Pilotage de stratégies de calcul par décomposition de domaine par des objectifs de précision sur des quantités d'intérêt

Valentine Rey

▶ **To cite this version:**

Valentine Rey. Pilotage de stratégies de calcul par décomposition de domaine par des objectifs de précision sur des quantités d'intérêt. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2015. Français. NNT : 2015SACLN018 . tel-01246413

HAL Id: tel-01246413

https://theses.hal.science/tel-01246413

Submitted on 18 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2015SACLN018

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY,
préparée à l'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

ECOLE DOCTORALE N°579
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences

Spécialité
MÉCANIQUE DES SOLIDES

Présentée par
Valentine Rey

Sujet de la thèse

Pilotage des stratégies de calcul par décomposition de domaine par des objectifs de précision sur des quantités d'intérêt

Présentée et soutenue à Cachan le 11 décembre 2015 devant le jury composé de :

Nicolas Moës	Professeur, Ecole Centrale Nantes	Président
Anthony Gravouil	Professeur, INSA Lyon	Examinateur
Pedro Dièz	Professeur, Université polytechnique de Catalogne	Rapporteur
François-Xavier Roux	Professeur, ONERA	Rapporteur
Christian Rey	Professeur, SAFRAN TECH	Directeur de thèse
Pierre Gosselet	Chargé de recherche, LMT-Cachan	Co-Encadrant

LMT-Cachan
ENS Cachan / CNRS / Université Paris-Saclay
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des membres de mon jury de thèse. Mes premiers remerciements vont à ceux qui ont dirigé et encadré mes travaux. Merci à Christian et Pierre, qui chacun à leur manière, ont su être présents tout en me laissant mon autonomie. Vous m'avez appris un métier que j'aime profondément et avez participé à mon épanouissement scientifique et professionnel. Ensuite, je tiens à remercier mes rapporteurs, François-Xavier Roux et Pedro Diez, pour avoir accepté de lire et de rapporter mes travaux. Enfin, merci à Nicolas Moës pour avoir accepté de présider ce jury et à Anthony Gravouil pour avoir écouté ma soutenance. J'espère avoir répondu à vos questions. J'ai été en tous cas ravie de vous présenter mon travail.

A présent, je tiens à remercier l'ensemble des gens au laboratoire et/ou du département de génie mécanique qui m'ont permis de passer trois superbes années. Mes premiers remerciements vont aux membres de l'équipe erreur : Frisou, Ludo, Eric, OP, François, pour leur bonne humeur puis plus récemment Pierre-Eric, Basile, Camille à qui je souhaite de prendre autant de plaisir que moi pendant leur thèse. Reconstruire des champs admissibles n'est pas toujours tâche facile et ce fut très agréable de se sentir comprise et épaulée dans les problématiques d'estimation d'erreur. Merci à Nicolas qui a partagé mon bureau pendant plus de deux ans avec sa bonne humeur et son humour. Merci également à Manu, PAG, PAB, Peewee, Jean-Luc, Paul, Rana, Werty, Christine, Frédéric, Fabrice, Lydia, Cédric et à tous ceux que j'ai oubliés. Merci à Danielle pour m'avoir organisé ce magnifique pot et pour toujours avoir été là pour moi.

Merci aux personnes qui ont accepté d'assister à mes répétitions de soutenance et dont les conseils m'ont aidée à faire une belle prestation finale. Merci à tous ceux qui sont venus m'écouter le jour J (ou encore le *D day* (*defense day*)) : Beaupetit, Lele, Nicolas, Sam, Elena, Fred, Augustinou, Vlad, PAG, Eric (qui est venu de loin), Clémence, Camille, John-Eric (qui a immortalisé ce moment sur carte mémoire). J'ai été très touchée par votre présence.

Enfin, merci à John-Eric pour avoir tout fait pour que je fasse ma soutenance dans les meilleures conditions. Plus globalement, merci de m'avoir accompagnée dans toute cette partie de ma vie que fut l'ENS et le doctorat. Merci de n'avoir jamais cessé de me répéter que je pouvais avoir confiance en moi.

Résumé

Ces travaux de recherche ont pour objectif de contribuer au développement et à l'exploitation d'outils de vérification des problèmes de mécanique linéaires dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Les apports de cette thèse sont multiples.

— Nous proposons d'améliorer la qualité des champs statiquement admissibles nécessaires à l'évaluation de l'estimateur par une nouvelle méthodologie de reconstruction des contraintes en séquentiel et par des optimisations du calcul de l'intereffort en cadre sous-structuré.
— Nous démontrons des bornes inférieures et supérieures de l'erreur séparant l'erreur algébrique (due au solveur itératif) de l'erreur de discrétisation (due à la méthode des éléments finis) tant pour une mesure globale que pour une quantité d'intérêt. Cette séparation permet la définition d'un critère d'arrêt objectif pour le solveur itératif.
— Nous exploitons les informations fournies par l'estimateur et les espaces de Krylov générés pour mettre en place une stratégie auto-adaptative de calcul consistant en une chaîne de résolution mettant à profit remaillage adaptatif et recyclage des directions de recherche.

Nous mettons en application le pilotage du solveur par un objectif de précision sur des exemples mécaniques en deux dimensions.

Mots-clefs : Méthode des éléments finis, vérification, erreur en relation de comportement, quantité d'intérêt, méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, FETI, BDD, séparation des sources d'erreur, remaillage adaptatif, espaces de Krylov.

Table des matières

Table des matières 7

Table des figures 11

Liste des tableaux 15

Liste des Algorithmes 17

Introduction 21

I Etat de l'art sur la vérification et les méthodes de décomposition de domaine et mise en évidence des deux sources d'erreur 25

1 Estimation de l'erreur de discrétisation 29
- 1.1 Problème de référence et méthode des éléments finis . . . 30
  - 1.1.1 Problème modèle . . . 30
  - 1.1.2 Discrétisation et résolution par la méthode des éléments finis . . . 32
  - 1.1.3 Erreur de discrétisation . . . 33
- 1.2 Erreur globale . . . 34
  - 1.2.1 Méthodes basées sur les résidus . . . 34
  - 1.2.2 Méthodes basées sur le lissage des contraintes . . . 38
  - 1.2.3 Méthodes basées sur l'erreur en relation de comportement . . . 38
  - 1.2.4 Borne inférieure de l'erreur globale . . . 44
- 1.3 Erreur locale . . . 46
  - 1.3.1 Erreur de pollution . . . 46
  - 1.3.2 Estimation heuristique . . . 47
  - 1.3.3 Estimation basée sur les extracteurs et le problème adjoint . . . 47

2 Méthodes de décomposition de domaine 53
- 2.1 Ecriture continue . . . 54
- 2.2 Discrétisation et résolution . . . 55
- 2.3 Approche primale . . . 58

2.3.1 Problème d'interface . . . 58
2.3.2 Résolution du problème d'interface . . . 59
2.4 Approche duale . . . 59
2.4.1 Problème d'interface . . . 59
2.4.2 Résolution du problème d'interface . . . 61
2.5 Autres approches . . . 61

3 Estimation d'erreur en cadre sous-structuré et sources d'erreur 65
3.1 Un estimateur parallèle basé sur l'erreur en relation de comportement . . . 66
3.2 Convergence rapide de l'estimateur . . . 68
3.3 Séparation des sources d'erreur : un état des lieux . . . 71
3.3.1 Erreur due à la gestion de la non-linéarité . . . 72
3.3.2 Erreur stochastique . . . 74
3.3.3 Erreur PGD . . . 75
3.3.4 Dans le cas des méthodes de sous-structuration . . . 75
3.3.5 Dans le cas de la méthode des volumes finis . . . 76
3.3.6 Commentaires . . . 77

II Contributions à la construction de champs admissibles 79

4 Une nouvelle méthode de reconstruction de champs statiquement admissibles en séquentiel 83
4.1 Principes . . . 84
4.1.1 Choix des inconnues et contraintes associées . . . 84
4.1.2 Elimination des arêtes externes et définition du second membre . . . 86
4.1.3 Ecriture de la condition de prolongement forte à l'échelle globale . . . 87
4.1.4 Résolution des problèmes locaux . . . 87
4.2 Implémentation numérique . . . 88
4.2.1 Propriétés de $\mathbf{\Delta}$ . . . 88
4.2.2 Etude de $\mathbf{G}$ . . . 90
4.2.3 Résolution efficace . . . 91
4.2.4 Choix de l'élément du noyau . . . 93
4.3 Résultats sur la structure 2 . . . 95

5 Reconstruction améliorée des inter-efforts 97
5.1 Rappels sur la méthode de reconstruction d'un champ statiquement admissible en cadre sous-structuré . . . 98
5.2 Le cas particulier des points multiples . . . 100
5.2.1 Retour sur l'opérateur d'assemblage dual . . . 100
5.2.2 Gestion des points multiples pour l'estimation d'erreur . . . 103
5.3 Application à FETI-DP . . . 106
5.3.1 L'algorithme FETI-DP . . . 107

5.3.2 Reconstruction parallèle de champs admissibles et estimation de l'erreur . . . 109
5.4 Cas d'une interface intersectant un bord de Dirichlet . . . 111
5.4.1 Mise en évidence . . . 111
5.4.2 Amélioration proposée . . . 112
5.4.3 Mise en œuvre . . . 113

III Séparation des sources d'erreur et définition du nouveau critère d'arrêt dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement : pilotage de la résolution 115

6 Estimation d'erreur globale 119
6.1 Borne supérieure de l'erreur globale . . . 120
6.1.1 Nouvelle borne séparant les contributions . . . 120
6.1.2 Définition d'un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif . . . 122
6.1.3 Exemples numériques . . . 122
6.2 Borne inférieure de l'erreur globale . . . 124
6.2.1 Borne inférieure de l'erreur globale en cadre sous-structuré . . . 125
6.2.2 Construction d'un estimateur continu en cadre sous-structuré . . . 128
6.2.3 Exemples numériques . . . 129

7 Estimation d'erreur d'une quantité d'intérêt 135
7.1 Résolution des problèmes de référence et adjoint . . . 136
7.1.1 Ecriture continue sous-structurée du problème adjoint . . . 136
7.1.2 Ecriture discrète sous-structurée du problème adjoint . . . 137
7.1.3 Résolution des problèmes . . . 137
7.2 Reconstruction des champs admissibles au cours des itérations . . . 137
7.3 Nouvelle borne séparant les contributions . . . 139
7.3.1 Encadrement fondamental . . . 139
7.3.2 Propriétés de la quantité $I_{HH,1}$ . . . 140
7.4 Définition d'un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif . . . 142
7.5 Exemples numériques . . . 143
7.5.1 Structure 1 . . . 143
7.6 Amélioration de l'estimation d'erreur locale à l'aide d'une borne inférieure 144
7.6.1 Rappels du cas séquentiel . . . 144
7.6.2 En cadre sous-structuré . . . 145
7.6.3 Illustration numérique . . . 147

IV Amélioration de la qualité de la solution et recyclage de l'information : procédure auto-adaptative 149

8 Remaillage adaptatif 153

8.1 Remaillage adaptatif se basant sur une carte d'erreur 154
8.1.1 Le remaillage adaptatif en séquentiel 154
8.1.2 Application au cas sous-structuré 155
8.2 Remaillage local par sous-domaine 156
8.2.1 Motivations 156
8.2.2 Gestion de l'incompatibilité de discrétisation 157
8.2.3 Illustrations numériques 160

9 Recyclage des directions de recherche 165
9.1 Motivations 166
9.2 Réutilisation des directions de recherche 166
9.3 Les méthodes Krylov-augmenté 166
9.4 Mise en œuvre pour des résolutions successives 168
9.4.1 Raffinement local 168
9.4.2 Remaillage adaptatif 170

Conclusion 175

Annexe 179

Bibliographie 183

Table des figures

1.1 Problème de référence 30
1.2 Illustration des opérateurs de bords 33

2.1 Exemples d'opérateurs de trace et d'assemblage (primaux et duaux) . . . 56

3.1 *Gamma-shaped structure* : chargement et sous-structuration 70
3.2 *Gamma-shaped structure* : estimateurs séquentiel et parallèle pour différentes tailles de maillage (h) 70
3.3 *Gamma-shaped structure* : évolution de l'estimateur parallèle au cours des itérations 70
3.4 *Gamma-shaped structure* : évolution de la carte d'erreur fournie par l'estimateur parallèle au cours des itérations 70
3.5 Les deux sources d'erreur (discrétisation et algébrique) 72

4.1 Séparation des réactions entre deux éléments adjacents 86
4.2 Noyau de la matrice $\mathbf{\Delta}$: *star-patches* internes et trous 89
4.3 *Star-patches*, numérotation des éléments arêtes de bord (b) et arêtes radiales (r) 91
4.4 Structure pré-fissurée : estimateurs 96

5.1 Construction d'un représentant continu de l'effort 99
5.2 Opérateurs d'assemblage primal 101
5.3 Opérateurs d'assemblage dual classiques 101
5.4 Opérateurs d'assemblage dual non redondants 102
5.5 Opérateurs d'assemblage dual non ponctuels 102
5.6 Structure à forte hétérogénéité : chargement (gauche) et sous-structuration (droite) 103
5.7 Cartes de contribution à l'erreur après un calcul par décomposition de domaine (gauche) $\theta_{DD} = 0.054233$ et après un calcul séquentiel (droite) $\theta_{seq} = 0.00033852$ 104
5.8 *Star-patch* reconstitué au point multiple 106
5.9 Cartes de contribution à l'erreur après un calcul séquentiel (gauche) $\theta_{seq} = 0.00033852$ et en sous-structuré avec optimisation au point multiple (droite) $\theta_{DDoptim} = 0.00046157$ 107
5.10 Poutre rectangulaire : chargement, conditions aux limites et sous-structuration 111

5.11 Poutre rectangulaire : cartes de contributions à l'erreur (séquentiel et sous-structuré) . . . 112
5.12 Interface intersectant une condition de Dirichlet : ancienne reconstruction du représentant continu . . . 112
5.13 Interface intersectant une condition de Dirichlet : nouvelle reconstruction du représentant continu . . . 113
5.14 Poutre rectangulaire : cartes de contributions à l'erreur (séquentiel et sous-structuré avec optimisation) . . . 114

6.1 Structure 1 : évolution des estimateurs au cours des itérations . . . 124
6.2 Structure 1 : convergence des estimateurs et séparation des sources d'erreur 124
6.3 Structure 2 : convergence des estimateurs et séparation des sources d'erreur 132
6.4 Structure 2 : convergence de la distribution spatiale de l'erreur de discrétisation . . . 132
6.5 Structure 1 : évolution de la borne inférieure de l'erreur calculée à convergence en fonction du pas h du maillage . . . 133
6.6 Structure 1 : différentes sous-structurations . . . 133
6.7 Structure 1 : séparation des sources d'erreur dans les bornes supérieure et inférieure . . . 134
6.8 Structure 1 : évolution des deux bornes inférieures et de l'erreur exacte au cours des itérations . . . 134

7.1 Structure 1 : estimateurs d'erreur avec séparation des sources . . . 143

8.1 Structure 2 : évolution du maillage au cours du remaillage adaptatif . . . 156
8.2 Raffinement local du sous-domaine 1 . . . 157
8.3 Structure 1 : remaillage hiérarchique sur le sous-domaine central . . . 162
8.4 Influence de la distance d . . . 163
8.5 Structure 2 : contributions des sous-domaines à l'erreur pour les problèmes direct et adjoint . . . 164

9.1 Structure 2 : évolution des résidus après raffinement du sous-domaine 6 avec ou sans recyclage . . . 169
9.2 Structure 2 : évolution des résidus après raffinement du sous-domaine 6 avec ou sans recyclage . . . 170
9.3 Structure 2 : évolution des résidus après remaillage adaptatif avec ou sans recyclage . . . 171
9.4 Structure 1 : décomposition en 9 sous-domaines . . . 179
9.5 Amplitude de la solution en déplacement (problème direct à gauche et adjoint à droite) . . . 179
9.6 Chargement du problème direct (bleu) et adjoint (orange) et décomposition. . . . 180
9.7 Contraintes de Von Mises pour le problème direct (gauche) et adjoint (droite). . . . 181
9.8 Amplitude de la solution en déplacement du problème adjoint (et zoom) . . . 182
9.9 $\frac{h}{2^1}$ . . . 182

9.10 $\frac{h}{2^2}$ 182
9.11 $\frac{h}{2^3}$ 182

Liste des tableaux

1.1 Synthèse des méthodes des résidus implicites 37

4.1 Structure 2 : estimateurs pour différentes méthodes de reconstruction de champs (EET, *Flux-free*, STARFLEET) 96

5.1 Structure avec forte hétérogénéité : paramètres 104
5.2 Poutre rectangulaire : estimateurs parallèle et séquentiel 111
5.3 Poutre rectangulaire : estimateurs 113

6.1 Structure 1 : paramètres 123
6.2 Structure 2 : paramètres 125
6.3 Structure 1 : paramètres 130
6.4 Structure 1 : bornes supérieures et inférieures relatives pour différentes sous-structurations 130
6.5 Structure 1 : paramètres 130

7.1 Structure 1 : paramètres 143
7.2 Structure 1 : estimateurs d'erreur locale en séquentiel et en parallèle . . . 143
7.3 Structure 2 : paramètres 147
7.4 Structure 2 : encadrements de la quantité d'intérêt avec ou sans exploitation des bornes inférieures des erreurs globales 147

8.1 Structure 2 : paramètres 155
8.2 Structure 2 : performances du remaillage uniforme et du remaillage adaptatif 156
8.3 Structure 1 : paramètres 162
8.4 Structure 1 : comparaison entre les trois cas, $I_{ex} = 2,916$ 163
8.5 Structure 2 : paramètres 164
8.6 Structure 2 : performances du remaillage local 164

9.1 Structure 2 : paramètres 169
9.2 Structure 2 : paramètres 171

Liste des Algorithmes

1 BDD 60
2 FETI 61

3 BDD : construction des champs équilibrés 69
4 FETI : construction des champs équilibrés 71

5 FETI-DP 109

6 Solveur de décomposition de domaine avec critère d'arrêt adapté à l'erreur de discrétisation globale 123

7 BDD-bloc. Inconnue d'interface $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}]$ 138
8 FETI-bloc. Inconnue d'interface $\mathbf{\Lambda} = [\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}]$ 139
9 Solveur de décomposition de domaine avec critère d'arrêt adapté à l'erreur de discrétisation locale 142

10 BDD-bloc avec incompatibilité. Inconnue d'interface $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}]$ 159
11 FETI-bloc avec incompatibilité. Inconnue d'interface $\mathbf{\Lambda} = [\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}]$ 161

12 BDD avec contraintes optionnelles $\mathbf{C}$ 167
13 FETI avec contraintes optionnelles $\mathbf{C}$ 168

Introduction

Dans les industries de construction mécanique, les outils numériques sont de plus en plus présents au sein des bureaux d'étude. Devenus indispensables, ils accompagnent les ingénieurs dans les phases de conception et de dimensionnement. Depuis quelques années, ces outils tendent même à remplacer les démarches expérimentales. En effet, en allongeant le temps de conception, la validation par les essais s'avère très onéreuse et difficile à mettre en œuvre, notamment sur les structures de grande taille pour lesquelles les techniques d'instrumentation classiques sont parfois inenvisageables. Sans éliminer complètement la phase expérimentale qui sera toujours le seul lien avec le réel, les industriels tendent à adopter le *virtual testing*, c'est-à-dire l'utilisation des simulations numériques pour remplacer certains essais.

De la modélisation de la physique observée découlent des équations aux dérivées partielles dont la solution est la réponse de la structure considérée aux sollicitations extérieures. Malheureusement, à l'exception de rares cas simples, la solution de telles équations n'est pas accessible et des méthodes d'approximation sont alors employées pour pouvoir fournir des solutions approchées dont la pertinence doit être relativisée.

L'adoption massive du *virtual testing* par les industriels ne peut se faire que si la simulation et les calculs sont maîtrisés. De plus, ces-derniers doivent répondre aux besoins des ingénieurs qui s'intéressent à des structures complexes (assemblage de plusieurs pièces par exemple) dont le comportement est décrit par des lois d'évolution qui peuvent être fortement non linéaires. Ces structures peuvent également être soumises à des sollicitations sophistiquées sur des échelles de temps très courtes ou très longues. Il est donc essentiel que les chercheurs répondent à ces enjeux en fournissant des outils de simulation permettant de traiter des problèmes complexes de grande taille tout en garantissant la qualité du résultat fourni.

Depuis les année 1970, la vérification, dont l'objectif est la maîtrise de la qualité des calculs numériques, a connu de nombreux développements. Aujourd'hui, des outils élaborés et efficaces sont disponibles pour critiquer l'approximation issue d'une simulation. La vérification fournit, entre autres, des informations sur l'erreur commise lors de l'étape de discrétisation (nécessaire pour le passage d'une équation continue à une formulation discrète, ce qui est le cas dans la méthode des éléments finis par exemple). Ainsi, l'erreur de discrétisation peut être estimée tant au niveau global (sur l'ensemble de la structure) qu'au niveau local (zone d'intérêt pour l'ingénieur) et ce pour une large gamme de problèmes. Dans les problèmes de mécaniques, les principaux estimateurs d'erreur sont ceux qui se mettent en œuvre après la résolution ; ils sont alors dits *a posteriori*. Les estimateurs sont classés en trois catégories : ceux qui exploitent la défaut d'équilibre de la solution approchée, ceux qui proposent de lisser la solution approchée et ceux qui exploitent l'erreur en relation de comportement. Pour des estimations d'erreurs locales (sur des quantités d'intérêt) ce sont sur les extracteurs et la définition d'un problème adjoint que se basent la plupart des développements. Ces approches permettent de mettre à profit les outils développés pour l'estimation d'erreur globale. Bien sûr, l'obtention d'un encadrement de l'erreur de discrétisation sur une quantité d'intérêt a un coût et tous les estimateurs présents dans la littérature ne sont pas équivalents. En effet, la qualité, la précision, la difficulté d'implémentation, le surcoût associé sont autant de critères qu'il

convient de prendre en compte pour bien choisir la méthode d'estimation de l'erreur.

Les méthodes d'approximation conduisent à construire des systèmes d'équations sous forme matricielle que l'on doit ensuite résoudre. Lorsque ces problèmes sont de grande taille, l'utilisation d'un unique cœur n'est pas suffisante même en prenant en compte l'essor incroyable de la capacité des ordinateurs. Néanmoins, l'architecture parallèle ou le regroupement en *clusters* des machines permet de créer des super-calculateurs aux performances étourdissantes (plusieurs milliers de milliards d'opérations par seconde pour les plus puissants d'entre eux). Afin de profiter pleinement des capacité de ces super-calculateurs, la stratégie de résolution doit être adaptée à l'architecture du cluster. Ainsi, la communication entre processeurs étant une opération lente, l'algorithme, pour être efficace, doit entre autres limiter le nombre d'échanges entre processeurs. Les méthodes de décomposition de domaine sont des outils robustes pour la résolution de système de grande taille. Plus particulièrement, les méthodes sans recouvrement de type Schur-Krylov ont les propriétés d'extensibilité numérique attendues pour leur exploitation sur des gros calculateurs. De plus, les échanges nécessaires se font uniquement entre sous-domaines voisins et font intervenir des quantités relativement petites (de la taille de l'interface entre sous-domaines). Enfin, les solveurs itératifs associés (solveurs de Krylov) ont été très étudiés et sont maîtrisés.

Notre travail s'inscrit dans la continuité de la réflexion commencée dans [110] et dans la lignée des travaux portant sur la vérification dans le cas de calculs intensifs [115]. Dans les travaux [110], une procédure d'estimation d'erreur en cadre sous-structuré a été développée. Cette procédure :

- permet d'obtenir une estimation d'erreur à chaque itération du solveur
- est entièrement parallèle et s'inclut naturellement dans les principaux algorithmes de décomposition de domaine

Les premiers résultats montrent une rapide convergence de l'estimateur au cours des itérations de l'algorithme de décomposition de domaine, ce qui indique que seules les premières itérations sont efficaces. Se pose alors la question suivante : comment éviter les itérations qui ne font pas diminuer le niveau d'erreur ? autrement dit : comment définir un critère d'arrêt du solveur qui n'entraîne pas de sur-résolution ? Malheureusement, l'évaluation de l'estimation de l'erreur à chaque itération, qui donnerait une réponse à cette question, entraînerait un coût prohibitif. Plus globalement, nous pouvons nous interroger sur les stratégies à adopter pour conduire efficacement un calcul parallèle sur un problème de mécanique tout en fournissant une information sur la qualité du résultat obtenu. Nos travaux tentent de répondre à ces questions en suivant trois axes. Premièrement, des améliorations quant à la reconstruction des champs admissibles nécessaires à l'évaluation de l'estimateur ont été proposées dans un cadre séquentiel et dans un cadre sous-structuré. Deuxièmement, une nouvelle majoration de la distance entre le champ solution exact et le champ calculé séparant l'erreur due au solveur itératif de l'erreur de discrétisation a été démontrée. Cette séparation est écrite pour une estimation d'erreur globale et une estimation d'erreur locale. Elle permet de piloter le solveur par l'erreur de discrétisation. Troisièmement, dans le cas de résolutions successives en vue d'atteindre un objectif de précision donné, des techniques de remaillage et de recyclage de l'information

ont été développées et mises en œuvre sur des exemples issus de la mécanique. L'ensemble des développements logiciels a été effectué au sein d'un code de calcul parallèle sous Octave.

Nos travaux s'organisent donc autour de quatre axes qui sont développés dans quatre parties.

La première partie a pour objectif de situer précisément le contexte scientifique dans lequel se situent nos travaux. Pour cela, dans un premier temps, nous présentons le problème de référence d'élasticité linéaire. Puis, un état de l'art sur les méthodes de vérification est brossé : nous définissons tout d'abord l'erreur de discrétisation et présentons les principales méthodes permettant d'estimer cette erreur tant au niveau global que local. Ensuite, nous dressons un état de l'art sur les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement : nous présentons la sous-structuration et l'écriture du problème d'interface. Nous détaillons les résolutions dans le cas des approches primale et duale et présentons aussi d'autres types d'approches. Enfin, nous résumons la procédure d'estimation d'erreur en parallèle pour les décomposition de domaine proposée dans [111]. A partir des résultats, nous illustrons la nécessité d'équilibrer les deux niveaux d'erreur intervenant dans la résolution. Nous faisons également une brève revue des méthodes employées pour séparer et comparer les sources d'erreur.

La deuxième partie présente des améliorations pouvant être apportées à l'estimation d'erreur en séquentiel et en cadre sous-structuré. Premièrement, nous présentons une nouvelle méthode de reconstruction de champs statiquement admissibles. Cette méthode permet une étude de la pertinence de la condition de prolongement forte, hypothèse à la base d'une autre technique de reconstruction de champs statiquement admissibles. Puis, nous détaillons deux améliorations pour l'obtention de réactions équilibrées entre sous-domaines. En particulier, nous soulignons le rôle des points multiples et des points situés sur un contour de Dirichlet, où une optimisation est possible, ce qui laisse la place à une meilleure efficacité de l'estimateur. Ce traitement spécifique est appliqué sur l'algorithme FETI-DP pour lequel nous proposons une méthode de reconstruction des champs admissibles nécessaires à l'évaluation de l'estimateur. Ainsi, tous les résultats de la partie suivante pourront s'appliquer également aux algorithmes FETI-DP et BDDC. Nous signalons que cette partie, traitant d'aspects techniques et pointus, peut être évitée dans un premier temps. Elle n'est pas nécessaire à la compréhension de la suite du manuscrit. Le lecteur s'intéressant aux contributions proposées pour la construction de champs admissibles pourra revenir sur cette partie à la fin de sa lecture du manuscrit.

La troisième partie constitue le cœur de nos travaux. Elle consiste en l'énoncé du théorème fondamental de séparation des deux sources d'erreur (erreur de discrétisation et erreur algébrique) dans la majoration de l'erreur vraie, tant pour une estimation de l'erreur globale que de l'erreur locale. Le théorème est démontré et des résultats sur des structure en deux dimensions illustrent la pertinence de la séparation. Un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif est alors défini : nous pilotons le calcul par l'erreur de discrétisation. Nous présentons également comment il est possible d'obtenir une borne inférieure de l'erreur de discrétisation globale à travers une procédure parallèle nécessitant un faible surcoût si la borne supérieure est déjà calculée.

La quatrième partie traite du remaillage et des accélérations de Krylov dans le cas de résolutions successives du problème linéaire en vue d'obtenir un niveau d'erreur donné. Nous examinons deux techniques de remaillage dont l'une entraîne l'apparition de discrétisations incompatibles aux interface et montrons comment les mettre en œuvre. Puis, nous rappelons les principes de recyclage des espaces de Krylov générés et l'appliquons sur des exemples.

Enfin, dans la conclusion, nous faisons le bilan des apports de cette thèse en rappelant les principaux résultats obtenus et donnons les directions pouvant faire l'objet de futures explorations.

La quasi totalité des illustrations numériques de cette thèse ont pour support deux structures présentées en annexe 9.4.2.

Première partie

Etat de l'art sur la vérification et les méthodes de décomposition de domaine et mise en évidence des deux sources d'erreur

Dans cette première partie, nous décrivons l'environnement dans lequel vont s'insérer les travaux de cette thèse. Dans le premier chapitre, nous faisons un état de l'art assez général des méthodes permettant d'estimer l'erreur de discrétisation provenant d'un calcul éléments finis. Puis, dans le deuxième chapitre, nous présentons les principales méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Ces deux premiers points nous permettent d'aborder ensuite, dans un troisième chapitre, la problématique de l'estimation d'erreur en cadre sous-structuré : nous décrivons la procédure proposée dans [111] et mettons en évidence la faiblesse du critère d'arrêt du solveur itératif généralement choisi. Nous aboutissons naturellement à la nécessité d'identifier et de séparer les erreurs intervenant dans la résolution afin d'améliorer ce critère. Enfin, nous dressons un état des lieux des stratégies retenues dans la résolution de problèmes mécaniques pour séparer les différentes sources d'erreur.

Chapitre 1

Estimation de l'erreur de discrétisation

Dans ce chapitre, nous présentons le problème de référence considéré dans cette thèse ainsi que la méthode des éléments finis. Nous donnons ensuite la définition de l'erreur de discrétisation et faisons un état de l'art sur les méthodes d'estimation de cette erreur *a priori* ou *a posteriori*. Dans l'ensemble de ce chapitre, la résolution du problème élément fini est considérée séquentielle (pas de décomposition de domaine).

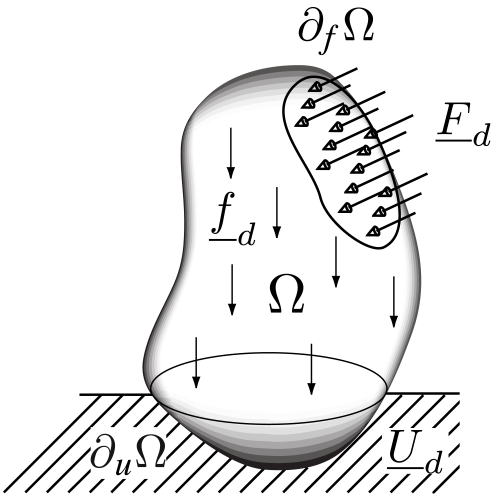


FIGURE 1.1 – Problème de référence

1.1 Problème de référence et méthode des éléments finis

Nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique des milieux continus et le problème de référence est un problème statique d'élasticité linéaire.

1.1.1 Problème modèle

Considérons une structure occupant un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (voir figure 1.1), où d désigne la dimension de l'espace. Nous faisons l'hypothèse que la structure subit une évolution quasi-statique et isotherme vérifiant l'hypothèse des petites perturbations. Le comportement est supposé élastique et linéaire et est caractérisé par le tenseur de Hooke $\mathbb{H}$. La structure est soumise aux sollicitations suivantes :

— une densité d'effort volumique $\underline{f}$ sur Ω
— une densité surface d'effort $\underline{g}$ sur la partie ∂_g du bord $\partial\Omega$
— un déplacement imposé $\underline{u}_d$ sur la partie ∂_u du bord $\partial\Omega$, avec $\text{mes}(\partial_u\Omega) \neq 0$

$\mathtt{L}^2(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω et $\mathtt{H}^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable dont la dérivée est de carré intégrable.

Notons $\underline{u}$ le champ de déplacement inconnu, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ la partie symétrique du gradient de $\underline{u}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy.

Le problème mécanique consiste à trouver un champ de déplacement $\underline{u}$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifiant :

— Les équations d'admissibilité :

$$\underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega \bigcap \partial_u\Omega \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) + \underline{\underline{grad}}^T(\underline{u})) \text{ sur } \Omega \qquad (1.1)$$

— Les équations d'équilibre :

$$\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = \underline{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}\underline{n} = \underline{g} \text{ sur } \partial_g\Omega \tag{1.2}$$

— La relation de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \text{ sur } \Omega \tag{1.3}$$

Le tenseur de Hooke définissant une forme bilinéaire symétrique positive et coercive, la solution de ce problème existe et est unique. Elle est notée $(\underline{u}_{ex}, \underline{\underline{\sigma}}_{ex})$.

Nous introduisons alors deux espaces affines et une forme positive :

— Espace des champs cinématiquement admissibles

$$\mathrm{CA}(\Omega) = \left\{ \underline{u} \in \left(\mathtt{H}^1(\Omega)\right)^d,\ \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega \bigcap \partial_u\Omega \right\} \tag{1.4}$$

et nous notons CA^0 l'espace vectoriel associé :

$$\mathrm{CA}^0(\Omega) = \left\{ \underline{u} \in \left(\mathtt{H}^1(\Omega)\right)^d,\ \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \bigcap \partial_u\Omega \right\} \tag{1.5}$$

— Espace des champs statiquement admissible

$$\mathrm{SA}(\Omega) = \left\{ \underline{\underline{\tau}} \in \left(\mathtt{L}^2(\Omega)\right)^{d\times d}_{\mathrm{sym}};\ \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega), \right.$$
$$\left. \int_\Omega \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega = \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_g\Omega \bigcap \partial\Omega} \underline{g} \cdot \underline{v} dS \right\} \tag{1.6}$$

— L'erreur en relation de comportement [71]

$$e_{CR_\Omega}(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \| \underline{\underline{\sigma}} - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \tag{1.7}$$

avec $\| \underline{\underline{x}} \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = \sqrt{\int_\Omega \left(\underline{\underline{x}} : \mathbb{H}^{-1} : \underline{\underline{x}} \right) d\Omega}$

Le problème mécanique (1.1, 1.2, 1.3) posé sur Ω peut être reformulé :

$$\text{Trouver } \left(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}\right) \in \mathrm{CA}(\Omega) \times \mathrm{SA}(\Omega) \text{ tel que } e_{CR_\Omega}(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = 0 \tag{1.8}$$

Cette formulation est équivalente à la précédente.

Enfin, une troisième formulation faisant intervenir des formes linéaires s'écrit :

$$\text{Trouver } \underline{u} \in \mathrm{CA}(\Omega) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega),\ a(\underline{u}, \underline{v}) = L(\underline{v}) \tag{1.9}$$

où

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega \tag{1.10}$$

est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive et

$$L(\underline{v}) = \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_g\Omega \bigcap \partial\Omega} \underline{g} \cdot \underline{v} dS \tag{1.11}$$

est une forme linéaire continue.

1.1.2 Discrétisation et résolution par la méthode des éléments finis

La solution exacte de ces équations n'est connue que pour quelques problèmes simples. En mécanique, la méthode de résolution approchée la plus utilisée est sans aucun doute la méthode des éléments finis en déplacement, qui a été développée dans la deuxième moitié du vingtième siècle [23, 142, 9].

Afin d'obtenir une approximation de la solution, celle-ci est cherchée dans un espace de dimension finie $\mathrm{CA}_H(\Omega)$. La structure est discrétisée à l'aide d'un maillage noté Ω_H. Dans la suite, nous supposons que le maillage recouvre parfaitement Ω. A ce maillage sont associées des fonctions de forme continues qui sont des polynômes de degré p sur chaque élément et qui forment une base de $\mathrm{CA}_H(\Omega)$.

Le problème éléments finis s'écrit alors :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \underline{u}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega) \text{ tel que } \forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}^0_H(\Omega)\\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_H) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)\, d\Omega = \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v}_H d\Omega + \int_{\partial_g \Omega} \underline{g} \cdot \underline{v}_H dS\end{aligned} \tag{1.12}$$

En décomposant le déplacement $\underline{u}_H$ sur la base des fonctions de forme $\underline{u}_H = \underline{\boldsymbol{\phi}}_H \mathbf{u}$, le problème se ramène à la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rd} \\ \mathbf{K}_{dr} & \mathbf{K}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_d \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

où $\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité symétrique définie et positive et $\mathbf{f}$ est le vecteur des efforts généralisés. L'indice d représente les degrés de libertés situés là où des conditions de Dirichlet ont été imposées et l'indice r représente le reste des degrés de liberté. $\boldsymbol{\lambda}_d$ est le vecteur des réactions nodales :

$$\boldsymbol{\lambda}_d^T = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\boldsymbol{\phi}}_{Hd}\right) d\Omega - \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}}_{Hd} d\Omega - \int_{\partial_g \Omega} \underline{g} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}}_{Hd} dS \tag{1.14}$$

où $\underline{\boldsymbol{\phi}}_{Hd}$ est la matrice des fonctions de forme restreintes aux nœuds situés sur $\partial_u \Omega$.

A condition que Ω_H coïncide avec Ω et que le degré des fonctions de forme soit suffisamment élevé pour représenter le déplacement imposé (ce qui est supposé ici), le champ de déplacement obtenu vérifie $\underline{u}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega) \subset \mathrm{CA}(\Omega)$. En revanche, dans la majorité des cas, $\underline{\underline{\sigma}}_H \notin \mathrm{SA}(\Omega)$ et la solution obtenue n'est donc pas la solution exacte. Le fait que $\underline{\underline{\sigma}}_H \notin \mathrm{SA}(\Omega)$ traduit que la solution éléments finis ne respecte pas l'équilibre. En effet, il peut y avoir :

— non-vérification de la condition aux limites en effort sur $\partial_g \Omega$
— non vérification de l'équilibre interne
— non-vérification de l'équilibre entre deux éléments voisins

Dans la suite, nous notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des éléments de Ω_H, $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes et $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets (ou nœuds). Introduisons également l'opérateur ∂ qui extrait les arêtes du bord d'un groupe d'éléments et les extrémités d'un groupe d'arêtes. La notation $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de X. La notation ∂^{-1} est utilisée

pour désigner l'opération qui à un sommet associe les arêtes qui y sont reliées et à une arête associe les éléments dont elle fait partie.

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{P}(\mathcal{V}) \tag{1.15}$$

En particulier, pour un nœud N, les éléments dans $\tilde{\partial}^{-2}N$ forment le *star-patch* associé. La figure 1.2 illustre ces opérateurs pour des cas simples.

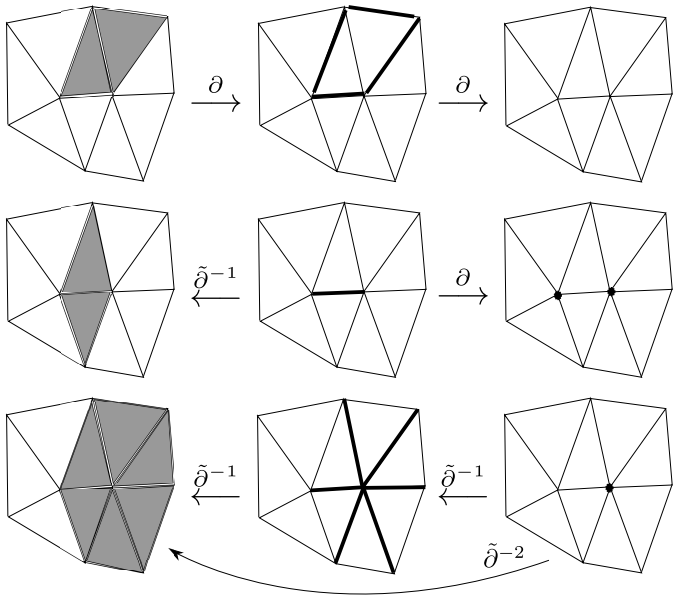


FIGURE 1.2 – Illustration des opérateurs de bords

1.1.3 Erreur de discrétisation

Le couple $(\underline{u}_H, \underline{\underline{\sigma}}_H)$ obtenu n'étant pas la solution exacte, nous définissons l'erreur de discrétisation comme l'écart entre le champ issu du calcul éléments finis et le champ solution. Ainsi $\underline{e}_{discr} = \underline{u}_{ex} - \underline{u}_H$ est le champ associé à cette erreur et $e_{discr} = \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{e}_{discr})\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$ sa norme. Une propriété remarquable du champ $\underline{e}_{discr}$ est qu'il est orthogonal à tout élément de $\mathrm{CA}_H(\Omega)$. Il s'agit de la propriété d'orthogonalité de Galerkin :

$$\forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega), \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{e}_{discr}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_H)\, d\Omega = 0 \tag{1.16}$$

Démonstration. Le problème étant linéaire, nous pouvons écrire

$$\forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega),$$
$$\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{e}_{discr}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_H)\, d\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_H)\, d\Omega - \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_H)\, d\Omega \tag{1.17}$$

En utilisant les propriétés du champ solution exact $\underline{u}_{ex}$ et du champs éléments finis $\underline{u}_H$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega), \\ \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{e}_{discr}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}_H\right) d\Omega &= \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v}_H d\Omega \int_{\partial_g \Omega} \underline{g} \cdot \underline{v}_H dS \\ &\quad - \left(\int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v}_H d\Omega + \int_{\partial_g \Omega} \underline{g} \cdot \underline{v}_H dS \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

□

Une première analyse sur l'erreur de discrétisation peut être faite avant même de mener un calcul éléments finis. En effet, le résultat suivant, basé sur la convergence de la méthode des éléments finis, permet de donner une estimation de l'erreur *a priori* :

$$e_{discr} \leqslant C h^q \tag{1.19}$$

où h est le plus grand diamètre des éléments du maillage. C désigne une constante indépendante de h. q un réel positif égal au degré p des fonctions de forme choisies pour la résolution éléments finis si le problème est régulier et égal au minimum entre l'ordre de la singularité du problème et p, si le problème est singulier. Malheureusement, la constante C est généralement impossible à déterminer si bien que ce résultat ne permet pas une estimation de l'erreur de discrétisation mais donne uniquement une indication sur la vitesse de convergence de l'approximation.

1.2 Erreur globale

Afin d'estimer l'erreur de discrétisation, des approches *a posteriori* (c'est-à-dire mises en place après la résolution éléments finis) ont été développées. Ces méthodes ont pour objectif de fournir une estimation de l'erreur de discrétisation via un estimateur d'erreur. La qualité de l'estimateur est donnée par le rapport de l'erreur estimée sur l'erreur de discrétisation exacte. Plus ce quotient est proche de 1, plus l'estimation est précise. L'estimateur est dit garanti si ce quotient est supérieur ou égal à 1. En effet, dans ce cas, l'estimation fournie est obligatoirement une majoration de l'erreur de discrétisation. Dans le cas contraire, le terme d'indicateur d'erreur est préféré à celui d'estimateur. Enfin, l'estimateur est dit consistant si l'efficacité de celui-ci tend vers 1 lorsque h tend vers 0. Dans cette sous-partie, nous dressons un état de l'art non exhaustif des méthodes d'estimation d'erreur de discrétisation pour les problèmes de mécanique pouvant se rapporter au problème modèle.

1.2.1 Méthodes basées sur les résidus

Ces méthodes ont été introduites initialement dans [6, 5] et exploitent le défaut d'équilibre de la solution éléments finis pour proposer une estimation de l'erreur de discrétisa-

tion. Elles se basent sur l'équation des résidus :

$$\forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega), a(\underline{e}_{discr}, \underline{v}) = L(\underline{v}) - a(\underline{u}_H, \underline{v}) = R_H(\underline{v}) \tag{1.20}$$

où R_H est appelé opérateur des résidus qui est une fonctionnelle linéaire dépendant de la solution éléments finis $\underline{u}_H$. Nous distinguons deux familles de méthodes : les méthodes des résidus explicites et les méthodes des résidus implicites. Dans la première famille, l'équation des résidus est exploitée directement tandis que dans la seconde, des résolutions de problèmes locaux sont nécessaires.

1.2.1.1 Méthode des résidus explicites

Un premier développement en dimension 1 a été proposé dans [7], l'extension en dimension 2 est réalisée dans [4]. Dans cette méthode, le résidu est décomposé en contributions élémentaires à l'aide d'une intégration par partie :

$$R_H(\underline{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \underline{r}_T \underline{v} dT - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}} \int_\gamma \underline{r}_\gamma \underline{v} d\gamma \tag{1.21}$$

où

$$\underline{r}_T = \underline{\mathrm{div}} \underline{\underline{\sigma}}_H + \underline{f} \tag{1.22}$$

rend compte du déséquilibre intérieur et

$$\underline{r}_\gamma = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_{H_{|T}} \underline{n}_T + \underline{\underline{\sigma}}_{H_{|T'}} \underline{n}_{T'} & \text{sur } \gamma \in \partial T \cap \partial T' \\ \underline{\underline{\sigma}}_{H_{|T}} \underline{n}_T - \underline{g} & \text{sur } \gamma \in \partial T \cap \partial_g \Omega \\ \underline{0} & \text{sur } \gamma \in \partial T \cap \partial_u \Omega \end{cases} \tag{1.23}$$

où γ est l'arête commune à T et T'. Ainsi $\underline{r}_\gamma$ rend compte du déséquilibre sur les arêtes. La majoration donnée par l'estimateur est la suivante :

$$e_{discr} \leqslant C[\sum_{T \in \mathcal{T}} (\mathrm{mes}(T))^2 \|r_T\|^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}} \mathrm{mes}(\gamma) \|r_\gamma\|^2] \tag{1.24}$$

où les normes utilisées sont les normes L^2. Elle est démontrée en introduisant l'opérateur de projection Π_H qui projette tout champ de CA^0 dans CA^0_H et en utilisant l'orthogonalité de Galerkin, les inégalité de Cauchy-Schwarz, Poincarré et Korn. Malheureusement, cette estimation fait intervenir une constante C très difficile à évaluer, voire inconnue. En pratique, le choix $C = 1$ est effectué mais c'est au prix d'une perte du caractère garanti de l'estimateur et d'une faible efficacité (la constante étant surrestimée si choisie égale à 1).

Il est à noter qu'un estimateur basé sur les résidus, reprenant une partie des idées précédentes, a été récemment développé dans [55]. Se basant sur la théorie de Kondratiev (théorie de régularité)[70], les majorations successives aboutissant à l'estimateur ne font plus intervenir de constantes inconnues. Il en résulte un estimateur simple à mettre en œuvre et efficace sur des problèmes d'élasticité linéaire.

1.2.1.2 Méthode des résidus implicites

Puisque nécessitant des résolutions de problèmes locaux, ces méthodes sont plus coûteuses que les précédentes. Néanmoins, elles permettent l'obtention d'une estimation de l'erreur de meilleure qualité. Le principe est d'écrire l'équation des résidus sur un support local qui peut être soit un *star-patch* d'éléments (on parle de *Subdomain Residual Methods*) soit un élément (on parle alors de *Element Residual Methods*). Les problèmes locaux obtenus sont généralement mal posés et plusieurs solutions ont été proposées afin de les régulariser. Afin de présenter de manière synthétique les différentes méthodes présentes dans la littérature nous regroupons les références dans le tableau à double entrée 1.2.1.2. Le lecteur curieux des détails de ces techniques pourra se reporter aux références indiquées dans le tableau. Deux méthodes de ce tableau permettant la reconstruction de champs statiquement admissibles (*Element Equilibration Technique* et *Flux-free*) seront détaillées au paragraphe 1.2.3.

Support problèmes locaux Moyen régularisation	Patch d'éléments	Elément
Conditions limites Dirichlet homogène	[6]	[30]
Conditions limites Neumann	[131] [132]	*Equilibrated Residual Methods* : *Element Equilibration Technique* [80] *Flux-splitting* [2] *Hybrid-flux* [106]
Partition de l'unité des fonctions de forme	*Flux-free* [107]	
Espace régularisant		[28] [1]

TABLE 1.1 – Synthèse des méthodes des résidus implicites

1.2.2 Méthodes basées sur le lissage des contraintes

Cette famille de méthodes fournit un indicateur de l'erreur de discrétisation. Le principe est de construire un champ de contraintes optimisé, noté par la suite $\underline{\underline{\sigma}}_{opt}$ issu d'un lissage du champ de contraintes éléments finis $\underline{\underline{\sigma}}_H$. Alors, une indication de l'erreur de discrétisation est fournie par :

$$\|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}_H\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \simeq \|\underline{\underline{\sigma}}_{opt} - \underline{\underline{\sigma}}_H\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \tag{1.25}$$

Distinguons deux types de reconstruction. Dans la première méthode [143], le champ de contraintes est cherché comme une décomposition sur les N fonctions de forme $(\varphi_i)_{i\in\mathcal{V}}$ du maillage $\sigma_{opt} = \sum_{i\in\mathcal{V}} \sigma^i_{opt}\phi_i$. Les coefficients σ^i_{opt} peuvent être obtenus de deux manières :

- En minimisant l'écart entre le champ éléments finis et le champ lissé au sens des moindres carrés sur toute la structure. Cela conduit à résoudre un système de taille $N \times N$.
- En calculant la moyenne des contraintes éléments finis sur $\tilde{\partial}^{-2} i$.

Dans la seconde méthode [144, 145, 146], la propriété de superconvegence de certains points du maillage est exploitée. Il s'agit alors de chercher, sur chaque *star-patch* du maillage, une fonction polynomiale qui minimise l'écart au sens des moindres carrés avec la solution éléments finis en utilisant les points de superconvergence comme points d'échantillonnage. En effectuant une moyenne sur l'ensemble des *star-patches*, nous calculons le coefficient σ^i_{opt} sur chaque nœud i et le champ lissé s'écrit $\sigma_{opt} = \sum_{i\in\mathcal{V}} \sigma^i_{opt}\phi_i$. De nombreuses variantes ont été proposées autour de ces méthodes. Facilement implémentables, ce sont les méthodes données dans la plupart des code de calculs industriels. Néanmoins, la perte du caractère garantie de l'estimation (un indicateur peut donner une borne inférieure ou supérieure de l'erreur vraie) fait de ces indicateurs des outils trop pauvres pour la qualification d'un résultat éléments finis.

