



HAL
open science

Accélération d'électrons par onde de sillage laser : Développement d'un modèle analytique étendu au cas d'un plasma magnétisé dans le régime du Blowout

Sébastien Rassou

► **To cite this version:**

Sébastien Rassou. Accélération d'électrons par onde de sillage laser : Développement d'un modèle analytique étendu au cas d'un plasma magnétisé dans le régime du Blowout. Physique des Hautes Energies - Théorie [hep-th]. Université Paris Saclay (COMUE), 2015. Français. NNT : 2015SACLS066 . tel-01260919

HAL Id: tel-01260919

<https://theses.hal.science/tel-01260919>

Submitted on 22 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2015SACLS066

THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE AU
"COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE (CEA)"

ECOLE DOCTORALE N° 572
Ondes et Matières

Spécialité : Physique des Plasmas

Par

Sébastien Rassou

Accélération d'électrons par onde de sillage laser : Développement d'un modèle analytique étendu au cas d'un plasma magnétisé dans le régime du Blowout

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 30 Octobre 2015 :

Composition du Jury :

M. Galtier Sébastien	Professeur à l'Université Paris Saclay	Président du Jury
M. Lifschitz Agustin	Chercheur à l'Université Paris Saclay	Rapporteur
M. Sanz Javier	Professeur à l'Université de Madrid	Rapporteur
M. Maynard Gilles	Directeur de Recherche à l'Université Paris Saclay	Examineur
M. Bourdier Alain	Ingénieur chercheur au CEA	Directeur de thèse
M. Drouin Mathieu	Ingénieur chercheur au CEA	Encadrant de thèse

Remerciements

La soutenance étant passée, je vais enfin pouvoir terminer ce manuscrit en remerciant toutes les personnes qui m'ont apporté leur soutien. Cela a été un vrai plaisir de passer ces trois années de thèse au CEA dans le Service de Physique des Plasmas et Électromagnétisme. Je souhaite remercier Alain Bourdier mon directeur de thèse, qui m'a apporté toute son aide pour le bon déroulement de cette thèse en étant toujours disponible et à l'écoute de mes moindres questions. La confiance et la liberté que vous m'avez accordées ont permis d'obtenir au cours de cette thèse des résultats originaux. Ensuite, je souhaite également remercier Mathieu Drouin, mon second directeur de thèse en quelque sorte. Tes conseils avisés et ton enthousiasme ont contribué à faire avancer cette thèse. Merci également pour tes précieux conseils concernant l'utilisation des codes PIC sur laquelle repose une grande partie de ce travail. Les nombreuses discussions qu'on a eues avec Alain ont abouti à de nouveaux résultats et à la publication de plusieurs articles.

Je souhaiterais maintenant remercier mes deux rapporteurs, Agustin Lifschitz et Javier Sanz pour avoir pris le temps de relire ce manuscrit et m'avoir fourni de précieuses informations pour l'améliorer. Mes remerciements vont également à Sébastien Galtier qui a présidé le jury lors de la soutenance, et à Gilles Maynard qui a accepté mon invitation pour faire partie du jury de thèse.

Je remercie également Laurent Gremillet et Xavier Davoine pour les conseils et informations sur l'utilisation des codes PIC CALDER et CALDER-Circ. Cela m'a aidé à avancer plus rapidement sur certains aspects de mon travail et à comprendre la modélisation sous-jacente à l'utilisation des codes PIC. J'adresse tout mes encouragements à Mathieu Lobet, thésard en même temps que moi et qui soutiendra dans quelques semaines.

Je remercie les nombreux collègues, stagiaires ou thésards que j'ai rencontrés dans le service. Florent stagiaire avec qui j'ai travaillé au tout début de ma thèse. De nombreux thésards devenus docteurs comme Jérémie, Julien et Charles et ce qui le deviendront dans les prochaines années comme Pedro, Julien et Simon. Je tiens à remercier tout le reste du service pour l'accueil et les trois ans de thèse passés à leur côté notamment Franck Hamann et Michel Primout. Merci également Sylvie Dulac pour son aide et à Serge Bouquet pour son invitation à la conférence HEDLA. Je remercie Olivier, Alain et Jean-Noël, pour avoir partagé et animé la plupart de nos repas avec Alain à midi.

Je remercie également l'école Doctorale Onde et Matière qui a obtenu un financement pour mener à bien ce travail de recherche. Je tiens à remercier Martine Basset pour toute son aide, et la mise à disposition d'un bureau à Orsay au cours des derniers mois de la thèse.

Enfin, je remercie ma famille pour leur aide tout au long de cette thèse notamment pour la préparation de la soutenance et l'organisation du pot.

Résumé

Une impulsion laser intense se propageant dans un plasma sous-dense ($n_e \ll n_c$) déplace les électrons sur son passage et crée une onde de sillage à même d'accélérer des électrons. Lorsque l'impulsion est très intense ($I_0 > 10^{18} \text{ W.cm}^{-2}$) et de durée très courte ($\tau_0 < 100 \text{ fs}$), on atteint le régime de la bulle. Les champs électriques dans ces bulles, de l'ordre de 100 GV/m, peuvent accélérer un faisceau d'électrons jusqu'au GeV sur des distances de l'ordre du centimètre. Dans ce régime, les électrons expulsés par la force pondéromotrice du laser forment une fine et dense couche à la surface d'une cavité d'ions restés immobiles. Les propriétés de ce régime sont examinées par l'intermédiaire d'un modèle analytique, que nous avons développé en nous inspirant du travail de W. Lu et S. Yi.

En nous plaçant dans ce régime prometteur, nous avons étudié les mécanismes d'injection et de piégeage dans l'onde de sillage. Après avoir rappelé la théorie du chauffage stochastique, nous avons déterminé les situations dans lesquelles ce phénomène apparaît lors de l'injection dans l'onde de sillage. Les polarisations linéaires parallèles ou circulaires positives conduisent respectivement à une injection mettant en jeu du chauffage stochastique, ou à l'injection froide. Un paramètre de similarité est introduit, celui-ci permet de déterminer la méthode d'injection la plus appropriée pour maximiser la charge injectée.

Enfin, le modèle analytique présenté en première partie est étendu afin de tenir compte de l'influence d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué au plasma. Lorsque le plasma est magnétisé deux phénomènes remarquables se manifestent, d'une part une ouverture apparaît à l'arrière de la bulle et d'autre part un mécanisme d'amplification du champ magnétique longitudinale est induit par la variation du flux magnétique. Les prédictions de notre modèle analytique relatives à la forme de l'onde de sillage et aux champs électromagnétiques, qui s'y développent, sont confrontées aux résultats de simulations PIC 3D issues du code CALDER-Circ. La conséquence immédiate de la déformation de l'onde de sillage est la réduction, voire la suppression de l'auto-injection. L'application d'un champ magnétique longitudinal, combinée à un choix judicieux des paramètres laser-plasma, permet de réduire la dispersion en énergie des faisceaux d'électrons produits après injection optique.

Table des matières

INTRODUCTION	1
I Accélération d'électrons par onde de sillage laser en régime de bulle	7
1 Physique de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser	9
1.1 Introduction à l'interaction laser-plasma	10
1.1.1 Laser	10
1.1.2 Plasma	12
1.1.3 Propagation d'une onde dans un plasma	13
1.2 Modélisation numérique	15
1.2.1 Équation de Vlasov	16
1.2.2 Méthode Particle In Cell (PIC)	18
1.2.3 Limitations des schémas numériques	22
1.2.4 CALDER - code PIC massivement parallélisé	23
1.3 Accélération par une onde de sillage laser - théorie 1D	25
1.3.1 Création de l'onde de sillage	25
1.3.2 Piégeage des électrons et accélération	27
1.3.3 Régime de la bulle ou du blowout	29
1.4 Injection des électrons dans une onde de sillage laser	30
1.4.1 Auto-injection	30
1.4.2 Injection optique	30
1.4.3 Injection par gradient de densité	31
1.5 Accélération des électrons - guidage de l'impulsion laser.	32
1.5.1 Création d'un canal plasma	32
1.5.2 Guidage par capillaire	32
1.5.3 Utilisation d'un champ magnétique longitudinal	33
1.6 Applications de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser. . .	34
1.6.1 Source de rayonnement	34
1.6.2 Radiographie	36

2	Modélisation de l'onde de sillage laser dans le régime de la bulle	39
2.1	Présentation du modèle et premières approximations	40
2.1.1	Description du plasma	40
2.1.2	Approximation des champs moyennés - force pondéromotrice.	42
2.1.3	Approche hamiltonienne	43
2.2	Système d'équations décrivant le rayon de la bulle	44
2.2.1	Hypothèse sur la forme de l'onde de sillage	45
2.2.2	Expression du potentiel effectif	49
2.2.3	Calcul des autres potentiels	52
2.2.4	Équation sur le rayon de la bulle	53
2.2.5	Calcul des champs électriques	54
2.3	Validation du modèle théorique	56
2.3.1	Définition de l'impulsion laser et de la force pondéromotrice .	56
2.3.2	Conditions initiales et paramètres	57
2.3.3	Confrontation du modèle aux simulations PIC	59
2.3.4	Application au beamloading	68
2.4	Conclusion	70
II	Accélération d'électrons par onde de sillage laser initiée par chauffage stochastique	71
3	Théorie du chauffage stochastique	73
3.1	Rappels de dynamique hamiltonienne	74
3.1.1	Formalisme de Lagrange	74
3.1.2	Formalisme Hamiltonien	76
3.1.3	Équation de Hamilton-Jacobi	79
3.2	Dynamique d'une particule chargée dans le champ électromagnétique d'une onde se propageant dans le vide	81
3.2.1	Formulation Hamiltonienne	81
3.2.2	Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi	82
3.3	Dynamique d'une particule chargée dans le champ électromagnétique de deux ondes - Chauffage stochastique	85
3.3.1	Résonances Compton	85
3.3.2	Le critère de Chirikov	88
3.3.3	Étude pour deux lasers contrepropagatifs ($\alpha = \pi$)	91
3.4	Mise en évidence du chaos par simulations numériques	93

3.4.1	Simulations numériques à une particule	93
3.4.2	Simulation PIC sur une couche de plasma	96
3.5	Conclusion	102
4	Influence de la polarisation dans l'injection optique et le piégeage des électrons	103
4.1	Injection optique	105
4.1.1	Contrôle optique de l'injection	105
4.1.2	Modèle théorique en ondes planes	106
4.1.3	Simulations PIC sur une couche fine de plasma	111
4.2	Simulations sur des plasmas millimétriques	113
4.2.1	Paramètres des simulations	113
4.2.2	Premiers résultats	114
4.3	Injection froide ou chauffage stochastique ?	118
4.3.1	Analyse phénoménologique avec des particules tests	118
4.3.2	Influence des dimensions de l'onde de sillage	121
4.3.3	Inhibition de l'onde de sillage	125
4.4	Impact du chauffage stochastique en fonction du paramètre ρ	129
4.4.1	Mise en évidence du paramètre ρ	130
4.4.2	Validité de ρ comme paramètre de similarité	133
4.4.3	Influence du waist du lasers	135
4.5	Conclusion	136
III	Accélération d'électrons par onde de sillage laser en plasma magnétisé	139
5	Influence d'un champ magnétique sur une onde de sillage créée par laser dans le régime de la bulle	141
5.1	Introduction - Ondes dans les plasmas magnétisés	142
5.1.1	Propagation parallèle - rotation Faraday	144
5.1.2	Propagation perpendiculaire - résonance hybride haute	145
5.2	Modélisation de l'onde de sillage créée par laser en plasma magnétisé	146
5.2.1	Modification du modèle analytique	146
5.2.2	Calcul du champ magnétique créé par l'onde de sillage laser	150
5.2.3	Importance de la géométrie 3D	154
5.2.4	Comparaison du modèle avec des simulations PIC	157
5.3	Génération de champ magnétique dans l'onde de sillage	162

5.3.1	Caractéristiques du champ magnétique auto-généré	162
5.3.2	Explication par la loi de Lenz-Faraday	164
5.3.3	Rétroaction du champ magnétique auto-généré	167
5.4	Conclusion	170
6	Influence d'un champ magnétique sur le piégeage des électrons	171
6.1	Influence d'un champ magnétique sur l'auto-injection	172
6.1.1	Influence sur le piégeage des particules	172
6.1.2	Régime d'auto-injection en plasma magnétisé	173
6.2	Influence d'un champ magnétique sur l'injection optique des électrons	176
6.2.1	Influence de la densité électronique	177
6.2.2	Influence du volume de collision	182
6.3	Conclusion	185
	CONCLUSION GÉNÉRALE	187
A	Code CALDER-Circ ajout d'un champ magnétique initial	193
A.1	Décomposition de Fourier	193
A.2	Équations de Maxwell	195
A.3	Mouvement des macro-particules	196
A.4	Simulations numériques avec CALDER-Circ en plasma magnétisé . .	196
B	Modélisation de l'onde de sillage dans le régime du Blowout : Calculs des potentiels scalaire et vecteur	199
B.1	Calcul du potentiel effectif	199
B.1.1	Détermination de la fonction de Green	200
B.1.2	Expression du potentiel effectif Ψ	202
B.2	Calcul du potentiel vecteur A_r	203
C	Calcul du courant de retour	205
D	Modèle de capture par une bulle d'ions écrantée	209
D.1	Mise en équations de la condition de piégeage	209
D.2	Modélisations et simulations numériques	213
	Bibliographie	217

INTRODUCTION

Un plasma peut être considéré comme un ensemble de charges positives et négatives et de particules neutres. On peut créer un plasma en soumettant par exemple un gaz d'atomes neutres, à une énergie suffisamment importante pour ioniser ce dernier de façon à créer une population d'électrons libres et d'ions positifs. Les plasmas sont globalement neutres et à la moindre perturbations, des champs électromagnétiques très importants peuvent s'y développer. Dans cette thèse, nous étudions l'accélération d'électrons par une onde de sillage créée par laser. Le laser en se propageant dans un plasma dilué expulse les électrons qu'il rencontre sur son passage, si l'intensité du laser est suffisante une région vide d'électron se propage en suivant le laser, il s'agit de l'onde de sillage. La différence de potentiel générée induit de forts champs électriques dans l'onde de sillage, qui se comporte en l'occurrence comme un milieu accélérateur. Ces champs électriques peuvent atteindre la centaine de GV/m alors que la limite des accélérateurs conventionnels est inférieure à 100 MV/m. On gagne facilement 3 ordres de grandeurs. Cela signifie qu'on peut accélérer des particules sur de plus courtes distances et atteindre des énergies élevées. L'équivalent d'une accélération sur un mètre de plasma revient à une accélération sur une dizaine de kilomètres avec les accélérateurs de particules conventionnels. Ainsi la taille et le coût des accélérateurs peuvent être réduits et on peut même envisager de nouvelles applications aux faisceaux accélérés. Le prochain projet d'accélérateur de grande envergure, ILC (International Linear Collider), dont la construction devrait commencer dans un an et durer environ 10 ans, prévoit une longueur d'accélération de 30 puis 50 km pour obtenir des électrons d'environ 500 GeV puis à terme le TeV. Ces accélérateurs devenant de plus en plus imposants, il est important de réfléchir à des solutions plus compactes.

Pour créer des champs capables d'accélérer des électrons, il faut perturber voire exciter le plasma. La méthode proposée est l'utilisation d'un faisceau laser. Pour créer l'onde de sillage, un faisceau laser très intense est focalisé sur un gaz. L'apport d'énergie va, dans un premier temps, ioniser le gaz et former un plasma. La propagation du faisceau laser va exciter le plasma. Cette perturbation crée une onde plasma dans le sillage du faisceau laser, le champ électrique résultant a la capacité d'accélérer efficacement des électrons. Introduit par Tajima et Dawson [Tajima 1979] à la fin des années 70, le concept d'accélération par onde de sillage fut d'abord mis en œuvre avec des lasers peu intenses (intensité non relativiste) et des durées de l'ordre de la picoseconde (0.5 à 2 ps). L'arrivée des impulsions lasers ultra-courtes et très intenses

a changé la donne, un nouveau régime d'accélération par onde de sillage appelé le régime de la bulle a pu être étudié [Pukhov 2002, Kostyukov 2004, Lu 2006]. Dans ce régime, la force pondéromotrice du laser expulse les électrons très violemment et produit une bulle, remplie d'ions positifs, entourée par une couche relativement fine et dense d'électrons. Dans ce manuscrit nous nous placerons exclusivement dans ce régime qui présente des caractéristiques très prometteuses pour l'avenir de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser.

Les campagnes expérimentales menées par différentes équipes à travers le monde ont permis de mettre en avant l'intérêt de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser [Leemans 2006, Faure 2004]. Ainsi la limite du GeV a été franchie en 2006 par Leemans *et al.* [Leemans 2006] notamment grâce à des méthodes de guidage laser (guidage par capillaire par exemple) permettant d'augmenter la longueur d'accélération du faisceau. L'objectif de concurrencer les accélérateurs linéaires est encore lointain. A court terme, l'utilisation des accélérateurs laser plasma est davantage envisagée comme outil de diagnostic capable de sonder et d'étudier la matière à l'échelle des molécules. Des rayonnements aux caractéristiques propices à ces études peuvent être obtenus suivant les propriétés du faisceau d'électrons accéléré par onde de sillage laser [Glinec 2005, Schumaker 2013]. Les propriétés des faisceaux d'électrons, des rayonnements produits et la taille compacte de ces accélérateurs permettent d'envisager des applications dans de nombreux domaines. Par exemple en médecine pour le traitement de cellules cancéreuses profondes, il est nécessaire d'avoir des faisceaux d'électrons très énergétiques afin de ne pas toucher les tissus sains [DesRosiers 2000, Kainz 2004]. Un faisceau d'électrons avec une faible émittance pourrait être utilisé afin d'obtenir un laser à électrons libres [Nakajima 2008].

L'optimisation des propriétés (charge, énergie et caractéristiques transverses) du faisceau d'électrons accéléré par onde de sillage laser représente la principale motivation de cette thèse. Comme on le verra, dans la suite de ce manuscrit, il existe différents moyens d'injecter les électrons. On parle d'auto-injection [Mangles 2012b] lorsque des électrons du plasma, attirés par le champ de la bulle, sont piégés. C'est une méthode sans moyen externe supplémentaire. Il existe plusieurs moyens externes pour injecter les électrons. On peut injecter des électrons dans la bulle, en utilisant un second laser contrepropagatif. Ce second laser, d'intensité plus faible, entre en collision avec le laser principal créant l'onde de sillage. Le battement résultant permet l'entrée des électrons par l'avant de la bulle, on parle alors d'injection optique [Fubiani 2004, Kotaki 2004]. Contrairement à l'auto-injection, les méthodes d'injection externes permettent un contrôle de la charge et de l'accélération. En particulier, soulignons que l'injection optique a permis d'obtenir des faisceaux quasi mono-

énergétiques [Faure 2006, Davoine 2008].

Suivant la polarisation choisie pour chacun des lasers, un phénomène de chauffage stochastique est susceptible de se produire. Un électron dans le champ électromagnétique de deux lasers dont les polarisations sont linéaires et parallèles, a des trajectoires chaotiques. Sous certaines conditions, de nombreuses résonances peuvent se recouvrir et cela peut donner lieu à du chauffage stochastique [Rax 1992, Bourdier 2005, Patin 2010]. Le chauffage stochastique peut devenir un élément perturbateur et inhiber le fonctionnement attendu d'un système physique, c'est par exemple le cas du laser à électrons libres [Bourdier 1994]. Dans l'accélération d'électrons par onde de sillage laser, le chauffage stochastique se manifeste en procurant une pré-accélération aux électrons dans la direction de propagation de l'onde de sillage. Dans cette thèse, l'étude du chauffage stochastique appliqué dans l'injection optique va permettre de tirer profit de cette pré-accélération afin de piéger plus facilement les électrons dans une onde de sillage. Les situations dans lesquelles il sera préférable de l'éviter sont également examinées.

Le travail présenté dans cette thèse s'appuiera sur différents outils théoriques et numériques. L'utilisation de codes PIC (Particle In Cell) va permettre de simuler l'accélération d'électrons par onde de sillage laser en considérant la plupart des effets physiques. Les super-calculateurs et la parallélisation des codes sont des moyens permettant d'ajouter plus de réalisme à nos simulations. Cela permet par exemple de considérer un grand nombre de particules interagissant entre elles dans les simulations ou/et d'utiliser des boîtes de simulation plus grandes. En outre, cela ouvre la possibilité d'effectuer des simulations complètement 3D. Cette caractéristique s'avère particulièrement précieuse pour modéliser finement la formation de l'onde de sillage. Des conditions difficilement réalisables expérimentalement peuvent être explorées de façon intensive avec un code PIC. Ainsi, on va pouvoir étudier l'accélération par onde de sillage laser dans des régimes d'intensité laser relativiste avec ou sans champ magnétique intense ($\sim 100 T$) initialement appliqué au plasma.

L'utilisation d'un champ magnétique intense a déjà été étudiée dans le cadre de l'accélération par onde de sillage laser [Hur 2008, Vieira 2011] notamment dans le but d'améliorer le piégeage des électrons. En présence d'un champ magnétique suffisamment intense, l'action de la force de Laplace ainsi que les effets induits par la loi de Lenz-Faraday modifient les trajectoires électroniques au niveau de la couche limite de l'onde de sillage. Par conséquent, l'influence du champ magnétique sur l'onde de sillage et les champs électromagnétiques à l'intérieur doit être explorée. Les altérations subies par l'onde de sillage, en plasma magnétisé, impacteront évidemment les mécanismes de piégeage des particules. Enfin, nous examinerons dans quelles

mesures la qualité du faisceau peut être améliorée, lorsqu'on se place dans le régime de la bulle en plasma magnétisé.

Plan de la thèse

Cette thèse est organisée en trois parties :

- Le premier chapitre, de nature introductive, a pour but de rappeler les concepts fondamentaux de l'accélération d'électrons par onde de sillage c'est à dire la création de l'onde de sillage, l'injection puis le piégeage des particules et enfin l'accélération de ces particules. Un modèle à une dimension permet de comprendre les différents mécanismes liés à l'accélération d'électrons par onde de sillage. On rappelle les différentes méthodes d'injection des électrons qui seront abordées dans ce manuscrit. Puis, on présente une liste non exhaustive des applications de l'accélération par onde de sillage laser.

Dans un second chapitre, nous étudions en détails le régime de la bulle en nous appuyant sur les modèles de Lu *et al.* [Lu 2006] et Yi *et al.* [Yi 2013]. Avec ce modèle, nous pourrions décrire finement la forme de l'onde de sillage et les champs qui s'y développent dans le régime de la bulle. En effectuant des comparaisons avec les simulations PIC, nous montrerons la pertinence du modèle adopté.

- La seconde partie concerne l'apport du chauffage stochastique dans l'accélération par onde de sillage.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la théorie du chauffage stochastique en utilisant la dynamique hamiltonienne. En partant d'une théorie à une particule dans des ondes planes, on détermine les critères d'apparition du chauffage stochastique [Rax 1992, Bourdier 2005, Patin 2010]. Cette théorie est étendue à des plasmas puis à des impulsions courtes à l'aide de simulations numériques. On montre ainsi que l'utilisation du chauffage stochastique est envisageable dans l'accélération d'électrons par onde de sillage dans le contexte de l'injection optique.

Dans le quatrième chapitre de cette thèse nous examinons comment le chauffage stochastique se manifeste lors de l'injection des électrons dans une onde de sillage. La comparaison des différents schémas de polarisation en injection optique [Fubiani 2004, Kotaki 2004] nous permet de déterminer le rôle du chauffage stochastique dans le piégeage des électrons. Les mécanismes et les situations qui favorisent le chauffage stochastique pour maximiser la charge piégée

sont disséqués. Nous verrons que le rapport entre la longueur de collision et le rayon longitudinal de la bulle détermine le meilleur choix de polarisation vis à vis de la charge piégée. Nous abordons également les effets d'inhibition de l'onde de sillage, qui comme nous le verrons, sont moins prononcés en présence de chauffage stochastique.

- Enfin la troisième partie concerne l'influence d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué au plasma sur l'accélération par onde de sillage. Dans un cinquième chapitre, le modèle développé dans le chapitre 2 est modifié afin de tenir compte de l'effet d'un champ magnétique initialement uniforme. Les effets d'un tel champ magnétique ($\sim 100 T$) sur l'onde de sillage dans le régime de la bulle sont analysés grâce au modèle analytique et aux résultats de simulations PIC. En exploitant notre modèle, nous mettrons en évidence des caractéristiques propres à la propagation d'une onde de sillage en plasma magnétisé. Dans ce régime, deux phénomènes remarquables se manifestent, d'une part une ouverture apparaît à l'arrière de la bulle et d'autre part un mécanisme d'amplification du champ magnétique longitudinal est induit par la variation du flux magnétique. Les résultats de notre modèle sont confrontés à ceux issus du modèle de Bulanov *et al.* [Bulanov 2013] qui quantifie le rayon d'ouverture de la bulle. Le champ magnétique généré par le courant d'électrons à la surface de la bulle renforce le champ magnétique initialement appliqué. La rétroaction du champ magnétique auto-généré est examinée afin de rendre les prédictions de modèle plus quantitatives lorsque les champs appliqué et généré sont très intenses ($>100 T$).

Le dernier chapitre est consacré aux phénomènes d'injection et de piégeage des électrons dans l'onde de sillage en plasma magnétisé. Les conséquences de la déformation de l'onde de sillage sur les champs dans la bulle puis sur le piégeage des électrons sont examinées. Différents mécanismes d'injection sont étudiés afin de déterminer les situations pour lesquelles le champ magnétique appliqué améliore le piégeage des électrons. Les déformations de l'onde de sillage induites par le champ magnétique appliqué dépendent de la densité du plasma. L'influence de la densité électronique du plasma, puis celle du volume de collision des impulsions lasers sont successivement explorées pour le schéma d'injection optique. Les résultats obtenus avec ou sans champ magnétique appliqué seront comparés. Nous verrons qu'il est possible d'obtenir un faisceau d'électrons présentant une faible dispersion en énergie lorsque celui-ci est injecté par injection optique, en plasma magnétisé.

Première partie

Accélération d'électrons par onde de
sillage laser en régime de bulle

Physique de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser

Sommaire

1.1	Introduction à l'interaction laser-plasma	10
1.1.1	Laser	10
1.1.2	Plasma	12
1.1.3	Propagation d'une onde dans un plasma	13
1.2	Modélisation numérique	15
1.2.1	Équation de Vlasov	16
1.2.2	Méthode Particle In Cell (PIC)	18
1.2.3	Limitations des schémas numériques	22
1.2.4	CALDER - code PIC massivement parallélisé	23
1.3	Accélération par une onde de sillage laser - théorie 1D	25
1.3.1	Création de l'onde de sillage	25
1.3.2	Piégeage des électrons et accélération	27
1.3.3	Régime de la bulle ou du blowout	29
1.4	Injection des électrons dans une onde de sillage laser	30
1.4.1	Auto-injection	30
1.4.2	Injection optique	30
1.4.3	Injection par gradient de densité	31
1.5	Accélération des électrons - guidage de l'impulsion laser.	32
1.5.1	Création d'un canal plasma	32
1.5.2	Guidage par capillaire	32
1.5.3	Utilisation d'un champ magnétique longitudinal	33
1.6	Applications de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser.	34
1.6.1	Source de rayonnement	34
1.6.2	Radiographie	36

L'accélération d'électrons par onde de sillage laser fait intervenir d'un côté le laser qui constitue l'élément perturbateur et de l'autre le plasma, le milieu perturbé. La technologie laser a beaucoup évolué ces dernières années, notamment grâce à la technique d'amplification par dérive de fréquence [Strickland 1985]. Cela permet aujourd'hui d'atteindre des puissances laser de l'ordre du pétawatt (PW) et d'étudier des phénomènes à des intensités laser relativistes. Ainsi, un tout nouveau régime d'accélération par onde de sillage laser est étudié depuis le début des années 2000. Dans ce nouveau régime, le laser très intense expulse totalement les électrons et l'onde de sillage prend la forme d'une bulle remplie d'ions et avec des électrons en surface. On parle de régime de la bulle ou de blowout. Dans ce chapitre, on va introduire les éléments de base de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser ainsi que quelques ordres de grandeurs des paramètres utilisés dans les expériences. En utilisant un modèle simplifié à 1 dimension, les différents mécanismes de l'accélération par onde de sillage laser seront expliqués. Puis on présentera quelques applications des faisceaux produits par l'accélérateur laser-plasma.

1.1 Introduction à l'interaction laser-plasma

1.1.1 Laser

Le rayonnement électromagnétique du laser peut être décrit à l'aide des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ces relations permettent de décrire le champ laser uniquement avec son potentiel vecteur \mathbf{A} qui, dans le cas d'une impulsion, est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{A}_{\text{laser}}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} A_0(x, y, z, t) \exp(i(\omega_0 t - k_0 z)) \mathbf{e}_\perp + c.c., \quad (1.1)$$

où x, y, z et t sont les coordonnées spatiales et temporelles, et $c.c.$ est le complexe conjugué. On a choisi les axes de telle sorte que le faisceau laser se propage selon l'axe z . Le faisceau laser est caractérisé par son nombre d'onde k_0 et sa pulsation ω_0 reliés par la relation $\omega_0 = ck_0$ dans le vide. La longueur d'onde laser λ_0 est donnée par

$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$. La fonction A_0 représente l'enveloppe du faisceau laser. Le vecteur unitaire \mathbf{e}_\perp permet de donner la direction de polarisation du champ laser et les équations de Maxwell imposent à ce vecteur de se trouver dans le plan transverse à la direction de propagation. On dit que le laser est polarisé linéairement si la direction du potentiel vecteur \mathbf{A} ne varie pas (par exemple le laser est polarisé linéairement selon l'axe y si $\mathbf{e}_\perp = \mathbf{e}_y$). Une polarisation circulaire peut être obtenue grâce à la superposition de deux ondes polarisées linéairement, dans le cas par exemple où $\mathbf{e}_\perp = (\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_x)/2$; le vecteur \mathbf{A} tourne alors autour de l'axe z quand t ou z varie.

Dans le cadre de l'approximation paraxiale (on suppose une faible divergence du faisceau par rapport à l'axe de propagation), on peut représenter le faisceau laser sous la forme d'un faisceau gaussien. Dans ce cas, A_0 est donné par :

$$A_0 = a_0 \exp \left[-2 \ln(2) \left(\frac{z-t}{\tau_0} \right)^2 \right] \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{W^2(z)} - i \frac{k_0 r^2}{2R(z)} \right] \exp [i\theta(z)],$$

où $r = \sqrt{y^2 + x^2}$, a_0 est le maximum du potentiel vecteur, τ_0 est la durée de l'impulsion définie comme une largeur à mi-hauteur, W_0 est la taille transverse (ou waist) du faisceau laser dans le plan focal $z = 0$ (à $1/e$ du champ électrique maximum) et $\theta(z)$ est la phase de Gouy. $W(z)$ et $R(z)$ représentent la taille transverse du faisceau laser et le rayon de courbure du front d'onde à la position z . Ces deux fonctions sont données par :

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{Z_r^2}}, \\ R(z) &= z \left(1 + \frac{Z_r^2}{z^2} \right), \end{aligned}$$

où $Z_r = \frac{\pi W_0^2}{\lambda_0}$ est la longueur de Rayleigh. On caractérise souvent la taille transverse du faisceau laser par la taille de sa tache focale w_0 , qui est la largeur à mi-hauteur de l'impulsion laser. La taille de la tache focale est liée au waist par la relation suivante : $w_0 = \sqrt{2 \ln(2)} W_0$. Si on se place au plan focal ($z = 0$), l'intensité maximale I_0 , la puissance P_0 et l'énergie E_0 du laser sont liées grâce aux relations suivantes :

$$I_0 = \frac{2P_0}{\pi W_0^2}, \quad (1.2)$$

$$P_0 = 2 \sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}} \frac{E_0}{\tau_0} \sim \frac{E_0}{\tau_0}. \quad (1.3)$$

On peut ajouter la relation entre a_0 et I_0 :

$$a_0^2 = \frac{I_0 \lambda_0^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3}. \quad (1.4)$$

L'intensité laser peut s'exprimer en $10^{18} W.cm^{-2}$ (noté I_{18}) et le potentiel vecteur est normalisé $\bar{a}_0 = \frac{ea_0}{m_e c}$ afin que cette valeur se retrouve sans dimension. La relation précédente exprimée en fonction de I_{18} devient :

$$a_0 = 0.85 \lambda_0 [\mu m] \sqrt{I_{18}} \quad (1.5)$$

Les impulsions lasers utilisées dans l'accélération par onde de sillage laser, se caractérisent par leur très haute intensité (on dit UHI pour ultra haute intensité) et leur très courte durée (quelques dizaines de femtoseconde à 1 picoseconde).

Actuellement pour l'accélération par sillage laser, on utilise des lasers qui ont des énergies de l'ordre du Joule, délivrées par des impulsions d'une durée d'environ 30 fs. Les puissances atteintes sont de l'ordre de quelques dizaines ou centaines de Tera-Watt. Les waists utilisés pour les expériences d'accélération par sillage sont en général de l'ordre de plusieurs dizaines de microns ($> 10 \mu m$), produisant des intensités voisines de $10^{18-19} W.cm^{-2}$. Ce qui donne pour un laser de longueur d'onde $1 \mu m$, un potentiel vecteur $a_0 \geq 1$.

1.1.2 Plasma

Le plasma représente l'état de la matière totalement ou partiellement ionisée. Composé d'électrons libres, d'ions et d'atomes neutres, le plasma est globalement neutre. Pour décrire les plasmas, nous pouvons utiliser une description dite cinétique qui traduira les mouvements de chaque particule à l'aide de la physique statistique. L'autre moyen est de considérer le plasma comme un fluide de particules. Dans ce type de description, chaque espèce de particule constitue un fluide dont les mouvements sont collectifs et décrits par les équations de l'hydrodynamique. La description fluide est plus simple analytiquement mais moins rigoureuse que la description cinétique. Si une approximation fluide est suffisante pour décrire le comportement d'une espèce de particules chargées on pourra l'adopter au lieu de la description cinétique.

On peut différencier les plasmas selon leur paramètre de couplage Γ . Si on considère un plasma ayant une densité électronique n_e , de température T_e , alors le paramètre de couplage Γ permet de comparer la densité d'énergie cinétique moyenne des électrons, $\langle E_c \rangle \sim \frac{3}{2} n_e k_B T_e$, à leur densité d'énergie potentielle électrostatique,

$\langle E_p \rangle \sim \frac{n_e^{\frac{4}{3}} e^2}{4\pi\epsilon_0}$; où k_B est la constante de Boltzmann. On obtient :

$$\Gamma = \frac{\langle E_p \rangle}{\langle E_c \rangle} = \frac{n_e^{\frac{1}{3}} e^2}{6\pi\epsilon_0 k_B T_e}$$

Lorsque $\Gamma > 1$, c'est à dire pour des plasmas de faible température ou de grande densité, on parle de plasmas corrélés. Le champ électrostatique est alors suffisamment important pour ordonner les particules, donnant une structure fluide au plasma. Lorsque $\Gamma \ll 1$, le désordre domine. Ces plasmas sont dits cinétiques ou faiblement couplés. Ils sont également non collisionnels, car on peut montrer que les interactions binaires entre électrons peuvent être négligées. Les plasmas rencontrés dans le cas de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser sont des plasmas cinétiques.

Si on déplace légèrement un petit volume d'électrons de sa position initiale, tout en imposant aux autres particules de rester immobiles, alors un champ électrique va être créé par cette séparation de charges, rappelant les électrons déplacés. Ceux-ci vont se mettre à osciller autour de leur position initiale à la pulsation ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (1.6)$$

Cette pulsation représente le temps de réponse du plasma (différent entre les électrons et les ions) à une perturbation. A partir de la fréquence plasma, on définit une longueur caractéristique du plasma $\lambda_{de} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}$, appelée longueur de Debye, comme étant la distance que peut parcourir un électron se déplaçant à sa vitesse thermique $v_{th,e} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$ pendant un temps ω_p^{-1} .

1.1.3 Propagation d'une onde dans un plasma

Une onde électromagnétique, de pulsation ω_0 et de nombre d'onde k_0 se propageant dans un plasma, a pour relation de dispersion :

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + c^2 k_0^2$$

Si $\omega_0 < \omega_p$ alors k_0 est complexe et l'onde ne se propage pas, elle est évanescence. On dit alors que le plasma est sur-critique (ou sur-dense). Si $\omega_0 > \omega_p$, alors k_0 est réel et l'onde peut se propager dans le plasma. Dans ce cas, le plasma est dit sous-critique

(ou sous-dense). On peut définir la densité critique n_c comme la densité limite entre ces deux régimes :

$$n_c = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0 m_e}{e^2}. \quad (1.7)$$

Pour l'accélération par sillage laser, on a en général $n_e < 0.01 n_c$, les plasmas considérés sont sous-critiques, ce qui permet au faisceau laser de se propager librement. La relation de dispersion permet de déterminer la vitesse de phase de l'onde $v_\phi^2 = \frac{\omega_0^2}{k_0^2} = \frac{\omega_p^2}{k_0^2} + c^2$ et l'indice du plasma est :

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{1 - \frac{n_e}{n_c}} \quad \text{pour } \omega_p \ll \omega_0 \quad (1.8)$$

La vitesse de groupe du laser est donnée par $v_g = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0} = \eta c$.

Auto-focalisation et auto-modulation

L'accélération par onde de sillage requiert que le laser puisse se propager sur de grandes distances afin d'accélérer le plus longtemps possible les électrons. Dans le vide, le laser reste focalisé sur une distance de l'ordre de la longueur de Rayleigh. Dans un plasma, la création de l'onde de sillage et les modulations de la densité électronique modifient l'indice optique vu par le laser. Dans le cas de l'accélération par onde de sillage, l'indice optique du plasma peut être approximé par [Esarey 2000, Mori 1997, Lu 2007] :

$$\eta \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\Delta n_g}{n_{e0}} \frac{r^2}{w_0^2} + \frac{\Delta n_l}{n_{e0}} - \frac{a_0^2}{8} \right), \quad (1.9)$$

où n_{e0} est la densité électronique initiale sur l'axe, r est la coordonnée radiale, w_0 est la taille de la tache focale, Δn_l correspond à la modulation de densité créée par le faisceau laser et Δn_g permet de paramétrer le profil transverse initial de la densité plasma tel que $n_e(r) = n_{e0} + \Delta n_g (r^2/w_0^2)$. En choisissant bien Δn_g , on peut guider le faisceau laser sur de grandes distances. Le terme $-\frac{a_0^2}{8}$ est dû aux effets relativistes induits par le champ laser. Sur l'axe le champ est plus important qu'en dehors et l'indice optique (Eq.1.9) va varier en conséquence. Ces effets relativistes sont focalisants et on parle d'auto-focalisation relativiste. La condition pour assurer un bon guidage est $\frac{a_0^2}{8} \geq \frac{4}{(k_p w_0)^2}$ [Lu 2007] cela équivaut à introduire une condition sur la puissance du laser $P_0 \geq P_c$ où $P_c = 17 \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} [GW]$ est appelé puissance critique d'auto-focalisation relativiste. En revanche, le terme $\frac{\Delta n_l}{n_{e0}}$ est défocalisant et se manifeste

sur des distances de l'ordre de c/ω_p . La force pondéromotrice crée une sur-densité à l'avant de l'impulsion laser compliquant son guidage. Cela signifie que les impulsions courtes pour lesquelles $\tau_0 \leq 1/\omega_p$ seront plus difficilement guidées. Dans ce cas, il faut augmenter la puissance du laser pour que les effets d'auto-focalisations relativistes soient toujours présents.

Le second effet qui intervient directement sur le profil de l'onde laser est la modulation de la vitesse de groupe de l'impulsion laser. L'indice optique varie en fonction de la position sur l'axe de propagation notamment à cause des termes $-\frac{a_0^2}{8}$ et $\frac{\Delta n_I}{n_{e0}}$. L'avant de l'impulsion voit une sur-densité électronique tandis qu'à l'arrière la densité électronique est plus faible. Ainsi l'arrière de l'impulsion a une vitesse de groupe plus élevée que l'avant ce qui aura tendance à comprimer l'impulsion. Ces effets favorisent la déplétion du laser, l'énergie du laser est transmise au plasma pour mettre en mouvement les électrons.

1.2 Modélisation numérique

La description d'un plasma en suivant toutes les interactions à distance d'un ensemble de N particules est très couteuse, il y a $N(N-1)/2$ paires à faire interagir. Cette approche correspond aux méthodes particule-particule, elle est justifiée par les systèmes fortement corrélés où les forces à courte portée sont dominantes. Ces forces sont négligeables pour les plasmas cinétiques que nous considérons, et nous n'avons par conséquent pas besoin d'une description fine des champs à une échelle inférieure à celle de la longueur de Debye.

Dans notre cas, l'approche particule-maille est mieux adaptée, les forces sont calculées par l'intermédiaire de champs connus sur un maillage de l'espace. Les particules contribuent à des densités de charge et de courant définies sur les nœuds du maillage. La méthode particule-maille requiert un nombre d'opérations proportionnel à $N \log(N)$, et non plus à N^2 comme pour la méthode particule-particule. C'est donc la méthode particule-maille, qui englobe les méthode PIC (Particle In Cell), que nous avons utilisé pour effectuer nos simulations numériques.

Dans la suite de cette section, nous justifions théoriquement cette approche, en montrant que dans le cas d'un plasma non collisionnel, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation de Liouville mais seulement le système d'équations de Vlasov-Maxwell.

1.2.1 Équation de Vlasov

Dans le cas d'un plasma, les particules sont très nombreuses et donc indiscernables, on peut alors utiliser la physique statistique et une description probabiliste. L'état de N particules dans un élément de volume de l'espace des phases centré en (\mathbf{r}, \mathbf{p}) est donnée par la densité de probabilité :

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r}d\mathbf{p} \quad (1.10)$$

où $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ est une densité de probabilité. Les ensembles \mathbf{r} et \mathbf{p} contiennent les $6N$ coordonnées des N particules du plasma tel que $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$ et $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\}$.

L'évolution de la densité de probabilité est donnée par l'équation de Liouville :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \quad (1.11)$$

La résolution numérique de cette équation différentielle dans l'espace à $6N$ dimensions est très difficile et extrêmement coûteuse. Nous allons donc introduire différentes hypothèses et de cette manière rendre la résolution du problème moins complexe. L'équation du mouvement sur une particule est $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{i,j}^{int}$ où \mathbf{F}_i^{ext} sont les forces extérieures dans notre cas ce sont les forces électromagnétiques dans le plasma et $\mathbf{F}_{i,j}^{int}$ sont les forces d'interaction entre les particules. A partir de l'équation de Liouville, on peut construire une hiérarchie de fonctions de distributions réduites à $(N-1, N-2, \dots, 2, 1)$ particules ainsi que les équations d'évolutions correspondantes. L'évolution de fonction f_1 peut s'écrire :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + q_1 (\mathbf{E}^{ext} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}^{ext}) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = \Sigma(f_{1,2}). \quad (1.12)$$

De façon générale, l'évolution de f_k fait intervenir la fonction f_{k+1} avec $f_N = F$. Cette hiérarchie d'équations tronquées ne peut pas contenir toute l'information comme l'équation de Liouville. Pour fermer l'équation 1.12, on fait une hypothèse sur le second membre en fonction des conditions physiques de l'étude. Dans un plasma non-collisionnel, on peut négliger les corrélations entre les particules et écrire que :

$$f_{1,2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) = f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) f_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$$

En considérant que les autres particules ne contribuent par leur charge et le courant qu'aux modifications des champs électromagnétique (i.e non-collisionnel), on peut

réécrire l'équation 1.12 de la façon suivante :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + q_1 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = 0. \quad (1.13)$$

$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ donne la probabilité de présence en (\mathbf{r}, \mathbf{p}) de chaque particule. Dans un plasma, le nombre de particules est très grand et pour $N \rightarrow \infty$, on considère la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \equiv N f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. La fonction de distribution satisfait l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.14)$$

L'équation de Vlasov est la première équation de la hiérarchie BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon). Dans cette approche, on réduit les interactions entre particules à des champs collectifs produits par les charges et les courants. La résolution de l'équation de Vlasov est couplée à celle des équations de Maxwell, qui régissent les champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{B} . Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère nous permettent de mettre à jour les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} respectivement :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

On complète ce système avec les équations sur la divergence des champs. Pour déterminer les champs électromagnétiques, on doit connaître les termes sources de densité de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ créés en tout point du plasma. Ces deux grandeurs peuvent être obtenues en calculant les deux premiers moments de la fonction de distribution f :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \int q f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \int q \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \end{aligned}$$

Il faut, dans le cas d'un plasma, calculer les contributions de chaque espèce présente pour obtenir par sommation la densité et le courant total. La résolution de ces équations qu'on appelle système de Maxwell-Vlasov permet de modéliser un plasma dans le cas où les collisions sont négligées. Pour résoudre ce système d'équations, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques. Les simulations présentées tout

au long de cette thèse s'appuient sur la méthode PIC qui est mise en œuvre dans les code CALDER [Lefebvre 2003] et CALDER-Circ [Lifschitz 2009] (voir aussi Annexe A).

1.2.2 Méthode Particle In Cell (PIC)

La méthode PIC est une méthode numérique permettant de résoudre le problème de Maxwell-Vlasov. Le cycle de calcul à chaque pas de temps se décompose en quatre étapes (voir aussi Fig.1.1) :

- Interpolation des champs électromagnétiques connus sur le maillage à la position de chaque particule
- Calcul des nouvelles positions des particules
- Calcul des densités de charge et de courant aux nœuds du maillage
- Mise à jour des champs électromagnétiques du maillage par résolutions des équations de Maxwell

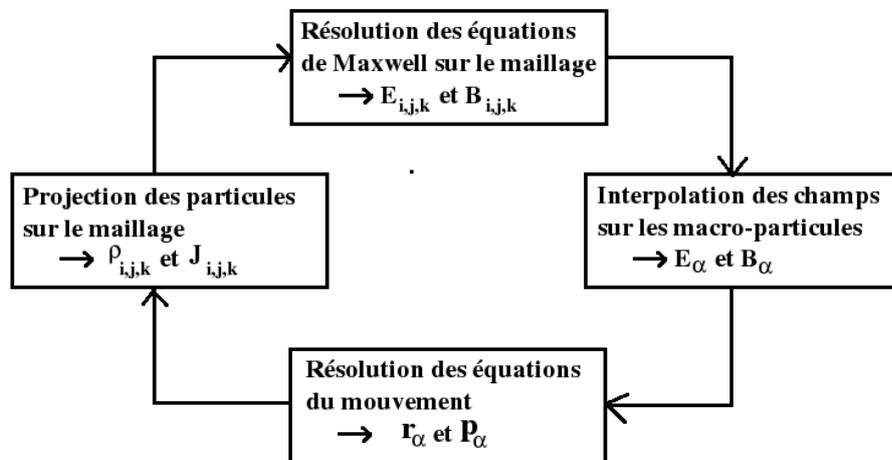


FIGURE 1.1 – Principe de la méthode PIC

Dans cette méthode, on utilise des macro-particules c'est à dire un ensemble de particules ayant des mouvements très proches. Le poids de chaque macro-particule donne le nombre de particules physiques qu'elle représente. Plus on considère de macro-particules et plus la simulation sera précise mais couteuse en temps CPU.

Notion de macro-particules

La fonction de distribution peut être calculée numériquement en considérant une somme discrète de Dirac :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \sim \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\alpha}(t)) \quad (1.15)$$

Cette écriture revient à approximer la fonction de distribution par une somme finie de N_{α} fonctions de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\alpha}(t))$ où chaque macro-particule porte un poids Γ_{α} . Le poids Γ_{α} représente le nombre de particules réelles porté par la macro-particule. Ce nombre est déterminé par le volume de la maille, le nombre de macro-particules par maille choisi et la densité initiale du plasma. Les densités de charge et de courant sont calculées avec ces macro-particules :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\alpha} q \Gamma_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\alpha} q \mathbf{v} \Gamma_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Résolution des équations de Maxwell

Les champs électromagnétiques sont déterminés en résolvant les équations de Maxwell. On emploie une méthode de différences finies, le schéma de Yee. C'est un schéma d'ordre 2 en temps et en espace. Pour un champ que l'on note F , la notation suivante est utilisée :

$$F_{i,j,k}^n = F(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, n \Delta t), \quad (1.17)$$

où Δx (respectivement Δy et Δz) est le pas spatial en x (respectivement y et z), i (respectivement j et k) désignent les indices de maille, Δt le pas de temps et n le numéro du pas de temps considéré. La discrétisation des équations de Maxwell avec le schéma de Yee est donnée par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+1} - E_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^n}{\Delta t} &= \frac{B_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{B_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{y_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - J_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+1} - E_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^n}{\Delta t} &= \frac{B_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{x_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{B_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - J_{y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1} - E_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta t} &= \frac{B_{y_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{y_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{B_{x_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{x_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - J_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{B_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\frac{E_{z,i,j+1,k+\frac{1}{2}}^n - E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} + \frac{E_{y,i,j+\frac{1}{2},k+1}^n - E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta z} \\
 \frac{B_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{y,i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\frac{E_{x,i+\frac{1}{2},j,k+1}^n - E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta z} + \frac{E_{z,i+1,j,k+\frac{1}{2}}^n - E_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \\
 \frac{B_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\frac{E_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k}^n - E_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x} + \frac{E_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k}^n - E_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta y}
 \end{aligned}$$

Ce schéma fait intervenir deux maillages différents permettant le calcul des champs aux indices demi-entiers. Le maillage primal est indexé sur les indices entiers et le maillage dual sur les indices demi-entiers. Par exemple, le champ B_x est donné au point repéré par les indices i , $j + \frac{1}{2}$ et $k + \frac{1}{2}$. Cela signifie qu'il s'exprime sur le maillage dual selon y et z et primal selon x . On remarque également que le champ B et le courant J sont calculés à des pas de temps demi-entiers à la différence du champ électrique.

Projection des charges et interpolation des champs

Une étape de projection des courants au niveau des nœuds est nécessaire afin de calculer les champs électromagnétiques. On introduit une fonction W appelée aussi facteur de forme qui permet de calculer \mathbf{J} aux nœuds $\mathbf{r}_{i,j,k}$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_{i,j,k}, t) = \sum_{\alpha} q\mathbf{v}\Gamma_{\alpha} W(\mathbf{r}_{i,j,k} - \mathbf{r}_{\alpha})$$

On peut choisir un facteur de forme d'extension arbitraire. On privilégie en général un facteur de forme "lisse" qui s'étend sur trois à quatre mailles afin de limiter autant que possible le bruit numérique [Drouin 2009, Ueda 1994]. Le facteur de forme le plus simple dit "Nearest Grid Point", consiste à attribuer le poids de la macro-particule au nœud le plus proche.

Les champs qui s'appliquent sur une macro-particule doivent être également calculés. Ils sont interpolés à partir des champs calculés sur le maillage avec la même fonction de forme que pour l'étape de projection des charges. Par exemple le champ B_x qui s'applique sur une macro-particule α à la position \mathbf{r}_{α} est donné par :

$$B_{x,\alpha}^n = \sum_{i,j,k} B_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n W\left(\mathbf{r}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \mathbf{r}_{\alpha}^n\right)$$

Mouvement des macro-particules

On s'intéresse maintenant au mouvement des macro-particules. Après avoir déterminé les champs électromagnétiques agissant sur chaque macro-particules, il suffit de résoudre les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\end{aligned}\quad (1.18)$$

Comme pour le calcul des champs, on utilise un schéma centré en temps. Cependant, on utilise un schéma spécifique pour calculer le produit vectorielle. On emploie le "pousseur de Boris" qui scinde en trois étapes le calcul de l'impulsion résultante :

- Évaluation d'une impulsion intermédiaire \mathbf{p}_α^- où intervient seulement le champ électrique sur un demi pas de temps :

$$\frac{\mathbf{p}_\alpha^- - \mathbf{p}_\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{(\Delta t/2)} = q \mathbf{E}_\alpha^n$$

- Évaluation d'une seconde impulsion intermédiaire \mathbf{p}_α^+ pour laquelle le champ magnétique est appliqué sur un pas de temps complet :

$$\frac{\mathbf{p}_\alpha^+ - \mathbf{p}_\alpha^-}{\Delta t} = q \frac{\mathbf{p}_\alpha^+ + \mathbf{p}_\alpha^-}{2m\gamma_\alpha^-} \times \mathbf{B}_\alpha^n$$

avec $\gamma_\alpha^- = \gamma_\alpha^+ = \sqrt{1 + \mathbf{p}_\alpha^{-2}} = \sqrt{1 + \mathbf{p}_\alpha^{+2}}$. On peut remarquer que le champ \mathbf{B} ne change pas la norme du vecteur impulsion mais opère seulement une rotation. Le schéma de Yee présenté précédemment ne permet de connaître le champ magnétique qu'aux pas de temps demi-entiers, on effectue une simple interpolation pour estimer le champ : $\mathbf{B}^n = \frac{\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}}{2}$

- Évaluation de l'impulsion finale en appliquant le champ électrique sur la deuxième moitié du pas de temps :

$$\frac{\mathbf{p}_\alpha^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{p}_\alpha^+}{(\Delta t/2)} = q \mathbf{E}_\alpha^n$$

Enfin la nouvelle position \mathbf{r}_α^{n+1} est donnée par l'équation :

$$\frac{\mathbf{r}_\alpha^{n+1} - \mathbf{r}_\alpha^n}{\Delta t} = \mathbf{v}_\alpha^{n+\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

où $\mathbf{v}_\alpha^{n+\frac{1}{2}}$ est calculé à partir de $\mathbf{p}_\alpha^{n+\frac{1}{2}}$.

Maintenant que nous connaissons les nouvelles coordonnées des macro-particules, on peut de nouveau calculer les densités de charge et de courant discrétisées sur le maillage. Et on peut ainsi commencer le cycle de calcul du pas de temps suivant.

1.2.3 Limitations des schémas numériques

Condition de stabilité du schéma de Yee

La résolution des équations de Maxwell fait intervenir une méthode aux différences finies. La stabilité du schéma peut être analysée avec la méthode de Von Neumann en prenant un champ électrique qui se décompose sous forme d'onde plane : $E(x, y, z, t) \propto \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)]$. En substituant le champ sous sa forme discrétisée dans le schéma, on obtient :

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)}{c \Delta t} \right]^2 = \left[\frac{\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \right]^2 + \left[\frac{\sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right)}{\Delta y} \right]^2 + \left[\frac{\sin\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \right]^2 \quad (1.20)$$

Pour éviter toute croissance exponentielle de l'amplitude du champ, ω doit être réel ce qui implique que $0 \leq \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \leq 1$. La stabilité du schéma de Yee est donc assurée si la condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy) suivante est vérifiée :

$$(c \Delta t)^2 \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \leq 1 \quad (1.21)$$

La condition CFL implique que le pas de temps de nos simulations devra être choisi entre autre en fonction de la discrétisation spatiale.

Erreur numérique sur la vitesse de groupe du laser

Une seconde condition doit être satisfaite, notamment pour éviter les erreurs numériques sur la vitesse de propagation du laser. A partir de l'équation 1.20, on déduit la relation de dispersion suivante pour une onde se propageant suivant z dans le vide :

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\left(\frac{c \Delta t}{\Delta z} \right) \sin \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right), \quad (1.22)$$

la vitesse de groupe numérique s'écrit alors :

$$V_g/c = \frac{\cos\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right)}}. \quad (1.23)$$

où $V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$. En se plaçant dans la limite $k_z \Delta z \ll 1$ et $\left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta z}\right) \ll 1$, on trouve comme vitesse de groupe numérique :

$$V_{g,n} \simeq 1 - \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta z}\right) \left(\frac{k_{laser} \Delta z}{2}\right)^2 \quad (1.24)$$

En comparant 1.23 avec la vitesse de groupe physique du laser se propagent dans un plasma transparent donnée par 1.8, on arrive à l'inégalité suivante [Lehe 2013] :

$$\left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta z}\right) \left(\frac{k_{laser} \Delta z}{2}\right)^2 \ll \frac{n_e}{n_c} \quad (1.25)$$

Lorsque cette inégalité est vérifiée, l'altération de la vitesse de groupe du laser par le schéma de Yee est négligeable devant les modifications induites par la propagation du laser dans le plasma.

1.2.4 CALDER - code PIC massivement parallélisé

Le code CALDER [Lefebvre 2003] utilisé dans ce manuscrit permet de faire des simulations d'interaction laser-plasma comme l'accélération d'électrons par onde de sillage laser. Ce code utilise la méthode PIC pour simuler l'interaction de particules qui peuvent être de natures différentes avec une ou plusieurs ondes électromagnétiques. De nombreux algorithmes ont été mis en place afin de diminuer le temps de calcul. Par exemple, ce code utilise une fenêtre glissante pour simuler uniquement la zone d'intérêt autour du laser. Dans l'accélération d'électrons par sillage laser, cela permet de considérer des plasmas centimétriques mais on ne résout le système de Vlasov-Maxwell que pour une portion de plasma à chaque pas de temps. Le code CALDER est parallélisé en espace par décomposition de domaine, ainsi chaque portion du domaine est traitée par un processeur spécifique. Chaque processeur résout les équations de Maxwell et du mouvement des particules sur le domaine qui lui est affecté. Des communications sont nécessaires au bord de chaque partition pour calculer correctement les termes sources de densité de charge et de courant, ainsi que pour mettre en œuvre les conditions aux limites souhaitées pour les champs électromagnétiques et les macro-particules. Enfin, il est possible de se placer en géométrie réduite

afin de diminuer le temps de simulation. Par exemple, dans l'accélération par sillage laser, la géométrie 2D peut être suffisante pour une étude qualitative. Utiliser une géométrie 2D en espace et 3D en vitesse (2Dx3V) permet de réduire considérablement le temps de calcul et/ou considérer des plasmas plus longs.

Les simulations 3D étant très couteuses en temps de calcul, un code basé sur CALDER a été développé, le code CALDER-Circ [Lifschitz 2009]. Ce code PIC utilise les coordonnées cylindriques et la décomposition des champs électromagnétiques en série de Fourier pour réduire le temps de calcul. Une description de ce code ainsi que la méthode employée pour y inclure un champ magnétique initialement homogène sont présentés en Annexe A.

Les simulations effectuées avec ces deux codes seront présentées en utilisant les normalisation indiquée dans le tableau 1.1.

Grandeurs Physiques	normalisée à
Temps	$1/\omega_0$
Distance	c/ω_0
Vitesse	c
Masse	m_e
Charge	e
Impulsion	$m_e c$
Densité	n_c
Potentiel vecteur	$\frac{m_e c}{e}$
Champ électrique	$\frac{m_e c \omega_0}{e}$
Champ magnétique	$\frac{m_e \omega_0}{e}$

TABLE 1.1 – Normalisation des grandeurs dans les codes CALDER et CALDER Circ où c est la vitesse de la lumière, m_e la masse de l'électron, e est la charge élémentaire, n_c la densité critique et ω_0 est la fréquence du laser de longueur d'onde λ_0 .

Dans la première partie de ce chapitre d'introduction, nous avons présenté les notions de base permettant de décrire l'interaction d'un laser avec un plasma mais également une description synthétique de notre outil de simulation, la méthode PIC. Dans la prochaine section, on présente un modèle analytique simplifié permettant d'énoncer les différentes étapes intervenant dans l'accélération d'électrons par onde de sillage laser.

1.3 Accélération par une onde de sillage laser - théorie 1D

Pour expliquer brièvement les différents mécanismes liés à l'accélération d'électrons par onde de sillage laser, on utilise une approche relativiste à une dimension. Premièrement, la création de l'onde de sillage par une impulsion laser va être présentée en déterminant le potentiel scalaire de l'onde de sillage. Enfin, le piégeage des électrons et l'accélération sont rapidement abordés. Dans cette section, on utilise les normalisations données dans le tableau 1.1.

1.3.1 Création de l'onde de sillage

force pondéromotrice

Un électron non relativiste oscille dans un champ électromagnétique comme celui du laser. Avec un champ laser impulsionnel, une particule de charge q et de masse m va être mise en mouvement par la force pondéromotrice notée F_p dont l'expression est :

$$F_p = -\frac{q^2}{4m\omega_0^2} \nabla E_0^2, \quad (1.26)$$

où E_0 est l'enveloppe du champ électrique du laser. Cette force dépend du carré de la charge, il n'y pas de différence entre les charges négative et positive mais elle dépend de l'inverse de la masse donc un proton 2000 fois plus lourd sera 4000000 fois moins accéléré par cette force qu'un électron. Ce qui permet de considérer les ions immobiles dans les problèmes d'accélération par sillage laser. Dans la limite relativiste cette force s'écrit [Mora 1997] :

$$F_p = -\frac{q^2}{4m \langle \gamma \rangle} \nabla \langle A_0 \rangle^2 \quad (1.27)$$

où $\langle \gamma \rangle$ est le facteur de Lorentz moyenné sur une période laser et $\langle A_0 \rangle$ est la valeur de l'enveloppe du potentiel vecteur.

Équations pour l'onde de sillage 1D

Pour calculer la réponse du plasma à cette force, on utilise les équations fluides pour un plasma froid :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{\partial J_e}{\partial z} = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} = F_p - E_z, \quad (1.29)$$

où v_e est la vitesse de l'électron, n_e la densité électronique, J_e la densité de courant électronique et E_z le champ électrique longitudinal. L'hypothèse de plasma froid permet de négliger le terme de pression dans l'équation du mouvement 1.29. En combinant les équations de Maxwell, on peut écrire une troisième équation reliant le champ électrique et les densités de charge et de courant :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial J_e}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (1.30)$$

où $J_e = -n_e v_e$ est le courant total et ρ est la densité de charge totale définie par $\rho = n_{e0} - n_e$ avec n_{e0} la densité électronique initiale.

Potentiel de l'onde de sillage

On peut simplifier le système (1.28, 1.29 et 1.30) en utilisant l'approximation quasi-statique, on suppose alors que le temps d'évolution de l'enveloppe du champ laser est très grand devant le temps où la particule subit l'influence du faisceau laser. On définit également : $\xi = z - v_g t$ où v_g est la vitesse de propagation du laser et $\frac{\partial}{\partial t} \ll \frac{\partial}{\partial \xi}$. Le potentiel ϕ de l'onde de sillage ne dépend que de ξ et se propage donc à la vitesse du faisceau laser v_g . La valeur du champ électrique E_z est donnée par l'équation sur le potentiel : $\partial \phi / \partial z = E_z$. On obtient l'équation du potentiel créé par le plasma perturbé [Sprangle 1990, Esarey 1995] :

$$\frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \gamma_g^2 \left(\frac{\beta_g}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_\perp^2}{\gamma_g^2 (1 + \phi)^2}}} - 1 \right), \quad (1.31)$$

où $\beta_g = \frac{v_g}{c}$, $\gamma_g = (1 - (\frac{v_g}{c})^2)^{-1/2}$ est le facteur relativiste associé à la vitesse de groupe du laser, $\gamma_\perp = (1 + p_\perp^2)^{1/2}$ est le facteur relativiste transverse des particules. La force pondéromotrice est contenue dans le terme γ_\perp et on peut montrer que $p_\perp = A_0$ [Mora 1997]. Les équations peuvent être résolues numériquement et on obtient les résultats de la figure 1.2. On observe que l'onde de sillage se situant derrière le laser est conforme à nos attentes. Notamment, on retrouve une zone de sous-densité et de sur-densité ainsi que les champs électriques résultants de cette séparation de charge.

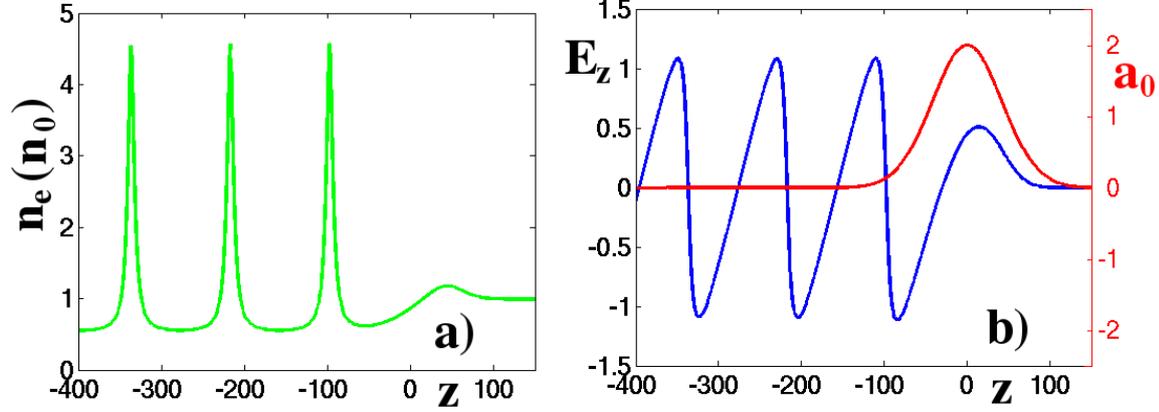


FIGURE 1.2 – Résultat du modèle 1D pour $a_0 = 2$, $\tau_0 = 30 fs$ et $n_0 = 0.004 n_c$. a) Densité électronique $n_e(n_0)$ et b) Champ électrique $E_z(\frac{m_e c \omega_p}{e})$ et potentiel vecteur a_0 en fonction de $k_0 z$

1.3.2 Piégeage des électrons et accélération

Une onde de sillage laser doit d'abord piéger des électrons avant de pouvoir les accélérer. Concrètement, un électron traversant la bulle et dont la vitesse devient supérieure à celle de l'onde de sillage peut être piégé. Pour être plus précis, il faut que l'électron ait une orbite fermée dans l'espace des phases.

Notion de séparatrices

En utilisant la mécanique hamiltonienne, on peut déterminer la dynamique d'un électron dans l'espace des phases. Le hamiltonien de l'électron s'écrit [Fubiani 2004] :

$$H(p_z, \xi) = \sqrt{\gamma_{\perp}^2 + p_z^2} - \beta_g p_z - \phi(\xi)$$

On sait que le hamiltonien d'une particule qui ne dépend pas explicitement du temps, est un invariant du système [Tabor 1989]. En notant H_0 cette constante, on peut exprimer p_z en fonction de ξ :

$$p_z^{\pm} = \beta_g \gamma_g^2 (H_0 + \phi) \pm \gamma_g \sqrt{\gamma_g^2 (H_0 + \phi)^2 - \gamma_{\perp}^2} \quad (1.32)$$

Cette trajectoire est également appelée orbite de l'électron et l'orbite fluide correspond à celle des électrons non perturbés initialement par l'onde de sillage et au repos

d'où $H_0 = 1$. Pendant le passage de l'onde de sillage, cette trajectoire s'écrit :

$$p_z^{fluide} = \beta_g \gamma_g^2 (1 + \phi) \pm \gamma_g \sqrt{\gamma_g^2 (1 + \phi)^2 - \gamma_\perp^2}$$

L'équation (1.32) impose que

$$\gamma_g^2 (H_0 + \phi)^2 - \gamma_\perp^2 \geq 0,$$

cette condition est remplie pour tout ξ si

$$H_0 \geq \frac{\gamma_\perp}{\gamma_g} - \phi_{min},$$

où ϕ_{min} désigne le minimum atteint par le potentiel de l'onde de sillage. On peut introduire la valeur limite du Hamiltonien $H_s = \frac{\gamma_\perp}{\gamma_g} - \phi_{min}$ qui représente la limite entre les orbites fluides ouvertes et fermées. La séparatrice est définie comme l'orbite limite :

$$p_z^{sep\pm} = \beta_g \gamma_g^2 (H_s + \phi) \pm \gamma_g \sqrt{\gamma_g^2 (H_s + \phi)^2 - \gamma_\perp^2} \quad (1.33)$$

Pour que l'onde de sillage puisse piéger les électrons et les accélérer, il faut les amener

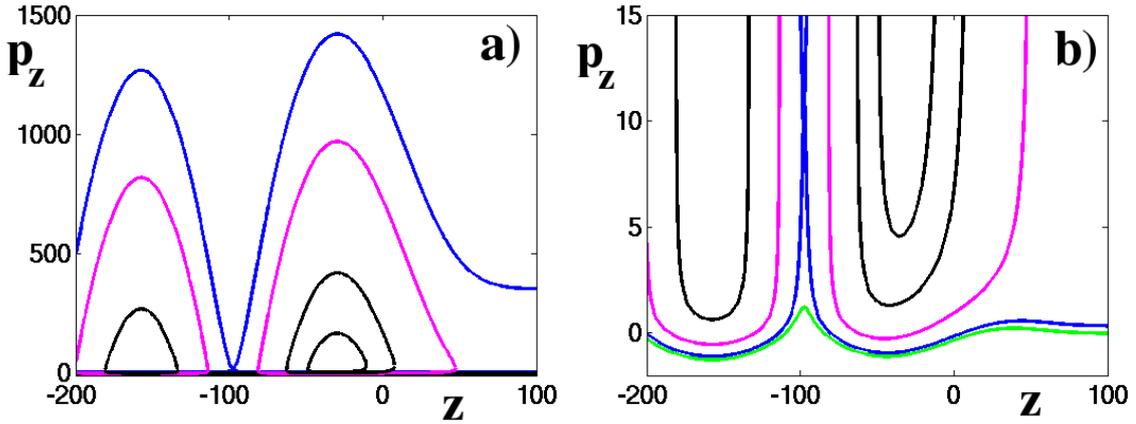


FIGURE 1.3 – a) Orbites de quelques électrons pour $a_0 = 2$, $\tau_0 = 30 fs$ et $n_0 = 0.004 n_c$. b) Agrandissement, domaine de l'espace des phases utile. En vert : orbite fluide, en bleu : séparatrice 1D, en violet : séparatrice 2D et en noir quelques orbites fermées.

sur des orbites fermées (Fig.1.3). Par exemple en donnant aux électrons, initialement au repos, une impulsion longitudinale suffisante pour les faire entrer dans une orbite fermée. Cette approche 1D ne tient pas compte des conditions transverses pour piéger les particules, le piégeage est en réalité plus contraignant.

