population **monodisperse**. Les bulles sont alors localement représentées par un unique rayon  $R^g$ , hypothèse que nous utiliserons afin de caractériser les populations de bulles au sein de l'écoulement **U-RANS**. Dans cette considération, le taux de présence de la phase dispersée peut directement être reliée au nombres volumiques de bulles ainsi qu'au rayon  $R^g$  (cf. 5.1.1.1.).

## 2.2. Équation de conservation de la masse

La déformation des bulles, la compressibilité du milieu et les transferts de masse aux interfaces sont des phénomènes modifiant la masse volumique du fluide. Nous allons dans cette section mettre en place les équations définissant l'évolution de cette grandeur tout au long de l'écoulement en prenant en considération la présence de l'air dans le fluide.

### 2.2.1. Équation de conservation de masse pour les phases

L'équation de conservation de masse permet de suivre l'évolution de la masse volumique de chaque espèce dans chacune des phases.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_i^k] + \nabla \cdot [\chi_k \rho_i^k \mathbf{u}_i^k] = M_i^k \quad \text{pour} \quad i = \{a, e\} \quad k = \{g, l\} \quad (2.6)$$

Le terme de transfert de masse,  $M_i^k$ , correspond au flux de masse de l'espèce  $i$  entrant dans la phase  $k$ . Il peut s'exprimer sous la forme d'un débit massique surfacique à l'interface  $\dot{m}_i^k$ .

$$M_i^k = \dot{m}_i^k \delta_I \quad (2.7)$$

avec :

$$\dot{m}_i^k = \rho_i^k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_i^k) \cdot \mathbf{n}_I^k \quad (2.8)$$

Avec cette formulation, le flux massique à l'interface  $\dot{m}_i^k$  est positif lorsqu'il y a apport de masse dans la phase  $k$ .

Dans chacune des phases, la masse volumique du fluide binaire  $\rho_M^k$  est définie comme la somme des masses volumiques de chaque espèce. Un rapport massique  $Y_i^k$  peut alors être établi.

$$\rho_M^k = \rho_a^k + \rho_e^k \quad \text{et} \quad Y_i^k = \frac{\rho_i^k}{\rho_M^k} \quad (2.9)$$

Dans la phase liquide, la masse volumique de l'eau est très supérieure à celle de l'air dissous, le rapport étant de l'ordre de  $10^{-5}$  (cf A.1). La contribution de l'air dans la phase liquide sera ainsi relativement faible. En revanche, dans la phase gazeuse, les masses volumiques des deux gaz, dans des conditions de pression et température standards (1 bar/20° C), sont du même ordre de grandeur. Il n'y a donc pas, a priori, d'espèce prédominante.

Afin d'étudier le comportement du fluide binaire et non plus de chaque espèce isolée, une vitesse d'ensemble,  $\mathbf{u}_M^k$ , peut être définie pour chaque phase. Elle est définie en considérant que la quantité de mouvement du fluide binaire est la somme des quantités de mouvements des espèces le constituant.

$$\rho_M^k \mathbf{u}_M^k = \rho_a^k \mathbf{u}_a^k + \rho_e^k \mathbf{u}_e^k \quad (2.10)$$

La différence entre la vitesse d'ensemble et la vitesse de chaque espèce est appelée **vitesse de diffusion**. Elle permet d'établir un flux diffusif, quantité de masse par unité de surface et de temps, correspondant au déplacement de l'espèce dans le milieu par rapport au mouvement d'ensemble. De par leur définition, la somme des flux diffusifs des espèces dans une phase est nulle.

$$\mathbf{j}_i^k = \rho_i^k (\mathbf{u}_i^k - \mathbf{u}_M^k) \quad (2.11)$$

$$\sum_i \mathbf{j}_i^k = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

L'équation d'évolution de la masse volumique du fluide binaire peut alors être établie en additionnant les équations de conservation de masse pour chaque espèce (2.6). Celle-ci apparaît alors régie par le transport de masse par convection et par le transfert de masse aux interfaces.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k] + \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k] = M_M^k \quad (2.13)$$

avec :

$$M_M^k = M_e^k + M_a^k \quad (2.14)$$

Ce qui correspond à l'égalité suivante sur les flux massiques quittant une phase :

$$\dot{m}_M^k = \dot{m}_a^k + \dot{m}_e^k \quad (2.15)$$

### 2.2.2. Équation de conservation de masse pour le milieu diphasique

De façon similaire, les évolutions de la masse volumique d'une espèce et de celle de l'ensemble du fluide peuvent être obtenues à l'aide des fonctions caractéristiques de chaque

## 2.2. Équation de conservation de la masse

---

phase. Les masses volumiques et les vitesses d'ensemble de chaque espèce pour le milieu diphasique sont définies (Eq. (2.16)). Comme précédemment, des fractions massiques pour chaque espèce,  $Y_i$ , et pour chaque phase,  $X_i^k$ , peuvent être définies.

$$\rho_i = \chi_l \rho_i^l + \chi_g \rho_i^g \quad \text{et} \quad \rho_i \mathbf{u}_i = \chi_l \rho_i^l \mathbf{u}_i^l + \chi_g \rho_i^g \mathbf{u}_i^g \quad i = \{M, a, e\} \quad (2.16)$$

$$Y_i = \frac{\rho_i}{\rho_M} = \frac{\chi_l Y_i^l \rho_M^l + \chi_g Y_i^g \rho_M^g}{\chi_l \rho_M^l + \chi_g \rho_M^g} \quad i = \{a, e\} \quad (2.17)$$

$$X_i^k = \frac{\chi_k \rho_i^k}{\rho_i} \quad i = \{M, a, e\} \quad k = \{l, g\} \quad (2.18)$$

Si les vitesses des deux phases sont différentes, celles-ci auront tendance à s'éloigner l'une de l'autre. Cet écartement est caractérisé par la vitesse de glissement.

$$\mathbf{u}_R^k = \mathbf{u}_M^k - \mathbf{u}_M \quad (2.19)$$

De plus, l'interface n'ayant pas d'épaisseur (**H. 1**), la conservation des espèces indique que la somme des flux massiques est nulle pour chacune d'elles.

$$\sum_k \dot{m}_i^k = 0 \quad (2.20)$$

Ces considérations nous permettent d'obtenir l'équation de conservation de masse pour une espèce dans le milieu diphasique (en faisant la somme sur chaque phase de l'équation (2.6) pour une même espèce) tout en s'affranchissant des termes de transferts de masse. L'évolution de la masse volumique correspondante peut alors s'écrire en fonction du mouvement du milieu binaire diphasique, de la diffusion moléculaire dans chacune des phases et des vitesses de glissement.

$$\frac{\partial}{\partial t} [Y_i \rho_M] + \nabla \cdot [Y_i \rho_M \mathbf{u}_M] = - \sum_k [\nabla \cdot [\chi_k \mathbf{j}_i^k] + \nabla \cdot [\chi_k Y_i^k \rho_M^k \mathbf{u}_R^k]] \quad (2.21)$$

Finalement, la définition des différentes grandeurs permet d'obtenir une évolution de la masse volumique du **fluide binaire diphasique**, uniquement dépendante de la convection

(somme de l'équation (2.6) pour chaque espèce et chaque phase).

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_M] + \nabla \cdot [\rho_M \mathbf{u}_M] = 0 \quad (2.22)$$

La vitesse d'ensemble du fluide nous permet également de définir une dérivée particulière pour le milieu diphasique, appelée aussi dérivée lagrangienne.

$$\frac{d}{dt} [\phi] = \frac{\partial}{\partial t} [\phi] + \mathbf{u}_M \cdot \nabla \phi \quad \text{avec } \phi \text{ une grandeur scalaire, ou vectorielle} \quad (2.23)$$

Cette opérateur permet de suivre une particule dans l'écoulement en considérant les grandeurs subies par celle-ci au cours de son déplacement.

Avec cette notation, et en considérant l'équation (2.22) le rapport massique des espèces dans le milieu diphasique peut se réécrire uniquement en fonction de la diffusion dans chaque phase et des vitesses de glissement.

$$\frac{d}{dt} [Y_i] = -\frac{1}{\rho_M} \sum_k [\nabla \cdot [\chi_k \mathbf{j}_i^k] + \nabla \cdot [\chi_k Y_i^k \rho_M^k \mathbf{u}_R^k]] \quad (2.24)$$

Adopter le formalisme monofluide permet ainsi d'obtenir une équation de conservation de masse s'affranchissant des phénomènes de transferts de masse aux interfaces, de diffusion moléculaire et des vitesses de glissement entre les phases. En revanche, ne considérer que cette équation constitue une perte d'information concernant l'état de chaque phase et de chaque espèce. Il est donc nécessaire de pouvoir passer du formalisme monofluide à la distinction des phases en modélisant l'ensemble des phénomènes intervenant dans cette équation.

La convection, qu'elle soit faite par la vitesse d'ensemble ou par la vitesse de glissement, pourra être obtenue à l'aide des équations de conservation de quantité de mouvement. En revanche, la diffusion moléculaire et les transferts de masses aux interfaces nécessitent l'utilisation de modèles physiques.

### 2.2.3. Modèles de fermeture

#### 2.2.3.1. Diffusion moléculaire

D'après le modèle de marche aléatoire [61], Adolph Fick proposa une loi empirique afin de modéliser l'évolution des concentrations dans un milieu binaire. Cette loi, inspirée de la loi de Fourier (cf 2.4.2.2.), fut démontrée mathématiquement par Einstein au début du XX<sup>ième</sup> siècle. D'après cette étude, le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration et tend à homogénéiser le milieu (**H. 11**).

$$\mathbf{j}_i^k = -D_{di}^k \nabla [\chi_k \rho_i^k] \quad (2.25)$$

avec  $D_{di}^k > 0$ , le coefficient de diffusion moléculaire dépendant de la nature et des caractéristiques thermodynamiques des espèces.

La vitesse de diffusion des espèces est directement liée à ce paramètre  $D_{di}^k$ . La densité et les liaisons moléculaires étant plus importantes dans un liquide que dans un gaz, il est plus facile pour une particule de se déplacer au sein d'un milieu gazeux. Ce constat explique la différence d'ordre de grandeur rencontrée sur les coefficients de diffusion pour les deux phases.

$$D_{da}^l \approx 10^{-9} m^2 \cdot s^{-1} \quad D_{da}^g \approx 10^{-5} m^2 \cdot s^{-1}$$

#### 2.2.3.2. Débit massique surfacique d'eau à l'interface

Le changement de phase de l'eau au niveau microscopique a fait l'objet de plusieurs travaux [102, 110, 125, 128, 130, 181]. Même si à l'heure actuelle, d'autres approches existent telles que les méthodes SRT, *Statistical Rate Theory* [247], la théorie classique reposant sur la cinétique moléculaire reste la plus couramment utilisée et sera l'approche prise pour notre étude (**H. 12**).

En négligeant les interactions intermoléculaires et en se basant sur la répartition d'énergie définie par Boltzmann, le taux d'évaporation surfacique peut être défini à partir

des différences de pression et de température de part et d'autres de l'interface [31].

$$\dot{m}_e^g = \sqrt{\frac{1}{2\pi r_e}} \left( \frac{p_e^l}{\sqrt{T^l}} - \frac{p_e^g}{\sqrt{T^g}} \right) \quad (2.26)$$

Avec  $r_e$  la constante des gaz spécifiques de l'eau.

L'équation de Hertz-Knudsen-Langmuir [31] adapte cette approche en considérant un flux massique limitant côté liquide (justifiée par des considérations portant sur les enthalpies libre - cf A.3.3.3.).

$$\dot{m}_e^g = \sqrt{\frac{1}{2\pi r_e}} \left( C_v \frac{p_{sat}(T^l)}{\sqrt{T^l}} - C_e \frac{p_e^g}{\sqrt{T^g}} \right) \quad (2.27)$$

Les termes correctifs  $C_v$  et  $C_e$  représentent respectivement des coefficients de condensation et d'évaporation. Ils correspondent au nombre de molécules traversant l'interface sur le nombre de molécules l'impactant. Malgré le fait que Young [251] ait montré que ces coefficients n'étaient pas nécessairement égaux la plupart des études les considèrent comme tels.

$$\dot{m}_e^g = \frac{C_e}{\sqrt{2\pi r_e}} \left( \frac{p_{sat}(T^l)}{\sqrt{T^l}} - \frac{p_e^g}{\sqrt{T^g}} \right) \quad (2.28)$$

Plusieurs travaux [14, 62, 153] ayant eu pour but de les estimer n'ont pas pu aboutir à des valeurs standards (trois ordres de grandeurs peuvent séparer les différents résultats). Bien que représentant un phénomène local, le transfert de masse est en effet dépendant de différents paramètres liés au type d'écoulement étudié (vitesse du fluide, température, forme de l'interface, coefficient de diffusion). Cette différence explique les grandes plages de valeur rencontrées pour ces coefficients à la fois expérimentalement et dans les modèles de cavitation explicitant ce terme de transfert de masse.

L'expression de ce terme d'échange est dépendante de la pression de saturation de l'eau. La formule de Clapeyron (Eq. (2.29)) permet de déterminer cette pression en fonction de la température du milieu. Elle repose sur l'hypothèse des gaz parfait (cf 2.4.2.1. ) et sur une variation faible de l'enthalpie de vaporisation avec la température.

$$p_{sat}(T^l) = p_{ref} \exp \left[ \frac{L_{vap}}{r_e} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T^l} \right) \right] \quad (2.29)$$

## 2.2. Équation de conservation de la masse

---

Les deux mécanismes de changement d'état (Fig 1.1) sont bien définis par cette approche :

### **Ebullition :**

En partant d'une situation d'équilibre, l'augmentation de température du liquide augmente le rapport  $\frac{p_{sat}(T^l)}{\sqrt{T^l}}$  (la pression de saturation augmentant plus vite que la racine carrée de la température d'après la formule de Clapeyron) et provoque une création de vapeur jusqu'au retour de l'équilibre.

### **Cavitation :**

La diminution de la pression du liquide induit dans un premier temps, l'augmentation du volume de la phase gazeuse par effet mécanique. Celui-ci entraîne dans un second temps, la diminution de la pression partielle au sein de la bulle et engendre finalement la création de vapeur.

La figure 2.3 montre la sensibilité de la pression de vapeur saturante aux variations de température dans le cas de l'eau à pression atmosphérique. Celle-ci est donc beaucoup plus importante pour des températures élevées (proche de la centaine de degrés). Pour un même écart de température, la pression de vapeur saturante des fluides dits thermosensibles tel que le fréon R-114, varie de façon plus importante que celle de l'eau à température ambiante (tableau 2.1). Les termes de changement d'état sont alors plus sensibles aux fluctuations de température pour ces fluides.

| fluide | $T_{ref}$ (K) | $\rho_i^l$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $\rho_i^g$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $p_{sat}$ (Pa) | $\frac{dp_{sat}}{dT}$ ( $Pa.K^{-1}$ ) |
|--------|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------|---------------------------------------|
| eau    | 293           | 998                        | 0.02                       | 2339           | 143                                   |
| R-114  | 293           | 1470.3                     | 13.52                      | 181100         | 6000                                  |
| R-114  | 303           | 1439.6                     | 18.36                      | 249880         | 7700                                  |

TABLEAU 2.1 – Caractéristiques de l'eau et du fréon R-114 à saturation [90]

### **2.2.3.3. Débit massique surfacique d'air à l'interface**

Les transferts de masse d'une phase liquide vers une phase gazeuse dépendent à la fois de l'équilibre thermodynamique entre les deux phases et du déplacement des particules au sein de chacune des phases (diffusion). Partant de ce principe, la première modélisation du



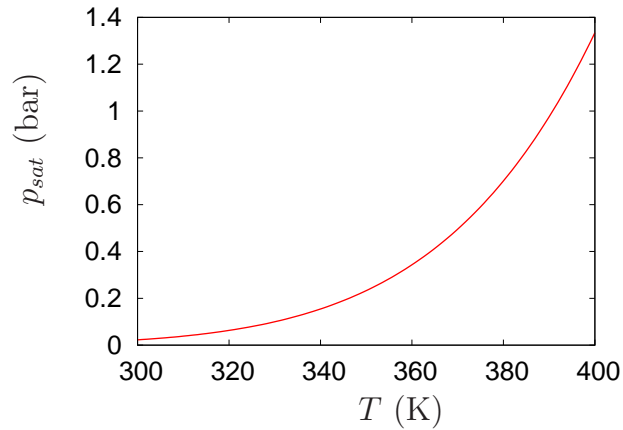


FIGURE 2.3 – Variation de la pression de vapeur saturante avec la température pour de l'eau

transfert de masse pour une espèce dissoute, appelée **modèle du double film**, fut proposée par Whitman [248]. Elle suppose que la résistance au transfert de masse est localisée dans des couches laminaires situées de part et d'autre de l'interface, et est contrôlée par la diffusion moléculaire. En dehors de ces films, la turbulence de l'écoulement assure l'homogénéité du milieu (Fig 2.4).

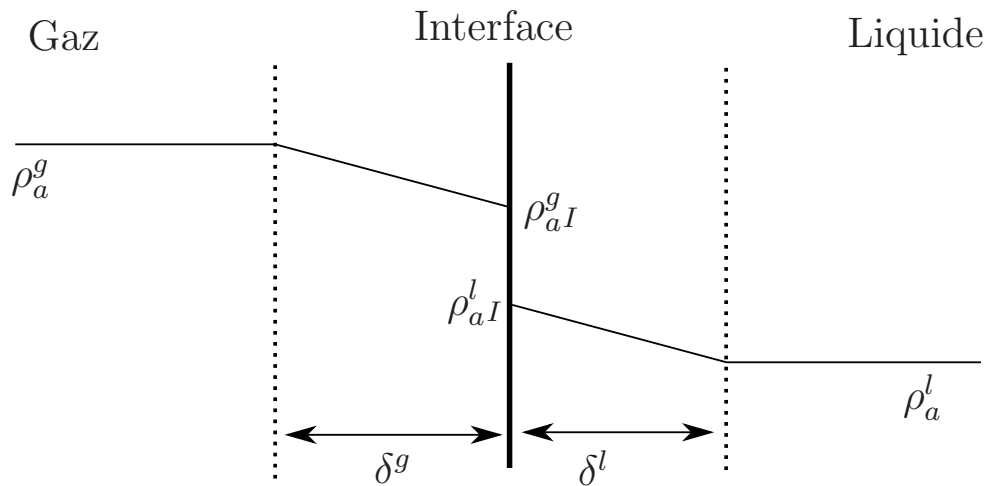


FIGURE 2.4 – Illustration du modèle du double film

Le transfert de masse peut être décomposé entre les deux films, correspondant alors

## 2.2. Équation de conservation de la masse

---

aux transferts de masse de chacune des phases vers l'interface,  $m_a^{g+}$  et  $m_a^{g-}$ .

$$\begin{cases} m_a^{g+} = K_a^l (\rho_a^l - \rho_{aI}^l) \\ m_a^{g-} = K_a^g (\rho_a^g - \rho_{aI}^g) \end{cases} \quad (2.30)$$

avec  $K_a^k$  la vitesse de transfert de masse de la phase  $k$  vers l'interface et  $\rho_{aI}^k$  les concentrations à l'interface supposées à l'équilibre thermodynamique.

D'après la loi de Henry formulée en 1803 [201], la concentration à saturation  $\rho_{aI}^l$  est reliée à la pression partielle d'air dans la phase gazeuse par la constante de Henry  $H_e$ .

$$\rho_{aI}^l = H_e p_{aI}^g \quad (2.31)$$

Cette constante  $H_e$  dépend de la température et de la pression du mélange, ainsi que de la nature du gaz. Par souci de simplification, nous la considérerons constante, et égale à la constante de Henry définie pour l'air (étant lui-même un mélange) dans des conditions standards de pression et de température (**H. 14**).

$$H_e \approx 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

Dans le modèle de Whitman, les coefficients de transfert  $K_a^k$  dépendent de l'épaisseur de chacun des films. D'autres théories proposent des expressions de ces coefficients différentes. On peut notamment citer les modèles de pénétration de Higbie [104] ou le modèle de Danckwerts [49]. L'expression de ces coefficients repose généralement sur la connaissance du coefficient de diffusion moléculaire. La résistivité au transfert côté gaz ( $\frac{1}{K_a^g}$ ) étant bien inférieure à celle du liquide, elle est souvent négligée. Le coefficient de transfert côté liquide est quant à lui obtenu de façon empirique sur des cas particuliers (comme les colonnes à garnissage par exemple [99]). Nous prendrons comme valeur de référence celles obtenues pour des colonnes à bulle [197].

$$K_a^g \rightarrow \infty \quad , \quad K_a^l = C_a K_{a0}^l \quad \text{avec} \quad K_{a0}^l = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad C_a \geq 0 \quad (2.32)$$

Finalement l'expression du transfert de masse retenue pour notre étude peut s'écrire

(H. 13) :

$$\dot{m}_a^g = C_a K_{a0}^l (\rho_a^l - H_e p_a^g) \quad (2.33)$$

Nous pouvons noter la similarité des termes de transferts de masse d'air et d'eau à l'interface en écrivant, à l'aide de la loi des gaz parfaits, le terme de condensation/vaporisation de l'eau (Eq. 2.28) :

$$\dot{m}_e^g = C_e K_e^l \left( \rho_{sat}(T^l) - \frac{1}{r_e \sqrt{T^g T^l}} p_e^g \right) \quad \text{Avec} \quad K_e^l = \sqrt{\frac{r_e T^l}{2\pi}} \quad (2.34)$$

avec un coefficient de transfert de masse valant approximativement,  $K_e^l = 1,5 \cdot 10^2 m \cdot s^{-1}$  à  $20^\circ C$ .

#### 2.2.4. Evaluation de l'importance des termes pour nos applications

Les modèles de fermeture présentés précédemment nous ont permis de représenter une partie des termes de l'équation de conservation de masse (Eq (2.6) et (2.11)). Les ordres de grandeur de chacun d'eux permet alors d'évaluer leur importance dans notre type d'application.

En se plaçant dans le mouvement particulière d'une bulle dans l'écoulement, la variation de masse volumique est à la fois liée à la variation de volume du milieu gazeux, à la diffusion moléculaire et aux transferts de masses. Afin de caractériser la prédominance de chacun de ces termes, nous considérons les nombres adimensionnels suivants :

- Le nombre de Péclet massique  $P_e^{mk}$ , caractérisant le rapport entre la convection et la diffusion.
- le nombre de Sherwood  $S_{h_i}^k$ , caractérisant le rapport entre le transfert de masse et la diffusion.
- le nombre de Stanton  $S_{t_i}^k$ , le rapport entre la convection de la bulle et le transfert de masse.

## 2.2. Équation de conservation de la masse

---

$$P_e^{mk} = \frac{L_c u_c}{D_d^k} \quad S_{hi}^k = \frac{K_i L_c}{D_{di}^k} \quad S_{ti}^k = \frac{K_i}{u_c} \quad (2.35)$$

avec  $L_c$  et  $u_c$  une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement.

Pour nos estimations, nous considérerons une longueur caractéristique basée sur une taille de bulle  $L_c \approx 10^{-5}m$  pour la phase gazeuse et sur la corde des profils simulés,  $L_c \approx 0,1m$  pour la phase liquide. Les transferts de masse étant un phénomène lié à l'interface, la vitesse caractéristique utilisée reposera sur la vitesse de croissance des bulles estimée à  $u_c \approx 0.1m.s^{-1}$  (cette valeur étant particulièrement difficile à déterminer expérimentalement pour des écoulements turbulents). Nous rappelons de même les autres constantes nécessaires à l'établissement de ces ordres de grandeurs :

$$\begin{aligned} D_{da}^l &\approx 10^{-9}m^2.s^{-1} & D_{da}^g &\approx 10^{-5}m^2.s^{-1} \\ K_e &= 1,5.10^2m.s^{-1} & K_a &\approx 2.10^{-4}m.s^{-1} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de calculer :

$$\begin{aligned} P_e^{mg} &\approx 0.1 & P_e^{ml} &\approx 10^3 \\ S_{te}^g &\approx 300 & S_{ta}^g &\approx 2.10^{-5} \\ S_{he}^g &= 1,5.10^2 & S_{ha}^g &= 2.10^{-4} \end{aligned}$$

La diffusion moléculaire au sein de la phase gazeuse semble donc plus importante que la vitesse d'expansion de la bulle. Dès lors la masse volumique au sein des bulles peut être supposée homogène. En ce qui concerne la phase liquide, la contribution de la diffusivité moléculaire par rapport à la convection est faible. Ce mécanisme semble dès lors pouvoir être négligé dans la phase liquide. De même, la vaporisation/condensation de l'eau est un phénomène beaucoup plus rapide que la dissolution ou le dégazage de l'air. Ce dernier semble également pouvoir être négligé.

Avec ces approximations, les vitesses des deux espèces dans chacune des phases sont égales à la vitesse d'ensemble  $\mathbf{u}_M^k$  (dans la phase gazeuse par une vitesse de diffusion très importante, dans la phase liquide par l'absence de ce phénomène). Les termes de diffusions apparaissant dans les équations peuvent alors être négligés.

## 2.3. Équation de conservation de quantité de mouvement

### 2.3.1. Equation de conservation de quantité de mouvement pour une phase

Le bilan des forces appliqué sur un volume élémentaire d'une phase décrit l'évolution de la quantité de mouvement par rapport à différentes forces apparaissant dans le terme de droite de l'équation (2.36) :

- Les forces de pression.
- Les effets visqueux.
- Les forces volumiques, limitées ici aux forces gravitationnelles (**H. 6**).
- Les transferts de quantité de mouvement aux interfaces.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k] + \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k \mathbf{u}_M^k] = -\nabla [\chi_k p_M^k] + \nabla \cdot [\chi_k \underline{\boldsymbol{\tau}}^k] + \chi_k \rho_M^k \mathbf{g} + \mathbf{L}^k \quad (2.36)$$

Les transferts de quantité de mouvement aux interfaces sont liés à la transmission des efforts de pression, de viscosité et de transfert de masse aux interfaces.

$$\mathbf{L}^k = [-p_M^k \mathbf{I} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^k + \rho_M^k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_M^k) \mathbf{u}_M^k] \cdot \mathbf{n}_I^k \delta_I \quad (2.37)$$

### 2.3. Équation de conservation de quantité de mouvement

---

La déformation des structures diphasiques génère un travail des forces interfaciales  $\mathbf{f}_I$ . Une partie des transferts de quantité de mouvement est donc accumulée par l'interface.

$$\sum_k \mathbf{L}_k = \mathbf{f}_I \delta_I \quad (2.38)$$

#### 2.3.2. Equation de conservation de quantité de mouvement pour le mélange homogène

Les équations (2.36) décrivent l'évolution de la quantité de mouvement pour chacune des phases. La somme de ces deux équations permet alors de considérer un unique fluide représentant à la fois la partie liquide et gazeuse du milieu (fluide homogène). Une pression et un tenseur des contraintes visqueuses pour le milieu diphasique sont alors définis :

$$p_M = \chi_l p_M^l + \chi_g p_M^g \quad \text{et} \quad \underline{\boldsymbol{\tau}} = \chi_l \underline{\boldsymbol{\tau}}^l + \chi_g \underline{\boldsymbol{\tau}}^g \quad (2.39)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement pour le **fluide homogène** incorpore dès lors la relation de saut définie auparavant (Eq. (2.38)) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_M \mathbf{u}_M] + \nabla \cdot [\rho_M \mathbf{u}_M \mathbf{u}_M] = - \sum_k \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k \mathbf{u}_R^k] - \nabla p_M + \nabla \cdot [\underline{\boldsymbol{\tau}}] + \rho_M \mathbf{g} + \mathbf{f}_I \delta_I \quad (2.40)$$

Dans un écoulement confiné horizontal, les forces de gravité s'exerçant sur l'ensemble du milieu diphasique sont compensées par les pressions hydrostatiques appliquées en paroi et peuvent donc être négligées. En revanche, les masses volumiques des deux phases étant différentes, ces forces peuvent avoir un rôle dans la vitesse de glissement entre les phases.

L'utilisation de la vitesse d'ensemble fait apparaître un terme lié aux vitesses de glissement,  $\mathbf{u}_R^k$ . La résolution de deux équations de conservation de quantité de mouvement, pour le milieu homogène et pour une des deux phases, est donc nécessaire.

Pour fermer ces équations, les pressions, les forces de tension de surface et les tenseurs de contraintes visqueuses doivent être modélisés. La pression sera déterminée dans un second temps à travers les lois d'états. Nous allons maintenant présenter les modélisations retenues pour les deux autres termes.

### 2.3.3. Modèle de fermeture

#### 2.3.3.1. Force interfaciale

La cohésion et la répulsion des molécules de part et d'autres de l'interface génèrent une énergie surfacique  $\sigma$ , appelée tension de surface. Les forces surfaciques qui en résultent ( $\mathbf{f}_I$  exprimées en  $N.m^{-2}$ ) peuvent s'exprimer par rapport à la variation surfacique de la tension de surface et à la courbure de l'interface.

$$\mathbf{f}_I = \nabla_S \sigma - (\nabla_S \cdot \mathbf{n}_I^k) \sigma \mathbf{n}_I^k \quad (2.41)$$

avec  $\nabla_S$  le gradient surfacique sur l'interface. Cette relation peut être prise indifféremment pour la phase gazeuse ou la phase liquide.

Le premier terme de cette expression correspond à la variation de l'énergie de surface le long de l'interface.

- L'énergie de surface étant caractéristique des forces de répulsion et d'attraction entre deux milieux, elle varie en fonction de la composition des deux phases. Cependant, les énergies de surface d'une interface séparant un milieu liquide constitué essentiellement d'eau, d'une phase gazeuse contenant de l'air ou de la vapeur sont sensiblement les mêmes à température ambiante. Dans notre cas d'étude, nous ne considérerons alors qu'une seule énergie (celle correspondant au couple eau liquide /air à température et pression ambiante) quelques soient les fractions massiques des milieux.

$$\sigma_{\text{eau liquide/air}} = 0.078 N.m^{-1} \quad \sigma_{\text{eau liquide/vapeur}} = 0.072 N.m^{-1}$$

- De plus, l'énergie de tension de surface est dépendante de la température et de la pression. Nous nous placerons néanmoins dans l'hypothèse où ces fluctuations le long de l'interface sont suffisamment faibles pour pouvoir les négliger.

Ces deux hypothèses nous permettent de considérer une énergie de surface constante dans tout le milieu (**H. 2**).

### 2.3. Équation de conservation de quantité de mouvement

Le second terme de l'expression de la force interfaciale correspond à la courbure moyenne de l'interface,  $H_I^k$  pouvant s'exprimer en fonction des rayons de courbures principaux,  $R_1$  et  $R_2$ , pris algébriquement sur la normale  $\mathbf{n}_I^k$  (figure 2.5).

$$(\nabla_S \cdot \mathbf{n}_I^k) = -2H_I^k \quad (2.42)$$

$$|H_I^k| = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.43)$$

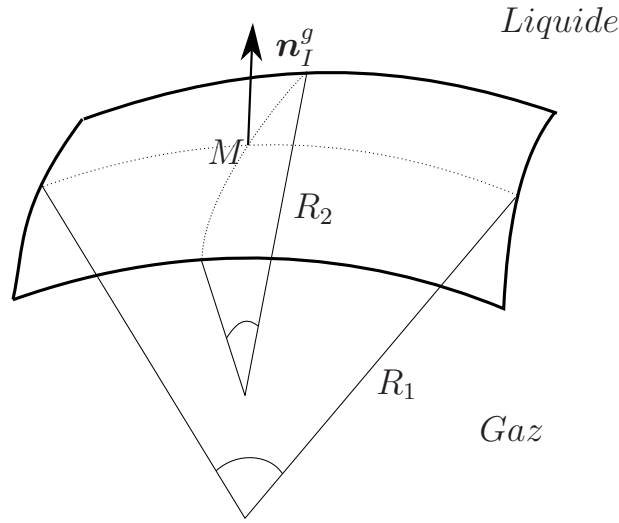


FIGURE 2.5 – Caractérisation de la courbure de l'interface

Pour notre étude, la tension de surface étant considérée constante, les forces interfaciales seront limitées à ce deuxième terme.

$$\mathbf{f}_I = 2\sigma H_I^g \mathbf{n}_I^g = 2\sigma H_I^l \mathbf{n}_I^l \quad (2.44)$$

La condition d'équilibre mécanique de l'interface est définie par la loi de Laplace. Cette relation d'équilibre s'obtient en projetant la relation de saut (2.38) sur un vecteur normal à l'interface et en ne considérant que les efforts statiques.

$$p_M^l - p_M^g + 2\sigma H_I^g = 0 \quad (2.45)$$

L'intérieur de l'inclusion est donc, dans des conditions d'équilibre, toujours en



surpression par rapport au milieu extérieure.

### 2.3.3.2. Tenseur de viscosité

Dans la plupart des simulations numériques, le comportement des fluides est considéré comme newtonien (**H. 7**). Cette hypothèse suppose que les contraintes visqueuses peuvent être décomposées en deux parties, la première proportionnelle aux taux de déformations volumiques et la seconde proportionnelle aux taux de déformations linéiques ou angulaires.

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}^k = \eta_M^k \nabla \cdot [\mathbf{u}_M^k] + 2\mu_M^k \underline{\mathbf{D}}_M^k \quad (2.46)$$

avec  $\eta_M^k$  la viscosité de dilatation,  $\mu_M^k$  la viscosité dynamique, et  $\underline{\mathbf{D}}_M^k$  le tenseur des déformations. On associe généralement cette formulation à l'hypothèse de Stokes reliant les deux viscosités.

$$\eta_M^k = -\frac{2}{3}\mu_M^k \quad (2.47)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses peut donc s'exprimer à l'aide du taux de cisaillement du fluide et d'une viscosité dynamique  $\mu_M^k$ .

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_i^k = \mu_i^k \left( \nabla \mathbf{u}_i^k + (\nabla \mathbf{u}_i^k)^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot [\mathbf{u}_i^k] \mathbf{I} \right) \quad (2.48)$$

Pour le fluide binaire les viscosités cinématique et dynamique du milieu peuvent s'exprimer à l'aide de celle des composantes du milieu.

$$\nu_M^k = Y_a^k \nu_a^k + Y_e^k \nu_e^k \quad \text{et} \quad \mu_M^k = \rho_M^k \nu_M^k$$

Dans cette étude, l'extension du terme de viscosité au milieu diphasique a été réalisée en exprimant la viscosité dynamique du mélange comme :

$$\mu_M = \sum_k \chi_k \mu_M^k$$

Le tenseur des contraintes visqueuses du milieu diphasique peut alors s'écrire comme

### 2.3. Équation de conservation de quantité de mouvement

---

une contribution de la vitesse d'ensemble et la vitesse de glissementphasique.

$$\underline{\tau} = \mu_M \left( \nabla \mathbf{u}_M + (\nabla \mathbf{u}_M)^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot [\mathbf{u}_M \underline{\mathbf{I}}] \right) + \sum_k \chi_k \mu_M^k \left( \nabla \mathbf{u}_R^k + (\nabla \mathbf{u}_R^k)^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot [\mathbf{u}_R^k \underline{\mathbf{I}}] \right)$$

#### 2.3.4. Evaluation de l'importance des termes pour nos applications

Comme précédemment, il est nécessaire d'évaluer l'importance de chacun des termes décrit par l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Pour cela, les nombres adimensionnels correspondant à chacun des phénomènes sont définis :

- Le nombre de Weber  $W_e$  caractérise le rapport des forces d'inertie et de la tension superficielle.
- Le nombre de Reynolds  $R_e$  permet de quantifier le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses à partir d'une longueur  $L_c$ , d'une vitesse  $u_c$  et la viscosité du fluide  $\nu_c$  caractéristiques de l'écoulement.
- Le nombre de Reynolds particulière  $R_e^p$ , tout comme le nombre de Reynolds, établit un rapport entre viscosité et inertie basé cette fois sur les dimensions de la phase dispersée ainsi que sur les vitesses relatives entre les deux phases.

$$W_e = \frac{\rho_M^l u_c^2 L_c^2}{2\sigma R_c} \quad R_e = \frac{L_c u_c}{\nu_c} \quad R_e^p = \frac{R_c u_R}{\nu_c} \quad (2.49)$$

Pour la phase liquide, la longueur caractéristique de l'écoulement est basée sur la corde des hydrofoils étudiés ( $L_c \approx 0.1m$ ) la vitesse est quand à elle établie à partir des conditions hydrodynamiques de nos simulations ( $u_c \approx 10m.s^{-1}$ ). Pour nos ordres de grandeurs, la vitesse relative entre les phases sera approchée à  $u_R \approx 0.1m.s^{-1}$  et la dimension caractéristique de la phase dispersée sera encore une fois établie à partir du rayon des bulles ( $R_c \approx 10^{-5}m$ ). Les constantes physiques sont prises égales à :

$$\rho_M^l = 1000kg.m^{-3} \quad \sigma = 0.078N.m^{-1} \quad \nu_c = 10^{-6}Pa.s$$

Les nombres adimensionnels obtenus sont alors de :

$$W_e \approx 6.10^8 \quad R_e \approx 10^6 \quad R_e^p \approx 1 \quad (2.50)$$

Le nombre de Reynolds de nos applications est situé aux alentours de  $10^5 - 10^6$  correspondant à un comportement turbulent. La mesure de la vitesse relative entre les phases est délicate et peu d'études expérimentales parviennent à la quantifier pour des écoulements cavitants. La valeur considérée pour l'évaluation des ordres de grandeur est donc une estimation. La plupart des modèles diphasiques numériques utilisés dans l'industrie utilisent une condition de non glissement entre les phases ( $u_R \approx 0$ ). Néanmoins, en comparant les bulles à des sphères rigides, un nombre de Reynolds particulière proche de 0 confirmerait l'hypothèse d'une vitesse relative entre les phases faible. Le lecteur pourra trouver plus de détails en annexe A.2.

Le nombre de Weber obtenu pour nos écoulements nous indiquent que les forces de tension de surface influencent faiblement les termes de convection. Néanmoins, la relation de saut de quantité de mouvement (Eq. (2.38)) relie également ce phénomène aux pressions du milieu. Son influence sur la dynamique de l'écoulement n'est donc pas nécessairement nulle comme nous le verrons par la suite (cf. 3.3.1.).

## 2.4. Equation de conservation de l'énergie

Nous avons donc explicité les équations de conservations de masse et de quantité de mouvement pour chacune des phases et pour le fluide homogène. Les dernières équations de conservation portent sur l'énergie du milieu.

### 2.4.1. Evolution de la température pour une phase

L'énergie interne massique d'un fluide,  $e$ , représente l'énergie des particules au niveau moléculaire, en considérant à la fois leurs mouvements et les interactions inter-particulaires. L'enthalpie massique,  $h$  ajoute à cette énergie interne le travail des forces de pression.

## 2.4. Equation de conservation de l'énergie

---

$$h_i^k = e_i^k + \frac{p_i^k}{\rho_i^k} \quad (2.51)$$

Pour étendre ces grandeurs sur l'ensemble d'une phase, l'énergie interne  $e_M^k$  et l'enthalpie  $h_M^k$  massiques sont définies dans notre approche par la somme des énergies de chaque élément pondéré par le rapport des masses volumiques :

$$e_M^k = Y_a^k e_a^k + Y_e^k e_e^k \quad \text{et} \quad h_M^k = Y_a^k h_a^k + Y_e^k h_e^k \quad (2.52)$$

L'enthalpie massique de chaque espèce est reliée à la variation de température grâce à la capacité calorifique massique  $c_p$  et à une enthalpie massique pour une température de référence.

$$h_i^k = h_i^k(T_{sat}) + c_{p_i}^k (T^k - T_{sat}) \quad (2.53)$$

Une formulation similaire peut-être obtenue pour chacune des phases :

$$h_M^k = h_M^k(T_{sat}) + c_{p_M}^k (T^k - T_{sat}) \quad \text{avec} \quad c_{p_M}^k = Y_e^k c_{p_e}^k + Y_a^k c_{p_a}^k \quad (2.54)$$

L'équation de conservation de l'énergie permet d'établir celle régissant l'évolution de température dans le milieu. Ne résolvant pas, dans nos simulations **U-RANS**, l'équation de conservation de l'énergie (cf 3.1.2.1.), l'équation décrivant l'évolution de la température du milieu diphasique ne sera pas développée dans ce manuscrit. Son obtention se fait en définissant dans un premier temps les grandeurs thermodynamiques associées au fluide homogène puis en sommant les équations de conservation obtenues pour chacune des phases (Eq. (2.55)). La démarche et les différents développements correspondants sont rappelés en annexe (cf A.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k c_{p_M}^k (T^k - T_{sat})] &= -\nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k c_{p_M}^k (T^k - T_{sat})] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k h_M^k(T_{sat})] - \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k h_M^k(T_{sat})] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k p_M^k] + \mathbf{u}_M^k \cdot \nabla [\chi_k p_M^k] - \nabla \cdot [\chi_k \mathbf{q}^k] + (\chi_k \boldsymbol{\tau}^k) : \nabla \mathbf{u}_M^k \\ &\quad + \left[ \dot{m}_M^k \left( h_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I \end{aligned} \quad (2.55)$$

avec  $\mathbf{q}^k$  le flux de chaleur dans le milieu.

L'évolution temporelle de la température dans chacune des phases dépend donc :

- de la convection par les vitesses d'ensembles et de glissement,
- de l'évolution des pressions et des masses volumiques,
- des forces visqueuses et de la diffusion de chaleur,
- des échanges d'énergie aux interfaces.

## 2.4.2. Modèles de fermetures

### 2.4.2.1. Lois d'état

L'utilisation de lois d'état permet de déterminer l'ensemble des grandeurs thermodynamiques (pression  $p$ , température  $T$ , masse volumique  $\rho$ , énergie interne  $e$ , entropie  $s$  - cf A.3.2, ...) d'un fluide à partir de deux d'entre elles. Couplées aux autres équations de conservation, les équations de conservation de l'énergie fournissent alors les derniers éléments nécessaires à la caractérisation thermodynamique des phases. Les pressions et températures de chaque phase sont définies par les relations :

$$p_M^k = \rho_M^k \left( \frac{\partial e_M^k}{\partial \rho_M^k} \right)_s \quad \text{et} \quad T^k = \left( \frac{\partial e_M^k}{\partial s_M^k} \right)_{\rho_M^k} \quad (2.56)$$

Ces relations représentent la base des lois d'états permettant de fermer le système d'équation précédent.

Une loi d'état permet d'établir une relation entre les grandeurs thermodynamiques du fluide. Les plus couramment rencontrées dans la littérature sont :

- Fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$  - peut concerner les **phases gazeuse et liquide**)
- Loi des gaz parfaits (peut concerner la **phase gazeuse**)
- Loi de Tait (peut concerner la **phase liquide**)
- Loi de Van der Walls [127] (peut concerner la **phase gazeuse**)

## 2.4. Equation de conservation de l'énergie

---

- Loi des gaz raides [194] (peut concerner les **phases liquide et gazeuse**)

Chacune de ces lois partent de considérations distinctes et comportent des domaines de validité différents. Dans ce travail, nous considérerons la loi d'état des gaz parfaits pour la phase gazeuse (**H. 8**), et la loi de Tait pour la phase liquide (**H. 9**), ces deux lois étant couramment utilisées pour ce type d'application.

### Dans la phase gazeuse :

Le modèle des gaz parfaits considère uniquement l'agitation moléculaire des gaz en négligeant les interactions et les chocs entre particules. Dans cette approche, les énergies internes et enthalpies massiques ne dépendent que de la température du milieu. Une relation entre pressions partielles, masses volumiques et température découle également de cette loi.

$$\frac{de_i^g}{dT^g} = c_{v_i}^g \quad \frac{dh_i^g}{dT^g} = c_{p_i}^g \quad p_i^g = \rho_i^g r_i T^g \quad i = \{e, a\} \quad (2.57)$$

avec  $r_i$  la constante spécifique du gaz de l'espèce  $i$ . La relation de Mayer permet de relier les coefficients calorifiques massiques à pression  $c_p$  et volume  $c_v$  constants.

$$c_{p_i}^g - c_{v_i}^g = r_i \quad i = \{e, a\} \quad (2.58)$$

Dans ce modèle, la pression du mélange est égale à la somme des pressions partielles.

$$p_M^g = p_a^g + p_e^g \quad (2.59)$$

La relation établie pour les espèces en (2.57) peut être étendue au mélange de gaz en lui attribuant une constante spécifique  $r_M$  :

$$p_M^g = \rho_M^g r_M T^g \quad \text{avec} \quad r_M = Y_a r_a + Y_e r_e \quad (2.60)$$

### Dans la phase liquide :

La loi de Tait provient d'une hypothèse réalisée sur la loi de Kirkwood. Celle-ci permet de relier les variations de pression aux fluctuations de masse volumique de

l'eau.

$$K_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p_e^l} \right)_s = \frac{1}{n(s) (p_e^l + B(s))} \quad (2.61)$$

avec  $K_s$  Le coefficient de compressibilité isentropique,  $V$  le volume de liquide considéré,  $n$  et  $B$  des coefficients caractéristiques du fluide.

La variation des coefficients caractéristiques du fluide en fonction de l'entropie du milieu est supposée faible et ceux-ci dès lors sont considérés comme constants. La loi de Tait est par la suite obtenue en intégrant la relation (2.61) à l'aide de cette hypothèse.

$$\frac{p_e^l + B}{p_0 + B} = \left( \frac{\rho_e^l}{\rho_0} \right)^n$$

avec pour l'eau liquide  $n = 7.15$  et  $B = 305MPa$  et  $p_0 = 101325Pa$  et  $\rho_0 = 1000kg.m^{-3}$ , respectivement une pression et une masse volumique de référence.

L'air étant présent dans la phase liquide sous forme dissoute, sa contribution dans les efforts de pression et sur les variations de température sont faibles et sera négligée.

$$\frac{p_M^l + B}{p_0 + B} = \left( \frac{\rho_M^l}{\rho_0} \right)^n \quad (2.62)$$

A noter que cette dernière équation établit une relation directe entre la masse volumique et la pression sans nécessiter la connaissance de la température. L'utilisation de ce modèle permet ainsi de s'affranchir de la résolution de l'équation de la conservation de l'énergie dans le cas d'un milieu purement liquide.

La figure 2.6 montre que l'évolution de la masse volumique selon cette loi d'état est faible sur une grande plage de pression [ $1 - 10^7 Pa$ ]. En première approximation, le liquide est donc généralement considéré comme incompressible dans les simulations **U-RANS**. En revanche, la compressibilité du fluide est une condition nécessaire à l'obtention d'ondes acoustiques et nous ne pourrions pas faire cette hypothèse pour la simulation de l'implosion de bulles.

L'utilisation de la loi des gaz parfaits et le fait de négliger la contribution de l'air

## 2.4. Equation de conservation de l'énergie

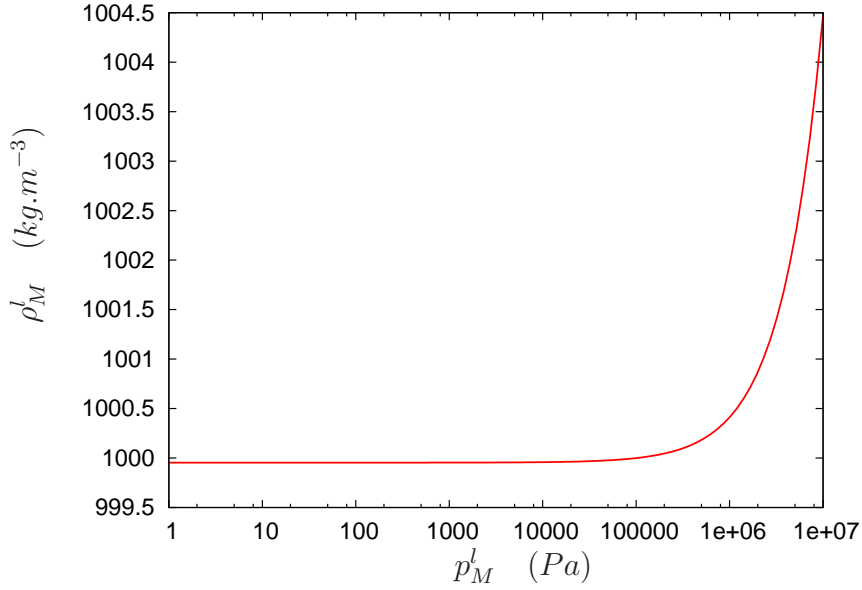


FIGURE 2.6 – Variation de la loi de la masse volumique en fonction de la pression avec la loi de Tait -  $\rho_0 = 1000 kg \cdot m^{-3}$  et  $p_0 = 101325 Pa$

dans le liquide (pour l'aspect énergétique) permet de respecter les définitions de l'énergie interne et de l'enthalpie pour le mélange données précédemment (Eq. (2.52)). En effet, ces lois d'états ne font pas intervenir de termes d'interactions entre les deux espèces.

### 2.4.2.2. Flux de chaleur

Au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, Fourier [74] proposa une loi permettant de modéliser la diffusion de la chaleur. Cette loi considère le flux de chaleur comme étant proportionnel au gradient de température. Il a donc tendance à homogénéiser la température du milieu. Le coefficient de proportionnalité, appelé conductivité thermique, est une caractéristique du milieu.

$$\mathbf{q}^k = -\lambda_M^k \nabla T^k \quad (2.63)$$

avec  $\lambda_M^k$ , la conductivité thermique du milieu définie par la conductivité de chaque espèce  $\lambda_M^k = Y_a \lambda_a^k + Y_e \lambda_e^k$ .

Les conductivités thermiques prises généralement à température et pression ambiante sont listées ci-dessous [79]. La conductivité thermique associée à la présence de l'air dans



le liquide est négligée.

$$\lambda_a^l \approx 0 \quad \lambda_e^l = 0.6W.m^{-1}.K^{-1} \quad \lambda_M^l \approx \lambda_e^l \quad (2.64)$$

$$\lambda_e^g = 2,4.10^{-2}W.m^{-1}.K^{-1} \quad \lambda_a^g = 2,5.10^{-2}W.m^{-1}.K^{-1} \quad (2.65)$$

La diffusivité thermique,  $D_{th}$ , est une grandeur physique caractérisant la capacité d'un matériau à transmettre un signal de température. Elle est reliée à la conductivité thermique par la relation suivante :

$$D_{th_i}^k = \frac{\lambda_i^k}{\rho_i^k c_{p_i}^k} \quad (2.66)$$

Pour nos applications, on obtient dès lors, en utilisant les grandeurs associées à l'espèce eau :

$$D_{th_M}^l \approx 1,5.10^{-7}m^2.s^{-1} \quad D_{th_M}^g \approx 8.10^{-4}m^2.s^{-1}$$

### 2.4.2.3. Changement de phase

Les transferts de masse à l'interface pour l'eau et pour les gaz incondensable correspondent à deux phénomènes physiques différents qui sont respectivement :

- Le **changement d'état** : rupture/création de liaisons entre les molécules d'eau.
- La **dissolution/dégazage** : rupture/création de liaisons moléculaires entre les molécules d'eau (solvant) et d'air (soluté).

Dans les deux cas, la transition liquide/gaz se caractérise par une variation d'enthalpie appelée 'chaleur latente de vaporisation'  $L_e$  pour le changement de phase et 'enthalpie de dissolution'  $L_a$  pour le transport de gaz.

$$L_e = h_e^g(T_{sat}) - h_e^l(T_{sat}) \quad \text{et} \quad L_a = h_a^g(T_{sat}) - h_a^l(T_{sat}) \quad (2.67)$$

L'enthalpie de vaporisation dépend de la température du milieu. Pour notre étude, nous considérerons cependant que les variations de température sont suffisamment faibles pour les supposer constantes (**H. 14**). L'ordre de grandeur de l'enthalpie de dissolution de l'air (dioxygène/diazote) n'ayant pas été trouvé, nous utiliserons l'enthalpie de dissolution

## 2.4. Equation de conservation de l'énergie

---

du dioxyde de carbone pour l'évaluation des ordres de grandeurs, celle-ci pouvant ne pas être représentative de l'air (composé majoritairement de diazote et de dioxygène).

$$L_e = 2,5 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1} \quad L_a \approx 5 \cdot 10^5 \text{ J.kg}^{-1}$$

### 2.4.2.4. Echange d'énergie à l'interface

Les échanges d'énergies à l'interface sont générées à la fois par des effets mécaniques, thermiques et chimiques. L'étude des échanges d'entropie permet de proposer un modèle pour chacune de ces contributions. Dans notre étude, nous considérerons que les échanges aux interfaces s'opèrent de façon isentropique (**H. 5**). Le lecteur pourra trouver en annexe une analyse plus complète portée sur la création d'entropie au sein du milieu diphasique (cf A.3.2). Nous listons ici les différentes **conséquences** induites par l'hypothèse d'isentropie des échanges à l'interface.

#### Condition mécanique :

Afin de supprimer la génération d'entropie aux interfaces par l'effet des forces visqueuses, l'hypothèse de non glissement aux interfaces est nécessaire. Les vitesses tangentielles de l'interface et de chacune des phases sont donc égales :

$$\mathbf{u}_M^{g\ t} = \mathbf{u}_M^{l\ t} = \mathbf{u}_I^t \quad (2.68)$$

La vitesse d'interface peut dès lors être déterminée à partir de la vitesse de chacune des phases et des transferts de masse.

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_M^g + \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^g} \mathbf{n}_I^g \quad (2.69)$$

#### Condition thermique :

A l'image des transferts de masse pour l'air (cf 3.3.2.1.), les échanges de chaleur à l'interface peuvent être modélisées par la présence de deux films situés de part et d'autre de l'interface. Cette approche conduit à l'obtention d'un coefficient d'échange thermique pour chaque phase  $U_T^k$ , exprimant la capacité d'un fluide à

transmettre la température dans ce film.

Pour que les échanges à l'interface s'opèrent de façon isentropique, les échanges thermiques à l'interface peuvent correspondre à deux situations :

- le cas **adiabatique** où il n'y a pas d'échange de chaleur à l'interface.

$$U_T^k = 0$$

- le cas d'**équilibre thermique** où les échanges de chaleurs sont suffisamment rapides pour que les températures de l'interface et celle de la phase soient égales.

$$U_T^k \rightarrow \infty$$

### Condition chimique :

Cette dernière condition nécessite l'introduction de l'enthalpie libre  $g_M^k$ . Les transferts d'énergie à l'interface peuvent se faire de façon isentropique si :

- le terme de transfert de masse est nul ( $\dot{m}_i^k = 0$ ), ce qui revient à considérer un coefficient d'échange massique nulle ( $C_i = 0$ ).
- ou si la différence d'enthalpie libre entre les phases compensent les effets visqueux et les transferts de masse. (cf A.3.3.3.)

A partir de ces trois conditions (mécanique, thermique et chimique), il est possible de trouver l'expression du terme d'échange de l'équation (2.55) en fonction des variations des masses volumiques et de la force interfaciale (cf A.3.2).

$$\left[ \dot{m}_M^k \left( h_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I = \frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \frac{\rho_M^g \rho_M^l}{\rho_M^l - \rho_M^g} \mathbf{f}_I \cdot \mathbf{n}_I^g \delta_I \quad (2.70)$$

### 2.4.3. Evaluation de l'importance des termes pour nos applications

L'évolution de la température est donc régie par de nombreux phénomènes. L'évaluation de l'ordre de grandeur de chacun d'entre eux est donc important si l'on souhaite simplifier certains termes. Pour cela, les nombres adimensionnels suivants sont définis :

- Le nombre de Péclet thermique,  $P_e^{tk}$  permet de caractériser le transport de chaleur par convection de celui effectué par diffusion.
- Le nombre d'Eckert  $E_c$ , définit le rapport entre l'énergie cinétique d'un écoulement et son énergie interne.
- Le nombre de Jakob,  $J_a$  représente le rapport entre la chaleur sensible et la chaleur latente du fluide.
- Le nombre de cavitation  $\sigma_c$  décrit le rapport entre la pression locale et la pression dynamique.

$$\begin{aligned}
 P_e^{tk} &= \frac{L_c u_c}{D_{th_M}^k} & E_c &= \frac{u_c^2}{c_{p_M}^k \Delta T} \\
 J_a &= \frac{c_{p_M}^l \Delta T}{L_e} & \sigma_c &= \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_M^l u_c^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

Encore une fois, l'obtention des ordres de grandeur des différentes variations est difficile à obtenir. Dès lors nous prendrons comme ordre de grandeur  $\Delta p = 50\,000 Pa$  et  $\Delta T = 1K$ . Comme précédemment les ordres de grandeurs pris pour nos estimations seront  $u_c \approx 10 m.s^{-1}$  et  $u_R \approx 0.1 m.s^{-1}$  et  $L_c = 0.1 m$  pour la phase liquide et  $L_c \approx 10^{-5} m$  pour la phase gazeuse.

Les autres grandeurs sont également rappelées :

$$\rho_M^l \approx 1000 kg.m^{-3} \qquad \rho_M^g \approx 10^{-2} kg.m^{-3}$$

$$c_{pa}^g = 1000 J.kg.K^{-1} \quad c_{pe}^g = 1850 J.kg.K^{-1} \quad c_{pe}^l = 4185 J.kg.K^{-1}$$

$$D_{thM}^l \approx 1,5.10^{-7} m^2.s^{-1} \quad D_{thM}^g \approx 8.10^{-4} m^2.s^{-1}$$

$$L_e = 2,5.10^6 J.kg^{-1} \quad L_a \approx 5.10^5 J.kg^{-1}$$

Au vu des différents ordres de grandeurs, la diffusivité thermique dans la phase liquide sera beaucoup plus faible que dans la phase gazeuse. On repère par une même couleur, les phénomènes physiques et les termes correspondants de l'équation (2.72).

$$P_e^{tg} \approx 10^{-1} \quad P_e^{tl} \approx 10^6$$

- Dans la phase gazeuse, la diffusivité thermique apparaît comme étant plus importante que la convection et la température de la bulle peut être considérée comme homogène.
- Pour la phase liquide, la diffusion de la température dans le milieu, sans être négligeable, est moins importante que les termes de convection.

L'évaluation des rapports entre la convection et les autres phénomènes liés à l'évolution de la température montre qu'ils sont négligeables (pour les variations considérées).

- Viscosité :  $\left(\frac{E_c}{Re}\right)^l \approx 10^{-8}$        $\left(\frac{E_c}{Re}\right)^g \approx 10^{-6}$
- Tension de surface :  $\frac{E_c}{We} \approx 10^{-8}$
- Transfert de masse (changement de phase et dissolution)  $J_a \approx 10^{-3}$
- Effet des variations de pression :  $\sigma_c E_c \approx 10^{-2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k c_{pM}^k (T^k - T_{sat})] &= -\nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k c_{pM}^k (T^k - T_{sat})] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k h_M^k (T_{sat})] - \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k h_M^k (T_{sat})] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k p_M^k] + \mathbf{u}_M^k \cdot \nabla [\chi_k p_M^k] - \nabla \cdot [\chi_k \mathbf{q}^k] + (\chi_k \underline{\boldsymbol{\tau}}^k) : \nabla \mathbf{u}_M^k \\
&\quad + \frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \frac{\rho_M^g \rho_M^l}{\rho_M^l - \rho_M^g} \mathbf{f}_I \cdot \mathbf{n}_I^g \delta_I
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Dans ces plages de données, la température des deux phases peut dès lors être considérée comme constante au premier ordre. Il faut noter dans le cadre d'événements extrêmes, comme pendant la phase d'implosion par exemple dans laquelle la vitesse d'interface peut aller jusqu'à la centaine de  $m.s^{-1}$ , que ces estimations ne sont plus nécessairement valides.

## 2.5. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter et modéliser la plupart des phénomènes pouvant se produire dans un écoulement cavitant **au niveau local** (au sens de la mécanique des milieux continus). Un système d'équations correspondant a pu être mis en place. Il comprend notamment :

- 1 équation de transport de l'interface (Eq. (2.2))
- 4 équations de conservation de masse (Eq. (2.6))
- 2 équations de conservation de la quantité de mouvement (Eq. (2.40))
- 2 équations d'évolution de la température (Eq. (2.55))

Ce système, comportant initialement 13 variables indépendantes, s'appuie sur différents modèles physiques comme les modèles de diffusions moléculaires, thermiques ou bien encore de changement de phase. La liste complète de ces considérations sont rappelés en début de chapitre (cf. 2.). Les relations de saut et les lois d'états permettent finalement de fermer le système (Eq. (2.20), (2.38), (A.21)).

L'approche du fluide homogène permet de remplacer une équation de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie (température) par celles obtenues pour le fluide binaire diphasique. Néanmoins, pour être totalement équivalent, le système homogène doit tout de même comporter 9 équations linéairement indépendantes issues des équations précédentes. L'intérêt de cette approche est alors de négliger certains termes dépendamment du cas d'étude et de modéliser le comportement de certains phénomènes (vitesse de glissement, diffusion,..). Ce travail de simplification s'effectuera avec la mise en place de la simulation **U-RANS** présentée au chapitre 3.

Ce chapitre nous a permis d'explicitier **les termes de saut aux interfaces**, comprenant notamment la tension de surface, et d'intégrer la **présence de l'air** dans les relations alors que les modèles généralement utilisés dans les approches **U-RANS** les négligent. Même si de nombreux phénomènes explicités dans ce chapitre seront au final négligés, il nous semblait important de comprendre à la fois l'origine et la manière dont ces termes peuvent influencer le milieu diphasique.

# Simulation d'un écoulement diphasique à l'aide d'un code URANS

## Sommaire

---

|   |     |
|---|-----|
| 3.1. Equations de conservation phasiques moyennées . . . . .  | 122 |
| 3.1.1. Définition des opérateurs de moyenne . . . . .   | 122 |
| 3.1.1.1. Hypothèse d'ergodicité . . . . .   | 123 |
| 3.1.1.2. Définition des grandeurs moyennées dans un milieu<br>diphasique . . . . .                            | 123 |
| 3.1.2. Système d'équations moyennées . . . . .  | 125 |
| 3.1.2.1. Simplifications à l'échelle du profil . . . . .  | 125 |
| 3.1.2.2. Equations de conservation moyennées . . . . .  | 126 |
| 3.2. Exemples de modèles de simulation des écoulements cavitants basés<br>sur une approche homogène . . . . . | 128 |
| 3.2.1. Utilisation d'une équation de transport du taux de vide . . . . .                                      | 128 |
| 3.2.1.1. Equation de transport de l'interface . . . . .   | 128 |
| 3.2.1.2. Modélisation des termes de condensation/vaporisation   | 130 |
| 3.2.2. Simulation reposant sur une modélisation des transferts de masse                                       | 133 |
| 3.2.2.1. Condition thermodynamique portant sur la célérité<br>du son . . . . .                                | 133 |
| 3.2.2.2. Lois d'état pour l'eau . . . . .   | 134 |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.3.     | Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide . . . . . | <b>137</b> |
| 3.3.1.   | Pression homogène avec prise en compte de l'interface . . . . .   | 138        |
| 3.3.1.1. | Application du théorème de Helmholtz-Hodge . . . . .  | 138        |
| 3.3.1.2. | Relation entre pression interfaciale et pressions phasiques moyennes . . . . .  | 141        |
| 3.3.2.   | Considération de l'air dans l'écoulement . . . . .  | 143        |
| 3.3.2.1. | Modélisation des termes de dissolution/dégazage . . . . .   | 144        |
| 3.3.2.2. | Loi d'état pour l'air . . . . .   | 145        |
| 3.4.     | Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air . . . . .                           | <b>146</b> |
| 3.4.1.   | Hypothèses et équivalences de la loi d'état . . . . .   | 149        |
| 3.4.1.1. | Equivalence de forme entre l'ancienne et la nouvelle loi d'état . . . . .   | 150        |
| 3.4.1.2. | Distinction des pressions phasiques . . . . .   | 151        |
| 3.4.2.   | Données expérimentales et topologie du milieu diphasique . . . . .  | 152        |
| 3.4.2.1. | Estimation de la quantité d'air présent dans l'écoulement . . . . .   | 153        |
| 3.4.2.2. | Données expérimentales sur les populations de bulles et considération sur la forme des inclusions . . . . .             | 154        |
| 3.4.3.   | Calibrage des lois d'états . . . . .  | 158        |
| 3.4.3.1. | Loi d'état <b>B-TMAI</b> . . . . .  | 159        |
| 3.4.3.2. | Loi d'état <b>B-STMA</b> . . . . .  | 166        |
| 3.5.     | Conclusion . . . . .  | <b>171</b> |

---

Au cours du chapitre précédent, un système d'équations régissant la dynamique de notre écoulement au niveau local a été mis en place. Les ordres de grandeur de certains termes de ces équations à l'échelle du profil ont également été établis. Dans cette section, nous allons maintenant présenter le formalisme **U-RANS**, permettant de simuler le comportement des écoulements industriels (Fig 3.1).

---

Nous présenterons également quelques modèles couramment utilisés dans l'industrie pour la simulation d'écoulements cavitants. Ils seront basés sur la considération d'un fluide homogène représentant les deux phases de l'écoulement.

Finalement, nous déterminerons une population de bulles à partir de la loi d'état barotrope proposée par Delannoy [50] en y incorporant la présence d'interface et de gaz dissous. Cette population servira à l'initialisation de la deuxième étape du calcul de l'intensité de cavitation (à partir du chapitre 4.).

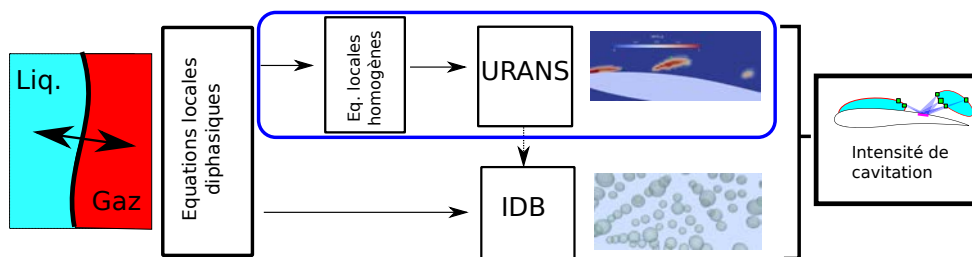


FIGURE 3.1 – Considérations effectuées dans le chapitre 3.

### 3.1. Equations de conservation phasiques moyennées

Afin de palier aux limitations de calcul, les formalismes **RANS/U-RANS** permettent de ne considérer qu'une partie de la dynamique de l'écoulement. En effet, celle-ci peut être décomposée en trois composantes : une définissant le comportement moyen, une correspondant à la dynamique de structures cohérentes et une partie fluctuante. Les simulations **RANS** considèrent uniquement la première tandis que les simulations **U-RANS** étendent leur résolution aux structures cohérentes. Dans ces deux méthodes, la partie fluctuante de l'écoulement n'est pas résolue et l'interaction entre cette dernière et la dynamique globale du fluide doit d'être modélisée.

#### 3.1.1. Définition des opérateurs de moyenne

La décomposition de la dynamique en trois composantes repose sur la définition d'un opérateur de moyenne. Ce dernier effectue des moyennes statistiques à partir de la réalisation d'un événement  $\phi$  répété un grand nombre de fois.

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n \quad (3.1)$$

En fonction du nombre d'événements considérés, l'opérateur de moyenne fournit une information plus ou moins détaillée de l'écoulement.

- Lorsque  $N \rightarrow \infty$ , l'opérateur de moyenne ne conserve que le comportement moyen du milieu.
- Lorsque l'on considère un nombre d'événements limité, il dépend des conditions d'observation et peut représenter une certaine dynamique de l'écoulement.
- Lorsque  $N = 1$ , l'information n'est pas moyennée et l'intégralité de l'information est conservée.

### 3.1.1.1. Hypothèse d'ergodicité

L'hypothèse d'ergodicité permet de relier cet opérateur de moyenne à un opérateur de moyenne temporelle. Pour qu'elle soit vérifiée, la période  $T$  choisie doit être assez grande pour que les échelles de l'agitation turbulente soient moyennées et assez petites pour que les structures basses fréquences soient prises en compte. Ceci implique une condition sur la fonction d'autocorrélation d'une grandeur  $\phi$  pour deux instants  $t$  et  $t'$  différents.

$$\int_t^{t+T} \int_{t'}^{t'+T} R_{\phi\phi}(M, \alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0 \quad (3.2)$$

avec  $R_{\phi\phi}(M, \alpha, \beta) = \langle (\phi(M, \alpha) - \langle \phi(M, \alpha) \rangle) (\phi(M, \beta) - \langle \phi(M, \beta) \rangle) \rangle$ , l'autocorrélation temporelle de la fonction  $\phi$ .

L'hypothèse d'ergodicité est souvent prise comme hypothèse de la simulation. On identifiera à partir de maintenant la moyenne  $\langle . \rangle$  à la moyenne temporelle.

$$\langle \phi(M, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(M, t) dt \quad (3.3)$$

L'opérateur ainsi défini respecte les axiomes de Reynolds, permettant par la suite de simplifier les équations moyennées de Navier-Stokes.

|  |  |
|--|--|
| – Invariance d'une constante   | $\langle \lambda \rangle = \lambda$  |
| – Linéarité entre les moyennes statistiques de deux fonction aléatoires  | $\langle \lambda\phi + \psi \rangle = \lambda\langle \phi \rangle + \langle \psi \rangle$  |
| – Idempotence  | $\langle \langle \phi \rangle \psi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle$  |
| – Commutation entre les opérateurs de dérivation spatiaux et temporelles | $\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial t} [\phi] \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} [\langle \phi \rangle] \\ \langle \nabla [\phi] \rangle &= \nabla [\langle \phi \rangle] \end{aligned}$ |

### 3.1.1.2. Définition des grandeurs moyennées dans un milieu diphasique

Dans le cas d'un écoulement diphasique, les événements sont liés à la phase dans laquelle ils se produisent. Les fonctions caractéristiques de chaque phase introduites au chapitre précédent (cf 2.1.1.) sont alors utilisées pour définir une moyenne phasique. Ainsi

pour un événement  $\phi_k$  défini sur la phase k, la moyenne phasique notée  $\overline{\phi_k}$  est telle que :

$$\alpha_k \overline{\phi_k} = \langle \chi_k \phi_k \rangle \quad (3.4)$$

avec  $\alpha_k = \langle \chi_k \rangle$  désignant le taux de présence moyenné de la phase k. Celui de la phase gazeuse est couramment appelé **taux de vide**.

La partie fluctuante  $\phi_k'$  de la variable  $\phi$  est définie comme la différence entre sa valeur et sa moyenne.

$$\chi_k \phi_k' = \chi_k (\phi_k - \overline{\phi_k}) \quad \text{avec} \quad \langle \chi_k \phi_k' \rangle = 0 \quad (3.5)$$

La moyenne de Favre, notée  $\widetilde{\phi}$ , définie à partir de celle de Reynolds en prenant en considération les fluctuations des masses volumiques du mélange. On notera,  $\phi_k''$ , la partie fluctuante correspondant à cette moyenne.

$$\widetilde{\phi^k} = \frac{\overline{\rho_M^k \phi^k}}{\rho_M^k} \quad (3.6)$$

$$\phi^{k''} = \chi_k (\phi^k - \widetilde{\phi^k}) \quad (3.7)$$

Dans un écoulement diphasique, les phénomènes se produisant à l'interface ne sont sensibles qu'aux valeurs de part et d'autres de cette dernière. Une moyenne interfaciale de l'événement  $\phi_I$  (définie sur l'interface), notée  $\overline{\overline{\phi}}$  est dès lors obtenue à l'aide du taux de présence interfaciale  $\zeta = \langle \delta_I \rangle$  telle que :

$$\zeta \overline{\overline{\phi}} = \langle \delta_I \phi_I \rangle \quad (3.8)$$

les fluctuations associées à cette moyenne seront notées  $\phi'''$  :

$$\phi_I''' = \delta_I (\phi_I - \overline{\overline{\phi}}) \quad (3.9)$$

Le chapitre précédent nous a permis d'introduire un formalisme monofluide considérant les caractéristiques des deux phases au sein d'un seul fluide homogène. Les moyennes des grandeurs représentant ce fluide peuvent être reliées aux moyennes phasiques correspondantes par les relations.

$$\overline{\phi_M} = \sum_k \alpha_k \overline{\phi^k} \quad (3.10)$$

$$\overline{\rho_M \widetilde{\phi_M}} = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k \widetilde{\phi^k}} \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Système d'équations moyennées

Nous allons maintenant appliquer cet opérateur de moyenne temporelle au système d'équations 'fluide homogène' mis en place précédemment. Ce système reposant jusqu'ici sur des événements locaux peut désormais être simplifié à partir des ordres de grandeurs évalués dans le chapitre précédent. Nous allons donc dans un premier temps rappeler les différentes hypothèses pouvant être prises à l'échelle du profil.

#### 3.1.2.1. Simplifications à l'échelle du profil

Le calcul des ordres de grandeur nous a permis d'évaluer l'importance de chacun des termes du système d'équation à l'échelle d'un profil. Nous allons dans un premier temps nous servir de ces estimations afin de négliger les phénomènes ayant peu d'impact sur la dynamique de l'écoulement.

Les bulles de gaz sont considérées comme des traceurs de l'écoulement (cf 2.3.4.). Les vitesses moyennes des deux phases sont donc égales, ce qui correspond à des vitesses de glissement moyennes nulles.

$$\widetilde{\mathbf{u}}_M^l = \widetilde{\mathbf{u}}_M^g = \widetilde{\mathbf{u}}_M \quad (3.12)$$

De plus, pour nos applications en eau froide, les variations de température pour les deux phases sont a priori faibles (cf 2.4.3.). Dès lors, nous supposons que les températures des deux phases sont constantes et égales à la température ambiante ( $\approx 20^\circ C$ ).

$$\overline{T^g} = \overline{T^l} = T_{sat} \quad (3.13)$$

Ces deux simplifications permettent de ne pas résoudre une équation de conservation

de quantité de mouvement, ainsi que les deux équations de conservations d'énergie (température pour chaque phase).

Notre système inclut, de plus, la présence de gaz incondensables à la fois dans le liquide et dans la phase gazeuse faisant apparaître des termes liés à la diffusion moléculaire (cf 2.2.4.) :

- La diffusion moléculaire est supposée prédominante dans la phase gazeuse. Les masses volumiques et pressions au sein des bulles seront dès lors homogènes.

$$\langle \nabla [\chi_g Y_a^g] \rangle = \mathbf{0} \quad \text{donc} \quad \langle \chi_g \mathbf{j}_a^g \rangle = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

- Dans la phase liquide, la diffusion moléculaire sera négligée.

$$\langle \chi_l \mathbf{j}_a^l \rangle = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

L'opérateur de moyenne fait intervenir des termes de turbulence, correspondant aux variations des grandeurs à une échelle inférieure à celle établie par le modèle **U-RANS**. Nous considérerons néanmoins que les fluctuations des rapports de masse volumique liées aux espèces et celles des températures sont négligeables. En l'absence de modélisation, ces hypothèses sont nécessaires à la simulation de l'écoulement. Il faut toutefois garder à l'esprit que les phénomènes d'interfaces créent localement des inhomogénéités.

$$Y_i^{k'} = 0 \quad T^{k'} = 0 \quad (3.16)$$

Finalement, dans ces conditions, une vitesse de diffusion nulle implique l'égalité des moyennes des vitesses des espèces, au sens de Favre, pour chaque phase.

$$\widetilde{\mathbf{u}}_M = \widetilde{\mathbf{u}}_a^k = \widetilde{\mathbf{u}}_e^k \quad \text{pour} \quad k = \{l, g\} \quad (3.17)$$

### 3.1.2.2. Equations de conservation moyennées

Après l'application de l'opérateur de moyenne sur le système 'fluide homogène' et des simplifications précédentes, la simulation de l'écoulement ne nécessite plus que la résolution de 6 équations.

### 3.1. Equations de conservation phasiques moyennées

---

- 1 équation de transport du taux de vide issue de l'équation de suivi de l'interface,
- 2 équations de conservation de la masse pour les espèces dans la phase gazeuse,
- 1 équation de conservation de la masse pour l'air dans les deux phases,
- 1 équation de conservation de la masse pour le fluide homogène,
- 1 équation de conservation de quantité de mouvement pour le fluide homogène.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} [\alpha_g] + \langle \mathbf{u}_I \cdot \nabla \chi_g \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [\alpha_g Y_e^g \overline{\rho_M^g}] + \nabla \cdot [\alpha_g Y_e^g \overline{\rho_M^g} \widetilde{\mathbf{u}_M}] = \langle M_e^g \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} [\alpha_g Y_a^g \overline{\rho_M^g}] + \nabla \cdot [\alpha_g Y_a^g \overline{\rho_M^g} \widetilde{\mathbf{u}_M}] = \langle M_a^g \rangle \\ \frac{d}{dt} [Y_a] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M}] + \nabla \cdot [\overline{\rho_M} \widetilde{\mathbf{u}_M}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M} \widetilde{\mathbf{u}_M}] + \nabla \cdot [\overline{\rho_M} \widetilde{\mathbf{u}_M} \widetilde{\mathbf{u}_M}] = -\nabla [\overline{p_M}] + \nabla \cdot [\overline{\boldsymbol{\tau}}] + \nabla \cdot [\overline{\boldsymbol{\tau}_t}] + \langle \mathbf{f}_I \delta_I \rangle \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Avec  $\overline{\boldsymbol{\tau}_t} = -\overline{\rho_M} \widetilde{\mathbf{u}_M} \widetilde{\mathbf{u}_M}$

Les phénomènes haute fréquence interagissent avec le mouvement macroscopique par l'intermédiaire du tenseur de Reynolds  $\overline{\boldsymbol{\tau}_t}$ . La dynamique globale du milieu, résolue, est donc fortement dépendante du choix de modèle pour ce tenseur. Le lecteur pourra trouver en annexe (cf B.2) la présentation générale de différents modèles utilisés pour exprimer ce terme.



## 3.2. Exemples de modèles de simulation des écoulements cavitants basés sur une approche homogène

Comme présenté dans le chapitre d'introduction, la littérature comporte de nombreux modèles permettant la simulation d'écoulement cavitant (cf 1.2.3.) basé sur l'approche homogène. Les deux approches les plus courantes sont celles utilisant une **équation de transport de taux de vide** et celles modélisant le comportement diphasique à l'aide d'une **loi d'état**.

Contrairement au système **U-RANS** mis en place précédemment (Eq (3.18)), la plupart de ces approches ne considèrent pas la présence de gaz incondensable dans l'écoulement, supprimant dès lors deux équations de conservation de masse.

$$Y_a^g = 0 \quad \text{et} \quad Y_a = 0$$

Dans ces systèmes, l'approche homogène est utilisée afin de négliger totalement la présence de l'interface. Les forces de tension de surface sont dès lors nulles et la fermeture du modèle est effectuée en considérant l'égalité des pressions.

$$\langle \mathbf{f}_I \delta_I \rangle = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad p_M^g = p_M^l$$

Nous allons dans un premier temps présenter quelques-uns de ces modèles afin de comprendre la façon dont le problème est traité dans la littérature. Nous établirons dans un second temps les modifications à apporter à l'un d'entre eux afin de prendre en compte à la fois la présence de l'interface et des gaz incondensables.

### 3.2.1. Utilisation d'une équation de transport du taux de vide

#### 3.2.1.1. Equation de transport de l'interface

L'opération de moyenne a transformé l'équation de suivi de l'interface en une équation de transport pour le taux de présence des phases basée sur la moyenne de vitesse de

### 3.2. Exemples de modèles de simulation des écoulements cavitants basés sur une approche homogène

l'interface. Or, la condition de non glissement à l'interface permet d'exprimer cette vitesse en fonction du transfert de masse à l'interface (eq. (A.47)).

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_R^k + \frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \mathbf{n}_I^k \quad (3.19)$$

Dès lors, l'équation de transport de l'interface moyennée peut s'écrire en fonction des transferts de masse et de la vitesse de mélange.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\alpha_k] + \langle \nabla \cdot [\chi_k \mathbf{u}_M] \rangle = \langle \frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \delta_I \rangle + \langle \chi_k \nabla \cdot [\mathbf{u}_M] \rangle \quad (3.20)$$

Parallèlement, les équations de conservation de la masse pour chacune des phases peuvent se développer afin d'isoler l'évolution du taux de présence.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\alpha_k] + \nabla \cdot [\alpha_k \widetilde{\mathbf{u}}_M] = \frac{1}{\rho_i^k} \left[ \langle \dot{m}_M^k \delta_I \rangle - \alpha_k \widetilde{\mathbf{u}}_M \cdot \nabla \overline{\rho_M^k} - \alpha_k \frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M^k}] \right] \quad (3.21)$$

En considérant l'une des phases comme incompressible (phase liquide), l'équation de conservation de la masse (Eq. (3.21)) est équivalente à l'équation de suivi du taux de présence pour cette phase (Eq. (3.20)). La masse volumique de l'eau liquide évoluant peu dans le domaine d'utilisation de nos écoulements (cf 2.4.2.1.) et sans considération de l'air, les modèles reposant sur une équation de transport de taux de vide supposent généralement le milieu liquide incompressible. Le système ne comporte alors plus que 3 ou 4 équations :

- 1 équation de suivi du taux de présence d'une des phases appelée également **transport de taux de vide**,
- 1 équation de conservation de la masse pour le fluide homogène,
- 1 équation de conservation de quantité de mouvement pour le fluide homogène.

Certains modèles ne négligent pas la variation de température dans le milieu et obtiennent ainsi une quatrième équation correspondant à l'équation de conservation de l'énergie pour le fluide homogène.

### 3.2.1.2. Modélisation des termes de condensation/vaporisation

Le terme source de l'équation (3.21) contrôle l'ensemble des phénomènes de vaporisation et de condensation du milieu diphasique. Il représente par conséquent un enjeu majeur dans la simulation des écoulements cavitants. La littérature comporte plusieurs modèles concernant l'expression de ce terme. Ces derniers peuvent prendre plusieurs formes en fonction de l'équation **TTV** utilisée :

- Formulation obtenue à partir de l'équation de transport de taux de vide :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\alpha_k] + \nabla \cdot [\alpha_k \widetilde{\mathbf{u}}_M] = S_\alpha^k \quad (3.22)$$

- Formulation obtenue à partir de l'équation de conservation de la masse d'une des phases :

$$\frac{\partial}{\partial t} [X_e^g \overline{\rho}_M] + \nabla \cdot [X_e^g \overline{\rho}_M \widetilde{\mathbf{u}}_M] = S_x^k \quad (3.23)$$

Ces deux équations étant équivalents lorsque l'une des deux phases est incompressible.

Nous allons désormais présenter quelques modèles présents dans la littérature utilisant l'une ou l'autre de ces équations. Le lecteur pourra trouver une comparaison quantitative de certains de ces modèles dans l'étude menée Frikha [78] portant sur la simulation bidimensionnelle d'un écoulement autour d'un hydrofoil.

#### Modèle proposé par Kunz [134] :

Le modèle de Kunz suppose la phase liquide incompressible et subdivise le terme source en un terme lié à la vaporisation  $\dot{m}^-$  et un autre lié à la condensation  $\dot{m}^+$  :

$$S_\alpha^l = \frac{\dot{m}^+ + \dot{m}^-}{\rho_e^l} \quad (3.24)$$

avec :

$$\dot{m}^+ = \frac{K_{dest} \rho_e^g \alpha_l \min(0, p_M - p_{sat})}{\left(\rho_e^l \frac{U_{ref}^2}{2}\right) t_\infty} \quad \text{et} \quad \dot{m}^- = \frac{K_{prod} \rho_e^g \alpha_l^2 (1 - \alpha_l)}{t_\infty} \quad (3.25)$$

### 3.2. Exemples de modèles de simulation des écoulements cavitants basés sur une approche homogène

---

avec  $t_\infty$  un temps de relaxation, et  $K_{dest}$  et  $K_{prod}$  des paramètres constants à déterminer.

#### Modèle de Saito [200] :

Le modèle de Saito utilise une équation de conservation de masse pour la phase gazeuse. Une loi d'état permet de fermer le système. Celle-ci est basée sur le titre massique  $X_e^g = \frac{\alpha_g \rho_e^g}{\rho_e}$  et sur l'utilisation des lois de Tamman et des gaz parfaits pour les phases liquide et gazeuses.

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{1}{\rho_e^l} (1 - X_e^g) + \frac{X_e^g}{\rho_e^g} \quad \rho_e = \frac{p_e (p_e + p_c)}{K (1 - X_e^g) p (T + T_c) + r_e X_e^g (p + p_c) T} \quad (3.26)$$

Le terme source s'inspire du modèle proposé par Hertz-Knudsen-Langmuir présenté au chapitre précédent (cf 2.2.3.2.).

$$S_x^g = \begin{cases} \dot{m}^+ = C_e A \alpha_g (1 - \alpha_g) \frac{\rho_e^l}{\rho_e^g} \frac{p_{sat} - p}{\sqrt{2\pi r_e T_{sat}}} & \text{si } p < p_{sat} \\ \dot{m}^- = C_c A \alpha_g (1 - \alpha_g) \frac{p_{sat} - p}{\sqrt{2\pi r_e T_{sat}}} & \text{si } p > p_{sat} \end{cases} \quad (3.27)$$

Avec  $T_{sat}$  la température de saturation et  $A = C_a \alpha_g (1 - \alpha_g)$ , représentant l'aire interfaciale. La pression de vapeur est donnée par une loi empirique. Ce modèle est équivalent aux termes sources utilisés par Ochiai [165] dans la proposition présentée en introduction (cf 1.3.2.1.).

#### Terme source basé sur l'équation simplifiée de Rayleigh Plesset :

Le terme source de ces modèles est établi à partir d'une approximation de la dérivée temporelle du rayon des bulles obtenue dans l'équation de Rayleigh Plesset.

$$\frac{d}{dt} [R] = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat} - p_M|}{\rho_e^l}} \quad (3.28)$$

En fonction des propositions, l'intégration de cette simplification dans le système s'opère de différentes façons :

- Le modèle suggéré par Sauer [203] et intégré dans le code CAVKA, considère l'équation de conservation du taux de présence de la phase gazeuse. Le terme source est établi par la connaissance d'un nombre de germes  $n_B^l$  par unité de volume liquide ( $\approx 10^8 m^{-3}$ ) et d'un rayon caractéristique  $R_0^g$ .

$$S_\alpha^g = \frac{n_B^l 4\pi R^2}{1 + n_B^l \frac{4}{3}\pi R_0^{g3}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat} - p_M|}{\rho_e^l}} \quad (3.29)$$

- Dans le code Fluent, le terme source est basé sur la conservation de la masse de la phase vapeur [217] :

$$S_x^g = \begin{cases} C_e \frac{\sqrt{k}}{\sigma} \rho_e^l \rho_e^g \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat} - p_M|}{\rho_e^l}} (1 - X_e^g) & \text{si } p < p_{sat} \\ C_v \frac{\sqrt{k}}{\sigma} \rho_e^l \rho_e^l \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat} - p_M|}{\rho_e^l}} X_e^g & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.30)$$

Avec  $k$ , l'énergie cinétique locale et  $C_e$  et  $C_v$  des constantes empiriques valant approximativement  $2 \cdot 10^{-2}$  et  $10^{-2}$ .

- Finalement, dans le code CFX [3], il est basé sur l'estimation du nombre de bulles et de gouttes dans l'écoulement.

$$S_x^g = \begin{cases} C_e n_B^g \rho_e^g 4\pi R_0^{g2} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat} - p_M|}{\rho_e^l}} & \text{si } p < p_{sat} \\ C_v n_B^l \rho_e^g 4\pi R_0^{g2} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_{sat} - p_M|}{\rho_e^l}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

Avec :

- $n_B^l = \frac{3\alpha_g}{4\pi R_0^{g3}}$  et  $n_B^g = (1 - \alpha_g) \frac{3Y_a^g}{4\pi R_0^{g3}}$
- $C_e \approx 50$  et  $C_v \approx 10^{-2}$
- $R_0^g \approx 10^{-6} m$  le rayon initial des bulles, et  $Y_a^g \approx 10^{-5}$ .

D'autres modèles ont été formulés pour ce terme source [158, 213, 237, 240]. Toutes ces propositions reposent sur des coefficients déterminés par des tests numériques. La multitude de formulations contenues dans la littérature pour ce terme source illustre sa

complexité.

### 3.2.2. Simulation reposant sur une modélisation des transferts de masse

Pour chacune des espèces considérées, l'équation de conservation de la massephasique peut être remplacée par une loi d'état. Celle-ci est basée sur un état d'équilibre du système pouvant être caractérisé par :

- L'équilibre des enthalpies libres,  $g_i^l = g_i^g$ , soit le transfert instantané de l'espèce en accord avec la relation d'équilibre.
- L'absence de transfert de masse  $\dot{m}_i^g = 0$ .
- **Ou** un état intermédiaire entre ces deux états correspondant à une vitesse de transfert entre les deux phases finie (non nulle et non infinie).

La modélisation des transferts de masse par une loi d'état permet de ne plus résoudre l'équation de transport de taux de vide. Avec cette approche le système ne contient donc plus que 2 ou 3 équations (dépendamment de la prise en compte de l'équation d'énergie). La difficulté de cette démarche repose sur la détermination d'une loi d'état respectant l'ensemble des phénomènes liées au développement d'une population de bulles.

#### 3.2.2.1. Condition thermodynamique portant sur la célérité du son

Ces lois d'état établissent une relation entre la pression du mélange et sa masse volumique. Dans une phase pure, la célérité du son est définie comme la racine carrée de la dérivée de la pression par rapport à la masse volumique dans des conditions isentropiques. L'approche fluide homogène permet alors de considérer une **pseudo-vitesse du son** dans le milieu diphasique.

$$c_M^2 = \left( \frac{\partial p_M}{\partial \rho_M} \right)_s \quad (3.32)$$

Le terme **pseudo-vitesse du son** est préféré à vitesse du son. En effet, les interfaces du milieu créent une multitude d'ondes correspondant aux phénomènes de diffraction, de réflexion et de réfraction provoquant à la fois une atténuation de l'onde et une diminution

de sa vitesse de propagation (Leroy [144]).

Plusieurs auteurs ont proposé une modélisation de cette grandeur dans un milieu diphasique en se basant sur l'égalité des pressions dans le milieu.