1.2.3 Méthodes basées sur l'erreur en relation de comportement

Pour un couple $(\underline{\hat{u}}\ ,\ \underline{\underline{\hat{\sigma}}})$ dont les champs sont respectivement cinématiquement et statiquement admissibles, il est possible mesurer l'erreur commise grâce à l'erreur en relation de comportement. La notion d'erreur en relation de comportement se base sur la considération que l'équation du comportement est la moins fiable des trois équations définissant le problème de mécanique (les deux autres étant l'admissibilité cinématique et l'équilibre). Cette mesure de l'erreur associée au théorème de Prager-Synge [116] est à la base d'une famille d'estimateurs d'erreur *a posteriori*. Ces estimateurs ont été très étudiés et répondent aux questions posées par la vérification dans des cadres divers. Citons [85] pour l'élasticité linéaire, [25] pour l'extension en trois dimensions, [82] pour des problèmes d'évolution, [24, 99, 83, 77, 76] pour des problèmes non-linéaires (comportement plastique ou élasto-visco-plastique), [92] pour des problèmes de contact, [18] pour les problèmes stochastiques.

Le théorème de Prager-Synge s'écrit :

$$\|\underline{u}_{ex} - \underline{\hat{u}}\|^2_{\Omega} + \|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\hat{\sigma}}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}{}^2 = e_{CR_\Omega}(\underline{\hat{u}}, \underline{\underline{\hat{\sigma}}})^2 \tag{1.26}$$

avec $|||\underline{x}|||_\omega = \sqrt{\int_\omega \left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\right) d\Omega}$

Ainsi, si l'on dispose d'un couple de champs respectivement cinématiquement et statiquement admissibles, une majoration de l'erreur de discrétisation de la forme

$$e_{discr} \leqslant e_{CR_\Omega}(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}) \tag{1.27}$$

est obtenue. Le champ de déplacement issu de la résolution éléments finis étant cinématiquement admissible, il est possible de faire le choix $\hat{\underline{u}} = \underline{u}_H$. En revanche, puisque la solution éléments finis n'est pas la solution exacte, il est nécessaire de reconstruire un champ de contraintes statiquement admissible. C'est là le point central des estimateurs basés sur l'erreur en relation de comportement. La reconstruction de champ statiquement admissible est un enjeu à deux titres. Tout d'abord, il s'agit d'un point technique pour lesquelles les méthodes disponibles dans la littérature sont complexes. D'autre part, c'est de la qualité de ce champ que dépend la qualité de l'estimateur. Nous présentons les méthodes permettant de reconstruire un champ statiquement admissible à partir de la solution éléments finis. A l'exception de l'approche en contrainte, nous comparerons les performances des techniques de reconstruction de champs statiquement admissibles dans le chapitre 4, à l'occasion de la présentation de la méthode que nous avons développée.

1.2.3.1 Approche en contrainte

Une première méthode permettant d'obtenir un champ de contrainte statiquement admissible consiste à effectuer une résolution éléments finis avec une approche en contrainte du problème de référence. Cette résolution fournit un champ de contrainte statiquement admissible et un champ de déplacement discontinu. Elle nécessite la construction de nouveaux types d'éléments en effort. Citons [67, 65, 66] dans lesquels sont développés de tels éléments pour l'estimation d'erreur par analyse duale. Le développement est lourd et complexe mais permet de fournir des bornes garanties de l'erreur commise grâce à l'erreur en relation de comportement.

1.2.3.2 Flux-free technique

Cette technique, introduite dans [107] pour l'estimation d'erreur sur un problème de mécanique linéaire, a pour point de départ l'équation des résidus :

$$\begin{aligned} &\forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega) \\ &a(\underline{e}_{discr}, \underline{v}) = L(\underline{v}) - a(\underline{u}_H, \underline{v}) = R_H(\underline{v}) \end{aligned} \tag{1.28}$$

dans laquelle nous utilisons la propriété de partition de l'unité des fonctions de forme et la linéarité des opérateurs a et R afin d'obtenir :

$$\forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega), \sum_{N \in \mathcal{V}} a(\phi_H^N \underline{e}_{discr}, \underline{v}) = \sum_{N \in \mathcal{V}} R_H(\phi_H^N \underline{v}) \tag{1.29}$$

Cela mène donc à un ensemble de problèmes locaux chacun posé sur le *star-patch* $\tilde{\partial}^{-2} N$ (le support de la fonction de forme ϕ_H^N associée au nœud $N \in \mathcal{V}$).

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \underline{e}^N \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}N) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}N) \\ &a(\underline{e}^N, \underline{v}) = R_H(\phi_H^N \underline{v}) \end{aligned} \tag{1.30}$$

Afin que ce problème soit bien posé, il convient de vérifier que le second membre est bien orthogonal au noyau de l'opérateur a, c'est-à-dire que pour tout mode rigide $\underline{u}_s \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}N)$,

$$R_H(\phi_H^N \underline{u}_s) = 0 \tag{1.31}$$

Cette condition est généralement vérifiée à l'exception des rotations dans le cas de problème vectoriel avec un degré d'interpolation des fonction de forme éléments finis égal à 1. Pour pallier cette non-vérification, le projecteur Π_H qui projette sur l'espace $\mathrm{CA}^0_H(\Omega)$ est introduit et le problème local sur le *star-patch* est réécrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \underline{e}^N \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}N) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}N) \\ &a(\underline{e}^N, \underline{v}) = R_H(\phi_H^N(\underline{v} - \Pi_H \underline{v})) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Alors, quel que soit $\underline{u}_s \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}N)$, nous avons $R_H(\phi_H^N(\underline{u}_s - \Pi_H \underline{u}_s)) = 0$.

Le problème est ensuite résolu sur un espace $\mathrm{CA}^0_h(\tilde{\partial}^{-2}N)$ plus riche que $\mathrm{CA}^0_H(\tilde{\partial}^{-2}N)$ (fonctions de forme de degré plus élevé ou maillage de $\tilde{\partial}^{-2}N$ et résolution par les méthode des éléments finis).

L'évaluation du second membre peut être compliquée du fait que l'argument du résidu n'appartient généralement pas à l'espace éléments finis. Dans [107], les auteurs suggèrent d'utiliser le projecteur Π_h sur l'espace CA^0_h et de calculer $R_H(\Pi_h \phi_H^N \underline{v})$. En effet, en remarquant que :

$$\forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0_h R_H(\underline{v}) = R_H(\Pi_h\ \underline{v}) = R_H(\Pi_h \sum_{N \in \mathcal{V}} \phi_H^N \underline{v}) = \sum_{N \in \mathcal{V}} R_H(\Pi_h(\phi_H^N \underline{v})) \tag{1.33}$$

on simplifie l'évaluation du terme puisque l'on peut le calculer en faisant le produit terme à terme de valeurs nodales de ϕ_H^N par les valeurs nodales de $\underline{v}$.

Remarque 1.1. *L'astuce précédente est également valable dans le cas où l'on doit utiliser le projecteur , c'est-à-dire dans le calcul de* $R_H(\phi_H^N(\underline{v} - \Pi_H \underline{v}))$.

Dans [26] sur un problème d'élasticité et dans [108] pour l'équation de Poisson, les problèmes locaux sont résolus par une approche duale (réalisable en pratique si le chargement volumique n'est pas trop complexe). Dans [100], la propriété de partition de nullité vérifiée par les dérivées des fonctions de forme est exploitée ce qui permet de systématiser la résolution des problèmes locaux.

Enfin, le champ statiquement admissible est reconstruit de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{|E} = (\mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H))_{|E} + (\mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}\left((\sum_{N \in \mathcal{V}} \underline{e}^N)\right))_{|E} \tag{1.34}$$

1.2.3.3 *Element Equilibration Technique* (EET)

Cette technique a été présentée dans [80] pour la première fois. La présentation que nous faisons est assez originale et inspirée de la revisitation effectuée dans le chapitre 4. La technique consiste à chercher un champ de contrainte $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ vérifiant la relation suivante, appelée condition de prolongement forte :

$$\forall T \in \mathcal{T},\ \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}_H(\Omega),\ \int_T (\hat{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega = 0 \tag{1.35}$$

Nous imposons donc que le champ reconstruit développe le même travail que le champ $\underline{\underline{\sigma}}_H$ issu du calcul élément fini.

La reconstruction d'un champ statiquement admissible se décompose alors en deux étapes :

- Dans la première étape, pour chaque arête, un champ d'inter-effort $\hat{\underline{F}}^{\Gamma}$ satisfaisant l'équilibre entre élément (principe d'action réaction) et la condition de prolongement forte est déterminé.
- Dans la seconde étape, ces inter-efforts sont utilisés comme condition de Neumann pour la résolution d'un problème local par élément. Le champ global obtenu est alors statiquement admissible puisque les équations d'équilibre sont respectées.

Sur chaque arête Γ, il faut donc construire des tractions $\hat{\underline{F}}^{\Gamma}$ satisfaisant la condition de prolongement forte.

$$\begin{cases} \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_T \cdot \underline{n}^{\Gamma} = \delta_T^{\Gamma} \hat{\underline{F}}^{\Gamma},\ \forall T \in \mathcal{T},\ \forall \Gamma \in \partial T \\ \hat{\underline{F}}^{\Gamma} = \underline{g} \text{ sur } \partial_g \Omega_H \\ 0 = \displaystyle\int_T (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_T - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega,\ \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}_H, \end{cases} \tag{1.36}$$

Le coefficient $\delta_T^{\Gamma} = \pm 1$ est utilisé pour assurer le principe d'action-réaction de deux éléments voisins

$$\begin{cases} \forall \Gamma \in \partial\Omega_H,\ T = \partial^{-1}\Gamma,\ \delta_T^{\Gamma} = 1 \\ \forall \Gamma \in \mathcal{E} \backslash \partial\Omega_H,\ \{T, T'\} = \partial^{-1}\Gamma,\ \delta_T^{\Gamma} + \delta_{T'}^{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Puisque les mouvements de corps rigides appartiennent à l'espace $\mathrm{CA}_H(\Omega)$, la condition de prolongement forte implique l'équilibre des éléments vis-à-vis des corps rigides. L'alternative de Fredholm est vérifiée et $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ est bien défini.

En développant la condition de prolongement et en utilisant l'équilibre éléments finis :

$$\forall T \in \mathcal{T},\ \sum_{\Gamma \in \partial T} \delta_T^{\Gamma} \int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}^{\Gamma} \cdot \underline{v} d\Gamma = \int_T (\underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \underline{f} \cdot \underline{v}) d\Omega =: \overset{\circ}{R}_T(\underline{v}) \tag{1.38}$$

Dans la version originale de la EET [80], chaque traction $\hat{\underline{F}}^{\Gamma}$ est supposée linéaire. L'équation 1.38 est alors testée sur chaque fonction de forme afin que l'évaluation soit limitée à leur support. Ce ne sont donc plus des tractions sur les arêtes qui sont recherchées

mais des travaux. Le vecteur $\underline{\hat{W}}_N^{\Gamma}$ est défini par :

$$\underline{\hat{W}}_N^{\Gamma} = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \underline{\hat{F}}^{\Gamma} \cdot \underline{e}_x \phi_H^N \\ \underline{\hat{F}}^{\Gamma} \cdot \underline{e}_y \phi_H^N \end{pmatrix} d\Gamma \tag{1.39}$$

La condition de prolongement forte se réécrit comme un ensemble de systèmes de petite taille découplés.

$$\text{Pour chaque nœud N} \quad \begin{cases} \forall T \in \tilde{\partial}^{-2} N, \text{ soit } \partial T \cap \partial^{-1} N = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}, \\ \delta_T^{\Gamma_1} \underline{\hat{W}}_N^{\Gamma_1} + \delta_T^{\Gamma_2} \underline{\hat{W}}_N^{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{R}_T(\phi_H^N \underline{e}_x) \\ \overset{\circ}{R}_T(\phi_H^N \underline{e}_y) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.40}$$

Le système ci-dessus ne fait intervenir que les inconnues $(\underline{\hat{W}}_N^{\Gamma_i})_i$ associées au nœud N. Chaque direction de l'espace peut être traitée indépendamment. La nature du système dépend de la position du nœud :

- Pour les nœuds situés sur $\partial_g \Omega$, le système possède une unique solution
- Pour les nœuds internes ou situés sur $\partial_u \Omega$, le système ci-dessus est sous-déterminé. Une contrainte supplémentaire est donc introduite. Un choix peut être de minimiser la distance D_N entre le travail de la solution éléments finis et celui du champ statiquement admissible vis-à-vis de la fonction de forme ϕ_N :

$$D_N = \sum_{\Gamma \in \partial^{-1} N} \left(\int_{\Gamma} (\hat{F}^{\Gamma} - F_H^{\Gamma}) \phi_N dS \right)^2 \tag{1.41}$$

où F_H^{Γ} désigne le travail le long de l'arête par la solution élément fini vis-à-vis de la fonction de forme ϕ_N :

$$\begin{aligned} \underline{F}_H^{\Gamma} &= \sum_{T \in \partial^{-1}\Gamma} \theta_T^{\Gamma}(\underline{\underline{\sigma}}_{HT} \cdot \underline{n}_T^{\Gamma}) \\ W_H^{\Gamma}(\underline{\phi}_H) &= \sum_{T \in \partial^{-1}\Gamma} \int_{\Gamma} \theta_T^{\Gamma}(\underline{\underline{\sigma}}_{HT} \cdot \underline{n}_T^{\Gamma}) \cdot \underline{\phi}_H \, dS \end{aligned} \tag{1.42}$$

Une fois ces systèmes résolus, il faut calculer les tractions à partir des travaux $\hat{W}_N^{\Gamma}$. En faisant l'hypothèse que les tractions se décomposent sur l'espace éléments finis, il ne reste alors qu'à inverser des matrices de masse :

$$\underline{\hat{F}}^{\Gamma} = \underline{\hat{F}}_l^{\Gamma} \phi_H^l + \underline{\hat{F}}_r^{\Gamma} \phi_H^r \text{ et } \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \phi_H^l \cdot \phi_H^l \, dS & \int_{\Gamma} \phi_H^r \cdot \phi_H^l \, dS \\ \int_{\Gamma} \phi_H^r \cdot \phi_H^l \, dS & \int_{\Gamma} \phi_H^r \cdot \phi_H^r \, dS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\hat{F}}_l^{\Gamma} \\ \underline{\hat{F}}_r^{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{W}}_l^{\Gamma} \\ \underline{\hat{W}}_r^{\Gamma} \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

Une fois les tractions $(\underline{\hat{F}}^{\Gamma})$ déterminées, celles-ci sont appliquées comme conditions de Neumann pour chaque élément. Pour des cas simples de chargement volumique, le

champ de contrainte élémentaire exact peut être obtenu en effectuant une résolution polynômiale. Plus généralement, une solution numérique satisfaisante est obtenue avec une approximation éléments finis plus précise en se plaçant dans un espace CA_p^T plus riche (si cet espace n'est pas assez riche, l'énergie est sous-estimée et la borne obtenue n'est plus stricte).

$$\begin{cases} \displaystyle\int_T \underline{\underline{\sigma}}_p : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\Phi}\right) d\Omega - \left(\int_T \underline{f} \cdot \underline{\Phi} d\Omega + \sum_{\Gamma \in \partial T} \int_\Gamma \delta_T^\Gamma \hat{\underline{F}}^\Gamma \cdot \underline{\Phi} dS \right) = 0, \ \forall \underline{\Phi} \in \mathrm{CA}_p^T \\ \underline{\underline{\sigma}}_p = \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_p\right), \quad \underline{u}_p \in \mathrm{CA}_p^T \end{cases} \tag{1.44}$$

Le champ global statiquement admissible est obtenu en regroupant les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_p$ calculés sur chaque élément.

Dans [81], la méthode est employée pour des éléments quadrangulaires Q4 et les diagrammes de Maxwell sont utilisés pour reconstruire plus simplement les efforts entre éléments. Dans [87], les problèmes locaux sont résolus analytiquement. Le champ de contrainte est recherché sous forme polynômiale (le degré dépend de la force volumique). Notons que cette technique requiert la subdivision en trois sous-éléments de chaque élément afin de respecter la symétrie du champ de contrainte. Dans [48], pour les éléments de type T6, les nœuds au sommet du triangle et les nœuds au milieu des arêtes sont traités différemment. A l'étape de reconstruction de tractions équilibrées, pour les nœuds sommets, une optimisation globale par minimisation de l'énergie complémentaire est réalisée.

1.2.3.4 Element Equilibration Star-Patch Technique (EESPT)

Cette technique a été proposée dans [79] et [114] et utilise les deux ingrédients principaux des méthodes décrites ci-dessus, à savoir la condition de prolongement forte et la propriété de partition de l'unité des fonctions de forme. Elle se décompose en deux étapes :

- Construction de tractions ($\hat{\underline{F}}^\Gamma$) équilibrées sur les bords de chaque élément
- Construction d'un champ statiquement admissible en résolvant un problème de Neumann sur chaque élément

La seconde étape est identique à la seconde étape de la méthode EET. En effet, elle consiste à résoudre le même problème 1.44. Nous détaillons donc uniquement la première étape. La condition de prolongement forte 1.35 peut se réécrire globalement :

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{P}_p, \ \int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right) d\Omega = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (\hat{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right) dT = 0 \tag{1.45}$$

où $\mathcal{P}_p$ désigne l'espace des fonctions polynomiales de degré p sur chaque élément $T \in \mathcal{T}$ mais pouvant être discontinues entre éléments. Puis, en considérant l'équilibre au sens faible vérifié par $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ et un espace $\mathcal{P}_1$:

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{P}_1, \ \sum_{T \in \mathcal{T}} \Big(\sum_{\Gamma \in \partial T} \delta_T^\Gamma \int_\Gamma \hat{\underline{F}}^\Gamma \cdot \underline{v} d\Gamma \Big) - \int_T (\underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right) - \underline{f} \cdot \underline{v}) dT = 0 \tag{1.46}$$

Enfin, en utilisant la propriété de partition de l'unité des fonctions de forme ϕ_i, nous définissons un ensemble de problèmes locaux suivant (chaque problème est posé sur le support de la fonction de forme ϕ_i) : Trouver $\phi_i\underline{\hat{F}}^{\Gamma}$ tel que :

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{P}_1 \cap \tilde{\partial}^{-2} i, \sum_{T \in \tilde{\partial}^{-2} i} \Big(\sum_{\Gamma \in \partial T} \delta_T^{\Gamma} \int_{\Gamma} \underline{\hat{F}}^{\Gamma} \phi_i \cdot \underline{v} d\Gamma - \int_T (\underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\phi_i \underline{v}) - \underline{f} \phi_i \underline{v} dT \Big) = 0 \quad (1.47)$$

En pratique, la quantité $\phi_i\underline{\hat{F}}^{\Gamma}$ est cherchée sous une forme polynomiale de degré 1 et les conditions aux limites de type Neumann sont prises en compte par pénalisation. Il est à noter que dans le cas particulier où le degré des fonction de forme p vaut 1, certains problèmes locaux sont mal posés. De la même manière que pour la méthode *Flux-free*, l'opérateur de projection est introduit. De plus, pour les nœuds internes ou situés sur $\partial_u\Omega$, la solution du problème 1.2.3.4 n'est pas unique. Une minimisation énergétique locale similaire à celle faite dans la EET est alors effectuée.

1.2.4 Borne inférieure de l'erreur globale

La plupart des estimateurs d'erreur *a posteriori* fournissent une majoration de l'erreur de discrétisation. Il est également possible de fournir une minoration de cette erreur. Si la connaissance d'une borne inférieure peut paraître inutile dans des problématiques de certification de structures, cette donnée permet, au moins pour un premier calcul numérique, de connaître la marge d'erreur qui sera de toutes façons commise.

Après avoir donné l'expression d'une borne inférieure de l'erreur de discrétisation, nous présentons brièvement trois méthodes présentes dans la littérature permettant d'obtenir une borne inférieure à l'issue d'une résolution éléments finis séquentielle.

Rappelons l'équation des résidus :

$$\forall \underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)\ a(\underline{e}_{discr}, \underline{w}) = L(\underline{w}) - a(\underline{u}_H, \underline{w}) = R_H(\underline{w}) \quad (1.48)$$

En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'équation des résidus, tout champ de déplacement $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)\backslash\{\underline{0}\}$ peut être utilisé pour l'obtention d'une borne inférieure [117, 101] :

$$|||\underline{e}_{discr}|||_{\Omega} \geqslant \frac{|R_H(\underline{w})|}{|||\underline{w}|||_{\Omega}} \quad (1.49)$$

Cette borne peut également être obtenue à partir de champs admissibles. En effet, en choisissant un champ de déplacement cinématiquement admissible $\underline{\hat{u}}_H$ qui ne soit pas le champ solution éléments finis (c'est-à-dire $\underline{\hat{u}}_H \neq \underline{u}_H$) il est possible d'obtenir une borne inférieure de l'erreur vraie. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex} - \underline{u}_H) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}_H - \underline{u}_H)\, d\Omega \right| \leqslant |||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_H|||_{\Omega} |||\underline{\hat{u}}_H - \underline{u}_H|||_{\Omega} \quad (1.50)$$

En utilisant le fait que $\underline{u}_{ex} - \underline{u}_H \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$ et l'admissibilité statique de $\hat{\sigma}_H$, cette inégalité se réécrit :

$$\left| \int_{\Omega} (\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}_H - \underline{u}_H)\, d\Omega \right| \leqslant |||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_H|||_{\Omega} |||\underline{\hat{u}}_H - \underline{u}_H|||_{\Omega} \quad (1.51)$$

Ainsi, une borne inférieure garantie de l'erreur vraie s'écrit :

$$|||\underline{e}_{discr}|||_\Omega \geqslant \frac{\left|\int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\hat{\underline{u}}_H - \underline{u}_H)\, d\Omega\right|}{|||\hat{\underline{u}}_H - \underline{u}_H|||_\Omega} \tag{1.52}$$

Notons $\underline{w} = \hat{\underline{u}}_H - \underline{u}_H \in \mathrm{CA}^0$ et réécrivons la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\hat{\underline{u}}_H - \underline{u}_H)\, d\Omega &= \int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{w})\, d\Omega \\
&= \int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}_H) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{w})\, d\Omega \\
&= \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}_{ex} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{w})\, d\Omega - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{w})\, d\Omega \\
&= L(\underline{w}) - a(\underline{u}_H, \underline{w}) \\
&= R_H(\underline{w})
\end{aligned} \tag{1.53}$$

où nous avons utilisé le fait que $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H$ est statiquement admissible et que $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$. Nous constatons qu'il s'agit de la même borne inférieure que celle obtenue à partir de l'équation des résidus. Distinguons à présent deux manières de reconstruire le champ de déplacement $\underline{w}$ nécessaire à l'évaluation de cette borne.

1.2.4.1 A partir de la méthode des résidus implicites

Dans le cas où une borne supérieure de l'erreur a déjà été obtenue, il paraît intéressant d'exploiter les champs reconstruits pour le calcul de la borne inférieure. Dans [33], les auteurs proposent la construction d'une borne inférieure à partir d'une précédente estimation d'erreur par la méthode des résidus implicites. Un champ de déplacement continu $\underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)\backslash\{\underline{0}\}$ est reconstruit à partir des champs calculés pour l'estimation de la borne supérieure. Ces champs n'étant pas continus le long des arêtes des éléments, une moyenne est effectuée afin de lisser le champ. Dans [107], les champs de déplacement $\underline{e}^i$ obtenus lors des résolutions de problèmes par *star-patch* :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \underline{e}^i \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}i) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\tilde{\partial}^{-2}i) \\
&\qquad\qquad a(\underline{e}^i, \underline{v}) = R_H(\phi^i_H \underline{v})
\end{aligned} \tag{1.54}$$

sont utilisés pour construire un champ de déplacement continu $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)\backslash\{\underline{0}\}$. De manière pratique, le problème précédent est résolu sur un espace de dimension finie $\mathrm{CA}^0_h(\tilde{\partial}^{-2}i)$ plus riche que $\mathrm{CA}^0_H(\tilde{\partial}^{-2}i)$:

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \underline{e}^i \in \mathrm{CA}^0_h(\tilde{\partial}^{-2}i) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0_h(\tilde{\partial}^{-2}i) \\
&\qquad\qquad a(\underline{e}^i, \underline{v}) = R_H(\phi^i_H \underline{v})
\end{aligned} \tag{1.55}$$

La construction d'un champ de déplacement continu s'effectue en faisant l'opération suivante :

$$\underline{w} = \Pi_h\Big(\sum_{i\in\mathcal{V}} \phi^i_H \underline{e}^i\Big) \tag{1.56}$$

en utilisant le projecteur Π_h sur l'espace $\mathrm{CA}_h^0(\tilde{\partial}^{-2}i)$. Les discontinuités sur le bord de chaque *star-patch* sont supprimées en multipliant le champ par la fonction de forme ϕ_H^i associée au nœud central du patch. La projection sur CA_h^0 assure que le calcul de $|R_H(\underline{v})|$ soit aisé.

Le champ $\underline{w}$ obtenu est bien cinématiquement admissible à 0.

1.2.4.2 A partir de champs admissibles

Cette démarche est décrite dans [50] pour des éléments quadratiques en deux dimensions. La borne inférieure est surtout exploitée pour améliorer l'estimation d'un erreur locale (en exploitant l'identité du parallélogramme). Dans [50], le champ est obtenu comme la somme des solutions de problèmes locaux posés par *star-patch* avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord du *star-patch*. Ainsi, pour chaque nœud i du maillage, le problème local s'écrit :

Trouver $\underline{w}^i \in \mathrm{CA}^{0,\tilde{\partial}^{-2}i}(\tilde{\partial}^{-2}i)$ tel que $\forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^{0,\tilde{\partial}^{-2}i}(\tilde{\partial}^{-2}i)$, :

$$\int_{\tilde{\partial}^{-2}i} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^i\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right) d\Omega = \int_{\tilde{\partial}^{-2}i} (\phi_i - \underline{\underline{\sigma}}_H \underline{grad}(\phi_i))\underline{v} d\Omega - \int_{\tilde{\partial}^{-2}i} \phi_i \underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right) d\Omega \quad (1.57)$$

où $\mathrm{CA}^{0,\tilde{\partial}^{-2}i}$ est l'espace des champs de déplacements réguliers valant 0 sur le bord du *star-patch*. et le champ $\underline{w}$ final est obtenu en faisant la somme des champs solutions des problèmes précédents :

$$\underline{w} = \sum_{i \in \mathcal{V}} \underline{w}^i \quad (1.58)$$

1.3 Erreur locale

Nous avons vu qu'il existe différentes techniques permettant d'obtenir une approximation ou une borne supérieure de la norme énergétique de l'erreur de discrétisation. Cependant, cette information globale peut être difficile à exploiter. Les ingénieurs s'appuyant sur la simulation dans le processus de conception sont davantage intéressés par des zones spécifiques de la structure (des régions d'intérêt) et par des quantités mécaniques précises dans ces zones (quantités d'intérêt). Un autre aspect de la vérification concerne l'estimation de l'erreur commise sur ces quantités d'intérêt et consiste donc en l'estimation d'une erreur locale. Nous présentons par la suite quelques techniques permettant d'estimer ces erreurs locales.

1.3.1 Erreur de pollution

Dans les travaux [8] en linéaire et [61] pour le non-linéaire, les auteurs décomposent l'erreur sur une zone locale $\omega \subset \Omega$ en deux contributions. La première contribution est une contribution dite interne ou erreur de troncature sur ω. Elle est due à la discrétisation sur ω. La seconde contribution est externe et est appelée erreur de pollution. Elle est due à la discrétisation sur $\Omega \backslash \omega$. Elle illustre le fait que les erreurs commises à l'extérieur de la zone locale influent et donc polluent le résultat dans ω. L'estimateur d'erreur est alors

décomposé en deux parties : une estimation de l'erreur de troncature et une estimation de l'erreur de pollution. Il a été observée que l'erreur de pollution est généralement négligeable devant l'erreur de troncature excepté dans les régions ayant une singularité (fissure par exemple) ou dans le cas de maillages non uniformes [61]. Cette méthode illustre bien la notion de l'erreur en pollution mais sa mise en œuvre nécessite la résolution de deux problèmes auxiliaires pour l'estimation des deux erreurs (troncature et pollution).

1.3.2 Estimation heuristique

Dans [88], une majoration heuristique de l'erreur locale a été proposée. L'estimation repose sur l'utilisation de l'erreur en relation de comportement. Grâce à une reconstruction améliorée d'un champ statiquement admissible, une majoration heuristique de l'erreur de discrétisation au niveau d'un élément du maillage est obtenue. Elle est de la forme :

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_H|||_E \leqslant C\|\underline{\underline{\hat{\sigma}}} - \underline{\underline{\sigma}}_H\|_{\mathbb{H},E} \tag{1.59}$$

où C est une constante supérieure à 1. La qualité de l'estimateur dépend fortement de la qualité du champ statiquement admissible reconstruit. Plus celui-ci est de bonne qualité, plus la constante C est proche de 1. Cette technique a été mise en œuvre dans [49] pour l'estimation d'erreur sur la contrainte équivalente de Von Mises. Ce résultat est une première réponse quant à l'estimation d'une erreur locale en utilisant les outils de l'estimation globale.

1.3.3 Estimation basée sur les extracteurs et le problème adjoint

1.3.3.1 Principe

Les outils d'extraction sont utilisés dans le cadre de l'estimation d'erreur afin d'exprimer une quantité d'intérêt, locale par définition, sous une forme globale. Les extracteurs ont été utilisés dans ce contexte tout d'abord dans [12] et ont permis de nombreux développements dans le cadre de l'estimation d'erreur.

Le principe consiste à écrire une quantité d'intérêt I comme une fonctionnelle $\widetilde{L}$ du champ de déplacement $\underline{u}$ sous une forme globale. Dans le cas linéaire, cela s'écrit :

$$I = \widetilde{L}(\underline{u}) = \int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) + \underline{f}_\Sigma \underline{u}) d\Omega \tag{1.60}$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma$ et $\underline{f}_\Sigma$ les extracteurs, qui sont fonction de la quantité d'intérêt choisie. Par exemple, si la quantité I est la moyenne de la composante suivant l'axe $\underline{y}$ du déplacement sur une zone ω alors $\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma$ est la contrainte nulle et $\underline{f}_\Sigma = \frac{\underline{y}}{\text{mes}(\omega)}$ dans ω et $\underline{0}$ ailleurs. Notons que dans le cas de certaines quantités d'intérêt (par exemple la contrainte équivalente de Von Mises), la fonctionnelle $\widetilde{L}$ n'est pas connue de façon explicite et il convient d'effectuer des traitements spécifiques afin de la construire [63].

Ainsi, l'erreur de discrétisation sur la quantité d'intérêt $\underline{e}_{discr,I}$ est définie par :

$$\underline{e}_{discr,I} = \widetilde{L}(\underline{u}_{ex}) - \widetilde{L}(\underline{u}_H) \tag{1.61}$$

Si la fonctionnelle $\widetilde{L}$ est linéaire, nous avons $\underline{e}_{discr,I} = \widetilde{L}(\underline{e}_{discr})$. Dans le cas contraire, nous pouvons approximer l'erreur sur la quantité d'intérêt en utilisant par exemple l'opérateur tangent associé à $\widetilde{L}$, comme dans [63] par exemple. Cela conduit à effectuer une approximation qui peut polluer l'estimation de l'erreur.

1.3.3.2 Définition du problème adjoint

A l'aide de cette fonctionnelle, un nouveau problème est défini et est appelé problème adjoint ou auxiliaire. Introduisons le nouvel espace :

$$\widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega) = \left\{ \underline{\underline{\tau}} \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^{d\times d}_{\mathrm{sym}};\ \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega),\ \int_\Omega \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega = \widetilde{L}(\underline{v}) \right\} \quad (1.62)$$

Le problème adjoint s'écrit :

$$\text{Trouver } \left(\underline{\widetilde{u}}_{ex}, \underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_{ex}\right) \in \mathrm{CA}^0(\Omega) \times \widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega) \text{ tels que } e_{CR_\Omega}(\underline{\widetilde{u}}_{ex}, \underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_{ex}) = 0 \quad (1.63)$$

Nous observons que ce problème est très proche du problème de référence. Les différences résident dans :

- L'espace de recherche du champ de déplacement qui doit être cinématiquement admissible à 0
- L'espace des champs statiquement admissibles : le chargement du problème de référence a été remplacé par la fonctionnelle $\widetilde{L}$ définissant la quantité d'intérêt.

Ce problème peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{Trouver } \underline{\widetilde{u}} \in \mathrm{CA}^0(\Omega) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^0(\Omega),\ a(\underline{\widetilde{u}}, \underline{v}) = \widetilde{L}(\underline{v}) \quad (1.64)$$

Tout comme le problème de référence, le problème adjoint est bien posé et admet une solution unique. Les solutions du problème de référence et du problème adjoint vérifient la propriété suivante :

$$L(\underline{u}_{ex}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\widetilde{u}}_{ex})\, d\Omega = \widetilde{L}(\underline{\widetilde{u}}_{ex}) \quad (1.65)$$

due à la symétrie de l'opérateur de Hooke. On parle alors de problèmes auto-adjoints.

La solution du problème adjoint peut être cherchée dans un espace de dimension finie $\mathrm{CA}^0_{\widetilde{H}}$ par la méthode des éléments finis. Notons que cet espace peut être différent de celui choisi pour la résolution du problème de référence. En d'autres termes, le maillage Ω_H utilisé pour la résolution du problème de référence peut différer du maillage $\Omega_{\widetilde{H}}$ utilisé pour le problème adjoint. Nous faisons toujours l'hypothèse que ces maillages recouvrent parfaitement le domaine initial Ω. Nous obtenons alors une solution approchée notée $(\underline{\widetilde{u}}_{\widetilde{H}}, \underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_{\widetilde{H}})$. Nous pouvons alors définir une erreur de discrétisation pour le problème adjoint :

$$\underline{\widetilde{e}}_{discr} = \underline{\widetilde{u}}_{ex} - \underline{\widetilde{u}}_{\widetilde{H}} \quad (1.66)$$

Ce champ appartient à l'espace $\mathrm{CA}^0_{\widetilde{H}}$. Sur le problème adjoint, l'orthogonalité de Galerkin se formule :

$$\forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}^0_{\widetilde{H}}(\Omega), \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\widetilde{e}}_{discr}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_H)\, d\Omega = 0 \tag{1.67}$$

1.3.3.3 Estimation de l'erreur sur la quantité d'intérêt

Faisons l'hypothèse que les maillages utilisés pour la résolution du problème de référence et du problème direct sont identiques. Dans ce cas, $\underline{e}_{discr} \in \mathrm{CA}^0_H$ et $\underline{\widetilde{e}}_{discr} \in \mathrm{CA}^0_H$ L'erreur de discrétisation sur la quantité d'intérêt I s'écrit :

$$I_{ex} - I_H = \widetilde{L}(\underline{e}_{discr}) = a(\underline{\widetilde{u}}_{ex}, \underline{e}_{discr}) = a(\underline{e}_{discr}, \underline{\widetilde{e}}_{discr}) \tag{1.68}$$

où l'on a utilisé l'orthogonalité de Galerkin sur le problème de référence. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons la première majoration suivante :

$$|I_{ex} - I_H| \leqslant |||\underline{e}_{discr}|||_\Omega |||\underline{\widetilde{e}}_{discr}|||_\Omega \tag{1.69}$$

En notant θ l'estimation de l'erreur discrétisation du problème de référence et $\widetilde{\theta}$ l'estimation de l'erreur de discrétisation du problème adjoint, nous obtenons :

$$|I_{ex} - I_H| \leqslant \theta\widetilde{\theta} \tag{1.70}$$

Ce premier résultat montre que la connaissance des erreurs de discrétisation globales du problème de référence et de problème adjoint permettent l'estimation de l'erreur de discrétisation sur la quantité d'intérêt, d'où l'importance des estimateurs d'erreur globale présentés précédemment.

Dans [12], la première mise en œuvre des problèmes adjoints pour l'estimation d'erreur locale a été faite en utilisant la méthodes des résidus implicites 1.2.1.2. Cependant, cette méthode ne fournissant qu'une indication d'erreur, la borne proposée de l'erreur locale n'est pas garantie.

En utilisant l'identité du parallélogramme plutôt que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons l'égalité suivante [117, 101] :

$$\left\{\begin{aligned} I_{ex} - I_H = \widetilde{L}(\underline{e}_{discr}) &= a(\underline{e}_{discr}, \underline{\widetilde{e}}_{discr}) \\ &= a(s\underline{e}_{discr}, \frac{1}{s}\underline{\widetilde{e}}_{discr}) \\ &= \frac{1}{4}[|||s\underline{e}_{discr} + \frac{1}{s}\underline{\widetilde{e}}_{discr}|||^2_\Omega - |||s\underline{e}_{discr} - \frac{1}{s}\underline{\widetilde{e}}_{discr}|||^2_\Omega] \end{aligned}\right. \tag{1.71}$$

où s est un paramètre scalaire dont la valeur optimale $s = \frac{|||\underline{\widetilde{e}}_{discr}|||_\Omega}{|||\underline{e}_{discr}|||_\Omega}$ permet de minimiser la différence et donc améliorer la qualité de l'estimation. Si l'on dispose d'un encadrement des quantités $S^+ = \|s\underline{e}_{discr} + \frac{1}{s}\underline{\widetilde{e}}_{discr}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}{}^2$ et $S^- = \|s\underline{e}_{discr} - \frac{1}{s}\underline{\widetilde{e}}_{discr}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}{}^2$ de la forme :

$$\beta^+_{inf} \leqslant S+ \leqslant \beta^+_{sup} \tag{1.72}$$

et

$$\beta_{inf}^{-} \leqslant S- \leqslant \beta_{sup}^{-} \tag{1.73}$$

il est possible d'obtenir un encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt s'écrivant :

$$\frac{1}{4}\beta_{inf}^{+} - \frac{1}{4}\beta_{sup}^{-} \leqslant I_{ex} - I_H \leqslant \frac{1}{4}\beta_{sup}^{+} - \frac{1}{4}\beta_{inf}^{-} \tag{1.74}$$

Une minoration par 0 des termes S^+ et S^- est possible. Cependant, afin d'avoir un encadrement le plus précis possible, il est avantageux de construire une borne inférieure pertinente de ces quantités. L'identité du parallélogramme a notamment été utilisée dans [50, 107] dans le cadre des estimateurs basés sur la relation de comportement et dans [102] en utilisant les méthodes des résidus.

Les estimateurs basés sur l'erreur en relation de comportement étant garantis, ce sont eux qui permettent d'obtenir des bornes strictes de l'erreur sur la quantité d'intérêt. Dans la suite, nous supposons que les maillages utilisés pour les résolutions du problème de référence et du problème adjoint peuvent être différents. Une majoration exploitant l'erreur en relation de comportement a été proposée dans [74, 75] et se base sur l'égalité suivante :

$$I_{ex} - I_H - I_{HH1} = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex} - \underline{\hat{u}}_H) : (\underline{\underline{\hat{\tilde{\sigma}}}}_{\tilde{H}} - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\hat{\tilde{u}}}_{\tilde{H}}\right))d\Omega \tag{1.75}$$

où

$$I_{HH1} = \int_\Omega (\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}_H))\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\hat{\tilde{u}}}_{\tilde{H}}\right) d\Omega + \tilde{L}(\underline{\hat{u}}_H - \underline{u}_H) \tag{1.76}$$

et où les champs de contrainte $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H$ et $\underline{\underline{\hat{\tilde{\sigma}}}}_{\tilde{H}}$ sont statiquement admissibles. Les champs de déplacement issus des résolutions éléments finis étant cinématiquement admissibles, nous pouvons choisir $\underline{\hat{u}}_H = \underline{u}_H$ et $\underline{\hat{\tilde{u}}}_{\tilde{H}} = \underline{\tilde{u}}_{\tilde{H}}$. La majoration s'écrit :

$$|I_{ex} - I_H - I_{HH1}| \leqslant e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H)e_{CR_\Omega}(\underline{\tilde{u}}_{\tilde{H}}, \underline{\underline{\hat{\tilde{\sigma}}}}_{\tilde{H}}) \tag{1.77}$$

Remarque 1.2. *Dans le cas où les deux maillages sont identiques, l'orthogonalité de Galerkin donne $I_{HH1} = 0$ et nous retrouvons la majoration classique donnée en 1.70.*

Une autre majoration peut être obtenue en utilisant les champs moyens $\frac{1}{2}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H + \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H))$ et $\frac{1}{2}(\underline{\underline{\hat{\tilde{\sigma}}}}_{\tilde{H}} + \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\tilde{u}}_{\tilde{H}}\right))$:

$$|I_{ex} - I_H - I_{HH2}| \leqslant \frac{1}{2}e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H)e_{CR_\Omega}(\underline{\tilde{u}}_{\tilde{H}}, \underline{\underline{\hat{\tilde{\sigma}}}}_{\tilde{H}}) \tag{1.78}$$

où

$$I_{HH2} = \int_\Omega \frac{1}{2}(\underline{\underline{\hat{\tilde{\sigma}}}}_{\tilde{H}} + \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\tilde{u}}_{\tilde{H}}\right)) : \mathbb{H}^{-1} : (\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H))d\Omega \tag{1.79}$$

Remarque 1.3. *Dans le cas où les deux maillages sont identiques, le terme I_{HH2} n'est pas nul.*

Remarque 1.4. *Ce résultat est le même que celui qui pourrait être dérivé de l'identité du parallélogramme 1.74 en utilisant 0 comme borne inférieure des quantités S^+ et S^- et en utilisant les majorations suivantes :*

$$\beta^+_{sup} = 2e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H) e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_{\widetilde{H}}, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\widetilde{H}}) + 2\int_\Omega (\hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\widetilde{H}} - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_{\widetilde{H}})) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)) d\Omega \tag{1.80}$$

et

$$\beta^-_{sup} = 2e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H) e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_{\widetilde{H}}, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\widetilde{H}}) - 2\int_\Omega (\hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\widetilde{H}} - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_{\widetilde{H}})) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)) d\Omega \tag{1.81}$$

qui sont les bornes supérieures proposées dans [107].

Dans le cadre des problèmes linéaires, dans [86], ces majorations ont été améliorées. L'idée générale est de traiter la zone ω (la quantité d'intérêt) séparément de Ω. En introduisant des domaines homothétiques à ω, et en exploitant le principe de Saint-Venant, deux nouvelles majorations sont proposées. L'utilisation du principe de Saint-Venant restreint leur application aux problèmes linéaires. Les majorations font intervenir les erreurs en relation de comportement des deux problèmes calculées soit sur sur les domaines homothétiques soit sur la structure entière privée de ces domaines. Elles font également intervenir des grandeurs géométriques (rapport d'homothétie et constantes calculables). L'estimation proposée est garantie et les domaines homothétiques peuvent être choisis de manière à obtenir des bornes précises.

L'utilisation des estimateurs d'erreur basés sur l'erreur en relation de comportement permet l'extension de l'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt sur une large gamme de problèmes, profitant ainsi des extensions existantes des estimateurs de cette famille. Citons, entre autres, l'application sur des problèmes de visco-élasticité linéaire [20, 19], en dynamique transitoire [140, 139], en élastoplasticité [76], en visco-élasto-dynamique [135].

La majoration faisant intervenir le produit des estimations des erreurs globales du problème de référence et du problème adjoint, l'estimation sur la quantité d'intérêt est améliorée lorsque l'une ou l'autre des estimations globales est améliorée. De par son caractère localisé, c'est le problème adjoint que l'on cherche à mieux résoudre. Une première manière est d'utiliser un maillage non-uniforme, très fin dans les zones de fort gradient de la solution (près du chargement adjoint, c'est-à-dire près de la quantité d'intérêt). Cette méthode est dite intrusive puisqu'elle modifie le maillage du problème de référence et ne permet pas de réutiliser les opérateurs construits et surtout factorisés lors de la résolution du problème de référence. Cette méthode est néanmoins facile à mettre en œuvre et a été utilisée dans [19] par exemple. Une seconde approche, dite non-intrusive, consiste à injecter la connaissance *a priori* de la solution du problème adjoint. Il s'agit d'un enrichissement local via la partition de l'unité près de la région d'intérêt. La connaissance *a priori* peut venir :

— D'une solution dite *handbook* qui provient d'une bibliothèque de solutions numériques pré-calculées de manière précise.

— D'une solution analytique provenant d'un développement asymptotique (cas de fissure, trou ou utilisation des fonctions de Green pour les quantités d'intérêt ponctuelles).

Les bornes obtenues sont alors très précises car la solution du problème adjoint est très bien captée. Cette méthode est dite non-intrusive car elle ne nécessite pas de remaillage et donc pas de nouvelle factorisation d'opérateurs. Cependant, notons qu'une solution *handbook* a été de toutes façons calculée et que l'introduction de cette connaissance via la partition de l'unité peut être coûteuse (en terme de points d'intégration par exemple). De plus, la mise en place de cette méthode conduit à prendre des précautions quant à la reconstruction des champs statiquement admissibles. En effet, un chargement en effort est introduit sur le contour de la zone enrichie [86].

Chapitre 2

Méthodes de décomposition de domaine

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement pour le problème de référence. Nous donnons les principes des différentes approches ainsi que les algorithmes qui en découlent.

2.1 Ecriture continue

La paternité des méthodes de décomposition de domaine est attribuée à Hermann Schwarz qui proposa de résoudre un problème aux dérivées partielles pour une géométrie complexe en utilisant une décomposition recouvrante du domaine en sous-domaines de forme simple. Ces méthodes ont été utilisées dans le cadre du calcul numérique dans les années 1980. Le développement des capacités de calcul des ordinateurs et surtout l'architecture parallèle de ces ordinateurs font des méthodes de décomposition de domaine un outil adapté aux problèmes industriels complexes et de grande taille. Dans cette partie, nous présentons le principe des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, la formulation du problème d'interface et la résolution de celui-ci.

Considérons une partition du domaine Ω en sous-structures $\Omega^{(s)}$. Puisqu'il s'agit d'une partition, les sous-domaines vérifient les propriétés suivantes :

— Non-recouvrement : $\forall s \neq s'$, $\Omega^{(s)} \cap \Omega^{(s')} = \varnothing$

— $\overline{\Omega} = \cup_s \overline{\Omega^{(s)}}$

Notons $\Gamma^{s,s'} = \partial\Omega^{(s)} \cap \partial\Omega^{(s')}$ l'interface entre le domaine (s) et le domaine (s'). Nous définissons également $\Gamma = \cup_{s \neq s'} \Gamma^{s,s'}$ l'interface entre tous les sous-domaines. Les champs vivant sur le sous-domaine $\Omega^{(s)}$ seront notés avec l'exposant (s). Nous introduisons également l'opérateur $\mathrm{tr}^{(s)}$ permettant de passer du sous-domaines à son interface :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}^{(s)} &: \mathtt{H}^1(\Omega^{(s)}) \rightarrow \mathtt{H}^{1/2}(\Omega) \text{ pour les champs de déplacement} \\ &: \mathtt{H}^{div}(\Omega^{(s)}) \rightarrow \mathtt{H}^{-1/2}(\Omega) \text{ pour les champs de contraintes} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Le problème mécanique sous-structuré s'écrit :

Trouver $\underline{u}^{(s)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}$ tels que

— Pour chaque sous-structure $\Omega^{(s)}$

$$\underline{u}^{(s)} = \underline{u}_d^{(s)} \text{ sur } \partial\Omega^{(s)} \bigcap \partial_u\Omega \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) + \underline{\underline{grad}}^T(\underline{u})) \text{ sur } \Omega^{(s)} \tag{2.2}$$

$$\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}) + \underline{f}^{(s)} = \underline{0} \text{ sur } \Omega^{(s)} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}\underline{n}^{(s)} = \underline{g}^{(s)} \text{ sur } \partial_g\Omega \bigcap \partial\Omega^{(s)} \tag{2.3}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}^{(s)}\right) \text{ sur } \Omega^{(s)} \tag{2.4}$$

— Pour chaque interface $\Gamma^{s,s'}$

  — Le champ de déplacement est continu : $\mathrm{tr}^{(s)}(\underline{u}^{(s)}) = \mathrm{tr}^{(s')}(\underline{u}^{(s')})$

  — Les efforts sont équilibrés : $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)} \cdot \underline{n}^{(s)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(s')} \cdot \underline{n}^{(s')} = \underline{0}$

Notons $\partial_g\Omega^{(s)} = \partial_g\Omega \bigcap \partial\Omega^{(s)}$ et $\partial_u\Omega^{(s)} = \partial_u\Omega \bigcap \partial\Omega^{(s)}$. Nous définissons les espaces d'admissibilité suivants :

$$\mathrm{CA}(\Omega^{(s)}) = \left\{ \underline{u} \in \left(\mathtt{H}^1(\Omega^{(s)})\right)^d \;\; \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_u\Omega^{(s)} \right\} \tag{2.5}$$

et l'espace vectoriel associé

$$\mathrm{CA}^0(\Omega^{(s)}) = \left\{ \underline{u} \in \left(\mathtt{H}^1(\Omega^{(s)})\right)^d, \; \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_u\Omega^{(s)} \right\} \tag{2.6}$$

et

$$\mathrm{SA}(\Omega^{(s)}) = \left\{ \underline{\underline{\tau}} \in \left(\mathtt{L}^2(\Omega^{(s)})\right)^{d\times d}_{\mathrm{sym}};\ \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^{00}(\Omega^{(s)}), \right.$$
$$\left. \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega = \int_{\Omega^{(s)}} \underline{f}\cdot\underline{v} d\Omega + \int_{\partial_g\Omega^{(s)}} \underline{g}\cdot\underline{v} dS \right\} \quad (2.7)$$

où

$$\mathrm{CA}^{00}(\Omega^{(s)}) = \left\{ \underline{u} \in \left(\mathtt{H}^1(\Omega^{(s)})\right)^d,\ \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^{(s)} \backslash \partial_g\Omega^{(s)} \right\} \quad (2.8)$$

Le problème se reformule alors :
Trouver $\underline{u}^{(s)}$ et $\sigma^{(s)}$ tels que

$$\forall s \begin{cases} \underline{u}^{(s)} \in \mathrm{CA}(\Omega^{(s)}) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} \in \mathrm{SA}(\Omega^{(s)}) \\ e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}^{(s)}, \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}) = 0 \end{cases} \text{ et } \forall (s,s') \begin{cases} \mathrm{tr}(\underline{u}^{(s)}) = \mathrm{tr}(\underline{u}^{(s')}) \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}\cdot\underline{n}^{(s)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(s')}\cdot\underline{n}^{(s')} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \end{cases} \quad (2.9)$$

L'admissibilité globale (sur toute la structure) des champs se traduit ainsi :

$$(\underline{u}^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega) \Leftrightarrow \forall s,\ \underline{u}^{(s)} \in \mathrm{CA}(\Omega^{(s)}) \text{ et } \forall (s,s'),\ \mathrm{tr}(\underline{u}^{(s)}) = \mathrm{tr}(\underline{u}^{(s')}) \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \quad (2.10)$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega) \Leftrightarrow \forall s,\ \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} \in \mathrm{SA}(\Omega^{(s)}) \text{ et } \forall (s,s'),\ \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}\cdot\underline{n}^{(s)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(s')}\cdot\underline{n}^{(s')} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \quad (2.11)$$

Le champ de déplacement cinématiquement admissible dans chaque sous-structure mais ne vérifiant pas la continuité aux interfaces appartient à $\mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$.