Accélération des électrons et énergie atteinte

L'énergie maximale atteinte est celle des électrons se trouvant sur la séparatrice et arrivant à la position ξ où le potentiel est maximal. On peut estimer l'impulsion maximale en posant $\Delta\phi = \phi_{max} - \phi_{min}$ et en supposant que $\gamma_g \gg 1$:

$$p_z^{max} = 2\gamma_g^2 \Delta\phi \quad (1.34)$$

L'énergie correspondante en MeV est donnée par :

$$E = 0.511 \times 2\gamma_g^2 \Delta\phi [\text{MeV}] \quad (1.35)$$

Pour que l'électron puisse être accéléré, il faut qu'il reste dans la zone d'accélération. La longueur d'accélération correspond à la longueur de déphasage :

$$L_D \sim \gamma_g^2 \lambda_p, \quad (1.36)$$

où $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$. Il faut également tenir compte de la longueur de Rayleigh et de la longueur de déplétion du laser ($L_{depl} \sim c\tau\gamma_g^2\lambda_p$). La longueur de déplétion correspond à la distance au bout de laquelle le laser ayant cédé une bonne partie de son énergie au plasma n'est plus capable d'exciter les ondes plasmas.

1.3.3 Régime de la bulle ou du blowout

Lorsque la force pondéromotrice du laser devient très importante, celle-ci est capable d'expulser complètement les électrons sur son passage. Si l'impulsion laser est de courte durée typiquement quelques dizaines de femtosecondes, avec des taches focales de quelques dizaines de microns, les électrons expulsés forment une couche dense à la surface d'une bulle remplie d'ions, non affectés par le passage du laser ultra-court. Cela se produit dans le régime d'intensité laser relativiste, et plus précisément en terme de potentiel vecteur lorsque $a_0 > 2$. Plus a_0 augmente, plus la force pondéromotrice est importante et plus on expulse efficacement les électrons. Sur la figure 1.4, on a tracé les trajectoires de plusieurs électrons. Ces électrons sont expulsés par la force pondéromotrice puis rejoignent l'axe de propagation. L'importante séparation de charge crée des champs électriques très importants capables d'accélérer efficacement des électrons. Cette méthode a déjà permis d'atteindre le GeV en laboratoire sur quelques centimètres de plasma [Leemans 2006]. Les études présentées dans cette thèse se placent exclusivement dans ce régime prometteur pour l'accélération d'électrons. Dans le chapitre suivant, nous examinerons en détail la modélisation théorique de ce régime.

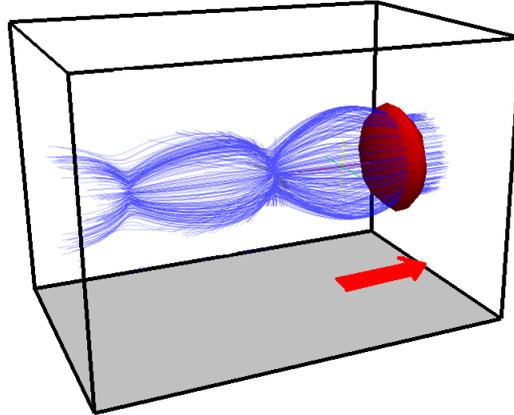


FIGURE 1.4 – Trajectoires de particules tests issues d'une simulation PIC montrant la formation de l'onde de sillage dans le régime de la bulle. L'impulsion laser se situe à l'avant en rouge.

1.4 Injection des électrons dans une onde de sillage laser

1.4.1 Auto-injection

Lorsque les électrons formant l'onde de sillage sont expulsés, ils peuvent gagner suffisamment d'énergie pour être capturés à l'arrière de l'onde de sillage. Ce phénomène se produit dès que le champ électrique à l'arrière de l'onde de sillage est assez intense pour les piéger. Pour augmenter le champ électrique accélérateur, il faut considérer des densités de plasma et/ou des intensités lasers plus élevées. Ce phénomène ne peut se produire qu'à des intensités lasers très élevées ($a_0 \gg 1$) [Mangles 2012b] ou en s'appuyant sur des phénomènes non-linéaires comme l'auto-focalisation de l'impulsion laser pour atteindre les seuils nécessaires à l'auto-injection. Avec ce schéma d'injection, le contrôle de la charge et de l'énergie du faisceau est très difficile.

1.4.2 Injection optique

L'injection optique [Fubiani 2004, Kotaki 2004] a été imaginée afin de trouver un moyen de contrôler les propriétés du faisceau accéléré. L'utilisation d'une impulsion laser additionnelle se propageant en sens inverse à l'impulsion principale, permet

aux électrons de rentrer par l'avant de l'onde de sillage. On choisit en général la densité électronique et le potentiel vecteur normalisé de façon à éviter les effets non-linéaires propres à l'auto-injection. En choisissant la position de l'injection dans le plasma, on peut fixer l'énergie des électrons. Suivant les paramètres des différents lasers, des faisceaux présentant des spectres quasi-mono-énergétiques peuvent être obtenus mais également avec de très bonnes caractéristiques transverses [Faure 2006, Davoine 2008]. Dans ces expériences, l'onde d'injection est contrepropagative et son intensité est faible devant celle de l'onde principale créant le sillage.

Dans la référence [Faure 2006], une onde laser de potentiel vecteur normalisé $a_0 = 1.3$, de durée de $30 fs$ et de waist $w_0 = 18 \mu m$, est focalisée dans un plasma de densité $n_e = 0.0043 n_c$ ($n_e = 7.5 \times 10^{18} cm^{-3}$ pour $\lambda_0 = 0.8 \mu m$). Les électrons sont injectés par une onde contrepropagative (avec $a_1 = 0.4$, de durée $30 fs$ et de waist $w_1 = 31 \mu m$) lors de la collision des deux impulsions lasers. Un faisceau avec une charge de $19 pC$ a pu être accéléré jusqu'à $117 MeV$. Ce faisceau présentait de très bonnes caractéristiques notamment une faible dispersion en énergie (environ 11%) et une faible divergence (environ 6 mrad).

Chauffage stochastique

Suivant les polarisations des lasers, différents phénomènes interviennent lors de la collision des deux impulsions. Si les deux lasers sont polarisés linéairement et ont leur champs électriques parallèles, les électrons entrent dans l'onde de sillage et peuvent subir du chauffage stochastique. Ainsi, ils gagnent de l'énergie pouvant être utilisée pour leur capture. Le phénomène de chauffage stochastique ainsi que son utilité dans l'accélération d'électrons par onde de sillage laser sera étudié dans la seconde partie de cette thèse.

1.4.3 Injection par gradient de densité

Dans le régime de la bulle, on peut contrôler les dimensions de la cavité en modifiant les paramètres lasers (waist et potentiel vecteur a_0) et surtout la densité électronique du plasma. Par exemple, en diminuant la densité, on allonge la bulle. C'est le principe de l'injection par gradient de densité [Hansson 2015, Gonsalves 2011]. On suppose que le laser se propage dans un plasma sous-dense de densité n_{e1} . Comme on l'a dit plus tôt, les électrons formant l'onde de sillage acquièrent une certaine vitesse susceptible de les injecter dans la bulle, lorsque cela se produit, on est dans le régime d'auto-injection présenté plus haut. On peut forcer l'injection de ces électrons

en allongeant la bulle. Si la bulle s'allonge, les électrons se situant à l'arrière auront une vitesse suffisante pour être injectés. Ce type d'injection demande des réglages assez fins de la densité. Dans la référence [Hansson 2015], une seconde source de gaz est utilisée afin de créer localement une sur-densité électronique. En positionnant correctement cette arrivée de gaz secondaire, on peut obtenir un profil de densité présentant un gradient propice à l'injection.

1.5 Accélération des électrons - guidage de l'impulsion laser.

1.5.1 Création d'un canal plasma

Il a été montré qu'en utilisant un profil transverse parabolique de plasma, on peut guider une impulsion laser gaussienne [Sprangle 1992, Geddes 2005]. Ce profil est de la forme $n(r) = n_0 + \Delta n (r^2/w_0^2)$ où w_0 désigne le waist de l'impulsion gaussienne à guider. Cela définit un canal plasma avec une densité faible au centre et qui croît avec le rayon au bord. Une densité plus faible donne une longueur de déphasage plus longue permettant une accélération d'autant plus longue. Différentes approches permettent de créer un tel profil. En utilisant un laser, on peut chauffer le plasma sur l'axe, un choc hydrodynamique se propage radialement [Geddes 2005] et fournit le profil souhaité.

1.5.2 Guidage par capillaire

L'une des méthodes de guidage par capillaire est celle utilisant une décharge électrique [Spence 2000]. Le chauffage au centre du plasma par la décharge électrique et le refroidissement au paroi du capillaire permet d'obtenir un profil de densité parabolique. Les parois du capillaire sont fait en un matériau résistant au flux laser, aux hautes températures et isolant pour que la décharge ne claque pas sur les parois. L'alumine, qui répond à ces différents critères, est le matériau de prédilection pour ces expériences. Dans la référence [Leemans 2006], une impulsion laser avec un waist de $26 \mu m$, d'une durée de $40 fs$, une intensité de $I_0 = 3 \times 10^{18} W.cm^{-2}$ ($a_0 = 1$) et une longueur d'onde $\lambda_0 = 810 nm$ a pu être guidée dans un plasma de densité $n_e = 2.7 \times 10^{18} cm^{-3}$ ($n_e = 1.6 \times 10^{-3} n_c$) sur $3.3 cm$. Ce guidage a permis l'obtention d'un faisceau d'électrons de $50 pC$ avec une énergie de $1 GeV$.

1.5.3 Utilisation d'un champ magnétique longitudinal

En appliquant un champ magnétique longitudinal, on peut former un canal au centre duquel la densité électronique sera plus faible que dans le cas non magnétisé. Cet effet a été testé par l'équipe de D. H Froula *et al.* [Froula 2009] au Lawrence Livermore National Laboratory. La figure 1.5 montre les profils transverses des densités obtenus. Ces profils sont issus de simulations avec un code hydrodynamique dans lequel on regarde la formation d'un plasma créé par une impulsion laser longue. Dans l'exemple de la figure 1.5, on a une impulsion laser transportant une énergie de 100 J, focalisée sur un waist de $150 \mu\text{m}$ et d'une durée de 1 ns. Le paramètre $\beta = \frac{P_c}{P_b}$

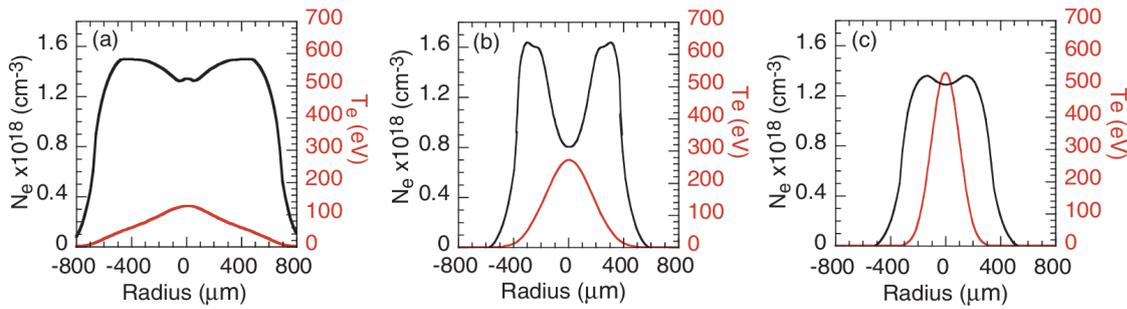


FIGURE 1.5 – Figures tirées de la référence [Froula 2009], Densités et températures électroniques en fonction du champ magnétique appliqué a) $B = 0$, b) $B = 3 \text{ T}$ et c) $B = 30 \text{ T}$

mesure le rapport entre la pression cinétique (due à la densité des électrons) sur la pression magnétique. Lorsque $\beta > 1$ comme dans la figure 1.5b, c'est la pression cinétique qui domine et les électrons ne sont pas confinés par le champ magnétique. Les électrons chauffés au centre de l'impulsion se déplacent radialement d'où la présence d'un canal où la densité est plus faible. Par contre lorsque $\beta < 1$, c'est à dire lorsque le champ magnétique devient grand comme pour la figure 1.5c, la température électronique augmente au centre mais le confinement des électrons ne permet plus de former un canal. Dans la partie traitant du champ magnétique, cet effet ne sera pas pris en compte. Le champ magnétique sera appliqué sur un plasma à l'équilibre et déjà totalement ionisé.

1.6 Applications de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser.

1.6.1 Source de rayonnement

Un faisceau d'électrons oscillant transversalement produit du rayonnement synchrotron. Lors du processus d'accélération par onde de sillage, on peut créer un faisceau ayant ce type de comportement. Les propriétés de ces faisceaux sont propices à la génération de sources X de hautes énergies (supérieures au KeV), de courtes durées et avec une petite taille transverse. Avec de telles sources, l'étude de la matière sur des échelles de temps de l'ordre de la femtoseconde et sur des échelles de longueur de l'ordre de l'angström est envisageable, ces dimensions caractéristiques étant celles d'un atome.

Rayonnement bêtatron

Il existe différentes manières de faire du rayonnement. Celui décrit précédemment est le rayonnement bêtatron résultant de l'oscillation du faisceau d'électrons dans les champs focalisant de l'onde de sillage (Fig.1.6). L'onde de sillage se comporte alors comme un onduleur. Le rayonnement bêtatron est un rayonnement incohérent. Le nombre de photons émis croît avec le nombre d'oscillations, celui ci dépend de la fréquence bêtatron $\omega_b = \omega_p / (2\gamma)^{1/2}$ et de l'amplitude des oscillations. On peut augmenter l'amplitude des oscillations en forçant l'injection puis le piégeage des électrons hors axe.

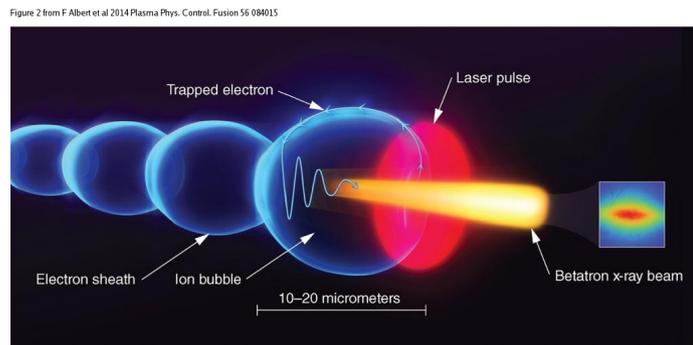


FIGURE 1.6 – Figure tirée de la référence [Albert 2014], principe de création d'une source X par rayonnement bêtatron

1.6. Applications de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser³⁵

Diffusion Thomson

Lorsqu'un faisceau d'électrons interagit avec une onde électromagnétique très intense comme l'onde laser, ces derniers acquièrent une vitesse relativiste. Suivant les caractéristiques de l'onde laser, un rayonnement X peut être produit. Un mécanisme permettant d'utiliser l'onde laser créant l'onde de sillage par l'intermédiaire d'un miroir plasma a été expérimenté par certaines équipes [Phuoc 2012, Mangles 2012a], il est résumé sur la figure 1.7. Les électrons sont tout d'abord accélérés par l'onde de

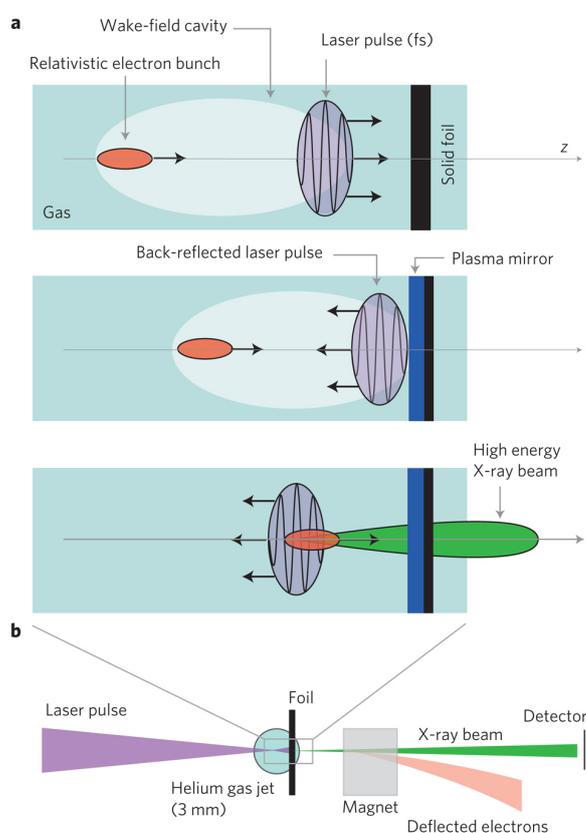


FIGURE 1.7 – Figure tirée de la référence [Phuoc 2012], principe de création d'une source X par diffusion Thomson et miroir plasma

sillage créée par le laser et arrivent face à un film en plastique. Le film s'ionise et devient un miroir plasma qui va renvoyer le laser. Les électrons traversent l'impulsion laser et oscillent à très haute fréquence d'où la production de rayonnement X.

Rayonnement de freinage ou Bremsstrahlung

Lorsque des électrons énergétiques sont déviés, ralentis ou stoppés comme par exemple des électrons qui rentrent en collision avec des atomes, un rayonnement de freinage ou Bremsstrahlung est produit. Ce rayonnement se compose de photons très énergétiques et très directs. Le rayonnement émis a aussi la particularité de présenter une distribution maxwellienne voisine de celle des électrons. La durée de la source est de l'ordre de la picoseconde et sa taille dépend de celle du faisceau d'électrons et de la nature de la cible. De telles sources sont intéressantes entre autre pour la radiographie ultra-brève d'objet avec une meilleure résolution spatiale [Glinec 2005]. Les très hautes énergies permettent de considérer des objets très denses. On peut également utiliser ces rayonnements pour des applications médicales [Kainz 2004]. Les rayonnements issues des accélérateurs conventionnels ont des énergies allant de 10 à 20 MeV afin d'éviter l'activation des matériaux constitutifs des installations. Avec un accélérateur laser plasma, on peut obtenir des électrons beaucoup plus énergétiques. De ce fait, on peut par exemple dans le cadre de traitements pour le cancer, traiter des tumeurs dans des zones beaucoup plus profondes sans risque pour les tissus sains [DesRosiers 2000]. On peut également envisager des expériences d'activation nucléaire comme par exemple la production de neutrons et d'éléments radioactifs [Giulietti 2008].

1.6.2 Radiographie

La production de faisceaux d'électrons énergétiques avec des résolutions spatiale et temporelle faibles permet la radiographie d'objets denses et/ou de phénomènes très rapides. Par exemple, on peut par ce moyen, suivre l'évolution rapide de champs électromagnétiques [Schumaker 2013]. La radiographie d'image avec une très bonne résolution spatiale est également possible [Bussolino 2013]. La haute résolution de ces sources dépasse la limite millimétrique des accélérateurs conventionnels (Fig.1.8)

1.6. Applications de l'accélération d'électrons par onde de sillage laser37

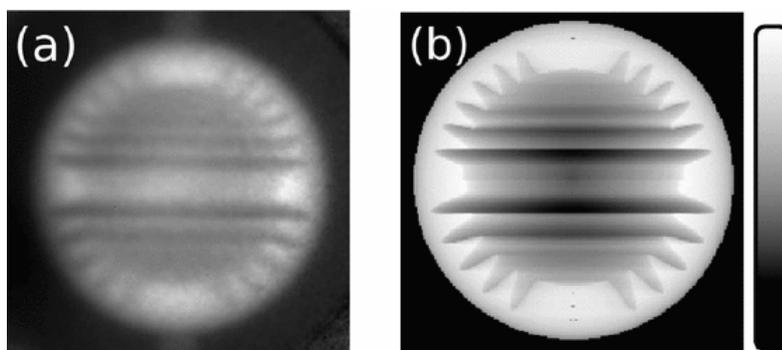


FIGURE 1.8 – Figures tirées de la référence [Glinec 2005], radiographie d'un cylindre en tungstène de 2mm de diamètre, utilisant des électrons accélérés par une onde de sillage laser comme source de rayonnement. a) image expérimentale et b) image obtenue après un traitement numérique.

Modélisation de l'onde de sillage laser dans le régime de la bulle

Sommaire

2.1	Présentation du modèle et premières approximations	40
2.1.1	Description du plasma	40
2.1.2	Approximation des champs moyennés - force pondéromotrice.	42
2.1.3	Approche hamiltonienne	43
2.2	Système d'équations décrivant le rayon de la bulle	44
2.2.1	Hypothèse sur la forme de l'onde de sillage	45
2.2.2	Expression du potentiel effectif	49
2.2.3	Calcul des autres potentiels	52
2.2.4	Équation sur le rayon de la bulle	53
2.2.5	Calcul des champs électriques	54
2.3	Validation du modèle théorique	56
2.3.1	Définition de l'impulsion laser et de la force pondéromotrice	56
2.3.2	Conditions initiales et paramètres	57
2.3.3	Confrontation du modèle aux simulations PIC	59
2.3.4	Application au beamloading	68
2.4	Conclusion	70

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les bases de la physique de l'accélération par onde de sillage laser avec une modélisation 1D. Les formules ainsi obtenues permettent d'estimer l'énergie maximale (Eq.1.35) et la longueur d'accélération nécessaire (Eq.1.36). Toutefois pour obtenir une description réaliste de la forme de l'onde de sillage et des champs électromagnétiques, il est nécessaire de prendre en compte les effets transverses et d'adopter un formalisme 3D. Nous présentons un modèle 3D permettant de déterminer la forme de l'onde de sillage créée par un laser se propageant dans un plasma sous dense. Ce modèle a déjà été introduit par W. Lu

[Lu 2006] dans le cas d'un faisceau d'électrons ou d'un laser créant l'onde de sillage. Dans notre modèle, nous déterminons les équations décrivant une onde de sillage créée par impulsion laser ultra-courte et ultra-intense. A la différence de Lu, nous utiliserons le formalisme de S.Yi [Yi 2013] pour décrire les charges et les courants afin de déterminer les potentiels dans l'onde de sillage.

Le régime de blowout est atteint lorsque le plasma est très sous-critique ($n_e/n_c \ll 1$) et l'interaction est ultra-relativiste ($a_0 \gg 1$) [Kostyukov 2004, Pukhov 2004, Gordienko 2005, Pukhov 2006], nous nous plaçons dans ce régime. Dans ces conditions, le faisceau laser, via la force pondéromotrice, expulse complètement hors axe les électrons avec lesquels il interagit. Une région vide d'électrons de géométrie axi-symétrique est créée à la suite du passage de l'impulsion laser. Le modèle que nous allons construire devrait permettre de comprendre la formation de la bulle accélératrice, de déterminer l'influence des différents paramètres sur la forme de la cavité et les champs électromagnétiques dans la bulle. Dans une première section, nous présentons les hypothèses et les approximations utilisées dans ce modèle. Dans une deuxième section, nous déterminons les équations de notre modèle. Dans une troisième section, nous confrontons notre modèle aux résultats de simulations PIC.

2.1 Présentation du modèle et premières approximations

2.1.1 Description du plasma

Pour décrire l'interaction d'un plasma avec un laser, il faut traiter à la fois les équations sur les champs électromagnétiques et les trajectoires des différentes espèces dans le plasma et le tout de manière auto-consistante. En déterminant les charges et courants du système, ainsi que les conditions limites, on peut déterminer les champs électromagnétiques grâce aux équations de Maxwell. La complexité de ce type de modèle vient de la description du plasma et en particulier des trajectoires des particules. Lorsque l'intensité du laser est très élevée, les trajectoires des électrons peuvent se croiser et un modèle fluide simple [Chen 1985] ne suffit pas pour décrire le plasma. Dans notre modèle, on considère des particules fluides lagrangiennes et l'équation du mouvement s'écrit pour chaque particule fluide :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \right] \mathbf{p}_i = q_i [\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}], \quad (2.1)$$

où i indique la particule fluide concernée, q_i , v_i et p_i désignent respectivement la charge, la vitesse et l'impulsion de la particule fluide. La force de Lorentz fait intervenir le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{B} .

Les densités de charge et de courant vérifient l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.2)$$

où la densité de charge $\rho = \sum_i q_i n_i$ et la densité de courant $\mathbf{J} = \sum_i q_i n_i \mathbf{v}_i$. Les champs électromagnétiques sont calculés grâce aux équations sur les potentiels scalaire et vecteur, notés respectivement ϕ et \mathbf{A} :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \rho \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Nous utilisons la jauge de Lorentz :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.4)$$

Dans ce modèle, nous utiliserons les normalisations suivantes :

Grandeurs Physiques	normalisée à
Temps	$1/\omega_p$
Distance	c/ω_p
Vitesse	c
Masse	m_e
Charge	e
Impulsion	$m_e c$
Densité	n_0
Potentiel vecteur	$\frac{m_e c}{e}$
Champ électrique	$\frac{m_e c \omega_p}{e}$
Champ magnétique	$\frac{m_e \omega_p}{e}$

TABLE 2.1 – Normalisation des grandeurs pour le modèle où c est la vitesse de la lumière, m_e la masse de l'électron, e est la charge élémentaire, n_0 la densité du plasma et ω_p est la fréquence plasma.

Le laser se propageant dans un milieu largement sous-critique, sa vitesse de groupe est proche de celle de la lumière. On peut séparer la dynamique des électrons de celle

des ions, en effet les ions au moins 1836 fois plus lourds que les électrons ne seront quasiment pas perturbés par le passage d'une impulsion laser de quelques dizaines de femtosecondes.

Notre première approximation concerne les électrons situés à l'avant du laser. Étant donné que les électrons formant l'onde de sillage se déplacent à une vitesse de l'ordre de c , leurs vitesses thermiques initiales négligeables devant c sont considérées nulles. Ainsi, les électrons qui constituent les particules fluides à l'avant du laser sont considérés au repos.

Notre seconde approximation concerne les champs dans l'onde de sillage. Ceux-ci dépendent exclusivement de la variable $\xi = ct - z$, la vitesse de phase de l'onde de sillage étant proche de c .

Notre dernière hypothèse simplificatrice est l'approximation quasi-statique [Sprangle 1990], celle-ci distingue différentes échelles de temps lors de la propagation du faisceau laser intense dans le plasma dilué. Plus précisément, on considère que l'enveloppe du laser évolue sur un temps long devant le temps de réponse du plasma. Ainsi pendant le temps nécessaire au laser pour dépasser un électron, l'enveloppe du laser ne subit presque aucune modification.

Pour que l'approximation quasi-statique soit valable, le faisceau laser qui crée l'onde de sillage et la densité électronique doivent vérifier certaines conditions. Le faisceau laser évolue sur une longueur de l'ordre de sa longueur de Rayleigh ($Z_r = \frac{\pi W_0^2}{\lambda_0}$). Le waist w_0 du laser est de l'ordre de l'épaisseur de peau du plasma c/ω_p . Par conséquent pour vérifier $Z_r \gg c/\omega_p$ on doit vérifier $\omega_0/\omega_p \gg 1$, cette condition est vérifiée pour les plasmas très dilués. En pratique, on choisira toujours $n_e < 10^{-2} n_c$.

En outre, signalons que pour un laser d'intensité extrêmement élevée, certains électrons sont propulsés à l'avant du front du laser avec des vitesses très proches de la vitesse de groupe du laser. Le front du laser met un temps beaucoup plus long à dépasser ces électrons, pour ces particules l'approximation quasi-statique n'est pas satisfaite.

2.1.2 Approximation des champs moyennés - force pondéromotrice.

Le laser intense crée une onde de sillage en perturbant les trajectoires des électrons. L'approximation des champs moyennés suggère que l'on ne tient compte que des mouvements moyens des électrons responsables de la création de l'onde de sillage. En d'autres termes, les mouvements rapides d'oscillations des électrons dans l'impulsion laser sont moyennés sur une période laser. De cette moyenne ressort la force

pondéromotrice qui a été calculée par Mora et Antonsen [Mora 1997]. L'équation régissant le mouvement des électrons s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \right) \mathbf{p}_s = -e [\mathbf{E}_s + \mathbf{v}_s \wedge \mathbf{B}_s] + \mathbf{F}_p \quad (2.5)$$

Dans l'expression 2.5, il ne reste que les champs moyennés (notés avec un indice s), typiquement les champs électromagnétiques développés dans l'onde de sillage ainsi que la vitesse et l'impulsion moyennées de l'électron. Dans cette approximation, les champs électromagnétiques dus au laser interviennent dans la force pondéromotrice qui est donnée dans le cas relativiste par l'expression suivante [Mora 1997] :

$$\mathbf{F}_p = -\frac{q_i^2}{\bar{\gamma}_i m_i c^2} \nabla \left| \frac{A_0}{2} \right|^2 \quad (2.6)$$

Le champ laser est donné par $A_{laser} = \frac{A_0}{2} \exp(-ik_0\xi) + c.c$, $c.c$ étant le complexe conjugué, A_0 est l'enveloppe de l'impulsion laser et k_0 est son vecteur d'onde. Le facteur de Lorentz moyenné, noté $\bar{\gamma}$, est donné par [Mora 1997] :

$$\bar{\gamma}^2 = \left(1 + p_{\perp}^2 + p_z^2 + \frac{|A_0|^2}{2} \right), \quad (2.7)$$

où l'impulsion mécanique transverse p_{\perp} est donnée par $p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2$ en coordonnées cartésiennes et p_z est l'impulsion mécanique longitudinale. Les composantes de l'impulsion sont également des valeurs moyennes sur une période laser. On peut noter que les électrons sont plus violemment mis en mouvement que les ions dont la masse est des milliers de fois plus élevée.

2.1.3 Approche hamiltonienne

En utilisant les outils de la dynamique hamiltonienne, on obtient plusieurs relations utiles à la résolution de notre problème. On considère un électron dont le Hamiltonien s'écrit : $\bar{H} = \bar{\gamma} - \bar{\phi}$. Les différentes grandeurs sont moyennées sur une période laser. Un changement de coordonnées, permet d'éliminer le temps via une transformation canonique. L'utilisation de la fonction génératrice d'ordre 2 : $F_2 = \bar{P}_z(z - t)$ donne un nouvel Hamiltonien : $\hat{H} = \bar{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \bar{H} - \bar{P}_z = \bar{\gamma} - \bar{\phi} - \bar{P}_z$ où $\bar{P}_z = \bar{p}_z - \bar{A}_z$ est la nouvelle impulsion généralisée. Le nouvel hamiltonien qui ne dépend plus explicitement du temps, est un invariant du système. A l'instant initial, les électrons

sont considérés comme étant au repos ce qui se traduit par : $\hat{H} = 1$. On obtient la relation suivante en posant $\Psi = \bar{\phi} - \bar{A}_z$:

$$\bar{\gamma} - p_z = 1 + \Psi \quad (2.8)$$

En partant de cette expression et de celle de $\bar{\gamma}^2$, on obtient [Mora 1997] :

$$p_z = \frac{\left[1 + p_{\perp}^2 + \frac{|A_0|^2}{2} - (1 + \Psi)^2\right]}{2(1 + \Psi)} \quad (2.9)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\left[1 + p_{\perp}^2 + \frac{|A_0|^2}{2} + (1 + \Psi)^2\right]}{2(1 + \Psi)} \quad (2.10)$$

On a l'équation suivante pour ξ :

$$\frac{d\xi}{dt} = 1 - v_z = \frac{2(1 + \Psi)^2}{\left[1 + p_{\perp}^2 + \frac{|A_0|^2}{2} + (1 + \Psi)^2\right]} \quad (2.11)$$

Ces relations nous permettent de déterminer p_z , $\bar{\gamma}$ et $\frac{d\xi}{dt}$ à partir du potentiel effectif et de l'impulsion transverse. Ainsi, on peut les éliminer dans les équations liées à la dynamique transverse. Ces relations restent valables tant que la trajectoire de l'électron satisfait les approximations introduites dans la sous-section 2.1.1. Par exemple dans le cas d'impulsions lasers très intenses, les électrons proches de l'axe sont dans un premier temps poussés vers l'avant par la force pondéromotrice du laser puis expulsés en dehors de la bulle. Pour ces électrons, l'approximation quasi-statique ne sera pas valide et les relations précédentes ne seront pas applicables. Il en est de même pour les trajectoires des électrons accélérés par l'onde de sillage.

2.2 Système d'équations décrivant le rayon de la bulle

Nous avons présenté dans la section précédente, le cadre et les équations permettant de décrire l'interaction d'une impulsion laser ultra-courte et très intense avec un plasma. On va maintenant développer un modèle permettant, à partir des équations précédentes, de calculer le rayon de la bulle et donc déterminer la forme de l'onde de sillage laser. Nous allons nous placer en coordonnées cylindriques car elles sont bien adaptées pour les problèmes liés aux ondes de sillages laser.

2.2.1 Hypothèse sur la forme de l'onde de sillage

La propagation d'une impulsion laser très intense et de très courte durée va expulser les électrons des zones de champs forts. Les trajectoires de ces électrons vont dépendre de leur position initiale et de l'intensité du laser. Le régime de la bulle est pleinement installé lorsque les trajectoires de ces électrons se croisent. Cela signifie que des zones vides d'électrons vont apparaître. Pour simplifier, on considère que l'onde de sillage peut être divisée en trois régions distinctes (Fig.2.1) :

- une cavité remplie d'ions positifs
- une couche fine et dense d'électrons en surface
- un plasma non perturbé

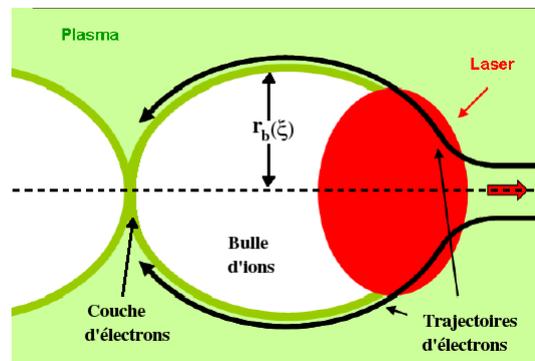


FIGURE 2.1 – Schéma de formation d'une onde de sillage laser dans le régime de la bulle.

La transition entre la cavité d'ions et la couche d'électrons est brutale, on passe d'une zone vide d'électrons à une sur-densité électronique. La limite entre les deux zones est donnée par $r_b(\xi)$ qui est le rayon à déterminer et également la trajectoire des électrons les plus proches de la bulle d'ions. Les ions étant considérés au repos, il n'y a pas de courant à l'intérieur de la bulle. Par contre celui des électrons en surface est bien évidemment à considérer.

Les champs électromagnétiques sont déterminés par le potentiel effectif Ψ . En utilisant l'équation 2.3, on aboutit à l'équation suivante sur Ψ :

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi = -(\rho - J_z) \quad (2.12)$$

Les termes sources de ce potentiel sont la densité de charge $\rho = \rho_i + \rho_e$ et le courant $J_z = J_{z,e}$ pour lequel seuls les électrons sont source de courant. La détermination

du potentiel effectif passe par la définition des différents termes sources. Dans les paragraphes qui suivent, nous définissons ces termes sources.

Densité électronique à la surface de la bulle

On considère que le laser crée une cavité vide d'électrons, ces derniers se trouvent à la surface de la cavité de rayon $r_b(\xi)$ et ils constituent une couche d'épaisseur $\Delta\rho$ (indépendante de ξ). On choisit d'écrire la densité électronique sous la forme :

$$\rho_e = \rho_s \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right), \quad (2.13)$$

pour $r \geq r_b$ où ρ_s est la densité maximale.

Le courant de retour sur la surface de la bulle

Les électrons à la surface de l'onde de sillage sont attirés par le champ électrostatique créé par la bulle. Plus les électrons s'éloignent du laser et plus cette force de rappel devient grande. En particulier, dans la direction longitudinale, un courant de retour se forme [Yi 2013]. On utilise la formule suivante pour modéliser ce courant :

$$J_{z,e} = J_s(\xi) \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta j}\right), \quad (2.14)$$

où $J_s(\xi)$ est la valeur maximale du courant. L'épaisseur Δj de ce courant de retour est supposée plus grande que celle de la couche électronique formant l'onde de sillage, $\Delta j \geq \Delta\rho$.

Ces deux expressions nous permettent de tracer le courant et la densité sur une carte (r, ξ) en connaissant la valeur de $r_b(\xi)$. Le calcul du courant de retour va également permettre de déterminer les champs électromagnétiques à l'extérieur de l'onde de sillage. Ceci par exemple dans le but d'étudier des mécanismes d'injections comme ce qui est présenté dans l'annexe D.

Définition du terme source S

À partir des formes analytiques choisies pour le courant et la densité de la couche d'électrons, nous pouvons estimer la valeur des termes sources du potentiel Ψ que l'on note $S(r, \xi) = -(\rho - J_z)$ et nous avons :

$$S(r, \xi) = \begin{cases} -(1 - \varepsilon) & (r < r_b), \\ S_0(\xi) \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right) & (r \geq r_b), \end{cases} \quad (2.15)$$

où S_0 est la valeur maximale du terme source en $r = r_b$. Le paramètre ε indique la proportion d'électrons par rapport à celle des ions dans la bulle. Cela va nous permettre de considérer nos équations dans des zones où la bulle n'est pas encore formée comme par exemple à l'avant de l'impulsion laser. Dans ce cas, nous aurons $\varepsilon = 1$. On peut noter que seule l'épaisseur $\Delta\rho$ intervient dans l'expression de S ce qui est, comme on va le voir, conforme aux simulations PIC. On trace sur la figure 2.2, les fonctions $S(r)$ et $J_{z,e}(r)$ normalisées à leur valeur maximale avec ξ fixé.

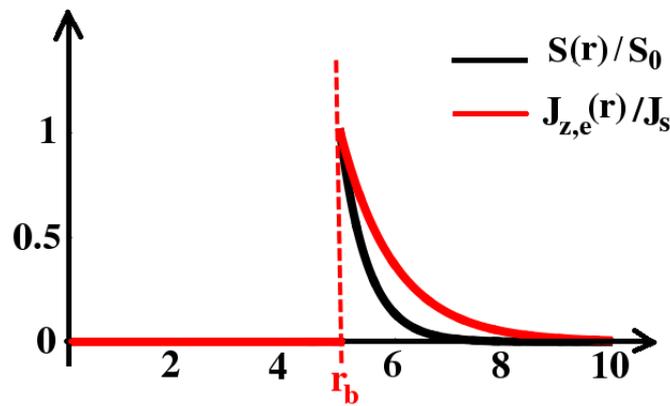


FIGURE 2.2 – Représentation des fonctions S et de courant $J_{z,e}$ pour $r_b = 5$ et avec $\Delta\rho = 0.5$ et $\Delta J = 1.0$. La partie négative de la fonction S pour $r < r_b$ n'est pas montrée sur le graphe.

A partir de simulations PIC obtenues à l'aide du code Calder-Circ, on peut déterminer les valeurs de la fonction S et du courant $J_{z,e}$ (Fig.2.3).

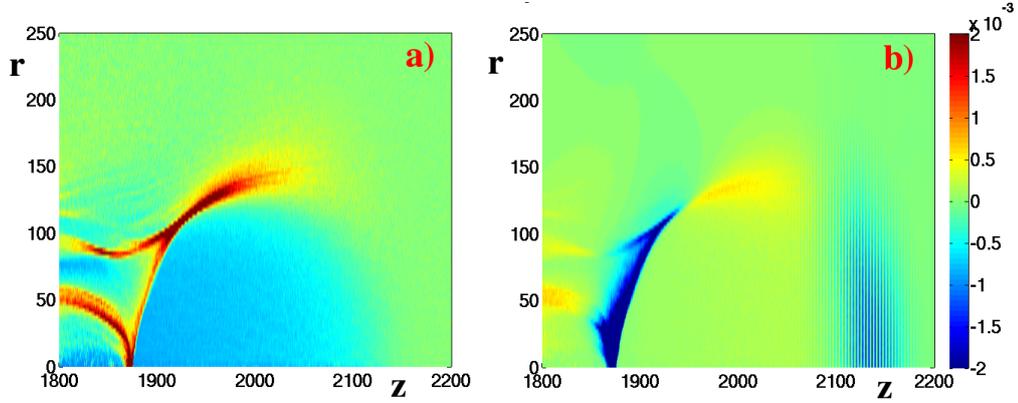


FIGURE 2.3 – Résultats de simulations PIC 3D Calder-Circ avec $a_0 = 4$, $n_e = 0.001 n_c$ à $t = 2400$ a) $S = -(\rho - J_z)$ et b) Densité de courant électronique $J_{z,e}$ projetés sur (z,r) . Le laser se situe en $z = 2100$.

La valeur de S au niveau de la surface de la bulle atteint un maximum puis décroît lorsque $r_b \mapsto 0$ (Fig.2.3a). Le courant de retour est représenté par le fort courant électronique dans la direction de propagation (Fig.2.3b).

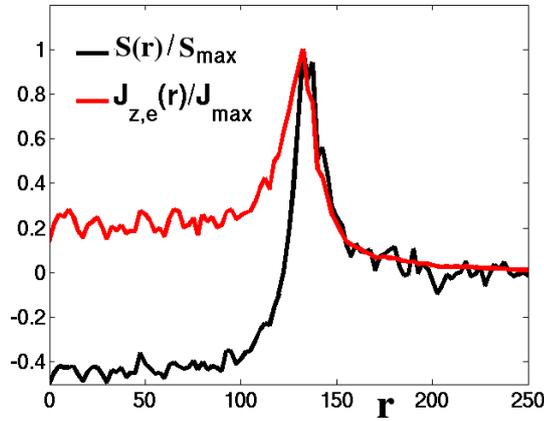


FIGURE 2.4 – Fonction $S(r)/S_{max}$ et le courant $J_{z,e}/J_{z,e,max}$ issus de simulations 3D avec CALDER-Circ avec $a_0 = 4$, $n_e = 0.001 n_c$ pour $z = 1980$ en fonction de r à $t = 2400$

On remarque que l'épaisseur du courant est légèrement plus élevée que celle du

terme source S (Fig.2.4). Le choix de prendre $\Delta j \geq \Delta \rho$ est ainsi justifié.

Calcul de S_0

Le terme S_0 peut être déterminé à partir de l'équation de continuité donnée par l'expression 2.2. En écrivant l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques et en regroupant le courant J_z et la densité ρ , on trouve le terme source $S(r, \xi)$

$$\frac{\partial(-S(r, \xi))}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r J_r)}{\partial r} = 0$$

On intègre l'expression sur la coordonnée cylindrique r

$$\int_0^\infty \frac{\partial(-S(r, \xi))}{\partial \xi} r dr + \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial(r J_r)}{\partial r} r dr = 0$$

La seconde intégrale tend vers 0 (pas de courant en 0 et à l'infini) et cela conduit à :

$$\int_0^\infty S(r, \xi) r dr = Cste.$$

En séparant l'intégrale en deux morceaux sur les intervalles $[0, r_b]$ et $[r_b, +\infty]$, nous arrivons finalement à :

$$S_0(\xi) = \frac{(1 - \varepsilon)r_b^2}{2\Delta\rho(r_b + \Delta\rho)} + \frac{Cste}{\Delta\rho(r_b + \Delta\rho)}$$

S'il n'y a pas de bulle c'est à dire pour $r_b = 0$, on a $S_0(\xi) = 0$ et ainsi :

$$S_0(\xi) = \frac{(1 - \varepsilon)r_b^2}{2\Delta\rho(r_b + \Delta\rho)} \quad (2.16)$$

L'expression du terme source étant connue, on peut calculer le potentiel effectif Ψ .

2.2.2 Expression du potentiel effectif

En partant de l'équation (2.3), on peut écrire l'équation suivante pour le potentiel Ψ :

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi(r, \xi) = S(r, \xi),$$

Les étapes de calculs sont données dans l'annexe B et l'expression de Ψ s'écrit finalement pour $r < r_b$:

$$\Psi(r, \xi) = (1 - \varepsilon) \frac{r_b^2 - r^2}{4} + S_0(\xi) \Delta \rho^2 \left[1 + \exp\left(\frac{r_b}{\Delta \rho}\right) E_1\left(\frac{r_b}{\Delta \rho}\right) \right], \quad (2.17)$$

puis pour $r \geq r_b$:

$$\Psi(r, \xi) = S_0(\xi) \Delta \rho^2 \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta \rho}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r}{\Delta \rho}\right) E_1\left(\frac{r}{\Delta \rho}\right) \right]. \quad (2.18)$$

où $E_1(r) = \int_r^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ est la fonction exponentielle intégrale.

En $r = r_b$, le potentiel s'écrit, en posant $\alpha = \frac{r_b}{\Delta \rho}$:

$$\Psi(\alpha) = \frac{(1 - \varepsilon) \alpha^2 \Delta \rho^2}{2(\alpha + 1)} [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)],$$

Les dérivées première et seconde du potentiel sont données en $r = r_b$ par :

$$\frac{d\Psi}{d\alpha} = \frac{(1 - \varepsilon) \alpha \Delta \rho^2}{2(\alpha + 1)^2} (2 + 2\alpha + \alpha^2) [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)],$$

et

$$\frac{d^2\Psi}{d\alpha^2} = \frac{(1 - \varepsilon) \Delta \rho^2}{2(\alpha + 1)^3} [-2\alpha + (2 + \alpha(1 + \alpha)(4 + \alpha(3 + \alpha))) \exp(\alpha) E_1(\alpha)],$$

Regardons comment se comporte la fonction Ψ . Sur la figure 2.5, on trace séparément les deux fonctions potentiels puis le potentiel Ψ final vu par la particule.

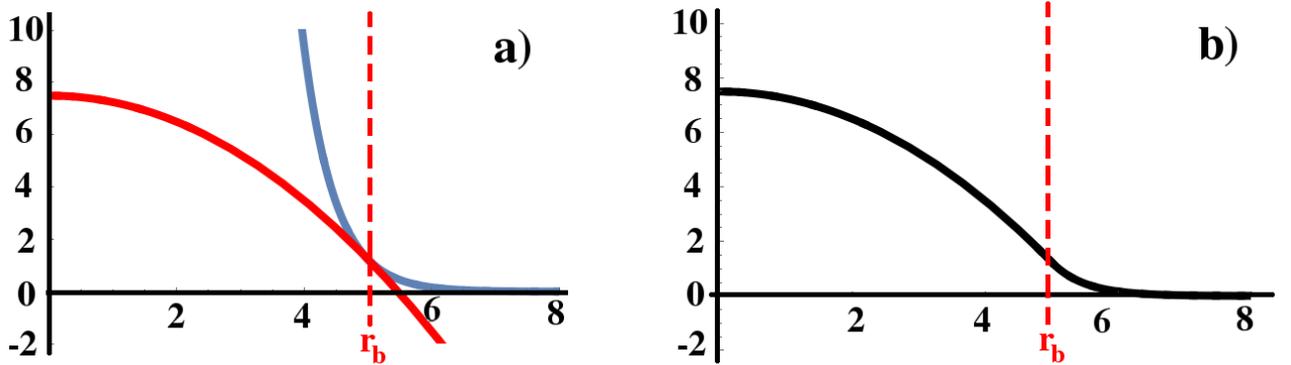


FIGURE 2.5 – Fonction $\Psi(r, \xi)$ pour $r_b = 5$, $\varepsilon = 0$ et $d = 0.5$ a) $\Psi(r < r_b, \xi)$ en rouge et $\Psi(r > r_b, \xi)$ en bleu b) $\Psi(r, \xi)$

La somme des deux fonctions donne bien le potentiel écranté d'une bulle d'ions (voir Annexe D). A l'intérieur de la bulle ($r < r_b$), la force de rappel des ions est très importante ce qui conduit à un potentiel très grand. Par contre en dehors de la bulle ($r > r_b$), le potentiel devient rapidement nul.

Calcul du courant de retour

Pour déterminer les potentiels et les champs à l'extérieur de la bulle, nous devons calculer le courant de retour en fonction de r et ξ . Nous rappelons la formule du courant J_z dans les différentes zones de la bulle :

$$J_{z,e}(r, \xi) = \begin{cases} 0 & (r < r_b), \\ J_s(\xi) \exp\left(-\frac{(r-r_b(\xi))}{\Delta_j}\right) & (r \geq r_b), \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour déterminer $J_s(\xi)$, on part de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \mathbf{J}$$

En intégrant sur une surface et en considérant que le rotationnel du champ magnétique est nul, on a :

$$\int_0^\infty \frac{dE_z}{d\xi} r dr + \int_0^\infty J_z r dr = 0, \quad (2.20)$$

sachant que le courant est non nul pour $r > r_b$, le calcul de l'intégrale sur J_z donne, à partir de 2.19 :

$$\int_0^\infty J_z r dr = J_s(\xi) \Delta_j (r_b + \Delta_j),$$

avec $E_z = \partial \Psi / \partial \xi$, on arrive à :

$$J_s(\xi) = \frac{-\int_0^\infty \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} r dr}{\Delta_j (r_b + \Delta_j)}$$

Le calcul de J_s à partir de Ψ est fait dans l'annexe C et on trouve au final que J_s s'écrit :

$$J_s(\xi) = \frac{-(I_1 + I_2)}{\Delta_j (r_b + \Delta_j)} \quad (2.21)$$

avec

$$I_1 = \frac{r_b^2}{2\Delta\rho} \left[\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi(0, \xi)}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta\rho} \frac{d^2 \Psi(0, \xi)}{d\alpha^2} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \right]$$

et

$$I_2 = \Delta\rho \left[\frac{3}{2} (\alpha + 1) \exp(-\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} E_1(\alpha) \right] \left[\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi_\xi}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta\rho} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \frac{d^2 \Psi_\xi}{d\alpha^2} \right]$$

2.2.3 Calcul des autres potentiels

Calcul du potentiel vecteur A_z

Pour ($r \leq r_b$), le courant à l'intérieur de la bulle est nul, $J_z = 0$ et ainsi on a :

$$A_z = 0.$$

Pour ($r \geq r_b$), $J_z = J_s(\xi) \exp\left(\frac{r_b}{\Delta J}\right) \exp\left(-\frac{r}{\Delta J}\right)$ et d'après les relations précédentes, on a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -J_z. \quad (2.22)$$

Après une première série d'intégration :

$$r \frac{\partial A_z}{\partial r} = -J_s e^{\frac{r_b}{\Delta J}} \int_{r_b}^r r' e^{-\frac{r'}{\Delta J}} dr',$$

puis en intégrant par partie, on obtient :

$$r \frac{\partial A_z}{\partial r} = -J_s \Delta j \left(r_b - r e^{-\frac{(r-r_b)}{\Delta J}} + \Delta j e^{-\frac{(r-r_b)}{\Delta J}} - \Delta j \right).$$

On continue l'intégration et en considérant que $\int_{r_b}^r = \int_{r_b}^\infty - \int_r^\infty$, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} A_z(r, \xi) = & -J_s(\xi) \Delta j \left(r_b \ln\left(\frac{r}{r_b}\right) + \Delta j \left[-1 + \ln\left(\frac{r}{r_b}\right) + e^{-\frac{(r-r_b)}{\Delta J}} \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{\frac{r_b}{\Delta J}} \left[E_1\left(\frac{r}{\Delta J}\right) - E_1\left(\frac{r_b}{\Delta J}\right) \right] \right] \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

On retrouve l'expression donnée dans l'article de Yi [Yi 2013].

Calcul du potentiel vecteur A_r

La composante du potentiel vecteur A_r peut être déterminée par l'expression suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$$

Ce calcul est fait dans l'annexe B et on obtient le résultat suivant :

$$A_r(r, \xi) = \begin{cases} -r A_{r0}(\xi) [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)] & (r < r_b), \\ -\frac{A_{r0}(\xi)}{r} [3\Delta\rho^2 + 3\Delta\rho r_b + r_b^2 + r^2 e^\alpha E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) - 3\Delta\rho(r + \Delta\rho) e^{-\frac{r-r_b}{\Delta\rho}}] & (r \geq r_b), \end{cases} \quad (2.24)$$

avec

$$A_{r0}(\xi) = \frac{(1 - \varepsilon)\alpha\Delta\rho}{4(\alpha + 1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2 + 2\alpha + \alpha^2),$$

L'expression de A_r est différente de celle proposée dans l'article de Yi [Yi 2013] (il y a une erreur de signe) mais notre expression répond au critère de continuité de la fonction en $r = r_b$.

On peut noter que pour ($r < r_b$), on peut écrire :

$$A_r(r, \xi) = -\frac{r}{2\Delta\rho} \frac{dr_b}{d\xi} \frac{d\Psi}{d\alpha},$$

2.2.4 Équation sur le rayon de la bulle

Calcul des forces

Maintenant que nous connaissons les expressions des potentiels, nous pouvons calculer les forces qui agissent sur les électrons du plasma situés en $r = r_b(\xi)$. Ces forces sont la force de Lorentz et la force pondéromotrice. Elles s'écrivent en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} F_r &= -(E_r - v_z B_\theta + v_\theta B_z) + F_{p\perp} \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{(1 + \Psi)}{\bar{\gamma}} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \xi} + \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{4\bar{\gamma}} \frac{\partial |A_0(r, \xi)|^2}{\partial r}, \end{aligned}$$

où $B_z = 0$.

En utilisant $v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = (1 - v_z) \frac{dr}{d\xi}$, on peut écrire l'équation du mouvement projetée selon r :

$$\frac{dp_r}{d\xi} = \frac{1}{1 - v_z} F_r.$$

En remplaçant l'expression de la force F_r et sachant qu'on a la relation $p_r = \bar{\gamma}v_r = (1 + \Psi) \frac{dr}{d\xi}$ on arrive à :

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 + \Psi) \frac{dr}{d\xi} \right] = -\frac{r}{4} \left[1 + \frac{1 + \frac{|A_0|^2}{2}}{(1 + \Psi)^2} + \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \xi} + \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) - \frac{\frac{\partial |A_0|^2}{\partial r}}{4(1 + \Psi)}. \quad (2.25)$$

Calcul des trajectoires des électrons

On se place en $r = r_b$, pour déterminer la trajectoire des électrons à la surface de la bulle ce qui va permettre de déterminer le rayon de la cavité r_b en fonction de la position ξ . L'équation 2.25 devient :

$$A(r_b) \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + B(r_b) r_b \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 + C(r_b) r_b = -\frac{\frac{\partial |A_0|^2}{\partial r}}{4(1 + \Psi)}, \quad (2.26)$$

avec

$$\begin{aligned} A(r_b) &= 1 + \Psi + \frac{\alpha}{2} \frac{d\Psi}{d\alpha}, \\ B(r_b) &= \frac{1}{r_b \Delta \rho} \frac{d\Psi}{d\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi}{d\alpha^2} + \frac{1}{4}, \\ C(r_b) &= \frac{(1 - \varepsilon)}{4} \left[1 + \frac{1 + \frac{|A_0|^2}{2}}{(1 + \Psi)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $\alpha = \frac{r_b}{\Delta \rho}$. Ce système d'équations peut être résolu numériquement. Les paramètres libres de ce système sont l'épaisseur de la couche d'électrons $\Delta \rho$, le paramètre ε ainsi que les conditions initiales sur r_b et $\frac{dr_b}{d\xi}$. Le paramètre ΔJ intervient dans le calcul des champs électromagnétiques autour de la bulle qui ne sera pas abordé dans ce chapitre.

2.2.5 Calcul des champs électriques

Dans l'accélération d'électrons par onde de sillage laser, les électrons sont piégés puis accélérés dans la direction de propagation du laser. Ces différents mécanismes font intervenir les champs électriques dans la bulle. Le modèle permet de calculer ces champs, on présente le calcul de la composante longitudinale et radiale du champ électrique.

Champ électrique E_z

A partir de la définition du potentiel effectif Ψ , le champ électrique longitudinal s'écrit :

$$E_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}.$$

La valeur de ce potentiel est connue en fonction de (r, ξ) . On obtient l'expression du champ électrique longitudinal :

$$E_z(r, \xi) = \begin{cases} E_{z0}(\xi) (1 + e^\alpha E_1(\alpha)) & (r < r_b), \\ E_{z0}(\xi) \left(e^{-\frac{(r-r_b)}{\Delta\rho}} + e^\alpha E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) \right) & (r \geq r_b), \end{cases}$$

où

$$E_{z0}(\xi) = \frac{\alpha \Delta\rho}{2(\alpha + 1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2 + 2\alpha + \alpha^2).$$

A l'intérieur de la cavité, le champ électrique longitudinal ne dépend pas de la position r et devient rapidement nul à l'extérieur.

Champ électrique E_r

La composante radiale du champ électrique est donnée par :

$$E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \xi},$$

pour $(r \leq r_b)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{-(1 - \varepsilon)r}{2} \\ \frac{\partial A_z}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial A_r}{\partial \xi} &= -\frac{r}{2} \left[\frac{1}{\Delta\rho} \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta\rho^2} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \frac{d^2 \Psi}{d\alpha^2} \right], \end{aligned}$$

d'où

$$E_r = \frac{r}{2} \left[(1 - \varepsilon) + \frac{1}{\Delta\rho} \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta\rho^2} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \frac{d^2 \Psi}{d\alpha^2} \right]. \quad (2.28)$$

On note qu'à l'intérieur de l'onde de sillage, le champ radiale E_r est linéaire avec r . Pour ($r \geq r_b$), on peut effectuer la même démarche, les calculs sont assez longs, ils ne seront pas exposés ici. On retiens juste qu'on obtient une fonction qui tend très rapidement vers 0 lorsque r devient grand.

2.3 Validation du modèle théorique

Nous allons maintenant confronter notre modèle aux résultats de simulations PIC obtenues avec le code Calder-Circ. Afin de fixer les paramètres du modèle, on étudie les trajectoires de particules tests formant l'onde de sillage. On commence, tout d'abord, par définir l'impulsion laser et l'expression de la force pondéromotrice.

2.3.1 Définition de l'impulsion laser et de la force pondéromotrice

On utilise une impulsion laser gaussienne dont l'enveloppe est définie par :

$$A_0(r, \xi) = a_0 \exp\left[-\frac{\xi^2}{\tau_0^2}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{W_0^2}\right].$$

La force pondéromotrice dans la direction radiale s'écrit :

$$F_{p\perp} = \frac{1}{4\bar{\gamma}} \frac{\partial |A_0(r, \xi)|^2}{\partial r} = -\frac{r a_0^2}{\bar{\gamma} W_0^2} \exp\left[-2\frac{\xi^2}{\tau_0^2}\right] \exp\left[-2\frac{r^2}{W_0^2}\right].$$

On peut également calculer la force pondéromotrice dans la direction de propagation :

$$F_{p\parallel} = \frac{1}{4\bar{\gamma}} \frac{\partial |A_0(r, \xi)|^2}{\partial \xi} = -\frac{\xi a_0^2}{\bar{\gamma} \tau_0^2} \exp\left[-2\frac{\xi^2}{\tau_0^2}\right] \exp\left[-2\frac{r^2}{W_0^2}\right].$$

La force pondéromotrice radiale est nulle en $r = 0$ et maximum pour $r = \frac{W_0}{\sqrt{2}}$. Dans la direction longitudinale, la force est nulle au centre de l'impulsion laser et maximum sur l'axe en $r = 0$. Les électrons initialement proches l'axe sont très violemment poussés vers l'avant par l'impulsion laser et très peu radialement. Par contre, les électrons hors axe et proches de la valeur maximum de la force pondéromotrice radiale, vont être expulsés radialement et très peu dans la direction longitudinale.

2.3.2 Conditions initiales et paramètres

Une impulsion laser de quelques dizaines de femtosecondes est utilisée pour créer une onde de sillage dans un plasma de densité n_e . L'impulsion a une durée $\tau_0 = 30 fs$, un waist de $w_0 = 18 \mu m$ et une intensité relativiste ($a_0 > 1$).

Afin de déterminer les meilleures conditions initiales, on examine les trajectoires de quelques particules tests issues de simulations PIC pour deux densités électroniques initiales différentes. En arrière plan, une carte de densité électronique permet d'identifier les trajectoires décrivant l'onde de sillage laser (Fig.2.6). Les

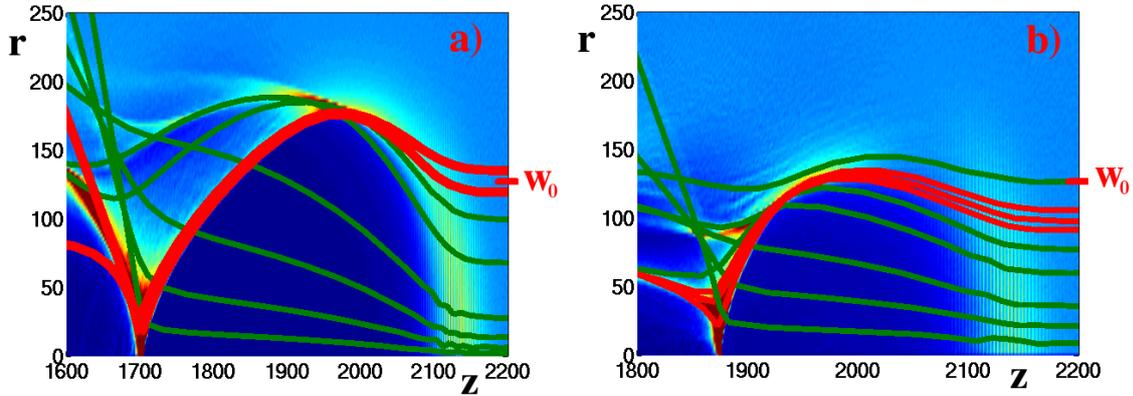


FIGURE 2.6 – Trajectoires de particules tests issues de simulations PIC avec Calder-Circ pour $a_0 = 4$, $w_0 = 18 \mu m$, $\tau_0 = 30 fs$, a) $n_e = 0.00025 n_c$ et b) $n_e = 0.001 n_c$. Les particules susceptibles de former l'onde de sillage sont tracées en rouge et les autres en vert

électrons hors axe participent à la formation de la couche électronique. Ils sont expulsés par la force pondéromotrice puis reviennent sur l'axe (courbe rouge sur la figure 2.6). A plus haute densité, les électrons formant la couche d'électrons autour de la bulle se situent plus près du maximum de la force pondéromotrice radiale. En fonction de la densité du plasma et de l'intensité du laser, il faut bien choisir la valeur du rayon initial pour décrire au mieux la forme de la bulle en résolvant les équations du modèle. Dans le cas d'une onde de sillage créée par une impulsion laser, cette valeur se situe autour du maximum de la force pondéromotrice.

Notre modèle est inspiré du travail de Yi *et al.* [Yi 2013], qui a étudié l'onde de sillage créée par un faisceau d'électrons relativistes dans le régime de la bulle.

Dans le cas du faisceau d'électrons, c'est la force de Lorentz associée au faisceau qui va éjecter les électrons. Pour un faisceau d'électrons gaussien, la densité de charge associée s'écrit :

$$\rho_{beam} = J_{z,beam}/c = \rho_{beam,0} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_z^2}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right]$$

La force expulsant les électrons s'obtient en calculant la dérivée selon r du potentiel vecteur A_z que l'on détermine à partir du courant $J_{z,beam}$ (voir Eq.2.22). Cette force s'écrit :

$$F_{beam} = \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\lambda(\xi)}{r}, \quad (2.29)$$

avec $\lambda(\xi) = \int_0^\infty J_{z,beam} r dr = \lambda_0 \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_z^2}\right]$ la charge linéique du faisceau. Cette force est maximale lorsque l'électron est proche de l'axe ($r = 0$). A la diffé-

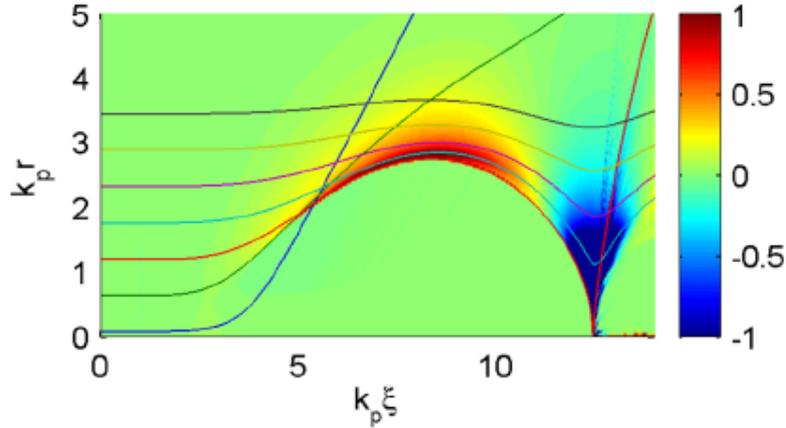


FIGURE 2.7 – Trajectoires de particules test issues de simulations PIC avec le code WAKE [Mora 1997], la carte de courant $J_{z,e}$ est représenté en arrière plan. Le faisceau d'électrons (non représenté) se propage de la droite vers la gauche. Image tirée de la référence [Yi 2013]

rence d'une onde de sillage créée par laser, avec un faisceau d'électrons, les électrons formant l'onde de sillage sont beaucoup plus proches de l'axe (Fig.2.7). En ce qui concerne l'épaisseur de la couche d'électrons, les résultats de simulations et les articles [Lu 2006, Yi 2013] montrent que $0.5 k_p^{-1} < \Delta\rho < 1.0 k_p^{-1}$.

Si nous revenons au cas du laser, les électrons se trouvent initialement au repos loin de l'impulsion laser. Certains électrons auront des trajectoires dessinant la bulle. Sachant que $\xi = 0$ correspond à la position du laser, il faut déterminer à partir de quel moment, un électron ressentira la force de rappel des ions. On doit donc distinguer deux régions à la frontière desquelles le paramètre ε change brutalement de valeur. La limite entre les deux régions est déterminée par un paramètre que l'on note ξ_0 . Au niveau du front de l'impulsion laser, la bulle d'ions n'est pas encore formée et les électrons subissent presque uniquement l'effet de la force pondéromotrice, dans ce domaine (où $\xi < \xi_0$) $\varepsilon = 1$. Dans le reste du domaine ($\xi > \xi_0$) la séparation de charge est établie, les potentiels engendrés par la bulle d'ions sont pris en compte, on a alors $\varepsilon = 0$.

2.3.3 Confrontation du modèle aux simulations PIC

Dans le cas d'une onde de sillage créée par une impulsion laser, les hypothèses présentées dans la section précédente et les équations du mouvement 2.26, nous permettent de tracer la trajectoire d'un électron dessinant la forme de l'onde de sillage, c'est à dire le rayon $r_b(\xi)$. Les grandeurs obtenues à partir du modèle sont renormalisées pour comparaison avec les résultats du code PIC.

Influence de la densité électronique

Nous considérons dans ce paragraphe un potentiel vecteur normalisé fixé à $a_0 = 4$ pour examiner l'influence spécifique de la densité électronique.

Sur la figure 2.8, on trace la valeur de $r_b(\xi)$ pour plusieurs densités initiales de plasma.

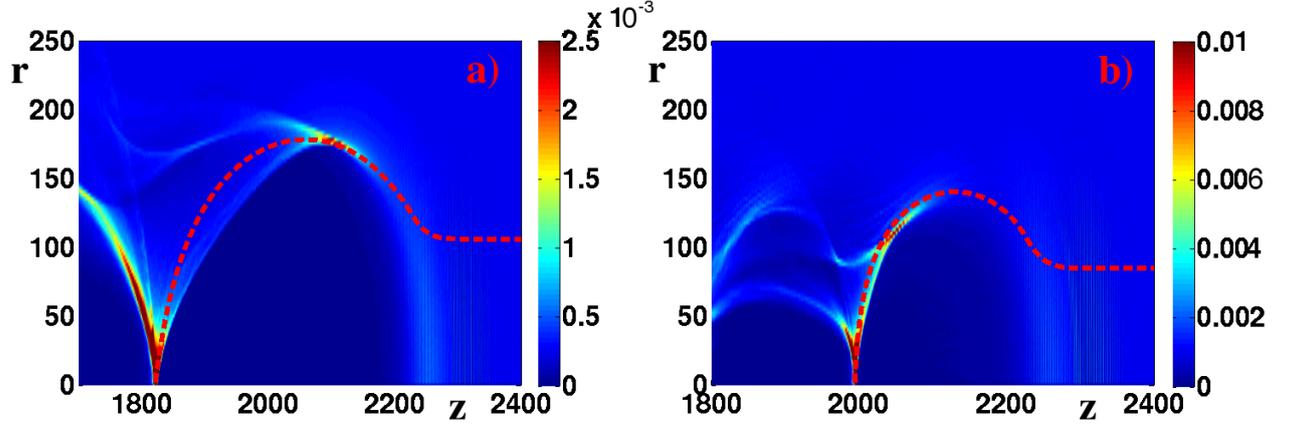


FIGURE 2.8 – Densité électronique projetée dans l'espace (r, z) avec $a_0 = 4$, $w_0 = 18 \mu m$, $\tau_0 = 30 fs$ pour a) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et b) $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$. En pointillé rouge, on a tracé $r_b(\xi)$ obtenu avec le modèle. Le laser se situe en $z = 2220$.

