



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation d'écoulements turbulents cavitants avec un modèle de transport de taux de vide

Boris Charrière

► **To cite this version:**

Boris Charrière. Modélisation et simulation d'écoulements turbulents cavitants avec un modèle de transport de taux de vide. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAI108 . tel-01286354

**HAL Id: tel-01286354**

**<https://theses.hal.science/tel-01286354v1>**

Submitted on 10 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : IMEP2/MECANIQUE DES FLUIDES, PROCEDES,  
ENERGETIQUE

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Boris / CHARRIERE**

Thèse dirigée par **Eric / GONCALVES**

préparée au sein du **Laboratoire des Écoulements  
Géophysiques et Industrielles**  
dans l'**École Doctorale Ingénierie - Matériaux Mécanique  
Énergétiques Environnement Procédés Production**

## **Modélisation et simulation d'écoulements turbulents cavitants avec un modèle de transport de taux de vide**

Thèse soutenue publiquement le « **10 décembre 2015** »,  
devant le jury composé de :

**Mme Maria Vittoria SALVETTI**

Professeure, Université de Pise, Rapporteur

**Mr Farid BAKIR**

Professeur des Universités, ENSAM Paris Tech, Rapporteur

**Mr Jean-Baptiste DEUFF**

Docteur, DGA Techniques Hydrodynamiques, Examineur

**Mme Claire SEGOUFIN**

Docteur, Alstom Hydro France, Examineur

**Mme Henda DJERIDI**

Professeure des Universités, Grenoble-INP, Président du jury

**Mr Eric GONCALVES DA SILVA**

Professeur des Universités, ENSMA, Directeur de thèse





# Modeling and simulation for turbulent cavitating flows with void ratio transport equation model

*Thesis supported by:* THE FRENCH DEFENCE PROCUREMENT AGENCY - MINISTRY OF DEFENCE

**Abstract:** The computation of turbulent cavitating flows involves many difficulties both in modeling the physical phenomena and in the development of robust numerical methods. Indeed such flows are characterized by phase transitions and large density gradients, Mach number variation due to speed of sound decrease, two-phase turbulent areas and unsteadiness. This thesis follows experimental and numerical studies led at the Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels which aim to improve the understanding and modeling of cavitating flows. Simulations are based on a compressible code coupled with a pre-conditioning technique which handles low-Mach number areas. The two-phase flows are reproduced using a one-fluid homogeneous model and temporal discretisation is performed using an implicit dual-time stepping method. The resolution is based on the RANS approach that couples conservation equations with first-order closure models to compute eddy viscosity. In two-phase flows areas, the computation of thermodynamic quantities requires to close the system with equations of state (EOS). Thus, two formulations are investigated to determine the pressure in the mixture. The stiffened gas EOS is written with conservative quantities while a sinusoidal law deduces the pressure from the volume fraction of vapor (the void fraction). The present study improves the homogeneous equilibrium models by including a transport equation for the void ratio. The mass transfer between phases is assumed to be proportional to the divergence of the velocity. In addition to a better modeling of convection, expansion and collapse phenomenon, this added transport equation allows to relax the local thermodynamic equilibrium and to introduce a metastable state to the vapor phase. 2D and 3D simulations are performed on Venturi type geometries characterized by the development of unstable partial cavitation pockets. The goal is to reproduce unsteadiness linked to each profile such as the formation of a re-entrant jet or the quasi-periodic vapor clouds shedding. Numerical results highlight frequency variations of unsteadiness depending on the speed of sound computation. Moreover, the simulation conducted with a relaxed vapor density increase the pressure wave propagation magnitude generated by the collapse of cavitating structures. It contributes to the destabilization of the pocket. Finally, the role of the void ratio equation is analyzed by comparing the simulation results to those obtained subsequently from a model involving only three conservation equations.