Le problème peut se réécrire :

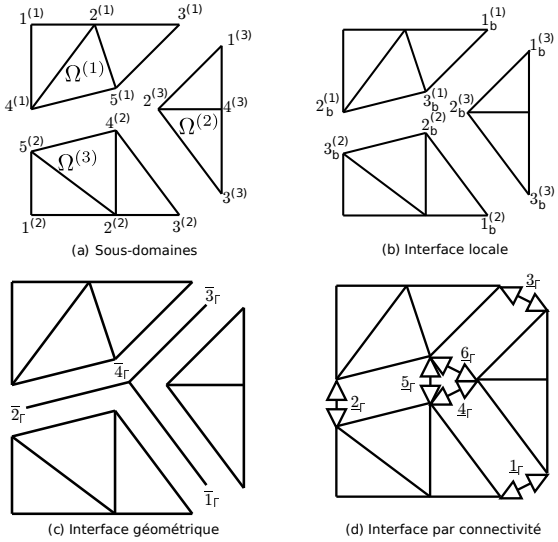
$$\text{Trouver } \left((\underline{u}^{(s)})_s, (\underline{\underline{\sigma}}^{(s)})_s\right) \in \mathrm{CA}(\Omega)\times\mathrm{SA}(\Omega) \text{ tel que } e_{CR_\Omega}((\underline{u}^{(s)})_s, (\underline{\underline{\sigma}}^{(s)})_s) = 0 \quad (2.12)$$

2.2 Discrétisation et résolution

Considérons une discrétisation de Ω en un maillage Ω_H tel que chaque élément n'appartienne qu'à un seul sous-domaine. Une telle discrétisation est appelée conforme. La forme discrétisée des champs est notée en caractère gras. A présent, pour chaque domaine $\Omega^{(s)}$, nous distinguons les degrés de liberté situés sur l'interface du sous-domaine, ou bord et qui sont indicés par la lettre b, des degrés de liberté intérieurs indicés par la lettre i. Ainsi, la forme discrétisée de l'opérateur tr s'écrit :

$$\mathbf{tr}^{(s)}\mathbf{x}^{(s)} = \mathbf{x_b}^{(s)} \quad (2.13)$$

Introduisons également, pour chaque sous-structure $\Omega^{(s)}$, les opérateurs d'assemblage suivants :



$$\mathbf{tr}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{tr}^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{tr}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{A}^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

FIGURE 2.1 – Exemples d'opérateurs de trace et d'assemblage (primaux et duaux)

— $\mathbf{A}^{(s)}$ opérateur booléen permettant de passer de la numérotation locale de l'interface du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ à la numérotation de l'interface globale Γ
— $\mathbf{B}^{(s)}$ opérateur booléen signé permettant de passer de la numérotation locale de l'interface du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ à la numérotation de l'interface globale Γ

Une illustration de ces opérateurs est faite en figure 2.1.

Remarque 2.1. *Les opérateurs d'assemblage vérifient la propriété suivante :*

$$\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)^T} = 0 \tag{2.14}$$

La condition de continuité des déplacements de 2.9 s'écrit de manière discrétisée :

$$\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{tr}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

Enfin, en notant $\mathbf{K}^{(s)}$ la matrice de rigidité associée à chaque domaine $\Omega^{(s)}$ et $\mathbf{f}^{(s)}$ les efforts généralisés, la forme discrète de l'équilibre de chaque sous-structure s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{(s)} & \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \\ \mathbf{K}_{ib}^{(s)^T} & \mathbf{K}_{bb}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^{(s)} \\ \mathbf{u}_b^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{(s)} \\ \mathbf{f}_b^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_i \\ \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

où $\boldsymbol{\lambda}^{(s)}$ est le représentant nodal de l'inter-effort entre deux sous-domaines à l'interface $\Gamma^{(s,s')}$. La condition d'équilibre en effort de 2.9 s'écrit de manière discrétisée :

$$\sum_s \mathbf{A}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}^{(s)} = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

Enfin, pour chaque sous-structure, notons $\mathbf{R}^{(s)}$ une base du noyau de $\mathbf{K}^{(s)}$.
Le problème 2.12 s'écrit sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} &\forall s \text{ trouver } \mathbf{u}^{(s)} \text{ et } \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \text{ tels que} \\ &\sum_s \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{tr}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{0} \\ &\sum_s \mathbf{A}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}^{(s)} = \mathbf{0} \\ &\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{(s)} & \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \\ \mathbf{K}_{ib}^{(s)^T} & \mathbf{K}_{bb}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^{(s)} \\ \mathbf{u}_b^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{(s)} \\ \mathbf{f}_b^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_i \\ \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Le principe des méthodes de décomposition de domaine repose sur la reformulation du problème en un problème ne faisant intervenir que des quantités d'interfaces. Pour cela, le problème mécanique est recondensé ainsi :

$$\begin{aligned} &\forall s \text{ trouver } \mathbf{u}^{(s)} \text{ et } \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \text{ tels que} \\ &\sum_s \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{tr}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{0} \\ &\sum_s \mathbf{A}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}^{(s)} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{S}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

avec le complément de Schur

$$\mathbf{S}^{(s)} = \left(\mathbf{K}_{bb}^{(s)} - \mathbf{K}_{bi}^{(s)} {\mathbf{K}_{ii}^{(s)}}^{-1} \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \right) \tag{2.20}$$

et

$$\mathbf{b}^{(s)} = \mathbf{f}_b^{(s)} - \mathbf{K}_{bi}^{(s)} {\mathbf{K}_{ii}^{(s)}}^{-1} \mathbf{f}_i^{(s)} \tag{2.21}$$

Remarque 2.2. *L'inversion de la matrice $\mathbf{K}_{ii}^{(s)}$ correspond à la résolution d'un problème local sur le sous-domaine $^{(s)}$ avec des conditions de type Dirichlet sur l'interface. Ce problème est toujours bien posé et la matrice ${\mathbf{K}_{ii}^{(s)}}^{-1}$ est donc bien définie.*

Le problème obtenu 2.19 est donc formulé uniquement en terme de quantités d'interface. Plusieurs choix de résolution existent :

— Considérer une unique quantité d'interface en déplacement $\mathbf{U}$ si bien que la continuité de déplacement entre sous-structures est automatiquement vérifiée ; il s'agit de l'approche primale [93, 90, 89].

$$\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{tr}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{2.22}$$

— Considérer une unique quantité d'interface en effort $\mathbf{\Lambda}$ si bien que l'équilibre entre sous-structures est automatiquement vérifié ; il s'agit de l'approche duale [45, 46, 47].

$$\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}^{(s)} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \tag{2.23}$$

— Autres approches (détaillées en section 2.5)

Le problème est condensé à l'interface et assemblé à l'aide des opérateurs d'assemblage. Cela mène à la résolution d'un système matriciel linéaire dont l'inconnue est un vecteur de taille réduite (puisque vivant uniquement aux interfaces). La résolution d'un tel système ne se fait pas par un solveur direct puisque cela ferait perdre l'extensibilité de la méthode. En effet, considérant qu'au traitement de chaque sous-structure est associé à un cœur ou un ordinateur, assembler la matrice du système nécessiterait de nombreuses communications entre sous-structures réduisant drastiquement le parallélisme. En réalité, le problème global d'interface n'est jamais assemblé. Seuls des problèmes locaux par sous-structure sont résolus par un solveur direct et en parallèle. Il est alors évident que seule une approche itérative peut être envisagée pour la résolution du problème d'interface global. Un algorithme de type GMRES ou gradient conjugué (selon les propriétés de la matrice) est classiquement employé. La convergence de tels algorithmes est fortement liée aux propriétés spectrales de la matrice. Ainsi, le plus souvent, des préconditionneurs sont employés afin d'améliorer les performances du solveur.

Pour être réellement intéressantes et avantageuses, les méthodes de résolution parallèles doivent posséder la propriété d'extensibilité numérique. Cette propriété est vérifiée lorsque, pour un rapport de taille d'éléments sur taille de sous-domaines constant, le nombre d'itérations à convergence ne dépend pas du nombre de sous-domaines. Cette propriété est essentielle puisqu'elle assure que les bonnes propriétés de la méthode sont conservées quelle que soit la taille du problème. Dans les méthodes de décomposition de domaine, cette extensibilité est assurée par un problème grossier. L'objectif de ce problème est de permettre, dès la première itération, une propagation rapide de la partie basse du spectre de l'information sur toute la structure.

2.3 Approche primale

2.3.1 Problème d'interface

Cette approche a été initialement proposée dans [93] puis développée dans [89], [90] pour les problèmes elliptiques en trois dimensions. Dans cette approche, la continuité

du déplacement aux interfaces est prise en compte directement par l'introduction d'une unique inconnue d'interface $\mathbf{U}$. En éliminant les réactions, l'équation 2.2 se réécrit :

$$\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{U} = \mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \tag{2.24}$$

A l'aide des opérateurs d'assemblage, le problème d'interface global s'écrit :

$$(\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T})\mathbf{U} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)} \tag{2.25}$$

2.3.2 Résolution du problème d'interface

Dans l'approche primale, le préconditionneur classique est le suivant :

$$\sum_s \mathbf{W}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{W}^{(s)^T} \tag{2.26}$$

où les matrices $\mathbf{W}^{(s)}$ sont des matrices de pondération ou de *scaling*. L'opérateur d'assemblage primal de pondération est noté $\widetilde{\mathbf{A}}^{(s)}$ et est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(s)} = \mathbf{W}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)} \tag{2.27}$$

Pour les structures homogènes, $\mathbf{W}^{(s)}$ sont choisies diagonales et les coefficients de cette diagonale sont l'inverse de la multiplicité de la sous-structure. Dans le cas de forte hétérogénéité matériaux, le ratio des rigidités intervient dans les matrices $\mathbf{W}^{(s)}$ [68, 125]. Notons que la pseudo-inverse du complément de Schur primal $(\mathbf{S}^{(s)})^+$ intervient dans le préconditionneur. Le préconditionneur multipliant le résidu, il convient de s'assurer que le résidu $\mathbf{r}$ est bien dans l'image de l'opérateur, c'est-à-dire orthogonal à son noyau. Cela se traduit par l'égalité suivante :

$$\mathbf{H}^T\mathbf{r} = 0 \tag{2.28}$$

où $\mathbf{H}$ est la concaténation pour chacune des sous-structure des $\mathbf{H}^{(s)}$ suivants :

$$\mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{W}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)}\mathbf{tr}^{(s)}\mathbf{R}^{(s)} \tag{2.29}$$

Cette condition peut être prise en compte par une méthode de Krylov-augmenté. Notons $\mathbf{P}_1$ le projecteur sur les modes rigides défini par :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T} \tag{2.30}$$

Cela conduit à l'algorithme BDD (Balanced Domain Decomposition) 1 :

2.4 Approche duale

2.4.1 Problème d'interface

Cette approche a été initialement proposée dans [45] puis développée dans [46, 47]. Les propriétés de convergence ont été démontrées dans [43]. Dans cette approche, la

Algorithme 1 : BDD

$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}$
Initialisation $\mathbf{U}_0 = \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)}$
Résidu initial $\mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_1^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)}$
Résidu préconditionné $\mathbf{z}_0 = \sum_s \widetilde{\mathbf{A}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+ \widetilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r}_0$
Direction de recherche $\mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0$
j=0
while $\sqrt{\mathbf{r},\mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  $\mathbf{q}_j = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{P}_1\mathbf{w}_j$
  $\alpha_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j)/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)$
  $\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j + \alpha_j \mathbf{w}_j$ $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{q}_j$
  $\mathbf{z}_{j+1} = \sum_s \widetilde{\mathbf{A}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+ \widetilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r}_{j+1}$
  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{P}_1\mathbf{z}_{j+1} - (\mathbf{q}_j, \mathbf{P}_1\mathbf{z}_{j+1})/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)\mathbf{w}_j$
  $j = j + 1$
end

continuité du déplacement aux interfaces est prise en compte par l'introduction d'un unique multiplicateur de Lagrange $\mathbf{\Lambda}$. En éliminant les déplacements des degrés de liberté internes on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(s)}\mathbf{u}_b^{(s)} &= \mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \\ \mathbf{R}^{(s)^T}(\mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}^{(s)}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

où la deuxième équation traduit l'orthogonalité du second membre vis-à-vis des modes rigides. En utilisant la pseudo-inverse du complément de Schur nous pouvons écrire :

$$\mathbf{u}_b^{(s)} = (\mathbf{S}^{(s)})^+(\mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}^{(s)}) + \mathbf{R}^{(s)^T}\beta^{(s)} \tag{2.32}$$

où $\beta^{(s)}$ est une amplitude de déplacement sur les modes rigides de la structure.

Soit β la concaténation pour chacune des sous-structures des $\beta^{(s)}$. $\mathbf{G}$ est la concaténation pour chacune des sous-structure des $\mathbf{G}^{(s)}$ suivants :

$$\mathbf{G}^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{tr}^{(s)}\mathbf{R}^{(s)} \tag{2.33}$$

$\mathbf{e}$ est la concaténation pour chacune des sous-structure des $\mathbf{e}^{(s)}$ suivants :

$$\mathbf{e}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)^T}\mathbf{R}^{(s)} \tag{2.34}$$

A l'aide des opérateurs d'assemblage, le problème d'interface global s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)} \\ -\mathbf{e} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

2.4.2 Résolution du problème d'interface

Dans l'approche duale, le préconditionneur classique est le suivant :

$$\sum_s \mathbf{W}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{W}^{(s)^T} \tag{2.36}$$

L'opérateur d'assemblage dual de pondération est noté $\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}$ et est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)} = \mathbf{W}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)} \tag{2.37}$$

La contrainte traduite par la seconde ligne du système de l'approche duale peut être prise en compte par une méthode de Krylov contraint. Introduisons pour cela le projecteur suivant :

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T \tag{2.38}$$

Cela aboutit à l'algorithme FETI 2.

Algorithme 2 : FETI

$\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T$
Initialisation $\mathbf{\Lambda}_0 = -\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{e}$
Résidu initial $\mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_2^T(-\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}_0)$
Résidu préconditionné $\mathbf{z}_0 = \mathbf{P}_2 \sum_s \widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)^T} r_0$
Direction de recherche $\mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0$
j=0
while $\sqrt{\mathbf{r},\mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  $\mathbf{q}_j = \mathbf{P}_2^T \sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{w}_j$
  $\alpha_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j)/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)$
  $\mathbf{\Lambda}_{j+1} = \mathbf{\Lambda}_j + \alpha_j \mathbf{w}_j$
  $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{q}_j$
  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{P}_2 \sum_s \widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)^T} r_j$
  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} - (\mathbf{q}_j, \mathbf{z}_{j+1})/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)\mathbf{w}_j$
end

2.5 Autres approches

Nous abordons ici d'autres approches utilisées dans les décomposition de domaine de type Schur-Krylov. Bien que reprenant généralement les principes classiques des approches primale ou duale, elles améliorent les performances des algorithmes classiques pour certains problèmes.

Dans [39, 44], un algorithme FETI-2 niveaux est developpé. Il s'agit d'ajouter des contraintes optionnelles au problème grossier classique de FETI afin d'améliorer la convergence dans le cas de problème plaque ou coque. Ces contraintes optionnelles sont ajoutées

à l'aide d'un second projecteur. Dans [109, 64], les auteurs proposent une variante de l'algorithme FETI qu'ils appellent A-FETI (pour FETI algébrique) dans une volonté de distinguer le partitionnement algébrique du partitionnement différentiel classiquement fait dans FETI. Les résultats obtenus dans ces articles montrent l'extensibilité de l'algorithme A-FETI pour un problème de plaque. Cependant, jusqu'alors, seul FETI-2-niveaux avait été efficace pour résoudre de tels problèmes et cet algorithme impliquait la résolution d'un problème grossier enrichi. Ainsi, dans [126], les auteurs contestent les étonnantes performances de A-FETI et montrent que cet algorithme n'est pas numériquement extensible pour les problèmes plaque. Ils montrent également que A-FETI n'est qu'une instance particulière de la méthode FETI.

Dans [40, 41], les auteurs souhaitent remédier à deux lacunes de FETI-2 : des performances qui peuvent être améliorées pour les problèmes plaque et coque et l'absence de lien entre le solveur pour les problèmes statiques et le solveur pour les problèmes dynamiques. Ils proposent alors un nouvel algorithme : FETI dual-primal ou FETI-DP. Le principe de FETI-DP est d'imposer la continuité du déplacement à un certain nombre de degrés de liberté. Dans [96], la convergence de FETI-DP équipée d'un préconditionneur de type Dirichlet est démontrée pour des problèmes du deuxième et quatrième ordre en deux dimensions. La version primale de FETI-DP a été développée dans [34] sous le nom de BDDC (*Balancing Domain Decomposition with Constraints*), les contraintes étant la continuité aux nœuds coins. De nombreux développements autour de FETI-DP ont ensuite été effectués. Par exemple, dans [17] est proposée une formulation continue de FETI-DP. Dans [69], une stratégie de choix des contraintes a été proposée et le conditionnement du problème a été étudié dans le cas de grande variation de module d'Young entre sous-structures. Dans [94], une théorie algébrique de FETI, BDD, FETI-DP et BDDC est détaillée ; en particulier, les propriétés des opérateurs de transfert sont démontrées. Dans [95], les auteurs montrent que P-FETI-DP est BDDC.

Une approche qualifiée d'hybride est proposée dans [56]. Le principe est de laisser la possibilité à chaque degré de liberté d'interface d'être traité de manière primale ou duale. Cette approche est avantageuse pour le traitement de problèmes multiphysiques puisqu'elle permet de mieux respecter la physique du problème. Il en résulte de meilleures performances numériques. Un problème grossier pour cette approche a été défini. Néanmoins, l'extensibilité numérique potentielle de la méthode semble difficile à démontrer (pas de produit scalaire défini par l'opérateur d'interface qui est soit symétrique, soit défini-positif mais pas les deux). De plus, le résidu GMRes est une quantité difficilement interprétable au sens mécanique puisqu'elle mélange des grandeurs différentes (par exemple, concaténation d'une pression et d'un déplacement). La définition d'un critère d'arrêt pertinent n'est donc pas aisée.

Un autre type d'approche est l'approche mixte dans laquelle l'inconnue d'interface est une combinaison linéaire d'un déplacement et d'un effort. Cette inconnue d'interface fait apparaître naturellement une rigidité d'interface et confère donc à cette méthode un fort sens mécanique. Dans le cas d'une seule structure sous-structurée pour la résolution, les interfaces sont considérées comme parfaites et dans le cas d'un problème de contact avec ou sans frottement, le comportement des interfaces entre solide peut être

introduit. Dans [84, 73], cette approche mixte porte le nom de LaTIn. Notons que, par ce choix d'inconnue d'interface, les problèmes locaux sont bien posés et il n'existe donc pas naturellement de problème grossier. Cela a pour conséquence une piètre convergence et une perte d'extensibilité numérique. Dans [84, 73] un problème grossier portant sur les premiers modes (traction et cisaillement) est introduit dans le but d'améliorer les performances de l'algorithme.

Les algorithmes FETI et BDD sont connus pour leur mauvais comportement dans le cas de problèmes à forte hétérogénéité (hétérogénéité localisée proche des interface) et dans le cas d'interfaces distordues (ce qui peut être le résultat de l'utilisation d'un partitionneur automatique). Récemment, dans [129], il a été montré que cette mauvaise convergence est due à la présence de modes propres non détectés par le préconditionneur. Afin de capturer ces modes propres, les auteurs de [129] proposent un algorithme appelé FETI-Geneo et BDD-Geneo détectant automatiquement ces modes oubliés. Il en résulte une méthode robuste qui permet de recouvrir une bonne convergence du solveur itératif. Néanmoins, la détection et l'analyse des valeurs propres entraîne un surcoût. Dans [59], deux nouveaux algorithmes appelés Simultaneous-FETI et Block-FETI sont présentés. Ils reposent sur des idées similaires à celles de FETI-Geneo mais n'entraînent qu'un faible surcoût numérique (ré-orthogonalisation complète du gradient conjugué) et ont de bonnes propriétés de convergence dans le cas d'interfaces distordues et de forte hétérogénéité près des interfaces.

Chapitre 3

Estimation d'erreur en cadre sous-structuré et sources d'erreur

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode d'estimation d'erreur en cadre sous-structuré développée dans [110]. Nous redonnons les algorithmes FETI et BDD en mettant l'accent sur les propriétés des champs reconstruits lors des itérations. A partir de résultats numériques tirés de [110], nous exhibons la rapide convergence de l'estimateur et la nécessité de séparer l'erreur provenant de la discrétisation de celle provenant de l'utilisation d'un solveur itératif. Enfin, nous faisons un bref état de l'art des travaux ayant eu pour objectifs une telle séparation d'erreurs en vue d'obtenir un algorithme adaptatif dont le critère d'arrêt serait défini en lien avec la discrétisation.

3.1 Un estimateur parallèle basé sur l'erreur en relation de comportement

La méthode décrite dans ce paragraphe est issue des travaux de thèse [110]. La méthodologie proposée par l'auteur se base sur une reconstruction entièrement parallèle de champs admissibles nécessaires à l'évaluation de l'erreur en relation de comportement et donc à la majoration de l'erreur vraie. L'estimateur proposé par l'auteur peut être évalué aussi bien à convergence qu'au cours des itérations.

Afin d'obtenir une borne garantie de l'erreur vraie, l'utilisation de l'erreur en relation de comportement repose sur la capacité à construire un champ de déplacement cinématiquement admissible et un champ de contraintes statiquement admissible. Dans l'approche duale, la continuité du champ de déplacement n'est vérifiée qu'à convergence et dans l'approche primale, des inter-efforts équilibrés ne sont obtenus qu'à convergence. Il paraît donc difficile d'obtenir, à chaque itération, des champs admissibles nécessaires à l'estimation d'erreur. Afin de présenter la méthodologie proposée dans [111], reformulons les algorithmes BDD et FETI de manière à souligner les propriétés des champs calculés au cours des itérations.

Pour cela, nous introduisons les deux méthodes suivantes :
$(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)}, \mathbf{u}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{u}_b^{(s)}, \mathbf{b}^{(s)})$:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)} = \mathbf{b}^{(s)} + {\mathbf{t}^{(s)}}^T\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} \\ \mathbf{t}^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)} = \mathbf{u}_b^{(s)} \end{cases}$$

$(\mathbf{u}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}, \mathbf{b}^{(s)})$

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)} = \mathbf{b}^{(s)} + {\mathbf{t}^{(s)}}^T\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} \\ \text{où } (\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s \text{ satisfont } {\mathbf{R}^{(s)}}^T(\mathbf{b}^{(s)} + {\mathbf{t}^{(s)}}^T\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}) = 0 \end{cases}$$

La méthode $\texttt{Solve}_\texttt{D}$ correspond à la résolution sur chaque domaine d'un problème de Dirichlet : c'est-à-dire que des déplacements sont imposés sur l'interface entre le domaine $\Omega^{(s)}$ et ses voisins. La méthode $\texttt{Solve}_\texttt{N}$ correspond à la résolution sur chaque domaine d'un problème de Neumann : c'est-à-dire que des efforts sont imposés sur l'interface entre le domaine $\Omega^{(s)}$ et ses voisins. Enfin, la méthode `Initialize` correspond à l'initialisation effectuée au début de chaque algorithme. L'algorithme BDD et FETI se réécrivent respectivement comme présentés dans les algorithmes 3 et 4.

En commentaire de ces algorithmes est détaillée la construction des quantités suivantes :

— $(\mathbf{u}_D^{(s)})_s$: vecteur de déplacements continus à l'interface si bien que $(\underline{u}_D^{(s)})_s = (\underline{\boldsymbol{\phi}}_H^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$.

— $(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)})$: réactions nodales associées à la condition de Dirichlet. Ces réactions ne sont équilibrées qu'à convergence.

— $(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s$: réactions nodales associées à la condition de Neumann. Ces réactions sont équilibrées à chaque itération.
— $(\mathbf{u}_N^{(s)})_s$: vecteur de déplacement associé aux réaction nodales $(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s$. Le champ de déplacement$(\underline{u}_N^{(s)})_s = (\underline{\boldsymbol{\phi}}_H^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$. Le champ de contraintes associé $\underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)} = \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\boldsymbol{\phi}}_H^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)}\right)$ est utilisé (en plus de $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$) pour reconstruire les champs $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)}$ qui sont statiquement admissibles $(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega)$.

Démontrons pour l'algorithme BDD que les champs construits ont bien les propriétés énoncées ci-dessus.

Démonstration. Dans l'algorithme BDD, une seule inconnue d'interface en déplacement étant introduite, la résolution d'un problème de Dirichlet avec pour condition cette inconnue d'interface entraîne nécessairement la construction de champs de déplacement continus. Les réactions nodales $(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s$ sont équilibrées aux interfaces puisque :

$$\begin{aligned}\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} &= \sum_s \mathbf{A}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}) \\ &= \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} \\ &= \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} \text{ par orthogonalité des opérateurs d'assemblage} \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.1}$$

et vis-à-vis des modes rigides pour chaque sous-structure puisque :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(s)^T}(\mathbf{b}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}) &= \mathbf{R}^{(s)^T}(\mathbf{b}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)})) \\ &= \mathbf{R}^{(s)^T}\mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)} - \mathbf{R}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)^T}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{R}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)^T}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r} \text{ par définition de } \mathbf{R}^{(s)} \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.2}$$

où est utilisée, pour conclure, la condition d'orthogonalité 2.28 du résidu assurée dans l'algorithme BDD. □

Démontrons pour l'algorithme FETI que les champs construits ont bien les propriétés énoncées ci-dessus.

Démonstration. Dans l'algorithme FETI, une seule inconnue d'interface en effort étant introduite, les réactions nodales sont automatiquement équilibrées. Le champ de déplace-

ment $(\mathbf{u}_D^{(s)})_s$ proposé est continu puisque :

$$\begin{aligned}\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)} &= \sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{u}_N^{(s)} - \delta\mathbf{u}^{(s)}) \\ &= \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{t}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)} \\ &= \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)} \text{ par orthogonalité des opérateurs d'assemblage} \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.3}$$

□

Remarque 3.1. *Pour chaque sous-domaine, la construction d'un champ de contraintes statiquement admissible est techniquement complexe. Les méthodes présentées au paragraphe 1.2.3 sont bien sûr utilisées pour la reconstruction. Néanmoins, leur mise en œuvre n'est pas directe. En effet, plusieurs tâches de prétraitement des réactions nodales apparaissent :*

- *il est nécessaire de construire un représentant continu de l'effort à partir des réactions nodales équilibrées $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$*
- *dans le cas de points multiples de multiplicité supérieure ou égale à 4, il convient d'éliminer les contributions ponctuelles entre sous-structures avant d'enclencher les procédures de reconstruction.*
- *dans le cas d'une interface $\Gamma^{(s,s')}$ coupant $\partial_u\Omega$, plusieurs choix pour la reconstruction d'un inter-effort équilibré sont possibles*

Ces points techniques seront détaillés au paragraphe 5.1 et des améliorations seront proposées.

L'estimation de l'erreur est entièrement parallèle et se fait via l'estimateur suivant :

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega^2 = \sum_s |||\underline{u}_{ex}^{(s)} - \underline{u}_D^{(s)}|||_{\Omega^{(s)}}^2 \leqslant \sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}^2(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)}) \tag{3.4}$$

3.2 Convergence rapide de l'estimateur

Présentons à présent les résultats obtenus dans [111], lors de la mise en œuvre de la procédure parallèle d'estimation de l'erreur présentée ci-dessus.

La structure considérée est décrite sur la figure 3.1. Il s'agit d'une structure encastrée à sa base et sollicitée à la fois en traction et en cisaillement sur le bord supérieur droit. Le comportement est supposé élastique linéaire homogène et isotrope de module d'Young 2000 MPa et de cœfficient de Poisson 0.3. L'hypothèse des contraintes planes a également été faite. Le problème est résolu avec l'approche primale ou duale. La méthode de reconstruction de champs statiquement admissible retenue est la méthode EET et les problèmes locaux sont résolus en augmentant de 3 le degré d'interpolation des fonctions de forme. Nous donnons également sur cette même figure un exemple de sous-structuration.

Algorithme 3 : BDD : construction des champs équilibrés

$\mathbf{U} = \texttt{Initialize}(\mathbf{f}^{(s)})$;
$(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)}, \mathbf{u}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{U}, \mathbf{f}^{(s)})$;
Calcul du résidu $\mathbf{r} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)}$;
Réactions locales $\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r}$; // $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}$
$\delta\mathbf{u}^{(s)} = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{u}_N^{(s)} = \mathbf{u}_D^{(s)} - \delta\mathbf{u}^{(s)}$
Résidu préconditionné $\mathbf{z} = \sum_s \tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\delta\mathbf{u}^{(s)}$;
Direction de recherche $\mathbf{w} = \mathbf{P}_1\mathbf{z}$;
while $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  $(\boldsymbol{\delta\lambda}_D^{(s)}, \delta\mathbf{u}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{w}, 0)$;
  $\mathbf{q} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\delta\lambda}_D^{(s)}$;
  $\alpha = (\mathbf{r}^T\mathbf{z})/(\mathbf{q}^T\mathbf{w})$;
  $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} + \alpha\mathbf{w}$; // $\mathbf{u}_D^{(s)} \leftarrow \mathbf{u}_D^{(s)} + \alpha\delta\mathbf{u}_D^{(s)}$, $\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} \leftarrow \boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} + \alpha\boldsymbol{\delta\lambda}_D^{(s)}$
  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} - \alpha\mathbf{q}$;
  $\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r}$; // $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}$
  $\delta\mathbf{u}^{(s)} = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{u}_N^{(s)} = \mathbf{u}_D^{(s)} - \delta\mathbf{u}^{(s)}$
  $\mathbf{z} = \sum_s \tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\delta\mathbf{u}_b^{(s)}$;
  $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{P}_1\mathbf{z} - (\mathbf{q}^T\mathbf{P}_1\mathbf{z})/(\mathbf{q}^T\mathbf{w})\mathbf{w}$
end

La figure 3.2 compare les estimations parallèle et séquentielle. La figure 3.3 donne l'évolution de l'estimation de l'erreur au cours des itérations pour les deux approches et pour différentes sous-structurations. La figure 3.4 donne l'évolution au cours des itérations de la carte d'erreur fournie par l'estimateur.

Ces résultats montrent que :

— L'estimateur parallèle proposé est aussi efficace que l'estimateur séquentiel
— L'efficacité est indépendante du nombre de sous-domaines et de l'approche choisie (primale ou duale)

Nous constatons également :

— Une convergence rapide de l'estimateur
— Une convergence rapide des cartes d'erreur

Cette dernière observation montre que les itérations effectuées après la troisième ne font pas diminuer l'erreur, autrement dit, continuer à itérer n'améliore pas la qualité globale de la solution. Par conséquent, fixer un critère d'arrêt arbitraire portant sur la norme du résidu entraîne une sur-résolution. Afin de définir un critère d'arrêt en lien avec la discrétisation, il est nécessaire de séparer les deux sources d'erreur qui sont mélangées dans l'estimation : l'erreur de discrétisation qui vient du maillage et de l'approximation éléments finis et l'erreur algébrique qui vient de l'utilisation d'un solveur itératif. Lors

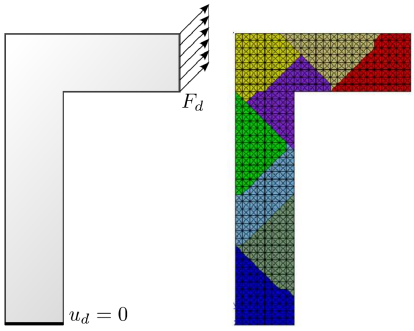


FIGURE 3.1 – *Gamma-shaped structure* : chargement et sous-structuration

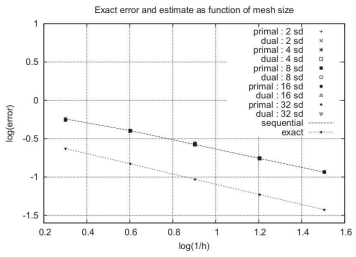


FIGURE 3.2 – *Gamma-shaped structure* : estimateurs séquentiel et parallèle pour différentes tailles de maillage (h)

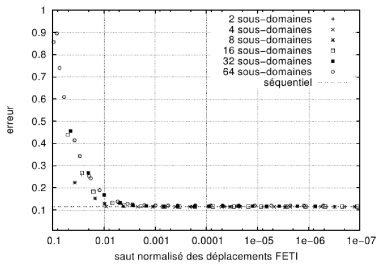


FIGURE 3.3 – *Gamma-shaped structure* : évolution de l'estimateur parallèle au cours des itérations

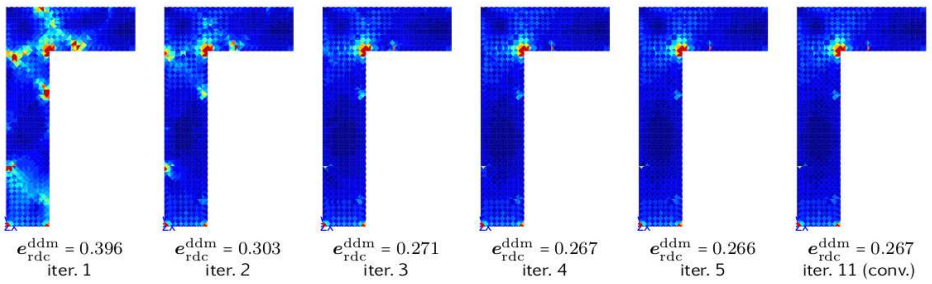


FIGURE 3.4 – *Gamma-shaped structure* : évolution de la carte d'erreur fournie par l'estimateur parallèle au cours des itérations

Algorithme 4 : FETI : construction des champs équilibrés

$\boldsymbol{\Lambda} = \texttt{Initialize}(\mathbf{f}^{(s)})$;
Réactions locales $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T}\boldsymbol{\Lambda}$;
$(\mathbf{u}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}, \mathbf{f}^{(s)})$;
Calcul du résidu $\mathbf{r} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{t}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)})$;
Déplacement local $\delta\mathbf{u}_b^{(s)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\mathbf{r}$; ;

$(\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}, \delta\mathbf{u}^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\delta\mathbf{u}_b^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{u}_D^{(s)} = \mathbf{u}_N^{(s)} - \delta\mathbf{u}^{(s)}$, $\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}$

Résidu préconditionné $\mathbf{z} = \mathbf{P}_2(\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)})$;
Direction de recherche $\mathbf{w} = \mathbf{z}$;
while $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  $(\delta\mathbf{u}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{w}, 0)$;
  $\mathbf{q} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{t}^{(s)}\delta\mathbf{u}_N^{(s)})$;
  $\alpha = (\mathbf{r}^T\mathbf{z})/(\mathbf{q}^T\mathbf{w})$;

  $\boldsymbol{\Lambda} \leftarrow \boldsymbol{\Lambda} + \alpha\mathbf{w}$; // $\mathbf{u}_N^{(s)} \leftarrow \mathbf{u}_N^{(s)} + \alpha\delta\mathbf{u}_N^{(s)}$, $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T}\boldsymbol{\Lambda}$

  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} - \alpha\mathbf{q}$;
  $\delta\mathbf{u}_b^{(s)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\mathbf{r}$;

  $(\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}, \delta\mathbf{u}^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\delta\mathbf{u}_b^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{u}_D^{(s)} = \mathbf{u}_N^{(s)} - \delta\mathbf{u}^{(s)}$, $\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}$

  $\mathbf{z} = \mathbf{P}_2(\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)})$;
  $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{z} - (\mathbf{q}^T\mathbf{z})/(\mathbf{q}^T\mathbf{w})\mathbf{w}$
end

d'un calcul séquentiel, la résolution du système linéaire étant assurée par un solveur direct : l'erreur algébrique n'existe pas. Ces différentes erreurs sont schématisées figure 3.5. A convergence du solveur itératif (lorsque le résidu est proche de zéro), seule est présente l'erreur de discrétisation. A contrario, au début de la résolution, c'est l'erreur algébrique qui est prédominante. L'évaluation de la seule erreur de discrétisation au début des itérations permettrait de définir un critère d'arrêt du solveur itératif en lien avec le maillage et éviterait la sur-résolution.

3.3 Séparation des sources d'erreur : un état des lieux

De nombreux travaux ont pour objet la séparation de différentes sources d'erreur lors d'un calcul numérique sur un problème mécanique. Nous dressons ici une liste non exhaustive des principales contributions à ce sujet qui ont pour application un problème

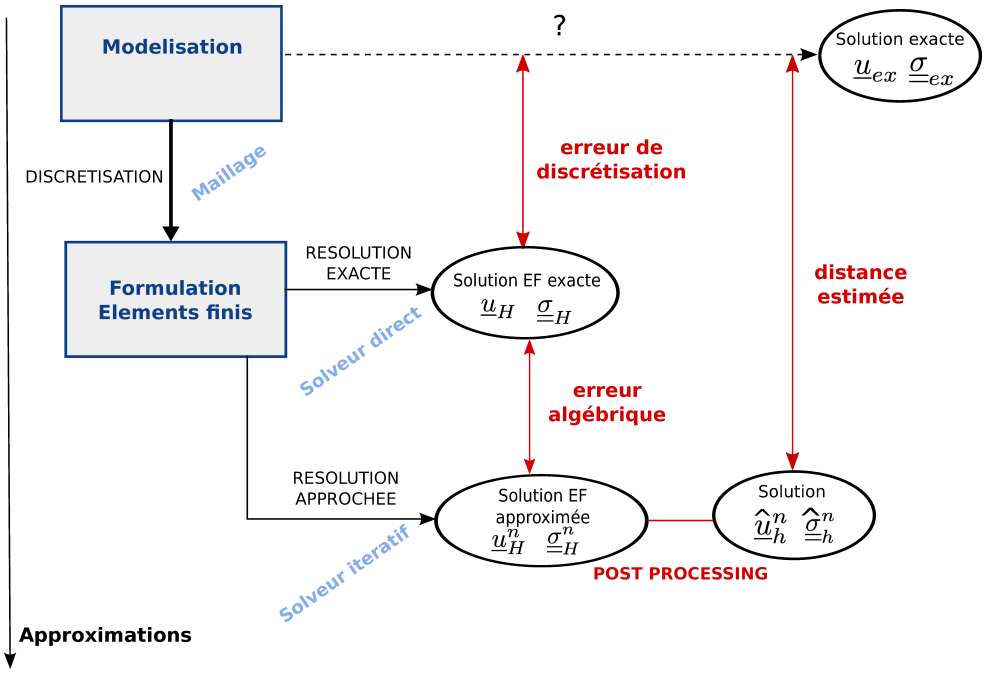


FIGURE 3.5 – Les deux sources d'erreur (discrétisation et algébrique)

issu de la mécanique. Nous distinguons :

— la séparation de l'erreur de discrétisation d'une autre source d'erreur (due à la gestion d'une non-linéarité, d'une incertitude ou d'une approximation modale) dans le cas de la méthode des éléments finis
— la mise en œuvre de séparations de sources d'erreur dans des méthodes de résolution basées sur le sous-structuration (décomposition de domaine ou approches multigrilles)
— la mise en œuvre de séparations de sources d'erreur pour la méthode des volumes finis

3.3.1 Erreur due à la gestion de la non-linéarité

Dans le cadre de problèmes non-linéaires dépendant du temps dans [51, 52], les auteurs ont pour objectif de séparer l'erreur de discrétisation de l'erreur introduite par le schéma itératif utilisé pour résoudre le problème non-linéaire. Ce n'est pas l'erreur en relation de comportement mais l'erreur au sens de Drücker [35] qui est exploitée. Un indicateur de l'erreur en itération i_{temps} est défini. Il est constaté numériquement que celui-ci dépend peu du maillage et est très faible devant l'erreur totale. Il est postulé une égalité donnant une séparation de la forme $\epsilon^2 = i_{espace}^2 + i_{temps}^2$, où ϵ est l'erreur au sens de Drücker estimée. L'inégalité $\epsilon^2 \geqslant i_{temps}^2$ est constatée numériquement mais non démontrée. Deux procédures adaptatives se basant sur cette séparation sont proposées pour obtenir un

objectif d'erreur total de ϵ_0. La première peut se résumer :

1. Première résolution sur $[0\,;\mathrm{T}]\times\Omega_e$ (espace optimisé élastiquement) avec discrétisation en temps Δt
2. Evaluation de i_{temps} et de l'erreur totale ϵ
3. Si $i_{temps} \geqslant \theta\epsilon_0$ l'erreur temporelle est négligeable devant la discrétisation et seul le maillage est adapté
4. Sinon, une nouvelle discrétisation en temps est définie : $\Delta t^\star$ tel que $\Delta t^\star = \frac{\theta\epsilon_0\Delta t}{i_{time}}$
5. Résolution avec cette discrétisation en temps puis retour au 2

où θ est un paramètre choisi en pratique à $\theta = \frac{1}{3}$.

La seconde peut se résumer :

1. Première résolution sur $[0\,;\mathrm{T}]\times\Omega_e$ (espace optimisé élastiquement) avec discrétisation en temps Δt
2. Evaluation de i_{temps} et de l'erreur totale ϵ
3. Nouveau maillage $\Omega^\star$ et nouveau pas de temps $\Delta t^\star$ définis tels que $\epsilon^\star = \epsilon_0$ et $i_{temps}^2 = \alpha\epsilon_0$
4. résolution et nouvelle estimation d'erreur

où α est un paramètre choisi en pratique à $\alpha = \frac{1}{2}$.

Les travaux [98] et [82] se basent sur les travaux de [51, 52] mais l'appliquent à l'erreur en dissipation. Trois sources d'erreurs sont identifiées : l'erreur de discrétisation spatiale, l'erreur de discrétisation temporelle et l'erreur en itération due à la non convergence de l'algorithme de Newton. La séparation de ces sources d'erreurs est proposée à travers la définition de trois indicateurs : un indicateur représentant l'erreur de discrétisation i_{espace}, un indicateur en temps i_{temps} et un indicateur dépendant du schéma itératif utilisé i_{ite}. Cependant, le calcul de ces indicateurs nécessite la définition de trois nouveaux problèmes sur lesquels sont ensuite appliquées les procédures classiques de reconstruction de champs admissibles et d'évaluation d'erreur. Numériquement, il est constaté que i_{temps} dépend peu de la discrétisation en espace et que i_{espace} dépend peu de la discrétisation temporelle et que $i_{temps}+i_{espace} \simeq \epsilon$ où ϵ désigne le niveau d'erreur total final. Une procédure mettant en lien les niveau d'erreur est proposée et peut se résumer ainsi : Pour obtenir un objectif d'erreur total de ϵ_0 :

1. Première résolution (au préalable optimisée dans le cas purement élastique) avec une tolérance sur les itérations θ fixée a priori
2. Répartition des deux erreurs (dues à la discrétisation en temps et au maillage) en minimisant une fonction coût sous la condition $i_{temps} + i_{espace} = \epsilon$. La fonction coût est un produit de deux fonctions coût en espace et en temps. Sont supposées des évolutions en loi puissance vis-à-vis du nombre d'éléments et des pas de temps
3. Choix de la tolérance θ telle que i_{ite} soit petit devant les deux autres (i_{ite} est considéré proportionnel à la tolérance)
4. Résolution avec les nouvelles discrétisations et nouvelle tolérance

Cette procédure est appliquée sur un cas en deux dimensions représentant un portique.

Dans le cadre des problèmes de contact, dans [91, 92], l'erreur en relation de comportement est décomposée en la somme d'une erreur de contact (faisant intervenir des quantités d'interface de contact) et une somme des erreurs sur les solides. Numériquement, il est constaté que l'erreur de contact est localisée aux interfaces entre solides. Pour les stratégies de résolution par point fixe et pénalisation, l'auteur propose un indicateur en itération. Il est constaté que cet indicateur est indépendant de la discrétisation et l'auteur suggère que si l'indicateur en itération est une part importante de l'erreur totale, alors le critère d'arrêt du point fixe doit être modifié.

Citons également [53] qui développe un algorithme de Neumann Dirichlet pour traiter un problème de contact unilatéral sans frottement entre deux solides [10]. Cet algorithme consiste à résoudre alternativement deux problèmes (un problèmes avec des conditions en effort et un problème avec des conditions en déplacement). L'erreur due aux itérations de cet algorithme est distinguée de l'erreur de discrétisation via la définition de deux indicateurs :

— un indicateur mesurant l'erreur due à l'algorithme : il est obtenu par l'évaluation de l'erreur en relation de comportement d'un troisième problème
— un indicateur mesurant l'erreur de discrétisation : il est obtenu par l'évaluation de l'erreur en relation de comportement d'un quatrième problème lui-même séparé en 2 sous-problèmes : un problème d'élasticité linéaire sur le solide 2 et un problème de contact unilatéral avec fondations rigides sur solide 1

Numériquement, il est constaté que le premier indicateur dépend peu du maillage et que le second dépend peu des itérations.

3.3.2 Erreur stochastique

Dans [13], une séparation est proposée dans le cadre de problèmes de contact multi-paramètres. Les paramètres sont représentés à l'aide de variables aléatoires et de modèles probabilistes et le problème est résolu en utilisant la méthode LaTIn [72]. Une extension de l'erreur en relation de comportement est proposée dans le cadre stochastique. Deux indicateurs sont définis : un indicateur de l'erreur due au modèle stochastique et un indicateur de l'erreur due à la géométrie (qui est définie comme le complément à l'erreur totale). Numériquement, il est observé que l'indicateur géométrique décroît lorsque le maillage est raffiné et est indépendant de l'approximation stochastique. Il est aussi observé que l'indicateur stochastique décroît lorsque l'approximation stochastique est enrichie mais il n'est pas indépendant du maillage. La seule proposition de procédure d'adaptivité est faite à discrétisation fixée.

Citons également les travaux [141] effectués pour coupler modèle déterministe et stochastique grâce à la méthode Arlequin [29]. Les trois contributions à l'erreur totale (erreur de modèle, erreur de discrétisation, erreur stochastique) sont évaluées séparément ce qui permet de proposer une procédure adaptative qui identifie la source d'erreur prépondérante et redéfinit les paramètres de la résolution suivante. Malheureusement, cette séparation nécessite la résolution de deux problèmes intermédiaires et trois procédures

d'estimation d'erreur.

3.3.3 Erreur PGD

Une autre source d'erreur pouvant être identifiée et séparée de l'erreur de discrétisation est l'erreur commise lors de l'approximation de la solution sous forme d'une somme de produits de fonctions à variables séparées (*Proper generalized decomposition* [21], ce qui correspond à la création d'une base réduite constituée de modes). En effet, la troncature après un nombre m de modes entraîne une erreur dite erreur PGD. Dans [78], une procédure est proposée pour estimer les deux sources d'erreur mais nécessite l'introduction et la résolution d'un nouveau problème ce qui augmente le coût de l'estimation d'erreur. D'autres travaux sont actuellement en cours dans cet objectif de séparation des sources d'erreur. Ils visent à répondre à la question du choix de nombre de modes à calculer et de la mise en relation de la précision de l'approximation PGD avec les autres paramètres de la résolution.

3.3.4 Dans le cas des méthodes de sous-structuration

Dans [11], l'équation de Poisson est résolue à l'aide d'une méthode multi-grille et l'erreur de discrétisation est estimée en utilisant la méthode des résidus. Une majoration de l'écart entre la solution du problème continu et la solution numérique approchée est démontrée : celle-ci met en jeu l'erreur de discrétisation et l'erreur due à la résolution itérative mais également des constantes qui ne sont pas faciles à calculer. Une procédure adaptant simultanément le maillage et le critère d'arrêt des itérations est proposée. Elle est mise en œuvre et permet d'éviter des itérations inutiles. Dans [97], c'est l'équation de Stokes qui est étudiée et résolue par une méthode multi-grille. Les auteurs s'intéressent à l'erreur commise sur une quantité d'intérêt définie par une fonctionnelle linéaire J. Soit u la solution exacte et $\widetilde{u}_h$ la solution éléments finis non convergée sur la grille la plus fine issue d'un algorithme multi grille. La relation suivante est démontrée dans l'article :

$$J(u) - J(\widetilde{u}_h) = \eta_h + \eta_m \tag{3.5}$$

où η_h est une mesure de l'erreur de discrétisation et η_m une mesure de l'erreur dite d'itération. Ce sont des indicateurs d'erreur calculés *a posteriori*. L'évaluation pratique de ces mesures d'erreur est détaillée : elle requiert plusieurs approximations pour évaluer par exemple des différences entre deux vecteurs de deux grilles différentes. Plusieurs méthodes pour évaluer η_m sont proposées et comparées entre elles. Les auteurs donnent également la procédure suivante permettant d'adapter le critère d'arrêt des itérations avec pour objectif une erreur plus petite que ϵ_0. Elle peut se résumer ainsi :

1. Choisir une discrétisation
2. Faire un cycle de résolution multigrille
3. Evaluer les indicateurs η_h et η_m
4. Déterminer les niveaux sources d'erreur et augmenter le nombre de *smoothing steps* jusqu'à $\eta_m \leqslant \frac{1}{10}\eta_h$

5. Si $\eta_h + \eta_m \leqslant \epsilon$, arrêt
6. Sinon, raffiner les éléments apportant le plus d'erreur et retourner à l'étape 2

Pour chaque maillage, la quantité η_h n'est évaluée que deux fois. L'application de cette procédure à différents problèmes en une et deux dimensions permet d'observer un gain en terme d'itérations et de temps CPU par rapport à un critère classique.