L'accord entre le modèle et les simulations PIC est très bon malgré quelques écarts observés pour la densité $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ (Fig.2.8a). Pour $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$, le rapport entre la force de rappel des ions et la force pondéromotrice change. Les électrons sont rappelés très tôt par les ions ce qui explique que le rayon de la bulle est plus petit pour $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ que pour $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ (Fig.2.8). A faible densité ($n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$), les électrons sont plus violemment éjectés par la force pondéromotrice étant donné que la force de rappel des ions est plus faible. En conséquence l'épaisseur de la couche limite d'électrons est plus élevée et il y a un écart entre le rayon donné par le modèle et celui observé dans la simulation PIC (Fig.2.8a).

Les composantes E_z et E_r du champ électrique sont calculées à l'intérieur de l'onde de sillage. On trouve une bonne correspondance entre les simulations PIC et le modèle (Fig.2.9). La composante longitudinale du champ électrique est bien calculée par notre modèle dans la quasi-totalité de l'onde de sillage pour les deux densités considérées (Fig.2.9a et b). A l'arrière du sillage, l'amplitude du champ augmente notamment à cause de l'accumulation de charge, cet effet n'est pas pris en compte dans notre modèle. Ainsi, on observe dans cette région très localisée un écart entre les prédictions du modèle et les résultats de simulation. Pour la composante radiale, l'accord est très bon entre le modèle et les simulations. On vérifie notamment que dans l'onde de sillage ($r < r_b$), le champ E_r évolue linéairement avec le rayon r

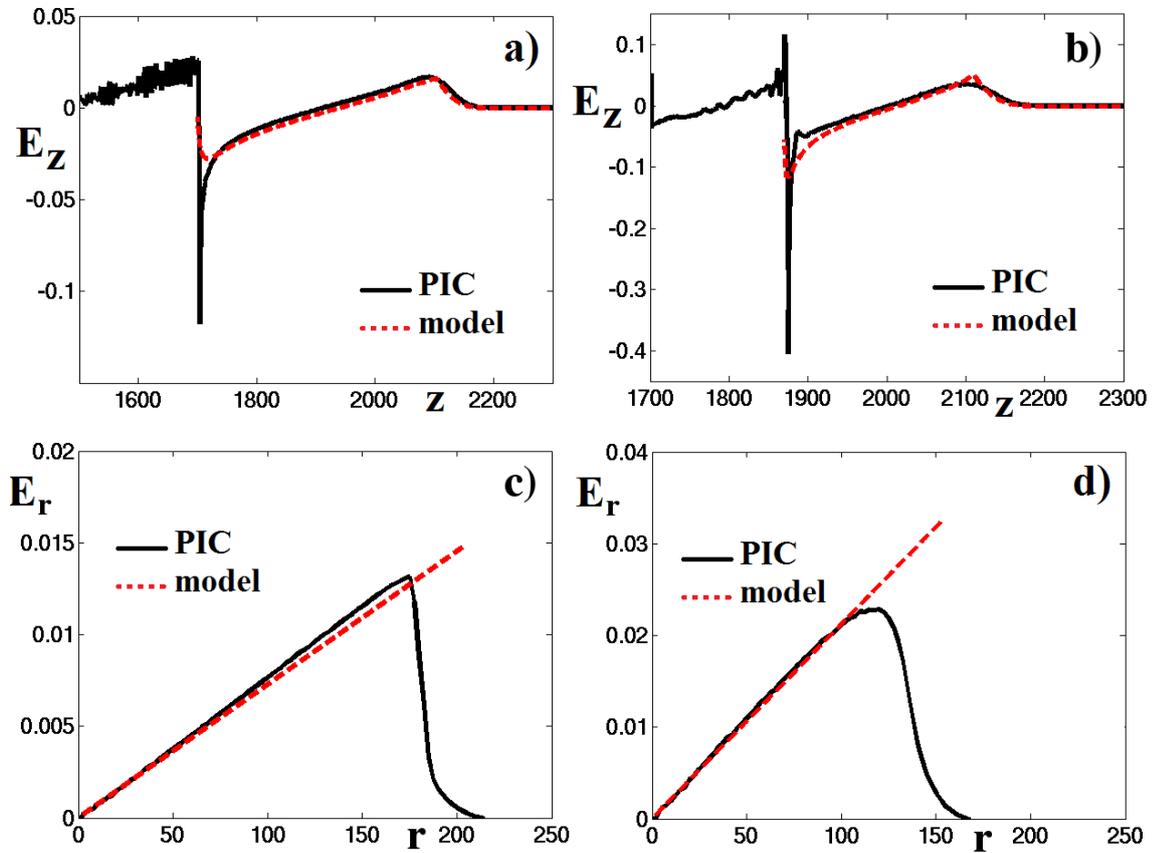


FIGURE 2.9 – Champ électrique calculé pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$. Composante $E_z(\xi)$ a) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ b) $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$. Composante $E_r(r)$ c) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ d) $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$.

(Fig.2.9c et d).

Pour obtenir ces résultats, nous avons utilisé les paramètres donnés dans le tableau 2.2. Les paramètres utilisés sont conformes à nos hypothèses et observations. Lorsque la densité dépasse $10^{-3} n_c$, le rayon de la bulle décroît nettement (Tab.2.2). Alors qu'à plus faible densité, l'épaisseur de la couche limite et le rayon de la bulle sont plus élevés (Fig.2.8a et Tab.2.2).

$n_e (n_c)$	2.5×10^{-4}	5.0×10^{-4}	7.5×10^{-4}	1.0×10^{-3}	2.5×10^{-3}	4.3×10^{-3}
$\Delta\rho (k_p^{-1})$	0.8	0.8	0.75	0.7	0.7	0.7
$\xi_0 (c\tau_0)$	-0.12	-0.18	-0.16	-0.2	-0.3	-0.35
$r_{b_0} (w_0)$	0.8	0.7	0.60	0.6	0.55	0.55
$\frac{k_p w_0}{2\sqrt{a_0}}$	0.56	0.79	0.97	1.12	1.77	2.24

TABLE 2.2 – Valeurs des paramètres utilisés dans le modèle analytique pour les cas présentés dans les figures 2.8 et 2.9 et pour d'autres densités n_e . $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$.

Lu *et al.* [Lu 2006] montrent qu'il existe des conditions pour que le modèle donne des résultats satisfaisants vis à vis des simulations. Ces conditions permettent un meilleur guidage de l'impulsion laser dans le plasma et également d'avoir une bulle avec une couche d'électrons peu épaisse. Ces conditions se résument par la relation suivante :

$$k_p w_0 \sim k_p r_m \gtrsim 2\sqrt{a_0} \quad (2.30)$$

L'équilibre entre la force pondéromotrice du laser et la force de rappel des ions permet d'écrire cette relation [Lu 2006]. Les simulations présentées dans cette section satisfont ce critère pour les densités intermédiaires et élevées (Tab.2.2). Cela montre aussi que le cas basse densité ($n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$) est plus difficile à modéliser avec nos hypothèses.

Influence de l'intensité du laser

Nous considérons dans ce paragraphe une faible densité électronique (fixée à $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$) afin d'étudier l'influence spécifique de l'intensité du laser.

En augmentant la valeur de a_0 , les électrons sont plus violemment expulsés comme le montrent les trajectoires de particules tests de la figure 2.10. Ainsi, beaucoup moins d'électrons traversent la bulle lorsque $a_0 \gg 1$ (Fig.2.10b). Si on mesure la densité électronique dans l'onde de sillage en fonction de la valeur du potentiel vecteur du laser, celle-ci tend rapidement vers 0 lorsque a_0 croît (Fig.2.11).

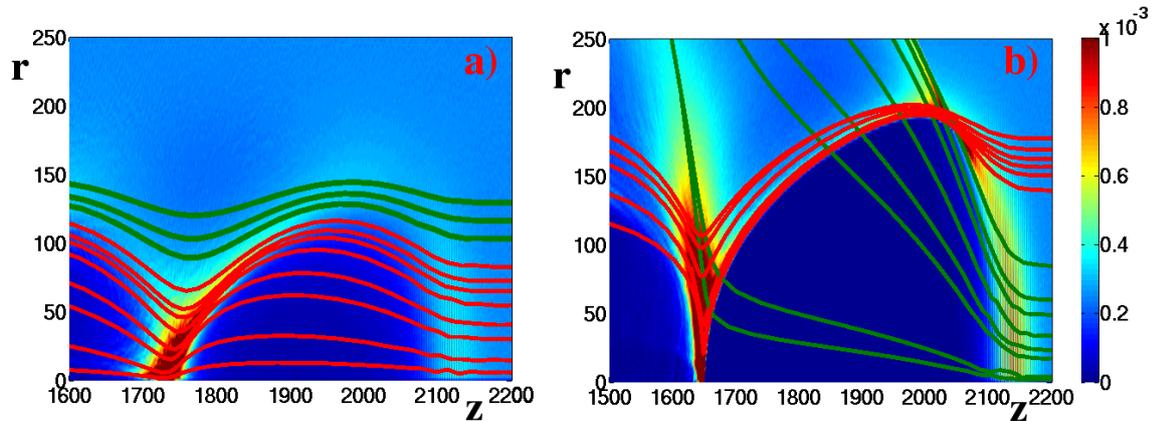


FIGURE 2.10 – Trajectoires de particules tests issues de simulations PIC avec Calder-Circ avec $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $a_0 = 2$ et b) $a_0 = 6$. Les particules susceptibles de former l'onde de sillage sont tracées en rouge et les autres en vert.

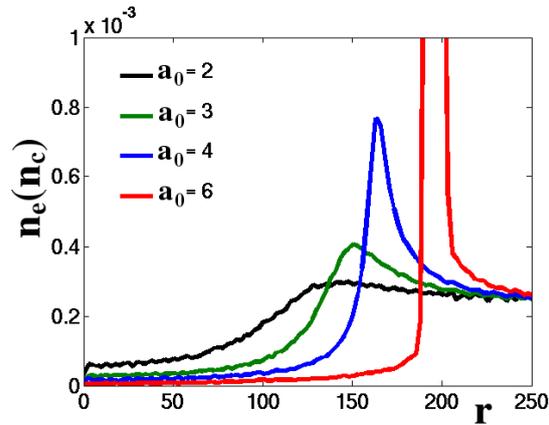


FIGURE 2.11 – Densité électronique n_e en fonction du rayon r à une position z_i avec $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ à $z_i = 2150$

Afin de confronter les observations issues des simulations (Fig.2.10) avec les prédictions de notre modèle, le rayon théorique $r_b(\xi)$ est représenté figure 2.12 pour les deux cas évoqués dans la figure 2.10.

Lorsque l'intensité du laser est modérée ($a_0 = 2$), les électrons sont faiblement

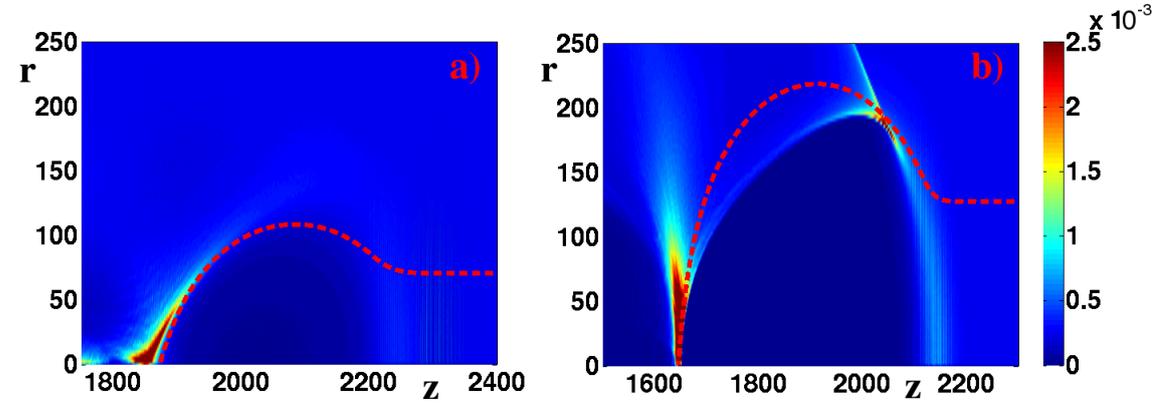


FIGURE 2.12 – Densité électronique projetée dans l'espace (r, z) avec $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $a_0 = 2$ et b) $a_0 = 6$. En pointillé rouge, on a tracé $r_b(\xi)$ obtenu avec le modèle.

repoussés par la force de pondéromotrice. On observe les caractéristiques d'un écoulement laminaire. De plus, la convergence des trajectoires à l'arrière de la bulle près de l'axe de propagation (Fig.2.10a) est beaucoup moins marquée qu'à forte intensité ($a_0 = 6$). Le rayon transverse de l'onde de sillage est divisé par deux (Fig.2.12a) par rapport au cas $a_0 = 6$ (Fig.2.12b). Lorsque l'intensité du laser est élevée ($a_0 = 6$), les électrons sont plus violemment expulsés par la force pondéromotrice. Certains électrons ne sont pas rappelés par les ions et continuent leur trajectoire dans le plasma. Ainsi, l'écart grandit entre le rayon $r_b(\xi)$ donné par le modèle et celui observé dans la simulation (Fig.2.12b).

La modélisation analytique du champ électrique est en très bon accord quantitatif avec les simulations PIC (Fig.2.13) pour les valeurs de a_0 modérées ($a_0 = 2$) et fortes ($a_0 = 6$). Soulignons que pour les intensités modérément relativistes ($a_0 = 2$), le champ électrique longitudinal prédit reproduit fidèlement celui issu de la simulation y compris à l'arrière de la bulle (Fig.2.13a).

Les paramètres utilisés dans le modèle sont donnés dans le tableau 2.3.

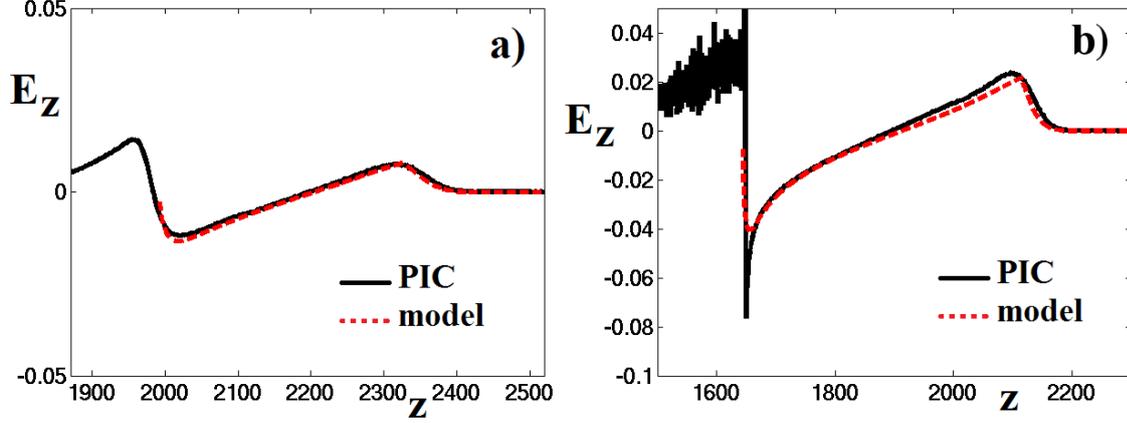


FIGURE 2.13 – Champ électrique E_z calculé sur l'axe obtenu avec les simulations PIC et le modèle analytique pour $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $a_0 = 2$ et b) $a_0 = 6$.

a_0	2	3	4	6
$\Delta\rho (k_p^{-1})$	0.6	0.75	0.80	0.85
$r_{b_0} (w_0)$	0.50	0.60	0.80	0.90
$\xi_0(c\tau_0)$	+0.5	-0.02	-0.12	-0.22
$\frac{k_p w_0}{2\sqrt{a_0}}$	0.79	0.64	0.56	0.45

TABLE 2.3 – Valeurs des paramètres pour les cas présentés dans la figure 2.12 et d'autres valeurs de a_0 . $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$.

Lorsque la condition donnée par Lu (Eq.2.30) est vérifiée, notre modèle donne des résultats conformes aux simulations. Dans le cas contraire, on observe des écarts entre le rayon r_b fourni par le modèle et le rayon de l'onde de sillage observé dans les simulations PIC. Dans cette situation, la force de rappel des ions devient négligeable devant la force pondéromotrice à l'avant de l'onde de sillage, les électrons plus violemment expulsés forment des couches de densité et de courant plus larges et le

rayon de bulle augmente (Tab.2.3).

On considère à présent une densité électronique plus élevée ($n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$), les électrons sont plus faiblement expulsés par le laser car le rapport entre la force pondéromotrice et la force de rappel des ions est plus faible qu'à basse densité ($n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$). Cette tendance est mise en évidence par les trajectoires de particules tests (Fig.2.14) que l'on peut comparer à celles de la figure 2.10. Les bulles créées par l'impulsion laser ont des dimensions caractéristiques plus petites que précédemment. Les rayons $r_b(\xi)$ issus de notre modèle analytique reproduisent très précisément la position de la couche limite d'électrons (Fig.2.15). Les paramètres utilisés pour résoudre les équations du modèle sont fournis dans le tableau 2.4.

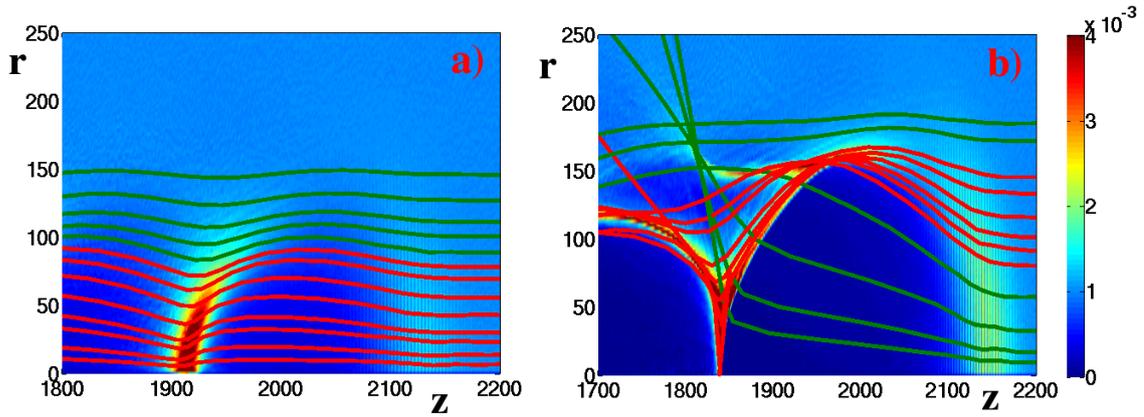


FIGURE 2.14 – Trajectoires de particules tests issues de simulations PIC avec Calder-Circ avec $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ pour a) $a_0 = 2$ et b) $a_0 = 6$. Les particules susceptibles de former l'onde de sillage sont tracées en rouge et les autres en vert.

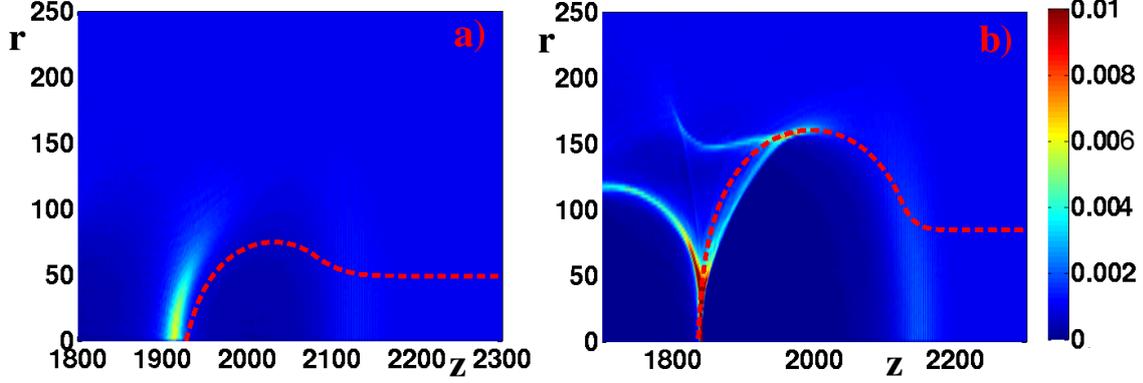


FIGURE 2.15 – Densité électronique projetée dans l'espace (r, z) avec $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $a_0 = 2$ et b) $a_0 = 6$. En pointillé rouge, on a tracé $r_b(\xi)$ obtenu avec le modèle.

a_0	2	3	4	6
$\Delta\rho (k_p^{-1})$	0.45	0.65	0.72	0.8
$r_{b_0}(w_0)$	0.4	0.55	0.60	0.60
$\xi_0(c\tau_0)$	+0.3	-0.05	-0.2	-0.35
$\frac{k_p w_0}{2\sqrt{a_0}}$	1.58	1.28	1.12	0.90

TABLE 2.4 – Valeurs des paramètres pour les cas présentés dans les figures 2.15 et d'autres valeurs de a_0 . $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$.

On a vérifié que notre modèle permet de tracer des formes de bulles en très bon accord quantitatif avec les simulations PIC lorsque la relation 2.30 est vérifiée. Lorsque 2.30 n'est pas satisfaite on obtient néanmoins un très bon accord qualitatif. Les prédictions de notre modèle pour les champs électriques à l'intérieur de la bulle sont également en excellent accord avec les résultats issus des simulations. Nous allons maintenant appliquer notre modèle pour analyser les effets du beamloading.

2.3.4 Application au beamloading

Un des intérêts de ce type de modèle est de pouvoir étudier l'influence d'un faisceau d'électrons accéléré à l'arrière de la cavité sur la forme de la bulle. L'altération de la bulle par le faisceau d'électrons accéléré à l'arrière est connue sous le nom de beamloading [Tzoufras 2008, Rechatin 2010]. La présence du faisceau accéléré modifie les trajectoires des électrons formant l'onde de sillage. Cela aura pour conséquence de modifier le champ accélérateur et donc les propriétés du faisceau. Cet effet limite la charge pouvant être accélérée par la bulle, il augmente sa dispersion en énergie. On reprend la formule précédente pour un faisceau d'électrons gaussien :

$$\rho_{beam} = \rho_{beam,0} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_z^2}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right]$$

Dans le cas d'une onde de sillage créée par un faisceau d'électrons, seule la charge linéique compte dans le calcul des équations donnant l'onde de sillage. La charge linéique s'écrit en posant $\lambda_0 = \rho_{beam,0} \sigma_r^2$:

$$\lambda(\xi) = \lambda_0 \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Ce faisceau crée un champ électrique radiale et induit une force (Eq.2.29) pouvant perturber les trajectoires des électrons [Tzoufras 2008]. En nous appuyant sur une simulation PIC dans laquelle les électrons sont injectés avec la méthode d'injection optique, on analyse l'influence du faisceau accéléré sur les trajectoires électroniques à l'arrière de la bulle. Afin de comparer les résultats de simulations, nous ajoutons dans notre modèle la force radiale (Eq.2.29) induite par le champ électrique du faisceau. Dans notre modèle, ce faisceau est gaussien et ses caractéristiques sont données par le tableau 2.5. Dans la simulation PIC, le faisceau piégé puis accéléré n'est pas gaussien mais sa forme est proche de celle choisie dans notre modèle (Fig. 2.16).

La présence de ce faisceau modifie la forme de l'onde de sillage et le champ électrique (Fig.2.17). On a tracé les résultats donnés par le modèle lorsqu'un faisceau est accéléré à l'arrière mais également dans le cas où il n'y a pas de faisceau. Le modèle reproduit assez fidèlement les effets de beamloading (Fig.2.17).

Paramètres	$\rho_{beam,0}$ (n_0)	σ_r ($1/k_p$)	σ_z ($1/k_p$)	z_0 ($1/k_0$)
Valeur	180	0.22	0.42	6448

TABLE 2.5 – Valeurs des paramètres du faisceau accéléré utilisées dans la figure 2.17

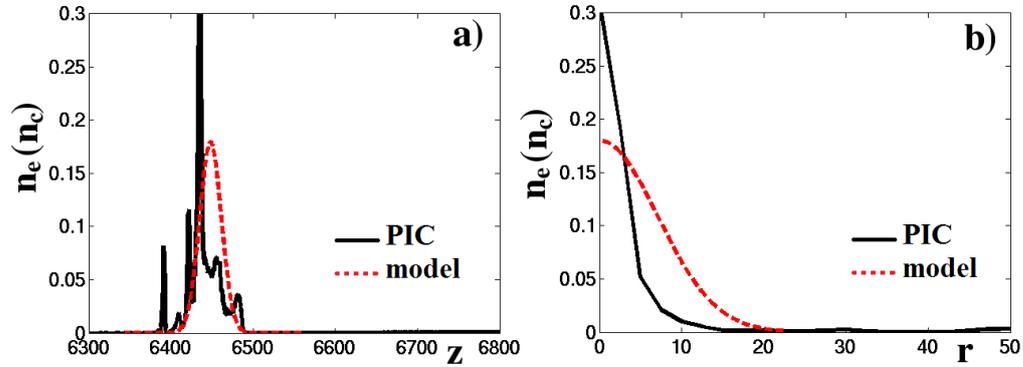


FIGURE 2.16 – Comparaison avec le modèle. Densité électronique a) calculée sur l'axe z en $r = 0$ et b) calculée selon r pour $z = 6440$ pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$ et $t = 7000$. Injection des électrons à $t = 2600$. En pointillé rouge, on trace la densité du faisceau prise en compte dans le modèle pour la situation correspondante.

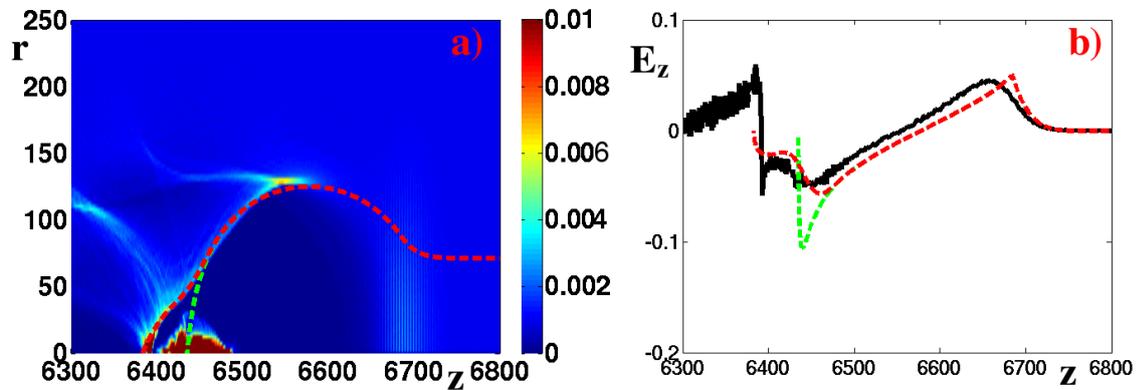


FIGURE 2.17 – Comparaison avec le modèle. a) Densité électronique projetée dans (z, r) et b) Champ électrique E_z calculé sur l'axe z pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$, $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ et $t = 7000$. Injection des électrons à $t = 2600$. En pointillé rouge le rayon de la cavité donné par le modèle avec beamloading et en pointillé vert sans beamloading.

2.4 Conclusion

La propagation d'une impulsion laser très intense et très courte dans un plasma sous-critique crée dans son sillage une onde plasma sous forme de bulle. Les électrons sont violemment expulsés par la force pondéromotrice du laser alors que les ions, des milliers de fois plus lourds, restent immobiles. Ces électrons sont rappelés par la différence de potentiel créée par les ions positifs et forment une fine et dense couche limite. En écrivant les équations liées aux trajectoires des électrons formant l'onde de sillage, nous avons pu développer un modèle analytique déterminant la forme de l'onde de sillage et les champs électromagnétiques qui s'y développent. Ce modèle a déjà été étudié dans le cas d'une onde de sillage créée par la propagation d'un faisceau d'électrons relativistes. Dans le cas d'un laser, on a vu que certains éléments diffèrent comme les conditions initiales sur les électrons formant l'onde de sillage. Dans le cas du faisceau d'électrons, la force de Lorentz est maximum en $r = 0$ alors que pour une impulsion laser gaussienne, le maximum de la force pondéromotrice se situe hors axe. A l'aide de simulations PIC, les paramètres libres et les conditions initiales nécessaires pour résoudre les équations de notre modèle ont pu être déterminés. En résolvant numériquement ce système d'équations, on peut connaître le rayon de la cavité accélératrice en fonction de la variable réduite ξ . Par ailleurs, la confrontation aux simulations numériques nous a également permis de valider le calcul des champs électriques à l'intérieur de la bulle par le modèle analytique. Nous avons exploité le modèle afin de comprendre les effets de beamloading provoqués par un faisceau accéléré à l'arrière de l'onde de sillage. Par la suite, ce modèle sera étendu afin d'étudier la formation de l'onde de sillage dans un plasma initialement magnétisé, dans le régime de la bulle. La généralisation du modèle de Yi [Yi 2013] et Lu [Lu 2006] nécessaire pour tenir compte de l'effet du champ magnétique est une contribution originale de cette thèse. Elle a donné lieu à une publication [Rassou 2015], et sera exposée dans le chapitre 5.

Maintenant que nous savons comment une onde de sillage peut se former dans le régime de la bulle et que nous avons étudié ses principales propriétés, nous allons voir dans la partie suivante comment le chauffage stochastique intervient dans le piégeage des électrons.

Deuxième partie

Accélération d'électrons par onde de
sillage laser initiée par chauffage
stochastique

Théorie du chauffage stochastique

Sommaire

3.1	Rappels de dynamique hamiltonienne	74
3.1.1	Formalisme de Lagrange	74
3.1.2	Formalisme Hamiltonien	76
3.1.3	Équation de Hamilton-Jacobi	79
3.2	Dynamique d'une particule chargée dans le champ électromagnétique d'une onde se propageant dans le vide	81
3.2.1	Formulation Hamiltonienne	81
3.2.2	Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi	82
3.3	Dynamique d'une particule chargée dans le champ électromagnétique de deux ondes - Chauffage stochastique	85
3.3.1	Résonances Compton	85
3.3.2	Le critère de Chirikov	88
3.3.3	Étude pour deux lasers contrepropagatifs ($\alpha = \pi$)	91
3.4	Mise en évidence du chaos par simulations numériques	93
3.4.1	Simulations numériques à une particule	93
3.4.2	Simulation PIC sur une couche de plasma	96
3.5	Conclusion	102

Dans l'accélération d'électrons par onde de sillage laser, il a été montré que l'interaction d'un électron avec deux ondes électromagnétiques contrepropagatives polarisées dans des directions parallèles permet à l'électron d'avoir des trajectoires chaotiques et d'être accéléré stochastiquement. Ce cas de figure se présente lorsque dans une onde de sillage laser dans le régime de la bulle, les électrons sont injectés grâce à l'injection optique. Le but de ce chapitre est de présenter les situations et les conditions permettant d'obtenir du chauffage stochastique. Pour cela, nous utiliserons la dynamique hamiltonienne pour décrire le système, une introduction est présentée dans cette première section. Ensuite, la dynamique d'un électron dans le

champ électromagnétique d'une puis de deux ondes sera étudiée afin de déterminer les conditions pour obtenir du chauffage stochastique. Enfin, la théorie à une particule avec onde plane est étendue en considérant des simulations numériques avec des plasmas et des impulsions courtes.

3.1 Rappels de dynamique hamiltonienne

Dans cette section, un rappel de la dynamique hamiltonienne est présenté ainsi que les différents outils utilisés dans ce manuscrit.

3.1.1 Formalisme de Lagrange

Un système mécanique est constitué d'un certain nombre N d'éléments que l'on note α , de masse m_α . Chaque objet est ponctuel et localisé à la position \mathbf{r}_α . La configuration de ce système est donnée par l'ensemble des coordonnées de chacun de ses constituants. Suivant les différentes contraintes aux systèmes (contraintes internes et/ou externes), il peut exister un certain nombre de relations entre ses coordonnées. On désigne par q l'ensemble (q_1, q_2, \dots, q_n) des n coordonnées généralisées q_i . Dans la suite, ces coordonnées peuvent être des longueurs ou des angles. Le fait que ces coordonnées soient suffisantes pour décrire entièrement le système se traduit mathématiquement par l'existence de N relations $\mathbf{r}_\alpha(q, t)$, dépendant de seulement n variables q_i .

La formulation lagrangienne de la mécanique consiste à écrire les équations de Newton dépendant des N quantités vectorielles \mathbf{r}_α en fonction des $3N$ quantités scalaires $x_i (x_1, x_2, \dots, x_{3N})$ qui deviennent n quantités indépendantes $q_i (q_1, q_2, \dots, q_n)$ lorsqu'on a pris les contraintes en compte, n est le nombre de degrés de liberté du système. Le Lagrangien ou la fonction de Lagrange s'écrit¹ :

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (3.1)$$

Principe de Hamilton

Le principe de Hamilton aussi appelé le principe de moindre action dit :

"Pour un système lagrangien, parmi toutes les évolutions temporelles imaginables de la configuration $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ qui commencent et finissent de façon

1. Ici comme dans le reste de ce chapitre q désigne l'ensemble des $\{q_i\}$ et de même pour les grandeurs \dot{q} , \ddot{q} , P et \dot{P} que l'on verra dans la suite.

déterminée, l'évolution réelle rend stationnaire la quantité dite action."

Le principe de Hamilton fait intervenir une fonctionnelle qu'on appelle action et que l'on note en générale S . L'action S se calcule en intégrant par rapport au temps le Lagrangien L :

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (3.2)$$

la condition de stationnarité de l'action nous permet de déduire les équations de Lagrange [Goldstein 1980, Tabor 1989] :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \right) \quad (3.3)$$

Les équations de Lagrange sont n équations différentielles du second ordre couplées. L'impulsion généralisé P_i associée à la coordonnée q_i est donnée par :

$$P_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.4)$$

On dit que P_i et q_i sont des variables conjuguées. Les équations de Lagrange peuvent donc se réécrire :

$$\dot{P}_i(q, \dot{q}, t) = \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \right) \quad (3.5)$$

L'expression du Lagrangien, dans le cas non relativiste, nous est donnée par la différence entre les énergies cinétiques et potentielles :

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) \quad (3.6)$$

Quelques propriétés

La recherche d'intégrales premières ou constantes du mouvement permet de faciliter la résolution des équations de Lagrange. Celles-ci peuvent être déterminées en choisissant judicieusement les coordonnées généralisées. Par exemple, si la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps, il existe une intégrale première,

appelée énergie qui s'écrit² :

$$E(q, \dot{q}) = \sum_i P_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) = Cste, \quad (3.7)$$

Si la fonction de Lagrange ne dépend pas de la coordonnée q_i , c'est à dire si celle-ci est cyclique ou muette, alors l'impulsion P_i associée à la coordonnée généralisée est une intégrale première d'après l'équation 3.4.

$$P_i(q, \dot{q}_i) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} = Cste \quad (3.8)$$

3.1.2 Formalisme Hamiltonien

La transformation de Legendre

La transformation de Legendre permet de passer d'une fonction f convexe, dépendant de la coordonnée x à une nouvelle formulation f^* dépendant d'une coordonnée k . Pour k fixé, f étant convexe, la fonction f^* possède un maximum en x qu'on note $x(k)$ et on a :

$$f^*(k) = \max [k \cdot x - f(x)]_x,$$

ce qui implique : $k = \frac{df(x)}{dx}$. En inversant cette relation, on peut déterminer x en fonction de k .

Dans le cas du Lagrangien, il est naturel de faire jouer ce rôle à la coordonnée \dot{q} qui devient alors $P = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$. La transformation de Legendre permet ainsi de passer au

2. La dérivée du Lagrangien par rapport au temps s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Avec $P_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$ cela entraîne :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i P_i - L \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

formalisme hamiltonien qui représente une alternative au formalisme lagrangien pour décrire un système. Dans ce formalisme, on utilise les impulsions généralisées plutôt que les vitesses généralisées. Dans le formalisme hamiltonien, l'état d'un système est défini par ses n coordonnées généralisées q et ses n impulsions P , c'est à dire par un point (q, P) dans un espace à $2n$ dimensions appelé espace des phases. On définit dans ce nouveau formalisme, la fonction de Hamilton ou Hamiltonien comme la transformée de Legendre du Lagrangien [Tabor 1989, Goldstein 1980] :

$$H(q, P, t) = P \cdot \dot{q}(q, P, t) - L(q(t), \dot{q}(q, P, t), t), \quad (3.9)$$

où le terme $P \cdot \dot{q}(q, P, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{q}_i(q, P, t)$.

Équations de Hamilton

Les dérivées temporelles des coordonnées q et des impulsions P sont données par les équations de Hamilton qui remplacent les équations de Lagrange³ :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, P, t)}{\partial P_i}; \dot{P}_i = -\frac{\partial H(q, P, t)}{\partial q_i} \quad (3.10)$$

3. Le Hamiltonien s'écrit :

$$H(q, P, t) = P \cdot \dot{q}(q, P, t) - L(q, \dot{q}, t),$$

La dérivée totale de H s'écrit :

$$dH = \left(P - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q} + \dot{q} dP - \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

On utilise les équations de Lagrange et la relation $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ et on obtient :

$$dH = \dot{q} dP - \dot{P} dq + \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

La dérivée totale de H peut également s'écrire :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

Ainsi, par identification, on obtient les équations de Hamilton.

Il y a deux fois plus d'équations qu'avec les équations de Lagrange mais elles sont toutes du première ordre. Ces équations sont complétées par :

$$\frac{dH(q(t), P(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(q, P, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t} \quad (3.11)$$

En conséquence, si le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, il existe une constante du mouvement qui est le Hamiltonien lui même c'est à dire l'énergie dans bien des cas. Le système est dans ce cas conservatif et H est la valeur prise par le Hamiltonien sur la trajectoire considérée qui dépend des conditions initiales. Calculons le Hamiltonien d'une particule de charge q_e dans un champ électromagnétique en régime relativiste. Le Hamiltonien s'écrit [Jackson 1975] :

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = q_e U(\mathbf{r}, t) + \sqrt{(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (3.12)$$

et le Lagrangien :

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2 / c^2} + q_e (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - U(\mathbf{r}, t)) \quad (3.13)$$

La première équation de Hamilton donne :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{c^2 (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})}{\sqrt{(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4}} \quad (3.14)$$

On peut montrer que :

$$\sqrt{(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \gamma = mc^2 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.15)$$

Cela permet de réécrire l'équation 3.14 avec \mathbf{p} , représentant le vecteur d'impulsion mécanique :

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}), \quad (3.16)$$

où γ peut également s'écrire :

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}} \quad (3.17)$$

Hamiltonien covariant

On introduit les quadri-vecteurs covariants : $q^\mu = (ct, \mathbf{r})$, $P^\mu = (E/c, \mathbf{P})$ et $A^\mu = (U/c, \mathbf{A})$. On définit le temps propre τ qui vérifie : $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$. A partir de l'équation 3.16 et des équations de Lagrange appliquées à 3.13, on a :

$$\frac{dq^\mu}{d\tau} = \frac{P^\mu - q_e A^\mu}{m} \quad (3.18)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = q_e \sum_v \frac{P^v - q_e A^v}{m} \frac{\partial A_v}{\partial q_\mu} \quad (3.19)$$

A partir de 3.18, on obtient :

$$P_\mu = m \frac{dq_\mu}{d\tau} + q_e A_\mu \quad (3.20)$$

Le Hamiltonien s'écrit [Jackson 1975]⁴ :

$$H = \sum_\mu \frac{(P_\mu - q_e A_\mu)(P^\mu - q_e A^\mu)}{2m} \quad (3.21)$$

3.1.3 Équation de Hamilton-Jacobi

Lorsque l'action est calculée sur une trajectoire réelle, c'est une fonction qu'on appelle action de Jacobi ou fonction principale (ou caractéristique) de Hamilton. Elle s'écrit :

$$S(q) = \int_0^t L(q(u), \dot{q}(u), u) du, \quad (3.22)$$

Si on considère deux trajectoires réelles très proches, la variation de l'action entre ces deux trajectoires s'écrit :

$$\delta S(q) = \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q(u) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q}(u) \right] du,$$

4.

$$\begin{aligned} H &= \sum_v P_v \frac{dq^v}{d\tau} - L \\ &= \sum_v \left(m \frac{dq_v}{d\tau} + q_e A_v \right) \frac{dq^v}{d\tau} - \sum_v \left(\frac{1}{2} m \frac{dq_v}{d\tau} \frac{dq^v}{d\tau} + q_e A_v \frac{dq^v}{d\tau} \right) \\ &= \sum_v \frac{1}{2} m \frac{dq_v}{d\tau} \frac{dq^v}{d\tau} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression 3.18, on retrouve la formule 3.21.

En utilisant les équations de Lagrange, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\delta S(q) &= \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q}(u) \right] du + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q}(u) \right]_0^t \\ \delta S(q) &= P\delta q - P_0\delta q_0,\end{aligned}$$

où les δq et δq_0 désignent les écarts entre les deux trajectoires. Cette relation nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} = P \quad (3.23)$$

En écrivant la dérivée totale de l'action par rapport au temps et sachant que $\frac{dS}{dt} = L$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} &= \frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} = L - p \cdot \dot{q} \\ \frac{\partial S(q, t)}{\partial t} &= -H(q, P, t)\end{aligned}$$

Les relations entre P , H et S se réécrivent sous la forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre à $n + 1$ variables qu'on appelle équations de Hamilton-Jacobi [Rax 2005] :

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = -H\left(q, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, t\right) \quad (3.24)$$

3.1.3.1 Transformation canonique

Plutôt que d'utiliser les variables P et q pour définir l'état d'un système dans l'espace des phases, on peut imaginer d'autres coordonnées $Q(q, P)$, $\Pi(q, P)$. Si le passage d'un jeu de coordonnées à l'autre conserve l'invariant de Liouville (somme des aires de la projection d'un parallélépipède sur les plans (q_i, p_i)) on dit que la transformation est canonique [Gignoux 2002]. Cela implique que les équations de Hamilton sont conservées avec les nouvelles équations et le nouvel Hamiltonien. La transformation doit conserver l'aire dans l'espace des phases. Autrement dit le Jacobien doit valoir 1, ce qui s'écrit :

$$(\partial_q Q(q, P, t)) (\partial_P \Pi(q, P, t)) - (\partial_P Q(q, P, t)) (\partial_q \Pi(q, P, t)) = 1. \quad (3.25)$$

La manière la plus simple de construire une transformation canonique est l'utilisation de fonction génératrice. Si on part des coordonnées originales q, P et du Hamiltonien

original $H(q, P, t)$ et qu'on souhaite obtenir les nouvelles coordonnées Q, Π et le nouvel Hamiltonien $K(Q, \Pi, t)$, on peut définir quatre sortes de fonctions génératrices $F_1(Q, q, t)$, $F_2(\Pi, q, t)$, $F_3(P, Q, t)$ et $F_4(\Pi, P, t)$ définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad ; \quad \Pi = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\
 P &= \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad ; \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial \Pi} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\
 q &= -\frac{\partial F_3}{\partial P} \quad ; \quad \Pi = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\
 q &= -\frac{\partial F_4}{\partial P} \quad ; \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial \Pi} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

En déterminant, une des quatre fonctions génératrices, on peut assurer la canonicité de la transformation, c'est à dire que les équations de Hamilton seront valables avec le nouvel Hamiltonien et les nouvelles variables.

3.2 Dynamique d'une particule chargée dans le champ électromagnétique d'une onde se propageant dans le vide

Dans cette section, la dynamique d'un électron dans le champ électromagnétique d'une onde plane est étudiée afin de déterminer la nature des trajectoires de l'électron.

3.2.1 Formulation Hamiltonienne

On considère une particule chargée dans le champ électromagnétique d'une onde plane se propageant dans la direction z . On utilise pour décrire l'onde, le quadri-vecteur potentiel $[\Phi, \mathbf{A}] = [0, (E_0/\omega_0) \cos(\omega_0 t - k_0 z) \mathbf{e}_x]$, où E_0 est le maximum du champ électrique et \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire dans la direction x perpendiculaire à la direction z . ω_0 est la pulsation de l'onde et k_0 son vecteur d'onde.

Le temps propre τ est défini par $d\tau = dt/\gamma$ où γ est le facteur de Lorentz. On considère le mouvement de la particule dans l'espace étendu $[(\mathbf{P}, -\gamma), (\mathbf{r}, t)]$, son Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m} (P_\alpha + eA_\alpha) (P^\alpha + eA^\alpha) - \frac{1}{2} mc^2, \tag{3.27}$$

où $P_\alpha = (mc\gamma, -\mathbf{P})$, $P^\alpha = (mc\gamma, \mathbf{P})$ est le quadri-vecteur impulsion et $A_\alpha = (\phi, -\mathbf{A})$, $A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$, le quadri-vecteur potentiel. On considère que le potentiel scalaire ϕ est nul. En développant l'expression 3.27, le Hamiltonien devient :

$$H = \frac{1}{2}mc^2\gamma^2 - \frac{1}{2m}(\mathbf{P} + e\mathbf{A})^2 - \frac{1}{2}mc^2. \quad (3.28)$$

Cet Hamiltonien est strictement nul cependant les équations de Hamilton donnent les équations du mouvement [Jackson 1975].

On utilise les variables et les paramètres sans dimensions suivants : $\hat{x} = k_0x$, $\hat{y} = k_0y$, $\hat{z} = k_0z$, $\hat{P}_{x,y,z} = P_{x,y,z}/mc$, $\hat{t} = \omega_0t$, $\hat{H} = H/mc^2$ ce qui donne :

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{a}_0)^2 - \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

On pose $a_0 = eE_0/(m\omega_0c)$ et $\hat{\tau} = \omega_0\tau$ qui sont respectivement, le vecteur potentiel normalisé et le temps propre normalisé. On suppose que le mouvement de l'électron est dans le plan de polarisation des deux ondes, dans notre cas c'est le plan (z, x) .

3.2.2 Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi

Maintenant que nous avons défini le Hamiltonien (3.29), on peut résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi pour définir un nouvel Hamiltonien en termes des variables angles (θ, φ, ϕ) et actions $(P_\perp, P_\parallel, -E)$ à la place des variables $(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t})$ et $(P_x, P_z, -\gamma)$. On cherche une transformation canonique telle que les nouveaux moments soient des constantes du mouvement. On introduit une fonction génératrice notée $F_2(P_\perp, P_\parallel, -E, \hat{x}, \hat{z}, \hat{t})$ telle que $\hat{P}_x = \partial F_2/\partial \hat{x}$, $\hat{P}_z = \partial F_2/\partial \hat{z}$, $-\gamma = \partial F_2/\partial \hat{t}$. La fonction F_2 doit être la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi : $\hat{H}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}, P_x, P_z, -\gamma) = \hat{H}_0 = 0$. Cette équation s'écrit :

$$\hat{H} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \hat{t}}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}} + a_0 \cos(\hat{t} - \hat{z})\right)^2 - \left(\frac{\partial F_2}{\partial \hat{z}}\right)^2 - 1 = 0 \quad (3.30)$$

On cherche la fonction F_2 sous la forme suivante [Landau 1975, Rax 1992, Patin 2010] :

$$F_2 = \alpha_1 \hat{t} + \alpha_2 \hat{x} + \alpha_3 \hat{z} + F(\hat{t} - \hat{z})$$

En posant $\xi = \hat{t} - \hat{z}$ et $F' = \partial F(\xi)/\partial \xi$, l'équation de Hamilton-Jacobi 3.30 devient :

$$[\alpha_1 + F'(\xi)]^2 - [\alpha_2 + a_0 \cos(\xi)]^2 - [\alpha_3 - F'(\xi)]^2 = 1,$$

ce qui implique :

$$F(\xi) = \frac{1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2(\alpha_1 + \alpha_3)}\xi + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3}a_0 \sin \xi + \frac{a_0}{2(\alpha_1 + \alpha_3)} \left[\frac{\xi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\xi) \right] + F_0, \quad (3.31)$$

où F_0 est une constante d'intégration qu'on choisit nulle car seule les dérivées de F_2 nous intéresse. On pose :

$$\begin{aligned} -E &= \frac{1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2(\alpha_1 + \alpha_3)} + \alpha_1 + \frac{a_0^2}{4(\alpha_1 + \alpha_3)}, \\ P_{\parallel} &= -\frac{1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2(\alpha_1 + \alpha_3)} + \alpha_3 - \frac{a_0^2}{4(\alpha_1 + \alpha_3)}, \\ P_{\perp} &= \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Comme $\alpha_1 + \alpha_3 = P_{\parallel} - E$, on obtient pour F_2 :

$$\begin{aligned} F_2(P_{\perp}, P_{\parallel}, -E, \hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) &= P_{\parallel}\hat{z} + P_{\perp}\hat{x} - E\hat{t} + \frac{P_{\perp}a_0}{P_{\parallel} - E} \sin(\hat{t} - \hat{z}) \\ &+ \frac{a_0^2}{8(P_{\parallel} - E)} \sin 2(\hat{t} - \hat{z}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pour une fonction génératrice de type 2 où les nouvelles coordonnées sont \bar{P}_i et \bar{Q}_i et les anciennes sont P_i et q_i , la transformation canonique est donnée par :

$$P_i = \frac{\partial F_2(q_i, \bar{P}_i, \hat{t})}{\partial q_i}, \quad \bar{Q}_i = \frac{\partial F_2(q_i, \bar{P}_i, \hat{t})}{\partial \bar{P}_i}, \quad (3.34)$$

par conséquent, les anciennes variables s'obtiennent à partir des nouvelles par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{p}_x &= P_\perp + a_0 \cos(\phi + \varphi), \\
\hat{p}_z &= P_\parallel - \frac{P_\perp a_0}{P_\parallel - E} \cos(\phi + \varphi) - \frac{a_0^2}{4(P_\parallel - E)} \cos[2(\phi + \varphi)], \\
\gamma &= E - \frac{P_\perp a_0}{P_\parallel - E} \cos(\phi + \varphi) - \frac{a_0^2}{4(P_\parallel - E)} \cos[2(\phi + \varphi)], \\
\hat{x} &= \theta + \frac{a_0}{P_\parallel - E} \sin(\phi + \varphi), \\
\hat{z} &= \varphi - \frac{P_\perp a_0}{P_\parallel - E} \sin(\phi + \varphi) - \frac{a_0^2}{4(P_\parallel - E)} \sin[2(\phi + \varphi)], \\
\hat{t} &= -\phi - \frac{P_\perp a_0}{P_\parallel - E} \sin(\phi + \varphi) - \frac{a_0^2}{4(P_\parallel - E)} \sin[2(\phi + \varphi)].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

En remplaçant ces expressions dans le Hamiltonien (3.29), on obtient le Hamiltonien en terme des nouvelles coordonnées :

$$\bar{H}(P_\parallel, P_\perp, E) = -\frac{1}{2} (M^2 + P_\parallel^2 + P_\perp^2 - E^2), \tag{3.36}$$

où $M^2 = 1 + a_0^2/2$. Comme on a $\bar{H} = 0$, la relation de dispersion reliée à l'énergie E est $E(P_\parallel, P_\perp, a_0) = \sqrt{M^2 + P_\parallel^2 + P_\perp^2}$. On peut également noter que les impulsions introduites correspondent aux moyennes des impulsions mécaniques c'est à dire que l'on a : $P_\perp = \langle \hat{p}_x \rangle$ et $P_\parallel = \langle \hat{p}_z \rangle$. De même $E = \langle \gamma \rangle$.

Les solutions des équations de Hamilton sont :

$$\begin{aligned}
\theta &= -P_\perp \hat{\tau}, \\
\varphi &= P_\parallel \hat{\tau}, \\
\phi &= E \hat{\tau},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Cela entraîne que le problème est intégrable et donc que les trajectoires sont régulières (Fig.3.1).

Maintenant que nous avons défini le système simple et intégrable d'un électron dans une onde électromagnétique, on va introduire une perturbation à ce système représentant l'onde contrepropagative de faible intensité et on verra cette fois l'apparition de chaos dans le système.

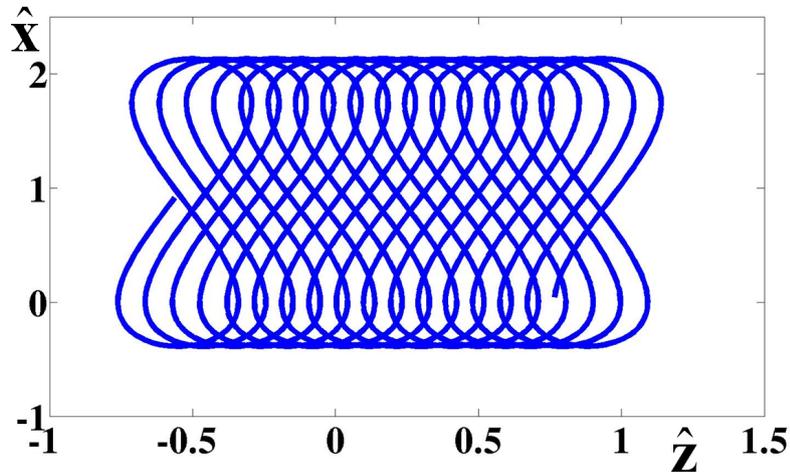


FIGURE 3.1 – Oribite d'un électron dans une onde polarisée linéairement

3.3 Dynamique d'une particule chargée dans le champ électromagnétique de deux ondes - Chauffage stochastique

Dans cette section, on étudie la dynamique d'un électron dans le champ électromagnétique de deux ondes planes. Les conditions pour obtenir du chauffage stochastique sont présentées.

3.3.1 Résonances Compton

On considère un électron se trouvant dans le champ de deux ondes polarisées linéairement. La seconde onde est de faible intensité devant l'onde principale a_0 et représente une perturbation. Le quadri-vecteur de l'onde principale reste identique à celle de la partie précédente. On suppose que l'onde de perturbation se propage avec un angle α par rapport à la direction de propagation de l'onde principale (Fig.3.2). On peut écrire son potentiel vecteur :

$$\mathbf{a}_1 = a_1 (\cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_z) \cos (\omega_1 t - k_{\parallel} z - k_{\perp} x), \quad (3.38)$$

où ω_1 est la fréquence de l'onde perturbatrice normalisée à celle de l'onde principale, k_{\perp} et k_{\parallel} représente la norme des vecteurs d'onde dans les différentes directions,

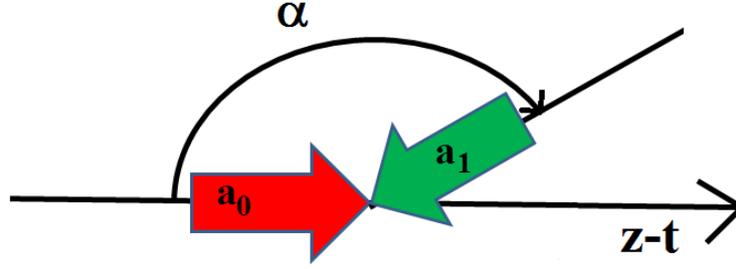


FIGURE 3.2 – Schéma montrant la propagation des lasers. Lorsque $\alpha = \pi$, les deux lasers sont contrepropagatifs

normalisées au vecteur d'onde k_0 de l'onde principale.

Le Hamiltonien relativiste s'écrit alors :

$$H = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1)^2 - \frac{1}{2}. \quad (3.39)$$

Comme dit plus haut, on considère la seconde onde comme une perturbation, par conséquent le Hamiltonien d'un électron dans le champ de deux ondes peut s'écrire comme la somme du Hamiltonien 3.36 et d'une perturbation :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}(M^2 + P_{\parallel}^2 + P_{\perp}^2 - E^2) + \hat{H}_1, \quad (3.40)$$

où $\hat{H}_1 = (\mathbf{P} + \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_1$ avec \mathbf{p} le moment mécanique normalisé à mc .

On pose $K = \omega_1 \hat{t} - k_{\parallel} \hat{z} - k_{\perp} \hat{x}$. En exprimant \hat{t} , \hat{z} et \hat{x} en fonction des variables action-angle, on trouve que $K = K' + A \sin \zeta + B \sin(2\zeta)$ où :

$$\zeta = \phi + \varphi = \hat{z} - \hat{t}$$

$$K' = \omega_1 \phi - k_{1\parallel} \varphi - k_{1\perp} \theta,$$

$$A = \frac{P_{\perp}}{g^2} a_0 (k_{1\parallel} - \omega_1) - k_{1\perp} \frac{a_0}{g}, \quad (3.41)$$

$$B = \frac{a_0^2}{8g^2} (k_{1\parallel} - \omega_1),$$

avec $g = P_{\parallel} - E$.

En utilisant les identités :

$$\begin{aligned}\cos(u \sin v) &= \sum_n J_n(u) \cos(nv) \\ \sin(u \sin v) &= \sum_m J_m(u) \sin(mv),\end{aligned}$$

on montre :

$$\sin K = \sum_{n,m} J_n(A) J_m(B) \sin [K' + (n + 2m) \zeta].$$

La perturbation H_1 peut se mettre sous la forme :

$$H_1 = -a_1 \sum_{h=0,\pm 1,\pm 2} \sum_{n,m} J_n(A) J_m(B) U_h \sin [K' + (n + 2m + h) \zeta], \quad (3.42)$$

avec

$$U_h = (P_\perp \cos \alpha - P_\parallel \sin \alpha) \delta_h^0 + \frac{1}{2} \left(a_0 \cos \alpha + \frac{P_\perp}{g} a_0 \sin \alpha \right) \delta_{|h|}^1 + \frac{a_0^2}{8g} \sin \alpha \delta_{|h|}^2 \quad (3.43)$$

En posant

$$V_n(A, B) = \sum_{h,m,n} \delta_{n+2m+h}^N J_n(A) J_m(B) U_h$$

et avec N un entier, on arrive finalement à :

$$V_n(A, B) = \sum_{h=0,\pm 1,\pm 2} U_h C_{N-h} \left(\frac{a_0 P_\perp (\omega_1 - k_{1\parallel})}{g^2} + \frac{a_0 k_{1\perp}}{g}, -\frac{a_0^2 (\omega_1 - k_{1\parallel})}{8g^2} \right),$$

où $C_N(\delta_1, \delta_2) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} J_{N+2j}(\delta_1) J_j(\delta_2)$.

La perturbation H_1 s'écrit finalement :

$$H_1 = a_1 \sum_N V_N \sin [\omega_1 \phi + k_{1\parallel} \varphi + k_{1\perp} \theta - N(\phi + \varphi)]. \quad (3.44)$$

Les valeurs de ϕ , φ et θ peuvent être remplacées par celles en fonction de P_\parallel , P_\perp , E et $\hat{\tau}$ (Eqs.3.35). L'intégration par rapport au temps du terme en sinus, fait apparaitre une singularité et donne la condition de résonance suivante :

$$-\omega_1 E + k_{1\parallel} P_\parallel + k_{1\perp} P_\perp + N(E - P_\parallel) = 0. \quad (3.45)$$

On peut tracer les lignes de résonance $(P_{\perp}, P_{\parallel})$ en tenant compte de la relation $E = \sqrt{M^2 + P_{\parallel}^2 + P_{\perp}^2}$ qui vient du fait que le Hamiltonien est strictement nul. Comme en atteste la figure 3.3, les résonances sont de plus en plus proches lorsque α tend vers π [Patin 2010, Patin 2005]. Pour $\alpha = \pi$, les deux ondes sont contrepropagatives.

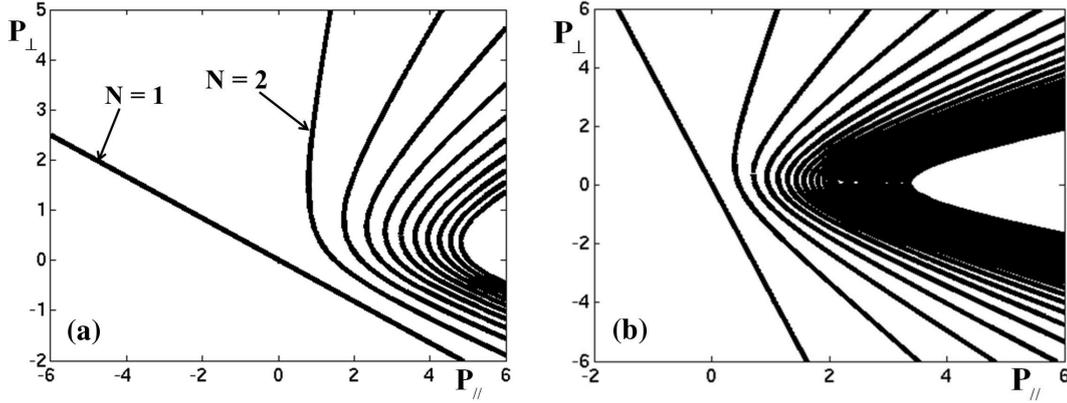


FIGURE 3.3 – Les lignes de résonances en fonction de l’angle α avec $a_0 = 3$. a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$
b) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

Un électron se trouvant dans la première résonance, va commencer par accéder à des trajectoires dans l’espace des phases où leurs impulsions seront plus élevées lorsque les deux premières résonances se recouvrent. Grâce aux calculs des largeurs des résonances, on va pouvoir calculer le taux de recouvrement de ces résonances et ainsi déterminer les situations où l’électron va pouvoir diffuser dans l’espace des phases et subir du chauffage stochastique.

3.3.2 Le critère de Chirikov

Le critère de Chirikov donne une mesure du degré de recouvrement de deux résonances (successives ou non). On calcule pour cela le paramètre R :

$$R = \frac{\Delta_{N_1} + \Delta_{N_2}}{2d_{N_1-N_2}}, \quad (3.46)$$

où Δ_{N_1} et Δ_{N_2} sont les largeurs des résonances N_1 et N_2 et $d_{N_1-N_2}$ la distance entre ces deux résonances. Le critère de Chirikov est vérifié lorsque $R > 1$.

Pour calculer les largeurs des résonances, nous nous sommes ramenés au problème du pendule. L'électron est en mouvement au voisinage d'un tore de coordonnées dans l'espace des phases $(P_{\parallel c}, P_{\perp c}, E_c)$ données par la condition de résonance 3.45. Pour étudier la dynamique d'un tel électron, J.M Rax a introduit les variables action-angle suivantes [Rax 1992] :

$$J = \frac{P_{\parallel} - P_{\parallel c}}{k_{1\parallel} - N} = \frac{P_{\perp} - P_{\perp c}}{k_{1\perp}} = \frac{E - E_c}{\omega_1 - N}, \quad (3.47)$$

$$\Psi = k_{1\parallel}\varphi + k_{1\perp}\theta + \omega_1\phi - N(\varphi + \phi).$$

Le Hamiltonien se met alors sous la forme suivante :

$$H = \frac{J^2}{2M_p} + a_1 V_n \sin \Psi, \quad (3.48)$$

où $M_p^{-1} = - \left[(k_{1\parallel} - N)^2 + k_{1\perp}^2 - (\omega_1 - N)^2 \right]$.

Proche de la résonance, les équations du mouvement (équations de Hamilton) s'écrivent :

$$\frac{dJ}{d\tau} = -a_1 V_n (P_{\parallel c}, P_{\perp c}, E_c) \cos \Psi,$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = - \left[(k_{1\parallel} - N)^2 + k_{1\perp}^2 - (\omega_1 - N)^2 \right] J,$$

où τ est le temps propre. On retrouve l'équation du pendule et la largeur d'une résonance est donnée par [Tabor 1989] :

$$\Delta J_N = (4M_p a_1 V_n)^{1/2} = 2 \sqrt{\frac{a_1 |V_n|}{\left| \left[(k_{1\parallel} - N)^2 + k_{1\perp}^2 - (\omega_1 - N)^2 \right] \right|}} \quad (3.49)$$

Lorsque $\alpha = \pi$ et que les deux ondes ont la même pulsation, on a $k_{1\parallel} = -1$, $k_{1\perp} = 0$ et $\omega_1 = 1$, La largeur en J s'écrit alors :

$$\Delta J_N = \sqrt{\frac{2a_1 |V_n|}{N}}$$

Les largeurs en P_{\perp} et P_{\parallel} sont déduites de ΔJ_N :

$$\begin{aligned} \Delta P_{\parallel} &= \Delta J_N (k_{1\parallel} - N) \\ \Delta P_{\perp} &= \Delta J_N k_{1\perp} \end{aligned} \quad (3.50)$$

On trace pour différentes valeurs de a_1 , les résonances ainsi que leur largeur en configuration purement contrepropagative (Fig. 3.4). Les largeurs de chaque résonance augmentent avec les valeurs de a_1 et si a_1 est suffisamment élevé, les résonances se recouvrent. On suppose que les électrons sont initialement sur la résonance $N = 1$

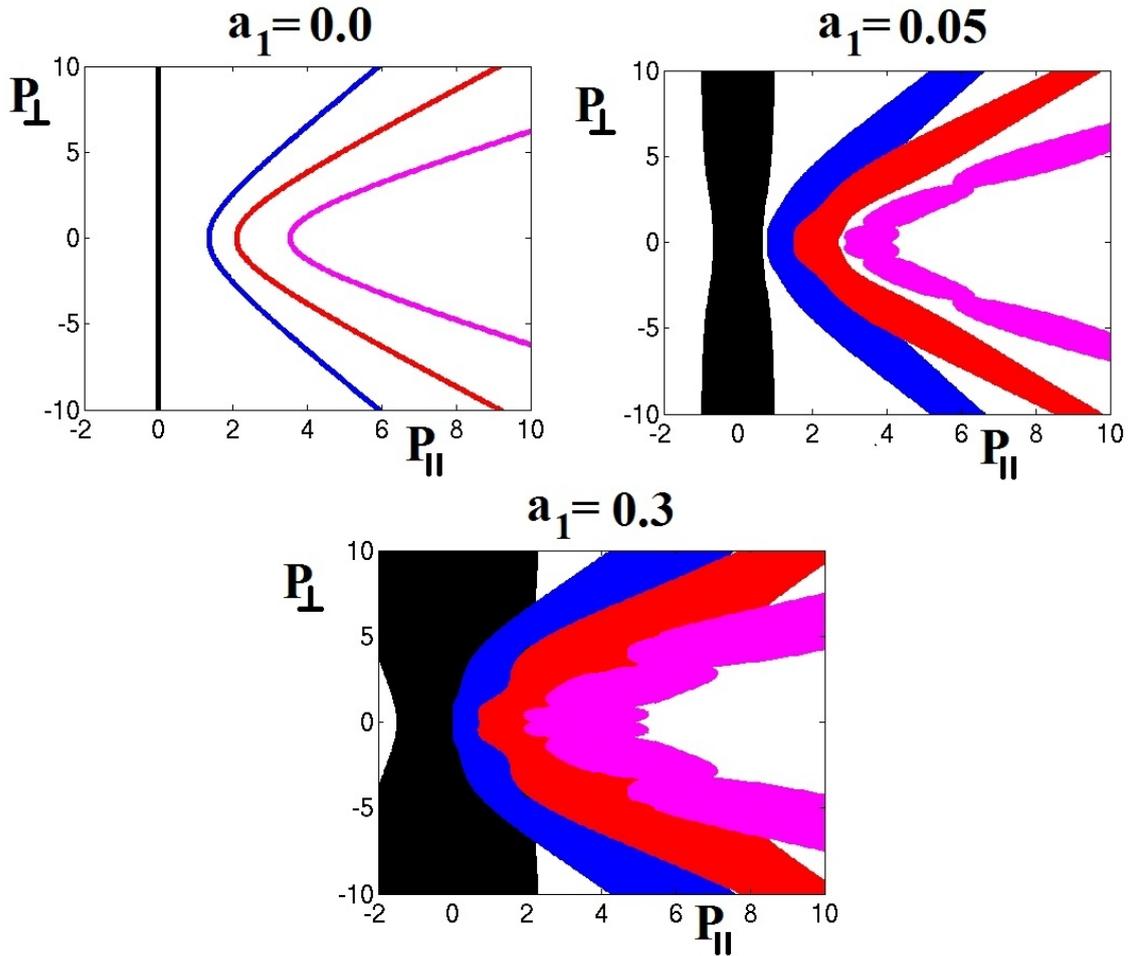


FIGURE 3.4 – Lignes des 4 premières résonances et leur largeur pour $\alpha = \pi$ avec $a_0 = 3$ et différentes valeurs de a_1

et on calcule le recouvrement entre la première résonance et les suivantes lorsqu'elles existent, ici ce n'est pas $N = 2$ mais $N = 3$ (Fig.3.5). On voit que les premières résonances se recouvrent plus difficilement. Le chaos étendu s'installe lorsque le critère de Chirikov est vérifié pour de nombreuses résonances.