**Key-words:** Cavitation, URANS simulations, one-fluid homogeneous model, mass transfer, void ratio transport equation

# Modélisation et simulation d'écoulements turbulents cavitants avec un modèle de transport de taux de vide

*Thèse soutenue par : LA DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ARMEMENT - MINISTÈRE DE LA DÉFENSE*

**Résumé :** La simulation numérique des écoulements turbulents cavitants revêt de nombreuses difficultés tant dans la modélisation des phénomènes physiques que dans le développement de méthodes numériques robustes. En effet de tels écoulements sont caractérisés par un changement de phase associé à des gradients de la masse volumique, des variations du nombre de Mach causées par une chute de la vitesse du son, des zones de turbulence diphasique et la présence d'instationnarités. Les travaux de la présente thèse s'inscrivent dans la continuité des études expérimentales et numériques menées au sein du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (LEGI), qui visent à améliorer la compréhension et la modélisation d'écoulements cavitants. Les simulations s'appuient sur un code compressible associé à une technique de pré-conditionnement bas-Mach qui permet de traiter les zones incompressibles. Les écoulements diphasiques sont reproduits à l'aide d'un modèle de mélange homogène 1-fluide avec discrétisation implicite en pas de temps dual. Enfin la résolution adopte l'approche moyennée RANS qui couple le système des équations de conservation avec des modèles de turbulence du premier ordre basés sur la notion de viscosité turbulente. Dans les zones diphasiques, le calcul des variables thermodynamiques nécessite l'introduction d'équations d'état. La pression au sein du mélange est ainsi reliée aux grandeurs conservatives soit à partir d'une équation d'état de mélange des gaz raides, soit par une relation sinusoidale incorporant la fraction volumique de vapeur (le taux de vide). La valeur ajoutée de ces travaux de thèse repose sur l'introduction d'une équation de transport pour le calcul du taux de vide. Celle-ci incorpore un terme source dont le transfert de masse entre les phases est fermé grâce à une hypothèse de proportionnalité à la divergence du champ de vitesse. Outre l'amélioration des phénomènes de convection, de dilatation et de collapse, cette équation supplémentaire permet de relaxer l'équilibre thermodynamique local et d'introduire un état métastable pour la phase vapeur. Les simulations 2D et 3D sont réalisées sur des géométries de type Venturi caractérisées par le développement de poches de cavitation partielle instables. L'objectif consiste à reproduire les instationnarités inhérentes à chaque profil telles que la formation d'un jet rentrant liquide à proximité de la paroi ou la production de nuages de vapeur convectés par l'écoulement principal. Les résultats numériques mettent en avant une variation de la fréquence des instationnarités en fonction du calcul de la vitesse du son en zone de mélange. D'autre part, la prise en compte de déséquilibre de la phase vapeur amplifie les phénomènes de propagation d'ondes de pression générées par le collapse des structures cavitantes et participe à la déstabilisation de la poche. Enfin, l'influence de l'équation de transport de taux de vide est analysée en confrontant les résultats des simulations à ceux obtenus ultérieurement à partir d'un modèle à seulement trois équations de conservation.

**Mots-clés :** Cavitation, simulations URANS, modèle homogène 1-fluide, transferts de masse, équation de transport de taux de vide



# Remerciements

Une aventure de trois ans, comme celle-ci ne s'écrit pas sans l'aide, le soutien et la confiance de personnes que je tiens ici à remercier.

En premier lieu, je remercie l'ensemble des membres du jury. Votre relecture du manuscrit, que j'imaginai à chaque page d'écriture de plus en plus fastidieuse, m'honore. Votre présence le jour de la soutenance et nos échanges constructifs ont su me convaincre de l'intérêt d'un travail que j'ai, maintes et maintes fois, remis en doute.

Cette thèse n'aurait peut-être pas vu le jour sans la confiance qu'a su m'accorder Regiane. Notre collaboration de six mois, fut pour moi une réelle introduction dans le monde de la simulation numérique et plus particulièrement au sein du LEGI. Avec un certain recul, je pense que l'accueil réservé par les différents titulaires du laboratoire, envers le jeune stagiaire que j'étais, m'a encouragé à me lancer dans cette aventure. Je remercie ainsi Patrick pour sa patience, sa générosité et son aide au quotidien pour les jeunes créateurs de "bug" dont j'ai fait partie. Côté expérimental, interprétations physiques, débats socio-politiques, avis tranchés et bonne humeur : Stéphane était le mieux placé. A ceux-ci s'ajoutent les acteurs du laboratoire, croisés de près ou de loin et plus particulièrement ceux du bâtiment A. Merci à Guillaume, Jean-Luc, Henda, Giovanni... que ce soit pour votre contribution aux mots fléchés votre présence aux pauses cafés ou les nombreux services que vous avez su m'offrir.