- Le modèle de Jakobsen proposé en 1964 [113], ré-obtenu par la suite par Wallis [241], néglige les effets de tension de surface, de transfert de masse et de mouvements relatifs entre les phases.

$$\frac{1}{\rho_M c_{wallis}^2} = \frac{\alpha_g}{\rho_M^g c_M^g{}^2} + \frac{\alpha_l}{\rho_M^l c_M^l{}^2} \quad (3.33)$$

- En considérant l'équilibre des enthalpies libres, Saurel [206] propose une autre vitesse du son du système :

$$\frac{1}{\rho_M c_{eq}^2} = \frac{\alpha_g}{\rho_M^g c_M^g{}^2} + \frac{\alpha_l}{\rho_M^l c_M^l{}^2} + T \left[ \frac{\alpha_g \rho_M^g}{c_p^g} \left( \frac{ds_M^g}{dp_M} \right)^2 + \frac{\alpha_l \rho_M^l}{c_p^l} \left( \frac{ds_M^l}{dp_M} \right)^2 \right] \quad (3.34)$$

Saurel [206] affirme que pour qu'une loi d'état, basée sur l'équilibre des pressions et des températures, respecte le second principe de la thermodynamique (cf A.3.2), la vitesse du son qu'elle définit doit être comprise entre la célérité de Wallis  $c_{wallis}$  et la célérité à l'équilibre  $c_{eq}$ .

### 3.2.2.2. Lois d'état pour l'eau

Dans le cadre de la cavitation, et en ne considérant pas la présence d'air dans l'écoulement, plusieurs auteurs ont proposé des lois d'états permettant de relier la masse volumique et la pression homogène du fluide.

#### Loi barotrope logarithmique :

En intégrant la célérité du son de Wallis, David Schmidt [208] propose une loi d'état déterminant la pression du mélange en fonction du taux de vide.

$$p_M = p_{sat} + \frac{\rho_M^g c_M^g{}^2 \rho_M^l c_M^l{}^2 (\rho_M^g - \rho_M^l)}{\rho_M^g c_M^g{}^2 - \rho_M^l c_M^l{}^2} \ln \left[ \frac{\rho_M^g c_M^g{}^2 (\alpha_g \rho_M^g + \alpha_l \rho_M^l)}{\rho_M^l (\alpha_l \rho_M^g c_M^g{}^2 + \alpha_g \rho_M^l c_M^l{}^2)} \right] \quad (3.35)$$

**Loi à l'équilibre de Saurel [204] :**

Pour les écoulements compressibles, le modèle de Saurel propose de modéliser la phase liquide par une loi de Tait et la phase gazeuse par une loi des gaz parfaits. En considérant l'égalité des pressions, des températures et des enthalpies libres, une fonction polynomiale permettant de relier la température à la pression peut être obtenue.

$$\ln \left( \frac{p_M}{p_{M0}} \right) = \sum_k a_k \left( \frac{T}{T_0} \right)^k \quad (3.36)$$

**Loi de type mélange gaz raides :**

Goncalvez [89] propose d'établir d'une loi en considérant que les deux phases du milieu peuvent être représentées par deux lois de type gaz raides :

$$\begin{cases} p_M^k(\rho_M^k, e_M^k) = (\gamma^k - 1) \rho_M^k (e_M^k - q^k) - \gamma^k p_\infty^k \\ T^k(\rho_M^k, h_M^k) = \frac{h_M^k - q^k}{c_{pM}^k} \end{cases} \quad (3.37)$$

En considérant l'équilibre des pressions dans les deux phases, la pression dans la zone de mélange est obtenue.

$$\begin{cases} p_M(\rho_M, e_M, \alpha_g) = (\gamma(\alpha_g) - 1) \rho_M (e_M - q(\alpha_g)) - \gamma(\alpha_g) p_\infty(\alpha_g) \\ T(\rho_M, h_M, \alpha_g) = \frac{h_M - q(\alpha_g)}{c_p(\alpha_g)} \end{cases} \quad (3.38)$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma(\alpha_g) - 1} = \frac{\alpha_g}{\gamma^g - 1} + \frac{\alpha_l}{\gamma^l - 1} \\ \rho_M q(\alpha_g) = \alpha_g \rho_M^g q(\alpha_g) + \alpha_l \rho_M^l q(\alpha_l) \\ p_\infty(\alpha_g) = \frac{\gamma(\alpha_g) - 1}{\gamma(\alpha_g)} \left[ \alpha_g \frac{\gamma^g p_\infty^g}{\gamma^g - 1} + \alpha_l \frac{\gamma^l p_\infty^l}{\gamma^l - 1} \right] \\ \rho_M c_p(\alpha_g) = \alpha_g \rho_M^g c_{pM}^g + \alpha_l \rho_M^l c_{pM}^l \end{cases} \quad (3.39)$$

**Loi barotrope sinusoïdale :**

Cette loi, proposée par Delannoy [50], considère l'incompressibilité des deux phases du mélange. Elle propose de relier la masse volumique du mélange à sa pression à l'aide d'une fonction sinusoïdale (fig 3.2) créant ainsi une métastabilité autour de la



pression de vapeur saturante.

$$\rho_e = \begin{cases} \frac{\rho_e^l + \rho_e^g}{2} + \frac{\rho_e^l - \rho_e^g}{2} \sin\left(\frac{p_e - p_{sat}}{c_{min}^2} \frac{2}{\rho_{e0}^l - \rho_{e0}^g}\right) & \text{si } p_{inf} < p_e < p_{sup} \\ \rho_{e0}^g & \text{si } p_e < p_{inf} \\ \rho_{e0}^l & \text{si } p_e > p_{sup} \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $c_{min}$  représente la vitesse du son minimale dans le mélange,  $\rho_{e0}^l$  et  $\rho_{e0}^g$  représentent les masses volumiques dans les phases pures et :

$$p_{inf} = p_{sat} - \frac{\pi}{4} (\rho_{e0}^l - \rho_{e0}^g) c_{min}^2 \quad \text{et} \quad p_{sup} = p_{sat} + \frac{\pi}{4} (\rho_{e0}^l - \rho_{e0}^g) c_{min}^2 \quad (3.41)$$

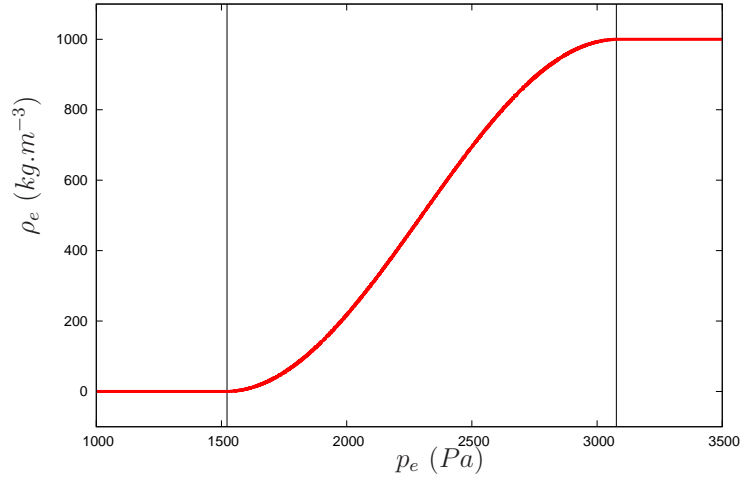


FIGURE 3.2 – Représentation de la loi barotrope pour  $c_{min} = 1m.s^{-1}$ ,  $\rho_{e0}^g = 0.017 kg.m^{-3}$   $\rho_{e0}^l = 1000 kg.m^{-3}$  et  $p_{sat} = 2300 Pa$

Le choix du paramètre  $c_{min}$  établit d'une part la largeur de la zone de métastabilité et permet, d'autre part, de respecter à la fois la condition définie par Saurel pour la vitesse du son de Wallis (cf 3.2.2.1.) et la convexité de l'énergie interne nécessaire à la stabilité thermodynamique du système [89]. Le retour d'expérience du laboratoire vis-à-vis de ce paramètre permet d'affirmer que  $c_{min} \approx 1m.s^{-1}$  permet de reproduire de façon satisfaisante des écoulements cavitants en eau froide.

$$c_M^2 = \frac{c_{min}^2}{\cos\left(\frac{p_e - p_{sat}}{c_{min}^2} \frac{2}{\rho_e^l - \rho_e^g}\right)} \quad (3.42)$$

### 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide

---

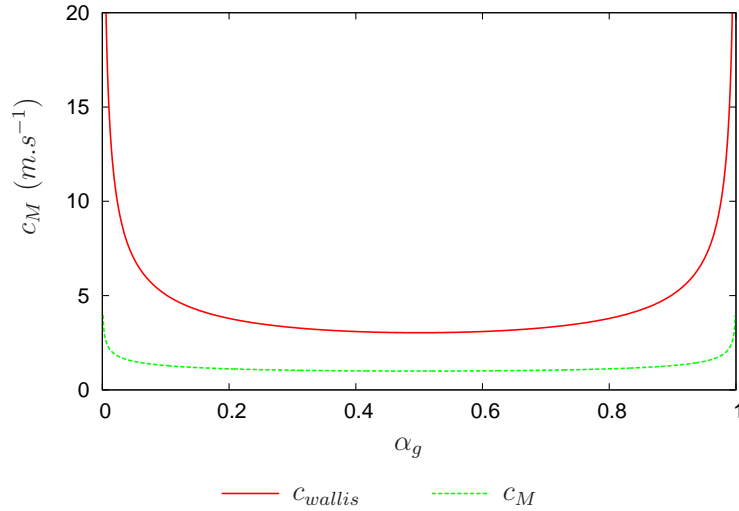


FIGURE 3.3 – Représentation de la célérité du son définie par la loi barotrope pour  $c_{min} = 1m.s^{-1}$ ,  $\rho_e^g = 0.017 kg.m^{-3}$   $\rho_e^l = 1000 kg.m^{-3}$  et  $p_{sat} = 2300 Pa$  et par la loi de Wallis définie avec la loi des gaz parfaits et la loi de Tait dans des conditions isothermes

D'autres lois d'états existent dans la littérature, nous pourrions citer les modèles de Edwards [63], de Rapposelli [183] ou encore de Barberon [10].

### 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide

La plupart des modèles basés sur une approche monofluide (homogène) considèrent l'égalité des pressions entre les phases. Or les dimensions des bulles obtenues dans l'écoulement découlent des écarts de pressions entre les phases et des effets de la tension de surface. Afin de déterminer une population de bulles, nous allons par conséquent introduire dans un de ces modèles les effets de l'interface ainsi que de la présence de gaz incondensable.

Pour cette étude, nous nous concentrerons sur l'adaptation de la loi barotrope (Eq. (3.40)) présente dans les codes de calcul disponibles au laboratoire. L'objectif est donc

dans une démarche de **post-traitement** d'inclure la tension de surface et la présence d'air dans cette relation.

### 3.3.1. Pression homogène avec prise en compte de l'interface

La différence de pression des phases à l'interface se caractérise par la relation de saut de quantité de mouvement obtenu précédemment (Eq. (2.38)).

$$\sum \mathbf{L}_k = \mathbf{f}_I \delta_I \quad (3.43)$$

Nous allons désormais introduire une grandeur de pression interfaciale  $p_I$  permettant d'inclure ce terme dans la **pression** utilisée par la loi d'état barotrope (Cf. 3.2.2.2.).

#### 3.3.1.1. Application du théorème de Helmholtz-Hodge

Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement, la pression intervient sous forme d'un gradient. Afin d'inclure le terme de tension de surface au sein de cette grandeur, il faut donc également pouvoir l'écrire sous une forme équivalente. Pour cela, nous allons appliquer le théorème de Helmholtz-Hodge en vérifiant ses conditions d'utilisation pour notre cas d'application.

L'ensemble des interfaces du milieu définit un ensemble noté  $\partial\Omega^g$ . Cet espace est constitué de multitudes de sous espaces  $\partial\Omega_i^g$  représentant l'interface de chaque inclusion. **Ce travail repose sur l'hypothèse que l'ensemble de ces structures sont sphériques et ne restent pas en contact.**

$$\begin{cases} \partial\Omega^g = \bigcup_i \partial\Omega_i^g. \\ \emptyset = \bigcap_i \partial\Omega_i^g \end{cases} \quad (3.44)$$

Pour chaque inclusion, un voisinage de l'interface peut être caractérisé :

$$V_i^\epsilon = \{M \in \mathbb{R}^3 | d_i(M) < \epsilon\} \quad (3.45)$$

Avec  $d_i(M)$  la distance entre le point M et l'espace  $\partial\Omega_i^g$ .

### 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide

---

Comme les sous-domaines (les interfaces) sont supposés disjoints, il existe un réel  $\epsilon_{max}$  tel que pour tout  $\epsilon < \epsilon_{max}$ , les voisinages définis par  $\epsilon$  sont également disjoints.

$$\bigcap_i V_i^\epsilon = \emptyset \quad (3.46)$$

De même, les inclusions étant supposées sphériques, la norme de la force interfaciale  $\|\mathbf{f}_I\|$  est constante sur chaque sous espace  $\partial\Omega_i^g$  et sera notée  $f_I^i$ . En considérant le centre  $O_i$  de chaque inclusion, la fonction  $\mathbf{f}_I\delta_I$  peut être étendue sur le voisinage de l'interface,  $V_i^\epsilon$  (Fig 3.4).

$$\mathbf{f}_I^\epsilon(M) = \left[ \frac{\epsilon^2 - d_i(\mathbf{x}, t)^2}{\epsilon^2} \right]^2 \frac{f_I^i \mathbf{O}_i M}{\epsilon \|O_i M\|}, \quad M \in V_i^\epsilon \text{ et } \epsilon < \epsilon_{max} \quad (3.47)$$

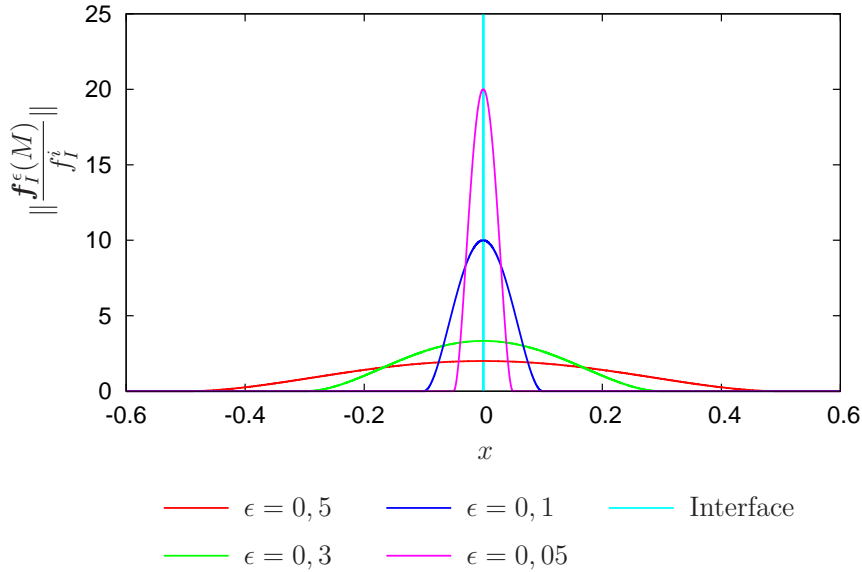


FIGURE 3.4 – Représentation de la fonction  $\mathbf{f}_I^\epsilon(M)$  au voisinage de l'interface de la bulle  $i$

Pour tout  $\epsilon < \epsilon_{max}$ , le champ des forces interfaciales (de paramètre  $\epsilon$ ) peut ensuite être prolongé sur l'ensemble du milieu en définissant :

$$\mathbf{f}_I^\epsilon = \begin{cases} \mathbf{f}_I^\epsilon(M) & \text{si } M \in V_i^\epsilon \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.48)$$

Les fonctions  $\mathbf{f}_I^\epsilon$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}^3$ . D'après le théorème de Helmholtz-Hodge, chaque  $\mathbf{f}_I^\epsilon$  peut dès lors se décomposer en une partie irrotationnelle et une composante solénoïdale.

$$\mathbf{f}_I^\epsilon = \nabla \wedge [\mathbf{A}^\epsilon] - \nabla [B^\epsilon] \quad (3.49)$$

avec  $\mathbf{A}^\epsilon$ , un champ vectoriel et  $B^\epsilon$  un champ scalaire. Il est facile de montrer que le rotationnel de  $\mathbf{f}_I^\epsilon$  est nul sur l'ensemble  $\mathbb{R}^3$ . Chaque vecteur  $\mathbf{f}_I^\epsilon$  peut alors être représenté par un champ scalaire  $B^\epsilon$ .

Nous venons ainsi de construire une suite de champs vectoriels pouvant s'écrire uniquement à l'aide d'un gradient. Or le champ vectoriel  $\mathbf{f}_I \delta_I$  représente la limite de  $\mathbf{f}_I^\epsilon$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_I^\epsilon = \mathbf{f}_I \delta_I \quad (3.50)$$

En supposant son existence, la limite de  $B^\epsilon$  pour des voisinages infiniment proches de l'interface est homogène à une pression, on la nommera **pression interfaciale** et on la notera  $p_I$ .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B^\epsilon = p_I \quad (3.51)$$

Les forces de surface  $\mathbf{f}_I \delta_I$  s'expriment à l'aide du gradient de cette pression.

$$\mathbf{f}_I \delta_I = -\nabla p_I \quad (3.52)$$

Nous avons ainsi pu établir l'existence d'un champ scalaire dont le gradient représente le champ vecteur des forces interfaciales de notre milieu diphasique. Afin de considérer à la fois les pressions des phases et les effets de l'interface, le champ de **pression homogène**,  $p_{MI}$ , est défini comme la somme des pressions phasiques et de cette pression interfaciale.

$$p_{MI} = p_I + \sum_k \chi_k p_M^k \quad (3.53)$$

L'équation de quantité de mouvement du fluide homogène peut donc s'écrire à l'aide de cette pression homogène. Par conséquent, elle ne néglige pas les termes liés au saut de quantité de mouvement comme c'est le cas dans la plupart des modèles de la littérature. Pour autant, les simplifications effectuées sur la topologie diphasique de l'écoulement permettent de ne pas rajouter de termes par rapport aux équations classiques d'un écoulement

### 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide

---

cavitant.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M \mathbf{u}_M}] + \nabla \cdot [\overline{\rho_M \mathbf{u}_M \mathbf{u}_M}] = -\nabla \overline{p_{MI}} + \nabla \cdot [\overline{\boldsymbol{\tau}}] - \nabla \cdot [\overline{\boldsymbol{\tau}_t}] \quad (3.54)$$

#### 3.3.1.2. Relation entre pression interfaciale et pressions phasiques moyennes

Maintenant que nous avons montré son existence, nous allons modéliser la pression interfaciale  $p_I$  dans le milieu diphasique par rapport aux autres grandeurs de l'écoulement. Pour cela, nous proposons de considérer les forces interfaciales de deux manières distinctes :

- D'une part, en les exprimant en fonction de la courbure moyenne de l'interface. Celle-ci peut être décomposée en une partie moyenne et partie fluctuante par rapport à la moyenne interfaciale.

$$H_I^g = \overline{\overline{H_I^g}} + H_I^{g'''} \quad (3.55)$$

En considérant, une population monodisperse de bulles, la partie fluctuante de cette expression est nulle. La relation (2.44) et (2.3) nous permettent alors de considérer la moyenne du champ vectoriel des forces interfaciales uniquement à l'aide du gradient du taux de vide et de la courbure moyenne du rayon.

$$\langle \mathbf{f}_I \delta_I \rangle = -2\sigma \overline{\overline{H_I^g}} \nabla \alpha_g \quad (3.56)$$

- D'autre part, en caractérisant les forces interfaciales par la relation de saut de quantité de mouvement (2.38). Celle-ci peut se décomposer en une partie statique et une partie dynamique (nulle si l'interface est immobile).

$$\mathbf{f}_I \cdot \mathbf{n}_I^g \delta_I = [p_M^l - p_M^g + \mathbb{I}^g] \delta_I \quad (3.57)$$

avec  $\mathbb{I}^g$ , la partie dynamique des efforts dus à la viscosité et au transfert de masse à l'interface.

$$\mathbb{I}^g = \left( \sum_k [\boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k + \dot{m}_M^k \mathbf{u}_M^k] \right) \cdot \mathbf{n}_I^g \quad (3.58)$$

Une relation sur la courbure moyenne peut être obtenue en moyennant la relation (3.57) sur l'interface.

$$\zeta [2\sigma \overline{\overline{H_I^g}}] = \zeta [\overline{p_M^l} - \overline{p_M^g} + \overline{\mathbb{I}^g}] \quad (3.59)$$

En conjuguant, les équations (3.53), (3.56) et (3.59), la moyenne du gradient de pression homogène s'exprime à l'aide des taux de présence de chaque phase, des moyennes phasiques et surfaciques des pressions et des contraintes dynamiques à l'interface. On rappelle ci-dessous les différentes relations nécessaires à cette démarche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_I \delta_I = -\nabla p_I \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{f}_I \delta_I \rangle = -2\sigma \overline{\overline{H_I^g}} \nabla \alpha_g = - \left[ \overline{p_M^l} - \overline{p_M^g} + \overline{\mathbb{I}^g} \right] \nabla \alpha_g \\ p_{MI} = p_I + \sum_k \chi_k p_M^k \quad \text{et} \quad \overline{p_{MI}} = \overline{p_I} + \sum_k \alpha_k \overline{p_M^k} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\nabla \overline{p_{MI}} = \alpha_g \nabla \overline{p_M^g} + \alpha_l \nabla \overline{p_M^l} + \left( \overline{p_M^g} - \overline{\overline{p_M^g}} \right) \nabla \alpha_g + \left( \overline{p_M^l} - \overline{\overline{p_M^l}} \right) \nabla \alpha_l + \overline{\mathbb{I}^g} \nabla \alpha_g \quad (3.60)$$

Les écarts de pression entre l'interface et le milieu à l'infini, responsables du mouvement d'oscillation des bulles dans les équations de type Rayleigh-Plesset, sont retrouvés. Ces formulations peuvent en première approximation être simplifiées :

- Dans la phase gazeuse, la diffusivité moléculaire est considérée assez grande pour assurer l'homogénéité de pression dans une même inclusion. L'écart entre la moyenne de la pression à l'interface et la moyenne volumique est donc nulle.

$$\overline{p_M^g} = \overline{\overline{p_M^g}} \quad (3.61)$$

- Dans le liquide les fluctuations de pression peuvent être approximées par les mouvements relatifs de l'interface :

$$\overline{\overline{p_M^l}} - \overline{p_M^l} = \overline{\overline{\rho_M^l R \frac{d^2}{dt^2} [R] + \frac{3}{2} \rho_M^l \left( \frac{d}{dt} [R] \right)^2}} \quad (3.62)$$

- En se plaçant dans le cadre des hypothèses de Rayleigh-Plesset, la contrainte visqueuse à l'interface peut être approximée par :

$$\langle \delta_I \left( \sum_k \boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right) \cdot \mathbf{n}_I^g \rangle = \zeta \left( \overline{\overline{\left( \frac{4\mu_M^l}{R^g} \frac{d}{dt} [R^g] \right)}} \right) \approx \zeta \frac{4\mu_M^l}{\overline{\overline{R^g}}} \frac{d}{dt} \left[ \overline{\overline{R^g}} \right] \quad (3.63)$$

### 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide

---

- La moyenne surfacique des contraintes liées au transfert de masse fait intervenir des termes non linéaires. En l'absence d'autres modélisations, la méthode la plus simple pour considérer ce terme est de négliger les fluctuations du terme de transfert de masse et de la masse volumique  $\rho_I$  par rapport à la moyenne interfaciale.

$$\langle \delta_I \dot{m}_M^g [\mathbf{u}_M^g - \mathbf{u}_M^l] \cdot \mathbf{n}_I^g \rangle = \zeta \left( \frac{\overline{\dot{m}_M^g{}^2}}{\rho_I} \right) \approx \zeta \frac{\overline{\dot{m}_M^g{}^2}}{\overline{\rho_I}} \quad (3.64)$$

Les contraintes dynamiques appliquées à l'interface peuvent alors être modélisées par :

$$\overline{\mathbb{I}^g} \approx \frac{\overline{\dot{m}_M^g{}^2}}{\overline{\rho_I}} + \frac{4\mu_M^l}{\overline{R^g}} \frac{d}{dt} [R^g] \quad (3.65)$$

Dans cette partie du mémoire, nous avons intégré les forces de tension de surface au sein d'une pression homogène  $p_{MI}$  en supposant une topologie du milieu diphasique. Bien que nous ne considérons pas par la suite la partie dynamique de l'interface, une modification du solveur permettrait de les prendre en considération et ainsi de reproduire la croissance des bulles dans les simulations **U-RANS** au travers de cette **pression homogène**.

Dans la suite du mémoire, nous aurons donc la relation :

$$\nabla \overline{p_{MI}} = \alpha_g \nabla \overline{p_M^g} + \alpha_l \nabla \overline{p_M^l} \quad (3.66)$$

Le gradient de  $p_{MI}$  intègre ainsi les termes de tension de surface ce que ne faisait pas le gradient de  $p_M$  :

$$\nabla \overline{p_M} = \nabla \left[ \alpha_g \overline{p_M^g} + \alpha_l \overline{p_M^l} \right] \quad (3.67)$$

#### 3.3.2. Considération de l'air dans l'écoulement

En supposant la fraction massique de l'air dans le milieu ( $\Omega$ ) à l'état initial égale à celle imposée aux conditions aux limites ( $\partial\Omega$ ) du calcul à tout instant t, celle-ci est constante



dans l'ensemble du fluide.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} [Y_a] = 0 \\ Y_a(M, 0) = Y_a(M', t) \text{ avec } t > 0, M \in \Omega \text{ et } M' \in \partial\Omega \end{array} \right\} \implies Y_a = \text{constante} \quad (3.68)$$

La connaissance de la masse volumique du fluide homogène  $\rho_M$  procure ainsi la quantité d'air se répartissant entre les phases liquide et gazeuse.

$$\rho_a = Y_a \rho_M = \alpha_g \rho_a^g + \alpha_l \rho_a^l \quad (3.69)$$

Comme pour l'espèce eau, le calcul de cette répartition peut se faire soit par une **modélisation des termes d'échanges**, soit par l'utilisation d'une **loi**.

### 3.3.2.1. Modélisation des termes de dissolution/dégazage

Le transfert de masse d'air a été peu étudié dans le cadre de la simulation d'écoulement en cavitation. Une modélisation de ce phénomène peut néanmoins être obtenue à l'aide des modèles du double film présentés précédemment (cf 3.3.2.1.).

$$\langle M_a^g \rangle = \langle \dot{m}_a^g \delta_I \rangle = \zeta C_a K_{a0}^l \left( \overline{\rho_a^l} - H_e \overline{p_a^g} \right) \quad (3.70)$$

- Le coefficient  $C_a$  permet de limiter la vitesse de transfert à l'interface. De par la diffusivité moléculaire importante dans les inclusions, la pression partielle de l'air à l'interface peut être considérée égale à la pression partielle moyenne dans la phase.

$$\overline{p_a^g} = \overline{p_a^g} \quad (3.71)$$

- A l'inverse, la masse volumique de l'air dans la phase liquide, moyennée à l'interface est différente de celle moyennée dans la phase à cause de la faible diffusion moléculaire. Le coefficient  $C_a$  peut permettre dans une première approche de considérer cette inégalité en limitant le transfert à l'interface.

$$\overline{\rho_a^l} = \overline{\rho_a^l} + \overline{\rho_a^{l'}} \quad (3.72)$$

### 3.3. Considération de l'air et de la tension de surface dans les écoulements cavitants par une approche monofluide

---

La faible valeur du coefficient de transfert de masse d'air à l'interface pour cette espèce permettrait en première approximation de négliger les transferts de masse à l'interface (cf 2.2.4.). Cette simplification a notamment été prise dans le modèle de Ochiai (cf 1.3.2.1.) dans lequel l'air est occlus dans la phase gazeuse.

#### 3.3.2.2. Loi d'état pour l'air

La modélisation du transfert d'air à l'interface nécessite l'ajout d'une équation de conservation de masse par rapport aux systèmes généralement rencontrés dans la littérature. L'utilisation d'une loi d'état permet de considérer la présence de l'air sans pour autant alourdir le calcul. L'intégralité du problème physique n'est cependant plus prise en compte suite à la nécessité de prendre des hypothèses. Les relations modélisant ce transfert peuvent représenter deux situations physiques antagonistes :

- Une situation correspondant à l'absence de transfert de masse d'air à l'interface.
- Une situation correspondant à une dissolution et à un dégazage instantané.

Une situation intermédiaire pourrait être considérée, mais demanderait une validation expérimentale.

#### En cas de transfert de masse d'air nul :

Si l'on ne considère pas les transferts de masse pour l'air, la troisième équation du système (3.18) peut s'écrire : :

$$\frac{d}{dt} [Y_a X_a^g] = 0 \quad (3.73)$$

Comme précédemment, les conditions initiales et limites du calcul seront prises égales, rendant ainsi constante la fraction massique d'air dans la phase gazeuse par rapport à la masse volumique d'air dans le milieu diphasique.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} [X_a^g] = 0 \\ X_a^g(M, 0) = X_a^g(M', t) \text{ avec } t > 0, M \in \Omega \text{ et } M' \in \partial\Omega \end{array} \right\} \implies X_a^g = \text{constante} \quad (3.74)$$

Dès lors, les masses volumiques de l'air dans chaque phase peuvent être déterminées uniquement à l'aide de la masse volumique du fluide homogène et du taux de présence

de chaque phase.

$$\rho_a^g = \frac{X_a^g Y_a \rho_M}{\alpha_g} \quad \rho_a^l = \frac{Y_a (1 - X_a^g) \rho_M}{\alpha_l} \quad (3.75)$$

Ces relations empêchent la considération de phase pure ( $\alpha_g = 0$ ,  $\alpha_l = 0$ ), si initialement, l'air est présent à la fois dans le liquide et dans la phase gazeuse.

**En considérant un phénomène de dégazage/dissolution instantané :**

En cas de transfert de masse d'air instantané ou de temps d'exposition entre les phases infinis, la situation d'équilibre définie par la relation de Henry est vérifiée. La masse volumique contenue dans le milieu liquide peut alors être reliée à la pression de gaz à l'intérieur du milieu.

$$\rho_a^l = H_e p_a^g \quad (3.76)$$

A partir de l'équation (3.76) et de la loi des gaz parfaits, la masse volumique de l'air dans la phase gazeuse peut ainsi être obtenue.

$$\rho_a^g = \frac{Y_a \rho_M}{\alpha_g + \alpha_l H_e^*} \quad (3.77)$$

Avec  $H_e^* = H_e r_a T^g$  le rapport entre la masse volumique de l'air entre les phases liquide et la phase gazeuse à la température du milieu.

### 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

Maintenant que nous avons vu une façon d'intégrer à la fois, les termes de tension superficielle et la présence de l'air dans l'écoulement, nous nous proposons de les prendre en considération dans une loi d'état disponible au sein du laboratoire, la loi barotrope sinusoidale définie par Delannoy (cf 3.2.2.2.).

Cette loi est définie par quatre paramètres  $p_{LOI}$ ,  $\rho_{M0}^g$  et  $\rho_{M0}^l$  et  $c_{min}$ . Les trois premiers correspondent respectivement à la pression de vapeur saturante et aux masses volumiques

### 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

des phases pures gazeuse et liquide, ils sont donc en principe fixés par les conditions de l'écoulement. Le paramètre  $c_{min}$  représente la célérité minimale du son dans le mélange définie par cette loi. Il permet également d'ajuster la largeur de la zone de métastabilité autour de la pression  $p_{LOI}$  (Fig 3.5).

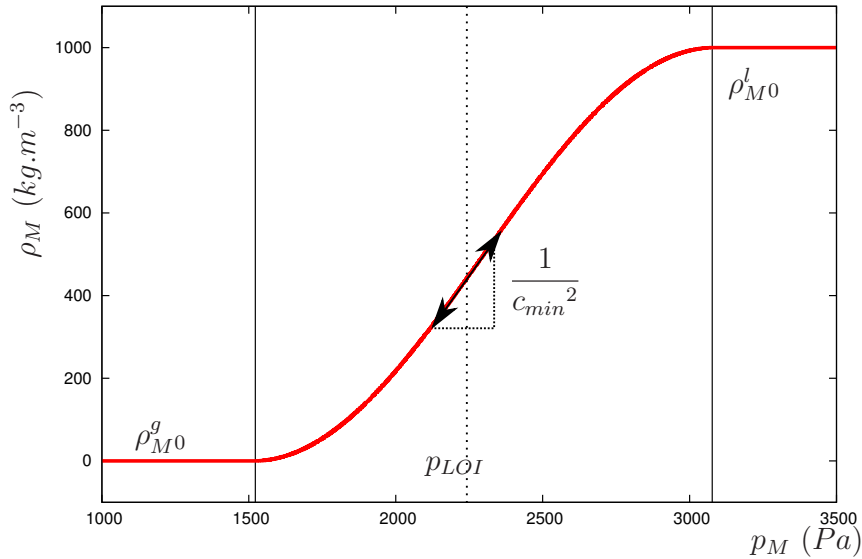


FIGURE 3.5 – Représentation des paramètres de la loi barotrope

Afin de considérer à la fois la tension superficielle et les gaz dissous dans cette loi d'état, différentes modifications doivent être apportées.

- Nous introduisons un taux de vide maximal  $\alpha_{max} (\leq 1)$  et minimal  $\alpha_{min} (= 1 - \alpha_{max})$  empêchant la vaporisation et condensation totale du fluide. Dans le cas où  $\alpha_{max} \neq 1$ , le fluide contient donc en permanence une structure diphasique, introduisant dès lors une population de germes de cavitation dans la loi d'état.
- La pression considérée pour la loi est désormais la pression homogène  $p_{MI}$  incluant la tension superficielle. De plus, la zone de métastabilité est centrée sur une pression  $p_{LOI}$  qui n'est plus nécessairement égale à la pression de vapeur saturante.
- La masse volumique comporte la présence des gaz incondensables et dépend donc de la quantité d'air présent dans le milieu.

- La célérité du son minimale dans le mélange  $c_{min}$ , est toujours un paramètre ajustable de cette loi.

Nous définissons la loi d'état à travers la variation des taux de présence des phases en fonction de la pression  $p_{MI}$  (Fig 3.6). Nous verrons par la suite que cette formulation est équivalente à la loi barotrope originale (cf 3.4.1.1.).

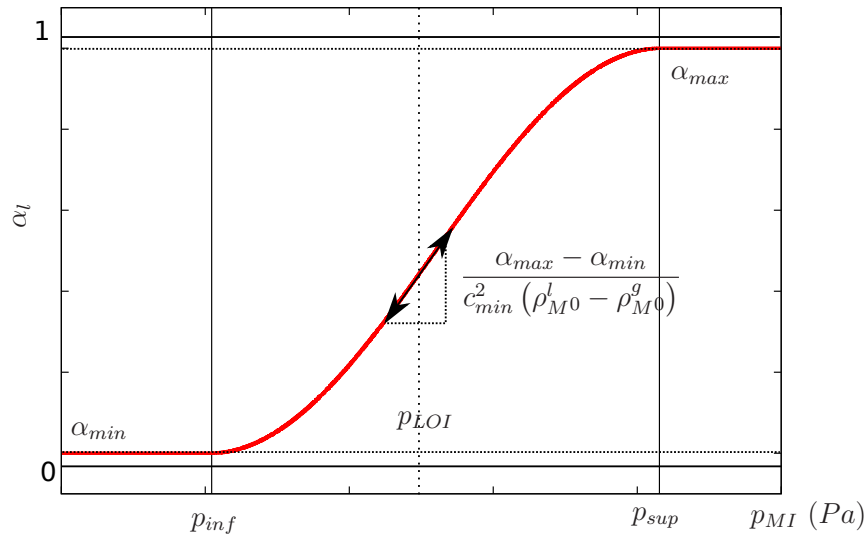


FIGURE 3.6 – Représentation des paramètres de la loi barotrope modifiée (taux de présence de la phase liquide en fonction de la pression  $p_{MI}$ )

$$\alpha_g = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \sin \left( \frac{p_{MI} - p_{LOI}}{c_{min}^2} \frac{2}{\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g} \right) \right] & \text{si } p_{inf} < p_{MI} < p_{sup} \\ \alpha_{max} & \text{si } p_{MI} < p_{inf} \\ \alpha_{min} & \text{si } p_{MI} > p_{sup} \end{cases} \quad (3.78)$$

avec :

- $p_{inf} = p_{LOI} - \frac{\pi}{4} (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) c_{min}^2$  et  $p_{sup} = p_{LOI} + \frac{\pi}{4} (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) c_{min}^2$
- $\alpha_{min} = 1 - \alpha_{max}$

### 3.4.1. Hypothèses et équivalences de la loi d'état

La mise en place du système **U-RANS** (Eq (3.18)) a nécessité la prise en compte de plusieurs hypothèses, ayant une influence sur la modification de la loi d'état :

- Les phases gazeuses sont régies par la loi des gaz parfaits. La diffusion moléculaire dans cette phase est supposée suffisamment rapide pour considérer des pressions et masses volumiques homogènes.

$$p_i^g = \rho_i^g r_i T^g$$

- L'équilibre des températures est établie. Celles-ci restent constantes et sont prises égales à la température de saturation.

$$T^l = T^g = T_{sat}$$

De plus, la considération d'une population de bulle par cette loi d'état requière également d'autres hypothèses.

- La masse volumique de l'eau liquide étant peu sensible aux variations de pression dans la plage de données considérées ( $< 10^7 Pa$ ) dans nos simulation **U-RANS** (cf 2.4.2.1.), nous la prendrons constante.

$$\overline{\rho_e^l} = constante$$

- La condensation et la vaporisation se font de façon instantanée dans le milieu diphasique.

$$\overline{p_e^g} = p_{sat}$$

- Les bulles sont représentées par des populations monodisperses. Elles ont localement toutes le même rayon,  $\overline{R^g}$ , dépendant du taux de présence des phases.

$$\overline{H^g} = -\overline{R^g}^{-1}$$

- L'équilibre de Laplace est établi (Eq (2.45)). Les bulles sont donc en moyenne à

l'équilibre mécanique.

$$\overline{p_M^l} + \frac{2\sigma}{R^g} = \overline{p_M^g}$$

En ce qui concerne la prise en compte de l'air dans le milieu, deux propositions donnant naissance à deux lois différentes seront analysées :

**Loi Barotrope - avec transfert de masse d'air instantané - (B-TMAI) :**

Dans la première, les transferts d'air aux interfaces seront supposés instantanés. Dès lors, l'état d'équilibre défini par la loi de Henry est respecté pour les valeurs moyennées.

$$\overline{\rho_a^l} = H_e \overline{p_a^g}$$

Avec cette approche, il est possible de supposer l'existence de phase pure  $\alpha_{max} = 1$ , les gaz incondensables passant instantanément d'une phase à l'autre.

**Loi Barotrope - sans transfert de masse d'air - (B-STMA) :**

Dans cette seconde loi, les transferts de masse d'air à l'interface sont négligés. La conservation de la masse empêche alors la considération de phase pure ( $\alpha_{max} < 1$ ), la quantité d'air présente ne pouvant pas transiter de la phase liquide à la phase gazeuse.

$$\langle M_a^g \rangle = 0$$

**3.4.1.1. Equivalence de forme entre l'ancienne et la nouvelle loi d'état**

Bien que les lois d'état définies précédemment reposent sur des considérations différentes de la loi barotrope sinusoidale, elles lui sont formellement équivalentes.

En effet, la fraction massique de l'eau  $Y_e$  dans le mélange étant constante (car  $Y_a$  est constante), la masse volumique peut directement être reliée aux taux de présence et à la masse volumique de l'eau de chacune des phases (également constantes).

$$\rho_M = \frac{\alpha_g \rho_{sat} + \alpha_l \rho_e^l}{Y_e} \quad (3.79)$$

Avec  $\rho_{sat}$  la masse volumique de la vapeur à pression de saturation et à la température du milieu  $\rho_{sat} = \frac{p_{sat}}{r_e T_{sat}}$ .

### 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

---

Une relation directe peut alors être établie entre la masse volumique du mélange et la pression homogène :

$$\rho_M = \begin{cases} \frac{\rho_{M0}^g + \rho_{M0}^l}{2} + \frac{\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g}{2} \sin\left(\frac{p_{MI} - p_{LOI}}{c_{min}^2} \frac{2}{\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g}\right) & \text{si } p_{inf} < p_{MI} < p_{sup} \\ \rho_{M0}^g & \text{si } p_{MI} < p_{inf} \\ \rho_{M0}^l & \text{si } p_{MI} > p_{sup} \end{cases} \quad (3.80)$$

avec  $\rho_{M0}^l = \frac{1}{Y_e} [\rho_e^l + \alpha_{min} (\rho_{sat} - \rho_e^l)]$  et  $\rho_{M0}^g = \frac{1}{Y_e} [\rho_e^g + \alpha_{max} (\rho_{sat} - \rho_e^g)]$ .

Avec ces modélisations, les masses volumiques dans les phases pures dépendent de la quantité d'air introduite dans le milieu. De plus, la zone de métastabilité n'est plus nécessairement centrée sur la pression de vapeur saturante. En revanche, **la forme de la loi est identique à la loi barotrope originale**. Les codes de calcul ne doivent donc pas être modifiés pour pouvoir considérer ces changements et la détermination de la population de bulles peut s'opérer intégralement en **post-traitement**.

#### 3.4.1.2. Distinction des pressions phasiques

Les équilibres mécanique (équilibre de Laplace), thermique ( $T^g = T^l$ ) et chimique ( $p_e^g = p_{sat}$  et l'hypothèse sur le transfert d'air) étant supposés atteints dans notre approche, l'équation (3.60) peut se simplifier en établissant une relation entre les pressions phasiques et la pression homogène.

$$\nabla p_{MI} = \alpha_g \nabla p_M^g + \alpha_l \nabla p_M^l \quad (3.81)$$

- En inversant la loi d'état (Eq. (3.78)) dans le mélange, la pression  $p_{MI}$  se détermine en fonction de  $\alpha_g$ .

$$p_{MI}(\alpha_g) = p_{LOI} + \frac{c_{min}^2}{2} (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) \arcsin\left(\frac{1 - 2\alpha_g}{\alpha_{max} - \alpha_{min}}\right) \quad (3.82)$$

- De même, que ce soit en considérant les transferts de masse pour l'air ou non, la pression de la phase gazeuse peut être établie uniquement par la connaissance du taux de vide (cf 3.3.2.2.).

$$p_M^g(\alpha_g) = p_{sat} + p_a^g(\alpha_g) \quad (3.83)$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} p_M^g(\alpha_g) = p_{sat} + X_a^g \frac{Y_a}{Y_e} \frac{\alpha_g \rho_{sat} + \alpha_l \rho_e^l}{\alpha_g} r_a T^g & \text{pour la loi } \mathbf{B-STMA} \\ p_M^g(\alpha_g) = p_{sat} + \frac{Y_a}{Y_e} \frac{\alpha_g \rho_{sat} + \alpha_l \rho_e^l}{\alpha_g + \alpha_l H_e^*} r_a T^g & \text{pour la loi } \mathbf{B-TMAI} \end{array} \right. \quad (3.84)$$

Dans la zone de mélange, la pression du liquide s'écrit donc également comme une fonction du taux de vide et est calculable à une constante près par l'intégration de la relation (3.81).

$$p_M^l = \int \frac{1}{\alpha_l} \left[ \frac{d}{d\alpha_g} [p_{MI}] - \alpha_g \frac{d}{d\alpha_g} [p_M^g] \right] d\alpha_g + \text{constante} \quad (3.85)$$

**Remarque :** La forme en sinus de la loi barotrope ne permet l'obtention d'une forme analytique de la pression du liquide que pour  $\alpha_{max} = 1$ .

- Pour la loi d'état **B-STMA**, nous ferons dès lors l'hypothèse que  $\alpha_{max}$  est suffisamment proche de 1 pour que la forme analytique obtenue pour  $\alpha_{max} = 1$  soit valable.

$$\left[ \int \frac{1}{\alpha_l} \frac{d}{d\alpha_g} [p_{MI}] \right]_{\alpha_{max}} \approx \left[ \int \frac{1}{\alpha_l} \frac{d}{d\alpha_g} [p_{MI}] \right]_{\alpha_{max}=1} \quad (3.86)$$

- En ce qui concerne la loi **B-TMAI**, nous fixerons le taux de vide maximale à  $\alpha_{max} = 1$ , impliquant l'existence de milieu pur dans l'écoulement.

### 3.4.2. Données expérimentales et topologie du milieu diphasique

Les lois d'état précédentes nous ont permis de définir une forme analytique pour chacune des pressions du mélange (phase liquide, phase gazeuse, pression homogène avec interface). La loi de Laplace, nous permet dans un second temps de caractériser les populations de bulles représentées par ces lois. Nous devons désormais déterminer les paramètres des lois **B-TMAI** et **B-STMA** afin de finaliser notre modélisation en nous basant sur des données expérimentales.

### 3.4.2.1. Estimation de la quantité d'air présent dans l'écoulement

Ces formulations des pressions dépendent de différents paramètres et notamment de la quantité d'air présent dans le milieu. Les données d'installation propres à chacune des expériences permet d'acquérir certaines connaissances sur la répartition des gaz incondensable dans l'écoulement.

- L'eau utilisée dans les expériences est généralement contenue dans une cuve. Dans celle-ci, une surface plane sépare la réserve d'eau d'une poche de gaz, la pression du liquide est donc égale à la pression mesurée  $p_{cuve}$ . Notre modélisation étant a priori représentative du fluide dans l'ensemble de l'installation, elle doit également être valable dans cette partie du circuit.
- De même, le temps entre deux essais est supposé suffisamment long pour que les équilibres thermique et chimique soient atteints dans le réservoir. La répartition d'air entre la phase liquide et la phase gazeuse est définie par la loi de Henry :

$$(X_a^g)_{cuve} = \frac{\alpha_g \rho_a^g}{\rho_a} = \left[ 1 + H_e^* \frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} \right]^{-1} \quad (3.87)$$

- De plus la mesure du taux d'air **dissous** dans la cuve,  $Y_a^l$  nous permet de déterminer la fraction massique d'air totale  $Y_a$  dans l'écoulement toujours à partir de l'hypothèse d'équilibre selon la loi de Henry.

$$Y_a = 1 - \left[ 1 + \frac{\rho_e^l \left( \alpha_{max} + \frac{\alpha_{min}}{H_e^*} \right) \left( \frac{1}{1 - Y_a^l} - 1 \right)}{\alpha_{min} \rho_{sat} + \alpha_{max} \rho_e^l} \right]^{-1} \quad (3.88)$$

La justification de ces formulations peut être trouvée en annexe A.1.

A l'aide de ces considérations, deux des paramètres de la loi,  $X_a^g$  et  $Y_a$  dont dépendent les masses volumiques des phases pures, peuvent être déterminés par les données  $Y_a^l$  et  $\alpha_{min}$ . Celles-ci nous permettrons par la suite de calibrer les lois d'état **B-TMAI** et **B-STMA** afin qu'elles correspondent à des mesures expérimentales.

D'après Lecoffre [5], la concentration d'air dissous dans le liquide pour un écoulement industriel est d'environ 11 ppm. Cette valeur sera prise comme valeur de référence pour la suite de l'étude.

### 3.4.2.2. Données expérimentales sur les populations de bulles et considération sur la forme des inclusions

Afin de valider les populations de bulles obtenues par les lois **B-TMAI** et **B-STMA**, les topologies diphasiques doivent répondre à deux critères :

- Les dimensions des structures diphasiques et leurs évolutions en fonction du taux de vide doivent correspondre à une réalité physique. Sur l'ensemble de la loi d'état, il est donc nécessaire de savoir sous quelles formes, l'écoulement et les interfaces peuvent se présenter dans le respect de nos hypothèses (état d'équilibre mécanique).
- Les dimensions des structures définies par la loi doivent être en accord avec les ordres de grandeurs des mesures expérimentales.

Les expériences menées sur la caractérisation de la topologie diphasique se sont focalisées sur la détermination d'une population de bulles à l'aide d'une loi de distribution volumique. On peut citer par exemple les essais réalisés à l'aide de techniques holographiques menées par Peterson, Katz ou Gates (Fig. 3.7) ou bien encore les travaux de Sato [202] portant sur la population de bulles derrière un cylindre cavitant (Fig. 3.8).

L'ordre de grandeur des dimensions des bulles est compris entre le  $\mu m$  et la centaine de  $\mu m$  pour ces écoulements. La densité volumique de bulles est, de plus, compris entre  $10^9 m^{-4}$  et  $10^{15} m^{-4}$ .

Les plages de valeurs obtenues dans ces expériences sont relativement larges et montrent la sensibilité de la croissance de bulles aux paramètres extérieures. Elles peuvent toute fois servir à l'ajustement des paramètres des lois d'états lorsque celles-ci définissent une population de bulle. Les structures diphasiques peuvent en effet, **avec nos hypothèses**, exister sous diverses formes non considérées par ces études :

3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

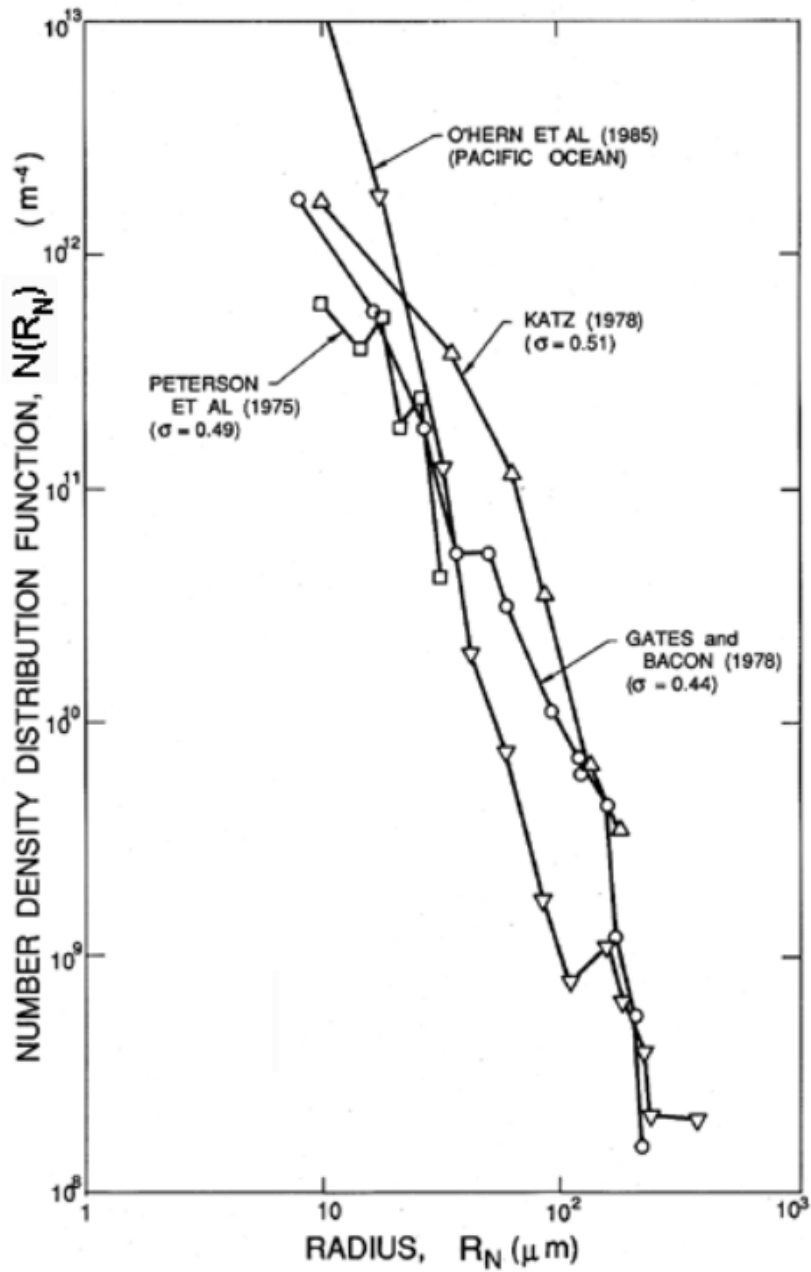


FIGURE 3.7 – Mesure de distribution de population de bulles en fonction de leurs rayons dans trois tunnels de cavitations [84,124,172] et dans l’océan au large de Los Angeles [166]

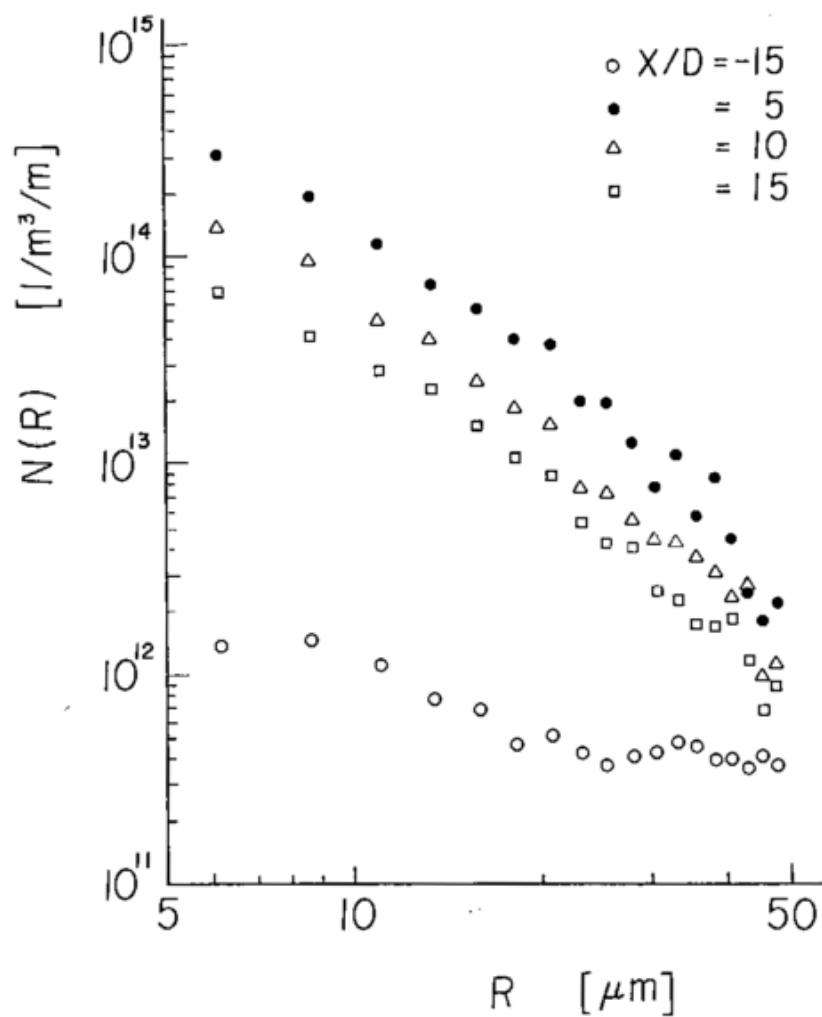


FIGURE 3.8 – Distribution de tailles de bulles dans le sillage d'un cylindre placé dans un écoulement cavitant en fonction de la distance au cylindre [202]

### 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

#### Topologie de l'écoulement avec la phase gazeuse comme phase dispersée :

Si la phase gazeuse est la phase dispersée (et à l'équilibre), elle peut se présenter sous trois formes différentes en fonction des conditions de pression. L'équilibre mécanique de Laplace contraint l'orientation de la courbure de l'interface. Ainsi, si la pression du liquide est supérieure à celle de la phase gazeuse, les inclusions ne peuvent exister que dans les rugosités de particules solide. Dans le cas inverse, elles peuvent se présenter à la fois sous formes de bulles et sur les particules (Fig. 3.9 ).

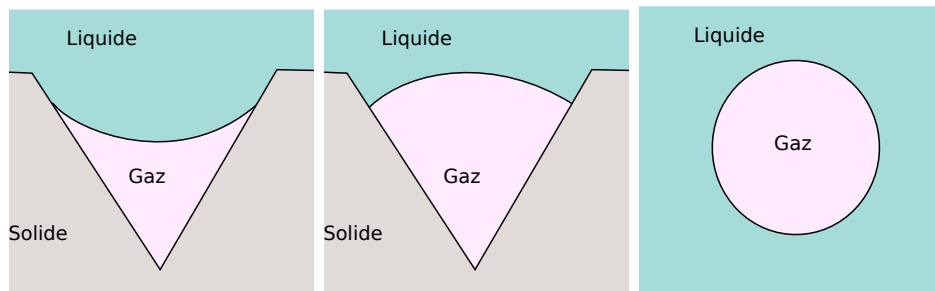


FIGURE 3.9 – Topologie du milieu avec la phase gazeuse comme phase dispersée

#### Aucune des deux phases ne se présentent comme une phase dispersée :

Si les pressions des deux phases sont égales, la courbure moyenne de l'interface est nulle et aucune des deux phases ne peut être considérée comme une phase dispersée. Dans notre hypothèse de bulles monodisperses, cela signifie que l'interface séparant la phase liquide de la phase gazeuse est plane. Le rayon des structures gazeuses est alors infini.(Fig. 3.10).



FIGURE 3.10 – Topologie du milieu sans considération de phase dispersée

#### Topologie de l'écoulement avec la phase liquide comme phase dispersée :

De façon symétrique à un milieu où la phase gazeuse est dispersée, le liquide peut,

dans un milieu à prédominance gazeuse, être situé au sein du gaz sous formes de gouttes d'eau en suspension ou dans les rugosités des particules présentes. Dans ce cas, la courbure de l'interface dépend de l'écart de pression entre les deux phases (Fig 3.11).

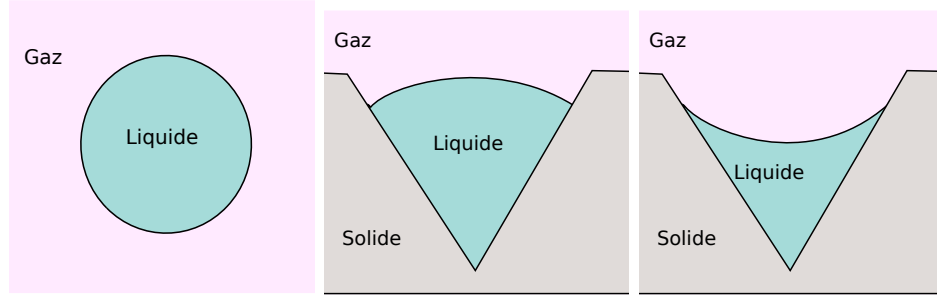


FIGURE 3.11 – Topologie du milieu avec la phase liquide comme phase dispersée

Ces considérations reposent sur l'hypothèse que la distribution volumique de bulles corresponde à une population monodisperse de bulles et que les courbures moyennes soient égales le long d'une interface. La classification de la topologie de l'écoulement présentée ci-dessus représente donc un **cas simplifié d'un écoulement en accord avec les hypothèses réalisées pour l'obtention des lois**. La mouillabilité de la paroi n'a par exemple pas été considérée dans cette étude [178].

Dans ces conditions, le nombre volumique de bulles  $n_B$  déterminée par nos simulations numériques peut être reliée au taux de vide  $\alpha_g$  et à la taille des dimensions des bulles  $\overline{R^g}$

$$n_B^g = \frac{3\alpha_g}{4\pi\overline{R^g}^3} \quad (3.89)$$

### 3.4.3. Calibrage des lois d'états

L'adaptation de la loi barotrope nous a permis de déterminer une formulation des pressions phasiques et une distribution volumique de bulles dans le milieu. Des relations entre les conditions expérimentales et certains paramètres de la loi d'état ont également pu être établies. Nous allons désormais utiliser les ordres de grandeurs des mesures expérimentales afin d'ajuster les paramètres indéterminés des lois **B-TMAI** et **B-STMA**.

### 3.4.3.1. Loi d'état B-TMAI

L'expression exacte de la pression du liquide par l'intégration de l'équation (3.85) nécessite  $\alpha_{max} = 1$  (cf 3.4.1.2.). La présence de phase pure n'étant pas en contradiction avec la formulation de la loi **B-TMAI**, nous fixons cette valeur. Ainsi, la loi ne dépend plus que de trois paramètres :

- La fraction massique d'air introduite dans le milieu  $Y_a$ , pouvant être calculée à partir de données industrielles  $Y_a^l$ .
- La célérité du son dans le mélange  $c_{min}$ .
- La pression autour de laquelle s'établit la zone de mélange  $p_{LOI}$ .

L'absence d'interface et la définition de la pression homogène (3.53) dans les phases pures établissent les relations de continuité entre la zone de mélange et ces dernières.

$$p_{inf} = p_M^g(1) \quad \text{et} \quad p_{sup} = p_M^l(0) \quad (3.90)$$

L'équation (3.84) et la loi des gaz parfaits nous permettent, par la suite, de déterminer la pression inférieure  $p_{inf}$  de la zone de mélange. En imposant la célérité du son minimale dans le mélange, les pressions  $p_{LOI}$  et  $p_{sup}$  sont alors entièrement déterminées par la connaissance de la fraction massique d'air dans l'écoulement.

$$\begin{cases} p_{inf} = p_{sat} \left( 1 + \frac{Y_a r_e}{Y_e r_a} \right) \\ p_{LOI} = p_{inf} + \frac{\pi}{4} (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) c_{min}^2 \\ p_{sup} = p_{inf} + \frac{\pi}{2} (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) c_{min}^2 \end{cases} \quad (3.91)$$

A noter que, dans ce modèle, l'ajout de la tension superficielle et des gaz incondensables crée une zone de métastabilité **au dessus** de la pression de vapeur saturante. Le fluide est, en deçà de cette pression, totalement vaporisée.



Finalement, l'équation (3.85) et les relations de continuité nous permettent de déterminer intégralement la pression de la phase liquide :

$$\begin{aligned}
 p_M^l(\alpha_g) - p_{sup} = & -c_{min}^2 (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) \sqrt{\frac{\alpha_g}{1 - \alpha_g}} \\
 & - \frac{Y_a r_a T^g}{Y_e} (\rho_{sat} H_e^* - \rho_e^l) \left[ \ln \left( H_e^* + \frac{\alpha_g}{\alpha_l} \right) - \ln(H_e^*) \right] \\
 & + \frac{Y_a r_a T^g}{Y_e} \frac{\rho_{sat} H_e^* - \rho_e^l}{1 - H_e^*} \left[ 1 - \frac{H_e^*}{\alpha_g + \alpha_l H_e^*} \right]
 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Le nombre de paramètres indépendants de ce modèle se limite donc à deux,  $c_{min}$  et  $Y_a^l$ . Les figures 3.12 et 3.13 montrent l'influence des deux paramètres sur la distribution de bulles obtenues. Plusieurs conclusions peuvent être déduites de ces graphes :

- La relation entre masse volumique du mélange et taux de présence des phases est très faiblement dépendante de la quantité d'air dans l'écoulement ( $Y_a^l \in [0 : 24ppm]$ ). La dynamique globale de l'écoulement issue des simulations **U-RANS** ne dépendent donc pas de cette donnée.
- En revanche, les dimensions des bulles obtenues dépendent fortement de la quantité d'air présent dans le milieu. La décroissance de la distribution volumique de bulles en fonction du rayon est proche des expériences.
- Le milieu diphasique se présente sous différentes formes en fonction du taux de présence des phases et de la quantité d'air dans le milieu.

**Pour une contenance en air proche de celle considérée industriellement**

$Y_a^l \approx 11ppm$  :

- Lors du passage du milieu purement liquide vers un milieu diphasique ( $\alpha_g = 0$ ), la phase gazeuse apparaît initialement sous forme de bulles ou dans les rugosités des particules solides ( $R^g > 0$ ).
- Une inversion de courbure intervient pour un taux de vide proche de 0,25, la phase liquide devenant dès lors la phase dispersée. Plus le milieu est riche en air ( $Y_a^l$  grand), plus cette inversion intervient pour des taux de

### 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

---

vide importants. A l'inverse l'augmentation de la célérité minimale du son  $c_{min}$  diminue le taux de vide pour lequel l'inversion de courbure s'effectue.

- Près de la zone purement gazeuse, la pression du liquide redevient inférieure à la pression de la phase gazeuse et peut prendre notamment des valeurs négatives. Au regard de nos hypothèses, la phase liquide ne peut dès lors être présente que sur les particules solides.

#### En dessous d'une certaine quantité d'air :

- La transition du milieu liquide vers le milieu diphasique voit l'apparition de la phase gazeuse dans les rugosités des particules solides.
- La présence de bulles à l'équilibre ne devient possible que pour des taux de vides relativement importants ( $\alpha_g \approx 0.6$  en l'absence totale d'air). Cette discontinuité tardive (en terme de taux de vide) de la topologie de l'écoulement ne semble pas répondre à la physique du milieu, les rugosités du milieu ne pouvant pas représenter plus de 60% de l'espace.

La physique de l'écoulement décrite par cette loi et par cette quantité d'air ne correspond pas à celles obtenues expérimentalement. Pour cette approche, la considération d'air est donc nécessaire. Pour  $c_{min} = 1m.s^{-1}$ , cette concentration limite d'air correspond à  $Y_a^l < 0.4ppm$ . Par la suite nous nous limitons à des cas où la concentration est supérieure à cette valeur limite.

Les lois d'états **B-TMAI** et **B-STMA** étant calculées en post-traitement de la loi barotrope de Delannoy, les retours d'expérience du laboratoire vis-à-vis de ces simulations peuvent être utilisés dans nos applications. La valeur de la célérité du son minimale sera ainsi prise à  $c_{min} = 1m.s^{-1}$  (cf 3.2.2.2.).

De plus nous prendrons comme valeur de référence une concentration d'air de  $Y_a^l = 11ppm$ . Cette valeur correspond selon Lecoffre [5] à des conditions classiques d'écoulements industriels et présentent une distribution de bulles en adéquation avec les valeurs expérimentales pour des taux de vide inférieurs à 0,25. Les figures 3.14 retracent

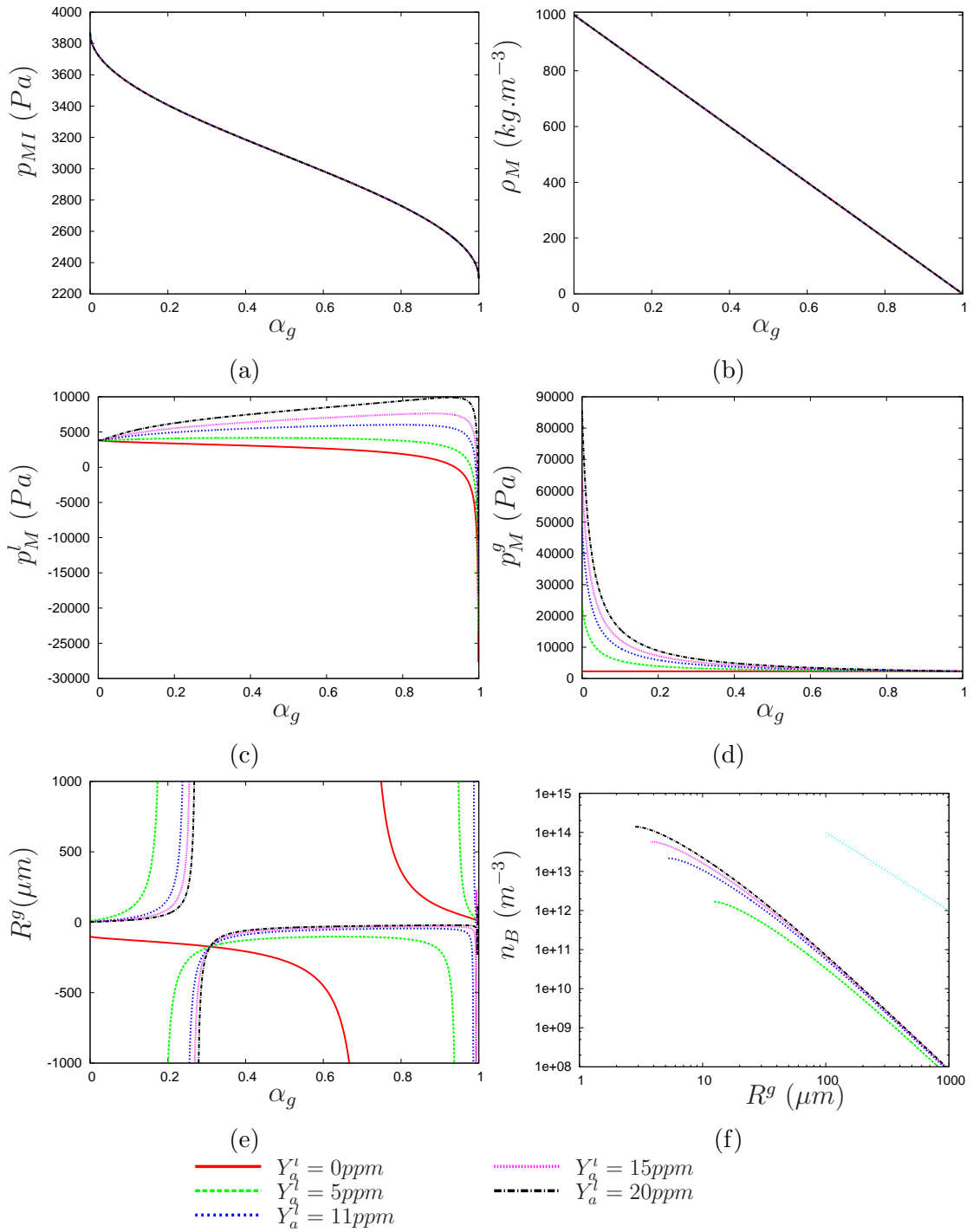


FIGURE 3.12 – Evolution des grandeurs dans le mélange pour la loi **B-TMAI** et  $c_{min} = 1m.s^{-1}$  - étude paramétrique en fonction de  $Y_a^l$

#### *3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air*

---

l'évolution des pressions, du rayon des bulles et de la masse volumique en fonction de la pression du mélange pour ces paramètres. Afin de faciliter la compréhension de la démarche globale, nous indiquons par avance sur ces figures le domaine de la loi d'état potentiellement considéré par l'algorithme d'implosion de bulles.

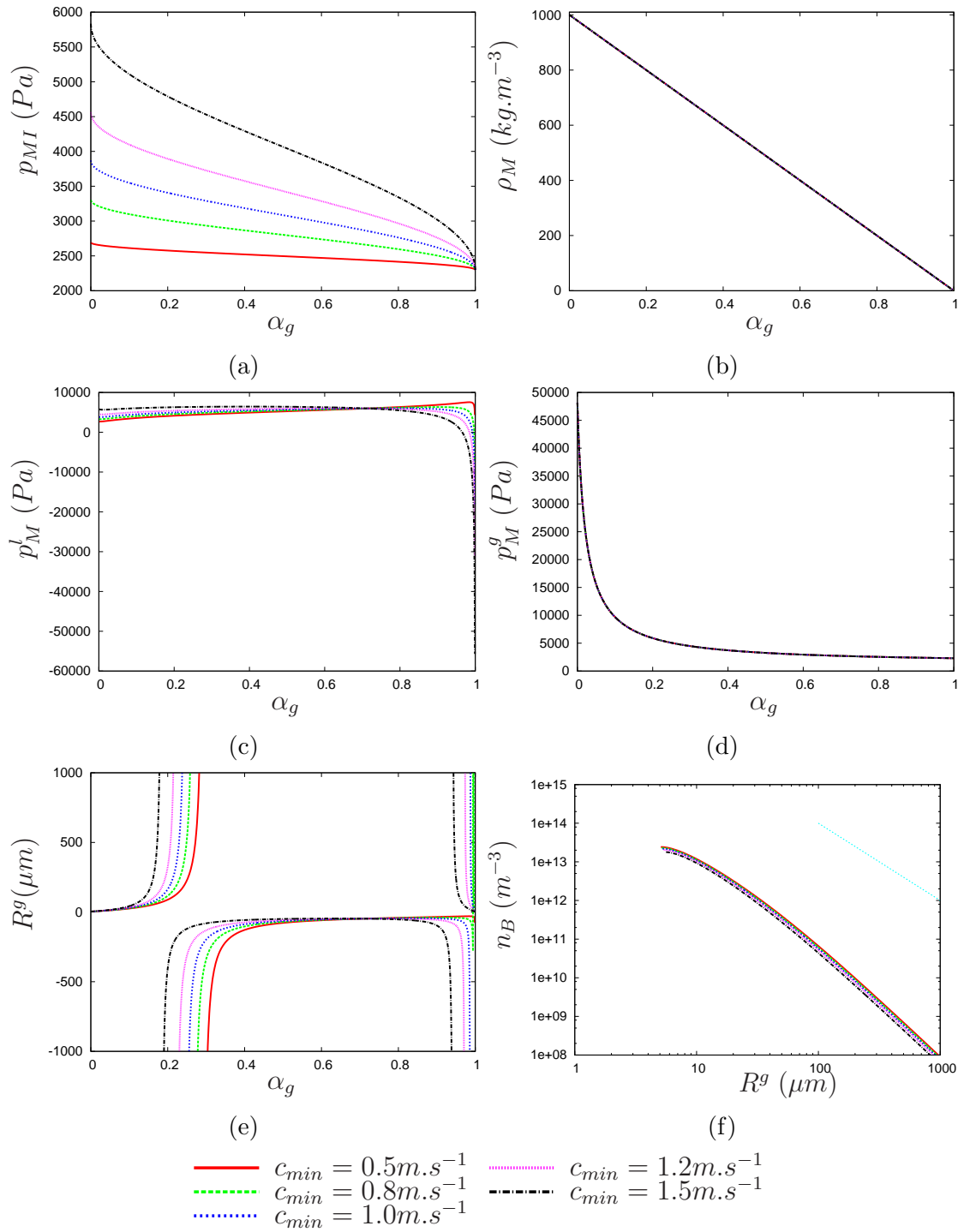


FIGURE 3.13 – Evolution des grandeurs dans le mélange pour la loi **B-TMAI** et  $Y_a^l = 11ppm$  - étude paramétrique en fonction de  $c_{min}$

3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

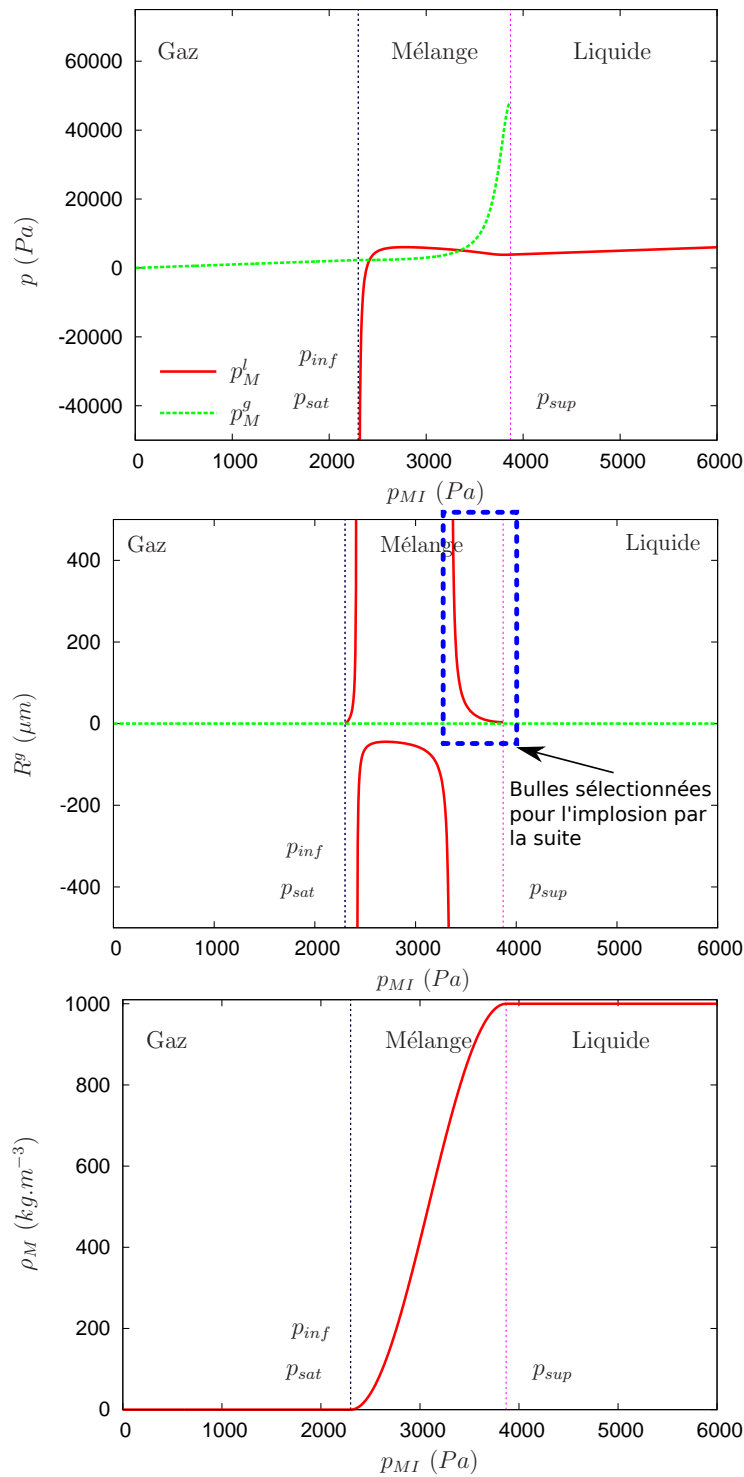


FIGURE 3.14 – Représentation des pressions phasiques, du rayon des structures et de la masse volumique du fluide homogène, en fonction de la pression homogène pour  $c_{min} = 1m.s^{-1}$  et  $Y_a^l = 11ppm$  avec la loi **B-TMAI**

### 3.4.3.2. Loi d'état B-STMA

En considérant une vitesse de transfert d'air à l'interface faible devant le temps caractéristique de l'écoulement, les échanges d'air peuvent être négligés. L'intégration de l'équation (3.85) permet alors d'obtenir la pression du liquide à une constante près dans la zone de mélange. Comme énoncé précédemment (cf 3.4.1.2.), cette formulation est issue d'un approximation de l'intégrale de la fonction (3.85).

$$p_M^l(\alpha_g) = -c_{min}^2 (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) \sqrt{\frac{\alpha_g}{1-\alpha_g}} - X_a^g \frac{Y_a}{Y_e} \rho_e^l r_a T^g \ln \left( \frac{\alpha_g}{\alpha_l} \right) + C_1 \quad (3.93)$$

Les hypothèses considérées sur les transferts de masse permettent de déterminer la pression de la phase gazeuse pour un milieu diphasique ( $0 < \alpha_g < 1$ ). Dès lors, la présence résiduelle des phases fixe cette pression dans la zone de mélange mais aussi en dessous de  $p_{inf}$  et au dessus de  $p_{sup}$ . Afin de respecter l'équilibre thermodynamique considéré dans nos lois, la pression du liquide évolue linéairement dans ces régions et est déterminée à une constante près.

$$p_M^l = \frac{p_{MI}}{\alpha_{min}} + C_2 \quad \text{si } p_{MI} < p_{inf} \quad (3.94)$$

$$p_M^l = \frac{p_{MI}}{\alpha_{max}} + C_3 \quad \text{si } p_{MI} > p_{sup} \quad (3.95)$$

La continuité de pression du liquide entre la zone de mélange et le reste de l'écoulement détermine les constantes  $C_2$  et  $C_3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_{inf}}{\alpha_{min}} + C_2 = -c_{min}^2 (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) \sqrt{\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}}} - X_a^g \frac{Y_a}{Y_e} \rho_e^l r_a T^g \ln \left( \frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} \right) + C_1 \\ \frac{p_{sup}}{\alpha_{max}} + C_3 = -c_{min}^2 (\rho_{M0}^l - \rho_{M0}^g) \sqrt{\frac{\alpha_{min}}{\alpha_{max}}} - X_a^g \frac{Y_a}{Y_e} \rho_e^l r_a T^g \ln \left( \frac{\alpha_{min}}{\alpha_{max}} \right) + C_1 \end{array} \right. \quad (3.96)$$

Finalement, la loi d'état déterminée pour nos simulations doit être valable dans l'ensemble du circuit hydraulique, y compris dans le réservoir. La pression du liquide y étant connue, la constante  $C_3$  peut être déterminée. Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont par la suite calculées grâce aux équations de continuité (3.96).

$$C_3 = p_{cuve} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha_{max}} \right] \quad (3.97)$$

### 3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

---

Cette modélisation dépend de nombreux paramètres ( $p_{LOI}$ ,  $\alpha_{min}$  et  $Y_a^l$  et  $c_{min}$  et  $p_{cuve}$ ) indépendants. Une étude paramétrique située en annexe (cf A.4) permet la détermination d'une configuration de référence. Le champ d'étude des paramètres a été réduit selon ces considérations :

- Comme précédemment (cf 3.2.2.2.), la célérité du son minimale de référence est prise à  $c_{min} = 1m.s^{-1}$ .
- De même la concentration en air de l'écoulement sera prise autour de 11 ppm.
- La zone de mélange est supposée s'établir autour de la pression de vapeur saturante  $p_{sat} = 2300Pa$ .
- La pression de la cuve sera prise par défaut à quatre fois la pression atmosphérique  $p_{cuve} \approx 4.10^5 Pa$ . (configuration de la géométrie EPOCA étudiée par la suite - cf 6.3.).
- Les travaux de Chahine et Van Loo (cf 1.3.2.) présentent tous deux une population initiale de bulles. Ces germes de cavitation correspondent à des taux de présence résiduels de la phase gazeuse  $\alpha_g^0$  de  $3.10^{-6}$  pour la Chahine, et compris entre  $10^{-4}$  et  $5.10^{-3}$  pour Van Loo.

Au vu des résultats de l'étude paramétriques, nous prendrons comme valeur de référence :

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &= 10^{-3} & Y_a^l &= 11ppm & p_{LOI} &= p_{sat} = 2300Pa \\ c_{min} &= 1m.s^{-1} & p_{cuve} &= 4.10^5 Pa \end{aligned}$$

Dans ce modèle, les variations de pression n'engendrent qu'une seule inversion de courbure de l'interface. Celle-ci intervient en dehors de la zone de mélange ( $p_{MI} \approx 5.10^4 Pa$  - Fig 3.15 et Fig 3.16).

- Pour de fortes pressions, la phase gazeuse serait alors accrochée aux particules solides.
- Le début de la zone de mélange ( $p_{MI} = p_{sup}$ ) correspondrait aux détachements et à la formation de bulles dans l'écoulement.



- Dans la zone de mélange près de la phase liquide, la diminution de pression engendre une création de vapeur et donc une croissance des structures gazeuses.
- En revanche, au delà d'un certain taux de vide, les dimensions des bulles diminuent. Au deçà de  $p_{inf}$ , la phase gazeuse est nécessairement la phase prépondérante. Cette diminution indique alors que l'on passe d'une phase majoritairement liquide à une phase majoritairement gazeuse sans inversion de courbure des interfaces.

Ce dernier point atteste des limites des hypothèses prises dans notre étude.

- En effet, en dessous de la pression  $p_{inf}$ , la phase gazeuse est majoritaire. Pourtant les considérations effectuées sur la diffusion moléculaire et sur les transferts de masse font que les variations de pression  $p_{MI}$  du fluide dans cette zone sont contrôlées par la phase liquide (la pression de la phase gazeuse étant constante).
- De plus, une population de bulles monodisperses n'est plus envisageable au-dessus d'un certain taux de présence de la phase gazeuse. D'après les considérations liées à la cristallographie, cette compacité maximale peut être estimée à environ 74% de taux de vide et les bulles situées au-delà de cette limite ne seront pas prises en compte par l'algorithme d'implosion de bulles.

3.4. Proposition de loi d'état avec considération de l'interface et de la présence d'air

---

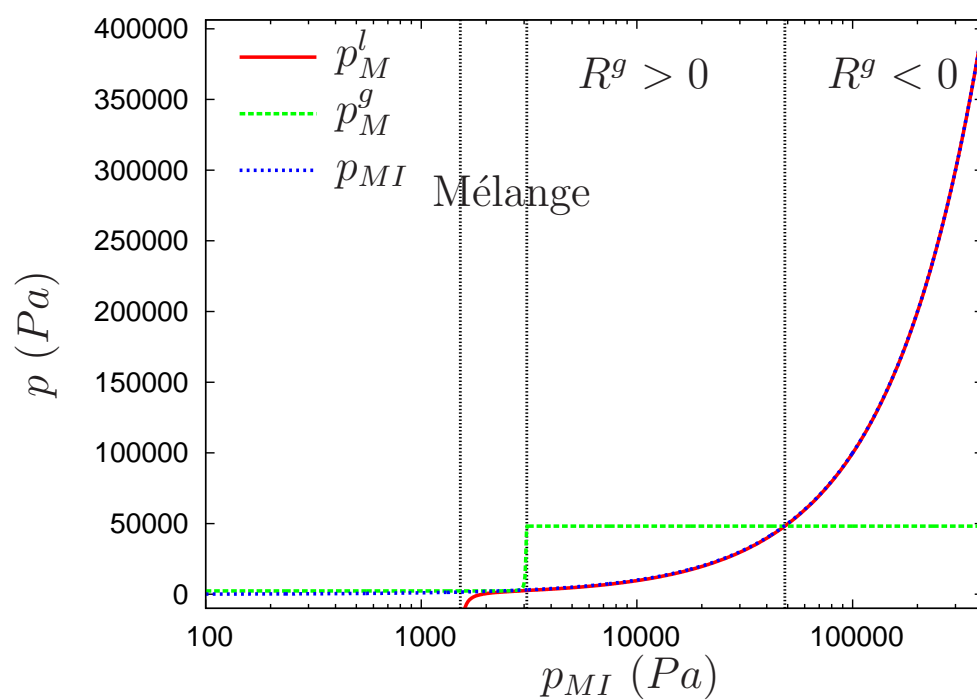


FIGURE 3.15 – Evolution des pressions phasiques en fonction de la pression homogène pour le modèle **B-STMA** et les paramètres de référence

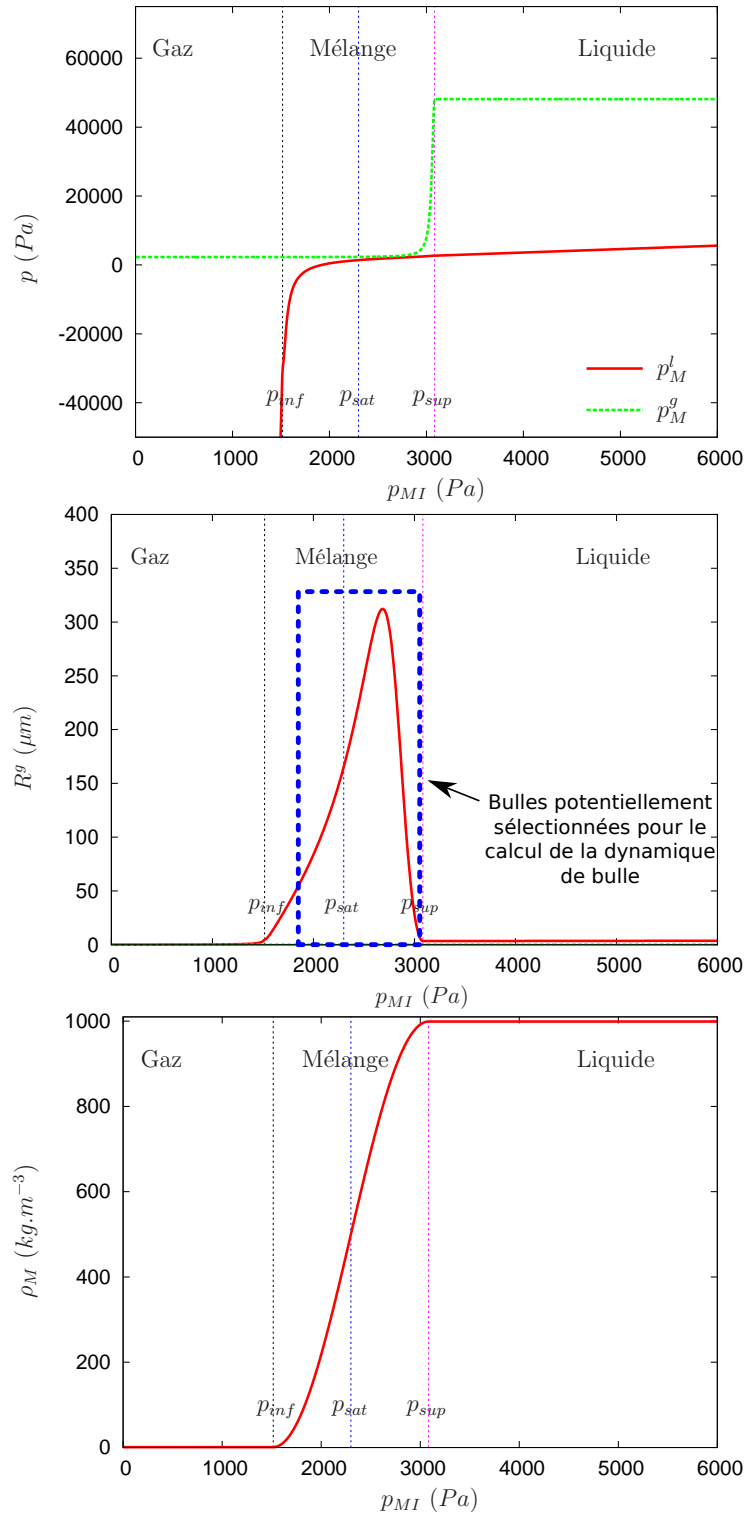


FIGURE 3.16 – Représentation des pressions phasiques, du rayon des structures et de la masse volumique du fluide homogène dans la configuration de référence pour la loi **B-STMA**

## 3.5. Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons dans un premier temps rappelé le formalisme **U-RANS** permettant la simulation d'écoulements à grand nombre de Reynolds. Dans un second temps, nous avons présenté les modèles et lois d'états utilisés classiquement dans la littérature.

Dans notre méthode, il est voulu que les simulations **U-RANS** permettent l'obtention d'une population de bulles au sein de l'écoulement. Nous avons par conséquent introduit les effets de la tension superficielle et de la présence d'air au sein de la loi barotrope. Cette étude a abouti à l'élaboration de deux nouvelles lois **B-TMAI** et **B-STMA** se distinguant par la modélisation des transferts de masses.