Dans [22], les auteurs étendent leur précédents travaux ([103, 105, 106, 104]) qui permettaient déjà une estimation a posteriori à moindre coût de bornes supérieures et inférieures d'une quantité d'intérêt. La *bound method* consiste à utiliser deux maillages : un maillage grossier de travail et un maillage fin. Le maillage grossier est vu comme une sous-structuration du maillage fin ce qui permet de mettre en place une formulation par un lagrangien augmenté et d'utiliser des solveurs performants. Le problème étudié dans [22] est un problème de thermique en trois dimensions avec convection et diffusion. Il est résolu par la *bound method*. La quantité d'intérêt est la moyenne de la température sur une tranche de la structure. Utilisant des indicateurs locaux, les auteurs proposent une procédure d'adaptation de maillage permettant de satisfaire un objectif de précision sur une quantité d'intérêt. Dans ces travaux, ce sont les erreurs sur le maillage grossier et sur le maillage fin qui sont séparées.

Enfin, dans le cas de problèmes elliptiques résolus à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement multi-échelle, dans [133], l'erreur commise sur une quantité d'intérêt est estimée. Les domaines ayant des discrétisations différentes, les méthodes de *mortar* [15, 16] sont utilisées pour raccorder les discrétisations aux interfaces. L'erreur totale est séparée en la somme de deux contributions : une erreur due à la technique *mortar* et une erreur sur les sous-domaines qui ne rend compte que de la discrétisation. Cette séparation est utilisée pour optimiser le remaillage adaptatif en faisant dialoguer les différentes discrétisations.

3.3.5 Dans le cas de la méthode des volumes finis

Dans [62], les auteurs proposent une séparation des sources d'erreur pour un problème elliptique de second ordre résolu par la méthode des volumes finis. La première source d'erreur provient de la discrétisation et de l'utilisation de la méthode des volumes finis. La seconde erreur provient de l'utilisation d'un solveur itératif type gradient conjugué. Les auteurs utilisent cette séparation pour définir le critère d'arrêt du solveur itératif en lien avec la discrétisation. Notons que ces travaux ont fait l'objet de nombreuses extensions. Nous pouvons citer le cas de résolution mixte éléments finis, volumes finis dans [60]. Les résultats montrent que la séparation est pertinente et la mise en place d'un critère d'arrêt intelligent évite les itérations inutiles. Dans [37], c'est pour un problème de diffusion du second ordre quasi-linéaire que la séparation des erreurs de discrétisation et de linéarisation est effectuée. Dans [137], pour un écoulement bi-phasique, un algorithme de Newton est utilisé pour résoudre le problème non-linéaire. Les différentes sources d'erreur (discrétisation, temporelle, linéarisation et algébrique) sont identifiées et séparées ce qui permet de proposer une procédure adaptative de résolution. Dans [38], une méthode de Newton inexacte est mise en place sur un problème de diffusion non linéaire. Trois

sources d'erreur sont séparées : l'erreur de discrétisation, l'erreur algébrique et l'erreur due à la linéarisation. Les auteurs proposent d'adapter le critère d'arrêt du solveur itératif (le solveur est stoppé quand l'erreur algébrique est petite devant les deux autres ou si l'erreur de discrétisation est trop importante devant les deux autres). Citons également [112, 113] qui traitent des problèmes multiphases et séparent les erreur spatiale, temporelle, algébrique et de linéarisation et proposent des procédures adaptatives permettant des gains en terme d'itération. Pour l'équation de Poisson résolue par une méthode de Galerkin discontinue, une estimation d'erreur permettant la séparation de l'erreur de discrétisation et de l'erreur algébrique est proposée afin d'aboutir un algorithme itératif.

3.3.6 Commentaires

Tout d'abord, notons que l'ensemble de ces travaux montre l'intérêt d'adapter le critère d'arrêt à la discrétisation, ou du moins à mettre en relation les différents niveaux d'erreur inhérents aux méthodes de calcul employées. Faire le lien entre les niveaux d'erreur permet, outre de conduire le calcul de manière plus réfléchie, de gagner en terme de coût puisque les résolutions n'améliorant pas la qualité globale de la solution sont évitées. Les travaux se basant sur l'erreur en relation de comportement permettent d'obtenir des bornes garanties de l'erreur. De plus, l'erreur en relation de comportement a fait l'objet de nombreuses extensions à d'autres types de problèmes, ce qui rend cet outil puissant. En revanche, la séparation des sources ne se base que sur des indicateurs et nécessite la résolution de problèmes auxiliaires ce qui augmente beaucoup le coût de calcul. L'emploi des méthodes de sous-structuration fait naturellement apparaître deux niveaux d'erreur : un à petite échelle spatiale due à la plus fine des discrétisations et un à l'échelle de la sous-structuration (grille). C'est cette même distinction qui apparaît dans le cadre des décomposition de domaine. Enfin, pour les résolutions en volumes finis, de récents et nombreux travaux montrent comment estimer séparément les différentes sources d'erreur afin d'adapter la précision du solveur itératif pour une large gamme de problèmes.

Deuxième partie

Contributions à la construction de champs admissibles

La partie précédente souligne l'importance de la construction d'efforts équilibrés aux interfaces et de la construction de champs statiquement admissibles. Lors d'une estimation d'erreur par la relation de comportement, la qualité de l'estimateur dépend très fortement de la qualité des champs reconstruits. C'est la raison pour laquelle cette partie s'attache à les améliorer. Dans le premier chapitre de cette partie, nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction de champ statiquement admissible en séquentiel. Cette méthode peut tout à fait être utilisée en parallèle dans le traitement de chaque sous-domaine. Dans le second chapitre de cette partie, nous étudions les possibilités d'optimisation de la reconstruction de réactions nodales équilibrées aux interfaces entre sous-domaines.

Chapitre 4

Une nouvelle méthode de reconstruction de champs statiquement admissibles en séquentiel

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode de reconstruction de champ statiquement admissible en séquentiel (il n'est donc pas question de décomposition de domaine). Cette méthode diffère des techniques classiques dans le sens où elle remplace la résolution de nombreux problèmes locaux par la résolution optimisée d'un unique problème. Bien que pouvant paraître de taille prohibitive, nous montrons comment l'utilisation des propriétés topologiques du maillage permet une résolution astucieuse et peu coûteuse. La méthode que nous proposons permet également d'étudier la pertinence de la condition de prolongement forte. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication [122] et de deux communications [58] et [121].

4.1 Principes

Comme nous l'avons présenté dans la première partie, la plupart des méthodes de reconstruction de champs statiquement admissibles nécessite la résolution de nombreux problèmes de petite taille. Dans la EET en particulier, la nature de ces problèmes et leur résolution dépend de la position du centre du *star-patch* ce qui implique des nombreux tests dans le code et ralentit la procédure. Nous pouvons également nous interroger sur la pertinence de la condition de prolongement forte qui est le point de départ de cette méthode. En effet, la *flux-free method* qui n'impose pas une telle condition sur les champs montre de meilleurs résultats que la EET.

Forts de ces constats, nous proposons une nouvelle méthode basée sur les idées suivantes :

— Une implémentation vectorisée qui s'affranchit des boucles et des tests. Le code est simplifié et peut être parallélisé au niveau des éléments.
— Une séparation des propriétés topologiques et des propriétés géométriques. Nous faisons naturellement apparaître les *star-patches* et expliquons leur rôle.
— Une étude de la condition de prolongement forte. La EET est un cas particulier de la technique que nous proposons et nous donnons également la méthodologie permettant de reconstruire le champ vérifiant la condition de prolongement forte qui minimise l'estimateur.

La méthode que nous proposons est appelée STARFLEET pour *Star free Lazy Element Equilibration Technique* et se décompose en deux étapes. La première étape consiste à construire des travaux équilibrés sur les arêtes internes, la seconde consiste à résoudre des problèmes locaux avec les travaux déterminés précédemment comme condition de Neumann sur un espace plus riche. Présentons à présent les principaux ingrédients de la méthode.

Nous rappelons les notations définies dans le premier chapitre 1.3.3.3 et qui seront utilisées dans la présentation de la méthode. Nous notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des éléments de Ω_H, $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes et $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets (ou nœuds). Nous introduisons également l'opérateur ∂ qui extrait les arêtes du bord d'un groupe d'éléments et les sommets d'un groupe d'arêtes. La notation $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de X. La notation $|X|$ désigne le cardinal de X. La notation ∂^{-1} est utilisée pour désigner l'opération qui à un sommet associe les arêtes qui y sont reliées et à une arête associe les éléments dont elle fait partie.

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{P}(\mathcal{V}) \tag{4.1}$$

En particulier, pour un nœud N, les éléments dans $\tilde{\partial}^{-2}N$ forment le *star-patch* associé. La figure 1.2 illustre ces opérateurs pour des cas simples.

4.1.1 Choix des inconnues et contraintes associées

Le premier point de notre méthode est que nous ne supposons pas de forme *a priori* des tractions le long des arêtes (ces tractions sont cherchées comme des fonctions affines

dans la EET). Nous cherchons les travaux pour toutes les arêtes Γ et tous les déplacements $\underline{v} \in \mathrm{CA}_H(\Omega)$.

$$\hat{W}^\Gamma(\underline{v}) = \int_\Gamma \underline{\hat{F}}^\Gamma \cdot \underline{v} dS \tag{4.2}$$

Pour l'implémentation, nous devons faire le choix d'une base de $\mathrm{CA}_H(\Omega)$. Dans la EET, ce sont les fonctions de forme éléments finis qui sont choisies. Ici, afin de garantir un traitement systématique, nous choisissons la base canonique $\mathcal{B} = (1\underline{e}_x, x\underline{e}_x, y\underline{e}_x, 1\underline{e}_y, x\underline{e}_y, y\underline{e}_y)$. Il faut noter que les travaux inconnus ne sont plus indépendants. En effet, les travaux étant des formes linéaires sur des arêtes et les variables x et y étant reliées linéairement sur une arête, nous devons avoir pour la direction $\underline{e}$:

$$a_\Gamma \hat{W}^\Gamma(x\underline{e}) + b_\Gamma \hat{W}^\Gamma(y\underline{e}) + c_\Gamma \hat{W}^\Gamma(\underline{e}) = \hat{W}^\Gamma\left((a_\Gamma x + b_\Gamma y + c_\Gamma)\underline{e}\right) = 0 \tag{4.3}$$

où $(a_\Gamma, b_\Gamma, c_\Gamma)$ sont les coefficients de l'équation de l'arête Γ :

$$(x, y) \in \Gamma \iff a_\Gamma x + b_\Gamma y + c_\Gamma = 0$$

Sous forme matricielle, cette contrainte s'écrit :

$$\begin{pmatrix} c_\Gamma & a_\Gamma & b_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{W}^\Gamma(\underline{e}_x) & \hat{W}^\Gamma(\underline{e}_y) \\ \hat{W}^\Gamma(x\underline{e}_x) & \hat{W}^\Gamma(x\underline{e}_y) \\ \hat{W}^\Gamma(y\underline{e}_x) & \hat{W}^\Gamma(y\underline{e}_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

dans laquelle nous remarquons que le découplage des directions $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_y$ nous permet d'utiliser un multivecteur.

Propriété 4.1. *La condition nécessaire (4.4) est suffisante pour construire un effort de traction $\underline{\hat{F}}^\Gamma \cdot \underline{e}$ associé aux travaux $(\hat{W}^\Gamma(\underline{e}), \hat{W}^\Gamma(x\underline{e}), \hat{W}^\Gamma(y\underline{e}))$.*

Démonstration. Une infinité de tractions peuvent être associées à des travaux satisfaisant (4.4). Parmi eux, il n'existe qu'une seule traction linéaire. Les autres tractions peuvent être construites en ajoutant un terme orthogonal à l'espace des polynômes de degré 1 au sens de la norme $\mathtt{L}^2(\Gamma)$, par exemple.

Considérons l'arête Γ de sommets A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). La pente et le milieu O de l'arête peuvent être calculés :

$$\begin{aligned} a^\Gamma &= y_B - y_A & x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ b^\Gamma &= x_A - x_B & y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} \\ c^\Gamma &= x_B y_A - y_B x_A \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nous introduisons l'abscisse curviligne $s \in [-1/2, 1/2]$ et nous avons :

$$x = x_O - s b^\Gamma, \quad y = y_O + s a^\Gamma \quad \text{et} \quad dS = \mathrm{mes}(\Gamma) ds \tag{4.6}$$

Cherchons un effort de traction linéaire dans la direction $\underline{e}$ paramétré par les coefficients F_0^Γ et F_1^Γ tels que $\underline{\hat{F}}^\Gamma \cdot \underline{e} = F_0^\Gamma + s F_1^\Gamma$. Une simple intégration sur l'arête donne :

$$\begin{aligned} \text{meas}(\Gamma) F_0^\Gamma &= \hat{W}^\Gamma(\underline{e}) \\ \frac{\text{meas}(\Gamma)^3}{12} F_1^\Gamma &= a^\Gamma \hat{W}^\Gamma(y\underline{e}) - b^\Gamma \hat{W}^\Gamma(x\underline{e}) - (a^\Gamma y_O - b^\Gamma x_O)\hat{W}^\Gamma(\underline{e}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

□

4.1.2 Elimination des arêtes externes et définition du second membre

Contrairement aux efforts, les travaux sont connus sur toutes les arêtes de bord (*id est* de $\partial\Omega$). Ainsi, sur $\partial_u\Omega$, nous utilisons les réactions nodales dans l'équation 4.8 et les seuls travaux inconnus sont ceux sur les arêtes internes.

$$\forall T \in \mathcal{T},\ \sum_{\Gamma\in\partial T} \delta_T^\Gamma \int_\Gamma \underline{\hat{F}}^\Gamma \cdot \underline{v} d\Gamma = \int_T (\underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \underline{f}\cdot\underline{v}) d\Omega =: \overset{\circ}{R}_T(\underline{v}) \tag{4.8}$$

Ainsi, pour un champ test $\underline{v}_H \in \text{CA}_H(\Omega)$:

— Si T est un élément interne alors $R_T(\underline{v}_H) = \overset{\circ}{R}_T(\underline{v}_H)$

— Si T possède une arête de Neumann Γ_g, alors :

$$R_T(\underline{v}_H) = \overset{\circ}{R}_T(\underline{v}_H) - \int_{\Gamma_g} \underline{g}\cdot\underline{v}_H\, dS \tag{4.9}$$

— Si T possède une arête de Dirichlet Γ_d, alors

$$R_T(\underline{v}_H) = \overset{\circ}{R}_T(\underline{v}_H) - \sum_{V\in\partial\Gamma_d} \alpha_V^{\Gamma_d} \underline{\boldsymbol{\lambda}}_d(V)\cdot\underline{v}_H(V) \tag{4.10}$$

où V représente les sommets de Γ_D. $\underline{\boldsymbol{\lambda}}_d(V)$ est associé à la valeur de réaction nodale, connue de la résolution éléments finis, et $\underline{v}_H(V)$ est la valeur du champ test au sommet (α_V^Γ étant une partition de l'effort nodal de réaction entre les éléments qu'il impacte, voir Figure 4.1) et vérifiant :

$$\forall V \in \partial_u\Omega_H,\ \sum_{\Gamma\in\partial^{-1}V\cap\partial_u\Omega} \alpha_V^\Gamma = 1 \tag{4.11}$$

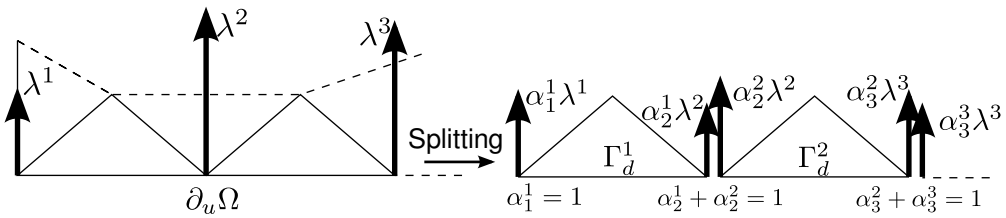


FIGURE 4.1 – Séparation des réactions entre deux éléments adjacents

4.1.3 Ecriture de la condition de prolongement forte à l'échelle globale

Nous réécrivons la condition de prolongement forte avec pour seules inconnues les travaux sur les arêtes internes :

$$\forall T \in \mathcal{T},\ \forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega),\quad \sum_{\Gamma \in \partial T \cap \overset{\circ}{\mathcal{E}}} \delta_T^\Gamma W^\Gamma(\underline{v}_H) = R_T(\underline{v}_H) \tag{4.12}$$

où $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des arêtes internes (séparant deux éléments).

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\forall \underline{v}_H \in \mathrm{CA}_H(\Omega),\ \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{W}}(\underline{v}_H) = \mathbf{R}(\underline{v}_H) \tag{4.13}$$

avec

$$\hat{\mathbf{W}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ W^\Gamma(\underline{v}) \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|\overset{\circ}{\mathcal{E}}|} \quad , \quad \mathbf{R}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ R_T(\underline{v}) \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{T}|}$$

et $\boldsymbol{\Delta}$ est la matrice de taille $|\mathcal{T}| \times |\overset{\circ}{\mathcal{E}}|$ des coefficients (δ_T^Γ)

En utilisant la base canonique, les contraintes 4.4 et la condition de prolongement forte 4.13 s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta} & & \\ & \boldsymbol{\Delta} & \\ & & \boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{W}}(\underline{e}_x) & \hat{\mathbf{W}}(\underline{e}_y) \\ \hat{\mathbf{W}}(x\underline{e}_x) & \hat{\mathbf{W}}(x\underline{e}_y) \\ \hat{\mathbf{W}}(y\underline{e}_x) & \hat{\mathbf{W}}(y\underline{e}_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\underline{e}_x) & \mathbf{R}(\underline{e}_y) \\ \mathbf{R}(x\underline{e}_x) & \mathbf{R}(x\underline{e}_y) \\ \mathbf{R}(y\underline{e}_x) & \mathbf{R}(y\underline{e}_y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

où $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ sont les matrices diagonales des coefficients géométriques $(c^\Gamma, a^\Gamma, b^\Gamma)_{\Gamma \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}}$ de la condition 4.4.

Le système est de grande taille $((3|\mathcal{T}| + |\overset{\circ}{\mathcal{E}}|) \times 3|\overset{\circ}{\mathcal{E}}|)$. Néanmoins, il est très creux et n'est jamais assemblé. Nous exploitons ses propriétés pour la résolution.

4.1.4 Résolution des problèmes locaux

Notons $\left(\hat{\mathbf{W}}(f\underline{e})\right)$ $(f \in \{1, x, y\}$ et $\underline{e} \in \{\underline{e}_x, \underline{e}_y\})$ la solution de 4.14. Il faut à présent résoudre sur chaque élément T le problème local suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \underline{u}_p \in \mathrm{CA}_p^T,\ \text{tel que } \forall \underline{v}_p \in \mathrm{CA}_p^T, \\ &\int_T \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_p) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_p)\, d\Omega = \int_T \underline{f} \cdot \underline{v}_p d\Omega + \sum_{\Gamma \in \partial T} \delta_T^\Gamma W^\Gamma(\underline{v}_p) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nous proposons un p-raffinement de l'espace initial pour obtenir CA_p^T (une base une degré plus élevé par exemple)

$$\mathcal{B}^2 = (x\underline{e}_x, y\underline{e}_y, x\underline{e}_y + y\underline{e}_x, xy\underline{e}_x, xy\underline{e}_y, x^2\underline{e}_x, x^2\underline{e}_y, y^2\underline{e}_x, y^2\underline{e}_y) \tag{4.16}$$

Il est à noter que :

— les mouvements de corps rigides $(1\underline{e}_x, 1\underline{e}_y, x\underline{e}_y - y\underline{e}_x)$ peuvent être omis afin que le problème soit bien posé
— les travaux linéaires sont connus depuis la résolution de 4.14
— la détermination des travaux de degré supérieur à 1 peut se faire en supposant une traction linéaire (déterminée entièrement par les travaux linéaires)

4.2 Implémentation numérique

Dans cette section, nous présentons comment résoudre le système 4.14. Nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta} & & \\ & \boldsymbol{\Delta} & \\ & & \boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{W}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{W}}(\underline{e}_x) & \hat{\mathbf{W}}(\underline{e}_y) \\ \hat{\mathbf{W}}(x\underline{e}_x) & \hat{\mathbf{W}}(x\underline{e}_y) \\ \hat{\mathbf{W}}(y\underline{e}_x) & \hat{\mathbf{W}}(y\underline{e}_y) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Nous rappelons que $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des arêtes internes et $\mathcal{E}_\partial$ celui des arêtes externes. $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{V}_\partial$ sont respectivement les ensembles de nœuds internes et externes.

Remarque 4.2. *Un maillage valide pour la méthode éléments finis ne doit pas comporter d'éléments ayant deux arêtes sur $\partial\Omega$ [54], ce qui implique $|\mathcal{E}_\partial| = |\mathcal{V}_\partial|$.*

Rappelons l'identité d'Euler :

$$|\mathcal{T}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{V}| = c - h \tag{4.18}$$

où c désigne le nombre de composantes connexes et h est le nombre de trous dans la structure. Dans la suite, nous travaillons sur une seule composante connexe si bien que $c = 1$.

4.2.1 Propriétés de $\boldsymbol{\Delta}$

La matrice $\boldsymbol{\Delta}$ qui regroupe les coefficients (δ_T^Γ) possède $|\mathcal{T}|$ lignes et $|\overset{\circ}{\mathcal{E}}|$ colonnes. Il s'agit d'une matrice très creuse booléenne signée et est appelée matrice d'incidence en topologie algébrique [118]. Nous listons ici les propriétés de cette matrice et du système global.

Propriété 4.3. *Ayant davantage de colonnes que de lignes, la matrice $\boldsymbol{\Delta}$ n'est pas de rang plein. Néanmoins le problème 4.13 est bien posé.*

Démonstration. Nous supposons que tous les éléments ont la même orientation. Par conséquent, toutes les arêtes internes sont comptées positivement par un élément et négativement par l'autre élément. Ainsi, le noyau à gauche de $\boldsymbol{\Delta}$ est constitué du vecteur

$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T$. Le problème 4.13 est bien posé car l'équilibre élément fini de toute la structure est équivalent à l'orthogonalité entre le noyau à gauche et le second membre :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^T \boldsymbol{\Delta} &= 0 \\ \mathbf{i}^T \mathbf{R}(\underline{v}_H) &= \sum_T R_T(\underline{v}_H) = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

□

Propriété 4.4. *La taille du noyau à droite de* $\boldsymbol{\Delta}$ *est* $|\overset{\circ}{\mathcal{V}}| + h$ *et une base* $\mathbf{N}$ *de ce noyau peut être construite en analysant le maillage (analyse de graphe ou topologie algébrique [118]). De plus,* $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_V, \mathbf{N}_h]$*, où* $\mathbf{N}_V$ *est associé aux nœuds internes et* $\mathbf{N}_h$ *est associé aux trous.*

Démonstration. Le rang de la matrice $\boldsymbol{\Delta}$ est $(|\mathcal{T}| - 1)$ et la dimension de son noyau à droite est $(|\overset{\circ}{\mathcal{E}}| - |\mathcal{T}| + 1)$. En utilisant la remarque 4.2, la dimension du noyau à droite est :

$$|\overset{\circ}{\mathcal{E}}| - |\mathcal{T}| + 1 = |\mathcal{E}| - |\mathcal{E}_\partial| - |\mathcal{T}| + 1 = |\mathcal{V}| - |\mathcal{E}_\partial| = |\overset{\circ}{\mathcal{V}}| + h \tag{4.20}$$

Il est facile de construire une base du noyau à droite puisque celui-ci correspond aux cycles fermés dans le maillage (voir figure 4.2).

— Chaque nœud interne définit un *star-patch* avec des arêtes internes comme rayons. En combinant ces arêtes, tous les éléments sont comptés deux fois (une fois positivement, une fois négativement).

— Les arêtes internes ayant pour sommet un nœud sur le bord d'un trou définissent une boucle fermée autour de ce trou.

□

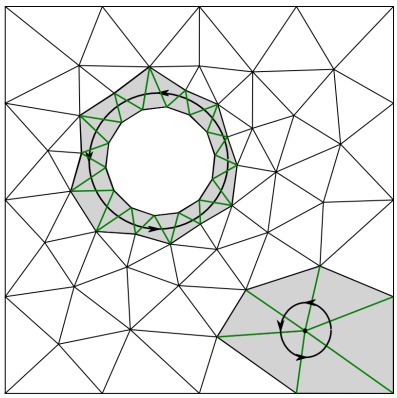


FIGURE 4.2 – Noyau de la matrice $\boldsymbol{\Delta}$: *star-patches* internes et trous

Etudions à présent l'effet de la contrainte de consistence géométrique. Pour cela, nous donnons les propriétés de la matrice $\mathbf{G}$.

4.2.2 Etude de G

Propriété 4.5. *Soit* $\mathbf{x}_V$ *et* $\mathbf{y}_V$ *les matrices diagonales des coordonnées des nœuds internes. Le noyau à droite* $\mathbf{Z}$ *de* $\mathbf{G}$ *est :*

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_V \\ \mathbf{N}_V\mathbf{x}_V \\ \mathbf{N}_V\mathbf{y}_V \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Démonstration. Le noyau à droite $\ker(\mathbf{G})$ doit être cherché dans $\ker(\mathbf{\Delta})$. Considérons un *star-patch* ayant pour sommet central V de coordonnées (x_V, y_V). Soit Γ l'arête entre le sommet V et le sommet A^Γ de coordonnées (x_A, y_A). Le sommet V étant sur cette arête alors $a_\Gamma x_V + b_\Gamma y_V + c_\Gamma = 0$ indépendamment sur $\Gamma \in \partial^{-1}V$. Notons N_V l'élément du noyau à droite de $\mathbf{\Delta}$ associé à V. $\begin{pmatrix} N_V^T & x_V N_V^T & y_V N_V^T \end{pmatrix}^T$ appartient au noyau de $\mathbf{G}$. Tous les nœuds internes sont donc associés à un élément du noyau chacun. Ce n'est pas le cas des trous puisque les rayons autour du trou ne peuvent pas concourir en un même point. □

Propriété 4.6. *La dimension du noyau à gauche de* $\mathbf{G}$ *est égale au nombre de nœuds du maillage :*

$$\dim(\ker(\mathbf{G}^T)) = |\overset{\circ}{\mathcal{V}}| + |\mathcal{V}_\partial| = |\mathcal{V}| \tag{4.22}$$

Il est possible de créer une base de $\ker(\mathbf{G}^T)$.

Démonstration. Ce résultat est la combinaison d'une part du théorème du rang appliqué à la matrice $\mathbf{G}^T$, et d'autre part de l'utilisation de l'égalité $3|\mathcal{T}| - (2|\overset{\circ}{\mathcal{E}}| + |\mathcal{E}_\partial|) = 0$ qui traduit le fait que chaque élément est constitué de trois arêtes, que chaque arête interne appartient à deux éléments et que chaque arête externe appartient à un élément.

Pour la construction d'un vecteur de la base de $\ker(\mathbf{G}^T)$, nous pouvons restreindre notre analyse aux éléments et arêtes des *star-patches*. Soit O un sommet quelconque. Notons $\mathcal{T}_{SP} = \tilde{\partial}^{-2}O$ les éléments du *star-patch* associé. Les arêtes du *star-patch* sont les arêtes rayons du *star-patch* $\mathcal{E}_{SP,r} = \partial^{-1}O$ et les arêtes du contour du *star-patch* $\mathcal{E}_{SP,b} = \partial(\tilde{\partial}^{-2}O)$. L'ensemble des arêtes internes du *star-patch* est donc $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{SP} = (\mathcal{E}_{SP,r} \bigcup \mathcal{E}_{SP,b}) \setminus \mathcal{E}_\partial$.

Nous pouvons alors isoler la partie $\tilde{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}^T$ relative à ces composants :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Delta}}^T & & & \tilde{\mathbf{c}} \\ & \tilde{\mathbf{\Delta}}^T & & \tilde{\mathbf{a}} \\ & & \tilde{\mathbf{\Delta}}^T & \tilde{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \mu \end{pmatrix} = 0 \tag{4.23}$$

où $\tilde{\mathbf{\Delta}}^T$ (respectivement $\tilde{\mathbf{c}}$, $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$) est la sous-matrice de $\mathbf{\Delta}^T$ (respectivement $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) relative au *star-patch* de taille $|\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{SP}| \times |\mathcal{T}_{SP}|$ (respectivement matrices diagonales de taille $|\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{SP}|$). (α, β, γ) sont les vecteurs associés aux éléments, μ est associé aux arêtes. Notons $\tilde{\mathbf{l}}$ la matrice diagonale constituée des longueurs des arêtes de $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{SP}$, telles que

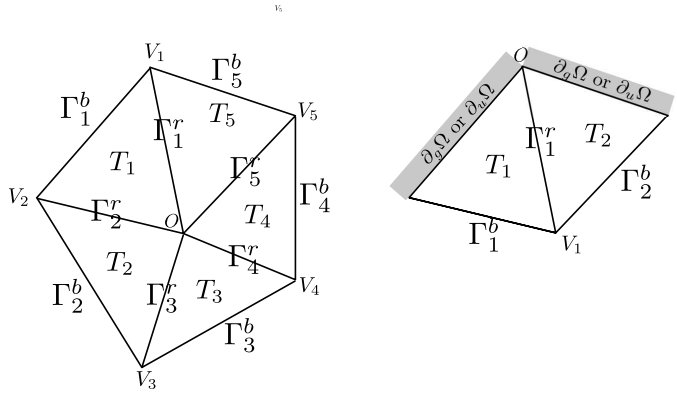


FIGURE 4.3 – *Star-patches*, numérotation des éléments arêtes de bord (b) et arêtes radiales (r)

$0 < \tilde{\mathbf{l}}^2 = \tilde{\mathbf{a}}^2 + \tilde{\mathbf{b}}^2$. Les arêtes du contour $\mathcal{E}_{SP,b}$ (y compris celle sur le bord de Ω) sont toujours associées à un unique élément du *star-patch*. Ainsi, nous numérotons ces arêtes et éléments comme illustré sur la figure 4.3.

Le lecteur peut vérifier que le vecteur suivant appartient au noyau de $\tilde{\mathbf{G}}^T$.

$$\begin{cases} \alpha = \mathbf{e}_b^{-1}\mathbf{a}_b \\ \beta = \mathbf{e}_b^{-1}\mathbf{b}_b \\ \gamma = \mathbf{e}_b^{-1}\mathbf{c}_b \\ \mu = -\tilde{\mathbf{l}}^{-2}\left(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{\Delta}}^T\alpha + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{\Delta}}^T\beta\right) \end{cases} \quad \text{où } \mathbf{e}_b = x_O\mathbf{a}_b + y_O\mathbf{b}_b + \mathbf{c}_b \tag{4.24}$$

$\mathbf{e}_b$ est une matrice diagonale de coefficients non nuls puisque le centre d'un *star-patch* ne peut pas être aligné avec une arête du contour. □

Propriété 4.7. *L'équation* (4.14) *a des solutions.*

Démonstration. Nous devons seulement vérifier que le second membre est orthogonal au noyau de $\tilde{\mathbf{G}}^T$. En utilisant un vecteur de la base du noyau construit comme décrit précédemment et en l'appliquant au second-membre, nous somme en réalité en train de calculer le résidu d'une fonction de forme élément fini. Ce résidu est nul par l'orthogonalité de Galerkin. En effet, l'équation caractéristique d'une arête de bord, restreinte à l'élément adjacent est exactement la pente de la fonction de forme. Le terme de normalisation $\mathbf{e}_b^{-1}$ assure que toutes les pentes vaillent 1 au sommet O.

□

4.2.3 Résolution efficace

L'analyse précédente montre que le système (4.14) est bien posé et admet des solutions. Ces solutions étant définies à un élément du noyau près, la résolution se décompose

en deux étapes : à la première étape, une solution particulière est trouvée ; à la seconde étape, un élément du noyau est choisi (objet de la sous-section 4.2.4).

La matrice $\mathbf{\Delta}$ étant une description algébrique du maillage, il existe une forme normale de Smith :

$\exists(\mathbf{U},\mathbf{V})$ matrices booléennes signées inversibles d'inverses booléennes signées telles que

$$\mathbf{U\Delta V} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \begin{array}{l} \mathbf{U} = [\tilde{\mathbf{U}}^T, \mathbf{i}]^T \\ \mathbf{V} = [\tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{N}] \end{array} \tag{4.25}$$

La factorisation est alors facilement réalisable par un pivot de Gauss total. La matrice étant très creuse, la complexité de cette opération est linéaire.

Afin de simplifier les notations, les colonnes de chaque multivecteur sont assemblées avec la notation $\underline{e}$. Par exemple, $\mathbf{R}(1\underline{e}) := \begin{pmatrix}\mathbf{R}(1\underline{e}_x) & \mathbf{R}(1\underline{e}_y)\end{pmatrix}$. En appliquant la transformation de Smith au système (4.14) et en séparant les travaux en deux parties, nous obtenons : $\hat{\mathbf{W}}(f\underline{e}) = \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{V}} & \mathbf{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^f_{\underline{e}} & \beta^f_{\underline{e}}\end{pmatrix}^T$ (pour $f = 1, x, y$).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{0} & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & & & & 0 & 0 \\ \mathbf{c\tilde{V}} & \mathbf{cN} & \mathbf{a\tilde{V}} & \mathbf{aN} & \mathbf{b\tilde{V}} & \mathbf{bN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1_{\underline{e}} \\ \beta^{\overline{1}}_{\underline{e}} \\ \alpha^x_{\underline{e}} \\ \beta^x_{\underline{e}} \\ \alpha^y_{\underline{e}} \\ \beta^y_{\underline{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R}(1\underline{e}) \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R}(x\underline{e}) \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R}(y\underline{e}) \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

L'équation précédente donne $(\alpha^f_{\underline{e}})$ et il reste à résoudre :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{cN} & \mathbf{aN} & \mathbf{bN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^1_{\underline{e}} \\ \beta^x_{\underline{e}} \\ \beta^y_{\underline{e}}\end{pmatrix} = -\left(\mathbf{c\tilde{V}\tilde{U}}\mathbf{R}(1\underline{e}) + \mathbf{a\tilde{V}\tilde{U}}\mathbf{R}(x\underline{e}) + \mathbf{b\tilde{V}\tilde{U}}\mathbf{R}(y\underline{e})\right) \tag{4.27}$$

La matrice à gauche est de taille $|\overset{\circ}{\mathcal{E}}| \times 3(|\overset{\circ}{\mathcal{V}}| + h)$. En se basant sur l'analyse effectuée précédemment, nous savons que le noyau à droite est de dimension $|\overset{\circ}{\mathcal{V}}|$. En utilisant une base adaptée connue du noyau à gauche $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_V, \mathbf{N}_h]$, nous savons que $\begin{pmatrix}\mathbf{cN}_h & \mathbf{aN} & \mathbf{bN}\end{pmatrix}$ est de rang plein. Notons que le choix d'une base adaptée du noyau permet de préserver la structure creuse de la matrice.

Nous devons trouver une solution du système rectangulaire de taille $|\overset{\circ}{\mathcal{E}}| \times (2|\overset{\circ}{\mathcal{V}}| + 3h)$ (nous savons que le problème est bien posé) :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{cN}_h & \mathbf{aN} & \mathbf{bN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^h_{\underline{e}}\\ \beta^x_{\underline{e}}\\ \beta^y_{\underline{e}}\end{pmatrix} = -\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R}(1\underline{e}) + \mathbf{a}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R}(x\underline{e}) + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R}(y\underline{e})\right) \tag{4.28}$$

Il est possible d'utiliser une factorisation LU avec pivot afin de préserver la structure très creuse de la matrice. Nous avons donc déterminé une solution ($3|\overset{\circ}{\mathcal{E}}|$ lignes et 2 colonnes) au problème (4.14) :

$$\hat{\mathbf{W}}_0(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}} & & \\ & \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}} & \\ & & \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}(\underline{e})\\ \mathbf{R}(x\underline{e})\\ \mathbf{R}(y\underline{e})\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{N}_h & & \\ & \mathbf{N} & \\ & & \mathbf{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^h_{\underline{e}}\\ \beta^x_{\underline{e}}\\ \beta^y_{\underline{e}}\end{pmatrix} \tag{4.29}$$

4.2.4 Choix de l'élément du noyau

Puisque nous connaissons une base $\mathbf{Z}$ du noyau à droite de $\mathbf{G}$ et une solution particulière $\hat{\mathbf{W}}_0(\mathcal{B})$, tous les travaux respectant la condition de prolongement forte s'écrivent $\hat{\mathbf{W}}(\mathcal{B}) = \hat{\mathbf{W}}_0(\mathcal{B}) + \mathbf{Z}\begin{pmatrix}\gamma_{\underline{e}_x} & \gamma_{\underline{e}_y}\end{pmatrix}$ où $(\gamma_{\underline{e}_x}, \gamma_{\underline{e}_y})$ sont des vecteurs de taille $|\overset{\circ}{\mathcal{V}}|$ pouvant optimiser le champ reconstruit. Choisir 0 comme élément du noyau est toujours possible mais mène à un champ de contrainte de mauvaise qualité. Nous détaillons à présent trois critères guidant le choix de l'élément du noyau.

4.2.4.1 Optimisation vis-à-vis de la solution éléments finis

A partir du champ $\underline{\underline{\sigma}}_H$, nous pouvons calculer une traction moyenne $\underline{F}^\Gamma_H$ et son travail :

$$\begin{aligned}\underline{F}^\Gamma_H &= \sum_{T\in\partial^{-1}\Gamma} \theta^\Gamma_T(\underline{\underline{\sigma}}_{HT}\cdot\underline{n}^\Gamma_T)\\ W^\Gamma_H(\underline{\phi}_H) &= \sum_{T\in\partial^{-1}\Gamma}\int_\Gamma \theta^\Gamma_T(\underline{\underline{\sigma}}_{HT}\cdot\underline{n}^\Gamma_T)\cdot\underline{\phi}_H\, dS\end{aligned} \tag{4.30}$$

où θ^Γ_T est le quotient de l'aire du triangle sur l'aire des deux triangles de sorte que $\sum_{T\in\partial^{-1}\Gamma}\theta^\Gamma_T = 1$.

Puisque les contraintes sont constantes sur chaque élément, la traction moyenne est constante le long de l'arête. Nous notons $\mathbf{W}_H(\mathcal{B})$ le vecteur des travaux dans notre base. Il est alors possible de chercher des travaux satisfaisant la condition de prolongement forte qui soient le plus près (au sens d'une norme choisie) des travaux de la solution éléments finis :

$$\begin{pmatrix}\gamma_{\underline{e}_x} & \gamma_{\underline{e}_y}\end{pmatrix} = \arg\min_\mu \|\hat{\mathbf{W}}_0(\mathcal{B}) + \mathbf{Z}\begin{pmatrix}\mu_{\underline{e}_x} & \mu_{\underline{e}_y}\end{pmatrix} - \mathbf{W}_H(\mathcal{B})\|_{\mathcal{M}} \tag{4.31}$$

En supposant que la norme $\mathcal{M}$ traite les colonnes indépendamment les unes des autres et est représentée par une matrice symétrique définie positive $\mathbf{M}$, nous avons :

$$\left(\gamma_{\underline{e}_x} \quad \gamma_{\underline{e}_y}\right) = -\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{M}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{M}\left(\hat{\mathbf{W}}_0(\mathcal{B}) - \mathbf{W}_H(\mathcal{B})\right) \tag{4.32}$$

L'utilisation de la norme 2 conduit à l'estimateur noté $SF_{\|\cdot\|_2}$.

4.2.4.2 Lien avec la EET classique

Le critère utilisé dans la EET découple les composantes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. Afin de simplifier les notations, nous ne raisonnons que sur une direction.

Sur un patch ayant pour nœud un nœud interne N, le problème est sous-déterminé. La condition ajoutée est la minimisation de la distance D_N

$$D_N = \sum_{\Gamma\in\partial^{-1}N}\left(\int_\Gamma(\hat{F}^\Gamma - F_H^\Gamma)\phi_N dS\right)^2 \tag{4.33}$$

En sommant sur tous les nœuds internes, nous obtenons :

$$\sum_{N\in\overset{\circ}{\mathcal{V}}} D_N = \sum_{N\in\overset{\circ}{\mathcal{V}}}\sum_{\Gamma\in\partial^{-1}N}\left(\int_\Gamma(\hat{F}^\Gamma - F_H^\Gamma)\phi_N dS\right)^2 \tag{4.34}$$

$\hat{F}^\Gamma$ étant cherché comme une distribution linéaire, nous avons

$$\hat{F}^\Gamma = \hat{F}_0^\Gamma + \epsilon_N^\Gamma\hat{F}_1^\Gamma(\phi_N - \frac{1}{2}) \tag{4.35}$$

où $\hat{F}_0^\Gamma$ est la valeur moyenne de $\hat{F}^\Gamma$ et $\hat{F}_1^\Gamma$ sa variation le long de l'arête. ϵ_N^Γ vaut $+1$ sur une arête de Γ (nécessairement interne) et -1 sur l'autre. Soit (x_0^Γ, y_0^Γ) le milieu de l'arête Γ. Après intégration, nous obtenons (le champ test est désigné en index et W_H^Γ est écrit pour $W_H^\Gamma(1)$) :

$$\begin{aligned}\sum_{N\in\overset{\circ}{\mathcal{V}}} D_N &= \sum_{N\in\overset{\circ}{\mathcal{V}}}\sum_{\Gamma\in\partial^{-1}N}\left(\frac{1}{2}(\hat{F}_0^\Gamma - F_H^\Gamma)|\Gamma| + \frac{\epsilon_N^\Gamma}{12}\hat{F}_1^\Gamma|\Gamma|\right)^2 \\ &= \sum_{N\in\overset{\circ}{\mathcal{V}}}\sum_{\Gamma\in\partial^{-1}N}\left(\frac{\hat{W}_1^\Gamma - W_H^\Gamma}{2} + \frac{\epsilon_N^\Gamma}{2}\left(a_\Gamma(\hat{W}_y^\Gamma - y_0^\Gamma\hat{W}_1^\Gamma) - b_\Gamma(\hat{W}_x^\Gamma - x_0^\Gamma\hat{W}_1^\Gamma)\right)\right)^2\end{aligned} \tag{4.36}$$

Nous pouvons distinguer les arêtes ayant deux sommets internes $(\overset{\circ\circ}{\mathcal{E}})$ des arêtes ayant un sommet sur le bord.

$$\begin{aligned}\sum_{N\in\overset{\circ}{\mathcal{V}}} D_N &= \sum_{\Gamma\in\overset{\circ\circ}{\mathcal{E}}}\frac{1}{2}\left(\hat{W}_1^\Gamma - W_H^\Gamma)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a_\Gamma(\hat{W}_y^\Gamma - y_0^\Gamma\hat{W}_1^\Gamma) - b_\Gamma(\hat{W}_x^\Gamma - x_0^\Gamma\hat{W}_1^\Gamma)\right)^2 \\ &+ \sum_{\Gamma\in\overset{\circ}{\mathcal{E}}\setminus\overset{\circ\circ}{\mathcal{E}}}\left(\frac{\hat{W}_1^\Gamma - W_H^\Gamma}{2} + \frac{1}{2}\left(a_\Gamma(\hat{W}_y^\Gamma - y_0^\Gamma\hat{W}_1^\Gamma) - b_\Gamma(\hat{W}_x^\Gamma - x_0^\Gamma\hat{W}_1^\Gamma)\right)\right)^2\end{aligned} \tag{4.37}$$

Ce critère couple les travaux $(\hat{W}_1^\Gamma, \hat{W}_x^\Gamma, \hat{W}_y^\Gamma)$ sur la même arête, ce qui correspond à une matrice $\mathbf{M}$ avec uniquement trois valeurs non nulles par ligne.

4.2.4.3 Minimisation de l'estimateur

Cette stratégie mène au meilleur choix mais est aussi très coûteuse. Elle permet néanmoins d'étudier la pertinence de la condition de prolongement forte.

Parce que les deux composantes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont couplées pour ce critère, nous adoptons les notations suivantes :

$$\underline{\hat{\mathbf{W}}} = \left(\hat{\mathbf{W}}(\underline{e}_x)^T \quad \hat{\mathbf{W}}(x\underline{e}_x)^T \quad \hat{\mathbf{W}}(y\underline{e}_x)^T \quad \hat{\mathbf{W}}(\underline{e}_y)^T \quad \hat{\mathbf{W}}(x\underline{e}_y)^T \quad \hat{\mathbf{W}}(y\underline{e}_y)^T\right)^T$$

$$\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{\underline{e}_x} \\ \gamma_{\underline{e}_x} \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbf{K}_T^p$ la matrice de rigidité du problème élémentaire à résoudre (sur T) et $\mathbf{B}_T$ la matrice définissant les travaux d'ordre supérieur sur l'élément T à partir de $\underline{\hat{\mathbf{W}}}$. L'énergie de déformation s'écrit :

$$\int_{\Omega_H} \underline{\underline{\hat{\sigma}}} : \mathbb{H}^{-1} : \underline{\underline{\hat{\sigma}}} d\Omega = \frac{1}{2}\underline{\hat{\mathbf{W}}}^T \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{B}_T^T {\mathbf{K}^p}_T^{-1} \mathbf{B}_T\right) \underline{\hat{\mathbf{W}}} \tag{4.38}$$

ce qui mène au résultat suivant :

$$\underline{\gamma} = \left(\underline{\mathbf{Z}}^T \sum_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{B}_T^T {\mathbf{K}_T^p}^{-1} \mathbf{B}_T \underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1} \underline{\mathbf{Z}}^T \left(\sum_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{B}_T^T {\mathbf{K}_T^p}^{-1} \mathbf{B}_T\right) \underline{\hat{\mathbf{W}}}_0 \tag{4.39}$$

Les coûts sont concentrés dans la construction et la factorisation d'une matrice symétrique creuse de taille $2\overset{\circ}{\mathcal{V}} \times 2\overset{\circ}{\mathcal{V}}$:

$$\left(\underline{\mathbf{Z}}^T \sum_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{B}_T^T {\mathbf{K}_T^p}^{-1} \mathbf{B}_T \underline{\mathbf{Z}}\right)$$

L'estimateur associé est noté $\text{SF}_{\|\cdot\|_{erdc}}$.

4.3 Résultats sur la structure 2

Dans cette section, nous présentons et analysons les performances de notre nouvel estimateur sur la structure 2 (voir l'annexe 9.4.2). Pour davantage d'illustrations numériques, le lecteur peut se référer à [122]. Nous comparons notre nouvelle technique de reconstruction à la méthode classique EET et à la *flux-free method*. Dans tous les cas, lors de la résolution des problèmes locaux, c'est un p-raffinement (p+2) qui est mis en œuvre (augmentation du degré des fonctions de forme de 2). L'abbréviation SF est utilisée pour désigner STARFLEET.

La figure 4.4 et le tableau 4.1 montrent la convergence des estimateurs en fonction de la taille du maillage.

Tout d'abord, nous observons une décroissance des estimateurs lorsque le maillage est raffiné. L'estimation d'erreur avec la nouvelle technique de reconstruction $\text{STARFLEET}_{\|\cdot\|_2}$

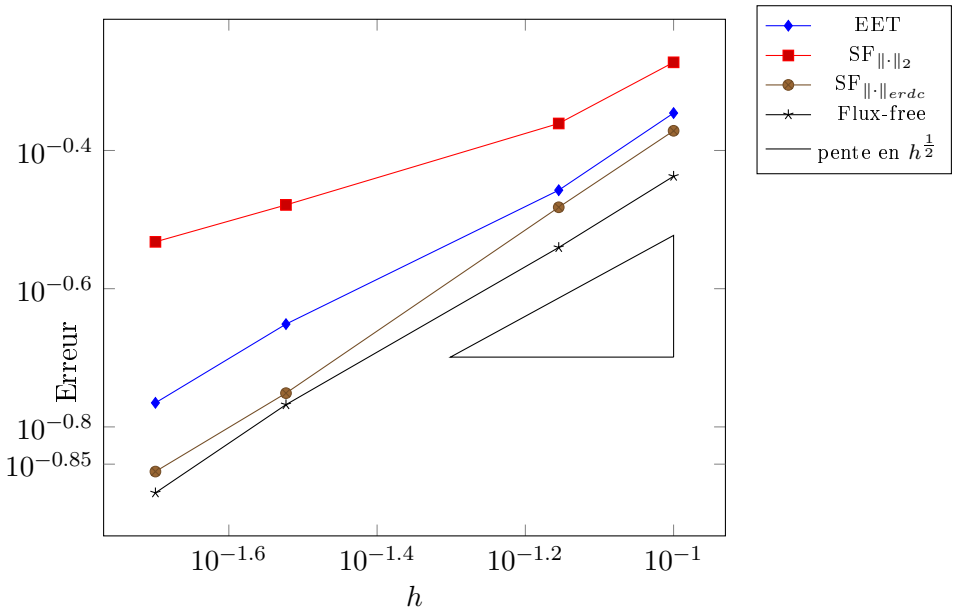


FIGURE 4.4 – Structure pré-fissurée : estimateurs

♯ ddl	EET	$SF_{\|\cdot\|_2}$	$SF_{\|\cdot\|_{erdc}}$	Flux-free	$\|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)\|_{\mathbb{H},\Omega}$
740	0.45098	0.53401	0.42509	0.36538	0.86727
1330	0.34881	0.43558	0.32949	0.28817	0.88202
5638	0.22324	0.33203	0.17736	0.1707	0.89362
12160	0.17172	0.29363	0.13658	0.12724	0.89648

TABLE 4.1 – Structure 2 : estimateurs pour différentes méthodes de reconstruction de champs (EET, *Flux-free*, STARFLEET)

donne des résultats médiocres lorsque le maillage est raffiné. Cela peut être dû à la singularité du problème. Comme attendu, lorsqu'une minimisation de l'énergie complémentaire est effectuée, la stratégie optimale $\text{STARFLEET}_{\|\cdot\|_{erdc}}$ donne de meilleurs résultats que la EET classique, en particulier pour les maillages fins. Elle tend à être aussi performante que la méthode *Flux-free* qui est toujours la meilleure.

Chapitre 5

Reconstruction améliorée des inter-efforts

Dans ce chapitre, nous proposons diverses améliorations pour la reconstruction des inter-efforts équilibrés entre sous-domaines. C'est une étape nécessaire avant l'enclenchement en parallèle des techniques classiques de reconstruction de champs statiquement admissibles. Tout d'abord, nous montrons le rôle clef que jouent les points multiples dans cette reconstruction. Nous montrons également que l'attention qui est portée en ces points permet d'étendre l'estimation d'erreur parallèle à l'algorithme FETI-DP. Enfin, nous proposons d'améliorer la reconstruction de l'inter-effort dans le cas d'une interface intersectant une condition de Dirichlet. L'ensemble de ces travaux a été effectué en collaboration avec Augustin Parret-Fréaud.