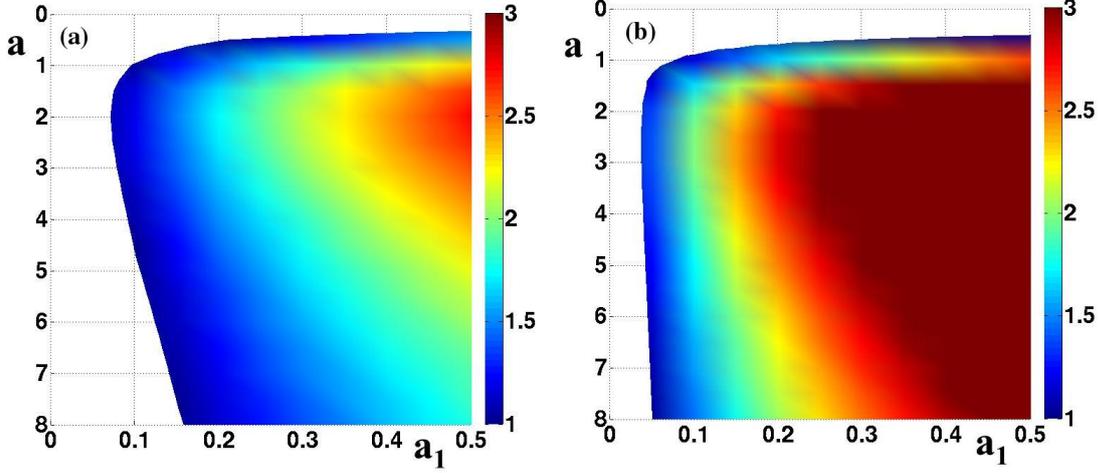


FIGURE 3.5 – Calcul de R (paramètre de Chirikov) en fonction de a_0 et a_1 pour $\alpha = \pi$. a) $N_1 = 1$ et $N_1 = 3$ b) $N_1 = 3$ et $N_1 = 5$

D. Patin a montré que le chauffage stochastique est plus efficace lorsque α est proche de π [Patin 2010]. Pour la suite, nous allons considérer $\alpha = \pi$ qui est plus facile à réaliser numériquement.

3.3.3 Étude pour deux lasers contrepropagatifs ($\alpha = \pi$)

Lorsque $\alpha = \pi$, la largeur selon P_\perp est nulle $\forall N$ et seul le calcul des largeurs de résonance selon P_\parallel est possible. On considère que les deux ondes ont la même fréquence et avec $P_\perp = 0$, on remarque que les formules précédentes se simplifient considérablement :

$$U_h = -\frac{1}{2}a_0 \delta_{|h|}^1,$$

et

$$V_N = -\frac{a_0}{2} [C_{N+1}(0, -a_0^2/4g) + C_{N-1}(0, -a_0^2/4g)].$$

En utilisant la définition de la fonction de Bessel généralisée $C_N(0, -a_0^2/4g) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} J_{N+2j}(0) J_j(-a_0^2/4g)$, seuls les termes tels que $N + 2j = 0$ sont non nuls. On

trouve finalement pour V_N dans le cas N impaire :

$$V_{N=2p+1} = -\frac{a_0}{2} [J_{(N+1)/2}(a_0^2/4g) + J_{(N-1)/2}(a_0^2/4g)],$$

et pour N paire :

$$V_{N=2p} = 0.$$

Ainsi, la largeur $\Delta P_{\parallel} = 0 \forall p$ avec $N = 2p$. Pour estimer R , il ne faudra tenir compte que des ordres N impaires, le calcul pour des ordres N paires n'étant pas possibles si $P_{\perp} = 0$. Cela permet de simplifier nos formules et de calculer le paramètre R pour de nombreuses résonances (Fig.3.6) La figure 3.6 donne les valeurs de R pour différentes

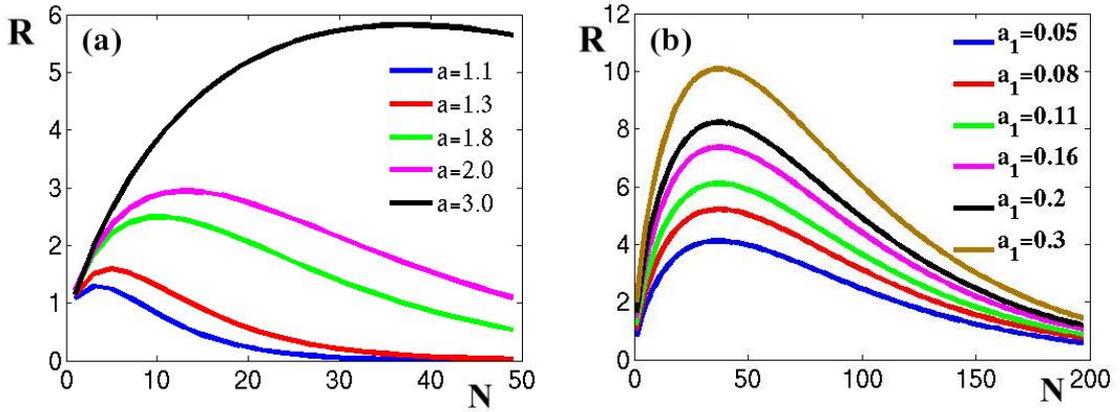


FIGURE 3.6 – Calcul de R (paramètre de Chirikov) pour plusieurs résonances successives. a) $a_1 = 0.1$ en fonction de a_0 et b) $a_0 = 3$ en fonction de a_1

valeurs de l'intensité des lasers et de la résonance N . Pour chaque résonance N , le calcul de R est effectué par rapport à la résonance $N + 2$ où N est un entier impaire. En considérant des valeurs de l'intensité des lasers a_0 et a_1 plus élevées, le nombre de résonances où il y a recouvrement augmente.

Le chauffage stochastique se produit lorsque plusieurs résonances se recouvrent et qu'on ait du chaos étendu. On montre que pour une même valeur de a_1 , considérer des valeurs de a_0 plus grand permet de recouvrir plus de résonances (Fig.3.6a) et les électrons peuvent atteindre des impulsions longitudinales élevées. Augmenter a_1 , augmente également le nombre de recouvrements (Fig.3.6b).

3.4 Mise en évidence du chaos par simulations numériques

Maintenant que nous avons exposé la théorie du chauffage stochastique, nous allons vérifier numériquement son existence et mettre en évidence l'accélération stochastique des électrons. Cette étude va également permettre d'étendre nos résultats au cas d'un plasma et à des impulsions lasers de courtes durées.

3.4.1 Simulations numériques à une particule

En utilisant les équations de Hamilton, on peut regarder la dynamique d'un électron dans le champ électromagnétique de deux ondes lasers. Le Hamiltonien de l'électron s'écrit :

$$H(P_z, z, t) = \gamma = \sqrt{1 + (\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y + \mathbf{A}_0(r, z, t) + \mathbf{A}_1(r, z, t))^2 + P_z^2}.$$

Dans ce modèle, on considère des lasers gaussiens de la forme :

$$\mathbf{A}_0 = a_0 \exp\left[\frac{2 \ln(2)}{\tau_0^2} (\hat{t} - (\hat{z} + \hat{z}_0))^2\right] \exp\left[\frac{r^2}{w_0^2}\right] \times \cos[(\hat{t} - (\hat{z} + \hat{z}_0))] \mathbf{e}_x,$$

et

$$\mathbf{A}_1 = a_1 \exp\left[\frac{2 \ln(2)}{\tau_1^2} (\hat{t} + (\hat{z} + \hat{z}_1))^2\right] \exp\left[\frac{r^2}{w_1^2}\right] \times \cos[(\hat{t} + (\hat{z} + \hat{z}_1))] \mathbf{e}_x.$$

Les deux lasers sont polarisés linéairement dans la direction x et se propagent selon la direction z avec la même durée d'impulsion ($\tau_0 = \tau_1$) et le même waist ($w_0 = w_1$). Un électron initialement au repos en $z=0$ est éloigné des deux lasers de respectivement z_0 et z_1 .

On trace la trajectoire d'un électron dans le champ d'ondes planes (τ_0 et w_0 sont très grands) (Fig.3.7). Dans le champ d'une onde, l'électron a une trajectoire régulière (forme un "huit"). Dans le champ de deux ondes, la trajectoire régulière se déforme et devient chaotique. Ce chaos conduit à du chauffage stochastique dès lors que l'onde laser contrepropagative est suffisamment intense (Fig.3.8). La figure 3.8 montre la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales et aux pas d'intégrations.

La mesure de l'exposant de Lyapunov [Benettin 1976, Osedelec 1968, Lichtenberg 1983, Tabor 1989] indique si des trajectoires sont chaotiques. Plus cet exposant est grand, plus la trajectoire est chaotique. Pour les trajectoires non-chaotiques, cet exposant tend vers 0 suivant la précision de la machine. L'exposant de

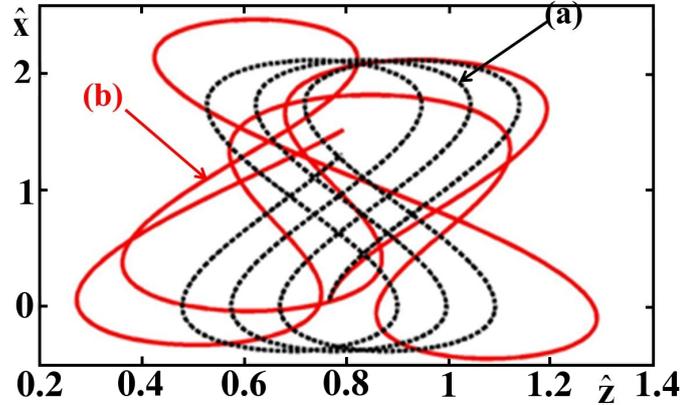


FIGURE 3.7 – Trajectoire d'un électron dans le champ d'ondes lasers pour $a_0 = 3$ avec a) $a_1 = 0$ et b) $a_1 = 0.3$

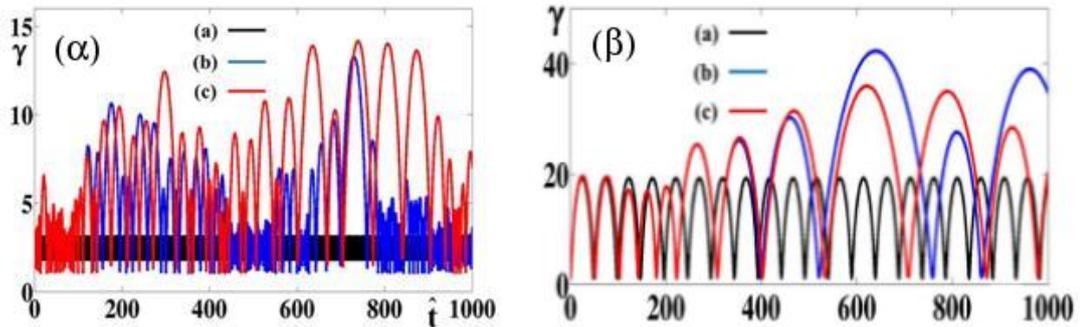


FIGURE 3.8 – Énergie γ d'un électron dans le champ de deux ou une onde laser avec $a_0 = 3$ et a) $a_1 = 0.0$, b) $a_1 = 0.3$ avec $h = 10^{-3}$ et c) $a_1 = 0.3$ avec $h = 10^{-4}$. Pour deux conditions initiales α) $\gamma_0 = \sqrt{1 + a_0^2}$ et β) $\gamma_0 = 1$

Lyapunov pour une trajectoire électronique dans le champ de deux ondes lasers est presque 1000 fois plus grand que pour celui d'une seule onde (Fig.3.9). Si on compare les impulsions longitudinales atteintes, on constate que dans le régime de chauffage stochastique, l'électron atteint des impulsions longitudinales élevées (Fig.3.10).

L'utilisation d'une enveloppe pour les impulsions lasers peut sensiblement changer la dynamique du chauffage stochastique. En effet on ajoute une nouvelle force au problème, la force pondéromotrice. D'autre part, la durée des lasers limite le chauff-

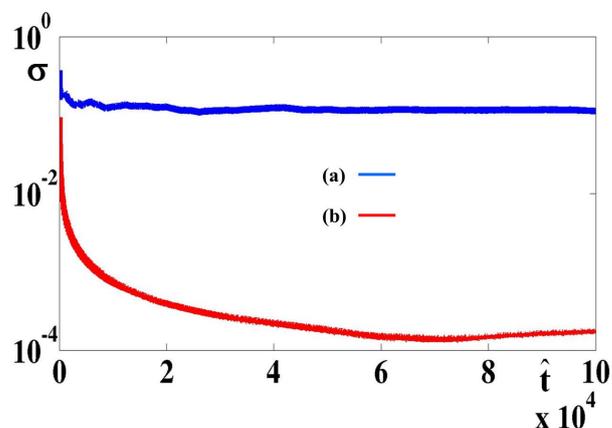


FIGURE 3.9 – Coefficients de Lyapunov pour deux trajectoires d'un électron pour $a_0 = 3$ et pour a) $a_1 = 0.3$ et b) $a_1 = 0.0$.

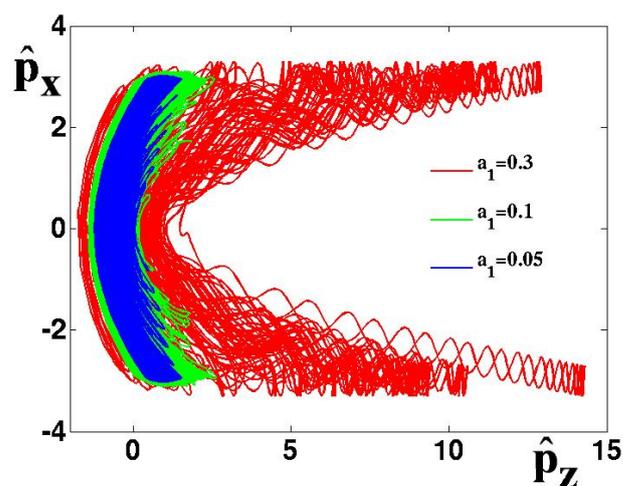


FIGURE 3.10 – Trajectoire d'un électron dans l'espace des phases (p_z, p_x) pour $a_0 = 3$ et différentes valeurs d'amplitude laser a_1 . Cas ondes planes

fage stochastique. Avec des ondes planes, nous avons des électrons dans des champs lasers à l'amplitude constante et les résultats sont obtenus après un temps d'interaction long.

Les impulsions lasers considérées dans le cas de l'accélération d'électrons par onde de

sillage laser sont gaussiennes, ultra-courtes et ultra-intenses. C'est à dire des durées de l'ordre de quelques dizaines de femtoseconde et des waists de quelques dizaines de micromètres. Sur la figure 3.11, on considère un électron initialement en $r=0$ et en interaction avec deux impulsions lasers gaussiennes pour différentes durées d'impulsion. Lorsque l'impulsion est longue, on est proche de l'approximation onde plane et on a un chauffage du même type (Fig.3.11a). Pour des impulsions plus courtes, l'effet est moins spectaculaire mais le chauffage est toujours présent (Fig.3.11b).

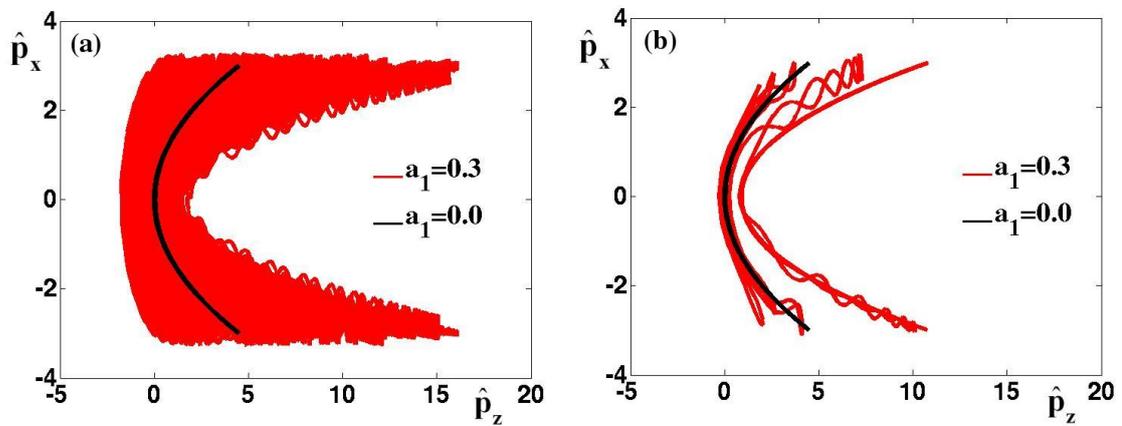


FIGURE 3.11 – Trajectoire d'un électron dans l'espace des phases (p_z , p_x) pour $a_0 = 3$ et différentes valeurs d'amplitude laser a_1 avec des impulsions gaussiennes. a) $\tau_0 = 3 ps$ et b) $\tau_0 = 47 fs$

Cette première série de simulations nous a permis de montrer qu'en régime de chauffage stochastique, les électrons sont accélérés dans le sens de la propagation de l'onde de forte intensité. On a également vu que son effet dépend des durées des impulsions. Maintenant, nous allons voir si la présence d'un plasma affecte le processus de chauffage stochastique.

3.4.2 Simulation PIC sur une couche de plasma

La théorie du chauffage stochastique étant déduite d'une approche à un électron, il est important de vérifier que cette théorie reste valable dans un plasma. Pour cela, on effectue des simulations PIC avec le code CALDER (en 2D). Le plasma est constitué de protons et d'électrons initialement à l'équilibre et les densités utilisées

nous permettent de négliger les collisions. On considère une tranche de plasma sous-dense de densité électronique $n_e = 0,01 n_c$ dont les dimensions sont $50 \mu m$ selon z et $80,2 \mu m$ selon x . Le profil longitudinal du plasma est trapézoïdal avec une pente de $10 \mu m$ à l'entrée et en sortie du plasma. Un profil constant est choisi transversalement. La simulation est effectuée dans une fenêtre de dimension $130,4 \times 81,5 \mu m^2$ et la tranche de plasma se trouve au centre de la fenêtre. Pour commencer, nous allons utiliser des ondes lasers semi-infinies avec une marche de $50 T_0$ où $T_0 = 2\pi/\omega_0$ en entrée. Ainsi, on limite les effets de la force pondéromotrice et on se rapproche du modèle à ondes planes. Les deux lasers entrent au même instant, de part et d'autre de la fenêtre de simulation.

Les deux lasers se propagent selon z et sont polarisés linéairement avec leur champ électrique parallèle selon x . Les waists des deux lasers sont identiques $w_0 = w_1 = 12 \mu m$. Le premier laser a un potentiel vecteur normalisé $a_0 = 3$ et le second laser conformément à la théorie du chauffage stochastique, est une perturbation, on a choisi $a_1 = 0.1$. Les deux lasers entrent dans la fenêtre de simulation au temps $t = 0$. Ils entrent dans le plasma au temps $t = 324$. Les deux lasers entrent en collision à partir du temps $t = 414$. Sur la figure 3.12, on a tracé la distribution électronique du plasma au temps $t = 1512$ après une interaction d'environ 500 femtosecondes avec un puis deux lasers. On observe un nombre important d'électrons à haute énergie

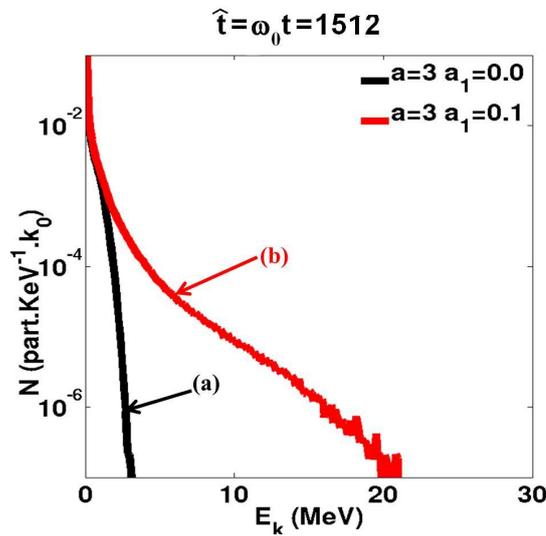


FIGURE 3.12 – Distribution en énergie des électrons obtenue après interaction avec des ondes planes pour $a_0 = 3$ en fonction de a_1 pour $n_e = 1.0 \times 10^{-2} n_c$

lorsque le plasma est en interaction avec deux ondes (Fig.3.12). Sur la figure 3.13, le calcul de la densité électronique du plasma dans l'espace des phases (p_x, p_z) montre que les électrons sont, comme attendu, accélérés longitudinalement.

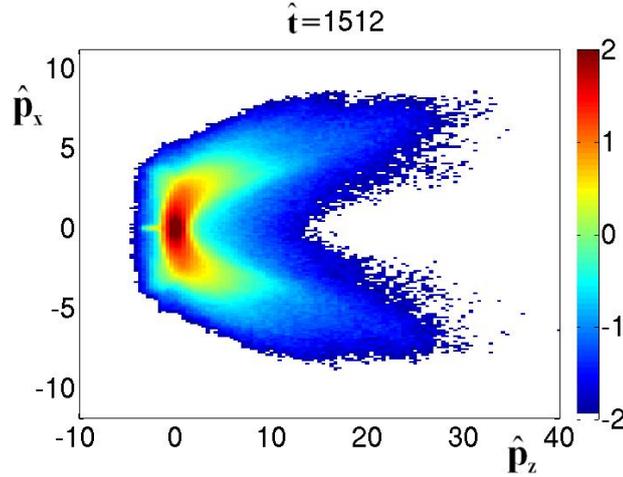


FIGURE 3.13 – Densité électronique projetée sur (p_z, p_x) obtenue après interaction avec des ondes lasers semi-infinies pour $a_0 = 3$ avec a) $a_1 = 0$ et b) $a_1 = 0.1$ pour $n_e = 1.0 \times 10^{-2} n_c$

On reconsidère notre tranche de plasma mais cette fois se sont des impulsions lasers femtoseconde et gaussiennes qui entrent en collision au temps $t = 414$. Les deux lasers ont la même durée $\tau_0 = \tau_1 = 41.6 fs$. Les différentes phases de la simulation sont présentées sur la figure 3.14. Sur la figure 3.15, on a tracé les distributions en énergie des électrons du plasma en considérant différentes valeurs pour l'intensité de l'onde perturbative. Lorsque $a_1 = 0.1$ le chauffage des électrons est très faible. Si on considère les cas $a_1 = 0.3$ et $a_1 = 0.5$, le chauffage est bien plus important. On remarque également que pour une valeur de a_1 très élevée ($a_1 = 1.0$), on a toujours du chauffage. On trace également la densité électronique projetée dans l'espace des phases (p_z, p_x) , on confirme ainsi que les électrons acquièrent de l'impulsion longitudinale (Fig.3.16b).

A plus basse densité, on chauffe beaucoup moins d'électrons mais ils atteignent des énergies plus élevées (Fig.3.17). De plus, la force pondéromotrice est plus violente et ainsi l'impulsion laser principale donne une importante vitesse dans la direction de propagation. Les figures des densités électroniques projetées dans l'espace des

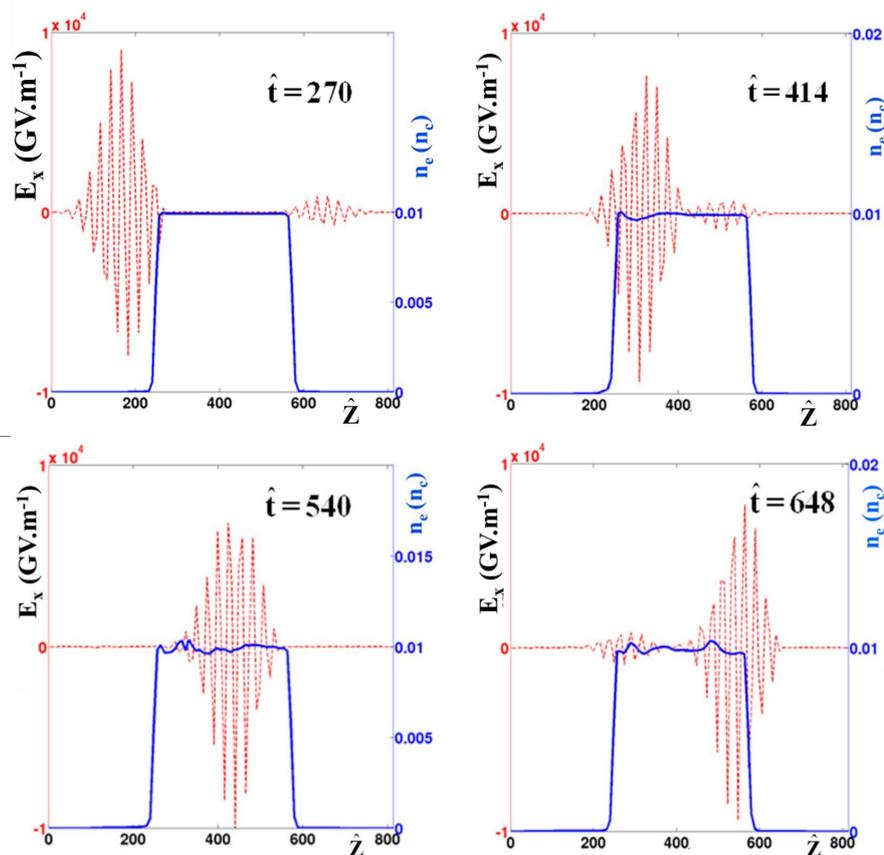


FIGURE 3.14 – Champ électrique E_x (rouge) et densité électronique (bleue) projetée sur l'axe obtenue à différents instants d'interaction avec des impulsions lasers gaussiennes pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.3$ pour $n_e = 1.0 \times 10^{-2} n_c$

phases (p_z, p_x) se rapprochent du cas à une particule (Fig.3.18). Comme pour le cas à haute densité, on semble atteindre une saturation du chauffage lorsque a_1 devient trop grand et que l'on sort du cadre de la théorie de perturbation. Par contre, le nombre de particules chauffées sature très vite (Fig.3.17).

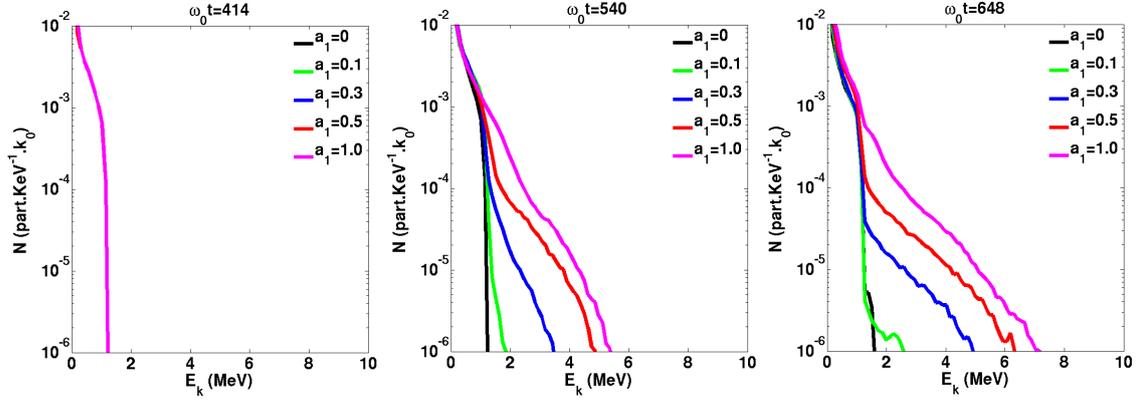


FIGURE 3.15 – Distributions en énergie des électrons obtenues à différents instants lors de l'interaction avec des impulsions lasers gaussiennes pour $a_0 = 3$ et plusieurs valeurs de a_1 pour $n_e = 1.0 \times 10^{-2} n_c$

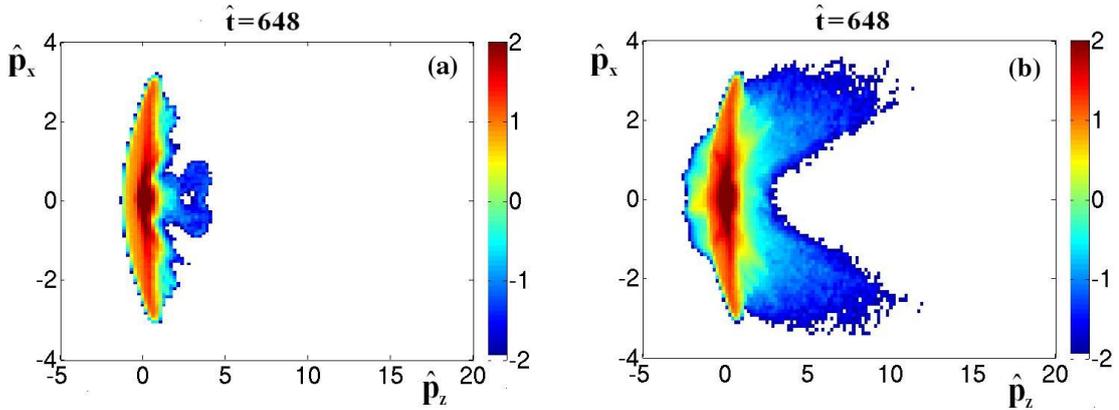


FIGURE 3.16 – Densité électronique projetée sur (p_z, p_x) obtenue après interaction avec des impulsions lasers gaussiennes pour $a_0 = 3$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-2} n_c$ avec a) $a_1 = 0$ et b) $a_1 = 0.3$

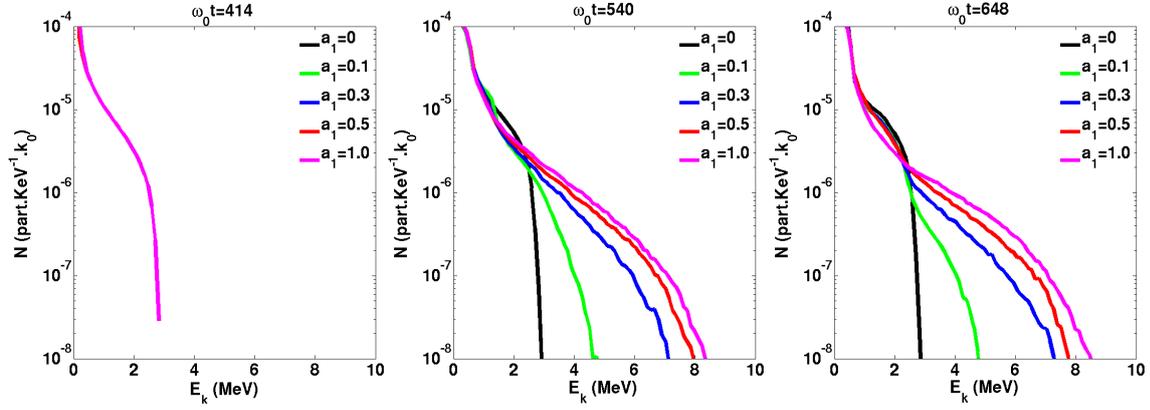


FIGURE 3.17 – Distributions en énergie des électrons obtenue à différents instants lors de l'interaction avec des impulsions lasers gaussiennes pour $a_0 = 3$ et plusieurs valeurs de a_1 pour $n_e = 1.0 \times 10^{-4} n_c$

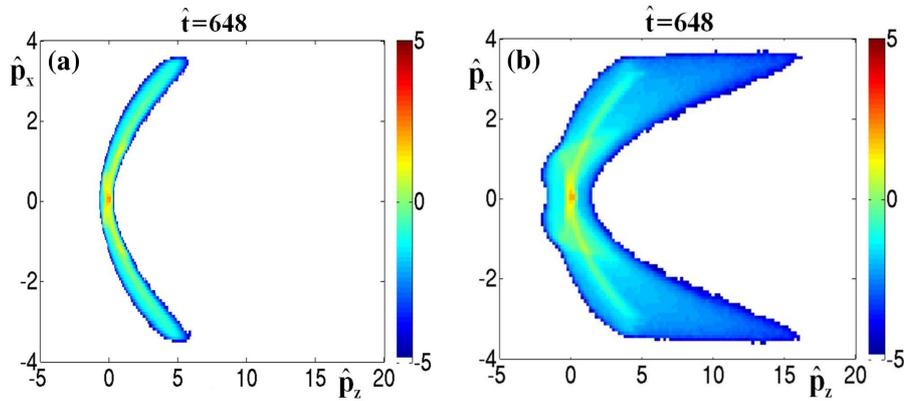


FIGURE 3.18 – Densité électronique projetée sur (p_z, p_z) obtenue après interaction avec des impulsions lasers gaussiennes pour $a_0 = 3$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-4} n_c$ avec a) $a_1 = 0$ et b) $a_1 = 0.3$

3.5 Conclusion

A l'aide du formalisme hamiltonien, nous avons étudié la dynamique d'un électron dans le champ électromagnétique de deux ondes planes. Les trajectoires électroniques deviennent chaotiques lorsque les deux ondes sont polarisées linéairement et ont leurs champs électriques parallèles. Le régime de chauffage stochastique est atteint dès lors que les intensités des deux lasers franchissent les seuils vérifiant le critère de Chirikov. Cette théorie a été abordée par D. Patin dans sa thèse [Patin 2010] et il a montré que la géométrie purement contrepropagative pour les deux ondes permet de maximiser le phénomène. Nous avons démarré notre étude en partant de ce résultat et regardé si son application dans l'accélération d'électrons par onde de sillage dans le régime de bulle était possible. En utilisant les outils numériques à notre disposition, on a montré que cette théorie basée sur des ondes planes reste valable dans le cas d'impulsions courtes interagissant avec un plasma. Avec des temps d'interaction beaucoup plus courts, les effets du chauffage stochastique sont moins spectaculaires mais toujours présents. L'étude menée avec le code PIC a permis de voir que la prise en compte d'un plasma réduit quelque peu l'effet du chauffage stochastique. Même si le critère de Chirikov est vérifié, considérer des intensités lasers et des temps d'interaction plus élevés permet de chauffer plus efficacement les électrons.

Dans l'accélération par onde de sillage en injection optique, une onde contrepropagative entre en collision avec l'onde laser principale créant l'onde de sillage afin d'y injecter des électrons. Lors de la collision, des électrons peuvent subir du chauffage stochastique si les deux ondes lasers sont polarisées linéairement. Dans le chapitre suivant, nous allons voir comment le chauffage stochastique peut aider à améliorer l'accélération d'électrons par onde de sillage laser.

Influence de la polarisation dans l'injection optique et le piégeage des électrons

Sommaire

4.1	Injection optique	105
4.1.1	Contrôle optique de l'injection	105
4.1.2	Modèle théorique en ondes planes	106
4.1.3	Simulations PIC sur une couche fine de plasma	111
4.2	Simulations sur des plasmas millimétriques	113
4.2.1	Paramètres des simulations	113
4.2.2	Premiers résultats	114
4.3	Injection froide ou chauffage stochastique ?	118
4.3.1	Analyse phénoménologique avec des particules tests	118
4.3.2	Influence des dimensions de l'onde de sillage	121
4.3.3	Inhibition de l'onde de sillage	125
4.4	Impact du chauffage stochastique en fonction du paramètre ρ 129	
4.4.1	Mise en évidence du paramètre ρ	130
4.4.2	Validité de ρ comme paramètre de similarité	133
4.4.3	Influence du waist du lasers	135
4.5	Conclusion	136

Les accélérateurs plasmas sont le siège de champs électriques et magnétiques très intenses, à même d'accélérer efficacement des particules chargées. Pour générer de tels champs, il faut exciter fortement le plasma. Dans le cas de l'accélération par onde de sillage laser, un faisceau laser ultra-intense est focalisé dans un gaz qui est ionisé. Cette impulsion laser crée une onde de sillage capable d'accélérer les électrons. Si l'intensité du laser est suffisante ($a_0 > 1$), on peut atteindre le régime de la bulle introduit

dans le chapitre 2. L'injection des électrons, dans la cavité accélératrice, peut être effectuée par le mécanisme d'auto-injection qui requière des intensités lasers très élevées [Mangles 2012b]. Dans ce mécanisme, l'injection est peu contrôlable et difficilement utilisable pour des applications. On peut maîtriser l'injection en utilisant un mécanisme externe dit d'injection optique. Il existe plusieurs géométries conduisant à de l'injection optique. Celle que nous allons étudier, est la géométrie contrepropagative [Kotaki 2004, Fubiani 2004]. Elle consiste à faire entrer en collision deux impulsions lasers. Un premier laser dit laser principal, crée l'onde de sillage puis un second laser contrepropagatif entre en collision et injecte un paquet d'électrons (Fig.4.1) dans l'onde de sillage. Suivant les polarisations, différents termes interviennent dans les forces résultantes de la collision des deux impulsions lasers. Une des configurations, étudiée dans le chapitre 3, permet d'obtenir du chauffage stochastique. Pour rester dans le cadre de notre théorie perturbative, l'intensité du second laser est faible devant celle de l'onde principale. Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de la polarisation des lasers sur le piégeage des électrons par injection optique. Notre objectif principal est de déterminer comment le chauffage stochastique intervient dans l'accélération d'électrons par onde de sillage initiée par injection optique. Après avoir présenté les différents schémas de polarisations, nous comparerons les résultats des simulations PIC impliquant ces différents schémas afin d'en dégager l'apport du chauffage stochastique. De cette manière, on va pouvoir déterminer les situations où le chauffage stochastique améliore le piégeage des électrons mais également dans quel cas il est préférable d'utiliser d'autres polarisations.

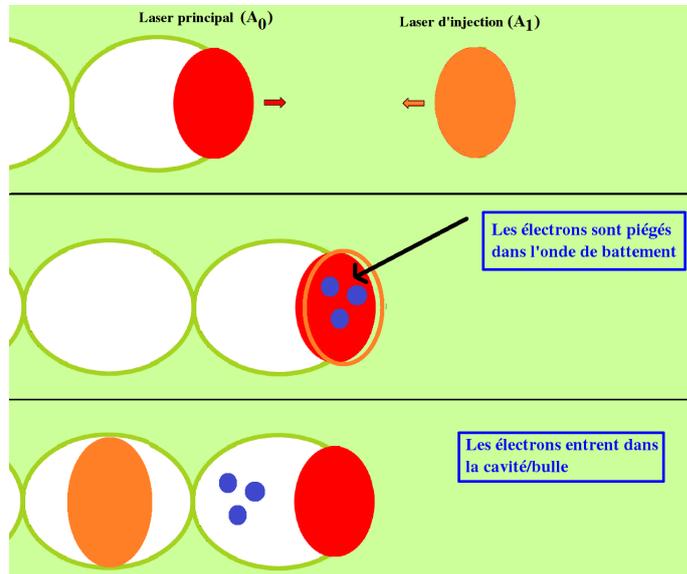


FIGURE 4.1 – Schéma de l'injection optique avec onde de battement, ce mécanisme est responsable de l'injection lorsque les deux lasers ont une polarisation circulaire positive

4.1 Injection optique

4.1.1 Contrôle optique de l'injection

L'utilisation d'une seconde impulsion laser permet de contrôler les propriétés du faisceau d'électrons accéléré de plusieurs façons. Tout d'abord, en choisissant la position de l'injection, on peut fixer la longueur d'accélération. Dans le cas d'une bulle qui n'évolue pas pendant l'accélération cela permet de déterminer l'énergie finale atteinte. Un accélérateur accordable en énergie peut avoir son intérêt dans de nombreuses applications. Le contrôle de la charge est également possible. En modifiant l'énergie de l'impulsion laser de collision, on contrôle l'entrée des électrons à l'intérieur de l'onde de sillage. Les paramètres des impulsions lasers (waists et durées) peuvent également être modifiés afin de faire varier la quantité d'électrons injectés. L'injection optique permet donc un double contrôle [Rechatin 2009b].

Lorsqu'elle se propage dans le plasma, l'impulsion laser peut subir des modifications induites par exemple par les effets d'auto-focalisation ou d'auto-modulation [Esarey 2000, Mori 1997]. Cela peut modifier le potentiel vecteur du laser (en mo-

difiant le waist de l'impulsion laser et en conservant l'énergie) et ainsi allonger ou rétracter la bulle. Ces éléments contribuent à la modification du champ accélérateur dans la bulle et donc à l'énergie que peut atteindre le faisceau d'électrons en fin d'accélération. Il existe des solutions pour contrôler la forme de l'impulsion laser au cours de la propagation, on peut par exemple utiliser un profil de densité électronique parabolique [Sprangle 1992, Geddes 2005].

Enfin, Il a été montré que suivant le type d'injection utilisé, c'est à dire suivant les polarisations des deux lasers, on pouvait également améliorer la qualité du faisceau et obtenir des faisceaux quasi-mono-énergétiques avec une faible émittance [Davoine 2008].

4.1.2 Modèle théorique en ondes planes

Pour mettre en évidence certains des phénomènes se produisant lors de la collision entre les deux impulsions, nous utilisons un modèle simplifié en ondes planes. Nous considérons deux ondes électromagnétiques contrepropagatives qui se propagent selon l'axe z et dont les potentiels vecteurs sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0 &= a_0 \left[\sigma_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \mathbf{e}_x + \sqrt{1 - \sigma_0^2} \sin(\omega_0 t - k_0 z) \mathbf{e}_y \right] \\ \mathbf{A}_1 &= a_1 \left[\sigma_1 \cos(\omega_0 t + k_0 z) \mathbf{e}_x + \sqrt{1 - \sigma_1^2} \sin(\omega_0 t + k_0 z) \mathbf{e}_y \right]\end{aligned}$$

Les deux ondes ont mêmes pulsations ω_0 et vecteurs d'onde k_0 . Les différentes polarisations sont déterminées par σ_0 et σ_1 . Dans la suite on considérera les cas suivants :

1. Les deux ondes sont polarisées linéairement selon x lorsque $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$, on parle de polarisations parallèles (P)
2. L'onde principale est polarisée linéairement selon x et la seconde selon y lorsque $\sigma_0 = 1$ et $\sigma_1 = 0$, on parle de polarisations croisées (S)
3. Les deux ondes sont polarisées circulairement et tournent dans le même sens lorsque $\sigma_0 = \sigma_1 = 1/\sqrt{2}$, on parle de polarisations circulaires positives (C+)
4. Les deux ondes sont polarisées circulairement mais tournent en sens contraire lorsque $\sigma_0 = -\sigma_1 = 1/\sqrt{2}$, on parle de polarisations circulaires négatives (C-)

Examinons à présent l'effet de la polarisation sur l'accélération longitudinale d'un électron. Le Hamiltonien d'un électron dans le champ électromagnétique de ces deux lasers s'écrit :

$$H(P_x, P_y, P_z, z, t) = \gamma = \sqrt{1 + (\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y + \mathbf{A}_0(z, t) + \mathbf{A}_1(z, t))^2 + P_z^2},$$

que l'on réécrit :

$$H(p_{\perp}, p_z, z, t) = \gamma = \sqrt{1 + p_{\perp}^2 + p_z^2}$$

avec

$$p_{\perp}^2 = [P_x + a_0\sigma_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) + a_1\sigma_1 \cos(\omega_0 t + k_0 z)]^2 + \left[P_y + a_0\sqrt{1 - \sigma_0^2} \sin(\omega_0 t - k_0 z) + a_1\sqrt{1 - \sigma_1^2} \sin(\omega_0 t + k_0 z) \right]^2, \quad (4.1)$$

où P_x et P_y sont les impulsions généralisées (ou canoniques) selon x et y de l'électron.

À partir des équations de Hamilton, on obtient l'évolution du moment canonique en fonction du temps. On obtient pour la composante longitudinale P_z :

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial p_{\perp}^2}{\partial z}$$

Suivant les polarisations considérées, l'évolution de l'impulsion p_z de la particule est différente. Comme le montre l'équation 4.1, l'impulsion transverse dépend des paramètres lasers. Par ailleurs, les équations de Hamilton nous fournissent pour les composantes transverses du moment canonique :

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{dP_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Les relations précédentes montrent que nous avons conservation du moment canonique transverse. P_x et P_y étant des constantes du mouvement arbitraires, on les choisit nulles par commodité, ceci ne change en rien les conclusions de cette discussion. Dans ce cas, nous avons $p_x = A_x$, $p_y = A_y$ et $p_z = P_z$ (car $A_z = 0$) et le Hamiltonien se réécrit :

$$H = \sqrt{1 + A_x^2 + A_y^2 + p_z^2} \quad (4.2)$$

avec $A_x = A_{0,x} + A_{1,x}$ et $A_y = A_{0,y} + A_{1,y}$.

Pour ce choix de conditions initiales, les composantes de l'impulsion transverse sont bornées comme suit :

$$|p_x| \leq (a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1)$$

et

$$|p_y| \leq \left(a_0 \sqrt{1 - \sigma_0^2} + a_1 \sqrt{1 - \sigma_1^2} \right)$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons déterminer la force qui s'exerce sur un électron dans la direction de propagation de l'onde, pour les différentes configurations de polarisations. Rappelons que ce terme de force est donné par :

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial p_{\perp}^2}{\partial z}$$

Les électrons initialement froids vont être mis en mouvement par la collision des deux impulsions.

Polarisations circulaires positives (C+)

Dans cette configuration, nous avons :

$$\begin{aligned} p_{\perp}^2 = A_x^2 + A_y^2 &= \left[\frac{a_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - k_0 z) + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t + k_0 z) \right]^2 \\ &+ \left[\frac{a_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t - k_0 z) + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + k_0 z) \right]^2 \end{aligned}$$

et

$$p_{\perp}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} + a_0 a_1 \cos(2k_0 z).$$

On obtient :

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial p_{\perp}^2}{\partial z} = \frac{k_0 a_0 a_1}{\gamma} \sin(2k_0 z) = F_b.$$

La force F_b est une force de battement créée par la collision de deux lasers. Cette force oscille spatialement avec une longueur d'onde $\lambda_0/2$ et elle peut accélérer les électrons. En comparaison, la force pondéromotrice F_p d'une impulsion finie de durée τ_0 vaut en ordre de grandeur $F_p \sim \frac{1}{2\gamma} \frac{a_0^2}{c\tau_0}$ et sachant que $1 \ll \omega_0 \tau_0$, on voit que si le rapport entre a_1 et a_0 n'est pas trop grand, on a :

$$\frac{F_b}{F_p} \sim \frac{2k_0 a_0 a_1}{a_0^2 / c\tau_0} = 2\omega_0 \tau_0 \frac{a_1}{a_0} \gg 1.$$

Cette force de battement peut donc accélérer les électrons plus efficacement que la force pondéromotrice.

Polarisations circulaires négatives (C-)

Dans la configuration circulaire négative, on obtient :

$$p_{\perp}^2 = A_x^2 + A_y^2 = \left[\frac{a_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - k_0 z) - \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t + k_0 z) \right]^2 + \left[\frac{a_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t - k_0 z) + \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + k_0 z) \right]^2 \quad (4.3)$$

et

$$p_{\perp}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_0 a_1 [\cos(2\omega_0 t)].$$

On obtient :

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial p_{\perp}^2}{\partial z} = 0.$$

Aucun terme n'agit sur l'évolution de p_z , par conséquent cette configuration ne favorise pas l'injection des électrons.

Polarisations parallèles (P)

Pour la configuration (P) :

$$p_{\perp}^2 = [a_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) + a_1 \cos(\omega_0 t + k_0 z)]^2$$

En utilisant les relations trigonométriques classiques, on obtient aisément :

$$p_{\perp}^2 = \frac{a_0^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_0 t - k_0 z)]\} + \frac{a_1^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_0 t + k_0 z)]\} + a_0 a_1 [\cos(2\omega_0 t) + \cos(2k_0 z)], \quad (4.4)$$

on en déduit la force selon z :

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial p_{\perp}^2}{\partial z} = -\frac{k_0 a_0^2}{2\gamma} \sin[2(\omega_0 t - k_0 z)] + \frac{k_0 a_1^2}{2\gamma} \sin[2(\omega_0 t + k_0 z)] + \frac{k_0 a_0 a_1}{\gamma} \sin[(2k_0 z)]. \quad (4.5)$$

On retrouve ici la force de battement F_b de la configuration (C+). On voit également que des termes supplémentaires vont accélérer les électrons. Dans ce cas, les trajectoires des électrons peuvent devenir chaotiques et conduire à du chauffage stochastique, lorsque a_1 est suffisamment grand. La force de battement est responsable de l'entrée des électrons à l'avant par l'intermédiaire d'une onde stationnaire. Le chauffage stochastique va communiquer aux électrons une impulsion dans la direction de propagation de l'onde intense, ce qui peut faciliter leur piégeage à l'arrière. Si le chauffage stochastique est suffisamment intense (critère de Chirikov vérifié pour de nombreuses résonances) alors une fraction significative des électrons ne sera pas piégée dans l'onde de battement. La densité électronique dans l'espace des phases (z, p_z) fournie par les simulations PIC permet de vérifier la présence de chauffage stochastique suivant la polarisation choisie (Fig.4.2). Le chauffage stochastique se manifeste par un panache d'électrons dont l'impulsion longitudinale est très élevée à l'avant de la bulle (Fig.4.2b). Cette figure montre également l'existence de l'onde de battement qui permet l'injection par l'avant des électrons. A contrario, pour la configuration (C+), l'impulsion longitudinale des électrons reste modérée (Fig.4.2a), on parle souvent d'injection froide pour désigner ce scénario [Davoine 2010b].

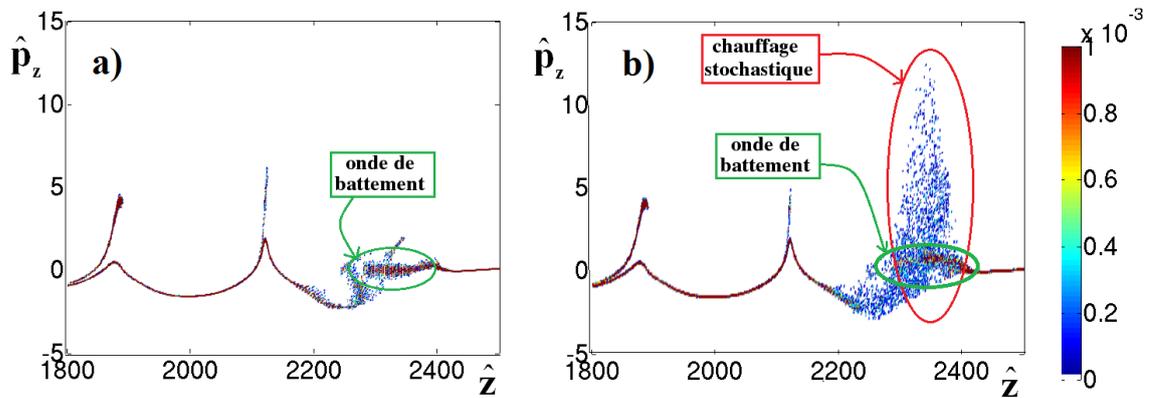


FIGURE 4.2 – Densité d'électrons projetée dans l'espace des phases (z, p_z) en $x = 0$ pour $a_0 = 3$, $a_1 = 0.5$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ pendant la collision a) polarisation (C+) b) polarisation (P)

Polarisations croisées (S)

Dans la configuration (S), nous avons :

$$p_{\perp}^2 = [a_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z)]^2 + [a_1 \sin(\omega_0 t + k_0 z)]^2$$

On obtient aisément :

$$p_{\perp}^2 = \frac{a_0^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_0 t - k_0 z)]\} + \frac{a_1^2}{2} \{1 - \cos[2(\omega_0 t + k_0 z)]\},$$

on en déduit le terme de force suivant :

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial p_{\perp}^2}{\partial z} = -\frac{k_0 a_0^2}{2\gamma} \sin[2(\omega_0 t - k_0 z)] - \frac{k_0 a_1^2}{2\gamma} \sin[2(\omega_0 t + k_0 z)]$$

On retrouve ici les termes de la configuration (P) mais sans la force de battement. Ce dernier cas permet d'isoler une partie du processus de chauffage stochastique. Dans la section suivante, on présente des résultats de simulations PIC montrant l'interaction entre deux impulsions lasers avec une fine couche de plasma en considérant différents schémas de polarisations.

4.1.3 Simulations PIC sur une couche fine de plasma

Dans cette sous-section, nous examinons l'effet des différentes polarisations sur la distribution électronique d'une tranche de plasma de $50 \mu m$, soumise à une onde laser intense et une onde laser contrepropagative de faible intensité. Le schéma de polarisation (P) a déjà été traité dans le chapitre 3. Nous allons dans cette partie refaire cette étude avec les autres schémas de polarisation. Comme pour l'étude du chauffage stochastique nous nous contenterons de simulations 2D en positions et 3D en vitesses avec le code CALDER. Les paramètres de simulations sont les mêmes que ceux de la section 3.4.2 exceptés pour les polarisations des deux lasers entrant en collision. On rappelle que les deux impulsions gaussiennes entrent en interaction à partir de $t = 414$ et la collision prend fin à $t = 648$ (voir également Fig.3.14).

Polarisations circulaires positives

On trace dans le cas du schéma de polarisation (C+), les distributions en énergie des électrons obtenues à différents instants de l'interaction entre les deux impulsions (Fig.4.3). La collision entre les deux impulsions fait gagner de l'énergie aux électrons, cette énergie augmente avec l'intensité de l'onde contrepropagative. Comme pour le

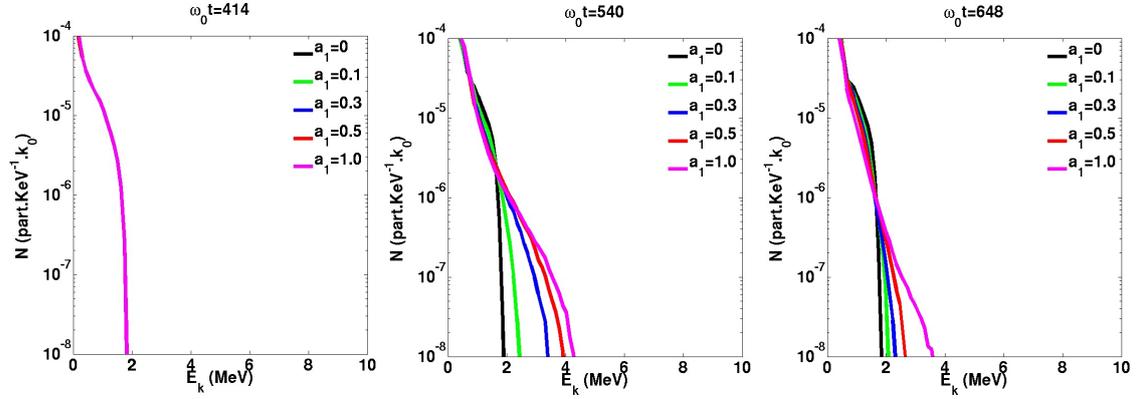


FIGURE 4.3 – Distributions en énergie des électrons obtenues à différents instants d'interaction avec des ondes gaussiennes en polarisations circulaires (C+) pour $a_0 = 3$ et plusieurs valeurs de a_1 avec $n_e = 1 \times 10^{-4} n_c$

cas de la polarisation (P) (Fig.3.17), on a considéré des valeurs de a_1 variant entre 0 et 1. On voit qu'au delà de $a_1 = 0.5$, l'accélération fournie par le battement n'augmente pas de manière significative.

On peut noter que la même étude a été faite pour le schéma (C-) mais aucun effet significative n'a été observé.

Polarisations croisées

On trace dans le cas du schéma de polarisations croisées (S), les distributions en énergie des électrons (Fig.4.4). Dans ce schéma de polarisation, il n'y a pas de force de battement. Les électrons sont en interaction avec les deux ondes et du chauffage stochastique peut être observé [Rechatin 2009a]. Comme on peut le voir sur les figures de distribution, il faut considérer des intensités de l'onde perturbative élevées pour voir une queue de distribution d'électrons chauds. Dans les simulations présentées ici, il fallait atteindre $a_1 = 1$ pour $a_0 = 3$ pour voir un peu de chauffage stochastique (Fig.4.4 à $t = 540$). Des intensités $a_1 \geq 1$ pour l'onde laser contrepropagative, ne peuvent pas être envisagées puisque la seconde impulsion laser n'est plus une perturbation et crée sa propre bulle. Dans ce cas, la collision ne va pas directement mener à une injection d'électrons et de nouveaux phénomènes peuvent se produire ce qui peut conduire à perdre le contrôle de l'injection.

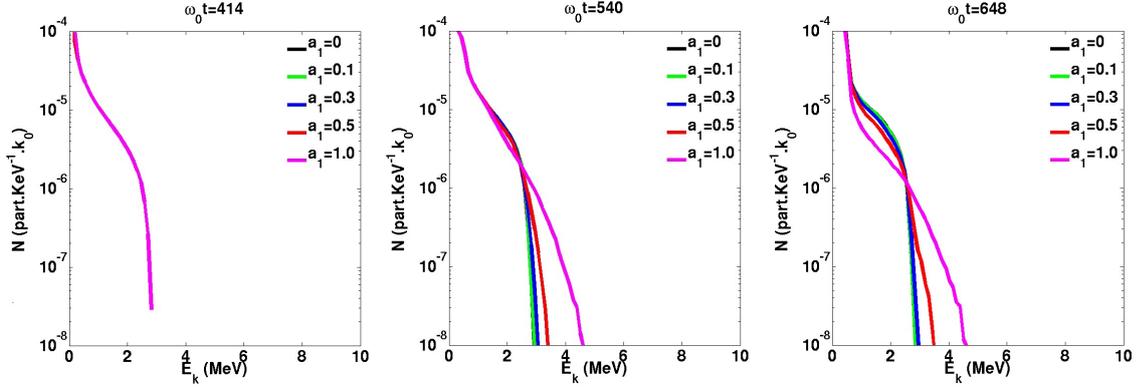


FIGURE 4.4 – Distributions en énergie des électrons obtenues à différents instants d’interaction avec des ondes gaussiennes en polarisations (S) pour $a_0 = 3$ et plusieurs valeurs de a_1 avec $n_e = 1 \times 10^{-4} n_c$

4.2 Simulations sur des plasmas millimétriques

Dans l’injection optique, lors de la collision des deux impulsions lasers, deux phénomènes peuvent se produire suivant la polarisation des lasers. Le premier est le chauffage stochastique, un phénomène à seuil qui dépend de l’intensité des lasers. Le second est l’injection associée à la force de battement stationnaire. Dans cette section, nous allons exposer nos premiers résultats concernant l’accélération d’électrons par onde de sillage laser en injection optique obtenus par simulations avec les codes CALDER (2D) et CALDER-Circ (3D).

4.2.1 Paramètres des simulations

Afin de déterminer l’influence de la polarisation dans l’injection optique, nous utilisons dans nos simulations les paramètres lasers suivants :

- les impulsions lasers gaussiennes ont la même longueur d’onde $\lambda_0 = \lambda_1 = 0.8 \mu m$ et la même durée $\tau_0 = \tau_1 = 30 fs$,
- les waists des lasers valent $w_0 = 18 \mu m$ et $w_1 = 31 \mu m$.

Les deux ondes interagissent avec un plasma millimétrique longitudinalement avec une largeur transverse de $127.32 \mu m$. Le plasma a un profil trapézoïdal, avec une rampe linéaire de densité à l’entrée de la boîte de simulation de longueur $178.25 \mu m$, puis un plateau de densité constante n_e . Pour réduire les temps de simulations, on

utilise une fenêtre glissante divisée en 10880×400 cellules et se propageant à la vitesse de la lumière. Les pas d'espace et de temps sont choisis de manière à respecter la condition CFL (Eq.1.21) : $\Delta z = 0.016 \mu m$, $\Delta x = 0.32 \mu m$ et $\Delta t = 0.05 fs$.

La collision entre les deux impulsions se produit à $t = 2600$ c'est à dire après une propagation du laser principal sur $331 \mu m$ de plasma. On relève la distribution énergie des électrons piégés dans la première bulle au temps $t = 7000$ ce qui correspond à une accélération du faisceau sur environ $560.2 \mu m$ de plasma. Nous avons vérifié que l'altération numérique de la vitesse de groupe du laser est négligeable devant l'altération physique entraînée par le plasma via le critère fourni par [Lehe 2013] et par l'équation 1.25. Ainsi, la densité la plus basse que l'on peut considérer vaut environ $n_{e,limit} = 1.56 \times 10^{-4} n_c$.

4.2.2 Premiers résultats

Une première série de simulations est effectuée à une densité $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ et on choisit a_0 en-dessous du seuil de piégeage de l'injection froide ($a_0 \simeq 2$) [Davoine 2010b]. Le rôle du chauffage stochastique est étudié en comparant l'effet de la collision dans les cas de polarisations (P) et (S) aux polarisations circulaires (C+) et (C-). On considère des valeurs de a_1 permettant de satisfaire en polarisation (P), le critère de Chirikov et donc d'avoir du chauffage stochastique. En dessous du seuil théorique de piégeage pour l'injection froide ($a_0 = 1.5$), seule la polarisation (P) permet de piéger des particules, comme en atteste la figure 4.5a. Les électrons injectés par la force de battement seule, ne sont pas piégés.

Lorsque la valeur seuil de l'injection froide est atteinte ($a_0 = 2$), on observe des électrons piégés dans la plupart des cas mais seule la polarisation (P) permet de piéger un nombre important de particules (Fig.4.5b). Le chauffage stochastique étant beaucoup plus présent en polarisation (P) que dans la polarisation (S), il semble améliorer le piégeage des électrons à cette densité.

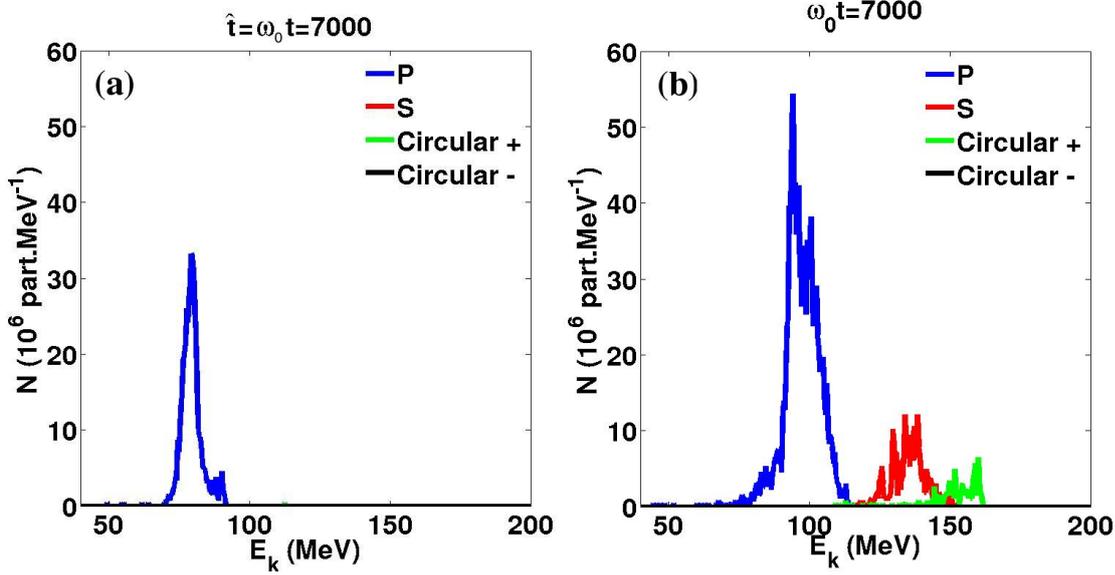


FIGURE 4.5 – Distribution en énergie des électrons dans la première bulle pour $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ à $t = 7000$ a) $a_0 = 1.5$ et $a_1 = 0.4$ b) $a_0 = 2$ et $a_1 = 0.4$

On a refait ces simulations pour seulement deux schémas de polarisations ((P) et (C+)) en se plaçant au-dessus du seuil de piégeage froid ($a_0 > 2$). Dans ce cas, on obtient des charges piégées comparables pour les deux polarisations considérées comme le montrent les distributions des faisceaux d'électrons piégés (Fig.4.6). Dès que le seuil du chauffage stochastique est dépassé ($a_1 = 0.3$), le piégeage augmente pour la polarisation (P) et devient supérieur au cas de la polarisation (C+). Notons que la présence de chauffage stochastique accentue la dispersion en énergie du faisceau piégé (Fig.4.6b).

Examinons à présent le cas d'une densité plus faible $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$. En dessous du seuil de chauffage stochastique ($a_1 = 0.05$), seule la force de battement permet l'injection des électrons dans l'onde de sillage et les deux polarisations donnent le même résultat (Fig.4.7 c ou d). Lorsqu'on se place dans le régime de chauffage stochastique ($a_1 = 0.3$), la polarisation (C+) est plus efficace que la polarisation (P) (Fig.4.7a ou b). Dans cette situation, les électrons déphasés par la force de battement sont piégés par l'onde de sillage tandis que le chauffage stochastique le réduit. On peut également noter que les codes 2D et 3D donnent des résultats en bon accord.

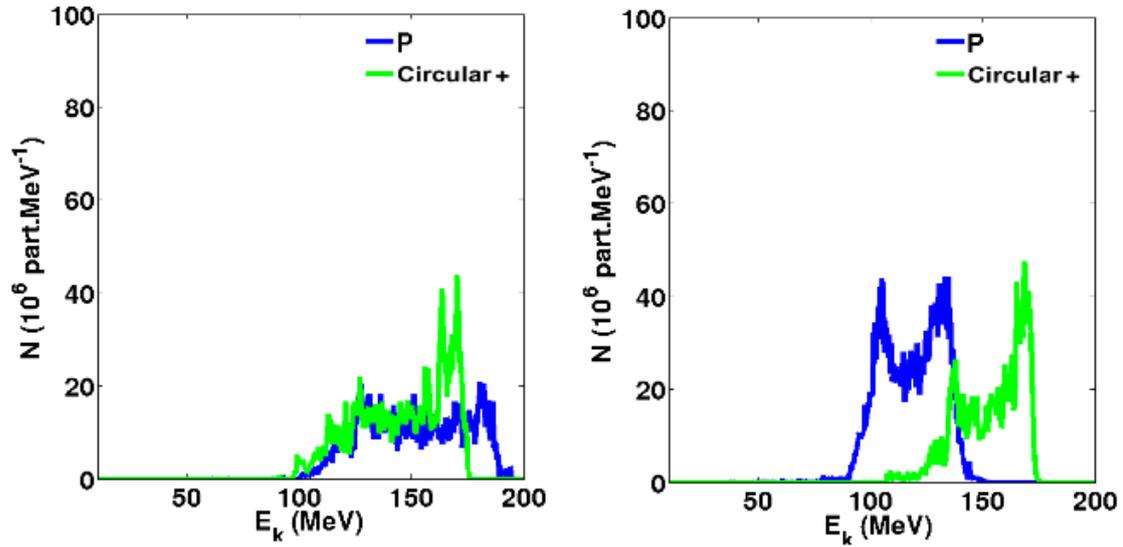


FIGURE 4.6 – Distribution en énergie des électrons dans la première bulle pour $a_0 = 3$ et $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ à $t = 7000$ 2D PIC a) $a_1 = 0.05$ b) $a_1 = 0.3$

Ainsi, nous nous sommes contentés de simulations 2D espace et 3D en vitesse pour étudier l'influence de la polarisation sur l'injection optique dans l'onde de sillage.