- La première suppose un transfert d'air instantané aux interfaces. La topologie du milieu diphasique qu'elle décrit présente plusieurs inversions de courbure et une transition entre les deux phases pures concevables physiquement.
- La seconde néglige les transferts d'air aux interfaces. Un jeu de paramètre a pu être obtenu afin de la faire correspondre aux ordres de grandeurs établis pour nos écoulements (cf 2.2.4.).

Aucune de ces deux lois ne représentent avec exactitude les phénomènes de croissance et de coalescence des bulles. Certaines hypothèses prises pour ces modélisations, comme la considération d'une population de bulles monodisperses à l'équilibre, sont dès lors trop restrictives et devront par la suite être allégées. Ce travail peut s'effectuer soit en résolvant un nombre d'équations plus important, ce qui permettrait de définir une fonction de distribution de bulles plus riches (exemple Grief [93]), soit en modélisant ces fonctions de distribution à l'aide d'une base de données expérimentale importante. L'obtention d'une fonction de distribution universelle est toutefois délicate au vue de la diversité des résultats expérimentaux.

L'avantage principal des lois **B-TMAI** et **B-STMA** est qu'elles prennent une forme équivalente à la loi barotrope déjà intégrée dans les solveurs utilisés au cours de cette thèse. Les populations de bulles, considérées par la suite pour initialiser le calcul d'implosion

de bulles, peuvent par conséquent être totalement déterminées en post-traitement sans modification des codes de calcul.

# Implosions des structures cavitantes

## Sommaire

---

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 4.1.     | Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles . . . . .  | 176 |
| 4.1.1.   | Etat de l'art de l'implosion de bulles dans des conditions non<br>symétriques . . . . .  | 176 |
| 4.1.1.1. | Les algorithmes permettant des déformations non<br>sphériques de l'interface . . . . .   | 177 |
| 4.1.1.2. | Considérations de bulles sphériques . . . . .  | 179 |
| 4.1.2.   | Utilisation d'un potentiel de vitesse . . . . .  | 181 |
| 4.1.2.1. | Mise en place des équations à l'aide du potentiel de<br>vitesse . . . . .  | 183 |
| 4.1.2.2. | Conditions à l'infini . . . . .  | 183 |
| 4.1.3.   | Décomposition du potentiel de vitesse . . . . .  | 185 |
| 4.1.3.1. | Décomposition sur les harmoniques sphériques . . . . .   | 185 |
| 4.1.3.2. | Définition de l'interface et conditions aux limites . . . . .  | 188 |
| 4.1.4.   | Mise en place de l'algorithme de résolution . . . . .  | 190 |
| 4.1.4.1. | Mise en place d'une bijection entre l'espace $\mathbb{S}^2$ et un<br>$\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension infinie . . . . . | 191 |
| 4.1.4.2. | Système matriciel . . . . .  | 191 |
| 4.1.4.3. | Résolution spatiale du système . . . . .   | 194 |
| 4.1.4.4. | Résolution temporelle du système . . . . .   | 194 |
| 4.1.4.5. | Limites de l'algorithme . . . . .  | 196 |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.2.     | Résultats de simulations . . . . .  | <b>197</b> |
| 4.2.1.   | Caractérisation de la dynamique de bulles . . . . .                                   | 198        |
| 4.2.1.1. | Caractérisation de la vitesse de déformation de la bulle                              | 198        |
| 4.2.1.2. | Bilan d'énergie . . . . .   | 199        |
| 4.2.2.   | Bulle isolée placée dans un milieu infini . . . . .                                   | 202        |
| 4.2.2.1. | Modèle analytique lié aux hypothèses de Rayleigh-<br>Plesset . . . . .                | 202        |
| 4.2.2.2. | Comparaisons entre les résultats des simulations et le<br>modèle analytique . . . . . | 205        |
| 4.2.3.   | Implosion d'une bulle en proche paroi . . . . .                                       | 207        |
| 4.2.3.1. | Influence du degré maximal considéré dans l'algo-<br>rithme <b>IDB</b> . . . . .      | 210        |
| 4.2.3.2. | Influence de la distance à la paroi . . . . .   | 212        |
| 4.2.4.   | Implosion d'un nuage de bulles . . . . .  | 214        |
| 4.2.4.1. | Comportement du nuage de bulles . . . . .   | 215        |
| 4.2.4.2. | Influence sur l'énergie potentiellement érosive émise .                               | 217        |
| 4.3.     | Conclusion sur l'algorithme <b>IDB</b> . . . . .                                      | <b>219</b> |

---

---

Le chapitre précédent nous a permis de définir une population de bulles à partir des simulations **U-RANS**. Cette section sera quant à elle consacrée à l'étude du comportement de ces structures diphasiques lorsqu'elles sont soumises à des variations de pression importantes.

Après avoir présenté un aperçu des différentes techniques présentes dans la littérature, nous allons proposer un algorithme de calcul, basé sur une approche potentielle, permettant la simulation de la dynamique d'un nuage de bulles (Fig. 4.1). Nous l'appliquerons par la suite à différents cas-test afin d'étudier son domaine de validité et proposer des perspectives de développement.

**La méthode n'ayant pu être achevée au cours de ce doctorat, les simulations présentées dans ce manuscrit témoignent plus d'un état d'avancement de l'algorithme que de véritables comparaisons avec les expériences.**

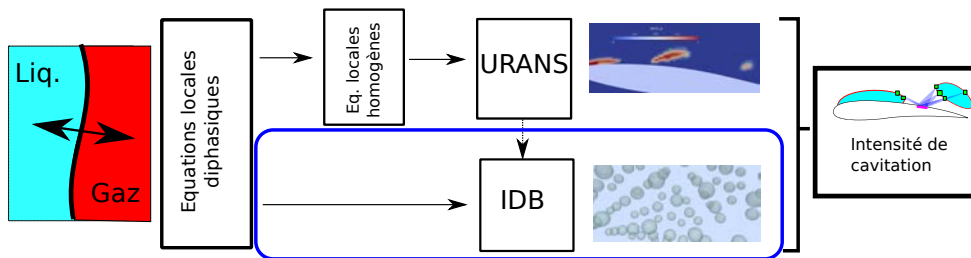


FIGURE 4.1 – Considérations effectuées dans le chapitre 4.



## 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

Comme précisé en introduction (cf 1.2.2.), la dynamique de bulles a fait l'objet de nombreuses études. Celles-ci ont permis une bonne compréhension de la physique de l'écoulement prenant place autour d'une **bulle isolée**. Les modèles les plus aboutis peuvent en effet considérer les transferts de masse, la compressibilité du fluide ou bien encore les échanges de chaleur à l'interface [79].

Comme évoqué en introduction (cf. 1.2.2.2.), en dehors de cette situation, c'est à dire lorsque la bulle n'est plus dans des conditions symétriques, la résolution de sa dynamique est bien plus délicate. En effet, des interactions existent entre les ondes de surpression (réfléchies par la paroi ou émises par d'autres bulles) et les mouvements de l'interface. Les dommages réalisées par l'implosion d'un nuage peuvent être bien plus importants que ceux induits par une bulle isolée ([191, 220]). A l'inverse, un rideau de bulles peut représenter un moyen d'amortir une onde de surpression [92].

De plus, la dissymétrisation des conditions de pression et de vitesse sur l'interface génèrent des déformations non sphériques des bulles. De surcroît, la présence de microjets en proche paroi peut-être source d'endommagement du matériau (cf 1.1.2.1.).

Pour intégrer l'ensemble des mécanismes liés à l'érosion de cavitation, la résolution de la dynamique de bulles doit, par conséquent, être en mesure de simuler des déformations non sphériques des bulles (et la création de microjet) et de quantifier les effets d'amplification (ou d'amortissement) existant dans un nuage.

### 4.1.1. Etat de l'art de l'implosion de bulles dans des conditions non symétriques

Numériquement, plusieurs algorithmes proposent de simuler la dynamique de bulles avec ou sans la présence d'une paroi. Ces méthodes peuvent être classifiées en deux catégories : celles autorisant des déformations non sphériques des interfaces et les autres, considérant des bulles sphériques tout au long de la simulation.

## 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

### 4.1.1.1. Les algorithmes permettant des déformations non sphériques de l'interface

Dans ces travaux Beig [16] utilise une méthode d'interface diffuse (cf 1.2.1.) afin de simuler la dynamique d'une bulle soumise à une onde de surpression. Cette proposition permet de résoudre la dynamique de l'écoulement à la fois dans la phase liquide et dans la phase gazeuse (représentées par une loi d'état des gaz raides) mais ne considère pas les discontinuités de pression et de vitesses aux interfaces. Sa réalisation permet de considérer à la fois les ondes de surpression et la formation de microjets. Néanmoins, elle nécessite une discrétisation très fine de l'interface et ne pourrait être exploitée dans le cadre d'un nombre important de bulles (sans déployer d'importants moyens de calcul). La région au niveau de l'interface est régie par une loi d'état représentant les deux phases du fluide dépendant de la fraction massique de chacune d'elle.

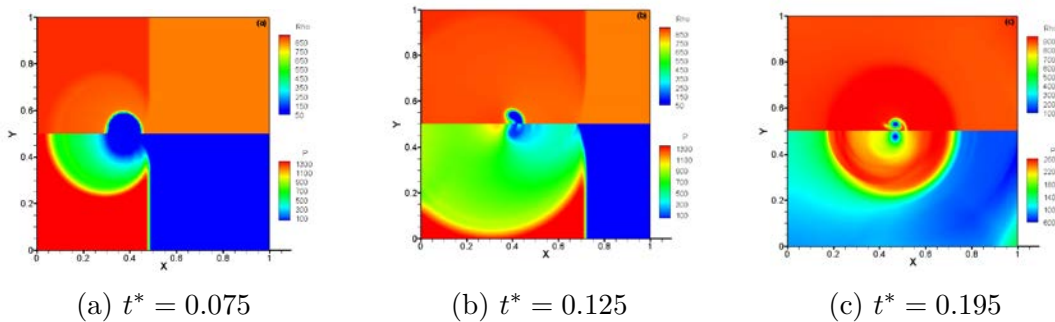


FIGURE 4.2 – Représentation de la masse volumique (haut) et de la pression (bas) dans le cas de l'interaction onde de pression-bulle simulée par la méthode de Beig [16] pour trois instants différents

Schmidt [211] propose d'utiliser le solveur **CATUM** pour la simulation d'un nuage de bulles. Ce code de calcul est également employé pour la simulation d'écoulements à l'échelle d'un profil (cf 1.3.1.2.). Il considère l'équilibre thermodynamique entre les phases et l'absence de viscosité dans le milieu. Par ailleurs, les forces de tension de surface n'y sont pas prises en compte et les transferts de masse sont incorporées dans la loi d'état. Les simulations effectuées parviennent à reproduire différentes phases de l'implosion d'un nuage (de 125 bulles - Fig 4.3). Ces calculs ont nécessité un maillage relativement fin (comprenant  $220^3$  noeuds) et près de 500 heures de temps **CPU**. Les pressions maximales

obtenues en paroi sont de l'ordre de  $5.10^7 Pa$  pour des bulles d'approximativement  $1mm$  (initialement) et une pression ambiante de  $4.10^6 Pa$ . Le rapport entre l'amplitude de l'onde de surpression et la pression ambiante est donc d'environ 10 (pour une distance à la paroi estimée à  $7mm$ ). Dans cette configuration, les ondes de surpression demeurent alors trop faibles pour endommager le matériau.

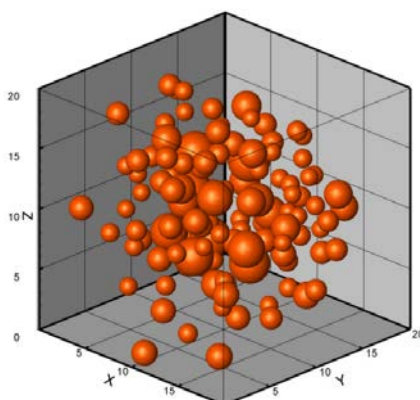


FIGURE 4.3 – Distribution de bulles initiales utilisée pour le calcul d'implosion de bulles réalisée par Schmidt [227]

La méthode proposée par Chahine [126] couple un code, **GEMINI**, reposant sur les équations d'Euler compressible avec un code incompressible 3DYNAFS-BEM<sup>©</sup> basé sur la méthode des éléments finis de frontière. Le premier simule l'écoulement lorsque la compressibilité du liquide ne peut pas être négligée (présence d'ondes de surpressions) et nécessite la discrétisation totale du milieu. Le solveur 3DYNAFS-BEM<sup>©</sup> poursuit la simulation dès que le milieu peut être supposé incompressible (Fig 4.4). L'efficacité de cet algorithme repose sur l'utilisation de la méthode des éléments finis de frontière (cf Brebbia [41]) beaucoup moins coûteuse en temps de calcul que l'algorithme GEMINI. En effet, cette méthode requière uniquement la discrétisation des interfaces (bulles, paroi). Dans le cas où la compressibilité du fluide ne peut, à aucun moment être négligée, (comme cela peut être le cas pour un nuage de part le déphasage des oscillations des interfaces) les performances de cette méthode sont diminuées.

Le calcul mené par Rossinelli [195] a nécessité l'utilisation d'un **super ordinateur**

#### 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

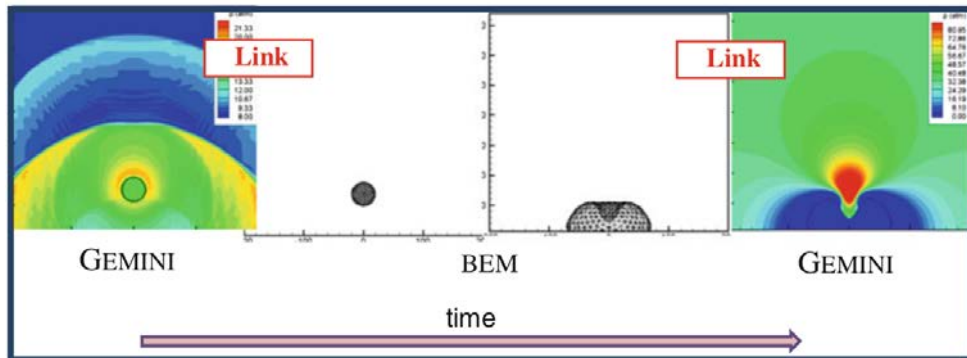


FIGURE 4.4 – Couplage entre les codes de simulation GEMINI et 3DYNAFS-BEM<sup>©</sup> dans la simulation de l'implosion d'une bulle en paroi

de 11 PFLOPS. Malgré la puissance de calcul déployée, ni les transferts de masse aux interfaces, ni les tensions de surface ne sont considérés. Les déformations de chaque interface sont capturées (Fig. 4.5) ainsi que les ondes de surpression émises au cours de cette implosion.

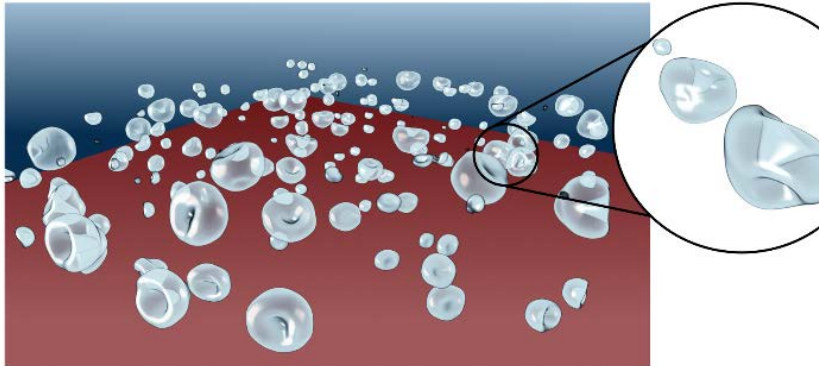


FIGURE 4.5 – Aperçu des déformations des bulles lors de l'implosion du nuage de bulles [195]

##### 4.1.1.2. Considérations de bulles sphériques

La prise en compte de la déformation non sphérique de l'interface augmente le besoin en temps CPU de la simulation. D'autres auteurs simplifient le problème en considérant un nuage de bulles demeurant sphériques au cours du temps. Dès lors, le seul mécanisme

lié à l'érosion représenté est celui lié à l'émission d'ondes de surpression.

Ainsi, Wang et Brennen [245] caractérisent le rayon des bulles à partir de leur distance au centre du nuage  $R(r, t)$  (Fig 4.6). Cette linéarisation permet de déterminer l'évolution temporelle de la dimension du nuage, ainsi que des ondes de surpression émises. Cette méthode prend en considération les tensions de surface ainsi que les viscosités aux interfaces. Elle ne permet pas, a priori, de modéliser la présence d'une paroi ou l'influence d'une onde de surpression extérieure arrivant de façon non symétrique par rapport au centre du nuage.

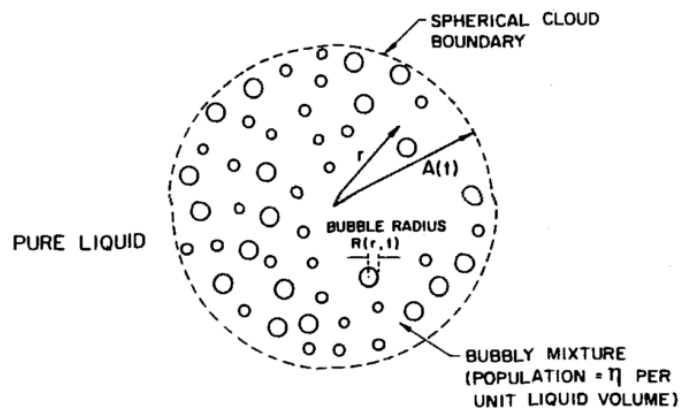


FIGURE 4.6 – Schématisation du nuage par la méthode de Brennen [245]

Le code de calcul **PHANTOM-CLOUD**® [33] permet de simuler le comportement de nuages de bulles sphériques tout en conservant le caractère individuel de chacune d'elles. Cet algorithme repose sur l'utilisation d'un potentiel de vitesse. La viscosité du fluide est négligée et l'écoulement est supposé irrotationnel. L'influence de chaque bulle sur l'écoulement est caractérisée par une fonction potentielle réduisant la représentation de la phase liquide (en terme de pression et de vitesse) à l'unique connaissance de ces fonctions et des rayons des bulles. En revanche, les conditions limites aux interfaces sont moyennées afin de conserver l'aspect sphérique des bulles (méthode SAP [34] - cf 4.1.3.1.).

#### 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

---

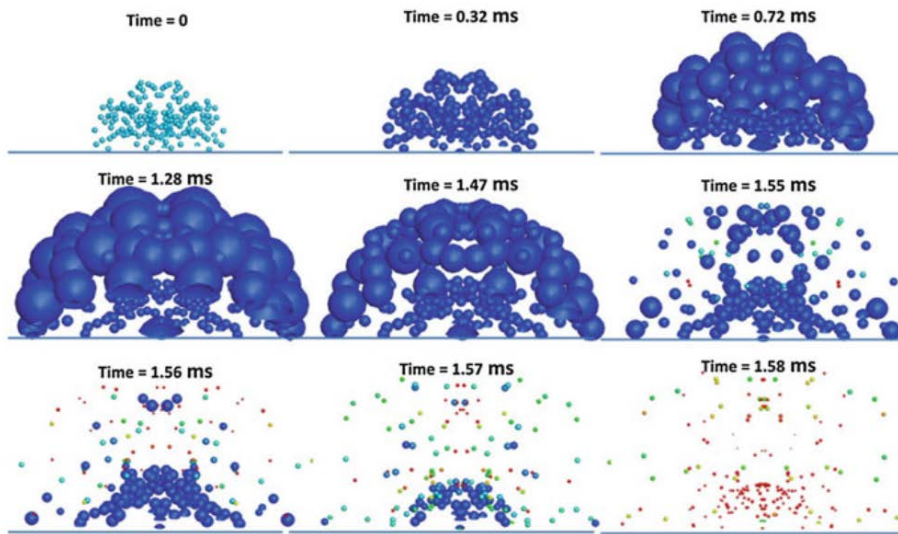


FIGURE 4.7 – Implosion d'un nuage de 400 bulles soumis à une pression sinusoïdale à l'aide du solveur **PHANTOM-CLOUD**© [126]

La simulation de l'implosion d'un nuage de bulles en proche paroi (Fig 4.7) réalisée à l'aide de ce solveur présente un effet d'amplification de la pression mesurée en paroi dépendant du nombre de bulles (d'un rapport 6 entre une bulle isolée et un nuage de 125 bulles).

##### 4.1.2. Utilisation d'un potentiel de vitesse

Les méthodes **DNS** ont l'avantage de prendre en considération les déformations non sphériques des bulles. Dès lors, la dynamique de bulle en proche paroi (l'apparition d'un microjet) est reproduite. Néanmoins, les temps **CPU** requis par ces méthodes restent généralement importants. A l'inverse, les méthodes conservant des bulles sphériques présentent l'intérêt d'être moins coûteuses mais ne représentent que l'émission d'ondes de surpression.

Nous allons désormais proposer un algorithme de simulations d'un nuage de bulles basé sur une méthode potentielle et permettant de représenter de façon approchée la déformation non sphérique des bulles. Cette technique permet alors de considérer à la

fois la compressibilité du fluide, les effets d'amplifications et les modifications engendrées par la dissymétrie des conditions aux interfaces sans nécessiter la discrétisation totale du milieu.

Dans notre approche, le milieu considéré est un milieu diphasique dans lequel la phase gazeuse représente la phase dispersée . En revanche seule la phase liquide sera résolue, la phase gazeuse étant modélisée par des lois d'états.

Les diffusions moléculaires et thermiques au sein de la phase gazeuse sont supposées suffisamment rapides pour que les variables thermodynamiques (température, pression, masse volumique, concentration en air) soient homogènes dans chacune des inclusions. La pression partielle de vapeur au sein des inclusions sera à tout instant égale à la pression de saturation pour la température du liquide. Les vitesses de transfert de masse des gaz incondensables étant faibles, ils seront, dans le cadre de l'implosion de bulles, négligés. De plus, les vitesses de transfert thermique à l'interface sont supposés faibles par rapport à la durée du collapsus et l'on considérera alors un système adiabatique.

$$\begin{cases} (p_e^g)_i = p_{sat}(T^l) & \text{et} & \dot{m}_e^g = 0 \\ (p_a^g)_i = (p_a^g)_i \left( \frac{V_B^i(t)}{V_{B0}^i} \right)^{\kappa_a^g} & \text{et} & \dot{m}_a^g = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $p_{a0}^g$ ,  $V_{B0}^i$ , la pression partielle de gaz incondensable et le volume de la bulle à l'instant initial.  $\kappa_a^g = 1,4$  est l'indice adiabatique de l'air.

la diffusion thermique et la viscosité au sein du liquide sont négligées. Les transformations s'opérant dans le liquide pure sont alors considérées comme **isentropiques**. L'ensemble du fluide est pris initialement au repos.

Dans ce manuscrit, les effets de viscosité à l'interface seront négligés. Néanmoins, tout comme la considération des transferts de masses, cette hypothèse ne représente pas une nécessité de la méthode mais permet de faciliter la mise en place du code de calcul.

#### 4.1.2.1. Mise en place des équations à l'aide du potentiel de vitesse

Les hypothèses présentées précédemment établissent les équations d'Euler pour la phase liquide. Le théorème de Helmholtz-Hodge permet la décomposition du vecteur vitesse en une partie irrotationnelle et une partie solénoïdale. Le fluide étant pris initialement au repos (et les changements isentropiques), le champ vectoriel  $\mathbf{u}_M^l$  est **irrotationnel** et peut se décrire uniquement à l'aide d'un champ scalaire appelée **potentiel de vitesse**, noté  $\phi$ , sur l'ensemble de la simulation.

$$\mathbf{u}_M^l = \nabla \phi \quad (4.2)$$

Les équations de conservation de masse (2.6) et de quantité de mouvement obtenues précédemment (2.36) peuvent dès lors s'écrire à l'aide de ce potentiel de vitesse.

$$\nabla^2 [\phi] = -\frac{1}{\rho_M^l} \frac{\partial}{\partial t} [\rho_M^l] - \frac{1}{\rho_M^l} \nabla \rho_M^l \cdot \nabla \phi \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \phi] + \frac{1}{2} \nabla [(\nabla \phi)^2] = -\frac{1}{\rho_M^l} \nabla p_M^l \quad (4.4)$$

Les transformations dans la phase liquide étant isentropiques, l'évolution de la pression est liée à celle de la masse volumique par la définition de la célérité du son. Cette dernière est dans notre approche, déterminée par la loi de Tait (Eq. (2.4.2.1.)) utilisée pour modéliser le comportement du liquide.

$$\frac{\partial}{\partial t} [p_M^l] = c_M^{l\ 2} \frac{\partial}{\partial t} [\rho_M^l] \quad \text{et} \quad \nabla p_M^l = c_M^{l\ 2} \nabla \rho_M^l \quad (4.5)$$

$$c_M^{l\ 2} = n \frac{p_M^l + B}{\rho_M^l} \quad (4.6)$$

#### 4.1.2.2. Conditions à l'infini

Loin du nuage de bulles (à l'infini), le liquide est considéré à tout instant au repos. Sa pression est notée  $p_\infty$  et le potentiel de vitesse y est nul. La masse volumique du liquide  $\rho_\infty$  ainsi que la célérité du son  $c_\infty$  y seront prises constantes.

$$\phi_\infty = 0 \quad \text{et} \quad c_\infty^2 = n \frac{p_\infty + B}{\rho_\infty} \quad (4.7)$$



Pour tous points  $P_1$  et  $P_2$  du milieu liquide, on suppose l'existence d'un arc reliant ces deux points et appartenant intégralement au liquide (le liquide est alors un espace connexe). L'intégration de l'équation (4.4) le long de cet arc établit une relation entre les potentiels de vitesse en ces deux points.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} [\phi] + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right]_{P_1}^{P_2} + \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\rho_e^l} dp_e^l = 0 \quad (4.8)$$

En prenant le point  $P_2$  à l'infini, la vitesse du fluide, la pression ainsi que la célérité du son du milieu sont déterminées à partir de la connaissance du potentielle de vitesse  $\phi$  en tout point du liquide  $P_1$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(P_1) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2(P_1) = \frac{c_\infty^{l\ 2} - c_M^l(P_1)^2}{n-1} \quad (4.9)$$

D'où :

$$c_M^l(P_1)^2 = c_\infty^{l\ 2} - (n-1) \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(P_1) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2(P_1) \right] \quad (4.10)$$

$$p_M^l(P_1) = -B + (p_\infty + B) \left[ 1 - \frac{n-1}{c_\infty^{l\ 2}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(P_1) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2(P_1) \right) \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (4.11)$$

L'isentrope du liquide (4.5) ainsi que l'expression de la célérité du son obtenue précédemment (4.10) permettent l'écriture de l'équation de conservation de masse (4.3) uniquement à l'aide du potentiel de vitesse.

$$\begin{aligned} \nabla^2 [\phi] - \frac{1}{c_\infty^{l\ 2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi] &= \frac{1}{c_\infty^{l\ 2}} \left[ \nabla \phi \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \phi] + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi)^2 + \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla \phi)^2] \right] \\ &+ \frac{n-1}{c_\infty^{l\ 2}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} [\phi] + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] \nabla^2 [\phi] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Un développement limité permet finalement d'établir l'approximation au premier ordre de cette fonction lorsque  $c_\infty$  tend vers l'infini. Celle-ci est alors similaire à l'**équation de d'Alembert**, également appelée **équation de propagation des ondes**.

$$\nabla^2 [\phi] - \frac{1}{c_\infty^{l\ 2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_\infty^2}\right) \quad (4.13)$$

### 4.1.3. Décomposition du potentiel de vitesse

L'équation de d'Alembert (4.13) étant linéaire, le potentiel de vitesse est décomposable en plusieurs parties correspondant chacune à l'influence d'une des bulles du nuage. Les perturbations liées à un phénomène extérieur au nuage (passage d'une onde de surpression) peuvent également être représentées par un potentiel de vitesse  $\phi_{ext}$ .

$$\phi = \phi_{ext} + \sum_i^{N_B} \phi_i \quad (4.14)$$

La décomposition est choisie de telle sorte que l'équation de propagation (4.13) soit respectée pour chacun de ces sous potentiels :

$$\nabla^2 [\phi_{ext}] = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi_{ext}] \quad \text{et} \quad \nabla^2 [\phi_i] = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi_i] \quad \text{pour} \quad i = [1 : N_B] \quad (4.15)$$

Afin de faciliter la mise en place du système, chaque bulle  $i$  est associée à un repère sphérique  $(O_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$ ,  $O_i$  étant la position initiale du centre de la bulle (Fig 4.8). Les vecteurs orthogonaux mobiles associés à ce repère sont notés  $(\mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_\varphi^i, \mathbf{e}_\theta^i)$ .

$$d\mathbf{e}_r^i = d\varphi_i \mathbf{e}_\varphi^i + \sin(\varphi_i) d\theta_i \mathbf{e}_\theta^i \quad (4.16)$$

#### 4.1.3.1. Décomposition sur les harmoniques sphériques

La méthode **SAP**, Surfaced Average Pressure, proposée par Chahine [34], permet de conserver un aspect sphérique des bulles en considérant la moyenne surfacique des interactions entre l'écoulement et les interfaces des bulles. L'originalité de notre approche, consiste à étendre cette technique en projetant ces conditions limites sur la base des **harmoniques sphériques**.

Les harmoniques sphériques sont des fonctions complexes définies sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Elles représentent la partie angulaire de la solution de l'équation de Laplace. L'ensemble de ces fonctions est noté :

$$\{\mathcal{Y}_m^l(\theta, \phi) \mid (l, m) \in \mathbb{E}^{\mathbb{L}}\} \quad (4.17)$$

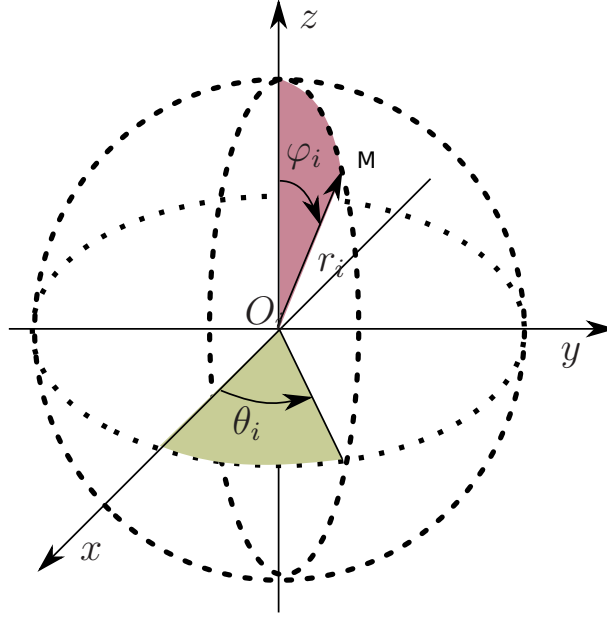


FIGURE 4.8 – Représentation des coordonnées sphériques

Avec  $\mathbb{E}^L = \{(l, m) \mid l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \text{ et } |m| \leq l\}$ .  $l$  et  $m$  étant respectivement le degré et l'ordre de l'harmonique.

Elles sont définies grâce aux polynômes de Legendre ( $P_m^l$ ). La figure 4.9 représente la partie réelle des premières fonctions harmoniques sphériques.

$$\mathcal{Y}_m^l(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_m^l(\cos(\varphi)) e^{im\theta} \quad (4.18)$$

avec :

$$\begin{cases} P_m^l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} [x^2-1]^l & \text{si } m \geq 0 \\ P_m^l(x) = (-1)^{-m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_{-m}^l(x) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Le produit scalaire associé à l'espace des fonctions de carré intégrables de la sphère unité, noté  $\mathbb{S}^2$ , est défini tel que pour toutes fonctions complexes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  appartenant à  $\mathbb{S}^2$  :

$$\langle \mathcal{F} | \mathcal{G} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}^* \mathcal{G} \sin(\varphi) d\theta d\varphi \quad (4.20)$$

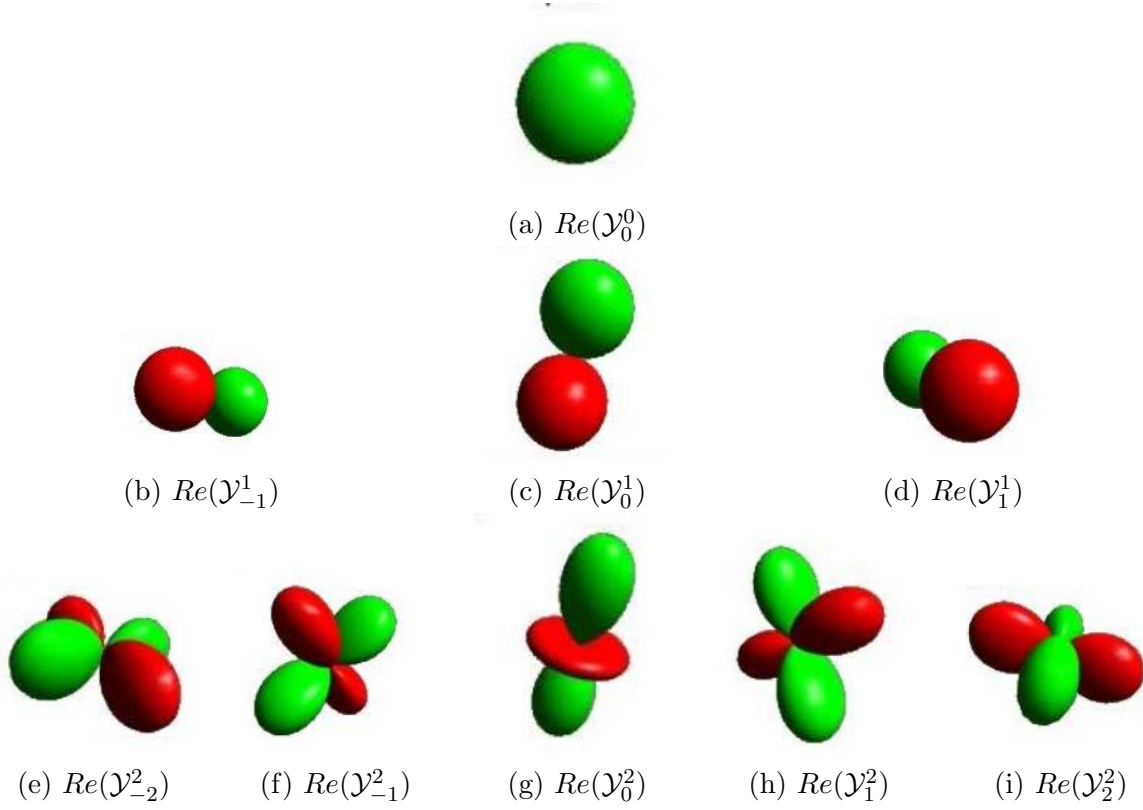


FIGURE 4.9 – Représentation de la partie réelle des fonctions harmoniques sphériques pour  $l \leq 2$ . En vert les valeurs sont positives et en rouge négatives.

Avec cette définition, les harmoniques sphériques constituent une base orthonormée de  $\mathbb{S}^2$ .

$$\langle \mathcal{Y}_m^l | \mathcal{Y}_v^u \rangle = \delta_{mv} \delta_{ul} \quad (4.21)$$

Toute fonction  $\mathcal{F} \in \mathbb{S}^2$  peut dès lors s'exprimer de manière exacte comme une combinaison linéaire des harmoniques sphériques.

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \langle \mathcal{Y}_m^l | f(\theta, \varphi) \rangle \mathcal{Y}_m^l \quad (4.22)$$

Pour chaque bulle  $i$ , le potentiel de vitesse se décompose sur cette base. Le poids de chaque harmonique (de degré  $l$  et d'ordre  $m$  pour la bulle  $i$ ), ne dépendant que du temps

et de la distance  $r_i$ , est noté  $A \binom{l}{m} : i$ .

$$\phi_i(t, r_i, \theta_i, \varphi_i) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A \binom{l}{m} : i(t, r_i) \mathcal{Y}_m^l(\theta_i, \varphi_i) \quad (4.23)$$

Ainsi, l'équation de propagation des ondes (4.15) devient pour chaque bulle  $i$  :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \nabla^2 [A \binom{l}{m} : i \mathcal{Y}_m^l] - \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A \binom{l}{m} : i \mathcal{Y}_m^l] = 0 \quad (4.24)$$

En coordonnées sphériques, l'opérateur laplacien peut se décomposer selon une composante radiale et une composante tangentielle :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_S^2 \quad (4.25)$$

avec :

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{\sin(\varphi_i)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} + \frac{1}{\sin(\varphi_i)} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \sin(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right) \quad (4.26)$$

Les harmoniques sphériques ont, de plus, la propriété d'être solutions de l'équation aux valeurs propres  $\nabla_S^2$  :

$$\forall (l, m) \in \mathbb{E}^{\mathbb{L}} \quad \nabla_S^2 \mathcal{Y}_m^l + l(l+1) \mathcal{Y}_m^l = 0 \quad (4.27)$$

Pour chaque inclusion, le coefficient  $A \binom{l}{m} : i$ , poids de l'harmonique  $\mathcal{Y}_m^l$  est alors solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i^2} [A \binom{l}{m} : i] + \frac{2}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} [A \binom{l}{m} : i] - \frac{l(l+1)}{r_i^2} A \binom{l}{m} : i - \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A \binom{l}{m} : i] = 0 \quad (4.28)$$

#### 4.1.3.2. Définition de l'interface et conditions aux limites

Dans notre système, les bulles sont présentes initialement sous forme de sphères. Leur interface peut donc également être représentée par une fonction de  $\mathbb{S}^2$ . Tout point  $M$  situé sur l'interface d'une bulle  $i$  peut alors être repéré par :

$$\mathbf{O}_i M = R_i(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_r^i \quad (4.29)$$

#### 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

---

En considérant, la caractéristique  $\eta_i^l$  définie en (4.31), le poids de chaque harmonique sphérique se décompose en deux fonctions indépendantes : la première ne dépendant que de la distance au centre de la bulle  $i$ ,  $r_i$ , et la seconde, notée  $C \binom{l}{m} : i$ , de  $\eta_i^l$ . Le lecteur pourra trouver la justification de cette **décomposition de fonction** en annexe C.1.

$$A \binom{l}{m} : i = \frac{C \binom{l}{m} : i (\eta_i^l)}{r_i^{l+1}} \quad (4.30)$$

avec :

$$\eta_i^l(t, r_i, \theta_i, \varphi_i) = t + \frac{r_i}{c_\infty(2l-1)} \left( 1 - \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{2l-1} \right) \quad (4.31)$$

Le potentiel de vitesse à l'interface s'écrit alors sur la base des harmoniques sphériques à l'aide d'une suite de fonctions  $C \binom{l}{m} : i$  (exprimées en  $m^{3+l}.s^{-1}$ ) ne dépendant que de  $\eta_i^l$  (exprimée en s).

L'influence de l'harmonique sphérique de degré 0 évolue en  $\frac{1}{r_i}$  comme c'est le cas dans l'analyse de Fujikawa [79]. L'impact des harmoniques sphériques de degrés supérieures décroît beaucoup plus rapidement avec la distance  $\left( \frac{1}{r_i^{l+1}} \right)$ .

Il est également possible de vérifier que quelque soit le degré considéré et le point du liquide, la caractéristique est inférieure au temps  $t$  dont elle est issue ( $\eta_i^l \leq t$ ) pour  $r \geq R_i$ . Le potentiel de vitesse à un endroit du liquide est donc bien dépendant des **instants antérieurs**. L'influence des harmoniques sphériques est d'autant plus lente à se propager que le degré de l'harmonique est élevé (Fig 4.10).

En se plaçant suffisamment loin de l'interface, la contribution d'une bulle sur l'écoulement se limite donc à l'information associée à sa première harmonique. En se propageant de façon sphérique, ces ondes de surpression créent une dissymétrie des conditions limites sur les autres bulles du nuage. Il existe dès lors un couplage entre les différentes harmoniques sphériques au cours de l'implosion d'un nuage.

Toute fonction  $\phi$  respectant l'ensemble des décompositions précédemment décrites est solution de l'équation de propagation des ondes (Eq. (4.13)). Les relations de saut de masse (Eq. (2.20)) et l'intégration de la quantité de mouvement (Eq. (4.9)) sur l'ensemble du

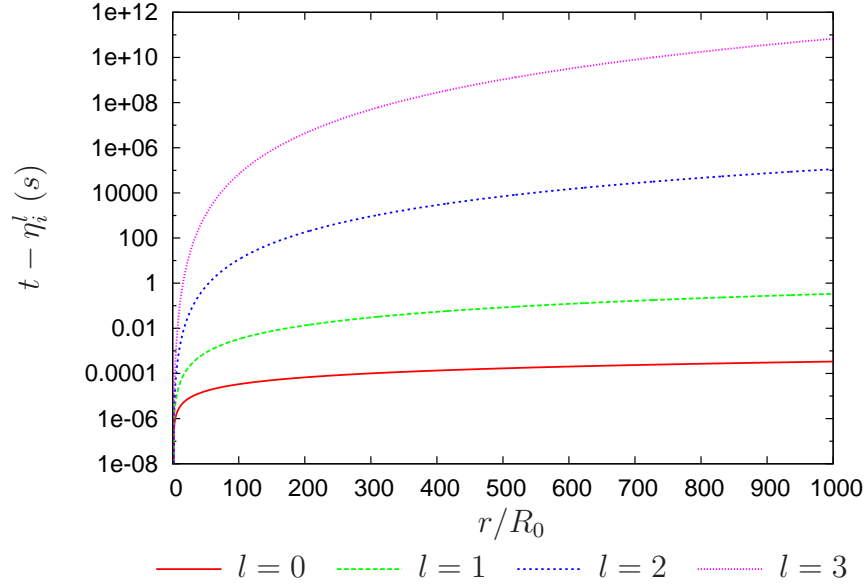


FIGURE 4.10 – Temps nécessaire à la propagation de l’information issue des différentes harmoniques en fonction de la distance  $r$  à l’interface ( $R_0 = 5.10^{-4}m$ )

milieu liquide imposent des conditions aux limites sur le potentiel de vitesse.

$$\text{Pour } r_i = R_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \phi \cdot \mathbf{e}_r^i = \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{e}_r^i - \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l} \mathbf{n}_I^g \cdot \mathbf{e}_r^i \\ \frac{\partial}{\partial t} [\phi] = \frac{c_\infty^l{}^2 - c_M^l{}^2}{n-1} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Ces conditions limites dépendent des variables  $(\theta_i, \varphi_i)$ . Elles représentent alors un système d’équations appartenant à l’ensemble  $\mathbb{S}^2$ .

#### 4.1.4. Mise en place de l’algorithme de résolution

Les propriétés mathématiques des harmoniques sphériques permettent la transposition du problème (Eq (4.13) et (4.32)) dans un espace vectoriel, facilitant ainsi la résolution du couplage entre les différentes harmoniques. Nous allons dans un premier temps présenter les fonctions permettant le passage des conditions limites vers ce  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour ensuite expliciter le système matriciel correspondant.

#### 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

---

##### 4.1.4.1. Mise en place d'une bijection entre l'espace $\mathbb{S}^2$ et un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension infinie

Afin d'ordonner les harmoniques sphériques sur  $\mathbb{N}^*$ , la fonction  $N$  bijective, définie sur  $\mathbb{E}^{\mathbb{L}}$  est posée :

$$N : \begin{array}{ll} \mathbb{E}^{\mathbb{L}} & \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (l, m) & \longrightarrow l^2 + m + l + 1 \end{array} \quad (4.33)$$

Toute fonction  $f$  de  $\mathbb{S}^2$  peut dès lors être associée de façon bijective à un vecteur de  $\mathbb{C}^\infty$ . La  $N(l, m)$  ième composante du vecteur  $F(f)$  sera notée  $f \binom{l}{m}$ .

$$F : \begin{array}{ll} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow \mathbb{C}^\infty \\ f & \longrightarrow F(f) = (\langle \mathcal{Y}_m^l | f \rangle)_{N(l, m)} \end{array} \quad (4.34)$$

Les opérations élémentaires sur l'ensemble  $\mathbb{S}^2$  peuvent être transcrites dans l'espace vectoriel.

- $(\mathbb{C}^\infty, +, \cdot)$  étant un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, pour tout  $a$  et  $b$  complexes et  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{S}^2$ , la relation suivante est vérifiée.

$$F(af + bg) = aF(f) + bF(g) \quad (4.35)$$

- On associera également à l'espace  $\mathbb{C}^\infty$ , l'opérateur  $\otimes$  commutatif tel que pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{S}^2$  :

$$F(fg) = F(f) \otimes F(g) \quad (4.36)$$

Le lecteur pourra trouver en annexe, plus de précisions sur le passage entre l'espace  $\mathbb{S}^2$  et le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (cf C.2). La présentation de ces opérateurs permet de justifier la possibilité d'écrire le système (4.32) dans cet espace vectoriel.

##### 4.1.4.2. Système matriciel

Afin de faciliter l'écriture du système matriciel, plusieurs vecteurs et matrices doivent encore être définis :

- Les fonctions  $R_i(t, \theta_i, \varphi_i)^a$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ , décrivant l'interface de la bulle  $i$  peuvent être décomposées sur la base des harmoniques sphériques. Leurs composantes dans l'es-



pace vectoriel seront notées de telle sorte que :

$$R_i^a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R \binom{l}{m} \binom{a}{i} \mathcal{Y}_m^l \quad \text{avec} \quad R \binom{l}{m} \binom{a}{i} (t) = \langle \mathcal{Y}_m^l | R_i^a \rangle \quad (4.37)$$

- de plus, la vitesse de l'interface  $\mathbf{u}_I$  peut, pour chaque bulle, être représentée par l'évolution temporelle du poids des harmoniques sphériques.

$$\left( \left( \frac{dR_i}{dt} \right) \right)_{N(l,m)} = \left( \frac{dR \binom{l}{m} \binom{1}{i}}{dt} \right) \quad (4.38)$$

- Nous définirons également les vecteurs de  $\mathbb{C}^\infty$ ,  $C_i$  et  $\left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)$  telles que :

$$(C_i)_{N(l,m)} = C \binom{l}{m} \binom{1}{i} \quad \text{et} \quad \left( \left( \frac{dC_i}{d\eta} \right) \right)_{N(l,m)} = \left( \frac{dC \binom{l}{m} \binom{1}{i}}{d\eta_i^l} \right) \quad (4.39)$$

- Les matrices  $\underline{\mathbf{J}}_i^1$  et  $\underline{\mathbf{J}}_i^2$  sont posées telles que sur l'interface de la bulle  $i$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left( \underline{\mathbf{J}}_i^1 + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{J}}_i^2 \right) \left( \frac{d}{d\eta_i} \right) \quad (4.40)$$

La transposition du système (4.32) dans l'espace vectoriel s'écrit dès lors sous la forme suivante pour laquelle le lecteur pourra trouver une explicitation des termes en annexe C.2.

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{M}}_i^1 C_i + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{M}}_i^2 \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right) = -S_i^M + \left( \frac{dR_i}{dt} \right) \\ \left[ \underline{\mathbf{Q}}_i^1 + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{Q}}_i^2 \right] \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right) = S_i^Q - U_i^1 - \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{U}}_i^2 \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right) \end{cases} \quad (4.41)$$

La résolution temporelle de ce système au première ordre peut ainsi être réalisée grâce au système matriciel suivant, établi pour chaque bulle  $i$ .

$$\begin{cases} \left( \frac{dR_i}{dt} \right) = S_i^M + \underline{\mathbf{M}}_i^1 C_i + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{M}}_i^2 \underline{\mathbf{Q}}_i^{1-1} [S_i^Q - U_i^1] \\ \left( \frac{\partial C_i}{\partial t} \right) = \left[ \left( \underline{\mathbf{J}}_i^1 \left( \underline{\mathbf{Q}}_i^1 + \frac{1}{c_\infty} \left( \underline{\mathbf{Q}}_i^2 + \underline{\mathbf{U}}_i^2 \right) \right)^{-1} + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{J}}_i^2 \underline{\mathbf{Q}}_i^{1-1} \right) \right] [S_i^Q - U_i^1] \end{cases} \quad (4.42)$$

#### 4.1. Simulation de la dynamique d'un nuage de bulles

---

Une interprétation physique de quelques termes peut être proposée :

- Le vecteur  $S_i^M$  représente le terme source de l'équation de conservation de la masse. Il correspond donc à la fois aux transferts de masse (négligée dans notre cas) et à l'influence des autres potentiels de vitesse.
- Le vecteur  $S_i^Q$  représente le terme source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (intégrée entre l'interface et l'infini). Il établit donc le lien entre les pressions aux interfaces, la tension superficielle, la viscosité aux interfaces et le saut de vitesse (transfert de masse). Dans notre étude, ces deux derniers éléments sont négligés.
- le terme  $U_i^1$  désigne la contribution de la partie incompressible de la vitesse du fluide à l'interface. La partie compressible dépend de la variation du potentiel de vitesse et est représentée par la matrice  $\underline{U}_i^2$ .
- Les matrices  $\underline{M}_i^1$  et  $\underline{M}_i^2$ , permettent quant à elles, la représentation du gradient du potentiel de vitesse à l'interface selon le vecteur  $e_r^i$ , tandis que  $\underline{Q}_i^1$  et  $\underline{Q}_i^2$  établissent sa dérivée selon  $\eta_i^l$ .

L'intérêt de l'écriture du système sous forme matriciel est d'utiliser l'ensemble des outils fournis par l'**algèbre linéaire** pour calculer analytiquement les couplages existant entre les différentes harmoniques.

Numériquement, la considération de l'ensemble des harmoniques sphériques (c'est à dire pour tout couple  $(l, m) \in \mathbb{E}^{\mathbb{L}}$ ) est irréalisable. Afin de palier à ce problème, le système matriciel est filtré. Les harmoniques sphériques dont le degré est supérieur à un degré de filtrage  $l_{max}$  sont alors négligées. Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension infinie se retreint à un espace vectoriel de dimension  $N(l_{max}, l_{max})$ .

Cette opération de filtrage introduit nécessairement un écart par rapport à la solution exacte (correspondant au couplage entre la partie résolue et la partie filtrée). Néanmoins, l'énergie totale du système étant finie, la contribution des harmoniques sphériques de degrés élevées doit tendre vers 0.

#### 4.1.4.3. Résolution spatiale du système

Dans cette méthode, l'influence des autres bulles ainsi que celle du milieu extérieur sur une interface en terme de pression et de vitesse, est quantifiée par leurs décompositions sur la base des harmoniques sphériques. Numériquement, la surface de la bulle doit donc être discrétisée. L'étude d'un phénomène se produisant sur une sphère étant utilisée dans diverses domaines, telles que la cosmologie, la géophysique ou la physique nucléaire, différentes techniques existent dans la littérature.

Afin de minimiser les erreurs liées à la projection de fonction sur la base des harmoniques sphériques, la discrétisation de l'interface définie par la méthode Healpix [91] est utilisée. Celle-ci permet de découper la sphère en éléments de surface identique. Elle est établie en partant d'une décomposition en 12 cellules, elles-mêmes redécoupées en  $N_{side}^2$  éléments (Fig. 4.11).

Selon la théorie d'échantillonnage de Nyquist, la projection d'une fonction  $f(\theta_i, \varphi_i)$  sur l'harmonique sphérique d'ordre  $l$  et de degré  $m$  nécessite sa discrétisation sur au minimum  $2(l + 1)$  longitudinalement et  $2(m + 1)$  latitudinalement. Afin de respecter ce théorème,  $N_{side}$  doit nécessairement être choisi de tel sorte que :

$$N_{side} > \frac{2}{3} (l_{max} + 1) \quad (4.43)$$

#### 4.1.4.4. Résolution temporelle du système

La résolution temporelle est effectuée à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 [52]. Le passage de l'itération  $n$  à  $n + 1$  est ainsi découpé en plusieurs étapes successives.

$$\begin{cases} t_n^k = t_n^{k-1} + c_k dt \\ R_n^k = R_n^{k-1} + c_k dt \left( \left( \frac{dR_i}{dt} \right) \right)_n^{k-1} \\ C_n^k = C_n^{k-1} + c_k dt \left( \left( \frac{\partial C_i}{\partial t} \right) \right)_n^{k-1} \end{cases} \quad (4.44)$$

Avec  $t_n^0 = t_n$ ,  $R_n^0 = R_n$ ,  $C_n^0 = C_n$  pris pour initialiser la méthode à l'instant  $n$ . Dans le

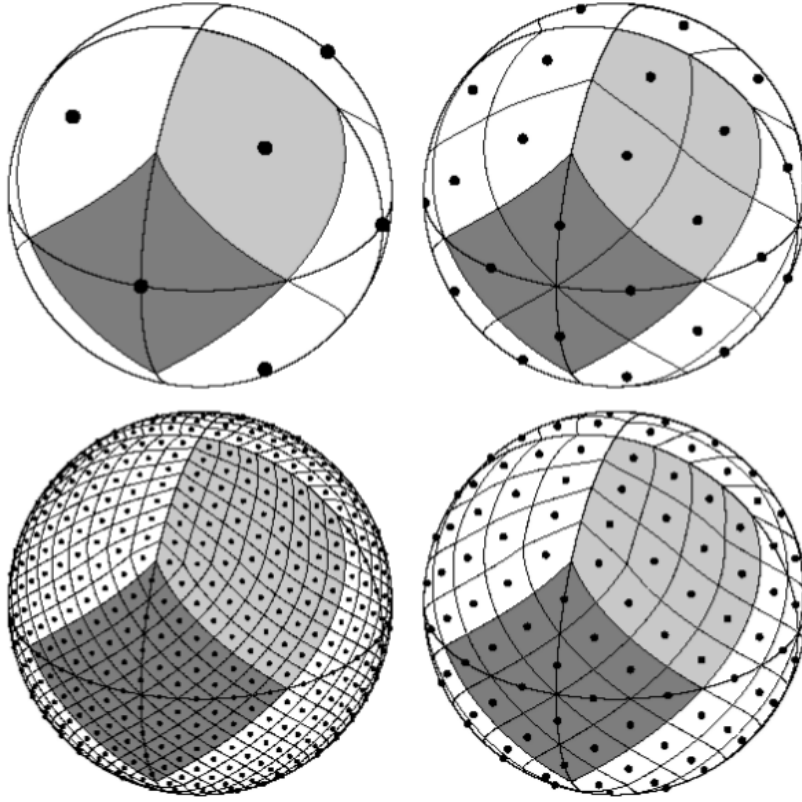


FIGURE 4.11 – Exemple de discrétisation de la sphère par la méthode Healpix pour  $N_{side} = 1, 2, 8, 4$

cas de la méthode d'ordre 4, les coefficients  $c_k$  valent :

$$(c_k) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \quad (4.45)$$

La finalisation de l'itération et donc le passage à l'étape  $n+1$  se fait à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + dt \\ R_{i,n+1} = R_{i,n} + \frac{dt}{6} \left[ \left( \left( \frac{dR_i}{dt} \right)_n \right)^1 + 2 \left( \left( \frac{dR_i}{dt} \right)_n \right)^2 + 2 \left( \left( \frac{dR_i}{dt} \right)_n \right)^3 + \left( \left( \frac{dR_i}{dt} \right)_n \right)^4 \right] \\ C_{i,n+1} = C_{i,n} + \frac{dt}{6} \left[ \left( \left( \frac{\partial C_i}{\partial t} \right)_n \right)^1 + 2 \left( \left( \frac{\partial C_i}{\partial t} \right)_n \right)^2 + 2 \left( \left( \frac{\partial C_i}{\partial t} \right)_n \right)^3 + \left( \left( \frac{\partial C_i}{\partial t} \right)_n \right)^4 \right] \end{cases} \quad (4.46)$$

L'équation portant sur la dérivée temporelle du rayon (Première équation du système (4.42)) ne dépend pas de  $\left(\frac{dC_i}{dt}\right)$  et peut donc être calculée à l'instant  $t_n^k$ . Par la suite sa connaissance permet de résoudre la deuxième équation portant sur la dérivée temporelle de  $C_i$ .

#### 4.1.4.5. Limites de l'algorithme

Même si initialement, la bulle est sphérique, l'existence de la fonction  $R_i(\theta_i, \varphi_i)$  décrivant l'interface par la relation (Eq. (4.29)) n'est pas assurée à tout instant de la simulation.

Par exemple, l'intersection de l'interface représentée par la figure 4.12 avec la droite définie par le vecteur  $\mathbf{e}_r(\theta, \varphi)$  et passant par le centre de la bulle est un ensemble de 4 points. Il est donc impossible de représenter cette surface par une fonction  $R_i(\theta_i, \varphi_i)$  comme décrit par l'équation (4.29).

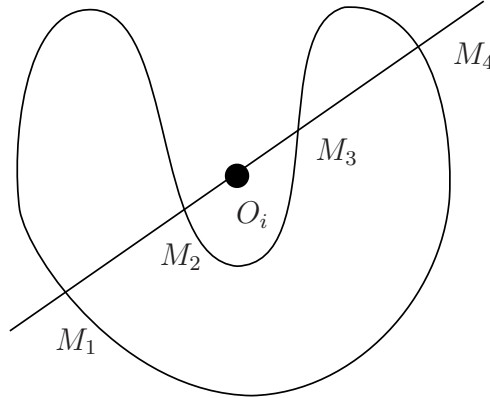


FIGURE 4.12 – Profil de bulle ne correspondant pas au critère de l'algorithme

Ce critère restreint l'algorithme présenté à de petites oscillations de l'interface. Le calcul est **arrêté** au moment où cette limite est atteinte. **Les microjets ne peuvent donc pas être simulés à partir de la version actuelle du code de calcul.**

Il est possible d'étendre cette méthode à des déformations plus importantes en considérant une autre paramétrisation de l'interface. La littérature comprend différentes

## 4.2. Résultats de simulations

---

méthodes permettant cette extension, nous pouvons citer les travaux de Brechbühler [25], Mousa [162] ou bien encore Zhou [255]. Par manque de temps, ce travail n'a pas pu être réalisé et représente une perspective majeure pour cet algorithme.

Les avantages de cette approche sont multiples :

- Les formes de chaque bulle sont exprimées analytiquement facilitant le calcul de la tension de surface.
- Les relations de saut de quantité de mouvement et de masse représentent les conditions limites du système, supprimant dès lors les problèmes de raideurs numériques que l'on peut rencontrer dans des approches **SND**.
- La vitesse et la pression du liquide en tout point de l'écoulement peuvent être calculées sans nécessiter la discrétisation de l'ensemble du champ et en considérant la compressibilité du liquide.

En revanche, cette méthode ne peut prendre ni la **viscosité**, ni la **diffusivité thermique ou moléculaire** au sein de la phase liquide. Le filtrage de la méthode à l'ordre 0 ( $l_{max} = 0$ ) rend par ailleurs le système équivalent au modèle proposé par Chahine dans PHANTOMCLOUD<sup>©</sup> [33].

## 4.2. Résultats de simulations

La section précédente nous a permis de développer un algorithme simulant l'implosion de bulles, (noté **IDB** dans la suite du document), à l'aide de l'algèbre linéaire. La méthode actuelle est cependant limitée à la considération de petites déformations. Dans cette partie, nous allons donc proposer un aperçu des possibilités du code à travers différents cas-tests : une bulle isolée, une bulle en proche paroi et un nuage de bulles. Après avoir étudié le comportement de ces structures gazeuses, nous allons définir les grandeurs associées à l'agressivité de l'écoulement sur le matériau utilisées dans ce travail.

### 4.2.1. Caractérisation de la dynamique de bulles

Les simulations de la dynamique de bulles sont évaluées selon les critères hydrodynamiques suivants :

- L'évolution des dimensions des bulles au cours du temps.
- La pression en différents points de l'espace.
- Le temps caractérisant le rebond de la bulle.

Dans le cadre de cette thèse, l'étude de la dynamique de bulles a pour objectif d'estimer le chargement généré par les implosions transmises à la paroi. Celle-ci peut provenir d'une onde de surpression ou d'un microjet. Des grandeurs spécifiques à ces deux mécanismes doivent alors être précisées.

#### 4.2.1.1. Caractérisation de la vitesse de déformation de la bulle

Les principales caractéristiques du microjet en rapport avec la déformation du solide, sont sa vitesse et ses dimensions. L'algorithme **IDB** ne pouvant pas représenter la formation du microjet, ces deux éléments ne peuvent être acquises à partir de nos simulations. Néanmoins, afin de quantifier les effets de la dissymétrie des conditions à l'interface des bulles, nous allons définir deux grandeurs associées à ce type de déformation.

##### **La vitesse maximale de l'interface selon une direction privilégiée ( $m.s^{-1}$ ) :**

Nous avons précisé en introduction que la pression engendrée par le microjet sur le matériau dépend de sa vitesse (cf 1.1.2.3.). Afin de quantifier l'ordre de grandeur de celle-ci, nous allons relever la vitesse maximale de l'interface dirigée vers la paroi ( $\mathbf{n}_Z$  est le vecteur unitaire associé à ce relevé) dans le cas d'une simulation proche paroi.

$$u_{max}^p = \max_{t, S_B} [\mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n}_Z] \quad (4.47)$$

##### **Dissymétrie des vitesses de l'interface (–) :**

La formation du microjet est induite par la non symétrie des vitesses de l'interface par rapport au centre de la bulle. Afin de quantifier ce déséquilibre, nous proposons de

## 4.2. Résultats de simulations

---

définir une grandeur,  $D_{sym}$ , basée sur l'écart entre la vitesse moyenne de l'interface (et donc liée aux déformations sphériques de la bulle) et la vitesse de l'interface simulée. L'adimensionnement et le relevé de la valeur maximale facilite la comparaison des résultats pour deux configurations différentes.

$$D_{sym} = \max_t \frac{\rho_\infty}{p_\infty 4\pi R_0^2} \left[ \oint_S \left( \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n}_I^g - \overline{\mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n}_I^g} \right)^2 dS \right] \quad (4.48)$$

Si la bulle se déforme de façon purement sphérique, le coefficient  $D_{sym}$  sera nul indépendamment du degré de filtrage considéré. Dans ces conditions, la limitation de l'algorithme à l'ordre 0, ou la méthode **SAP** de PHANTOMCLOUD<sup>®</sup>, fournit une solution exacte de l'implosion de bulles. A l'inverse, plus ce nombre est grand, plus les contributions des harmoniques sphériques de degré supérieur à 1 sont importantes.

### 4.2.1.2. Bilan d'énergie

La compressibilité du liquide étant prise en compte, l'algorithme **IDB** permet de calculer la propagation des ondes de surpression dans le milieu. Afin de comparer deux simulations, nous choisissons de les caractériser par rapport à l'énergie, transmise au fluide, par l'implosion de bulles. L'énergie totale du liquide comprend deux composantes : l'énergie cinétique  $w$  et l'énergie interne ( $\rho_M^l e_M^l$ ).

- Le liquide étant, à l'infini, au repos, l'ensemble du mouvement, et donc de l'énergie cinétique  $w$ , est généré par la présence des bulles.

$$w = \frac{1}{2} \rho_\infty (\nabla \phi)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_\infty^2}\right) \quad (4.49)$$

- La variation de l'énergie interne dans des conditions isentropiques peut s'exprimer à l'aide de la variation de pression. La variation de cette grandeur en présence de bulle est dès lors quantifiable par l'intégration de cette dérivée entre l'état d'énergie à l'équilibre ( $e_M^{eq}$ ) et l'état considéré ( $e_M^l$ ).

$$de_M = \frac{p_M^k}{\rho_M^k 2 c_M^k 2} dp_M^k \quad \text{et} \quad \rho_M^l (e_M^l - e_M^{eq}) = \frac{1}{2} \frac{p_M^l 2 - p_\infty 2}{\rho_\infty c_\infty 2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_\infty 2}\right) \quad (4.50)$$



La variation d'énergie engendrée par la présence des bulles,  $\Delta e_{bulle}$ , somme de l'énergie cinétique volumique  $w$  et de la variation d'énergie interne volumique,  $\rho_M^l (e_M^l - e_M^{eq})$ , s'exprime alors au premier ordre par :

$$\Delta e_{bulle} = \frac{1}{2} \left[ \rho_\infty (\nabla \phi)^2 + \frac{p_M^l{}^2 - p_\infty^2}{\rho_\infty c_\infty^2} \right] \quad (4.51)$$

La dérivée lagrangienne de l'équation (4.51) permet de relier cette énergie  $\Delta e_{bulle}$  à un flux d'énergie,  $(p_M^l - p_\infty) \nabla \phi$ , c'est à dire une puissance par unité de surface ( $W.m^{-2}$ ).

$$\left( \frac{d\Delta e_{bulle}}{dt} \right) + \nabla \cdot [(p_M^l - p_\infty) \nabla \phi] = \mathcal{O} \left( \frac{1}{c_\infty^2} \right) \quad (4.52)$$

La variation de l'énergie  $E_b(V)$  contenue dans un volume  $V$  (Fig 4.13), correspond alors à l'intégration du flux d'énergie traversant son interface  $\partial V$ .

$$E_b(V) = \int_V \Delta e_{bulle} dV \quad \text{et} \quad \frac{dE_b(V)}{dt} = - \oint_{\partial V} (p_M^l - p_\infty) \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_I^S dS \quad (4.53)$$

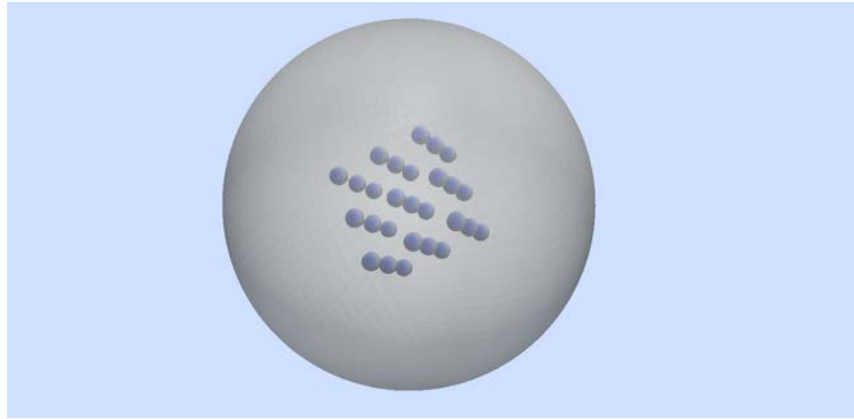


FIGURE 4.13 – Représentation du volume de contrôle entourant un nuage de bulles

Selon le moment du cycle de compression/détente, le mouvement d'oscillations des bulles, mettant le fluide en mouvement, utilise ou fournit de l'énergie au reste du liquide. Afin de ne prendre en considération que la part de cette énergie susceptible d'endommager le matériau, la puissance liée aux ondes de **surpression se propageant vers le milieu fluide** est accumulée. L'intégration temporelle de cette puissance détermine une **énergie**

**potentiellement érosive**,  $E_{er}$ .

$$P_{er} = \oint_{\partial V} \max [(p_M^l - p_\infty) \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_I^S, 0] dS \quad \text{et} \quad E_{er} = \int_t P_{er} dt \quad (4.54)$$

Cette puissance et cette énergie étant définies à partir de l'intégration d'un flux sur une surface, elles sont dépendantes du volume de contrôle choisi. Néanmoins, au delà d'un certain volume, ces deux grandeurs deviennent constante. En effet, une analyse rapide des composants du flux d'énergie permet de vérifier ceci.

- La décroissance du potentiel de vitesse est d'autant plus rapide que le degré de l'harmonique sphérique correspondante est élevée (décroissance en  $r^{-(l+1)}$ ). La contribution des harmoniques supérieures de degrés  $l \geq 1$  devient rapidement négligeable devant celle de la première harmonique, correspondant à une propagation isotrope des ondes.
- De même la formulation de la pression en tout point de l'écoulement (Eq. ((4.11)) dépend de deux termes, l'un possédant une décroissance en  $\frac{1}{r}$  (issu uniquement de la variation temporelle de la première harmonique sphérique). Loin du nuage, les autres termes sont négligeables.

En considérant un volume de contrôle sphérique (dont la surface évolue en  $R_{contrôle}^2$ ),  $P_{er}$  et  $E_{er}$  atteignent, au delà d'une certaine distance, un seuil ne dépendant que de la première harmonique.

### Cas particulier :

En considérant une **source ponctuelle** émettrice d'une onde de surpression sphérique et n'entraînant pas le déplacement du fluide, cette formulation est équivalente à l'équation utilisée par Ward et Emmony [246]. En effet la variation de pression peut être reliée à la vitesse de déformation du fluide (par compressibilité). Une puissance acoustique  $P_{ac}$  peut ainsi être définie.

$$p_M^l - p_\infty \approx \rho_\infty c_\infty \nabla \phi \quad (4.55)$$

$$P_{ac} = - \frac{4\pi R_{contrôle}^2 (p_M^l - p_\infty)^2}{\rho_\infty c_\infty} \quad (4.56)$$

avec  $R_{\text{contrôle}}$ , le rayon du volume de contrôle  $V$  pris sphérique centré sur la bulle isolée.

Les puissances  $P_{er}$  et  $P_{ac}$  représentent la même quantité, mais la seconde approche est une estimation possible uniquement dans le cadre d'une bulle isolée. L'approche multi-bulle privilégie ainsi  $P_{er}$  afin d'exprimer la puissance émise lors de l'implosion de bulles.

Par la suite, afin de pouvoir comparer facilement les différentes simulations, nous adimensionnerons les énergies et les pressions par les grandeurs caractéristiques du problème soit la pression à l'infini  $p_\infty$ , la taille initiale des bulles  $R_0$  et la masse volumique de l'eau liquide à l'infini  $\rho_\infty$ .

#### 4.2.2. Bulle isolée placée dans un milieu infini

Nous allons désormais tester les limites de l'algorithme **IDB** en le comparant à différents cas-tests issus de la littérature. La situation la plus simple est sans nul doute le cas de la bulle isolée (Fig. 4.14). En effet, la symétrie du problème restreint la dynamique de la bulle à un mouvement purement sphérique. Les harmoniques de degré  $l \geq 1$  n'interviennent donc pas dans ce cas.



FIGURE 4.14 – Représentation d'une bulle sphérique placée dans un milieu infini

##### 4.2.2.1. Modèle analytique lié aux hypothèses de Rayleigh-Plesset

En négligeant la viscosité et la compressibilité du fluide, le problème peut être résolu analytiquement. Son étude permet ainsi une validation des fonctions de base de l'algorithme.

## 4.2. Résultats de simulations

---

En effet, dans cette **configuration**, ( $c_\infty = \infty$  et  $\nu_M^l = 0$ ), le mouvement de l'interface n'engendre aucune perte énergétique, la bulle oscille donc indéfiniment entre deux rayons. En multipliant l'équation de conservation de quantité de mouvement intégrée dans le milieu liquide (Eq. (1.12)) par la vitesse du fluide, l'équation suivante peut être obtenue. Quatre énergies peuvent alors être distinguées :

$$\frac{d}{dt} [E_c + E_{pression} + E_{tension} + E_{air}] = 0 \quad (4.57)$$

avec :

- L'énergie cinétique du milieu liquide :  $E_c = 2\pi\rho_\infty R^3 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2$
- L'énergie liée à la tension de surface :  $E_{tension} = 4\pi\sigma R^2$
- L'énergie liée aux pressions à l'infini et pression partielle de vapeur dans la bulle :

$$E_{pression} = \frac{4\pi R^3}{3} (p_\infty - p_{sat})$$

- L'énergie liée à la compression des gaz incondensables dans la bulle :

$$E_{air} = \frac{4\pi R_0^3}{3(\kappa - 1)} p_{a_0}^g \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa-3} - 1 \right]$$

Une énergie potentielle ne dépendant que du rayon de la bulle peut alors être définie (Fig 4.15). Celle-ci permet de déterminer les deux positions extrêmes du système ainsi que la position d'équilibre :

$$E_{pot}(R) = E_{pression}(R) + E_{tension}(R) + E_{air}(R) \quad (4.58)$$

- La position d'équilibre du système est définie par l'absence de mouvement de l'interface. Cette position est alors atteinte pour un rayon de bulle  $R_{eq}$  tel que la loi de Laplace soit respectée :

$$p_\infty + \frac{2\sigma}{R_{eq}} = p_{a_0}^g \left(\frac{R_0}{R_{eq}}\right)^{3\kappa} + p_{sat}$$

- Les rayons maximal et minimal de la bulle correspondent dans ce système aux deux positions pour lesquelles l'énergie cinétique est nulle et peuvent donc être obtenus analytiquement ( $\frac{dR}{dt} = 0$ ).

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{2p_\infty - p_{sat}}{3\rho_\infty} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right] + \frac{2p_{a_0}^g}{3\rho_\infty(\kappa - 1)} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} \right] \\ &+ 2\frac{\sigma}{\rho_\infty R_0} \frac{R_0}{R} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ce système incompressible ne connaissant pas de perte, le rayon maximale atteint après un cycle de compression/détente  $R_{max}^1$  doit être le même qu'à l'instant initial.

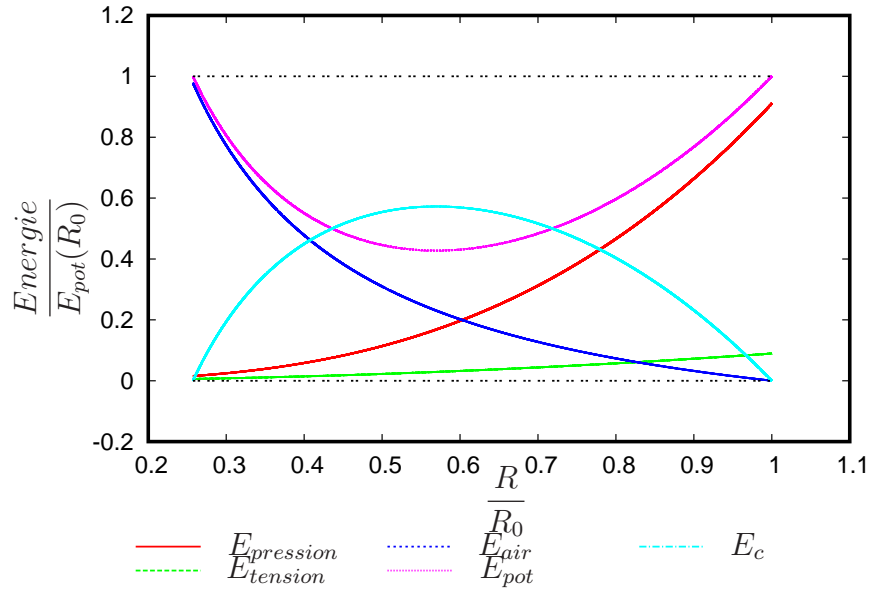


FIGURE 4.15 – Evolution des énergies en fonction du rayon de la bulle pour une bulle de rayon  $R_0 = 5.10^{-5}$  m,  $p_\infty = 50000$  Pa,  $p_{a_0}^g = 5000$  Pa

Enfin, dans le cadre du système sans perte, le temps théorique au bout duquel la bulle effectue son rebond peuvent être déterminés. Cette formulation est équivalente à la détermination du temps d'implosion de Rayleigh [76] mais en prenant en compte la

## 4.2. Résultats de simulations

---

présence de gaz incondensable et la tension superficielle.

$$t_{rebond} = \int_{R_{min}}^{R_0} \left( \frac{dR}{dt} \right)^{-1} dR \quad (4.60)$$

De même, la pression **maximale** en tout point de l'espace s'exprime par :

$$p_{max}(r) = p_\infty + \frac{R_{min}}{r} (p_{I_{max}}^l - p_\infty) \quad \text{Avec} \quad p_{I_{max}}^l(r) = p_{sat} + p_{a_0}^g \left( \frac{R_0}{R_{min}} \right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{R_{min}} \quad (4.61)$$

### 4.2.2.2. Comparaisons entre les résultats des simulations et le modèle analytique

Afin de valider nos résultats, nous allons comparer les valeurs obtenues par nos simulations à celles obtenues analytiquement pour le cas incompressible. Le tableau 4.1 montre une comparaison entre ces différents résultats pour une même configuration initiale, choisie afin de correspondre à l'ordre de grandeur des bulles et variations de pression obtenues dans les simulations **U-RANS** (cf chapitre 6.).

$$p_\infty = 50000 Pa \quad R_0 = 5.10^{-5} m \quad p_{a_0}^g = 5000 Pa$$

Le pas de temps de l'algorithme est choisi de sorte à être largement inférieur au temps de Rayleigh,  $t_R$  (Eq. (1.11)).

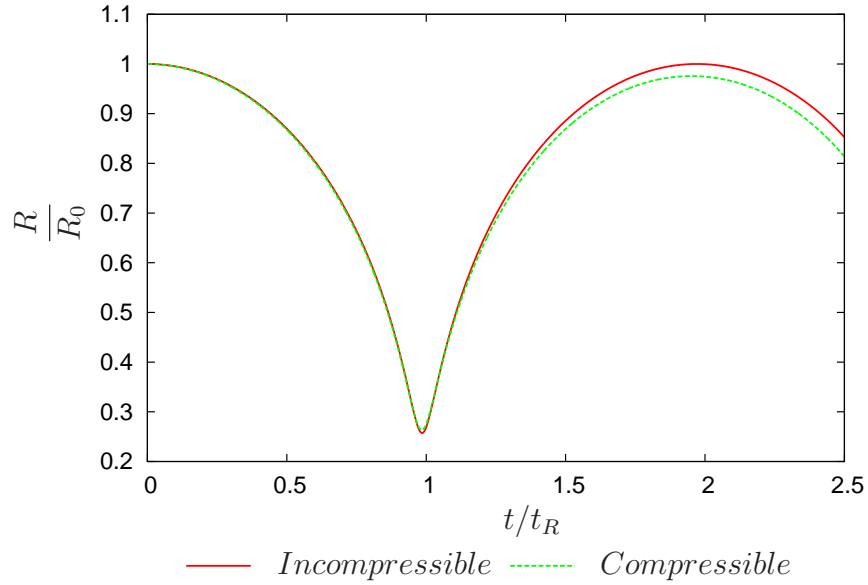
$$dt = 10^{-3} R_0 \sqrt{\frac{\rho_\infty}{p_\infty}} \quad \text{Pour notre configuration :} \quad dt \approx 7.10^{-9} s \quad (4.62)$$

La bonne concordance observée entre le cas théorique et la simulation incompressible permet de vérifier l'ensemble de l'algorithme mis en place dans le cas d'une bulle isolée.

La figure 4.16 permet de suivre l'évolution temporelle du rayon au cours de la simulation. Elle propose une comparaison entre le cas sans perte et le cas incluant la compressibilité. Cette dernière représente une perte pour le système. Par conséquent, à chaque cycle de détente/compression, l'amplitude de l'oscillation autour de la position d'équilibre  $R_{eq}$  diminue, résultat également montré par le tableau 4.1.

| Valeurs comparées |                                      | Résultats analytiques | Simulations - algorithme <b>IDB</b> - bulle isolée |                  |
|-------------------|--------------------------------------|-----------------------|--|------------------|
|                   |                                      |                       | cas incompressible                                 | cas compressible |
| Dimension         | $\frac{R_{min}}{R_0}$                | 0,257                 | 0,257  | 0,263            |
|                   | $\frac{R_{max}^1}{R_0}$              | 1,000                 | 1,000  | 0,975            |
| Durée             | $t_{rebond}/t_R$                     | 0,981                 | 0,985  | 0,984            |
| Pression          | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}} (2R_0)$  | 4,70                  | 4,70   | 4,42             |
|                   | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}} (5R_0)$  | 2,48                  | 2,49   | 2,37             |
|                   | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}} (10R_0)$ | 1,74                  | 1,74   | 1,69             |

TABLEAU 4.1 – Comparaison des résultats de simulations pour une bulle isolée avec le modèle analytique


 FIGURE 4.16 – Evolution temporelle du rayon dans le cas d'une bulle isolée -  $R_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  m,  $p_{\infty} = 50000$  Pa,  $p_{a0}^g = 5000$  Pa

La figure 4.17 montre l'évolution temporelle des différentes puissances établies pour le cas compressible, évaluées sur la surface du volume de contrôle (de rayon  $R_{contrôle}$  pris à  $100 R_0$ ). Les trois grandeurs ( $\frac{dE_b}{dt}$ ,  $P_{ac}$  et  $P_{er}$ ) donnent des résultats similaires. L'esti-

## 4.2. Résultats de simulations

---

mation de Ward et Emmony est donc validée dans cette configuration. L'utilisation de la fonction *maximum* dans la définition de la puissance potentiellement érosive  $P_{er}$  restreint la quantification de la puissance, et donc de l'énergie calculée  $E_{er}$ , au moment du rebond de la bulle.

Le tableau 4.2 permet de confirmer l'obtention d'une valeur asymptotique pour l'énergie potentiellement érosive  $E_{er}$  simulée au delà d'une certaine distance ( $R_{controle}$ ). Les oscillations de l'interface créent un mouvement du liquide autour de la bulle. Lorsque le volume de contrôle est proche de l'interface, l'énergie cinétique liée à ce déplacement est incluse dans la puissance potentiellement érosive. Loin de l'interface, l'énergie cinétique du fluide devient négligeable et seule l'énergie liée à l'onde de surpression est évaluée. Cette dernière représente par ailleurs un faible pourcentage de l'énergie potentielle  $E_{pot} = V_{vap} (p_{\infty} - p_{sat})$  (cf. 1.3.1.3.) utilisée pour caractériser l'implosion de bulle.

|                                   |      |       |       |       |       |
|-----------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{R_{controle}}{R_0}$        | 2    | 10    | 40    | 100   | 200   |
| $\frac{E_{er}}{R_0^3 p_{\infty}}$ | 0,93 | 0,34  | 0,25  | 0,25  | 0,25  |
| $\frac{E_{er}}{E_{pot}}$          | 0,23 | 0,085 | 0,062 | 0,062 | 0,062 |

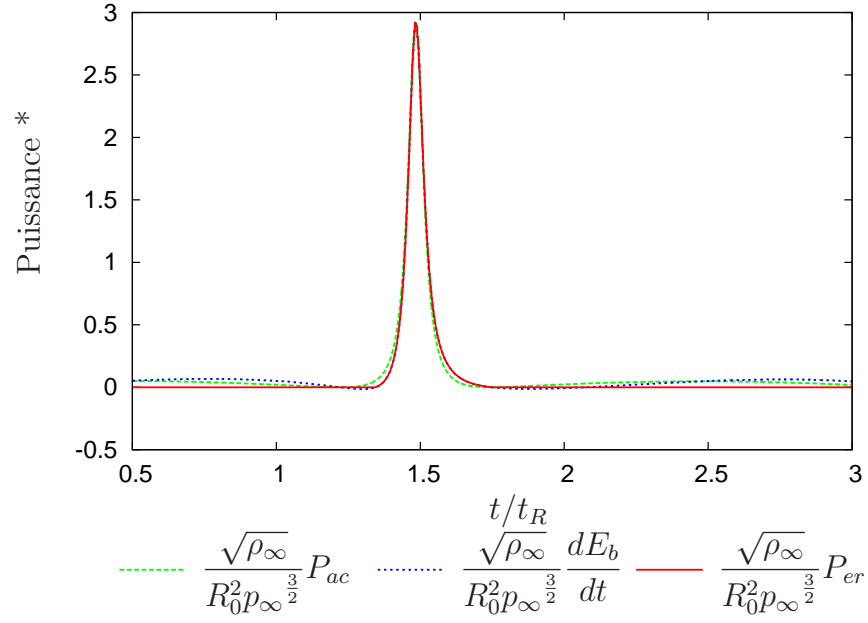
TABLEAU 4.2 – Variation de l'énergie potentielle érosive en fonction de la distance au centre de la bulle

### 4.2.3. Implosion d'une bulle en proche paroi

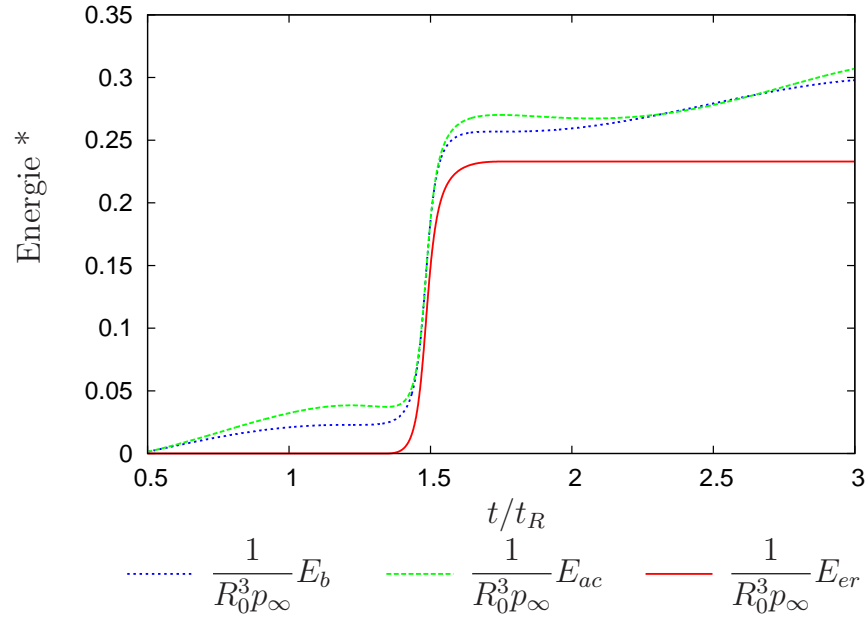
Le cas de la bulle isolée nous a permis de valider les fonctionnalités de base de l'algorithme. Néanmoins, pour tester l'ensemble des possibilités de **IDB**, une dissymétrisation du système est nécessaire. Nous allons donc désormais nous intéresser aux comportements de deux bulles placées dans un milieu infini.

Dans cette configuration, le plan médiateur du segment reliant les centres des deux bulles est un plan de symétrie pour l'ensemble du milieu. Avec la méthode des images, cette situation est dès lors semblable à l'implosion d'une bulle près d'une paroi





(a) Puissance



(b) Energie

FIGURE 4.17 – Evolutions temporelles des puissances et énergies évaluées sur la surface du volume de contrôle  $V$  -  $R_0 = 5.10^{-5}$  m,  $p_\infty = 50000$  Pa,  $p_{a_0}^g = 5000$  Pa -  $R_{contrôle} = 100R_0$

indéformable (Fig. 4.18). Les ondes de surpressions atteignant cette paroi sont alors intégralement réfléchies.

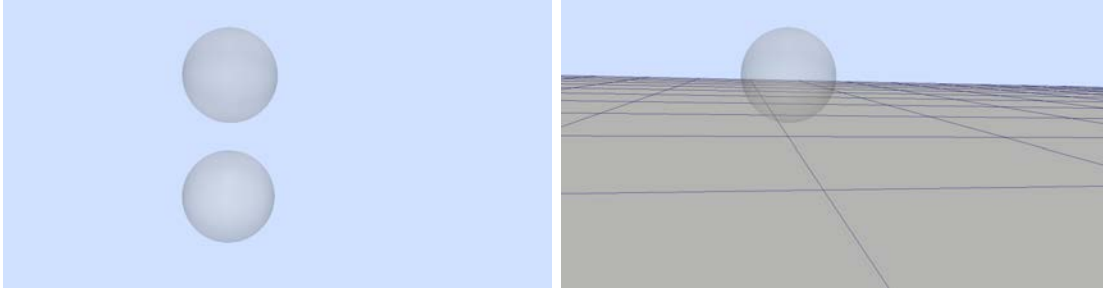


FIGURE 4.18 – Représentation du deuxième cas d'étude - deux bulles placées dans un milieu infini

Les cas-tests choisis pour cette étude sont établis à partir des expériences menées par Isselin [111]. Son dispositif (Fig. 4.19) lui permet de créer des bulles en proche paroi par une technique de claquage optique. Une caméra rapide capture la dynamique de l'implosion de la bulle tandis qu'un capteur de pression placé à une distance  $d_{capt} = 8,7mm$  de la position initiale de la bulle mesure l'onde de surpression engendrée par les collapsus.

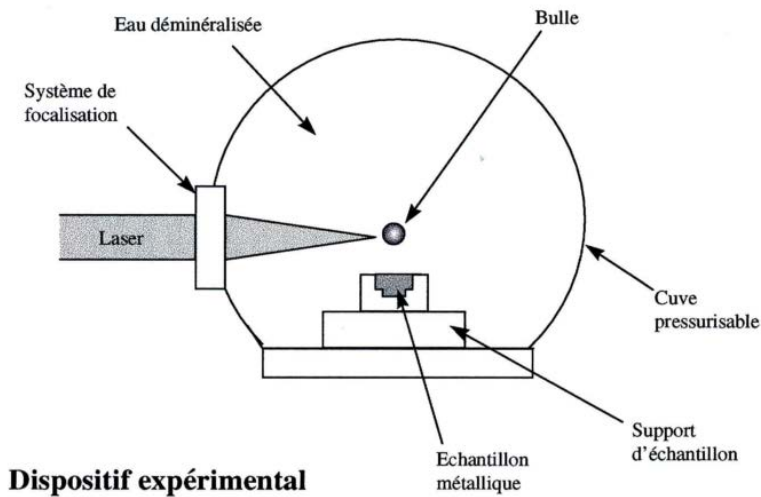


FIGURE 4.19 – Schéma du dispositif expérimental utilisé par Isselin [111]

#### 4.2.3.1. Influence du degré maximal considéré dans l'algorithme IDB

Pour ces simulations, nous allons dans un premier temps et pour une même configuration initiale, étudier l'importance du degré de filtrage,  $l_{max}$  de l'algorithme **IDB**.

Dans ces simulations, la pression du milieu liquide au repos est la pression atmosphérique. La visualisation rapide permet de déterminer la taille maximale de la bulle qui représentera notre condition initiale. La pression partielle du gaz incondensable dans la bulle est inconnue. Elle sera choisie arbitrairement, mais de façon à respecter les ordres de grandeurs obtenues avec les lois **B-STMA** et **B-TMAI** du calcul **U-RANS**.

$$p_{\infty} = 101325Pa \quad R_0 = 6.10^{-4}m \quad p_{a0}^g = 5000Pa$$

La pression du gaz étant inconnue, les comparaisons quantitatives avec l'expérience sont délicates. Ces cas-tests serviront donc à évaluer **qualitativement**, les résultats de simulations réalisées avec l'algorithme **IDB**.