5.1 Rappels sur la méthode de reconstruction d'un champ statiquement admissible en cadre sous-structuré

Dans cette section, nous détaillons la méthode permettant d'obtenir des champs de contraintes statiquement admissibles $(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega)$ à partir de réactions nodales équilibrées $(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s$. La description que nous faisons répond en partie à la remarque 3.1. Cette méthodologie est celle décrite dans [111, 110].

La méthode peut se décomposer en trois étapes :

1. Obtenir pour chaque domaine (s) des réactions nodales $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$
   — équilibrées entre sous-domaines, c'est-à-dire vérifiant
   $$\sum_s \mathbf{A}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = 0 \tag{5.1}$$
   — équilibrées vis-à-vis des modes rigides, c'est-à-dire vérifiant
   $$\mathbf{R}^{(s)^T} (\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T} \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}) = 0 \tag{5.2}$$
2. Construire un représentant continu $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ de $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$
3. Construire un champ statiquement admissible $(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega)$ à partir de $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$, de $(\mathbf{u}_N^{(s)})_s$ et du chargement connu de la structure (chargement volumique $\underline{f}$ et surfacique $\underline{g}$).

Nous détaillons à présent chacune des étapes.

1 : Obtenir pour chaque domaine (s) des réactions nodales $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$ Si l'approche duale a été choisie pour résoudre le problème sous-structuré, à chaque itération, l'inconnue d'interface est une unique inconnue en effort $\boldsymbol{\Lambda}$, si bien qu'à chaque itération du solveurs, les réactions nodales $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T} \boldsymbol{\Lambda}$ sont équilibrées aux interfaces et vis-à-vis des modes rigides.

Si l'approche primale a été choisie pour résoudre le problème sous-structuré, les réactions nodales $(\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s$ sont reconstruites ainsi : $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)}$ (cf algorithme 3). Il a été démontré à la section 3.1 que ces réactions nodales étaient bien équilibrées aux interfaces et vis-à-vis des modes rigides.

2 : Construire un représentant continu $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ de $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$ Afin de pouvoir enclencher les procédures de reconstruction de champs statiquement admissibles disponibles dans la littérature, il est nécessaire de construire un représentant continu $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ de $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$. Cet effort continu doit développer le même travail que les réactions nodales $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$ dans les champs de déplacement admissibles. Ainsi, l'hypothèse de décomposition de $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ sur la base des fonctions de forme est faite si bien que $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ se réécrit :

$$\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)} = \underline{\boldsymbol{\phi}}_{bH}^{(s)} \hat{\mathbf{F}}_{bN}^{(s)} \tag{5.3}$$

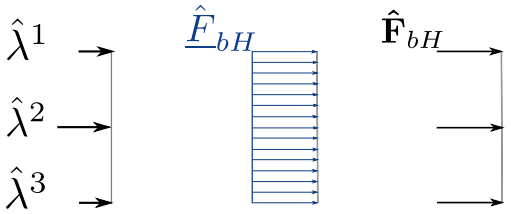


FIGURE 5.1 – Construction d'un représentant continu de l'effort

Exprimer $\hat{\mathbf{F}}_{bN}^{(s)}$ en fonction des réactions nodales $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$ revient alors, pour chaque interface, à résoudre un système de petite taille faisant intervenir la matrice de masse associée aux fonctions de forme des nœuds de l'interface. Sur la figure 5.1, une illustration du passage de réactions nodales à un effort continu est donnée.

Dans [110], l'auteur souligne qu'une telle construction d'un représentant continu peut conduire à un champ statiquement admissible de moins bonne qualité que dans le cas séquentiel et donc à un estimateur parallèle moins performant que le séquentiel dans le cas d'interfaces anguleuses. Toujours dans [110], une reconstruction différente de $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ est proposée afin de résoudre à ce problème. Nous ne la mettons pas en œuvre dans cette thèse.

3 : Construire un champ statiquement admissible $(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega)$

Enfin, pour chaque sous-domaine (s), un champ de contrainte statiquement admissible est reconstruit en utilisant une des techniques dédiées. Le champ de déplacement $\mathbf{u}_N^{(s)}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}_N^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} + {\mathbf{t}^{(s)}}^T\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} \\ \text{où } (\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})_s \text{ satisfont } {\mathbf{R}^{(s)}}^T(\mathbf{f}^{(s)} + {\mathbf{t}^{(s)}}^T\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

qui s'écrit de manière continue :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \underline{u}_N^{(s)} \in \mathrm{CA}(\Omega^{(s)}) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^{00}(\Omega^{(s)}), \\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_N^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right) d\Omega^{(s)} = \int_{\Omega^{(s)}} \underline{f}\cdot\underline{v}d\Omega + \int_{\partial_g\Omega^{(s)}} \underline{g}\cdot\underline{v}dS + \int_{\Gamma^{(s)}} \underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}\cdot\underline{v}dS \end{aligned} \tag{5.5}$$

Puisque construit à partir des réactions nodales équilibrées aux interfaces et vis-à-vis des modes rigides, le représentant $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ vérifie :

— Le principe d'action réaction entre sous-structure :

$$\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)} + \underline{\hat{F}}_{bN}^{(s')} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^{s,s'} \tag{5.6}$$

— L'équilibre vis-à-vis des modes rigides :

$$\forall \underline{v} \text{ mode rigide } \in \mathrm{CA}(\Omega^{(s)})$$
$$0 = \int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_g \Omega \bigcap \partial\Omega^{(s)}} \underline{g} \cdot \underline{v} dS + \int_{\Gamma^{(s)}} \underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)} \cdot \underline{v} dS \tag{5.7}$$

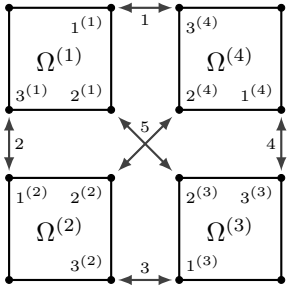
Il est alors envisageable d'utiliser une technique séquentielle de reconstruction de champ statiquement admissible pour chaque sous-domaine. Le champ de contraintes obtenu au final sur toute la structure est alors globalement statiquement admissible.

5.2 Le cas particulier des points multiples

Les points multiples sont les nœuds de l'interface partagés par plus de deux sous-domaines. Par exemple, sur la figure 2.1, il y a un point multiple de multiplicité 3. Ces points multiples ont fait l'objet de traitement spécifiques dans les méthodes de décomposition de domaine (voir A-FETI et FETI-DP évoquées dans la paragraphe 2.5). Dans cette section, nous montrons que ces points multiples peuvent jouer un rôle crucial dans la reconstruction d'inter-efforts équilibrés aux interfaces et donc dans l'estimation d'erreur. Nous revenons tout d'abord sur la définition de l'opérateur d'assemblage dual et montrons que ses différentes écritures entraînent des reconstruction différentes d'inter-efforts. Nous proposons ensuite une optimisation de cette reconstruction aux points multiples. Enfin, nous mettons en œuvre cette optimisation sur une structure très hétérogène où l'estimation d'erreur est médiocre si aucune attention n'est portée sur les points multiples.

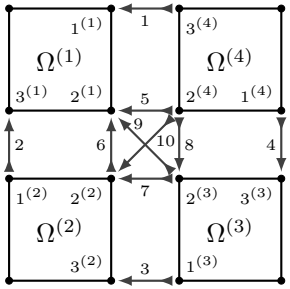
5.2.1 Retour sur l'opérateur d'assemblage dual

La définition de l'opérateur d'assemblage primal est aisée. Pour chaque domaine (s), l'opérateur s'écrit sous la forme d'une matrice $\mathbf{A}^{(s)}$ qui localise les degrés du bord du sous-domaine dans l'interface géométrique globale (cf figure 5.2). La définition de l'opérateur d'assemblage dual est plus complexe puisqu'elle n'est pas unique. Classiquement, l'opérateur d'assemblage est celui illustré en figure 5.3 où l'on donne $\mathbf{B}$ qui est la concaténation des opérateurs d'assemblage. Dans la description duale de l'interface, il peut y avoir une redondance dans le cas de la présence d'un point multiple. Des opérateurs non-redondants peuvent donc être définis comme illustré en figure 5.4 avec l'expression de $\mathbf{B}_{NR}$. De plus, si le point est de multiplicité 4, il apparaît une interaction ponctuelle entre deux sous-domaines plans, ce qui n'a pas, tel que, de sens physique d'un point de vue continu. Il est également possible de définir un opérateur d'assemblage qui ne prend en compte que les interactions non ponctuelles comme illustré en figure 5.5 et noté $\mathbf{B}_F$.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.2 – Opérateurs d'assemblage primal



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.3 – Opérateurs d'assemblage dual classiques

$$\mathbf{B}_{NR} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.4 – Opérateurs d'assemblage dual non redondants

$$\mathbf{B}_{F} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.5 – Opérateurs d'assemblage dual non ponctuels

Nous proposons donc, à partir d'une inconnue d'interface globale $\mathbf{\Lambda}$, de construire une inconnue d'interface globale $\mathbf{\Lambda}_F$ qui ne fait plus apparaître des interactions ponctuelles. Celles-ci ont été distribuées sur les interactions entre faces (la pure suppression de ces interactions ponctuelles entraînerait une perte de l'équilibre en effort au point multiple). C'est cette distribution qui n'est pas unique. Dans le cas de fortes hétérogénéités, une mauvaise reconstruction de $\mathbf{\Lambda}_F$ peut entraîner une surestimation de l'erreur.

Dans la suite de cette partie, nous nous appuierons sur les notations décrites dans les figures citées précédemment et considérerons uniquement un degré de liberté au point multiple, le traitement des deux directions pouvant se faire indépendamment.

5.2.2 Gestion des points multiples pour l'estimation d'erreur

Considérons une structure carrée de module d'Young E_1 comportant quatre inclusions souples de module d'Young $E_2 = E_1\ 10^{-5}$. Le coefficient de Poisson est choisi égal à 0.3 pour les deux matériaux. La structure est décomposée en 36 sous-domaines homogènes et est sollicité en traction et cisaillement sur l'arête supérieure alors que la base est encastrée, comme illustré sur la figure 5.6. L'hypothèse des contraintes planes est effectuée. Les paramètres utilisés pour la résolution sont indiqués dans le tableau 5.1.

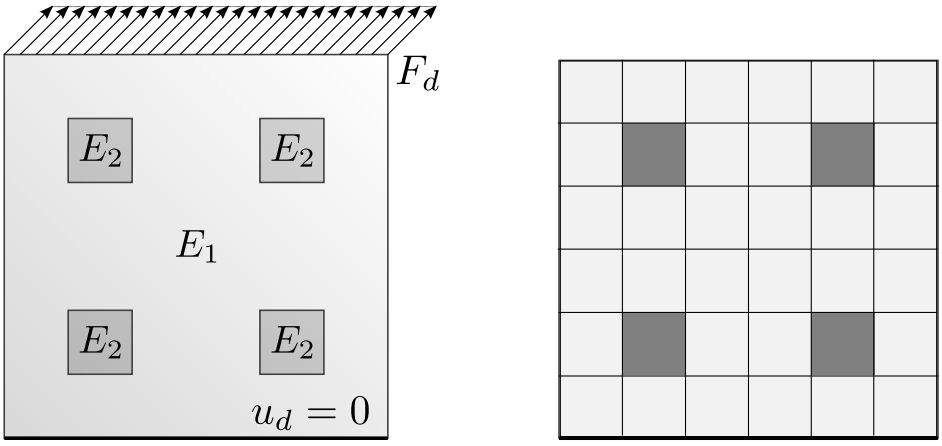


FIGURE 5.6 – Structure à forte hétérogénéité : chargement (gauche) et sous-structuration (droite)

Sur la figure 5.7, nous donnons les cartes de contribution à l'erreur obtenues à convergence après un calcul sous-structuré (figure de gauche) et après un calcul séquentiel (figure de droite) ainsi que les valeurs des estimateurs $\theta_{DD} = \sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_H^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H^{(s)})}$ et $\theta_{seq} = e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H)$ associés. La solution élément fini est la même pour les deux résolutions mais nous observons clairement une erreur parasite située au points multiples au niveau des inclusions (c'est-à-dire en présence de saut de module d'Young). Cette erreur parasite se répercute sur la borne supérieure de l'erreur discrétisation qui est 100 fois plus importante en sous-structuré qu'en séquentiel.

♯ ddl	2514
Approche	duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Projecteur	**I**
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	*Flux-free*
Espace de résolution des problèmes locaux	$\frac{h}{2^1}$

TABLE 5.1 – Structure avec forte hétérogénéité : paramètres

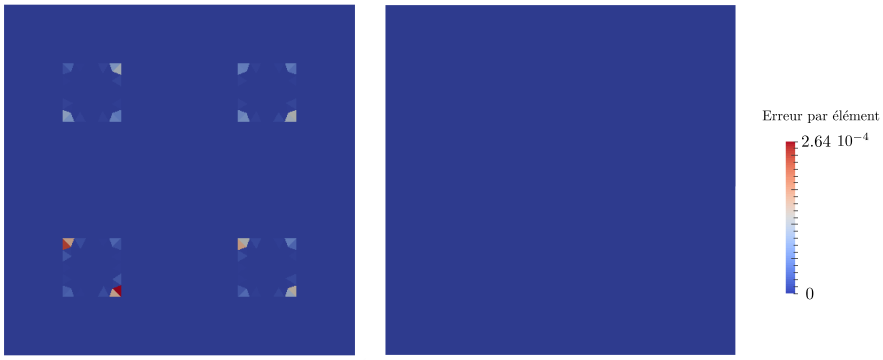


FIGURE 5.7 – Cartes de contribution à l'erreur après un calcul par décomposition de domaine (gauche) $\theta_{DD} = 0.054233$ et après un calcul séquentiel (droite) $\theta_{seq} = 0.00033852$

Au point multiple, nous souhaitons construire $\mathbf{\Lambda}_F$ tel que :

$$\mathbf{B}_F^T \mathbf{\Lambda}_F = \mathbf{B}^T \mathbf{\Lambda} \tag{5.8}$$

Or, un cycle d'effort tournant ne déséquilibre pas le point multiple mais peut changer la répartition des interactions entre faces. Autrement dit, il existe un élément $\mathbf{\Lambda}_{ker}$ tel que $\mathbf{B}_F^T \mathbf{\Lambda}_{ker} = 0$. Sur l'exemple de la figure 5.5,

$$\mathbf{\Lambda}_{ker} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\mathbf{\Lambda}_F = \mathbf{\Lambda}_{part} + \beta \mathbf{\Lambda}_{ker} \tag{5.10}$$

où β est un scalaire puisque la dimension du noyau de $\mathbf{B}_F^T$ est de 1.

Remarque 5.1. *Cette indétermination est de même nature que celle rencontrée lors de la reconstruction d'inter-efforts équilibrés dans la méthode EET décrite en section 1.2.3.3. Pour le traitement d'un nœud intérieur, il n'est pas possible de déterminer de manière unique une solution au système 1.40.*

Un solution particulière $\mathbf{\Lambda}_{part}$ est obtenue facilement en calculant

$$\mathbf{\Lambda}_{part} = (\mathbf{B}_F\mathbf{B}_F^T)^+\mathbf{B}_F\mathbf{B}^T\mathbf{\Lambda} \tag{5.11}$$

où $(\mathbf{B}_F\mathbf{B}_F^T)^+$ désigne une pseudo-inverse de $\mathbf{B}_F\mathbf{B}_F^T$.

Nous avons exhibé une lacune de la procédure de reconstruction d'inter-efforts équilibrés dans le cas de sous-structures très hétérogènes. Afin de remédier à ce problème, nous proposons de déterminer le coefficient β en minimisant la quantité suivante :

$$||\mathbf{\Lambda}_{part} + \beta\mathbf{\Lambda}_{ker} - \mathbf{\Lambda}_{heter}||_{\mathcal{P}} \tag{5.12}$$

où

$$\mathbf{\Lambda}_{heter} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{heter}^5 \\ \mathbf{\Lambda}_{heter}^6 \\ \mathbf{\Lambda}_{heter}^7 \\ \mathbf{\Lambda}_{heter}^8 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

avec

$$\mathbf{\Lambda}_{heter}^i = \int_{\Gamma^i} \frac{1}{E_{T_i^k}^{-1} + E_{T_i^l}^{-1}} [E_{T_i^k}^{-1}\delta_{T_i^k}^{\Gamma_i}\underline{\underline{\sigma}}_{HT_i^k}\underline{n}_{T_i^k}^{\Gamma_i} + E_{T_i^l}^{-1}\delta_{T_i^l}^{\Gamma_i}\underline{\underline{\sigma}}_{HT_i^l}\underline{n}_{T_i^l}^{\Gamma_i}]\phi_H^N ds \tag{5.14}$$

où k et l désignent les numéros des sous domaines ayant pour interface l'arête Γ_i, où $E_{T_i^k}$ désigne le module d'Young de l'élément T_i^k et où ϕ_H^N désigne la fonction de forme associée au nœud central N du *star-patch* reconstitué illustré en figure 5.8.

La norme $\mathcal{P}$ est représentée par la matrice diagonale $\mathbf{P}$ suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} E_{T_5^1}^{-1} + E_{T_5^4}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{T_6^2}^{-1} + E_{T_6^2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{T_7^3}^{-1} + E_{T_7^2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{T_8^4}^{-1} + E_{T_8^3}^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Puisqu'elle fait intervenir des coefficients matériaux, cette norme a davantage de sens mécanique qu'une norme 2 standard et permettra de mieux répartir les inter-efforts en respectant les sauts de rigidité.

Une fois $\mathbf{\Lambda}_F$ reconstruit, les réactions nodales par sous-domaines sont définies par $\boldsymbol{\lambda}^{(s)} = \mathbf{B}_F^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}_F$.

Remarque 5.2. *Une forte hétérogénéité faisant souvent apparaître un mauvais conditionnement de la norme ci-dessus, l'utilisation d'un Lagrangien augmenté pour résoudre ce problème d'optimisation sous contrainte est contre-indiquée. De plus, l'élément du noyau pouvant facilement être déterminé, il paraît plus pertinent et efficace de chercher uniquement le coefficient β satisfaisant la condition d'optimalité.*

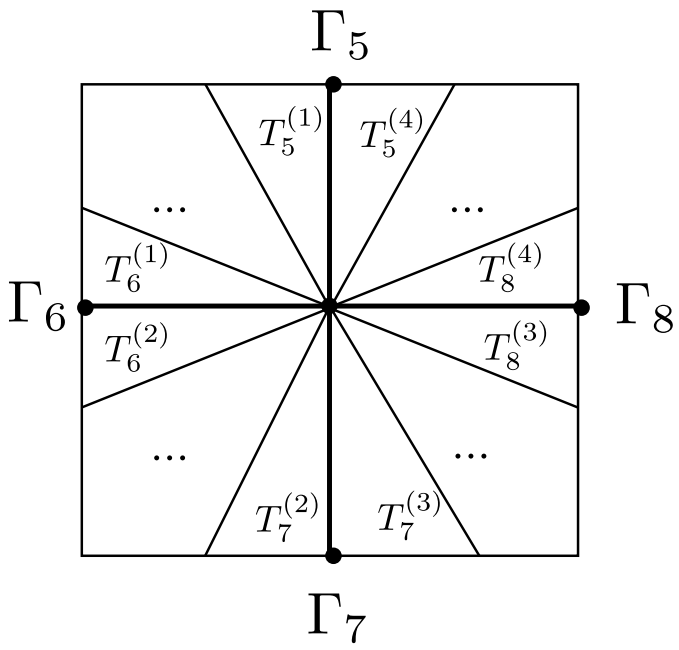


FIGURE 5.8 – *Star-patch* reconstitué au point multiple

Remarque 5.3. *La détermination de $\mathbf{\Lambda}_F$ nécessite des échanges entre sous-domaines puisqu'il faut reconstuire le star-patch centré sur le nœud multiple. Néanmoins, les quantités échangées sont de petite taille.*

Nous mettons en œuvre cette optimisation sur la structure fortement hétérogène et donnons les cartes de contribution à l'erreur ainsi que la valeur des estimateurs en séquentiel et en sous-structuré avec optimisation sur la figure 5.9. Nous constatons que la contribution à l'erreur des points multiples aux sauts de module d'Young a fortement diminué et est maintenant comparable à celle obtenue en séquentiel. L'estimateur d'erreur global est alors comparable à celui obtenu en séquentiel.

5.3 Application à FETI-DP

Nous avons illustré dans la section précédente l'enjeu que représentent les points multiples dans l'estimation d'erreur. Il est connu que ces points multiples sont également sujets de traitements spécifiques dans les décompositions de domaine. Un des algorithmes pouvant être employé dans ce cas est FETI-DP. Dans cette section, nous détaillons l'algorithme FETI-DP et étendons la procédure de reconstruction des champs admissibles à cette approche.

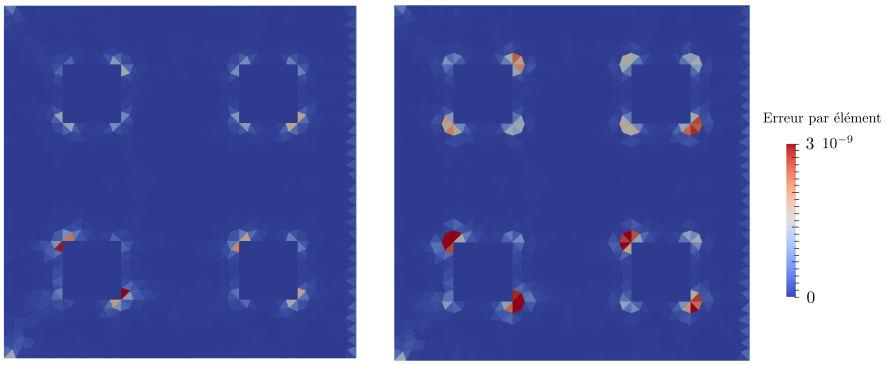


FIGURE 5.9 – Cartes de contribution à l'erreur après un calcul séquentiel (gauche) $\theta_{seq} = 0.00033852$ et en sous-structuré avec optimisation au point multiple (droite) $\theta_{DDoptim} = 0.00046157$

5.3.1 L'algorithme FETI-DP

Dans l'approche FETI-DP, des points particuliers font l'objet d'un traitement spécifique afin d'améliorer la résolution. Pour les problèmes en deux dimensions, ce sont généralement les sommets terminaux des interfaces. Dans la suite, nous appellerons ces degrés de liberté des coins et ils seront indicés par la lettre c. Ainsi, pour chaque sous-structure, les degrés de liberté sont décomposés en coins (c) et le reste (r) :

$$\mathbf{u}^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^{(s)} \\ \mathbf{u}_c^{(s)} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

La matrice de rigidité de la sous-structure (s) se réécrit :

$$\mathbf{K}^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{rr}^{(s)} & \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \\ \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T} & \mathbf{K}_{cc}^{(s)} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Nous introduisons également deux opérateurs d'assemblage et un opérateur de pondération :

- $\mathbf{B}_r^{(s)}$ est l'opérateur permettant de passer de degrés de liberté r de la sous-structure $\mathbf{u}_r^{(s)}$ aux degrés de liberté br du bord de la sous-structure $\mathbf{u}_{br}^{(s)}$: $\mathbf{B}_r^{(s)}\mathbf{u}_r^{(s)} = \pm\mathbf{u}_{br}^{(s)}$
- $\mathbf{B}_c^{(s)}$ est l'opérateur permettant de passer de l'ensemble de degré de liberté de coin $\mathbf{u}_c$ aux degrés de liberté de coin pour la sous-structure (s) : $\mathbf{B}_c^{(s)}\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c^{(s)}$
- $\widetilde{\mathbf{B}}_r^{(s)}$ la matrice diagonale de *scaling* du sous-domaine

Comme pour FETI, une unique inconnue d'interface $\mathbf{\Lambda}$ est introduite. La différence est que cette inconnue n'est définie que sur les degrés de liberté *br* puisque sur les coins,

c'est la condition de continuité en déplacement qui est imposée. Le problème d'interface s'écrit :

$$L\mathbf{\Lambda} = rhs \tag{5.18}$$

avec

$$L = \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{B}_r^{(s)^T} + \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \mathbf{B}_c^{(s)} (\mathbf{K}_{cc}^*)^{-1} \sum_s \mathbf{B}_c^{(s)^T} \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{B}_r^{(s)^T} \tag{5.19}$$

et

$$rhs = \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{f}_r^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{B}_r^{(s)^T} (\mathbf{K}_{cc}^*)^{-1} (\mathbf{f}_c - \sum_s \mathbf{B}_c^{(s)^T} \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{f}_r^{(s)}) \tag{5.20}$$

L'inversion de l'opérateur $\mathbf{K}_{cc}^*$ défini par :

$$\mathbf{K}_{cc}^* = \sum_s [\mathbf{B}_c^{(s)^T} \mathbf{K}_{cc}^{(s)} \mathbf{B}_c^{(s)} - (\mathbf{K}_{rc}^{(s)} \mathbf{B}_r^{(s)^T} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \mathbf{B}_c^{(s)}] \tag{5.21}$$

correspond à la résolution du problème grossier, c'est-à-dire à la résolution d'un problème où seuls les modes de coins interviennent et où les sous-structures sont rigides.

En effectuant le bon choix de coins, l'inversibilité de la matrice $\mathbf{K}_{rr}^{(s)}$ est assurée ; autrement dit, les problèmes de Neumann par sous-structure sont bien posés.

Les préconditionneurs proposés dans [40] sont les extensions des préconditionneurs classiques Dirichlet ou *lumped*. Le préconditionneur de Dirichlet est :

$$\widetilde{L} = \sum_s \widetilde{\mathbf{B}}_r^{(s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{br,br}^{(s)} \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_r^{(s)^T} \tag{5.22}$$

avec

$$\mathbf{S}_{br,br}^{(s)} = \mathbf{K}_{br,br}^{(s)} - (\mathbf{K}_{i,br}^{(s)^T} (\mathbf{K}_{ii}^{(s)^T})^{-1} \mathbf{K}_{i,br}^{(s)} \tag{5.23}$$

L'algorithme obtenu est l'algorithme 5.

Lors d'une itération, nous pouvons mettre en évidence les champs calculés suivants :

— Première résolution sur sous-structures avec nœuds de coins bloqués :

$$\mathbf{u}_{1,r}^{(s)} = \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{B}_r^{(s)^T} \mathbf{\Lambda} \tag{5.24}$$

— Calcul des réactions associées à cet encastrement aux coins

$$\boldsymbol{\lambda}_{c1}^{(s)} = \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{B}_r^{(s)^T} \mathbf{\Lambda} \tag{5.25}$$

— Calcul de la somme (qui est non nulle)

$$\boldsymbol{\lambda}_{c1} = \sum_s \mathbf{B}_c^{(s)} \boldsymbol{\lambda}_{c1}^{(s)} \tag{5.26}$$

— Résolution du problème grossier

$$\mathbf{K}_{cc}^* \mathbf{u}_{2c} = \boldsymbol{\lambda}_{c1} \tag{5.27}$$

— Résolution de problèmes sur sous-structures :

$$\mathbf{u}_{3,r}^{(s)} = \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \mathbf{B}_c^{(s)} \mathbf{u}_{2c} \tag{5.28}$$

Algorithme 5 : FETI-DP

$\mathbf{K}^*_{cc} = \sum_s [\mathbf{B}_c^{(s)^T} \mathbf{K}_{cc}^{(s)} \mathbf{B}_c^{(s)} - (\mathbf{K}_{rc}^{(s)} \mathbf{B}_r^{(s)^T} (\mathbf{K}_{rr}^{(s)})^{-1} \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \mathbf{B}_c^{(s)}]$
Initialisation $\mathbf{\Lambda}_0 = 0$
Résidu initial $\mathbf{r}_0 =$
$\sum_s \mathbf{B}_r^{(s)} (\mathbf{K}_{rr}^{(s)})^{-1} \mathbf{f}_r^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)} (\mathbf{K}_{rr}^{(s)})^{-1} \mathbf{B}_r^{(s)^T} (\mathbf{K}^*_{cc})^{-1} (\mathbf{f}_c - \sum_s \mathbf{B}_c^{(s)^T} \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T} \mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}} \mathbf{f}_r^{(s)})$
Résidu préconditionné $\mathbf{z}_0 = \widetilde{L} r_0$
Direction de recherche $\mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0$
j=0
while $\sqrt{\mathbf{r}, \mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  Résolution
  $\alpha_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j)/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)$
  $\mathbf{\Lambda}_{j+1} = \mathbf{\Lambda}_j + \alpha_j \mathbf{w}_j$
  $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{q}_j$
  $\mathbf{z}_{j+1} = \widetilde{L} \mathbf{r}_j$
  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} - (\mathbf{q}_j, \mathbf{z}_{j+1})/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j$
end

5.3.2 Reconstruction parallèle de champs admissibles et estimation de l'erreur

Dans ce paragraphe, nous montrons comment il est possible de reconstruire à moindre coût et de manière fortement parallèle les champs admissibles nécessaires au calcul de l'estimateur d'erreur.

5.3.2.1 Reconstruction des champs de déplacement

Reconstruction d'un champ de déplacement de Neumann Ce champ dit de Neumann et noté $\mathbf{u}_N^{(s)}$ tel que

$$\mathbf{u}_N^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{Nr}^{(s)} \\ \mathbf{u}_{Nc}^{(s)} \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

est associé à la résolution d'un problème de Neumann avec les inter-efforts imposés qui sont $\mathbf{B}_r^{(s)^T} \mathbf{\Lambda}$ sur les nœud de l'interface et $\boldsymbol{\lambda}_c^{(s)}$ sur les coins.

Un calcul direct montre que le champ

$$\mathbf{u}_N^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1,r}^{(s)} + \mathbf{u}_{3,r}^{(s)} \\ -\mathbf{B}_c^{(s)} \mathbf{u}_{2c} \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

est solution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{rr}^{(s)} & \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \\ \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T} & \mathbf{K}_{cc}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{Nr}^{(s)} \\ \mathbf{u}_{Nc}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_r^{(s)^T} \mathbf{\Lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}_c^{(s)} \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda_c^s &= \mathbf{K}_{rc}^{(s)^T}\mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}}\mathbf{B}_r^{(s)^T}\mathbf{\Lambda} \\ &+ (\mathbf{K}_{rc}^{(s)^T}\mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}}\mathbf{K}_{rc}^{(s)}\mathbf{B}_c^{(s)} - \mathbf{K}_{cc}^{(s)}\mathbf{B}_c^{(s)})(\mathbf{K}_{cc}^{*})^{-1}(\sum_s \mathbf{B}_c^{(s)}\mathbf{K}_{rc}^{(s)^T}\mathbf{K}_{rr}^{(s)^{-1}}\mathbf{B}_r^{(s)^T}\mathbf{\Lambda})\end{aligned} \tag{5.32}$$

Reconstruction d'un champ de déplacement de Dirichlet Un champ de déplacement $(\mathbf{u}_D^{(s)})_s$ continu peut être reconstruit comme indiqué dans l'algorithme FETI 4 : $\mathbf{u}_D^{(s)} = \mathbf{u}_N^{(s)} - \delta\mathbf{u}^{(s)}$. Puisque ce champ est la combinaison linéaire de champs issus de résolutions locales alors ce champ est continu sur chaque sous-domaines $\Omega^{(s)}$. De plus, ce déplacement est continu sur les degrés de liberté br puisque :

$$\sum_s \mathbf{B}_r^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)} = \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)}\mathbf{u}_{Nr}^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}_r^{(s)}\widetilde{\mathbf{B}}_r^{(s)^T}(\sum_s \mathbf{B}_r^{(s)}\mathbf{u}_{Nr}^{(s)}) \quad = 0 \tag{5.33}$$

La continuité est également vérifiée aux coins puisqu'elle est imposée fortement dans cette approche.

5.3.2.2 Reconstruction de réactions équilibrées

La construction d'un champ de contrainte statiquement admissible requiert des réactions nodales vérifiant l'équilibre à chaque interface entre sous-domaines et l'équilibre global vis-à-vis des modes rigides. Dans FETI-DP, les coins ont justement été choisis afin que les problèmes sur chaque sous-structure soient bien posés. Puisqu'il n'y a pas de mode rigide, vérifier l'équilibre global vis-à-vis des modes rigides est inutile. Il reste donc uniquement la condition d'équilibre aux interfaces à vérifier.

En d'autres termes, pour chaque sous-domaine, il est nécessaire d'avoir un champ de déplacement de Neumann $\mathbf{u}_N^{(s)} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_{Nr}^{(s)} \\ \mathbf{u}_{Nc}^{(s)}\end{pmatrix}$ et des réactions $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_r^{(s)} \\ \boldsymbol{\lambda}_c^{(s)}\end{pmatrix}$ vérifiant

$$\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{rr}^{(s)} & \mathbf{K}_{rc}^{(s)} \\ (\mathbf{K}_{rc}^{(s)})^T & \mathbf{K}_{cc}^{(s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{Nr}^{(s)} \\ \mathbf{u}_{Nc}^{(s)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_r^{(s)} \\ \boldsymbol{\lambda}_c^{(s)}\end{pmatrix} \tag{5.34}$$

et l'équilibre entre sous-domaines.

La difficulté est que les réactions aux coins n'apparaissent pas clairement durant la résolution puisque la continuité du déplacement est imposée en ces coins. Néanmoins, cette information est nécessaire pour la reconstruction du champ statiquement admissible et donc pour l'estimation d'erreur. Nous proposons $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_r^{(s)} \\ \boldsymbol{\lambda}_c^{(s)}\end{pmatrix}$ avec $\boldsymbol{\lambda}_c^{(s)}$ défini comme dans l'équation 5.32

Puisque FETI-DP est une approche de type dual, l'équilibre des réactions est automatiquement vérifiée aux degrés de libertés (br) des interfaces. En effet, par définition : $\boldsymbol{\lambda}_r^{(s)} = (\mathbf{B}_r^{(s)})^T\mathbf{\Lambda}$. Un calcul direct montre que les réactions nodales sont équilibrées aux coins, c'est-à-dire $\sum_s \mathbf{B}_c^{(s)^T}\boldsymbol{\lambda}_c^{(s)} = 0$

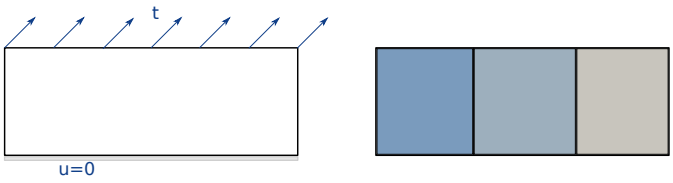


FIGURE 5.10 – Poutre rectangulaire : chargement, conditions aux limites et sous-structuration

Enfin, en appliquant les techniques détaillées en section 5.2, il reste à reconstruire des réactions nodales aux coins sans les contributions croisées. L'estimation de l'erreur se fait de la même manière que pour les autres approches. Ceci prouve que les théorèmes de séparation présentés pour FETI et BDD dans la partie 7.6.3 s'appliquent directement à FETI-DP et BDDC.

5.4 Cas d'une interface intersectant un bord de Dirichlet

5.4.1 Mise en évidence

Nous nous intéressons dans cette partie à des structures pour lesquelles la sous-structuration entraîne la présence d'une interface intersectant une condition de Dirichlet, c'est-à-dire lorsqu'il existe une interface $\Gamma^{(s,s')}$ telle que $\Gamma^{(s,s')} \cap \partial_u \Omega \neq \varnothing$. Dans ce cas là, il est observé que l'estimation de l'erreur en cadre sous-structuré n'est pas aussi efficace qu'en séquentiel. Afin d'illustrer ce phénomène, considérons une structure encastrée à sa base et sollicitée en cisaillement sur sa partie supérieure, comme illustré en figure 5.10. La sous-structuration considérée est également donnée sur cette figure. Cette décomposition ne comporte pas de points multiples (qui pourraient parasiter l'étude) et introduit des interfaces coupant la base de la structure, c'est-à-dire la condition d'encastrement. Le coefficient de Poisson est choisi égal à 0.3 et le module d'Young est choisi égal à 1Pa. L'hypothèse des contraintes planes est effectuée.

Dans le tableau 5.2, nous donnons les estimations d'erreur faites à convergence en séquentiel ou dans le cas sous-structuré pour différentes techniques de reconstruction de champs statiquement admissibles. La figure 5.11 est composée des cartes d'erreurs fournies par les estimateurs séquentiel et parallèle pour la EET.

	séquentiel	décomposition de domaine (DD)
EET $(\frac{h}{2^3})$	0.2019	0.21473
Flux-free $(\frac{h}{2^3})$	0.15445	0.15879

TABLE 5.2 – Poutre rectangulaire : estimateurs parallèle et séquentiel

Ces résultats montrent que l'erreur de discrétisation est surestimée dans le cas sous-structuré par rapport au cas séquentiel. Les cartes d'erreur montrent que l'intersection entre interface et encastrement est source d'erreur en sous-structuré mais pas en séquen-

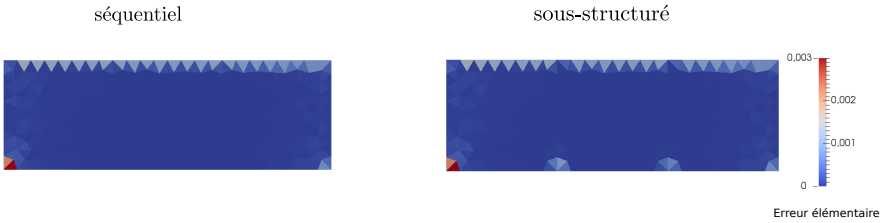


FIGURE 5.11 – Poutre rectangulaire : cartes de contributions à l'erreur (séquentiel et sous-structuré)

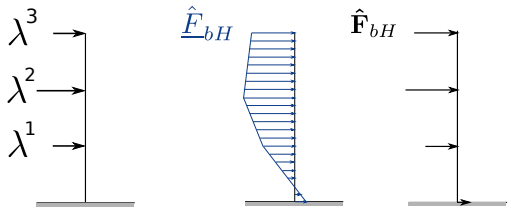


FIGURE 5.12 – Interface intersectant une condition de Dirichlet : ancienne reconstruction du représentant continu

tiel. C'est à cette erreur parasite qu'est due la différence d'estimation d'erreur constatée au tableau 5.2

5.4.2 Amélioration proposée

Afin d'éviter les erreurs parasites mises en évidence paragraphe 5.4.1, nous proposons de modifier la reconstruction du représentant continu de l'inter-effort $\underline{\hat{F}}_{bN}$.

Le nœud à l'intersection entre l'interface Γ et $\partial_u\Omega$ n'est pas un degré de liberté. Ainsi, il n'y a pas d'inter-effort entre les deux sous-domaines en ce nœud (que nous appellerons nœud 0). Jusqu'à présent, la reconstruction d'un représentant continu se faisait en considérant qu'il y avait une réaction nodale nulle en ce nœud comme illustré en figure 5.12.

Cependant, pour chaque domaine situé de part et d'autre de cette interface, il est possible de connaître la réaction associée à l'encastrement. Notons $\mathbf{f}^{(s)}_{reac}$ la réaction au nœud 0 pour le sous-domaine (s). Cette réaction est définie par :

$$(\mathbf{f}^{(s)}_{reac})^T = \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}_N : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\phi}_H{}^0\right) d\Omega^{(s)} - \int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \underline{\phi}_H{}^0 d\Omega^{(s)} - \int_{\partial_g\Omega} \underline{g} \cdot \underline{\phi}_H{}^0 dS \qquad (5.35)$$

où $\underline{\phi}_H{}^0$ est la fonction de forme vectorielle (deux directions) du nœud 0. Il est à remarquer qu'au cours des itérations, il n'y a aucune raison que ces réactions soient équilibrées entre sous-domaines, c'est-à-dire que, *a priori*,

$$\mathbf{f}^{(1)}_{reac} + \mathbf{f}^{(2)}_{reac} \neq 0 \qquad (5.36)$$

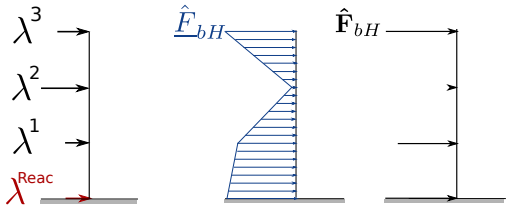


FIGURE 5.13 – Interface intersectant une condition de Dirichlet : nouvelle reconstruction du représentant continu

Puisqu'il est nécessaire d'avoir équilibre des efforts entre sous-domaines pour la reconstruction d'un champ statiquement admissible, nous proposons d'associer au nœud 0 un inter-effort $\boldsymbol{\lambda}_{reac}$ équilibré. Nous choisissons de le définir ainsi :

$$\boldsymbol{\lambda}_{reac}^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{reac}^{(1)} - \mathbf{f}_{reac}^{(2)}) \tag{5.37}$$

et

$$\boldsymbol{\lambda}_{reac}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{reac}^{(2)} - \mathbf{f}_{reac}^{(1)}) \tag{5.38}$$

Puis, le représentant continu est reconstruit de la même manière que précédemment mais en utilisant $\boldsymbol{\lambda}_{reac}$ au nœud 0, comme illustré en figure 5.13

Le représentant continu vérifie bien le principe d'action réaction à l'interface. De plus, l'équilibre vis-à-vis des modes rigides est évidemment vérifié puisqu'il n'y a pas de mode rigide pour de telles sous-structures (présence de l'encastrement). Il est à noter qu'une telle procédure implique des échanges entre sous-domaines. Néanmoins ces échanges ne concernent que peu de sous-domaines et peu de quantités sont échangées (deux scalaires dans ce cas).

5.4.3 Mise en œuvre

Le tableau 5.3 montre que l'utilisation des réactions permet d'améliorer l'estimation et de se rapprocher de la valeur obtenue dans le cadre séquentiel, ce qui se constate également sur les cartes d'erreur (cf figure 5.14).

	séquentiel	DD sans optimisation	DD avec optimisation
EET $(\frac{h}{2^3})$	0.2019	0.21473	0.20552
Flux-free $(\frac{h}{2^3})$	0.15445	0.15879	0.15477

TABLE 5.3 – Poutre rectangulaire : estimateurs

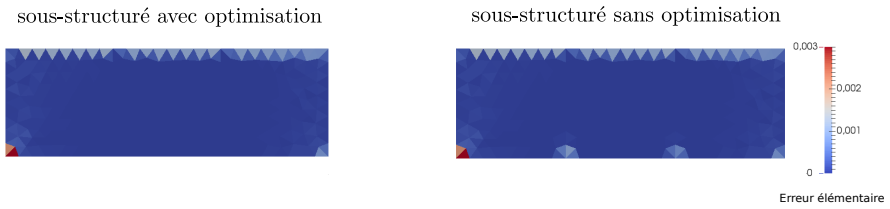


FIGURE 5.14 – Poutre rectangulaire : cartes de contributions à l'erreur (séquentiel et sous-structuré avec optimisation)

Troisième partie

Séparation des sources d'erreur et définition du nouveau critère d'arrêt dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement : pilotage de la résolution

Dans cette partie, nous présentons les principaux théorèmes et propriétés fournissant des encadrements des erreurs globales et locales (sur des quantités d'intérêt). Dans ces encadrements, l'erreur de discrétisation et l'erreur algébrique sont séparées. Ces travaux ont fait l'objet de deux publications [124, 123] et de deux communications [120, 119].

Chapitre 6

Estimation d'erreur globale

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle borne supérieure de l'erreur globale permettant de séparer l'erreur de discrétisation de l'erreur algébrique dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Nous montrons comment cette séparation permet la définition d'un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif et illustrons la séparation sur plusieurs exemples. Puis, en se basant sur des travaux existant en vérification, nous proposons une méthodologie entièrement parallèle permettant d'obtenir une borne inférieure de l'erreur globale en cadre sous-structuré. De plus, nous proposons une seconde borne inférieure permettant la séparation des deux sources d'erreur au cours des itérations.

6.1 Borne supérieure de l'erreur globale

Dans cette section, nous nous intéressons à une majoration de l'erreur globale en cadre sous-structuré. Nous montrons comment une borne supérieure séparant les différentes sources d'erreur permet un pilotage du solveur.

6.1.1 Nouvelle borne séparant les contributions

Dans le chapitre 3.3.6, nous avons observé la convergence rapide de l'estimateur sous-structuré et donc l'inefficacité des dernières itérations pour l'amélioration de la qualité globale de la solution. Notre objectif est de séparer les deux sources d'erreur présentes dans la résolution : l'erreur de discrétisation due à la méthode des éléments finis et l'erreur algébrique due à l'utilisation d'un solveur itératif. Ainsi, si dès les premières itérations, nous sommes capables d'identifier l'erreur de discrétisation, nous pourrons définir un critère d'arrêt du solveur en lien avec ce niveau d'erreur. Autrement dit, nous n'effectuerons plus les itérations inutiles (celles qui rendent le résidu algébrique minuscule mais ne diminuent pas l'erreur de discrétisation).

Nous proposons une séparation dans le résultat fondamental suivant :

Théorème 6.1. *En se référant aux notations des algorithmes 3 et 4*

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_N|||_\Omega \leqslant \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{z}} + \sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \underline{\hat{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})} \tag{6.1}$$

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega \leqslant \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{z}} + \sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \underline{\hat{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})} \tag{6.2}$$

La preuve de ce résultat fondamental est basé sur deux lemmes.

Lemme 6.2. *Soit* $\underline{u}_{ex} \in \mathrm{CA}(\Omega)$ *la solution exacte du problème de référence,* $(\underline{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$ *et* $(\underline{u}_N^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$ *les champs définis à la section 3.1, alors :*

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_N|||_\Omega \leqslant |||\underline{u}_N - \underline{u}_D|||_\Omega + \sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \underline{\hat{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})} \tag{6.3}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est basée sur le résultat suivant, dont une démonstration peut être trouvée dans [138] :

Propriété 6.3. *Pour* $(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathrm{CA}(\Omega) \times \mathrm{CA}(\Omega)$ *et* $\underline{\widetilde{u}} \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$,

$$|||\underline{u} - \underline{\widetilde{u}}|||_\Omega \leqslant |||\underline{v} - \underline{\widetilde{u}}|||_\Omega + \sum_s \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u} - \underline{\widetilde{u}}) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\frac{\underline{u} - \underline{v}}{|||\underline{u} - \underline{v}|||_\Omega}\right) d\Omega \tag{6.4}$$

En appliquant ce résultat avec $\underline{u} = \underline{u}_{ex}$ et $\widetilde{\underline{u}} = (\underline{u}_N^{(s)})_s$, et en notant $\underline{\varphi} = \frac{\underline{u}_{ex} - \underline{v}}{|||\underline{u}_{ex} - \underline{v}|||_\Omega} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$, le second terme de l'expression est simplifié en introduisant la quantité $(\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\sum_s \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_{ex}^{(s)} - \underline{u}_N^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\varphi}^{(s)}\right) d\Omega &= \sum_s \int_{\Omega_s} (\underline{\underline{\sigma}}_{ex}^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\varphi}^{(s)}\right) d\Omega \\
&= \sum_s \int_{\Omega_s} (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{\varphi}^{(s)}\right) d\Omega \\
&\leqslant \sum_s \|\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega^{(s)}} |||\underline{\varphi}^{(s)}|||_{\Omega^{(s)}} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_s \|\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}\|^2_{\mathbb{H}^{-1},\Omega^{(s)}}} \\
&\qquad \times \underbrace{\sqrt{\sum_s |||\underline{\varphi}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}}_{=1}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

où l'inégalité de Cauchy-Schwarz a été utilisée deux fois. Par définition

$$\|\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega^{(s)}} = e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)}) \tag{6.6}$$

Il reste à choisir $\underline{v} = \underline{u}_D$ dans le premier terme de l'équation (6.4). □

Lemme 6.4. *En utilisant les notations des algorithmes 3 ou 4, nous avons :*

$$\|\underline{u}_N - \underline{u}_D\|^2_{\mathbb{H},\Omega} = \mathbf{r}^T \mathbf{z} \tag{6.7}$$

Démonstration. Réécrivons le premier terme en utilisant le théorème de Stokes et la définition (1.14) :

$$\begin{aligned}
\|\underline{u}_N - \underline{u}_D\|^2_{\mathbb{H},\Omega} &= \sum_s \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)} - \underline{u}_N^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)} - \underline{u}_N^{(s)}\right) d\Omega \\
&= \sum_s \int_{\Gamma^{(s)}} \left((\underline{\underline{\sigma}}_D^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}) \cdot \underline{n}^{(s)}\right) \cdot \left(\underline{u}_D^{(s)} - \underline{u}_N^{(s)}\right) d\Gamma \\
&\quad \underbrace{- \sum_s \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}_D^{(s)} - \underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)}) \cdot (\underline{u}_D^{(s)} - \underline{u}_N^{(s)}) d\Omega}_{=0} \\
&= \sum_s \left(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}\right)^T \mathbf{t}^{(s)} \left(\mathbf{u}_D^{(s)} - \mathbf{u}_N^{(s)}\right) \\
&= \sum_s \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)^T} \delta \mathbf{u}_b^{(s)}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Dans l'algorithme BDD, nous avons :

$$\sum_s \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)^T} \delta \mathbf{u}_b^{(s)} = \sum_s (\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T} \mathbf{r})^T \delta \mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{r}^T \mathbf{z} \tag{6.9}$$

Dans l'algorithme FETI, nous utilisons la propriété suivante : $\mathbf{r} = \mathbf{P}_2^T \mathbf{r}$:

$$\sum_s \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)^T} \delta \mathbf{u}_b^{(s)} = \sum_s \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)^T} \tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T} \mathbf{r} = \sum_s \boldsymbol{\delta\lambda}^{(s)^T} \tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T} \mathbf{P}_2^T \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{z} \tag{6.10}$$

Enfin, la seconde inégalité du théorème est démontrée en remarquant que :

$$\begin{aligned} e_{CR_\Omega}(\underline{u}_D, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N) &= \| \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \\ &= \| \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_N) + \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_N - \underline{u}_D) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \\ &\leqslant \| \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_N) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} + |||\underline{u}_N - \underline{u}_D|||_\Omega \\ &\leqslant e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N) + \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{z}} \end{aligned} \tag{6.11}$$

□

La borne supérieure du théorème 6.1 fait apparaître deux termes :

— la norme induite par le préconditionneur du résidu du gradient conjugué : il s'agit d'une erreur purement algébrique

— la somme sur l'ensemble des sous-domaines des erreurs en relation de comportement évaluées avec les champs $\underline{u}_N^{(s)}$ et $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)}$: il s'agit d'un terme représentant principalement l'erreur de discrétisation

6.1.2 Définition d'un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif

A l'aide de cette séparation des sources d'erreur, nous proposons un critère d'arrêt du gradient conjugué adapté à la discrétisation. La mise en œuvre est décrite dans l'algorithme 6.