La vie de laboratoire ne serait rien sans le groupe de thésards qui l'anime. Merci à Jean, pour ton manuscrit - qui a fini par devenir mon livre de chevet - ton aide et ta disponibilité ; Olivier qui a tout de suite su m'intégrer et avec qui j'ai partagé ma première année ; Antoine, le "dégourdi", que ce soit pour bricoler la bicyclette, trafiquer le Latex et toujours de bons conseils ; Nico, la force tranquille, le phénomène de la grimpe et encore plus accro au chocolat que moi ; Laurent, l'intelligent de la bande et grâce à qui l'ambiance entre thésards était si conviviale ; Mouloud, pour tes fous rires devant l'ordi, tes sites internet malicieux et tes convictions ; Guillaume, le curieux, toujours à l'écoute et plus que jamais étourdi. Dans un second wagon, je souhaite bonne continuation à Yves, un chic type, passionné de sport et avec qui j'ai beaucoup aimé échanger, Uros, les deux Alex, JB, Sofiane, Sylia, Lucas...

Je remercie par dessus tout Eric, à qui je dois cette thèse. Je me souviens encore du jour où tu m'as présenté ce projet. S'en sont suivies trois années de collaboration et d'enseignement au cours desquelles j'ai finalement tout appris, en mécanique des fluides comme en simulation. Je réalise, avec un certain recul, à quel point ton encadrement m'a été bénéfique. Tu as toujours su me mettre face à mes responsabilités quand cela était nécessaire, qu'importe les mécontentements du râleur que je suis. Parallèlement, je te dois des heures de relectures, de corrections, d'explications,

de ré-explications... Je sais aujourd'hui que la finalisation de ce travail n'aurait pas été la même sans tes encouragements et tes exigences. Au delà de cette relation "professionnelle", je retiens de ta personnalité : ta culture, ton niveau inégalable en mots croisés, tes bons conseils cinéma et l'intérêt que tu as su porté envers mes activités extra-scientifiques.

Je conclus cette partie de remerciements - qui ressemble de plus en plus à un discours d'une cérémonie des césars - en n'oubliant pas les êtres qui me sont chers. Une mamie partie si vite, sans avoir le temps de me voir docteur, mes grands-parents formidables et à qui je tiens tellement, Françoise, Louis, mon frère et surtout mes parents qui ont supporté mes moments de doute et sans qui je n'aurais pas pu bâtir un tel projet. Je termine par toi, le petit bout'chou qui anime mon quotidien depuis quatre ans et demi. Tu as chamboulé ma petite vie, j'ai hâte d'en écrire la suite à tes côtés.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>I Modélisation</b>	<b>25</b>
<b>1 Modélisation d'un écoulement cavitant</b>	<b>27</b>
1.1 Modélisation des écoulements avec interfaces . . . . .	28
1.2 Modélisation moyennée pour les écoulements cavitants . . . . .	28
1.2.1 Présentation . . . . .	28
1.2.2 Le système à résoudre pour les modèles de mélange . . . . .	29
1.2.3 Les modèles 2-fluides . . . . .	30
1.2.4 Les modèles 1- fluide ou modèles de mélange homogène . . . . .	31
<b>2 Equations de conservation du modèle de mélange homogène</b>	<b>35</b>
2.1 Equations de conservation locales instantanées phasiques . . . . .	36
2.1.1 Définition d'un volume de contrôle . . . . .	36
2.1.2 Outils mathématiques . . . . .	36
2.1.3 Ecriture des équations de conservation locales instantanées . . . . .	37
2.2 Equations de conservation moyennées phasiques . . . . .	38
2.2.1 Les opérateurs de moyenne . . . . .	39
2.2.2 Décomposition d'une variable aléatoire . . . . .	39
2.2.3 Définition de l'opérateur de moyenne temporelle . . . . .	40
2.2.4 Ecriture des équations de conservation phasiques moyennées . . . . .	42
2.3 Equations de conservation moyennées pour un mélange homogène . . . . .	45
2.3.1 Présentation . . . . .	45
2.3.2 Les variables du mélange . . . . .	45
2.3.3 Ecriture des équations de conservation moyennées pour le mélange . . . . .	47
2.3.4 Hypothèses effectuées au sein du mélange . . . . .	50
<b>3 Les modèles de turbulence</b>	<b>53</b>
3.1 Le problème de fermeture des équations . . . . .	54
3.2 La modélisation à $n$ équations . . . . .	55
3.2.1 Présentation . . . . .	55