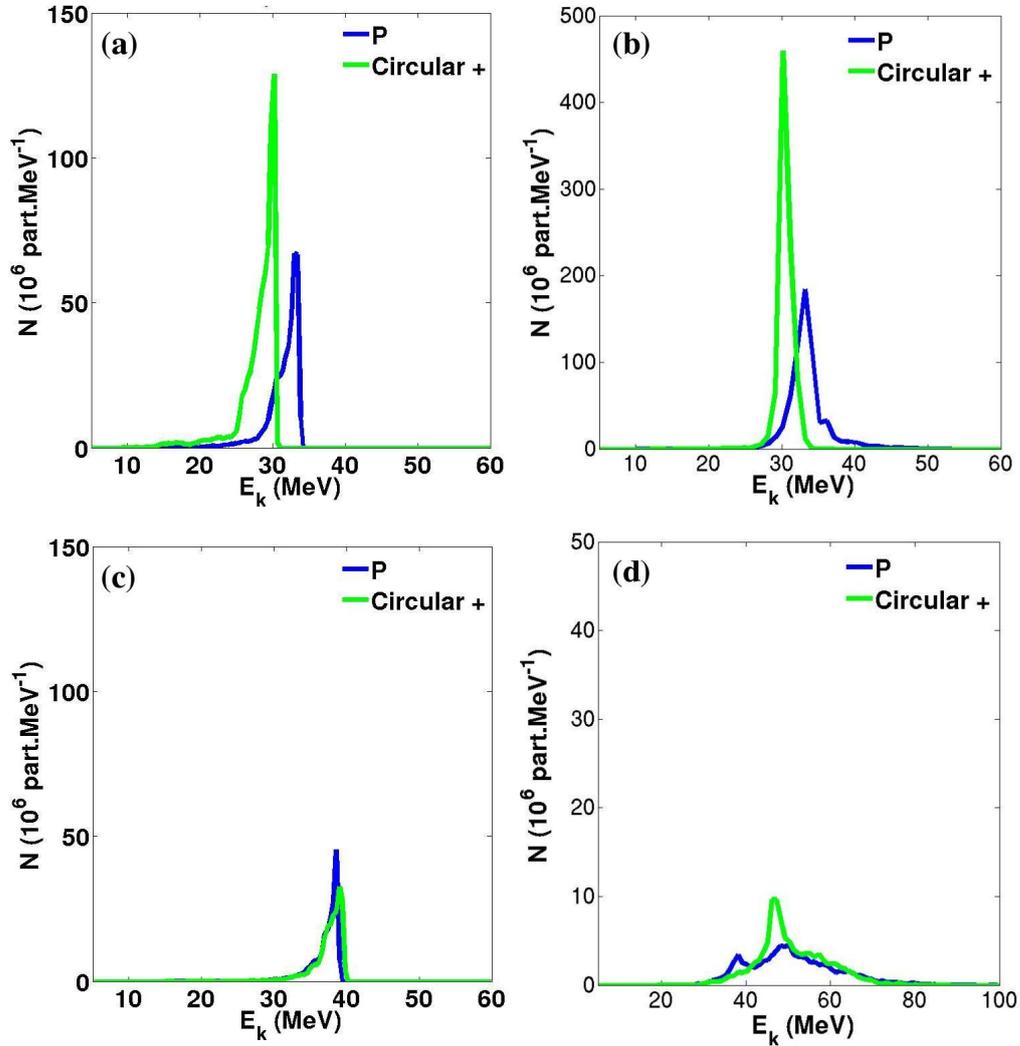


FIGURE 4.7 – Distribution en énergie des électrons dans la première bulle pour $a_0 = 3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ à $t = 7000$. $a_1 = 0.3$ a) simulations 2D b) simulations 3D. $a_1 = 0.05$ c) simulations 2D d) simulations 3D

Dans la section suivante, nous poursuivons notre analyse pour déterminer les situations dans lesquelles il est préférable d'utiliser l'injection froide ou le chauffage stochastique.

4.3 Injection froide ou chauffage stochastique ?

Afin d'étudier l'impact du chauffage stochastique dans le piégeage des électrons par l'onde de sillage, nous analysons seulement deux schémas de polarisations. L'injection froide avec la collision de deux lasers polarisés (C+) et le schéma qui met en jeu la collision de deux lasers polarisés (P). L'onde de battement permet aux électrons d'entrer dans la bulle mais en polarisation (P), le chauffage stochastique apporte à certains électrons une plus grande impulsion longitudinale, toutefois l'impulsion transverse est aussi affectée et cela n'est pas toujours favorable au piégeage de ces électrons.

4.3.1 Analyse phénoménologique avec des particules tests

Pour mieux appréhender les mécanismes en jeu lors du piégeage, nous examinons des trajectoires de particules tests pour les configurations de polarisation (P) et (C+). Une étude statistique du piégeage des électrons a été effectuée dans le cas à basse densité, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$, correspondant à la figure 4.7a. On considère 260 particules tests, celles-ci sont initialement au repos et sélectionnées dans un volume qui est plus petit que le volume d'interaction des deux ondes. Les trajectoires des particules piégées mettent en évidence une surface de piégeage différente suivant la configuration (P) ou (C+) (Fig.4.8). Parmi les particules tests sélectionnées, 16,8% sont piégées

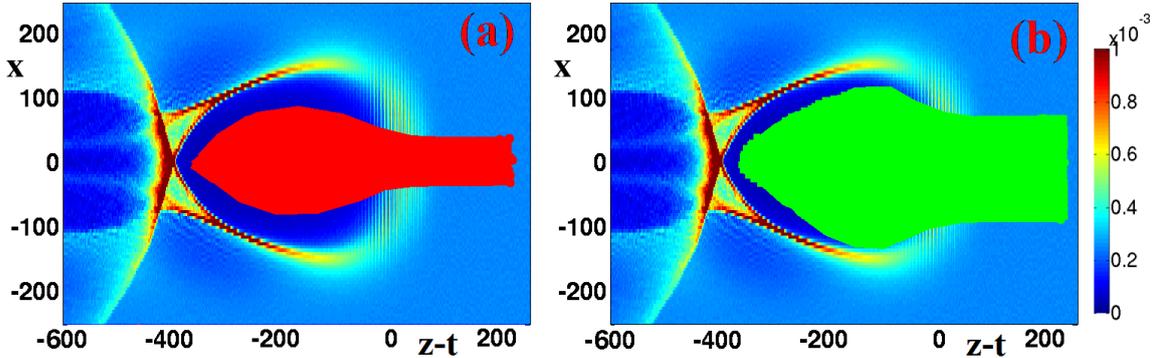


FIGURE 4.8 – Trajectoires des particules tests piégées dans la première bulle. a) Les particules rouges sont injectées en polarisation (P). b) Les particules vertes sont injectées en polarisation (C+). $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$

dans le cas de la polarisation (C+) et seulement 7,25% pour la polarisation (P).

On retrouve les mêmes proportions observées dans les distributions électroniques (Fig.4.7a).

La figure 4.9 montre la densité électronique du plasma dans l'espace des phases (p_z, p_x) pendant la collision entre les deux impulsions lasers pour les deux schémas de polarisations. On retrouve la "signature" du chauffage stochastique (voir chapitre 3) et on voit également que les moments longitudinaux des électrons injectés en polarisation (C+) sont bien inférieurs à ce que l'on obtient avec (P). On observe également que les impulsions transverses sont légèrement inférieures en polarisation (C+) par rapport à la polarisation (P).

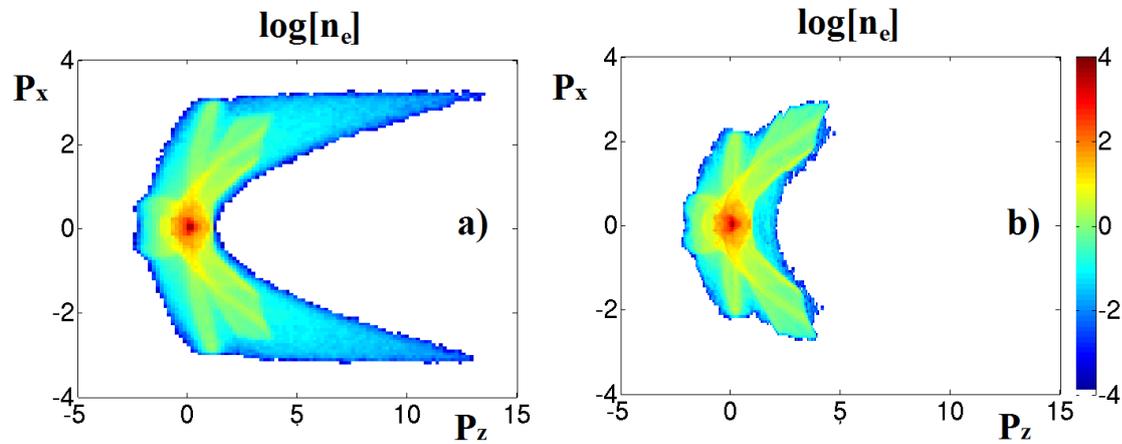


FIGURE 4.9 – Densité électronique n_e projetée dans l'espace (p_z, p_x) pour a) polarisation (P) et b) polarisation (C+). $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$

Isolons à présent deux particules tests, pour lesquelles on choisit des conditions initiales en position et en vitesse identiques. On soumet ces particules tests à des polarisations laser (P) et (C+). Les trajectoires obtenues (Fig.4.10) montrent que seule la particule verte soumise à des polarisations lasers (C+) est piégée.

Regardons maintenant pour ces deux particules, l'évolution de leur impulsion au cours de l'injection dans l'onde de sillage (Fig.4.11). Lors de l'injection, l'impulsion longitudinale est environ 4 fois supérieure en polarisation (P) par rapport à la polarisation (C+). Malgré ce gain d'impulsion, dû au chauffage stochastique, l'électron n'est pas piégé (particule rouge de la figure 4.10). On constate que cette impulsion est rapidement perdue à l'avant de l'onde de sillage (Fig.4.11a). Si on examine l'impulsion transverse (Fig.4.11b), l'électron en polarisations (P) acquiert, comme attendu,

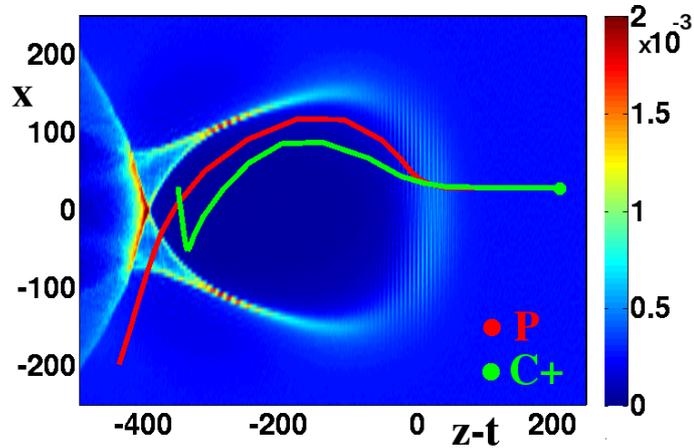


FIGURE 4.10 – Trajectoire d'une particule test dans différents cas : La particule rouge interagit avec deux ondes en polarisations (P). La particule verte interagit avec deux ondes en polarisations (C+). $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$

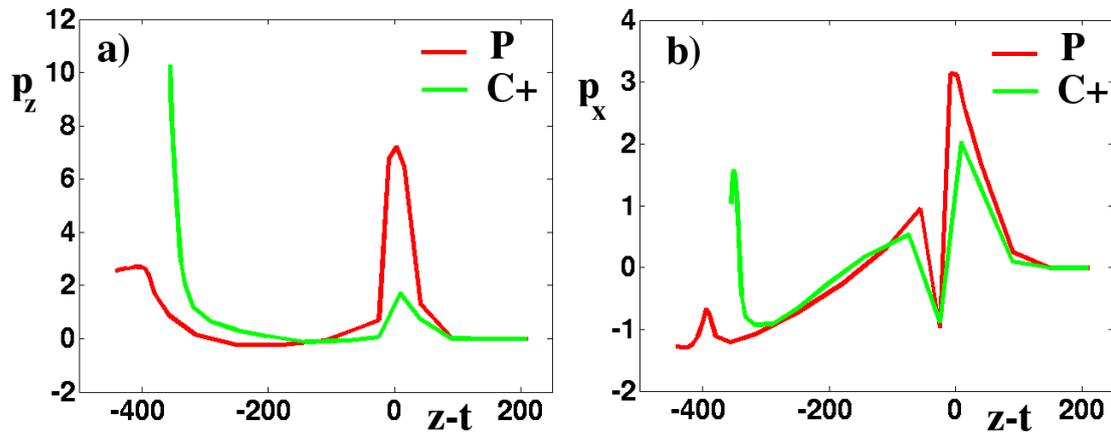


FIGURE 4.11 – Évolution dans l'onde de sillage de l'impulsion d'une particule test soumise à deux ondes en polarisations (P) ou (C+). $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$. Impulsion a) longitudinale et b) transverse

une impulsion plus importante que dans le cas (C+). Ce gain d'impulsion transverse à l'entrée de l'onde de sillage, oblige la particule à suivre une trajectoire qui ne lui permet pas d'obtenir l'impulsion longitudinale suffisante pour être piégée à l'arrière.

Ce mécanisme permet d'expliquer pourquoi la surface de piégeage, représentée par les particules tests (Fig 4.8), est plus grande lorsque l'on considère deux ondes en polarisations (C+).

Pour illustrer l'effet de la dynamique transverse, on trace les trajectoires de particules arrivant initialement aux bords de la bulle pour les deux schémas de polarisations (Fig.4.12). Les électrons soumis à des polarisations (P), sont violemment

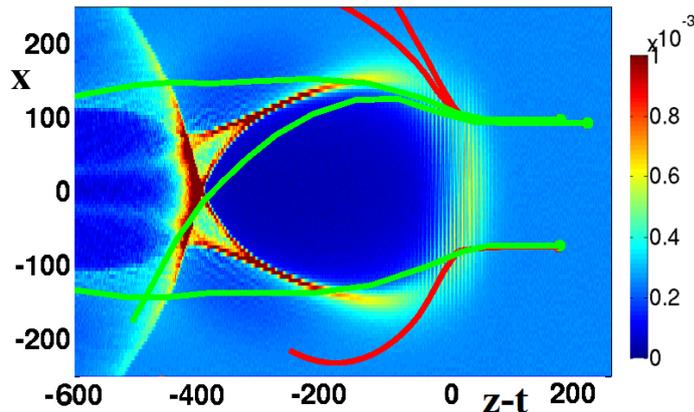


FIGURE 4.12 – Trajectoires des particules tests non piégées. Les particules rouges interagissent avec deux ondes en polarisation (P). Les particules vertes interagissent avec deux ondes en polarisation (C+). $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$

expulsés hors de la bulle. Ces électrons ne sont plus injectés dans l'onde de sillage. Cet effet est beaucoup moins marqué en polarisation (C+).

4.3.2 Influence des dimensions de l'onde de sillage

L'étude avec les particules tests a montré que les dimensions de l'onde de sillage jouent un rôle crucial dans le piégeage des électrons. La dimension transverse étant déterminée par le waist de l'onde principale, nous allons nous intéresser à la dimension longitudinale. Cette grandeur dépend exclusivement de la densité électronique et de l'intensité du laser créant l'onde de sillage (i.e la valeur du potentiel vecteur). Lu *et al.* [Lu 2006] ont montré que le rayon longitudinal de l'onde de sillage est donné par :

$$R = \frac{2}{k_0} \sqrt{\frac{a_0 n_c}{n_e}} \quad (4.6)$$

D'après les simulations que nous avons effectuées, cette formule reste valable tant que a_0 n'est pas trop grand ($a_0 < 10$).

Sur la figure 4.13, on trace d'un côté la densité électronique qui nous donne la forme de l'onde de sillage et de l'autre le champ électrique E_z responsable de l'accélération des électrons dans le sens de propagation. L'onde de sillage est divisée en deux régions. Une région accélératrice et une région décélératrice suivant la valeur de E_z . Rappelons que le chauffage stochastique se produit lorsqu'un électron se trouve

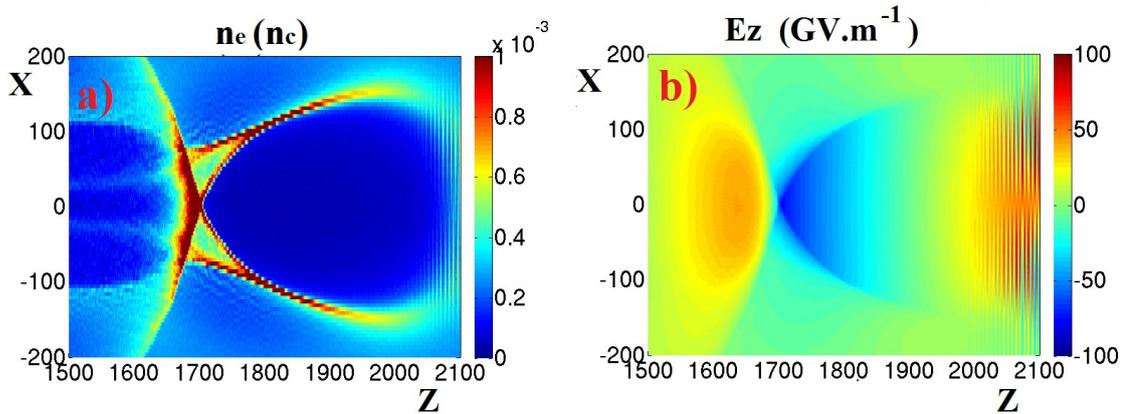


FIGURE 4.13 – a) Densité électronique n_e et b) champ électrique E_z projetée dans l'espace (z, x) pour $a_0 = 3$, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ en polarisation (P) à $t = 2400$

en interaction avec deux ondes lasers contrepropagatives en polarisation (P). Dans le régime de la bulle, les impulsions lasers ont des durées très courtes de l'ordre de quelques dizaines de femtosecondes. Dans les simulations présentées précédemment nous avons utilisé des impulsions de $30 fs$. Suivant la dimension de l'onde de sillage, la zone d'interaction se situe plus ou moins à l'avant.

Sur la figure 4.14, on trace la densité électronique projetée dans l'espace (z, p_z) dans le cas faible densité. La bulle est très grande devant la taille de l'impulsion laser et on voit que le chauffage se produit à l'avant de l'onde de sillage. Les électrons perdent rapidement leur impulsion longitudinale à cause du champ électrique décélérateur. Dans ce cas, le chauffage stochastique réduit la charge piégée.

Comme le montre les figures 4.7a et 4.8, la polarisation (C+) permet de piéger une plus grande charge électrique, dans ce cas seule la force de battement intervient lors de l'injection. Un nombre plus important d'électrons se trouvent dans l'onde stationnaire. L'onde de battement leur permet de traverser l'avant de la bulle et

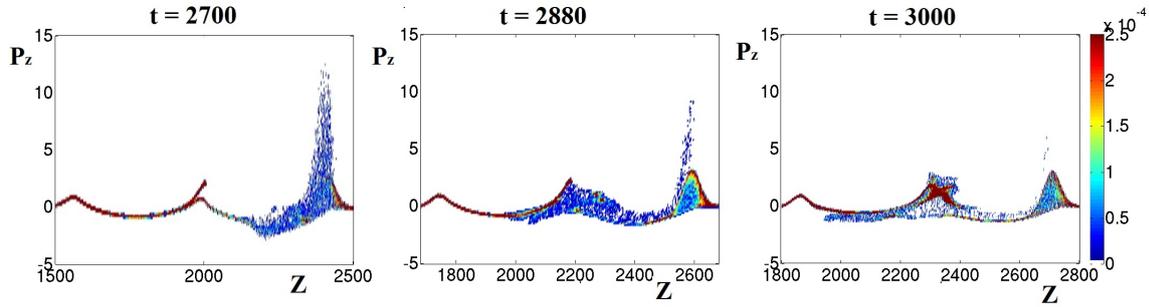


FIGURE 4.14 – Densité électronique n_e projetée dans l'espace (z, p_z) pour $a_0 = 3$, $a_1 = 0.5$ en polarisation (P) et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ à différents instants (collision à $t = 2600$)

d'arriver dans la zone accélératrice en gardant un léger gain d'impulsion.

Se placer à une densité plus élevée permet de réduire la taille de l'onde de sillage. Le chauffage stochastique se produit alors sur une plus grande proportion de la bulle et en particulier dans la partie accélératrice comme le montre la figure 4.15a. Dans

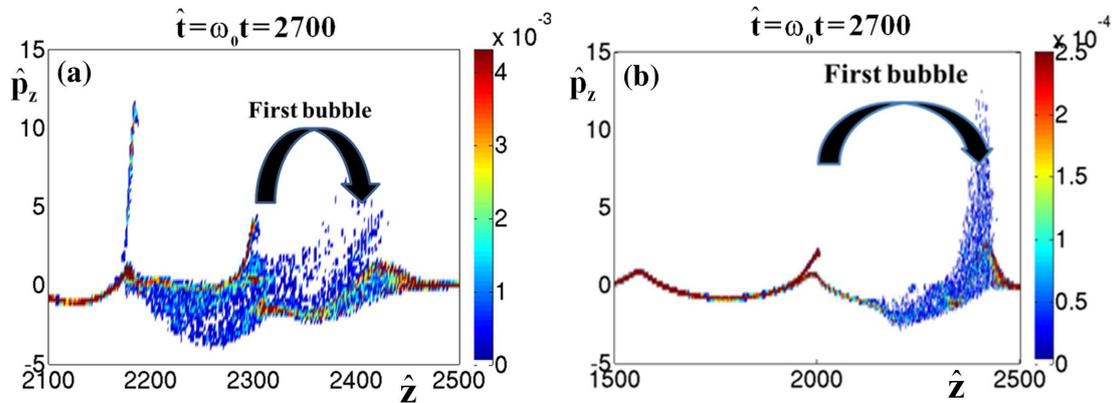


FIGURE 4.15 – Densité électronique n_e projetée dans l'espace (z, p_z) pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ en fin de collision ($t = 2700$) pour la polarisation (P) a) $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ b) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$

ce cas, la polarisation (P) permet de piéger un plus grand nombre d'électrons comme en atteste la figure 4.6b.

On peut également augmenter les durées des impulsions lasers pour agrandir la zone de chauffage stochastique (figure 4.16). Les distributions en énergie des électrons

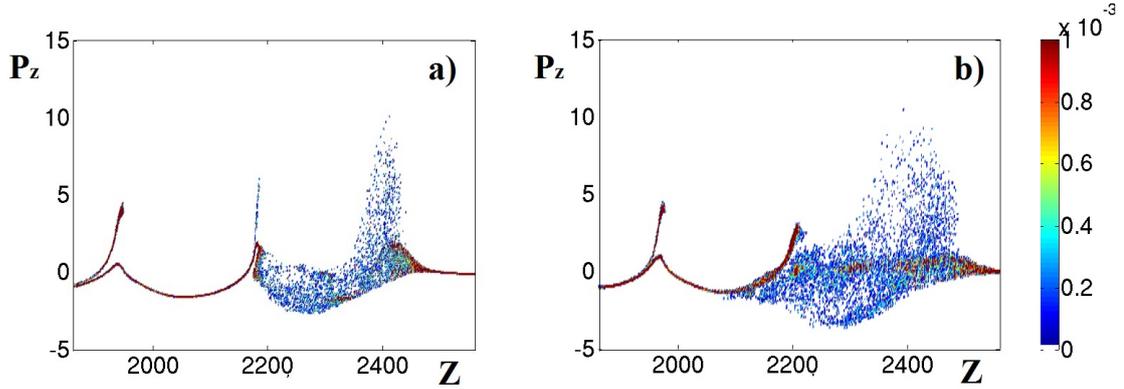


FIGURE 4.16 – Densité électronique n_e projetée dans l'espace (z, p_z) pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ en fin de collision ($t = 2700$) pour la polarisation (P) avec $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$
a) $\tau_0 = 30 fs$ b) $\tau_0 = 60 fs$

piégés (Fig.4.17) montrent qu'en utilisant une impulsion plus longue, la polarisation (P) permet de piéger plus de particules que la polarisation (C+). Toutefois, cela se produit au détriment de la qualité du faisceau accéléré qui perd son caractère quasi-mono-énergétique. C'est pourquoi on privilégie en général des impulsions plus courtes.

Il faut donc tenir compte non seulement, de la dimension de l'onde de sillage mais également de la longueur d'interaction entre les deux lasers. Cette longueur d'interaction indique dans quelle région de la bulle, les électrons vont être stochastiquement accélérés. On peut estimer cette longueur d'interaction par la moyenne des durées des impulsions τ_0 et τ_1 . Dans les situations considérées jusqu'à présent, les deux impulsions ont la même durée et ainsi on a :

$$L = \frac{c\tau_0 + c\tau_1}{2} = c\tau_0 \quad (4.7)$$

Considérer des impulsions plus longues et des densités plus élevées contribue à renforcer l'inhibition de l'onde de sillage provoquée par la collision des impulsions laser [Rechatin 2007].

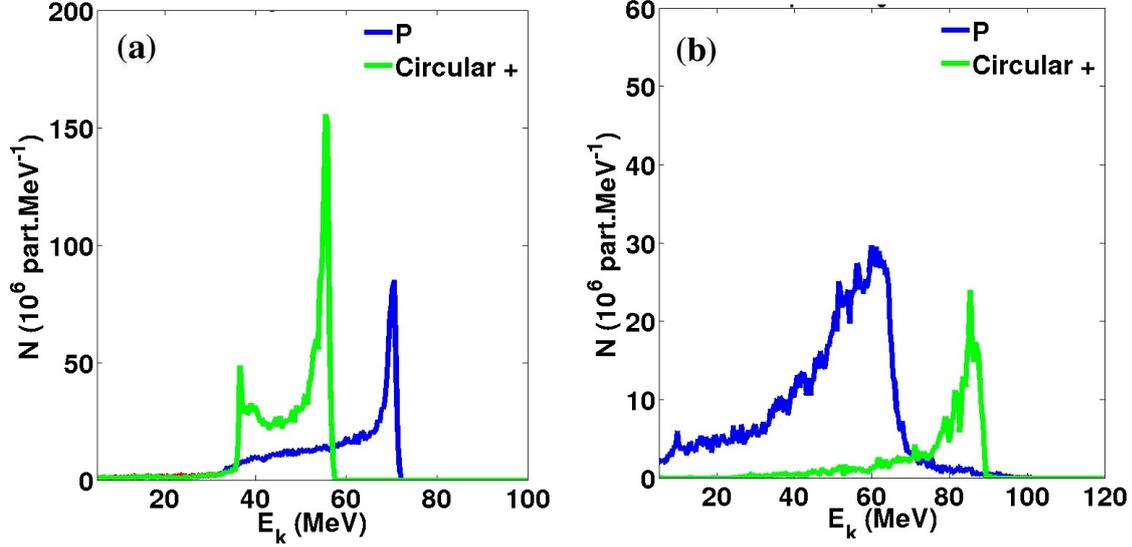


FIGURE 4.17 – Distributions en énergie des électrons piégés dans la première bulle pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ au temps $t = 7000$ (collision à $t = 2600$) pour la polarisation (P) avec $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ a) $\tau_0 = 30 fs$ b) $\tau_0 = 60 fs$

4.3.3 Inhibition de l'onde de sillage

Lorsque l'impulsion laser principale se propage dans le plasma, sa force pondéromotrice expulse les électrons et crée une séparation de charge. Les électrons expulsés oscillent à la fréquence plasma ce qui génère l'onde de sillage. En fonction des paramètres du laser et du plasma, l'amplitude de l'onde de sillage peut être plus ou moins grande. Lors de la collision, l'onde de battement et le chauffage stochastique (en polarisation (P) uniquement) vont perturber les trajectoires des électrons. La force de battement va piéger une partie des électrons dans une onde stationnaire de longueur d'onde $\lambda_0/2$. Le chauffage stochastique rend chaotique les trajectoires des électrons. Ainsi, le mouvement des électrons est différent par rapport à la situation où seule la force pondéromotrice les met en mouvement. Ces électrons n'oscillent pas avec la même phase et la même amplitude que ceux qui ne sont pas affectés par la collision. Par conséquent, une onde plasma inhibée voire détruite est générée dans la zone de collision [Rechatin 2007]. La longueur et la largeur du volume de collision correspondent respectivement à $(c\tau_0)$ et au minimum des deux waists. L'inhibition de l'onde de sillage est plus importante lorsque la région de collision devient comparable

à celle de l'onde de sillage et dès que a_1 est grand [Rechatin 2007].

Le champ électrique longitudinal est le témoin de l'inhibition de l'onde de sillage. Ce champ étant responsable du piégeage des électrons, ses modifications au cours de la collision seront déterminantes pour le nombre de particules piégées. Sur les figures 4.18 et 4.19, le champ électrique longitudinal E_z calculé sur l'axe de propagation ($r = 0$), est tracé au cours de l'injection pour deux valeurs de a_1 et pour les deux schémas de polarisations. Lorsque le potentiel vecteur de l'onde contrepropagative est faible

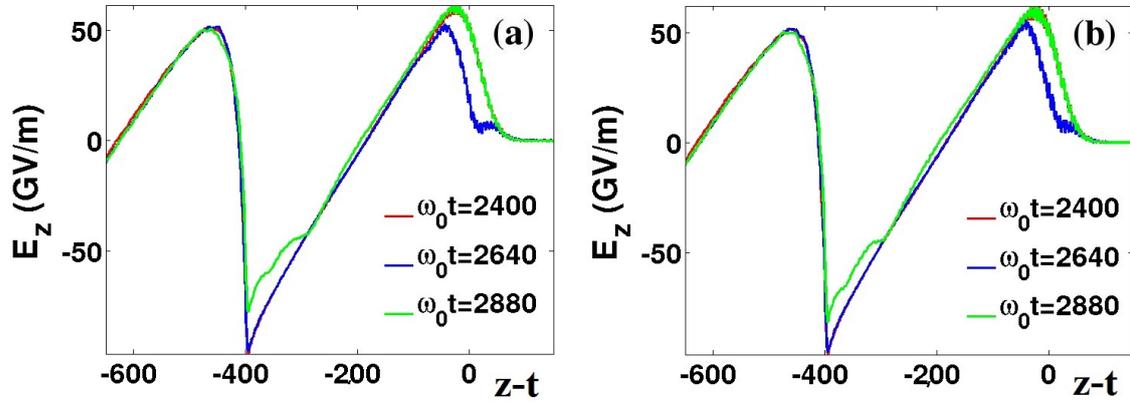


FIGURE 4.18 – Champ électrique E_z pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.1$ avant collision ($t = 2400$), pendant la collision ($t = 2640$) et après la collision ($t = 2880$) pour $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) polarisations (C+) et b) polarisations (P)

($a_1 \leq 0.1$), l'onde de sillage n'est quasiment pas inhibée pendant la collision (Fig.4.18 à $t = 2640$). Pour une faible intensité de l'onde contrepropagative, l'inhibition ne dépend pas de façon significative de la polarisation.

Si on considère un potentiel vecteur du laser contrepropagatif plus élevé, l'onde de sillage est plus inhibée ce qui se traduit par un champ électrique E_z plus faible à l'avant de l'onde de sillage pendant la collision (Fig.4.19a à $t = 2640$). En comparant les deux schémas de polarisations, l'inhibition de l'onde de sillage est moins importante en polarisation (P) (Fig.4.19b). Lorsque que l'onde de sillage est de faible amplitude (rayon longitudinal faible), l'inhibition affecte la totalité du sillage pendant la collision et le champ électrique est quasi nul (Fig.4.20a). En présence de chauffage stochastique, moins d'électrons sont piégés dans l'onde de battement et l'inhibition de l'onde de sillage est moins importante qu'en polarisation (C+) (Fig.4.20b) .

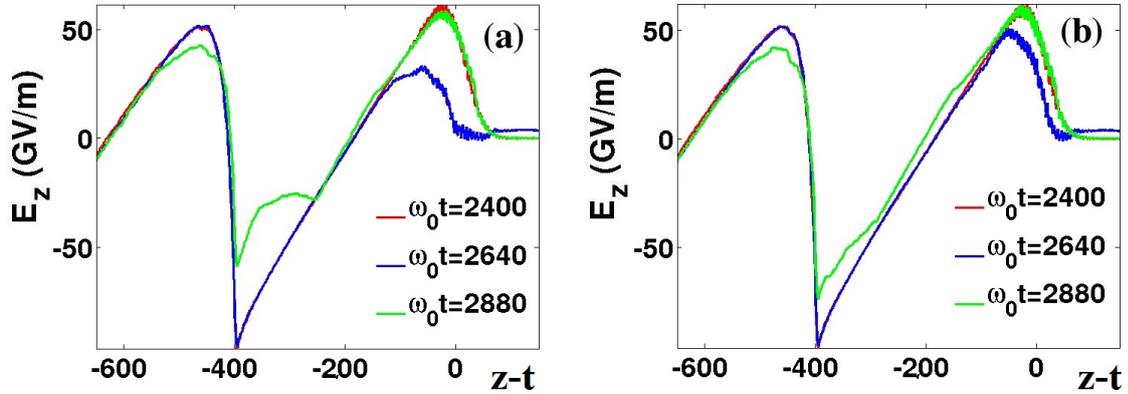


FIGURE 4.19 – Champ électrique E_z pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ avant collision ($t = 2400$), pendant la collision ($t = 2640$) et après la collision ($t = 2880$) pour $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) polarisations (C+) et b) polarisations (P)

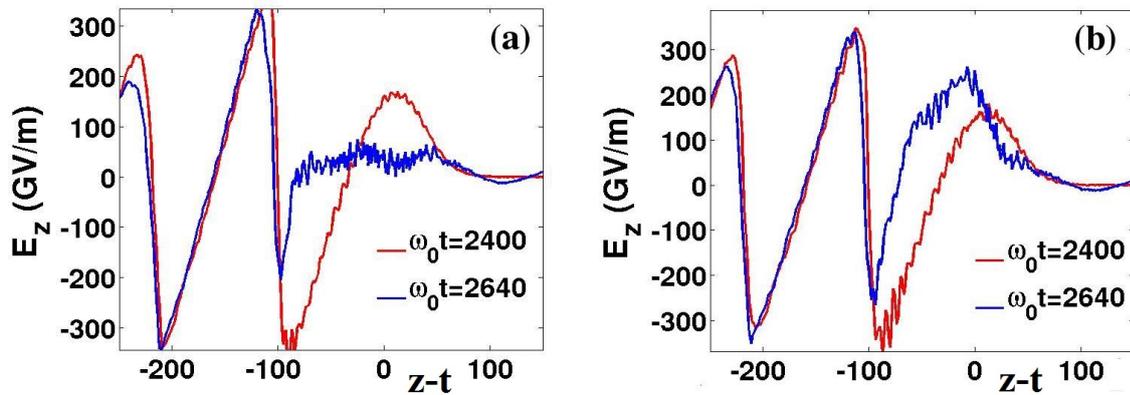


FIGURE 4.20 – Champ électrique E_z pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ avant collision ($t = 2400$) et pendant la collision ($t = 2640$) pour $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ pour a) polarisations (C+) et b) polarisation (P)

L'inhibition de l'onde de sillage augmente avec la durée de collision des impulsions lasers. Si on reprend le cas présenté dans la figure 4.17b où nous avons utilisé des impulsions longues de durée $\tau_0 = 60 fs$, on peut voir que le fait de se placer dans le régime de chauffage stochastique, diminue l'inhibition de l'onde de sillage (Fig. 4.21).

Examinons à présent l'espace des phases (z, p_z) , on peut voir qu'en polarisation (C+),

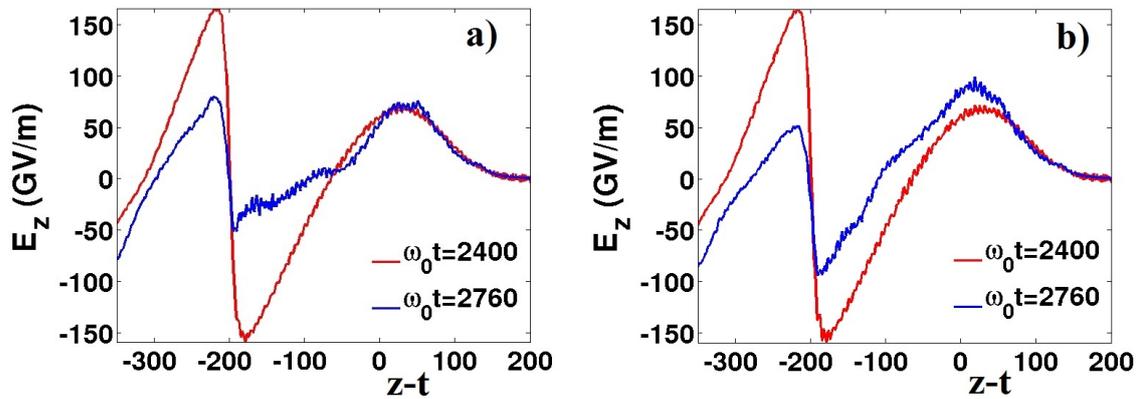


FIGURE 4.21 – Champ électrique E_z pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ avant collision ($t = 2400$) et pendant la collision ($t = 2760$) pour $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ et $\tau_0 = 60 fs$ pour a) Polarisation (C+) et b) Polarisation (P)

les électrons injectés par l'onde de battement traversent la bulle sans être piégés par l'onde de sillage (Fig.4.22). En polarisation (P), les électrons accélérés par le

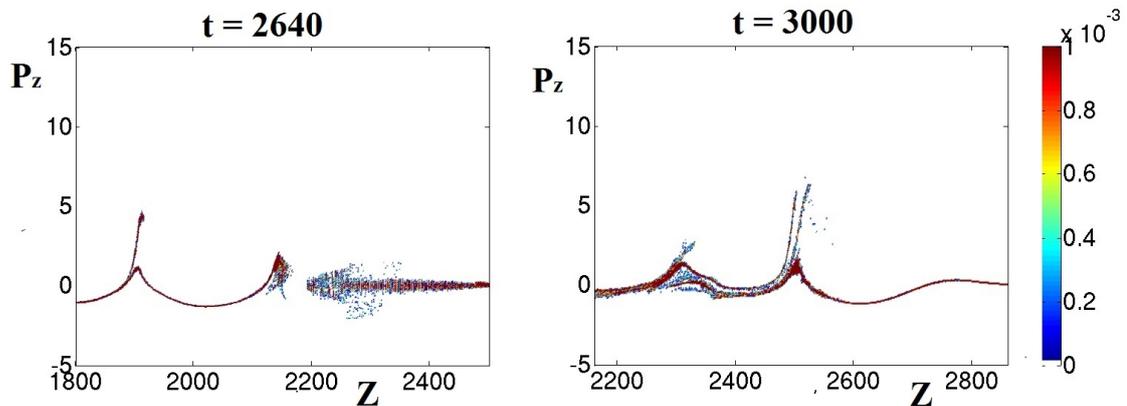


FIGURE 4.22 – Densité électronique n_e projetée dans l'espace (z, p_z) pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ à différents instants après la collision ($t = 2600$) pour la polarisation (C+) avec $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ et $\tau_0 = 60 fs$

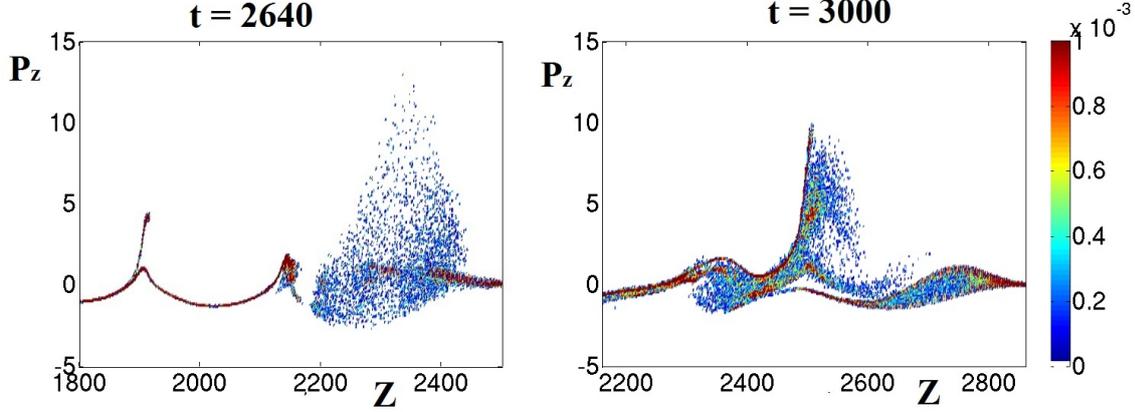


FIGURE 4.23 – Densité électronique n_e projetée dans l'espace (z, p_z) pour $a_0 = 3$ et $a_1 = 0.5$ à différents instants après la collision ($t = 2600$) pour la polarisation (P) avec $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ et $\tau_0 = 60 fs$

chauffage stochastique sont piégés malgré l'inhibition du sillage (Fig.4.23).

L'inhibition de l'onde de sillage augmente avec l'intensité de l'onde d'injection mais son impact sur le piégeage dépend du rapport entre la dimension de l'onde de sillage et celle des impulsions lasers. Cela nous permet d'introduire un nouveau paramètre qui va simplement mesurer le rapport entre la longueur d'interaction des deux lasers et le rayon longitudinal de l'onde de sillage [Rassou 2014, Bourdier 2013].

$$\rho = \frac{\omega_0 \tau_0}{2} \sqrt{\frac{n_e}{a_0 n_c}} \quad (4.8)$$

Dans la partie suivante, nous quantifions l'influence de ce paramètre sur la charge piégée par injection optique dans l'onde de sillage laser.

4.4 Impact du chauffage stochastique en fonction du paramètre ρ

Jusqu'à présent, nous avons vu que la charge piégée dépend de la longueur de collision $L = c\tau_0$, du rayon longitudinal de la bulle (Eq.4.6) et du schéma de polarisations. Nous allons vérifier que le paramètre ρ permet de piloter la charge piégée dans l'onde de sillage. Nous étudierons les configurations de polarisations (P) et (C+).

Dans ces deux schémas, les électrons entrent par l'avant du sillage grâce à une onde de battement créée par la collision des deux impulsions lasers contrepropagatives.

4.4.1 Mise en évidence du paramètre ρ

Nous fixons la valeur du potentiel vecteur de l'onde principale $a_0 = 3$ et on étudie l'influence des deux autres paramètres liés à ρ à savoir la densité n_e et la durée des impulsions τ_0 . Les durées et les waists sont choisis afin de satisfaire la condition nécessaire à l'obtention d'une cavité accélératrice dans le régime de la bulle. Cette condition s'écrit $\tau_0 \leq w_0/c$ [Gordienko 2005, Pukhov 2006]. En considérant des valeurs élevées du waist, on peut diminuer les effets transverses sur le piégeage. On choisit $w_0 = 18 \mu m$ et $w_1 = 31 \mu m$. Ainsi, ρ est le seule paramètre déterminant quelle schéma de polarisation mène à une charge piégée plus importante. Nous avons considéré différentes températures pour la distribution électronique initiale comprise entre 0 et 100 eV. Aucun effet significatif sur la charge piégée n'a été observé. Ainsi, nous n'allons présenter que des résultats de simulations obtenus avec une température électronique de 1 eV.

Nous effectuons une série de simulations en utilisant le code Calder 2D3V puis la même série avec le code radial avec décomposition de Fourier, Calder-Circ (Annexe A). On calcule la charge injectée dans la première bulle après la collision et une accélération sur $560 \mu m$.

Dans une première série de simulations, on garde $a_0 = 3$ et $\tau_0 = 30 fs$ et on fait seulement varier la densité (Fig.4.24). Lorsque $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ et $\rho = 1.34$, la charge piégée augmente avec a_1 en polarisation (P) (Fig.4.24a ou b). Pour $\rho > 1$, la longueur d'interaction est supérieure au rayon longitudinal de l'onde de sillage et l'inhibition de l'onde de sillage augmente avec a_1 . Cela explique pourquoi la charge piégée stagne puis diminue en polarisation (C+). En polarisation (P), une partie des électrons ne sont pas piégés dans l'onde de battement et subissent du chauffage stochastique. Ces électrons sont plus facilement piégés.

Dans la situation intermédiaire, $n_e = 2.5 \times 10^{-3} n_c$ et $\rho = 1.02$, les deux polarisations donnent à peu près le même résultat (Fig.4.24c ou d). A plus faible densité, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $\rho = 0.34$, la situation est clairement favorable à l'injection froide (Fig.4.24e ou f). De nombreux électrons sont déphasés par la force de battement en polarisation (C+) et le chauffage stochastique diminue le piégeage en polarisation (P). Les électrons accélérés stochastiquement à l'avant de l'onde de sillage, gagnent une impulsion transverse plus importante ce qui rend le piégeage plus difficile.

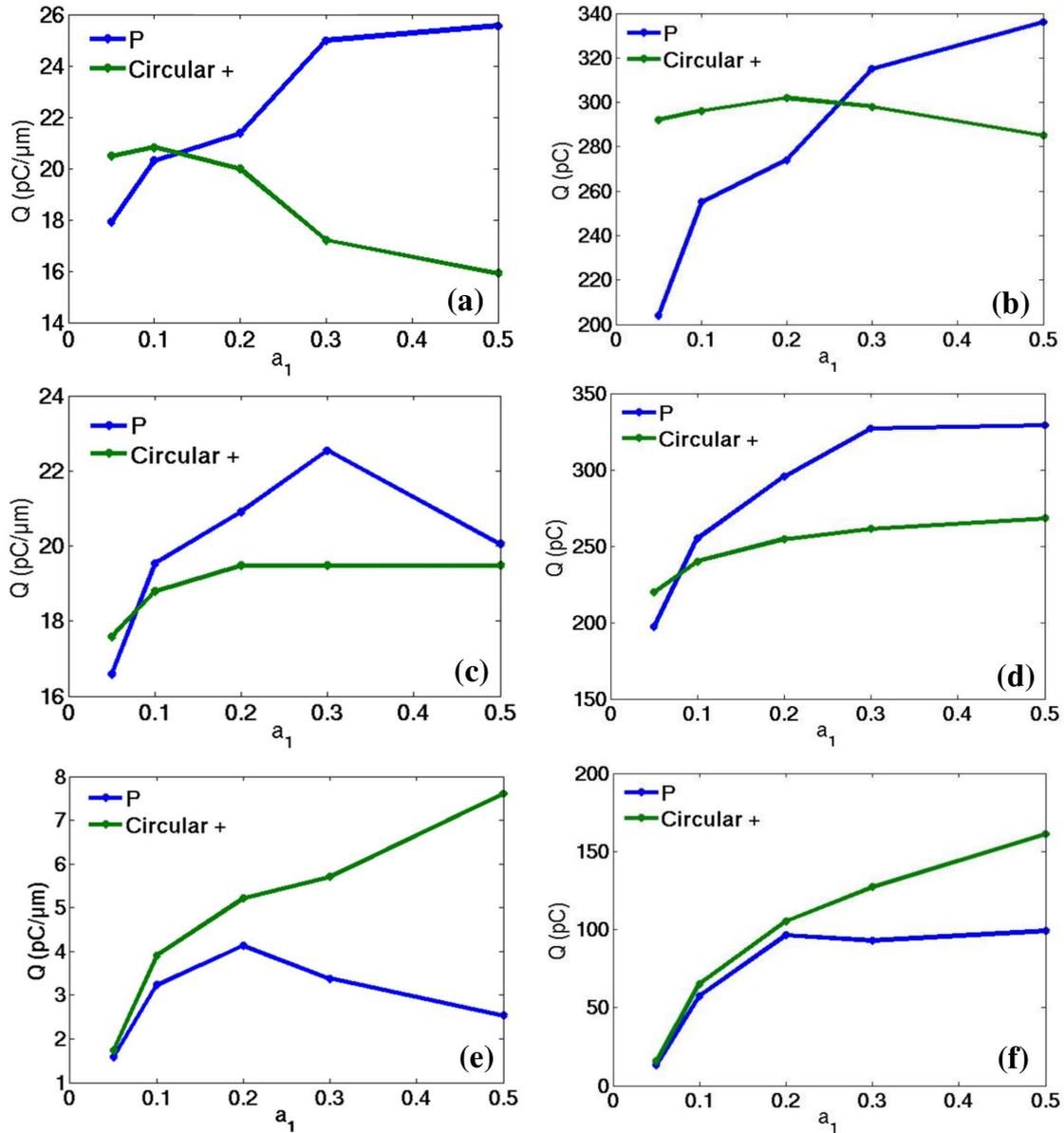


FIGURE 4.24 – Charge électronique piégée dans la première bulle en fonction de a_1 pour $a_0 = 3$ à $t = 7000$. Pour a) et b) $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ ($\rho = 1.34$), c) et d) $n_e = 2.5 \times 10^{-3} n_c$ ($\rho = 1.02$), e) et f) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ ($\rho = 0.32$). Les figures a, c et e sont des résultats de simulations 2D avec CALDER. Les figures b, d et f sont des résultats de simulations 3D avec CALDER-Circ

L'importance du paramètre ρ est soulignée en regardant l'influence de la durée des impulsions (Fig.4.25). Lorsque $\tau_0 = 60 fs$ et $\rho > 1$, la charge piégée par l'onde de sillage augmente avec a_1 en considérant le schéma (P) (Fig.4.25b) de la même manière que dans le cas haute densité et pour des durées d'impulsions plus courtes (Fig.4.24a). Si on compare les distributions des électrons piégés pour différentes du-

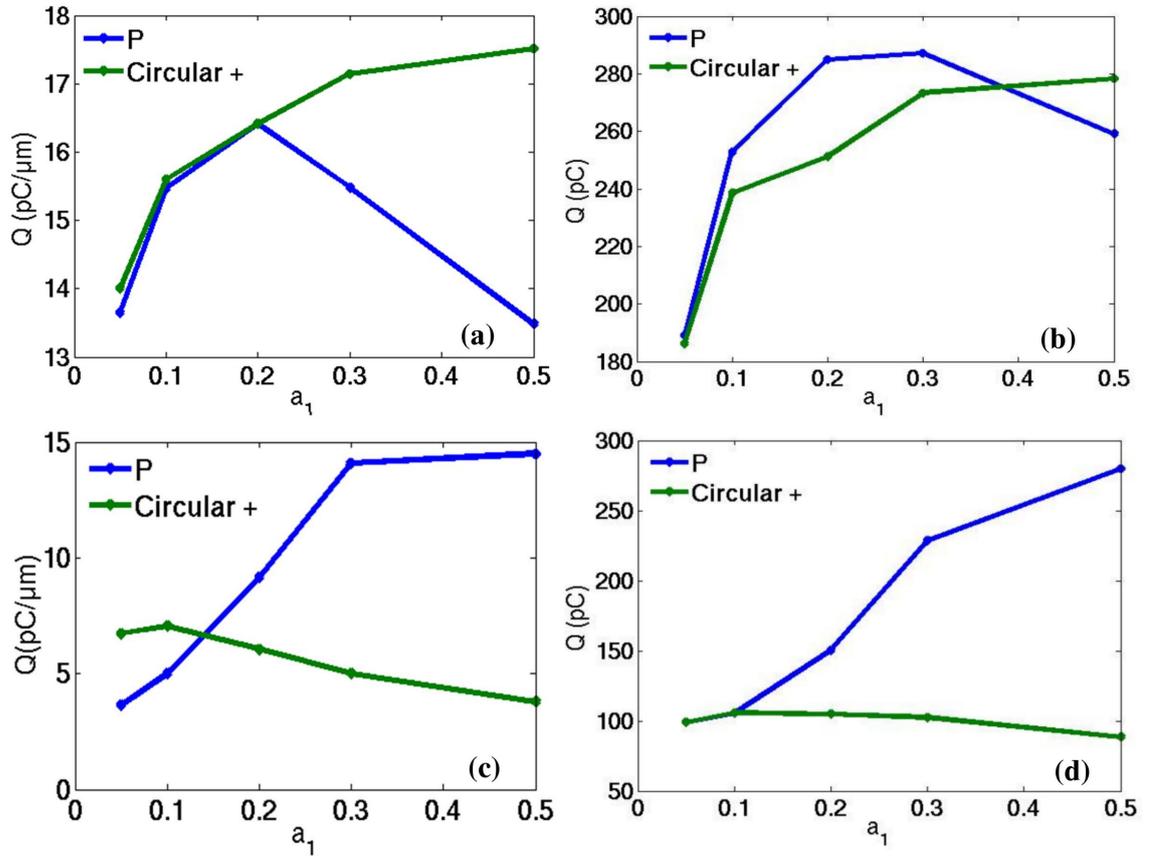


FIGURE 4.25 – Charge électronique piégée en fonction de a_1 pour $a_0 = 3$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ à $t = 7000$. Pour a) et b) $\tau_0 = 30 fs$, ($\rho = 0.65$) c) et d) $\tau_0 = 60 fs$, ($\rho = 1.29$). Les figures a) et c) sont des résultats de simulations 2d avec CALDER. Les figures b) et d) sont des résultats de simulations 3D avec CALDER-Circ

rées d'impulsion laser, l'avantage est aux impulsions courtes qui permettent d'obtenir des faisceaux de meilleures qualités (Fig.4.26).

Les résultats de simulations 3D montrent un bon accord avec les simulations 2D.

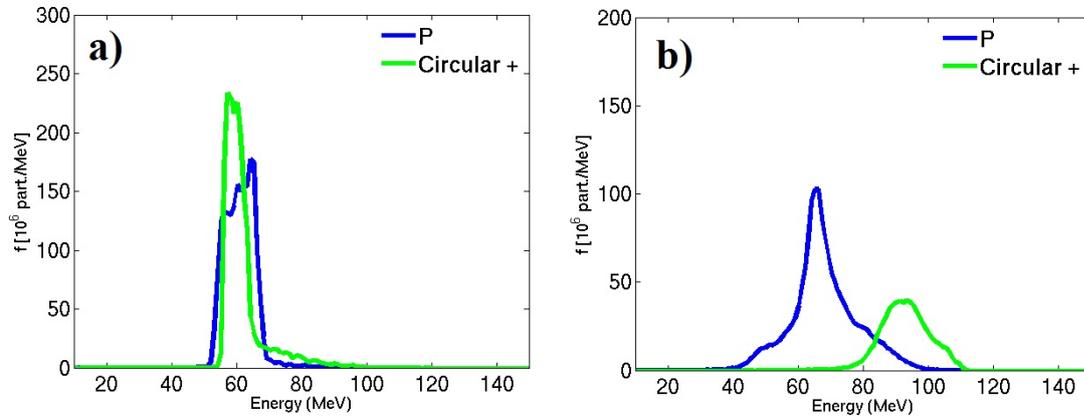


FIGURE 4.26 – Distributions en énergie des électrons piégés dans la première bulle en fonction de la polarisation pour $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ à $t = 7000$ avec le code PIC Calder-Circ a) $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, ($\rho = 0.65$) b) $\tau_0 = 60 \text{ fs}$, ($\rho = 1.29$)

Quelques différences peuvent être observées pour $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ (Fig.4.25a et b) qu'on peut attribuer aux effets 3D intervenant sur le champ électrique longitudinal dans la cavité accélératrice.

4.4.2 Validité de ρ comme paramètre de similarité

Le paramètre ρ peut être écrit sous la forme suivante $\rho/L = k_0\sqrt{S}$ avec $S = n_e/(a_0n_c)$. Le paramètre S a été introduit par Pukhov *et al.* [Pukhov 2006] comme un paramètre de similarité. Dans l'étude développée dans l'article [Pukhov 2006], cette similarité porte sur l'évolution d'un paquet d'électrons piégés par auto-injection. Cela signifie que ρ peut être assimilé à un paramètre de similarité dans le cas où L et k_0 sont des constantes. Sur la figure 4.27, on regarde l'évolution de la charge piégée avec a_1 pour une valeur de ρ mais pour des valeurs de τ_0 , n_e et S différentes. On peut compléter la figure 4.27 avec les figures 4.24a ($S = 0.00143$) et 4.25c ($S=0.00033$). Ainsi, on compare différentes situations où ρ est constant mais avec des valeurs de S différentes. Le paramètre ρ évalue l'impact du chauffage stochastique et l'inhibition de l'onde de sillage. Lorsque ρ est constant, les résultats sont similaires même pour des valeurs de S différentes (Fig.4.27). Pour une valeur de $\rho < 1$ et des valeurs de S différentes, les résultats sont également similaires (la figure 4.28 est à comparer avec 4.25a où $S = 0.00033$).

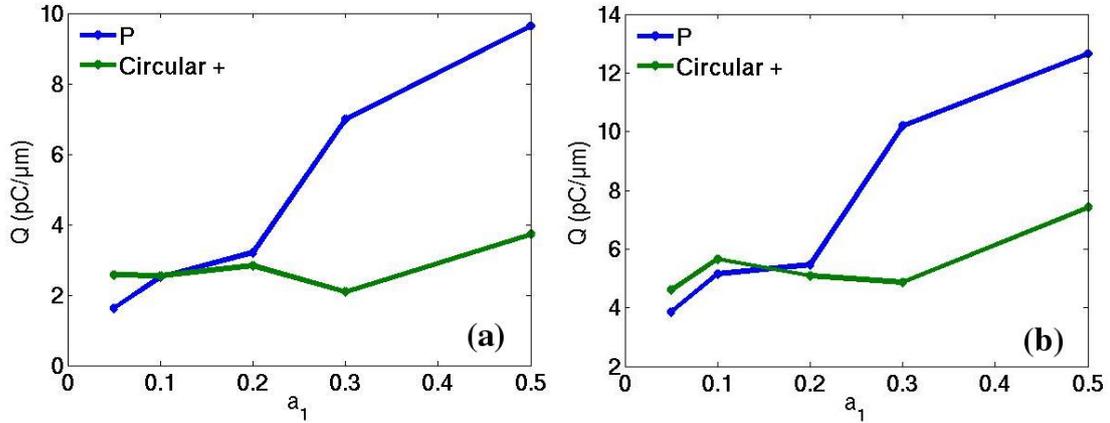


FIGURE 4.27 – Charge électronique piégée en fonction de a_1 pour $\rho = 1.34$ à $t = 7000$ avec a) $a_0 = 2$ et $n_e = 2.9 \times 10^{-3} n_c$ et $\tau_0 = 30 \text{ fs}$ ($S = 0.00145$) b) $a_0 = 2$ et $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ et $\tau_0 = 24.5 \text{ fs}$ ($S = 0.00215$)

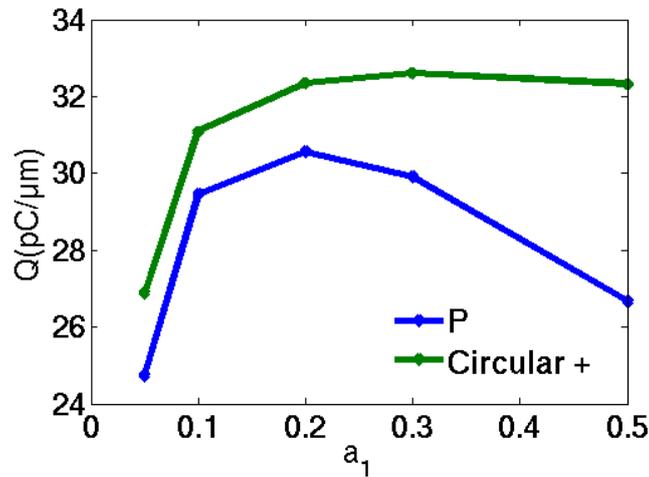


FIGURE 4.28 – Charge électronique piégée en fonction de a_1 pour $\rho = 0.65$ à $t = 7000$ avec $a_0 = 3$ et $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ et $\tau_0 = 15 \text{ fs}$ ($S = 0.00143$)

Dans le contexte de l'injection optique, le paramètre S ne permet pas de déterminer toutes les situations physiques similaires. Le paramètre ρ semble plus approprié pour jouer ce rôle et permet donc de déterminer les situations (τ_0 , n_e et a_0) où tel

schéma de polarisations sera le plus efficace.

4.4.3 Influence du waist du lasers

Nous avons regardé l'influence des paramètres comme la densité, le potentiel vecteur et la durée des lasers. D'autres paramètres lasers comme la fréquence des lasers ou les waists des lasers peuvent être modifiés de façon à améliorer l'injection des électrons. Prendre des waists différents pour l'onde principale permet de faire varier d'une part la force de battement et de l'autre le chauffage stochastique. Cela permet également de considérer un volume d'électrons injecté dans la bulle différent. On montre que l'augmentation du waist du laser principal augmente la charge pié-

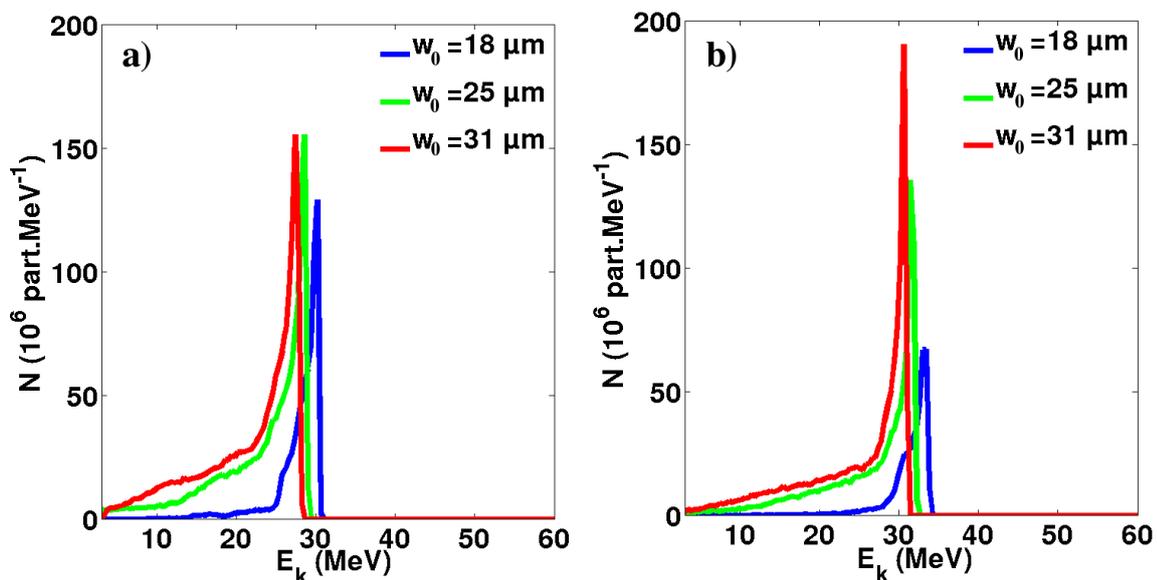


FIGURE 4.29 – Distributions en énergie des électrons piégés en fonction de la polarisation pour $a_0 = 3$, $a_1 = 0.3$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ à $t = 7000$ avec le code PIC Calder 2D pour différentes waists de l'onde laser principale a) polarisation (C+) b) polarisation (P)

gée dans nos simulations (Fig.4.29). Ce résultat est prévisible car le waist de l'onde contrepropagative, fixé à $w_1 = 31 \mu m$, nous permet d'accroître le volume de la région de collision en passant de $w_0 = 18 \mu m$ à $w_0 = 31 \mu m$. On peut ainsi gagner un facteur 3 sur la charge piégée dans l'onde de sillage. Toutefois, et comme attendu, le caractère

mono-énergétique du faisceau accéléré et nettement détérioré. Le comportement de la charge piégée en fonction du paramètre ρ reste conforme à l'analyse précédente, comme en atteste la figure 4.30 pour $w_0 = w_1 = 31 \mu m$. On retrouve une plus grande charge piégée en polarisation (C+) lorsque $\rho = 0.32$ et de même en polarisation P lorsque $\rho = 1.34$.

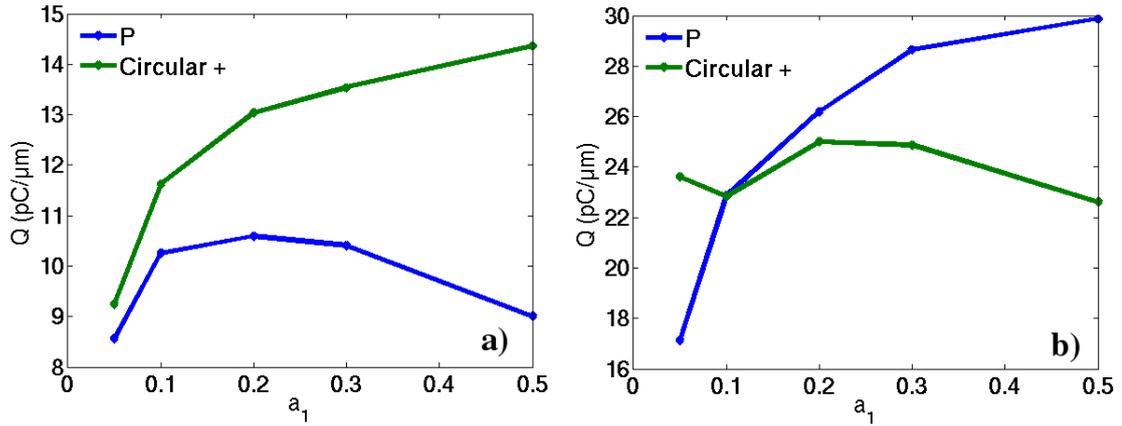


FIGURE 4.30 – Charges électroniques piégées en fonction de la polarisation pour $a_0 = 3$, $w_0 = 31 \mu m$ à $t = 7000$ avec le code PIC Calder 2D a) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ ($\rho = 0.32$) b) $n_e = 4.3 \times 10^{-3} n_c$ ($\rho = 1.34$)

4.5 Conclusion

Dans l'injection optique, une onde laser dite principale et créant une onde de sillage entre en collision avec une seconde onde contrepropagative, de plus faible intensité afin d'injecter des particules dans l'onde de sillage. Plusieurs combinaisons de polarisations sont considérées et chacune d'elles résulte en une force agissant sur les électrons lors de la collision des deux ondes lasers. Deux schémas de polarisations ont particulièrement attiré notre attention, les schémas notés (P) et (C+).

Dans la polarisation (C+) ou injection froide, la force de battement est capable de déphaser les électrons et l'injection se produit lorsque l'intensité de l'onde principale est au-dessus du seuil de l'injection froide. Lorsque les électrons sont piégés dans l'onde de battement, ils traversent la zone décélétratrice de l'onde de sillage et atteignent pour certains, la zone accélératrice du sillage.

En polarisation (P), la force de battement ainsi que d'autres termes rendent les trajectoires des électrons chaotiques et conduisent à une accélération stochastique lorsque l'intensité de l'onde contrepropagative excède le seuil de chauffage (typiquement $a_1 > 0.05$). Les électrons soumis au chauffage stochastique sont plus difficilement piégés lorsque ce chauffage se produit dans une zone trop réduite, typiquement quand la longueur de collision est petite comparée aux dimensions de la bulle. Dans cette situation, les électrons peuvent perdre leur accélération longitudinale dans la zone décélétratrice du sillage et s'échapper de la bulle notamment à cause d'une impulsion transverse trop importante. L'inhibition de l'onde de sillage diminue la charge piégée pour des valeurs élevées de a_1 lorsque la longueur d'interaction est comparable au rayon de la cavité. Le chauffage stochastique permet de diminuer son impact dans le schéma de polarisation (P).

Ainsi, le schéma de polarisations permettant de piéger le plus de particule va dépendre des paramètres du laser, durée et potentiel vecteur, et de la densité du plasma. On peut distinguer deux scénarios, l'un favorable à l'injection froide et l'autre au chauffage stochastique. Lorsque la longueur de collision est égale ou supérieure au rayon de la cavité, le schéma (P) avec chauffage stochastique est le plus favorable au piégeage. Tandis qu'à l'inverse, si la longueur de collision est plus petite que le rayon de la cavité, l'injection froide (i.e le schéma (C+)) est plus approprié pour le piégeage de particules. On introduit alors naturellement, le paramètre $\rho = L/R$ où L représente la longueur d'interaction entre les deux lasers et R est le rayon de la cavité [Rassou 2014, Bourdier 2013]. En utilisant les résultats de simulations PIC, nous avons pu montrer la pertinence de ce paramètre. Ainsi lorsque $\rho < 1$, l'injection froide domine alors que pour $\rho > 1$, c'est l'injection avec chauffage stochastique qui permet de piéger plus d'électrons.

Cependant, les faisceaux d'électrons injectés par onde de battement sont généralement de meilleures qualités (émittance faible, faisceau mono-énergétique) [Davoine 2008, Davoine 2010b] que ceux injectés par chauffage stochastique. Les situations où l'injection froide domine ($\rho < 1$) peuvent être préférées afin d'obtenir des faisceaux de meilleures qualités.

Troisième partie

Accélération d'électrons par onde de
sillage laser en plasma magnétisé

Influence d'un champ magnétique sur une onde de sillage créée par laser dans le régime de la bulle

Sommaire

5.1	Introduction - Ondes dans les plasmas magnétisés	142
5.1.1	Propagation parallèle - rotation Faraday	144
5.1.2	Propagation perpendiculaire - résonance hybride haute	145
5.2	Modélisation de l'onde de sillage créée par laser en plasma magnétisé	146
5.2.1	Modification du modèle analytique	146
5.2.2	Calcul du champ magnétique créé par l'onde de sillage laser	150
5.2.3	Importance de la géométrie 3D	154
5.2.4	Comparaison du modèle avec des simulations PIC	157
5.3	Génération de champ magnétique dans l'onde de sillage	162
5.3.1	Caractéristiques du champ magnétique auto-généré	162
5.3.2	Explication par la loi de Lenz-Faraday	164
5.3.3	Rétroaction du champ magnétique auto-généré	167
5.4	Conclusion	170

Dans ce chapitre, l'influence d'un champ magnétique homogène initialement appliqué au plasma dans le cadre de l'accélération par onde de sillage est étudiée. Plus particulièrement, on examine l'influence sur la création de l'onde de sillage. Dans le chapitre 2, nous avons montré comment une onde de sillage créée par un laser se forme dans le régime de la bulle. L'application d'un champ magnétique change sensiblement la forme de l'onde de sillage et les champs électromagnétiques à l'intérieur. On met en évidence la génération d'un champ magnétique de même direction que celui du champ appliqué à l'arrière de la bulle. Un courant hélicoïdal sur la surface

de l'onde de sillage en est la cause. Dans une première section, une introduction sur les ondes dans les plasmas magnétisés est présentée. Dans une deuxième section, le modèle développé dans le chapitre 2 est modifié afin d'étudier l'effet d'un champ magnétique longitudinal appliqué. Nous verrons qu'un traitement rigoureux de ce scénario physique requiert un formalisme 3D, tant du point de vue théorique que numérique. Enfin dans une troisième section, les principales caractéristiques du champ magnétique auto-généré à l'arrière de l'onde de sillage sont exposées.