Le tableau 4.3 montre les résultats des simulations en fonction du degré maximal considéré pour  $\gamma = 3$  ( $\gamma = \frac{L}{R_0}$ , avec  $L$  la distance du centre de la bulle à la paroi). En prenant  $l_{max} \geq 2$ , les déformations de la bulle deviennent trop grandes pour rester dans les limites de l'algorithme **IDB**. Des vitesses de l'interface très importantes, de l'ordre de grandeur des vitesses de microjets ( $100 - 150 m.s^{-1}$ ), sont relevées juste avant l'arrêt du calcul. Les symboles – remplacent les données non disponibles ou dont la précision est contestable.

Les figures 4.20 montrent le profil des bulles au moment du rebond dans le cas d'une bulle isolée (Fig. 4.20a),  $l_{max} = 0$  (Fig. 4.20b),  $l_{max} = 1$  (Fig. 4.20c) et au moment où le calcul atteint sa limite pour les cas  $l_{max} = 2$  (Fig. 4.20d),  $l_{max} = 3$  (Fig. 4.20e) et  $l_{max} = 4$  (Fig. 4.20f). Les lignes noires représentent la position initiale du centre de la bulle, la paroi étant située vers le bas. Pour  $l_{max} \geq 1$ , la bulle s'approche de la paroi au moment de l'implosion. Ce phénomène, obtenu expérimentalement, est dépendant des forces de Bjerkness primaires et secondaires [143]. Ces forces, équivalentes à une force d'Archimède généralisée, attirent les bulles les unes vers les autres et favorisent la création de nuages

## 4.2. Résultats de simulations

| $l_{max}$    | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}}$ (paroi) | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}}$ (capteur) | $\mathbf{u}_{max}^p$ ( $m.s^{-1}$ ) | $D_{sym}$ | Commentaires |
|--------------|--------------------------------------|--|-------------------------------------|-----------|--------------|
| bulle isolée | 5,96                                 | 2,01                                   | 41                                  | 0         |              |
| 0            | 9,93                                 | 2,74                                   | 39                                  | 0         |              |
| 1            | 8,04                                 | 2,25                                   | 62                                  | 0,2       |              |
| 2            | -                                    | -                                      | 150                                 | 0,3       | Limite       |
| 3            | -                                    | -                                      | 157                                 | 0,4       | Limite       |
| 4            | -                                    | -                                      | 129                                 | -         | Limite       |

TABLEAU 4.3 – Résultats des simulations pour une bulle en proche paroi en fonction de  $l_{max}$

en filaments [138].

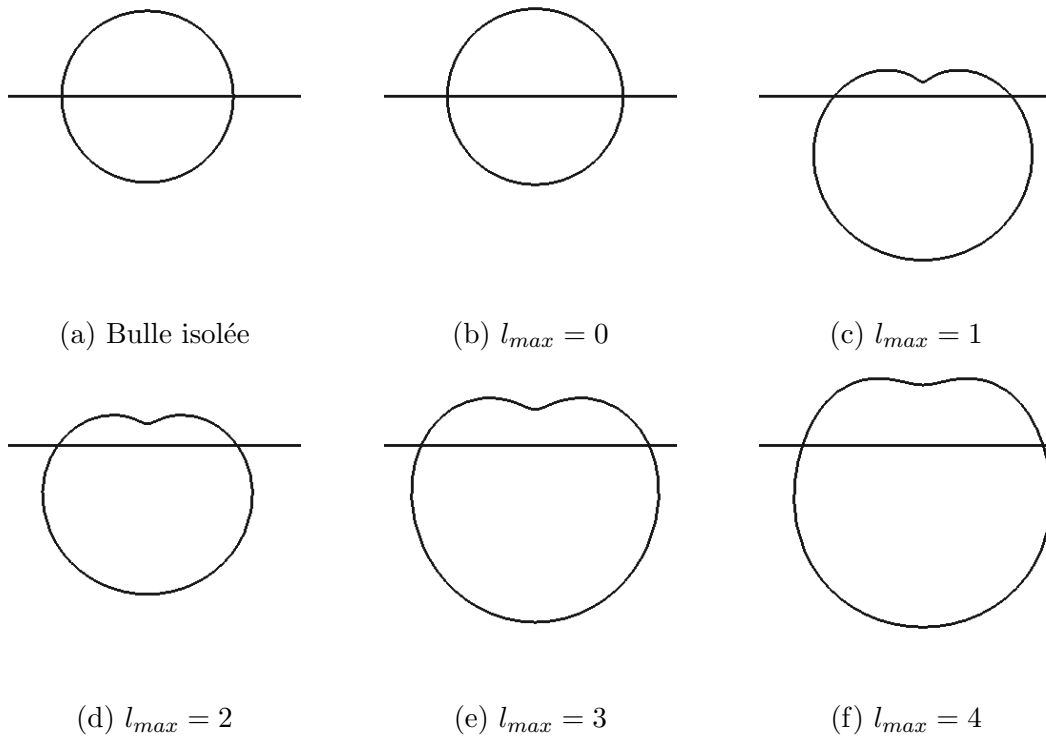


FIGURE 4.20 – Profil de la bulle simulée à son volume initiale (bulle isolée,  $l_{max} = \{0, 1, \}$ ) ou au moment de l'arrêt de l'algorithme **IDB** ( $l_{max} = \{2, 3, 4\}$ )

Les pressions simulées dans le fluide sont dépendantes de la présence de la paroi et du degré de filtrage choisi. Les dynamiques de bulle simulées pour le cas de la bulle isolée et

pour  $l_{max} = 0$  avec la paroi sont relativement semblables comme le montre la proximité des vitesses maximales de l'interface  $u_{max}^p$ . Dans notre application, la paroi, modélisée par la présence d'une 'bulle miroir', est indéformable. L'onde de surpression incidente est ainsi intégralement réfléchiée sur la paroi, ce qui justifie l'augmentation (presque d'un rapport 2) de la pression maximale relevée en paroi pour  $l_{max} = 0$ . Un effet similaire est simulé pour le calcul de la pression au niveau du capteur. Néanmoins, comme ce dernier est placé sur le côté de la bulle, l'effet des ondes réfléchiées est moins important et le rapport de pression entre le cas de la bulle isolée et  $l_{max} = 0$  est différent proche de 1,3.

#### 4.2.3.2. Influence de la distance à la paroi

Nous allons désormais nous intéresser à l'influence de la distance à la paroi sur la dynamique de bulle. Au vu des résultats précédents, seuls les degrés de filtrage  $l_{max} = 0$  et  $l_{max} = 1$  seront considérés, les autres atteignant les limites de l'algorithme **IDB**.

Pour ces simulations, la même configuration initiale est utilisée. Les résultats de ces simulations sont transcrits dans le tableau 4.4.

Comme précédemment, la présence de la paroi, influe sur les pressions mesurées entre les cas de la bulle isolée et de  $l_{max} = 0$ . Le rapport entre les ondes de surpression calculées en paroi entre ces deux cas est relativement constant.

$$\frac{(p_{max}(paroi) - p_{\infty})_{l_{max}=0}}{(p_{max}(paroi) - p_{\infty})_{bulle\ iso.}} \approx 1.75$$

Le capteur de pression numérique étant placé à la même distance de la paroi que la bulle, le rapport obtenu pour les surpressions mesurées à son niveau évolue avec  $\gamma$ . L'influence de la paroi diminue avec l'augmentation de ce dernier, comme en témoigne les coefficients de dissymétrie  $D_{sym}$  ainsi que les vitesses maximales de l'interfaces relevés.

Le choix de la position de la paroi (placée selon la direction  $\varphi = 0 \text{ modulo } \pi$ ) permet de supprimer l'influence des harmoniques sphériques d'ordre,  $m$ , différents de 0. On peut ainsi vérifier que les simulations respectent cette condition. Néanmoins, pour certaines distances à la paroi, l'évolution temporelle des fonctions potentielles présente des discontinuités (Fig

## 4.2. Résultats de simulations

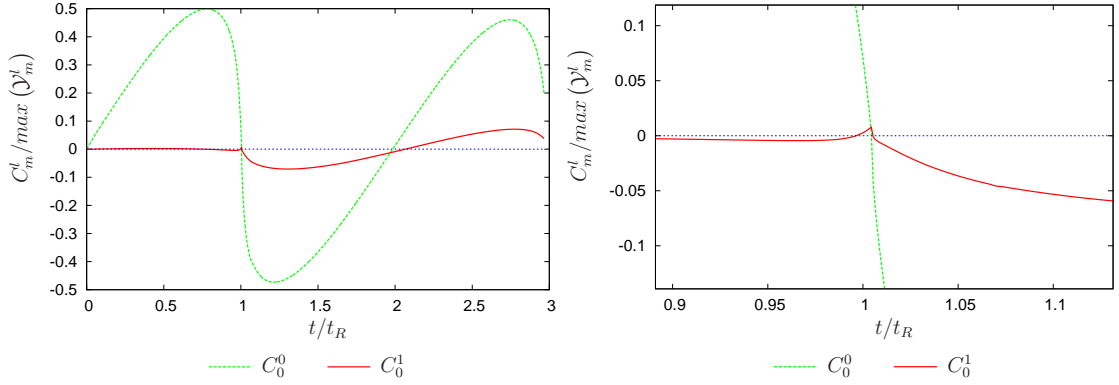
| $l_{max}$  | $\gamma$ | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}}$ (paroi) | $\frac{p_{max}}{p_{\infty}}$ (capt.) | $u_{max}^p$ ( $m.s^{-1}$ ) | $D_{sym}$ | commentaires             |
|------------|----------|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|-----------|--------------------------|
| bulle iso. | 7,0      | 3,11                                 | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
|            | 6,0      | 3,47                                 | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
|            | 5,0      | 3,97                                 | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
|            | 4,0      | 4,72                                 | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
|            | 3,0      | 5,96                                 | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
|            | 2,0      | 8,43                                 | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
|            | 1,3      | 12,30                                | 2,01                                 | 41                         | 0         |                          |
| 0          | 7,0      | 4,72                                 | 2,09                                 | 40                         | 0         |                          |
|            | 6,0      | 5,30                                 | 2,16                                 | 40                         | 0         |                          |
|            | 5,0      | 6,15                                 | 2,29                                 | 39                         | 0         |                          |
|            | 4,0      | 7,70                                 | 2,55                                 | 39                         | 0         |                          |
|            | 3,0      | 9,93                                 | 2,74                                 | 39                         | 0         |                          |
|            | 2,0      | 13,40                                | 2,74                                 | 37                         | 0         |                          |
|            | 1,3      | 20,60                                | 2,75                                 | 36                         | 0         |                          |
| 1          | 7,0      | 4,75                                 | 2,10                                 | 47                         | 0,12      |                          |
|            | 6,0      | 5,41                                 | 2,19                                 | 63                         | 0,23      |                          |
|            | 5,0      | 18,2                                 | 4,15                                 | 65                         | 2,87      | Discontinuité de $C_1^1$ |
|            | 4,0      | 32,0                                 | 6,67                                 | 140                        | 5,60      | Discontinuité de $C_1^1$ |
|            | 3,0      | 8,40                                 | 2,25                                 | 69                         | 0,33      |                          |
|            | 2,0      | -                                    | -                                    | -                          | 46,01     | Discontinuité de $C_1^1$ |
|            | 1,3      | -                                    | -                                    | -                          | 8,80      | Discontinuité de $C_1^1$ |

TABLEAU 4.4 – Influence de la distance à la paroi sur l’implosion d’une bulle ; pour la bulle isolée, le  $\gamma$  correspond à la position de la mesure de pression en paroi

4.21). Les pressions étant dépendantes de la variation temporelle et spatiale de ces valeurs (Eq (4.11)), de fortes ondes de surpressions sont obtenues dans le fluide.

La non symétrie du problème en proche paroi modifie le comportement de la bulle lors de son implosion. Au cours des expériences et en deçà de  $\gamma = 4$ , les bulles générées par Isselin implosaient sous forme de microjet (ou de contre-jet) ou de tores de vapeur. L’algorithme **IDB** est sensible à ces déformations comme le montre les profils des bulles au moment de l’implosion. Néanmoins, celles-ci sont généralement trop importantes pour rentrer dans les limites du modèle actuel.

Au moment de l’implosion une discrétisation temporelle plus fine est nécessaire afin


 FIGURE 4.21 – Evolution temporelle de la fonction  $C_m^l$  dans le cas présenté et pour  $\gamma = 5$ 

d'éviter les discontinuités rencontrées dans nos simulations. Toutefois, pour que cette méthode reste intéressante en terme de coût **CPU**, le pas de temps ne peut pas être diminué sur l'ensemble de l'implosion. (Pour cette configuration, chaque simulation représente moins de 5 minutes de calculs sur un ordinateur portable). L'utilisation d'un pas de temps adaptatif en fonction de la 'raideur' des évolutions temporelles représente donc une perspective pour cet algorithme.

#### 4.2.4. Implosion d'un nuage de bulles

Après avoir étudié les limites de l'algorithme **IDB** pour l'implosion d'une bulle en proche paroi, nous allons maintenant évaluer sa capacité à simuler la dynamique d'un nuage de bulles. Dans le cadre de notre étude, l'objectif est de prédire l'effet d'amplification du nuage sur les ondes de surpressions émises lors de l'implosion. Nous nous restreindrons à une dynamique purement sphérique de l'implosion de bulles ( $l_{max} = 0$ ).

Pour cette analyse, nous allons étudier l'influence du nombre de bulles sur l'énergie  $E_{er}$  émise lors du collapsus. Nous considérons un nuage de bulles constituée de  $N_B = N_B^x \times N_B^y \times N_B^z$  bulles. Celles-ci sont initialement disposées selon un maillage orthogonal régulier : deux bulles voisines selon les axes privilégiés sont séparées d'une distance, adimensionnée par  $R_0$ ,  $\gamma_B$  fixe (Fig. 4.22). L'énergie  $E_{er}$  est calculée à une distance de 200 fois le rayon initiale  $R_0$  du centre du nuage afin de ne conserver que l'énergie liée aux ondes de surpression.

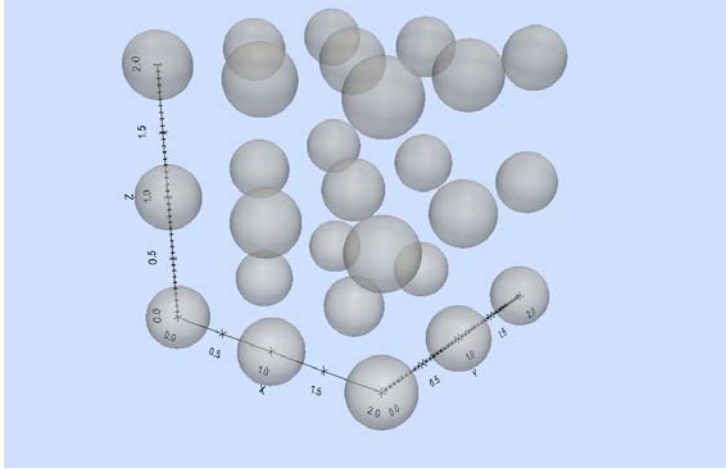


FIGURE 4.22 – Disposition des bulles dans le nuage pour  $N_B = 3 \times 3 \times 3$  (les distances sont adimensionnées par  $R_0$ ).

Nous reprenons la configuration initiale des bulles utilisée dans notre premier cas-test (cf 4.2.2.), les ordres de grandeurs correspondant à ceux que l'on obtiendrait avec les lois **B-TMAI** et **B-STMA**.

$$p_\infty = 50000Pa \quad R_0 = 5.10^{-5}m \quad p_{a0}^g = 5000Pa$$

#### 4.2.4.1. Comportement du nuage de bulles

La disposition des bulles implique une équivalence de leur comportement en fonction de leurs positions dans le nuage. Ainsi dans le cas  $N_B = 3 \times 3 \times 3$ , quatre dynamiques de bulles distinctes peuvent être identifiées. Elles correspondent aux bulles placées aux sommets, aux arêtes, aux centres des faces et au centre du cube (Fig 4.23).

La figure 4.24 montre l'évolution temporelle des dimensions des bulles pour  $\gamma_B = 4$  et  $N_B = 3 \times 3 \times 3$ . Celles situées les plus à l'extérieur du nuage sont les premières à se déformer. Ce résultat est cohérent avec plusieurs études expérimentales [26] et numériques [126].

Pour cette configuration, les simulations montrent que les bulles se compriment d'autant plus qu'elles se situent au centre de nuage. La disposition des bulles ainsi que leur



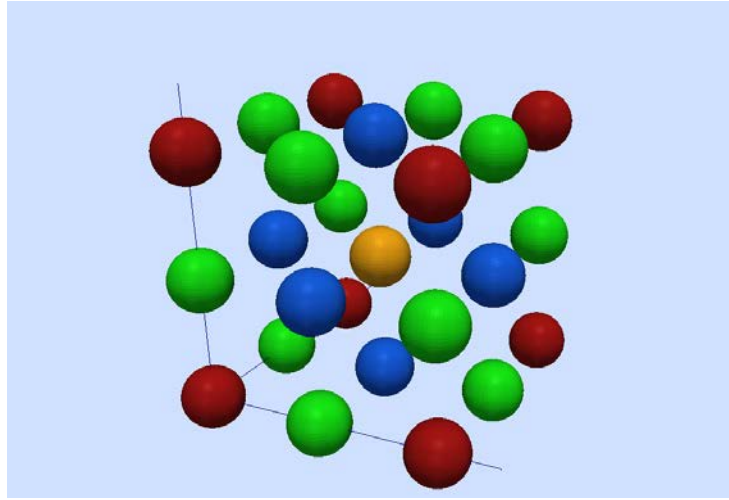


FIGURE 4.23 – Equivalence du comportement des bulles dans une disposition  $N_B = 3 \times 3 \times 3$

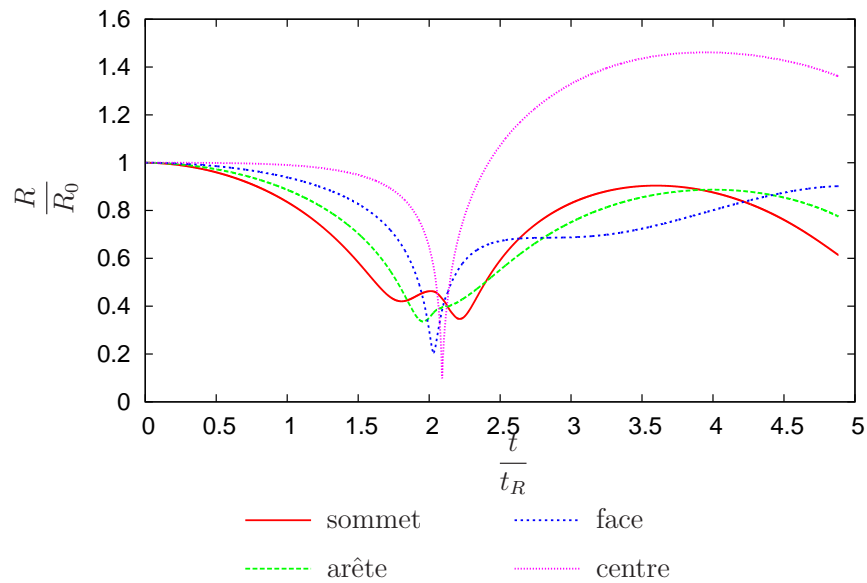


FIGURE 4.24 – Evolution temporelle du rayon des bulles en fonction de la position dans le nuage pour  $\gamma_B = 4$

déphasage jouent un rôle important sur les ondes de surpression émises (Fig. 4.25). En effet, une onde de surpression impactant une bulle n'aura pas le même effet si la bulle est en phase de compression ou de détente.

- En phase de compression, l'onde de surpression va accentuer le mouvement de l'in-

## 4.2. Résultats de simulations

terface en augmentant les efforts de pression aux interfaces.

- En phase de détente, celle-ci va freiner l'interface et diminuer l'amplitude des oscillations de la bulle.

On notera que le temps de passage du pic de pression en paroi (défini comme la largeur temporelle de l'onde à mi-hauteur de la surpression) dans le cas du nuage est beaucoup plus court que dans le cas de la bulle isolée. L'augmentation de la pression maximale n'est donc pas le seul facteur en prendre en compte pour estimer l'énergie reçue en paroi.

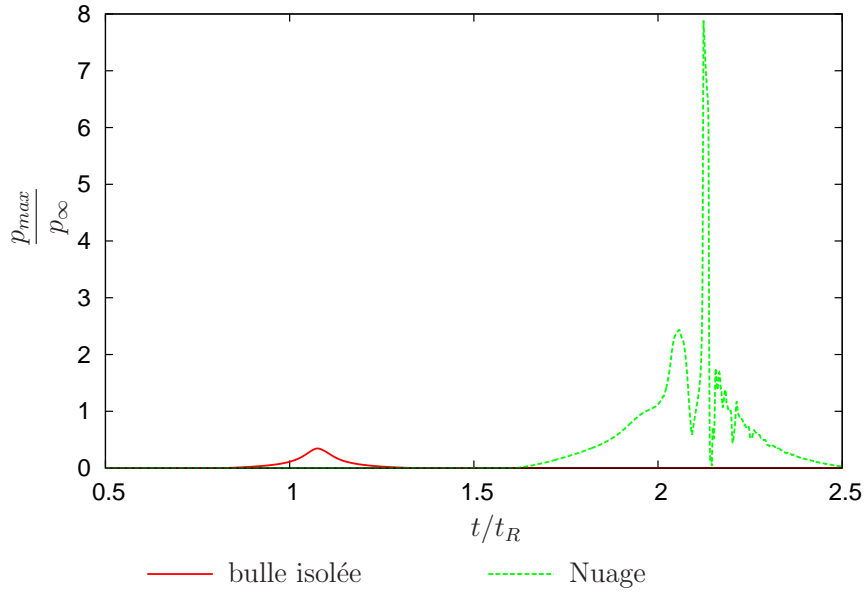


FIGURE 4.25 – Evolution temporelle de la pression maximale relevée sur une **paroi plane** située à  $20R_0$  du centre du nuage pour une bulle isolée et pour un nuage constitué de  $N_B = 3 \times 3 \times 3$  bulles et  $\gamma_B = 4$

### 4.2.4.2. Influence sur l'énergie potentiellement érosive émise

L'énergie  $E_{er}$  émise par le nuage (Eq. (4.54)) est influencée par le nombre et la position du nuage de bulles. Pour cette étude, son évaluation est restreinte à la première implosion du nuage. En effet, le déphasage temporel obtenu entre les bulles est suffisamment faible pour distinguer une période émettrice d'ondes de surpression (définie comme la période pour laquelle  $P_{er} \neq 0$  - Fig. 4.26).

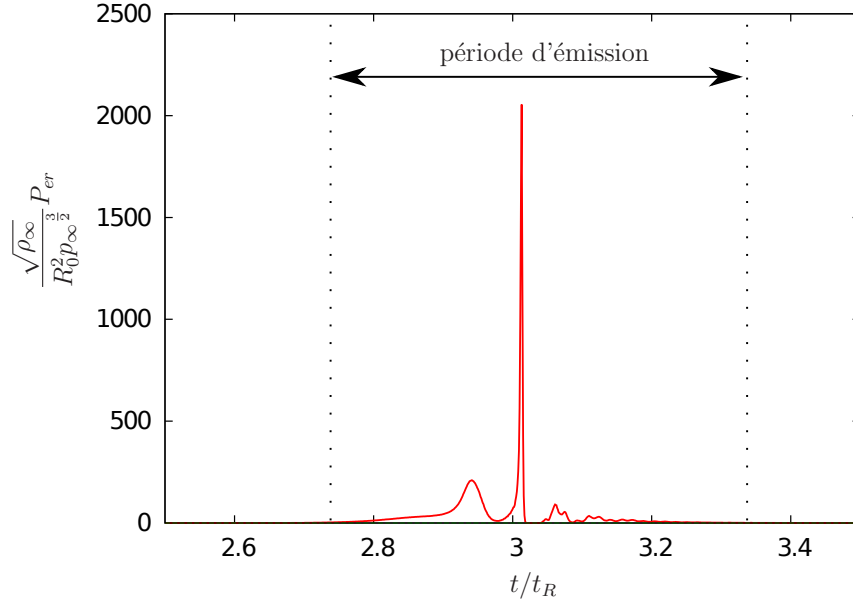


FIGURE 4.26 – Evolution temporelle de la puissance  $P_{er}$  émise par un nuage constitué de  $N_B = 3 \times 3 \times 3$  bulles et  $\gamma_B = 4$

Le rapport entre l'énergie émise lors du collapsus du nuage ,  $E_{er}^{NUAGE}$ , et celle émise pour une bulle isolée (ayant les mêmes caractéristiques initiales),  $E_{er}^{BULLE}$ , pondéré par le nombre de bulles considérées,  $N_B$ , définit un coefficient d'amplification  $A_{implo}$ .

$$A_{implo} = \frac{E_{er}^{NUAGE}}{N_B E_{er}^{BULLE}} \quad (4.63)$$

Le tableau 4.5 récapitule les énergies potentiellement érosives  $E_{er}$  et les coefficients d'amplification associés aux différentes simulations. Par la suite de notre étude, seule l'énergie des ondes émises sera utilisée. Néanmoins, la considération de coefficients d'amplifications pour la pression maximale en paroi (coefficient supérieur à 16 pour la figure 4.25) et ainsi que pour la puissance  $P_{er}$  émise (coefficient pouvant être supérieur à 600 selon les figures 4.17 et 4.26) présente une perspective intéressante couplée à un code de simulation solide.

Pour la configuration étudiée, le coefficient d'amplification augmente avec le nombre de bulles et la distance  $\gamma_B$  atteignant un coefficient maximal de 5,4. Les ondes de surpression émises par les bulles extérieures favoriseraient ainsi la compression de celles situées au

### 4.3. Conclusion sur l'algorithme **IDB**

| $\gamma_B$   | $N_B$                 | $\frac{E_{er}}{R_0^3 p_\infty}$ | $\frac{1}{N_B} \frac{E_{er}}{R_0^3 p_\infty}$ | $A_{implo}$ |
|--------------|-----------------------|---------------------------------|---|-------------|
| bulle isolée | $1 \times 1 \times 1$ | 0,22                            | 0,22  | 1           |
| 4            | $2 \times 1 \times 1$ | 0,75                            | 0,37  | 1,7         |
|              | $2 \times 2 \times 1$ | 2,23                            | 0,56  | 2,5         |
|              | $2 \times 2 \times 2$ | 6,00                            | 0,75  | 3,5         |
|              | $3 \times 3 \times 3$ | 20,06                           | 0,74  | 3,4         |
| 8            | $2 \times 1 \times 1$ | 0,78                            | 0,39  | 1,7         |
|              | $2 \times 2 \times 1$ | 2,53                            | 0,63  | 2,9         |
|              | $2 \times 2 \times 2$ | 7,21                            | 0,90  | 4,1         |
|              | $3 \times 3 \times 3$ | 31,56                           | 1,17  | 5,3         |
| 12           | $2 \times 1 \times 1$ | 0,78                            | 0,39  | 1,8         |
|              | $2 \times 2 \times 1$ | 2,56                            | 0,64  | 2,9         |
|              | $2 \times 2 \times 2$ | 7,64                            | 0,95  | 4,1         |
|              | $3 \times 3 \times 3$ | 32,36                           | 1,20  | 5,4         |

TABLEAU 4.5 – Influence du nombre de bulles et sur la distance inter-bulle sur l'énergie retransmise au liquide

centre. Néanmoins, d'importantes différences par rapport à une situation réelle sont à noter :

- Les bulles sont placées de façon régulière facilitant l'apparition de phénomènes d'amplification.
- Elles sont considérées initialement à l'équilibre et ont toutes la même configuration à  $t = 0$ .

Une distribution aléatoire des bulles (ou une structuration en filament observées par différents auteurs) influencera nécessairement ce résultat. Il est dès lors très difficile d'établir une modélisation de ce coefficient d'amplification basée uniquement sur cette étude.

### 4.3. Conclusion sur l'algorithme **IDB**

Même si l'algorithme **IDB** n'a pu être achevé au cours de cette thèse, il présente néanmoins des perspectives de développement intéressantes.

- En effet, l'utilisation des harmoniques sphériques permet de prendre en compte les dissymétries des conditions à l'interface des bulles. Une nouvelle méthode de paramétrisation de l'interface autoriserait une simulation plus avancée de l'implosion d'une bulle en proche paroi ainsi qu'une caractérisation des microjets associés.
- La prise en compte de la compressibilité du fluide, permet la propagation des ondes de surpressions dans le fluide. Les interactions présentes au sein d'un nuage de bulles peuvent dès lors être simulées pour n'importe quelle distribution spatiale des structures diphasiques.

Un développement de ce code permettrait alors la caractérisation de deux mécanismes supposés responsables de l'érosion de cavitation (la création d'un tore de vapeur ne peut pas être prise en compte par cette méthode).

L'avantage de cette méthode est qu'elle nécessite uniquement une discrétisation de l'interface des bulles. Les solveurs **SND** permettent d'ors et déjà une simulation de ces phénomènes mais requièrent des coûts de calcul **CPU** plus importants.

# Prévision de l'agressivité de l'écoulement

## Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| 5.1. Chaînage entre les simulations <b>U-RANS</b> et les simulations de la dynamique de bulles . . . . .    | <b>223</b> |
| 5.1.1. Calcul de l'implosion des bulles . . . . .   | 223        |
| 5.1.1.1. Populations initiales de bulles . . . . .  | 223        |
| 5.1.1.2. Déplacement des bulles . . . . .   | 225        |
| 5.1.1.3. Critères de calcul pour l'implosion de bulles . . . . .  | 225        |
| 5.1.2. Estimation du chargement sur le matériau . . . . .   | 227        |
| 5.1.2.1. Estimation de l'énergie potentiellement érosive . . . . .  | 227        |
| 5.1.2.2. Propagation des ondes acoustiques . . . . .  | 228        |
| 5.2. Discussion et perspectives sur la méthode d'estimation de l'intensité de cavitation proposée . . . . . | <b>230</b> |
| 5.2.1. Calcul d'une population de bulles moyennée . . . . .   | 231        |
| 5.2.2. Calcul de l'énergie émise par le collapse de chaque nuage de bulles                                  | 232        |
| 5.2.3. Calcul de l'énergie reçue par la paroi . . . . .   | 233        |

---

Les chapitres précédents nous ont permis d'établir un système d'équations modélisant le comportement du fluide d'un point de vue local (Chapitre 2.). Nous avons par la suite modélisé certains termes afin de parvenir à deux systèmes l'un correspondant à la dynamique de l'écoulement à l'échelle du profil de l'ordre de  $0.1m$  (Chapitre 3.), l'autre à

celle d'un nuage de bulle de l'ordre de  $\approx 10^{-4}m$  (Chapitre 4.).

Nous allons désormais nous intéresser aux passages entre ces deux échelles spatiales (Fig 5.1). Ce chapitre permettra de représenter l'impact de la cavitation sur le matériau en termes d'érosion.

La méthode de prévision de l'érosion de cavitation présentée dans ce manuscrit repose sur :

- La détermination d'une population de bulles établie à partir des simulations **URANS** et des lois **B-TMAI** ou **B-STMA** considérant ainsi les gaz incondensables et la tension superficielle.
- Le calcul de l'énergie émise par cette population au cours de son implosion à partir de l'algorithme **IDB**.
- La projection de cette énergie sur les parois du solide.

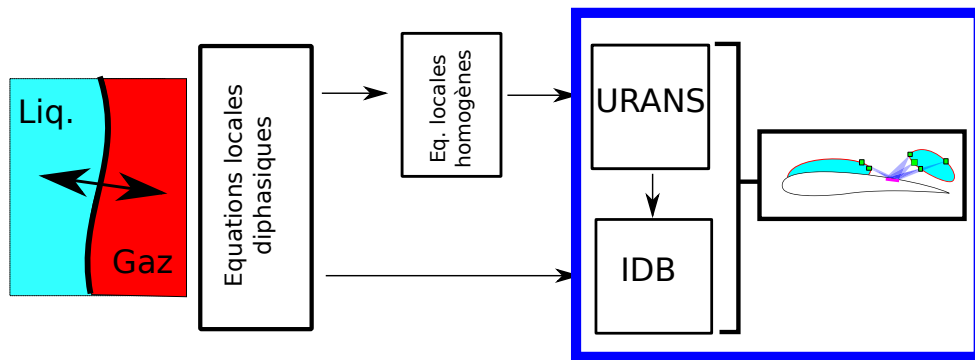


FIGURE 5.1 – Considérations effectuées dans le chapitre 5.

## 5.1. Chaînage entre les simulations **U-RANS** et les simulations de la dynamique de bulles

Pour le calcul **U-RANS**, les événements se produisant à l'échelle de la bulle sont supposés être modélisés dans le tenseur de Reynolds. Le système **IDB** permet de simuler une partie de cette dynamique. Dans notre méthode actuelle, le calcul de la dynamique de bulles est utilisé pour la détermination de l'énergie potentiellement érosive  $E_{er}$  émise lors des collapsus. Le couplage entre les deux algorithmes s'opère alors de façon unilatéral, les résultats de simulation **IDB** n'ayant pas d'influence sur le calcul **U-RANS**.

### 5.1.1. Calcul de l'implosion des bulles

Nous allons, dans cette section, présenter les relations existantes entre les lois élaborées au chapitre 3., et la discrétisation de l'espace nécessaire au calcul **U-RANS**. Nous nous servirons de ces considérations pour initialiser et paramétrer le calcul de la dynamique de bulles.

#### 5.1.1.1. Populations initiales de bulles

Les calculs **U-RANS** réalisés dans cette thèse, s'appuient sur une discrétisation de l'espace en cellules (méthode des volumes finis). Dans chacune d'elles, les grandeurs de l'écoulement (pression, vitesse,...) évoluent au fil de la simulation et y représentent un comportement spatial moyen. De façon similaire, les populations de bulles considérées par notre méthode seront établies à partir de la même discrétisation spatiale. Ainsi, les lois **B-TMAI** et **B-STMA** établissent pour chaque cellule du maillage (de volume  $V_{cell}$ ), une population moyenne de bulles caractérisée par :

- une pression des gaz moyenne  $\overline{p_M^g}$ ,
- un rayon moyen  $\overline{R^g}$  des structures diphasiques,
- une densité volumique de bulles  $n_B^g$  (Eq. (3.89)).



Ces grandeurs seront prises afin de définir l'état initial des bulles dans la simulation de la dynamique de bulle (Fig. 5.2).

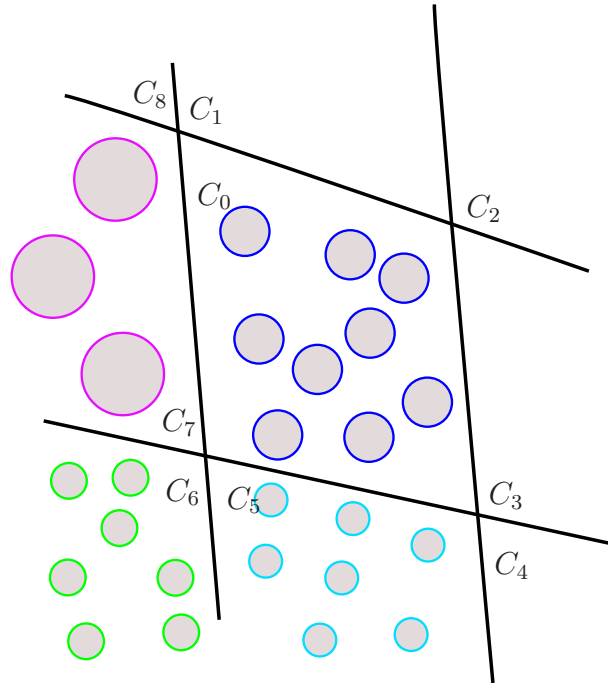


FIGURE 5.2 – Représentation d'une distribution de bulles dans un maillage bidimensionnel

Les hypothèses prises dans la simulation de bulles ne prenant pas en considération le transfert de gaz à l'interface (cf. 4.1.2.), **la loi B-STMA sera privilégiée dans nos post-traitements**. Celle-ci établit une population de bulles dont le rayon est inférieur à  $300\mu m$  (Fig 3.16).

La taille caractéristique des cellules utilisées pour les simulation **U-RANS** est de  $10^{-3}m$  (en longueur). Les dimensions des bulles sont alors en général, légèrement inférieures à celles des cellules du maillage. En revanche, les lois de paroi (cf B.1.3) requièrent une discrétisation spatiale plus fine près des surfaces solides et les premières mailles possèdent des tailles de l'ordre de  $10^{-5}m$  (en hauteur). Les bulles considérées dans chaque cellule représentant une topologie diphasique moyenne, il est possible de considérer des bulles dont le rayon moyen est plus important que la taille de la cellule les contenant.

### 5.1.1.2. Déplacement des bulles

Au cours de leurs mouvements, les bulles se déplacent de cellule en cellule. En considérant que les caractéristiques (pression, vitesse, masse volumique) dans une maille restent identiques pendant un pas de temps de la simulation **U-RANS**, le débit de bulles,  $\dot{N}_B$  passant d'une cellule à l'autre peut être quantifié (Fig. 5.3). Ainsi, le nombre de bulles passant de la cellule  $C_0$  à  $C_3$  pendant un intervalle de temps  $\delta t$  et le débit de bulles correspondant peuvent être estimés par :

$$N_{B0 \rightarrow 3} = n_B^g(C_0) \int_{S_{0-3}} \delta t \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{n}_{0-3} dS \quad (5.1)$$

Ce qui en divisant par le  $\delta t$  nous permet d'obtenir le nombre de bulle par seconde passant de la cellule  $C_0$  à la cellule  $C_3$ .

$$\dot{N}_{B0 \rightarrow 3} = n_B^g(C_0) \int_{S_{0-3}} \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{n}_{0-3} dS \quad (5.2)$$

A chaque changement de cellule, les bulles sont soumises à une variation de pression que l'on considérera instantanée pour la simulation de la dynamique de bulles.

### 5.1.1.3. Critères de calcul pour l'implosion de bulles

Dans chacune des cellules du calcul **U-RANS**, l'ensemble des données permettant la simulation de la dynamique de bulles sont disponibles. Néanmoins, les équations régissant le système ont été établies pour les phases de collapsus. Les domaines du calcul concernés par ces implosions seront distingués selon les deux critères suivants :

#### **La cellule est un milieu diphasique constitué de bulles de gaz :**

Cette condition permet de limiter le calcul aux zones pour lesquelles le gaz est la phase dispersée. Le taux de vide minimale défini par la loi **B-STMA** est ainsi exploité (cf 3.4.). Considérant de plus une population localement monodisperse, elle limite également l'utilisation de l'algorithme aux zones pour lesquelles le taux de

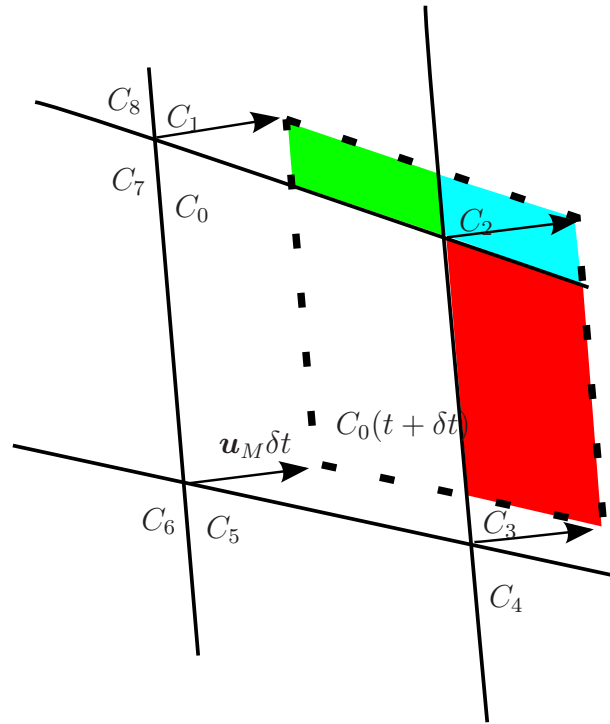


FIGURE 5.3 – Représentation du déplacement de la population de bulles pendant un intervalle de temps  $\delta t$ .

vide est inférieur à la compacité maximale autorisée pour ce type de distribution.

$$\alpha_g > \alpha_{min} \quad \alpha_g < \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74 \quad \text{et} \quad \overline{R^g} > 0$$

**Les bulles subissent une compression du milieu liquide :**

La génération d'ondes de surpression ne portant que sur une bulle subissant une augmentation de pression du milieu liquide, nous nous limiterons aux cellules répondant à ce critère :

$$\frac{\partial}{\partial t} [p_M^l] + \mathbf{u}_M \nabla p_M^l = \frac{dp_M^l}{dt} > 0$$

Nous verrons par la suite que la partie temporelle de ce terme est négligeable.

### 5.1.2. Estimation du chargement sur le matériau

Les domaines du calcul **U-RANS** où la simulation de la dynamique de bulles est réalisée ont pu être établis. Nous allons dans cette section présenter les approximations réalisées afin de quantifier l'énergie potentiellement érosive émise lors de l'implosion des nuages.

#### 5.1.2.1. Estimation de l'énergie potentiellement érosive

L'opération de moyenne réalisée pour le calcul **U-RANS** ne permet pas de connaître avec exactitude les conditions initiales du nuage (répartition spatiale des bulles, pression dans chacune des bulles, ...). De plus, le coût **CPU** nécessaire à la simulation de l'implosion d'un cluster augmente rapidement avec le nombre de bulles simulées (Tab. 5.1).

| Nombres de bulles              | 1 | 2    | 4    |
|--------------------------------|---|------|------|
| Temps de calcul (CPU Time) (s) | 5 | 1007 | 2877 |

TABLEAU 5.1 – Temps de calcul nécessaire au calcul d'un nuage de bulles constitué de  $N_B$  bulles avec l'algorithme **IDB** ( $l_{max} = 0$ )

Devant ces incertitudes initiales et l'augmentation importante du temps de calcul en considérant un nuage de bulle, la puissance  $P_{er}$  émise par l'implosion du nuage est supposée, à l'heure actuelle, linéairement proportionnelle à celle émise par une bulle isolée ayant les mêmes caractéristiques initiales, ce qui revient à considérer un coefficient d'amplification  $A_{implo} = 1$  (cf 4.2.4.). De plus, afin de gagner du temps de calcul, pour un même pas de temps **U-RANS**, le saut de pression considéré pour l'implosion de cette bulle est égale à la plus forte augmentation de pression possible pour cette cellule (Fig 5.4).

Ces approximations réduisent l'algorithme **IDB** à l'utilisation de l'équation de Keller (Eq (1.13)). Sous ces hypothèses la puissance érosive associée à une cellule pour un pas de temps est donnée par le produit de l'énergie émise lors de l'implosion d'une bulle et du nombre de bulles quittant cette cellule :

$$P_{er}^{NUAGE} = \dot{N}_B^S E_{er}^{BULLE} \quad (5.3)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{er} = \int_t P_{er} dt \quad , \quad P_{er} = \oint_{\partial V} \max [(p_M^l - p_\infty) \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_I^S, 0] dS \\ \dot{N}_B^S(C_0) = n_B^g(C_0) \sum_{C_i} \int_{S_{0-i}} \max (\mathbf{u}_M \cdot \mathbf{n}_{0-i}, 0) dS \end{array} \right.$$

Et  $(C_i)_i$  l'ensemble des cellules voisines de  $C_0$ .

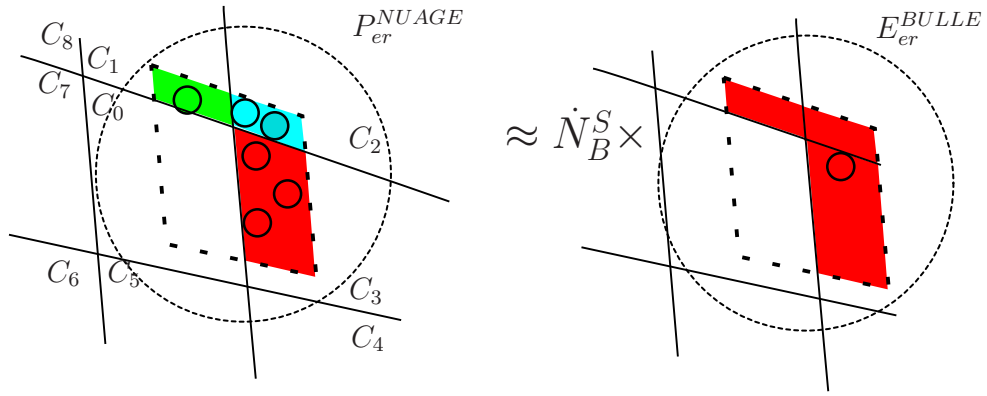


FIGURE 5.4 – Equivalence considérée entre l'implosion du nuage de bulle et l'implosion d'une bulle isolée - avec  $p_M^l(C_1) < p_M^l(C_3)$  et  $p_M^l(C_2) < p_M^l(C_3)$

### 5.1.2.2. Propagation des ondes acoustiques

Nous avons désormais une **estimation de la puissance potentielle érosive** émise par le collapse des bulles **pour chaque cellule et pour chaque pas de temps** de la simulation **U-RANS**. Afin d'évaluer la part de cette puissance atteignant une surface solide, nous allons supposer que celle-ci se propage de façon sphérique sans perte énergétique depuis le centre de la cellule où elle a été émise : **l'interaction avec les autres structures gazeuses sont donc négligées**.

Afin de quantifier son impact sur une surface solide d'aire  $S_w$ , la projection  $S_p$ , de cette surface sur une sphère unité centrée sur la cellule émettrice  $C_0$  est réalisée (Fig. 5.5). La part de la puissance  $P_{er}$  émise par  $C_0$  et atteignant  $S_w$  est alors calculée à l'aide de l'**angle**

5.1. Chaînage entre les simulations **U-RANS** et les simulations de la dynamique de bulles

---

solide  $\frac{S_p}{4\pi}$ .

$$P_{er}^{C_0}(S_w) = \frac{S_p}{4\pi} P_{er}(C_0) \quad (5.4)$$

De plus, les effets d'ombre ont été pris en compte dans le post-traitement, ainsi une implosion ayant lieu au dessus de l'extrados n'impactera pas l'intrados par exemple.

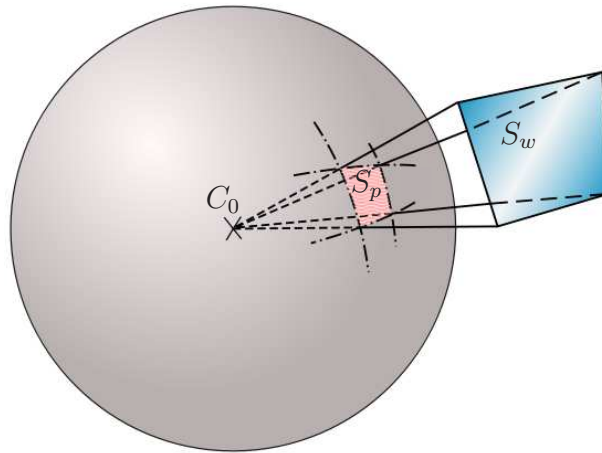


FIGURE 5.5 – Surface impactée par l'implosion d'une bulle

La puissance totale reçue par cette surface  $S_w$  est la somme des contributions de l'ensemble des cellules du calcul **U-RANS** (Fig. 5.6).

Le potentiel érosif de l'écoulement liée à la cavitation, ou **intensité de cavitation**, évalué par notre méthode, repose sur la puissance  $P_{er}$  reçue par unité de surface sur chacune des mailles du calcul **U-RANS** délimitant une paroi,  $\dot{W}_{er}(S_w)$ . Cette grandeur peut être évaluée à chaque pas de temps du calcul **U-RANS**.

$$\dot{W}_{er}(S_w) = \frac{1}{S_w} \sum_{C_i} P_{er}^{C_i}(S_w) \quad (5.5)$$

La moyenne temporelle de cette grandeur pour chacune des mailles permet d'identifier

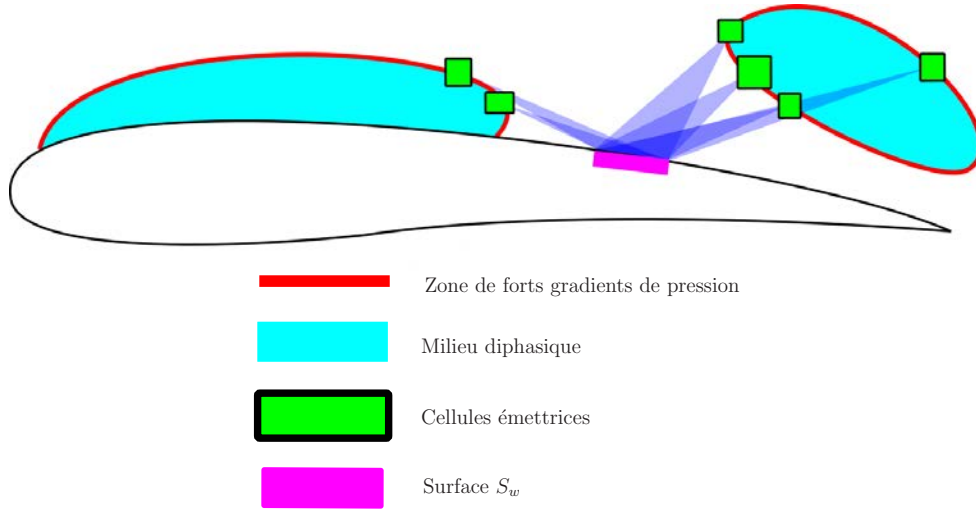


FIGURE 5.6 – Puissance  $P_{er}$  reçue par la surface  $S_w$

le potentiel érosif moyen de l'écoulement pour la maille considérée,  $\dot{W}_{er}(S_w)$ .

$$\dot{W}_{er}(S_w) = \frac{1}{N_{it}} \sum^{N_{it}} \dot{W}_{er}(S_w) \quad (5.6)$$

Avec  $N_{it}$  le nombre d'itérations du calcul **U-RANS** considéré pour effectuer la moyenne.

Le fait de considérer une puissance surfacique et une moyenne temporelle nous permet de diminuer l'importance de la discrétisation spatiale (tailles de cellules en paroi différentes) et temporelle dans nos estimations. Il faut toutefois garder à l'esprit que ces discrétisations ont déjà une influence sur la simulation **U-RANS**.

## 5.2. Discussion et perspectives sur la méthode d'estimation de l'intensité de cavitation proposée

L'évaluation de l'agressivité de l'écoulement en terme d'érosion mise en place par cette méthode peut être synthétisée en différentes étapes.

- En premier lieu, des simulations **U-RANS** sont réalisées et l'on extrait, pour chaque pas de temps, la pression, la vitesse et la masse volumique. Le **post-traitement**

établit dans chaque cellule du maillage une distribution de bulles à partir des lois **B-TMAI** ou **B-STMA**.

- Pour chaque instant, les cellules dans lesquelles la dynamique de bulles est simulée sont sélectionnées. L'énergie émise lors du collapsus est mesurée par l'algorithme IDB (équivalent à Keller dans ces simulations).
- Pour chaque instant de la simulation, la puissance émise par une cellule est calculée et est projetée sur les surfaces solides. L'accumulation de cette puissance sur une surface solide définit l'agressivité instantannée de l'écoulement sur le profil. Finalement, la moyenne temporelle de cette grandeur définit l'intensité de cavitation moyenne  $\dot{W}_{er}$ .

Chacune de ces étapes est relativement indépendante et peut être l'objet de nombreuses perspectives.

### 5.2.1. Calcul d'une population de bulles moyennée

Cette méthode permet de définir une population de bulles sur la base de simulations **U-RANS** et dépendant des conditions de l'écoulement autour de la géométrie étudiée. Actuellement, cette population repose sur la résolution d'un système à deux équations (conservation de masse et de quantité de mouvement) basée sur une approche homogène et équivalente à celle déjà codée dans **IZ** ou **Fine-Turbo**.

Le passage des grandeurs liées au fluide homogène de l'approche **U-RANS** vers celles de l'approche bi-fluide de l'algorithme **IDB** s'effectue avec un ensemble de lois basées sur un équilibre thermodynamique à l'échelle de la maille et sur une population de bulles monodisperse. Le système prend en compte, les effets des **gaz incondensables** ainsi que ceux liés à la **tension de surface**.

**Perspectives :** La considération d'un système à 4 équations (ajout d'une équation de transport de taux de vide) permettrait de considérer une population de bulles hors équilibre. La description de la population de bulles par une fonction de distribution plus complexe autoriserait par ailleurs une meilleure représentation de la topologie diphasique de l'écoulement. Cependant, une base de donnée expérimentale est nécessaire au bon dimensionnement de cette distribution.



### 5.2.2. Calcul de l'énergie émise par le collapse de chaque nuage de bulles

Les termes de turbulence représentent les interactions entre petites et grandes échelles dans la simulation **U-RANS**. Cette dernière est donc totalement décorrélée des résultats de l'algorithme **IDB** pouvant s'effectuer intégralement en **post-traitement**.

La puissance érosive émise lors du collapse d'un nuage est estimée par l'implosion d'une seule bulle. Dans ces conditions de symétrie, cette dernière, régie par un système équivalent à celui de Keller, implose de façon purement sphérique rendant le coût **CPU** relativement faible pour l'ensemble du post-traitement (les estimations des temps de calcul seront données dans le chapitre 6.). Néanmoins l'influence des autres bulles et les effets d'amplifications (ou atténuations) liés au nuage, sont seulement estimés par une relation linéaire et seule l'énergie se propageant dans l'ensemble du milieu est quantifiée. La présence de la paroi est totalement négligée dans le calcul de la dynamique de bulles.

**Perspectives** : L'utilisation d'un autre code de calcul ou l'amélioration de l'algorithme **IDB** (cf 4.1.4.5.) permettrait la considération de déformations plus importantes de l'interface. La contribution d'éventuels microjets pourrait alors être quantifiée. Le passage du programme de post-traitement, actuellement codé avec une approche **Open-MP**, vers une approche **HPC**, High Performance computing (parallélisation du programme sur plusieurs centaines de coeurs de calcul), semble cependant nécessaire pour rendre l'utilisation de cette méthode viable dans une approche industrielle.

L'obtention de l'énergie émise peut également se faire à partir de corrélations établies précédemment au calcul **U-RANS**. En effet, en déterminant les paramètres contrôlant la dynamique de bulle (distance à la paroi, taille, nombre et distance entre les bulles, pression, ...) une base de donnée pourrait être établie permettant la formulation de fonctions de transfert. Celles-ci auraient l'avantage d'augmenter de façon importante la rapidité du post-traitement. Néanmoins, la description des populations de bulles par des distributions plus complexes augmenterait le nombre de variables d'entrée et la taille de la base de données à acquérir.

### 5.2.3. Calcul de l'énergie reçue par la paroi

La puissance érosive établie grâce au calcul précédent se propage de façon sphérique sans perte d'énergie. Les interactions avec le reste du milieu (diffraction par le liquide, amplification avec les bulles des autres mailles) sont négligées. Seule l'énergie de l'onde de surpression est utilisée, son amplitude et sa durée n'entrent pas en considération dans cette démarche.

**Perspectives :** Afin de prendre en compte le couplage existant entre les différents nuages, l'intégralité des bulles doivent être simulées en même temps, confirmant la nécessité de l'optimisation du programme de post-traitement. De plus, la considération de la pression et non plus de l'énergie de l'onde permettrait un meilleur calcul de l'interaction fluide/solide et ainsi une plus grande précision sur le caractère érosif de l'écoulement.

La complexité du phénomène de cavitation que ce soit à l'échelle d'une géométrie industrielle ou de l'implosion d'un nuage de bulles pousse à l'humilité. A l'heure actuelle, la connaissance limitée des phénomènes prenant place au niveau de l'interface et les opérations de moyennes réalisées sur le système d'équation empêchent la quantification précise du phénomène d'érosion. Le résultat de la méthode de post-traitement présentée dans ce manuscrit n'est à ce jour qu'une **indication** du potentielle érosive de l'écoulement.



# Application de la méthodologie à trois écoulements cavitants

## Sommaire

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.1.     | Profil NACA 65012 - EPFL . . . . .  | <b>238</b> |
| 6.1.1.   | Présentation de l'expérience . . . . .  | 238        |
| 6.1.1.1. | Description de la veine d'essai . . . . .   | 239        |
| 6.1.1.2. | Description des expériences réalisées . . . . .   | 240        |
| 6.1.2.   | Présentation des simulations réalisées . . . . .  | 242        |
| 6.1.2.1. | Discrétisation spatiale . . . . .   | 243        |
| 6.1.2.2. | Conditions limites et période transitoire . . . . .   | 247        |
| 6.1.2.3. | Discrétisation temporelle et convergence des calculs .  | 249        |
| 6.1.3.   | Résultats des simulations . . . . .   | 252        |
| 6.1.3.1. | Critères hydrodynamiques . . . . .  | 252        |
| 6.1.3.2. | Prévisions de l'érosion de cavitation par l'implosion<br>d'un volume de vapeur . . . . .                  | 256        |
| 6.1.3.3. | Prévisions de l'érosion de cavitation par l'implosion<br>d'un ensemble de bulles - <b>M-IDB</b> . . . . . | 259        |
| 6.1.3.4. | Sensibilité du modèle <b>IDB</b> à l'échantillonnage des<br>résultats . . . . .                           | 263        |
| 6.1.3.5. | Sensibilité du modèle <b>IDB</b> aux paramètres physiques   | 264        |
| 6.1.3.6. | Prévision de l'agressivité de l'écoulement . . . . .  | 271        |

---

CHAPITRE 6. : *Application de la méthodologie à trois écoulements cavitants*

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.2.     | Profil symétrique - TUD . . . . .                                   | <b>276</b> |
| 6.2.1.   | Présentation de l'expérience et des simulations réalisées . . . . . | 276        |
| 6.2.1.1. | Veine d'essais . . . . .  | 276        |
| 6.2.1.2. | Maillage . . . . .  | 277        |
| 6.2.1.3. | Mesures effectuées . . . . .  | 278        |
| 6.2.2.   | Résultats des simulations . . . . .                                 | 283        |
| 6.2.2.1. | Critères hydrodynamiques . . . . .                                  | 283        |
| 6.2.2.2. | Prévision de l'agressivité de l'écoulement . . . . .                | 289        |
| 6.3.     | Diaphragme EPOCA - EDF R&D . . . . .                                | <b>295</b> |
| 6.3.1.   | Présentation de l'expérience et des simulations réalisées . . . . . | 295        |
| 6.3.1.1. | Veine d'essai . . . . .   | 295        |
| 6.3.1.2. | Maillage . . . . .  | 296        |
| 6.3.1.3. | Mesures effectuées . . . . .  | 296        |
| 6.3.2.   | Résultats des simulations . . . . .                                 | 298        |
| 6.3.2.1. | Critères hydrodynamiques . . . . .                                  | 299        |
| 6.3.2.2. | Prévision de l'agressivité de l'écoulement . . . . .                | 303        |
| 6.4.     | Conclusion . . . . .  | <b>306</b> |

---

---

Les parties précédentes ont permis la mise en place d'une méthodologie procurant une estimation de l'agressivité de l'écoulement à partir de simulations numériques. Nous allons désormais l'appliquer à trois géométries, chacune d'entre elles ayant fait l'objet d'études expérimentales comprenant notamment une mesure de marquage.

Au cours du chapitre 3., différentes topologies du milieu diphasiques ont été définies à partir de la loi barotrope. Il a été établi qu'étant donné la non considération des transferts de gaz incondensable dans l'algorithme **IDB**, la loi **B-STMA** serait privilégiée pour le post-traitement de nos simulations. Les paramètres choisis sont ceux associés à l'étude paramétrique (cf 3.4.3.2.).

Afin de comparer notre méthode avec la méthode précédemment utilisé au laboratoire, le potentiel agressif défini par [66]  $P_{wave}$  et présenté en introduction (cf 1.3.1.3.), sera également calculé. La quantité de gaz dissous supposée par cette méthode est établie à partir de la loi de Brennen (Eq. (1.27)). L'impact sur la paroi sera en revanche calculé de deux façons différentes :

- Dans sa version originale, appelée Méthode Potentielle - Intégration sur la hauteur (**MP-IH**) : L'intensité de cavitation en paroi est déterminée par l'intégration de la puissance  $P_{wave}$  sur la hauteur de veine. **Aucune fonction de filtrage spatiale liée à la distance à la paroi ne sera appliquée.** Actuellement, cette méthode d'intégration prend en compte l'ensemble de la colonne de cellules située au dessus d'une cellule de surface, le maillage doit donc être structuré.
- Dans une version utilisant les angles solides, Méthode Potentielle - Angle Solide (**MP-AS**), : l'agressivité de l'écoulement sur la paroi solide est calculée via la projection de la puissance potentielle  $P_{wave}$  (cf (1.26)) par la méthode des angles solides présentées précédemment (Cf. 5.1.2.2.).

Les deux valeurs  $P_{wave}$  et  $P_{er}$  représentent toutes les deux l'estimation de la puissance (en  $W$ ) émise lors du collapsus de bulles.

Dans cette partie, nous appliquerons notre méthode sur trois géométries, deux hydrofoils et un diaphragme. Ces écoulements peuvent, en première approche, être simulées

par des calculs bidimensionnels ou axisymétriques, diminuant les coûts **CPU** nécessaires. De plus, la littérature comporte différentes références à ces géométries et des mesures expérimentales peuvent être utilisées. Pour chaque série de simulations, nous établirons dans un premier temps les caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement telles que la répartition de pression, des profils de vitesse, la longueur et la fréquence de battements des poches de cavitation et nous les comparerons aux essais expérimentaux afin d'évaluer la validité des comportements hydrodynamiques simulés. Lors d'une seconde étape, nous appliquerons les méthodes de post-traitement liées à l'érosion de cavitation afin d'estimer l'agressivité de l'écoulement sur chaque profil. Nous comparerons ces résultats à des données expérimentales de marquage. Obtenant une intensité de cavitation (en  $W.m^{-2}$ ) par la simulation et une vitesse de marquage (en  $m.s^{-1}$ ) par les expériences, ces comparaisons ne pourront s'effectuer qu'en relatif et non en quantitatif.

## 6.1. Profil NACA 65012 - EPFL

Notre premier cas-test repose sur une série d'expériences réalisées au sein du laboratoire de machines hydrauliques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne **EPFL**. Celle-ci a été effectuée au cours de la thèse de Pereira [171] portant sur la prédiction de l'érosion de cavitation par une approche énergétique.

Ce premier cas-test nous permettra également de comparer et d'évaluer l'influence des différents paramètres de la méthode de prévision de l'agressivité proposée.

### 6.1.1. Présentation de l'expérience

Lors de ces essais, deux profils ont été utilisés : un profil NACA 009 et un NACA 65012. Cette seconde géométrie ayant fait l'objet d'une étude de marquage, c'est sur elle que portera nos simulations. L'hydrofoil a été réalisé en acier inoxydable, sa corde est de 100 mm pour une envergure de 150 mm (Fig. 6.1).

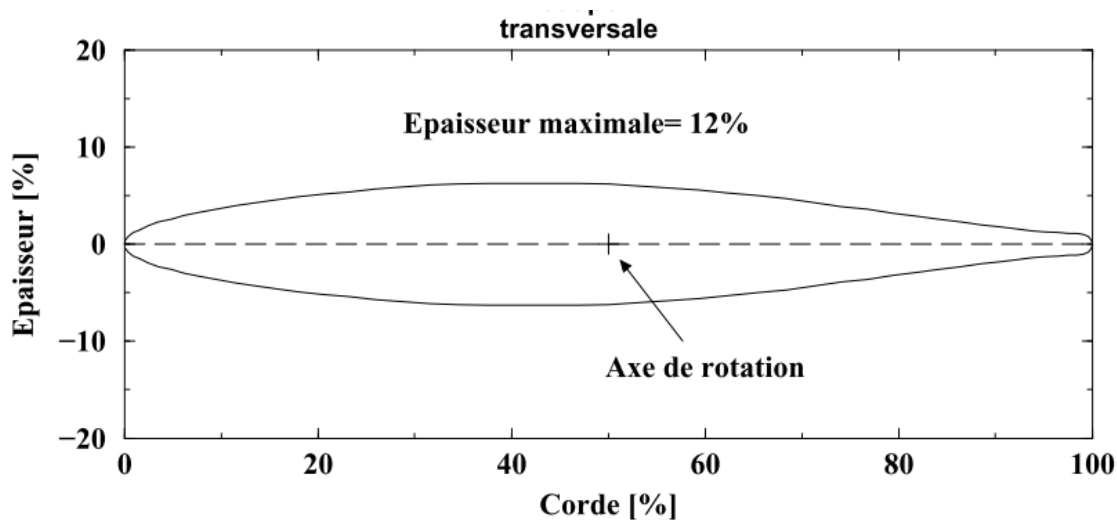


FIGURE 6.1 – Profil d’essai instrumenté NACA 65012 pour la mesure du coefficient de pression [171]

#### 6.1.1.1. Description de la veine d’essai

Le tunnel de cavitation à grande vitesse dans lequel les expériences ont été effectuées est un circuit hydraulique fermé. Un schéma de l’installation est visible sur la figure 6.2.

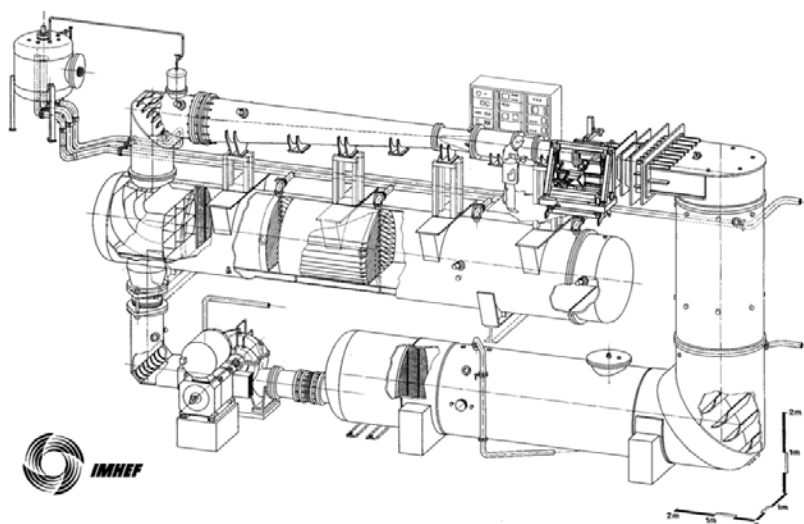


FIGURE 6.2 – Schéma du tunnel de cavitation de l’EPFL [171]



La veine d'essai possède une section carrée de  $150 \times 150 \text{ mm}^2$  et une longueur de  $750 \text{ mm}$ . Sur cette section, 3 des 4 faces ont été réalisées avec des parois transparentes pour permettre la visualisation de l'écoulement. La pompe de circulation permet d'atteindre un débit maximale de  $1,125 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  dans la boucle, soit une vitesse maximale de  $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans la veine d'essai et un Reynolds maximal de  $5 \cdot 10^6$  basé sur la corde du profil. Le niveau de pression dans la veine d'essai est contrôlé indépendamment par un pressuriseur.

Les paramètres d'exploitation du tunnel de cavitation sont :

- $p_1$  et  $p_2$ , les pressions mesurées respectivement en entrée et en sortie du convergent.
- La vitesse en entrée de la veine d'essai. ( $\xi$  est fonction des pertes de charge dans le convergent)

$$u_{ref} = \frac{2\xi}{\rho_e^l} \sqrt{p_1 - p_2} \quad (6.1)$$

- Le coefficient de cavitation défini par :

$$\sigma_c = \frac{p_{ref} - p_{sat}}{\frac{1}{2} \rho_e^l u_{ref}^2} \quad (6.2)$$

Dans cette configuration la pression de référence a été prise égale à la pression d'entrée dans la veine d'essai  $p_2$ .

- La température de l'eau (considérée égale à  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Un système de vis sans fin permet également d'ajuster l'incidence du profil,  $i$ , dans la veine. Deux positions correspondant à 4 et 6 degrés d'incidence ont pu alors être étudiées.

### 6.1.1.2. Description des expériences réalisées

Différents types d'instrumentations ont été utilisés dans le but de caractériser l'écoulement :

- Une série de 13 capteurs de pression piézo-résistifs, permettant des mesures de pression de 0 à 200 bar, a été installée sur l'extrados du profil. L'élément sensible du capteur a une dimension d'environ  $4 \text{ mm}^2$  et une fréquence d'acquisition maximale

de  $1MHz$ . Les caractéristiques techniques de ces capteurs ne permettent donc pas de capturer les ondes de surpression supposées responsables de l'érosion.

- Le taux de production des cavités tourbillonnaires  $f_c$  est mesuré à l'aide d'un laser à Argon. Ce taux de production correspond à la **fréquence d'apparition des structures gazeuses** à l'arrière de la poche de cavitation. Ces mesures ont permis d'établir le nombre de Strouhal de l'écoulement.

$$S_{tr} = \frac{f_c l}{u_{ref}} \approx 0.3 \quad (6.3)$$

Avec  $l$  la position de la mesure, correspondant à la fermeture de la poche de cavitation.

- Une technique de stéréo-tomographie a permis la quantification du volume des structures gazeuses. Le volume minimale mesurable par cette technique est de  $0.44mm^3$  (soit un rayon équivalent de  $4.10^{-4}m$ ). Elle est donc restreinte aux grosses structures et non à celles considérées comme responsables de l'érosion.

En plus de ces aspects macroscopiques, l'agressivité de l'érosion a été mesurée à l'aide d'éprouvettes placées le long du profil (voir figure 6.3). Réalisées en aluminium, ces éprouvettes ont été initialement polies garantissant une rugosité initiale inférieure à  $5.10^{-7}m$ . Elles ont été ensuite soumises à l'écoulement pendant un temps relativement court (de l'ordre de la minute) de façon à ne considérer que la **période d'incubation** (cf 1.1.3.2.). Une technique de dépouillement par profilométrie laser a permis par la suite de quantifier l'endommagement sur 5 surfaces de  $5 \times 2,5mm$  centrées sur 20%, 30%, 40%, 50% et 60% de la corde du profil.

Le tableau 6.1 récapitule les conditions d'essais qui seront comparées avec nos simulations. L'ensemble de ces essais présentent un comportement instable, traduit par la présence de lâchers de cavitation.

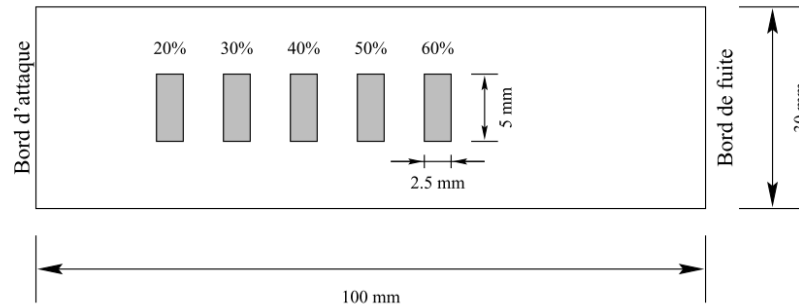


FIGURE 6.3 – Position des mesures de marquage sur le profil [171]

| Cas | angle $i$ ° | $u_c$ ( $m.s^{-1}$ ) | $\sigma_c$ | longueur de poche (%) | Pression Moyenne | Marquage |
|-----|-------------|----------------------|------------|-----------------------|------------------|----------|
| A   | 4           | 20                   | 1.25       | 20                    | <b>X</b>         | <b>X</b> |
| B   | 4           | 20                   | 1.1        | 40                    | <b>X</b>         | <b>X</b> |
| C   | 4           | 30                   | 1.255      | 20                    | <b>X</b>         | <b>X</b> |
| D   | 4           | 30                   | 1.12       | 40                    | <b>X</b>         | <b>X</b> |
| E   | 6           | 15                   | 1.88       | $\approx 20\%$        |                  | <b>X</b> |
| F   | 6           | 15                   | 1.59       | $\approx 40\%$        |                  | <b>X</b> |

TABLEAU 6.1 – Conditions du tunnel de cavitation retenues pour les comparaisons simulations/expériences

### 6.1.2. Présentation des simulations réalisées

Deux codes de calcul ont été utilisés pour cette étude : IZ un code développé au sein du LEGI pour le compte du CNES et Fine-Turbo développé par NUMECA international. Ces deux codes de code de calcul utilisent des modèles physiques semblables : les équations de Navier-Stokes pour un fluide homogène (masse et quantité de mouvement) utilisant comme modèle de fermeture la **loi barotrope**, la **correction de Reboud** avec un paramètre de 10 (cf B.2.3) et un modèle de turbulence  $k - \epsilon$  ( $k - \epsilon$  RNG pour IZ). Ils reposent cependant sur des algorithmes de résolution différents aussi bien en discrétisation temporelle que dans l'ordre de résolution des équations. Une présentation de ces deux codes est disponible en annexe B.1.

### 6.1.2.1. Discrétisation spatiale

En fonction du solveur utilisé, des stratégies de maillage différentes ont été employées. Le domaine de calcul représente l'intégralité de la veine d'essai en longueur mais se restreint à une géométrie bidimensionnelle.

#### Solveur IZ :

Le mailleur **MZ** permet le découpage du domaine en 4 blocs. Le bloc 1 et le bloc 4 représentent respectivement la partie supérieure et inférieure de la veine d'essai. Les blocs 2 et 3 relient ces deux parties depuis le bord d'attaque et de fuite du profil jusqu'aux conditions d'entrée et de sortie (fig 6.4). Le bord de fuite a une épaisseur de l'ordre de  $10 \mu m$ . Le maillage comprend environ 34 000 cellules pour les deux incidences (fig 6.5 et 6.6).

#### Solveur Fine-Turbo :

Pour le solveur Fine-Turbo, le contour de l'hydrofoil a été discrétisé à l'aide d'un bloc en C. Ce dernier est relié aux conditions limites par des maillages en H (fig 6.7). Dans cette simulation, le bord de fuite est fin. Le maillage comprend 16 000 cellules pour 12 blocs (Fig. 6.8 et 6.9).

Pour ces deux maillages la taille caractéristique des cellules dans la zone de la poche cavitante (au dessus du profil) est de  $5.10^{-4} m$ .

La vitesse de l'écoulement dans la première maille étant déterminée par une loi de paroi standard pour IZ et d'une loi de paroi étendue pour Fine-Turbo (voir partie B.1.3), la taille de ces cellules représente un critère de dimensionnement pour l'ensemble du maillage. Dans ces deux cas, il est recommandé que la taille de première maille adimensionnelle,  $y^+$ , soit comprise entre 20 et 50.

Les figures 6.10 et 6.11 montrent l'évolution moyenne de  $y^+$  le long du profil **dans des conditions cavitantes**. Les recommandations imposées par les lois de paroi sont respectées sur la majorité de la paroi. Au niveau du bord d'attaque, une vitesse importante de l'écoulement crée une augmentation du  $y^+$ . Les contraintes géométriques du maillage

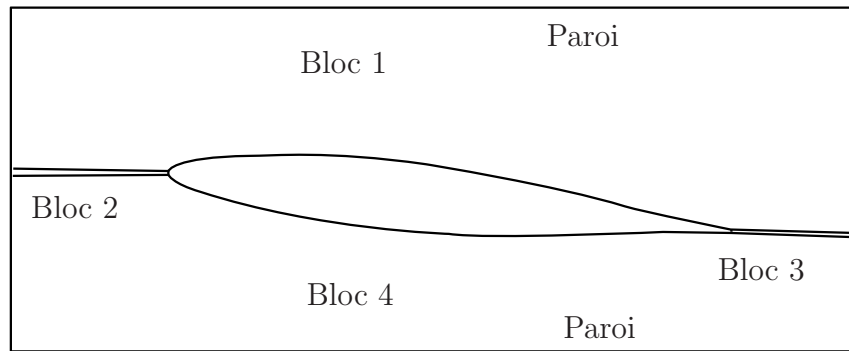


FIGURE 6.4 – Stratégie de découpage en blocs pour les calculs IZ

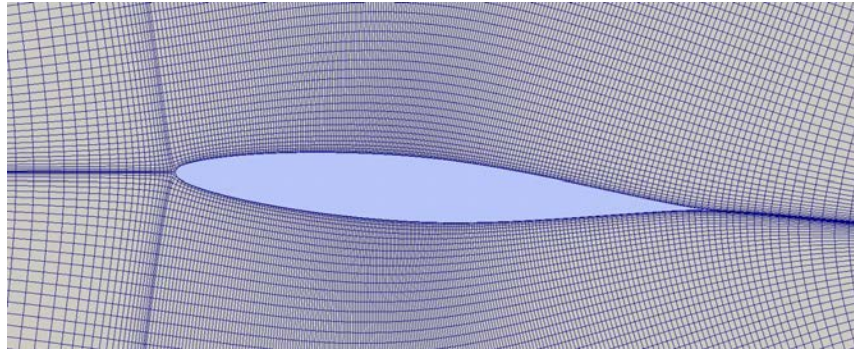


FIGURE 6.5 – Maillage réalisé pour le profil EPFL sur IZ avec une incidence de  $i = 4^\circ$

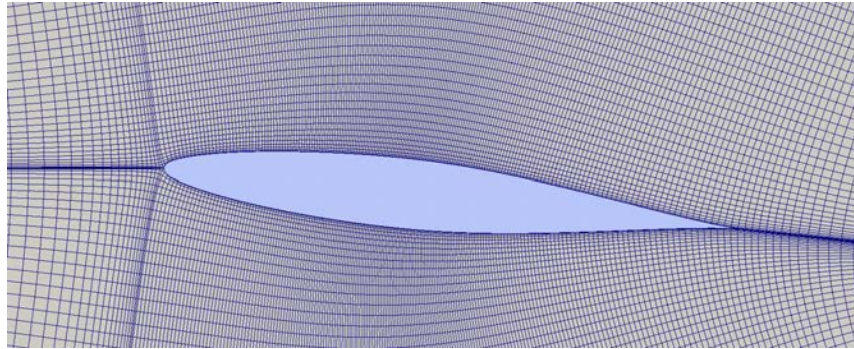


FIGURE 6.6 – Maillage réalisé pour le profil EPFL sur IZ avec une incidence de  $i = 6^\circ$

structuré ne permettent pas alors de respecter intégralement les recommandations sur le  $y^+$ .

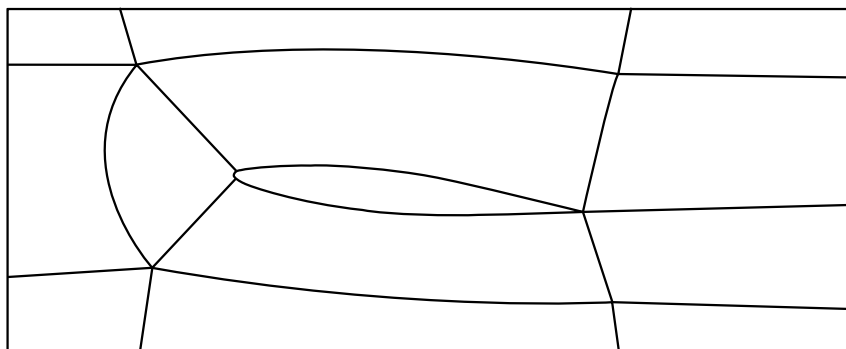


FIGURE 6.7 – Stratégie de découpage en blocs pour les calculs Fine-Turbo

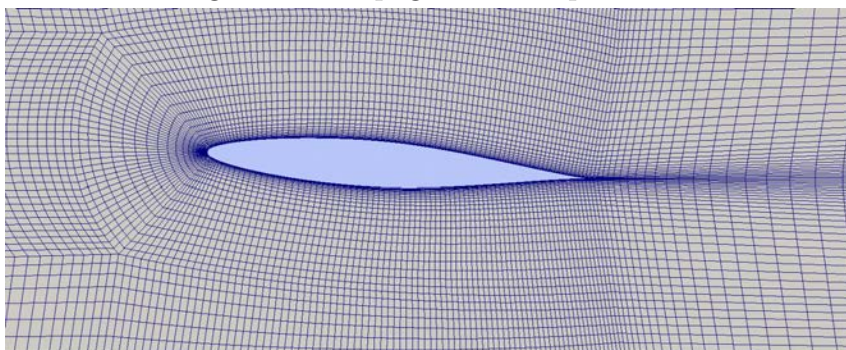


FIGURE 6.8 – Maillage réalisé pour le profil EPFL sur Fine-Turbo avec une incidence de  $i = 4^\circ$

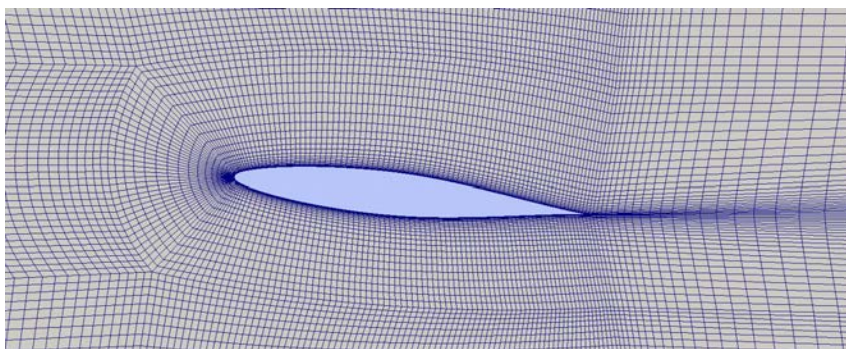


FIGURE 6.9 – Maillage réalisé pour le profil EPFL sur Fine-Turbo avec une incidence de  $i = 6^\circ$

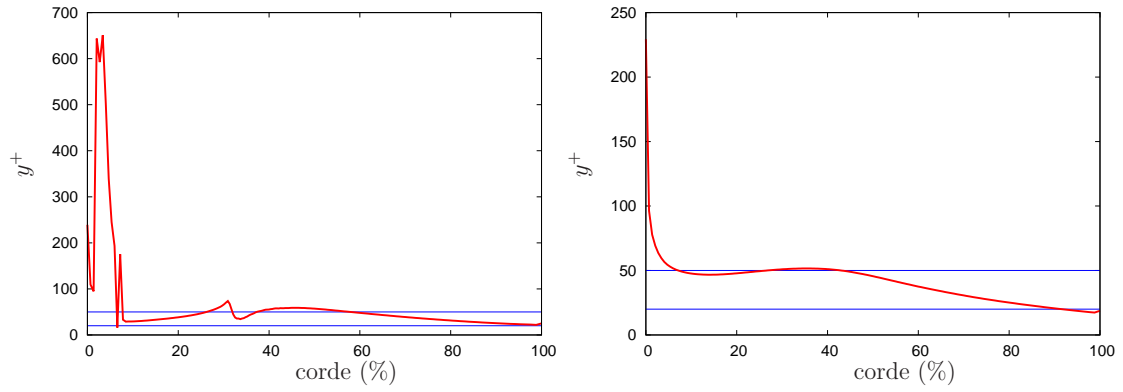


FIGURE 6.10 – Maillage IZ à 4 ° (cas C) et 6 ° d'incidence (cas F) - Taille de première maille adimensionnelle  $y^+$  moyennée le long du profil

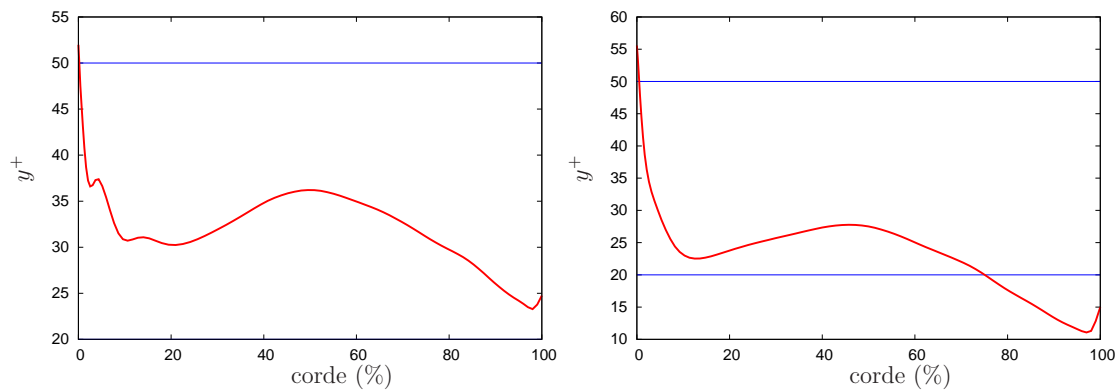


FIGURE 6.11 – Maillage Fine-Turbo à 4 ° (cas C) et 6 ° (cas F) d'incidence - Taille de première maille adimensionnelle  $y^+$  moyennée le long du profil

### 6.1.2.2. Conditions limites et période transitoire

Les conditions limites des calculs sont définies à l'aide de la vitesse en entrée et de la pression en sortie. Le retour d'expérience du laboratoire semble indiquer que cette configuration est la plus stable pour la simulation de turbomachines. Elle sera prise pour l'ensemble des simulations réalisées au cours de cette thèse.

Pour ce cas d'étude, les données expérimentales procurent la pression ainsi que la vitesse de l'écoulement en entrée du domaine de calcul. Afin de caractériser le point de fonctionnement du calcul, la pression imposée en sortie du domaine est déterminée de sorte que la **valeur la plus probable** du paramètre de cavitation amont  $\sigma_c^{amont}$  corresponde à la valeur désirée (Fig 6.12 et 6.13a).

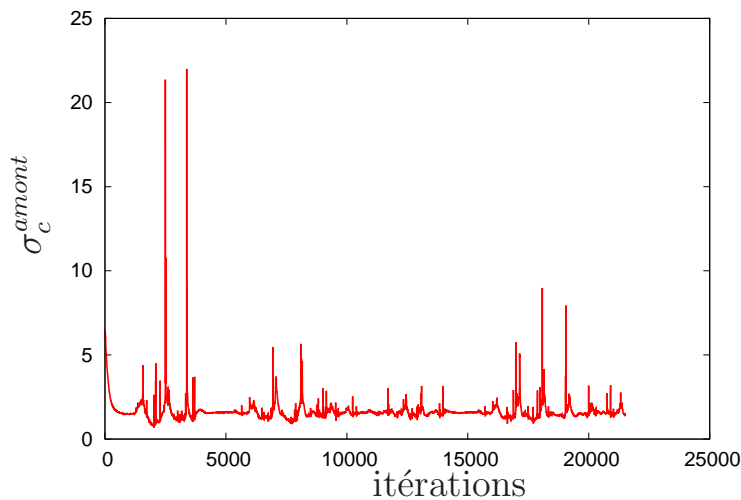
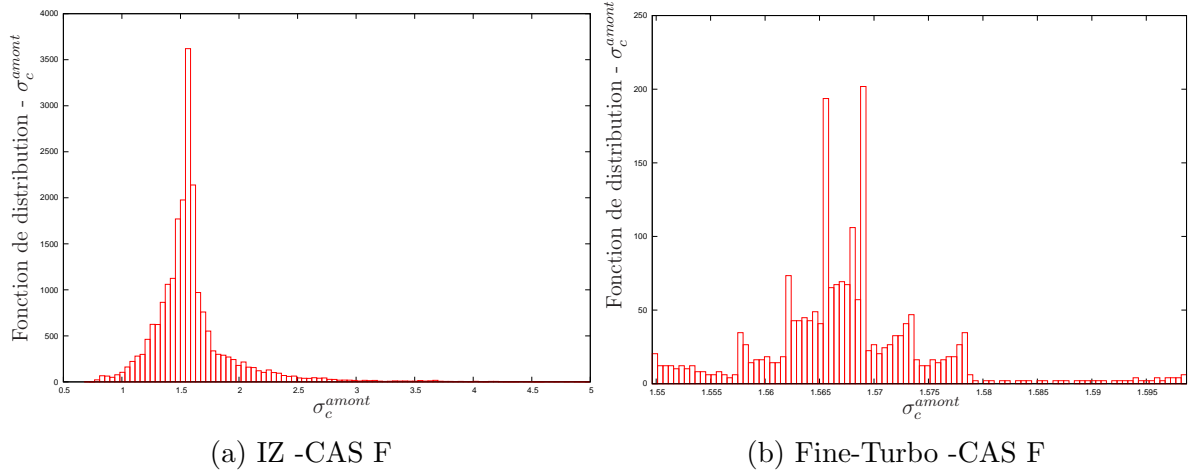


FIGURE 6.12 – Evolution de la valeur de  $\sigma_c^{amont}$  au cours de la simulation (IZ -CAS F)

Une **période transitoire** amenant les conditions limites à celles du régime établi est nécessaire afin d'assurer la stabilité du calcul. Pour les deux solveurs, cette période coïncide avec une diminution progressive du paramètre de cavitation,  $\sigma_c$ .

- Pour IZ, la pression de sortie est initialement prise plus élevée que la pression désirée  $\sigma_c^{init} = 5$  (un calcul stationnaire est réalisé pour ces conditions en début de calcul) puis la pression de sortie est diminuée progressivement à chaque itération lors d'un pas du calcul instationnaire. Les conditions d'essais sont établies après une durée




 FIGURE 6.13 – Fonction de distribution de la valeur de  $\sigma_c^{amont}$  au cours de la simulation

égale au temps caractéristique de l'écoulement,  $t_c$ . Dans le cas d'un hydrofoil, celui-ci est déterminé à l'aide de la longueur du profil et de la vitesse de l'écoulement.

$$t_c = \frac{L_{ref}}{u_c} \quad (6.4)$$

Ce temps représente la durée nécessaire à une particule se déplaçant à la vitesse  $u_{ref}$  pour passer du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite du profil.

$$t_c \approx 10^{-2} s$$

- Pour le solveur Fine-turbo, le calcul est réalisé en deux étapes :
  - Un calcul **non cavitant instationnaire**, avec pour paramètre les conditions d'entrée et de sortie du régime permanent, est effectué jusqu'à stabilisation du débit de sortie.
  - Par la suite, la solution obtenue permet d'initialiser un calcul **cavitant instationnaire**, dans lequel la pression de vapeur saturante, prise inférieure à la pression minimale dans l'ensemble du champ, est progressivement augmentée jusqu'à obtenir la valeur souhaitée. En fonction des conditions d'essai, la durée ainsi que le nombre de pseudo-pas de temps considéré pendant cette période transitoire peut évoluer.