Ainsi, le solveur s'arrête lorsque la résidu algébrique est α fois plus petit (on pourrait choisir $\alpha = 10$ par exemple) que l'erreur de discrétisation. Le coefficient β (typiquement 2) est là pour tenir compte des éventuelles faibles variations dans l'estimateur de l'erreur de discrétisation au cours des itérations.

6.1.3 Exemples numériques

Nous mettons en œuvre sur les deux structures la séparation des sources d'erreur présentée précédemment.

6.1.3.1 Structure à solution exacte

Nous réalisons un calcul sur la structure 1 avec les paramètres spécifiés dans le tableau 6.1 afin de vérifier que le terme représentant l'erreur de discrétisation est bien un majorant de l'erreur vraie.

Algorithme 6 : Solveur de décomposition de domaine avec critère d'arrêt adapté à l'erreur de discrétisation globale

Définir $\alpha > 1$ et $\beta \geqslant 1$;
Initialiser et obtenir $(\mathbf{u}_N^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}, \mathbf{r}, \mathbf{z})$;
Estimer l'erreur de discrétisation $e^2 = \sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})$;
while $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} > e/\alpha$ **do**
  while $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} > e/(\alpha\beta)$ **do**
    Faire les itérations de Alg. 3 ou Alg. 4, obtenir $(\mathbf{u}_N^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})$
  end
  Actualiser l'estimation de l'erreur $e^2 = \sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})$;
end

♯ ddl	2326
Approche	primale
Algorithme	BDD
Préconditionneur	Neumann
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	*Flux-free*
Espace de résolution des problèmes locaux	$\frac{h}{2^2}$

TABLE 6.1 – Structure 1 : paramètres

La figure 6.1 illustre la rapide convergence des estimateurs et des erreurs vraies. Les quantités $|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_N|||_\Omega$ et $|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega$ sont bornées par $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} + e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N)$. Evidemment, lorsque le solveur a convergé, les erreurs vraies $|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_N|||_\Omega$ et $|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega$ sont égales et les estimations sont les mêmes.

La figure 6.2 illustre la séparation des sources d'erreur. L'erreur algébrique $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}}$ décroît régulièrement jusqu'à 10^{-9} tandis que l'erreur de discrétisation $e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N)$ est presque constante.

6.1.3.2 Structure pré-fissurée

Sur la structure 2 (voir tableau 6.2 pour les paramètres de la simulation), nous illustrons la bonne séparation des sources d'erreur.

Nous observons sur la figure 6.3 que l'erreur de discrétisation $e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N)$ évolue très peu après la première itération et que le résidu $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}}$ devient très vite négligeable devant l'estimation de l'erreur de discrétisation (même avant que le critère classique du solveur itératif soit atteint).

La figure 6.4 permet de vérifier que la distribution spatiale de l'erreur de discrétisation est convergée lorsque l'erreur algébrique est négligeable devant l'erreur de discrétisation (10 fois plus petite). Les cartes représentent la différence relative entre les erreurs élémentaires à l'itération 20 avec les erreurs élémentaires à l'itération 1 (à l'initialisation)

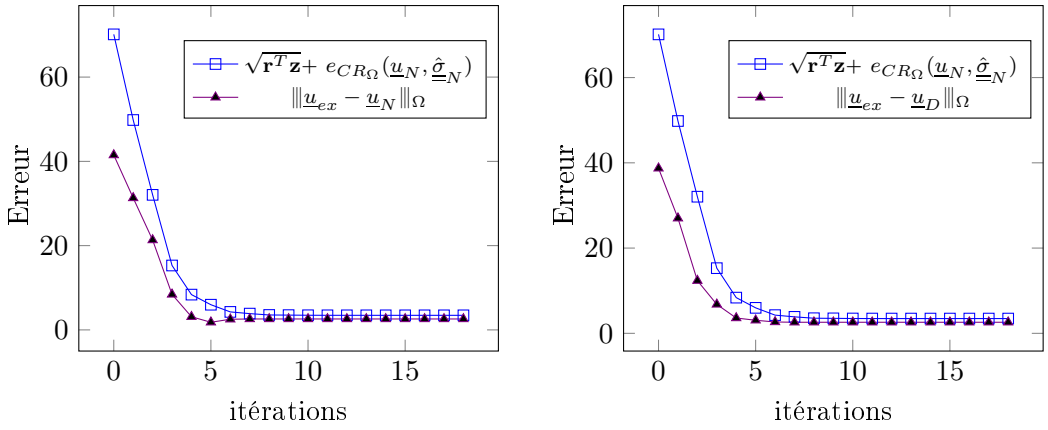


FIGURE 6.1 – Structure 1 : évolution des estimateurs au cours des itérations

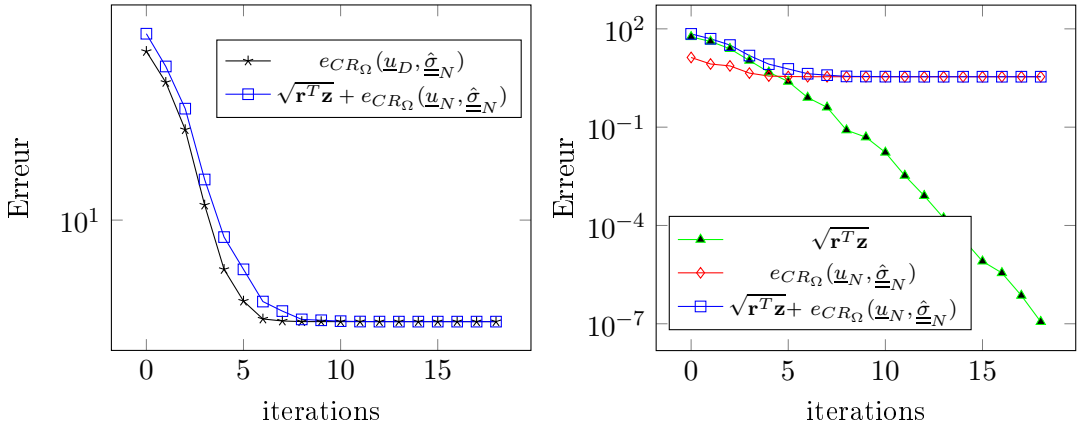


FIGURE 6.2 – Structure 1 : convergence des estimateurs et séparation des sources d'erreur

ou à l'itération 7 (lorsque l'erreur algébrique est négligeable).

6.2 Borne inférieure de l'erreur globale

Nous étendons les résultats permettant d'obtenir une borne inférieure de l'erreur au contexte des décompositions de domaine. Pour commencer, nous donnons les théorèmes démontrant les bornes inférieures de l'erreur. Deux de ces théorèmes séparent les deux sources d'erreur. Ensuite, nous expliquons comment reconstruire l'estimation d'erreur continue nécessaire à l'évaluation de ces bornes, en nous appuyant sur les techniques décrites dans [107]. Enfin, nous mettons en application ce résultat sur les structures 1 et 2.

♯ ddl	12504
Approche	duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Projecteur	**I**
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	$\frac{h}{2^2}$

TABLE 6.2 – Structure 2 : paramètres

6.2.1 Borne inférieure de l'erreur globale en cadre sous-structuré

La première propriété est l'extension triviale du résultat connu à convergence au cas où les champs vérifiant les bonnes propriétés sont reconstruits au cours des itérations. Le second résultat est une borne inférieure constituée de deux termes représentant les deux contributions à l'erreur : la part algébrique et la part de discrétisation.

6.2.1.1 Borne inférieure sans séparation des sources

Nous énonçons une première propriété donnant une borne inférieure de l'erreur :

Propriété 6.5. *Soit* $\underline{u}_{ex} \in \mathrm{CA}(\Omega)$ *la solution exacte du problème de référence,* $(\underline{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$ *le champ de déplacement défini à la section 3.1 et* $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)\backslash\{\underline{0}\}$ *alors*

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega \geqslant \frac{|R_D(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \tag{6.12}$$

où

$$\begin{aligned} R_D(\underline{w}) &= \sum_s R_D^{(s)}(\underline{w}^{(s)}) \\ &= \sum_s \left(\int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \underline{w}^{(s)} d\Omega + \int_{\partial_g \Omega^{(s)}} \underline{g} \cdot \underline{w}^{(s)} dS - \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right) d\Omega^{(s)} \right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

Démonstration. Cette propriété est l'application du résultat 1.49 en remplaçant le champ

solution éléments finis $\underline{u}_H \in \mathrm{CA}(\Omega)$ par le champ $(\underline{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$. Le résidu se réécrit :

$$\begin{aligned} R_D(\underline{w}) &= \sum_s R_D^{(s)}(\underline{w}^{(s)}) \\ &= \sum_s \left(\int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \underline{w}^{(s)} d\Omega + \int_{\partial_g \Omega^{(s)}} \underline{g} \cdot \underline{w}^{(s)} dS - \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right) d\Omega^{(s)} \right) \\ &= L(\underline{w}) - a(\underline{u}_D, \underline{w}) \end{aligned} \tag{6.14}$$

□

6.2.1.2 Borne inférieure avec séparation des sources

Nous proposons à présent une borne inférieure séparant les sources d'erreur :

Théorème 6.6. *Soit $\underline{u}_{ex} \in \mathrm{CA}(\Omega)$ la solution exacte du problème de référence, $(\underline{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$ et $(\underline{u}_N^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$ les champs de déplacement définis à la section 3.1 et $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega) \backslash \{\underline{0}\}$, alors*

$$|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega \geqslant \left| \frac{|R_N(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} - \frac{|a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \right| \tag{6.15}$$

où

$$\begin{aligned} R_N(\underline{w}) &= \sum_s R_N^{(s)}(\underline{w}^{(s)}) \\ &= \sum_s \left(\int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \underline{w}^{(s)} d\Omega + \int_{\partial_g \Omega^{(s)}} \underline{g} \cdot \underline{w}^{(s)} dS - \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_N^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right) d\Omega^{(s)} \right) \end{aligned} \tag{6.16}$$

Démonstration. La preuve est basée sur l'application de la propriété 6.5 et de l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} |||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega &\geqslant \frac{|R_D(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \\ |||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega &\geqslant \frac{|L(\underline{w}) - a(\underline{u}_D, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \\ &\geqslant \frac{|L(\underline{w}) - a(\underline{u}_N, \underline{w}) - a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \\ &\geqslant \left| \frac{|R_N(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} - \frac{|a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \right| \end{aligned} \tag{6.17}$$

□

Le second terme de l'inégalité est nul à convergence. Il représente donc une erreur algébrique. Ainsi, le premier terme de l'inégalité dépend principalement de l'erreur de discrétisation. Nous donnons à présent une seconde borne inférieure un peu moins précise que la première au début des itérations mais faisant apparaître clairement le résidu algébrique du solveur (c'est-à-dire la norme du résidu).

Théorème 6.7. *Soit* $\underline{u}_{ex} \in \mathrm{CA}(\Omega)$ *la solution exacte du problème de référence,* $(\underline{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$ *et* $(\underline{u}_N^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$ *les champs de déplacement définis à la section 3.1 et* $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)\backslash\{\underline{0}\}$ *, alors*

$$\|\!|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|\!\|_\Omega \geqslant \frac{|R_N(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} - \sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} \tag{6.18}$$

Démonstration. La preuve est basée sur l'application du théorème 6.6 et sur la remarque suivante :

$$\left| \frac{|R_N(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} - \frac{|a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} \right| \geqslant \frac{|R_N(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} - \frac{|a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} \tag{6.19}$$

De plus

$$\begin{aligned} |a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})| &= |\sum_s \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)} - \underline{u}_N^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right)| \\ &\leqslant \sum_s \|\!|\underline{u}_N^{(s)} - \underline{u}_D^{(s)}|\!\|_{\Omega^{(s)}} \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|_{\Omega^{(s)}} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_s \|\!|\underline{u}_N^{(s)} - \underline{u}_D^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}} \sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}} \end{aligned} \tag{6.20}$$

en utilisant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Enfin, en utilisant le résultat du lemme 6.7 :

$$\|\!|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|\!\|_\Omega \geqslant \frac{|R_N(\underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} - \sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} \tag{6.21}$$

□

Le second terme de l'inégalité est nul à convergence. Il représente donc une erreur algébrique. Ainsi, le premier terme de l'inégalité dépend principalement de l'erreur de discrétisation. Il est à noter qu'au début des itérations, cette minoration est triviale et peu précise. En effet, au début des itérations, l'erreur algébrique prédomine si bien que $\frac{|L(\underline{w}) - a(\underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s \|\!|\underline{w}^{(s)}|\!\|^2_{\Omega^{(s)}}}} - \sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}}$ est négatif.

En plus d'une minoration dès les premières itérations de l'erreur de discrétisation, cette séparation peut permettre de fixer de manière moins arbitraire le coefficient α présent dans la définition du nouveau critère d'arrêt du solveur itératif. En effet, dans le cas de la connaissance d'une borne inférieure de discrétisation, le critère pourrait être d'arrêter le solveur quand le résidu algébrique est plus petit que le terme de discrétisation de la borne inférieure.

6.2.2 Construction d'un estimateur continu en cadre sous-structuré

Dans le cas où c'est la *flux-free method* qui est utilisée pour reconstruire, pour chaque sous-domaine, un champ statiquement admissible $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)}$, nous proposons de reconstruire un champ de déplacement continu à partir des solutions sur les *star-patches*, comme décrit dans [107].

Rappelons les problèmes par *patch* résolus pour chaque sous-domaine $^{(s)}$ dans la méthode *flux-free*

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } (\underline{e}^i)^{(s)} \in \mathrm{CA}_h^0(\tilde{\partial}^{-2}i) \text{ tel que } \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}_h^0(\tilde{\partial}^{-2}i)\\
a((\underline{e}^i)^{(s)}, \underline{v}) &= R_N^{(s)}(\phi_H^i \underline{v})\\
&= \int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \phi_H^i \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_g \Omega^{(s)}} \underline{g} \cdot \phi_H^i \underline{v} dS + \int_{\Gamma^{(s)}} \underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)} \cdot \underline{v} dS\\
&- \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_N^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\phi_H^i \underline{v}\right) d\Omega
\end{aligned} \tag{6.22}$$

où $\underline{\hat{F}}_{bN}^{(s)}$ est le représentant continu construit à partir des réactions nodales à l'interface $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$ (voir paragraphe 5.1).

En appliquant directement la méthodologie développée dans [107], nous pouvons reconstruire des champs de déplacement continus par sous-domaines et nuls sur $\partial_u \Omega$ mais dont la continuité aux interfaces n'est pas assurée. Ainsi, nous avons :

$$((\Pi_h(\sum_{i \in \mathcal{V}} \phi_H^i \underline{e}^i))^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)}) \tag{6.23}$$

Afin d'obtenir un champ $\underline{w} \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$, nous décidons d'imposer la nullité aux interfaces, c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}^{(s)}(\underline{w}^{(s)}) = 0 \tag{6.24}$$

Pour cela, nous proposons de ne pas prendre en compte dans la somme les nœuds situés sur l'interface (que nous noterons $\mathcal{V}_\Gamma$) :

$$\underline{w}^{(s)} = (\Pi_h(\sum_{i \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_\Gamma} \phi_H^i \underline{e}^i))^{(s)} \tag{6.25}$$

Par conséquent, $\underline{w}^{(s)} \in \mathrm{CA}^{00}(\Omega^{(s)})$ et donc $\underline{w} = (\underline{w}^{(s)})_s = (\underline{w}^{(s)})_s \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$. Faire ce choix permet de ne pas avoir d'échanges à effectuer entre les sous-domaines pour la

construction du champ continu. Ainsi, tout comme l'obtention d'une borne supérieure, l'obtention d'une borne inférieure est entièrement parallèle. De plus, considérant que les déplacements $\underline{e}^i$ ont été calculés pour la reconstruction de champs statiquement admissibles dans le cadre de la *flux-free method*, le surcoût pour obtenir une borne inférieure est très faible.

Remarque 6.8. *En ce qui concerne l'implémentation numérique, l'utilisation des remarques faites dans [107] permet de simplifier l'évaluation du champ discrétisé* $\mathbf{w}^{(s)}$*. En effet :*

$$\mathbf{w}^{(s)} = \sum_{i \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_\Gamma} \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{i}} \odot \mathbf{e}^{\mathbf{i}(s)} \tag{6.26}$$

où $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{i}}$ *regroupe les valeurs nodales de la fonction de forme* ϕ_H^i *projeté sur l'espace plus riche utilisé pour résoudre le problème 6.22 dont* $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(s)}$ *est la solution discrétisée et où* $\odot$ *représente le produit terme à terme.*

Si ce n'est pas la méthode *flux-free* qui a été employée pour reconstruire un champ statiquement admissible, l'obtention d'un champ de déplacement continu $\underline{w}$ est toujours possible mais plus coûteuse. Par exemple, si la méthode EET a été employée, la résolution des problèmes locaux se faisant par élément, il est possible de reconstruire, par sous-domaine, un champ de déplacement continu $\underline{w}^{(s)}$ en faisant la moyenne sur les arêtes des champs issus des résolutions élémentaires.

6.2.3 Exemples numériques

Pour faciliter la lecture des légendes, nous notons :

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{|L(\underline{w}) - a(\underline{u}_D, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \quad \rho_{discr} = \dfrac{|L(\underline{w}) - a(\underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \quad \rho_{alg} = \dfrac{|a(\underline{u}_D - \underline{u}_N, \underline{w})|}{\sqrt{\sum_s |||\underline{w}^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}} \\ \rho_{bis} = \rho_{discr} - \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{z}} \quad \theta = \sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})} \quad \theta_{discr} = \sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})} \end{cases} \tag{6.27}$$

Les quantités indiquées avec un exposant ^{seq} sont des grandeurs relatives à un calcul séquentiel.

6.2.3.1 Estimation à convergence du solveur itératif

Dans cette partie, nous mettons en œuvre la reconstruction d'un champ continu $\underline{w}$ en cadre sous-structuré lorsque la méthode *flux-free* a été utilisée pour la reconstruction du champ statiquement admissible. L'estimation de la borne inférieure est réalisée à convergence du solveur itératif.

Nous réalisons l'estimation de la borne inférieure à convergence du solveur itératif sur la structure 1 avec les paramètres données dans le tableau 6.3.

Approche	primale
Algorithme	BDD
Préconditionneur	Neumann
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	*Flux-free*
Espace de résolution des problèmes locaux	$\frac{h}{2^2}$

TABLE 6.3 – Structure 1 : paramètres

Nous étudions la convergence de la borne inférieure en fonction du pas h du maillage. Nous vérifions sur la figure 6.2.3.1 que la borne inférieure est bien un minorant de l'erreur exacte pour les approches primales et duales ainsi que pour un calcul séquentiel. Les estimations parallèles sont aussi précises que l'estimation séquentielle. La convergence en fonction du pas h du maillage est celle attendue pour un problème régulier comme celui-ci.

Puis, nous comparons les qualités des bornes inférieures calculées en séquentiel avec celles calculées en parallèle et ce pour différentes sous-structurations comme illustré sur la figure 6.6 à discrétisation fixée. Nous constatons dans le tableau 6.4 que la qualité de la borne inférieure est indépendante de la sous-structuration.

	a	b	c	d	e	f
$\frac{\theta}{\theta_a}$	1	1.0002	0.9993	0.9989	1.0004	0.9993
$\frac{\rho}{\rho_a}$	1	0.9981	0.9964	0.9926	0.9958	0.9886

TABLE 6.4 – Structure 1 : bornes supérieures et inférieures relatives pour différentes sous-structurations

6.2.3.2 Estimation au cours des itérations

Nous mettons en œuvre la séparation des sources d'erreur et étudions l'évolution des différents termes des théorèmes précédents au cours des itérations sur la structure 1. Les paramètres de la simulation effectuée sont donnés dans le tableau 6.5.

♯ ddl	2326
Approche	Primale
Algorithme	BDD
Préconditionneur	Neumann
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	*Flux-free*
Espace de résolution des problèmes locaux	$\frac{h}{2^2}$

TABLE 6.5 – Structure 1 : paramètres

Sur le premier graphique de la figure 6.7, nous vérifions que les bornes supérieure θ et inférieure ρ encadrent bien l'erreur vraie $|||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega$ tout au long des itérations. Une fois

encore, nous observons la convergence rapide de ces deux bornes. Sur le même graphique, nous donnons également la partie due à la discrétisation de ces deux bornes : θ_{discr} et ρ_{discr}. Nous constatons que cet encadrement est beaucoup plus fin que le précédent et permet de rendre compte dès les premières itérations de l'intervalle dans lequel sera située l'erreur à convergence. Dans le second graphique de la figure 6.7, nous présentons les termes provenant de l'erreur algébrique présent dans les théorèmes 6.6 et 6.7. La grandeur $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}}$ étant la norme via le préconditionneur du résidu du solveur itératif, nous observons logiquement sa décroissance au cours des itérations. La quantité ρ_{alg} décroît également au cours des itérations. Néanmoins, nous observons que la décroissance n'est pas stricte.

Sur la figure 6.8 montre l'évolution des deux bornes inférieures de l'erreur présentées dans les théorèmes 6.6 et 6.7. Une fois encore, les deux bornes inférieures minorent bien l'erreur vraie tout au long du calcul. Comme attendu, la seconde minoration est triviale au début des itérations puisqu'elle revient à minorer une mesure de l'erreur positive par une borne négative. Néanmoins, le zéro de cette borne permet de savoir à quelle itération l'erreur algébrique devient plus petite que l'erreur de discrétisation.

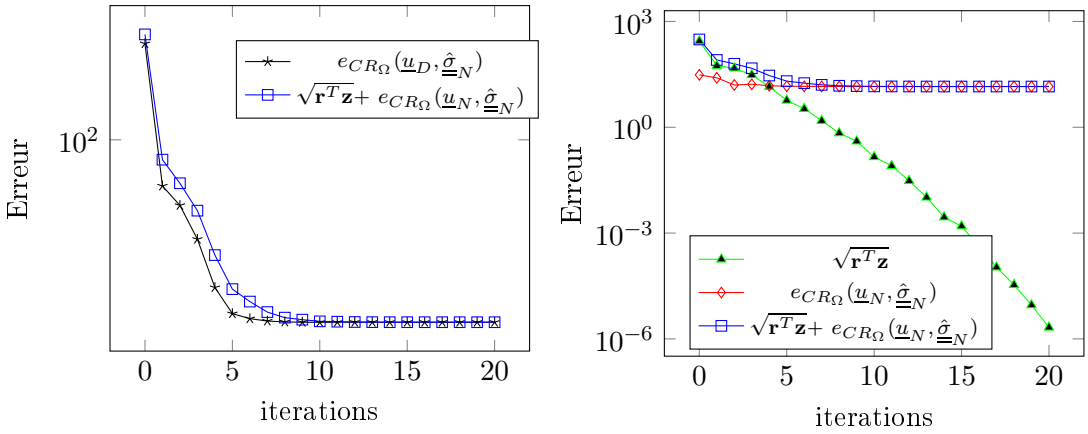


FIGURE 6.3 – Structure 2 : convergence des estimateurs et séparation des sources d'erreur

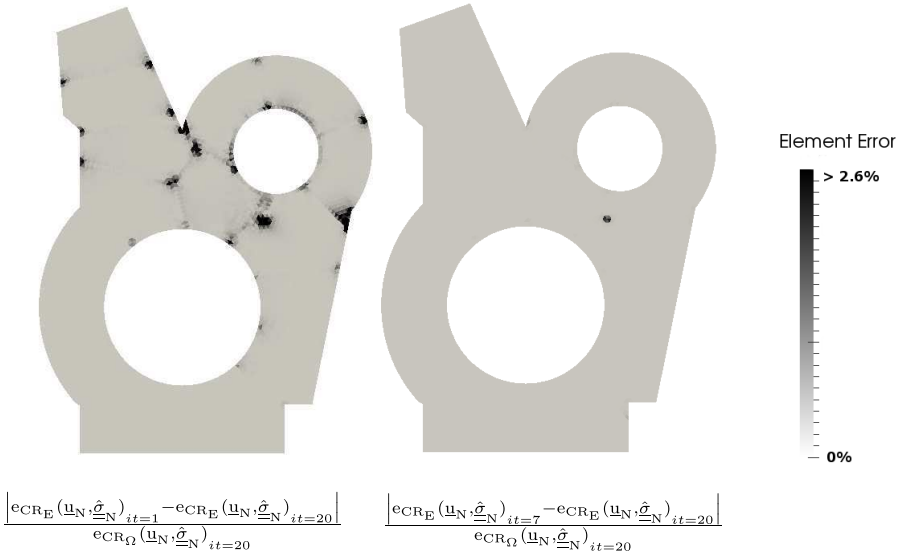


FIGURE 6.4 – Structure 2 : convergence de la distribution spatiale de l'erreur de discrétisation

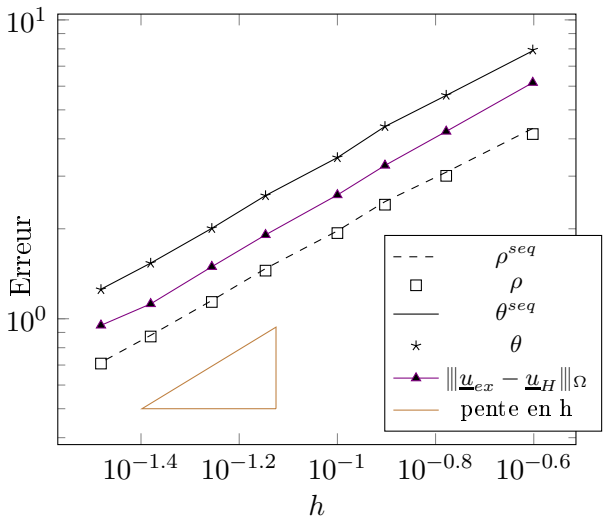


FIGURE 6.5 – Structure 1 : évolution de la borne inférieure de l'erreur calculée à convergence en fonction du pas h du maillage

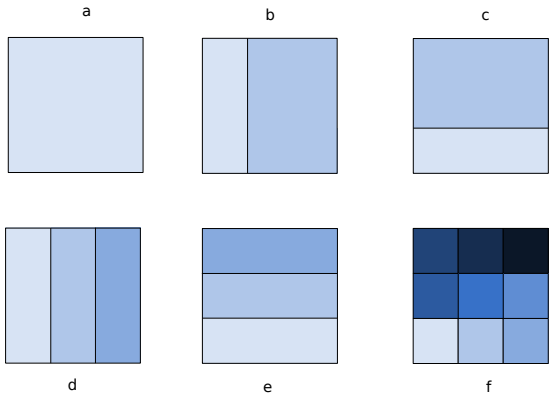


FIGURE 6.6 – Structure 1 : différentes sous-structurations

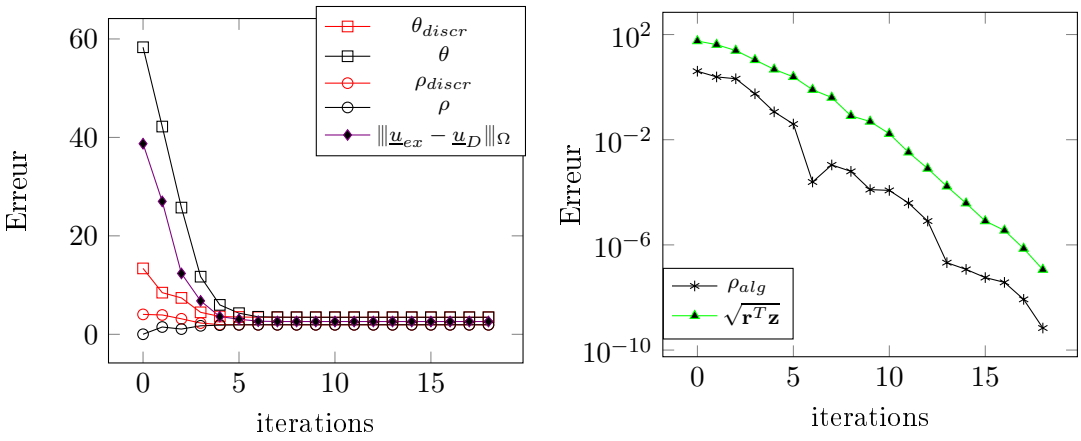


FIGURE 6.7 – Structure 1 : séparation des sources d'erreur dans les bornes supérieure et inférieure

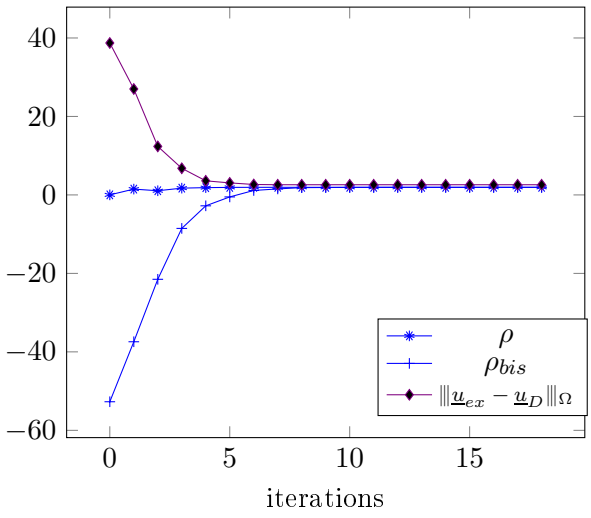


FIGURE 6.8 – Structure 1 : évolution des deux bornes inférieures et de l'erreur exacte au cours des itérations

Chapitre 7

Estimation d'erreur d'une quantité d'intérêt

Dans ce chapitre, nous présentons une estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt linéaire en cadre sous-structuré. En utilisant les méthodes basées sur les extracteurs, nous montrons qu'il est possible de résoudre les problèmes de référence et adjoint (qui sont auto-adjoints) simultanément. L'encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt que nous proposons sépare les différentes contributions (algébrique et de discrétisation) pour chacun des problèmes, ce qui nous conduit à définir un nouveau critère d'arrêt pour le solveur. Nous illustrons cette séparation et le nouveau critère sur des exemples numériques. Enfin, nous montrons comment la connaissance d'une borne inférieure des erreurs sur les problèmes direct et adjoint permet d'améliorer la précision de l'estimation d'erreur sur la quantité d'intérêt.

7.1 Résolution des problèmes de référence et adjoint

Considérons une quantité d'intérêt I définie par une fonctionnelle linéaire $\tilde{L}$ du déplacement. La forme générale de cette fonctionnelle linéaire est :

$$\tilde{L} = \int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) + \underline{f}_\Sigma \underline{u}) d\Omega = \sum_s \int_{\Omega^{(s)}} (\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^{(s)} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}^{(s)}\right) + \underline{f}_\Sigma^{(s)} \underline{u}^{(s)}) d\Omega \tag{7.1}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma$ et $\underline{f}_\Sigma$ sont les extracteurs. Ainsi, la valeur exacte de la quantité d'intérêt est donnée par :

$$I_{ex} = \tilde{L}(\underline{u}_{ex}) \tag{7.2}$$

7.1.1 Ecriture continue sous-structurée du problème adjoint

Pour le problème adjoint, l'espace des champs statiquement admissibles sur chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$ est :

$$\widetilde{\mathrm{SA}}^{(s)}(\Omega^{(s)}) = \left\{ \underline{\underline{\tau}} \in \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^{d\times d}_{\mathrm{sym}};\ \forall \underline{v} \in \mathrm{CA}^{00}(\Omega^{(s)}), \right.$$
$$\left. \int_\Omega \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega = \int_{\Omega^{(s)}} (\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^{(s)} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) + \underline{f}_\Sigma^{(s)} \underline{v}) d\Omega \right\} \tag{7.3}$$

La formulation du problème adjoint à l'aide des sous-espaces de champs admissibles est :

Trouver $\widetilde{\underline{u}}^{(s)}$ et $\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)}$ tels que

$$\forall s \begin{cases} \widetilde{\underline{u}}^{(s)} \in \mathrm{CA}^0(\Omega^{(s)}) \\ \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)} \in \widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega^{(s)}) \\ e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\widetilde{\underline{u}}^{(s)}, \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)}) = 0 \end{cases} \text{ et } \forall (s,s') \begin{cases} \mathrm{tr}(\widetilde{\underline{u}}^{(s)}) = \mathrm{tr}(\widetilde{\underline{u}}^{(s')}) \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \\ \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)} \cdot \underline{n}^{(s)} + \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s')} \cdot \underline{n}^{(s')} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \end{cases} \tag{7.4}$$

L'admissibilité globale (sur toute la structure) des champs se traduit ainsi :

$$(\widetilde{\underline{u}}^{(s)})_s \in \mathrm{CA}^0(\Omega) \Leftrightarrow \forall s,\ \widetilde{\underline{u}}^{(s)} \in \mathrm{CA}^0(\Omega^{(s)}) \text{ et } \forall (s,s'),\ \mathrm{tr}(\widetilde{\underline{u}}^{(s)}) = \mathrm{tr}(\widetilde{\underline{u}}^{(s')}) \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \tag{7.5}$$

$$(\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)})_s \in \widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega) \Leftrightarrow \forall s,\ \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)} \in \widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega^{(s)}) \text{ et } \forall (s,s'),\ \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)} \cdot \underline{n}^{(s)} + \widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s')} \cdot \underline{n}^{(s')} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^{(s,s')} \tag{7.6}$$

Le champ de déplacement cinématiquement admissible dans chaque sous-structure mais ne vérifiant pas la continuité aux interfaces appartient à $\mathrm{CA}^0(\bigcup \Omega^{(s)})$.

Le problème peut se réécrire :

$$\text{Trouver } \left((\widetilde{\underline{u}}^{(s)})_s, (\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)})_s\right) \in \mathrm{CA}^0(\Omega) \times \widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega) \text{ tel que } e_{CR_\Omega}((\widetilde{\underline{u}}^{(s)})_s, (\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{(s)})_s) = 0 \tag{7.7}$$

La solution de ce problème existe et est unique. Nous la notons $(\widetilde{\underline{u}}_{ex}^{(s)})_s, (\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}_{ex}^{(s)})_s$

7.1.2 Ecriture discrète sous-structurée du problème adjoint

Plaçons-nous dans le cas où la même sous-structuration et le même maillage sont utilisés pour la résolution des deux problèmes. Bien sûr, le problème adjoint pourrait être résolu sur une sous-structuration différente mais, dans ce cas, il serait difficile de résoudre les deux problèmes simultanément. Puisque la décomposition est unique, le problème discrétisé se réécrit en fonction des opérateurs d'assemblage déjà définis :

$$\begin{aligned} \forall s \text{ trouver } \widetilde{\mathbf{u}}^{(s)} \text{ et } \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(s)} \text{ tels que} \\ \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{tr}^{(s)}\widetilde{\mathbf{u}}^{(s)} &= \mathbf{0} \\ \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(s)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{(s)}\widetilde{\mathbf{u}}_b^{(s)} &= \widetilde{\mathbf{b}}^{(s)} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(s)} \end{aligned} \tag{7.8}$$

et

$$\widetilde{\mathbf{b}}^{(s)} = \widetilde{\mathbf{f}}_b^{(s)} - \mathbf{K}_{bi}^{(s)}\mathbf{K}_{ii}^{(s)^{-1}}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{(s)} \tag{7.9}$$

7.1.3 Résolution des problèmes

Si les deux problèmes sont résolus sur le même maillage, ils partagent la même matrice de rigidité. Il est alors possible de les résoudre simultanément à l'aide d'un gradient conjugué bloc. Les grandeurs des problèmes de référence et adjoint sont concaténées et alors

- le déplacement bloc est $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}]$
- le résidu bloc est $\mathbf{R} = [\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}]$
- le résidu préconditionné bloc est $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}]$
- les directions de recherche bloc sont $\mathbf{W}$ et $\mathbf{Q}$
- α est une matrice de taille 2×2

Sous forme bloc, les algorithmes BDD et FETI deviennent les algortihmes 7 et 8.

Remarque 7.1. *Il est nécessaire d'être attentif à une potentielle singularité de la matrice* $(\mathbf{Q}^T\mathbf{W})$ *dont l'inverse doit être calculée. En effet, si les directions de recherche générées pour les deux problèmes sont par malchance linéairement dépendantes alors les colonnes de* $(\mathbf{Q}^T\mathbf{W})$ *sont liées. Des techniques détectant cette possible déficience de rang sont disponibles (voir [3] par exemple). Elles permettent d'éliminer les directions de recherche redondantes.*

7.2 Reconstruction des champs admissibles au cours des itérations

A chaque itération du solveur, une construction, se basant sur [111], entièrement parallèle des champs suivants est possible :

Algorithme 7 : BDD-bloc. Inconnue d'interface $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}]$

$\mathbf{U} = \texttt{Initialize}(\mathbf{F}^{(s)})$;
$(\mathbf{\Lambda}_D^{(s)}, \mathbf{U}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{U}, \mathbf{F}^{(s)})$;
Calcul du résidu $\mathbf{R} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{\Lambda}_D^{(s)}$;
Réactions locales $\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{R}$; // $\mathbf{\Lambda}_N^{(s)} = \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}$
$\delta\mathbf{U}^{(s)} = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{U}_N^{(s)} = \mathbf{U}_D^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)}$
Résidu préconditionné $\mathbf{Z} = \sum_s \tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\delta\mathbf{U}^{(s)}$;
Direction de recherche $\mathbf{W} = \mathbf{P}_1\mathbf{Z}$;
while $\sqrt{\mathbf{R}^T\mathbf{Z}} > \epsilon$ **do**
  $(\boldsymbol{\delta\Lambda}_D^{(s)}, \delta\mathbf{U}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{W}, 0)$;
  $\mathbf{Q} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\delta\Lambda}_D^{(s)}$;
  $\alpha = (\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{R}^T\mathbf{Z})$;
  $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} + \mathbf{W}\alpha$; // $\mathbf{U}_D^{(s)} \leftarrow \mathbf{U}_D^{(s)} + \delta\mathbf{U}_D^{(s)}\alpha$; $\mathbf{\Lambda}_D^{(s)} \leftarrow \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} + \boldsymbol{\delta\Lambda}_D^{(s)}\alpha$
  $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} - \mathbf{Q}\alpha$;
  $\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{R}$; // $\mathbf{\Lambda}_N^{(s)} = \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}$
  $\delta\mathbf{U}^{(s)} = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{U}_N^{(s)} = \mathbf{U}_D^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)}$
  $\mathbf{Z} = \sum_s \tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\delta\mathbf{U}_b^{(s)}$;
  $\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{P}_1\mathbf{Z} - \mathbf{W}(\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{Q}^T\mathbf{P}_1\mathbf{Z})$
end

— $\underline{u}_D = (\underline{u}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\Omega)$ et $\underline{\widetilde{u}}_D = (\underline{\widetilde{u}}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$ champs de déplacement globalement admissibles, $(\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)}, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_D^{(s)})$ sont les réactions nodales associées qui ne sont pas équilibrées avant convergence.

— $\underline{u}_N = (\underline{u}_N^{(s)})_s \in \mathrm{CA}(\bigcup \Omega^{(s)})$ et $\underline{\widetilde{u}}_N = (\underline{\widetilde{u}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{CA}^0(\bigcup \Omega^{(s)})$: champs de déplacement associés aux conditions de Neumann $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$ (resp. $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_N^{(s)}$). Ces champs de déplacement ne sont pas continus aux interfaces avant convergence.

— $\underline{\underline{\sigma}}_N^{(s)} = \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_N^{(s)}\right)$: le champ de contraintes associé à $\underline{u}_N^{(s)}$. Il peut être utilisé (avec $\boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}$) pour construire les champs de contraintes $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)}$ qui sont statiquement admissibles $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N = (\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N^{(s)})_s \in \mathrm{SA}(\Omega)$. Il est possible de faire de même pour le problème adjoint $\underline{\underline{\hat{\widetilde{\sigma}}}}_N = (\underline{\underline{\hat{\widetilde{\sigma}}}}_N^{(s)})_s \in \widetilde{\mathrm{SA}}(\Omega)$.

Par conséquent, même si le solveur n'a pas convergé, des champs admissibles sont disponibles pour le problème de référence et le problème adjoint. Ces champs sont utilisés pour calculer des bornes supérieures de l'erreur pour chacun des problèmes [111] :

$$\begin{aligned} |||\underline{u}_{ex} - \underline{u}_D|||_\Omega &\leqslant e_{CR_\Omega}(\underline{u}_D, \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_N) \\ |||\underline{\widetilde{u}}_{ex} - \underline{\widetilde{u}}_D|||_\Omega &\leqslant e_{CR_\Omega}(\underline{\widetilde{u}}_D, \underline{\underline{\hat{\widetilde{\sigma}}}}_N) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Algorithme 8 : FETI-bloc. Inconnue d'interface $\mathbf{\Lambda} = [\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}]$

$\mathbf{\Lambda} = \texttt{Initialize}(\mathbf{F}^{(s)})$;
Réactions locales $\mathbf{\Lambda}_N^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}$;
$(\mathbf{U}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\mathbf{\Lambda}_N^{(s)}, \mathbf{F}^{(s)})$;
Calcul du résidu $\mathbf{R} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{t}^{(s)}\mathbf{U}_N^{(s)})$;
Déplacement local $\delta\mathbf{U}_b^{(s)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\mathbf{R}$; ;

$(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, \delta\mathbf{U}^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\delta\mathbf{U}_b^{(s)}, 0)$; // $\begin{array}{l}\mathbf{U}_D^{(s)} = \mathbf{U}_N^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)} \\ \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} = \mathbf{\Lambda}_N^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}\end{array}$

Résidu préconditionné $\mathbf{Z} = \mathbf{P}_2(\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)})$;
Direction de recherche $\mathbf{W} = \mathbf{Z}$;
while $\sqrt{\mathbf{R}^T\mathbf{Z}} > \epsilon$ **do**
  $(\delta\mathbf{U}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{W}, 0)$;
  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{t}^{(s)}\delta\mathbf{U}_N^{(s)})$;
  $\alpha = (\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{R}^T\mathbf{Z})$;

  $\mathbf{\Lambda} \leftarrow \mathbf{\Lambda} + \mathbf{W}\alpha$; // $\begin{array}{l}\mathbf{U}_N^{(s)} \leftarrow \mathbf{U}_N^{(s)} + \alpha\delta\mathbf{U}_N^{(s)} \\ \mathbf{\Lambda}_N^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}\end{array}$

  $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} - \mathbf{Q}\alpha$;
  $\delta\mathbf{U}_b^{(s)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\mathbf{R}$;

  $(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, \delta\mathbf{U}^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\delta\mathbf{U}_b^{(s)}, 0)$; // $\begin{array}{l}\mathbf{U}_D^{(s)} = \mathbf{U}_N^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)} \\ \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} = \mathbf{\Lambda}_N^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}\end{array}$

  $\mathbf{Z} = \mathbf{P}_2(\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)})$;
  $\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{Z} - \mathbf{W}(\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Z})$
end

7.3 Nouvelle borne séparant les contributions

7.3.1 Encadrement fondamental

La résolution éléments finis fourni la valeur $\tilde{L}(\underline{u}_D)$ qui est une approximation de la quantité d'intérêt. Nous démontrons deux résultats fournissant des bornes supérieures et inférieures de la quantité d'intérêt exacte I_{ex} et séparant les sources d'erreur.

Théorème 7.2.

$$|I_{ex} - \tilde{L}(\underline{u}_D) - I_{HH,1}| \leqslant \left(\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} + e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N)\right)\left(\sqrt{\tilde{\mathbf{r}}^T\tilde{\mathbf{z}}} + e_{CR_\Omega}(\tilde{\underline{u}}_N, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N)\right) \tag{7.11}$$

avec

$$I_{HH,1} = \int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{\underline{u}}_D)\, d\Omega \tag{7.12}$$

Démonstration. Ce résultat est l'application directe des résultats démontrés dans [74, 75] :

$$|I_{ex} - \tilde{L}(\underline{u}_D) - I_{HH,1}| \leqslant e_{CR_\Omega}(\underline{u}_D, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N) e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_D, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N) \tag{7.13}$$

avec $I_{HH,1}$ défini dans 7.12. En utilisant l'inégalité triangulaire et le lemme 6.4

$$\begin{aligned} e_{CR_\Omega}(\underline{u}_D, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N) &= \| \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \\ &= \| \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_N) + \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_N - \underline{u}_D) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \\ &\leqslant \| \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_N) \|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} + |||\underline{u}_N - \underline{u}_D|||_\Omega \\ &\leqslant e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N) + \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{z}} \end{aligned} \tag{7.14}$$

□

Une seconde majoration peut être déduite de la même manière en utilisant un autre résultat de [74, 75].

Théorème 7.3.

$$|I_{ex} - \tilde{L}(\underline{u}_D) - I_{HH,2}| \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{z}} + e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N))(\sqrt{\widetilde{\mathbf{r}}^T \widetilde{\mathbf{z}}} + e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_N, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N)) \tag{7.15}$$

avec

$$I_{HH,2} = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D) \right) : \mathbb{H}^{-1} : \left(\hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N + \mathbb{H} \underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_D) \right) d\Omega \tag{7.16}$$

Démonstration. La preuve est la même que précédemment. Nous appliquons juste un autre résultat de [74, 75] :

$$|I_{ex} - \tilde{L}(\underline{u}_D) - I_{HH,2}| \leqslant \frac{1}{2} e_{CR_\Omega}(\underline{u}_D, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N) e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_D, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N) \tag{7.17}$$

avec

$$I_{HH,2} = \int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D)) : \mathbb{H}^{-1} : (\frac{1}{2}(\hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N + \mathbb{H} \underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_D))) d\Omega \tag{7.18}$$

□

7.3.2 Propriétés de la quantité $I_{HH,1}$

Si le problème de référence et le problème adjoint sont résolus sur le même maillage, le terme $I_{HH,1}$ peut être réécrit en terme de quantités d'interface, ce qui simplifie grandement son évaluation :

Propriété 7.4.

$$I_{HH,1} = \sum_s \boldsymbol{\lambda}_D^{(s)^T} \mathbf{t}^{(s)} \widetilde{\mathbf{u}}_D^{(s)} \tag{7.19}$$

Démonstration. Les problèmes dont sont solutions $\underline{u}_D \in \mathrm{CA}(\Omega)$ et $\underline{u}_{ex} \in \mathrm{CA}(\Omega)$ avec un champ test $\widetilde{\underline{u}}_D \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$ s'écrivent :

$$\sum_s \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)}\right) d\Omega = \sum_s L^{(s)}(\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)}) + \sum_s {\boldsymbol{\lambda}_D^{(s)}}^T \mathbf{t}^{(s)} \widetilde{\mathbf{u}}_D^{(s)} \tag{7.20}$$

$$\sum_s \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_{ex}^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)}\right) d\Omega = \sum_s L^{(s)}(\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)}) + \sum_s \int_{\Gamma^{(s)}} (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} \cdot \underline{n}^{(s)}) \cdot \widetilde{\underline{u}}_D^{(s)} dS \tag{7.21}$$

Puisque $\widetilde{\underline{u}}_D = (\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$ et que $\underline{u}_{ex}$ est la solution exacte, il vient :

$$\sum_s \int_{\Gamma^{(s)}} (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} \cdot \underline{n}^{(s)}) \cdot \widetilde{\underline{u}}_D^{(s)} dS = 0 \tag{7.22}$$

D'autre part, comme $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N$ est un champ statiquement admissible et que $(\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)})_s \in \mathrm{CA}^0(\Omega)$:

$$I_{HH,1} = \int_\Omega (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_D)\, d\Omega = \int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_D)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_D)\, d\Omega \tag{7.23}$$

alors en soustrayant l'équation (7.20) à l'équation (7.21), nous obtenons (7.19). □

Quand le solveur a convergé, si les maillages pour le problème de référence et pour le problème adjoint sont identiques, le terme $I_{HH,1}$ est nul (conséquence de l'orthogonalité de Galerkin). A l'aide de la nouvelle écriture de $I_{HH,1}$, nous démontrons la propriété suivante :

Propriété 7.5. *Dans BDD, à chaque itération,* $I_{HH,1} = 0$.

Démonstration. En utilisant les notations de l'algorithme 7, nous avons :

$$I_{HH,1} = \mathbf{r}^T \widetilde{\mathbf{u}} \tag{7.24}$$

Les itérations du gradient conjugué par bloc peuvent être définies par le schéma suivant [128] :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i \in \mathbf{U}_0 + \mathcal{K}_i \\ \mathbf{R}_i \perp \mathcal{K}_i \end{cases} \tag{7.25}$$

où $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}]$ et $\mathbf{R} = [\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}]$. $\mathcal{K}_i$ est l'espace de Krylov associé à l'opérateur préconditionné et au bloc initial de résidus. Cette propriété implique que :

$$I_{HH,1} = \mathbf{r}^T \widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_0^T \widetilde{\mathbf{u}}_0 \tag{7.26}$$

En reprenant les notations de l'algorithme 1 et en notant $\mathbf{S}^\Diamond = \sum_s \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{S}^{(s)} \mathbf{A}^{(s)^T}$, nous avons

$$\mathbf{r}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{S}^\Diamond \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^\Diamond) \sum_s \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{b}^{(s)} \tag{7.27}$$

et

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{\Diamond}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\tilde{\mathbf{b}}^{(s)} \tag{7.28}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0^T\tilde{\mathbf{u}}_0 &= (\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)})^T[\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{\Diamond}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\tilde{\mathbf{b}}^{(s)} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{\Diamond}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\tilde{\mathbf{b}}^{(s)}] \\ &= 0\end{aligned} \tag{7.29}$$

□

7.4 Définition d'un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif

La quantité $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}}$ (respectivement $\sqrt{\tilde{\mathbf{r}}^T\tilde{\mathbf{z}}}$) est la mesure du résidu du problème de référence (respectivement adjoint) : cela correspond à l'erreur algébrique pure. Le terme $e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N, \underline{\hat{\sigma}}_N)$ (respectivement $e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{\tilde{u}}_N, \underline{\hat{\tilde{\sigma}}}_N)$)) est une estimation parallèle de l'erreur de discrétisation du problème de référence (respectivement adjoint). Grâce à cette séparation des contributions, nous proposons un nouveau critère d'arrêt du solveur itératif qui peut être illustré par l'algorithme 9 :

Algorithme 9 : Solveur de décomposition de domaine avec critère d'arrêt adapté à l'erreur de discrétisation locale

Définir $\alpha > 1$, $\tilde{\alpha} > 1$, $\beta \geqslant 1$ et $\tilde{\beta} \geqslant 1$;
Initialiser et obtenir $(\mathbf{u}_N^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)}, \mathbf{r}, \mathbf{z})$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_N^{(s)}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N^{(s)}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{z}})$;
Estimer l'erreur de discrétisation pour le problème de référence
$e^2 = \sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \underline{\hat{\sigma}}_N^{(s)})$;
Estimer l'erreur de discrétisation pour le problème adjoint
$\tilde{e}^2 = \sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{\tilde{u}}_N^{(s)}, \underline{\hat{\tilde{\sigma}}}_N^{(s)})$;
while $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} > e/\alpha$ *et* $\sqrt{\tilde{\mathbf{r}}^T\tilde{\mathbf{z}}} > \tilde{e}/\tilde{\alpha}$ **do**
  while $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{z}} > e/(\alpha\beta)$ *et* $\sqrt{\tilde{\mathbf{r}}^T\tilde{\mathbf{z}}} > \tilde{e}/(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})$ **do**
    Faire les itérations de Alg. 7 ou Alg. 8, obtenir $(\mathbf{u}_N^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(s)})$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_N^{(s)}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N^{(s)})$
  end
  Actualiser l'estimation de l'erreur pour le problème de référence
  $e^2 = \sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \underline{\hat{\sigma}}_N^{(s)})$;
  et pour le problème adjoint $\tilde{e}^2 = \sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{\tilde{u}}_N^{(s)}, \underline{\hat{\tilde{\sigma}}}_N^{(s)})$;
end

7.5 Exemples numériques

7.5.1 Structure 1

Par simplicité, nous notons $\theta_{discr} = e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N)$ et $\widetilde{\theta}_{discr} = e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_N, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N)$. La simulation a été effectuée dans la configuration donnée par le tableau 7.1. Les résultats dans le tableau 7.2 sont donnés à convergence. Ils montrent que l'estimation d'erreur en cadre sous-structuré est aussi efficace qu'en séquentiel.