5.1 Introduction - Ondes dans les plasmas magnétisés

En appliquant un champ magnétique dans le plasma, le milieu devient anisotrope c'est à dire que les caractéristiques des ondes vont dépendre de la direction de propagation. En négligeant les effets thermiques et en prenant une perturbation en onde plane sous la forme $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, l'équation du mouvement des électrons linéarisée s'écrit :

$$i\omega m_e \mathbf{v}_1 = -e (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (5.1)$$

où \mathbf{B}_0 est le champ magnétique appliqué. Dans l'équation 5.1, on considère que chaque grandeur f peut être mise sous la forme $f = f_0 + f_1$ où f_0 est la partie non perturbée et f_1 la partie perturbée. En multipliant l'équation 5.1 par $-en_e$ où n_e est la densité électronique, on obtient l'équation sur le courant \mathbf{J}_{e1} :

$$i\omega \mathbf{J}_{e1} = \varepsilon_0 \omega_{pe}^2 \mathbf{E}_1 - \omega_{ce} \mathbf{J}_{e1} \times \mathbf{b}, \quad (5.2)$$

où $\mathbf{J}_{e1} = -en_e \mathbf{v}_1$ et nous avons introduit l'expression de la fréquence cyclotronique électronique $\omega_{ce} = eB_0/m_e$, la fréquence plasma électronique ω_{pe} et $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/\|\mathbf{B}_0\|$. En supposant que le champ magnétique appliqué est de la forme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, la perturbation \mathbf{J}_{e1} du courant se réécrit [Rax 2005, Gurnett 2005] :

$$\mathbf{J}_{e1} = -i\omega \varepsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \begin{bmatrix} 1 & +i\frac{\omega_{ce}}{\omega} & 0 \\ -i\frac{\omega_{ce}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}_1 = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (5.3)$$

où le tenseur de conductivité est noté $\overline{\overline{\sigma}}$.

L'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \left(\frac{\mathbf{J}_e}{i\omega} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \right), \quad (5.4)$$

et l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (5.5)$$

où \mathbf{H} est l'intensité magnétique (à la différence de \mathbf{B} , il s'exprime en $A.m^{-1}$). En combinant les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday, on obtient l'équation de propagation du champ électrique :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (5.6)$$

où \mathbf{k} est le vecteur d'onde et $\bar{\bar{\epsilon}}$ est le tenseur de permittivité diélectrique, défini par $\bar{\bar{\epsilon}} = I - \frac{i\bar{\sigma}}{\epsilon_0 \omega}$ où I est le tenseur identité et $\bar{\sigma}$ est donné par l'équation 5.3.

On considère à présent le cas particulier d'un vecteur d'onde se propageant dans le plan zOx et on pose $\mathbf{N} = c\mathbf{k}/\omega$. On définit l'angle θ entre le vecteur d'onde \mathbf{k} et \mathbf{B} , on a alors : $N_z = N \cos \theta$ et $N_x = N \sin \theta$.

L'équation 5.6 se réécrit en fonction de \mathbf{N} sous la forme :

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}_1) + \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (5.7)$$

Le produit vectoriel $\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}_1)$ peut se reformuler comme le produit d'un tenseur et du vecteur champ \mathbf{E}_1 . Ainsi l'équation 5.7 peut se mettre sous la forme $\bar{\bar{M}} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ où $\bar{\bar{M}}$ est le tenseur défini par :

$$\bar{\bar{M}} = \begin{bmatrix} \kappa_1 - N^2 \cos^2 \theta & -i\kappa_2 & N^2 \cos \theta \sin \theta \\ i\kappa_2 & \kappa_1 - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \kappa_3 - N^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Les expressions de κ_1 , κ_2 et κ_3 sont données par :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \\ \kappa_2 &= \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \\ \kappa_3 &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

L'équation de dispersion est $\det(\bar{\bar{M}}) = 0$. En fonction de la direction de propagation de la perturbation (valeur de θ), différents modes sont susceptibles de se propager dans le plasma magnétisé.

5.1.1 Propagation parallèle - rotation Faraday

Lorsque l'onde se propage parallèlement au champ magnétique ($\theta = 0$), on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\kappa_3 (\kappa_1 - N^2)^2 - \kappa_2^2 \kappa_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_{\pm}^2 = \kappa_1 \pm \kappa_2, \\ \kappa_3 = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

La solution $N_{\pm}^2 = \kappa_1 \pm \kappa_2$, se réécrit :

$$N_{\pm}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \Big|_{\pm} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (\omega \mp \omega_{ce})} \quad (5.10)$$

Ces équations définissent deux types d'ondes appelées onde circulaire droite (+) et onde circulaire gauche (-) qui tournent dans des sens différents.

Si on considère une onde polarisée linéairement se propageant dans le plasma magnétisé, on peut écrire son champ électrique comme la superposition deux ondes polarisées circulairement tournant en sens contraire¹ :

$$\mathbf{E} = E_0 [e^{i(k_+ z - \omega t)} \mathbf{e}_+ + e^{i(k_- z - \omega t)} \mathbf{e}_-]. \quad (5.12)$$

Lorsque $k_+ = k_-$, on retrouve une onde polarisée linéairement. Dans un plasma magnétisé, en utilisant la formule 5.10 dans la limite $\omega \gg \omega_{pe}, \omega_{ce}$ ces deux vecteurs s'écrivent : $k_{\pm} \simeq k \pm \Delta k$, avec $k = \omega [1 - (1/2) \omega_{pe}^2 / \omega^2] / c$ et $\Delta k = (1/2) (\omega_{pe} / \omega^2) \omega_{ce} / c$. En remplaçant l'expression du vecteur d'onde dans 5.12 et en prenant la partie réelle, on obtient le vecteur champ électrique de l'onde dans la base cartésienne :

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\Delta k z) \cos(k_z - \omega t), \sin(\Delta k z) \cos(k_z - \omega t), 0]. \quad (5.13)$$

En plasma magnétisé $\Delta k \neq 0$, on voit par conséquent que le champ électrique de l'onde polarisée selon x tourne d'un angle $\phi = \tan^{-1}(E_x / E_y) = \Delta k z$. Cet effet est connu sous le nom de rotation Faraday [Quémada 1968, Gurnett 2005]. Lorsqu'un champ magnétique longitudinal est appliqué au plasma, une onde électromagnétique

1. Dans la base cartésienne (x, y, z) , on écrit les vecteurs unitaires d'une onde polarisée circulairement et se propageant selon z

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{\mathbf{e}_x \mp i \mathbf{e}_y}{2} \quad (5.11)$$

polarisée linéairement voit sa direction de polarisation changer au cours de sa propagation. On peut estimer cette rotation :

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{2\omega c}. \quad (5.14)$$

Dans le cas d'une onde laser polarisée linéairement de fréquence $\omega_0 \gg \omega_{pe}, \omega_{ce}$ se propageant dans un plasma de densité n_e , la rotation $\Delta\phi$ sur une propagation Δz de plasma est :

$$\Delta\phi(rad) = 2.93 \times 10^2 \frac{n_e}{n_c} B_0(T) \Delta z(m) \quad (5.15)$$

Par exemple, pour avoir une rotation de $10^\circ (= 0.17 rad)$ dans un plasma de densité $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ avec un champ $B_0 = 120 T$ pour une onde laser de longueur d'onde $\lambda_0 = 0.8 \mu m$, il faut parcourir environ $2 cm$ de plasma. On peut voir que pour une densité 10 fois supérieure, il faudrait seulement $2 mm$. La direction de polarisation a peu d'impact sur la création de l'onde de sillage mais peut intervenir dans le processus d'injection optique (voir Chapitre 4).

5.1.2 Propagation perpendiculaire - résonance hybride haute

En se plaçant dans le cas d'une onde se propageant perpendiculairement au champ \mathbf{B}_0 ($\theta = \pi/2$), on obtient l'équation dispersion suivante :

$$(\kappa_3 - N^2) [\kappa_1 (\kappa_1 - N^2) - \kappa_2^2] = 0 \quad (5.16)$$

et on obtient les solutions suivantes :

$$\begin{cases} N_o^2 = \kappa_3, \\ N_x^2 = \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{\kappa_1} \end{cases} \quad (5.17)$$

La première solution correspond au mode "ordinaire", c'est un mode que l'on retrouve également dans un plasma sans champ magnétique. La seconde solution représente le mode "extraordinaire". La polarisation de cette onde est elliptique c'est à dire avec des composantes transverses et longitudinales. Elle présente également une fréquence de résonance lorsque $\kappa_1 = 0$ donnée par :

$$\omega_{hh} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \quad (5.18)$$

Cette fréquence de résonance 5.18 est la fréquence hybride haute. Ainsi, tout déplacement d'électrons perpendiculaires au champ magnétique appliqué peut conduire à

une résonance et à la croissance de cette onde. Cette résonance peut intervenir dans les phénomènes d'accélération par onde de sillage laser étant donné que l'impulsion laser met les électrons en mouvement dans les directions transverses à sa propagation [Bulanov 2013]. La fréquence hybride basse s'obtient en tenant compte de la dynamique des ions.

5.2 Modélisation de l'onde de sillage créée par laser en plasma magnétisé

Le modèle développé dans le chapitre 2, nous a permis de comprendre comment la propagation d'un laser dans un plasma sous-critique permet d'obtenir une cavité accélératrice. En déterminant les paramètres libres et les conditions initiales du modèle, nous avons comparé le modèle analytique aux résultats de simulations PIC. Notre modèle a permis de retrouver la forme de l'onde de sillage ainsi que les valeurs de certains champs électromagnétiques dans la bulle. Dans ce chapitre, nous étudions l'influence d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué au plasma sur l'onde de sillage créée par laser dans le régime de la bulle. Pour ce faire, le modèle analytique va être modifié en rajoutant un champ magnétique longitudinal constant et homogène.

5.2.1 Modification du modèle analytique

Nous allons reprendre le modèle analytique développé dans le chapitre 2 et y ajouter un champ magnétique permanent et uniforme, dans la direction de propagation de l'impulsion laser. On ne peut plus dans ce cas ignorer la dynamique des électrons dans la direction azimutale. Cependant, on considère que l'onde de sillage est axisymétrique. Cela signifie que les champs et variables ne dépendent pas explicitement de la coordonnée azimutale θ . Les différentes grandeurs sont normalisées comme indiqué dans le tableau 2.1.

Pour commencer, nous rappelons succinctement les différentes hypothèses du modèle. Dans le régime de la bulle, l'impulsion laser expulse les électrons, ils sont ensuite rappelés par les ions considérés au repos et non perturbés par le passage du laser. Ces électrons forment une couche limite dense à la surface de la cavité en $r = r_b(\xi)$ (Fig.2.1). L'approximation quasi-statique nous autorise à dire que l'impulsion laser n'évolue pas pendant son interaction avec l'électron. On se place dans le repère suivant le laser en introduisant la variable $\xi = t - z$.

L'impulsion laser est gaussienne et son enveloppe est de la forme : $A_0(r, \xi) = a_0 \exp\left[-\frac{\xi^2}{\tau_0^2}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{W_0^2}\right]$. Le calcul des champs électromagnétiques requiert la connaissance du potentiel effectif $\Psi = \phi - A_z$ déterminé par le terme source $S(r, \xi) = -(\rho - J_z)$. Rappelons l'expression du terme source :

$$S(r, \xi) = \begin{cases} -(1 - \varepsilon) & (r < r_b), \\ S_0(\xi) \exp\left(-\frac{(r-r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right) & (r \geq r_b), \end{cases}$$

où $S_0(\xi)$ est le maximum en $r = r_b(\xi)$ du terme source et $\Delta\rho$ est l'épaisseur de la couche d'électrons. Le paramètre ε (valant 0 ou 1) permet d'ajuster notre modèle à des instants où le potentiel de l'onde de sillage est négligeable devant la force pondéromotrice, ce qui est par exemple la cas à l'avant de l'impulsion laser où la séparation de charge n'est pas complète.

Considérons une couche de fluide électronique, l'équation du mouvement transverse d'un électron s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = \sum \mathbf{F}_\perp. \quad (5.19)$$

Tout comme dans le chapitre 2 (voir section 2.1.2), les champs et les différentes grandeurs sont moyennés sur une période laser afin de ne tenir compte que des mouvements lents des électrons et éliminer les mouvements rapides d'oscillations des électrons dans les champs électromagnétiques du laser. Ainsi le facteur de Lorentz moyenné associé à un électron s'écrit : $\gamma = \sqrt{1 + p_r^2 + p_\theta^2 + p_z^2 + \frac{a_0^2}{2}}$ [Mora 1997, Lu 2006] où on introduit l'impulsion dans la direction azimutale p_θ .

En coordonnées cylindriques, on peut écrire $\mathbf{p}_\perp = p_r \mathbf{e}_r + p_\theta \mathbf{e}_\theta$ et l'équation du

mouvement 5.19 devient² :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} &= \frac{d(p_r \mathbf{e}_r + p_\theta \mathbf{e}_\theta)}{dt} \\
 &= \frac{dp_r}{dt} \mathbf{e}_r + p_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dp_\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + p_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \\
 &= \left(\frac{dp_r}{dt} - \frac{p_\theta v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{dp_\theta}{dt} + \frac{p_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\
 &= F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta
 \end{aligned}$$

On est donc ramené à résoudre des équations différentielles dans les directions r et θ . On doit donc également décomposer les forces dans ces deux directions :

$$\begin{aligned}
 F_r &= -(E_r - v_z B_\theta + v_\theta B_z) + F_{p\perp} \\
 &= \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{(1 + \Psi)}{\gamma} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \xi} + \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) - v_\theta B_0 - \frac{1}{4\gamma} \frac{\partial |A_0(r, \xi)|^2}{\partial r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\theta &= -(E_\theta + v_z B_r - v_r B_z) \\
 &= v_r B_0,
 \end{aligned}$$

où B_0 représente le champ magnétique longitudinal permanent et uniforme appliqué au plasma. On considère que la force pondéromotrice n'a pas de composante selon \mathbf{e}_θ . Avec les formules établies dans le chapitre 2 et notamment les expressions 2.8 et 2.11, on peut écrire la relation suivante :

$$p_\theta = \gamma v_\theta = \gamma(1 - v_z) r \frac{d\theta}{d\xi} = (1 + \Psi) r \frac{d\theta}{d\xi}, \quad (5.20)$$

2. Où en écrivant les vecteurs unitaires cylindriques dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\
 \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y
 \end{aligned}$$

Ainsi les dérivées temporelles des vecteurs unitaires sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_\theta \\
 \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_r
 \end{aligned}$$

où $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$. La prise en compte de la coordonnée θ nous donne un nouveau système d'équations du mouvement qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{d\xi} + \frac{p_\theta v_r}{(1-v_z)r} &= \frac{1}{1-v_z} F_\theta, \\ \frac{dp_r}{d\xi} - \frac{p_\theta v_\theta}{(1-v_z)r} &= \frac{1}{1-v_z} F_r. \end{aligned}$$

Après quelques lignes de calculs, on obtient l'équation selon \mathbf{e}_θ :

$$(1 + \Psi) r_b \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{d\theta}{d\xi} \frac{dr_b}{d\xi} D(r_b) - B_0 \frac{dr_b}{d\xi} = 0, \quad (5.21)$$

et l'équation selon \mathbf{e}_r :

$$A(r_b) \frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + B(r_b) r_b \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 + C'(r_b) r_b = -\frac{\frac{\partial |A_0|^2}{\partial r}}{4(1 + \Psi)}, \quad (5.22)$$

où

$$\begin{aligned} A(r_b) &= 1 + \Psi + \frac{\alpha}{2} \frac{d\Psi}{d\alpha}, \\ B(r_b) &= \frac{1}{r_b \Delta\rho} \frac{d\Psi}{d\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d^2\Psi}{d\alpha^2} + \frac{1}{4}, \\ C'(r_b) &= \frac{(1-\varepsilon)}{4} \left[1 + \frac{1 + \frac{A_0^2}{2}}{(1 + \Psi)^2} + r_b^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 \right] + B_0 \frac{d\theta}{d\xi} - (1 + \Psi) \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2, \\ D(r_b) &= \alpha \frac{d\Psi}{d\alpha} + 2(1 + \Psi) \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec $\alpha = \frac{r_b}{\Delta\rho}$.

On a ainsi obtenu un système de deux équations couplées (5.21 et 5.22). Lorsque $B_0 = 0$, on retrouve la situation décrite dans le chapitre 2. Les calculs du potentiel effectif et des composantes du potentiel vecteur A_r et A_z restent identiques à ce qui a été fait dans le chapitre 2 (les formules 2.17, 2.24 restent valables et on a toujours $A_z = 0$).

Comme dans le chapitre 2, la résolution de ces équations passe par un choix de condition initiale et de paramètres libres appropriés. L'épaisseur de la couche limite d'électrons est définie par la double inégalité $0.5 k_p^{-1} < \Delta\rho < 1 k_p^{-1}$. Les électrons

formant la couche limite autour de la bulle sont initialement au repos et proches d'une position où la force pondéromotrice du laser est maximale. On reprend un cas étudié dans le chapitre 2 (Fig.2.8a) et on applique un champs magnétique. On obtient les trajectoires ou valeurs du rayon $r_b(\xi)$ données par la figure 5.1.

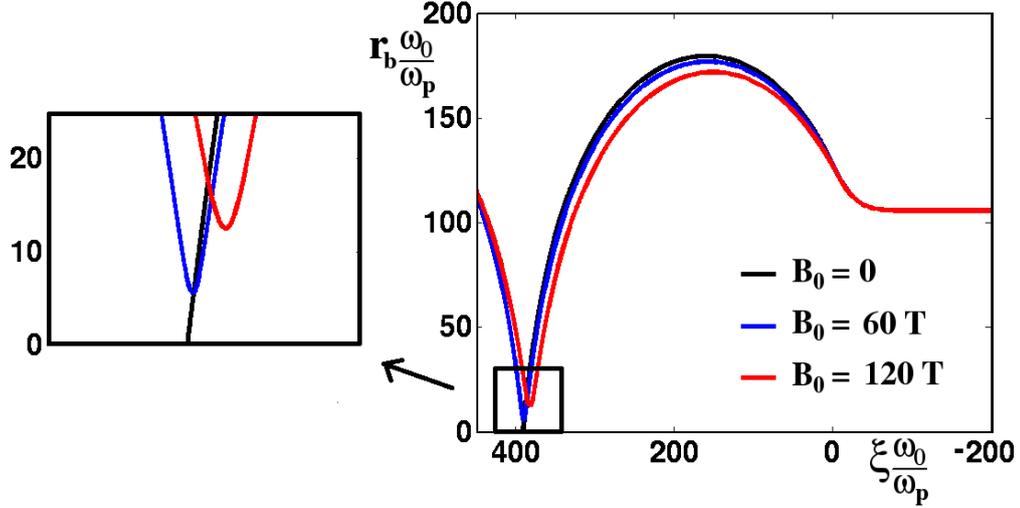


FIGURE 5.1 – Résultats obtenus avec le modèle pour différents champs magnétiques appliqués avec $a_0 = 4$, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $\Delta\rho = 0.80$

Pour faire des comparaisons directes avec le code PIC, nous avons normalisé les résultats du modèle de la même façon que dans le code PIC (Tab.1.1). Lorsque le champ magnétique appliqué est élevé, la forme de l'onde de sillage est modifiée et la cavité ne se referme pas à l'arrière. Les électrons qui arrivent à l'arrière de l'onde de sillage ne passent plus par l'axe de propagation. Le mouvement des électrons suggère la présence d'un courant hélicoïdal qui va générer un champ magnétique longitudinal. Le calcul du champ magnétique créé par l'onde de sillage est présenté dans la sous-section suivante.

5.2.2 Calcul du champ magnétique créé par l'onde de sillage laser

Le champ magnétique appliqué modifie la trajectoire des électrons et des courants peuvent apparaître dans la direction azimutale. Sur la figure 5.2, on trace le courant

J_θ obtenu dans le cas sans champ puis avec champ magnétique avec le code PIC 3D CALDER-Circ. Un fort courant suivant \mathbf{e}_θ apparaît à la surface de l'onde de sillage dès qu'un champ magnétique est appliqué (Fig.5.2b). Ce courant change de signe lorsque les électrons arrivent à l'arrière de la cavité. Les courants ont été calculés en ne considérant que le mode $m = 0$ du développement en série de Fourier avec le code Calder-Circ, cela signifie que la valeur de ces courants est indépendante de la valeur de la coordonnée θ (voir Annexe A). Cela rejoint l'hypothèse faite dans notre modèle où les forces et vitesses des particules ne dépendent pas de la coordonnée θ . Le courant généré à la surface de la bulle est donc indépendant de θ .

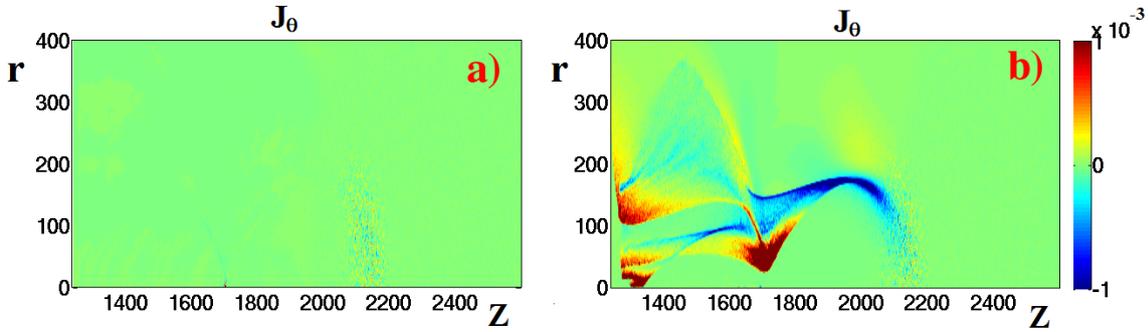


FIGURE 5.2 – Courant J_θ projeté dans l'espace (z, r) avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-3} n_c$ pour a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 T$

Un courant dans la direction \mathbf{e}_θ crée un champ magnétique dans la direction longitudinale notée \mathbf{e}_z dans le repère des coordonnées cylindriques $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Pour estimer ce courant, on utilise la loi de Biot et Savart :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{d\mathbf{l} I(\mathbf{r}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.24)$$

où $d\mathbf{l} = r_b d\theta \mathbf{e}_\theta$. Pour simplifier le calcul, on suppose que l'onde de sillage est une succession de N spires se trouvant à la position ξ_i , d'épaisseur $\Delta\rho$ selon r et h selon ξ (voir figure 5.3) où h est le pas d'intégration des équations du mouvement 5.21 et 5.22.

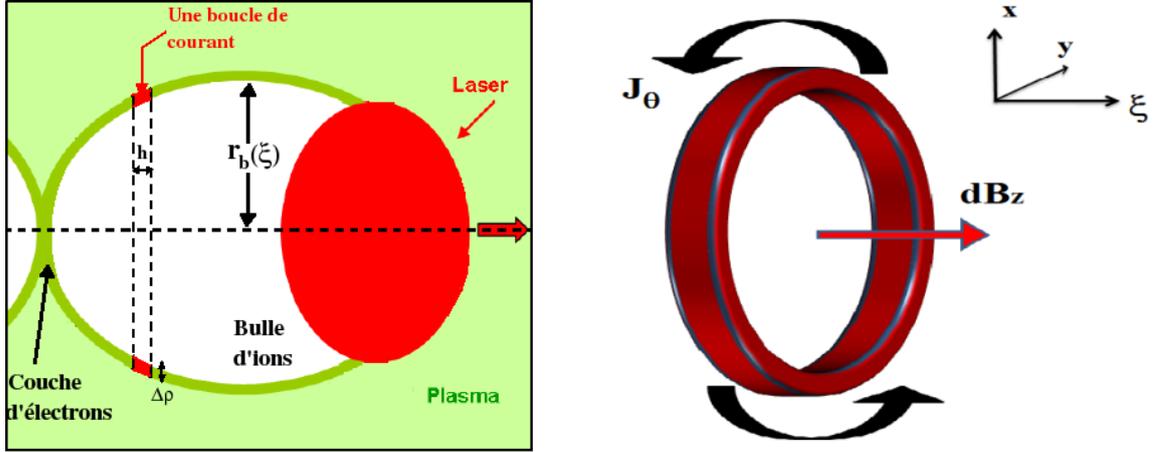


FIGURE 5.3 – Schéma de calcul du champ magnétique dans l'onde de sillage laser.

Chaque spire donne un champ dB_z , pour obtenir le champ total on somme toutes les contributions :

$$B_z(r=0, \xi) = \sum_i^N dB_z(0, \xi)$$

où

$$dB_z(0, \xi) = \frac{I(\xi)}{2} r_b^2 ((\xi_i - \xi)^2 + r_b^2)^{-3/2}$$

On calcule le champ magnétique produit sur l'axe de propagation par les électrons se trouvant à la surface de l'onde de sillage ce qui implique $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{r}' = r_b \mathbf{e}_r$ dans l'équation de Biot et Savart (Eq.5.24). En supposant que le courant électronique est homogène dans la boucle de courant, on arrive à $I = S.J_\theta$ avec $J_\theta = -n_e v_\theta$. Le courant I dans une boucle de courant s'écrit alors :

$$I(\xi) = -\Delta\rho h n_e(\xi) v_\theta(\xi)$$

L'expression du champ magnétique créé par la spire suivant z est donnée par :

$$dB_z = -\frac{\Delta\rho h n_e v_\theta}{2} r_b^2 ((\xi_i - \xi)^2 + r_b^2)^{-3/2}$$

En utilisant l'expression de p_θ (Eq.5.20), on arrive à l'expression suivante pour le champ magnétique créé par la boucle de courant de longueur h et d'épaisseur $\Delta\rho$:

$$dB_z = -\frac{\Delta\rho h n_e (1 + \Psi)}{2\gamma} \frac{d\theta}{d\xi} r_b^3 ((\xi_i - \xi)^2 + r_b^2)^{-3/2} \quad (5.25)$$

Les grandeurs intervenant dans l'expression 5.25 sont déterminées lors de la résolution des équations du mouvement de l'électron à la surface de la bulle. La densité électronique est calculée à partir des fonctions S et J_z (voir chapitre 2), ce qui donne pour $r = r_b$:

$$n_e(\xi) = S_0(\xi) + 1 - J_s(\xi)$$

$S_0(\xi)$ et $J_s(\xi)$ sont données par les formules 2.16 et 2.21 respectivement.

On trace le résultat obtenu avec le modèle dans le cas d'un champ magnétique appliqué (Fig.5.4). On a également tracé la quantité de mouvement p_θ dont le signe indique le sens du courant (Fig.5.4b). Suivant le sens du courant, le champ magnétique généré peut renforcer ou bien affaiblir le champ magnétique appliqué (Fig.5.4a).

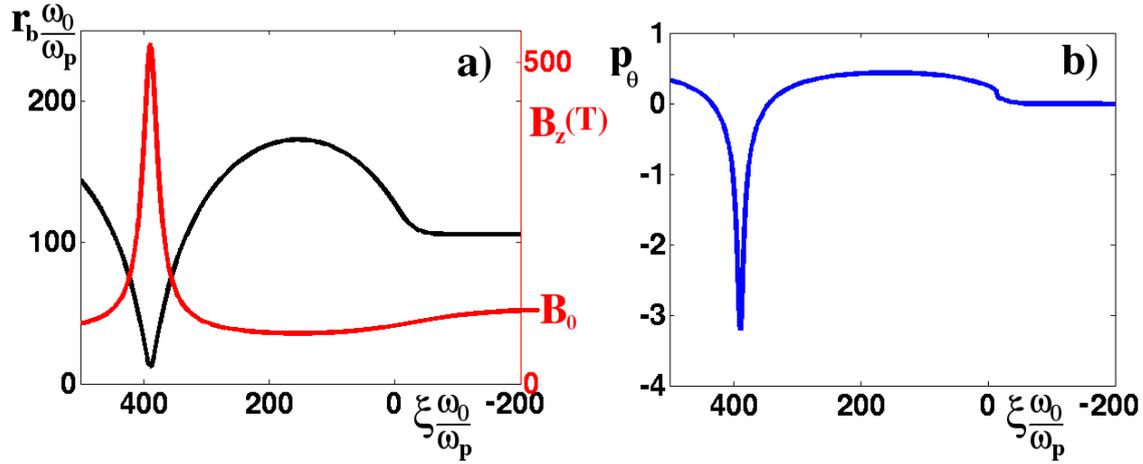


FIGURE 5.4 – Résultats obtenus avec le modèle pour $B_0 = 120 T$ avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $\Delta\rho = 0.85$ et $\Delta J = 1.0$

En utilisant notre modèle, nous avons mis en évidence dans le cas d'un plasma magnétisé différents phénomènes. Premièrement, la forme de l'onde de sillage est modifiée de telle sorte que la cavité ne se referme pas à l'arrière. Ensuite, un champ magnétique généré par le courant hélicoïdal formé par les électrons à la surface de l'onde de sillage, a été mis en évidence. Bulanov *et al.* [Bulanov 2013] ont montré que la cavité formée par l'onde de sillage ne se referme pas à l'arrière. Un plasma magnétisé est un milieu anisotrope, ainsi on ne peut se passer d'une géométrie 3D pour modéliser correctement la formation et la propagation de l'onde de sillage. Par conséquent, nous utiliserons pour les simulations numériques un code entièrement 3D en espace et en vitesse.

5.2.3 Importance de la géométrie 3D

De nombreux résultats ont déjà été publiés concernant l'influence d'un champ magnétique longitudinal homogène initialement appliqué au plasma [Bourdier 2012b, Bourdier 2012a, Drouin 2012, Hur 2008]. Ces études ont montré qu'il est possible d'améliorer la capture des électrons et la qualité du faisceau. Ces analyses ont été menées en utilisant des simulations PIC avec des codes 2D. Bulanov *et al.* [Bulanov 2013] ont mis en évidence la nécessité d'utiliser une géométrie 3D dans les simulations. Ils montrent que la croissance d'onde cylindrique hybride haute entraîne que les électrons acquièrent une impulsion azimutale et perdent leur impulsion radiale. Ainsi, les électrons n'atteignent pas l'axe longitudinal et restent confinés dans une région où $r > r_{min}$. En conséquence, la cavité ne se referme pas à l'arrière et il existe un rayon minimal pour la trajectoire des électrons. Pour mettre en évidence ce rayon minimal, on part des équations décrivant la dynamique des électrons en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\frac{dp_r}{dt} - \frac{p_\theta v_\theta}{r} &= -E_r - v_\theta B_0, \\ \frac{dp_\theta}{dt} + \frac{p_\theta v_r}{r} &= v_r B_0,\end{aligned}$$

où on examine uniquement la dynamique des électrons à l'arrière de l'onde de sillage. A cet emplacement, il n'y a pas de force pondéromotrice. On rajoute l'équation décrivant l'évolution du champ électrique radial :

$$\frac{dE_r}{dt} + \frac{E_r v_r}{r} = v_r,$$

Les équations selon p_θ et E_r donnent des solutions sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}rp_\theta &= \frac{B_0 r^2}{2} + M_\theta(r_0) \\ rE_r &= \frac{r^2}{2} + Q_E(r_0),\end{aligned}$$

où $r = r_0 + \delta r(r_0, t)$ avec $\delta r(r_0, t)$, le déplacement du fluide d'électrons par rapport à sa position initiale r_0 .

L'énergie E d'un électron nous est donnée par la formule suivante [Bulanov 2013] :

$$E = \sqrt{1 + p_\theta^2 + p_r^2},$$

Si on suppose qu'à $t = 0$ et $r = r_0$, on a $p_\theta = 0$ cela entraîne que $M_\theta(r_0) = -\frac{B_0 r_0^2}{2}$. On remplace dans l'expression de l'énergie et on trouve :

$$E = \sqrt{1 + \left(\frac{B_0}{2}\right)^2 \left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)^2 + p_r^2},$$

On peut voir que cette fonction passe par un minimum en $r = r_{min} \neq 0$. Bulanov *et al.* montrent que l'équation donnant r_{min} peut s'écrire [Bulanov 2013] :

$$\sqrt{1 + \frac{B_0^2}{2} \left(r_{min} - \frac{r_0^2}{r_{min}}\right)^2} - 1 = \frac{1}{4} (r_0^2 - r_{min}^2), \quad (5.26)$$

Lorsque la vitesse radiale de l'électron est très importante comme par exemple lorsqu'un électron expulsé par le laser puis attiré par les ions, revient sur l'axe, la force de Laplace devient très importante et fait tourner les électrons en plasma magnétisé. L'impulsion radiale est perdue au profit de la composante azimutale qui devient très importante à l'arrière de l'onde de sillage. Ce phénomène se traduit par l'existence d'un rayon minimal de la trajectoire des électrons.

Dans une simulation 2D en espace, la force de Laplace n'est pas totalement prise en compte dans les équations du mouvement des électrons. On a effectué deux séries de simulations identiques avec et sans champ magnétique appliqué. D'abord avec un code 2D en espace et 3D vitesse (Fig.5.5) puis avec un code pleinement 3D (Fig.5.6). Dans la simulation 2D, les trajectoires des électrons à la surface de la bulle sont modifiées par le champ magnétique appliqué mais finissent leur course en passant par l'axe de propagation et la cavité est fermée. Dans une simulation 3D, les électrons arrivant à l'arrière de l'onde de sillage ne passent pas par l'axe et la cavité ne se referme pas lorsqu'un champ magnétique est appliqué (Fig.5.6b).

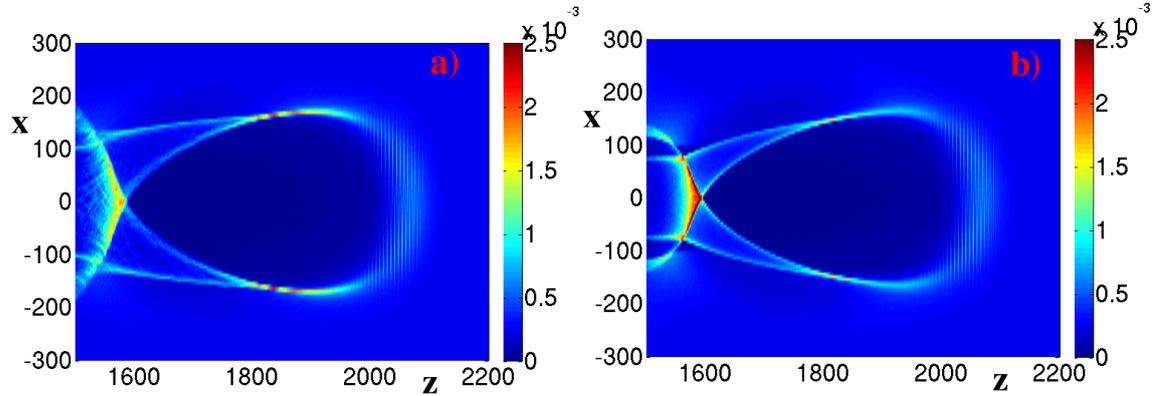


FIGURE 5.5 – Densité électronique projetée dans l'espace des phases (z, x) avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$. Simulations CALDER 2Dx3Dv. a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 T$.

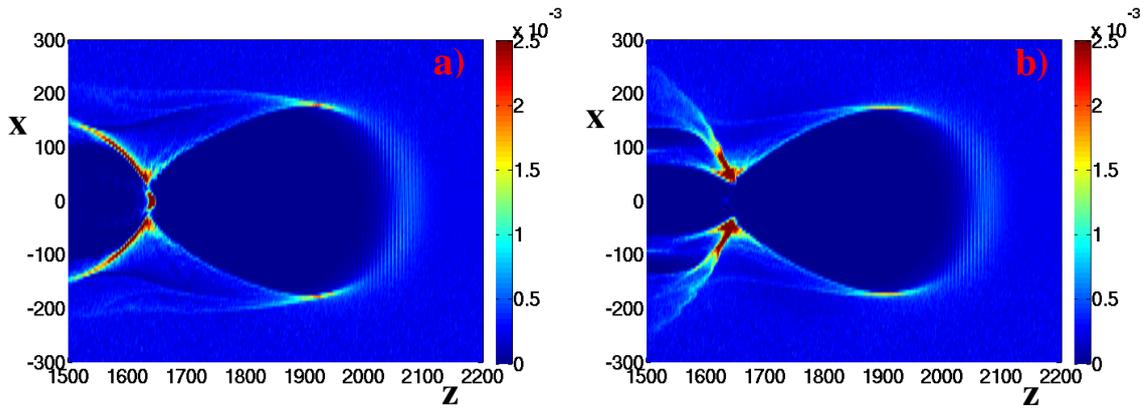


FIGURE 5.6 – Densité électronique projetée dans l'espace des phases (z, x) avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$. Simulations CALDER-Circ. a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 T$.

Ces changements sont d'autant plus importants qu'une modification de la forme de l'onde de sillage aura des conséquences sur le champ électrique à l'intérieur de la cavité (Fig.5.7).

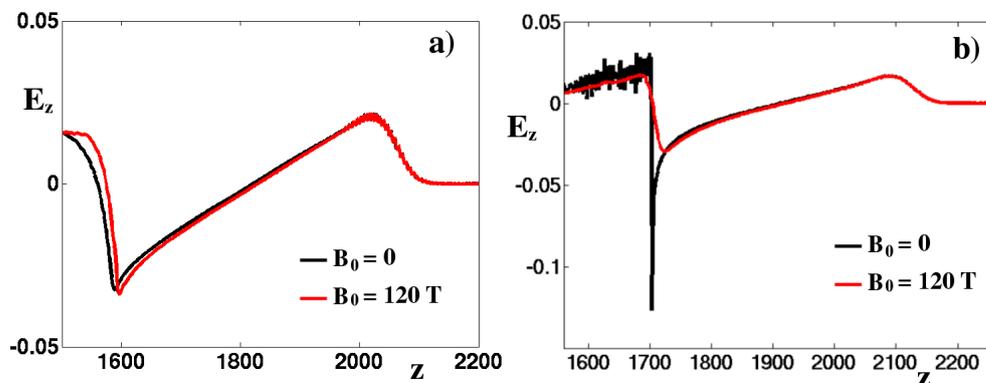


FIGURE 5.7 – Champ électrique longitudinal E_z sur l'axe en fonction de z avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ avec et sans magnétique appliqué pour a) Calder 2Dx3Dv et b) Calder Circ.

Seul un code 3D pourra décrire l'action complète d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué dans le plasma. C'est pourquoi, le code CALDER-Circ [Lifschitz 2009] est utilisé pour effectuer nos simulations. Ce code utilise la décomposition des champs électromagnétiques en série de Fourier pour réduire le temps de calcul. Par ailleurs, des comparaisons avec le code cartésien 3Dx3Dv CALDER nous ont permis de montrer que les deux premiers modes de la série de Fourier sont suffisants pour décrire l'accélération par onde de sillage en plasma magnétisé (voir Annexe A).

5.2.4 Comparaison du modèle avec des simulations PIC

Les résultats de simulations PIC 3D avec CALDER-Circ sont comparés aux prédictions de notre modèle dans le cas d'un plasma magnétisé. Comme dans le chapitre 2, on choisit les valeurs des paramètres libres et des conditions initiales en nous appuyant sur les trajectoires de particules tests (Fig.5.8). Le champ magnétique modifie la trajectoire des électrons expulsés par l'impulsion laser. Cela signifie que les paramètres utilisés dans le modèle peuvent être légèrement différents en présence d'un champ magnétique. Ainsi, en choisissant judicieusement les paramètres libres, on obtient des résultats très satisfaisants avec le modèle (Fig.5.9).

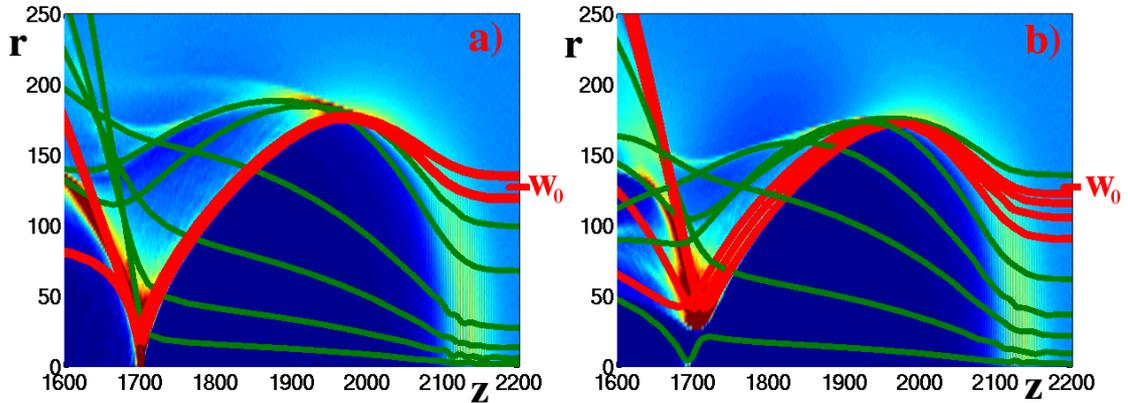


FIGURE 5.8 – Trajectoires de particules tests données par simulations PIC 3D avec CALDER-Circ. $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 T$. En arrière plan, la densité électronique projetée dans l'espace des phase (z, r) est tracée au temps $t = 2400$

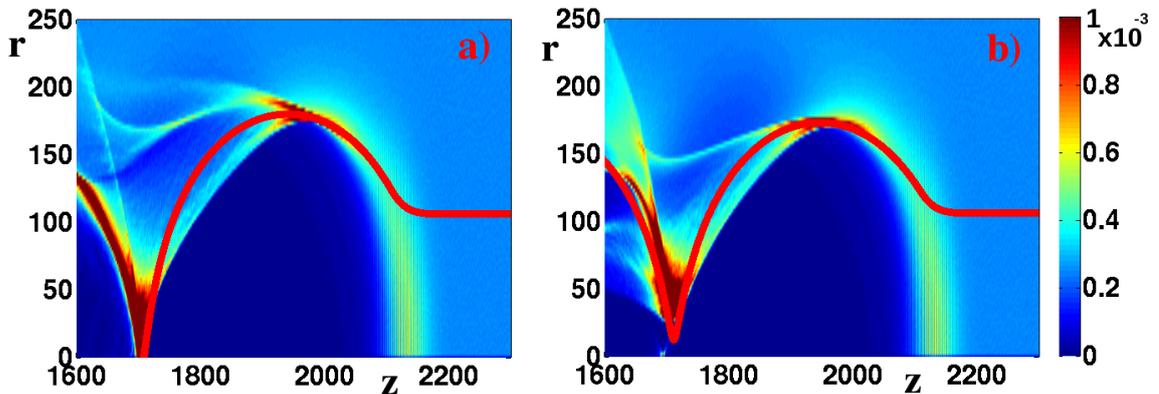


FIGURE 5.9 – Comparaison modèle et simulations PIC. $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 T$. En arrière plan, la densité électronique projetée dans l'espace des phases (z, r) obtenue avec CALDER-Circ à $t = 2400$. En trait plein rouge, $r_b(\xi)$ obtenu avec le modèle

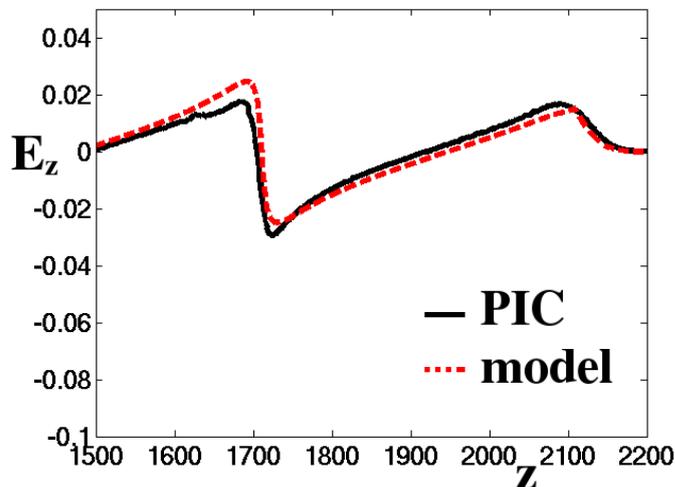


FIGURE 5.10 – Champ électrique longitudinal E_z donné par le modèle et une simulation PIC 3D. $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour $B_0 = 120 \text{ T}$ au temps $t = 2400$

Comme dans le chapitre 2, le modèle reproduit assez fidèlement la trajectoire des électrons se trouvant à la surface de l'onde de sillage. En plasma magnétisé, ces électrons passent, comme attendu, par un rayon minimal (Fig.5.9b).

Le calcul du champ électrique longitudinal permet de vérifier que nous avons choisis les bons paramètres (Fig.5.10). L'absence d'accumulation de charge à l'arrière de l'onde de sillage en plasma magnétisé permet de modéliser fidèlement le champ électrique longitudinal.

Les trajectoires obtenues avec le modèle permettent de déterminer le rayon minimal (R_{min}) atteint par les électrons à l'arrière de l'onde de sillage. Dans le tableau 5.1, on relève pour différentes valeurs du champ magnétique appliqué le rayon minimal atteint par la couche limite d'électrons à l'arrière de l'onde de sillage. Les résultats donnés par le modèle ainsi que par la formule de Bulanov 5.26 sont comparés à ceux relevés dans les simulations PIC 3D.

**Chapitre 5. Influence d'un champ magnétique sur une onde de sillage
160 créée par laser dans le régime de la bulle**

B_0 (T)	6	20	40	60	90	120
R_{min} (formule 5.26) (μm)	0.4	1.33	2.65	3.94	5.81	7.53
R_{min} (modèle) (μm)	0.4	0.8	1.40	2.0	2.32	2.54
R_{min} (simulations) (μm)	0.4	1.15	2.05	2.85	3.21	3.56

TABLE 5.1 – Valeurs des R_{min} pour $a_0 = 4$, $w_0 = 18 \mu m$, $\tau_0 = 30 fs$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour différentes valeurs de champs magnétiques appliqués.

La valeur du R_{min} augmente avec celle du champ magnétique appliqué. En comparant les valeurs données par les simulations et la formule de Bulanov 5.26, on remarque que l'écart grandit lorsque le champ magnétique augmente. Le calcul du rayon minimal par la formule de Bulanov dépend de la valeur du rayon r_0 qui correspond au rayon maximal atteint par l'onde de sillage. Dans nos calculs, ce rayon a été choisi égal au waist du laser. Les valeurs données par le modèle sont inférieures à celles des simulations PIC. Dans le tableau 5.2, on peut observer l'influence de la densité électronique du plasma sur le rayon minimal. A plus haute densité, la valeur du R_{min} décroît.

n_e (n_c)	2.5×10^{-3}	1.0×10^{-3}	7.5×10^{-4}	5.0×10^{-4}	2.5×10^{-4}
R_{min} (formule 5.26) (μm)	0.61	1.43	1.84	2.58	3.94
R_{min} (modèle) (μm)	0.65	0.95	1.25	1.60	2.00
R_{min} (simulations) (μm)	0.65	1.02	1.59	1.91	2.85

TABLE 5.2 – Valeurs des R_{min} pour $a_0 = 4$, $w_0 = 18 \mu m$, $\tau_0 = 30 fs$ et $B_0 = 60 T$ pour différentes densités électroniques du plasma.

L'influence du champ magnétique sur l'onde de sillage est moins marquée pour les densités électroniques élevées ($\geq 10^{-3} n_c$), dans les cas illustrés par le tableau 5.2 le rayon minimal est alors inférieur au micron. En nous plaçant à plus faible densité, nous pourrions mieux observer des phénomènes comme la génération de champ

magnétique.

On examine maintenant le champ magnétique longitudinal généré dans l'onde de sillage. La comparaison entre le modèle et les résultats de simulations (Fig.5.11b) montre un très bon accord et confirme ainsi nos hypothèses de départ. Le champ magnétique à l'intérieur de la bulle est généré par le courant hélicoïdal à la surface de l'onde de sillage.

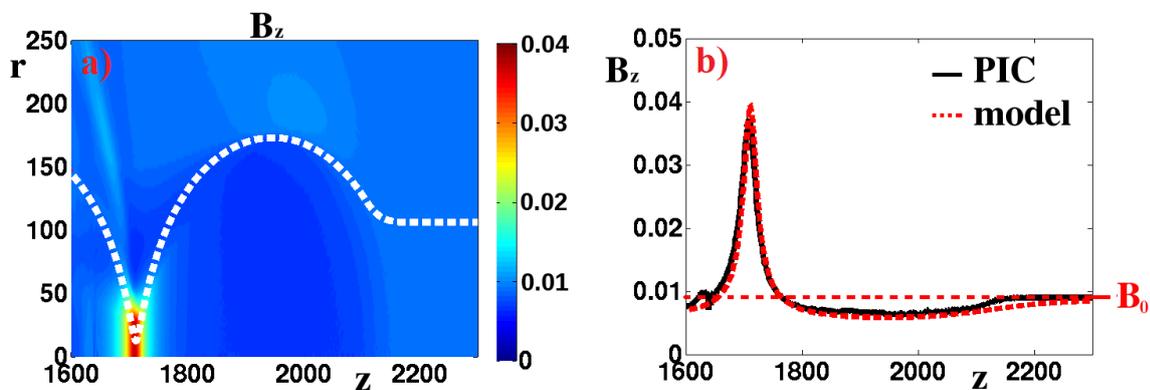


FIGURE 5.11 – a) Champ magnétique B_z projeté sur le plan (r, z) avec le rayon $r_b(\xi)$ donné par le modèle tracé en pointillé blanc et b) champ magnétique B_z en fonction de ξ pour $r = 0$. $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $B_0 = 120 \text{ T}$.

Notre modèle et les simulations PIC montrent qu'à basse densité la cavité formée par l'onde de sillage ne se referme pas à l'arrière. De plus, les trajectoires des électrons à la surface de l'onde de sillage sont responsables de la formation d'un courant hélicoïdal capable de générer un champ magnétique. Le champ magnétique auto-généré vient renforcer le champ magnétique appliqué et peut devenir très intense à l'arrière (Fig.5.11). Dans la section suivante, nous allons essayer de comprendre comment contrôler le champ magnétique auto-généré.

5.3 Génération de champ magnétique dans l'onde de sillage

5.3.1 Caractéristiques du champ magnétique auto-généré

Dans la section précédente, nous avons étudié la formation d'une onde de sillage laser dans le régime de la bulle avec un champ magnétique initialement appliqué. On a notamment mis en évidence la déformation de l'onde de sillage et la présence d'un courant hélicoïdal permettant de renforcer le champ magnétique appliqué. Nous allons essayer de comprendre comment se forme ce champ magnétique et comment le contrôler. Sur la figure 5.12, on trace le maximum du champ magnétique B_z généré par l'onde de sillage et mesuré dans la fenêtre de simulation pour différents champs appliqués.

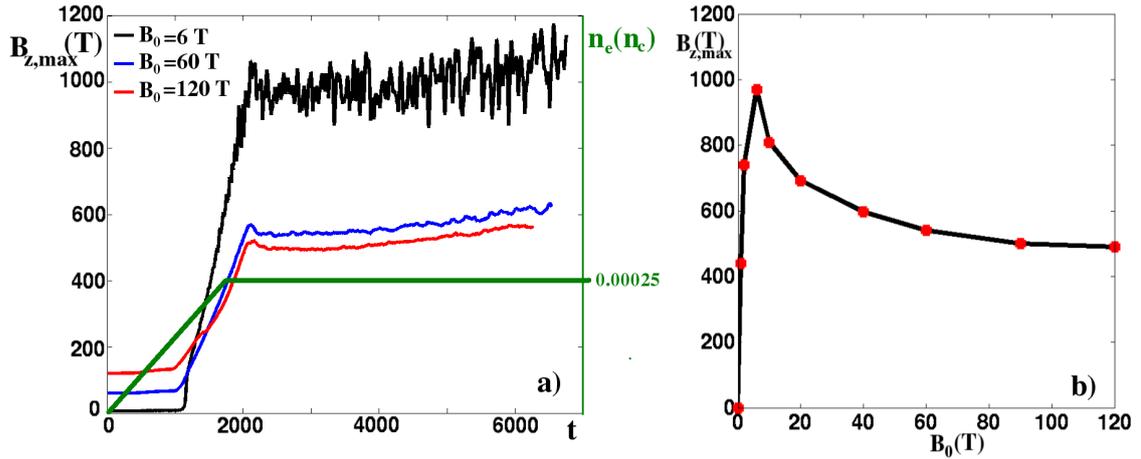


FIGURE 5.12 – Maximum du champ magnétique B_z mesuré dans la boîte de simulations a) au cours du temps pour différentes valeurs de champ magnétique appliqué b) en fonction du champ magnétique appliqué à $t = 2400$ avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30$ fs, $w_0 = 18$ μ m et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$

Le champ mesuré par ce diagnostic est le champ magnétique produit par le courant hélicoïdal, que nous avons mesuré avec une méthodologie spécifique³. Sur la figure

3. La propagation de l'onde laser dans le plasma induit un champ magnétique longitudinal. Ce champ magnétique est lié à l'onde laser, par conséquent dans le code CALDER-Circ, il sera lié

5.12a, on a également tracé le profil de densité électronique du plasma. Dès que le laser entre dans le plateau de densité, la valeur maximale du champ magnétique reste quasiment constante ou croît très lentement. Le maximum du champ magnétique généré dépend de la valeur du champ appliqué. Ainsi, un champ de 1000 T est produit localement en appliquant seulement 6 T. Mais pour un plasma faiblement magnétisé ($B_0 = 6 T$), ce champ se développe dans un volume de plasma très restreint (Fig.5.13).

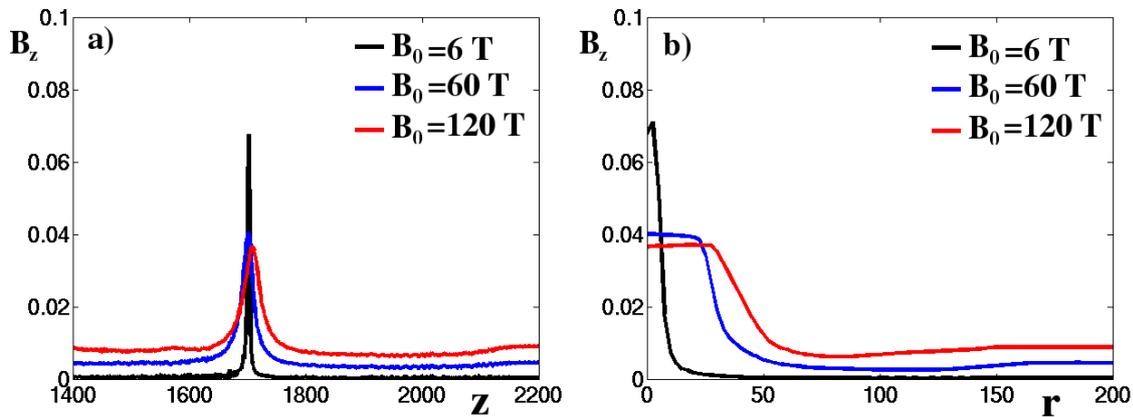


FIGURE 5.13 – Champ magnétique B_z mesuré dans la fenêtre de simulation pour différentes valeurs de champ magnétique appliqué avec $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$, et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ a) en fonction de z et b) en fonction de r

Lorsque le champ magnétique appliqué est intense ($B_0 \geq 60 T$), le champ magnétique généré occupe un volume de plasma plus conséquent à l'arrière de la bulle.

Les caractéristiques du champ généré, sa forme et son intensité, dépendent de la valeur du champ appliqué. Dans la section précédente, on a vu que la valeur du champ appliqué influe sur la valeur du R_{min} mais également sur l'intensité du courant hélicoïdal. La génération de ce courant peut être expliquée à partir de la loi de Lenz-Faraday.

au mode $m = 1$. Nous avons montré que le champ magnétique généré par l'onde de sillage était axisymétrique et donc qu'il dépend du mode $m = 0$. Pour déterminer le maximum du champ magnétique créé par l'onde de sillage, on mesure les maxima du champ magnétique selon le mode $m = 0$.

5.3.2 Explication par la loi de Lenz-Faraday

Dans le chapitre 2, nous avons montré que les électrons qui forment la couche limite de l'onde de sillage sont initialement situés loin de l'axe de propagation, proches du maximum de la force pondéromotrice du laser. Dans le cas d'un champ magnétique appliqué, on trace les trajectoires de quelques particules formant l'onde de sillage tout en relevant leur impulsion dans la direction azimutale θ (Fig.5.14). Les électrons changent de sens de rotation lorsqu'ils arrivent à l'arrière de l'onde de sillage, ce qui se traduit sur la figure 5.14 par une impulsion azimutale négative.

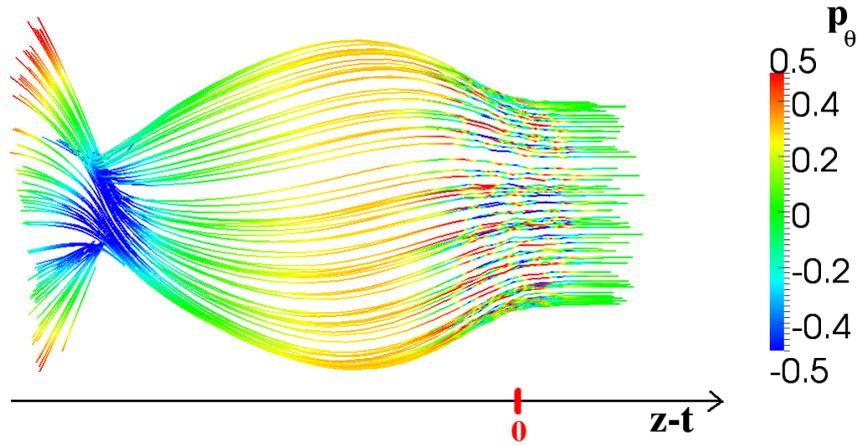


FIGURE 5.14 – Trajectoires de particules tests avec en couleur la valeur de l'impulsion mécanique des particules selon θ pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $B_0 = 120 T$

Ce changement du sens de rotation des électrons renforce le champ magnétique appliqué à l'arrière de la bulle. La loi de Lenz-Faraday permet d'expliquer ce phénomène. Cette loi dit que toutes variations du flux magnétique à travers une surface entraînent une force électromotrice permettant d'annuler ou de diminuer ces variations. Le flux magnétique nous est donné par l'expression suivante :

$$\phi_b = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Le flux à travers une section transverse de la bulle où le champ magnétique B_0 est homogène s'écrit :

$$\phi_B(\xi) = B_0 \pi r_b^2$$

La loi de Lenz-Faraday relie les variations du flux magnétique à travers une surface au champ électrique entourant cette surface. Dans notre cas le champ magnétique est longitudinal et le champ électrique généré est azimutal :

$$\begin{aligned} \oint_C E_\theta r d\theta &= -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} \\ &= -2\pi B_0 r_b \frac{dr_b}{d\xi} \end{aligned}$$

Cela nous permet d'estimer le champ électrique azimutal sur la surface de la bulle en fonction de la position ξ :

$$E_\theta(\xi) = -B_0 \frac{dr_b}{d\xi} \quad (5.27)$$

L'expression 5.27 montre que les variations du rayon r_b sont responsables de la variation de flux magnétique. Une diminution brutale de la coordonnée r_b entraîne un courant dans la direction θ et génère un champ magnétique dans le même sens que celui appliqué initialement.

Pour résumer le mécanisme générant le champ magnétique, on trace sur la figure 5.15 la trajectoire d'un électron formant l'onde de sillage laser. Différentes zones peuvent être identifiées en fonction de la valeur prise par $\frac{dr_b}{d\xi}$.

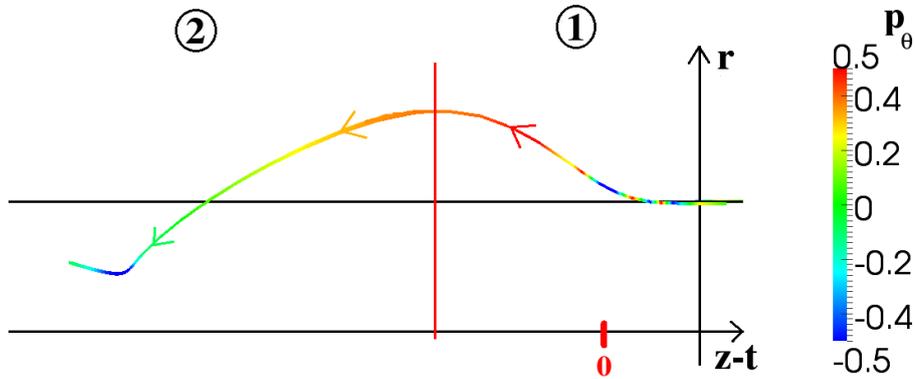


FIGURE 5.15 – Trajectoire d'une particule test avec en couleur la valeur de l'impulsion mécanique des particules selon θ pour $a_0 = 4$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $B_0 = 120 T$

Dans la zone 1, le flux magnétique augmente ($\frac{dr_b}{d\xi} > 0$) ce qui se traduit par la formation d'un courant qui va faire diminuer le champ magnétique appliqué. Dans la

zone 2, le flux magnétique diminue ($\frac{dr_b}{d\xi} < 0$), un courant dans l'autre sens est généré qui tend à compenser la diminution du flux magnétique. Cela explique pourquoi le champ magnétique généré à l'arrière de l'onde de sillage est très intense. Ceci montre que l'on peut modifier le champ magnétique généré en utilisant des paramètres laser ou plasma différents.

Sur la figure 5.16, on trace le champ magnétique B_z calculé sur l'axe de propagation pour différentes valeurs du potentiel vecteur de l'onde laser. Changer la valeur du potentiel vecteur du laser influe directement sur la quantité $\frac{dr_b}{d\xi}$. Lorsque les électrons sont violemment expulsés par le laser c'est à dire pour des valeurs élevées du potentiel vecteur ($a_0 \geq 3$), ils acquièrent à l'arrière une vitesse radiale bien plus importante que dans la situation où ils sont faiblement expulsés ($a_0 \leq 2$). Ainsi, on a par exemple $\frac{dr_b}{d\xi}|_{a_0 \leq 2} \ll \frac{dr_b}{d\xi}|_{a_0=4}$ et le champ magnétique généré est bien plus important d'après la loi de Lenz-Faraday (Eq.5.27) et comme en atteste la figure 5.16.

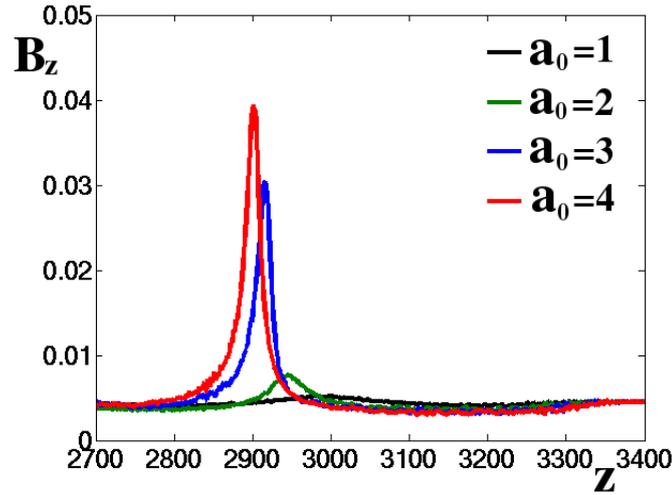


FIGURE 5.16 – Champ magnétique B_z mesuré sur l'axe en fonction de z à l'aide du code PIC 3D CALDER-Circ pour $B_0 = 60 T$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ en fonction de a_0 (laser en $z = 3300$)

Il est également possible de modifier le champ magnétique généré en jouant sur le waist du laser (Fig.5.17). Dans un premier temps, le champ magnétique généré augmente avec le waist. Au delà d'une valeur seuil du waist cette tendance s'inverse. La force pondéromotrice varie comme a_0/w_0 et son maximum se situe en $r = w_0/\sqrt{2}$.

Si a_0 reste constant, en augmentant le waist, on considère des électrons expulsés de plus en plus loin de l'axe mais moins violemment.

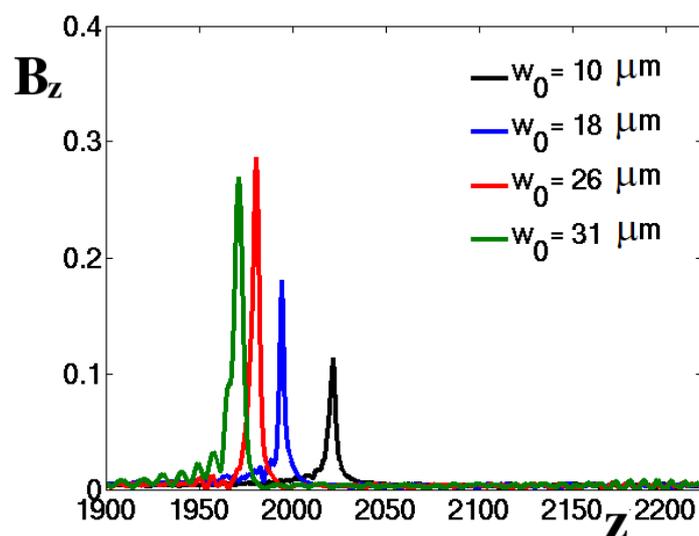


FIGURE 5.17 – Champ magnétique B_z mesuré sur l'axe en fonction de z à l'aide du code PIC 3D CALDER-Circ pour $B_0 = 60 T$, $\tau_0 = 30 fs$, $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ et $a_0 = 4$ en fonction du waist w_0 (laser en $z = 2100$)

Ces différents éléments montrent qu'en choisissant convenablement les paramètres du laser et du plasma, on peut atténuer ou bien amplifier le champ magnétique auto-généré.

5.3.3 Rétroaction du champ magnétique auto-généré

Lorsque la valeur du champ magnétique généré est élevée ($\geq 100 T$) et occupe une portion significative de l'onde de sillage, celui-ci peut rétroagir sur les trajectoires des particules. Le modèle ne tient compte que d'un champ magnétique constant et homogène. Il présente un accord approximatif avec les simulations PIC lorsque le champ magnétique appliqué est élevé et pour des densités faibles. La rétroaction du champ auto-généré n'est pas prise en compte dans le modèle. Notamment, nous avons vu que la valeur du rayon minimal atteint par les électrons était plus faible dans le modèle par rapport aux simulations. Le code PIC tient compte de la rétroaction

du champ. Une simulation où l'on supprime dans le code la rétroaction du champ magnétique auto-généré⁴ a été réalisée (Fig.5.18).

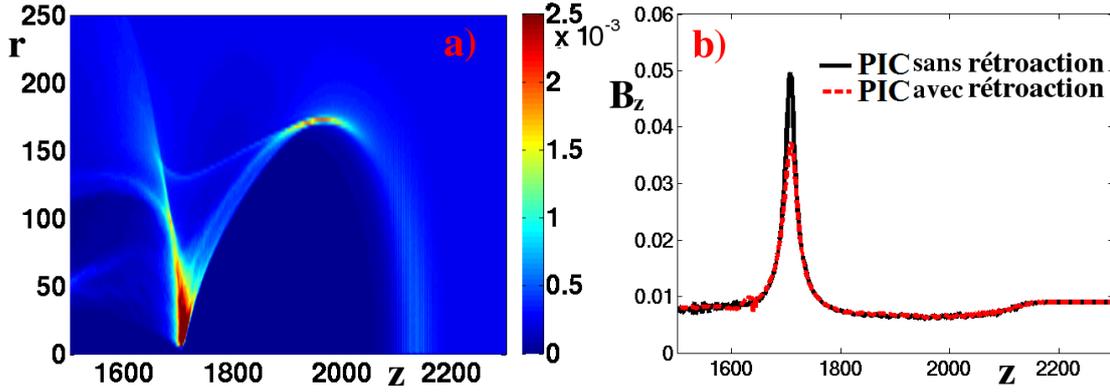


FIGURE 5.18 – $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $B_0 = 120 T$.
a) Densité électronique projetée sur le plan (r, z) sans tenir compte de la rétroaction du champ B_z généré dans les équations du mouvement des électrons et b) champ magnétique B_z en fonction de z pour $r = 0$.

Sans rétroaction, les électrons atteignent un rayon minimal plus faible que dans une simulation classique comme en atteste la figure 5.18a comparée à la figure 5.9b. La rétroaction diminue également le champ magnétique final généré (Fig.5.18b). En reprenant les paramètres utilisés dans le cas sans champ magnétique, on obtient avec le modèle les résultats de la figure 5.19. Cette fois-ci, les résultats sont conformes aux simulations PIC (sans rétroaction). Cela confirme quantitativement dans quelle mesure un fort champ magnétique rétroagit sur la trajectoire des particules. En ré-injectant le champ magnétique généré dans les équations du modèle, on peut tenir compte de la rétroaction et calculer de nouvelles trajectoires (Fig.5.20).