Dans ces deux calculs, la période transitoire est supposée achevée à partir de 10 fois le temps caractéristique  $t_c$  de l'écoulement.

### 6.1.2.3. Discrétisation temporelle et convergence des calculs

L'instationnarité des simulations est réalisée, pour **Fine-Turbo**, à l'aide d'une technique de **pseudo pas de temps** (cf B.1.1.2.) et par une convergence l'algorithme SIMPLE pour **IZ**. Dans ces méthodes, le passage au pas de temps physique suivant est déterminé par l'une des deux conditions suivantes :

#### Convergence du système entre deux pas de temps physiques :

Cette condition est atteinte lorsque l'ensemble des résidus est inférieur à une certaine valeur.

- Dans IZ, le niveau de convergence exigée est différent pour chaque variable thermodynamique (Tab 6.2) et repose sur la valeur maximale des résidus sur l'ensemble du calcul.

| variable               | $\rho$    | $\mathbf{u}$ | $k$       | $\epsilon$ |
|------------------------|-----------|--------------|-----------|------------|
| Critère de convergence | $10^{-6}$ | $7.10^{-4}$  | $10^{-3}$ | $10^{-2}$  |

TABLEAU 6.2 – Critère de convergence du calcul pour la passage à l'itération suivante utilisé dans le solveur IZ

- Pour Fine-Turbo, le résidu moyen (cf B.1.1.2.) dans l'ensemble du champ doit être inférieur à  $10^{-4}$ .

#### Un nombre maximal de pseudo-pas de temps/itérations est atteint :

Cette condition n'assure pas la convergence du calcul mais est nécessaire à l'avancement de la simulation. Le nombre de pseudo pas de temps maximal est défini à **2000 pour IZ** et **100 pour Fine-Turbo** (en dehors de la période transitoire).

Au cours des différentes simulations IZ, très peu de pas de temps atteignent le nombre maximal d'itérations pour un même pas de temps physique, (Fig. 6.14), témoignant ainsi

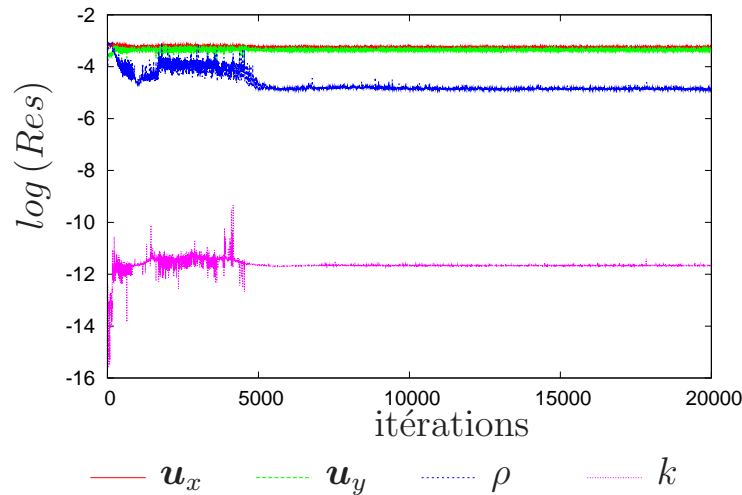


FIGURE 6.14 – Résidus de calcul à chaque pas de temps au cours de la simulation du cas A - IZ

de la convergence des calculs (selon les critères définis dans le tableau 6.2).

La convergence des calculs instationnaires réalisés avec le solveur Fine-Turbo dans des conditions cavitantes est en revanche plus discutable. La figure 6.15 montre l'évolution du résidu global obtenu à la fin de chaque pas de temps physique. Ce dernier peut fluctuer de 2-3 ordres de grandeurs d'un pas de temps à l'autre. L'évolution des résidus maximales au cours d'un même pas de temps physique montre que l'augmentation du nombre de pseudo-itérations maximales n'améliorera pas la convergence du calcul en dehors de la période transitoire.

- Sur la figure 6.16a, prise au début du calcul, les pas de temps atteignent un plateau au bout des 100 pseudo-itérations, l'augmentation de ce nombre de pseudo-pas de temps ne permettant pas de diminuer les résidus du calcul.
- Sur la seconde figure 6.16b, le résidu connaît des discontinuités au cours d'un même pas de temps de façon périodique (itération 11667-11668 et 11690-11691).

Sur l'ensemble des calculs réalisés avec Fine-Turbo aucun des pas de temps physiques n'a atteint la convergence demandé ( $10^{-4}$ ).

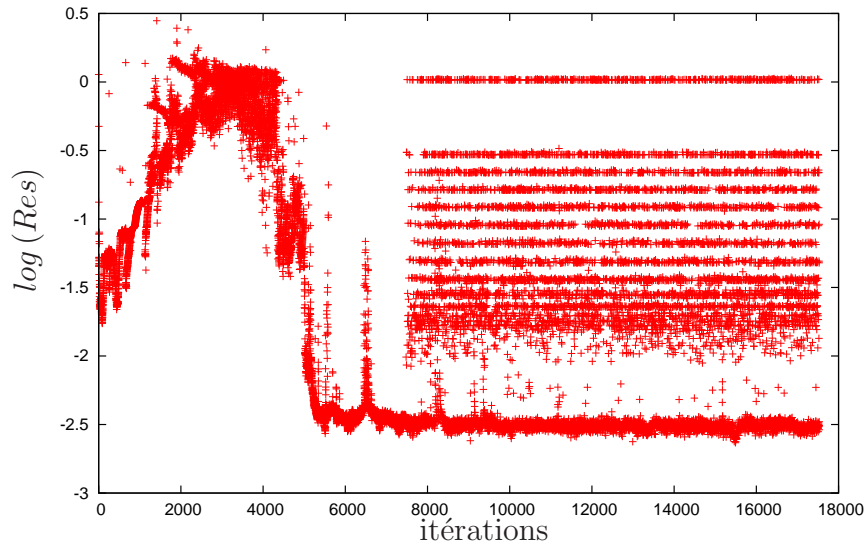
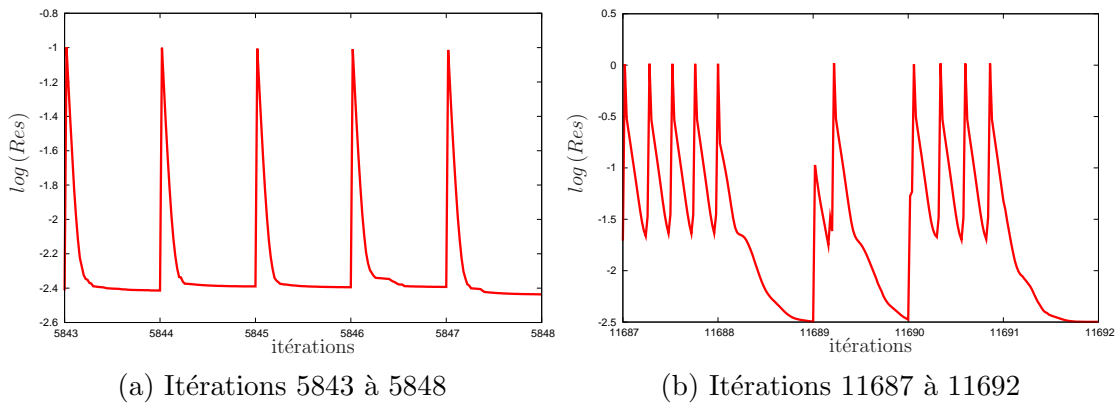


FIGURE 6.15 – Résidus de calcul à chaque pas de temps au cours de la simulation du cas A - Fine-Turbo



(a) Itérations 5843 à 5848

(b) Itérations 11687 à 11692

FIGURE 6.16 – Résidus de calcul pour chaque pseudo-pas de temps pendant deux périodes temporelles de la simulation cas A - Fine-Turbo

La convergence reste un point délicat pour les simulations **U-RANS** instationnaires. Les schémas temporelles utilisés par IZ et Fine-Turbo étant différents : implicite d'ordre 1 pour le premier et une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 pour le second, la comparaison des résultats obtenus avec ces deux codes est difficile.

Le pas de temps physique choisi pour ces deux simulations est basé sur les caractéristiques de l'écoulement et sur des considérations effectuées préalablement au sein

du laboratoire.

$$dt_{URANS} = 0,002t_c \approx 10^{-5} s \quad (6.5)$$

### 6.1.3. Résultats des simulations

L'analyse des résultats de simulations est traitée en deux étapes. En premier lieu, les calculs sont comparés aux expériences en fonction du comportement global de l'écoulement (pression en paroi, longueur de poche,...). Le modèle de prévision d'érosion de cavitation est appliqué dans un second temps et comparé alors aux données de marquage.

#### 6.1.3.1. Critères hydrodynamiques

Pour cette série d'essais, différents critères permettent de comparer les résultats expérimentaux aux simulations numériques :

##### **Paramètre de cavitation amont :**

Le paramètre de cavitation amont n'étant pas linéairement dépendant des conditions de pression en sortie de calcul, plusieurs calculs doivent être réalisés afin d'obtenir les conditions expérimentales souhaitées. Comme dit précédemment, la valeur de ce paramètre retenue est la **valeur la plus probable** au cours de la simulation.

##### **Fréquence de lâchers :**

Les expériences menées par Pereira [171] ont permis d'établir une fréquence caractéristique de lâchers déterminant, avec la longueur de poche et la vitesse de l'écoulement, un nombre de Strouhal,  $S_{tr}$  proche de 0,3. Les fréquences de nos simulations sont, quant à elles, basées sur la transformation de Fourier de la variation temporelle du taux de vide moyen dans la veine (Fig 6.17).

##### **Longueur de poche :**

Les longueurs minimales et maximales de la poche de cavitation sont également relevées à l'aide d'un diagramme spatio-temporel montrant la projection du taux de vide maximal dans la hauteur de veine sur le profil (Fig. 6.18).

Le tableau 6.3 récapitule les résultats obtenus pour ces simulations :

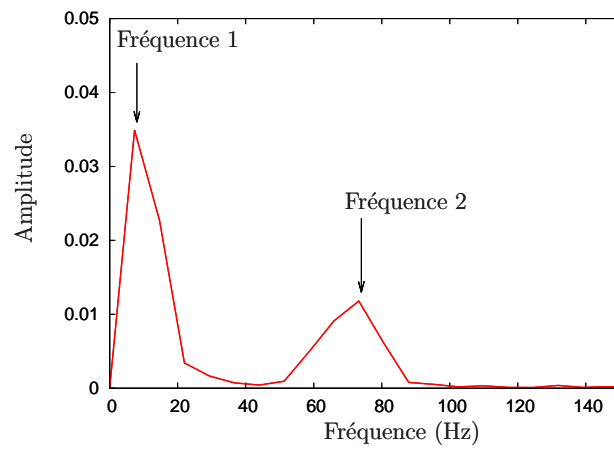


FIGURE 6.17 – Spectre fréquentiel associé à la variation temporelle du taux de vide pour le CAS F - IZ

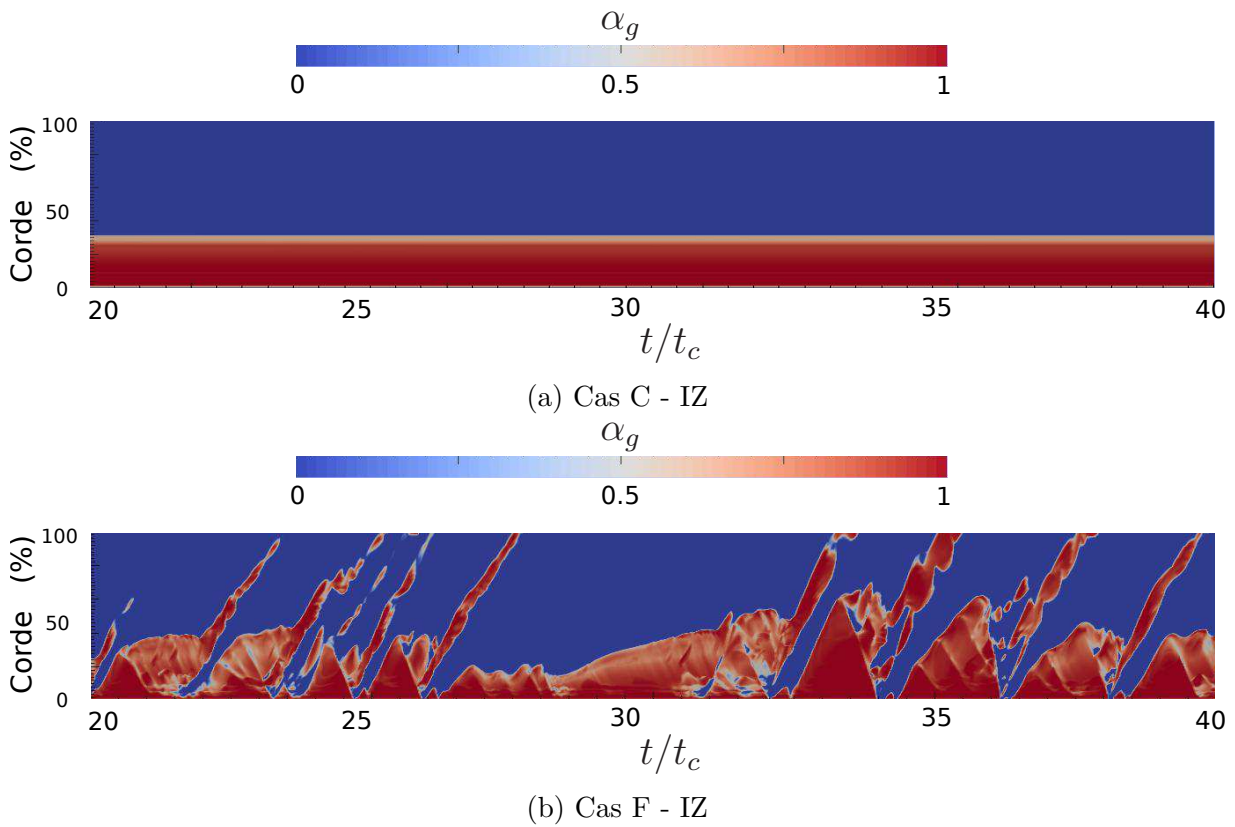


FIGURE 6.18 – Représentation spatio-temporelle du taux de vide maximal dans la veine projetée sur le profil

- Pour certaines configurations, la poche de cavitation est stable au cours du temps (Fig. 6.18a). Pour d'autres, la poche a un comportement périodique ou pseudo-périodique (Fig. 6.18b), des lâchers tourbillonnaires induits par la présence d'un jet-rentrant sont visibles (Fig. 6.19). La détermination d'une longueur caractéristique de poche est dans ce cas délicate et le relevé des longueurs maximale et minimale de la poche lui a été préféré.

Les dimensions obtenues avec le solveur IZ dans le cas de poche stable sont plus importantes (30% dans les simulations contre 20% pour les expériences) que celles obtenues expérimentalement. Pour le solveur Fine-Turbo la poche est stabilisé quelque soit les conditions hydrodynamiques testées. De plus les dimensions des poches de cavitation établies par les simulations sont plus faibles que l'expérience (jusqu'à deux fois plus faible pour le cas F).

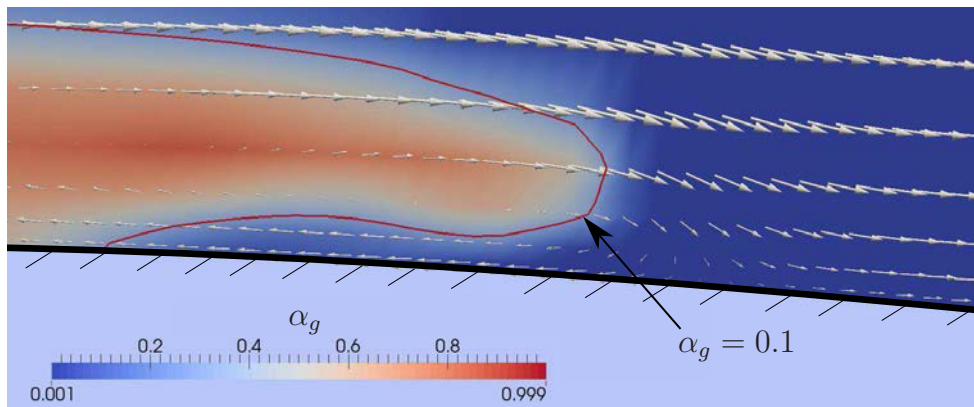


FIGURE 6.19 – Visualisation du jet rentrant en fermeture de poche de cavitation pour le cas F-IZ : les flèches représentent la direction du vecteur vitesse

- Deux fréquences caractéristiques témoignent de la dynamique de la poche reproduite : la première correspond aux oscillations de la poche tandis que la seconde caractérise les lâchers tourbillonnaires (Fig. 6.17). Les fréquences de lâchers obtenues numériquement avec le solveur IZ sont plus faibles que les résultats expérimentaux. Les fréquences relevées expérimentalement et celles obtenues numériquement ne représentent pas exactement les mêmes phénomènes, ce qui peut expliquer cette

### 6.1. Profil NACA 65012 - EPFL

distinction. De plus, ce résultat est cohérent avec l'augmentation de la longueur de poche simulée. Il faut remarquer que la durée totale ( $\approx 0.1s$ ) de la simulation est insuffisante pour quantifier précisément les fréquences inférieures à la dizaine de Hertz. Les symboles – du tableau 6.3 témoignent de l'absence de battements de la poche de cavitation.

|            | Cas | $u_{in}$<br>( $m.s^{-1}$ )                     | $\sigma_c^{amont}$ | Longueur de poche<br>(% de corde) |       |       | Fréquences (Hz) |         |         |           |
|------------|-----|--|--------------------|-----------------------------------|-------|-------|-----------------|---------|---------|-----------|
|            |     |  |                    | Simu/Expé                         | mini. | maxi. | Expé.           | Fréq. 1 | Fréq. 2 | Fréq. exp |
| IZ         | A   | 20   | 1,27 / 1,25        | 30 %                              |       | 20 %  | -               | -       | 300     |           |
|            | B   | 20   | 1,11 / 1,11        | 0%                                | 60 %  | 40 %  | 20              | 100     | 150     |           |
|            | C   | 30   | 1,27 / 1,26        | 30 %                              |       | 20 %  | -               | -       | 450     |           |
|            | D   | Divergence du calcul au 7 <sup>ème</sup> cycle |                    |                                   |       |       |                 |         |         |           |
|            |     | 30   | 1,12 / 1,11        | 0 %                               | 70 %  | 40 %  | 30              | 115     | 225     |           |
|            | E   | 15   | 1,85 / 1,88        | $\approx 1\%$                     | 35 %  | 20 %  | 15              | 125     | 225     |           |
| F          | 15  | 1,56 / 1,59                                    | 0%                 | 40 %                              | 20 %  | 7     | 75              | 112     |         |           |
| Fine-Turbo | A   | 20   | 1,27 / 1,25        | 18 %                              |       | 20 %  | -               | -       | 300     |           |
|            | B   | 20   | 1,14 / 1,11        | 23 %                              |       | 40 %  | -               | -       | 150     |           |
|            | C   | 30   | 1,29 / 1,26        | 15 %                              |       | 20 %  | -               | -       | 450     |           |
|            | D   | 30   | 1,14 / 1,11        | 23 %                              |       | 40 %  | -               | -       | 225     |           |
|            | E   | 15   | 1,90 / 1,88        | 10 %                              |       | 20 %  | -               | -       | 225     |           |
|            | F   | 15   | 1,56 / 1,59        | 20 %                              |       | 40 %  | -               | -       | 112     |           |

TABLEAU 6.3 – Résultats des simulations pour le cas EPFL

Les figures 6.20 permettent la comparaison des pressions expérimentales avec la moyenne des pressions en paroi simulée. Les niveaux de pression au bord de fuite sont en adéquation entre les expériences et les simulations pour les deux solveurs. Dans le cas d'une poche de cavitation stable, les emplacements du saut de pression liés à la sortie du milieu diphasique confirment la surestimation de la poche cavitante pour les simulations IZ et sa sous-estimation pour le solveur Fine-Turbo.

Aucun des deux solveurs ne semblent pouvoir simuler **de façon précise** la dynamique de l'écoulement obtenue expérimentalement (fréquence, longueur de poche,...) à partir des seules conditions limites. Mais devant la difficulté liée à la caractérisation de la longueur



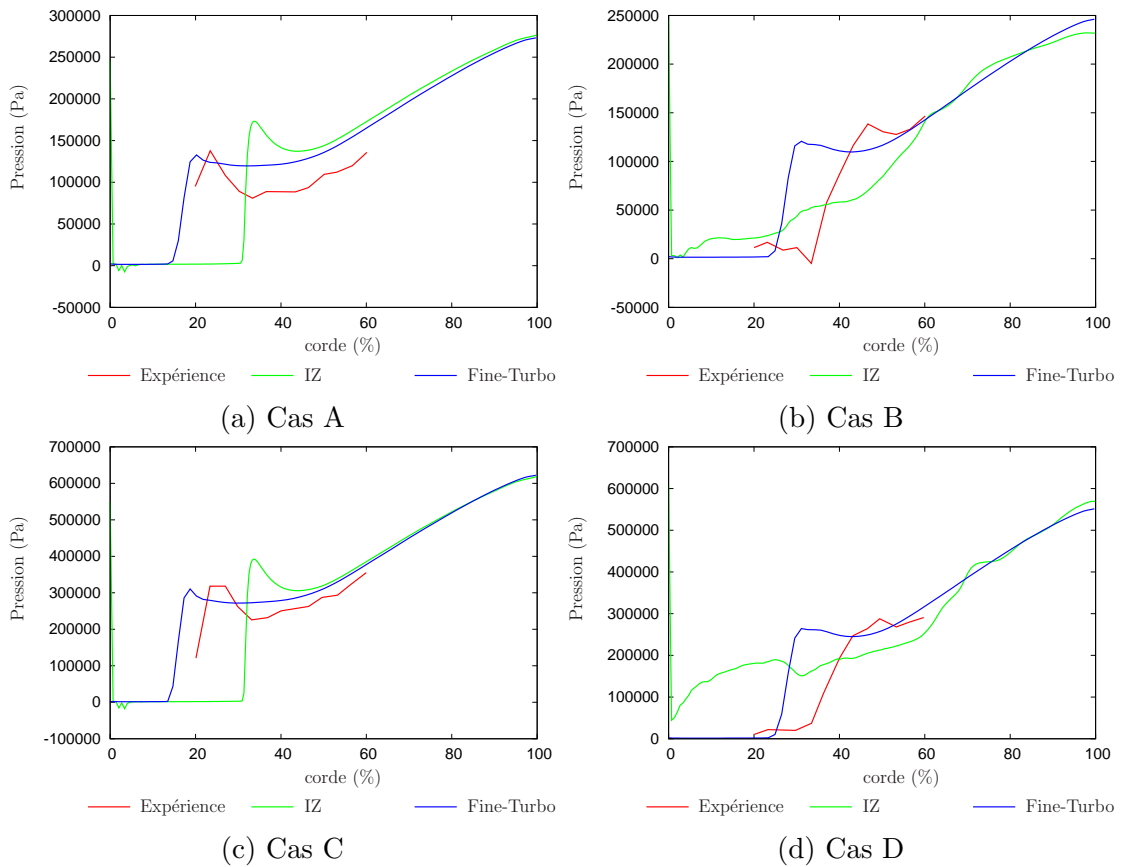


FIGURE 6.20 – Pression moyenne le long du profil EPFL

de poche en présence de lâchers, et à l'absence de lâchers dans certaines conditions, il a été préféré de conserver ces conditions limites portant sur le paramètre de cavitation amont.

### 6.1.3.2. Prévisions de l'érosion de cavitation par l'implosion d'un volume de vapeur

Maintenant que nous avons évalué les résultats des simulations d'un point de vue hydrodynamique, nous allons appliquer les différentes méthodes de prédiction de l'érosion de cavitation présentées dans ce manuscrit. Nous commençons par évaluer la méthode proposée par Reboud et Fortes-Patella [73] reposant sur la variation lagrangienne d'une énergie potentielle (cf 1.3.1.3.). Comme précisé en début de chapitre, la puissance  $P_{wave}$  définie par cette méthode sera considérée de deux façons différentes sur le solide.

## 6.1. Profil NACA 65012 - EPFL

Pour toute cellule contenue dans le domaine purement liquide ( $p_M > p_{sup}$  - voir (3.40)) pour plusieurs pas de temps consécutifs, et ayant l'ensemble de ces voisines également dans cette zone de pression, la variation lagrangienne de la masse volumique est censée être nulle selon la loi barotrope. L'équation de conservation de la masse (5<sup>ème</sup> équation du système (3.18)) nous indique que pour ces cellules, la divergence de la vitesse  $\mathbf{u}_M$ , sur laquelle est basé le potentiel d'agressivité  $P_{wave}$ , est également nulle. Or suite à des erreurs de convergence, des zones de divergences de vitesse proches de 0 mais non nulles existent dans des zones où la pression est supérieure à  $p_{sup}$  pour plusieurs pas de temps consécutifs. L'ordre de grandeur du potentiel d'agressivité  $P_{wave}$  dans ces régions est nettement plus faible que celle en sortie de poche (Fig. 6.21) mais reste suffisante pour avoir un impact sur l'agressivité de l'écoulement.

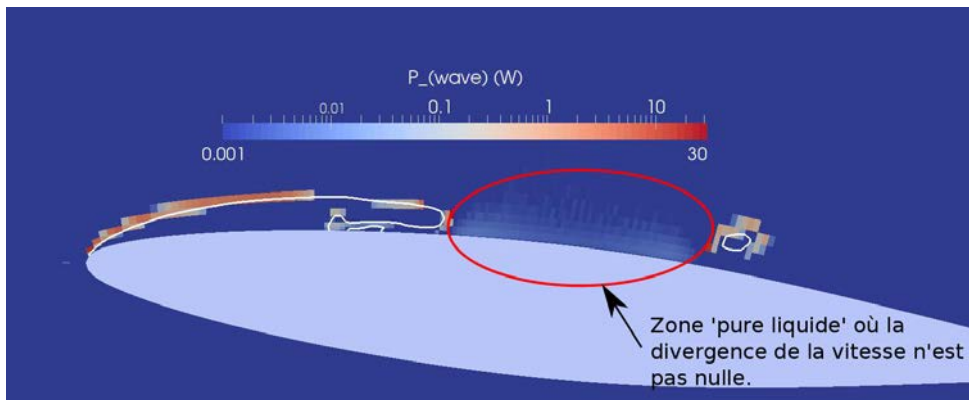


FIGURE 6.21 –  $P_{wave}$  pour le cas F -IZ à un instant donné

### Intégration de la puissance sur la hauteur de veine (MP-IH) :

En l'absence de filtrage spatial ou quantitatif, l'ensemble de ces 'sources agressives' sont projetées sur la paroi (Fig. 6.22).

### Potentiel agressif projeté à l'aide de l'angle solide (MP-AS) :

Avec la méthode des angles solides, la puissance  $P_{wave}$  issue de l'implosion du volume de vapeur contenue dans une cellule du maillage est transmise sur une plus grande surface de l'hydrofoil mais la puissance surfacique reçue diminue avec la distance à la paroi. On observe que les ordres de grandeurs de la puissance reçue sont atténués par rapport à la méthode **MP-IH** (de deux ordres de grandeurs sur la valeur maximale).

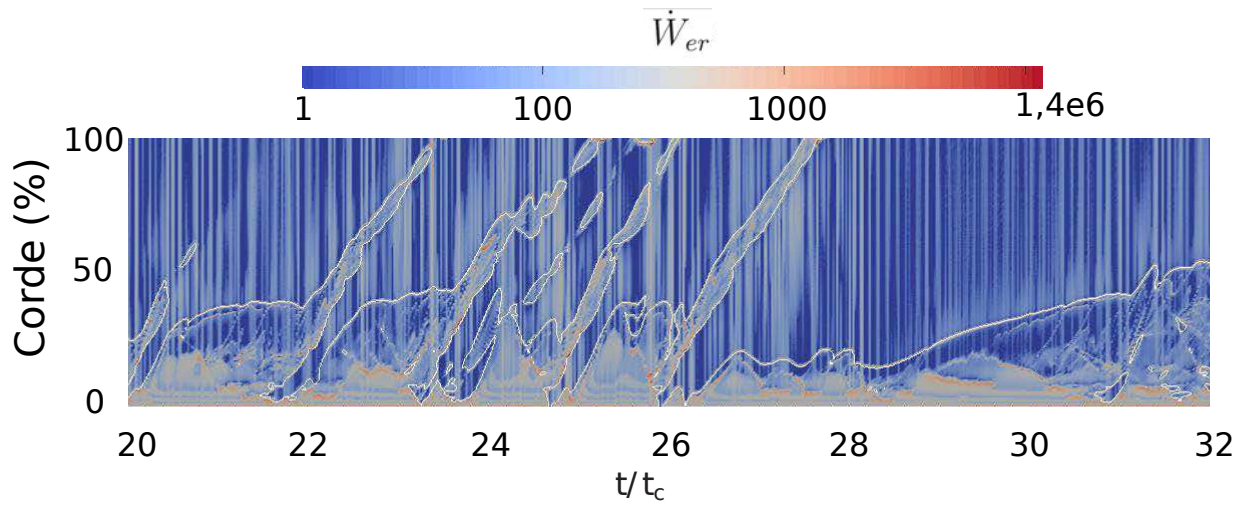


FIGURE 6.22 – Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode **MP-IH**; les lignes blanches représentent l'isocontour du taux de vide  $\alpha_g = 0.3$

Dans cette configuration, les zones d'endommagement prédites par cette méthode se concentrent au niveau de la fermeture de poche et au niveau du bord d'attaque (Fig. 6.23).

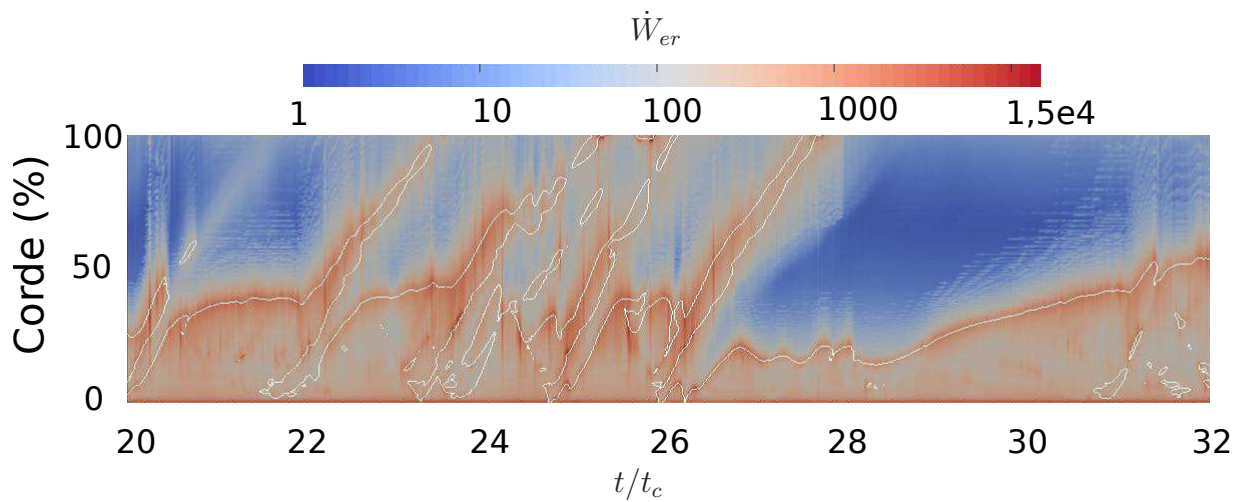


FIGURE 6.23 – Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode **MP-AS**; les lignes blanches représentent l'isocontour du taux de vide  $\alpha_g = 0.3$

Le bord d'attaque du profil subit un endommagement important, non obtenu

expérimentalement (Fig. 6.24). Un critère plus sélectif des cellules dans lesquelles le potentiel agressif  $P_{wave}$  est calculé permettrait de limiter ces erreurs. Pour l'heure et afin d'évaluer cette méthode pour cette géométrie, seule **l'estimation de l'érosion de cavitation au delà de 10 % de corde sera considérée pour ce profil.**

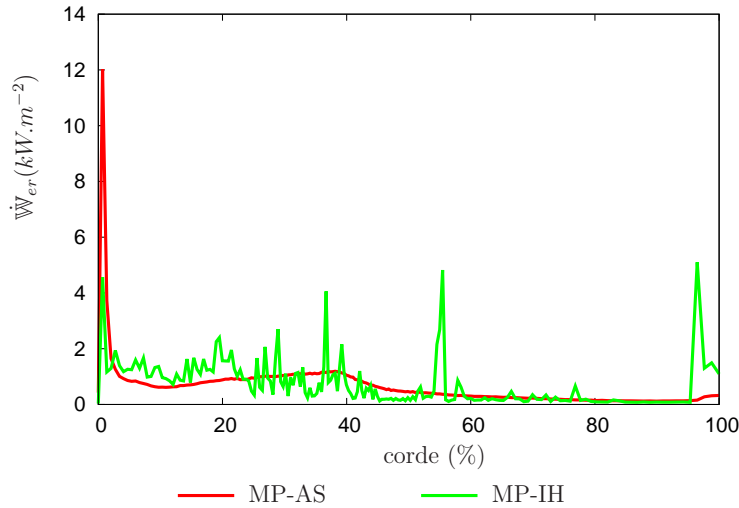


FIGURE 6.24 – Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée par les **MP-AS** et **MP-IH** - cas F, IZ

### 6.1.3.3. Prévisions de l'érosion de cavitation par l'implosion d'un ensemble de bulles - M-IDB

Nous allons désormais nous intéresser à la méthode développée au cours de ce doctorat. Ce premier cas-test nous permettra d'étudier la sensibilité du modèle à différents paramètres :

- numériques : pas de temps des simulations, fréquence d'acquisition des sorties,...
- physiques : quantité d'air dans l'écoulement, valeur de la tension superficielle,...

Dans le chapitre précédent (cf 5.1.1.3.), les critères de sélection des cellules dans lesquelles l'algorithme d'implosion de bulles est calculé ont été établis. La figure 6.25 témoigne pour un pas de temps des cellules sélectionnées pour l'algorithme **IDB**. La dynamique de bulles est ainsi calculée dans les zones en périphérie des structures cavitantes et notamment au niveau de la fermeture de la poche de cavitation.

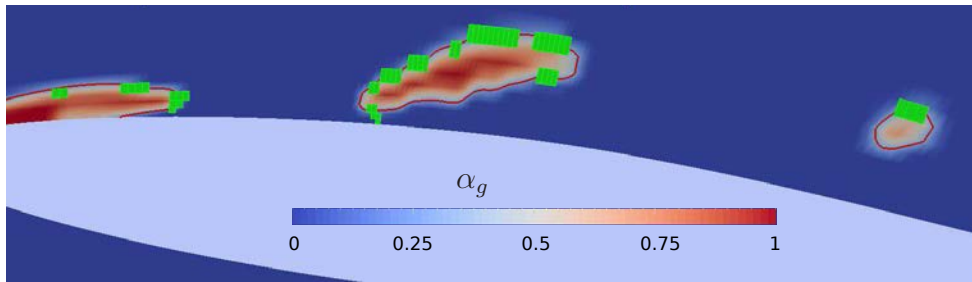


FIGURE 6.25 – Sélection des cellules (en vert) dans lesquelles la dynamique de bulles est calculée pour un instant de la simulation IZ - cas F

Nous pouvons vérifier que la **variation temporelle** de la pression du liquide dans les zones d'implosion est, pour l'ensemble des simulations effectuées, inférieure à  $10^8 Pa.s^{-1}$ . Le saut de pression induit par cette variation temporelle est donc inférieure à  $2\,000 Pa$  d'un pas de **temps physique** à un autre ( $dt_{URANS} < 2.10^{-5}s$ ). La variation spatiale de la pression engendre quant à elle, un saut de pression de l'ordre de  $50\,000 Pa$ . **La variation temporelle de la pression peut alors être négligée** dans la mesure où l'on a considéré un changement de pression instantané lors du passage d'une cellule à une autre. Pour le reste de l'étude, les changements de pression utilisés pour les calculs de dynamique de bulles ne reposeront que sur les variations spatiales de la pression du liquide.

La figure 6.26 montre le diagramme spatio-temporel de l'agressivité reçue par l'extrados de l'hydrofoil. La sélection des cellules opérée par cette méthode limite la zone d'agressivité à la fermeture de la poche et aux frontières des lâchers cavitants. Néanmoins, l'agressivité de l'écoulement estimée est sensible à l'apparition d'**événements extrêmes**. Ainsi sur la figure 6.26, quatre instants différents présentent une puissance surfacique sur le profil beaucoup plus importante que les autres.

Ces ondes de surpression proviennent de cellules pour lesquelles la variation de pression est importante et la taille des bulles ainsi que la quantité de gaz incondensable sont faibles. L'apparition de ces cellules favorables à ces pics d'endommagement est dès lors fortement soumise à la discrétisation temporelle et spatiale du calcul. Ainsi pour une même configuration mais un pas de temps **U-RANS** différent, la moyenne temporelle de la puissance reçue en paroi,  $\dot{W}_{er}$ , représentatif de l'agressivité de l'écoulement dans notre méthode, peut varier de plusieurs ordres de grandeurs (Fig. 6.28).

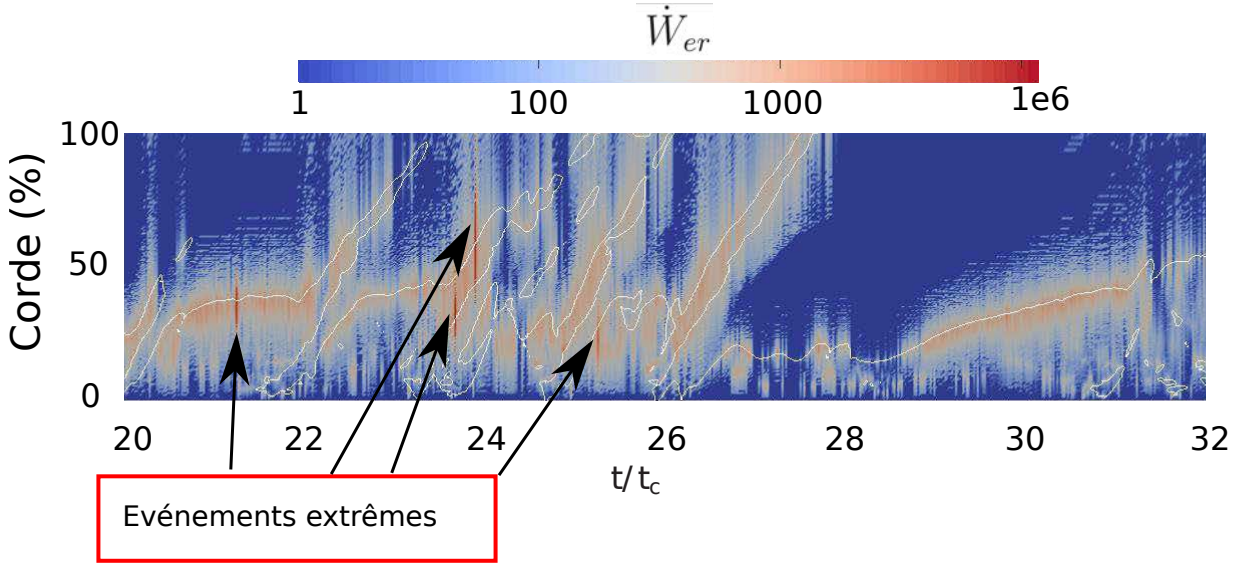


FIGURE 6.26 – Diagramme spatio-temporel de l’intensité de cavitation sur l’extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode **M-IDB** ; les lignes blanches représentent l’isocontour du taux de vide  $\alpha_g = 0.3$

Afin d’obtenir un résultat répétable et moins sensible au pas de temps choisi pour la simulation, il a été décidé d’écarter la puissance reçue en paroi. En effet en dehors de ces événements ponctuels (4 pas de temps sur 600 considérés), l’ordre de grandeur de la puissance surfacique érosive instantanée  $\dot{W}_{er}$  est compris entre 0 et  $10^4 W.m^{-2}$ . En l’écarter sur l’ensemble de la simulation au delà d’une puissance surfacique  $\dot{W}_{er}^{max}$  suffisamment grande, on ne modifie que les quatre pas de temps générant de très fortes puissances érosives (Fig. 6.27).

$$\left(\dot{W}_{er}\right)_{ecrete} = \begin{cases} \dot{W}_{er} & \text{Si } \dot{W}_{er} \leq \dot{W}_{er}^{max} \\ \dot{W}_{er}^{max} & \text{Sinon} \end{cases} \quad (6.6)$$

Cette opération diminue alors l’importance de ces ‘événements ponctuels’ sur la moyenne temporelle et permet d’obtenir une estimation de l’agressivité de l’écoulement peu sensible au pas de temps choisi pour la simulation **URANS** (Fig. 6.28). Il faut garder à l’esprit que l’érosion de cavitation est possiblement liée à l’apparition de ce genre d’événements extrêmes. Néanmoins, sans étude plus détaillée de l’influence du pas de temps, il est délicat de comparer les résultats issus de la méthode sans cette opération.

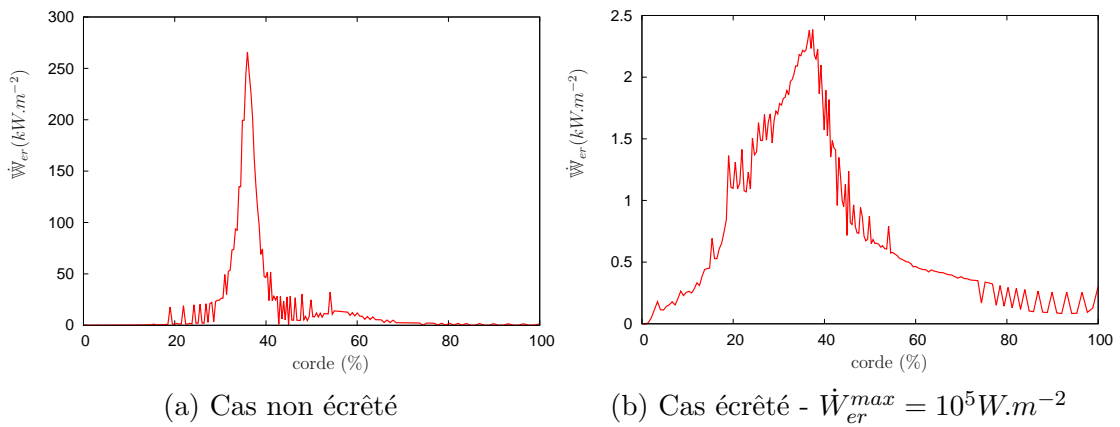


FIGURE 6.27 – Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  par la méthode IDB - cas F, IZ

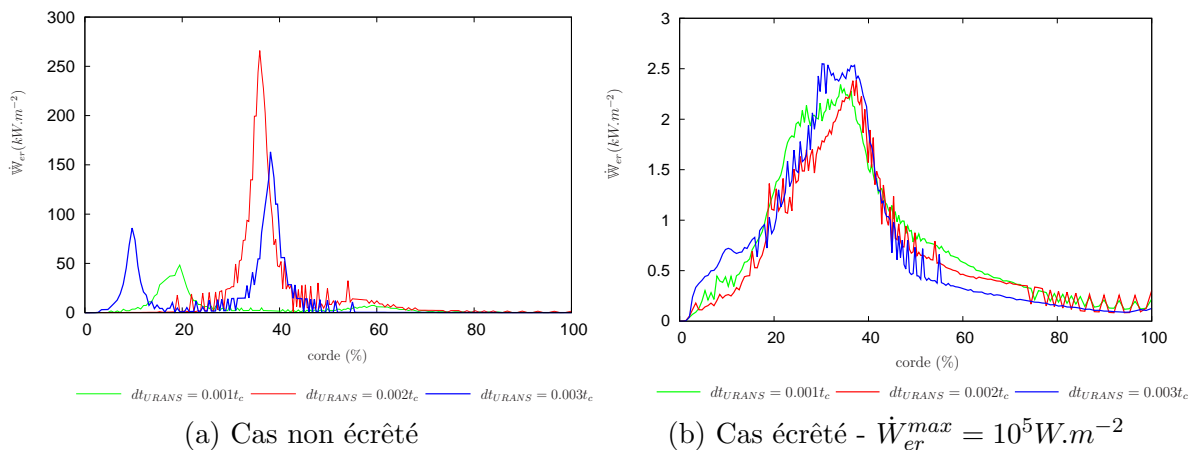


FIGURE 6.28 – Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  par la méthode IDB - cas F, IZ - pour différents pas de temps  $dt_{URANS}$

En effet, l'amplitude et la zone d'érosion diffèrent (Fig. 6.28a).

La puissance surfacique maximale  $W_{er}^{max}$  utilisée pour écrêter les résultats, et ainsi retirer les événements extrêmes, influence les résultats obtenus par notre méthode de prévision. La figure 6.29 montre la sensibilité de ces résultats en fonction de la valeur choisie. Il apparaît que  $\dot{W}_{er}^{max} = 10^5 W.m^{-2}$  permet d'écrêter les valeurs au-dessus des plages de données rencontrées en dehors des événements extrêmes tout en supprimant leurs influences sur les résultats. **Dans le reste du manuscrit, l'opération d'écrêtage**



avec cette valeur sera utilisée pour chaque post-traitement issu de la méthode M-IDB.

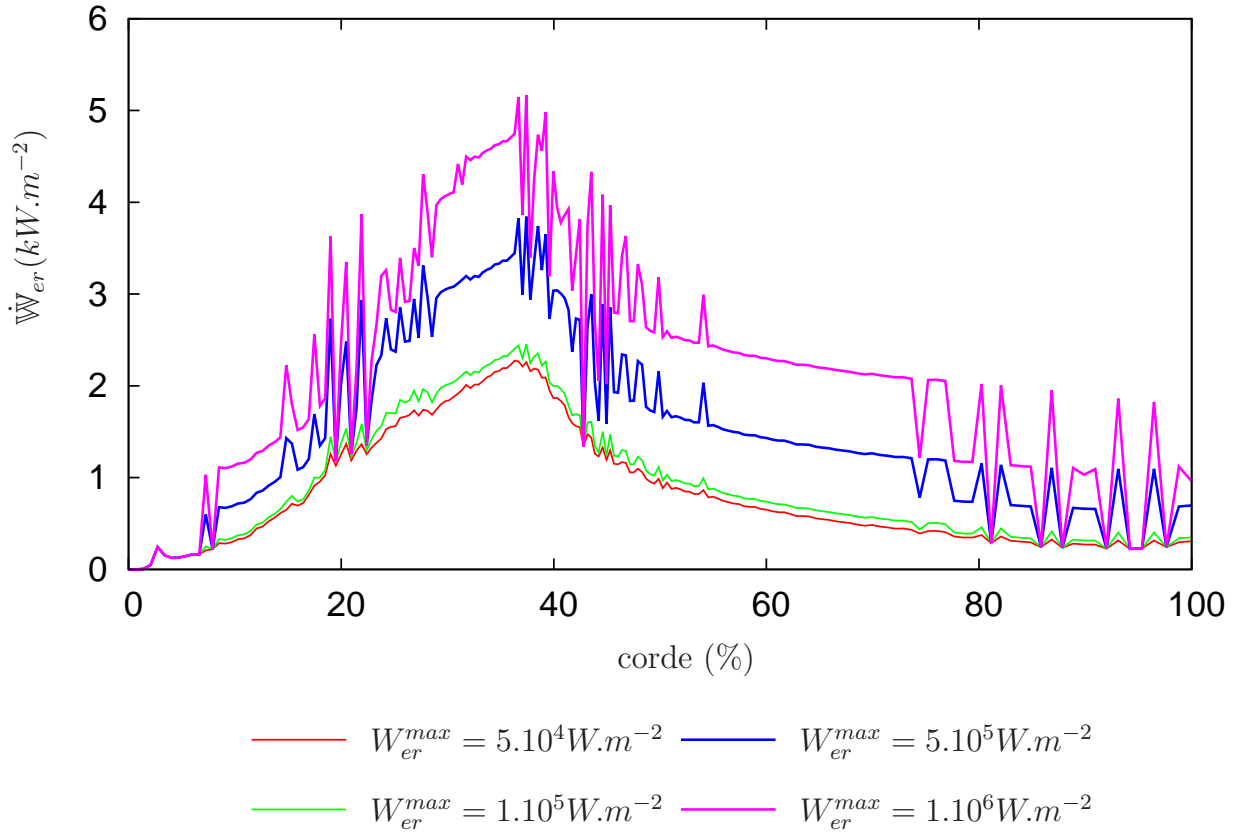


FIGURE 6.29 – Dépendance du niveau de filtrage sur la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  écrêtée par la méthode **IDB** - cas F, IZ

#### 6.1.3.4. Sensibilité du modèle IDB à l'échantillonnage des résultats

Nous venons de tester la sensibilité du modèle à deux paramètres numériques, le pas de temps physique et la valeur d'écrtage. Afin de limiter l'espace disque nécessaire au post-traitement, nous allons désormais évaluer l'agressivité de cavitation prédite en fonction de l'échantillonnage des résultats numériques.

##### Fréquence d'échantillonnage :

Sur un cas d'essai, nous avons comparé l'intensité de cavitation obtenue en prélevant les résultats des simulations **U-RANS** pour des fréquences d'acquisition,  $f_a$ , différentes.



Cette dernière grandeur est exprimée en nombre de pas de temps relevés sur le nombre de pas de temps simulés (Fig 6.30). Il semble qu'une fréquence d'acquisition de 1/10 ne change pas les résultats obtenus après écrêtage par rapport à  $f_a = 1/1$ , nous la prendrons alors pour toutes les simulations suivantes.

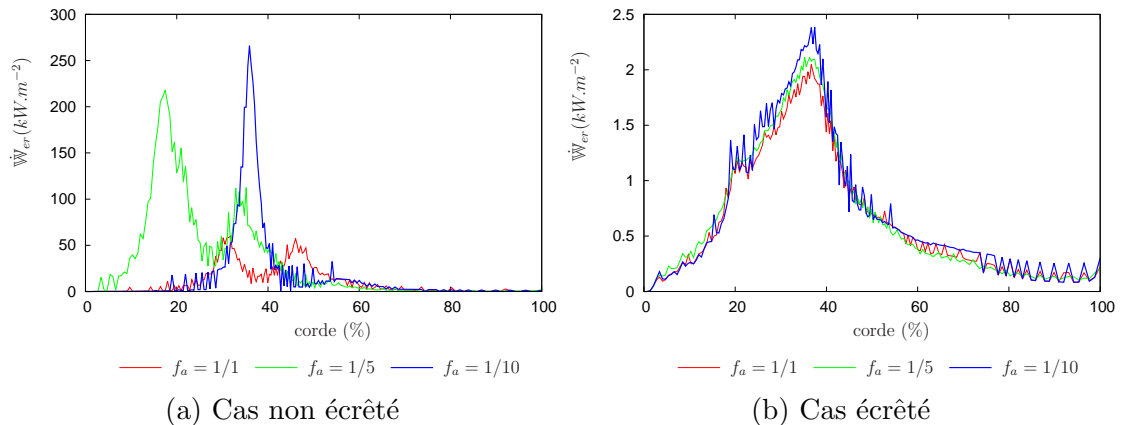


FIGURE 6.30 – Dépendance de l'échantillonnage temporelle sur la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  par la méthode **IDB** - cas F, IZ

#### Durée de la simulation :

Réaliser un calcul comprenant beaucoup de pas de temps sur différentes géométries a un coût en terme de temps **CPU** et en terme d'espace mémoire. Nous avons comparé les grandeurs d'intensité de cavitation obtenues pour deux durées de simulation différentes (Fig 6.31). Ainsi, nous pouvons observer que les amplitudes et la localisation de l'intensité de cavitation sont relativement similaires entre 12 cycles et 24 cycles simulés. Il faut toutefois reconnaître qu'il aurait été intéressant de poursuivre l'ensemble des calculs pour vérifier cette tendance.

#### 6.1.3.5. Sensibilité du modèle **IDB** aux paramètres physiques

Nous allons maintenant évaluer l'importance de différents choix sur le résultat portant sur la modélisation physique : choix de la loi utilisée **B-TMAI** ou **B-STMA**, quantité de gaz incondensable dans l'écoulement et la valeur de la tension superficielle.

#### Influence de la loi choisie pour la détermination des populations de bulles :

L'agressivité de l'écoulement obtenue à partir de la loi **B-TMAI** est représentée sur

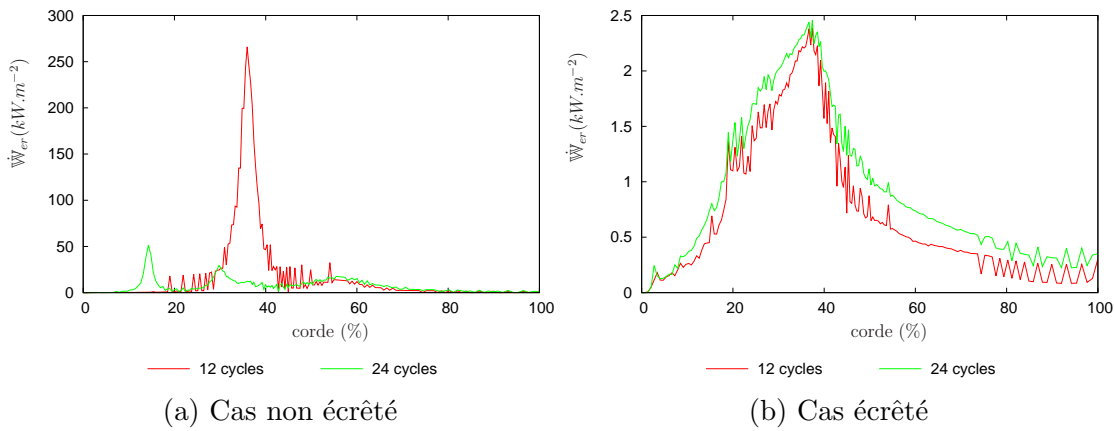


FIGURE 6.31 – Dépendance de la durée de la simulation sur l’estimation de la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  par la méthode **IDB** - cas F, IZ

la figure 6.32. Il apparaît dès lors plus faible que celle obtenue avec la loi **B-STMA** (Fig. 6.27).

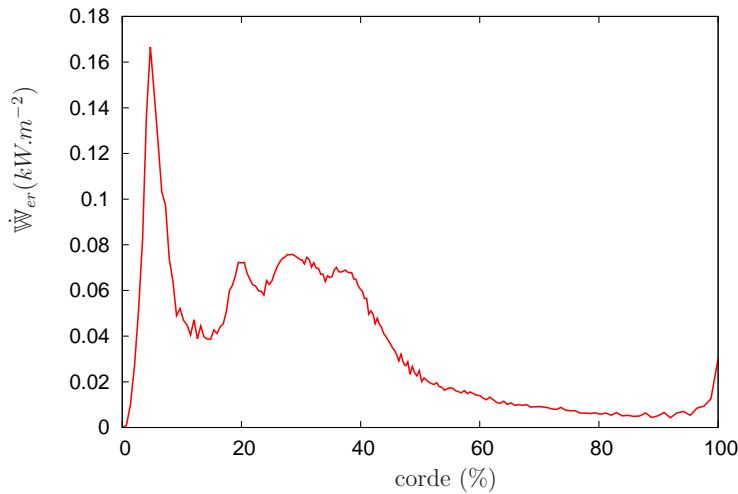


FIGURE 6.32 – Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  par la méthode **IDB** et avec une population de bulles établie à l’aide de la loi **B-TMAI** - cas F, IZ

De plus, d’après les simulations, la **zone la plus amont du jet-rentrant** présente un endommagement plus important que celle de fermeture de la poche de cavitation (Fig 6.33). Ce résultat ne semble pas correspondre aux résultats expérimentaux obtenus par Pereira [171] où l’érosion était localisé majoritairement dans cette seconde région.

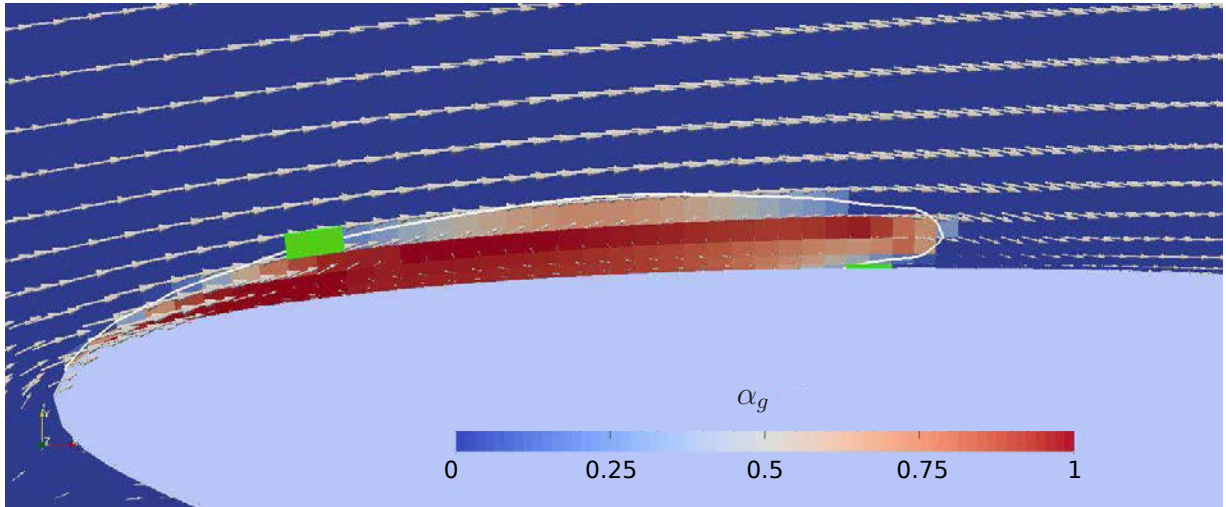


FIGURE 6.33 – Source de l’endommagement obtenu avec la loi **B-TMAI** - En vert les cellules sélectionnées pour le calcul **IDB** à un instant donné

Les inversions de courbure de l’interface induites par la loi **B-TMAI** réduisent la plage des taux de vide pour laquelle la dynamique de bulle est simulée :  $\alpha_{min} < \alpha_g < \approx 0.25$  contre  $\alpha_{min} < \alpha_g < \approx 0.74$  pour la loi **B-STMA**. Les pressions des gaz incondensables y sont également plus importantes. Les ondes de surpressions calculées par le post-traitement sont à la fois moins nombreuses et moins énergétiques qu’avec la loi **B-STMA**. Ces résultats nous confortent dans la préférence de cette dernière loi pour l’application de la méthode **M-IDB**.

#### Influence de la tension superficielle :

Afin de tester la sensibilité du modèle à la valeur de la tension superficielle, nous allons faire varier cette grandeur dans l’ensemble de notre post-traitement, c’est à dire à la fois dans la détermination de la population de bulles et dans le calcul de la dynamique de bulles. Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 6.34 et révèlent des intensités de cavitation similaires.

En considérant des valeurs de tension superficielle différentes, la distribution de bulles obtenue au sein de l’écoulement l’est également (Fig 6.35). En effet, les pressions déterminées dans chacune des phases ne sont pas dépendantes de ce paramètre. Dès lors l’équilibre de Laplace établit une relation linéaire entre le rayon établi et la valeur de  $\sigma$

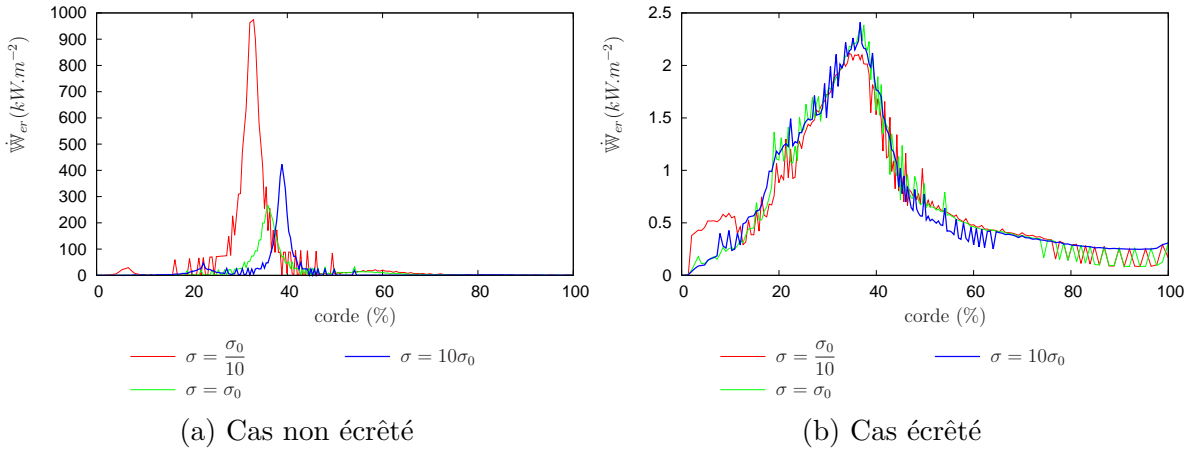


FIGURE 6.34 – Estimation de l’agressivité de l’écoulement moyennée sur le profil obtenue par la méthode **M-IDB** pour différentes valeur de  $\sigma$  ( $\sigma_0 = 7,8.10^{-2} J.m^{-2}$ ) - Cas F - IZ

considéré.

$$\sigma = \frac{p_M^g - p_M^l}{2 \overline{R^g}} \tag{6.7}$$

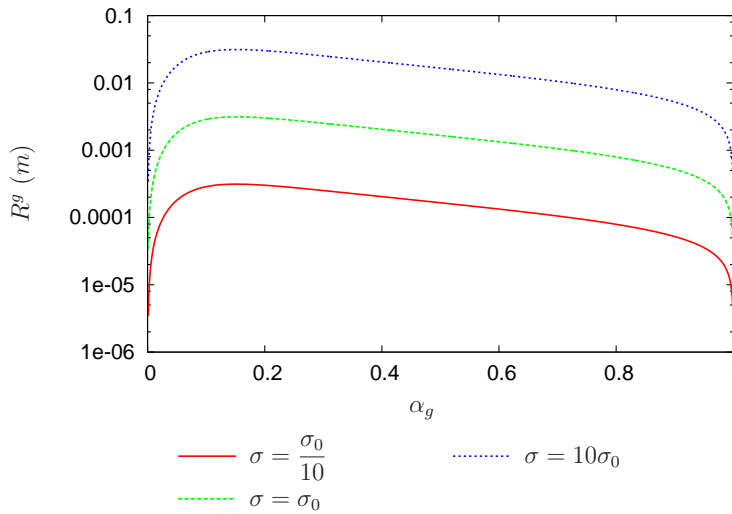


FIGURE 6.35 – Tailles des bulles en fonction du taux de vide définies par la loi **B-STMA** pour différentes valeurs de  $\sigma$  ( $\sigma_0 = 7,8.10^{-2} J.m^{-2}$ )

En reprenant le cas de l’implosion de bulles dans des conditions incompressibles (cf 4.2.2.1.), la dynamique de bulle est dépendante du rapport  $\frac{\sigma}{R_0}$ , constant selon la relation précédente (Eq. (2.45)). En adimensionnant le calcul de la dynamique de bulle par le rayon initial  $R_0$  ( $= \overline{R^g}$ ), la pression  $p_\infty$  et la masse volumique  $\rho_\infty$ , celle-ci est dès lors iden-

tique, de même que l'énergie érosive adimensionnelle  $E_{er}^*$  résultante (adimensionnement de l'équation (4.54)).

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{2}{3} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right] \frac{p_\infty - p_{sat}}{\rho_\infty^l} + \frac{2p_{a_0}^g}{3\rho_\infty^l (\kappa - 1)} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} \right] \\ &+ 2 \frac{1}{\rho_\infty} \left[ \frac{\sigma}{R_0} \right] \frac{R_0}{R} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

En redimensionnant cette grandeur, l'énergie érosive  $E_{er}^{BULLE}$  émise lors de l'implosion d'une bulle isolée est donc sensible au rayon initiale à la puissance 3.

$$E_{er}^{BULLE} = p_{inf} R_0^3 E_{er}^{BULLE*} \quad (6.9)$$

A l'inverse, le débit de bulles quittant la cellule est inversement proportionnel aux rayons des bulles à la puissance 3 (Eq. (3.89)).

$$\dot{N}_B \propto \frac{1}{R_0^3} \quad (6.10)$$

La puissance érosive  $P_{er}$  étant le produit de ces deux grandeurs, la variation de la tension superficielle ne modifiant que le rayon  $R_0$  utilisé lors du calcul de l'implosion de bulle, a très peu d'impacts sur les résultats de notre modèle de prévision de l'érosion de cavitation après écrêtage ce qui justifie les résultats obtenus.

### Influence de la teneur en air dissous :

Trois valeurs de concentration d'air ont été testés dans notre post-traitement ( $Y_a^l = 5/11/20ppm$ ). L'ordre de grandeur de la puissance surfacique moyenne obtenu en paroi est semblable pour chacun de ces cas (Fig 6.36b). Ce résultat est étonnant au vu des expériences réalisées par Lecoffre [5] et Dular [57] qui montraient une influence de la quantité d'air dans en ce qui concerne l'agressivité de l'écoulement.

Il peut néanmoins se justifier dans le cadre de notre modèle. En effet, la quantité d'air dans l'écoulement  $Y_a^l$  a un impact sur les pressions des phases et donc sur les dimensions des bulles obtenues notamment pour les faibles taux de vide ( $\alpha_g < 0.4$  - Fig 6.37).

- Une population de bulles ayant un rayon moyen plus important implique un débit

### 6.1. Profil NACA 65012 - EPFL

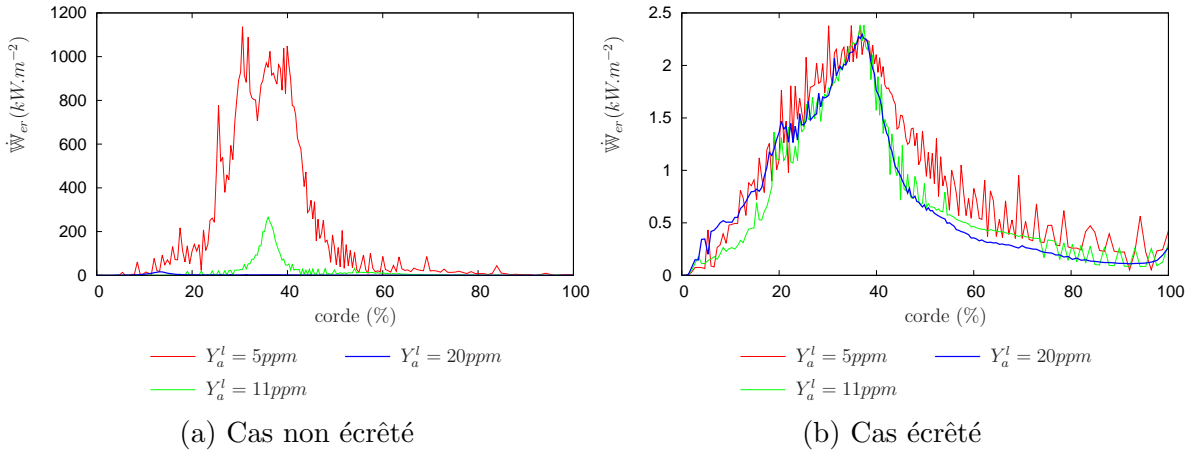


FIGURE 6.36 – Estimation de la puissance surfacique érosive moyennée  $\dot{W}_{er}$  par la méthode IDB pour différentes valeurs de la quantité d'air introduite  $Y_a^l$

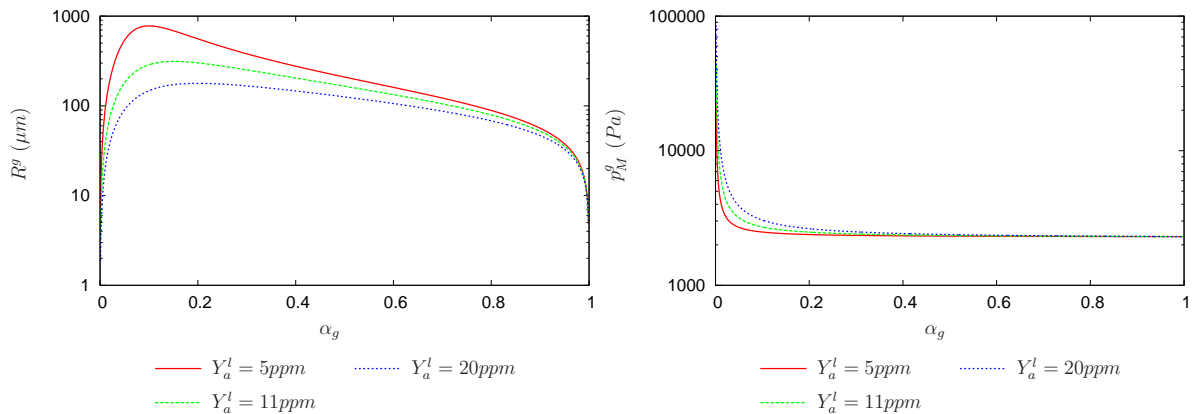
de bulles quittant chacune des cellules,  $\dot{N}_B^S$ , plus faible.

- La présence d'une plus faible quantité de gaz au sein de la bulle permet d'obtenir une énergie érosive,  $E_{er}^{BULLE}$ , plus importante lors de l'implosion d'une bulle.

En diminuant la quantité d'air dans le fluide, les deux effets précédents, antagonistes pour la valeur de la puissance érosive  $P_{er}^{NUAGE}$  (Eq. (5.3)), semblent se compenser dans notre méthode. Ce résultat suggère que certaines hypothèses prises par notre modèle sont trop fortes et devront être remanié dans de futurs travaux. Ces hypothèses peuvent concerner à la fois des considérations physiques comme l'absence de transfert de masse d'air aux interfaces ou bien encore l'hypothèse d'équilibre mécanique de la bulle à l'état initial mais aussi des paramètres numériques comme l'utilisation de la technique d'écrêtage des résultats.

Les 'événements extrêmes' semblent être dépendants de la quantité d'air dissous dans le fluide. La faible quantité de gaz incondensable pour  $Y_a^l = 5ppm$  augmente leurs nombres (Fig 6.38), tandis qu'une quantité d'air importante,  $Y_a^l = 20ppm$ , diminue leurs fréquences d'apparition (Fig 6.39) et leurs amplitudes.

Les fortes amplitudes et énergies nécessaires à l'endommagement du matériau sont probablement induites par une synergie de bulles donnant lieu à la génération d'ondes de



(a) Taille de bulle en fonction du taux de vide définie par la loi **B-STMA** (b) Pression de la phase gazeuse en fonction du taux de vide définie par la loi **B-STMA**

FIGURE 6.37 – Influence de la quantité de gaz incondensable présent dans le fluide sur les dimensions et les rayons des bulles en fonction du taux de vide

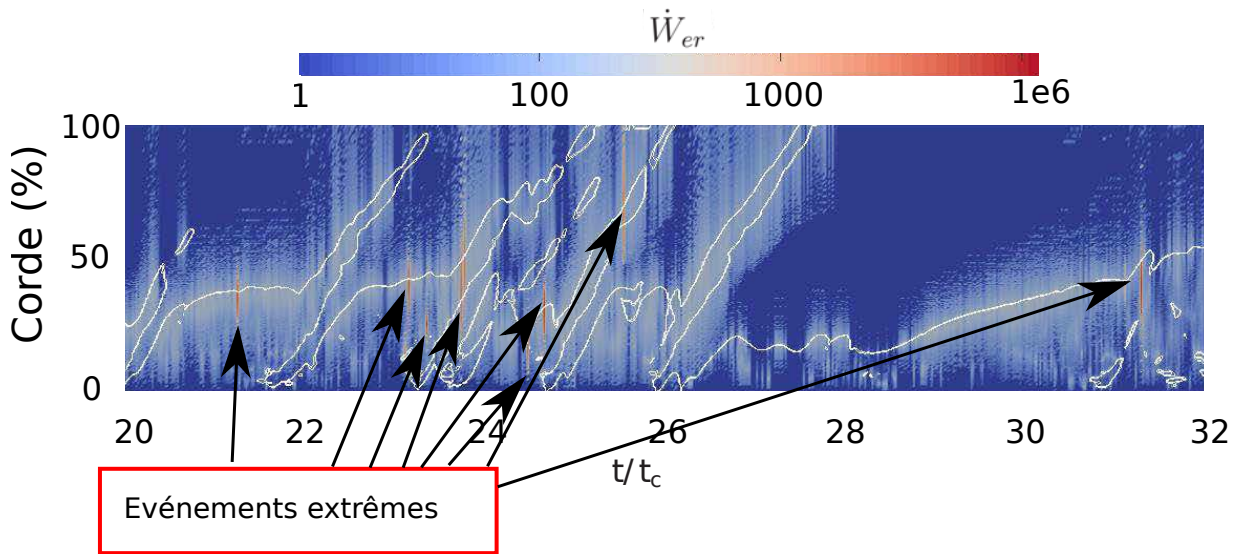


FIGURE 6.38 – Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode **M-IDB** et  $Y_a^l = 5\text{ppm}$ ; les lignes blanches représentent l'isocontour du taux de vide  $\alpha_g = 0.3$

surpression ou de microjets ponctuels pouvant ressembler à l'apparition de ces événements extrêmes. Néanmoins, devant la sensibilité des résultats à la discrétisation spatiale (non testée dans ce manuscrit) et temporelle, nous avons fait le choix de ne pas les conserver sans une étude plus approfondie de leur origine.

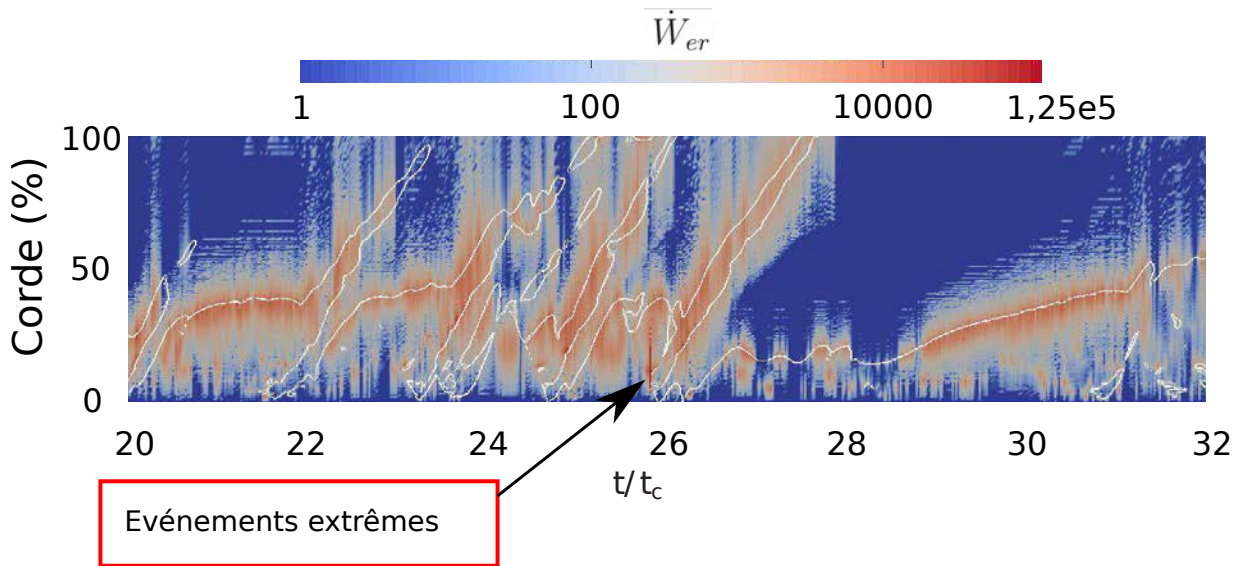


FIGURE 6.39 – Diagramme spatio-temporel de l'intensité de cavitation sur l'extrados du profil pour la simulation IZ - cas F - avec la méthode **M-IDB** et  $Y_a^l = 20ppm$  ; les lignes blanches représentent l'isocontour du taux de vide  $\alpha_g = 0.3$

### 6.1.3.6. Prédiction de l'agressivité de l'écoulement

Nous allons désormais appliquer cette méthode à l'ensemble des simulations réalisées sur cette géométrie. Nous prendrons comme configuration de référence pour la méthode **M-IDB**, la loi **B-STMA**, un pas de temps de la simulation **U-RANS**  $dt = 0.002t_c$ , une teneur en air dissous  $Y_a^l = 11ppm$  et nous utiliserons la méthode d'écrêtage. L'ensemble des résultats est récapitulé dans le tableau 6.4 :

- Dans le cas de poche stable, les zones d'endommagement maximal coïncident avec la sortie de la zone diphasique. Pour une même vitesse, une diminution du paramètre de cavitation conduit comme expérimentalement à un déplacement de la zone endommagée vers l'aval du profil.
- En présence de lâchers cavitants, les zones d'endommagement sont situés en amont de la position expérimentale. Cela peut être due à la fois à un problème de longueur de poche et à un problème lié au post-traitement.



- D'une manière quantitative, aucune corrélation ne peut être établie entre la vitesse d'endommagement du matériau  $\dot{V}_d$  mesurée expérimentalement (cf (1.7)) et l'énergie potentiellement érosive reçue  $\dot{W}_{er}$ .

|            | Cas | Expérience                 |                           | Modèle <b>IDB</b>          |                           | Méthode Potentielle -AS                   |                           |
|------------|-----|----------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|---|---------------------------|
|            |     | $\dot{V}_d$                |                           | $\dot{W}_{er}$             |                           | $\dot{W}_{er} (> 10 \% \text{ de corde})$ |                           |
|            |     | maximum<br>( $pm.s^{-1}$ ) | position (%)<br>de corde) | maximum<br>( $kW.m^{-2}$ ) | position (%)<br>de corde) | maximum<br>( $kW.m^{-2}$ )                | position (%)<br>de corde) |
| IZ         | A   | 4,3                        | 20 %                      | 8                          | 30 %                      | 4,8                                       | 30 %                      |
|            | B   | 32                         | 40 %                      | 2,8                        | 27 %                      | 2,1                                       | 56 %                      |
|            | C   | 108                        | 20 %                      | 77                         | 30 %                      | 29,4                                      | 32 %                      |
|            | D   | 159                        | 40 %                      | 6,23                       | 25 %                      | 13,4                                      | 65 %                      |
|            | E   | 65                         | 20 %                      | 3,3                        | 25 %                      | 1,9                                       | 23 %                      |
|            | F   | 38                         | 50 %                      | 2,3                        | 35 %                      | 1,2                                       | 38 %                      |
| Fine-Turbo | A   | 4,3                        | 20 %                      | 12                         | 16 %                      | 11,3                                      | 18 %                      |
|            | B   | 32                         | 40 %                      | 8                          | 27 %                      | 7,6                                       | 27 %                      |
|            | C   | 108                        | 20 %                      | 14                         | 15 %                      | 71,4                                      | 16 %                      |
|            | D   | 159                        | 40 %                      | 32                         | 27 %                      | 31,5                                      | 30 %                      |
|            | E   | 65                         | 20 %                      | 0,7                        | 1,3 %                     | 0,9                                       | 10 %                      |
|            | F   | 38                         | 50 %                      | 0,6                        | 20 %                      | 1,1                                       | 18 %                      |

TABLEAU 6.4 – Comparaison entre les résultats d'expérience et de simulation en terme d'agressivité de l'écoulement

Les grandeurs expérimentales (vitesse d'endommagement de la surface) et numériques (énergie reçue en paroi) n'étant pas les mêmes, une comparaison directe entre les deux valeurs est délicate. Il est toutefois intéressant d'étudier l'évolution de l'agressivité de l'écoulement et de la vitesse de marquage mesurée entre deux configurations différentes.

**Pour une même vitesse d'écoulement et des paramètres de cavitation différents (Fig 6.40) :**

Dépendamment du solveur et de la configuration étudiée, la variation de l'intensité de cavitation maximale est plus ou moins bien retranscrite : certaines comparaisons établissent une relation concordante avec les expériences et d'autres non. L'impact du paramètre de cavitation sur l'agressivité de l'écoulement n'apparaît pas dans notre méthode de post-traitement. L'évolution de la position du maximum d'endommage-

ment est en revanche correcte pour l'ensemble des cas, l'endommagement étant plus en aval du profil pour un sigma faible.

**Pour un même paramètre de cavitation et des vitesses différentes (Fig 6.41) :**

Le maximum d'intensité de cavitation prédit par la méthode **M-IDB** est localisé au même endroit comme sur les expériences. De plus la variation d'amplitude de cette intensité liée à la variation de vitesse est cohérente dans l'ensemble des cas : une vitesse plus grande conduit à un endommagement plus important. L'influence de la vitesse de l'écoulement est donc bien représentée par notre post-traitement.

L'agressivité de l'écoulement estimée pour un écoulement présentant des lâchers ne sera pas la même que pour une poche de cavitation stable. Les différences obtenues entre les simulations et les expériences peuvent donc provenir à la fois de la méthodologie en elle-même mais aussi des simulations **U-RANS**.

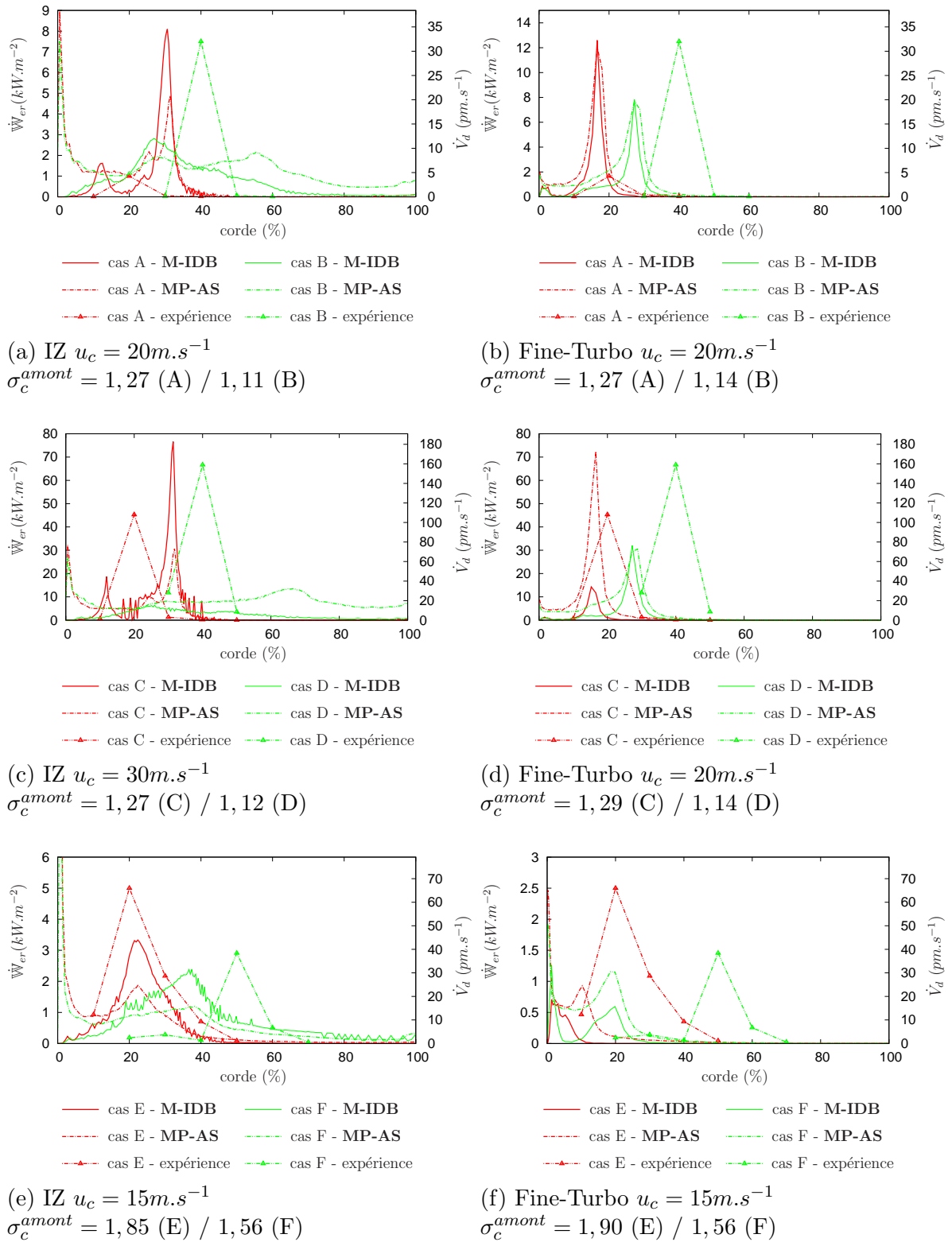
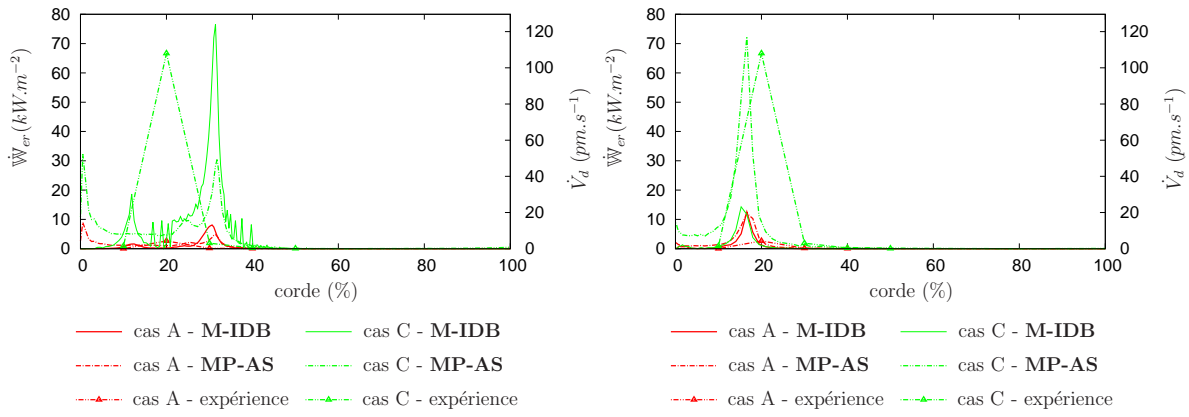


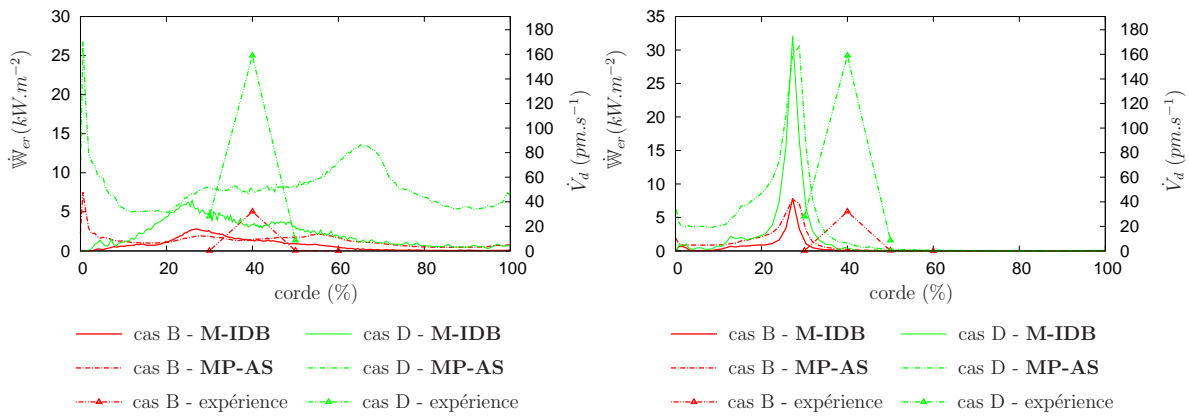
FIGURE 6.40 – Comparaison de l’agressivité de l’écoulement estimée sur le profil EPFL pour des vitesses  $u_c$  égales

6.1. Profil NACA 65012 - EPFL



(a) IZ  $\sigma_c^{amont} \approx 1,27$   
 $u_{in} = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (A) /  $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (C)

(b) Fine-Turbo  $\sigma_c^{amont} \approx 1,25$   
 $u_{in} = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (A) /  $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (C)



(c) IZ  $\sigma_c^{amont} \approx 1,11$   
 $u_{in} = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (B) /  $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (D)

(d) Fine-Turbo  $\sigma_c^{amont} \approx 1,11$   
 $u_{in} = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (B) /  $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (D)

FIGURE 6.41 – Comparaison de l’agressivité de l’écoulement estimée sur le profil **EPFL** pour des paramètres de cavitation  $\sigma_c$  égaux mais des vitesses différentes

## 6.2. Profil symétrique - TUD

Ce premier cas-test nous a permis d'étudier la sensibilité du modèle à différents paramètres. Nous allons désormais l'appliquer à d'autres géométries pour voir si l'on retrouve des comportements similaires. Le second hydrofoil étudié dans ce manuscrit a été investigué à l'université de Darmstadt, **TUD** (Technische Universität Darmstadt) et a fait l'objet de plusieurs études expérimentales et numériques [59, 66, 106, 188].

### 6.2.1. Présentation de l'expérience et des simulations réalisées

L'hydrofoil est un profil symétrique de 107.9 mm de longueur, de 50 mm de largeur et de 16mm d'épaisseur. Le bord d'attaque est circulaire. L'extrados présente une partie plane de longueur 70 mm (voir figure 6.42).