♯ ddl	2352
Approche	primale
Algorithme	BDD
Préconditionneur	Neumann
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	p+3

TABLE 7.1 – Structure 1 : paramètres

cas	θ_{discr}	$\widetilde{\theta}_{discr}$	$\widetilde{L}(\underline{u}_D)$	$I_{HH,2}$	$\frac{1}{2}\theta_{discr}\widetilde{\theta}_{discr}$	I_{ex}
Séquentiel	2.417	10.23	2.916	$3.305\ 10^{-4}$	12.36	2.916
Sous-structuré	2.418	10.23	2.916	$3.858\ 10^{-4}$	12.37	2.916

TABLE 7.2 – Structure 1 : estimateurs d'erreur locale en séquentiel et en parallèle

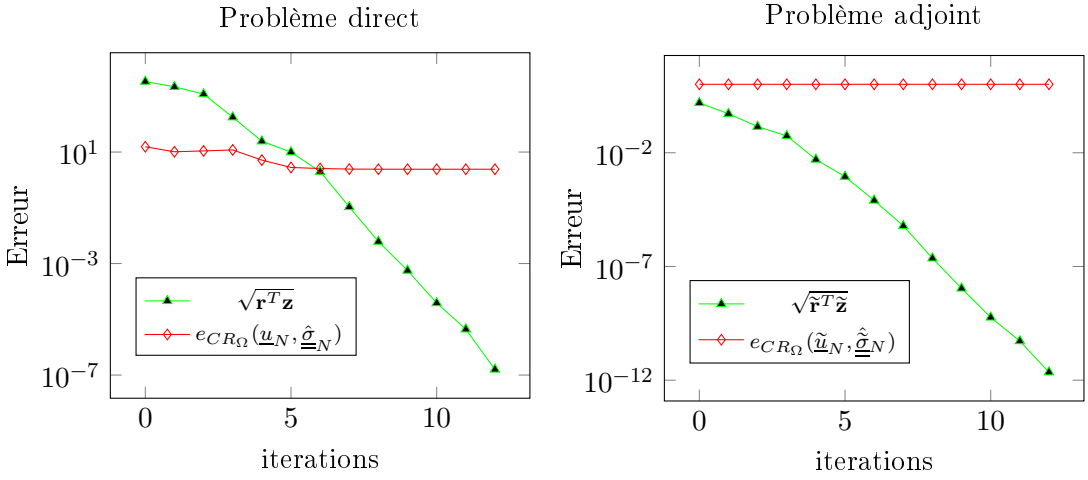


FIGURE 7.1 – Structure 1 : estimateurs d'erreur avec séparation des sources

La figure 7.1 montre l'évolution des deux contributions au cours des itérations pour chacun des problèmes. L'erreur de discrétisation est quasi constante et l'erreur algébrique décroît régulièrement au cours des itérations. Sur cet exemple, après six itérations les

erreurs algébriques sont négligeables devant les erreurs de discrétisation si bien que les itérations supplémentaires sont inutiles et n'améliorent pas la qualité de la solution.

7.6 Amélioration de l'estimation d'erreur locale à l'aide d'une borne inférieure

Nous nous plaçons toujours dans le cas où problèmes direct et adjoint sont résolus sur le même maillage et sur la même sous-structuration.

7.6.1 Rappels du cas séquentiel

En utilisant l'identité du parallélogramme plutôt que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'égalité suivante est démontrée :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{ex} - I_H = \widetilde{L}(\underline{e}_{discr}) = a(\underline{e}_{discr}, \widetilde{\underline{e}}_{discr}) \\ \qquad\qquad = a(\kappa \underline{e}_{discr}, \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{e}}_{discr}) \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{4}[|||\kappa \underline{e}_{discr} + \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{e}}_{discr}|||_{\Omega}^2 - |||\kappa \underline{e}_{discr} - \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{e}}_{discr}|||_{\Omega}^2] \end{array} \right. \tag{7.30}$$

où κ est un paramètre scalaire dont la valeur optimale

$$\kappa = \frac{e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_H, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_H)}{e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H)} \tag{7.31}$$

permet de minimiser la différence et donc améliorer la qualité de l'estimation. Ainsi, si l'on dispose d'un encadrement des quantités $S^+ = |||\kappa \underline{e}_{discr} + \frac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{e}}_{discr}|||_{\Omega}{}^2$ et $S^- = |||\kappa \underline{e}_{discr} - \frac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{e}}_{discr}|||_{\Omega}{}^2$ de la forme :

$$\beta_{inf}^+ \leqslant S+ \leqslant \beta_{sup}^+ \tag{7.32}$$

et

$$\beta_{inf}^- \leqslant S- \leqslant \beta_{sup}^- \tag{7.33}$$

il est possible d'obtenir un encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt s'écrivant :

$$\frac{1}{4}\beta_{inf}^+ - \frac{1}{4}\beta_{sup}^- \leqslant I_{ex} - I_H \leqslant \frac{1}{4}\beta_{sup}^+ - \frac{1}{4}\beta_{inf}^- \tag{7.34}$$

Notons R_H le résidu du problème de référence défini par

$$R_H(\underline{v}) = L(\underline{v}) - a(\underline{u}_H, \underline{v}) \tag{7.35}$$

et $\widetilde{R}_H$ le résidu du problème adjoint défini par :

$$\widetilde{R}_H(\underline{v}) = \tilde{L}(\underline{v}) - a(\widetilde{\underline{u}}_H, \underline{v}) \tag{7.36}$$

Dans [107], les bornes suivantes sont démontrées :

$$\begin{cases} \beta^+_{sup} = 2e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H) e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_H, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_H) \\ \qquad + 2\displaystyle\int_\Omega (\hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_H - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_H)) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)) d\Omega \\ \beta^-_{sup} = 2e_{CR_\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H) e_{CR_\Omega}(\widetilde{\underline{u}}_H, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_H) \\ \qquad - 2\displaystyle\int_\Omega (\hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_H - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}(\widetilde{\underline{u}}_H)) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)) d\Omega \\ \beta^+_{inf} = \dfrac{(\kappa R_H(\underline{z}^+) + \frac{1}{\kappa}\widetilde{R}_H(\underline{z}^+))^2}{|||\underline{z}^+|||^2_\Omega} \\ \underline{z}^+ = \kappa \underline{w} + \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{w}} \\ \beta^-_{inf} = \dfrac{(\kappa R_H(\underline{z}^-) + \frac{1}{\kappa}\widetilde{R}_H(\underline{z}^-))^2}{|||\underline{z}^-|||^2_\Omega} \\ \underline{z}^- = \kappa \underline{w} - \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{w}} \end{cases} \tag{7.37}$$

7.6.2 En cadre sous-structuré

Soit $(\underline{w}^{(s)})_s$ le champ de déplacement continu construit comme décrit au paragraphe 6.2.2. Notons R_D le résidu du problème de référence défini par :

$$R_D(\underline{w}) = \sum_s \left(\int_{\Omega^{(s)}} \underline{f} \cdot \underline{w}^{(s)} d\Omega^{(s)} + \int_{\partial_g \Omega^{(s)}} \underline{g} \cdot \underline{w}^{(s)} dS - \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right) d\Omega^{(s)} \right) \tag{7.38}$$

et $\widetilde{R}_D$ le résidu du problème adjoint défini par :

$$\widetilde{R}_D(\underline{w}) = \sum_s \left(\int_{\Omega^{(s)}} (\underline{\sigma}_\Sigma : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right) + \underline{f}_\Sigma \underline{w}^{(s)}) d\Omega^{(s)} - \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\widetilde{\underline{u}}_D^{(s)}\right) : \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{w}^{(s)}\right) d\Omega^{(s)} \right) \tag{7.39}$$

En cadre sous-structuré et sans séparation des sources d'erreur, les bornes se réé-

crivent :

$$\begin{cases} \beta_{sup}^{+} = 2\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})^2}\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})^2} \\ \qquad + 2\sum_s \int_{\Omega^{(s)}} (\hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)} - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}\right)) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)} - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)}\right))d\Omega \\ \beta_{sup}^{-} = 2\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})^2}\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})^2} \\ \qquad - 2\sum_s \int_{\Omega^{(s)}} (\hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)} - \mathbb{H}\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}\right)) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)} - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}_D^{(s)}\right))d\Omega \\ \beta_{inf}^{+} = \dfrac{(\kappa R_D(\underline{z}^+) + \frac{1}{\kappa}\widetilde{R}_D(\underline{z}^+))^2}{\sum_s |||(\underline{z}^+)^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}} \\ \qquad \text{où } (\underline{z}^+)^{(s)} = \kappa\underline{w}^{(s)} + \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{w}}^{(s)} \\ \beta_{inf}^{-} = \dfrac{(\kappa R_D(\underline{z}^-) - \frac{1}{\kappa}\widetilde{R}_D(\underline{z}^-))^2}{\sum_s |||(\underline{z}^-)^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}} \\ \qquad \text{où } (\underline{z}^-)^{(s)} = \kappa\underline{w}^{(s)} - \dfrac{1}{\kappa}\widetilde{\underline{w}}^{(s)} \end{cases} \tag{7.40}$$

Il est nécessaire d'être attentif au calcul du paramètre κ qui implique des échanges entre sous-domaines. En effet, de part la décomposition, le coefficient se réécrit :

$$\kappa = \frac{\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})}}{\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})}} \tag{7.41}$$

Il est à noter que cet échange entre sous-domaines (il s'agit d'une opération de réduction) est de toute manière fait à la fin de la procédure d'estimation d'erreur pour pouvoir obtenir une quantité globale.

Il paraît difficile de proposer un encadrement de l'erreur locale en se basant sur l'identité du parallélogramme qui sépare complètement les différentes sources d'erreur. En effet, s'il est possible de faire apparaître les deux contributions présentes dans les termes $\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})}$ et $\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})}$ en utilisant le résultat fondamental du théorème 6.1, la séparation complète dans les bornes inférieures β_{inf}^{-} et β_{inf}^{-} semble compliquée puisque :

- ces expressions font intervenir le scalaire $\kappa = \dfrac{\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})}}{\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})}}$ qui est le quotient d'erreurs mélangeant les contributions algébrique et de discrétisation.
- exploiter la séparation issue du résultat fondamental 6.1 entraîne la majoration de $\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\tilde{\underline{u}}_D^{(s)}, \hat{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})}$ et de $\sqrt{\sum_s e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_D^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})}$ alors qu'il faudrait minorer $\frac{(\kappa R_D(\underline{z}^-) - \frac{1}{\kappa}\widetilde{R}_D(\underline{z}^-))^2}{\sum_s |||(\underline{z}^-)^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}$ et $\frac{(\kappa R_D(\underline{z}^+) + \frac{1}{\kappa}\widetilde{R}_D(\underline{z}^+))^2}{\sum_s |||(\underline{z}^+)^{(s)}|||^2_{\Omega^{(s)}}}$ pour conserver un encadrement garanti.

Néanmoins, la séparation des sources au niveau du produit des erreurs globales sur les deux problèmes permet le pilotage du solveur par objectif de précision sur la quantité d'intérêt. Le calcul des bornes inférieures après que le critère soit atteint permet de resserrer l'encadrement.

7.6.3 Illustration numérique

Nous proposons de mettre en œuvre sur la structure 2 l'identité du parallélogramme à convergence du solveur itératif. Nous comparons les bornes de la valeur exacte de la quantité d'intérêt obtenues dans le cas où le théorème 7.3 est appliqué avec le cas où l'identité du parallélogramme 7.40 est exploitée. Les paramètres du calcul sont récapitulés dans le tableau 7.3.

♯ ddl	7180
Approche	Duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	*Flux-free*
Espace de résolution des problèmes locaux	p+3

TABLE 7.3 – Structure 2 : paramètres

Nous obtenons les valeurs suivantes : $I_H = 3.0019$; $\beta^-_{inf} = 1.1025$; $\beta^+_{inf} = 1.5765$; $\frac{1}{4}\beta^-_{sup} = 14.5255$; $\frac{1}{4}\beta^-_{sup} = 3.3210$.
Dans le tableau 7.4, nous donnons les bornes supérieure $I_H + \frac{1}{4}(\beta^+_{sup} - \beta^-_{inf})$ et inférieure $I_H + \frac{1}{4}(\beta^+_{inf} - \beta^-_{sup})$ de la valeur exacte de la quantité d'intérêt $\widetilde{L}(\underline{u}_{ex})$. Nous observons que l'exploitation des bornes inférieures (deuxième ligne) permet de réduire la largeur de l'encadrement de 8.5% et de déterminer ainsi le signe de $\widetilde{L}(\underline{u}_{ex})$.

	Borne supérieure de I_{ex}	Borne inférieure de I_{ex}	largeur
sans bornes inférieures	7.5274	-0.31918	7.8466
avec bornes inférieures	7.2518	0.07494	7.1768

TABLE 7.4 – Structure 2 : encadrements de la quantité d'intérêt avec ou sans exploitation des bornes inférieures des erreurs globales

Quatrième partie

Amélioration de la qualité de la solution et recyclage de l'information : procédure auto-adaptative

Dans cette partie, nous considérons une chaîne de résolutions répondant à un objectif de précision sur l'erreur globale ou sur une quantité d'intérêt. Si le premier maillage ne permet pas d'obtenir la précision souhaitée, le même problème mécanique est résolu sur un maillage plus fin. Cette procédure peut nécessiter plusieurs étapes qui forment une chaîne de résolutions. Le premier axe que nous étudions est celui du remaillage. En exploitant les informations fournies par l'estimateur d'erreur nous mettons un œuvre un remaillage adaptatif séquentiel et un remaillage parallèle à discrétisations imbriquées. Ce second point a été présenté dans la publication [123]. Dans les deux cas, la sous-structuration est conservée. Le second axe que nous étudions est celui du recyclage de l'espace de Krylov généré pour la résolution suivante. Nous le mettons en œuvre sur les cas de remaillage précédemment cités. Ces travaux ont fait l'objet d'une communication [134].

Chapitre 8

Remaillage adaptatif

Dans ce chapitre, nous exploitons les informations fournies par l'estimateur d'erreur parallèle afin de de générer un maillage permettant de faire diminuer l'erreur de discrétisation. Premièrement, nous mettons en œuvre un remaillage adaptatif en exploitant la carte d'erreur. Bien que cette opération ne soit pas parallèle, cette étape s'insère dans la chaîne de calcul de la majorité des structures industrielles pour lesquelles existent des instances monolithiques du problème. Dans un second temps, nous proposons un raffinement hiérarchique des sous-domaines ayant été identifiés comme les contributeurs majoritaires à l'erreur. Cette opération parallèle génère une incompatibilité de discrétisation à l'interface. Nous montrons comment gérer cette incompatibilité sans diminuer les performances de l'estimateur d'erreur.

8.1 Remaillage adaptatif se basant sur une carte d'erreur

Les estimateurs de l'erreur de discrétisation globale fournissant une carte de contribution à l'erreur de la structure, il est possible d'identifier les éléments ayant la plus forte contribution, c'est-à-dire les zones où la discrétisation est trop grossière. Ainsi, dans le cas où le niveau d'erreur obtenu n'est pas satisfaisant, exploiter cette information permet de définir un nouveau maillage qui n'est plus uniforme : il sera raffiné dans les zones maximales d'erreur et éventuellement déraffiné dans les zones où l'erreur est négligeable. Nous rappelons tout d'abord quelques généralités sur le remaillage adaptatif en séquentiel et appliquons ensuite cet outil sur la structure 2.

8.1.1 Le remaillage adaptatif en séquentiel

Le remaillage adaptatif requiert une information sur la répartition de l'erreur (grâce à une carte d'erreur fournie par l'estimateur par exemple) et un critère de remaillage. L'exploitation du critère et de la distribution spatiale de l'erreur entraîne la définition d'une consigne de remaillage pour le mailleur. Nous ne faisons pas la liste des critères et consignes de remaillage dans cette thèse. Pour davantage d'explications sur le remaillage adaptatif, le lecteur curieux peut se référer à [136, 31, 101, 14, 32] et aux bibliographies associées. Nous donnons simplement deux critères de remaillage répondant à deux paradigmes différents :

— minimiser le nombre d'éléments du nouveau maillage pour un niveau d'erreur imposé ϵ_d uniforme. Dans ce cas, le ratio r_E de la taille de l'élément du nouveau maillage pas la taille de l'élément de l'ancien maillage est donné par :

$$r_E = \left(\sum_{E \in \mathcal{T}} \epsilon_E^{\frac{2d}{2q+d}} \right)^{\frac{-1}{2q}} \epsilon_d^{\frac{1}{q}} \epsilon_E^{\frac{-2}{2q+d}} \tag{8.1}$$

où
- d désigne la dimension de l'espace
- q désigne le taux de convergence de la méthode éléments finis
- ϵ_E désigne la contribution de l'élément E à l'erreur

— minimiser le niveau d'erreur qui sera uniforme pour un nombre d'éléments imposé N_{imp}. Dans ce cas, le ratio r_E est donné par :

$$r_E = \left(\sum_{E \in \mathcal{T}} \epsilon_E^{\frac{2d}{2q+d}} \right)^{\frac{1}{d}} N_{imp}^{\frac{-1}{d}} \epsilon_E^{\frac{-2}{2q+d}} \tag{8.2}$$

Remarque 8.1. *Lorsqu'il s'agit d'estimation d'erreur locale, le remaillage adaptatif est une tâche bien plus ardue. En effet, comme expliqué dans [36], les contributions à l'erreur locale sont signées et la distribution spatiale de l'erreur locale n'est pas unique. Pour ces raisons, nous n'investiguons pas dans cette thèse le maillage adaptatif pour l'estimation d'erreur locale.*

8.1.2 Application au cas sous-structuré

Nous mettons en œuvre le remaillage adaptatif présenté précédemment sur la structure 2. La carte d'erreur fournie par l'estimateur permet de définir un nouveau maillage à l'aide du logiciel gmsh. Cette opération n'est pas parallélisée. En effet, des logiciels de remaillage adaptatif en parallèle existent (par exemple [27]). Cependant, cette tâche est extrêmement ardue. En effet, les contraintes de conservation des interfaces et de compatibilité de discrétisations à l'interface imposent beaucoup d'échanges entre sous-domaines. De plus, cette opération de remaillage est très difficilement numériquement extensible. Notre travail est pertinent dans le cas de calculs où le problème monolithique existe. Alors, le processus de remaillage adaptatif que nous proposons peut s'insérer facilement dans une chaîne de calcul classique où le *preprocess* et *postprocess* sont réalisés en séquentiel.

Nous appliquons le premier critère avec $d = 2$ et $q = \frac{1}{2}$ (due à la présence de la fissure). La contribution des éléments à l'erreur est donnée par l'estimateur d'erreur. La consigne est de diviser l'erreur par 10. Dans le tableau 8.1, nous donnons les paramètres des simulations pour la structure 2.

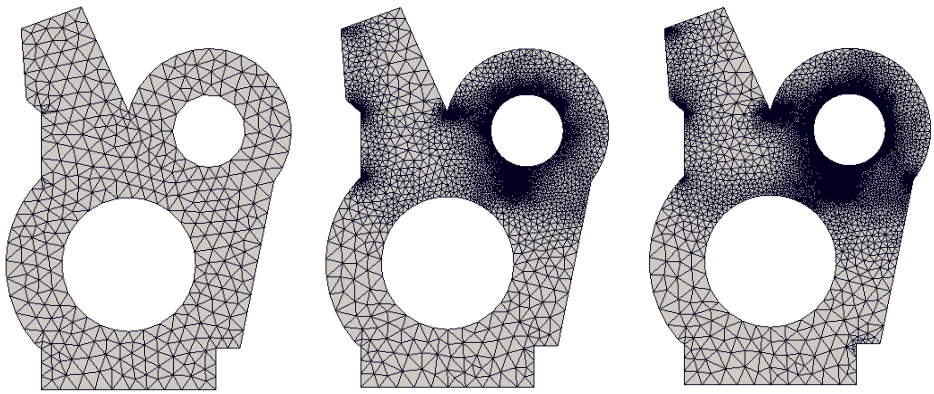
Approche	duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Projecteur	**I**
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	$\frac{h}{2^2}$

TABLE 8.1 – Structure 2 : paramètres

Sur la figure 8.1 sont donnés :
- Le maillage initial uniforme
- Le deuxième maillage obtenu après remaillage adaptatif à l'issu d'un calcul sur le premier maillage
- Le troisième maillage obtenu après remaillage adaptatif à l'issu d'un calcul sur le deuxième maillage

Enfin, dans le tableau 8.2, nous donnons les résultats fournis par l'estimateur d'erreur à convergence pour les trois maillages de la figure 8.1 (Adaptatifs) et pour trois maillages uniformes comportant environ le même nombre de degrés de liberté (Uniformes).

En observant la figure 8.1, nous remarquons que le maillage est raffiné là où l'estimateur d'erreur est maximal : près de la fissure et des zones anguleuses. Sur le tableau 8.2, nous observons que le remaillage adaptatif permet d'obtenir une discrétisation menant à un niveau d'erreur bien moindre que le remaillage uniforme pour un nombre de degrés de liberté comparable. En effet, pour un même nombre de degrés de liberté, le maillage adapté permet d'avoir une erreur réduite de 40 pourcents par rapport au maillage uniforme. Malheureusement, nous observons également que la consigne de diviser par 10 n'est pas respectée. Cela est probablement dû à l'inexactitude de l'estimateur d'erreur



(a) Maillage initial (b) Deuxième maillage (c) Troisième maillage

FIGURE 8.1 – Structure 2 : évolution du maillage au cours du remaillage adaptatif

♯ ddl	maillage	$\|\|\|\underline{u}_H\|\|\|_\Omega$	θ
674	initial	86.65	38.978
$\sim$ 10 000	uniforme	89.591	15.591
	adapté	89.874	9.4021
$\sim$ 117 000	uniforme	89.935	7.5679
	adapté	89.993	4.5634

TABLE 8.2 – Structure 2 : performances du remaillage uniforme et du remaillage adaptatif

qui ne donne pas l'erreur vraie et au taux de convergence qui n'est pas constant sur la structure. Notons que la contrainte de conservation des interfaces et de discrétisations conformes entre sous-domaines peut également expliquer ceci.

8.2 Remaillage local par sous-domaine

8.2.1 Motivations

Comme nous l'avons souligné précédemment, le remaillage adaptatif que nous avons mis en œuvre n'est pas parallèle. Nous proposons dans cette section une procédure plus simple et parallèle de remaillage. Celle-ci consiste à effectuer un raffinement hiérarchique dans un ou plusieurs sous-domaines. Ce raffinement hiérarchique peut être effectué en augmentant le degré des fonctions de forme choisies ou en raffinant le maillage par *splitting*. Dans les deux cas, nous considérerons que cette opération mène à un maillage fin dont la discrétisation est imbriquée dans le maillage initial, dit maillage grossier. Par conséquent, la trace de l'espace cinématique initial (grossier) est un sous-espace de la trace du nouvel espace cinématique (fin). Nous distinguons cinématique d'interface et cinématique des sous-domaines et nous conservons la cinématique grossière sur l'interface.

Lors de cette opération, la discrétisation de l'interface est inchangée, seule la discrétisation de l'intérieur du sous-domaine est modifiée, comme illustré en figure 8.2. Les sous-domaines remaillés sont ceux ayant été identifiés comme les contributeurs majoritaires à l'erreur globale. Pour cela, la carte d'erreur fournie par l'estimateur n'est plus nécessaire (c'est une information spatiale trop riche), nous comparons simplement les valeurs fournies par l'estimateur d'erreur pour chaque sous-domaine.

8.2.2 Gestion de l'incompatibilité de discrétisation

L'incompatibilité des discrétisation entre sous-domaines est un sujet qui a été largement traité dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine. En particulier, citons les premiers travaux définissant la méthode *mortar* [15, 16, 130] qui réalise un raccord au sens faible des quantités aux interfaces. Nous aurions également pu envisager des méthodes avec raccord mixte, telles que la méthode LaTIn [72]. Malheureusement, toutes ces méthodes ne nous permettent pas de ré-exploiter la méthodologie de construction de champs admissibles en parallèle. C'est la raison pour laquelle nous choisissons une interpolation de type maître-esclave dans laquelle l'interface impose le déplacement à la sous-structure remaillée finement.

8.2.2.1 Nouvelle interpolation des efforts et déplacements

Considérons que quelques sous-domaines ont été remaillés de manière hiérarchique (en p ou en h) ou enrichis, si bien que des nœuds ont été insérés sur le bord de ces domaines tout en conservant les anciens nœuds. La figure 8.2 illustre un raffinement hiérarchique où chaque arête de $\Omega^{(1)}$ a été subdivisée en deux arêtes. Afin de pouvoir continuer à reconstruire des champs admissibles, nous décidons que l'interface maillée grossièrement impose la cinématique ou les efforts aux sous-domaines. Nous gardons les opérateurs d'assemblage inchangés. Nous définissions :

- une matrice d'interpolation $\mathbf{N}^{(s)}$ qui définit les déplacements fins $\mathbf{u}_F^{(s)}$ à partir des déplacements grossiers $\mathbf{u}_C^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{U}$: $\mathbf{u}_F^{(s)} = \mathbf{N}^{(s)}\mathbf{u}_C^{(s)}$
- une matrice d'interpolation $\mathbf{M}^{(s)}$ qui définit les forces nodales fines $\boldsymbol{\lambda}_F^{(s)}$ à partir des forces nodales grossières $\boldsymbol{\lambda}_C^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T}\boldsymbol{\Lambda}$: $\boldsymbol{\lambda}_F^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)}\boldsymbol{\lambda}_C^{(s)}$

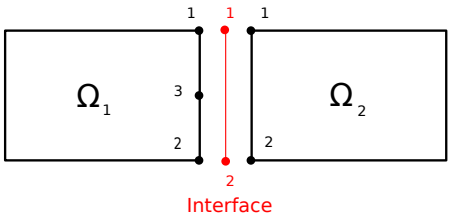


FIGURE 8.2 – Raffinement local du sous-domaine 1

Notons $\underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)}$ et $\underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)}$ les matrices des fonctions de forme grossières et fines. Les déplacements grossiers s'écrivent $\underline{u}_C^{(s)} = \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)}\mathbf{u}_C^{(s)}$ et les déplacements fins s'écrivent $\underline{u}_F^{(s)} = \underline{\boldsymbol{\phi}}_F\mathbf{u}_F^{(s)}$.

Soit $\mathbf{X}_F^{(s)}$ les coordonnées des nœuds fins. Nous avons $\underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)}(\mathbf{X}_F^{(s)}) = \mathbf{I}$. Imposer la continuité des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{u}_C^{(s)} &= \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)}\mathbf{u}_C^{(s)} = \underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)}\mathbf{u}_F^{(s)} = \underline{u}_F^{(s)} \\ &\Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)}(\mathbf{X}_F)^{(s)}\mathbf{u}_C^{(s)} = \mathbf{u}_F^{(s)}, \end{aligned}$$

ce qui définit la matrice d'interpolation suivante :

$$\mathbf{N}^{(s)} = \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)}(\mathbf{X}_F^{(s)}). \tag{8.3}$$

La matrice $\mathbf{N}^{(s)}$ impose simplement que les nœuds fins ajoutés suivent le déplacement grossier imposé par l'interface.

Dans la reconstruction d'un champ statiquement admissible, une étape consiste à construire un représentant continu de l'effort à l'interface à partir des réactions nodales sous la contrainte de conservation du travail (voir 5.1) :

$$\begin{aligned} \underline{t}_C^{(s)} &= \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)} \left(\mathbf{G}_C^{(s)}\right)^{-1} \boldsymbol{\lambda}_C^{(s)} \quad \text{avec } \mathbf{G}_C^{(s)} = \int_\Gamma \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)^T} \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)} d\Gamma \\ \underline{t}_F^{(s)} &= \underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)} \left(\mathbf{G}_F^{(s)}\right)^{-1} \boldsymbol{\lambda}_F^{(s)} \quad \text{avec } \mathbf{G}_F^{(s)} = \int_\Gamma \underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)^T} \underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)} d\Gamma \end{aligned} \tag{8.4}$$

$\mathbf{G}_C^{(s)}$ et $\mathbf{G}_F^{(s)}$ sont les matrices de masse $L^2(\Gamma)$ des interpolations grossières et fines. Puisqu'il s'agit de discrétisation imbriquées, il suffit de satisfaire l'égalité $\underline{t}_F^{(s)} = \underline{t}_C^{(s)}$ sur les nœuds fins ce qui mène à :

$$\mathbf{M}^{(s)} = \mathbf{G}_F^{(s)}\mathbf{N}^{(s)}(\mathbf{G}_C^{(s)})^{-1} \tag{8.5}$$

Remarque 8.2. *Les expressions classiques des matrices* $\mathbf{N}^{(s)}$ *et* $\mathbf{M}^{(s)}$ *sont :*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}^{(s)} &= \left(\mathbf{G}_F^{(s)}\right)^{-1} \mathbf{G}_{FC}^{(s)} \\ \mathbf{M}^{(s)} &= \mathbf{G}_{FC}^{(s)} \left(\mathbf{G}_C^{(s)}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \text{ avec } \mathbf{G}_{FC}^{(s)} = \int_\Gamma \underline{\boldsymbol{\phi}}_F^{(s)^T} \underline{\boldsymbol{\phi}}_C^{(s)} d\Gamma \tag{8.6}$$

En testant l'équilibre des tractions dans les déplacements de l'interface, nous obtenons la classique conservation du travail :

$$\mathbf{N}^{(s)^T}\mathbf{M}^{(s)} = \mathbf{I} \tag{8.7}$$

Remarque 8.3. *Bien sûr pour les sous-domaines dont la discrétisation n'a pas été modifiée, nous avons* $\mathbf{N}^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)} = \mathbf{I}$.

8.2.2.2 Algorithmes avec interfaces non conformes

L'algorithme BDD est pratiquement inchangé (voir l'algorithme 10). Seuls les opérateurs d'assemblage sont modifiés selon s'ils sont appliqués sur des déplacements ou des efforts :

Algorithme 10 : BDD-bloc avec incompatibilité. Inconnue d'interface $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}]$

$\mathbf{U} = \texttt{Initialize}(\mathbf{F}^{(s)})$;
$(\boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)}, \mathbf{U}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{N}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{U}, \mathbf{F}^{(s)})$;
Calcul du résidu $\mathbf{R} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}\boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)}$;
Réactions locales $\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{R}$; // $\boldsymbol{\Lambda}_N^{(s)} = \boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}$
$\delta\mathbf{u}^{(s)} = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{U}_N^{(s)} = \mathbf{U}_D^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)}$
Résidu préconditionné $\mathbf{Z} = \sum_s \tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\delta\mathbf{U}^{(s)}$;
Direction de recherche $\mathbf{W} = \mathbf{P}_1\mathbf{Z}$;
while $\sqrt{\mathbf{R}^T\mathbf{Z}} > \epsilon$ **do**
  $(\boldsymbol{\delta\Lambda}_D^{(s)}, \delta\mathbf{U}_D^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\mathbf{N}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{W}, 0)$;
  $\mathbf{Q} = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}\boldsymbol{\delta\Lambda}_D^{(s)}$;
  $\alpha = (\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{R}^T\mathbf{Z})$;
  $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} + \mathbf{W}\alpha$; // $\mathbf{U}_D^{(s)} \leftarrow \mathbf{U}_D^{(s)} + \delta\mathbf{U}_D^{(s)}\alpha$, $\boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)} \leftarrow \boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)} + \boldsymbol{\delta\Lambda}_D^{(s)}\alpha$
  $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} - \mathbf{Q}\alpha$;
  $\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{R}$; // $\boldsymbol{\Lambda}_N^{(s)} = \boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}$
  $\delta\mathbf{U}^{(s)} = \texttt{Solve}_N(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, 0)$; // $\mathbf{U}_N^{(s)} = \mathbf{U}_D^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)}$
  $\mathbf{Z} = \sum_s \tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\delta\mathbf{U}_b^{(s)}$;
  $\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{P}_1\mathbf{Z} - \mathbf{W}(\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{Q}^T\mathbf{P}_1\mathbf{Z})$
end

— l'opérateur d'assemblage devient $\mathbf{A}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}$
— l'opérateur d'assemblage pondéré devient $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}$

Puisqu'il s'agit d'une approche primale, le déplacement est continu.

Propriété 8.4. *Les réactions nodales $\boldsymbol{\Lambda}_N^{(s)}$ sont équilibrées aux interfaces et vis-à-vis des modes rigides.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'assemblage primal des réactions nodales donne zéro.

$$\begin{aligned}\sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}\boldsymbol{\Lambda}_N^{(s)} &= \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}(\boldsymbol{\Lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}) \\ &= (\mathbf{I} - \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}\mathbf{M}^{(s)}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T})\mathbf{R} \\ &= (\mathbf{I} - \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T})\mathbf{R} = 0\end{aligned} \tag{8.8}$$

et que celles-ci sont orthogonales aux modes rigides :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{(s)^T}(\mathbf{b}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}_N^{(s)}) &= \mathbf{R}^{(s)^T}(\mathbf{b}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)^T}(\mathbf{\Lambda}_D^{(s)} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{\Lambda}^{(s)})) \\
&= \mathbf{R}^{(s)^T}\mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}_D^{(s)} - \mathbf{R}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)^T}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r} \\
&= -\mathbf{R}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)^T}\tilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r} \text{ par définition de } \mathbf{R}^{(s)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.9}$$

□

L'algorithme FETI est également pratiquement inchangé (voir l'algorithme 11). Seuls les opérateurs d'assemblage sont modifiés selon si ils sont appliqués sur des déplacements ou des efforts :

— l'opérateur d'assemblage devient $\mathbf{B}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}$,

— l'opérateur d'assemblage pondéré devient $\tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}$.

Puisqu'il s'agit d'une approche duale, les réactions aux interfaces sont équilibrées.

Propriété 8.5. *Les déplacements $\mathbf{U}_D^{(s)}$ sont continus aux interfaces.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'assemblage dual des déplacement d'interface donne 0.

$$\begin{aligned}
\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)}\mathbf{U}_D^{(s)} &= \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)}(\mathbf{U}_N^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)}) \\
&= (\mathbf{I} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\mathbf{N}^{(s)}\tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T})\mathbf{R} \\
&= (\mathbf{I} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}\tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T})\mathbf{R} = 0
\end{aligned} \tag{8.10}$$

□

Remarque 8.6. *Quand le solveur a convergé et puisque les maillages sont incompatibles, les champs de déplacements $(\underline{u}_D^{(s)})_s$ et $(\underline{u}_N^{(s)})_s$ ne sont plus identiques.*

8.2.3 Illustrations numériques

8.2.3.1 Pertinence du remaillage local

Considérons la structure 1 et sa quantité d'intérêt. Le calcul est effectué avec les paramètres donnés dans le tableau 8.3.

Puisque le chargement du problème adjoint est situé dans le sous-domaine central, c'est celui-ci que nous allons raffiner. Trois cas sont considérés : deux cas avec des maillages conformes (i) un maillage grossier (indice H) (ii) un maillage fin ($h = H/4$), et un cas avec maillages non-conformes comme schématisé en figure 8.3. Dans chacun des cas, l'estimation d'erreur est faite à convergence. Le nombre d'itérations du solveur est de 9 pour les trois cas. Les résultats sont résumés dans le tableau 8.4.

Lorsque le maillage du sous-domaine central est modifié, l'estimation d'erreur est plus petite pour le problème adjoint et inchangée pour le problème direct. Par conséquent,

Algorithme 11 : FETI-bloc avec incompatibilité. Inconnue d'interface $\mathbf{\Lambda} = [\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}]$

$\mathbf{\Lambda} = \texttt{Initialize}(\mathbf{F}^{(s)})$;
Réactions locales $\mathbf{\Lambda}_N^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}$;
$(\mathbf{U}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\mathbf{\Lambda}_N^{(s)}, \mathbf{F}^{(s)})$;
Calcul du résidu $\mathbf{R} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)}\mathbf{U}_N^{(s)})$;
Déplacement local $\delta\mathbf{U}_b^{(s)} = \mathbf{N}^{(s)}\tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\mathbf{R}$; ;

$(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, \delta\mathbf{U}^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\delta\mathbf{U}_b^{(s)}, 0)$; // $\begin{array}{l}\mathbf{U}_D^{(s)} = \mathbf{U}_N^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)} \\ \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} = \mathbf{\Lambda}_N^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}\end{array}$

Résidu préconditionné $\mathbf{Z} = \mathbf{P}_2(\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)})$;
Direction de recherche $\mathbf{W} = \mathbf{Z}$;
while $\sqrt{\mathbf{R}^T\mathbf{Z}} > \epsilon$ **do**
  $(\delta\mathbf{U}_N^{(s)}) = \texttt{Solve}_N(\mathbf{M}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{W}, 0)$;
  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{M}^{(s)^T}\mathbf{t}^{(s)}\delta\mathbf{U}_N^{(s)})$;
  $\alpha = (\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{R}^T\mathbf{Z})$;

  $\mathbf{\Lambda} \leftarrow \mathbf{\Lambda} + \mathbf{W}\alpha$; // $\begin{array}{l}\mathbf{U}_N^{(s)} \leftarrow \mathbf{U}_N^{(s)} + \alpha\delta\mathbf{U}_N^{(s)} \\ \mathbf{\Lambda}_N^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}\end{array}$

  $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} - \mathbf{Q}\alpha$;
  $\delta\mathbf{U}_b^{(s)} = \mathbf{N}^{(s)}\tilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}\mathbf{R}$;

  $(\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}, \delta\mathbf{U}^{(s)}) = \texttt{Solve}_D(\delta\mathbf{U}_b^{(s)}, 0)$; // $\begin{array}{l}\mathbf{U}_D^{(s)} = \mathbf{U}_N^{(s)} - \delta\mathbf{U}^{(s)} \\ \mathbf{\Lambda}_D^{(s)} = \mathbf{\Lambda}_N^{(s)} - \boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)}\end{array}$

  $\mathbf{Z} = \mathbf{P}_2(\sum_s \tilde{\mathbf{B}}^{(s)}\mathbf{N}^{(s)^T}\boldsymbol{\delta\Lambda}^{(s)})$;
  $\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{Z} - \mathbf{W}(\mathbf{Q}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Z})$
end

l'utilisation d'un raffinement local de la discrétisation nous permet d'améliorer de 32% l'estimation d'erreur sur la quantité d'intérêt pour 38% de degrés de liberté supplémentaires. L'utilisation d'un maillage fin uniforme triple le nombre de degrés de liberté et permet d'améliorer les bornes sur la quantité d'intérêt de 65%. Il est donc plus avantageux de préférer un raffinement local du maillage.

8.2.3.2 Influence de la distance de la quantité d'intérêt à l'interface

L'utilisation d'un remaillage local peut être remise en question dans les cas où la source d'erreur est proche de la non-conformité. Nous proposons donc d'étudier l'influence du raffinement de maillage local en fonction de la distance d entre le support de la quantité d'intérêt $\omega = [-\frac{l}{10} - d; \frac{l}{10} - d] \times [-\frac{l}{10}; \frac{l}{10}]$ et l'interface Γ.

A convergence, pour chaque configuration (caractérisée par la distance d), nous calculons l'erreur de discrétisation relative (c'est-à-dire divisée par l'énergie de la solution

Approche	primale
Algorithme	BDD
Préconditionneur	Neumann
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	p+3

TABLE 8.3 – Structure 1 : paramètres

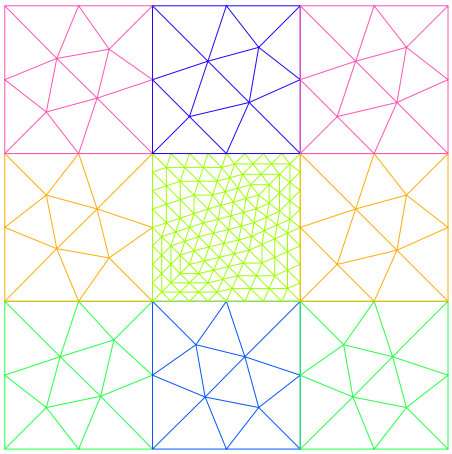


FIGURE 8.3 – Structure 1 : remaillage hiérarchique sur le sous-domaine central

éléments finis) du problème adjoint ζ_{Hh} (resp. ζ_h) quand $h = H/4$ sur le sous-domaine central uniquement (resp. sur tous les sous-domaines)

Sur la figure 8.4, nous donnons l'évolution du ratio ζ_{Hh}/ζ_h en fonction de d/d_0 (où $d = d_0$ correspond au cas où la quantité d'intérêt est située au centre du sous-domaine). L'estimation dans le cas d'une non-conformité est dégradée uniquement lorsque $d/d_0 < 10^{-1}$, ce qui correspond à une quantité d'intérêt très proche de l'interface. Notre approche est donc valable pour une large gamme de configurations.

8.2.3.3 Mise en œuvre sur la structure 2

Sur la structure 2, nous mettons en œuvre le raffinement hiérarchique. Le calcul initial est effectué avec les paramètres décrit dans le tableau 8.5. Notons $\eta^{(s)}$ (respectivement $\widetilde{\eta}^{(s)}$) la contribution du sous-domaine (s) à l'erreur totale pour le problème direct (resp. adjoint) ainsi définies :

$$\eta^{(s)} = \frac{e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})}{\sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\underline{u}_N^{(s)}, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N^{(s)})}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\eta}^{(s)} = \frac{e_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\widetilde{\underline{u}}_N^{(s)}, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})}{\sqrt{\sum_s e^2_{CR_{\Omega^{(s)}}}(\widetilde{\underline{u}}_N^{(s)}, \hat{\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}}_N^{(s)})}} \tag{8.11}$$

Sur la figure 8.5a, nous donnons les contributions à l'erreur de chaque sous-domaine pour le maillage initial et pour le maillage raffiné localement. Nous observons que pour

cas	θ_{discr}	$\widetilde{\theta}_{discr}$	$\widetilde{L}(\underline{u}_H)$	$I_{HH,2}$	$\frac{1}{2}\theta_{discr}\widetilde{\theta}_{discr}$	#ddl
Maillage grossier (H)	2.418	10.23	2.916	3.8575 10^{-4}	12.37	8738
Maillage fin (h)	1.216	7.020	2.916	-9.695 10^{-4}	4.268	34988
Remaillage local (Hh)	2.404	7.020	2.9169	3.8575 10^{-4}	8.438	12122

TABLE 8.4 – Structure 1 : comparaison entre les trois cas, $I_{ex} = 2,916$

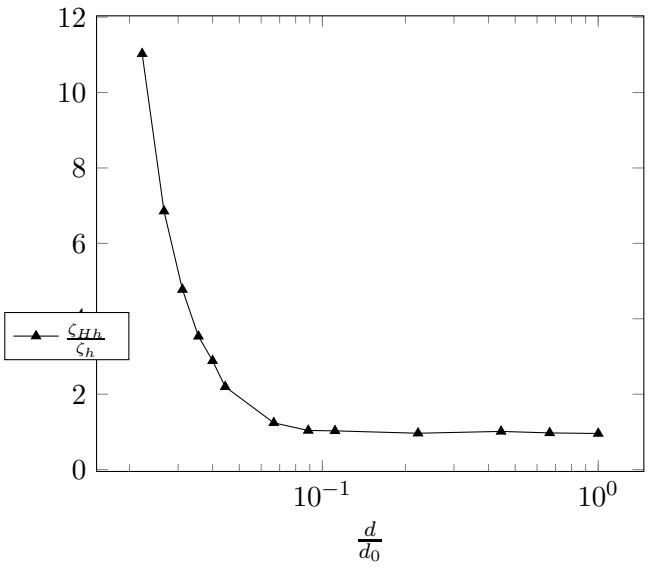


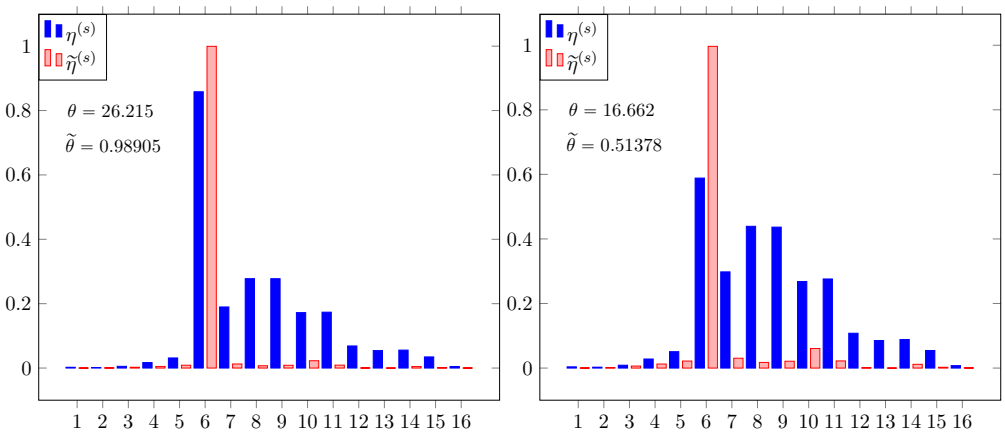
FIGURE 8.4 – Influence de la distance d

les deux problèmes, le sous-domaine 6 est le contributeur majoritaire. Nous effectuons donc un remaillage hiérarchique sur ce sous-domaine dans le but d'obtenir un niveau d'erreur pour le problème direct comparable à celui du deuxième plus gros contributeur (le sous-domaine 8). Pour cela, il faudrait diviser par 3 l'erreur du sous-domaine 6. La présence de la fissure impliquant une singularité jouant sur la convergence de la méthode éléments finis en $\sqrt{h}$, nous divisons chaque arête en 16 arêtes.

Sur la figure 8.5b, nous constatons qu'après le remaillage local les estimations d'erreur pour le problème direct sont quasiment identiques dans les sous-domaines 6 et 8. L'estimateur montre que l'erreur du problème adjoint a également diminué. Les performances globales sont résumées dans le tableau 8.6. Au final, la borne supérieure de la quantité d'intérêt exacte a été divisée par 3.

Approche	Duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	p+3

TABLE 8.5 – Structure 2 : paramètres



(a) Maillage intial (b) Maillage raffiné localement

FIGURE 8.5 – Structure 2 : contributions des sous-domaines à l'erreur pour les problèmes direct et adjoint

Maillage	θ	$\widetilde{\theta}$	I_H	$I_{HH,2}$	$\frac{1}{2}\theta\widetilde{\theta}$
Uniforme	26.215	0.98905	2.4915	3.1935	12.964
Raffinement local	16.662	0.51378	3.2165	0.086055	4.2803

TABLE 8.6 – Structure 2 : performances du remaillage local

Chapitre 9

Recyclage des directions de recherche

Dans ce chapitre, nous décidons de profiter de la base de l'espace de Krylov construite lors de la première résolution pour accélérer les résolutions suivantes. Utiliser les directions de recherche permet une bonne initialisation pour la résolution suivante ainsi qu'un spectre de l'opérateur préconditionné de meilleur qualité (plus tassé) ce qui entraîne un meilleur taux de convergence. Après un bref rappel des techniques de recyclages d'espaces de Krylov et la présentation des algorithmes de décomposition de domaine avec contraintes optionnelles, nous mettons en œuvre la réutilisation des directions de recherche sur la structure 2 et montrons les gains obtenus.

9.1 Motivations

Dans cette partie, nous nous plaçons toujours dans le cas de résolutions successives d'un même problème. Le système matriciel résolu (il s'agit du problème d'interface assemblé) est noté

$$S^0 x^0 = b^0 \tag{9.1}$$

Notons x_0^0 l'initialisation. Le résidu initial est $r_0^0 = b^0 - S^0 x_0^0$. La résolution de ce système est la construction itérative d'une base $(V_n)_n$ de l'espace de Krylov $\mathcal{K}_n$

$$\mathcal{K}_n = \text{vect}(r_0^0, S^0 r_0^0, S^0 S^0 r_0^0, ...(S^0)^{n-1} r_0^0) \tag{9.2}$$

La solution x_n^0 est dans $x_0^0 + \mathcal{K}_n$. Cette solution est recherchée itérativement en imposant que le résidu soit orthogonal à $\mathcal{K}_n$.

D'une résolution à l'autre le maillage est modifié mais le problème (structure, chargement, sous-structuration) est inchangé. Ainsi, les directions de recherche générées lors de la premières résolution sont pertinentes pour la seconde. Autrement dit, l'espace de Krylov associé au nouveau système $S^1 x^1 = b^1$ n'est pas très différent de la projection sur le nouveau maillage de l'espace de Krylov associé au système initial $S^0 x^0 = b^0$.

9.2 Réutilisation des directions de recherche

L'application du nouveau critère d'arrêt du solveur entraîne un arrêt rapide des itérations (de l'ordre de 5 itérations). C'est la raison pour laquelle nous décidons de ne pas mettre en place une sélection des directions de recherche générées et d'utiliser tous les vecteurs comme contraintes additionnelles pour la résolution suivante. Néanmoins, si réutiliser la totalité de l'espace de Krylov généré est trop coûteux, il sera nécessaire de sélectionner les vecteurs à recycler. Dans ce cas, un critère sur la pertinence d'un vecteur pour la prochaine résolution devra être énoncé. Citons [57] qui, dans le cadre d'un problème non-linéaire avec matrice non invariante, suggère de sélectionner les vecteurs associées aux hautes valeurs propres de l'opérateur préconditionné afin d'améliorer le spectre de l'opérateur suivant et donc la convergence. Dans notre cas, la matrice représentant l'opérateur change de taille entre deux résolutions. Il semble donc compliqué de définir un critère.