3.2.2	Modèle à transport de viscosité turbulente . . . . .	56
3.2.3	Modèles à deux équations de transport . . . . .	57
3.3	Limiteur de viscosité turbulente : la correction de Reboud . . . . .	66
3.4	Les modèles hybrides RANS/LES . . . . .	67
3.4.1	L'approche DES . . . . .	67
3.4.2	Réflexion sur la modélisation de la turbulence . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Modélisation de la cavitation</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Equations d'état . . . . .	72
4.1.1	Thermodynamique générale . . . . .	72
4.1.2	Fermeture thermodynamique dans les phases pures . . . . .	72
4.1.3	Equation d'état thermique dans le mélange . . . . .	75
4.1.4	Fermeture thermodynamique dans le mélange . . . . .	75
4.1.5	Réflexion sur l'utilisation d'une équation d'état . . . . .	77
4.2	Expression de la vitesse du son . . . . .	79
4.2.1	Vitesse du son dans le mélange . . . . .	79
4.2.2	Vitesse du son sans transfert de masse . . . . .	79
4.2.3	Vitesse du son avec transfert de masse . . . . .	80
4.2.4	Etude du comportement de la vitesse du son . . . . .	87
4.2.5	Raccord entre vitesse du son de la phase pure et du mélange . . . . .	88
4.3	Equation de transport du taux de vide . . . . .	89
4.3.1	Présentation . . . . .	89
4.3.2	Débit massique entre phases . . . . .	90
4.3.3	Les termes sources dans les modèles de cavitation . . . . .	92
4.3.4	Formulation de l'équation de transport . . . . .	98
4.3.5	Terme source de relaxation mécanique . . . . .	100
4.3.6	Terme source de transfert de masse . . . . .	101
4.3.7	Tableaux récapitulatifs des formulations associées à chaque modèle . . . . .	103
4.4	Etude comparative des modèles de cavitation . . . . .	106
4.4.1	Présentation du cas d'étude . . . . .	106
4.4.2	Simulations numériques sans transferts de masse . . . . .	106
4.4.3	Simulations numériques avec transferts de masse . . . . .	107
4.4.4	Diminution de la fraction volumique de gaz initiale . . . . .	108
4.4.5	Modélisation avec effets thermodynamiques . . . . .	112
4.4.6	Conclusion . . . . .	116
<b>II</b>	<b>Code de calculs</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>5</b>	<b>Le code de calculs Caviflow</b> . . . . .	<b>121</b>
5.1	Le système d'équations . . . . .	122
5.2	L'approche volumes finis . . . . .	123
5.3	Schéma explicite . . . . .	124
5.3.1	Présentation . . . . .	124

5.3.2	Discrétisation des flux convectifs	125
5.4	Schéma implicite	128
5.4.1	Présentation	128
5.4.2	Discrétisation des flux convectifs	128
5.4.3	Discrétisation des flux visqueux	128
5.4.4	Ecriture simplifiée du schéma implicite	129
5.5	Schéma implicite sans matrice	129
5.5.1	Discrétisation des flux convectifs	129
5.5.2	Discrétisation des flux visqueux	130
5.5.3	Le système implicite sans matrice	130
5.6	Intégration temporelle	130
5.6.1	Approche à pas de temps local	130
5.6.2	Approche à pas de temps dual	131
5.7	Traitement des termes sources	132
5.8	Préconditionnement des écoulements à bas nombre de Mach	133
5.8.1	Les équations d'ondes	133
5.8.2	Problématique des écoulements à faible nombre de Mach	134
5.8.3	La méthode de preconditionnement	137
5.9	Conditions aux limites	140
5.9.1	L'approche lois de paroi	140
5.9.2	Calcul du champ moyen	140
5.9.3	Calcul du champ turbulent	141
5.9.4	Conditions limites en entrée et en sortie	143
<b>III</b>	<b>Etat de l'art</b>	
	<b>des instabilités de cavitation partielle et des études sur Venturi</b>	<b>149</b>
<b>6</b>	<b>Les instabilités de cavitation partielle</b>	<b>151</b>
6.1	Régimes de cavitation	152
6.1.1	Cavitation par poche	152
6.1.2	Cavitation partielle	152
6.2	Vitesse de propagation des ondes	157
6.3	Fréquence des instabilités de cavitation	159
6.3.1	Présentation	159
6.3.2	Analyses fréquentielles	159
6.3.3	Résonance de cavitation	160
6.3.4	Spectres fréquentiels sur géométries venturi	160
<b>7</b>	<b>Etude de la cavitation sur géométries de Venturi</b>	<b>163</b>
7.1	Présentation	164
7.2	Le Venturi 4°	164
7.2.1	Présentation de la veine d'essai	164
7.2.2	Résultats expérimentaux	165