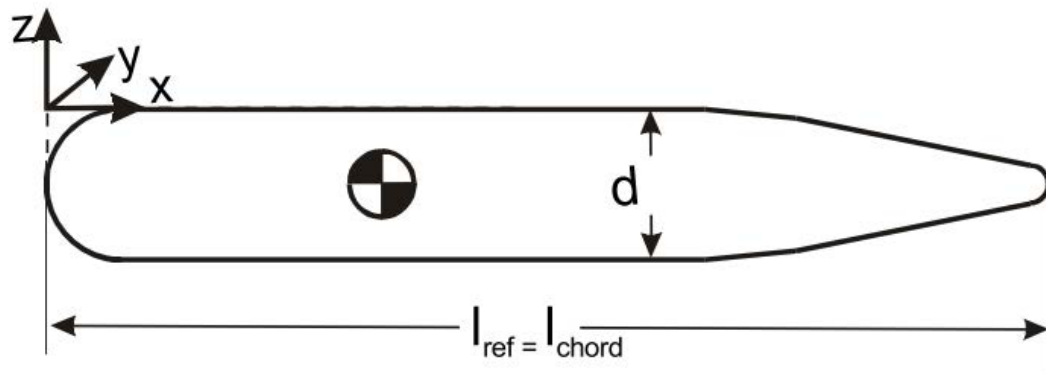


FIGURE 6.42 – Profil d'essai pour l'expérience réalisée à l'université de Darmstadt [66]

#### 6.2.1.1. Veine d'essais

Ce profil est inséré dans une boucle fermée (Fig 6.43). La veine d'essai a une dimension de 500 mm de long sur 50 mm de haut et possède la même largeur que le profil. Ce dernier y est disposé avec une incidence de 5 degrés (Fig 6.44).

Les conditions d'essais sont caractérisées par la vitesse d'entrée  $u_c$  et le paramètre de cavitation  $\sigma_c$  calculé à partir de la pression en entrée de veine.

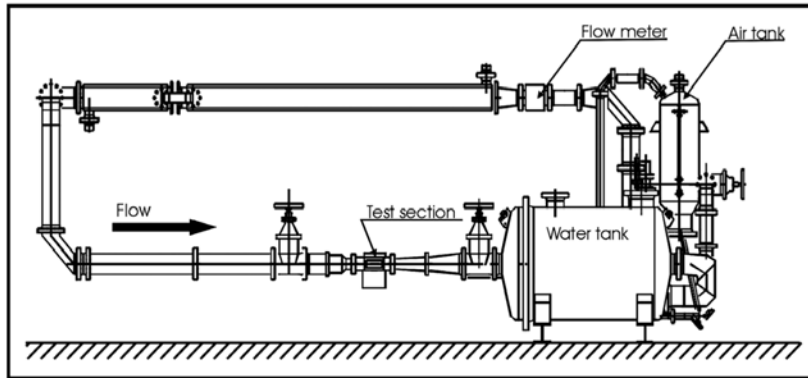


FIGURE 6.43 – Illustration de tunnel de cavitation pour l’expérience réalisée à l’université de Darmstadt [66]

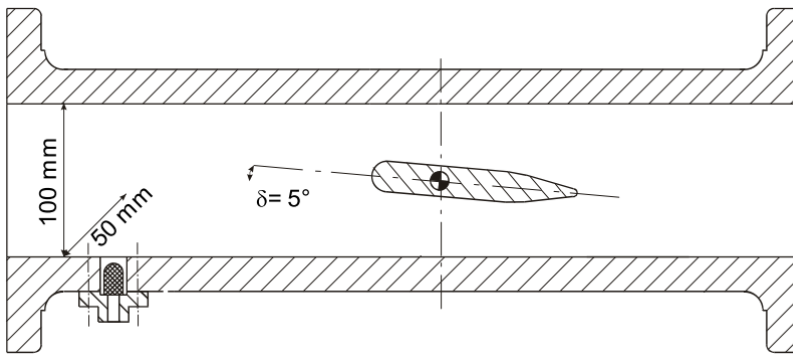


FIGURE 6.44 – Illustration de la veine d’essai pour l’expérience réalisée à l’université de Darmstadt [66]

### 6.2.1.2. Maillage

Pour cette géométrie, les deux solveurs IZ et Fine-Turbo ont été utilisés. Le domaine de calcul bidimensionnel représente l’intégralité de la veine d’essai (Fig. 6.44) et des stratégies de maillage équivalentes au cas précédent sont employées (cf. 6.1.2.1.).

- Pour le calcul IZ, le champ est encore divisé en 4 blocs (Fig. 6.45). Le maillage comporte environ 22 000 cellules (Fig. 6.46).
- Pour le calcul Fine-Turbo, la présence d’un bord de fuite épais nécessite l’utilisation d’un bloc en “O” pour mailler le contour de l’hydrofoil. Le maillage contient 22 000 cellules pour 13 blocs (Fig 6.48).

On vérifie par la suite que la taille de première maille répond aux critères définis par les lois de paroi (Fig. 6.47 et 6.50). Comme précédemment, le pas de temps choisi pour ces simulations repose sur le temps caractéristiques de l'écoulement définies précédemment (Eq. (6.4)). Le nombre de cycles considéré pour les post-traitements est supérieur à 20 cycles après la période transitoire.

$$dt_{URANS} = 0,002t_c$$

### 6.2.1.3. Mesures effectuées

Différentes mesures expérimentales ont permis de caractériser l'écoulement autour de ce profil pour plusieurs conditions d'essais :

- La pression le long du profil a été relevée à l'aide de deux séries de capteurs :
  - Une série de 19 capteurs de pression a été répartie le long du profil afin d'acquérir le coefficient de portance moyen (Fig. 6.51).
  - 4 capteurs de pression de 0,7 mm de diamètre ont été disposés sur l'extrados de l'hydrofoil (Fig 6.52). Ils permettent l'obtention de la pression instantanée avec une fréquence d'acquisition de 50 *kHZ*. Les transformées de Fourier des signaux ont identifié une fréquence caractéristique de 300 *Hz* pour le capteur 2 au cours de l'essai considéré (cas E - cf Tableau 6.5).
- La combinaison des méthodes PIV, Particle Image Velocimetry, et LIF, Laser Induced Fluorescence, a permis l'acquisition de la vitesse instantanée de l'écoulement à une fréquence de 0.5 Hz. Les profils de vitesses verticaux et horizontaux ont ainsi été obtenus pour différentes positions (Fig. 6.53).
- Finalement, des essais de marquage ont été réalisés sur le profil. Pour cela, un film de 0,2 mm de cuivre poli a été placée sur la surface plane de l'hydrofoil et a été exposé a différentes conditions d'écoulement pendant une heure. L'érosion a, par la suite, été quantifiée par le rapport entre la surface endommagée et la surface du film,  $A_{dam}$ .

## 6.2. Profil symétrique - TUD

---

Un récapitulatif des différents essais et expériences associées est disponible dans le tableau 6.5.

| Cas | $\sigma_c$ | $u_c \text{ m.s}^{-1}$ | pression moyenne | pression instantanée | profil de vitesse | érosion  |
|-----|------------|------------------------|------------------|----------------------|-------------------|----------|
| A   | 2          | 13,8                   |                  |                      | <b>X</b>          | <b>X</b> |
| B   | 2.3        | 13,8                   |                  |                      |                   | <b>X</b> |
| C   | 2.5        | 13,8                   |                  |                      |                   | <b>X</b> |
| D   | 2.3        | 16                     |                  |                      |                   | <b>X</b> |
| E   | 2.7        | 16                     | <b>X</b>         | <b>X</b>             |                   |          |

TABLEAU 6.5 – Récapitulatif des conditions d’essais et des mesures réalisées pour le profil TUD



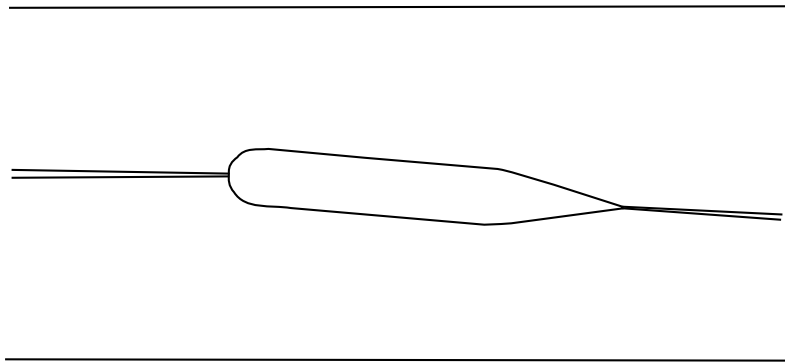


FIGURE 6.45 – Stratégie de découpage en blocs pour les calculs IZ pour la géométrie **TUD**

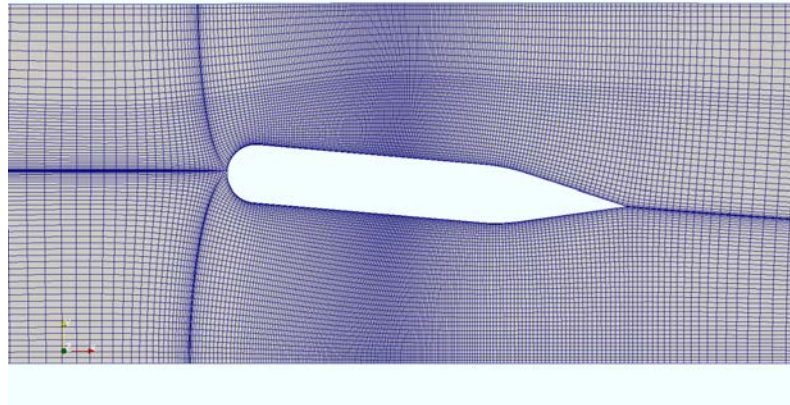


FIGURE 6.46 – Maillage représentant la géométrie **TUD** pour le solveur IZ

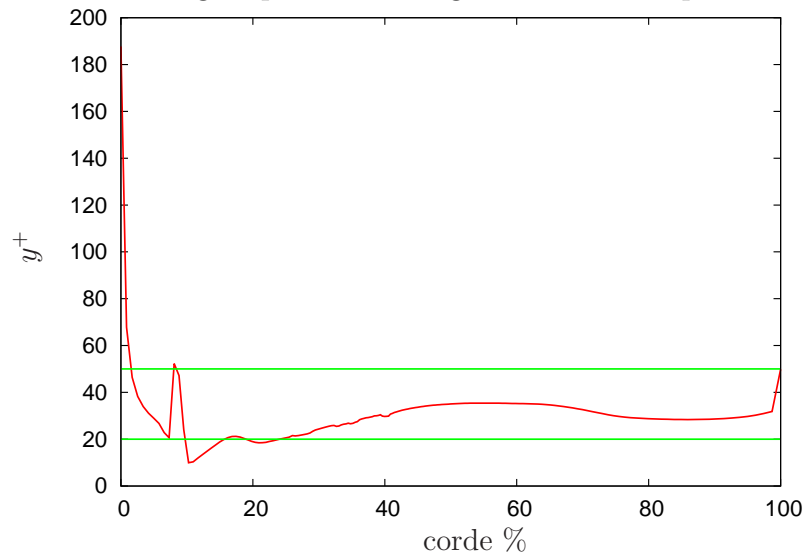


FIGURE 6.47 – Evolution du  $y^+$  moyen le long du profil **TUD** pour le maillage IZ - Cas E ( $u_c = 16m.s^{-1}$ )

## 6.2. Profil symétrique - TUD

---

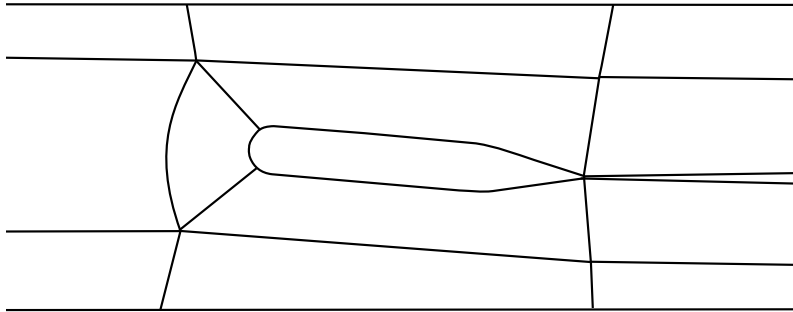


FIGURE 6.48 – Stratégie de découpage en blocs pour les calculs Fine-Turbo pour la géométrie **TUD**

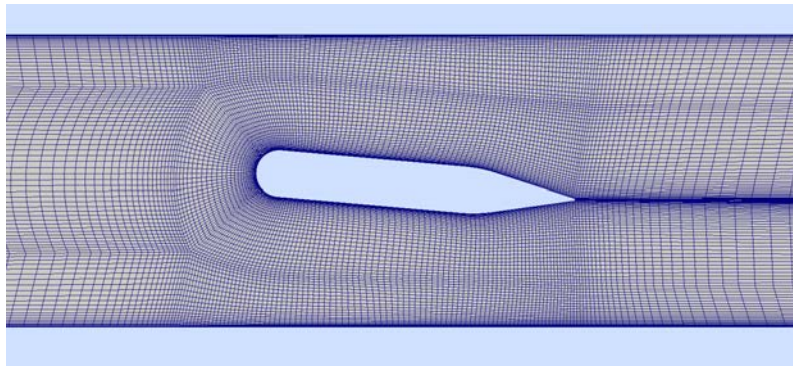


FIGURE 6.49 – Maillage représentant la géométrie **TUD** pour le solveur Fine-Turbo

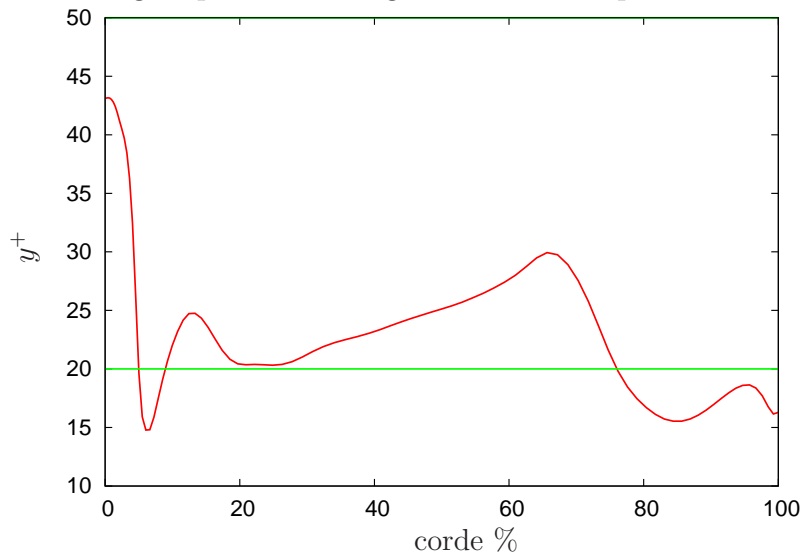


FIGURE 6.50 – Evolution du  $y^+$  moyen le long du profil **TUD** pour le maillage Fine-Turbo - Cas E ( $u_c = 16m.s^{-1}$ )

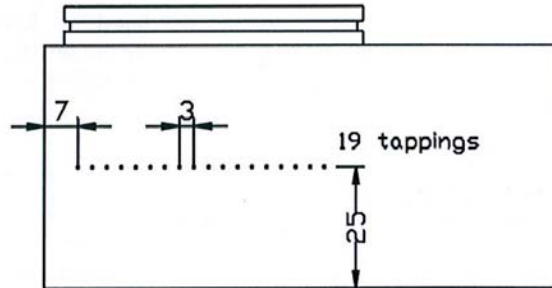


FIGURE 6.51 – Position des capteurs de pression le long du profil TUD [188]

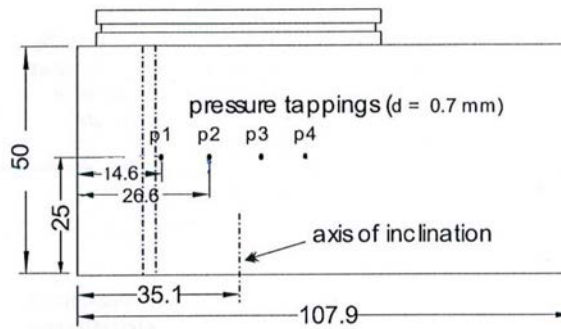


FIGURE 6.52 – Position des capteurs de pression le long du profil TUD [188]

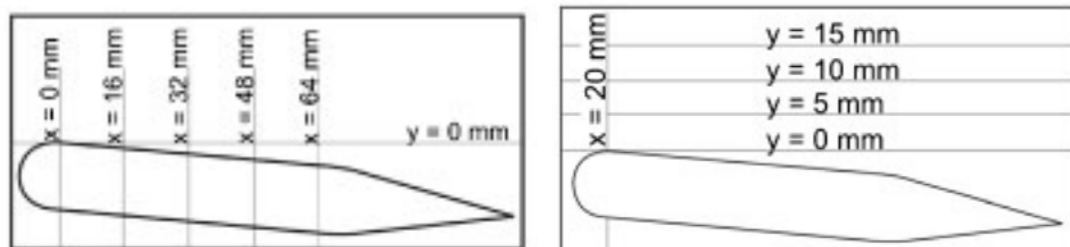


FIGURE 6.53 – Position des profils de vitesse [58]

### 6.2.2. Résultats des simulations

Comme précédemment, les résultats des simulations seront, en premier lieu, évalués sur des aspects hydrodynamiques et dans un second temps sur un aspect endommagement.

#### 6.2.2.1. Critères hydrodynamiques

Le tableau 6.6 récapitule les simulations réalisées pour cette géométrie et les différentes caractéristiques relevées pour chacun de ces cas. Suite à une erreur non corrigée, les simulations des cas A, B, C et D ont été réalisées avec une vitesse légèrement différente des expériences (6%), rendant délicate la comparaison des profils de vitesses par la suite.

|  | Cas | $u_{in}$ ( $m.s^{-1}$ ) | $\sigma_c^{amont}$                        | Longueur de poche - simulation |          | Fréquences - simulation (Hz) |
|--|-----|-------------------------|---|--------------------------------|----------|------------------------------|
|  |     | simu/expé               | simu/expé                                 | minimale                       | maximale | Fréq 1. / Fréq. 2            |
| IZ   | A   | 13 / 13,8               | 2,00 / 2,0                                | 0 %                            | 25 %     | - / 191                      |
|  | B   | 13 / 13,8               | 2,34 / 2,3                                | 0 %                            | 18 %     | 17 / 260                     |
|  | C   | 13 / 13,8               | 2,48 / 2,5                                | 0 %                            | 22 %     | 16 / 250                     |
|  | D   | 16 / 16,0               | 2,27 / 2,3                                | 0 %                            | 25 %     | 21 / 270                     |
|  | E   | 16 / 16,0               | 2,68 / 2,7                                | 0 %                            | 20 %     | 40 / 440                     |
| Fine-Turbo   | A   | 13 / 13,8               | 2,05 / 2,0                                | 0 %                            | 18 %     | - / 200                      |
|  | B   | 13 / 13,8               | 2,31 / 2,3                                | 0 %                            | 16 %     | 18 / 225                     |
|  | C   | 13 / 13,8               | arrêt avant établissement de l'écoulement |                                |          |                              |
|  | D   | 16 / 16,0               | 2,41 / 2,3                                | 0 %                            | 13 %     | 24 / 400                     |
|  | E   | 16 / 16,0               | 2,81 / 2,7                                | 0 %                            | 6 %      | 131 / 800                    |
| Le symbole – signifie que la fréquence n'a pas été observé |     |                         |   |                                |          |                              |

TABLEAU 6.6 – Résultats des simulations pour la géométrie **TUD**

Pour cette géométrie, les deux solveurs simulent des lâchers de cavitation (Fig 6.54). Les fréquences obtenues par chacun d'eux sont du même ordre de grandeur (sauf pour les essais D et E). La longueur de **poche attachée** ne dépasse pas les 25 % de corde dans l'ensemble des configurations testées. Même si les simulations obtenues avec les deux solveurs présentent des lâchers de cavitation, le solveur IZ permet de les convecter beaucoup plus à l'aval du profil (Fig 6.55).

Pour la configuration E, les capteurs de pression disposés sur le profil permettent d'obtenir numériquement deux fréquences caractéristiques pour l'ensemble des capteurs,

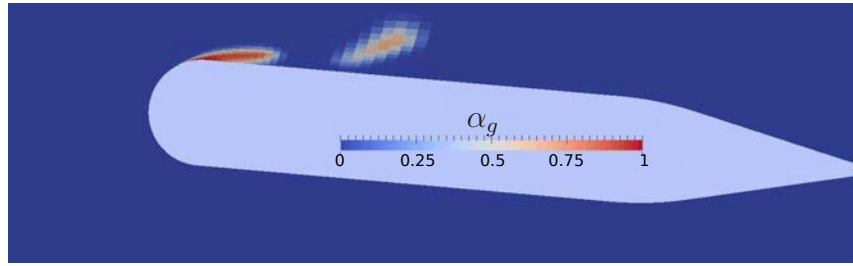


FIGURE 6.54 – Lâcher de cavitation sur le profil **TUD** pour le cas A avec Fine-Turbo à un instant donné

la première à 400 Hz et la seconde à 800 Hz. Cette dernière n'est obtenue qu'avec le solveur Fine-Turbo (Fig. 6.56). Les fluctuations de pression sont donc plus rapides que celles obtenues expérimentalement (300 Hz).

La pression moyenne le long du profil obtenue expérimentalement pour ces conditions d'essai présentent un plateau de 10 % à 25 % de corde que l'on ne retrouve pas numériquement (Fig. 6.57). La différence d'allure de courbe entre expérience et simulation témoigne d'une sous-estimation numérique de la poche de cavitation attachée.

Les profils de vitesse obtenus expérimentalement pour la configuration **A** peuvent également être comparés aux résultats de simulations (Fig. 6.58 et 6.59). Des allures de courbes similaires peuvent être discernées pour chacun de ces cas.

Pour cette géométrie, les deux solveurs permettent de recréer la dynamique globale de l'écoulement en simulant la présence de lâchers. Les simulations montrent en effet des lâchers de cavitation ainsi que des profils de vitesses semblables à ceux obtenus expérimentalement. Néanmoins, elles ne correspondent pas exactement aux conditions expérimentales puisque les profils de pression et de les fréquences caractéristiques présentent des différences vis-à-vis de l'expérience.

Suite à différentes erreurs et difficultés liées à la simulation, les points de fonctionnement calculés ne correspondent pas exactement aux essais : 6% d'erreur sur la vitesse d'entrée pour les cas A, B, C et 5% d'erreur sur le paramètre de cavitation des cas D et E pour les simulations Fine-Turbos. Ceci justifie partiellement les différences de

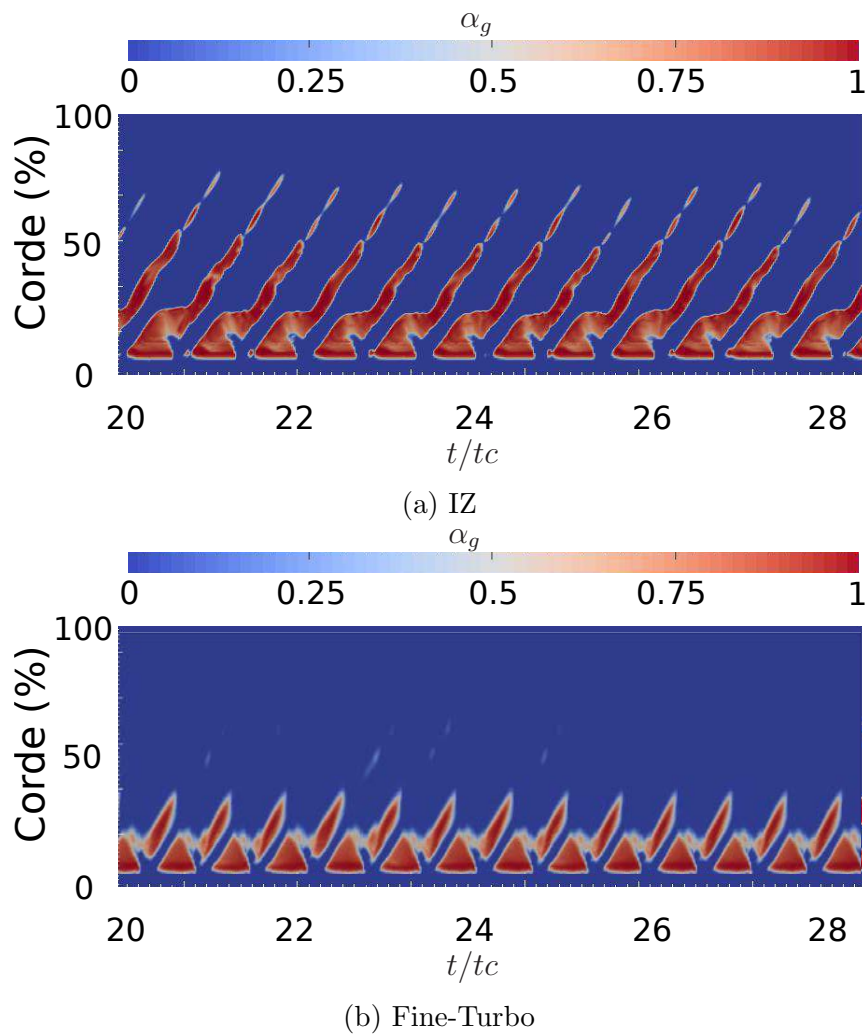


FIGURE 6.55 – Diagramme spatio-temporel du taux de vide maximal projeté sur la surface du profil **TUD** Cas A

comportement entre les deux campagnes. Néanmoins, les comparaisons étant basées sur des comportements relatifs, nous pouvons tout de même analyser les différents résultats issus de la méthode de post-traitement.

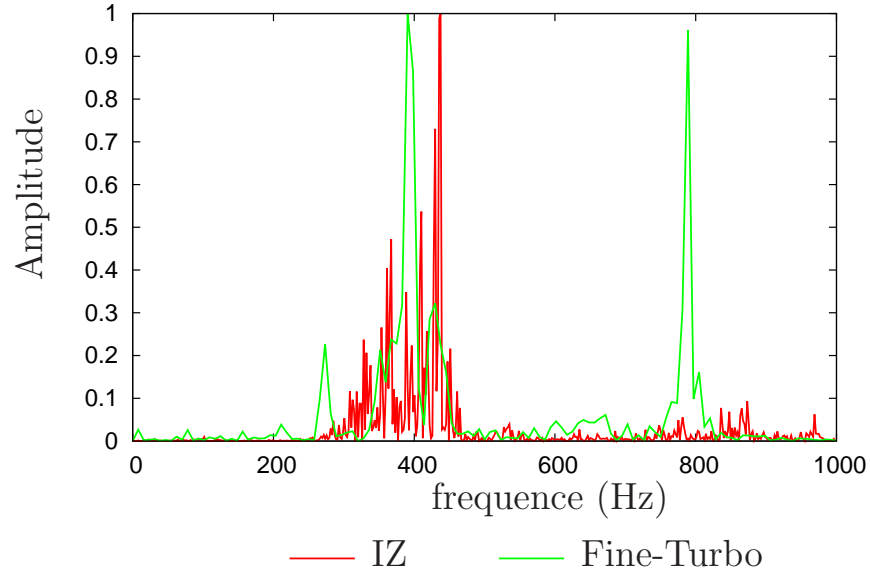


FIGURE 6.56 – Spectre fréquentiel du signal de pression calculé par le capteur 2 - CAS E

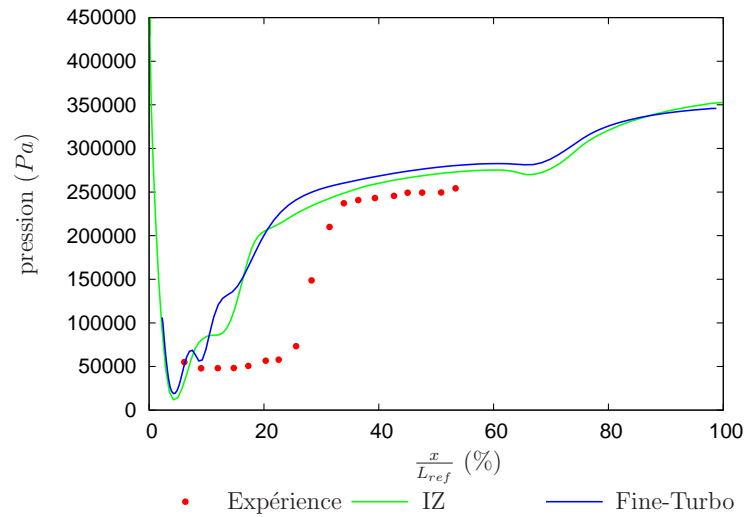


FIGURE 6.57 – Pression moyenne obtenue le long du profil **TUD** pour le cas E expérimentalement [188] et numériquement

## 6.2. Profil symétrique - TUD

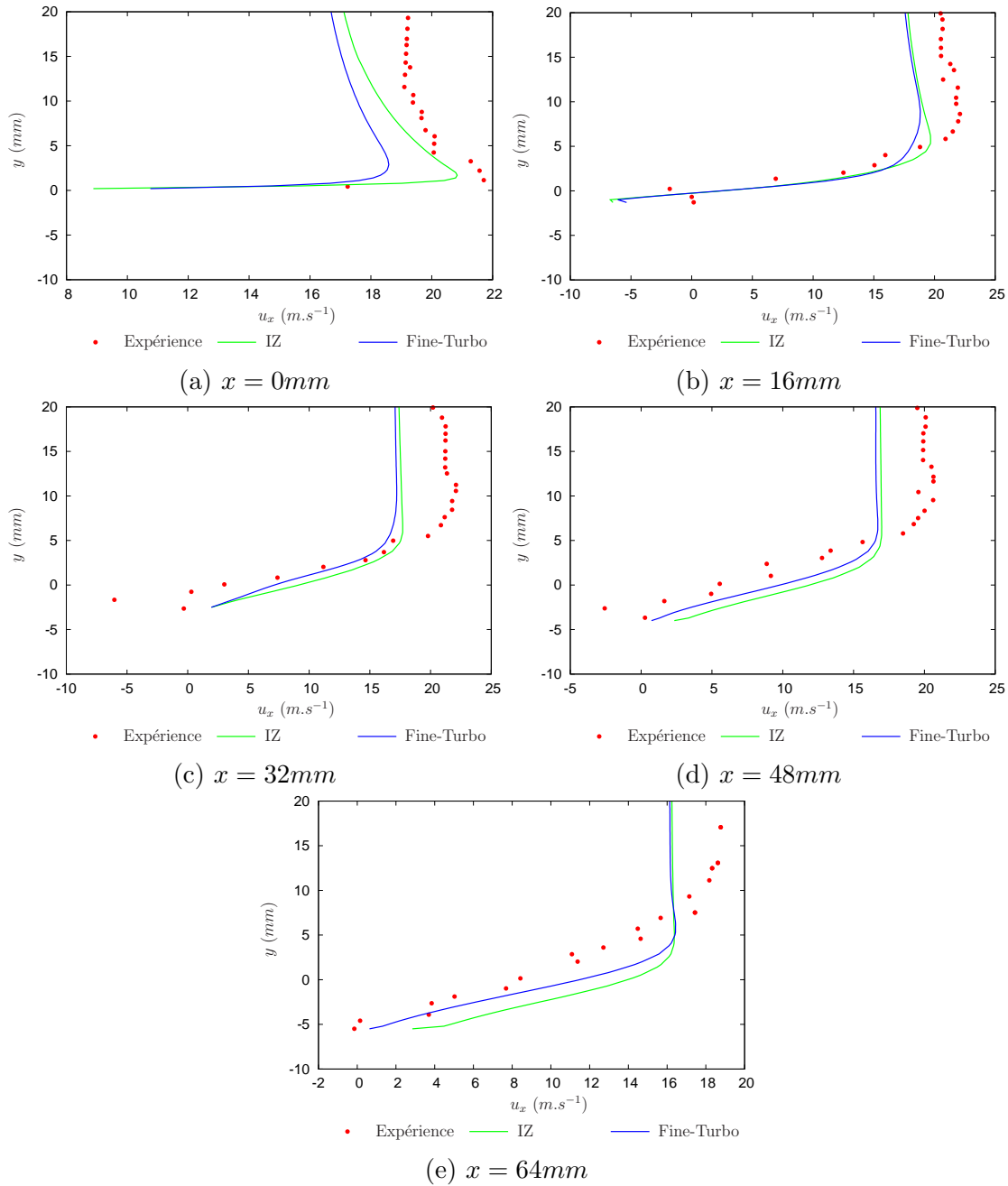


FIGURE 6.58 – Profil de vitesse horizontale  $u_x$  en fonction de l'axe vertical  $y$  (Expérience issue de [58])



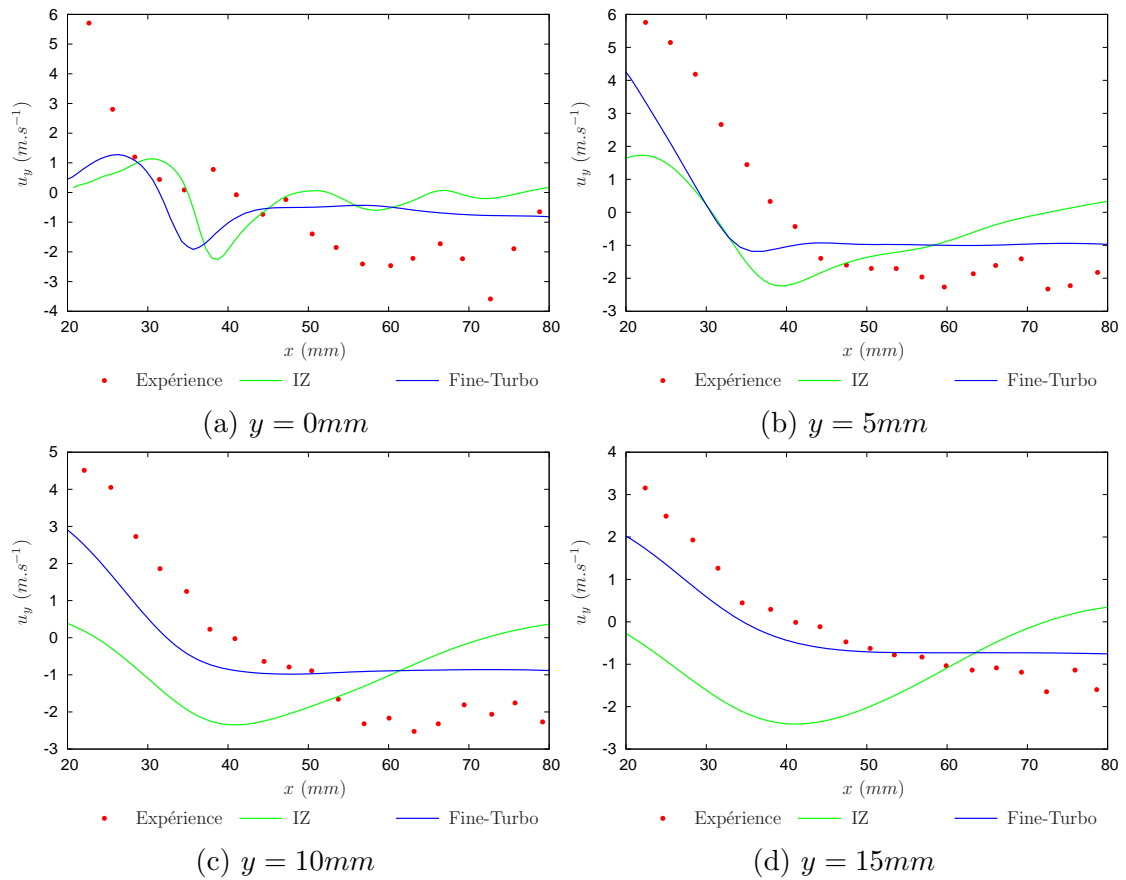


FIGURE 6.59 – Profil de vitesse verticale  $u_y$  en fonction de l'axe horizontal  $x$  (Expériences issus de [58]) - cas A

### 6.2.2.2. Prédiction de l'agressivité de l'écoulement

Les relevés expérimentaux concernant le marquage ont été effectués à l'aide d'une méthode de dénombrement des trous formés proposée par Dular [57]. Le résultat fourni correspond alors au pourcentage de surface endommagée à la fin de l'expérience,  $A_{dam}$  défini par l'équation (6.11).

$$A_{dam} = \dot{S}_d = \frac{S_{endommagée}}{\Delta S} \quad (6.11)$$

D'après une étude précédente [58], les recouvrements de trous sont négligeables lorsque la surface totale endommagée ne dépasse pas 14 %.

Le tableau 6.7 récapitule les résultats des modèles de prédiction de l'agressivité de l'écoulement.

|            | Cas | Expérience<br>$A_{dam}$ |                             | Modèle <b>M-IDB</b><br>$\dot{W}_{er}$ |                             | Modèle <b>MP -AS</b><br>$\dot{W}_{er}$ |                             |
|------------|-----|-------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|--|-----------------------------|
|            |     | maximum<br>(-)          | position<br>(% de<br>corde) | maximum<br>( $kW.m^{-2}$ )            | position<br>(% de<br>corde) | maximum<br>( $kW.m^{-2}$ )             | position<br>(% de<br>corde) |
| IZ         | A   | 1,5 %                   | 55 %                        | 3,2                                   | 21 %                        | 3,1                                    | 21 %                        |
|            | B   | 3 %                     | 30 %                        | 2,8                                   | 17 %                        | 1,8                                    | 16 %                        |
|            | C   | 3 %                     | 25 %                        | 2,1                                   | 15 %                        | 1,8                                    | 15 %                        |
|            | D   | 7,5 %                   | 43 %                        | 3,6                                   | 17 %                        | 3,8                                    | 17 %                        |
| Fine-Turbo | A   | 1,5 %                   | 55 %                        | 2,6                                   | 20 %                        | 1,6                                    | 21 %                        |
|            | B   | 3 %                     | 30 %                        | 1,8                                   | 17 %                        | 2,25                                   | 18 %                        |
|            | C   | -                       | -                           | -                                     | -                           | -                                      | -                           |
|            | D   | 7,5 %                   | 43 %                        | 3,3                                   | 16 %                        | 5,3                                    | 15 %                        |

TABLEAU 6.7 – Comparaison entre les résultats d'expérience et de simulation en terme d'agressivité de l'écoulement pour les essais **TUD**

Comme dans la géométrie précédente, la méthodologie proposée estime une zone d'agressivité moyenne en amont de celle obtenue expérimentalement (Fig 6.60), y compris pour le cas D pour lequel les vitesses d'entrée sont adéquates. Certains pas de temps proposent un endommagement de la zone obtenue expérimentalement (Fig. 6.61), mais l'utilisation de l'opérateur de moyenne temporelle filtre cette information par rapport à la zone amont. De plus, les lâchers s'éloignant de la paroi à cause de l'incidence du profil, les puissances potentiellement érosives qui y sont obtenues sont plus faibles.

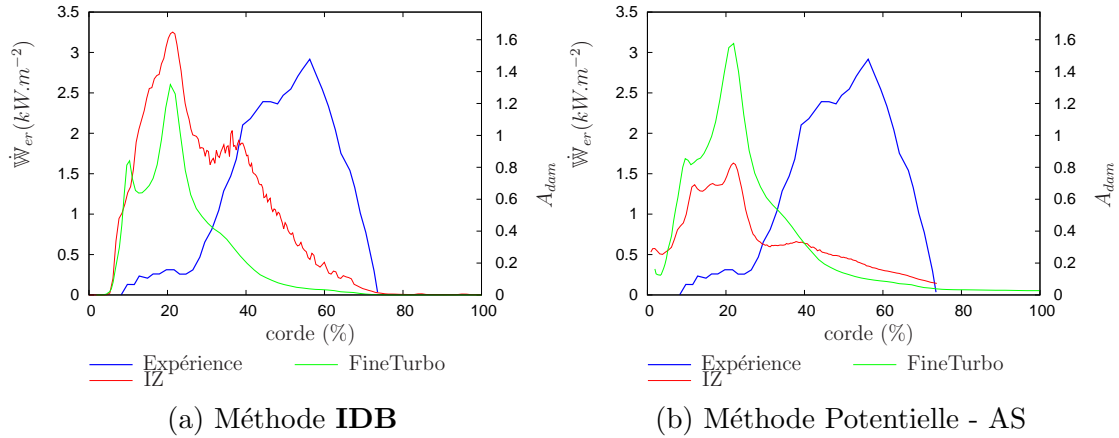


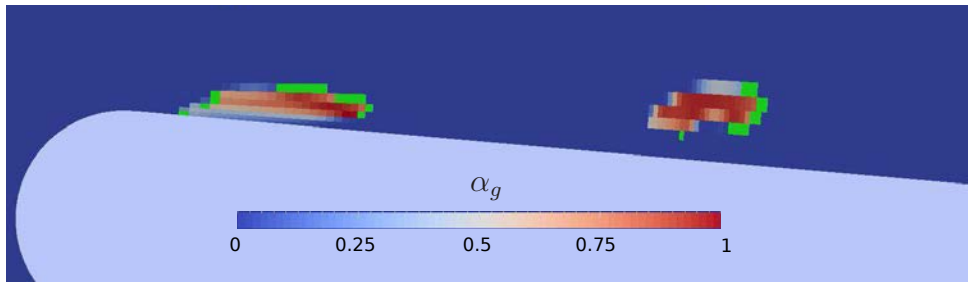
FIGURE 6.60 – Estimation de l’agressivité de l’écoulement moyennée pour le profil **TUD** cas A

**Pour une même vitesse**, plus le paramètre de cavitation est élevé plus la zone d’agressivité maximale se situe en amont du profil, ce qui est concordant avec les résultats expérimentaux. En revanche, les méthodes de prévision de l’érosion de cavitation ne permettent pas de retrouver les mêmes variations concernant son amplitude. La méthode **M-IDB** estime une agressivité locale augmentant avec la diminution du paramètre de cavitation (Fig 6.62). Le solveur Fine-Turbo obtient de plus des résultats d’érosion très similaires pour les deux méthodes **M-IDB** et **MP-AS** (Fig 6.63). On retrouve dès lors les mêmes comportements de la méthode de post-traitement, vis à vis du paramètre de cavitation, sur cette géométrie que sur la précédente.

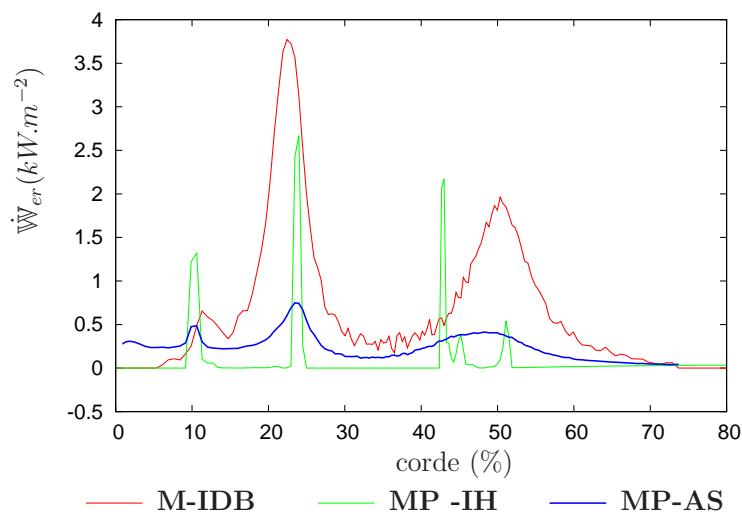
**Pour un même paramètre de cavitation**, l’amplitude de l’agressivité décroît, pour les deux solveurs et les deux méthodes, avec la baisse de la vitesse d’entrée (Fig. 6.64). Ce résultat est concordant avec les simulations réalisées précédemment sur le profil **EPFL**.

Comme précédemment, les résultats obtenus par la méthode de prévision de l’intensité de cavitation dépendent fortement de la qualité des simulations **U-RANS**. Pour les deux profils, l’augmentation de la vitesse correspond à une augmentation de cette agressivité. Ce résultat est concordant avec les différentes expériences relevées en introduction (cf. 1.1.3.2.). En revanche, aucune corrélation ne peut être obtenue en ce qui concerne les

## 6.2. Profil symétrique - TUD



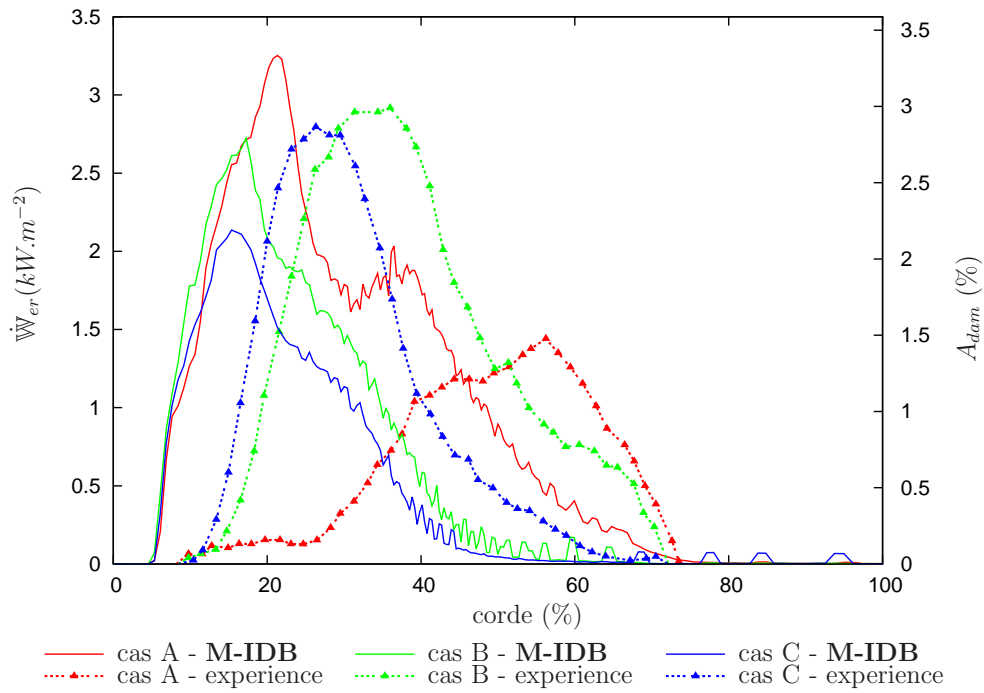
(a) Sélection des cellules (en vert) où l'algorithme **IDB** est appliqué; **TUD** - Cas A



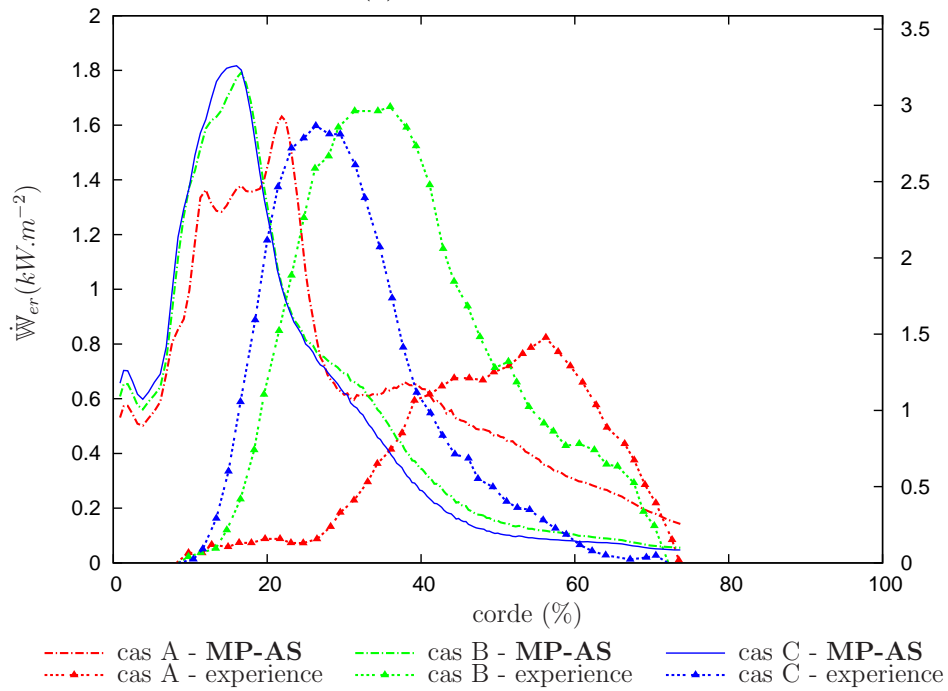
(b) Agressivité de l'écoulement correspondant

FIGURE 6.61 – Simulation de l'écoulement autour du profil **TUD** dans le cas A -IZ à un instant donné

variations du paramètre de cavitation, autant numériquement qu'expérimentalement.



(a) Méthode M-IDB



(b) Méthode MP-AS

FIGURE 6.62 – Agressivité de l'écoulement sur le profil **TUD** pour une même vitesse initiale  $u_c = 13 \text{ m.s}^{-1}$  avec le solveur IZ

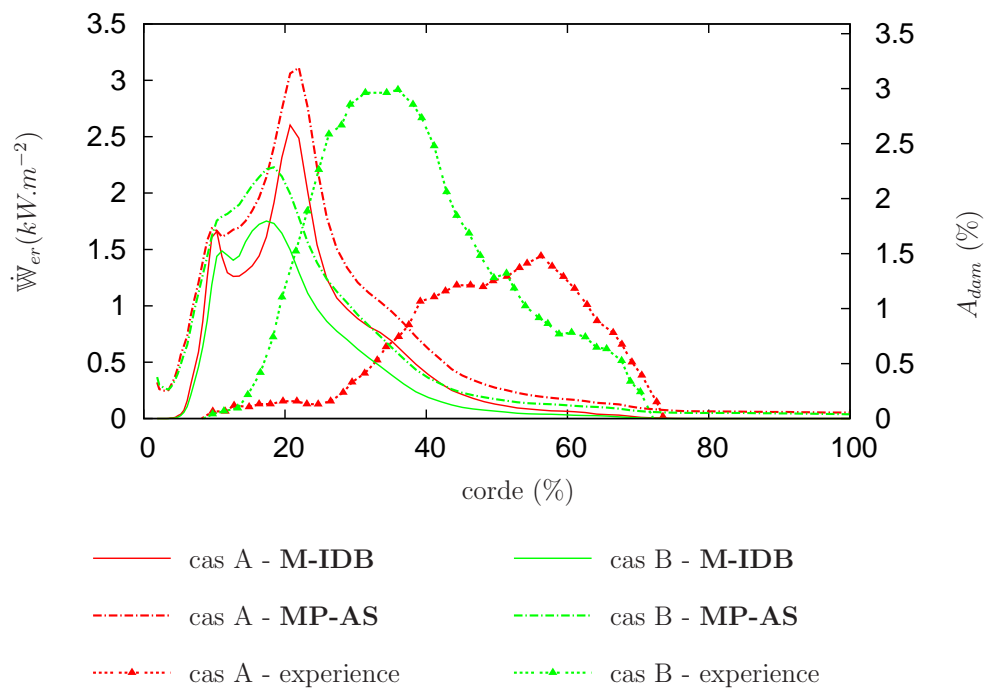
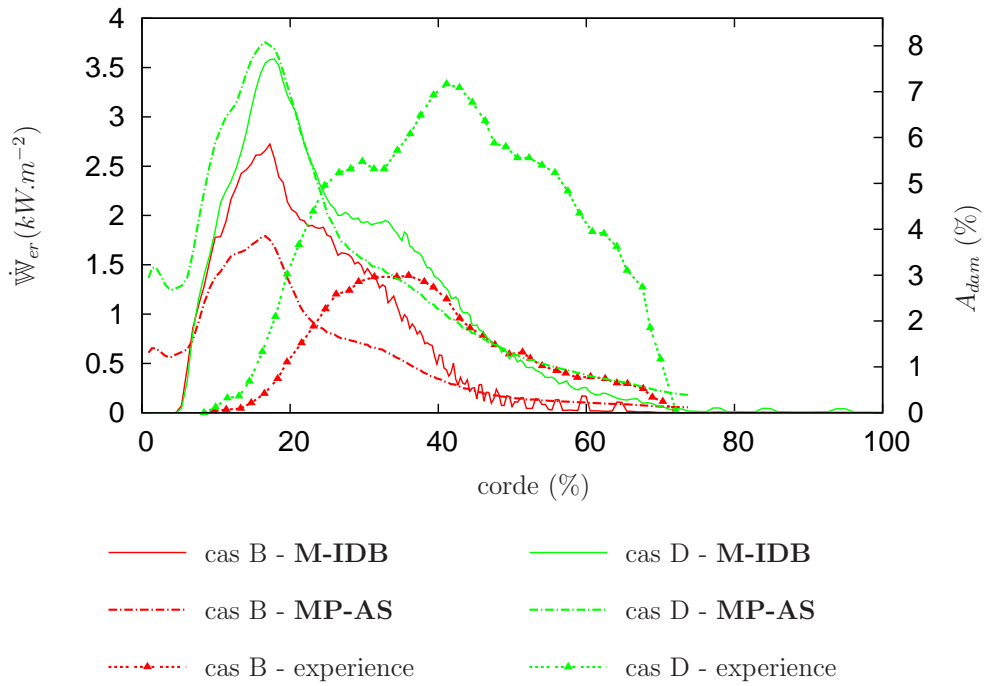
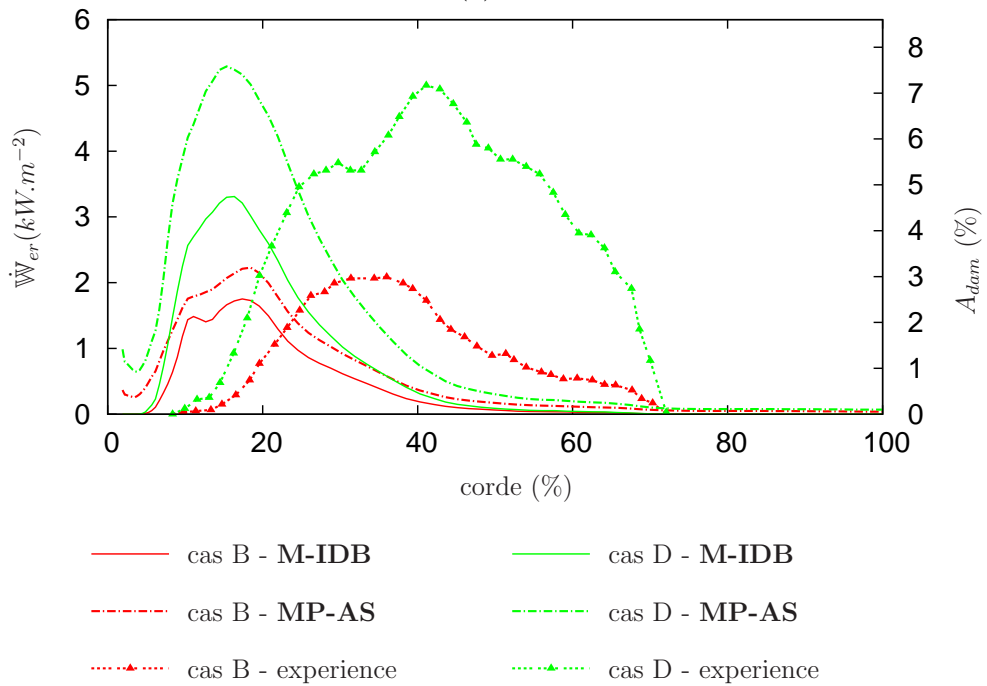


FIGURE 6.63 – Agressivité de l'écoulement sur le profil TUD pour une même vitesse initiale  $u_c = 1.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  - Fine-Turbo



(a) IZ



(b) FineTurbo

FIGURE 6.64 – Agressivité de l'écoulement sur le profil **TUD** pour un même paramètre de cavitation amont  $\sigma_c = 2.3$

## 6.3. Diaphragme EPOCA - EDF R&D

La dernière géométrie testée au cours de cette thèse est un diaphragme étudié par EDF R&D [160]. L'utilisation d'une géométrie autre qu'un hydrofoil permet ainsi d'évaluer la capacité de la méthode sur un autre type d'écoulement.

### 6.3.1. Présentation de l'expérience et des simulations réalisées

La géométrie étudiée est un diaphragme à bords minces, avec le chanfrein vers l'aval, comportant un trou unique centré, dont le rapport du diamètre au diamètre intérieur de la tuyauterie est  $\beta = \frac{d}{D} = 0.4$ . La cavitation générée par l'écoulement à travers un diaphragme est une cavitation de mélange : des écoulements secondaires tourbillonnaires se développent dans la zone de mélange entre la zone du jet et la zone de recirculation.

#### 6.3.1.1. Veine d'essai

Le diamètre intérieur du diaphragme est  $D = 200 \text{ mm}$ . La veine d'essai est montée au milieu d'une conduite de longueur  $42D$  (Fig. 6.65).

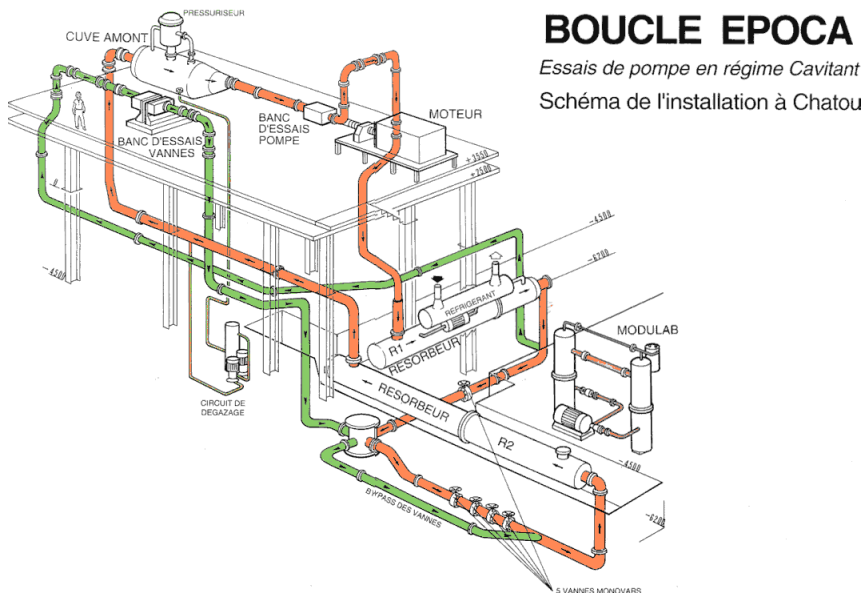


FIGURE 6.65 – Schéma de la boucle EPOCA



Les conditions hydrauliques de l'expérience sont quant à elles définies par le débit dans la veine et la pression en aval de la section d'essai.

### 6.3.1.2. Maillage

Cet écoulement a été simulé à l'aide du solveur Fine-Turbo. Le maillage représente l'intégralité de la veine entre les capteurs de pression amont ( $1D$  en amont du diaphragme) et aval de la boucle ( $10D$  en amont du diaphragme). L'écoulement est supposé symétrique permettant alors l'utilisation d'un calcul 2D axisymétrique. Afin d'éviter les problèmes de singularité sur l'axe de symétrie, une section centrale de 1 mm de rayon est remplacée par une condition solide avec glissement.

Le passage du col est maillé à l'aide d'un bloc en C, rattaché aux conditions limites par des blocs en H (Fig 6.66). Le maillage comporte environ 15 000 cellules (Fig. 6.67). La taille adimensionnelle de première maille,  $y^+$ , au niveau du col est supérieure à 30.

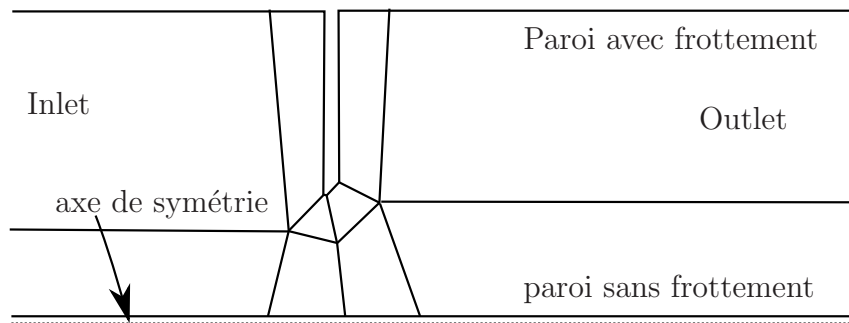


FIGURE 6.66 – Stratégie de découpage en blocs pour les calculs Fine-Turbo pour la géométrie du diaphragme. Le fluide s'écoule de gauche à droite.

### 6.3.1.3. Mesures effectuées

Une série de capteurs a été répartie sur la paroi interne de la tuyauterie (Fig. 6.68) permettant l'acquisition du profil de pression en paroi.

Des mesures du taux de vide ont été réalisées grâce à une technique de tomographie X pour différentes positions dans la veine et différentes conditions hydrauliques (Fig. 6.69)

6.3. Diaphragme EPOCA - EDF R&D

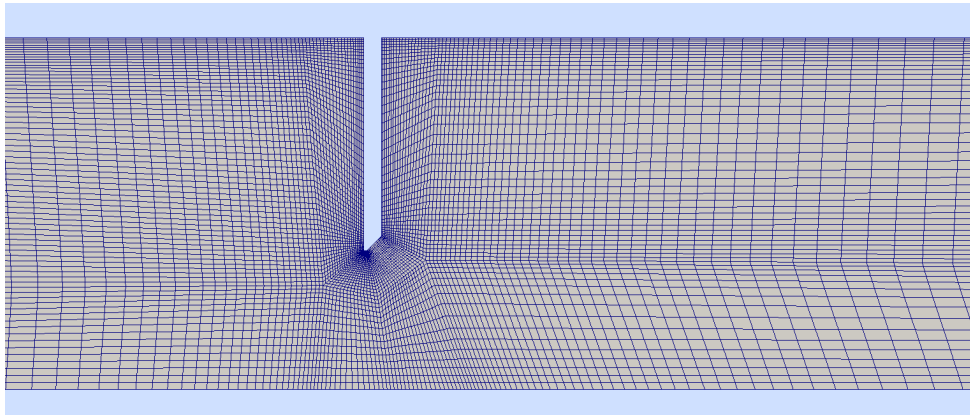


FIGURE 6.67 – Maillage réalisé au niveau du diaphragme pour les simulations

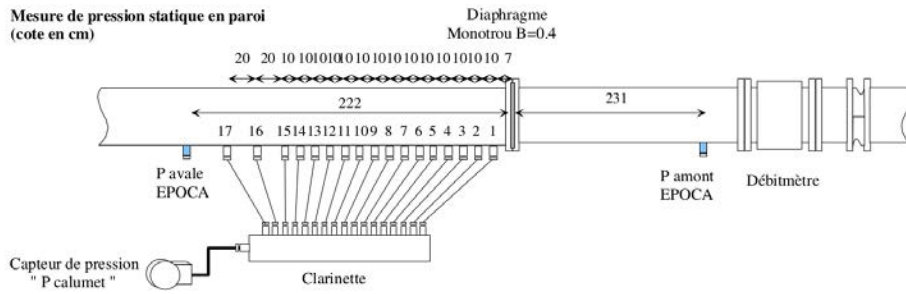


FIGURE 6.68 – Positionnement des capteurs de pression statique pour le diaphragme EPOCA

permettant de quantifier la répartition du taux de vide en fonction du rayon avec une incertitude expérimentale non quantifiée jusqu'à présent du principalement aux vibrations de la tuyauterie. Ces deux séries d'essais permettent de caractériser la dynamique globale

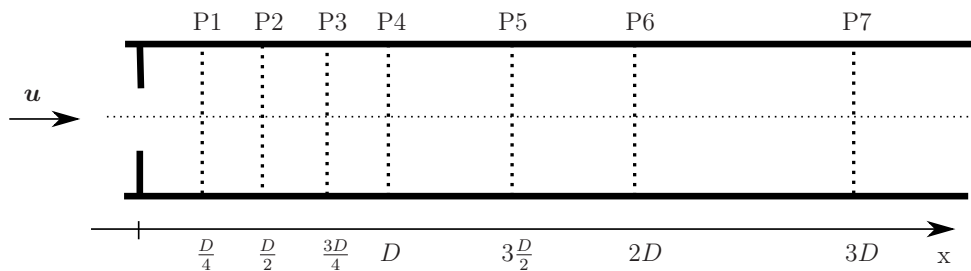


FIGURE 6.69 – Positions des mesures par tomographie X nommées P1 à P7

de l'écoulement.

Finalement, des essais de marquage ont été effectués. Pour cela, 8 échantillons en acier inoxydable 316L, présentant une surface plane polie miroir, affleurent la paroi interne du conduit ont été installés. Ils couvrent une longueur s'étendant de  $0,5D$  à  $8,5D$  à l'aval du diaphragme. La quantification du marquage est la vitesse de marquage mesurée par profilométrie laser.

| Cas | Débit ( $m^3.h^{-1}$ ) | $p_{aval}$ ( $10^5 Pa$ ) | pression moyenne | Mesure du taux de vide | Marquage |
|-----|------------------------|--------------------------|------------------|------------------------|----------|
| 1   | 300                    | 1.94                     | <b>X</b>         | <b>X</b>               |          |
| 2   | 300                    | 1.40                     | <b>X</b>         | <b>X</b>               |          |
| 3   | 300                    | 1.08                     | <b>X</b>         | <b>X</b>               |          |
| A   | 347                    | 0.95                     |                  |                        | <b>X</b> |
| B   | 240                    | 0.47                     |                  |                        | <b>X</b> |
| C   | 300                    | 0.72                     |                  |                        | <b>X</b> |
| D   | 347                    | 0.81                     |                  |                        | <b>X</b> |

TABLEAU 6.8 – Récapitulatif des conditions d'essais considérées pour l'étude du diaphragme

### 6.3.2. Résultats des simulations

Comme le montre le tableau 6.8, les paramètres d'essai sur lesquelles s'appuient la caractérisation hydrodynamique de l'écoulement ne sont pas les mêmes que pour les expériences de marquage. La première série de simulation nous permet donc de tester la capacité du solveur à simuler la dynamique de l'écoulement tandis que la seconde évaluera l'estimation de l'intensité de cavitation.

Les calculs sont analysés sur au moins 10 cycles d'écoulement, un cycle étant basé sur la vitesse en entrée et sur le rayon interne de la conduite.

$$t_c = \frac{R_c}{u_{in}} \quad (6.12)$$

6.3.2.1. Critères hydrodynamiques

Les figures 6.70 permettent la comparaison des profils de pression obtenus en paroi interne. Que ce soit d'un point de vue qualitatif, avec l'augmentation progressive de pression après la marche, ou quantitatif, une bonne concordance est obtenue entre expériences et simulations. Pour ces conditions d'essai, la mesure de la pression amont se situe à  $11D$  et il n'est pas possible de vérifier à partir de l'expérience la diminution de pression au passage du col. On retrouve cependant les mêmes pressions avant le diaphragme que les simulations réalisées par Mimouni (Tab 6.9).

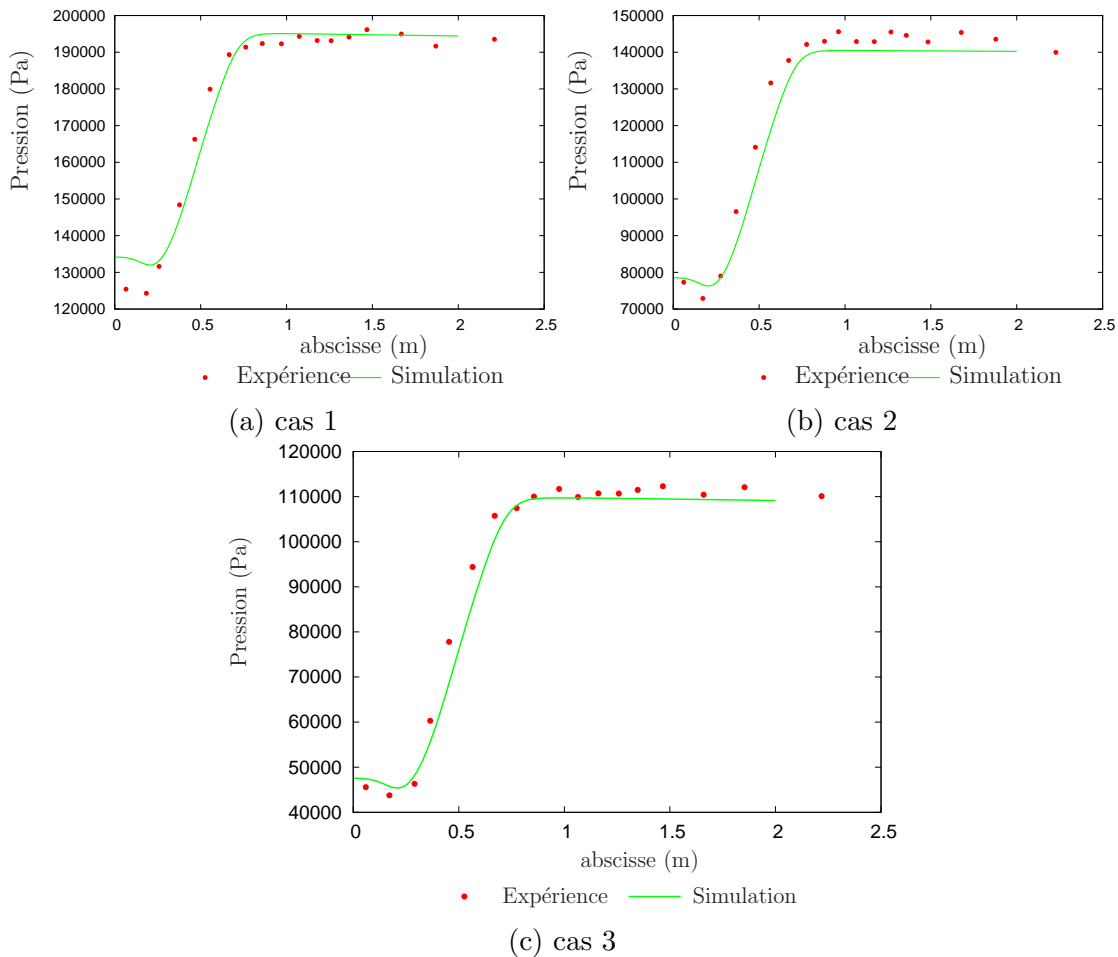


FIGURE 6.70 – Profil de pression sur le diamètre intérieur du conduit an aval du diaphragme - [160]

La tomographie X témoigne de l'expansion progressive des structures diphasiques

| cas | Pression avant le diaphragme en paroi (bar) |            | Pression après le diaphragme en paroi (bar) |            |
|-----|---|------------|---|------------|
|     | Neptune                                     | Fine-Turbo | Neptune                                     | Fine-Turbo |
| 1   | 4,8   | 4,75       | 1,3   | 1,34       |
| 2   | 4,2   | 4,3        | 0,8   | 0,78       |
| 3   | 4,0   | 4,0        | 0,5   | 0,47       |

TABLEAU 6.9 – Comparaison des pressions avant et après le diaphragme obtenues à partir des simulations de Mimouni [160] (réalisées avec le solveur NEPTUNE) et les calculs Fine-Turbo

jusqu'à une certaine distance au delà du diaphragme puis de leur disparition. Les simulations correspondant aux cas 1 et 2 n'atteignent pas des pressions suffisamment basses pour générer de la vapeur au niveau des positions de mesure. La première ne présente ainsi aucune zone diphasique tandis que dans la seconde, seul le passage au col présente un changement de phase (Fig. 6.71).

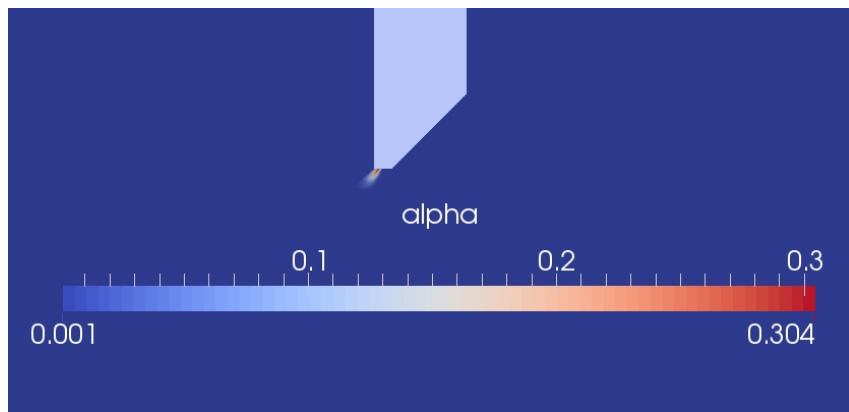


FIGURE 6.71 – Taux de vide moyen obtenu pour la simulation cas 2 au passage du col

Dans le cas de la configuration 3, la zone de croissance est notable jusqu'à la position **P4**, (Fig. 6.72a). Au delà, les mesures montrent une diminution du taux de vide (Fig. 6.73a). Numériquement, la phase d'expansion de la phase gazeuse est plus courte, la diminution du taux de vide débutant à partir de la position P3. Le taux de vapeur moyen est également plus faible d'un rapport 3 ou 4 environ (Fig. 6.72 et 6.73).

Au vu de ces comparaisons, le solveur Fine-Turbo est en mesure de représenter ce

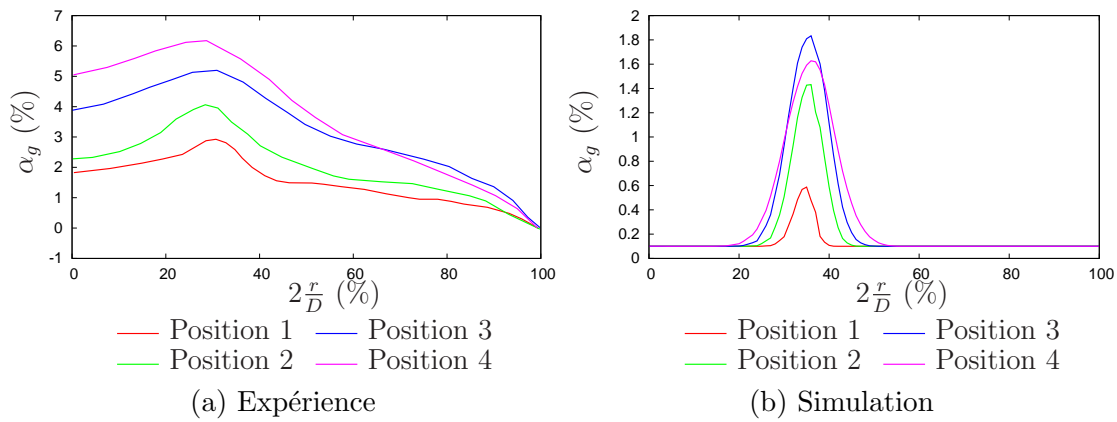


FIGURE 6.72 – Profil du taux de vide dans la veine pour le cas 3 - position 1 à 4

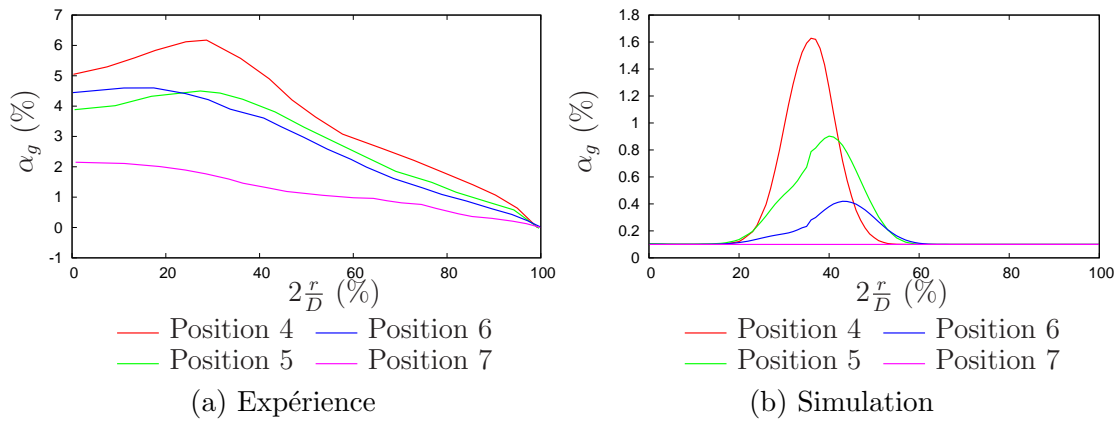


FIGURE 6.73 – Profil du taux de vide dans la veine pour le cas 3 - position 4 à 7

type d'écoulement (tout au moins dans la plage des conditions limites testées - Fig 6.74). Bien qu'offrant une importante sous-estimation du taux de vide, une dynamique de lâcher de cavitation a pu être observée, ainsi que la dynamique de création/disparition des structures diphasiques. Le comportement du fluide étant retranscrit, les simulations **U-RANS** n'offrent pas pour autant une reproduction exacte des valeurs de l'écoulement. La limitation du calcul à une géométrie 2D n'autorise pas par exemple, l'obtention de phénomènes instationnaires tridimensionnels pouvant apparaître dans cet écoulement. Les résultats liés à la méthode de prévision de l'érosion de cavitation sont donc d'ors et déjà influencés par ces différences.



(a) cas 1

(b) cas 2



(c) cas 3

FIGURE 6.74 – Photographie prise au cours de l'essai du diaphragme  $\beta = 0,4$  sur la boucle EPOCA

**6.3.2.2. Prédiction de l'agressivité de l'écoulement**

Nous allons désormais nous intéresser aux simulations des essais de marquage. Le tableau 6.10 récapitule les résultats expérimentaux obtenus :

| Cas | pression moyenne<br>amont - 1D en amont |                     | pression moyenne<br>aval - 10D en aval |                     | $\dot{V}_d$                |                         |
|-----|---|---------------------|--|---------------------|----------------------------|-------------------------|
|     | Expé (bar<br>abs.)                      | Simu. (bar<br>abs.) | Expé (bar<br>abs.)                     | Simu. (bar<br>abs.) | maximum<br>( $pm.s^{-1}$ ) | Échantillons<br>corres. |
| A   | 4,71                                    | 4,87                | 0,95                                   | 0,95                | 11,7                       | 2-3-4                   |
| B   | 2,26                                    | 2,34                | 0,47                                   | 0,47                | 4,2                        | 2-3-4                   |
| C   | 3,53                                    | 3,66                | 0,72                                   | 0,72                | 6,2                        | 2-3-4                   |
| D   | 4,53                                    | 4,80                | 0,81                                   | 0,80                | 11,8                       | 5-6-7                   |

TABLEAU 6.10 – Récapitulatif des résultats d'érosion pour la géométrie EPOCA

Sur cette géométrie, les débits et les pressions de sortie correspondent aux expériences mais pas les pressions statiques amont. Les pertes de charge dans la conduite sont donc sous-évaluées numériquement par rapport aux expériences et pour ces conditions d'essai.

Les figures 6.76 montrent quant à elles les zones d'érosion estimées à l'aide des trois méthodes (**MP-IH**, **MP-AS** et **M-IDB**). Les lâchers de cavitation étant plus loin de la paroi que dans le cas d'un profil, la présence du filtrage spatial diminue considérablement l'ordre de grandeur de l'intensité de cavitation estimée par rapport aux géométries précédentes. Dès lors la méthode **MP-IH** a jusqu'à 5 ordres de grandeur de différences avec les deux autres méthodes vue qu'elle ne possède pas dans nos applications de filtre spatial.

La méthode **IDB** permet d'obtenir une zone d'agressivité maximale au niveau des échantillons 2-3-4 pour les configurations A, B, C et au niveau de l'échantillon 6 pour le cas D. Ces résultats sont concordants avec les expériences et se justifient par la dynamique de l'écoulement simulé dans chacun des cas. En effet, les cas A, B et C ont une dynamique de lâcher depuis le col du diaphragme tandis que le cas D établit une zone de forte cavitation dans la veine qui génère des lâchers de cavitation plus loin dans la conduite (Fig 6.75). Les calculs A et B montrent cependant une zone d'endommagement au niveau des éprouvettes 6 et 7 non obtenue expérimentalement.



Pour ces simulations, les structures diphasiques se déplacent donc trop en aval du conduit. Les méthodes reposant sur une approche potentielle révèlent également une zone d'agressivité importante en aval de la conduite (après  $5D$ ) non obtenue expérimentalement.

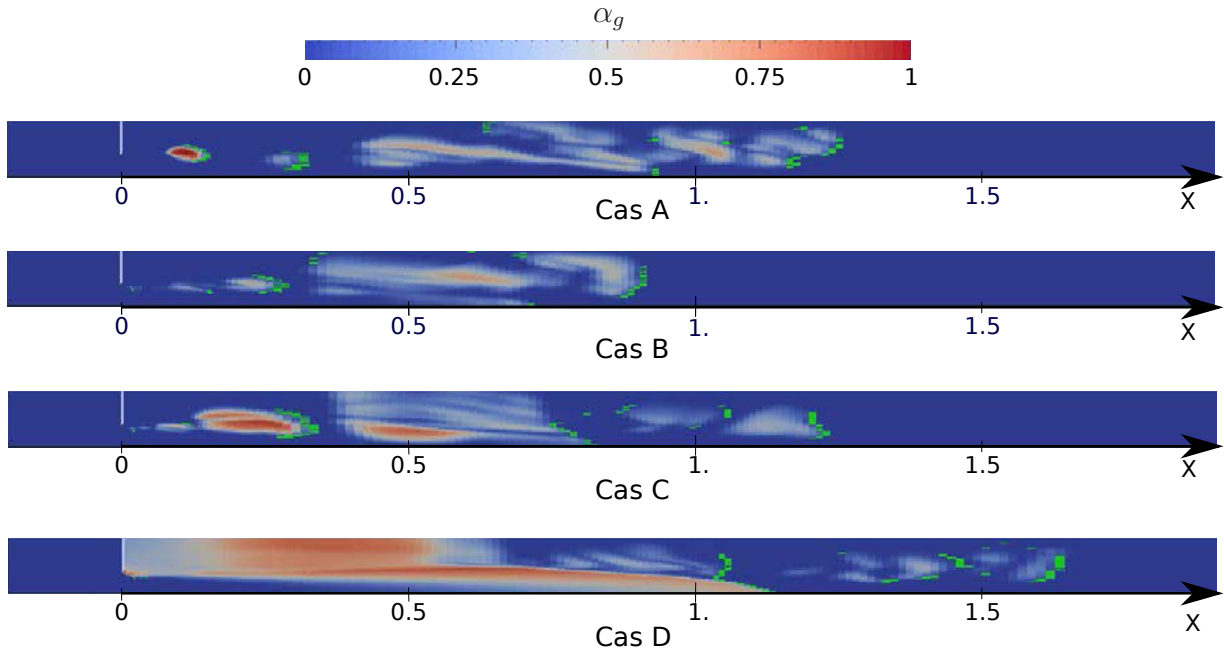


FIGURE 6.75 – Représentation de la dynamique de l'écoulement pour les quatre configurations testées à des instants différents. En vert sont représentées les cellules où la dynamique de bulles est calculée

Les ordres de grandeur obtenus par la méthode **M-IDB** et par **MP-AS** sont équivalents, de même que les puissances issues de chaque cellule. En revanche l'absence de filtre spatial dans la méthode **MP-IH** entraîne une plus forte valeur absolue de l'agressivité estimée.

L'étude de ce diaphragme nous a permis d'analyser un type d'écoulement cavitant différent, notamment en l'absence de poche attachée. Les zones d'agressivités maximales repérées par la méthode **M-IDB** sont en adéquation avec les résultats expérimentaux. La méthode **MP-AS** offre elle aussi des résultats satisfaisants ce qui révèle **la nécessité d'un filtrage spatial** et témoigne de la pertinence de la méthode des angles solides. La réalisation de simulations tridimensionnelles représente une bonne perspective sur cette

### 6.3. Diaphragme EPOCA - EDF R&D

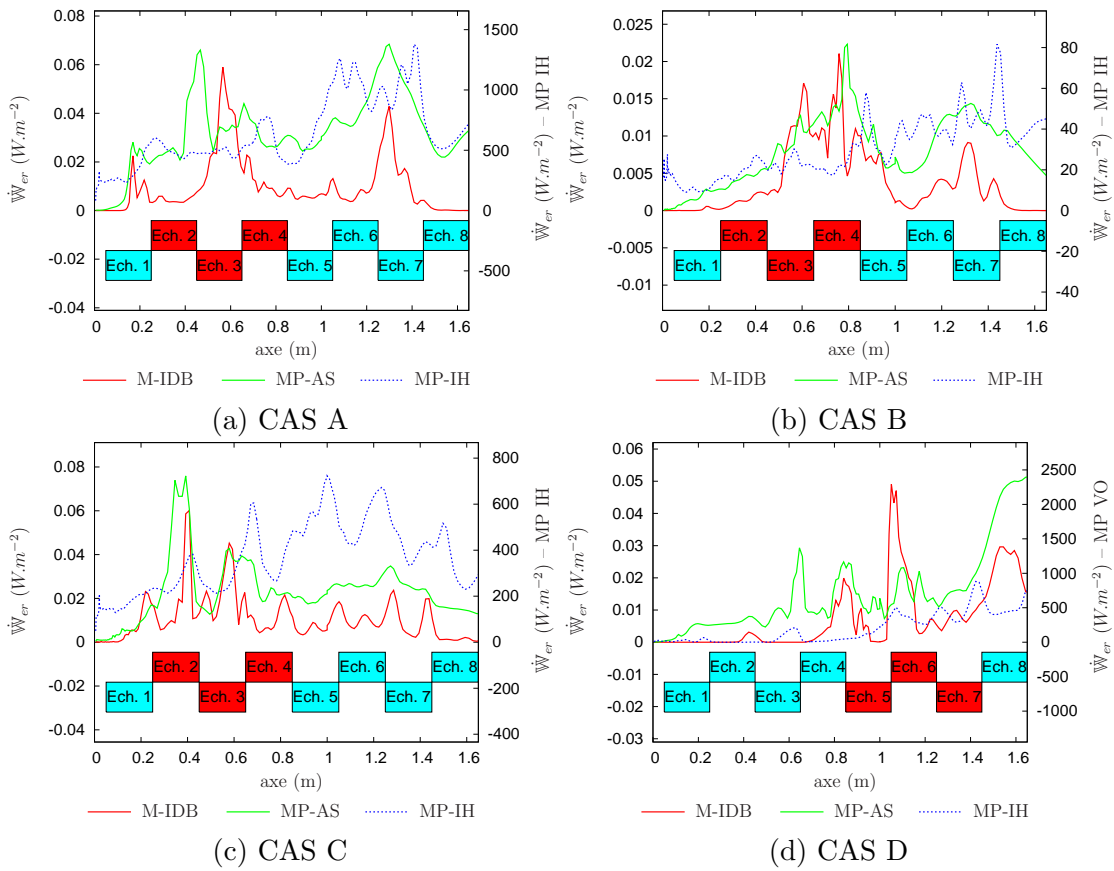


FIGURE 6.76 – Prévion de l’agressivité de l’écoulement pour la géométrie EPOCA

géométrie afin de considérer l’ensemble des phénomènes inhérents à cette écoulement.

## 6.4. Conclusion

Au cours de ce chapitre, des simulations numériques ont été réalisées sur trois géométries différentes : deux hydrofoils et un diaphragme. Chacune des simulations a été comparée à des essais expérimentaux sur des critères hydrodynamiques et des comportements similaires ont pu être observées. Par la suite, notre méthode de prédiction de l'intensité de cavitation a été appliquée et comparée aux données expérimentales de marquage. Elle fut également confrontée au procédé existant précédemment au sein du laboratoire.

Pour un même écoulement, ces méthodologies donnent des localisations et des amplitudes d'érosion différentes en fonction du solveur et des filtres employés. Cependant, les zones endommagées correspondent en première approximation aux zones de fermeture des structures cavitantes, ce qui est conforme aux résultats expérimentaux. De même, on retrouve l'augmentation de l'intensité de cavitation avec la vitesse de l'écoulement obtenue dans différentes campagnes d'essai (cf 1.1.3.2.). La sensibilité de l'agressivité de l'écoulement aux variations du paramètre de cavitation ne montre pas de concordance vis-à-vis des résultats d'essais. Néanmoins, les expériences ne montrant pas de tendance générale vis-à-vis de ce paramètre, l'obtention d'une concordance systématique entre simulations et expériences est dès lors plus délicate à obtenir.

Les résultats de post-traitement ont révélé des 'événements extrêmes' correspondants à des puissances émises lors de l'implosion d'un nuages de bulles de très fortes amplitudes. Ne retrouvant pas les mêmes événements en fonction du pas de temps choisi pour la simulation, il a été décidé dans ce manuscrit de filtrer ces puissances afin d'obtenir des résultats plus reproductibles. Or il est possible que l'érosion de cavitation soit issue d'une synergie des bulles faisant apparaître ponctuellement des ondes de pression très importantes en paroi. Ces événements extrêmes devront donc par la suite être analysées afin d'identifier si ils correspondent à une réalité physique ou à un artefact de calculs.

Différents paramètres numériques et physiques ont été testés afin d'étudier la sensibilité de notre modèle. Une meilleure concordance entre les essais et les simulations a été obtenue avec la loi **B-STMA** par rapport à la loi **B-TMAI**. La variation des

#### 6.4. Conclusion

---

tailles des bulles effectuée par le changement de la tension superficielle ne modifie pas les intensités de cavitation obtenus. De plus, la variation de la quantité d'air dans l'écoulement n'a pas révélé une sensibilité comparable à celle que l'on peut rencontrer dans les campagnes d'essais. Certaines hypothèses prises lors du développement de cette méthodologie semblent donc trop fortes pour représenter la physique de l'agressivité de l'écoulement et devront par conséquent être modifiées dans la suite des travaux (équilibre des bulles, distribution monodisperse,...).

La projection des puissances émises lors du collapsus de bulles par la méthode des angles solides semblent à priori être une idée intéressante puisqu'elle est en accord avec les hypothèses dans l'algorithme **IDB** tout en proposant un filtrage des puissances par rapport à la distance à la paroi. La proximité des ordres de grandeurs des résultats issus des méthodes **M-IDB** et **MP-AS** peut être remarquée.

- En effet, ces deux méthodes reposent sur l'utilisation de l'équation de Keller afin de déterminer l'énergie de l'onde de surpression émise lors du collapsus **d'une bulle** en se concentrant sur la première implosion. La quantité de gaz considérée au moment de l'implosion est semblable dans les deux cas (aux alentours de 1 000 *Pa*.)
- Dans leur version actuelle, aucune des deux méthodes ne considèrent une amplification de l'énergie par des effets d'interactions entre bulles. L'énergie émise par le nuage est estimée par une relation linéaire entre le nombre de bulles (ou du volume de gaz) et l'énergie générée par l'implosion d'une bulle.
- L'agressivité estimée sur le solide repose sur l'utilisation des angles solides et sur la propagation sans pertes des ondes dans le fluide.