9.3 Les méthodes Krylov-augmenté

La prise en compte de contraintes additionnelles se fait généralement par des méthodes Krylov-augmenté [127]. Notons C la matrice rectangulaire supposée de rang plein et représentant la contrainte additionnelle. L'espace de Krylov-augmenté $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ est alors défini de la façon suivante :

$$\widetilde{\mathcal{K}}_n = \mathcal{K}_n + \text{Im}(C) \tag{9.3}$$

La solution est cherchée dans $x_0^0 + \widetilde{\mathcal{K}}_n$ avec un résidu r_n^0 orthogonal à $\widetilde{\mathcal{K}}_n$.

L'espace de Krylov-augmenté est séparé en deux espace supplémentaires $\mathrm{Im}(C)$ et $\mathrm{Ker}(C^T S^0)$. Le premier sous-espace est exploré à l'initialisation et le second sous-espace est exploré au cours des itérations. Cette séparation permet de comprendre l'intérêt du recyclage des directions de recherche par la méthode de Krylov-augmenté : si la contrainte additionnelle est suffisamment pertinente alors une solution de bonne qualité est captée dès l'initialisation et l'espace de recherche à explorer itérativement est de taille réduite et le spectre de l'opérateur préconditionné est plus tassé.

Donnons à présent les algorithmes correspondant aux approches primale et duale avec prise en compte de contraintes additionnelles comme décrit précédemment. La prise en compte de l'optimalité du préconditionneur dans l'approche primale se faisant déjà par une méthode de Krylov augmenté, l'ajout de contraintes optionnelles consiste à concaténer les modes rigides $\mathbf{H}$ avec la contrainte $\mathbf{C}$ comme illustré sur l'algorithme 12

Algorithme 12 : BDD avec contraintes optionnelles $\mathbf{C}$

$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - [\mathbf{H},\mathbf{C}]([\mathbf{H},\mathbf{C}]^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}[\mathbf{H},\mathbf{C}])^{-1}[\mathbf{H},\mathbf{C}]^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}$
Initialisation $\mathbf{U}_0 = [\mathbf{H},\mathbf{C}]([\mathbf{H},\mathbf{C}]^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}[\mathbf{H},\mathbf{C}])^{-1}[\mathbf{H},\mathbf{C}]^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)}$

Résidu initial $\mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_1^T \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)}$
Résidu préconditionné $\mathbf{z}_0 = \sum_s \widetilde{\mathbf{A}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\widetilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r}_0$
Direction de recherche $\mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0$
j=0
while $\sqrt{\mathbf{r},\mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  $\mathbf{q}_j = \sum_s \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{S}^{(s)}\mathbf{A}^{(s)^T}\mathbf{P}_1\mathbf{w}_j$
  $\alpha_j = (\mathbf{r}_j,\mathbf{z}_j)/(\mathbf{q}_j,\mathbf{w}_j)$
  $\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j + \alpha_j\mathbf{w}_j$ $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j\mathbf{q}_j$
  $\mathbf{z}_{j+1} = \sum_s \widetilde{\mathbf{A}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\widetilde{\mathbf{A}}^{(s)^T}\mathbf{r}_{j+1}$
  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{P}_1\mathbf{z}_{j+1} - (\mathbf{q}_j,\mathbf{P}_1\mathbf{z}_{j+1})/(\mathbf{q}_j,\mathbf{w}_j)\mathbf{w}_j$
  $j = j+1$
end

Pour l'approche duale, la prise en compte de contraintes additionnelles peut se faire à l'aide d'un algorithme deux niveaux [42] comme illustré sur l'algorithme 13.

L'inconnue d'interface est finalement $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_{00} + \mathbf{P}_2(\mathbf{\Lambda}_0 + \mathbf{P}_2^*\mathbf{\Lambda}_j)$.

Les procédures de reconstruction de champs admissibles restent absoluement identiques : l'ajout de contraintes optionnelles ne modifie pas la méthodologie.

Le coût de l'ajout de la contrainte optionnelle réside dans l'augmentation de la taille du problème grossier qui est accrue d'autant de vecteurs que de directions de recherche recyclées. Le surcoût réside donc dans le calcul du projecteur $\mathbf{P}_2^*$ en dual et dans le calcul d'un projecteur $\mathbf{P}_1$ de taille plus importante en primal. Ces calculs étant effectués par bloc, l'implémentation est facile et efficace. Une itération de l'algorithme consiste en une résolution directe (produit opérateur par vecteur d'interface) et en une résolution

Algorithme 13 : FETI avec contraintes optionnelles $\mathbf{C}$

$\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T$
$\mathbf{C}^* = \mathbf{P}_2\mathbf{C}$
$\mathbf{P}_2^* = \mathbf{I} - \mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{*T}\sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{C}^{*T})^{-1}\mathbf{C}^{*T}$
Initialisation $\mathbf{\Lambda}_{00} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{e}$
Résidu initial $\mathbf{r}_{00} = \mathbf{P}_2^T(\sum_s \mathbf{B}^{(s)}\mathbf{b}^{(s)} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}_{00}$
Initialisation second niveau $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{C}^*(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{r}_{00}$
Résidu second niveau $\mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_2^{*T}(\mathbf{r}_{00} - \sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{\Lambda}_0$
Résidu préconditionné $\mathbf{z}_0 = \sum_s \widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}r_0$
Direction de recherche $\mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0$
j=0
while $\sqrt{\mathbf{r},\mathbf{z}} > \epsilon$ **do**
  $\mathbf{q}_j = \mathbf{P}_2^{*T}\mathbf{P}_2^T\sum_s \mathbf{B}^{(s)}(\mathbf{S}^{(s)})^+\mathbf{B}^{(s)^T}\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2^*\mathbf{w}_j$
  $\alpha_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j)/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)$
  $\mathbf{\Lambda}_{j+1} = \mathbf{\Lambda}_j + \alpha_j\mathbf{w}_j$
  $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j\mathbf{q}_j$
  $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{P}_2\sum_s \widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}s(\mathbf{S}^{(s)})\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)^T}r_j$
  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} - (\mathbf{q}_j, \mathbf{z}_{j+1})/(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j)\mathbf{w}_j$
end

indirecte (produit préconditionneur par vecteur résidu). L'ajout d'une direction de recherche nécessite une résolution directe (produit opérateur par vecteur d'interface). Nous considérerons donc que le recyclage est avantageux si recycler n directions de recherche permet de réduire le nombre d'itérations d'au moins $\frac{n}{2}$ itérations.

Remarque 9.1. *Dans le cas de l'approche duale, la projection des contraintes orthogonalement aux modes rigides ($\mathbf{C}^* = \mathbf{P}_2\mathbf{C}$) n'est pas nécessaire puisque les directions de recherche ont été construites dans le bon espace. Ainsi $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$.*

9.4 Mise en œuvre pour des résolutions successives

Nous appliquons à présent l'ajout de contraintes additionnelles sur la structure 2 dans trois configurations de résolutions successives.

9.4.1 Raffinement local

Dans le cas d'un raffinement local, la discrétisation de l'interface est inchangée (voir 8.2). Ainsi, les vecteurs d'interface récupérés peuvent être directement utilisés comme contraintes additionnelles. Il faut simplement utiliser les matrices de passage $\mathbf{N}^{(s)}$ et $\mathbf{M}^{(s)}$ dans les algorithmes 13 ou 12.

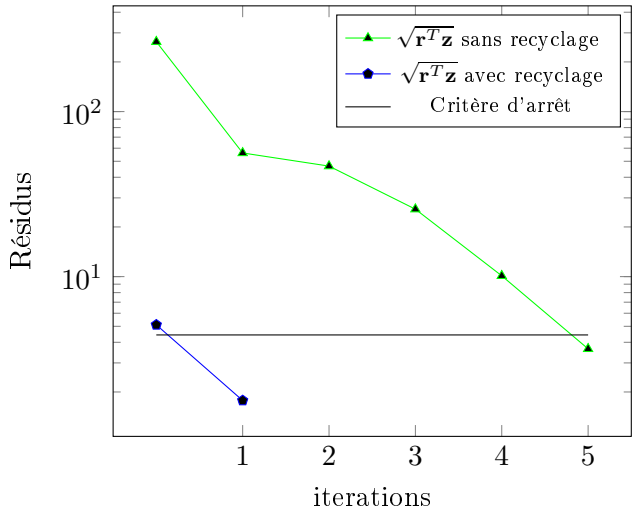


FIGURE 9.1 – Structure 2 : évolution des résidus après raffinement du sous-domaine 6 avec ou sans recyclage

9.4.1.1 Estimation d'erreur globale

Après une première résolution, nous identifions le sous-domaine 6 comme étant celui qui contribue majoritairement à l'erreur et faisons un raffinement hiérarchique pour lequel chaque arête du sous-domaine est divisée en quatre. Lors de cette première résolution, le solveur a convergé en cinq itérations et nous sauvegardons alors cinq vecteurs d'interface correspondant à ces cinq directions de recherche. Les autres paramètres sont donnés dans le tableau 9.1. Sur la figure 9.1, nous donnons l'évolution du résidu dans le cas où toutes

Approche	duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Projecteur	**I**
Méthode reconstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	p+3

TABLE 9.1 – Structure 2 : paramètres

les directions de recherche ont été utilisées comme contraintes additionnelles et dans le cas où aucun recyclage n'a été effectué. Nous donnons également la valeur du critère d'arrêt, à savoir $\frac{1}{10} e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \underline{\hat{\underline{\sigma}}}_N)$.

Nous observons la grande efficacité du recyclage qui permet d'atteindre le critère en une itération alors qu'il est nécessaire d'aller jusqu'à la sixième itération sinon.

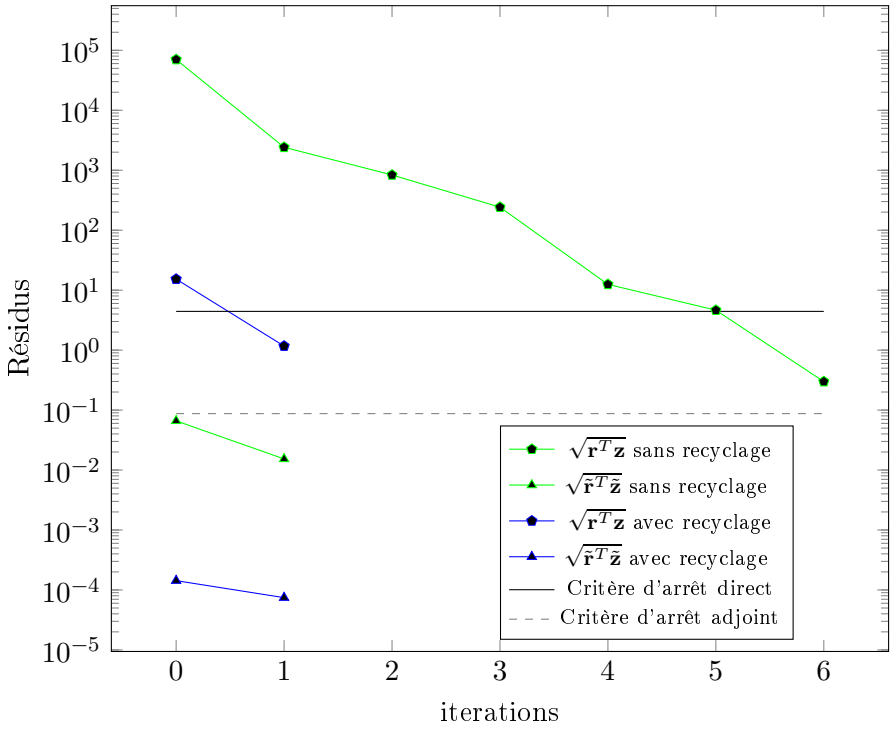


FIGURE 9.2 – Structure 2 : évolution des résidus après raffinement du sous-domaine 6 avec ou sans recyclage

9.4.1.2 Estimation d'erreur locale

Nous considérons à présent la quantité d'intérêt associée à la structure 2. Le solveur converge en quatre itérations et puisque c'est un algorithme par bloc qui a été utilisé pour résoudre simultanément problèmes direct et adjoint, huit directions de recherche ont été générées. Le sous-domaine 6 est toujours le contributeur majoritaire à l'erreur et il est raffiné de la même manière que précédemment. Sur la figure 9.2, nous donnons l'évolution du résidu dans le cas où toutes les directions de recherche ont été utilisées comme contraintes additionnelles et dans le cas où aucun recyclage n'a été effectué. Nous donnons également la valeur du critère d'arrêt pour les problèmes direct et adjoint.

Nous observons que dès la première itération le problème adjoint est résolu de manière suffisante (au sens du critère d'arrrêt) avec ou sans recyclage. Nous constatons sur ce même graphique qu'avec recyclage, une itération suffit pour atteindre le critère alors qu'il est nécessaire d'itérer six fois pour atteindre le critère si aucun recyclage n'a été fait.

9.4.2 Remaillage adaptatif

Dans le cas d'un remaillage adaptatif comme décrit au chapitre précédent, la discrétisation de l'interface est modifiée si bien qu'il est impossible d'utiliser directement les

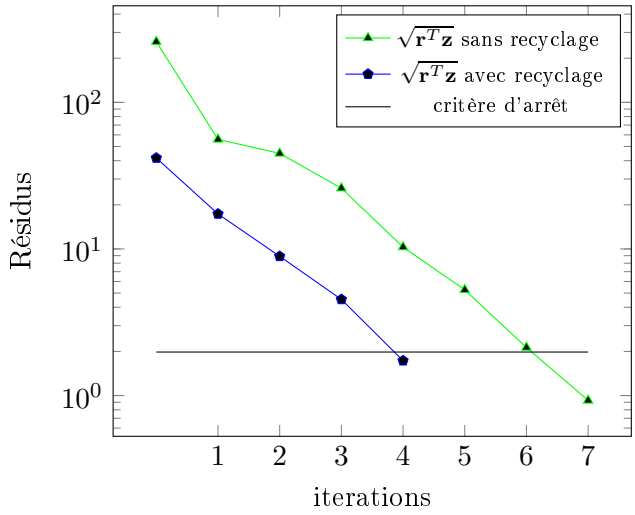


FIGURE 9.3 – Structure 2 : évolution des résidus après remaillage adaptatif avec ou sans recyclage

vecteurs associés aux directions de recherche. La solution que nous proposons est la projection de ces vecteurs sur la nouvelle discrétisation d'interface. Cette projection est simple à mettre en œuvre, peu coûteuse puisque ce sont des vecteurs de taille réduite qui sont projetés et ne requiert pas d'échange entre les sous-domaines.

Après une première résolution, nous utilisons la carte d'erreur et effectuons un remaillage adaptatif avec pour consigne de diviser l'erreur par dix. Lors de cette première résolution, le solveur a convergé en cinq itérations et nous sauvegardons alors cinq vecteurs d'interface correspondant à ces cinq directions de recherche. Les autres paramètres sont donnés dans le tableau 9.2. Sur la figure 9.3, nous donnons l'évolution du résidu dans le cas où toutes les directions de recherche ont été utilisées comme contraintes additionnelles et dans le cas où aucun recyclage n'a été effectué. Nous donnons également la valeur du critère d'arrêt, à savoir $\frac{1}{10} e_{CR_\Omega}(\underline{u}_N, \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_N)$.

Approche	duale
Algorithme	FETI
Préconditionneur	Dirichlet
Projecteur	**I**
Méthode reoncstruction champ statiquement admissible	EET
Espace de résolution des problèmes locaux	p+3

TABLE 9.2 – Structure 2 : paramètres

Nous observons que dès l'initialisation, le résidu est divisé par 5 lorsque le recyclage des directions de recherche a été mis en œuvre. Ensuite, avec une procédure de recyclage, le solveur converge plus vite vers la solution : seules quatre itérations sont nécessaires

par rapport aux sept itérations dans le cas contraire.

Conclusion

Nos travaux ont porté sur la résolution de problèmes mécaniques en deux dimensions par des méthodes de décomposition de domaine et sur l'estimation d'erreur globale et locale de cette résolution.

Dans un premier temps, nous avons dressé un état de l'art de la vérification et des méthodes de décomposition de domaine avant de rappeler les bases d'une estimation d'erreur garantie et parallèle développée dans les travaux d'Augustin Parret-Fréaud. Ses résultats illustrent la nécessité d'adapter le critère d'arrêt du solveur itératif à la discrétisation. Nous avons montré que, dans le cadre de l'erreur en relation de comportement et pour des méthodes de sous-structuration, des travaux ayant pour objectif d'éviter la sur-résolution ont proposé des méthodes pour séparer les sources d'erreur. Néanmoins, la majorité des réponses apportées nécessitent la résolution de problèmes auxiliaires (ce qui augmente le coût de calcul) ou n'offrent que des indicateurs (perte du caractère garanti).

Les apports de cette thèse sont multiples. Tout d'abord, puisque l'estimation d'erreur est réalisée par l'erreur en relation de comportement, nous avons cherché à améliorer la qualité du champ statiquement admissible reconstruit. Pour cela, nous avons développé une technique inédite permettant de tester la pertinence de la condition de prolongement forte qui est l'hypothèse à l'origine de la méthode EET. Notre approche globale permet de trouver le meilleur champ (optimisation globale au sens de l'estimateur) vérifiant cette condition. Bien sûr, cette optimisation est coûteuse mais montre la pertinence de la condition de prolongement qui reste toutefois moins efficace que la méthode *flux-free*. Notre approche propose une version vectorisée évitant les tests et remplaçant la résolution de nombreux problèmes locaux par la résolution efficace d'un problème global. Pour l'estimation d'erreur en parallèle, nous avons également proposé des améliorations quant à la reconstruction des réactions nodales équilibrées aux interface en soulignant le rôle des points multiples et des nœuds situés aux encastrements dont le mauvais traitement peut engendrer une perte de précision de l'estimateur d'erreur.

Puis, pour l'estimation d'erreur globale, nous avons démontré des bornes supérieure et inférieure strictes de l'erreur vraie séparant l'erreur de discrétisation de l'erreur algébrique. Ce résultat fondamental permet de connaître dès les premières itérations l'intervalle dans lequel l'erreur vraie sera située à convergence. Ainsi, un nouveau critère d'arrêt en lien avec la discrétisation est défini et la sur-résolution est évitée. Nous avons appliqué ce résultat fondamental dans les bornes classiques d'estimation d'erreur sur les quantités d'intérêt. Problèmes direct et adjoint sont résolus sur la même sous-structuration simultanément et nous avons défini une nouvelle fois un critère d'arrêt plus pertinent.

Enfin, dans une séquence de résolutions successives d'un même problème mécanique, nous avons mis en place des procédures de remaillage exploitant les informations fournies par l'estimateur d'erreur (cartes d'erreur ou répartition de l'erreur entre sous-domaines). Pour un raffinement menant à des discrétisations imbriquées entre sous-domaines, nous avons mis en place une méthode gérant l'incompatibilité aux interfaces. Nous avons également exploité la base du sous-espace de Krylov construite à une résolution pour accélérer la résolution suivante sur un maillage plus fin à l'aide des techniques de Krylov augmenté.

Nos travaux ouvrent la voie à plusieurs perspectives. Premièrement, il nous paraît primordial de traiter un problème industriel en trois dimensions comportant plusieurs millions de degrés de liberté. En effet, bien que nos travaux aient été illustrés sur des exemples numériques, les applications se sont limitées à des démonstrateurs. La résolution de problèmes de grande taille sera l'occasion de mesurer les gains de nos contributions. Néanmoins, nous précisons que cela requiert une implémentation efficace et rapide de la reconstruction des champs statiquement admissibles. La mise en œuvre d'une adaptivité de maillage sur un problème industriel soulignera l'importance de l'équilibrage des charges sur les différents nœuds de calcul. Inévitablement, la question de la modification de la sous-structuration au fur et à mesure des résolutions sera posée.

Dans un deuxième temps, il serait intéressant d'étendre nos travaux à d'autres types d'approches sous-structurées. Les approches hybrides semblent offrir une possibilité d'extension de la méthodologie de reconstruction des champs admissibles plus immédiate que les approches mixtes ou que pour les méthodes de décomposition avec recouvrement (type *Additive Schwarz*).

Enfin, nos travaux sont restreints puisqu'ils n'envisagent que des problèmes linéaires. Le traitement de la non-linéarité, impliquant généralement l'utilisation d'un algorithme de type Newton-Raphson, introduit un nouveau critère d'arrêt et devra donc être défini en lien avec celui du solveur de Krylov et avec la discrétisation. En vue de généraliser notre approche au non-linéaire, il faudra étendre l'estimation d'erreur en parallèle en se basant sur les techniques existantes de vérification pour des problèmes non-linéaires (erreur en dissipation, ...). Des travaux de thèse sont actuellement en cours au LMT-Cachan sur l'adaptivité des critères de l'algorithme de Newton-Raphson (algorithmes de Newton inexacts) et de l'algorithme de Krylov utilisé pour le problème d'interface.

Annexe

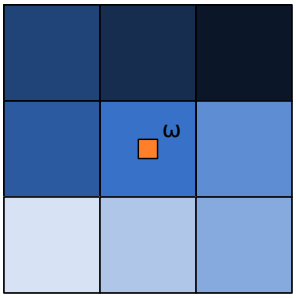


FIGURE 9.4 – Structure 1 : décomposition en 9 sous-domaines

Structure 1 Structure carrée $\Omega = [-3l; 3l] \times [-3l; 3l]$ soumise à une force volumique polynomiale et à des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord. Le coefficient de Poisson vaut 0.3 et le module d'Young est égal à 1 Pa. L'hypothèse des déformations planes est faite. Les efforts volumiques sont choisis de façon que la solution exacte soit :

$$\underline{u}_{ex} = (x+3l)(x-3l)(y+3l)(y-3l)\left((y-3l)^2\underline{e}_x + (y+3l)\underline{e}_y\right) \tag{9.4}$$

Dans le cas d'estimation d'erreur locale, la quantité d'intérêt considérée est la moyenne de la contrainte normale suivant la direction $\underline{e}_y$ sur un petit carré de côté $l/10$ et centré sur l'origine.

$$\tilde{L}(\underline{u}) = \frac{1}{mes(\omega)} \int_{\omega} (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\, d\omega \tag{9.5}$$

Nous donnons la décomposition en neuf sous-domaines sur la figure 9.4 ainsi que les solutions des problèmes de référence et adjoint sur la figure 9.5. La solution du problème adjoint est nulle presque partout sauf dans le sous-domaine central dans lequel est le support du chargement adjoint.

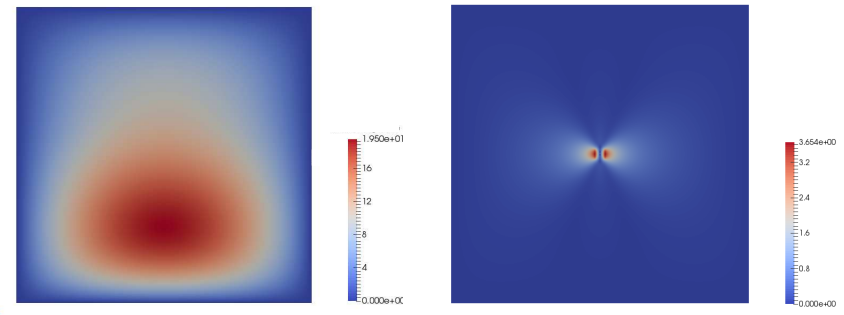


FIGURE 9.5 – Amplitude de la solution en déplacement (problème direct à gauche et adjoint à droite)

Ce cas académique a l'avantage d'avoir une solution exacte connue si bien que nous pourrons comparer les bornes obtenues à l'erreur vraie. L'erreur vraie sera calculée ainsi :

$$e_{vraie} = \sqrt{|||\underline{u}_{ex}|||_{\Omega}^2 - |||\underline{u}_H|||_{\Omega}^2} \tag{9.6}$$

Structure 2 La seconde structure, illustrée en figure 9.6, est un cas classique des publications de vérification ([107] en particulier). Il s'agit d'une structure présentant une amorce de fissure, ce qui entraîne une localisation de l'erreur de discrétisation. Les déplacements sont imposés nuls à la base et sur le trou central. Le second trou est soumis à une pression constante unitaire p_0. Un effort de traction unitaire $\underline{t}$ est appliqué normalement à la surface sur le bord gauche. Les autres bords sont libres d'efforts. Une fissure est également initiée au niveau du petit trou. Le module d'Young est égal à 1 Pa et le coefficient de Poisson est 0.3. L'hypothèse des contraintes planes est faite. La sous-structuration choisie est celle illustrée en figure 9.6.

Sur cette structure, la quantité d'intérêt considérée est la moyenne de la composante σ_{xx} sur la région ω localisée près de la fissure. Le chargement du problème adjoint est donc :

$$\tilde{L} = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}_{\Sigma} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))d\Omega \tag{9.7}$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}_{\Sigma} = \frac{1}{\text{mes}(\omega)} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ et est en orange sur la figure 9.6

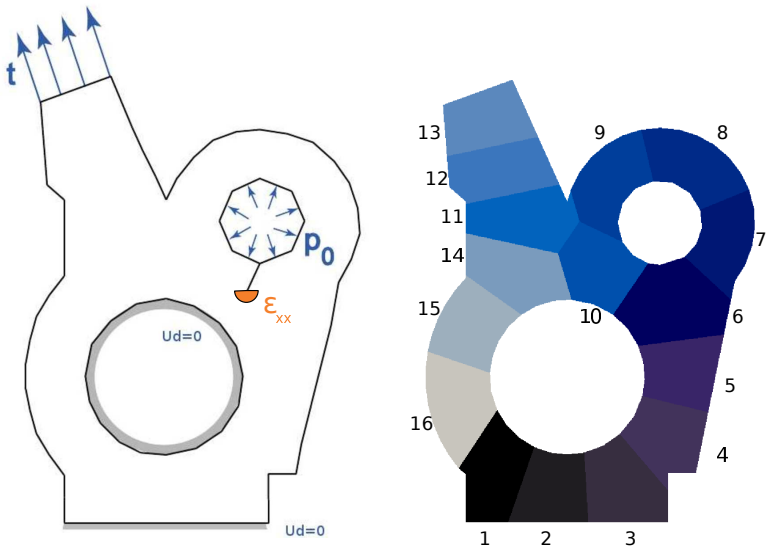


FIGURE 9.6 – Chargement du problème direct (bleu) et adjoint (orange) et décomposition.

Sur la figure 9.7, nous donnons en couleur les contraintes de Von Mises de la solution éléments finis. La déformée présente sur la figure est celle due au déplacement solution. Nous constatons une concentration de contraintes au niveau de la fissure, comme attendu.

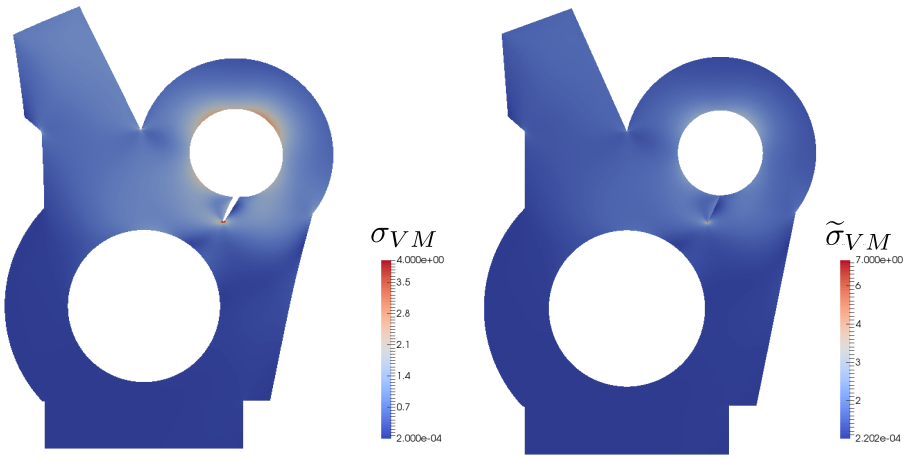


FIGURE 9.7 – Contraintes de Von Mises pour le problème direct (gauche) et adjoint (droite).

Nous donnons également le déplacement adjoint sur la figure 9.8 ainsi qu'un zoom sur le sous-domaine 6. A l'exception du sixième sous-domaine, les déplacements du problème adjoint sont quasiment nuls sur toute la structure.

Dans la suite, pour chacune des structures nous préciserons uniquement l'approche utilisée (primale ou duale), l'algorithme itératif (BDD ou FETI), le préconditionneur et le projecteur. Nous donnerons également la méthode utilisée pour la reconstruction du champ statiquement admissible ainsi que la manière dont ont été résolus les problèmes locaux : soit par augmentation du degré des fonctions de forme (p+k) soit par sous-découpage de l'élément en sous-éléments ($\frac{h}{2^k}$) comme illustré en figures 9.9, 9.10, 9.11.

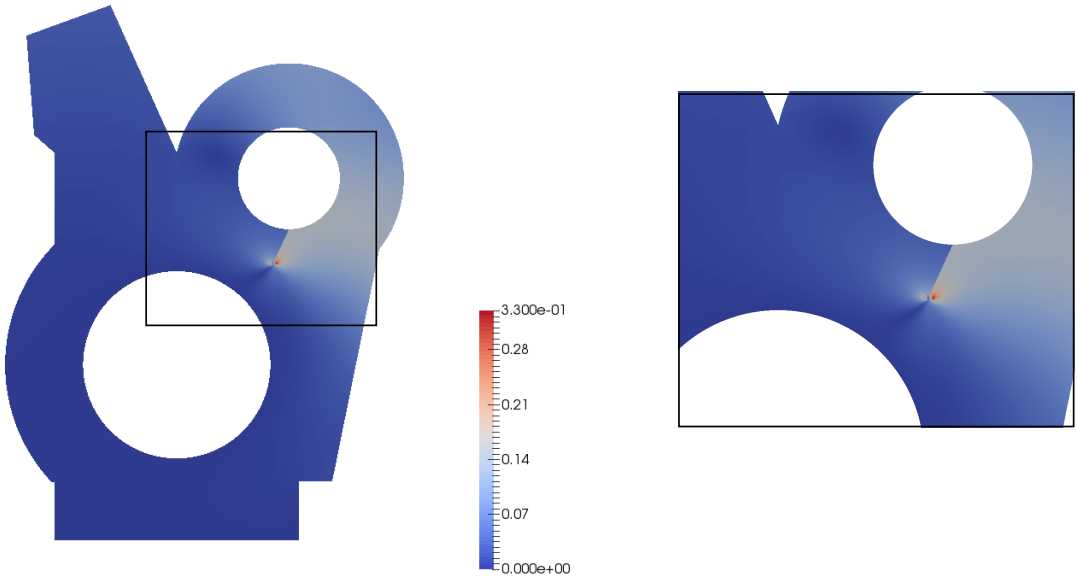


FIGURE 9.8 – Amplitude de la solution en déplacement du problème adjoint (et zoom)

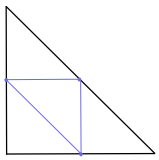


FIGURE 9.9 – $\frac{h}{2^1}$

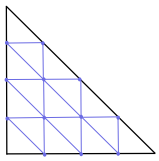


FIGURE 9.10 – $\frac{h}{2^2}$

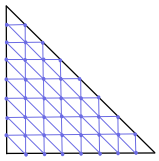


FIGURE 9.11 – $\frac{h}{2^3}$

Bibliographie

[1] M. Ainsworth. The influence and selection of subspaces for a posteriori error estimators. *Numerische Mathematik*, 73(4) :399, 1996.

[2] M. Ainsworth and J. T. Oden. A posteriori error estimators for second order elliptic systems : Part 2. an optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes. *Computers & Mathematics with Applications*, 26(9) :75–87, 1993.

[3] J. Aliaga, D. Boley, R. Freund, and V. Hernández. A lanczos-type method for multiple starting vectors. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 69(232) :1577–1601, 2000.

[4] I. Babuška and A. Miller. A feedback finite element method with a posteriori error estimation. part 1 : The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61 :1–40, 1987.

[5] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10) :1597–1615, 1978.

[6] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptative finite element computation. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 15(4) :736–754, 1978.

[7] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18 :519, 1979.

[8] I. Babuška, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, and S. K. Gangaraj. A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 38(24) :4207–4235, 1995.

[9] K. Bathe. *Finite element procedure in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1996.

[10] G. Bayada, J. Sabil, and T. Sassi. A neumann-neumanndomain decomposition algorithm for the signorini problem. *Applied Mathematics Letters*, 17(10) :1153–1159, 2004.

[11] R. Becker, C. Johnson, and R. Rannacher. Adaptive error control for multigrid finite element. *Computing*, 55(4) :271–288, 1995.

[12] R. Becker and R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *Journal of Numerical Mathematics*, 4 :237–264, 1996.

[13] J. Bellec. *Prise en compte de la variabilité dans le calcul de structures avec contact.* PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2008.

[14] E. Bellenger and P. Coorevits. Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(15) :1413 – 1440, 2005.

[15] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. In H. B. . J.-L. Lions, editor, *Collège de France Seminar XI*, volume XI, page 13. Pitman, 1994.

[16] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitt*, 28(2) :97, 2005.

[17] E. Chacón Vera. A continuous framework for FETI-DP with a mesh independent condition number for the dual problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(30) :2470–2483, 2009.

[18] L. Chamoin, E. Florentin, S. Pavot, and V. Visseq. Robust goal-oriented error estimation based on the constitutive relation error for stochastic problems. *Computers & Structures*, 106–107(0) :189–195, 2012.

[19] L. Chamoin and P. Ladevèze. Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(12) :1387–1411, 2007.

[20] L. Chamoin and P. Ladevèze. A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9-12) :994–1014, 2008.

[21] F. Chinesta, P. Ladevèze, and E. Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18 :395–404, 2011. 10.1007/s11831-011-9064-7.

[22] H. W. Choi and M. Paraschivoiu. Adaptive computations of a posteriori finite element output bounds : a comparison of the "hybrid-flux" approach and the "flux-free" approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(36-38) :4001–4033, 2004.

[23] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland, 1978.

[24] G. Coffignal and P. Ladevèze. Error computation and optimal mesh in elasticity and elastoplasticity. *In Proc. SMIRT*, 7(L) :177–182, 1983.

[25] P. Coorevits, J. P. Dumeau, and J. P. Pelle. Error estimator and adaptivity for three-dimensional finite element analyses. In P. Ladevèze and J. T. Oden, editors, *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, volume 47 of *Studies in Applied Mechanics*, pages 443–457. Elsevier, 1998.

[26] R. Cottereau, P. Díez, and A. Huerta. Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Computational Mechanics*, 44(4) :533–547, 2009.

[27] T. Coupez, H. Digonnet, and R. Ducloux. Parallel meshing and remeshing. *Applied mathematical modelling*, 25(2) :153–175, 2000.

[28] L. Demkowicz, J. T. Oden, and T. Strouboulis. Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part I : Variational principles and a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2) :217–251, 1984.

[29] H. B. Dhia and G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7) :649 – 654, 2001.

[30] P. Díez, J. J. Egozcue, and A. Huerta. A posteriori error estimation for standard finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4) :141–157, 1998.

[31] P. Díez and A. Huerta. A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) :215–229, 1999.

[32] P. Díez, J. José Ródenas, and O. C. Zienkiewicz. Equilibrated patch recovery error estimates : simple and accurate upper bounds of the error. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10) :2075–2098, 2007.

[33] P. Díez, N. Parés, and A. Huerta. Recovering lower bounds of the error by post-processing implicit residual a posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10) :1465–1488, 2003.

[34] C. R. Dohrmann. A preconditionner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 25 :246, 2003.

[35] D. C. Drucker. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal of Mechanics*, 3(2) :235–249, 1964.

[36] P. Díez and G. Calderón. Remeshing criteria and proper error representations for goal oriented h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4–6) :719 – 733, 2007.

[37] L. El Alaoui, A. Ern, and M. Vohralík. Guaranteed and robust a posteriori error estimates and balancing discretisation and linearization errors for monotone nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37-40) :2782—2795, 2010.

[38] A. Ern and M. Vohralík. Adaptive inexact newton methods with a posteriori stopping criteria for nonlinear diffusion pdes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(4) :A1761–A1791, 2013.

[39] C. Farhat, P.-S. Chen, F. Risler, and F.-X. Roux. A unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(2) :257–288, 1998.

[40] C. Farhat, M. Lesoinne, and K. Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numerical linear algebra with applications*, 7(7-8) :687–714, 2000.

[41] C. Farhat, M. Lesoinne, P. L. Tallec, K. Pierson, and D. Rixen. FETI-DP : a dual-primal unified FETI method part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1523–1544, 2001.

[42] C. Farhat and J. Mandel. The two-level FETI method for static and dynamic plate problems part I : An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1–2) :129 – 151, 1998.

[43] C. Farhat, J. Mandel, and F. X. Roux. Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(3-4) :365, 1994.

[44] C. Farhat, K. Pierson, and M. Lesoine. The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4) :333–374, 2000.

[45] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6) :1205, 1991.

[46] C. Farhat and F. X. Roux. The dual schur complement method with well-posed local neumann problems. *Contemporary Mathematics*, 157 :193, 1994.

[47] C. Farhat and F. X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 2(1) :1–124, 1994. North-Holland.

[48] E. Florentin. *Sur l'évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle.* PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2002.

[49] E. Florentin, L. Gallimard, and J. P. Pelle. Evaluation of the local quality of stresses in 3d finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39-40) :4441–4457, 2002.

[50] L. Gallimard. A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4) :460–482, 2009.

[51] L. Gallimard, P. Ladevèze, and J. P. Pelle. Error estimation and adaptativityin elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(2) :189–217, 1996.

[52] L. Gallimard, P. Ladevèze, and J. P. Pelle. Error estimation and time-space parameters optimization for fem non-linear computation. *Computers & Structures*, 64(1-4) :145–156, 1997.

[53] L. Gallimard and T. Sassi. A posteriori error analysis of a domain decomposition algorithm for unilateral contact problem. *Computers & Structures*, 88(13-14) :879–888, 2010.

[54] P. George. *Automatic mesh generation. Applications to finite element methods.* Wiley, 1991.

[55] T. Gerasimov, E. Stein, and P. Wriggers. Constant-free explicit error estimator with sharp upper error bound property for adaptive fe analysis in elasticity and fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages n/a–n/a, 2014.

[56] P. Gosselet, V. Chiaruttini, C. Rey, and F. Feyel. A monolithic strategy based on an hybrid domain decomposition method for multiphysic problems : Application to poroelasticity. *Revue Européenne des Éléments*, 13(5-7) :523–534, 2004.

[57] P. Gosselet, C. Rey, and J. Pebrel. Total and selective reuse of krylov subspaces for the resolution of sequences of nonlinear structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(1) :60–83, 2013.

[58] P. Gosselet, V. Rey, and C. Rey. A global element equilibration technique to recover statically admissible stress fields in finite element computations. In *ECCOMAS 2012 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2012.

[59] P. Gosselet, D. Rixen, F.-X. Roux, and N. Spillane. Simultaneous FETI and block FETI : Robust domain decomposition with multiple search directions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015.

[60] D. Hilhorst and M. Vohralík. A posteriori error estimates for combined finite volume–finite element discretizations of reactive transport equations on nonmatching grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8) :597–613, 2011.

[61] A. Huerta and P. Díez. Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3) :21–41, 2000.

[62] P. Jiránek, Z. Strakoš, and M. Vohralík. A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(3) :1567–1590, 2010.

[63] C. Johnson and P. Hansbo. Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101(1-3) :143–181, 1992.

[64] M. R. Justino, K. C. Park, and C. A. Felippa. An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis : performance evaluation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(15) :2739–2758, 1997.

[65] M. Kempeneers. *Éléments finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale.* PhD thesis, Université de Liège, 2005.

[66] M. Kempeneers, P. Beckers, J. P. M. de Almeida, and O. J. B. A. Pereira. Modèles équilibre pour l'analyse duale. *Revue Européenne des Élements Finis*, 12(6) :737–760, 2003.

[67] M. Kempeneers, J.-F. Debongnie, and P. Beckers. Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(4) :513–536, 2009.

[68] A. Klawonn and O. Widlund. FETI and neumann-neumann iterative substructuring methods : Connections and new results. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 54(1) :57–90, 2001.

[69] A. Klawonn and O. B. Widlund. Dual-primal FETI methods for linear elasticity. *Communications on pure and applied mathematics*, 59(11) :1523–1572, 2006.

[70] V. A. Kondratiev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 16 :209–292, 1967.

[71] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. PhD thesis, Université P. et M. Curie, 1975.

[72] P. Ladevèze. The large time increments method for analysis of structures with nonlinear behavior described by internal variables (in french). *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 309(2) :1095, 1989.

[73] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.

[74] P. Ladevèze. Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 334(7) :399–407, 2006.

[75] P. Ladevèze. Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics. *Computational Mechanics*, 42(2) :271–286, 2008.

[76] P. Ladevèze, B. Blaysat, and E. Florentin. Strict upper bounds of the error in calculated outputs of interest for plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245–246(0) :194–205, 2012.

[77] P. Ladevèze and L. Chamoin. Calculation of strict error bounds for finite element approximations of non-linear pointwise quantities of interest. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(13) :1638–1664, 2010.

[78] P. Ladevèze and L. Chamoin. On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23-24) :2032–2047, 2011.

[79] P. Ladevèze, L. Chamoin, and E. Florentin. A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :766–777, 2010.

[80] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and application. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.

[81] P. Ladevèze and E. A. W. Maunder. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137(2) :111–151, 1996.

[82] P. Ladevèze and N. Moës. A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 :45–68, 1997.

[83] P. Ladevèze, N. Moës, and B. Douchin. Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 :247–264, 1999.

[84] P. Ladevèze, D. Néron, and P. Gosselet. On a mixed and multiscale domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8) :1526–1540, 2007.

[85] P. Ladevèze, J. P. Pelle, and P. Rougeot. Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering Computations*, 8(1) :69, 1991.

[86] P. Ladevèze, F. Pled, and L. Chamoin. New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012.

[87] P. Ladevèze and P. Rougeot. New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1-4) :239–249, 1997.

[88] P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard, and J. P. Moreau. Local error estimators for finite element linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) :231–246, 1999.

[89] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Comput. Mech. Adv.*, 1(2) :121–220, 1994.

[90] P. Le Tallec, Y. H. De Roeck, and M. Vidrascu. Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 34(1) :93, 1991.

[91] F. Louf. *Sur le contrôle des analyses éléments finis avec contact et frottement - Application aux simulations d'impact.* PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2003.

[92] F. Louf, J. P. Combe, and J. P. Pelle. Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 81(18-19) :1759–1772, 2003.

[93] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3) :233, 1993.

[94] J. Mandel, C. R. Dohrmann, and R. Tezaur. An algebraic theory for primal and dual substructuring methods by constraints. *Applied numerical mathematics*, 54(2) :167–193, 2005.

[95] J. Mandel and B. Sousedík. BDDC and FETI-DP under minimalist assumptions. *Computing*, 81(4) :269–280, 2007.

[96] J. Mandel and R. Tezaur. On the convergence of a dual-primal substructuring method. *Numerische Mathematik*, 88(3) :543–558, 2001.

[97] D. Meidner, R. Rannacher, and J. Vihharev. Goal-oriented error control of the iterative solution of finite element equations. *Journal of numerical mathematics*, 17(2) :143–172, 2009.

[98] N. Moës. *Une méthode de mesure d'erreur* a posteriori *pour les modèles de matériaux décrits par variables internes.* PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, 1996.

[99] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, 1999.

[100] J. P. Moitinho de Almeida and E. A. W. Maunder. Recovery of equilibrium on star patches using a partition of unity technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(12) :1493–1516, 2009.

[101] J. T. Oden and S. Prudhomme. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(5-6) :735–756, 2001.

[102] S. Ohnimus, E. Stein, and E. Walhorn. Local error estimates of fem for displacements and stresses in linear elasticity by solving local neumann problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(7) :727–746, 2001.

[103] M. Paraschivoiu. A posteriori finite element output bounds in three space dimensions using the FETI method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(49-50) :6629–6640, 2001.

[104] M. Paraschivoiu and H. W. Choi. A posteriori finite element output bounds with adaptive mesh refinement : application to a heat transfer problem in a three-dimensional rectangular duct. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43) :4905–4925, 2002.

[105] M. Paraschivoiu and A. T. Patera. A hierarchical duality approach to bounds for the outputs of partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(3-4) :389–407, 1998.

[106] M. Paraschivoiu, J. Peraire, and A. T. Patera. A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1-4) :289–312, 1997.

[107] N. Parés, P. Díez, and A. Huerta. Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6) :297–323, 2006.

[108] N. Parés, H. Santos, and P. Díez. Guaranteed energy error bounds for the poisson equation using a flux-free approach : Solving the local problems in subdomains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(10) :1203–1244, 2009.

[109] K. C. Park, M. R. Justino, and C. A. Felippa. An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis : algorithm description. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(15) :2717–2737, 1997.

[110] A. Parret-Fréaud. *Estimation d'erreur de discrétisation dans les calculs par décomposition de domaine*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2011.

[111] A. Parret-Fréaud, C. Rey, P. Gosselet, and F. Feyel. Fast estimation of discretization error for fe problems solved by domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52) :3315–3323, 2010.

[112] D. A. D. Pietro, E. Flauraud, M. Vohralík, and S. Yousef. A posteriori error estimates, stopping criteria, and adaptivity for multiphase compositional darcy flows in porous media. *Journal of Computational Physics*, 276(0) :163 – 187, 2014.

[113] D. A. D. Pietro, M. Vohralík, and S. Yousef. An a posteriori-based, fully adaptive algorithm with adaptive stopping criteria and mesh refinement for thermal multiphase compositional flows in porous media. *Computers and Mathematics with Applications*, 68(12, Part B) :2331 – 2347, 2014. Advances in Computational Partial Differential Equations.

[114] F. Pled, L. Chamoin, and P. Ladevèze. On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(5) :409–441, 2011.

[115] F. Pled, L. Chamoin, and P. Ladevèze. An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses. *Computational Mechanics*, 49(3) :357–378, 2012.

[116] W. Prager and J. L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of functions spaces. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5 :261–269, 1947.

[117] S. Prudhomme and J. T. Oden. On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) :313–331, 1999.

[118] F. Rapetti, F. Dubois, and A. Bossavit. Discrete vector potentials for nonsimply connected three-dimensional domains. *SIAM J. NUMER. ANAL.*, 41(4) :1505–1527, 2003.

[119] C. Rey, P. Gosselet, and V. Rey. A guaranted error bound separating algebraic and discretization contributions in non-overlapping domain decomposition methods. In *International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*, 2013.

[120] C. Rey, P. Gosselet, V. Rey, and A. Parret-Fréaud. Stopping criterion for feti solver based on an evaluation of the discretization error. In *21st International Conference on Domain Decomposition Methods*, 2012.

[121] V. Rey, P. Gosselet, and C. Rey. Méthode globale d'équilibrage élémentaire pour la reconstruction de champs statiquement admissibles dans le cadre de la méthode des éléments finis. In *CSMA 2013 - Association Calcul des Structures et Modélisation*, 2013.

[122] V. Rey, P. Gosselet, and C. Rey. Study of the strong prolongation equation for the construction of statically admissible stress fields : Implementation and optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268(0) :82 – 104, 2014.

[123] V. Rey, P. Gosselet, and C. Rey. Strict bounding of quantities of interest in computations based on domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 287(0) :212 – 228, 2015.

[124] V. Rey, C. Rey, and P. Gosselet. A strict error bound with separated contributions of the discretization and of the iterative solver in non-overlapping domain decomposition methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270(0) :293 – 303, 2014.

[125] D. J. Rixen and C. Farhat. A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4) :489–516, 1999.

[126] D. J. Rixen, C. Farhat, R. Tezaur, and J. Mandel. Theoretical comparison of the FETI and algebraically partitioned FETI methods, and performance comparisons with a direct sparse solver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4) :501–533, 1999.

[127] Y. Saad. Analysis of augmented krylov subspace methods. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(2) :435–449, 1997.

[128] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, 3rd edition edition, 2000.

[129] N. Spillane and D. Rixen. Automatic spectral coarse spaces for robust finite element tearing and interconnecting and balanced domain decomposition algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(11) :953–990, 2013.

[130] D. Stefanica. Parallel FETI algorithms for mortars. *Applied Numerical Mathematics*, 54(2) :266–279, 2005.

[131] T. Strouboulis and K. A. Haque. Recent experiences with error estimation and adaptivity, part I : Review of error estimators for scalar elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97(3) :399–436, 1992.

[132] T. Strouboulis and K. A. Haque. Recent experiences with error estimation and adaptivity, part II : Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(3) :359–430, 1992.

[133] S. Tavener and T. Wildey. Adjoint based a posteriori analysis of multiscale mortar discretizations with multinumerics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(6) :A2621–A2642, 2013.

[134] P. G. V. Rey, C. Rey. Pilotage de stratégies de calcul par décomposition de domaine par des objectifs de précision sur des quantités d'intérêt. In *CSMA 2015 - Association Calcul des Structures et Modélisation*, 2015.

[135] F. Verdugo and P. Díez. Computable bounds of functional outputs in linear visco-elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245–246(0) :313 – 330, 2012.

[136] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.

[137] M. Vohralík and M. Wheeler. A posteriori error estimates, stopping criteria, and adaptivity for two-phase flows. *Computational Geosciences*, 17(5) :789–812, 2013.

[138] M. Vohralík. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(4) :1570–1599, 2007.

[139] J. Waeytens. Vérification locale : obtention de bornes strictes en dynamique. Master's thesis, Ens Cachan, 2007.

[140] J. Waeytens. *Contrôle des calculs en dynamique : bornes strictes et pertinentes sur une quantité d'intérêt.* PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2010.

[141] C. Zaccardi, L. Chamoin, R. Cottereau, and H. B. Dhia. Error estimation and model adaptation for a stochastic-deterministic coupling method based on the arlequin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(2) :87–109, 2013.

[142] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method : basic formulation and linear problems.* Mc Graw-Hill, Londres, 1988.

[143] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineerng analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2) :337–357, 1987.

[144] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1331–1364, 1992.

[145] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7) :1365–1382, 1992.

[146] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery (spr) and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101(1-3) :207–224, 1992.