7.2.3	Etudes numériques . . . . .	167
7.2.4	Paramètres numériques . . . . .	172
7.2.5	Les quantités analysées . . . . .	173
7.3	Le Venturi 8° . . . . .	176
7.3.1	Présentation de la veine d'essai . . . . .	176
7.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	177
7.3.3	Etudes numériques . . . . .	179
7.3.4	Paramètres numériques . . . . .	183
7.3.5	Les quantités analysées . . . . .	185
 <b>IV Simulations 2D</b>		<b>187</b>
 <b>8 Etudes sur géométrie de Venturi 4°</b>		<b>189</b>
8.1	Introduction . . . . .	190
8.2	Modèles de turbulence . . . . .	192
8.2.1	Correction de Reboud . . . . .	192
8.2.2	Influence du coefficient de la correction de Reboud . . . . .	195
8.2.3	Introduction du terme SAS . . . . .	205
8.2.4	Conclusion partielle . . . . .	209
8.3	Modèles de cavitation . . . . .	211
8.3.1	Modèle avec équation d'état de mélange des gaz raides . . . . .	211
8.3.2	Etude sans transfert de masse . . . . .	212
8.3.3	Influence du paramètre $C_{des}$ . . . . .	214
8.3.4	Conclusion partielle . . . . .	218
8.4	Modèles à 3- et 4-équations . . . . .	219
8.4.1	Modèles avec équation d'état de mélange des gaz raides . . . . .	219
8.4.2	Modèles avec loi d'état sinusoïdale . . . . .	220
8.4.3	Conclusion partielle . . . . .	225
8.5	Conclusion . . . . .	227
 <b>9 Etudes sur géométrie de Venturi 8°</b>		<b>229</b>
9.1	Introduction . . . . .	230
9.2	Base de données expérimentales . . . . .	231
9.3	Modèles de cavitation . . . . .	232
9.3.1	Modèle avec loi d'état sinusoïdale . . . . .	232
9.3.2	Champ moyen de pression statique et fluctuante . . . . .	238
9.3.3	Modèle avec équation d'état de mélange des gaz raides . . . . .	240
9.3.4	Conclusion partielle . . . . .	244
9.4	Etude du phénomène de propagation d'ondes de pression . . . . .	246
9.4.1	Analyse qualitative de la propagation d'ondes . . . . .	246
9.4.2	Correlations entre puits . . . . .	246
9.4.3	Conclusion partielle . . . . .	254
9.5	Relaxation thermodynamique de la masse volumique de la phase vapeur . . . . .	256