La sélection des cellules dans le cas de la méthode **M-IDB** restreint la zone d'agressivité à la périphérie des structures cavitantes et notamment en sortie de poche, évitant l'apparition d'agressivité trop importante en bord d'attaque des profils.

Chacune des méthodes testées dans ce chapitre nécessitent un temps de post-traitement différent dépendant de leur complexité (Tab. 6.11). L'intégration sur la hauteur de veine est un processus plus rapide que la projection par la méthode des angles solides. De plus,

le calcul à chaque pas de temps de la dynamique de bulle requière nécessairement plus de temps que l'utilisation de corrélations.

| Méthode                        | MP-IH | MP-AS | M-IDB |
|--------------------------------|-------|-------|-------|
| Temps de calcul <b>CPU</b> (s) | 773   | 1164  | 4265  |

TABLEAU 6.11 – Temps **CPU** nécessaire au post-traitement des résultats des simulations IZ - cas F (600 pas de temps calculés)

Les simulations des écoulements ont été limitées à des calculs bidimensionnels ou axisymétriques. En effet, les temps de calcul importants que nécessitent la réalisation de calculs tridimensionnels (plusieurs semaines) ont freiné cet aspect. De plus, **le développement de la méthode a été privilégié à son application**. Néanmoins, la réalisation de calculs tridimensionnels sur ces géométries permettraient d'affiner la simulation hydrodynamique du fluide et représentent ainsi une perspective importante à la fois dans le développement et dans la validation de cette méthode.

La grandeur représentative de l'intensité de cavitation repose sur le postulat que l'endommagement est proportionnel à l'énergie liée à l'implosion de bulles reçues en paroi. Les indentations formées sur la surface ne sont donc pas associées à une onde de surpression mais à une accumulation d'énergie. Or l'un des avantages de la méthode **M-IDB** est de permettre le calcul de la pression en paroi et donc d'utiliser par la suite des codes de comportements solides pour caractériser le marquage. En revanche, ne considérer qu'une bulle n'autorise pas d'obtenir les ordres de grandeurs nécessaires à l'endommagement de la paroi (la pression maximale relevée en paroi est de  $5.10^7 Pa$  pour le cas EPFL cas F avec le solveur IZ). La possibilité de calculer la dynamique de l'ensemble d'un nuage de bulles au sein du post-traitement dans des temps raisonnables représente donc une perspective majeure pour cette méthodologie.

## Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail de doctorat est de fournir un post-traitement de simulations **U-RANS** définissant une grandeur représentative de la vitesse d'érosion de cavitation. Les mécanismes d'endommagement du matériau liés à ce phénomène sont, dans la littérature, issus de la dynamique de bulles. Une attention particulière a donc été apportée à la mise en place d'équations valables à la fois à l'échelle de l'installation hydraulique et à celle de la bulle. Un lien formel a été créé entre les phénomènes résolus par le système **U-RANS** et ceux se produisant lors de l'implosion des structures cavitantes. La méthode développée se distingue en trois étapes :

- L'évaluation d'une population de bulles à partir des simulations **U-RANS**,
- Le calcul de l'énergie émise lors de l'implosion des bulles,
- L'accumulation de l'énergie reçue en paroi.

Une estimation de l'intensité de cavitation, homogène dimensionnellement à une puissance surfacique, peut ainsi être déterminée à partir des simulations numériques.

Afin d'arriver à cette proposition, il a été, dans un premier temps, nécessaire d'explicitier les phénomènes se produisant au niveau local, tels que les transferts de masse, les tensions de surface ou bien encore la présence de gaz incondensable et de définir des grandeurs associées compatibles avec l'approche fluide homogène utilisée dans les simulations **U-RANS** disponibles au laboratoire. Les phénomènes se produisant aux interfaces, que ce soit lors de la croissance des bulles ou lors de leurs implosions, n'étant modélisés de façon consensuelle, il est essentiel de connaître les limites et les hypothèses

prises par notre modèle.

**A l'échelle du profil**, les gaz incondensables et la tension superficielle généralement négligés dans les calculs **U-RANS** sont intégrés dans le post-traitement des résultats de simulations. Pour cela, une réinterprétation de la loi barotrope de Delannoy est proposée. Les populations de bulles déterminées dans notre étude sont néanmoins dépendantes des équations et des hypothèses considérées. Les bulles demeurent ainsi sphériques et sont supposées, à l'échelle spatio-temporelle du profil, à l'équilibre thermodynamique. De plus, pour chaque cellule du calcul, la population de bulles représentée est monodisperse.

Deux lois, définissant des populations de bulles différentes, ont été développées. Dans la première, les transferts de gaz incondensables sont supposés instantanés (**B-TMAI**) tandis que dans la seconde, ils sont négligés (**B-STMA**). Ces deux considérations sont critiquables et ne correspondent pas strictement à la réalité physique de l'écoulement. Elles ont néanmoins l'avantage de poser une base d'étude à partir de laquelle d'autres populations peuvent être établies. Une fonction de distribution plus complexe permettrait sans doute de considérer des phénomènes d'interactions plus variées. De même, il serait intéressant d'adapter cette méthode aux systèmes **U-RANS** employant une équation de transport de taux de vide afin d'obtenir des informations supplémentaires sur la topologie du milieu. De plus, il faut garder à l'esprit que cette méthodologie repose sur la qualité de la simulation **U-RANS** elle-même, à la fois dans la manière dont les termes de transfert de masse sont considérés mais aussi dans la modélisation de la turbulence.

**A l'échelle du nuage de bulles**, une étude sur l'implosion de ce dernier a été effectuée. La littérature étant partagée sur le mécanisme principale responsable de l'érosion de cavitation, il nous semble important de considérer un code de calcul permettant de simuler à la fois la formation de microjets et d'ondes de surpression. Cette thèse nous a donc conduit à l'élaboration d'un algorithme **IDB** qui n'a malheureusement pas pu être achevé. Il propose toutefois une approche originale pour la résolution de la dynamique de nuages de bulles ayant comme objectif de considérer à la fois les interactions entre les bulles et leurs déformations non sphériques. La décomposition du problème sur les harmoniques sphériques ainsi que l'utilisation de la méthode potentielle permet de conserver des temps de calcul raisonnables au vue d'une application future au sein du

---

post-traitement des simulations **U-RANS**.

A l'heure actuelle, les limitations liées à l'algorithme **IDB** et à aux temps **CPU** élevés nécessaires nous ont contraint à restreindre les phénomènes pris en compte dans nos applications. Seules les ondes de surpression liées à l'implosion d'une bulle isolée, calculées à partir de l'équation de Keller, sont considérées pour l'estimation de l'agressivité de l'écoulement. La puissance émise par l'implosion d'un nuage est alors supposée proportionnelle au nombre de bulles le constituant.

Finalement, le résultat de notre méthode réside dans le calcul de la puissance reçue en paroi. Les codes simulant le comportement solide utilisés dans l'industrie nécessitent la connaissance de la charge en paroi, notamment la pression appliquée à chaque instant. Même s'il est possible d'obtenir des estimations des pressions issues de l'implosion d'une bulle, les phénomènes d'amplification n'étant pas pris en compte, elles demeurent beaucoup trop faibles pour endommager le matériau. Il serait dès lors intéressant d'étudier les coefficients d'amplification liés à l'implosion d'un nuage de bulles, d'un point de vue énergétique, mais aussi en terme d'amplitude maximale de l'onde de surpression.

La méthode développée au cours de cette thèse a été appliquée sur trois écoulements différents, deux hydrofoils et un diaphragme. Les résultats de simulations ont été dans un premier temps jugés sur des aspects hydrodynamiques. Afin d'évaluer la sensibilité du post-traitement, la méthode de prédiction développée précédemment au sein du laboratoire a également été utilisée. De même, différents paramètres numériques et physiques ont été testés. Des 'événements extrêmes' présentant des puissances érosives importantes ont été relevés. Néanmoins, devant leurs grandes sensibilités à des paramètres purement numériques, il a été décidé de proposer une opération de filtrage, afin de négliger leurs effets sur le résultat global. L'influence de la vitesse de l'écoulement sur l'intensité de cavitation prédite est bien retranscrite par notre proposition, ce qui n'est pas le cas en revanche pour le paramètre de cavitation. De plus, la variation de la quantité de gaz incondensable présente au sein de l'écoulement n'induit pas les différences observées expérimentalement. Certaines hypothèses prises en compte au cours de ce manuscrit sont donc trop fortes pour représenter les mécanismes d'érosion et devront par la suite être modifiées. La réalisation de calculs tridimensionnels permettra également



de tester la prédiction du modèle de prévision sur des dynamiques plus complexes, plus représentatives des cas expérimentaux.

Cette étude établit un cadre de travail original avec l'obtention d'une population de bulles à partir de simulations **U-RANS** basées sur une approche homogène. Un avantage de la méthode de prévision de l'érosion de cavitation développée au cours de ce doctorat repose sur le fait que les différentes étapes du post-traitement sont relativement indépendantes. Elle offre ainsi de nombreuses perspectives pouvant être abordées de façon parallèle que ce soit :

- dans le cadre de la simulation **U-RANS** en elle-même avec l'utilisation d'une équation de transport de taux de vide ou dans le changement de modèle de fermeture pour les termes de saut à l'interface ( $p_M^l \neq p_M^g$ ) et dans la définition de la population de bulles en caractérisant une fonction de distribution,
- dans le calcul de l'implosion de bulles en achevant l'algorithme **IDB**, en intégrant un autre code de calcul ou une corrélation dans la démarche de post-traitement.
- dans la projection de l'énergie émise sur la surface en prenant en compte les interactions avec les autres cellules du maillage et dans le calcul de la déformation du matériau.

Ce travail de thèse ne représente ainsi qu'une étape dans l'élaboration d'une technique de prévision de l'endommagement du matériau par érosion de cavitation à partir de simulations numériques **U-RANS**.

# Bibliographie

Les articles désignés par une \* sont cités à partir d'autres références, mais n'ont pas pu être lus

- [1] J.L. ACHARD : *Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- [2] P. ACHIM : *Simulations de collisions, coalescence et rupture de gouttes par une approche lagrangienne : application aux moteurs à propergol solide*. Thèse de doctorat, Université de Rouen, 1999.
- [3] \* Y. AIT-BOUZIAD, M. FARHAT, F. GUENNOUN, J.L. KUENY et F. AVELLAN : Physical modelling and simulation of leading edge cavitation, application to an industrial inducer. *In 5<sup>th</sup> International Symposium on cavitation*, Osaka, 2003.
- [4] \* M. AKIYAMA : Bubble collapse in subcooled boiling. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 16(93):570–575, 1973.
- [5] A. AMBLARD et Y. LECOFFRE : The non effect of dissolved air on cavitation erosion. *In American Society of Mechanical Engineers*, San Francisco, 1988.
- [6] \* S.P. ANTAL, R.T. LAHEY et J.E. FLAHERTY : Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 17(5):635–652, 1991.
- [7] M. ARORA, C.D. OHL et D. LOHSE : Effect of nuclei concentration on cavitation cluster dynamics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(6):3432–3436, 2007.

- 
- [8] G. BALMIGERE, S. VINCENT, J.P. CALTAGIRONE et E. MEILLOT : Utilisation d'une méthode de suivi d'interface mixte eulérienne/lagrangienne pour les écoulements diphasiques. *In 18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 2007.
- [9] R. BANNARI, F. KERDOUSS, B. SELMA, A. BANNARI et P. PROULX : Three-dimensional mathematical modeling of dispersed two-phase flow using class method of population balance in bubble columns. *Computers and Chemical Engineering*, 32:3224–3237, 2008.
- [10] \* T. BARBERON et P. HUELLY : Finite volume simulation of cavitating flows. *Computer and Fluids*, 34(7):832–858, 2005.
- [11] \* M. BARRET, E. FAUCHER et J.M. HERARD : Schemes to compute unsteady flashing flows. *AIAA Journal*, 40(5):905–913, 2002.
- [12] \* A.B. BASSET : *A Treatise on Hydrodynamics*, volume 2. Deighton, Bell and Co., London, 1888.
- [13] \* B.BELAHADJI, J.P. FRANC et J.M. MICHEL : A statistical analysis of cavitation erosion pits. *Journal of Fluids Engineering*, 113(4):700–706, 1991.
- [14] D. BEDEAUX et S. KJELSTRUP : Transfer coefficient for evaporation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 270(3-4):413–426, 1999.
- [15] \* R. BEECHING : Resistance to cavitation erosion. *Institute of engineers and ship-builders in Scotland*, 85, 1942.
- [16] S.A. BEIG, J. HARTENBERG, I.H. LEE, S.L. CECCIO et E. JOHNSEN : Direct simulation of the compressible navier-stokes equations for interfacial flows. *In 8<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow*, Jeju, 2013.
- [17] \* T.B. BENJAMIN et A.T. ELLIS : The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid boundaries. *Philosophical transaction of the Royal society*, 260(1110):221–240, 1966.
- [18] N. BERCHICHE : *Erosion de cavitation d'un métal ductile : étude expérimentale et modélisation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.

## RÉFÉRENCES

---

- [19] \* M. BERTHELOT : *Sur quelques phénomènes de dilatation forcée des liquides : Mémoire sur les diverses essences de térébenthine ; Sur les précautions à prendre pour chauffer les corps en vase clos.* Mallet-Bachelier, 1849.
- [20] D. BESTION : Applicability of two-phase cfd to nuclear reactor thermalhydraulics and elaboration of best practice guidelines. *Nuclear Engineering and Design*, 253, 2011.
- [21] \* F.G. BLAKE : *Onset of Cavitation in Liquids.* Thèse de doctorat, Harvard University, 1949.
- [22] G. BOIS : *Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces.* Thèse de doctorat, Docteur de l'Université de Toulouse, 2006.
- [23] \* G. BOITEL : Etude expérimentale et numérique des écoulements instationnaires cavitants : applications aux inducteurs des turbopompes spatiales. Mémoire de D.E.A., DEA MFT - Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [24] \* J. BOUSSINESQ : Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. *In Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 1885.
- [25] \* C. BRECHBÜHLER, G. GERIG et O. KÜBLER : Parametrization of closed surfaces for 3-d shape description. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(2):154–170, 1995.
- [26] N. BREMOND, M. ARORA, C.D. OHL et D. LOHSE : Controlled multibubble surface cavitation. *Physics of Fluids*, 96(22), 2005.
- [27] C.E. BRENNEN : The dynamics blanced of dissolved air and heat in natural cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 37:115–127, 1969.
- [28] C.E. BRENNEN : *Cavitation and Bubble Dynamics.* Oxford University Press, 1995.

- [29] E.A. BRUJAN, K. NAHEN, P. SCHMIDT et A. VOGEL : Dynamics of laser-induced cavitation bubbles near an elastic boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 433:381–384, 2001.
- [30] \* J.H. BRUNTON : High speed liquid impact. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 260(1110):79–85, 1966.
- [31] \* H.K. CAMMENGA : *Evaporation Mechanisms of Liquids - Current Topics in Materials Science*, volume 5. North-Holland Publishing Company, 1980.
- [32] \* D.J. CARLSON et R.F. HOGLUND : Particle drag and heat transfer in rocket nozzles. *AIAA*, 2:1980–1984, 1964.
- [33] G.L. CHAHINE : \* cavitation cloud theory. *In 14th symposium on naval hydrodynamics*, Ann Arbor, 1983.
- [34] G.L. CHAHINE : Numerical simulation of bubble flow interactions. *Journal of Hydrodynamics*, 21(3):316–332, 2009.
- [35] G.L. CHAHINE et P.F. GENOUX : Collapse of a cavitating vortex ring. *Journal of Fluids engineering*, 105(4):400–405, 1983.
- [36] G. CHALLIER : *Mécanismes d'interactions fluide/structure et de transfert d'énergie en érosion de cavitation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002.
- [37] N. CHARLES : *Modélisation diphasique d'écoulements cavitants avec effets thermodynamiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.
- [38] \* Y.M. CHEN et F. MAYINGER : Measurement of heat transfer at the phase interface of condensing bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6):877–890, 1992.
- [39] X. CHEN, R.Q. XU, Z.H. SHEN, J. LU et X.W. NI : Optical investigation of cavitation erosion by laser-induced bubble collapse. *Optics and Laser Technology*, 36(3):197–203, 2004.

## RÉFÉRENCES

---

- [40] T. CHOFFAT : *Simulation des phénomènes de marquage et de pertes de masse en érosion de cavitation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [41] \* R.D. CISKOWSKI et C.A. BREBBIA : *Boundary Element Methods in Acoustics*. Springer, 1991.
- [42] \* R.H. COLE : *Underwater explosions*. Cambridge University Press., 1948.
- [43] \* Y. COURTOT : *Instabilité de cavitation dans les inducteurs : Analyse et modélisation de l'écoulement instationnaire en grilles d'aubes*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.
- [44] O. COUTIER-DELGOSHA : *Modélisation des écoulements cavitants : Etude des comportements instationnaires et application tridimensionnelle aux turbomachines*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [45] O. COUTIER-DELGOSHA, F. DENISET, J.A. ASTOLFI et J.B. LEROUX : Numerical prediction of cavitating flow on a two-dimensional symmetrical hydrofoil and comparison to experiments. *Journal of Fluids Engineering*, 129:279–292, 2007.
- [46] O. COUTIER-DELGOSHA, J.L. REBOUD et Y. DELANNOY : Numerical simulation of the unsteady behaviour of cavitating flows. *Journal for numerical methods in fluids*, 42(5):527–548, 2003.
- [47] P. COUTY : *Physical investigation of cavitation vortex collapse*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2002.
- [48] L. D'AGOSTINO et C.E. BRENNEN : Linearized dynamics of spherical bubble clouds. *Journal of Fluid Mechanics*, 199:155–176, 1989.
- [49] \* P.V. DANCKWERTS : Significance of liquid-film coefficients in gas absorption. *Industrial and Engineering Chemistry*, 43:1460–1467, 1951.
- [50] \* Y. DELANNOY et J.L. KUENY : Two phase flow approach in unsteady cavitation modelling. *In Cavitation and Multiphase Flow Forum*, Toronto, 1990.

- [51] J.M. DELHAYE : Jump conditions and entropy sources in two-phases systems. local instant formulation. *Internation Journal of Multiphase flow*, 1:395–409, 1973.
- [52] J.P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Science, 2006.
- [53] \* V. DONTSOV : Propagation of pressure waves in a gas-liquid medium with a cluster structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 46(3):346–354, 2005.
- [54] J.M. DOREY, Q. LE et F. TURA : A new test procedure using plant and polished samples to quantify cavitation agressivity on industrial components. *In Cavitation 91 Symposium*, Portland, 1991.
- [55] \* P. DOWNAR-ZAPOLSKI, Z. BILICKI, L. BOLLE et J. FRANCO : The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(3):473–483, 1996.
- [56] \* M. DULAR et A. OSTERMAN : Pit clustering in cavitation erosion. *Wear*, 265:811–820, 2008.
- [57] M. DULAR, B. BACHERT, B. STOFFEL et B. SIROK : Relationship between cavitation structures and cavitation damage. *Wear*, 257:1176–1184, 2004.
- [58] M. DULAR et O. COUTIER-DELGOSHA : Numerical modelling of cavitation erosion. *International journal for numerical methods in Fluids*, 61:1388–1410, 2009.
- [59] M. DULAR, B. STOFEL et B. SIROK : Development of a cavitation erosion model. *Wear*, 261:642–655, 2006.
- [60] N. DUMONT : *Modélisation de l'écoulement diphasique dans les injecteurs Diesel*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [61] B. DUPLANTIER : Le mouvement brownien, “divers et ondoyant”. *In Séminaire Poincaré*, Paris, 2005.
- [62] \* I.W. EAMES, N.J. MARR et H. SABIR : The evaporation coefficient of water : a review. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(12):2963–2973, 1997.
- [63] \* J.R. EDWARDS et R.K. FRANKLIN : Low-diffusion flux splitting methods for real fluid flows with phase transition. *AIAA*, 38(9), 2000.

## RÉFÉRENCES

---

- [64] A. FADAI-GHOTBI : *Modélisation de la turbulence en situation instationnaire par approche URANS et hybride RANS-LES. Prise en compte des effets de paroi par pondération elliptique*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2007.
- [65] M. FARHAT : *Contribution à l'étude de l'érosion de cavitation : Mécanismes hydrodynamiques et prédictions*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1994.
- [66] C. FLAGEUL, R. FORTES-PATELLA et A. ARCHER : Cavitation erosion prediction by numerical simulations. *In 14th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, 2012.
- [67] \* L.L. FOLDY : The multiple scattering of waves. I. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, 3-4:107–119, 1945.
- [68] R. FORTES-PATELLA : *Analyse de l'érosion de cavitation par simulations numériques d'impacts*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.
- [69] R. FORTES-PATELLA, G. CHALLIER, J.L. REBOUD et A. ARCHER : Cavitation erosion mechanism : numerical simulations of the interaction between pressure waves and solid boundaries. *In 4<sup>th</sup> International Symposium on Cavitation*, Pasadena, 2001.
- [70] R. FORTES-PATELLA et J.L. REBOUD : Etude de l'interaction fluide-structure en érosion de cavitation. *Howille Blanche*, 6, 1997.
- [71] R. FORTES-PATELLA et J.L. REBOUD : Energetical approach and impact efficiency in cavitation erosion. *In Third International Symposium on Cavitation*, Grenoble, 1998.
- [72] R. FORTES-PATELLA et J.L. REBOUD : A new approach to evaluate the cavitation erosion power. *Journal of fluid Engineering*, 120, 1998.
- [73] R. FORTES-PATELLA, J.L. REBOUD et L. BRIANCON-MARJOLLET : A phenomenological and numerical model for scaling the flow aggressiveness in cavitation erosion. *In EROCAV Workshop*, Val de Reuil, 2004.
- [74] J. FOURIER : *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, F. Didot, 1822.



- [75] J.P. FRANC : Incubation time and cavitation erosion rate of work-hardening materials. *Journal of Fluids Engineering*, 131(2), 2009.
- [76] J.P. FRANC, F. AVELLAN, B. BELAHADJI, J.Y. BILLARD, L. BRIANÇON-MARJOLLET, D. FRÉCHOU, D. H. FRUMAN, A. KARIMI, J.L. KUENY et J.M. MICHEL : *La cavitation : mécanismes physiques et aspects industriels*. EDP Sciences, 1995.
- [77] J.P. FRANC, M. RIONDET, A. KARIMI et G.L. CHAHINE : Impact load measurements in an erosive cavitating flow. *Journal of Fluids Engineering*, 113, 2011.
- [78] S. FRIKHA, O. COUTIER-DELGOSHA et J.A. ASTOLFI1 : Influence of the cavitation model on the simulation of cloud cavitation on 2D foil section. *International Journal of Rotating Machinery*, 2008, 2008.
- [79] S. FUJIKAWA et T. AKAMATSU : Effects of the non-equilibrium condensation of vapour on the pressure wave produced by the collapse of a bubble in a liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(3):481–512, 1980.
- [80] \* B. Le FUR et J.F. DAVID : Comparaison entre les vitesses d'érosion déduites d'un essai de longue durée et d'un essai de marquage. *In Société hydrotechnique de France*, Paris, 1992.
- [81] \* B. Le FUR et J.F. DAVID : Comparaison between pitting rate and erosion rate for three materials. *In 3th International Symposium on Cavitation, Grenoble*, 1998.
- [82] D. FUSTER et T. COLONIUS : Modeling of bubble clusters in compressible liquids. *Journal of Fluid Mechanics*, 688:352–389, 2011.
- [83] \* P. FÉVRIER, O. SIMONIN et K.D. SQUIRES : Partitioning of particle velocities in gas-solid turbulent flows into a continuous field and a spatially uncorrelated random distribution : theoretical formalism and numerical study. *Journal of Fluid Mechanics*, 533:1–46, 2005.
- [84] \* E.M. GATES et J. BACON : Determination of cavitation nuclei distribution by holography. *Journal of Ship Research*, 22(1):29–31, 1978.

## RÉFÉRENCES

---

- [85] \* R. GATIGNOL : The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow. *Mécanique Théorique et Appliquée*, 1(2):143–160, 1983.
- [86] F.R. GILMORE : The growth and collapse of spherical bubble in viscous compressible liquid. Rapport technique 26-4, Office of Naval Research, 1952.
- [87] A.J. GOLDMAN, R.G. COX et H. BRENNER : Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - i. motion through a quiescent fluid. *Chemical Engineering Science*, 22:637–651, 1967.
- [88] E. GONCALVES : *Implémentation et validation de lois de parois dans un code Navier Stokes*. Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 2001.
- [89] E. GONCALVES et R. FORTES-PATELLA : Numerical simulation of cavitating flows with homogeneous models. *Computers and Fluids*, 39(9):1682–1696, 2009.
- [90] E. GONCALVES et R. FORTES-PATELLA : Numerical study of cavitating flows with thermodynamic effect. *Computers and Fluids*, 99(113):99–113, 2010.
- [91] G. GORSKI, E. HIVON, A. BANDAY, B.D. WANDELT, F.K. HANSEN, M. REINECKE et M. BARTELMAN : Healpix — a framework for high resolution discretization, and fast analysis of data distributed on the sphere. *Astrophysical Journal*, 622:759–771, 2005.
- [92] H. GRANDJEAN : *Propagation d'une onde de choc dans un liquide aéré : modélisation et application aux rideaux de bulles*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale, 2012.
- [93] D. GREIF et W. EDELBAUER : Application of cavitation erosion modeling within engine development process. In *International Multidimensional Engine Modeling User's Group Meeting*, Detroit, 2013.
- [94] \* A. GUELFY, D. BESTION, M. BOUCKER, P. BOUDIER, P. FILLION, M. GRANDOTTO, J.M. HÉRARD, E. HERVIEU et P. PÉTURAUD : Neptune - a new software platform for advanced nuclear thermal hydraulics. *Nuclear Science and Engineering*, 156:281–234, 2007.

- 
- [95] M.F. GUENNOUN : *Étude physique de l'apparition et du développement de la cavitation sur une aube isolée*. Thèse de doctorat, École polytechnique fédérale de Lausanne, 2006.
- [96] \* A. HAIDER et O. LEVENSPIEL : Drag coefficient and terminal velocity of spherical and nonspherical particles. *Powder Technology*, 58:63–70, 1989.
- [97] N. HAKIMI : *Preconditioning Methods for time dependent Navier-Stokes equations*. Thèse de doctorat, Université libre de Bruxelles, 1997.
- [98] F.G. HAMMIT : Cavitation erosion : the state of the art and predicting capability. *Applied Mechanics Reviews*, 32(6), 1979.
- [99] Y. HAROUN : *Etude du transfert de masse réactif Gaz-Liquide le long de plans corrugés par simulation numérique avec suivi d'interface*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2008.
- [100] \* P. HELLUY et N. SEGUIN : Relaxation models of phase transition flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(2):331–352, 2006.
- [101] \* C. HERRING : *Theory of the pulsation of the gas bubble produced by an underwater explosion*. New London, Conn. Columbia Univ., Div. of National Defense Research, 1941.
- [102] \* H. HERTZ : On the evaporation of liquids, especially mercury, in vacuo. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 17:177, 1882.
- [103] \* R. HICKLING et M.S. PLESSET : Collapse and rebound of a spherical bubble in water. *Physics of Fluids*, 7(1), 1964.
- [104] \* R. HIGBIE : The rate of absorption of a pure gas into a still liquid during a short time of exposure. *American Institute of Chemical Engineers*, 31:365–389, 1935.
- [105] C.W. HIRT et B.D. NICHOLS : Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1979.

## RÉFÉRENCES

---

- [106] M. HOFMANN, H. LOHRBERG, G. LUDWIG, B. STOFFEL, J.L. REBOUD et R. FORTES-PATELLA : Numerical and experimental investigations on the self-oscillating behaviour of cloud cavitation : Part I : Visualisations. *In 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*, San Francisco, 1999.
- [107] J. HUANG et Z. ZHANG : Level set method for numerical simulation of a cavitation bubble, its growth, collapse and rebound near a rigid wall. *Acta Mechanica Sinica*, 23(6):645–653, 2007.
- [108] \* S.V. IORDANSKI : On the equation of motion for a liquid containing gas bubbles. *hurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 3:102–110, 1960.
- [109] \* C.M. ISHII et T. HIBIKI : *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, 2006.
- [110] T. ISHIYAMA, T. YANO et S. FUJIKAWA : Molecular dynamics study of kinetic boundary condition at an interface between a polyatomic vapor and its condensed phase. *Physics of Fluids*, 16(12), 2004.
- [111] J.C. ISSELIN : *Etude expérimentale de la dynamique d'une bulle de vapeur initiée par laser impulsionnel à proximité d'une paroi*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, 1997.
- [112] C.B. IVEY et P. MOIN : Conservative volume of fluid advection method on unstructured grids in three dimensions. *Center for Turbulence Research - Annual Research Briefs Journal of Computational Physics*, 2012.
- [113] \* J.K. JAKOBSEN : On the mechanism of head breakdown in cavitating inducers. *Journal of Fluids engineering*, 86(2):291–305, 1964.
- [114] H.A. JAKOBSEN : *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*. Springer, 2008.
- [115] A. JAMESON : Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. *AIAA*, 1956, 1991.

- [116] A. JAMESON, W. SCHMIDT et E. TURKEL : Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA*, 1259, 1981.
- [117] \* S. JONES, G. EVANS et K. GALVIN : Bubble nucleation from gas cavities - a review. *Advances in Colloid and Interface Science*, 80(1):27–50, 1999.
- [118] \* W.P. JONES et B.E. LAUNDER : The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.
- [119] \* A. KARIMI et W.R. LEO : Phenomenological model for cavitation rate computation. *Materials Science and Engineering*, 95:1–14, 1987.
- [120] \* I. KATAOKA : Local instant formulation of two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5):745–758, 1986.
- [121] \* H. KATO, M. MAEDA et A. MAGAINO : Mechanism and scaling of cavitation erosion. *In 12th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, Washington, 1978.
- [122] \* H. KATO, Y.P. YE, M. MAEDA et H. YAMAGUCHI : Cavitation erosion and noise study on a foil section. 1989.
- [123] K. KATO, H. DAN et Y. MATSUDAIRA : Lock-in phenomenon of pitching hydrofoil with cavitation breakdown (unsteady fluid force characteristics and visualization of flow structure). *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series B*, 49(3):797–805, 2006.
- [124] \* J. KATZ : Determination of solid nuclei and bubble distribution in water by holography. Rapport technique 183-3, 1978.
- [125] \* E.H. KENNARD : *Kinetic Theory of Gases with an Introduction to Statistical Mechanics*. McGraw-Hill, 1938.
- [126] K.H. KIM, G.L. CHAHINE, J.P. FRANC et A. KARIMI : *Advanced Experimental and Numerical Techniques for Cavitation Erosion Prediction*. Springer, 2014.

## RÉFÉRENCES

---

- [127] A.Y. KIPNIS., B.E. YAVELOV et J.S. ROWLINSON : *Van der Waals and Molecular Science*. Oxford University Press., 1996.
- [128] \* A. KNACKE et I.N. STRANSKI : The mechanism of evaporation. *Progress in Metal Physics*, 6:181, 1956.
- [129] R.T. KNAPP : Investigations of the mechanism of cavitation and cavitation damage. Rapport technique Project NR062-166, Department of the Navy Office of Naval Research, 1955.
- [130] \* M. KNUDSEN : Maximum rate of vaporization of mercury. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 47:697, 1915.
- [131] \* B. KOGARKO : One-dimensional unsteady motion of a liquid with an initiation and progression of cavitation. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 155:779–782, 1964.
- [132] A.N. KOLMOGOROV : Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Proceedings : Mathematical and Physical Sciences*, 434(1890):15–17, 1991.
- [133] S. KUMAR et C.E. BRENNEN : Nonlinear effects in the dynamics of clouds of bubbles. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2):707–714, 1991.
- [134] R.F. KUNZ, D.A. BOGER, D.R. STINEBRING, T.S. CHYCZEWSKI, J.W. LINDAU, H.J. GIBELING, S. VENKATESWARAN et T.R. GOVINDAN : A preconditioned navier-stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction. *Computers and Fluids*, 29(8):849–875, 2000.
- [135] B. LAFAURIE, C. NARDONNE, R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI et G. ZANETTI : Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics*, 113:645–653, 1994.
- [136] \* M. LANCE et J. BATAILLE : Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air water flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 222:95–118, 1991.
- [137] \* B.E. LAUNDER : Second-moment closure : present ... and future? *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 10(4):282–300, 1989.

- [138] \* W. LAUTERBORN et T. KURZ : Physics of bubble oscillations. *Reports on progress in physics*, 73, 2010.
- [139] W. LAUTERBORN et H. BOLLE : Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid surface. *Journal Fluid Mechanics*, 72:391–399, 1975.
- [140] \* S. LAVIGNE, A. RETAILLEAU et J. WOILLET : Measurement of the aggressivity of erosive cavitating flows by a technique of pits analysis. application to a method of prediction of erosion. *International Symposium on Cavitation*, 1995.
- [141] J.L. LEBOWITZ : Boltzmann’s entropy and time’s arrow. *Physics Today*, 46:32–38, 1993.
- [142] Y. LECOFFRE : *La cavitation, traqueur de bulles*. Edition Hermès, Paris, 1994.
- [143] T.G. LEIGHTON, A.J. WALTON et J.W. PICKWORTH : Primary Bjerknes forces. *European Journal of Physics*, 11:47–50, 1990.
- [144] V. LEROY : *Bulles d’air dans l’eau : couplage d’oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2004.
- [145] \* M.B. LESSER et J.E. FIELD : The impact of compressible liquids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 15:97–122, 1983.
- [146] Z.R. LI, M. POURQUIE et T.J.C. Van TERWISGA : Assessment of cavitation erosion with a urans method. *Journal of Fluids Engineering*, 136(4), 2014.
- [147] \* O. LINDAU : *Untersuchungen zur laserzeugten Kavitation*. Thèse de doctorat, 2001.
- [148] H. LOHRBERG, B. STOFFEL, R. FORTES-PATELLA, O. COUTIER-DELGOSHA et J.L. REBOUD : Numerical and experimental investigations on the cavitating flow in a cascade of hydrofoils. *Experiments in Fluids*, 33:578–586, 2002.
- [149] S. Van LOO, H.W.M. HOEIJMAKERS, T.J.C. Van TERWISGA et M. HOEKSTRA : Numerical study on collapse of a cavitating cloud of bubbles. *In 8th International symposium on cavitation*, Singapore, 2012.

## RÉFÉRENCES

---

- [150] J. LOWENGRUB et L. TRUSKINOVSKY : Quasi-incompressible cahn-hilliard fluids and topological transitions. *Proceedings of the Royal Society A*, 454:2617–2654, 1998.
- [151] \* P.A. LUSH et P.I. PETERS : Visualisation of the cavitating flow in a venturi type duct using high speed cine photography. *In IAHR Conference on Operating Problems of Pump Stations and Power Plants*, Amsterdam, 1982.
- [152] \* S. LUTHER, T.H. Der BERG, J. RENSEN et D. LOHSE : The effect of bubbles on developed turbulence. *In XXI ICTAM*, Warsaw, 2004.
- [153] R. MAREK et J. STRAUB : Analysis of the evaporation coefficient and the condensation coefficient of water. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(1):39–53, 2001.
- [154] \* I. MAREUGE et M. LANCE : Bubble-induced dispersion of a passive scalar in bubbly flows. *In 2nd International Conference on Multiphase flow*, Kyoto, 1995.
- [155] \* B. MATHIEU : *Etude physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2003.
- [156] \* M.R. MAXEY et J.J. RILEY : Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- [157] \* T. MENARD, S. TANGUY et A. BERLEMONT : Coupling level set /vof/ghost fluid methods : validation and application to 3d simulation of a the primary break-up of a liquid jet. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(5):510–524, 2007.
- [158] \* C.L. MERKLE, J. FENG et P.E. BUELOW : Computation modeling of the dynamics of sheet cavitation. *In 3rd International Symposium on cavitation*, Grenoble, 1998.
- [159] \* O. Le METAYER, J. MASSONI et R. SAUREL : Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*, 205(2):567–610, 2005.
- [160] S. MIMOUNI, J. LAVIÉVILLE et A. ARCHER : Modelling and computation of cavitation with a two-phase flow approach downstream an orifice. *In The 13<sup>th</sup> International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics*, Kanazawa, 2009.



- [161] \* J.P. MINIER et E. PEIRANO : The pdf approach to turbulent dispersed two-phase flows. *Physics Reports*, 352(1-3):1–214, 2001.
- [162] M.H. MOUSA : *Calcul efficace et direct des représentations de maillages 3D en utilisant les harmoniques sphériques*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1, 2007.
- [163] \* E.S. NASIBULLAEVA et I.S. AKHATOV : Dynamics of a bubble cluster in an acoustic field. *Acoustical Physics*, 51(6):705–712, 2005.
- [164] \* C. NAUDE et A. ELLIS : On the mechanism of cavitation damage by nonhemispherical cavities collapsing in contact with a solid boundary. *Journal of Fluids Engineering*, 83(4), 1961.
- [165] N. OCHIAI, Y. IGA, M. NOHMI et T. IKOHAGI : Numerical prediction of cavitation erosion intensity in cavitating flows around a clark Y 11.7 *Journal of Fluid Science and Technology*, 5(3):416–431, 2010.
- [166] \* T.J. O’HERN, J. KATZ et A.J. ACOSTA : Holographic measurements of cavitation nuclei in the sea. *In Cavitation and Multiphase Flow Forum*, Albuquerque, 1985.
- [167] \* C.D. OHL, A. PHILIPP et W. LAUTERBORN : Cavitation bubble collapse studied at 20-million frames-per-second. *Annalen der Physik*, 4(1):26–34, 1995.
- [168] \* C.W. OSEEN : *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesell, 1927.
- [169] P.A.LUSH : Impact of a liquid mass on a perfectly plastic solid. *Journal of Fluid Mechanics*, 135:373–387, 1983.
- [170] \* C.A. PARSONS : *The steam turbine on land and at sea*. Lecture to the Royal Institution, London, 1906.
- [171] F. PEREIRA : *Prédiction de l’érosion de cavitation : Approche énergétique*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [172] \* F.B. PETERSON, F. DANIEL, A.P. KELLER et Y. LECOFFRE : Comparative measurements of bubble and particulate spectra by three optical methods. *In 14th International Towing Tank Conference*, Tokyo, 1975.

## RÉFÉRENCES

---

- [173] \* A. PHILIPP, C.D. OHL et W. LAUTERBORN : Single bubble erosion on a solid surface. *In International symposium on cavitation*, Deauville, 1995.
- [174] M.S. PLESSET et R.B. CHAPMAN : Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 47:283–290, 1971.
- [175] S.B. POPE : The calculation of turbulent recirculating flow in general coordinates. *Journal of Computational Physics*, 26:197–217, 1988.
- [176] H. PORITSKY : The collapse or the growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluid. *In 1st US National Congress Applied Mechanics*, Chicago, 1952.
- [177] B. POUFFARY : *Modélisation numérique des écoulements dans une roue centrifuge : Analyse des mécanismes associés à la chute des performances en cavitation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [178] C. POULARD : *Dynamiques de gouttelettes mouillantes*. Thèse de doctorat, Université PARIS VI, 2005.
- [179] A. PROSPERETTI : *Bubble Dynamics : Some things we did not know 10 years ago*. Springer Netherlands, 1994.
- [180] A. PROSPERETTI et A. LEZZI : Bubble dynamics in a compressible liquid. part I : First order theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 168:457–478, 1986.
- [181] P. RAHIMI et C.A. WARD : Kinetics of evaporation : Statistical rate theory approach. *International Journal of Thermodynamics*, 8(1):1–14, 2005.
- [182] \* W.E. RANZ et W.R. MARSHALL : Evaporation from drops : Part ii. *Chemical Engineering Progress*, 48(4):173–180, 1952.
- [183] \* E. RAPPOSELLI et L. D’AGOSTINO : A barotropic cavitation model with thermodynamic effects. *In 5th International Symposium on Cavitation*, Osaka, 2003.
- [184] \* Lord RAYLEIGH : On pressure developed in the fluid during the collapse of a spherical cavity. *Philosophical Magazine*, 34(200), 1917.

- [185] J.L. REBOUD : *Réponse impulsionnelle d'un milieu élastoplastique : application à l'étude de l'érosion de cavitation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1987.
- [186] J.L. REBOUD : Prévion de l'érosion de cavitation : couplage écoulement et matériau. partie I : aspect matériau. Rapport technique N P41/C03332, EDF R&D, 2001.
- [187] J.L. REBOUD, R. FORTES-PATELLA et A. ARCHER : Analysis of damaged surface. part I : Cavitation mark measurements by 3d laser profilometry. *In 3rd Fluids Engineering Conference*, San Francisco, 1999.
- [188] J.L. REBOUD, R. FORTES-PATELLA, M. HOFMANN, H. LOHRBERG, G. LUDWIG et B. STOFFEL : Numerical and experimental investigations on the self-oscillating behaviour of cloud cavitation : Part II : Dynamic pressures. 1999.
- [189] J.L. REBOUD, B. STUTZ et O. COUTIER-DELGOSHA : Two-phase flow structure of cavitation : experiment and modelling of unsteady effects. *In 3rd International Symposium on Cavitation*, Grenoble, 1998.
- [190] \* M.W. REEKS : On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows. *Physics of Fluids*, 4(6):1290–1302, 1992.
- [191] G.E. REISMAN et C.E. BRENNEN : Pressure pulses generated by cloud cavitation. *In Fluids Engineering Division Conference, Fluids Engineering Division.*, New-York, 1996.
- [192] E. RIBER : Modélisation et calculs de jets diphasiques. Mémoire de D.E.A., Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- [193] \* W.J. RIDER et D.B. KOTHE : Stretching and tearing interface tracking methods. *In 12<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, numéro 95-1717, 1995.
- [194] \* J. ROLLAND : *Modélisation et résolution de la propagation de fronts perméables. Application aux fronts d'évaporation et de détonation*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2003.

## RÉFÉRENCES

---

- [195] D. ROSSINELLI, B. HEJAZIALHOSSEINI, P. HADJIDOUKAS, C. BEKAS, A. CURIONI, A. BERTSCH, S. FUTRAL, S.J. SCHMIDT, N.A. ADAMS et P. KOUMOUTSAKOS : 11 pflop/s simulations of cloud cavitation collapse. *In International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, New York, 2013.
- [196] \* J.C. ROTTA : Über eine Methode zur Berechnung turbulenter Scherströmungen. *aerodynamische Versuchsanstalt Gottingen*, Rep. 69(A14), 1968.
- [197] M. ROUDET : *Hydrodynamique et transfert de masse autour d'une bulle confinée entre deux plaques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2008.
- [198] \* E. RÜCKENSTEIN : On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated. *Chemical Engineering Science*, 10:22–30, 1959.
- [199] G. RYSKIN et L.G. LEAL : Orthogonal mapping. *Journal of Computational Physics*, 50:71–100, 1983.
- [200] \* Y. SAITO, I. NAKAMORI et G. IKOHA : Numerical analysis of unsteady vaporous cavitating flow around a hydrofoil. *In 5<sup>th</sup> International Symposium on Cavitation*, Osaka, 2003.
- [201] R. SANDER : Compilation of Henry's law constants for inorganic and organic species of potential importance in environmental chemistry. Rapport technique, Max-Planck Institute of Chemistry, Air Chemistry Department, 1999.
- [202] K. SATO, Z. LIU et C.E. BRENNEN : The micro-bubble distribution in the wake of a cavitating circular cylinder. *In Cavitation and Multiphase Flow*, Washington, 1993.
- [203] \* J. SAUER et G.H. SCHNERR : Unsteady cavitating flow - a new cavitation model based on modified front capturing method and bubble dynamics. *In Fluids Engineering Division Summer Meeting*, Boston, 2000.
- [204] \* R. SAUREL, J.P. COCCHI et P.B. BUTLER : Numerical study of cavitation in the wake of a hypervelocity underwater projectile. *Journal of propulsion and power*, 15(3):513–522, 1999.

- [205] R. SAUREL et O. Le METAYER : A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 431:239–271, 2001.
- [206] R. SAUREL, F. PETITPAS et R. ABGRALL : Modelling phase transition in metastable liquids : application to cavitating and flashing flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 607:313–350, 2008.
- [207] \* L. SCHILLER et A. NAUMANN : A drag coefficient correlation. *Zeitschrift des vereines deutscher ingenieure*, 77:318–320, 1935.
- [208] \* D.P. SCHMIDT : *Cavitation in diesel fuel injector nozzles*. Thèse de doctorat, University of Winsconsin-Madison, 1997.
- [209] \* S.J. SCHMIDT, M. MIHATSCH, M. THALAMER, C. EGERER, S. HICKEL et N.A. ADAMS : Assesment of erosion sensitive areas via compressible simulation of unsteady cavitating flows. *In Internation Workshop on advanced experimental and numerical techniques for cavitation erosion prediction*, Grenoble, 2011.
- [210] \* S.J. SCHMIDT, I.H. SEZAL, G.H. SCHNERR et M. THALHAMER : Numerical analysis of shock dynamics for detection of erosion sensitive areas in complex 3-d flows. *In WIMRC Cavitation Forum*, Warwick, 2008.
- [211] S.J. SCHMIDT, M. MIHATSCH, M. THALHAMER et N.A. ADAMS : Assessment of the prediction capability of a thermodynamic cavitation model for the collapse characteristics of a vapor-bubble cloud. *In 3<sup>rd</sup> International Cavitation Forum*, Warwick, 2011.
- [212] S.J. SCHMIDT, I.H. SEZAL et G.H. SCHNERR : Compressible simulation of high-speed hydrodynamics with phase change. *In European Conference on Computational Fluid Dynamics*, Egmond aan Zee, 2006.
- [213] \* I. SENOCAK et W. SHYY : A pressure-based method for turbulent cavitating flow computations. *Journal of Computational Physics*, 176(2):363–383, 2002.
- [214] \* A. SERIZAWA et I. KATAOKA : Turbulence suppression in bubbly two-phase flow. *Nuclear Engineering and Design*, 122:1–16, 1990.

## RÉFÉRENCES

---

- [215] \* S. SHIN et D. JURIC : Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front-tracking without connectivity. *Journal of Computational Physics*, 180(2):427–470, 2002.
- [216] \* R. SIMONEAU et A. ARCHER : Transposition of cavitation marks on different hardness metals. *In ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, Vancouver, 1997.
- [217] \* A.K. SINGHAL, H. LI, M.M. ATHAVALE et Y. JIANG : Mathematical basis and validation of the full cavitation model. *Journal of Fluids Engineering*, 124(3):617–624, 2002.
- [218] \* B.R. SMITH : A near wall model for the  $k - l$  two equation turbulence model. *In 25<sup>th</sup> Fluid Dynamics Conference*, Colorado Springs, 1994.
- [219] L. SOMAGLINO : *Délivrance par ultrasons de chimiothérapie encapsulée dans des liposomes sono-sensibles : Contrôle et dosage de la cavitation inertielle ultrasonore*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard I, 2011.
- [220] \* H. SOYAMA, H. KATO et R. OBA : Cavitation observations of severely erosive vortex cavitation arising in a centrifugal pump. *In 3rd International Conference on Cavitation*, Cambridge, 1992.
- [221] \* H. SOYAMA et H. KUMANO : The fundamental threshold level - a new parameter for predicting cavitation erosion resistance. *Journal of testing and Evaluation*, 30(5), 2002.
- [222] \* P.R. SPALART et S.R. ALLMARAS : A one-equation turbulence model for aerodynamics flows. *In 30<sup>th</sup> Aerospace Sciences meeting*, Reno, 1992.
- [223] \* C.G. SPEZIALE : Discussion of turbulence modelling : past and future. Rapport technique 89-58, NASA, NASA Langley Research Center, 1989.
- [224] \* D.R. STINEBRING, J. W. HOLL et R.E.A. ARNDT : Two aspects of cavitation damage in the incubation zone : Scaling by energy considerations and leading edge damage. *Journal of Fluid Engineering*, 102:481–485, 1980.

- [225] M. SUSSMAN, P. SMEREKA et S. OSHER : A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114: 146–159, 1994.
- [226] \* C.M. TCHEN : *Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid*. Thèse de doctorat, University of Delft, 1947.
- [227] M. THALHAMER, S.J.SCHMIDT, M. MIHATSCH et N.A. ADAMS : Numerical simulation of sheet and cloud cavitation and detection of cavitation erosion. *In 14th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, 2012.
- [228] \* T.L. THOMPSON et N.N CLARK : A holistic approach to particle drag prediction. *Powder Technology*, 67:57–66, 1991.
- [229] \* Y. TOMITA et A. SHIMA : High-speed photographic observations of laser-induced cavitation bubbles in water. *Acustica*, 71:161–171, 1990.
- [230] Y. TOMITA et A. SHIMA : Mechanisms of impulsive pressure generation and damage pit formation by bubble collapse. *Journal of Fluid Mechanics*, 206:535–564, 1986.
- [231] Y. TOMITA, A. SHIMA et H. TAKAHASHI : The behavior of a laser-produced bubble near a rigid wall with various configurations. *In Cavitation 91 Symposium*, Portland, 1991.
- [232] R.P. TONG, W.P. SCHIFFERS, S.J. SHAW, J.R. BLAKE et D.C. EMMONY : The role of ‘splashing’ in the collapse of a laser-generated cavity near a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 380:339–361, 1999.
- [233] \* L.B. TOROBIN et W.H. GAUVIN : The drag coefficient of single spheres moving in steady and accelerated motion in a turbulent fluid. *AIChE*, 7:615–619, 1961.
- [234] A. TOUTANT : *Modélisation physique des interactions entre interfaces et turbulence*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [235] \* S.O. UNVERDI et G. TRYGGVASON : A front-tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100:25–37, 1992.

## RÉFÉRENCES

---

- [236] \* R.J. URICK : *Principles of underwater sound for engineers*. McGraw-Hill, 1967.
- [237] \* Y. UTTURKAR, J. WU, G. WANG et W. SHYY : Recent progress in modelling cryogenic cavitation for liquid rocket propulsion. *Progress in aerospace Sciences*, 41:558–608, 2005.
- [238] \* J.H.J. van der MEULEN et R.L. van der RENESSE : The collapse of laser-induced bubbles near a solid boundary and the generation of pressure pulses. *In Cavitation and multiphase flow forum*, Washington, 1993.
- [239] A. VOGEL, W. LAUTERBORN et R. TIMM : Optical and acoustic investigations of the dynamics of laser produced cavitations bubbles near a solid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 206:299–306, 1989.
- [240] \* C. VORTMANN, G.H. SCHNERR et S. SEELECKE : Thermodynamic modeling and simulation of cavitating nozzle flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24:774–783, 2003.
- [241] \* G.B. WALLIS : *One-dimensional two-phase flow*. McGraw-Hill, 1969.
- [242] \* D.M. WANG et D. GREIF : Progress in modeling injector cavitating flows with a multi-fluid method. *In Forum on Cavitation and Multiphase Flow*, Miami, 2006.
- [243] Y.C. WANG : Effects of nuclei size distribution on the dynamics of a spherical cloud of cavitation bubbles. *Journal of Fluids Engineering*, 121:881–886, 1990.
- [244] Y.C. WANG et C.E. BRENNEN : Shock wave development in the collapse of a cloud of bubbles. *In Cavitation and Multiphase Flow Forum*, Lake Tahoe, 1994.
- [245] Y.C. WANG et C.E. BRENNEN : Shock wave developpement in the collapse of a cloud of bubbles. *Cavitation and Multiphase flow*, 194, 1994.
- [246] B. WARD et D.C. EMMONY : Numerical computation of shock waves in a spherical cloud of cavitation bubbles. *Journal of Modern Optics*, 37(4):803–811, 1990.
- [247] \*C.A. WARD et G. FANG : Expression for predicting liquid evaporation flux : Statistical rate theory approach. *Physical Review*, 59(429), 1999.



- [248] \* W.G. WHITMAN : Preliminary experimental confirmation of the two-film theory of gas absorption. *Chemical and Metallurgical Engineering*, 29:146–148, 1923.
- [249] \* D. WILCOX : Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [250] S.W. YOON, L.A. CRUM, A. PROSPERETTI et N.Q. LU : An investigation of the collective oscillations of a bubble cloud. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2):700–770, 1991.
- [251] \* J.B. YOUNG : The condensation and evaporation of liquid droplets in pure vapor at arbitrary knudsen number. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34:1649, 1991.
- [252] D. ZAEPFFEL : *Modélisation des écoulements bouillants à bulles polydispersées*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2006.
- [253] \* L.I. ZAICHIK : An equation for the particle velocity probability density function in inhomogeneous turbulent flow. *Fluid Dynamics*, 31(2):261–267, 1996.
- [254] Z. ZERAVCIC, D. LOHSE et W. Van SAARLOS : Collective oscillations in bubble clouds. *Journal of Fluid Mechanics*, 680:114–149, 2011.
- [255] K. ZHOU, H. BAO et J. SHI : 3d surface filtering using spherical harmonics. *Computer aided-Design*, 36(4):363–375, 2004.
- [256] \* J. ZHU : Low-diffusive and oscillation-free convective scheme. *Communications in Applied Numerical Methods*, 7:225–232, 1991.

---

# Annexes



# Détails sur la modélisation des écoulements diphasiques

Compléments d'informations sur les chapitres 2. et 3.

## Sommaire

---

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| A.1   | Présence de gaz dans l'écoulement . . . . .  | <b>340</b> |
| A.1.1 | Air dissous et occlus . . . . .  | 340        |
| A.1.2 | Loi de Henry . . . . .   | 340        |
| A.1.3 | Quantité d'air dissous dans le milieu et fraction massique d'air totale . . . . .            | 342        |
| A.2   | Transport de particules sphériques dans un écoulement . . . . .                              | <b>343</b> |
| A.2.1 | Equation de Basset-Boussinesq-Oseen . . . . .  | 343        |
| A.2.2 | Régime de Stokes . . . . .   | 345        |
| A.2.3 | Hypothèse de non glissement dans les écoulements cavitants . . . . .                         | 346        |
| A.3   | Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie . . . . . | <b>346</b> |
| A.3.1 | Equation de conservation de l'énergie . . . . .  | 346        |
| A.3.2 | Equation d'entropie dans les phases . . . . .  | 348        |
| A.3.3 | Suivi de l'entropie à l'interface . . . . .  | 350        |
| A.3.4 | Isentropie à l'interface . . . . .   | 354        |

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| A.4   | Etude paramétrique de la loi <b>B-STMA</b> . . . . . | <b>357</b> |
| A.4.1 | Méthode . . . . .                                    | 357        |
| A.4.2 | Résultats de l'étude de sensibilité . . . . .        | 358        |

---

## A.1 Présence de gaz dans l'écoulement

Au cours de cette annexe, nous proposons de préciser certaines notions relatives à la présence des gaz incondensables au sein de l'écoulement.

### A.1.1 Air dissous et occlus

L'air ambiant est un mélange de gaz. Afin de simplifier le système, ce mélange sera considéré dans notre étude comme une unique espèce dont les propriétés sont établis à partir de ces constituants. Dans des conditions de pression et de température standard ( $T = 293K$  et  $p = 101325Pa$ ), il est composé à plus de 75 % de diazote ( $N_2$ ), de 20 % de dioxygène ( $O_2$ ). Sa masse molaire est donc généralement approximé à l'aide de ces deux espèces.

$$M_m^{N_2} = 28g.mol^{-1} \quad M_m^{O_2} = 32g.mol^{-1} \quad \text{soit} \quad M_m^a \approx 29g.mol^{-1} \quad (A.1)$$

L'air peut-être présent au sein des deux phases de l'écoulement. Il peut en effet côtoyer la vapeur d'eau au sein des phases gazeuses mais également être contenue dans la phase liquide. Dans cette deuxième configuration, des molécules de gaz sont disséminées au milieu des molécules d'eau de façon dispersée et donc sans former de bulles.

La présence de ces deux formes de gaz dans l'eau dépend des conditions thermodynamiques (pression et température de l'eau) et du type d'écoulement rencontré.

### A.1.2 Loi de Henry

Ces deux formes de gaz sont liées l'une à l'autre. En effet, des échanges sont possibles entre les deux formes : les molécules de gaz peuvent passer de la forme dissoute à la forme occluse et inversement. Si l'on expose une quantité d'eau liquide à un 'ciel de gaz' (réservoir infini en molécules de ce gaz) pendant un temps infini, on obtient une eau

## A.1 Présence de gaz dans l'écoulement

---

saturée en cette espèce sous forme dissoute. La saturation correspond donc à la quantité maximale possible qui peut être dissoute dans l'eau.

La quantité de gaz dissous dans l'eau est régie par la loi de Henry qui stipule que celle-ci est directement proportionnelle à la pression partielle de l'espèce dans le ciel. La constante de proportionnalité,  $H_e$ , dépend de la température et de la pression du liquide. Cette constante peut dépendre d'autres paramètres telle que la salinité qui ne seront pas prises en compte ici.

La quantité de gaz dissous dans l'eau peut être exprimée soit sous forme de fraction molaire (nombre de mole de gaz dissous sur le nombre total de mole du liquide), soit sous forme de concentration (masse des molécules de gaz dissous par volume total du liquide), notée dans ce manuscrit  $\rho_a^l$ .

$$\rho_{a\text{sat}}^l = H_e p_a^g \quad (\text{A.2})$$

Pour des conditions atmosphériques, l'air a une concentration à saturation dans l'eau de  $24\text{ppm}$  [76]. Cette valeur représentera notre valeur maximale d'étude en ce qui concerne la quantité d'air dissous dans le fluide. La constante de Henry correspondante est de :

$$H_e = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

Pour l'ensemble de ce manuscrit, les effets de la température et de la pression sur cette constante de proportionnalité seront négligées.

Selon Amblard et Lecoffre [5], les écoulements industriels présentent généralement une concentration en air correspondant à  $11\text{ppm}$ . Cette donnée sera notre valeur de référence pour le dimensionnement des populations de bulles. Elle ne représente pas pour autant une donnée universelle des écoulements et peuvent fluctuer en fonction des conditions hydrodynamiques du circuit.

### A.1.3 Quantité d'air dissous dans le milieu et fraction massique d'air totale

Afin de caractériser la composition en espèce du mélange, des fractions massiques des phases ( $Y_i^k$ ) et des espèces ( $X_i$ ) ont été définies. Nous proposons ici de justifier les relations obtenues en 3.4.2.1., quantifiant la présence de l'air dans le fluide au niveau de la cuve. En effet, expérimentalement, nous considérerons que le temps entre deux essais est suffisamment long pour considérer l'équilibre selon la loi de Henry dans le réservoir. Le fluide y étant majoritairement liquide, la présence de gaz est supposée minimale.

$$\alpha_g = \alpha_{min} \quad \rho_a^l = H_e^* \rho_a^g \quad (\text{A.3})$$

D'après l'équation (3.77) et la définition du rapport massique des phases pour l'air,  $X_a^g$  (cf (2.18)), celui-ci peut-être relié dans la cuve à la connaissance du taux de vide minimale  $\alpha_{min}$  :

$$(X_a^g)_{cuve} = \frac{\alpha_{min} \rho_a^g}{\rho_a} = \frac{\alpha_{min}}{\alpha_{min} + \alpha_{max} H_e^*}$$

La fraction massique phasiques d'air dans le liquide,  $Y_a^l$ , correspond à la mesure en ppm de la qualité de l'eau (La mesure en ppm est équivalente à  $10^6 Y_a^l$ ).

$$Y_a^l = \frac{\rho_a^l}{\rho_M^l} = \frac{\rho_a^l}{\rho_a^l + \rho_e^l} \quad (\text{A.4})$$

On peut à partir de certaines dernières relations obtenir la concentration (en  $kg.m^{-3}$ ) de l'air dans la phase liquide à partir de la mesure en ppm de l'air dissous,  $Y_a^l$  et de la masse volumique de l'eau liquide pure  $\rho_e^l$ .

$$\rho_a^l = \left[ \frac{1}{1 - Y_a^l} - 1 \right] \rho_e^l \quad (\text{A.5})$$

La fraction d'air totale dans le milieu homogène correspond au rapport entre la masse volumique de l'air dans les deux phases et la masse volumique totale du milieu

$$Y_a = \frac{\rho_a}{\rho_M} = \frac{\alpha_g \rho_a^g + \alpha_l \rho_a^l}{\rho_M} \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Transport de particules sphériques dans un écoulement

---

Dans la cuve avec les relations précisées précédemment (Eq. (A.3)), on obtient :

$$Y_a = (1 - Y_a) \rho_a^l \frac{\frac{\alpha_{min}}{H_e^*} + \alpha_{max} \rho_a^l}{\alpha_{min} \rho_{sat} + \alpha_{max} \rho_e^l} \quad (\text{A.7})$$

Ce qui en utilisant la formule obtenue en (A.5) et le fait que  $Y_e + Y_a = 1$  permet de retrouver la relation précisée dans le corps du manuscrit en (3.88).

$$Y_a = 1 - \left[ 1 + \frac{\rho_e^l \left( \alpha_{max} + \frac{\alpha_{min}}{H_e^*} \right) \left( \frac{1}{1 - Y_a^l} - 1 \right)}{\alpha_{min} \rho_{sat} + \alpha_{max} \rho_e^l} \right]^{-1} \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Transport de particules sphériques dans un écoulement

Le suivi d'une particule compressible dans un écoulement turbulent étant complexe, nous proposons dans cette annexe d'étudier la trajectoire d'une particule sphérique solide afin de mettre en exergue les difficultés liées à cette modélisation.

### A.2.1 Equation de Basset-Boussinesq-Oseen

Le mouvement d'une particule sphérique rigide dans un écoulement en mouvement est complexe et a fait l'objet de nombreuses études depuis le début du XIX<sup>ème</sup> siècle avec les travaux successifs de Basset [12], Boussinesq [24] et Oseen [168]. L'extension de leurs travaux aux écoulements turbulents [85, 156, 226] ont permis de déterminer l'équation de Basset–Boussinesq–Oseen définie à partir du rayon des inclusions, de la viscosité dynamique et de la différence de vitesse entre les particules et le liquide.

$$\rho_M^g V_B \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{u}_M^g] = \sum \mathbf{F} \quad (\text{A.9})$$

avec  $V_B$  le volume de la sphère considérée.

Les forces,  $\mathbf{F}$  agissant sur la particule peuvent se découper en deux catégories :



**Les forces subies par le fluide non perturbé :**

Ces forces regroupent la force de flottabilité ou de pesanteur provoquée par la poussée d'Archimède et la force de Tchen correspondant à l'accélération qui serait donnée au liquide en l'absence de bulle.

$$\mathbf{F}_S = (\rho_M^g - \rho_M^l) V_B \mathbf{g} + \rho_M^l V_B \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_M^l] \quad (\text{A.10})$$

**Les forces de perturbations :**

La présence de la bulle génère de nombreuses perturbations sur le fluide. Les expressions de ces forces ont été obtenues par Ishii et Hibiki [109].

- La force de portance est liée à la présence d'un gradient dans le champ des vitesses du liquide, celui-ci résultant en un gradient de pression (et donc d'une force) sur la surface de la bulle.

$$\mathbf{F}_L = C_L \rho_M^l V_B (\mathbf{u}_M^l - \mathbf{u}_M^g) \wedge [\nabla \wedge [\mathbf{u}_M^l]] \quad (\text{A.11})$$

- La force de traînée, d'origine visqueuse, s'oppose à la fois au mouvement relatif de la bulle et à celui du liquide. Elle correspond à la composante des forces hydrodynamiques agissant sur la surface de la bulle dans la direction de l'écoulement du liquide.

$$\mathbf{F}_D = \frac{\pi R_m^2}{2} \rho_M^l C_D \|\mathbf{u}_M^l - \mathbf{u}_M^g\| (\mathbf{u}_M^l - \mathbf{u}_M^g) \quad (\text{A.12})$$

- La force de masse ajoutée est due à une petite quantité de liquide entraînée par la bulle dans son mouvement. Ce liquide augmentant virtuellement la masse de la bulle, il en résulte une opposition à l'accélération de la bulle.

$$\mathbf{F}_M = C_M \rho_M^l V_B \left( \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_M^l] - \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_M^g] \right) \quad (\text{A.13})$$

$C_L$ ,  $C_D$  et  $C_M$  désignent respectivement les coefficients de portance, de traînée et de masse ajoutée et dépendent de la forme des particules et des conditions de l'écoulement.

Deux autres forces peuvent intervenir dans l'équation de Basset-Boussinesq-Oseen :

- La force de Basset correspondant aux effets instationnaires et générant un retard entre la traînée instantanée et celle exercée en régime établie exprimée par Jakobsen [114].
- Les forces de paroi existant dans le cas où la particule se déplace à proximité d'un mur [6].

### A.2.2 Régime de Stokes

Le nombre de Reynolds particulaire caractérise le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il est basé sur la différence de vitesse entre les phases et sur la viscosité du liquide.

$$R_e^p = \frac{\|\mathbf{u}_M^l - \mathbf{u}_M^g\| L_c}{\nu_M^l} \quad (\text{A.14})$$

Dans le cadre d'un Reynolds particulaire très faible, la loi de Stokes permet de définir le coefficient de traînée comme étant proportionnel à l'inverse du nombre de Reynolds particulaire.

$$C_D = \frac{24}{R_e^p} \quad (\text{A.15})$$

Schiller et Nauman [207] ont par la suite proposé des corrections à des Reynolds particulaire plus important :

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{R_e^p} (1 + 0.15 R_e^{p0} .687) \\ 0.44 \end{cases} \quad \text{si } R_e^p > 1000 \quad (\text{A.16})$$

A de plus grand Reynolds particulaire ( $\geq 2,5 \cdot 10^5$ ), l'écoulement autour de la bulle devient turbulent et le coefficient de traînée diminue brusquement [233]. Ces coefficients de traînée établis pour des particules sphériques peuvent être altérés par plusieurs effets tels que la forme de la particule [96, 228], la compressibilité du fluide [32], ou bien encore les effets de paroi [87].

### A.2.3 Hypothèse de non glissement dans les écoulements cavitants

L'hypothèse de non glissement dans les écoulements cavitants suppose un nombre de Reynolds particulaire faible. Le régime de Stokes peut théoriquement s'appliquer, les particules sont alors fortement soumises aux forces de viscosités, ce qui est cohérent avec la première hypothèse.

Néanmoins, les analyses précédemment présentées dans cette partie ont été bâties sur la considération de particules rigides sphériques. Dans le cas de la cavitation, la déformation des bulles, les transferts de masse sont autant de phénomènes complexifiant le suivi de particules dans l'écoulement. Les coefficients de traînée employés pour le suivi de bulles dans les modèles de Ochiai ou de Chahine (cf 1.3.2.) reposent donc sur une approximation.

## A.3 Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie

### A.3.1 Equation de conservation de l'énergie

Dans cette section, nous allons décrire les différentes étapes permettant la mise en place de l'équation d'évolution de la température dans chacune des phases. L'ensemble des grandeurs associées à cette démarche ont été présentées dans le corps du manuscrit (cf 2.4.) et ne seront pas rappelées ici.

Le bilan des énergies agissant sur chaque phase nous permet d'établir la relation d'évolution de l'énergie totale.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k E_M^k] + \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k H_M^k \mathbf{u}_M^k] = \nabla \cdot [\chi_k \boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{u}_M^k] - \nabla \cdot [\chi_k \mathbf{q}^k] + \rho_M^k \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_M^k + Q_k \quad (\text{A.17})$$

avec  $E_M^k$  et  $H_M^k$ , les énergies totales associées à la phase k (  $E_M^k = e_M^k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k$  et

### A.3 Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie

$H_M^k = h_M^k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k$ ) et  $Q_k$  le terme d'échange d'énergie à l'interface.

$$Q_k = \left[ \dot{m}_M^k \left( e_M^k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k + (-p_M^k \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^k) \cdot \mathbf{u}_M^k \right] \delta_I \quad (\text{A.18})$$

La variation temporelle de l'énergie stockée à l'interface est liée à la variation surfacique du produit de l'énergie surfacique et de la vitesse tangentielle de l'interface [51].

$$\sum_k Q^k = \nabla_{s \cdot} [\sigma \mathbf{u}_I^t] \delta_I \quad (\text{A.19})$$

avec  $\mathbf{u}_I^t = \mathbf{u}_I - (\mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n}_I^g) \mathbf{n}_I^g$ , la composante tangentielle de la vitesse de l'interface.

L'évolution de l'énergie interne du fluide s'obtient en soustrayant l'équation de conservation de quantité de mouvement phasique (2.36) multipliée scalairement par le vecteur vitesse  $\mathbf{u}_M^k$  à l'équation de conservation de l'énergie totale phasique (A.17). Elle peut ensuite être exprimée à l'aide de l'enthalpie massique grâce à la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k h_M^k] + \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k h_M^k] &= \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k p_M^k] + \mathbf{u}_M^k \cdot \nabla [\chi_k p_M^k] \\ &\quad - \nabla \cdot [\chi_k \mathbf{q}^k] + (\chi_k \boldsymbol{\tau}^k) : \nabla \mathbf{u}_M^k \\ &\quad + \left[ \dot{m}_M^k \left( h_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

L'évolution de l'enthalpie massique dans les phases ne dépend donc plus que de la conductivité de la chaleur, de l'évolution de la pression dans le milieu, des forces de viscosités et des échanges aux interfaces. L'utilisation de la relation entre la température et l'enthalpie (Eq. (2.54)) permet par la suite d'obtenir l'équation d'évolution de la température (Eq. (2.55)).

La relation de saut d'enthalpie à l'interface s'obtient, quant à elle, en soustrayant l'équation de saut d'énergie totale (A.19) à la relation de saut de quantité de mouvement (2.38) multipliée scalairement par la vitesse de l'interface  $\mathbf{u}_I$  :

$$\sum_k \dot{m}_M^k \left( h_M^k + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_M^k)^2 \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k + (\boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k) \cdot (\mathbf{u}_M^k - \mathbf{u}_I) = 0 \quad (\text{A.21})$$

### A.3.2 Equation d'entropie dans les phases

Afin de modéliser le terme d'échanges d'énergie à l'interface, nous avons fait l'hypothèse que ceux-ci s'opèrent de façon isentropique. Nous allons désormais présenter comment cette considération nous a permis d'obtenir une expression pour ce terme d'échange.

Pour cela, les équations de création d'entropie seront dans un premier temps présentées. Cette étude permettra également de vérifier que les modèles de fermetures (loi de Fourier, fluide newtonien et hypothèse de Stokes) sont en adéquation avec le second principe de la thermodynamique.

Un système thermodynamique est, à l'échelle macroscopique, décrit par un état déterminé (en termes de pression, masse volumique, température,...). Néanmoins, il existe, au niveau microscopique, un très grand nombre de configurations susceptibles de réaliser ce même état macroscopique. La formulation de Boltzmann permet de relier ce nombre de configurations  $W$  à l'entropie  $s$  du système [141].

$$s = k_B \ln W \tag{A.22}$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann.

L'entropie peut être dès lors être interprétée comme la mesure du degré de désordre d'un système au repos. Le second principe de la thermodynamique affirme qu'au cours d'une transformation pour un système fermé et isolé, ce désordre ne peut qu'augmenter, l'évolution de l'entropie du système totale doit donc être positive (ou nulle si le système est isentropique).

L'équation de conservation de l'entropie dans la phase  $k$  ainsi que la relation de saut à l'interface peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k s_M^k] + \nabla \cdot [\chi_k \rho_M^k \mathbf{u}_M^k s_M^k] + \nabla \cdot \frac{\chi_k \mathbf{q}^k}{T^k} = \mathbb{S}_k \tag{A.23}$$

### A.3 Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie

$$\sum_k \dot{m}_M^k s_M^k - \frac{1}{T^k} \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k = \mathbb{S}_I \quad (\text{A.24})$$

Avec  $\mathbb{S}_k$  est la source d'entropie dans la phase  $k$  et  $\mathbb{S}_I$  la création d'entropie à l'interface. Le respect de la seconde loi de la thermodynamique précise alors que  $\chi_k \mathbb{S}_k \geq 0$  et  $\mathbb{S}_I \geq 0$ . L'entropie massique du mélange est quant à elle définie à travers l'entropie massique de chaque espèce :

$$s_M^k = Y_a^k s_a^k + Y_e^k s_e^k$$

En tout point de l'espace, nous avons fait l'hypothèse qu'il existe un voisinage tel que le milieu soit localement en équilibre thermodynamique (**H. 4**). A noter que cela n'implique pas l'absence de création d'entropie au sein des phases. En associant cette hypothèse aux définitions de la pression et de la température (2.56), ainsi qu'à l'équation de conservation de la masse (2.13), les relations entre la variation de l'entropie et l'évolution de l'énergie interne dans chaque phase peuvent être établies.

$$\frac{\partial}{\partial t} [e_M^k] + \mathbf{u}_M^k \cdot \nabla e_M^k = T^k \left( \frac{\partial}{\partial t} [s_M^k] + \mathbf{u}_M^k \cdot \nabla s_M^k \right) - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} \nabla \cdot \mathbf{u}_M^k \quad (\text{A.25})$$

En conjuguant cette dernière équation avec l'équation de conservation de l'enthalpie interne (A.20), l'équation de conservation de l'entropie est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\chi_k \rho_M^k s_M^k] + \nabla \cdot \chi_k \rho_M^k s_M^k \mathbf{u}_M^k &= -\frac{1}{T^k} \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{q}^k) + \frac{1}{T^k} (\chi_k \boldsymbol{\tau}^k) : \nabla \mathbf{u}_M^k \\ &+ \frac{1}{T^k} \left[ \dot{m}_M^k \left( s_M^k - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

L'expression du terme de création d'entropie est ensuite déterminée en comparant cette dernière équation avec l'équation de conservation de l'entropie indiquée précédemment (A.23).

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_k &= \chi_k \mathbf{q}^k \cdot \nabla \frac{1}{T^k} + \frac{1}{T^k} (\chi_k \boldsymbol{\tau}^k) : \nabla \mathbf{u}_M^k \\ &+ \frac{1}{T^k} \left[ \dot{m}_M^k \left( s_M^k - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

La création d'entropie dans une phase est donc due à la diffusion de chaleur dans le fluide, aux forces de viscosité et à un terme d'échanges aux interfaces.

- L'utilisation de la formulation de Newton pour le tenseur des contraintes visqueuses

alliées à l'hypothèse de Stokes assure que la création d'entropie liée aux forces visqueuses est positive.

$$(\chi_k \boldsymbol{\tau}^k) : \nabla \mathbf{u}_M^k \geq 0$$

- La modélisation de la diffusion de la chaleur par la loi de Fourier rend la création d'entropie par diffusion de chaleur intrinsèquement positive.

$$\chi_k \mathbf{q}^k \cdot \nabla \frac{1}{T^k} \geq 0$$

Ces deux modélisations assurent le respect de la seconde loi de la thermodynamique dans chacune des phases :  $\chi_k \mathbb{S}_k \geq 0$ . Nous allons maintenant étudier la création de l'entropie à l'interface.

### A.3.3 Suivi de l'entropie à l'interface

Afin de prendre en compte l'évolution de l'entropie du milieu extérieur, l'énergie de Gibbs, ou énergie d'enthalpie libre,  $g_M^k$  est introduite.

$$g_M^k = h_M^k - T^k s_M^k \quad (\text{A.28})$$

En substituant l'enthalpie massique par cette énergie de Gibbs dans la relation de saut (A.21) et en comparant au terme de l'équation de saut de l'entropie (A.24), l'expression de la création d'entropie à l'interface est obtenue.

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_I = & - \sum_k \frac{\dot{m}_M^k}{T^I} \left( g_M^k + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_M^k - \mathbf{u}_I)^2 - \frac{1}{\rho_M^k} (\boldsymbol{\tau}_I^k \cdot \mathbf{n}_I^k) \cdot \mathbf{n}_I^k \right) \\ & + \sum_k [\mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k - \dot{m}_M^k s_M^k T^k] \left( \frac{1}{T^I} - \frac{1}{T^k} \right) - \sum_k \frac{1}{T^I} \boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \cdot (\mathbf{u}_M^k - \mathbf{u}_I) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

avec  $T^I$  est la température de l'interface.

Afin de respecter la création d'entropie pour tout type d'écoulement, trois conditions doivent être respectées, une condition mécanique, une condition thermique et une condition portant sur l'enthalpie libre.

### A.3.3.1. Condition mécanique

La première des conditions repose sur les efforts visqueux liés aux vitesses tangentielles.

$$\sum_k \boldsymbol{\tau}_I^k \cdot \mathbf{n}_I^k \cdot (\mathbf{u}_I^t - \mathbf{u}_M^k{}^t) \geq 0 \quad (\text{A.30})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses étant déjà modélisé par l'approche des fluides newtoniens, cette inégalité conditionne la vitesse tangentielle de l'interface.

### A.3.3.2. Condition thermique

La seconde condition repose sur le transfert de chaleur aux interfaces.

$$\sum_k [\mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k - \dot{m}_M^k s_M^k T^k] \left( \frac{1}{T^I} - \frac{1}{T^k} \right) \geq 0 \quad (\text{A.31})$$

A partir de la définition de l'énergie de Gibbs (A.28), la relation pour la création de l'entropie peut s'écrire :

$$\sum_k [\mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k - \dot{m}_M^k (h_M^k - g_M^k)] \left( \frac{1}{T^I} - \frac{1}{T^k} \right) \geq 0 \quad (\text{A.32})$$

Cette condition thermique exprime alors l'échange de chaleur entre les phases et l'interface. Celui-ci est généralement modélisé par l'utilisation d'un coefficient d'échange thermique  $U_T^k$  exprimant la capacité d'un fluide à transmettre la température entre la phase et l'interface.

$$[\mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k - \dot{m}_M^k (h_M^k - g_M^k)] = U_T^k (T^k - T^I) \quad (\text{A.33})$$

En considérant une résistance  $U_T^k$  positive, la condition de création d'entropie est nécessairement respectée. Les deux situations limites de cette modélisation sont :

- Le cas adiabatique où il n'y a pas d'échange de chaleur à l'interface.  $U_T^g = U_T^l = 0$
- Le cas d'équilibre thermique où les échanges de chaleurs sont suffisamment rapides pour égaler les températures des deux phases à chaque instant.  $U_T^g = U_T^l = \infty$ .

La détermination de ce coefficient d'échange fait l'objet de nombreuses études reposant



sur l'analyse de deux nombres adimensionnels, le nombre de Nusselt et le nombre de Prandtl.

$$N_u^k = \frac{U_T^k L_c}{\lambda_M^k} \quad (\text{A.34})$$

$$P_r^k = \frac{\mu_M^k c_{pM}^k}{\lambda_M^k} \quad (\text{A.35})$$

Celles-ci considèrent généralement l'échange de chaleur côté gaz comme instantané. L'interface a dès lors la même température que le milieu gazeux. Ces recherches se sont alors portées sur l'analyse du coefficient d'échange thermique côté liquide :

- Ranz et Marshall [182] ont établi une corrélation concernant l'évaporation d'une goutte d'eau au repos par convection forcée dans un écoulement d'air surchauffé.

$$N_u^l = 2 + 0.55 R_e^{p \frac{1}{2}} P_r^{k \frac{1}{3}} \quad (\text{A.36})$$

- Ruckenstein [198] s'est focalisé sur l'étude théorique de la croissance d'une bulle de vapeur dans un écoulement potentiel de liquide surchauffé.

$$N_u^l = \sqrt{\frac{4}{\pi}} R_e^{p \frac{1}{2}} P_r^{k \frac{1}{2}} \quad (\text{A.37})$$

- Les travaux d'Akiyama [4] se sont intéressés à la condensation d'une bulle de vapeur dans un liquide sous-saturé.

$$N_u^l = 0.37 R_e^{p 0.6} P_r^{k \frac{1}{3}} \quad (\text{A.38})$$

- Chen et Mayinger [38] ont quant à eux ajusté les coefficients de leur corrélation en utilisant différents fluides (eau, éthanol, propanol et fréon R113).

$$N_u^l = 0.185 R_e^{p 0.7} P_r^{k 0.5} \quad (\text{A.39})$$

Aucune de ces corrélations ne couvrent intégralement les conditions pouvant intervenir dans l'étude d'un écoulement cavitant (croissance, implosion). Néanmoins on peut remarquer qu'elles sont toutes proportionnelles à une puissance positive du Reynolds par-

### A.3 Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie

ticulaire. En considérant une vitesse de glissement faible entre les phases, hypothèse considérée dans la plupart des simulations d'écoulements cavitants, le nombre de Nusselt et le coefficient d'échange thermique tendent vers un système adiabatique.

$$N_u^l \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad U_T^l \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad R_e^p \rightarrow 0 \quad (\text{A.40})$$

#### A.3.3.3. Condition sur les enthalpies libres

La dernière condition de création d'entropie repose sur la différence d'enthalpie libre entre les phases.

$$- \sum_k \dot{m}_M^k \left( g_M^k + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_M^k - \mathbf{u}_I)^2 - \frac{1}{\rho_M^k} (\boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k) \cdot \mathbf{n}_I^k \right) \geq 0 \quad (\text{A.41})$$

D'après cette inégalité, le sens du transfert de masse à l'interface ne peut s'opérer que dans le sens de l'équilibre des énergies de Gibbs.

L'enthalpie libre d'un fluide idéal peut se calculer à l'aide des potentiels chimiques  $\varpi$  ( $J.mol^{-1}$ ) des éléments le constituant, celui-ci s'écrivant en fonction de son activité chimique  $a_i$  (grandeur sans dimension) :

$$g_M^k = \sum_i \frac{1}{M_{mi}} \varpi_i^k \quad (\text{A.42})$$

$$\varpi_i^k = \varpi_{i0}^k(T) + R_g T^k \ln(a_i^k) \quad (\text{A.43})$$

En fonction de l'état considéré la définition de l'activité diffère :

- Dans le cas d'une solution, l'activité du solvant est généralement prise à 1, tandis que l'activité du soluté dépend de sa concentration dans le liquide. Le potentiel chimique de l'eau liquide ne dépendra donc principalement que de la température de la phase tandis que celle de l'air dissous dépendra de la température et de sa concentration.

$$a_e^l \approx 1 \quad a_a^l = \frac{\rho_a^l}{\rho_{a0}^l} \quad (\text{A.44})$$

- Dans un gaz parfait les activités de chaque espèce dépendent de leur pression par-

tielle dans le mélange. Les potentiels chimiques des gaz dépendront alors de leur température et de leur pression.

$$a_i^g = \frac{p_i^g}{p_M^g} \quad (\text{A.45})$$

La constante de Henry étant en toute rigueur dépendante de la température et de la pression, la modélisation des termes de transferts de masses explicités précédemment (eq. (2.28) et eq. (2.33)) sont en accord avec cette condition.

- Le terme de condensation (passage gaz - liquide) dépend de la température et de la pression partielle de vapeur.
- Le terme de vaporisation (passage liquide - gaz ) dépend uniquement de la température et de la pression de vaporisation associée.
- Le terme de dissolution (passage gaz - liquide pour l'air) dépend de la concentration et de la température.
- Le terme de dégazage (passage liquide -gaz pour l'air) dépend de la pression partielle et de la température.

### A.3.4 Isentropie à l'interface

Afin d'évaluer le terme d'échange d'énergie à l'interface de l'équation (2.55), nous considérerons que ces échanges s'opèrent de façon isentropique (**H. 5**).

Pour vérifier la condition mécanique (cf A.3.3.1.), nous considérons dès lors l'égalité des vitesses tangentielles aux interface :

$$\mathbf{u}_M^{g\ t} = \mathbf{u}_M^{l\ t} = \mathbf{u}_I^t \quad (\text{A.46})$$

La vitesse d'interface est dans ces conditions totalement déterminée grâce aux vitesses de chacune des phases et aux transferts de masse.

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_M^g + \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^g} \mathbf{n}_I^g \quad (\text{A.47})$$

### A.3 Mise en place des équations de conservation de l'énergie et de création d'entropie

Le terme d'échange à expliciter peut être décomposé en deux : une partie correspondant à la chaleur échangée et une autre, aux forces de tension superficielle et aux sauts de vitesse à l'interface. Ces deux éléments correspondent respectivement aux conditions thermiques et chimiques de la création d'entropie présentées précédemment (cf A.3.3.2. et cf A.3.3.3.).

$$\begin{aligned} \sum_k \left[ \dot{m}_M^k \left( h_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I &= \sum_k \left[ \dot{m}_M^k (h_M^k - g_M^k) - \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \delta_I \\ &+ \sum_k \left[ \dot{m}_M^k \left( g_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) \right] \delta_I \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

#### A.3.4.1. Echanges thermiques

En considérant un transfert de masse isentropique à l'interface et les formulations obtenues précédemment (Eq. (A.33)), l'équation de saut d'enthalpie (A.21) devient.

$$\sum_k U_T^k (T^I - T^k) = 0 \quad T^I = \frac{U_T^g T^g + U_T^l T^l}{U_T^g + U_T^l} \quad (\text{A.49})$$

Le coefficient de diffusivité thermique global de l'interface  $U_T$ , permet de déterminer les échanges de chaleur entre les deux phases.

$$\frac{1}{U_T} = \frac{1}{U_T^g} + \frac{1}{U_T^l} \quad (\text{A.50})$$

$$U_T^g (T_I - T^g) = U_T (T^l - T^g) \quad \text{et} \quad U_T^l (T_I - T^l) = U_T (T^g - T^l) \quad (\text{A.51})$$

Cette modélisation respecte bien le fait que le flux de chaleur est dirigé vers la zone ayant la température la plus basse.

La condition d'isentropie sur la température nous permet d'écrire que l'échange de chaleur à l'interface est nulle pour chaque phase.

$$U_T^k (T^I - T^k)^2 = 0 \quad (\text{A.52})$$

Ces égalités offrent deux possibilités :

- Soit la température de l'interface est égale à la température de la phase à chaque instant et le coefficient de transfert phasique  $U_T^k$  tend vers l'infini.
- Soit le coefficient d'échange est nulle  $U_T^k = 0$

D'après l'étude menée précédemment (cf A.3.3.2.), nous considérerons que la température de l'interface est égale à la température de la phase gazeuse et nous négligerons les échanges de chaleur entre le milieu liquide et l'interface.

$$U_T^l = 0 \quad U_T^g \rightarrow \infty \quad U_T = 0 \quad (\text{A.53})$$

#### A.3.4.2. Forces interfaciales et saut de vitesse

A partir de la condition isentropique sur l'enthalpie libre (Eq (A.41)), la deuxième composante du terme d'échange peut se réécrire par rapport aux sauts de vitesses à l'interface, aux pressions et à la viscosité.

$$\sum_k \left[ \dot{m}_M^k \left( g_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) \right] = \sum_k \frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \left[ -p_M^k + \rho_M^k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_M^k) \cdot \mathbf{u}_M^k + (\boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k) \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \quad (\text{A.54})$$

Le saut de vitesse à l'interface peut être caractérisé par une masse volumique équivalente de l'interface  $\rho_I$  et des transferts de masse.

$$\frac{1}{\rho_I} = \frac{1}{\rho_M^g} - \frac{1}{\rho_M^l} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_M^g - \mathbf{u}_M^l = -\frac{\dot{m}_M^g}{\rho_I} \mathbf{n}_I^g = \sum_k -\frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \mathbf{n}_I^g \quad (\text{A.55})$$

En multipliant la relation (2.38) par le saut de vitesse  $\mathbf{u}_M^g - \mathbf{u}_M^l$ , puis en identifiant phase par phase, on obtient :

$$\frac{\dot{m}_M^k}{\rho_M^k} \mathbf{f}_I \cdot \mathbf{n}_I^g = \frac{\dot{m}_M^k}{\rho_I} \left[ -p_M^k + \rho_M^k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_M^k) \cdot \mathbf{u}_M^k + \boldsymbol{\tau}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right] \quad k = \{l, g\} \quad (\text{A.56})$$

Finalement les termes d'échanges d'énergie liés aux efforts mécaniques peuvent s'exprimer en fonction des forces interfaciales et de la masse volumique équivalente de l'interface.

$$\dot{m}_M^k \left( g_M^k - \frac{p_M^k}{\rho_M^k} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k \right) = \dot{m}_M^k \frac{\rho_I}{\rho_M^k} \mathbf{f}_I \cdot \mathbf{n}_I^g \quad (\text{A.57})$$

## A.4 Etude paramétrique de la loi **B-STMA**

### A.4.1 Méthode

Afin d'étudier l'influence des paramètres de la loi **B-STMA**, plusieurs configurations sont essayées. Pour cela, les 5 paramètres indépendants de la loi sont modifiés tour à tour par rapport à une configuration de référence. Pour chaque paramètre, 5 valeurs sont choisies, les valeurs soulignées correspondent au système de référence (cf 3.4.3.2.).

- $c_{min}$  :  $0, 5m.s^{-1}$  ;  $0, 8m.s^{-1}$  ;  $1m.s^{-1}$  ;  $1.2m.s^{-1}$  ;  $1.5m.s^{-1}$
- $Y_a^l$  :  $0ppm$  ;  $5ppm$  ;  $11ppm$  ;  $15ppm$  ;  $20ppm$
- $\alpha_{min}$  :  $10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4},$   $10^{-3}$  ,  $10^{-2}$ .
- $p_{loi}$  :  $1300Pa$  ;  $1800Pa$  ;  $2300Pa$  ;  $2800Pa$  ;  $3300Pa$
- $p_{cuve}$  :  $p_{atm}$  ;  $2p_{atm}$  ;  $4p_{atm}$  ;  $6p_{atm}$  ;  $8p_{atm}$ .