4. Dans le code CALDER-Circ, la décomposition en série de Fourier permet de séparer le calcul des champs dans l'onde de sillage (mode $m = 0$) du champ laser ($m = 1$). Dans l'étape d'interpolation des champs aux particules, on considère que le champ magnétique longitudinal vu par la particule est le champ appliqué initialement pour le mode $m = 0$. De cette manière, le champ laser n'est pas touché, la création de l'onde de sillage n'est pas impactée par la modification et on supprime toute rétroaction du champ magnétique longitudinal auto-généré sur la trajectoire des électrons.

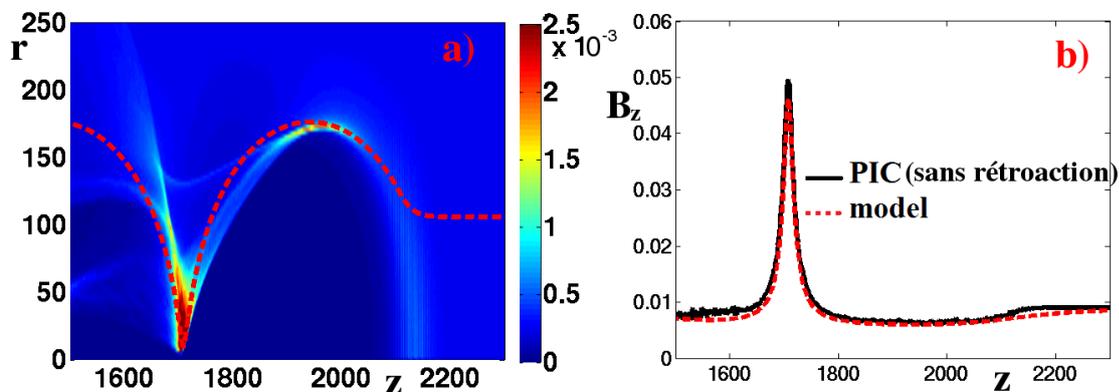


FIGURE 5.19 – Comparaison avec le modèle. $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $B_0 = 120 T$. a) Densité électronique projetée sur le plan (r, z) sans tenir compte de la rétroaction du champ B_z généré (en pointillé rouge $r_b(\xi)$ donné par le modèle) et b) champ magnétique B_z en fonction de z pour $r = 0$.

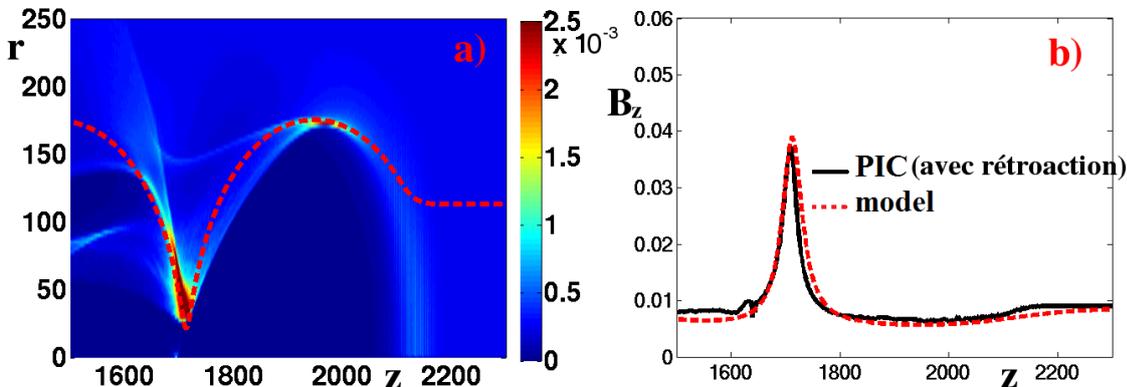


FIGURE 5.20 – Comparaison avec le modèle. $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$ et $w_0 = 18 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $B_0 = 120 T$. a) Densité électronique projetée sur le plan (r, z) (en pointillé rouge $r_b(\xi)$ donné par le modèle avec rétroaction) et b) champ magnétique B_z en fonction de z pour $r = 0$.

Comme dans la simulation PIC, le champ magnétique auto-généré redresse la trajectoire prédite des particules arrivant à l'arrière de l'onde de sillage (Fig.5.20a).

Ainsi, lorsqu'on remplace dans notre modèle le champ B_0 par le champ B_z issu d'une première résolution du système d'équation (Eqs.5.22 et 5.21), et que l'on résout à nouveau ce système d'équations, on peut reproduire fidèlement les trajectoires des électrons de la couche limite. Le champ auto-généré calculé à partir des nouvelles trajectoires issues du modèle a une amplitude plus faible (Fig.5.20b) lorsqu'on tient compte de la rétroaction en accord avec la simulation PIC.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'influence d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué sur une onde de sillage laser. Le modèle du régime de la bulle développé dans le chapitre 2 a été adapté afin de tenir compte d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué. Pour cela, nous avons étudié la dynamique des électrons dans la direction azimutale afin de déterminer un nouveau système d'équations. On montre qu'un tel champ magnétique a la capacité de déformer l'onde de sillage laser. Les électrons arrivant à l'arrière de la bulle ne coupent plus l'axe de propagation mais tournent autour. Un courant hélicoïdal se forme en surface et génère un champ magnétique capable de renforcer le champ appliqué à l'arrière. La loi de Lenz-Faraday montre que la réduction du flux magnétique à l'arrière de l'onde de sillage induit une force électromotrice et forme un courant électronique azimutal [Rassou 2015]. Par ailleurs, l'intensité et le waist du laser permettent de contrôler la génération du champ magnétique. Dans le cas où les électrons sont faiblement repoussés par la force pondéromotrice comme par exemple lorsque l'intensité du laser est faible, la variation du flux magnétique est faible et le champ généré sera également faible. La rétroaction du champ magnétique généré sur les trajectoires électroniques a ensuite été étudiée. Le champ magnétique généré redresse la trajectoire des particules à l'arrière de l'onde de sillage. Cet effet a pu être vérifié par le modèle en réinjectant le champ calculé dans nos équations pour recalculer de nouvelles trajectoires.

Les résultats de ce chapitre vont nous permettre de mieux appréhender l'injection des électrons dans l'onde de sillage en plasma magnétisé. Aussi bien dans le cas de l'auto-injection que dans celui de l'injection optique. Soulignons qu'une déformation de la bulle peut être nuisible au piégeage des particules. Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous allons étudier l'influence du champ magnétique appliqué sur les différents mécanismes d'injection.

Influence d'un champ magnétique sur le piégeage des électrons

Sommaire

6.1	Influence d'un champ magnétique sur l'auto-injection	. . . 172
6.1.1	Influence sur le piégeage des particules 172
6.1.2	Régime d'auto-injection en plasma magnétisé 173
6.2	Influence d'un champ magnétique sur l'injection optique des électrons 176
6.2.1	Influence de la densité électronique 177
6.2.2	Influence du volume de collision 182
6.3	Conclusion 185

Dans le chapitre 5, nous avons montré qu'un champ magnétique longitudinale initialement appliqué est capable d'altérer la forme de l'onde de sillage. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux phénomènes d'injection et de piégeage d'électrons par la bulle. Les effets d'un tel champ magnétique ont été rarement étudiés dans le contexte de l'accélération d'électrons par sillage laser. Hur *et al.* [Hur 2008] sont les premiers à avoir étudié le phénomène d'auto-injection en présence d'un champ magnétique appliqué. Nous avons repris cette étude dans deux articles [Bourdier 2012a, Drouin 2012]. Dans ces études, des simulations 2D sont utilisées et ne tiennent pas compte de l'altération de l'onde de sillage laser. Dans ce chapitre, nous allons examiner au moyen de simulations PIC 3D l'influence du champ magnétique appliqué sur l'auto-injection et dans l'injection optique. Le code CALDER-Circ est utilisé pour effectuer nos simulations à moindre coût [Lifschitz 2009].

6.1 Influence d'un champ magnétique sur l'auto-injection

6.1.1 Influence sur le piégeage des particules

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'influence d'un champ magnétique longitudinal, homogène, initialement appliqué au plasma dans l'onde de sillage. Nous avons montré que l'onde de sillage pouvait se déformer et on a notamment mis en évidence un courant hélicoïdal qui permet de générer des champs magnétiques gigantesques à l'arrière de l'onde de sillage. L'ouverture de l'onde de sillage peut avoir de grandes répercussions sur les champs électriques à l'intérieur de la bulle et affecter directement le piégeage.

Sur la figure 6.1, on voit distinctement que lorsqu'un champ magnétique est appliqué, le champ électrique maximal atteint en valeur absolue, est bien plus faible à l'arrière de la bulle. On observe également que cet effet est moins présent à plus haute densité étant donné que la déformation (ouverture) est réduite.

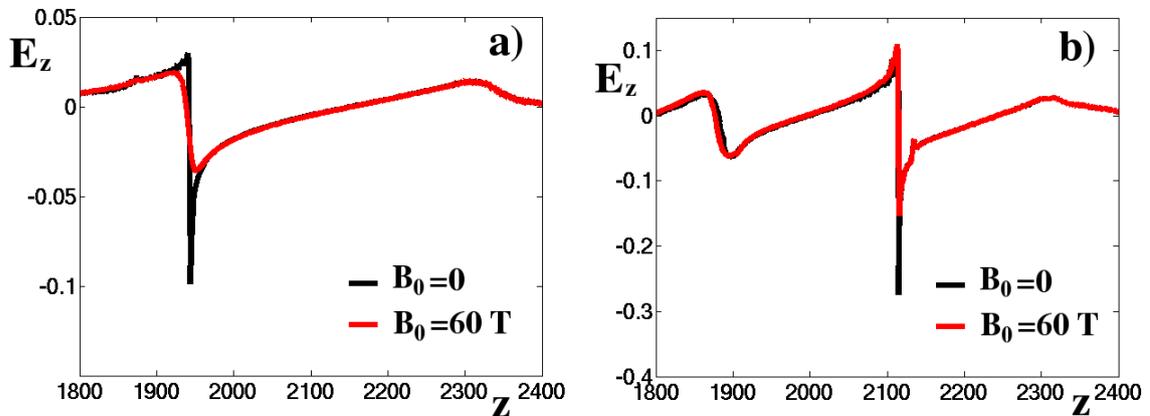


FIGURE 6.1 – Champ électrique E_z mesuré sur l'axe z pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$ avec et sans champ magnétique appliqué pour a) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et b) $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$

Ce résultat est tout simplement la conséquence du faible nombre de particules rejoignant l'axe de propagation. En absence de champ magnétique appliqué, les électrons arrivent sur l'axe ($r = 0$) et leur impulsion longitudinale croît (Fig.6.2a). Sui-

vant le choix des paramètres laser et plasma, l'impulsion longitudinale d'un électron, suivant une trajectoire sur la couche limite, peut atteindre des valeurs relativistes suffisantes pour provoquer l'auto-injection de l'électron dans l'onde de sillage. En revanche, lorsque la densité du plasma et le champ magnétique appliqué sont choisis de telle sorte que l'ouverture de l'onde de sillage empêche les électrons de se rapprocher de l'axe, alors l'impulsion atteinte par l'électron reste modérée ($p_z \leq 1$, Fig.6.2b).

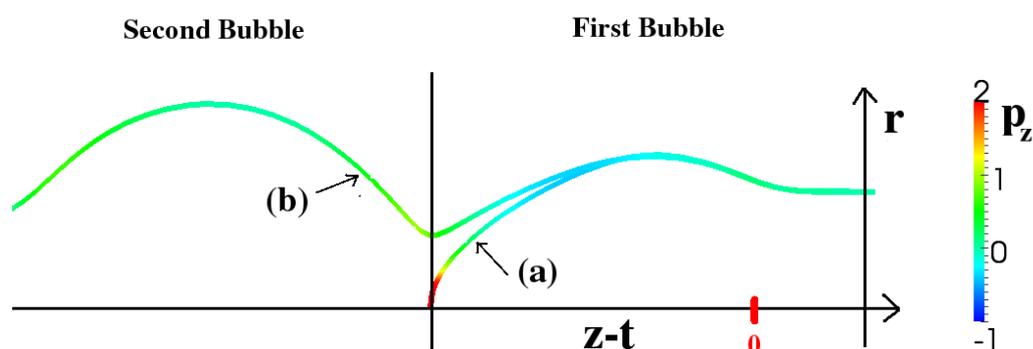


FIGURE 6.2 – Trajectoires de deux particules tests pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 \text{ fs}$, $w_0 = 18 \mu\text{m}$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ pour a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 \text{ T}$

On devine que ce mécanisme peut agir comme un limiteur, notamment dans les situations propices à l'auto-injection. Les effets de ce mécanisme sont exposés dans la prochaine sous-section.

6.1.2 Régime d'auto-injection en plasma magnétisé

Lorsque l'intensité du laser est très élevée, l'amplitude de l'onde de sillage augmente. Les électrons arrivant à l'arrière de l'onde de sillage acquièrent une impulsion longitudinale importante dans le sens de la propagation. Ainsi, certains électrons deviennent plus rapides que l'onde de sillage, c'est le régime d'auto-injection. Ces électrons entrent à l'arrière de l'onde de sillage et y sont accélérés (Fig.6.3a).

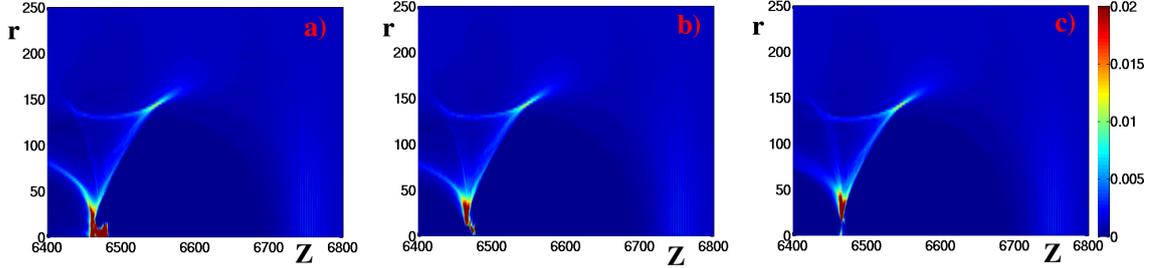


FIGURE 6.3 – Densité électronique projetée dans l'espace (z, r) à l'instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 26 \mu m$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ pour a) $B_0 = 0$, b) $B_0 = 60 T$ et c) $B_0 = 120 T$

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, une boucle de courant se forme à l'arrière de l'onde de sillage. Ainsi, lorsque le régime d'auto-injection est atteint les électrons sont injectés au niveau de ces boucles de courant (Fig.6.3b et c). En augmentant la valeur du champ magnétique appliqué, le rayon de l'ouverture à l'arrière de l'onde de sillage grandit. Le mécanisme évoqué dans la sous-section précédente permet alors de réduire considérablement le nombre de particules piégées comme en atteste les distributions en énergie (Fig.6.4).

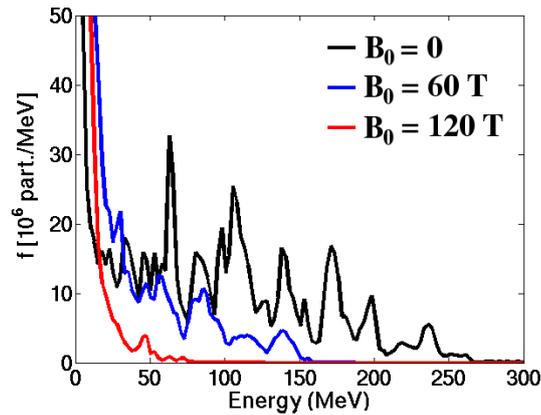


FIGURE 6.4 – Distributions en énergie des électrons piégés dans la première bulle à l'instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 26 \mu m$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ pour différents champs magnétiques appliqués

Avant l'auto-injection, la déformation de la bulle modifie les champs électriques dans l'onde de sillage lorsque le plasma est magnétisé (Fig.6.5a). Après l'auto-injection, dans le cas non magnétisé, le champ électrique est atténué (en valeur absolue) à cause des effets de beamloading (voir section 2.3.4 du chapitre 2 et la référence [Rechatin 2010]). Dans le cas d'un plasma fortement magnétisé ($B_0 = 120 T$), la charge injectée est beaucoup plus faible et le champ électrique est peu altéré après l'auto-injection (Fig.6.5).

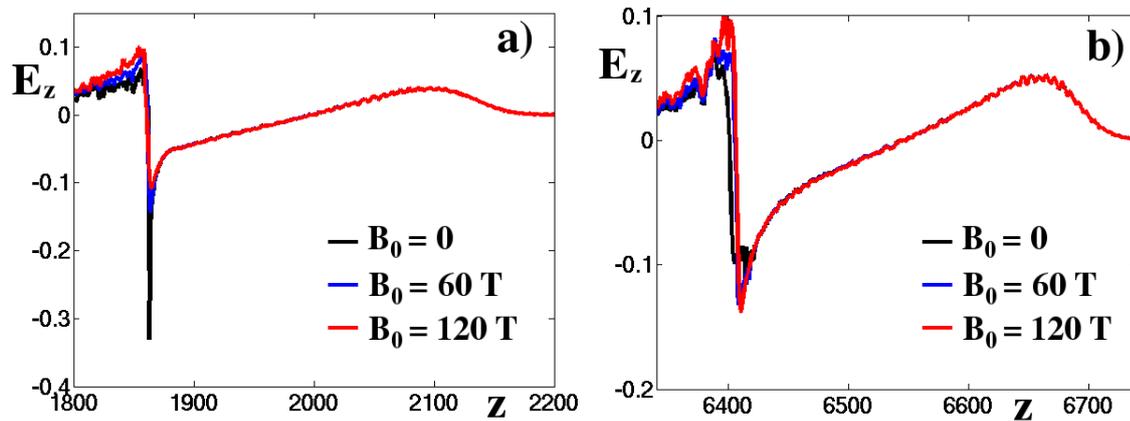


FIGURE 6.5 – Champ électrique E_z mesuré sur l'axe z pour $a_0 = 4$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 26 \mu m$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ pour différents champs magnétiques appliqués a) $t = 2400$ (avant auto-injection) et b) $t = 7000$ (après auto-injection)

On s'intéresse maintenant à des intensités lasers plus élevées (Fig.6.6). Lorsque l'intensité du laser augmente, les seuils d'auto-injection sont atteints plus facilement lors de la propagation du laser dans le plasma. Le champ magnétique continue de réduire l'auto-injection, qui croît tout de même lorsque la valeur de a_0 augmente.

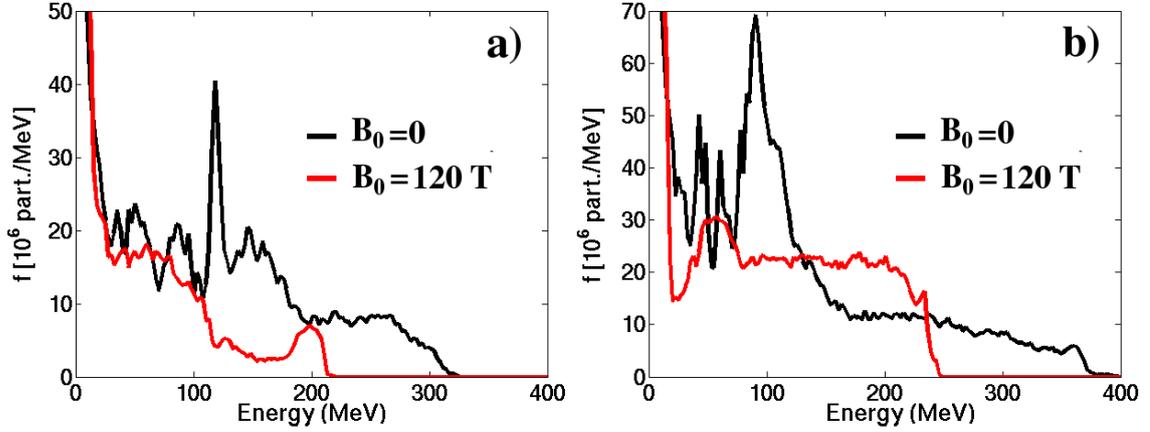


FIGURE 6.6 – Distributions en énergie des électrons piégés dans la première bulle à l'instant $t = 4860$ pour $\tau_0 = 30 fs$, $w_0 = 26 \mu m$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ avec et sans champ magnétique appliqué pour a) $a_0 = 6$ et b) $a_0 = 8$

Dans le régime d'auto-injection, les électrons arrivant à l'arrière de l'onde de sillage peuvent être piégés puis accélérés. Cela concerne essentiellement les électrons arrivant sur l'axe où la capacité de piégeage et d'accélération de l'onde de sillage est maximale. Lorsqu'un champ magnétique fort ($\sim 100 T$) est appliqué, les électrons ne rejoignent plus l'axe de propagation et leur impulsion longitudinale est insuffisante pour entraîner leur auto-injection. Ainsi, la charge auto-injectée diminue significativement lorsqu'on fait croître B_0 .

Dans la section suivante, nous allons voir comment la déformation de l'onde de sillage agit sur le piégeage avec le schéma d'injection optique.

6.2 Influence d'un champ magnétique sur l'injection optique des électrons

Dans l'injection optique [Kotaki 2004, Fubiani 2004], nous pouvons envisager plusieurs combinaisons de polarisations provoquant différents effets lors de l'injection. On a montré dans le chapitre 4 que seules les configurations que l'on note (P) et (C+) permettent l'entrée par l'avant des électrons. En configuration (P), le chauffage stochastique donne une pré-accélération aux électrons. En fonction des paramètres laser et plasma, le chauffage stochastique peut faciliter ou réduire le piégeage. En choisissant

sant les intensités, les waists et les durées des impulsions, on peut modifier le volume de collision favorable à l'injection de particules à l'avant de la bulle [Rechatin 2009b]. Dans cette section, nous allons étudier les configurations (P) et (C+) dans le cas d'un plasma initialement magnétisé. Les paramètres des simulations PIC sont identiques à ceux utilisés dans le chapitre 4 (voir 4.2.1). Pour tenir compte de l'effet complet du champ magnétique, on effectue uniquement des simulations avec le code CALDER-Circ. On rappelle que la collision des deux impulsions se produit à $t = 2600$ et on relève les distributions en énergie des électrons du faisceau piégé à $t = 7000$ après une accélération sur $560.2 \mu m$.

6.2.1 Influence de la densité électronique

Dans la section précédente, nous avons vu que la déformation de l'onde sillage et son impact sur les champs électriques dans la bulle, rend le piégeage plus contraignant. L'altération du champ électrique dans la bulle dépend de la densité électronique du plasma comme nous l'avons montré dans la sous-section 6.1.1 (Fig.6.1). Lorsqu'on choisit le schéma d'injection optique, l'altération du champ électrique doit être minimisée afin de fournir une accélération suffisante aux électrons injectés. C'est pourquoi, on parvient à piéger une charge équivalente (avec ou sans champ magnétique) à $10^{-3} n_c$ (Fig.6.7d), alors que l'on ne piège plus rien avec un champ magnétique appliqué lorsque la densité électronique vaut $2.5 \times 10^{-4} n_c$ (Fig.6.7a).

Globalement, la charge piégée puis accélérée pour B_0 non nul est plus faible que dans le cas non magnétisé (Fig.6.7). Toutefois, cette tendance s'estompe pour une densité électronique suffisamment élevée (Fig.6.7d).

Examinons à présent les propriétés du faisceau piégé dans le cas, plus favorable, d'une densité élevée ($n_e = 10^{-3} n_c$). Sur la figure 6.8, on trace la densité électronique du faisceau accéléré dans l'espace (z, p_z) pour les cas de la figure 6.7d. On constate que le champ magnétique réduit l'auto-injection des électrons et la dispersion en énergie de notre faisceau. La réduction de l'auto-injection est conforme à nos attentes, elle est provoquée par le mécanisme mis en évidence dans la section 6.1 (Fig.6.2).

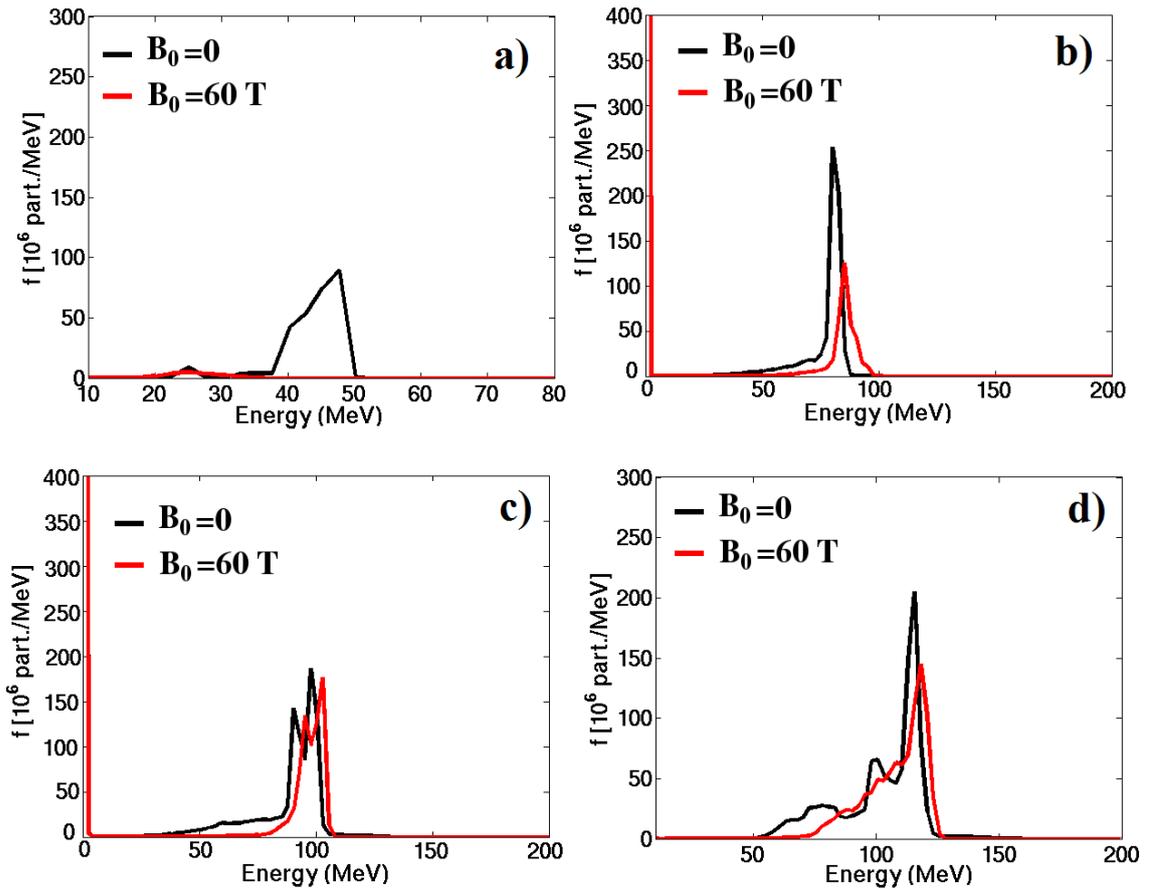


FIGURE 6.7 – Distributions en énergie du faisceau piégé en injection optique (schéma de polarisations (P)) à l'instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.1$, $\tau_0 = \tau_1 = 30$ fs, $w_0 = 18 \mu\text{m}$, $w_1 = 31 \mu\text{m}$ et a) $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$, b) $n_e = 5.0 \times 10^{-4} n_c$, c) $n_e = 7.5 \times 10^{-4} n_c$ et d) $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$

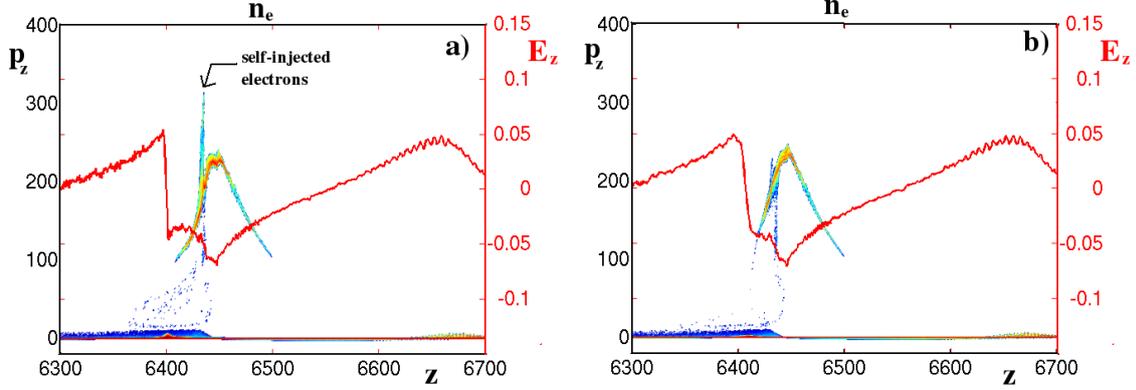


FIGURE 6.8 – Densité électronique du faisceau piégé dans la première bulle à l’instant $t = 7000$ projetée dans (z, p_z) pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.1$, $\tau_0 = \tau_1 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$, $w_1 = 31 \mu m$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$. En trait rouge, le champ électrique E_z sur l’axe est tracé en fonction de z . a) $B_0 = 0$ et b) $B = 60 T$.

Lorsqu’on augmente la valeur du potentiel vecteur du laser d’injection, un plus grand nombre de particules est injecté dans la bulle. Comme évoqué dans la partie 2, le chauffage stochastique est plus prégnant lorsqu’on fait croître la valeur de a_1 . Dans certaines conditions, le piégeage est réduit par le chauffage stochastique et on privilégie alors l’injection froide (C+).

Nous examinons l’effet de a_1 en considérant successivement une densité électronique faible ($n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$) puis moyenne ($n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$). On présente sur les figures 6.9 et 6.10, les distributions en énergie des électrons accélérés pour les configurations de polarisation (P) et (C+). Pour les densités considérées le paramètre ρ est inférieur à 1 ($\rho = 0.32$ pour $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ et $\rho = 0.65$ pour $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$), le schéma de polarisation (C+) permet de piéger plus d’électrons (voir chapitre 4) comme en atteste les distributions des électrons piégés pour $B_0 = 0$.

Pour $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$, contrairement au cas $a_1 = 0.1$ (Fig.6.7a), on parvient à piéger un paquet d’électrons en magnétisant le plasma (Fig.6.9b). Cependant, quelque soit le schéma de polarisations choisi, le champ magnétique appliqué réduit le piégeage des électrons (Fig.6.9) à faible densité électronique ($n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$).

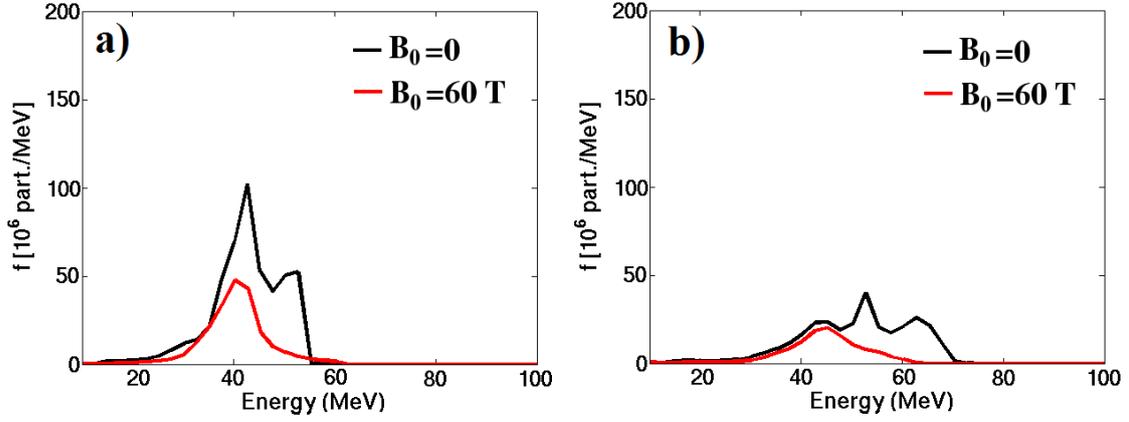


FIGURE 6.9 – Distributions en énergie du faisceau piégé à l'instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$, $w_1 = 31 \mu m$, $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ avec et sans champ magnétique appliqué et pour a) polarisation (C+) b) polarisation (P)

A plus haute densité, le champ magnétique appliqué ne réduit pas le piégeage (Fig.6.10). Comme dans le cas de la figure 6.7d, le champ magnétique réduit la dispersion en énergie du faisceau quelque soit la configuration de polarisation envisagée.

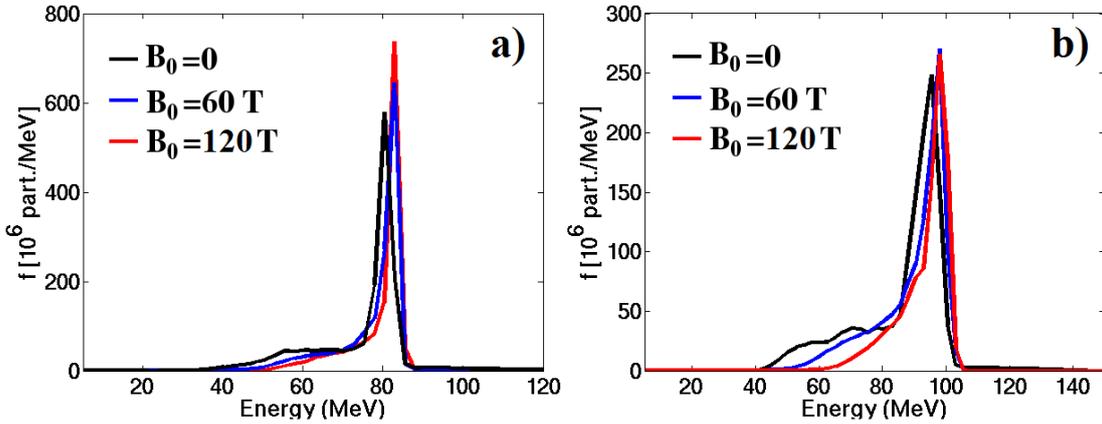


FIGURE 6.10 – Distributions en énergie du faisceau piégé à l'instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$, $w_1 = 31 \mu m$, $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ en fonction du champ magnétique appliqué et pour a) polarisation (C+) b) polarisation (P)

Afin d'augmenter la quantité d'électrons injectés, on fait varier la valeur du waist du laser principal. De cette manière, en gardant constant le potentiel vecteur, on atteint le régime d'auto-injection plus facilement. Toutefois, lorsqu'on utilise le schéma d'injection optique on cherche à éviter l'auto-injection qui dégrade la qualité du faisceau. Comme nous venons de l'expliquer, l'application d'un champ magnétique longitudinal permet de réduire voire supprimer l'auto-injection. On peut ainsi réduire la dispersion en énergie du faisceau accéléré (Fig.6.11), et produire un faisceau de meilleure qualité.

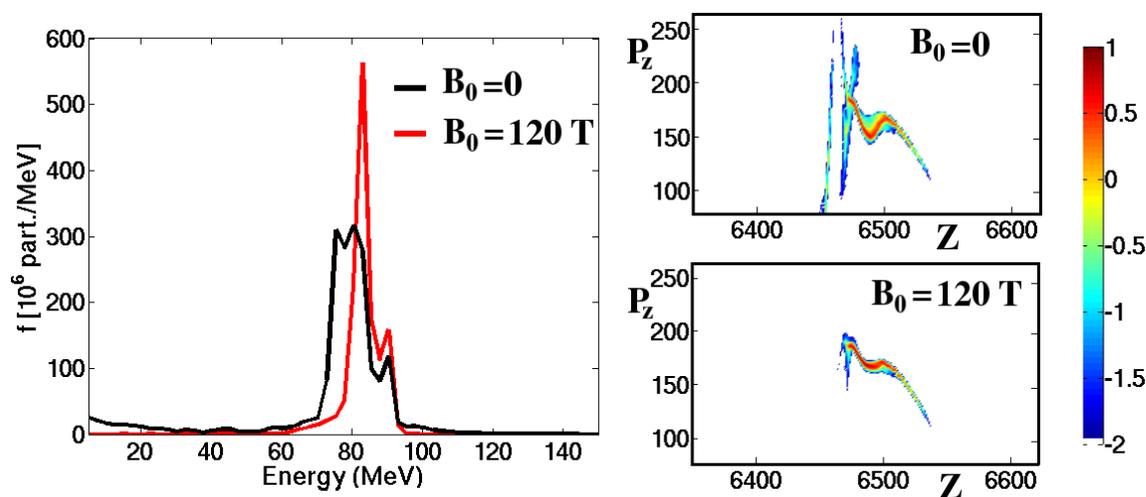


FIGURE 6.11 – Distribution en énergie du faisceau d'électrons piégés à l'instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.5$, $w_0 = 26 \mu\text{m}$, $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ en polarisation (P) avec et sans champ magnétique appliqué. À droite la densité des électrons accélérés projetée dans l'espace (z, p_z)

Ces simulations montrent que nous avons besoin de considérer des densités électroniques plus élevées afin de maîtriser la déformation de l'onde de sillage et de continuer à piéger des particules en injection optique lorsque le plasma est magnétisé. L'auto-injection réduit l'intensité des champs électriques accélérateurs par effet de beamloading (voir Figs.6.5 et 6.8). Ainsi, le faisceau piégé par injection optique ne peut pas être convenablement accéléré et sa dispersion en énergie augmente. Pour éliminer cet effet perturbateur, nous avons montré en utilisant des lasers d'injection plus intenses, que l'on peut améliorer significativement la dispersion en énergie du faisceau d'électrons, lorsqu'un champ magnétique (~ 100 T) est appliqué.

6.2.2 Influence du volume de collision

En plasma magnétisé, l'injection optique permet d'obtenir des faisceaux avec des dispersions en énergie plus faibles notamment en supprimant l'auto-injection. Suivant les paramètres lasers, on peut contrôler l'entrée des particules à l'avant de l'onde de sillage laser en modifiant le volume de collision [Davoine 2010a] (Fig. 6.12).

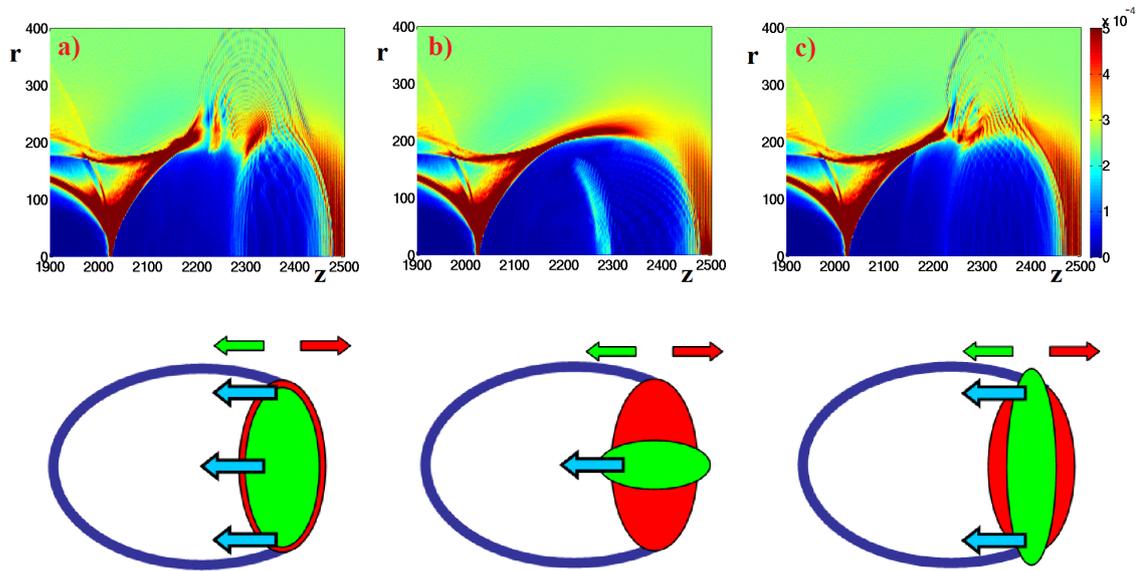


FIGURE 6.12 – Densité électronique projetée dans l'espace des phases (z, r) pendant la collision pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.5$, $w_0 = 26 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ a) $w_1 = 31 \mu m$ $\tau_1 = 30 fs$, b) $w_1 = 10 \mu m$ $\tau_1 = 30 fs$ et c) $w_1 = 31 \mu m$ $\tau_1 = 15 fs$. En dessous, un schéma indiquant les modes d'entrée des particules

Ainsi, en changeant la valeur du waist du laser d'injection, on peut injecter des électrons plus ou moins éloignés de l'axe. En reprenant le cas présenté dans la figure 6.11, nous allons examiner l'influence du champ magnétique en fonction du waist du laser d'injection (Fig.6.13).

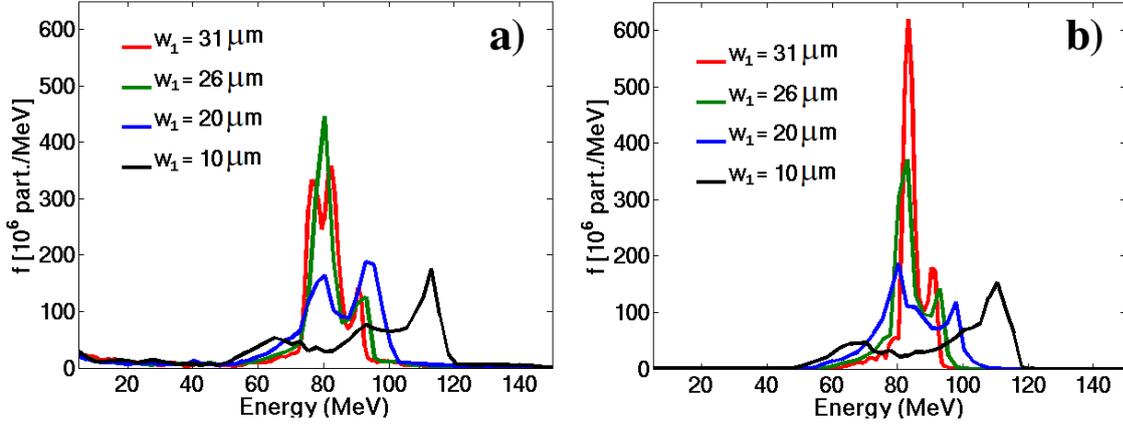


FIGURE 6.13 – Distributions en énergie des électrons piégés (z, r) à $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.5$, $w_0 = 26 \mu m$, $\tau_0 = \tau_1 = 30 fs$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ pour différentes valeurs de w_1 , a) $B_0 = 0$ et b) $B_0 = 120 T$.

Lorsque les électrons injectés sont initialement proches de l'axe, les cas sans et avec champ magnétique appliqué donnent des résultats similaires ($w_1 = 10 \mu m$). En considérant des waists plus grands, la dispersion en énergie du faisceau accéléré diminue et on obtient des faisceaux de meilleure qualité. Lorsque le waist du laser d'injection est plus grand que celui du laser principal, on retrouve la situation de la figure 6.11. En présence d'auto-injection, les effets de beamloading sont plus importants lorsque le plasma n'est pas magnétisé. Ceux-ci conduisent à une plus grande dispersion de la distribution en énergie du faisceau (Fig.6.13a).

Afin de mieux comprendre ce mécanisme, on se place dans la situation décrite dans la figure 6.12c. De cette manière, l'injection des électrons est en grande partie hors axe. En appliquant un champ magnétique, on inhibe l'auto-injection et on réduit la dispersion en énergie du faisceau. Dans ce cas, les électrons injectés hors axe présentent une distribution plus mono-énergétique (Fig.6.14).

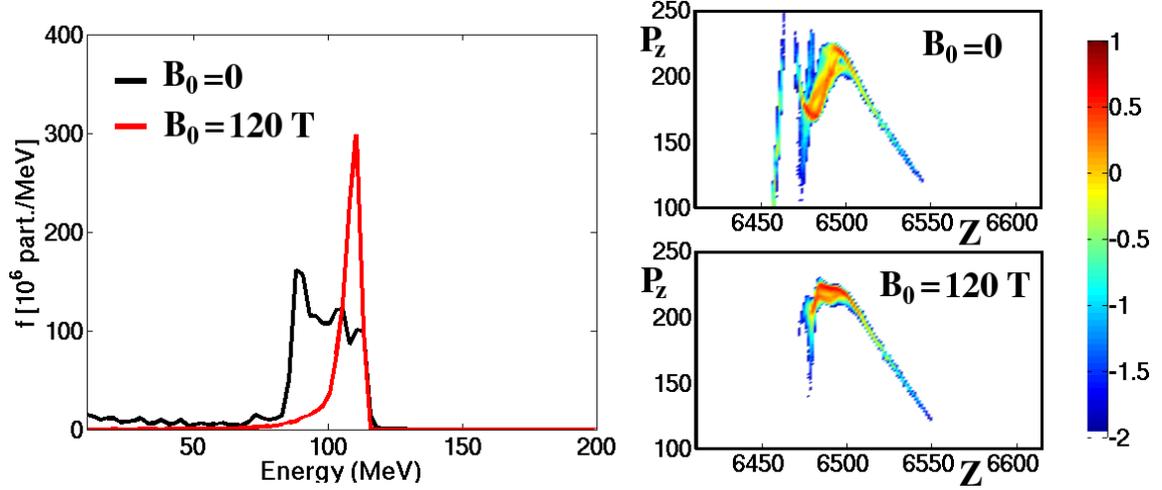


FIGURE 6.14 – Distribution en énergie du faisceau piégé à l’instant $t = 7000$ pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.5$, $w_0 = 26 \mu m$, $\tau_0 = 30 fs$, $w_1 = 31 \mu m$, $\tau_1 = 15 fs$ et $n_e = 1.0 \times 10^{-3} n_c$ avec $B_0 = 120 T$. A droite, la densité des électrons accélérés projetée dans l’espace (z, p_z)

En choisissant astucieusement nos paramètres de simulation, on peut modifier la forme du faisceau accéléré et obtenir des faisceaux annulaires (Fig.6.15).

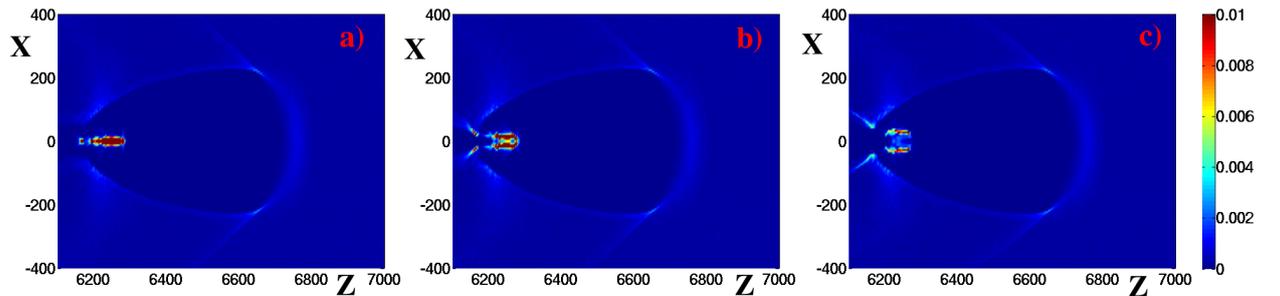


FIGURE 6.15 – Densité électronique du plasma à l’instant $t = 7000$ projetée dans (z, x) pour $a_0 = 8$, $a_1 = 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = 30 fs$, $w_0 = 18 \mu m$, $w_1 = 31 \mu m$ et $n_e = 2.5 \times 10^{-4} n_c$ en polarisation P avec a) $B_0 = 0$, b) $B_0 = 20 T$ et c) $B_0 = 60 T$

Rappelons que les électrons injectés hors axe ne peuvent franchir un certain rayon minimal à l’arrière de l’onde de sillage lorsque le plasma est magnétisé [Bulanov 2013].

Ainsi, en augmentant la valeur du champ magnétique appliqué, le rayon du faisceau annulaire augmente (Fig.6.15).

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'influence d'un champ magnétique longitudinal initialement appliqué sur l'injection dans une onde de sillage laser a été étudiée. Les résultats du chapitre 5 ont montré que la forme de l'onde de sillage pouvait être modifiée en appliquant un champ magnétique longitudinal. Cette altération entraîne une réduction du champ électrique accélérateur à l'arrière de l'onde de sillage. De plus, les électrons ne rejoignent plus l'axe de propagation à l'arrière de l'onde de sillage.

En régime d'auto-injection, les électrons acquièrent une énergie suffisante après avoir été expulsés par la force pondéromotrice du laser. En revenant à l'arrière de l'onde de sillage, ils peuvent y être injectés. Le champ magnétique appliqué inhibe ce phénomène et réduit le piégeage.

Dans l'injection optique, l'altération de l'onde de sillage réduit voire supprime le piégeage lorsque la densité du plasma est faible et/ou le champ magnétique appliqué est fort. En considérant des densités électroniques suffisantes, l'inhibition du piégeage est atténuée et le piégeage est quasiment identique au cas sans champ magnétique. En augmentant la densité, le régime d'auto-injection est plus facilement atteint. Des faisceaux d'électrons piégés présentant une plus faible dispersion en énergie ont été obtenus lorsque le plasma est magnétisé. Le champ magnétique permet de juguler le phénomène d'auto-injection, et de maîtriser les effets de beamloading induits, ainsi on peut améliorer la qualité du faisceau. Par conséquent, en utilisant un champ magnétique, on peut considérer des plasmas de plus grande densité et faire de l'injection optique tout en réduisant l'auto-injection. De cette manière, on garde le contrôle de la charge injectée, l'une des propriétés de l'injection optique.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'accélération d'électrons par onde de sillage laser pourrait représenter le futur des accélérateurs de particules. Ces accélérateurs utilisent le plasma comme milieu accélérateur ce qui permet d'atteindre de très hautes énergies sur de très courtes distances. Grâce aux progrès de la technologie laser, un nouveau régime a pu être atteint dans l'accélération par onde de sillage laser.

En considérant une impulsion laser ultra-courte (~ 30 fs) et d'intensité supérieure à 10^{18} W.cm⁻², on atteint "le régime de la bulle". Dans le régime de la bulle, la force pondéromotrice du laser expulse totalement les électrons sur son passage laissant sur place les ions positifs. Les électrons sont rappelés par les ions et forment une fine couche à la surface de la bulle d'ions. Les gradients de champs peuvent ainsi être très élevés.

La première partie de cette thèse a été dédiée à la modélisation de l'onde de sillage laser dans le régime de la bulle. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les formalismes introduits par Lu [Lu 2006] et Yi [Yi 2013]. Nous avons extrait les paramètres du laser et du plasma pour lesquels ce régime est pleinement installé. Dans les cas où l'intensité du laser est faible ($a_0 < 2$) et pour des plasmas modérément dilués ($n_e \geq 0.001 n_c$), les électrons sont faiblement expulsés par la force pondéromotrice du laser. Cela conduit à la formation d'une onde de sillage dans laquelle les électrons ne sont que partiellement évacués. En général nous éviterons cette situation et nous nous placerons dans le régime prometteur du blowout, l'onde de sillage est alors vide d'électron. Le modèle analytique nous a permis de calculer les champs électriques responsables du piégeage et de l'accélération des particules. Ainsi, nous avons pu modéliser le beamloading provoqué par un faisceau d'électrons accélérés à l'arrière de l'onde de sillage. Ce phénomène diminue l'intensité du champ accélérateur dans la bulle et limite la charge pouvant être piégée.

L'optimisation de la charge accélérée a été l'un des objectifs de ce travail. Nous avons ainsi cherché à utiliser le chauffage stochastique pour pré-accélérer les électrons et les aider à être plus facilement piégés dans l'onde de sillage. L'apparition du chauffage stochastique lors de l'interaction de deux ondes planes avec un plasma a d'abord été étudiée par J.M Rax *et al.* [Rax 1992] puis par A. Bourdier et D. Patin [Patin 2010, Bourdier 2005]. Le travail de D. Patin a permis de déterminer les conditions maximisant le chauffage des électrons. Le chauffage stochastique est très intense lorsque les ondes lasers avec des polarisations linéaires et parallèles

sont contrepropagatives. Nous avons repris le travail de D. Patin afin de déterminer dans quelle condition le critère de Chirikov est satisfait et nous avons mené notre étude dans le cas intéressant où les deux ondes sont exactement contrepropagatives [Rassou 2014]. Ce critère indique les situations où le chauffage stochastique peut être présent. Nous avons ensuite vérifié l'existence de chauffage stochastique lorsque deux impulsions lasers contrepropagatives de courte durée ($< 100 fs$) se propagent dans un plasma. Ainsi, l'utilisation de ce mécanisme de chauffage au moment de l'injection des électrons dans l'onde de sillage laser a pu être envisagée.

L'injection optique permet l'entrée des électrons dans l'onde de sillage grâce à la collision avec un second laser contrepropagatif. Cette méthode permet de contrôler les propriétés du faisceau d'électrons (énergie, charge, ...) et autorise une meilleure reproductibilité des expériences. L'onde de battement créée par la collision entraîne l'injection d'électrons à l'avant de l'onde de sillage. Lorsque les deux lasers sont polarisés linéairement et ont leur champ électrique parallèle (P), le processus d'injection fait intervenir un terme de force stationnaire dû au battement d'onde ainsi que des termes supplémentaires susceptibles de provoquer du chauffage stochastique. Ce schéma d'injection avec chauffage a été comparé à l'injection froide pour laquelle les deux lasers sont polarisés circulairement (C+). Dans ce dernier schéma, l'injection est uniquement due au battement d'onde. Nous avons mis en évidence des situations où l'injection avec chauffage est plus efficace et piège davantage plus d'électrons. Pour déterminer le meilleur choix de polarisation, un paramètre noté ρ a été introduit. Celui-ci mesure le rapport entre la longueur d'interaction des deux lasers et le rayon longitudinal de la cavité [Rassou 2014, Bourdier 2013]. On distingue deux situations :

- $\rho > 1$: Le rayon de l'onde de sillage est plus petit que la longueur d'interaction entre les deux lasers. Dans cette situation, le chauffage stochastique réduit le nombre de particules piégées dans l'onde de battement. L'inhibition de l'onde de sillage est plus faible que dans la configuration C+. Le chauffage stochastique permet également de pré-accélérer les électrons en volume, et ainsi la charge piégée est plus importante qu'avec l'injection froide.
- $\rho < 1$: Le rayon de l'onde de sillage est plus grand que la longueur d'interaction entre les deux lasers. Dans cette situation, l'inhibition de l'onde de sillage a généralement une influence marginale. Les électrons injectés par l'onde de battement uniquement sont plus facilement piégés. Par contre, les électrons stochastiquement pré-accélérés sont perdus. L'injection froide donne un meilleur

résultat.

L'utilisation du chauffage stochastique permet dans certaines situations de piéger plus de particules mais les faisceaux créés sont parfois de mauvaise qualité et peuvent exhiber une grande dispersion en énergie. Ainsi, l'injection froide pourra être privilégiée pour obtenir des faisceaux de meilleure qualité (faible dispersion en énergie et meilleures propriétés transverses).

Dans la troisième partie, nous avons exploré l'impact d'un champ magnétique longitudinal sur la forme de l'onde de sillage et les mécanismes de piégeage des électrons. Dans certaines situations, il est possible d'améliorer la qualité des faisceaux produits par rapport au cas non magnétisé. Nous avons considéré des champs allant jusqu'à la centaine de teslas. Bulanov *et al.* [Bulanov 2013] ont montré la nécessité d'utiliser des simulations 3D pour tenir compte de l'action complète du champ magnétique longitudinal sur la trajectoire des électrons. Nous avons utilisé le code CALDER-Circ pour effectuer nos simulations 3D. Avec ce code PIC nous résolvons les équations de Maxwell pour les m ($m \leq 2$) premiers modes de la décomposition en série de Fourier des champs, en coordonnées cylindriques. Ce qui procure une réduction du temps de calcul significative par rapport à un code PIC pleinement 3D.

A l'aide de simulations 3D et du modèle analytique, nous avons montré que l'onde de sillage créée est déformée en présence d'un champ magnétique longitudinal. Si le champ appliqué est suffisamment élevé et que la densité électronique est faible, l'onde de sillage ne se referme pas à l'arrière [Rassou 2015]. L'influence de la densité électronique et du champ magnétique initialement appliqué sur le rayon de l'ouverture, à l'arrière de l'onde de sillage, ont été étudiées.

La loi de Lenz-Faraday montre que la variation du flux magnétique engendre un courant à la surface de l'onde de sillage. Ce courant hélicoïdal génère à son tour un champ magnétique qui renforce, à l'arrière de l'onde de sillage, le champ appliqué initialement. Ainsi, des champs magnétiques atteignant le millier de teslas peuvent être générés avec seulement quelques teslas pour le champ initialement appliqué.

Le code CALDER-Circ nous a ensuite permis d'étudier l'injection et le piégeage des électrons en plasma magnétisé. Lorsque le champ magnétique appliqué est assez fort pour provoquer l'ouverture de l'onde de sillage, la force exercée par le champ électrique accélérateur est nettement diminuée. Par conséquent, le champ magnétique agit comme un inhibiteur du mécanisme d'auto-injection.

La déformation de l'onde de sillage entraîne une inhibition du champ électrique

longitudinal, ce qui rend le piégeage plus contraignant même lorsqu'on emploie le schéma d'injection optique. Ainsi lorsque la densité du plasma est faible ($\sim 10^{-4} n_c$) et/ou le champ appliqué est fort, le piégeage est réduit, voire supprimé. En considérant des densités du plasma plus élevées, on obtient des faisceaux d'électrons semblables à ceux du cas non magnétisé. Toutefois, une partie de la charge peut être piégée par auto-injection. Ce faisant la charge totale piégée (auto-injection et injection optique) est beaucoup plus importante, ce qui induit une plus grande dispersion en énergie du faisceau à cause des effets de beamloading [Rechatin 2010]. Un champ magnétique appliqué inhibe l'auto-injection, et réduit ainsi la dispersion en énergie du faisceau. Finalement, dans le cadre de l'injection optique, on peut considérer des intensités plus élevées pour le laser principal tout en gardant le contrôle de l'injection, lorsque le plasma est magnétisé.

Perspectives

Validations expérimentales

Les résultats présentés dans cette thèse ont mis en évidence l'intérêt du chauffage stochastique et de l'utilisation d'un champ magnétique dans l'accélération d'électrons par onde de sillage laser. Il serait donc souhaitable de confronter nos analyses à des résultats expérimentaux. La plupart des cas étudiés dans cette thèse semblent difficiles à reproduire expérimentalement car ils correspondent à des champs magnétiques trop élevés. Cependant, en considérant des densités électroniques de l'ordre de $10^{-4} n_c$, on peut utiliser un champ magnétique d'environ 10 T et profiter de l'amplification du champ magnétique à l'arrière de l'onde de sillage. Les techniques expérimentales de visualisation de l'onde de sillage (par exemple l'ombroscopie [Sävert 2015]) pourraient permettre de confirmer nos résultats concernant l'ouverture de l'onde de sillage lorsqu'un champ magnétique est appliqué.

L'utilisation du champ magnétique requiert également l'étude des méthodes expérimentales permettant de magnétiser le plasma. La méthode de création de plasma par laser combinée à l'application d'un champ magnétique longitudinal permet de créer un canal de densité capable de guider les impulsions lasers [Froula 2009]. Dans ces conditions, on peut en utilisant des impulsions lasers très intenses ($I \sim 5 \times 10^{18}$) accélérer des faisceaux d'électrons sur une voire plusieurs dizaines de centimètres. Lorsque le champ magnétique appliqué est assez intense (>3 T), la température des électrons du plasma augmente (voir Fig.1.5 du chapitre 1). L'effet de la température

initiale des électrons n'a pas été pris en compte dans notre étude et pourrait intervenir dans le processus de piégeage.

Par ailleurs, l'utilisation d'un faisceau d'électrons à la place du laser pour créer l'onde de sillage pourrait également être étudiée en plasma magnétisé. On a montré que la déformation de l'onde de sillage laser en plasma magnétisé était due aux électrons hors axe. Ceux-ci, expulsés par la force pondéromotrice ne rejoignent plus l'axe de propagation à l'arrière de l'onde de sillage ; à cause des effets combinés de la force de Laplace et de la loi de Lenz-Faraday. En utilisant un faisceau dense d'électrons, ce sont les électrons proches de l'axe qui sont expulsés et responsables de la formation de l'onde de sillage. La déformation de l'onde de sillage pourrait être différente de même que les champs électromagnétiques à l'intérieur.

Accélération des électrons

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la création de l'onde de sillage laser puis au piégeage des particules. La phase d'accélération proprement dite, n'a pas été abordée. Lorsque le chauffage stochastique est utilisé pour améliorer le piégeage, on est amené à considérer des plasmas plus denses pour vérifier $\rho > 1$. A plus haute densité électronique, les champs accélérateurs sont également plus intenses. Ainsi, on peut atteindre des énergies très élevées sur des distances plus courtes que dans un cas où la densité est plus faible. En revanche, la longueur de déphasage sera plus faible. Cela signifie que la longueur d'accélération est limitée. Pour palier à ce problème, on peut utiliser des gradients pour guider l'impulsion ou recourir à une accélération multi-étages [Kim 2013, Chancé 2014]. Dans l'accélération multi-étages, on piège les électrons et on les pré-accélère dans un accélérateur laser plasma puis le faisceau pré-accéléré est envoyé successivement dans une série d'accélérateurs laser-plasma.

Dans ce travail, nous avons déterminé dans quelle mesure il est possible d'améliorer le piégeage et les propriétés transverses du faisceau en plasma magnétisé. Mais les effets du champ magnétique sur l'onde de sillage et le piégeage ont demandé toute notre attention, et l'impact sur les propriétés du faisceau n'a pas pu être approfondi. Dans les articles de Hosokai *et al.* [Hosokai 2006, Hosokai 2010], l'influence d'un champ magnétique longitudinal sur l'accélération d'électrons par onde de sillage laser a été étudiée expérimentalement. Hosokai *et al.* obtiennent des faisceaux avec une faible dispersion en énergie et une très faible émittance en appliquant seulement

quelques teslas. Les faisceaux produits présentent une forme particulière baptisée "Four ray star" par les auteurs. Dans notre travail, nous avons également observé des faisceaux avec des formes particulières lorsqu'un champ magnétique est appliqué. L'accélération de ce type de faisceau sur de plus grandes distances ainsi que les caractéristiques du rayonnement produit pourraient être étudiées plus en détails.

Code CALDER-Circ ajout d'un champ magnétique initial

Le code CALDER-Circ [Lifschitz 2009] est une alternative à une description PIC complètement 3D en espace. La décomposition de Fourier, sur laquelle il repose, tire profit de la symétrie qui existe dans l'interaction laser-plasma en plasma dilué ($n_e \ll n_c$). En utilisant la décomposition des champs en série de Fourier selon la coordonnée cylindrique θ , la résolution des équations de Maxwell pour chaque mode ne fait intervenir que z et r .

Par ailleurs, les équations de Maxwell étant linéaires chaque mode évolue indépendamment dans le vide. Mais les modes deviennent couplés en présence d'un plasma à cause des termes sources de densité de charge et de courant. Dans la grande majorité des cas, deux modes sont suffisants pour reproduire fidèlement l'accélération par sillage laser. Le mode $m = 0$ décrivant la forme de la cavité et le mode $m = 1$ le champ laser. Ainsi, le coût en temps CPU d'un calcul CALDER-Circ est du même ordre que celui d'un calcul 2D. Dans cette annexe, une brève description du code CALDER-Circ est présentée. En outre, nous expliquons comment modifier les équations pour tenir compte d'un champ magnétique externe.

A.1 Décomposition de Fourier

Dans le code CALDER-Circ, les champs sont exprimés en fonction des coordonnées cylindriques r , θ et z . Par exemple le champ magnétique sera décrit de la manière suivante :

$$B(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z$$

Une transformée de Fourier selon θ permet d'exprimer le champ sous forme d'une série, cela donne pour la composante z du champ magnétique :

$$B_z(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{B}_z^m(r, z) e^{-im\theta}$$

194 Annexe A. Code CALDER-Circ ajout d'un champ magnétique initial

avec

$$\hat{B}_z^m(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_z(r, \theta, z) e^{im\theta} d\theta$$

Les champs considérés sont tous réels et par conséquent $\hat{B}_z^m(r, z) = \overline{\hat{B}_z^{-m}(r, z)}$. Ainsi, le champ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} B_z(r, \theta, z) &= \hat{B}_z^0(r, z) + \sum_{m=1}^{+\infty} \Re \left[2\hat{B}_z^m(r, z) e^{-im\theta} \right] \\ &= \tilde{B}_z^0(r, z) + \sum_{m=1}^{+\infty} \Re \left[\tilde{B}_z^m(r, z) \right] \cos(m\theta) \\ &\quad + \Im \left[\tilde{B}_z^m(r, z) \right] \sin(m\theta) \end{aligned}$$

où on note \Re partie réelle et \Im partie imaginaire et on définit :

$$\tilde{B}_z^0(r, z) = \hat{B}_z^0(r, z)$$

et pour $m \geq 1$

$$\tilde{B}_z^m(r, z) = 2\hat{B}_z^m(r, z)$$

Dans ce code, ce sont les composantes $\tilde{F}^m(r, z)$ (où F représente une composante du champ électromagnétique) qui sont calculées. L'ajout d'un champ magnétique homogène initial suggère que le champ magnétique peut s'écrire à tout instant comme la somme d'une partie variable et constante :

$$\begin{aligned} \tilde{B}(r, \theta, z) &= (\tilde{B}_r(r, \theta, z) + B_{0r}) \mathbf{e}_r \\ &\quad + (\tilde{B}_\theta(r, \theta, z) + B_{0\theta}) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (\tilde{B}_z(r, \theta, z) + B_{0z}) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Les parties dépendantes de θ ne concernent que les modes $m \geq 1$. Par conséquent pour le calcul des champs on a (exemple avec la composante B_z) :

$$\begin{aligned} B_z(r, \theta, z) &= \tilde{B}_z^0(r, z) + B_{0z} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{+\infty} \Re \left[\tilde{B}_z^m(r, z) \right] \cos(m\theta) + \Im \left[\tilde{B}_z^m(r, z) \right] \sin(m\theta) \end{aligned}$$

A.2 Équations de Maxwell

Lorsque les champs sont exprimés en coordonnées cylindriques, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_r}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} - J_r \\
 \frac{\partial E_\theta}{\partial t} &= \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} - J_\theta \\
 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - J_z \\
 \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \\
 \frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= -\frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial r} \\
 \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

Ces équations sont linéaires. En remplaçant les champs par leur série, on en déduit un jeu équivalent d'équations pour chaque mode m . En utilisant en plus la relation suivante :

$$\frac{\partial \left(\tilde{F}^m(r, z) e^{-im\theta} \right)}{\partial \theta} = -im \tilde{F}^m(r, z) e^{-im\theta},$$

on en déduit les dérivées selon θ en fonction du mode m .

Si on ajoute un champ initial homogène, alors il n'intervient pas dans la dérivée par rapport à θ . Dans le code CALDER-Circ, on calcule un nombre fini de modes puis on additionne le tout. Le calcul de la dérivée dans le cas du champ B_z selon θ donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_z}{\partial \theta} &= \frac{\partial (B_z(r, \theta, z) + B_{0z})}{\partial \theta} \\
 &= \frac{\partial \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{B}_z^m(r, z) e^{-im\theta} + B_{0z} \right)}{\partial \theta} \\
 &= -i \sum_{m=0}^{+\infty} m \tilde{B}_z^m(r, z) e^{-im\theta}
 \end{aligned}$$

La composante homogène s'annule après dérivation selon θ . Si on initialise tous les modes avec le champ magnétique homogène, la résolution des équations de Maxwell sera incorrect pour les modes $m \geq 1$. Il suffit donc d'initialiser notre champ magnétique sur le mode $m = 0$ uniquement pour obtenir un plasma initialement magnétisé

et une résolution correcte des équations de Maxwell pour tous les modes de la série de Fourier.

A.3 Mouvement des macro-particules

Le code CALDER-Circ utilise les coordonnées cylindriques pour le calcul des champs électromagnétiques. Toutefois, les équations du mouvement qui permettent de mettre à jour les positions et les impulsions des macro-particules sont résolues en coordonnées cartésiennes. Dans ce code, chaque maille est sous forme d'anneau en r_j , d'épaisseur Δz et Δr . Le volume d'une maille dépend de la position r_j et vaut $V_{maille} = 2\pi r_j \Delta z \Delta r$. Le volume de la maille augmente linéairement avec r_j . A l'initialisation du plasma, on choisit le même nombre de macro-particules dans chaque maille. Étant donné que chaque maille a un volume différent, il faut attribuer un poids différent à la macro-particule en fonction de sa maille d'origine. De cette manière, la densité du plasma est homogène d'une maille à l'autre lors de l'initialisation. De ce fait, il faut considérer un nombre important de macro-particules par maille pour obtenir une précision correcte dans nos simulations.

A.4 Simulations numériques avec CALDER-Circ en plasma magnétisé

Le code CALDER-Circ donne des résultats comparables au code cartésien 3D CALDER pour l'accélération par onde de sillage laser avec seulement les deux premiers modes de la série de Fourier [Lifschitz 2009, Davoine 2010a]. Dans le cas d'un plasma magnétisé, nous allons vérifier que c'est toujours le cas.