Les conclusions de cette étude seront bâties sur :

- **la masse volumique et la pression du fluide homogène** : Les simulations reposant sur la loi barotrope sinusoïdale [50] (la loi **B-STMA** étant calculée en post-traitement), la relation unissant les deux grandeurs  $\rho_M$  et  $p_{MI}$  dans la loi **B-STMA** doit être le plus proche possible de la relation obtenue avec la loi originale entre  $\rho_M$  et  $p_M$  avec les masses volumiques de référence -  $\rho_{e0}^g = 0.017 kg.m^{-3}$   $\rho_{e0}^l = 1000 kg.m^{-3}$ .
- **Les pressions phasiques** : Même si aucun critère n'est défini sur les pressions phasiques, il est intéressant de connaître l'influence de la loi d'équilibre mécanique sur ces grandeurs.
- **Les dimensions des structures diphasiques et la distribution volumique de bulles** : L'objectif de cette étude est de définir une population de bulles correspondant aux ordres de grandeurs obtenus expérimentalement (cf 3.4.2.2.).

$$R^g \in [1\mu m; 1000\mu m] \quad \text{et} \quad n_B^v \in [10^9 m^{-3} - 10^{15} m^{-3}]$$

## A.4.2 Résultats de l'étude de sensibilité

### Influence de $c_{min}$ (Fig A.4.1) :

L'augmentation de la célérité du son minimale élargit la zone de mélange du fluide. Les relations de continuité considérées par la loi **B-STMA** induisent dès lors une influence importante de  $c_{min}$  sur la pression du liquide. La pression du gaz en est en revanche complètement indépendante (cf 3.3.2.2.).

Avec ce jeu de données et le modèle proposé, l'augmentation de  $c_{min}$  accentue les phénomènes de croissance des bulles au sein du milieu diphasique, les bulles pouvant atteindre des dimensions importantes ( $> 1mm$  pour  $c_{min} = 1.5m.s^{-1}$ ).

### Influence de la quantité d'air dissous $Y_a^l$ (Fig A.4.2)

La variation de la quantité d'air dissous a très peu d'influence sur la modification de la loi barotrope initiale. Une même simulation **U-RANS** peut dès lors être utilisée pour différentes valeurs de ce paramètre.

La modification de  $Y_a^l$  fait fluctuer la pression des gaz notamment pour des taux de vide faibles. La pression du gaz à  $\alpha_{min}$  varie de  $10^4$  Pa ( $Y_a^l = 1ppm$ ) Pa à  $10^5$  ( $Y_a^l = 20ppm$ ). Les pressions de la phase gazeuse obtenues sont en revanche équivalentes pour  $\alpha_{max}$ . Ces variations de pression génèrent une modification des dimensions des rayons de bulles. Pour des quantités d'air dissous faibles, les rayons de bulles prennent alors des valeurs plus importantes.

### Influence de la pression dans la cuve (Fig A.4.3)

La pression à l'intérieur de la cuve représente une condition limite pour la loi. Elle permet en effet d'ajuster la pression du liquide afin que celle-ci puisse être applicable dans l'ensemble du circuit hydraulique, y compris dans le réservoir. Elle n'a en revanche pas d'influence sur la pression et la masse volumique du fluide homogène, ainsi que sur la pression de la phase gazeuse. La pression du liquide évoluant, les dimensions des bulles

#### A.4 Etude paramétrique de la loi **B-STMA**

---

obtenues varient en fonction de la pression de cuve considérée et ont tendance à diminuer avec l'augmentation de  $p_{cuve}$ .

##### **Influence de la pression $p_{LOI}$ (Fig A.4.4)**

La modification du paramètre  $p_{LOI}$  décale la zone de mélange du fluide (par rapport à la variable de pression  $p_{MI}$ ). Ce paramètre a donc une importance forte sur la relation taux de vide  $\alpha_g$  - pression homogène  $p_{MI}$ . Les masses volumiques des phases pures étant indépendantes de ce paramètre, la masse volumique du fluide  $\rho_M$  reste, quant à elle, inchangée (par rapport à  $\alpha_g$ ). De même la pression de gaz est invariante à  $p_{LOI}$ .

- Pour une pression  $p_{LOI} < p_{sat}$ , les dimensions des bulles diminuent avec  $p_{LOI}$ .
- Considérer une zone de mélange au dessus de la pression de vapeur saturante  $p_{LOI} > p_{sat}$  génère des inversions de courbure dans la loi **B-STMA**. En revanche, les bulles ne sont présentes que pour des taux de vide faibles ( $\alpha_g < 10\%$ ) et prennent très rapidement des dimensions importantes ( $> 500\mu m$ ). Les grandeurs obtenues pour les distributions de bulles sont également plus faibles que les données expérimentales.

##### **Influence du taux de vide résiduelle $\alpha_{min}$ (Fig. A.4.5)**

Le taux de vide minimal  $\alpha_{min}$  détermine la population de germes initialement présents dans le fluide. Ce paramètre sans avoir une grande influence sur la pression et masse volumique du fluide modifie fortement la topologie diphasique du milieu.

- Pour des taux de vide minimaux faibles ( $\alpha_{min} < 10^{-4}$ ), les zones diphasiques 'proches liquide' se présentent sous forme de gouttes.
- A l'inverse pour des taux de vide relativement importants, le milieu ne se présente que sous forme de bulles (ou sur les particules solides, la pression du gaz étant supérieure à la pression du liquide). Plus le taux de vide  $\alpha_{min}$  est élevé plus les dimensions des bulles sont faibles.



L'ordre de grandeur  $\alpha_{min} = 10^{-3}$  semble, dans cette configuration, être la valeur permettant d'obtenir une population de bulles en adéquation avec les résultats expérimentaux, à la fois en terme de dimensions des bulles et d'ordres de grandeurs de la fonction de distribution.

### **Conclusion de l'étude paramétrique :**

Au cours de cette étude paramétrique, nous avons pu établir que la variation des paramètres de la loi **B-STMA** permet la définition de populations de bulles diverses. La présence d'une phase de croissance et d'une phase de décroissance des structures diphasiques avec l'augmentation du taux de vide, pour cette loi, engendre des fonctions de distributions présentant deux densités de bulles volumiques pour un même rayon (figure e des figures A.4.1 à A.4.5 ). Ce phénomène ne semble pas correspondre aux différents résultats expérimentaux présentés précédemment (cf 3.4.2.2.). Certaines hypothèses prises pour l'élaboration de cette population semblent très lors trop restrictives (La condition d'équilibre des bulles notamment). Néanmoins, nous avons pu obtenir un jeu de paramètres (celui de référence) définissant une population de bulles dont les dimensions et les densités volumiques de bulles correspondent à celles obtenues expérimentalement ( Fig 3.8 et 3.7). Nous considérerons dès lors ce dernier pour nos post-traitements.

#### A.4 Etude paramétrique de la loi **B-STMA**

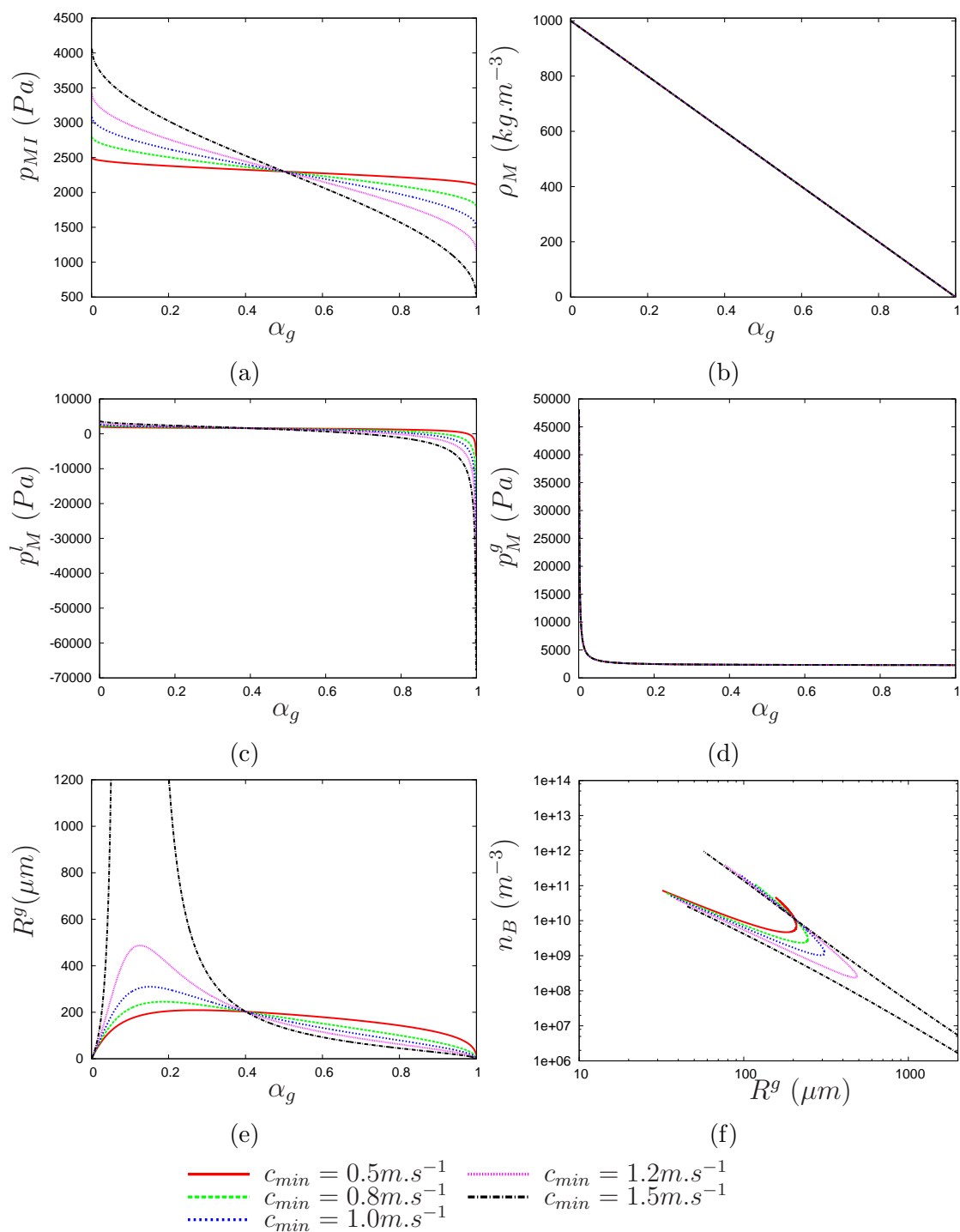


FIGURE A.4.1 – Influence du paramètre  $c_{min}$  sur la loi **B-STMA**

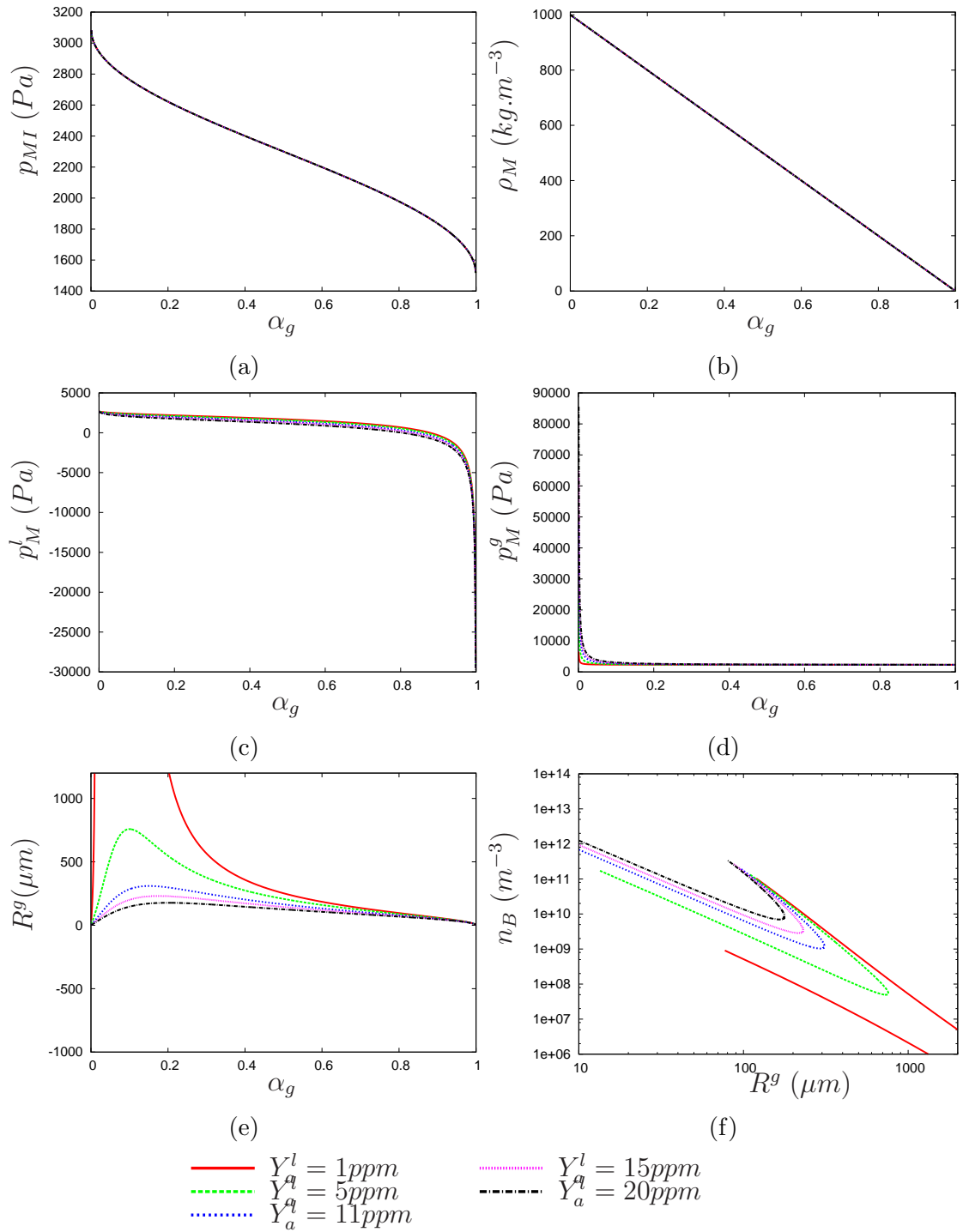


FIGURE A.4.2 – Influence du paramètre  $Y_a^l$  sur la loi B-STMA

### A.4 Etude paramétrique de la loi B-STMA

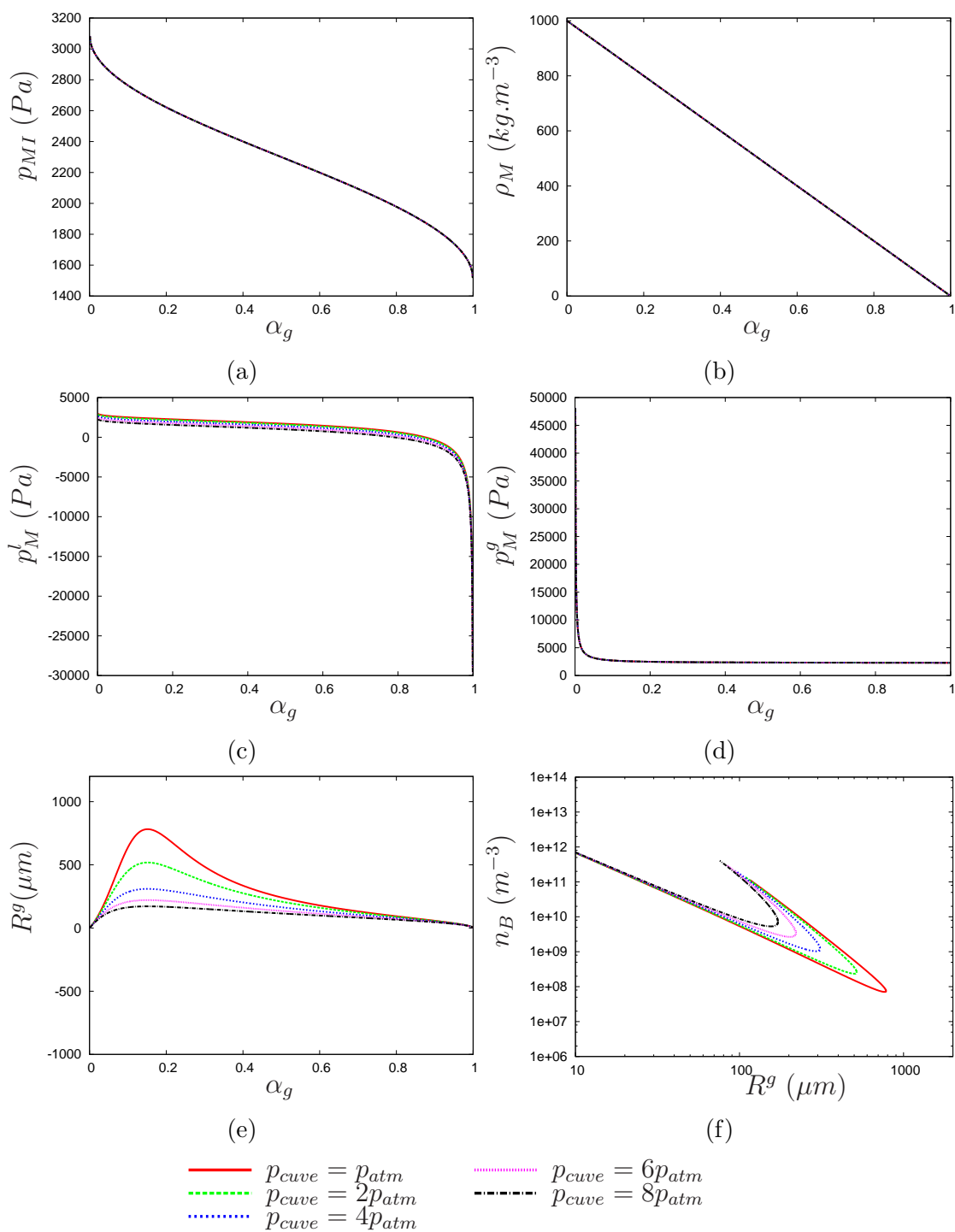


FIGURE A.4.3 – Influence de  $p_{cuve}$  sur la loi B-STMA

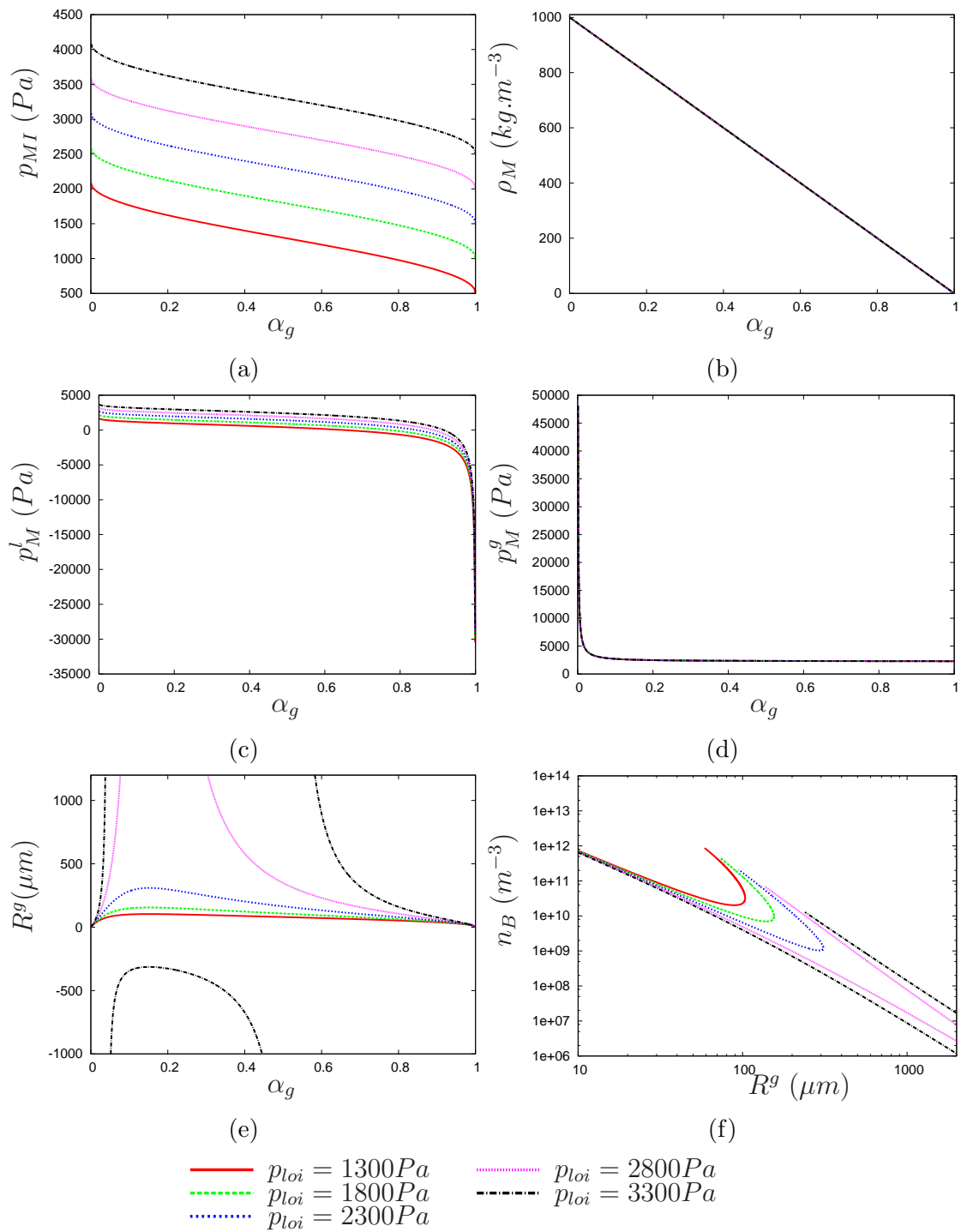


FIGURE A.4.4 – Influence de  $p_{LOI}$  sur la loi B-STMA

### A.4 Etude paramétrique de la loi B-STMA

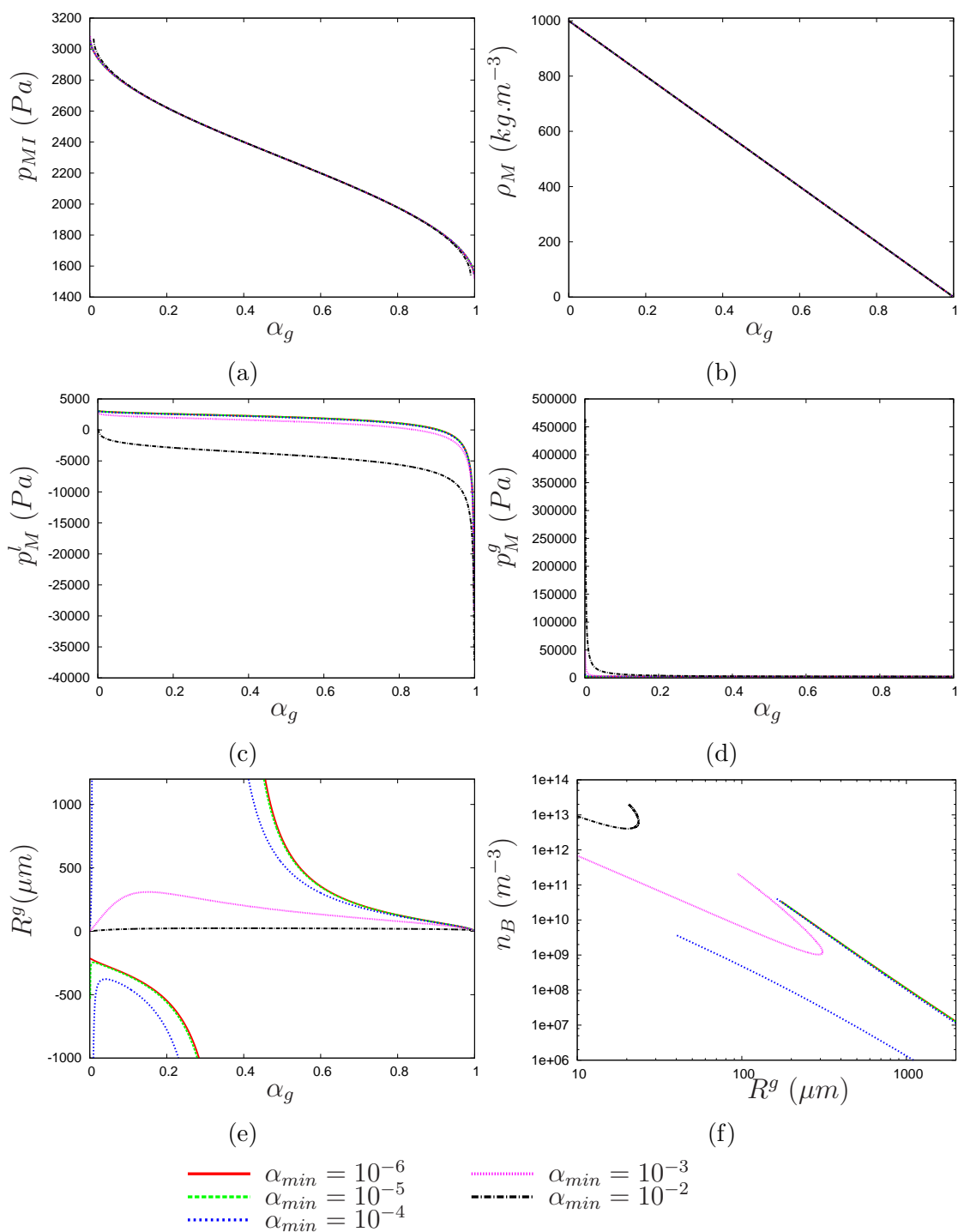


FIGURE A.4.5 – Influence de  $\alpha_{min}$  sur la loi B-STMA



# Présentation des codes de calcul

## Sommaire

---

|       |   |            |
|-------|---|------------|
| B.1   | Description des codes de calcul utilisés . . . . .  | <b>367</b> |
| B.1.1 | Présentation de FineTurbo . . . . .   | 368        |
| B.1.2 | Code de calcul IZ . . . . .   | 370        |
| B.1.3 | Couche limite pariétale turbulente . . . . .  | 371        |
| B.2   | Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles . . . . . | <b>374</b> |
| B.2.1 | Hypothèse de Boussinesq . . . . .   | 375        |
| B.2.2 | Caractérisation des équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente . . . . .  | 379        |
| B.2.3 | Présence de bulles dans l'écoulement et turbulence . . . . .                              | 382        |

---

## B.1 Description des codes de calcul utilisés

Les deux solveurs appliqués dans cette thèse utilisent la méthode des volumes finis. Les systèmes d'équations sont identiques dans les deux outils de calcul (équation de conservation de masse et de quantité de mouvement en fluide homogène avec la loi barotrope de Delannoy) à l'exception des modèles de turbulence considérés dans cette thèse ( $k - \epsilon$  pour Fine-Turbo contre  $k - \epsilon$  RNG pour IZ) et de la loi de paroi (loi de paroi standard pour IZ contre loi de paroi étendue pour Fine-Turbo). Ces deux éléments seront décrits dans la suite des annexes (cf B.2 et B.1.3). En revanche, ces solveurs emploient



des schémas numériques différents. Dans cette section, nous allons donc présenter les algorithmes de résolution et les méthodes numériques employés par chacun d'eux.

### B.1.1 Présentation de FineTurbo

Le code Fine<sup>TM</sup>/Turbo est développé et commercialisé par la société Numeca International.

Grâce à la méthode des volumes finis le système d'équation (3.18) peut s'écrire sous forme matricielle pour chaque volume (cellule) du calcul :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{U}] d\Omega + \sum_{faces} \mathbf{F}_I \cdot \Delta \mathbf{S} + \sum_{faces} \mathbf{F}_v \cdot \Delta \mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{ST} d\Omega \quad (\text{B.1})$$

avec  $\mathbf{U}$  le vecteur des variables conservatives,  $\mathbf{F}$  le flux à travers une surface  $\mathbf{n}$  décomposé en une partie non-visqueuse  $\mathbf{F}_c$  et une partie visqueuse  $\mathbf{F}_v$ , et  $\mathbf{ST}$  le terme source, incluant les transferts de masse et les forces liées à la gravité tous deux négligés dans nos applications. L'équation d'énergie étant découplée des autres équations, nous ne la présenterons pas dans ce manuscrit.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho_M \\ \rho_M u_{Mx} \\ \rho_M u_{My} \\ \rho_M u_{Mz} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} \rho_M \mathbf{u}_M \\ \rho_M u_{Mx} \mathbf{u}_M + p \mathbf{n}_x \\ \rho_M u_{My} \mathbf{u}_M + p \mathbf{n}_y \\ \rho_M u_{Mz} \mathbf{u}_M + p \mathbf{n}_z \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_x \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_y \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

#### B.1.1.1. Description spatiale et calcul des flux

La discrétisation spatiale est basée sur un stockage des variables au centre des cellules. Le calcul des flux est réalisé en sommant les flux sur chaque face de la cellule. Les gradients qui interviennent dans le calcul des flux visqueux doivent être estimés sur chaque face de cellule. Pour ce faire, le théorème de Gauss est appliqué à un volume de contrôle contenant la facette. Pour la variable générique  $\Phi$ , on obtient :

$$\nabla \Phi = \frac{1}{\Omega} \int \nabla \Phi d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \Phi d\mathbf{S} \quad (\text{B.3})$$

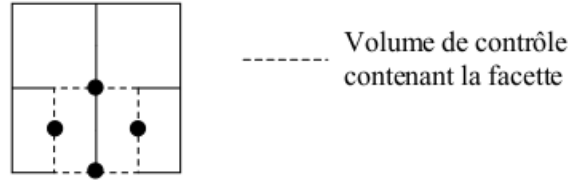


FIGURE B.1.1 – calcul des gradients par le théorème de Gauss. [177]

Les termes non visqueux sont calculés à partir d'une discrétisation centrale d'ordre 2 associée à une dissipation numérique de Jameson [116].

### B.1.1.2. Intégration temporelle et pas de temps dual

La discrétisation temporelle du code s'opère à l'aide d'une technique de pas de temps dual proposée par Jameson [115]. Sa particularité est d'utiliser pour la résolution des équations instationnaires un terme supplémentaire faisant intervenir des dérivées par rapport à un pseudo-temps.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \tau} [\mathbf{U}] d\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega \right] + \sum_{faces} \mathbf{F}_I \cdot \Delta \mathbf{S} + \sum_{faces} \mathbf{F}_v \cdot \Delta \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (\text{B.4})$$

La méthode du pas de temps dual permet de considérer chaque pas de temps physique comme un problème stationnaire ayant une dérivée temporelle non nulle et dont la solution est obtenue en itérant sur un pseudo-temps. A convergence, le terme dépendant du pseudo pas de temps s'annule et on vérifie bien l'équation instationnaire classique. La discrétisation temporelle par rapport au pas de temps réel s'effectue à l'aide d'un schéma temporelle du second ordre 'upwind'. Ainsi, le problème discrétisé se met toujours sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\mathbf{U}] \Omega + \mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.5})$$

Avec  $\mathbf{R}$ , le résidu du calcul. Dans Fine-Turbo, le passage d'un pseudo pas de temps à l'autre (l à l+1) s'opère à l'aide d'un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4.

Plusieurs autres fonctionnalités sont disponibles dans le solveur Fine. Au cours de notre étude, le système d'équation est alors préconditionné à l'aide de la méthode proposée par Hakimi [97] ce qui permet d'augmenter la vitesse de convergence du calcul

sans a priori en modifier les résultats. De même un lissage des résidus est effectué pour les mêmes raisons.

Le modèle de cavitation implanté dans Fine-turbo au cours des thèses de Coutier-Delgosha [44] et Pouffary [177] au sein du laboratoire dans le cadre d'un partenariat LEGI/CNES/SNECMA. Il repose sur la loi barotrope proposée par Delannoy. Au cours de ces travaux, plusieurs géométries ont été simulées (venturi, hydrofoil, pompe,..) et ont montré la capacité du code à reproduire simuler le comportement instationnaire de ce type d'écoulement.

### **B.1.2 Code de calcul IZ**

Le code de calcul IZ a été développé au sein du LEGI pour le compte du CNES [46]. Il repose également sur une méthode des volumes finis et sur un algorithme de résolution SIMPLE ou SIMPLER. Le système d'équation est adimensionné par les grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

Un maillage orthogonal (de coordonnées 2D  $(x^1, x^2)$ ), est défini par la méthode de Ryskin et Leal [199]. Les équations sont par la suite écrites dans le repère curviligne orthonormé  $(x(1), x(2))$  lié à la géométrie étudiée grâce à la démarche définie par Pope [175] (voir figure B.1.2).

La discrétisation temporelle choisie pour nos simulations est une discrétisation totalement implicite d'ordre 1.

En ce qui concerne la discrétisation spatiale, la technique du maillage décalé est employée. Ainsi les variables de pression  $p$ , de masse volumique  $\rho$ , d'énergie cinétique turbulente  $k$  et de dissipation turbulence  $\epsilon$  sont calculées au centre des mailles tandis que les vitesses sont calculées au niveau des facettes des cellules (voir figure B.1.3). Le calcul des flux surfaciques est donc facilité puisque les vitesses sont calculées sur les faces des mailles. Pour estimer les valeurs des variables convectées un schéma d'interpolation HPLA d'ordre 2 proposé par Zhu [256] est utilisé.

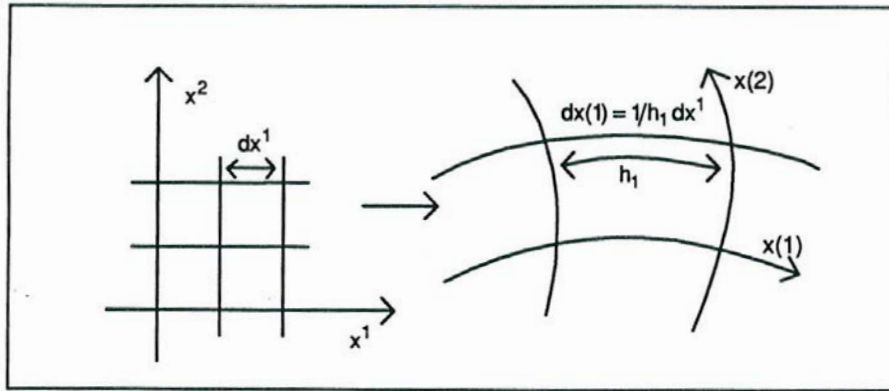


FIGURE B.1.2 – passage du maillage orthogonale au repère curviligne local [37]

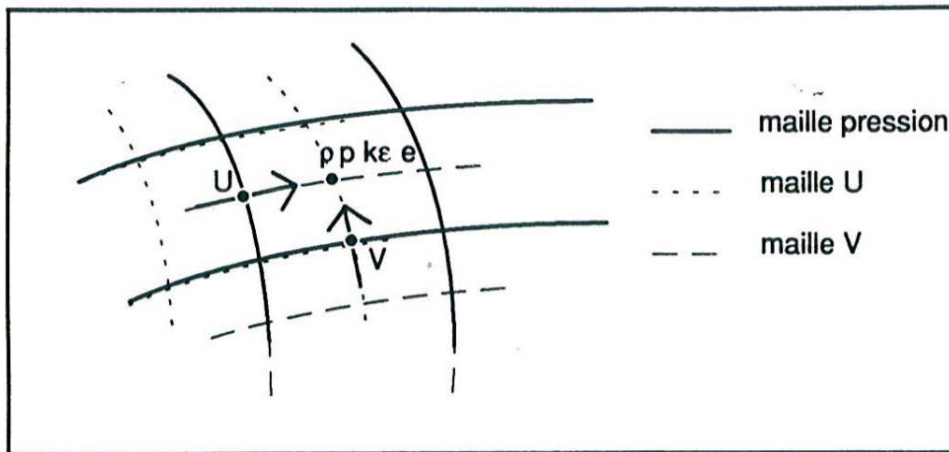


FIGURE B.1.3 – technique du maillage décalé utilisé dans IZ [37]

La capacité du code à représenter le comportement instationnaire des écoulements cavitants a été effectuée aux cours de différents travaux et sur différentes géométries (venturis [23], hydrofoils [45, 148]).

### B.1.3 Couche limite pariétale turbulente

La présence d'une paroi dans un écoulement introduit une condition de non glissement à considérer. Les modèles **RANS/URANS** n'étant pas assez résolus pour modéliser le gradient de vitesse à la paroi, des modèles de loi de paroi ont été introduits.

### B.1.3.1. Hypothèses simplificatrices dans la couche limite

Les effets dus à la présence d'une paroi sont confinés dans une zone proche de celle-ci appelée couche limite pariétale. Son épaisseur est définie comme la distance à la paroi  $\delta$  telle que :  $u(\delta) = 0.99u_\infty$  , avec  $u_\infty$  la vitesse "amont" non perturbée par la paroi.

Afin de modéliser les mécanismes mis en jeu dans cette couche limite, une série d'hypothèse est réalisée dans la couche limite :

- l'écoulement est supposé pleinement turbulent et stationnaire.
- D'autre part, la composante longitudinale de vitesse  $u_x$  est prédominante devant la composante normale à la paroi  $u_y$  et les gradients longitudinaux sont considérés comme faibles devant les gradients normaux à la paroi (dans cette première approche le gradient normal de pression est considéré comme nul).
- La couche limite se développe sur une paroi considérée plane et lisse, à une température fixe  $T_w$ .
- la dissipation visqueuse est négligée dans la couche limite.

Dans une région proche paroi, l'équation de conservation de la quantité de mouvement moyennée projetée normalement à la paroi peut alors se simplifier.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_M \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} - \overline{\rho u_x'' u_y''} \right] = 0 \quad (\text{B.6})$$

Dans cette écriture, les variables en jeu sont uniquement fonction de  $y$ , la distance selon la direction normale à la paroi. Les dérivées partielles deviennent donc des dérivées droites. D'autre part, la modélisation des corrélations des fluctuations de vitesse et température peut se faire grâce à l'hypothèse de Boussinesq :

$$-\overline{\rho u_x'' u_y''} = \mu_{Mt} \frac{d\tilde{u}_x}{dy} \quad (\text{B.7})$$

## B.1 Description des codes de calcul utilisés

---

La contrainte tangentielle à la paroi  $\tau_w$  est supposée constante dans la couche limite.

$$(\mu_M + \mu_{Mt}) \frac{d\tilde{u}_x}{dy} = \tau_w = \mu_w \left( \frac{d\tilde{u}_x}{dy} \right)_{y=0} \quad (\text{B.8})$$

### B.1.3.2. Structure de la couche limite pariétale turbulente

De nombreux modèles de lois de parois existent dans la littérature [88]. La loi utilisée dans nos simulations est la loi de paroi standard ou loi de paroi étendue. Celles-ci se définissent par la décomposition de la couche limite en trois domaines en fonction d'une distance adimensionnelle à la paroi  $y^+$ .

$$u^+ = \frac{\overline{u_x}}{u_\tau} \quad ; \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu_w} \quad ; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \quad (\text{B.9})$$

Notons que  $u_\tau$  est appelée vitesse de frottement,  $y$  la distance à la paroi,  $\nu_w$  et  $\rho_w$  respectivement la viscosité cinématique et masse volumique au niveau de la paroi.

#### Sous-couche visqueuse :

Dans une zone très proche paroi,  $y^+ < \approx 5$ , les effets de la turbulence sont supposés négligés par rapport aux effets visqueux. La vitesse adimensionnelle est donc directement reliée à la distance à la paroi.

$$u^+ = y^+ \quad (\text{B.10})$$

#### Sous-couche inertielle

A l'inverse, au delà d'une certaine distance,  $y^+ > \approx 20$ , les effets turbulents sont supposés prédominés sur les effets visqueux.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C_{u_0} \quad (\text{B.11})$$

#### Zone de raccordement :

Dans la zone de raccordement,  $5 < \approx y^+ < \approx 20$ , la loi permet de relier les deux domaines présentés ci-dessus. Le modèle bicouche est défini en l'absence de cette zone de raccordement, dans ce cas, les constantes sont établies de façon à ce que la sous-couche visqueuse et la sous couche inertielle se rejoignent pour  $y^+ = 11.3$ .

La loi de paroi standard repose sur la considération seule de la sous-couche inertielle tandis que la loi de paroi étendue considère l'ensemble de ces trois zones. Les valeurs de raccordements entre les différentes zones peut évoluer selon les modèles considérés. Celles présentées ici correspondent aux valeurs utilisées dans Fine-Turbo.

## B.2 Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles

De nombreux modèles permettent la modélisation du tenseur de Reynolds dans des simulations d'écoulement monophasique. Néanmoins, la présence de bulles de gaz dans un écoulement engendrent une modification des mécanismes de production, de transfert et de dissipation de l'énergie turbulente. Lance et Bataille [136] dans leurs études des écoulements homogènes à bulles, évoquent trois types de mécanismes :

- Le premier concerne les fluctuations turbulentes supplémentaires générées par les bulles dans leur mouvement relatif (ascension des bulles dans un liquide au repos [154]).
- Le second mécanisme est relatif à la production turbulente par cisaillement au niveau du sillage des bulles.
- Le dernier est attribué à la déformation des bulles sous l'action des structures turbulentes du liquide. Ce mécanisme subsiste même à faible taux de vide lorsque l'interaction entre les bulles peut être négligée. Bien que assez peu étudié dans la littérature, ce mécanisme semble être important. Serizawa [214] montre que la déformation des bulles est susceptible d'absorber l'énergie turbulente du liquide et de modifier la dissipation.

Les équations régissant le tenseur de Reynolds s'obtiennent en effectuant la différence entre les équations de conservation de quantité de mouvement phasique locale et moyennée, ce qui nous donne un vecteur d'équations  $\mathbf{E}^k$ . Le produit tensoriel de ce vecteur par la partie fluctuante de la vitesse du fluide  $\mathbf{u}_M^k$  moyennée procure un système de 6 équations

correspondant à chacune des composantes du tenseur de Reynolds.

$$\overline{\mathbf{u}_M^k \mathbf{E}^k + (\mathbf{u}_M^k \mathbf{E}^k)^T} \quad (\text{B.12})$$

Dans le cadre des modèles **RSM**, Reynolds-Stress model, l'équation précédente est résolue pour chaque composante du tenseur de Reynolds [64]. Ces modèles ont montré leurs supériorités concernant la prédiction de l'anisotropie (cas des ondes de chocs, zones proches des parois, décollement) [137, 223]. Les applications industrielles préfèrent néanmoins les modèles de premier ordre basés sur l'existence d'une viscosité turbulente et sur l'hypothèse de Boussinesq moins coûteux en temps de calcul.

### B.2.1 Hypothèse de Boussinesq

L'hypothèse de Boussinesq suppose que le tenseur des contraintes turbulentes peut s'écrire à l'image du tenseur des contraintes visqueuses sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_t^k = \mu_t^k \left( \nabla \widetilde{\mathbf{u}_M^k} + \left( \nabla \widetilde{\mathbf{u}_M^k} \right)^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}_M^k} \underline{\mathbf{I}} \right) - \frac{2}{3} \overline{\rho_M^k} k^k \underline{\mathbf{I}} \quad (\text{B.13})$$

Avec  $\mu_t^k$ , la viscosité turbulente de la phase k et  $k^k = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k}$ , l'énergie cinétique turbulente.

Le tenseur de Reynolds pour le mélange diphasique peut s'obtenir en moyennant les tenseurs de Reynolds de chaque phase.

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_t = \sum_k \alpha_k \underline{\boldsymbol{\tau}}_t^k \quad (\text{B.14})$$

Les six inconnues du tenseur des contraintes turbulentes sont donc remplacées par deux inconnues scalaires correspondant à la viscosité turbulente pour chacune des phase. Cette hypothèse implique que :

- Le champ turbulent est isotrope aux petites échelles
- Le rapport de production entre le terme de production et le terme de dissipation est proche de 1.



- Le tenseur de Reynolds est aligné sur le tenseur des déformations.
- L'écoulement turbulent réagit directement à des distorsions de l'écoulement moyen sans effet de mémoire.
- On donne un caractère diffusif à un phénomène à grande échelle ce qui tend à stabiliser les mécanismes instationnaires advectifs.

La difficulté du modèle reposant alors sur la modélisation de cette viscosité turbulente, celle-ci impliquant une turbulence homogène isotrope, l'étude de celle-ci est une première étape vers sa modélisation.

#### B.2.1.1. Turbulence homogène isotrope

La turbulence est dite homogène isotrope lorsque toutes les grandeurs statistiques basées sur les fluctuations de vitesses et de pressions sont uniformes dans l'espace. Dans ces conditions, on peut évaluer la densité spectrale de l'énergie turbulente  $E(\mathbf{K})$ , avec  $\mathbf{K}$  un vecteur d'onde, de telle sorte que :

$$k = \int_0^\infty E(K) dK \quad (\text{B.15})$$

De même, la dissipation  $\epsilon$  et l'énergie spectrale de dissipation  $D(K)$  sous la forme :

$$\epsilon = \nu \int_0^\infty 2K^2 E(K) dK \quad (\text{B.16})$$

$$D(K) = 2\nu K^2 E(K) \quad (\text{B.17})$$

Dans un cas monophasique cette analyse implique que :

- L'énergie turbulente et la dissipation sont nulles pour des structures de taille infinie ( $K = 0$ )
- La dissipation étant une grandeur finie il est nécessaire pour que l'équation B.16 converge que l'énergie spectrale converge vers 0 au moins aussi vite que  $\frac{1}{K^3}$ .

## B.2 Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles

---

- La dissipation atteint son maximum pour un nombre d'onde plus grand que l'énergie turbulente.

A partir de ces observations Kolmogorov [132] réalise un modèle dans lequel :

- l'énergie cinétique turbulente est principalement portée par les grosses structures non sensibles à la viscosité du fluide.
- L'énergie cinétique est dissipée par les petites structures par effet de viscosité
- Le transfert d'énergie entre petites et grandes structures se fait par les termes non linéaires.

Deux échelles de longueurs peuvent être ainsi obtenues par analyse dimensionnelle :

- L'échelle intégrale, caractéristique des tourbillons ayant le plus d'énergie, insensible à la viscosité mais liée à la quantité d'énergie et à leur vitesse de destruction.

$$l_t = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (\text{B.18})$$

- L'échelle de Kolmogorov, caractérisant la taille des plus petites structures, liée à la viscosité du fluide et à la dissipation d'énergie.

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{B.19})$$

Entre ces deux échelles, on peut caractériser une zone inertielle, dans laquelle ne fait que transiter l'énergie. Encore une fois par analyse dimensionnelle on obtient dans cette zone :

$$E(K) = C\epsilon^{-2/3}K^{-5/3} \quad (\text{B.20})$$

### B.2.1.2. Modélisation de la viscosité turbulente

La littérature comporte de nombreux modèles proposant la modélisation de la viscosité turbulente basée sur l'étude de ce spectre d'énergie. Leurs modélisations reposent toutes

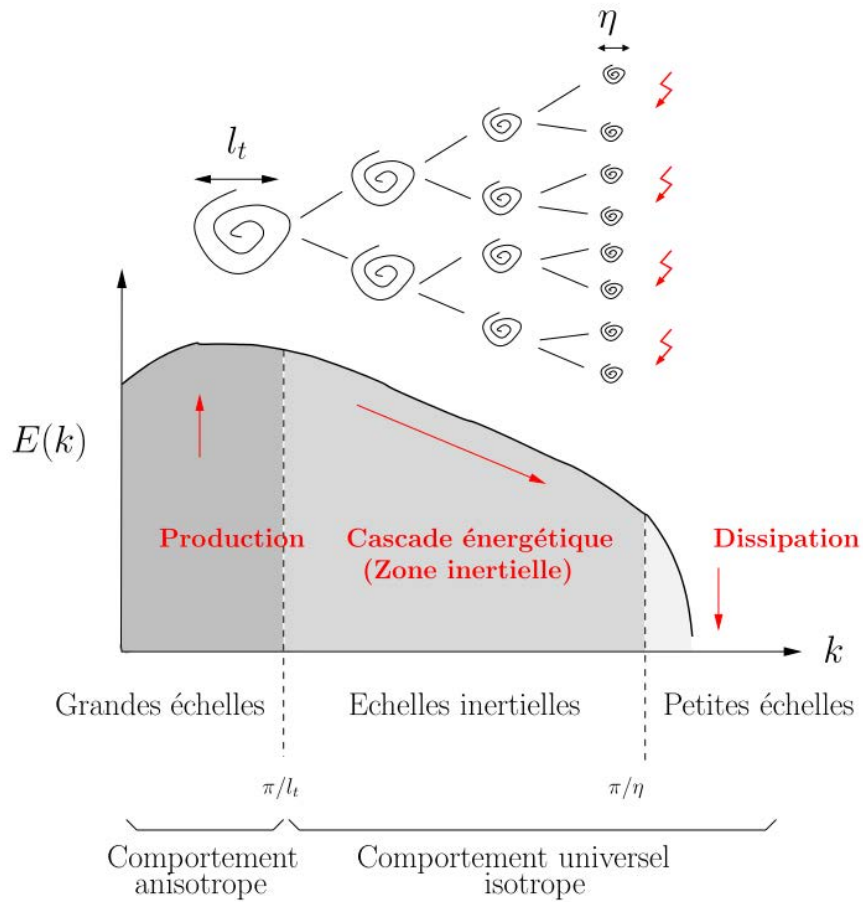


FIGURE B.2.4 – Représentation du spectre de l'énergie en turbulence homogène isotrope dans un cas monophasique incompressible

sur le fait que la viscosité turbulente est proportionnelle au produit d'une masse volumique par une vitesse et une longueur.

$$\mu_t \sim \rho u^* l^* \tag{B.21}$$

Les modélisations classiques reposent sur différentes équations, la plus simple étant un modèle algébrique, mais les modèles reposant sur la viscosité turbulente peuvent nécessiter la résolution de plusieurs autres équations supplémentaires.

**Modèle à une équation de transport :**

Les modèles reposant sur une équation de transport utilisent cette dernière afin de déterminer la vitesse caractéristique  $u^*$ , tandis que la longueur caractéristique

## B.2 Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles

repose sur un modèle algébrique. Cette vitesse caractéristique repose généralement sur l'énergie cinétique turbulente  $k$ .

$$u^* \sim \sqrt{k} \quad (\text{B.22})$$

Un des modèles à une équation les plus répandus est le modèle de Spalart et Allmaras [222] reposant sur le suivi de la viscosité dynamique turbulente  $\nu_t$ .

### Modèle à deux équations de transport :

Les modèles à deux équations de transport reposent sur la caractérisation de la longueur caractéristique  $l^*$  par les grandeurs de l'écoulement. Les méthodes les plus répandues se basent sur :

- la dissipation de l'énergie turbulente  $\epsilon : l^* = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$
- la dissipation spécifique  $\omega = \frac{\epsilon}{k} : l^* = \frac{\sqrt{k}}{\omega}$
- l'échelle de longueur  $l^*$

Ces trois possibilités ont respectivement donné naissance aux modèles  $k - \epsilon$  [118],  $k - \omega$  [249],  $k - kl$  [196] (ou  $k - l$  [218]).

## B.2.2 Caractérisation des équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente

### B.2.2.1. Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

Dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq, le système précédent (eq. (B.12)) **appliqué à chacune des phases** peut se simplifier en prenant la contraction double du tenseur le représentant.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \alpha_k \overline{\rho_M^k k^k} \right] + \nabla \cdot \left[ \alpha_k \overline{\rho_M^k k^k \mathbf{u}_M^k} \right] = \alpha_k \overline{\rho_M^k} P_k + \alpha_k \overline{\rho_M^k} \Pi_k - \alpha_k \overline{\rho_M^k} \epsilon_k + \alpha_k \overline{\rho_M^k} \Theta^k + \alpha_k \overline{\rho_M^k} \Lambda^k + \Sigma^k \quad (\text{B.23})$$

- Le terme de production d'énergie cinétique turbulente par le gradient de vitesse moyen :

$$\alpha_k \overline{\rho_M^k} P^k = \alpha_k \left( \overline{\boldsymbol{\tau}_t^k} : \nabla \widetilde{\mathbf{u}_M^k} \right) \quad (\text{B.24})$$

- Le terme de corrélation pression/dilatation.

$$\alpha_k \overline{\rho_M^k} \Pi^k = \alpha_k \overline{p_M^k} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_M^k} \quad (\text{B.25})$$

- La dissipation de l'énergie cinétique turbulente par les forces visqueuses.

$$\alpha_k \overline{\rho_M^k} \epsilon^k = \alpha_k \overline{(\boldsymbol{\tau}^k)^T} : \overline{\nabla \mathbf{u}_M^k} \quad (\text{B.26})$$

- La contribution du flux de masse turbulent à l'énergie turbulente.

$$\alpha_k \overline{\rho_M^k} \Theta^k = \alpha_k \overline{\mathbf{u}_M^k} \cdot \left( \overline{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_k^l} - \overline{\nabla p_M^k} \right) \quad (\text{B.27})$$

- Les mécanismes de distribution de l'énergie cinétique turbulente par le mouvement turbulent et par les forces de viscosité.

$$\alpha_k \overline{\rho_M^k} \Lambda^k = -\overline{\nabla \cdot \left[ \alpha_k \overline{p_M^k} \overline{\mathbf{u}_M^k} + \alpha_k \frac{\overline{\rho_M^k}}{2} \overline{\mathbf{u}_M^k \mathbf{u}_M^k \cdot \mathbf{u}_M^k} - \alpha_k \overline{(\boldsymbol{\tau}^k)^T} \overline{\mathbf{u}_M^k} \right]} \quad (\text{B.28})$$

- Le terme liée au changement de phase :

$$\Sigma^k = \left\langle \left[ \left( \overline{\boldsymbol{\tau}_k^l} - p_k \overline{\mathbf{I}} \right) \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{u}_k - \frac{1}{2} \dot{m}_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \right] \delta_I \right\rangle \quad (\text{B.29})$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente pour le mélange homogène s'obtient en additionnant les équations sur les deux phases et en posant :

$$\overline{\rho_M} k = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k} k^k \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M} k] + \overline{\nabla \cdot [\rho_M k \mathbf{u}_M]} = \overline{\rho_M} P + \overline{\rho_M} \Pi - \overline{\rho_M} \epsilon + \overline{\rho_M} \Theta + \overline{\rho_M} D + \Sigma \quad (\text{B.31})$$

## B.2 Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles

Avec :

$$\begin{aligned}
 \overline{\rho_M P} &= \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k} P^k & \overline{\rho_M \Pi} &= \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k} \Pi^k & \overline{\rho_M \epsilon} &= \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k} \epsilon^k \\
 \overline{\rho_M \Theta} &= \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k} \Theta^k & \overline{\rho_M \Lambda} &= \sum_k \alpha_k \overline{\rho_M^k} \Lambda^k & \Sigma &= \sum_k \Sigma^k
 \end{aligned}
 \tag{B.32}$$

### B.2.2.2. Modèle $k - \epsilon$

Le modèle de turbulence choisi pour cette étude est le modèle  $k - \epsilon$ . Celui-ci établit donc la viscosité turbulente à l'aide de l'énergie cinétique turbulente et la dissipation.

$$\mu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}
 \tag{B.33}$$

$C_\mu$  étant un paramètre du modèle.

Dans ce modèle, les termes de flux de masse  $\overline{\rho_M \Lambda}$  et de pression/dilatation  $\overline{\rho_M \Pi}$  sont négligés. La considération de l'interface dans les modèles de turbulence actuelles est encore incomplète. En effet, ils supposent généralement l'égalité des fluctuations phasiques pour la pression, la vitesse et le tenseur de viscosité afin de négliger le terme  $\Sigma$ . Dans notre approche, où l'équilibre mécanique est liée à la loi de Laplace, la considération de la pression homogène avec l'interface permet de supprimer  $\Sigma$  de l'équation, celui-ci étant intégré dans les autres termes.

Les mécanismes de redistribution de l'énergie cinétique turbulente sont modélisés par analogie avec la diffusion visqueuse sous la forme :

$$\overline{\rho_M \Lambda} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla^2 k
 \tag{B.34}$$

Avec  $\sigma_k$ , l'équivalent d'un nombre de Prandtl turbulent.

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente revient donc à :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M k}] + \nabla \cdot [\overline{\rho_M \mathbf{u}_M k}] = \left( \mu_M + \frac{\mu_{Mt}}{\sigma_k} \right) \nabla^2 k + \overline{\rho_M P} - \overline{\rho_M \epsilon}
 \tag{B.35}$$

Pour obtenir la valeur de la dissipation, une autre équation de transport basée sur celle de  $k$  est utilisée :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho_M \epsilon}] + \nabla \cdot [\overline{\rho_M \mathbf{u}_M \epsilon}] = \left( \mu_M + \frac{\mu_{Mt}}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla^2 \epsilon + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} \overline{\rho_M P} - C_{\epsilon 2} \overline{\rho_M \epsilon}) \quad (\text{B.36})$$

Le code IZ utilise un modèle  $k - \epsilon$  **RNG** Re-normalization-Group. Ce modèle se caractérise par le paramètre  $C_{\epsilon 2}$  dépendant de  $\frac{k}{\epsilon}$ .

$$C_{\epsilon 2} = C_{\epsilon 2}^0 + C_\mu S \zeta^3 \frac{1 - \frac{S}{\zeta_0}}{1 + \beta \zeta^3} \quad (\text{B.37})$$

$$\text{Avec } \zeta = S \frac{k}{\epsilon} \text{ et } S = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}_M + (\nabla \mathbf{u}_M)^T \right)^2}.$$

$\zeta_0$ ,  $C_{\epsilon 2}^0$ ,  $\beta$  se rajoutant aux paramètres du modèle. Ce modèle a pour but d'amortir la turbulence dans les zones à forts taux de déformations.

Dans ce modèle, l'influence du milieu diphasique repose principalement sur la dépendance de la viscosité au milieu diphasique.

$$\mu_M = \alpha_g \mu_M^g + \alpha_l \mu_M^l \quad (\text{B.38})$$

### B.2.3 Présence de bulles dans l'écoulement et turbulence

La présence de structures diphasiques modifie le comportement dynamique de l'écoulement. Des expériences ont en effet montré une modification du spectre d'énergie dans des écoulements à bulles. Lance et Bataille [136] ont notamment observé une modification de la pente du spectre, celle-ci passant de  $-\frac{5}{3}$  à  $-\frac{8}{3}$ . De même Luther [152] montre que les petites échelles de l'écoulement sont plus énergétiques dans un écoulements à bulles que dans un écoulement monophasique.

Même si ces expériences ne correspondent pas toute à fait à notre cas d'étude en terme de nombre de Reynolds, elles démontrent une influence des petites bulles sur le caractère turbulent de l'écoulement.

## B.2 Modélisation du tenseur de Reynolds dans les systèmes diphasiques compressibles

Les résultats de simulations de différents écoulements à l'aide des modèle  $k - \epsilon$  ont montré une influence trop grande de la viscosité turbulente. L'écoulement en effet ne présentaient pas les lâchers cavitants. Afin de palier à ce problème, Reboud [189] proposa la limitation de la viscosité turbulente à l'aide d'une fonction de pondération dépendante de la présence des phases.

$$\mu_{Mt} = f(\rho_M) C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (\text{B.39})$$

$$f(\rho_M) = \rho_M^g + (1 - \alpha_g)^n (\rho_M^l - \rho_M^g) \quad (\text{B.40})$$

En prenant un paramètre  $n = 10$ , la fréquence des lâchers d'un venturi a pu être obtenue. Cette valeur est donc retenue comme la valeur de référence.





# Précision sur l'élaboration de l'algorithme IDB

## Sommaire

---

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| C.1   | Décomposition du potentiel de vitesse en deux variables séparées . . . | <b>386</b> |
| C.1.1 | Obtention de la forme de la caractéristique . . . . .                  | 386        |
| C.1.2 | Respect des conditions limites . . . . .                               | 388        |
| C.2   | Mise en place du système matriciel . . . . .                           | <b>389</b> |
| C.2.1 | Notations et définitions des opérateurs . . . . .                      | 390        |
| C.2.2 | Ecriture matricielle . . . . .   | 392        |

---

Dans cette annexe, nous allons apporter des précisions quant à la mise en place de l'algorithme **IDB**. Pour cela, nous allons dans un premier temps présenter la décomposition de fonction utilisée pour chaque harmonique sphérique. Dans un second temps, nous donnerons des précisions sur le passage entre l'ensemble  $\mathbb{S}^2$  (représentatif de l'interface) et le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel dans lequel la résolution du système est effectuée. Nous terminerons cette section, en explicitant les matrices et vecteurs du système (4.42).

## C.1 Décomposition du potentiel de vitesse en deux variables séparées

L'objectif de la décomposition de fonctions est de décrire le poids de chaque harmoniques sphériques  $A_{mi}^l$  dans le potentiel de vitesse  $\phi_i$ , par deux fonctions  $f_m^l$  et  $C_m^l$  dépendant chacune d'une seule variable, respectivement  $r_i$  et  $\eta_i$ .

$$A_{mi}^l(r_i, t) = f_{mi}^l(r_i)C_{mi}^l(\eta_i^l) \quad (\text{C.1})$$

On notera  $\mathbb{T}_1^i$  le repère  $(t, r_i, \theta_i, \varphi_i)$  et  $\mathbb{T}_2^i$  le repère  $(\eta_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$ . Si une telle décomposition existe alors elle respecte les relations :

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta_i^l} [f_{mi}^l] \right)_{\mathbb{T}_2^i} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial}{\partial r_i} [C_{mi}^l] \right)_{\mathbb{T}_2^i} = 0 \quad (\text{C.2})$$

Afin de faciliter la résolution du système, nous imposons également la condition suivante.

$$r_i = R(t, \theta_i, \varphi_i) \quad \implies \quad \eta_i^l = t \quad (\text{C.3})$$

### C.1.1 Obtention de la forme de la caractéristique

En supposant l'existence de la fonction caractéristique  $\eta_i^l$  décrite précédemment (C.2), l'équation régissant l'évolution des poids des harmoniques sphériques (4.28) peut s'écrire à l'aide de trois fonctions ( $S_j$ ) :

$$C_{mi}^l S_0 + \left( \frac{\partial C_{mi}^l}{\partial \eta_i^l} \right)_{\mathbb{T}_2^i} S_1 + \left( \frac{\partial^2 C_{mi}^l}{\partial \eta_i^{l2}} \right)_{\mathbb{T}_2^i} S_2 = 0 \quad (\text{C.4})$$

### C.1 Décomposition du potentiel de vitesse en deux variables séparées

---

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = \left( \frac{\partial^2 f_{mi}^l}{\partial r_i^2} \right)_{\top_2^i} + \frac{2}{r_i} \left( \frac{\partial f_{mi}^l}{\partial r_i} \right)_{\top_2^i} - \frac{l(l+1)}{r_i^2} f_{mi}^l \\ S_1 = f_{mi}^l \left( \frac{\partial^2 \eta_i^l}{\partial r_i^2} \right)_{\top_1^i} + 2 \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \left( \frac{\partial f_{mi}^l}{\partial r_i} \right)_{\top_2^i} - \frac{f_{mi}^l}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_i^l} \left[ \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right] \right)_{\top_2^i} \\ \quad + f_{mi}^l \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_i^l} \left[ \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \right] \right)_{\top_2^i} + \frac{2}{r_i} f_{mi}^l \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \\ S_2 = f_{mi}^l \left[ \left( \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \right)^2 - \frac{1}{c_\infty^2} \left( \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right)^2 \right] \end{array} \right. \quad (C.5)$$

En définissant  $f_{mi}^l$  et  $\eta_i^l$  telles que les fonctions  $(S_j)$  soient nulles, l'équation (C.4) est vérifiée indépendamment des variations de  $C_m^l$ . On **impose** dès lors  $(S_j) = 0$ , fournissant trois conditions sur  $\eta_i^l$  et  $f_{mi}^l$ .

- La forme de la fonction  $f_{mi}^l$  est alors entièrement déterminée par la première condition :

$$S_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{mi}^l(r_i) = K_{mi}^{l-1} r^l + \frac{K_{mi}^{l-2}}{r^{l+1}} \quad (C.6)$$

avec  $K_{mi}^{l-1}$  et  $K_{mi}^{l-2}$  des constantes. L'influence des bulles étant nulle à l'infini, le coefficient  $K_{mi}^{l-1}$  est nécessairement nul.

- Afin de d'observer la condition  $S_2 = 0$ , le paramètre  $\eta_i^l$  est soumis à la relation :

$$S_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left( \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \right)^2 = \frac{1}{c_\infty^2} \left( \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right)^2 \quad (C.7)$$

On **impose** :

$$\left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} = -\frac{1}{c_\infty} \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \quad (C.8)$$

- La condition  $S_1 = 0$  peut quant à elle se reformuler sous la forme :

$$0 = f_{mi}^l \left( \frac{\partial^2 \eta_i^l}{\partial r_i^2} \right)_{\top_1^i} + 2 \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \left( \frac{\partial f_{mi}^l}{\partial r_i} \right)_{\top_2^i} + \frac{2}{r_i} f_{mi}^l \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} + f_{mi}^l \left( \frac{\partial t}{\partial \eta_i^l} \right)_{\top_2^i} \left[ \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} \left( \frac{\partial^2 \eta_i^l}{\partial t \partial r_i} \right)_{\top_1^i} - \frac{1}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \left( \frac{\partial^2 \eta_i^l}{\partial t^2} \right)_{\top_1^i} \right] \quad (\text{C.9})$$

Les conditions choisies afin de respecter  $S_0 = 0$  et  $S_2 = 0$ , permettent de la simplifier.

$$\left( \frac{\partial^2 \eta_i^l}{\partial r_i^2} \right)_{\top_1^i} - \frac{2l}{r_i} \left( \frac{\partial \eta_i^l}{\partial r_i} \right)_{\top_1^i} = 0 \quad (\text{C.10})$$

En cas d'existence de la fonction  $\eta_i^l$ , les choix effectués imposent alors sa forme :

$$\eta_i^l = \frac{A_{mi}^l(t, \theta_i, \varphi_i)}{(1-2l)} r^{1-2l} + B_m^l(t, \theta_i, \varphi_i) \quad (\text{C.11})$$

### C.1.2 Respect des conditions limites

Afin de respecter à la fois, la condition limite imposée (Eq (C.3)) et le choix opéré précédemment sur le sens de propagation du paramètre  $\eta_i^l$  (C.8), les fonctions  $A_{mi}^l$  et  $B_m^l$  doivent être solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_m^l(t, \theta_i, \varphi_i) = t - \frac{A_{mi}^l(t, \theta_i, \varphi_i)}{(1-2l)} R_i(t, \theta_i, \varphi_i)^{1-2l} \\ \frac{A(t, \theta_i, \varphi_i)}{r^{2l}} = -\frac{1}{c_\infty} \left[ \frac{r^{1-2l}}{(1-2l)} \left( \frac{\partial A_{mi}^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} + \left( \frac{\partial B_m^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right] \end{array} \right. \quad (\text{C.12})$$

D'après l'équation (Eq. C.11), la caractéristique  $\eta_i^l$  s'écrit :

$$\eta_i^l = t + \frac{A_{mi}^l(t, \theta_i, \varphi_i)}{(1-2l)} \left( r^{1-2l} - R^{1-2l} \right) \quad (\text{C.13})$$

De plus, d'après le système (C.12), la fonction  $A_{mi}^l$  est solution de l'équation :

$$\left[ \frac{r_i^{1-2l} - R_i^{1-2l}}{(1-2l)} \right] \left( \frac{\partial A_{mi}^l}{\partial t} \right)_{\top_1^i} - \left[ \frac{R_i^{-2l}}{(1-2l)} \left( \frac{\partial R_i}{\partial t} \right)_{\top_1^i} - \frac{c_\infty}{r^{2l}} \right] A_{mi}^l + 1 = 0 \quad (\text{C.14})$$

## C.2 Mise en place du système matriciel

---

Un développement du premier ordre permet alors d'approcher la solution à :

$$A_{mi}^l = -\frac{r_i^{2l}}{c_\infty} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_\infty^2}\right) \quad (\text{C.15})$$

La fonction caractéristique  $\eta_i^l$  s'écrit finalement au premier ordre :

$$\eta_i^l = t + \frac{r_i}{c_\infty(2l-1)} \left( 1 - \left( \frac{r_i}{R_i(t, \theta_i, \varphi_i)} \right)^{2l-1} \right) \quad (\text{C.16})$$

La fonction  $\eta_i^l$  précédente permet de considérer la décomposition du poids de chaque harmonique en deux fonctions indépendantes tout en assurant la résolution de l'équation (4.28).

## C.2 Mise en place du système matriciel

Les propriétés des harmoniques sphériques permettent une résolution plus aisée du système dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Cette partie sera consacrée à la mise en place des notations et des opérateurs autorisant le passage d'un problème défini sur  $\mathbb{S}^2$  vers cet espace vectoriel.

Les fonctions mises en place dans le corps du manuscrit ne seront pas redéfinies ici (cf 4.1.4.1.). Celles-ci permettent de représenter les fonctions harmoniques par des vecteurs tel que :

$$(F(\mathcal{Y}_m^l))_{N(u,v)} = \delta_{lu}\delta_{mv} \quad (\text{C.17})$$

Une fonction constante de  $\mathbb{S}^2$  est ainsi décrite dans l'espace vectoriel par :

$$F(a) = a\sqrt{4\pi}F(\mathcal{Y}_0^0) \quad \text{avec } a \text{ un scalaire} \quad (\text{C.18})$$

### C.2.1 Notations et définitions des opérateurs

Afin d'alléger les écritures, nous noterons les composants de la transformée d'une fonction  $f \in \mathbb{S}^2$  par la fonction  $F$  de la façon suivante :

$$F(f)_{N(l,m)} = f \binom{l}{m} \quad (\text{C.19})$$

De même, les composantes des matrices seront également notées selon le degré  $l$  et l'ordre  $m$  de la fonction harmonique qu'elle représente. Ainsi pour toutes matrices  $M \in \mathbb{C}^\infty$  :

$$(M)_{(N(l,m),N(u,v))} = M \binom{l}{m} \binom{u}{v} \quad (\text{C.20})$$

#### C.2.1.1. Multiplication dans l'espace vectoriel

Afin de permettre la transposition du système de  $\mathbb{S}^2$  vers un système matriciel, l'opérateur  $\otimes$  est mise en place. Ce dernier permet de réaliser la multiplication de deux fonctions de  $\mathbb{S}^2$  dans l'espace vectoriel. Ainsi, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  appartenant à  $\mathbb{S}^2$  :

$$F(fg) = F(f) \otimes F(g) \quad (\text{C.21})$$

avec :

$$(fg) \binom{l}{m} = \sum_{[p,u]=[0,0]}^{[\infty,\infty]} \sum_{[q,v]=-[p,u]}^{[p,u]} f \binom{p}{q} g \binom{u}{v} \mathcal{H}_f \binom{p}{q} \binom{u}{v} \binom{l}{m} \quad (\text{C.22})$$

et pour tout  $((l, m), (a, b), (u, v)) \in \mathbb{E}^{\mathbb{L}^3}$  :

$$\mathcal{H}_f \binom{a}{b} \binom{u}{v} \binom{l}{m} = \langle \mathcal{Y}_m^l | \mathcal{Y}_b^a \mathcal{Y}_v^u \rangle \quad (\text{C.23})$$

De plus, en considérant deux vecteurs  $X$  et  $Y$  appartenant à  $\mathbb{C}^\infty$ , le produit de  $X$  et  $Y$  par l'opérateur  $\otimes$  peut s'écrire à l'aide d'une matrice dépendant d'un des deux vecteurs.

$$Y \otimes X = \underline{\mathbf{M}} X \quad (\text{C.24})$$

avec :

$$\underline{\mathbf{M}} \binom{l}{m} \binom{p}{q} = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=-a}^a Y \binom{a}{b} \mathcal{H}_f \binom{p}{q} \binom{a}{b} \binom{l}{m} \quad (\text{C.25})$$

## C.2 Mise en place du système matriciel

---

La matrice  $\underline{\mathbf{M}}$  sera notée  $[Y \otimes]$ .

On étendra cette notation telle que pour deux matrices  $\underline{\mathbf{M}}$  et  $\underline{\mathbf{N}}$  appartenant à  $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$ , et deux vecteurs  $X$  et  $Y$  appartenant à  $\mathbb{C}^\infty$ , la matrice  $[\underline{\mathbf{N}}Y \otimes \underline{\mathbf{M}}]$  permette de vérifier la relation :

$$\underline{\mathbf{N}}Y \otimes \underline{\mathbf{M}}X = [\underline{\mathbf{N}}Y \otimes \underline{\mathbf{M}}] X \quad (\text{C.26})$$

avec :

$$[\underline{\mathbf{N}}Y \otimes \underline{\mathbf{M}}] \binom{l}{m} : \binom{r}{s} = \sum_{[p,u]=[0,0]}^{[\infty,\infty]} \sum_{[q,b]=-[p,a]}^{[p,a]} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=-c}^c \underline{\mathbf{M}} \binom{p}{q} : \binom{r}{s} \underline{\mathbf{N}} \binom{a}{b} : \binom{c}{d} Y \binom{c}{d} \mathcal{H}_f \binom{p}{q} : \binom{a}{b} : \binom{l}{m} \quad (\text{C.27})$$

### C.2.1.2. Fonctions harmoniques et transformations usuelles

Afin de calculer les dérivées spatiales des fonctions harmoniques, nous considérerons les matrices :

$$\mathcal{H}_\varphi \binom{l}{m} : \binom{u}{v} = \langle \mathcal{Y}_v^u | \left( \frac{\partial \mathcal{Y}_m^l}{\partial \varphi_i} \right)_{\mathbb{T}_1^i} \rangle \quad (\text{C.28})$$

$$\mathcal{H}_\theta \binom{l}{m} : \binom{u}{v} = \langle \mathcal{Y}_v^u | \frac{1}{\sin(\varphi_i)} \left( \frac{\partial \mathcal{Y}_m^l}{\partial \theta_i} \right)_{\mathbb{T}_1^i} \rangle \quad (\text{C.29})$$

Le gradient surfacique d'une fonction de  $\mathbb{S}^2$  peut alors être calculé à l'aide de ces matrices :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=-u}^u \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f \binom{l}{m} \mathcal{H}_\varphi \binom{l}{m} : \binom{u}{v} \right] \mathcal{Y}_v^u \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{1}{\sin(\varphi)} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=-u}^u \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f \binom{l}{m} \mathcal{H}_\theta \binom{l}{m} : \binom{u}{v} \right] \mathcal{Y}_v^u \quad (\text{C.31})$$

Nous verrons par la suite que la définition de ces opérateurs facilitent l'écriture du système (4.32) dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Numériquement, elle réduit également le temps de calcul en réalisant des opérations préliminaires sur les fonctions harmoniques utiles pour le reste du calcul (au travers du calcul de  $\mathcal{H}_f, \mathcal{H}_\theta$  et  $\mathcal{H}_\varphi$ ).



### C.2.2 Ecriture matricielle

Maintenant que nous avons défini les notations et les opérateurs permettant l'écriture matricielle du système (4.32), nous allons expliciter la formulation des matrices et vecteurs présents dans le système (4.42).

En effet, les relations de saut de masse (2.20) et de quantité de mouvement (2.38) imposent des conditions limites sur le potentiel de vitesse à l'interface :

$$\text{Pour } r_i = R_i \left\{ \begin{array}{l} (\nabla \phi_i \cdot \mathbf{e}_r^i) = \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{e}_r^i - \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l} \mathbf{n}_I^g \cdot \mathbf{e}_r^i - \left[ \nabla \phi_{ext} + \sum_{j \neq i} \nabla \phi_j \right] \cdot \mathbf{e}_r^i \\ \frac{\partial}{\partial t} [\phi_i] = \frac{c_\infty^{l2} - c_I^{l2}}{n-1} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \left[ \left( \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial t} \right)_{\top_1^i} + \sum_{j \neq i} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right] \end{array} \right. \quad (\text{C.32})$$

En appliquant la fonction  $F$  sur ce système, il s'écrit dans l'espace vectoriel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{M}_i^1 C_i + \frac{1}{c_\infty} \mathbf{M}_i^2 \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)}{\left[ \mathbf{Q}_i^1 + \frac{1}{c_\infty} \mathbf{Q}_i^2 \right] \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)} = -S_i^M + \left( \frac{dR_i}{dt} \right) \\ = S_i^Q - U_i^1 - \frac{1}{c_\infty} \mathbf{U}_i^2 \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right) \end{array} \right. \quad (\text{C.33})$$

- Le vecteur  $S_i^M$  représente le terme source de l'équation de conservation de la masse.

$$S_i^M = F \left( \frac{\dot{m}_M^g}{\rho_M^l} \mathbf{n}_I^g \cdot \mathbf{e}_r^i + \left[ \nabla \phi_{ext} + \sum_{j \neq i} \nabla \phi_j \right] \cdot \mathbf{e}_r^i \right) \quad (\text{C.34})$$

- Le vecteur  $S_i^Q$  représente le terme source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement intégrée.

$$S_i^Q = F \left( \frac{c_\infty^{l2} - c_I^{l2}}{n-1} - \left( \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial t} \right)_{\top_1^i} - \sum_{j \neq i} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right) \quad (\text{C.35})$$

- Le vecteur  $U_I^1$  représente la partie de l'énergie cinétique du fluide dans un cas non compressible tandis que  $\underline{\mathbf{U}}_i^2$  permet de considérer la partie liée à l'ordre supérieure

## C.2 Mise en place du système matriciel

---

dépendante de la variation du potentiel de vitesse.

$$F\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) = U_i^1 + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{U}}_i^2 \left(\frac{dC_i}{d\eta_i}\right) \quad (\text{C.36})$$

Les relations de changement de variables entre  $\mathbb{T}_1^i$  et  $\mathbb{T}_2^i$  établissent une correspondance entre les dérivées partielles dans chacun de ces repères. Les matrices  $\underline{\mathbf{J}}_i^1$  et  $\underline{\mathbf{J}}_i^2$  sont définies telles que sur l'interface de la bulle  $i$  :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\underline{\mathbf{J}}_i^1 + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{J}}_i^2\right) \left(\frac{d}{d\eta_i}\right) \quad (\text{C.37})$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{J}}_i^1 (u : l : m) = \sqrt{4\pi} \mathcal{H}_f (l : 0 : u) \\ \underline{\mathbf{J}}_i^2 (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \left( \left(\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)_{\mathbb{T}_1^i} \right)_{N(p,q)} \mathcal{H}_f (l : p : u) \end{cases} \quad (\text{C.38})$$

Dans la suite de cette annexe, chacun des termes du système matriciel est explicité.

### C.2.2.1. Expressions des matrices du système

Les variations temporelles et spatiales du potentiel de vitesse de la bulle  $i$  sur son interface peuvent être retranscrites dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

**Gradient du potentiel de vitesse selon  $\mathbf{e}_r^i$  :**

$$F(\nabla\phi_i \cdot \mathbf{e}_r^i) = \underline{\mathbf{G}}_i^{r1} C_i + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{G}}_i^{r2} \left(\frac{dC_i}{d\eta_i}\right)_{\mathbb{T}_2^i} \quad (\text{C.39})$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{G}}_i^{r1} (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p -(l+1) R (p : q : i^{-l-2}) \mathcal{H}_f (p : l : m : u) \\ \underline{\mathbf{G}}_i^{r2} (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p -R (p : q : i^{-l-1}) \mathcal{H}_f (p : l : m : u) \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

Gradient du potentiel de vitesse selon  $e_\varphi^i$  :

$$F(\nabla\phi_i \cdot e_\varphi^i) = \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi 1} C_i + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi 2} \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)_{\top_2^i} \quad (\text{C.41})$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi 1} (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r R (p : i : -l-2) \mathcal{H}_\varphi (l : m : r) \mathcal{H}_f (r : p : q : u) \\ \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi 2} (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \langle \mathcal{Y}_q^p | \frac{1}{R_i^{l+2}} \left( \frac{\partial R_i}{\partial \varphi_i} \right)_{\top_1^i} \rangle \mathcal{H}_f (l : m : p : q : u) \end{cases} \quad (\text{C.42})$$

$$\text{Et } F \left( \frac{1}{R_i^{l+2}} \left( \frac{\partial R_i}{\partial \varphi_i} \right)_{\top_1^i} \right) = F (R_i^{-l-2}) \otimes F \left( \left( \frac{\partial R_i}{\partial \varphi_i} \right)_{\top_1^i} \right).$$

Gradient du potentiel de vitesse selon  $e_\theta^i$  :

$$F(\nabla\phi_i \cdot e_\theta^i) = \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta 1} C_i + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta 2} \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)_{\top_2^i} \quad (\text{C.43})$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta 1} (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r R (p : i : -l-2) \mathcal{H}_\theta (l : m : r) \mathcal{H}_f (r : p : q : u) \\ \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta 2} (u : l : m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \langle \mathcal{Y}_q^p | \frac{1}{R_i^{l+2} \sin(\varphi_i)} \left( \frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} \right)_{\top_1^i} \rangle \mathcal{H}_f (l : m : p : q : u) \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

$$\text{Et } F \left( \frac{1}{R_i^{l+2} \sin(\varphi_i)} \left( \frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} \right)_{\top_1^i} \right) = F (R_i^{-l-2}) \otimes F \left( \frac{1}{\sin(\varphi_i)} \left( \frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} \right)_{\top_1^i} \right).$$

Dérivée temporelle du potentiel de vitesse :

$$F \left( \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{\top_1^i} \right) = \underline{\mathbf{G}}_i^{t1} \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)_{\top_2^i} + \frac{1}{c_\infty} \underline{\mathbf{G}}_i^{t2} \left( \frac{dC_i}{d\eta_i} \right)_{\top_2^i} \quad (\text{C.45})$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{G}}_i^{t1} (u \cdot l \cdot m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p R (p \cdot i \cdot -l-1) \mathcal{H}_f (l \cdot m \cdot p \cdot u \cdot v) \\ \underline{\mathbf{G}}_i^{t2} (u \cdot l \cdot m) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \langle \mathcal{Y}_q^p | \frac{1}{R_i^{l+1}} \left( \frac{\partial R_i}{\partial t} \right)_{\Gamma_1^i} \rangle \mathcal{H}_f (p \cdot l \cdot m \cdot u \cdot v) \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

$$\text{et } F \left( \frac{1}{R_i^{l+1}} \left( \frac{\partial R_i}{\partial t} \right)_{\Gamma_1^i} \right) = F \left( \frac{1}{R_i^{l+1}} \right) \otimes F \left( \left( \frac{\partial R_i}{\partial t} \right)_{\Gamma_1^i} \right).$$

D'après les notations considérées précédemment, on obtient :

$$\underline{\mathbf{M}}_i^1 = \underline{\mathbf{G}}_i^{r1} \quad \underline{\mathbf{M}}_i^2 = \underline{\mathbf{G}}_i^{r2} \quad \underline{\mathbf{Q}}_i^1 = \underline{\mathbf{G}}_i^{t1} \quad \underline{\mathbf{Q}}_i^2 = \underline{\mathbf{G}}_i^{t2} \quad (\text{C.47})$$

### C.2.2.2. Expression des vecteurs

Le terme de droite de l'équation de quantité de mouvement intégrée peut être approché par un développement limité au premier ordre. La relation de saut de quantité de mouvement à l'interface détermine par la suite la pression du liquide à l'interface.

$$\frac{c_\infty^{l2} - c_I^{l2}}{n-1} = \frac{p_\infty - p_I^l}{\rho_\infty} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{c_\infty^2} \right) \quad (\text{C.48})$$

Avec :

$$p_I^l = p_I^g - 2\sigma H_I^g - \left( \sum_k \underline{\boldsymbol{\tau}}^k \cdot \mathbf{n}_I^k \right) \cdot \mathbf{n}_I^g + \left( \frac{1}{\rho_M^l} - \frac{1}{\rho_M^g} \right) \dot{m}_M^g \quad (\text{C.49})$$

Il faut désormais définir la transformée de ces termes dans l'espace vectoriel :

#### Pression à l'infini :

Les conditions d'homogénéité à l'infini nous permettent directement d'écrire :

$$p_\infty (l \cdot m) = p_\infty(t) \sqrt{4\pi} F(\mathcal{Y}_0^0) \quad (\text{C.50})$$

#### Pression à l'intérieur des bulles :

Ne résolvant pas l'équation de température, nous considérons une vaporisation et une condensation instantanées. Le transfert de masse des gaz incondensables est quant

à lui négligé. Dès lors nous obtenons :

$$p_I^g(l) = (p_{sat} + p_a^g) \sqrt{4\pi} F(\mathcal{Y}_0^0) \quad (C.51)$$

avec :

$$\begin{cases} (p_e^g)_i = p_{sat}(T^l) & \text{et} & \dot{m}_e^g = 0 \\ (p_a^g)_i = (p_{a0}^g)_i \left( \frac{V_B^i(t)}{V_{B0}^i} \right)^{\kappa_a^g} & \text{et} & \dot{m}_a^g = 0 \end{cases} \quad (C.52)$$

La formulation dans l'espace vectoriel du rayon des bulles permet de calculer rapidement leurs volumes puisque seule la première harmonique  $\mathcal{Y}_0^0$  rentre en considération.

$$V_B^i = \frac{\sqrt{4\pi}}{3} \sum_{l=0}^l R_i \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (C.53)$$

### Tension superficielle :

La courbure moyenne de l'interface peut être calculée grâce à la formulation du vecteur normale  $\mathbf{n}_I^g$ .

$$-2H_I^g = \nabla_S \cdot \mathbf{n}_I^g \quad (C.54)$$

Le plan tangent à l'interface étant défini par les deux vecteurs  $\frac{\partial}{\partial \theta_i} [R(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_r^i]$  et  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i} [\partial R(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_r^i]$ , le vecteur normal peut être calculé par :

$$\mathbf{n}_I^g = n_{Ir}^{gi} \mathbf{e}_r^i + n_{I\varphi}^{gi} \mathbf{e}_\varphi^i + n_{I\theta}^{gi} \mathbf{e}_\theta^i \quad (C.55)$$

Avec :

$$\begin{cases} n_{Ir}^{gi} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial R \mathbf{e}_r^i}{\partial \theta_i} \wedge \frac{\partial R \mathbf{e}_r^i}{\partial \varphi_i} \right\|} R_i^2 \sin(\varphi_i) \\ n_{I\varphi}^{gi} = -\frac{1}{\left\| \frac{\partial R \mathbf{e}_r^i}{\partial \theta_i} \wedge \frac{\partial R \mathbf{e}_r^i}{\partial \varphi_i} \right\|} \sin(\varphi_i) R_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} [R_i] \\ n_{I\theta}^{gi} = -\frac{1}{\left\| \frac{\partial R \mathbf{e}_r^i}{\partial \theta_i} \wedge \frac{\partial R \mathbf{e}_r^i}{\partial \varphi_i} \right\|} R_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} [R_i] \end{cases} \quad (C.56)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} [R_i \mathbf{e}_r^i] = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} [R_i] \mathbf{e}_r^i + R_i \mathbf{e}_\varphi^i \quad (\text{C.57})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} [R_i \mathbf{e}_r^i] = \frac{\partial}{\partial \theta_i} [R_i] \mathbf{e}_r^i + R_i \sin(\varphi_i) \mathbf{e}_\theta^i \quad (\text{C.58})$$

La courbure de l'interface peut par la suite être calculée localement grâce à l'opérateur de divergence surfacique :

$$\nabla_S \cdot \mathbf{n}_I^g = \frac{1}{R_i} \left( 2n_{I_r}^{g_i} + n_{I_\varphi}^{g_i} \cotan(\varphi_i) + \left( \frac{\partial n_{I_\varphi}^{g_i}}{\partial \varphi_i} \right) + \frac{1}{\sin(\varphi_i)} \left( \frac{\partial n_{I_\theta}^{g_i}}{\partial \theta_i} \right) \right) \quad (\text{C.59})$$

La courbure de l'interface reposant sur des considérations surfaciques, les fonctions  $\mathcal{H}_\theta$  et  $\mathcal{H}_\varphi$  accélèrent son calcul.

#### Viscosité et transfert de masse :

Nos hypothèses négligent la contribution de la viscosité et le saut de vitesse à l'interface. Néanmoins, ces deux phénomènes peuvent être pris en compte, ce qui représente une perspective de développement pour le programme.

Afin de caractériser l'influence des autres bulles à l'interface, nous considérerons la décomposition de l'influence des autres bulles et des conditions à l'infini sur l'interface de la bulle  $i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Phi_i^r)_{N(l,m)} = \langle \mathcal{Y}_m^l | \left[ \nabla \phi_{ext} + \sum_{j \neq i} \nabla \phi_j \right] \cdot \mathbf{e}_r^i \rangle \\ (\Phi_i^\varphi)_{N(l,m)} = \langle \mathcal{Y}_m^l | \left[ \nabla \phi_{ext} + \sum_{j \neq i} \nabla \phi_j \right] \cdot \mathbf{e}_\varphi^i \rangle \\ (\Phi_i^\theta)_{N(l,m)} = \langle \mathcal{Y}_m^l | \left[ \nabla \phi_{ext} + \sum_{j \neq i} \nabla \phi_j \right] \cdot \mathbf{e}_\theta^i \rangle \\ (\Phi_i^t)_{N(l,m)} = \langle \mathcal{Y}_m^l | \left( \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial t} \right)_{\Gamma_1^i} + \sum_{j \neq i} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right)_{\Gamma_1^i} \rangle \end{array} \right. \quad (\text{C.60})$$

Ces vecteurs sont obtenus numériquement par une discrétisation de l'interface (cf 4.1.4.3.) puis par une projection de ces fonctions sur la base des harmoniques sphériques.

Finalement, les autres termes sources peuvent s'écrire en fonction des vecteurs et matrices définies précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i^M = \Phi_i^r \\ S_i^Q = \frac{p_{inf} - p_{sat} - p_a^g}{\rho_\infty} \sqrt{4\pi} X_0^0 - \sigma F (\nabla_S \cdot \mathbf{n}_I^g) - \Phi_i^t \\ U_i^1 = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{G}}_i^{r1} C_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{r1} C_i + \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi1} C_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi1} C_i + \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta1} C_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta1} C_i] \\ \quad + \frac{1}{2} [\Phi_i^r \otimes \Phi_i^r + \Phi_i^\varphi \otimes \Phi_i^\varphi + \Phi_i^\theta \otimes \Phi_i^\theta] \\ \underline{U}_i^2 = [\underline{\mathbf{G}}_i^{r1} C_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{r2}] + [\underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi1} C_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi2}] + [\underline{\mathbf{G}}_i^{\theta1} C_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta2}] \\ \quad + \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{I}}\Phi_i^r \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{r2}] + [\underline{\mathbf{I}}\Phi_i^\varphi \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{\varphi2}] + [\underline{\mathbf{I}}\Phi_i^\theta \otimes \underline{\mathbf{G}}_i^{\theta2}] \end{array} \right. \quad (\text{C.61})$$