On effectue des simulations avec le code CALDER et CALDER-Circ avec des paramètres laser-plasma identiques. La figure A.1 montre pour les deux codes, la carte de densité électronique pour des simulations d'accélération d'électrons par onde de sillage laser avec un plasma initialement magnétisé. Les paramètres de simulation sont ceux utilisés dans le chapitre 4 (voir 4.2.1) exceptés la taille de la fenêtre de simulation qui compte 6400×300 cellules. On peut noter que dans le code CALDER-Circ, les mailles étant cylindriques, une fenêtre de simulation avec le même nombre de cellules sera en réalité deux fois plus grande transversalement que dans le code cartésien. Dans la figure A.1, les électrons sont injectés dans la première bulle par injection optique avec un second laser a_1 . Les deux figures sont assez semblables et la

A.4. Simulations numériques avec CALDER-Circ en plasma magnétique

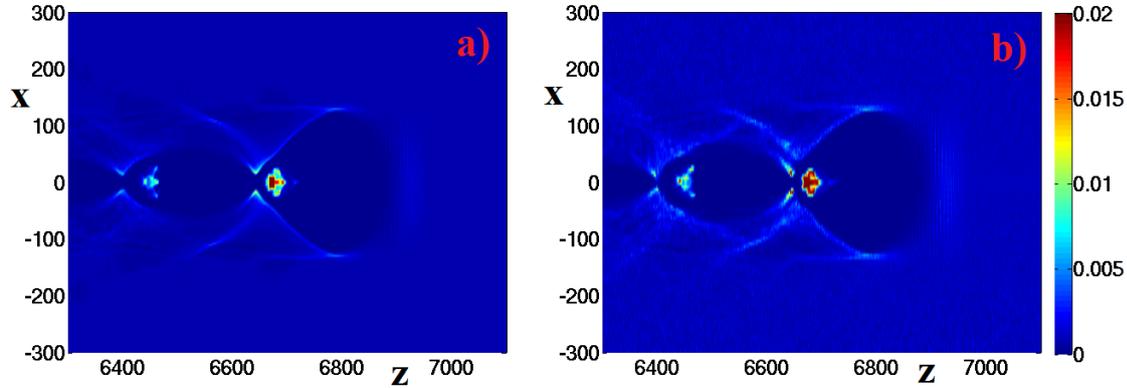


FIGURE A.1 – Densité électronique projetée dans l'espace des phases (z, x) pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.1$ $n_e = 0.001 n_c$ et $B_0 = 60 T$ à $t = 7000$ a) CALDER 3D et b) CALDER-Circ

forme des faisceaux accélérés dans les deux premières bulles est quasiment identique pour les deux codes. Si on regarde maintenant la figure de distribution en énergie (Fig.A.2), on retrouve des résultats à peu près identiques.

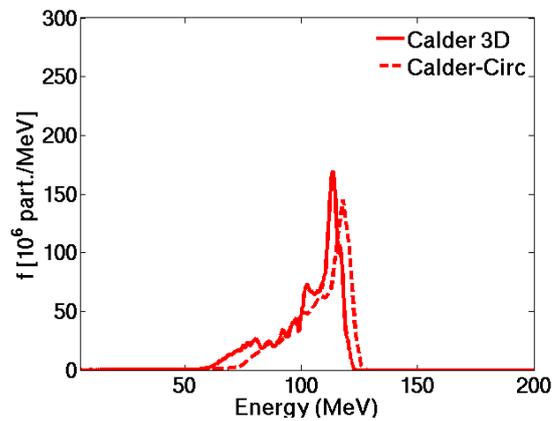


FIGURE A.2 – Distribution en énergie des électrons accélérés dans le première bulle pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.1$ $n_e = 0.001 n_c$ et $B_0 = 60 T$ à $t = 7000$ avec CALDER 3D et CALDER-Circ

Le code CALDER-Circ modélise fidèlement les champs électromagnétiques dans

198 Annexe A. Code CALDER-Circ ajout d'un champ magnétique initial

la bulle (Fig.A.3). Dans nos simulations, seuls les deux premiers modes de la série de Fourier ($m = 0$ et 1) ont été considérés. On constate que cela est suffisant pour modéliser l'accélération par onde de sillage laser en plasma magnétisé.

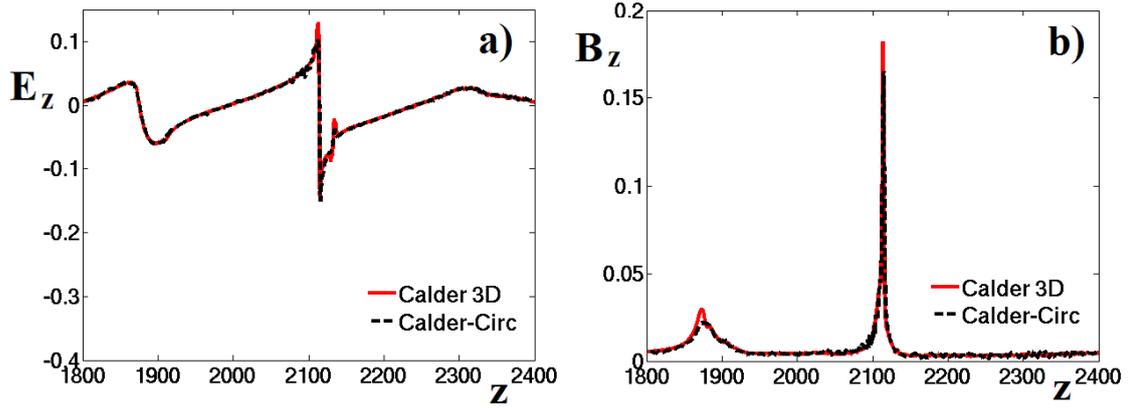


FIGURE A.3 – Champs électromagnétiques calculé sur l'axe pour $a_0 = 4$, $a_1 = 0.1$ $n_e = 0.001 n_c$ et $B_0 = 60 T$ à $t = 2400$ avec CALDER 3D et CALDER-Circ a) Champ E_z et b) Champ B_z

Dans ce manuscrit, nous avons eu recours aux codes CALDER et CALDER-Circ pour nos simulations numériques. Dans certaines situations, des simulations 2D sont suffisantes et nous utilisons le code CALDER. Dans le cas d'un plasma magnétisé, une description 3D est nécessaire et il est préférable d'effectuer des simulations CALDER-Circ afin de réduire le temps des simulations.

Modélisation de l'onde de sillage dans le régime du Blowout : Calculs des potentiels scalaire et vecteur

Dans cette annexe, le détail des calculs des potentiels scalaire et vecteur est présenté. Les expressions de ces potentiels permettent de modéliser l'onde de sillage créée par laser dans le régime de la bulle. Ce modèle est exposé dans le chapitre 2.

B.1 Calcul du potentiel effectif

Pour déterminer la forme de l'onde de sillage, nous devons estimer les potentiels dans la bulle afin de calculer les forces qui agissent sur un électron se trouvant sur la couche limite en $r = r_b$, où r_b représente le rayon de l'onde de sillage à la position ξ . L'expression du potentiel Ψ peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi(r, \xi) = S(r, \xi), \quad (\text{B.1})$$

où la fonction $S(r, \xi)$ est le terme source de ce potentiel. L'expression analytique de S est donnée dans le chapitre 2 (voir 2.15). En supposant qu'il n'y a pas de dépendance en θ , B.1 s'exprime en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = S(r, \xi),$$

Cette équation peut se réécrire :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = rS(r, \xi), \quad (\text{B.2})$$

B.1.1 Détermination de la fonction de Green

Pour résoudre l'équation B.2, on utilise la méthode de la fonction de Green [Duffy 2001]. On considère une fonction notée $G(r, r')$ qui sera solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G(r, r')}{\partial r} \right) = \delta(r - r'), \quad (\text{B.3})$$

où $\delta(r)$ est la fonction de Dirac.

On multiplie l'équation B.3 par $r'S(r', \xi)$ et on prend l'intégrale selon r'

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} r' S(r', \xi) G(r, r') dr' \right) = \int_0^{\infty} \delta(r - r') S(r', \xi) r' dr'.$$

Par définition, on a :

$$rS(r, \xi) = \int_0^{\infty} \delta(r - r') S(r', \xi) r' dr',$$

par conséquent, on en déduit que

$$\Psi(r, \xi) = \int_0^{\infty} S(r', \xi) G(r, r') r' dr'. \quad (\text{B.4})$$

Pour résoudre l'équation B.4, il nous suffit de déterminer la fonction $G(r, r')$ à partir de l'équation B.3. La dérivée de la fonction de Heaviside donne une fonction de Dirac, on peut donc écrire :

$$r \frac{\partial G(r, r')}{\partial r} = H(r - r') + A,$$

avec $H(x)$ la fonction de Heaviside et A une constante.

Ce problème peut être séparé en deux équations suivant la valeur de la fonction de Heaviside. Celles-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned} 0 < r < r' & \quad \frac{\partial G(r, r')}{\partial r} = \frac{A}{r}, \\ 0 < r' < r & \quad \frac{\partial G(r, r')}{\partial r} = \frac{1}{r} + \frac{A}{r}, \end{aligned}$$

La fonction Ψ à déterminer est symétrique par rapport l'axe. Cela implique que sa dérivée en r au voisinage de l'axe ($r=0$) doit être nulle :

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial r} \Big|_{r'=0} = \frac{1}{r} + \frac{A}{r} = 0,$$

On en déduit la constante $A = -1$. On obtient après intégration :

$$0 < r < r' \quad G(r, r') = -\ln(r) + K_1(r'),$$

$$0 < r' < r \quad G(r, r') = K_2(r'),$$

Par ailleurs, on impose la continuité de G en $r = r'$. On en déduit que $K_1 = \ln(r') + K_2$ et on obtient finalement :

$$0 < r < r' \quad G(r, r') = -\ln\left(\frac{r}{r'}\right) + K_2(r'),$$

$$0 < r' < r \quad G(r, r') = K_2(r'),$$

où K_2 ne dépend pas de r .

Si la constante K_2 est nulle nous retrouvons l'équation donnée par Yi pour Ψ [Yi 2013]. Pour s'en convaincre, on examine la situation où $K_2 \neq 0$. Si l'on calcule la fonction Ψ pour $r_b < r < \infty$, on doit calculer l'intégrale suivante :

$$I(r, \xi) = \int_{r_b}^{\infty} K_2(r') S_0 \exp\left(-\frac{r' - r_b}{\Delta\rho}\right) r' dr'$$

On intègre cette équation pour $K_2 = 1$, et on trouve que $I(r, \xi) = \Delta\rho(\Delta\rho + r_b) = cste$. La fonction est non nulle et ne dépend pas de r donc la limite en l'infini sera une constante. On considère que le potentiel Ψ est nul à l'infini, par conséquent, il faut prendre $K_2 = 0$. Et finalement la fonction de Green est donnée par :

$$0 < r < r' \quad G(r, r') = -\ln\left(\frac{r}{r'}\right),$$

$$0 < r' < r \quad G(r, r') = 0,$$

(B.5)

En remplaçant la fonction de Green $G(r, r')$ dans l'intégrale B.4, on obtient :

$$\Psi(r, \xi) = - \int_r^{\infty} dr' r' S(r', \xi) \ln\left(\frac{r}{r'}\right). \quad (B.6)$$

B.1.2 Expression du potentiel effectif Ψ

Pour calculer l'intégrale B.6, nous utilisons l'expression du terme source $S(r, \xi)$ donnée dans le chapitre 2 par l'équation 2.15. On se place dans un premier temps en $r < r_b$:

$$\Psi(r, \xi) = \int_r^\infty dr' r' (1 - \varepsilon) \ln\left(\frac{r}{r'}\right),$$

en intégrant par parties, on trouve :

$$\Psi(r, \xi) = -\frac{(1 - \varepsilon)r^2}{4} + Cste1.$$

On recommence pour $r \geq r_b$:

$$\Psi(r, \xi) = -\int_r^\infty dr' r' S_0(\xi) \exp\left(-\frac{(r' - r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right) \ln\left(\frac{r}{r'}\right).$$

Par une succession d'intégration par partie (plusieurs intégrations par partie de manière à faire disparaître le terme en logarithme et à faire apparaître la fonction logarithme exponentielle E_1), on arrive à :

$$\Psi(r, \xi) = S_0(\xi) \Delta\rho^2 \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right)\right] + Cste2,$$

où $E_1(r) = \int_r^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ est la fonction exponentielle intégrale, $\Delta\rho$ est l'épaisseur de la couche limite, r_b est le rayon de la bulle à la position ξ et S_0 est le maximum de la fonction $S(r, \xi)$ en $r = r_b$.

En prenant les valeurs aux limites et sachant que les deux expressions sont égales en $r = r_b$, on trouve pour $r < r_b$:

$$\Psi(r, \xi) = (1 - \varepsilon) \frac{r_b^2 - r^2}{4} + S_0(\xi) \Delta\rho^2 \left[1 + \exp\left(\frac{r_b}{\Delta\rho}\right) E_1\left(\frac{r_b}{\Delta\rho}\right)\right], \quad (B.7)$$

puis pour $r \geq r_b$:

$$\Psi(r, \xi) = S_0(\xi) \Delta\rho^2 \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right)\right]. \quad (B.8)$$

B.2 Calcul du potentiel vecteur A_r

La composante A_r du potentiel vecteur, autour et dans l'onde de sillage, peut être déterminée par la formule suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (\text{B.9})$$

A partir de l'expression de Ψ (Eq.B.7), on calcule sa dérivée selon ξ pour $r \leq r_b$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{(1 - \varepsilon) \alpha \Delta \rho}{2(\alpha + 1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2 + 2\alpha + \alpha^2) [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)] ,$$

où $\alpha = r_b / \Delta \rho$.

Pour $r \leq r_b$, la composante A_r du potentiel vecteur s'écrit donc :

$$A_r = -\frac{(1 - \varepsilon) \alpha \Delta \rho}{4(\alpha + 1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} r (2 + 2\alpha + \alpha^2) [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)]$$

Pour $r \geq r_b$, il faut partir de l'expression de Ψ (Eq.B.8) que l'on réécrit :

$$\Psi(r, \xi) = \frac{(1 - \varepsilon) \alpha^2 \Delta \rho^2}{2(\alpha + 1)} e^\alpha \left[e^{-\frac{r}{\Delta \rho}} + E_1\left(\frac{r}{\Delta \rho}\right) \right] ,$$

puis on dérive

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{(1 - \varepsilon) \alpha \Delta \rho e^\alpha}{2(\alpha + 1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2 + 2\alpha + \alpha^2) \left[e^{-\frac{r}{\Delta \rho}} + E_1\left(\frac{r}{\Delta \rho}\right) \right] .$$

En utilisant la relation qui relie A_r et $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ (Eq.B.9), on obtient :

$$r A_r = -\frac{(1 - \varepsilon) \alpha \Delta \rho e^\alpha}{2(\alpha + 1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2 + 2\alpha + \alpha^2) \left[\int^r r' e^{-\frac{r'}{\Delta \rho}} dr' + \int^r r' E_1\left(\frac{r'}{\Delta \rho}\right) dr' \right] ,$$

En intégrant par partie et en considérant que les intégrales peuvent s'échanger (pour le calcul avec E_1), on trouve :

$$\int^r r' e^{-\frac{r'}{\Delta \rho}} dr' = -\Delta \rho (r + \Delta \rho) e^{-\frac{r}{\Delta \rho}}$$

$$\int^r r' E_1\left(\frac{r'}{\Delta \rho}\right) dr' = \frac{1}{2} \left[-\Delta \rho (r + \Delta \rho) e^{-\frac{r}{\Delta \rho}} + r^2 E_1\left(\frac{r}{\Delta \rho}\right) \right]$$

et finalement on a :

$$A_r = -\frac{(1-\varepsilon)\alpha\Delta\rho}{4(\alpha+1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2+2\alpha+\alpha^2) \frac{1}{r} \times \frac{1}{2} \left[-3\Delta\rho(r+\Delta\rho) e^{-\frac{r}{\Delta\rho}} + r^2 E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) + C_1 \right]$$

Pour calculer la constante C_1 , on suppose la continuité de la fonction en $r = r_b$, d'où :

$$C_1 = 3\Delta\rho^2 + 3\Delta\rho r_b + r_b^2,$$

ce qui donne au final :

$$A_r = -\frac{(1-\varepsilon)\alpha\Delta\rho}{4(\alpha+1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2+2\alpha+\alpha^2) \times \frac{1}{r} \left[3\Delta\rho^2 + 3\Delta\rho r_b + r_b^2 + r^2 e^\alpha E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) - 3\Delta\rho(r+\Delta\rho) e^{-\frac{r-r_b}{\Delta\rho}} \right].$$

On pose

$$A_{r0}(\xi) = \frac{(1-\varepsilon)\alpha\Delta\rho}{4(\alpha+1)^2} \frac{dr_b}{d\xi} (2+2\alpha+\alpha^2),$$

et on peut écrire :

$$A_r(r, \xi) = \begin{cases} -r A_{r0}(\xi) [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)] & (r < r_b), \\ -\frac{A_{r0}(\xi)}{r} [3\Delta\rho^2 + 3\Delta\rho r_b + r_b^2 + r^2 e^\alpha E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) - 3\Delta\rho(r+\Delta\rho) e^{-\frac{r-r_b}{\Delta\rho}}] & (r \geq r_b), \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

On peut remarquer que l'expression de A_r est différente de celle proposée dans l'article de Yi *et al.* [Yi 2013]. Le changement de signe est cohérent si on regarde la continuité entre les deux expressions de A_r .

Calcul du courant de retour

Dans cette annexe, les détails du calcul du courant de retour sont présentés. Ce calcul permet la modélisation de l'onde de sillage créée par laser dans le régime de la bulle. Ce modèle est exposé dans le chapitre 2.

Les électrons formant l'onde de sillage sont eux même attirés par le champ électromagnétique de la bulle. Plus les électrons s'éloignent du laser et plus cette force de rappel devient grande. En particulier, dans la direction longitudinale, un courant de retour va ainsi se former [Yi 2013]. Ce courant est considéré nul à l'intérieur de la bulle et se développe sur une épaisseur notée ΔJ pour $r \geq r_b$ où r_b est le rayon transverse de la bulle à la position ξ . On choisit d'exprimer le courant J_z dans les différentes zones de la bulle de la façon suivante :

$$J_{z,e}(r, \xi) = \begin{cases} 0 & (r < r_b), \\ J_s(\xi) \exp\left(-\frac{(r-r_b(\xi))}{\Delta j}\right) & (r \geq r_b), \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Pour déterminer $J_s(\xi)$, on part de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \mathbf{J}$$

En intégrant sur une surface et en considérant que le rotationnel du champ magnétique s'annule, on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{dE_z}{d\xi} r dr + \int_0^\infty J_z r dr = 0,$$

Le calcul de l'intégrale de J_z donne en utilisant la définition du courant donnée par C.1 :

$$\int_0^\infty J_z r dr = J_s(\xi) \Delta_J (r_b + \Delta_J).$$

Sachant que $E_z = \partial \Psi / \partial \xi$ où $\Psi = \phi - A_z$ est le potentiel effectif introduit dans le chapitre 2, on obtient l'expression de J_s [Yi 2013] :

$$J_s(\xi) = \frac{-\int_0^\infty \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} r dr}{\Delta j (r_b + \Delta j)}$$

L'expression de la fonction Ψ dépend de la valeur de r par rapport à celle de r_b (voir Eqs.B.7 et B.8), on divise l'intégrale I en deux parties.

$$I = \int_0^{r_b} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} r dr + \int_{r_b}^{\infty} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} r dr = I_1 + I_2$$

Pour le calcul de I_2 , on utilise l'expression de Ψ pour ($r \geq r_b$) :

$$\Psi(r, \xi) = S_0(\xi) \Delta\rho^2 \exp\left(-\frac{(r - r_b(\xi))}{\Delta\rho}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right)\right].$$

On peut réécrire la fonction Ψ de cette manière :

$$\Psi(r, \xi) = \Psi_\xi(\xi) \Psi_r(r)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_\xi(\xi) &= S_0(\xi) \Delta\rho^2 \exp\left(\frac{r_b(\xi)}{\Delta\rho}\right) \\ \Psi_r(r) &= \exp\left(\frac{-r}{\Delta\rho}\right) + E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) \end{aligned}$$

On peut séparer l'intégration puis les dérivations et I_2 est donnée par l'expression suivante :

$$I_2 = \frac{d^2\Psi_\xi(\xi)}{d\xi^2} \int_{r_b}^{\infty} \Psi_r(r) r dr$$

On commence le calcul par l'intégrale $\int_{r_b}^{\infty} \Psi_r(r) r dr = E + F$. Le premier terme de la somme donne :

$$E = \int_{r_b}^{\infty} r \exp\left(\frac{-r}{\Delta\rho}\right) dr$$

En intégrant par partie on arrive à :

$$E = \Delta\rho(r_b + \Delta\rho) \exp\left(\frac{-r_b}{\Delta\rho}\right)$$

L'intégrale suivante :

$$F = \int_{r_b}^{\infty} r E_1\left(\frac{r}{\Delta\rho}\right) dr$$

Sachant que l'on peut écrire la fonction $E_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t} dt$, il nous suffit de remplacer E_1 par son expression dans la fonction précédente puis on intervertit les intégrales ce qui donne au final :

$$F = \frac{1}{2} \left[\Delta\rho(r_b + \Delta\rho) \exp\left(\frac{-r_b}{\Delta\rho}\right) - r_b^2 E_1\left(\frac{r_b}{\Delta\rho}\right) \right]$$

On obtient au final :

$$E + F = \int_{r_b}^{\infty} \Psi_r(r) r dr = \Delta \rho^2 \left[\frac{3}{2} (\alpha + 1) \exp(-\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} E_1(\alpha) \right]$$

La fonction $\Psi_\xi(\xi)$ peut se mettre sous la forme :

$$\Psi_\xi(\xi) = \frac{(1 - \varepsilon)\alpha^2 \Delta \rho^2}{2(\alpha + 1)} \exp(\alpha)$$

avec $\alpha = \frac{r_b}{\Delta \rho}$ et ainsi la dérivé selon ξ peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \Psi_\xi(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{\Delta \rho} \left[\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi_\xi}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta \rho} \frac{d^2 \Psi_\xi}{d\alpha^2} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \right]$$

On obtient en dérivant l'expression de $\Psi_\xi(\xi)$:

$$\frac{d\Psi_\xi}{d\alpha} = \frac{(1 - \varepsilon)\Delta \rho^2}{2} \exp(\alpha) \left[\frac{\alpha^3 + 2\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^2} \right]$$

et également

$$\frac{d^2 \Psi_\xi}{d\alpha^2} = \frac{(1 - \varepsilon)\Delta \rho^2}{2} \exp(\alpha) \left[\frac{2 + \alpha(\alpha + 1)(4 + \alpha(3 + \alpha))}{(\alpha + 1)^3} \right]$$

Au final, on trouve que :

$$I_2 = \Delta \rho \left[\frac{3}{2} (\alpha + 1) \exp(-\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} E_1(\alpha) \right] \left[\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi_\xi}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta \rho} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \frac{d^2 \Psi_\xi}{d\alpha^2} \right] \quad (C.2)$$

Pour le calcul de I_1 , on utilise l'expression de Ψ pour ($r < r_b$) :

$$\Psi(r, \xi) = (1 - \varepsilon) \frac{r_b^2 - r^2}{4} + (\xi) \Delta \rho^2 \left[1 + \exp\left(\frac{r_b}{\Delta \rho}\right) E_1\left(\frac{r_b}{\Delta \rho}\right) \right],$$

La dérivation selon ξ va faire disparaître le terme dépendant de r . L'intégrale I_1 se réécrit alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{d^2 \Psi(0, \xi)}{d\xi^2} \int_0^{r_b} r dr \\ &= \frac{d^2 \Psi(0, \xi)}{d\xi^2} \frac{r_b^2}{2} \end{aligned}$$

Comme précédemment on a :

$$\frac{d^2\Psi(0, \xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{\Delta\rho} \left[\frac{d^2r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi(0, \xi)}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta\rho} \frac{d^2\Psi(0, \xi)}{d\alpha^2} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \right]$$

avec

$$\frac{d\Psi(0, \xi)}{d\alpha} = \frac{(1 - \varepsilon)\alpha\Delta\rho^2}{2(\alpha + 1)^2} (2 + 2\alpha + \alpha^2) [1 + \exp(\alpha) E_1(\alpha)],$$

et

$$\frac{d^2\Psi(0, \xi)}{d\alpha^2} = \frac{(1 - \varepsilon)\Delta\rho^2}{2(\alpha + 1)^3} [-2\alpha + (2 + \alpha(1 + \alpha)(4 + \alpha(3 + \alpha))) \exp(\alpha) E_1(\alpha)].$$

Finalement l'intégrale I_1 s'écrit :

$$I_1 = \frac{r_b^2}{2\Delta\rho} \left[\frac{d^2r_b}{d\xi^2} \frac{d\Psi(0, \xi)}{d\alpha} + \frac{1}{\Delta\rho} \frac{d^2\Psi(0, \xi)}{d\alpha^2} \left(\frac{dr_b}{d\xi} \right)^2 \right] \quad (\text{C.3})$$

J_s s'écrit finalement :

$$J_s(\xi) = \frac{-(I_1 + I_2)}{\Delta j (r_b + \Delta j)},$$

où I_1 est donnée par C.3 et I_2 par C.2.

Modèle de capture par une bulle d'ions écrantée

Dans cette annexe, un modèle permettant de calculer la trajectoire d'un électron au voisinage d'une bulle remplie d'ions est présenté. La bulle se déplace à la vitesse de groupe du laser de longueur d'onde λ_0 dans un plasma de densité n_e . Cette bulle est écrantée par une couche d'électrons en surface. Kostyukov considère que la cavité est sphérique et cherche comment les champs peuvent s'exprimer dans cette situation ainsi que les conditions de piégeages et d'accélération [Kostyukov 2004].

D.1 Mise en équations de la condition de piégeage

On considère une onde de sillage sous forme de bulle complètement sphérique se propageant dans la direction z . On note les directions transverses x et y . Les différentes grandeurs sont normalisées comme indiqué dans le tableau 2.1 du chapitre 2 de ce manuscrit. On commence par déterminer les champs électromagnétiques dans la bulle.

La cavité sphérique de rayon R composée d'ions positifs se déplace à une vitesse relativiste v_0 ($\sim c$) le long de l'axe z , les ions à l'intérieur sont immobiles dans le repère de la bulle. Dans un premier temps, on va déterminer le potentiel scalaire ϕ et les composantes du potentiel vecteur \mathbf{A} . On néglige d'autre part la dynamique des ions dont le temps de réponse et la longueur caractéristique associée ($\frac{1}{\omega_{pi}}$, $\frac{c}{\omega_{pi}}$) sont très grands devant les grandeurs caractéristiques du système. Les équations de Maxwell- Gauss et de Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 1 - n, \quad (\text{D.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -n\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{D.2})$$

en utilisant l'expression du champ électrique en fonction des potentiels vecteurs et scalaires $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ et en prenant la divergence de cette expression et la relation

(D.1) on obtient :

$$-\Delta\phi = 1 - n + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) . \quad (\text{D.3})$$

On sait que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, d'où en utilisant (D.2), on obtient :

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + n \frac{\mathbf{p}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \mathbf{0} , \quad (\text{D.4})$$

On se plaçant dans le repère de la bulle en utilisant de variable $\xi = z - v_0 t$, on considère alors que $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z}$ et $-v_0 \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t}$. On peut réécrire l'équation (D.3) sachant que $\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \Delta_{\perp} \phi$ et $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial \xi} + \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}$:

$$v_0 \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}) = 1 - n - v_0 \frac{\partial^2 A_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \Delta_{\perp} \phi . \quad (\text{D.5})$$

On a, en projetant l'équation (D.4) selon l'axe de propagation z :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}) = \Delta_{\perp} A_z - \frac{np_z}{\gamma} - v_0^2 \frac{\partial^2 A_z}{\partial \xi^2} + v_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (\text{D.6})$$

En faisant la somme (D.5) - $v_0 \cdot$ (D.6) pour éliminer le terme en $\frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp})$, on obtient :

$$v_0 \left[\Delta_{\perp} A_z + (1 - v_0^2) \frac{\partial^2 A_z}{\partial \xi^2} \right] = 1 - n + v_0 \frac{np_z}{\gamma} + \Delta_{\perp} \phi + (1 - v_0^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (\text{D.7})$$

On se place dans le cas où un champ magnétique constant le long de l'axe de propagation est appliqué. On prend la jauge $\mathbf{A} = \{-\frac{1}{2}B_0 y, \frac{1}{2}B_0 x, -v_0 \phi\}$. En considérant que $n = 0$ à l'intérieur de la bulle, l'équation (D.7) peut se mettre sous la forme :

$$\Delta_{\perp} \phi = - (1 - v_0^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{1 + v_0^2} \quad (\text{D.8})$$

En combinant les équations (D.8) et (D.3), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = - \frac{1}{2(1 + v_0^2)} + \frac{1}{2v_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}) \quad (\text{D.9})$$

En utilisant (D.9) et (D.8), on a :

$$\Delta_{\perp} \phi = - \frac{1}{2} - \left(\frac{1 + v_0^2}{2v_0} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}) \quad (\text{D.10})$$

Si on suppose qu'on se place loin de l'impulsion laser et avec la jauge choisie, on peut dire que $(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}) = 0$, dans ce cas les équations (D.9) et (D.10) se réécrivent :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{2(1+v_0^2)} \quad (\text{D.11})$$

$$\Delta_{\perp} \phi = -\frac{1}{2} \quad (\text{D.12})$$

En résolvant l'équation D.12 en coordonnées cylindriques, on trouve que $\phi = -\frac{x^2+y^2}{8} + f(\xi)$. Ainsi, on en déduit l'expression du potentiel scalaire dans la bulle à partir de (D.11) :

$$\phi = -\frac{\frac{2\xi^2}{1+v_0^2} + x^2 + y^2}{8} + Cste \quad (\text{D.13})$$

À partir de l'expression du potentiel scalaire et du potentiel vecteur, nous pouvons déterminer les équations du mouvement d'un électrons au voisinage de la bulle puis en déduire les conditions de piégeage.

Condition de piégeage dans la bulle

La trajectoire d'un électron au voisinage de la bulle peut être déterminée à partir de la dynamique hamiltonienne. Le Hamiltonien de l'électron s'écrit après une transformation canonique [Mora 1997, Kostyukov 2004] :

$$H = \sqrt{1 + (\mathbf{P} + \mathbf{A})^2 + a^2} - v_0 P_z - \phi, \quad (\text{D.14})$$

où \mathbf{A} et ϕ sont respectivement le potentiel vecteur et scalaire dans la bulle. \mathbf{P} est l'impulsion généralisée (ou canonique) de l'électron et a est le potentiel vecteur du laser. En utilisant les équations de Hamilton [Tabor 1989], on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\frac{dP_x}{dt} = v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{\gamma} = v_x$$

$$\frac{dP_y}{dt} = v_z \frac{\partial A_z}{\partial y} - v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{\gamma} = v_y$$

$$\frac{dP_z}{dt} = v_z \frac{\partial A_z}{\partial \xi} - v_y \frac{\partial A_y}{\partial \xi} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{p_z}{\gamma} - v_0 = v_z - v_0$$

Le piégeage de la particule implique qu'il existe un point de retour de la particule ce qui équivaut à $\frac{d\xi}{dt} = 0$. On en déduit la relation suivante :

$$p_z = v_o \gamma \quad (\text{D.15})$$

En remplaçant p_z dans l'hamiltonien , on trouve la condition de piégeage :

$$p_z \geq v_o \gamma_0^2 [(1 + v_0^2)\phi + H_0] \quad (\text{D.16})$$

La condition de piégeage dépend du potentiel scalaire vu par la particule. Pour continuer on doit trouver comment varie ce potentiel en dehors de la bulle. On considère un électron qui est initialement au voisinage de la bulle sphérique avec une impulsion initiale choisie. La force F appliquée sur un électron s'écrit :

$$F = F_0 S(r) = \frac{F_0}{2} \left(\tanh \left(\frac{R-r}{d} \right) + 1 \right),$$

où r est un rayon réduit tel que $r^2 = \bar{r}^2 + \xi^2 \frac{(1-v_0^2)}{(1+v_0^2)}$ (avec $\bar{r}^2 = \xi^2 + x^2 + y^2$), F_0 est la force de rappel de la bulle et $S(r)$ est une fonction d'écran afin de tenir compte de la couche d'électron d'épaisseur d .

Sachant que $\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} = \mathbf{F}$ les équations du potentiel deviennent :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = -\frac{\xi}{4(1+v_0^2)} \left(\tanh \left(\frac{R-r}{d} \right) + 1 \right) \quad (\text{D.17})$$

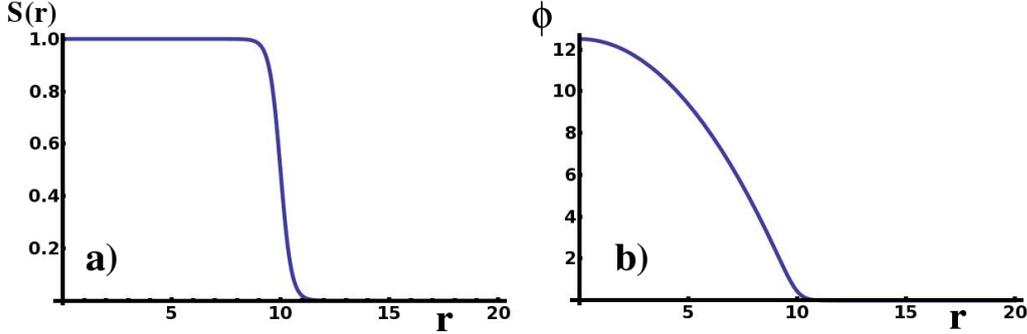
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{y}{8} \left(\tanh \left(\frac{R-r}{d} \right) + 1 \right) \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{x}{8} \left(\tanh \left(\frac{R-r}{d} \right) + 1 \right) \quad (\text{D.19})$$

En intégrant numériquement cette fonction avec le logiciel Mathematica, on obtient une solution de la forme :

$$\begin{aligned} \phi(r) = -\frac{1}{16} \left\{ 2r^2 - 2Rr + 2d(R-r) \ln \left[1 + e^{\frac{2(r-R)}{d}} \right] - 2dR \ln \left[\cosh \left(\frac{R-r}{d} \right) \right] \right. \\ \left. - d^2 \text{Polylog} \left[2, -e^{\frac{2(r-R)}{d}} \right] \right\} + Cste \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

où on définit $\text{Polylog} [2, z] = -\int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t} dt$. Pour déterminer la constante, on impose que la fonction soit nulle à l'infini et on trouve que $Cste = \ln(2) \times \frac{dR}{8}$. On représente sur un graphique le potentiel (Fig.D.1b) et la fonction d'écrantage (Fig.D.1a).

FIGURE D.1 – a) fonction d'écrantage $S(r)$ et b) Potentiel $\Phi(r)$ pour $R = 10$, $d = 0.5$

D.2 Modélisations et simulations numériques

Connaissant la forme des potentiels, on peut intégrer numériquement les équations du mouvement. Nos équations tiennent compte de la présence d'un champ magnétique constant B_0 dans le direction de propagation. Cela revient à considérer une jauge de la forme pour le potentiel vecteur $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}B_0y, \frac{1}{2}B_0x, -v_0\phi)$ et les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{dP_x}{dt} = -\frac{P_y + \frac{1}{2}B_0y}{\gamma} \frac{1}{2}B_0 - \frac{x}{8} \left(\tanh\left(\frac{R-r}{d}\right) + 1 \right) - v_0 \frac{P_z + A_z x}{\gamma} \frac{x}{8} \left(\tanh\left(\frac{R-r}{d}\right) + 1 \right), \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \frac{P_x - \frac{1}{2}B_0x}{\gamma} \frac{1}{2}B_0 - \frac{y}{8} \left(\tanh\left(\frac{R-r}{d}\right) + 1 \right) - v_0 \frac{P_z + A_z y}{\gamma} \frac{y}{8} \left(\tanh\left(\frac{R-r}{d}\right) + 1 \right), \quad (\text{D.22})$$

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{\xi}{4(1+v_0^2)} \left(\tanh\left(\frac{R-r}{d}\right) + 1 \right) - v_0 \frac{P_z + A_z}{\gamma} \frac{\xi}{4(1+v_0^2)} \left(\tanh\left(\frac{R-r}{d}\right) + 1 \right) \quad (\text{D.23})$$

Dans un premier temps, on se place sans champ magnétique, en considérant que la vitesse de la bulle est $v_0 = 0.999$ et on calcul deux trajectoires avec les même conditions initiales et on change seulement le rayon de la bulle. (Fig.D.2)

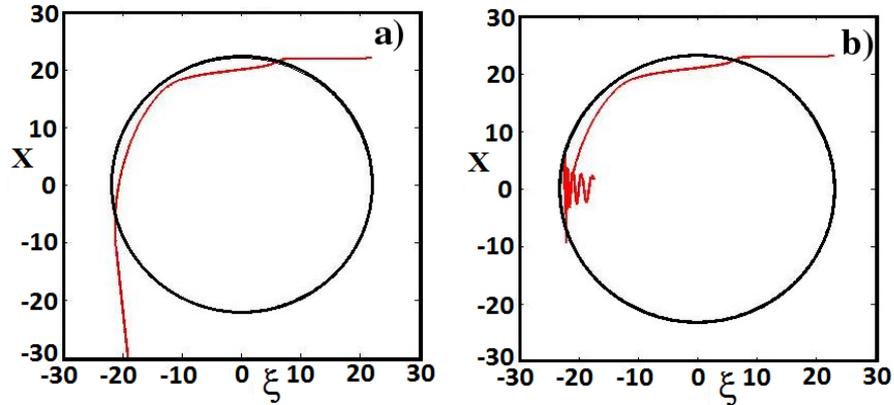


FIGURE D.2 – Trajectoires d'une particule soumis au potentiel de la bulle pour $v_0 = 0.999$ a) $R=22$ b) $R=23$

A partir d'une certaine valeur de rayon de la bulle, la particule est piégée. Cette valeur suit la loi décrit par Kostyukov [Kostyukov 2004] $\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} < R$. Pour la figure D.2, on a $\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} = 22.36$ ce qui est en accord avec ce que l'on observe avec notre modèle.

Influence d'un champ magnétique

On regarde maintenant l'effet d'un champ magnétique statique le long de l'axe de propagation du laser sur le piégeage de particules.

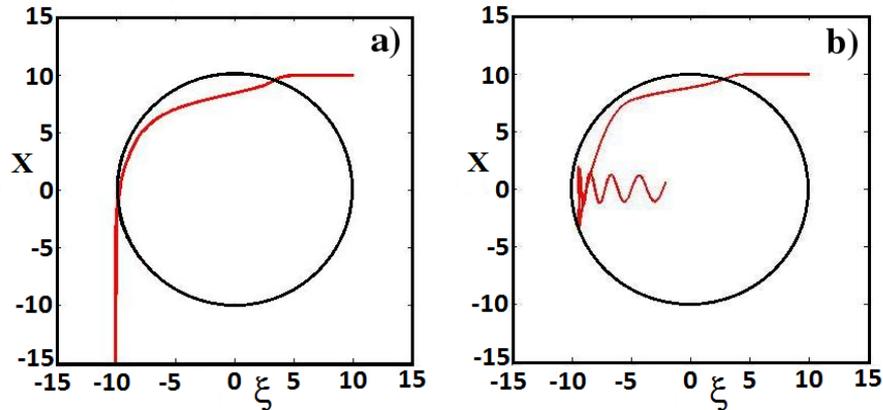


FIGURE D.3 – Trajectoires d’une particule soumis au potentiel de la bulle pour $v_0 = 0.9958$, $R = 10$ ($\sim 80 \mu m$), $p_{z0} = 0.9958$ a) $B_0 = 0$ b) $B_0 = 211 T$

Lorsque un champ magnétique longitudinal homogène est appliqué, la particule est plus facilement piégée (Fig. D.3). Sans champ magnétique, l’électron arrive à l’arrière de la bulle avec une vitesse transverse trop importante et le piégeage est plus difficile. Le champ magnétique courbe la trajectoire de l’électron et facilite le piégeage.

Dans l’injection optique

L’injection optique fait intervenir un second laser qui par collision avec le laser principal fait entrer les électrons par l’avant de l’onde de sillage. Suivant les polarisations utilisées, l’électron entre dans la bulle avec certaines conditions initiales en vitesse. On souhaite représenter les deux cas de polarisation (P) et (C+) (voir chapitre 4), on place deux électrons avec des positions identiques initialement à l’avant de la bulle mais les deux électrons ont des impulsions transverses différentes. De cette manière, on considère un électron dans la configuration (P) et un autre dans (C+) (Fig.D.4). Le résultat du modèle montre que le piégeage est plus contraignant pour une particule ayant une impulsion transverse initiale plus importante. Ce résultat est conforme avec la condition de piégeage (Eq.D.16). Le champ électrique nécessaire à son piégeage devra être plus important.

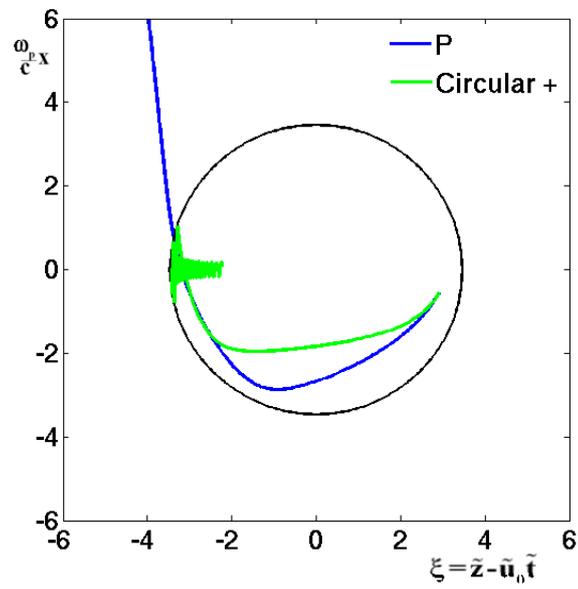


FIGURE D.4 – Résultat du modèle avec $R = 27.9 \mu m$ et $d = 0.5$. On considère un électron avec deux conditions initiales différentes. L'une représentant la polarisation (P) et l'autre la polarisation (C+) (voir chapitre 4)

Bibliographie

- [Albert 2014] F Albert, AGR Thomas, SPD Mangles, S Banerjee, S Corde, A Flacco, M Litos, D Neely, J Vieira, Z Najmudin, R Bingham, C Joshi et T Katsouleas. *Laser wakefield accelerator based light sources : potential applications and requirements*. Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 56, no. 8, page 084015, 2014. (Cité en page 34.)
- [Benettin 1976] G Benettin et JM Galgani Land Strelcyn. *Kolmogorov entropy and numerical experiments*. Physical Review A, vol. 14, no. 6, page 2338, 1976. (Cité en page 93.)
- [Bourdier 1994] A Bourdier, VA Bazylev, Ph Gouard, D Gardent et JM Buzzi. *Electron trajectories in a free electron laser with a reversed axial guide field*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, vol. 341, no. 1, pages 250–255, 1994. (Cité en page 3.)
- [Bourdier 2005] A Bourdier, D Patin et E Lefebvre. *Stochastic heating in ultra high intensity laser-plasma interaction*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 206, no. 1, pages 1–31, 2005. (Cité en pages 3, 4 et 187.)
- [Bourdier 2012a] A Bourdier, G Girard, S Rassou, X Davoine et M Drouin. *Influence of a Magnetic Guide Field on Self-Injection in Wakefield Acceleration*. Journal of Modern Physics, vol. 3, pages 1983–1990, 2012. (Cité en pages 154 et 171.)
- [Bourdier 2012b] A Bourdier, S Rassou, G Girard et M Drouin. *Influence of a magnetic guide field on injection in wakefield acceleration*. Journal of Modern Physics, vol. 3, no. 9, pages 1018–1020, 2012. (Cité en page 154.)
- [Bourdier 2013] A Bourdier, S Rassou et M Drouin. *Role of stochastic heating in wakefield acceleration monitored by optical injection*. Physics Letters A, vol. 377, no. 37, pages 2361–2367, 2013. (Cité en pages 129, 137 et 188.)
- [Bulanov 2013] SV Bulanov, TZ Esirkepov, M Kando, JK Koga, T Hosokai, AG Zhidkov et R Kodama. *Nonlinear plasma wave in magnetized plasmas*. Physics of Plasmas (1994-present), vol. 20, no. 8, page 083113, 2013. (Cité en pages 5, 146, 153, 154, 155, 184 et 189.)
- [Bussolino 2013] G C Bussolino, A Faenov, A Giulietti, D Giulietti, P Koester, L Labate, T Levato, T Pikuz et L A Gizzi. *Electron radiography using a tabletop laser-cluster plasma accelerator*. Journal of Physics D : Applied Physics, vol. 46, no. 24, page 245501, 2013. (Cité en page 36.)

- [Chancé 2014] A Chancé, O Delferrière, J Schwindling, C Bruni, N Delerue, A Specka, B Cros, G Maynard, BS Paradkar et P Mora. *Transport line for a multi-staged laser-plasma acceleration : DACTOMUS*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, vol. 740, pages 158–164, 2014. (Cité en page 191.)
- [Chen 1985] P Chen, JM Dawson, Robert W Huff et T Katsouleas. *Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma*. Physical review letters, vol. 54, no. 7, page 693, 1985. (Cité en page 40.)
- [Davoine 2008] X Davoine, E Lefebvre, J Faure, C Rechatin, A Lifschitz et V Malka. *Simulation of quasimonoenergetic electron beams produced by colliding pulse wakefield acceleration*. Physics of Plasmas, vol. 15, page 113102, 2008. (Cité en pages 3, 31, 106 et 137.)
- [Davoine 2010a] X. Davoine. Accélération électronique par sillage laser et source de rayonnements. Thèse Universitaire, 2010. (Cité en pages 182 et 196.)
- [Davoine 2010b] X Davoine, A Beck, A Lifschitz, V Malka et E Lefebvre. *Cold injection for electron wakefield acceleration*. New Journal of Physics, vol. 12, no. 9, page 095010, 2010. (Cité en pages 110, 114 et 137.)
- [DesRosiers 2000] C DesRosiers, V Moskvina, Alex F Bielajew et L Papiez. *150-250 MeV electron beams in radiation therapy*. Physics in medicine and biology, vol. 45, no. 7, page 1781, 2000. (Cité en pages 2 et 36.)
- [Drouin 2009] M Drouin. Vers la simulation particulière réaliste de l'interaction laser-plasma surcritique : conception d'un schéma implicite avec amortissement ajustable et fonctions de forme d'ordre élevé. Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009. (Cité en page 20.)
- [Drouin 2012] M Drouin, A Bourdier, Q Harry et S Rassou. *Influence of a Static Magnetic Field on Beam Emittance in Laser Wakefield Acceleration*. Journal of Modern Physics, vol. 3, pages 1991–1997, 2012. (Cité en pages 154 et 171.)
- [Duffy 2001] DG Duffy. Green's functions with applications. CRC Press, 2001. (Cité en page 200.)
- [Esarey 1995] E Esarey et M Pilloff. *Trapping and acceleration in nonlinear plasma waves*. Physics of Plasmas (1994-present), vol. 2, no. 5, pages 1432–1436, 1995. (Cité en page 26.)
- [Esarey 2000] E Esarey, CB Schroeder, BA Shadwick, JS Wurtele et WP Leemans. *Nonlinear theory of nonparaxial laser pulse propagation in plasma channels*.

- Physical review letters, vol. 84, no. 14, page 3081, 2000. (Cité en pages 14 et 105.)
- [Faure 2004] J Faure, Y Glinec, A Pukhov, S Kiselev, S Gordienko, E Lefebvre, J-P Rousseau, F Burgy et V Malka. *A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams*. Nature, vol. 431, no. 7008, pages 541–544, 2004. (Cité en page 2.)
- [Faure 2006] Jérôme Faure, Clément Rechatin, A Norlin, A Lifschitz, Y Glinec et Victor Malka. *Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses*. Nature, vol. 444, no. 7120, pages 737–739, 2006. (Cité en pages 3 et 31.)
- [Froula 2009] DH Froula, L Divol, P Davis, JP Palastro, P Michel, V Leurent, SH Glenzer, BB Pollock et G Tynan. *Magnetically controlled plasma waveguide for laser wakefield acceleration*. Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 51, no. 2, page 024009, 2009. (Cité en pages 33 et 190.)
- [Fubiani 2004] G Fubiani, E Esarey, CB Schroeder et WP Leemans. *Beat wave injection of electrons into plasma waves using two interfering laser pulses*. Physical Review E, vol. 70, no. 1, page 016402, 2004. (Cité en pages 2, 4, 27, 30, 104 et 176.)
- [Geddes 2005] CGR Geddes, Cs Toth, J Van Tilborg, E Esarey, CB Schroeder, J Cary et WP Leemans. *Guiding of relativistic laser pulses by preformed plasma channels*. Physical review letters, vol. 95, no. 14, page 145002, 2005. (Cité en pages 32 et 106.)
- [Gignoux 2002] C Gignoux et B Silvestre-Brac. *Mécanique, de la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*. EDP Sciences, 2002. (Cité en page 80.)
- [Giulietti 2008] A Giulietti, N Bourgeois, T Ceccotti, X Davoine, S Dobosz, P D Oliveira, M Galimberti, J Galy, A Gamucci, D Giulietti *et al.* *Intense γ -ray source in the giant-dipole-resonance range driven by 10-TW laser pulses*. Physical review letters, vol. 101, no. 10, page 105002, 2008. (Cité en page 36.)
- [Glinec 2005] Y Glinec, J Faure, L Le Dain, S Darbon, T Hosokai, JJ Santos, E Lefebvre, JP Rousseau, F Burgy, B Mercier *et al.* *High-resolution γ -ray radiography produced by a laser-plasma driven electron source*. Physical review letters, vol. 94, no. 2, page 025003, 2005. (Cité en pages 2, 36 et 37.)
- [Goldstein 1980] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 1980. (Cité en pages 75 et 77.)

- [Gonsalves 2011] AJ Gonsalves, K Nakamura, C Lin, D Panasenkov, S Shiraishi, T Sokollik, C Benedetti, CB Schroeder, CGR Geddes, J Van Tilborget *al.* *Tunable laser plasma accelerator based on longitudinal density tailoring*. *Nature Physics*, vol. 7, no. 11, pages 862–866, 2011. (Cité en page 31.)
- [Gordienko 2005] S Gordienko et A Pukhov. *Scalings for ultrarelativistic laser plasmas and quasimonoenergetic electrons*. *Physics of Plasmas (1994-present)*, vol. 12, no. 4, page 043109, 2005. (Cité en pages 40 et 130.)
- [Gurnett 2005] DA Gurnett et A Bhattacharjee. *Introduction to plasma physics : with space and laboratory applications*. Cambridge university press, 2005. (Cité en pages 142 et 144.)
- [Hansson 2015] M. Hansson, B. Aurand, X. Davoine, H. Ekerfelt, K. Svensson, A. Persson, C.-G. Wahlström et O. Lundh. *Down-ramp injection and independently controlled acceleration of electrons in a tailored laser wakefield accelerator*. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, vol. 18, page 071303, Jul 2015. (Cité en pages 31 et 32.)
- [Hosokai 2006] T Hosokai, K Kinoshita, A Zhidkov, A Maekawa, A Yamazaki et M Uesaka. *Effect of external static magnetic field on the emittance and total charge of electron beams generated by laser-wakefield acceleration*. *Physical review letters*, vol. 97, no. 7, page 075004, 2006. (Cité en page 191.)
- [Hosokai 2010] T Hosokai, A Zhidkov, A Yamazaki, Y Mizuta, M Uesaka et R Kodama. *Electron energy boosting in laser-wake-field acceleration with external magnetic field $B_{\text{approx}} 1 T$ and laser prepulses*. *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 12, 2010. (Cité en page 191.)
- [Hur 2008] MS Hur, DN Gupta et H Suk. *Enhanced electron trapping by a static longitudinal magnetic field in laser wakefield acceleration*. *Physics Letters A*, vol. 372, no. 15, pages 2684–2687, 2008. (Cité en pages 3, 154 et 171.)
- [Jackson 1975] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley, 1975. (Cité en pages 78, 79 et 82.)
- [Kainz 2004] KK Kainz, KR Hogstrom, JA Antolak, PR Almond, CD Bloch, C Chiu, M Fomytskyi, F Rauschel, M Downer et T Tajima. *Dose properties of a laser accelerated electron beam and prospects for clinical application*. *Medical physics*, vol. 31, no. 7, pages 2053–2067, 2004. (Cité en pages 2 et 36.)
- [Kim 2013] HT Kim, KH Pae, HJ Cha, IJ Kim, TJ Yu, JH Sung, SK Lee, TM Jeong et J Lee. *Enhancement of Electron Energy to the Multi-GeV Regime by a Dual-Stage Laser-Wakefield Accelerator Pumped by Petawatt Laser Pulses*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, page 165002, Oct 2013. (Cité en page 191.)

- [Kostyukov 2004] I Kostyukov, A Pukhov et S Kiselev. *Phenomenological theory of laser-plasma interaction in bubble regime*. Physics of plasmas, vol. 11, page 5256, 2004. (Cité en pages 2, 40, 209, 211 et 214.)
- [Kotaki 2004] H Kotaki, S Masuda, M Kando, JK Koga et K Nakajima. *Head-on injection of a high quality electron beam by the interaction of two laser pulses*. Physics of Plasmas, vol. 11, page 3296, 2004. (Cité en pages 2, 4, 30, 104 et 176.)
- [Landau 1975] L.D. Landau et E.M. Lifshitz. The classical theory of fields. Numéro vol. 2 de Course of theoretical physics. Pergamon, 1975. (Cité en page 82.)
- [Leemans 2006] WP Leemans, B Nagler, AJ Gonsalves, Cs Toth, K Nakamura, CGR Geddes, E Esarey, CB Schroeder et SM Hooker. *GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator*. Nature physics, vol. 2, no. 10, pages 696–699, 2006. (Cité en pages 2, 29 et 32.)
- [Lefebvre 2003] E Lefebvre, N Cochet, S Fritzler, Victor Malka, M-M Aléonard, J-F Chemin, S Darbon, L Disdier, J Faure, A Fedotoff et al. *Electron and photon production from relativistic laser-plasma interactions*. Nuclear fusion, vol. 43, no. 7, page 629, 2003. (Cité en pages 18 et 23.)
- [Lehe 2013] R Lehe, A Lifschitz, C Thauray, V Malka et X Davoine. *Numerical growth of emittance in simulations of laser-wakefield acceleration*. Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams, vol. 16, no. 2, page 021301, 2013. (Cité en pages 23 et 114.)
- [Lichtenberg 1983] A.J. Lichtenberg et M.A. Lieberman. Regular and stochastic motion. Numéro vol. 38 de Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1983. (Cité en page 93.)
- [Lifschitz 2009] AF Lifschitz, X Davoine, E Lefebvre, J Faure, C Rechatin et V Malka. *Particle-in-cell modelling of laser-plasma interaction using Fourier decomposition*. Journal of Computational Physics, vol. 228, no. 5, pages 1803–1814, 2009. (Cité en pages 18, 24, 157, 171, 193 et 196.)
- [Lu 2006] W. Lu, C. Huang, M. Zhou, M. Tzoufras, F. S. Tsung, W. B. Mori et T. Katsouleas. *A nonlinear theory for multidimensional relativistic plasma wave wakefields*. Physics of Plasmas, vol. 13, no. 5, page 056709, 2006. (Cité en pages 2, 4, 40, 58, 62, 70, 121, 147 et 187.)
- [Lu 2007] W. Lu, M. Tzoufras, C. Joshi, F. S. Tsung, W. B. Mori, J. Vieira, R. A. Fonseca et L. O. Silva. *Generating multi-GeV electron bunches using single stage laser wakefield acceleration in a 3D nonlinear regime*. Phys. Rev. ST Accel. Beams, vol. 10, page 061301, Jun 2007. (Cité en page 14.)

- [Mangles 2012a] SPD Mangles. *Compact X-ray sources : X-rays from self-reflection*. Nature Photonics, vol. 6, no. 5, pages 280–281, 2012. (Cité en page 35.)
- [Mangles 2012b] SPD Mangles, G Genoud, MS Bloom, M Burza, Z Najmudin, A Persson, K Svensson, AGR Thomas et C-G Wahlström. *Self-injection threshold in self-guided laser wakefield accelerators*. Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams, vol. 15, no. 1, page 011302, 2012. (Cité en pages 2, 30 et 104.)
- [Mora 1997] P Mora et TM Antonsen Jr. *Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas*. Physics of Plasmas (1994-present), vol. 4, no. 1, pages 217–229, 1997. (Cité en pages 25, 26, 43, 44, 58, 147 et 211.)
- [Mori 1997] WB Mori. *The physics of the nonlinear optics of plasmas at relativistic intensities for short-pulse lasers*. Quantum Electronics, IEEE Journal of, vol. 33, no. 11, pages 1942–1953, 1997. (Cité en pages 14 et 105.)
- [Nakajima 2008] K Nakajima. *Compact X-ray sources : Towards a table-top free-electron laser*. Nature physics, vol. 4, no. 2, pages 92–93, 2008. (Cité en page 2.)
- [Osedelec 1968] VI Osedelec. *Multiplicative ergodic theorem : Lyapunov characteristic exponent for dynamical systems*. vol. 19, pages 539–575, 1968. (Cité en page 93.)
- [Patin 2005] D Patin, A Bourdier et E Lefebvre. *Stochastic heating in ultra high intensity laser-plasma interaction*. Laser and Particle Beams, vol. 23, no. 3, page 297, 2005. (Cité en page 88.)
- [Patin 2010] D. Patin. *Chauffage stochastique : Le chauffage stochastique dans l'interaction laser plasma à très haut flux*. Thèse Universitaire, 2010. (Cité en pages 3, 4, 82, 88, 91, 102 et 187.)
- [Phuoc 2012] K Ta Phuoc, S Corde, C Thauray, V Malka, A Tafzi, JP Goddet, RC Shah, S Sebban et A Rouse. *All-optical Compton gamma-ray source*. Nature photonics, vol. 6, no. 5, pages 308–311, 2012. (Cité en page 35.)
- [Pukhov 2002] Alexancer Pukhov et Jürgen Meyer-ter Vehn. *Laser wake field acceleration : the highly non-linear broken-wave regime*. Applied Physics B, vol. 74, no. 4-5, pages 355–361, 2002. (Cité en page 2.)
- [Pukhov 2004] A Pukhov, S Gordienko, S Kiselev et I Kostyukov. *The bubble regime of laser-plasma acceleration : monoenergetic electrons and the scalabi-*

- lity*. Plasma physics and controlled fusion, vol. 46, no. 12B, page B179, 2004. (Cité en page 40.)
- [Pukhov 2006] A Pukhov et S Gordienko. *Bubble regime of wake field acceleration : similarity theory and optimal scalings*. Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 364, no. 1840, pages 623–633, 2006. (Cité en pages 40, 130 et 133.)
- [Quémada 1968] D Quémada. Ondes dans les plasmas. 1968. (Cité en page 144.)
- [Rassou 2014] S Rassou, A Bourdier et M Drouin. *Role of stochastic heating in wakefield acceleration when optical injection is used*. Physics of Plasmas (1994-present), vol. 21, no. 8, page 083101, 2014. (Cité en pages 129, 137 et 188.)
- [Rassou 2015] S Rassou, A Bourdier et M Drouin. *Influence of a strong longitudinal magnetic field on laser wakefield acceleration*. Physics of Plasmas (1994-present), vol. 22, no. 7, page 073104, 2015. (Cité en pages 70, 170 et 189.)
- [Rax 1992] J-M Rax. *Compton harmonic resonances, stochastic instabilities, quasilinear diffusion, and collisionless damping with ultra-high-intensity laser waves*. Physics of Fluids B : Plasma Physics, vol. 4, page 3962, 1992. (Cité en pages 3, 4, 82, 89 et 187.)
- [Rax 2005] J-M Rax. Physique des plasmas-cours et applications : Cours et applications. Dunod, 2005. (Cité en pages 80 et 142.)
- [Rechatin 2007] C Rechatin, J Faure, An Lifschitz, V Malka et E Lefebvre. *Plasma wake inhibition at the collision of two laser pulses in an underdense plasma*. Physics of plasmas, vol. 14, page 060702, 2007. (Cité en pages 124, 125 et 126.)
- [Rechatin 2009a] C Rechatin. Accélération d'électrons dans l'interaction laser-plasma : développement et caractérisation d'un injecteur optique. Thèse de l'Ecole Polytechnique X, 2009. (Cité en page 112.)
- [Rechatin 2009b] C Rechatin, J Faure, A Ben-Ismaïl, J Lim, R Fitour, A Specka, H Videau, A Tafzi, F Burgy et V Malka. *Controlling the phase-space volume of injected electrons in a laser-plasma accelerator*. Physical review letters, vol. 102, no. 16, page 164801, 2009. (Cité en pages 105 et 177.)
- [Rechatin 2010] C Rechatin, J Faure, X Davoine, O Lundh, J Lim, A Ben-Ismaïl, F Burgy, A Tafzi, A Lifschitz, E Lefebvre et al. *Characterization of the beam loading effects in a laser plasma accelerator*. New Journal of Physics, vol. 12, no. 4, page 045023, 2010. (Cité en pages 68, 175 et 190.)
- [Sävert 2015] A. Sävert, S. P. D. Mangles, M. Schnell, E. Siminos, J. M. Cole, M. Leier, M. Reuter, M. B. Schwab, M. Möller, K. Poder, O. Jäckel, G. G.

- Paulus, C. Spielmann, S. Skupin, Z. Najmudin et M. C. Kaluza. *Direct Observation of the Injection Dynamics of a Laser Wakefield Accelerator Using Few-Femtosecond Shadowgraphy*. Phys. Rev. Lett., vol. 115, page 055002, Jul 2015. (Cité en page 190.)
- [Schumaker 2013] W. Schumaker, N. Nakanii, C. McGuffey, C. Zulick, V. Chyvkov, F. Dollar, H. Habara, G. Kalintchenko, A. Maksimchuk, K. A. Tanaka, A. G. R. Thomas, V. Yanovsky et K. Krushelnick. *Ultrafast Electron Radiography of Magnetic Fields in High-Intensity Laser-Solid Interactions*. Phys. Rev. Lett., vol. 110, page 015003, Jan 2013. (Cité en pages 2 et 36.)
- [Spence 2000] DJ Spence et SM Hooker. *Investigation of a hydrogen plasma waveguide*. Physical Review E, vol. 63, no. 1, page 015401, 2000. (Cité en page 32.)
- [Sprangle 1990] P Sprangle, E Esarey et A Ting. *Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions*. Physical review letters, vol. 64, no. 17, page 2011, 1990. (Cité en pages 26 et 42.)
- [Sprangle 1992] P Sprangle, E Esarey, J Krall et G Joyce. *Propagation and guiding of intense laser pulses in plasmas*. Physical review letters, vol. 69, no. 15, page 2200, 1992. (Cité en pages 32 et 106.)
- [Strickland 1985] D Strickland et G Mourou. *Compression of amplified chirped optical pulses*. Optics communications, vol. 55, no. 6, pages 447–449, 1985. (Cité en page 10.)
- [Tabor 1989] M. Tabor. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics : an introduction*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1989. (Cité en pages 27, 75, 77, 89, 93 et 211.)
- [Tajima 1979] T. Tajima et J. M. Dawson. *Laser Electron Accelerator*. Phys. Rev. Lett., vol. 43, pages 267–270, Jul 1979. (Cité en page 1.)
- [Tzoufras 2008] M Tzoufras, W Lu, FS Tsung, C Huang, WB Mori, T Katsouleas, J Vieira, RA Fonseca et LO Silva. *Beam loading in the nonlinear regime of plasma-based acceleration*. Physical review letters, vol. 101, no. 14, page 145002, 2008. (Cité en page 68.)
- [Ueda 1994] H Ueda, Y Omura, H Matsumoto et T Okuzawa. *A study of the numerical heating in electrostatic particle simulations*. Computer physics communications, vol. 79, no. 2, pages 249–259, 1994. (Cité en page 20.)
- [Vieira 2011] J Vieira, SF Martins, VB Pathak, RA Fonseca, WB Mori et LO Silva. *Magnetic control of particle injection in plasma based accelerators*. Physical review letters, vol. 106, no. 22, page 225001, 2011. (Cité en page 3.)

- [Yi 2013] SA Yi, V Khudik, C Siemon et G Shvets. *Analytic model of electromagnetic fields around a plasma bubble in the blow-out regime*. *Physics of Plasmas* (1994-present), vol. 20, no. 1, page 013108, 2013. (Cité en pages 4, 40, 46, 52, 53, 57, 58, 70, 187, 201, 204 et 205.)



Titre : Accélération d'électrons par onde de sillage laser : Développement d'un modèle analytique étendu au cas d'un plasma magnétisé dans le régime de Blowout

Mots clés : Onde de sillage laser, chauffage stochastique, champ magnétique, injection optique, simulations, Particle In Cell

Résumé : Une impulsion laser intense se propageant dans un plasma sous-dense ($n_e \ll n_c$) déplace les électrons sur son passage et crée une onde de sillage à même d'accélérer des électrons. Lorsque l'impulsion est très intense ($I_0 > 10^{18} \text{ W.cm}^{-2}$) et de durée très courte ($\tau_0 < 100 \text{ fs}$), on atteint le régime de la bulle. Les champs électriques dans ces bulles, de l'ordre de 100 GV/m, peuvent accélérer un faisceau d'électrons jusqu'au GeV sur des distances de l'ordre du centimètre. Dans ce régime, les électrons expulsés par la force pondéromotrice du laser forment une fine et dense couche à la surface d'une cavité d'ions restés immobiles. Les propriétés de ce régime sont examinées par l'intermédiaire d'un modèle analytique, que nous avons développé en nous inspirant du travail de W. Lu et S. Yi. En nous plaçant dans ce régime prometteur, nous avons étudié les mécanismes d'injection et de piégeage dans l'onde de sillage. Dans l'injection optique, les polarisations parallèles ou circulaires positives conduisent respectivement à une injection mettant en jeu du chauffage stochastique, ou à l'injection froide.

Un paramètre de similarité est introduit, celui-ci permet de déterminer la méthode d'injection la plus appropriée pour maximiser la charge injectée. Enfin, le modèle analytique présenté en première partie est étendu afin d'étudier l'onde de sillage dans le régime de la bulle lorsqu'un champ magnétique longitudinal initial est appliqué au plasma. Lorsque le plasma est magnétisé deux phénomènes remarquables se manifestent, d'une part une ouverture apparaît à l'arrière de la bulle et d'autre part un mécanisme d'amplification du champ magnétique longitudinale est induit par la variation du flux magnétique. Les prédictions de notre modèle analytique sont confrontées aux résultats de simulations PIC 3D issues du code CALDER-Circ. La conséquence immédiate de la déformation de l'onde de sillage est la réduction, voire la suppression de l'auto-injection. L'application d'un champ magnétique longitudinal, combinée à un choix judicieux des paramètres laser-plasma, permet de réduire la dispersion en énergie des faisceaux d'électrons produits après injection optique.

Title : Electrons laser wakefield acceleration: Analytic modelling of the Blowout regime for a magnetized plasma

Keywords : Laser wakefield, stochastic heating, magnetic field, optical injection, Particle In Cell

Abstract: An intense laser pulse propagating in an under dense plasma ($n_e \ll n_c$) expels electrons and a wakefield is created which can accelerate efficiently electrons. When the laser pulse is very intense ($I_0 > 10^{18} \text{ W.cm}^{-2}$) and short ($\tau_0 < 100 \text{ fs}$), the bubble regime is reached. Within the bubble the electric field can exceed 100 GV/m and a trapped electron beam is accelerated to GeV energy with few centimetres of plasma. In this regime, the electrons expelled by the laser ponderomotive force are brought back and form a dense sheath layer. First, an analytic model was derived using W. Lu and S. Yi formalisms in order to investigate the properties of the wakefield in the blowout regime. In a second part, the trapping and injection mechanisms into the wakefield were studied. When the optical injection scheme is used, electrons may undergo stochastic heating or cold injection depending on the lasers' polarisations.

A similarity parameter was introduced to find out the most appropriate method to maximise the trapped charge. In a third part, our analytic model is extended to investigate the influence of an initially applied longitudinal magnetic field on the laser wakefield in the bubble regime. When the plasma is magnetized two remarkable phenomena occur. Firstly the bubble is opened at its rear, and secondly the longitudinal magnetic field is amplified - at the rear of the bubble - due to the azimuthal current induced by the variation of the magnetic flux. The predictions of our analytic model were shown to be in agreement with 3D PIC simulation results obtained with Calder-Circ. In most situations the wake shape is altered and self-injection can be reduced or even cancelled by the applied magnetic field. However, the application of a longitudinal magnetic field, combined with a careful choice of laser-plasma parameters, reduces the energy spread of the electron beam produced after optical injection.