9.5.1	Modèles relaxés en zones non cavitantes . . . . .	256
9.5.2	Modèle relaxé en zones de cavitation . . . . .	265
9.5.3	Conclusion partielle . . . . .	270
9.6	Modèles 3- et 4-équations . . . . .	271
9.6.1	Comparaison pour deux modèles de turbulence : $k - \ell$ et Spalart-Allmaras . . . . .	271
9.6.2	Dynamique de la poche de cavitation . . . . .	271
9.6.3	Conclusion partielle . . . . .	276
9.7	Conclusion . . . . .	278
<b>V</b>	<b>Simulations 3D</b>	<b>279</b>
9.8	Etat de l'art des études d'écoulements cavitants 3D . . . . .	282
9.8.1	Etudes expérimentales et numériques . . . . .	282
9.8.2	Simulations 3D en modèles à 3-équations . . . . .	283
9.9	Simulations 3D en modèles à 4-équations . . . . .	284
9.9.1	Etude globale et champs moyens . . . . .	284
9.9.2	Influence de l'équation d'état . . . . .	286
9.9.3	Influence du modèle de turbulence . . . . .	291
9.9.4	Analyse approfondie d'un écoulement 3D . . . . .	293
9.10	Conclusion . . . . .	302
	<b>Conclusion</b>	<b>305</b>
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>311</b>
<b>A</b>	<b>Equations supplémentaires</b>	<b>313</b>
A.1	Equations d'évolution des champs fluctuants . . . . .	313
A.1.1	Equation de conservation des fluctuations de la masse volumique . . . . .	313
A.1.2	Equation de conservation des fluctuations de la quantité de mouvement . . . . .	313
A.2	Equation de transport des quantités turbulentes . . . . .	314
A.2.1	Equation de transport du tenseur des contraintes turbulentes . . . . .	314
A.2.2	Equation de transport de la dissipation turbulente . . . . .	316
A.3	Equation de transport des fluctuations de la masse volumique avec échanges massiques . . . . .	318
<b>B</b>	<b>Modèles de turbulence supplémentaires</b>	<b>319</b>
B.1	Modèles avec échelle intégrale de la turbulence . . . . .	319
B.1.1	Le modèle $k - k\ell$ de Rotta . . . . .	319
B.1.2	Le modèle $k - \sqrt{k}\ell$ - SAS . . . . .	322
<b>C</b>	<b>Modélisation d'un écoulement cavitant</b>	<b>325</b>
C.1	Paramètres thermodynamiques de la loi d'état des gaz raides . . . . .	325
C.2	Expression de la vitesse du son dans une phase pure . . . . .	326

C.3	Vitesse du son dans le mélange . . . . .	328
C.3.1	Expression générale de la vitesse du son . . . . .	328
C.3.2	Vitesse du son pour un modèle à l'équilibre thermodynamique . . . . .	329
C.3.3	Vitesse du son avec transferts de masse pour une équation d'état de mélange des gaz raides . . . . .	331
C.3.4	Vitesse du son avec transferts de masse pour une loi d'état sinusoïdale . . . . .	332
C.3.5	Vitesse du son au sein du terme source . . . . .	335
C.4	Autres développements de l'équation de transport de taux de vide . . . . .	337
C.4.1	Equation de la forme $\alpha\rho_v$ . . . . .	337
C.4.2	Equation de la forme $\rho_v$ . . . . .	338
C.4.3	Equation d'évolution de la pression . . . . .	338
C.4.4	Ecriture différentielle de $\rho\tilde{e}_m$ . . . . .	339
C.4.5	Expression des matrices de passage . . . . .	341
<b>VII</b>	<b>Article scientifique</b>	<b>357</b>

# Table des figures

2.1	Volume de contrôle matériel $\mathcal{V}$ . . . . .	36
2.2	Représentation de l'évolution d'une variable phasique $f_k$ sur le temps T . . . . .	41
4.1	Courbes de coexistence et de saturation . . . . .	73
4.2	Illustration de la loi d'état sinusoïdale . . . . .	78
4.3	Vitesses du son pour une équation d'état de mélange des gaz raides . . . . .	87
4.4	Vitesses du son avec loi d'état sinusoïdale . . . . .	88
4.5	Schéma de la simulation d'un tube à détente . . . . .	106
4.6	Simulation d'un tube à détente cavitant avec un système à 4-équations . . . . .	107
4.7	Simulation d'un tube à détente cavitant avec un système à 4-équations . . . . .	109
4.8	Influence du paramétrage des termes sources . . . . .	110
4.9	Reproduction des fronts d'évaporation par la pression . . . . .	111
4.10	Evolution de la pression pour une loi sinusoïdale . . . . .	111
4.11	Modification du taux de vide initial : étude du taux de production de vapeur . . . . .	113
4.12	Simulation d'un tube à détente cavitant à haute vitesse avec un système à 4-équations . . . . .	115
4.13	Comparaison des modèles avec et sans effets thermodynamiques . . . . .	116
5.1	Schéma de la discrétisation spatiale de la formulations <i>cell-centered</i> . . . . .	123
5.2	Mise en place d'un calcul instationnaire . . . . .	132
6.1	Illustration du jet rentrant liquide en fermeture de poche attachée [24] . . . . .	153
6.2	Comportement de la poche cavitante autour d'un profil d'aube plan-convexe . . . . .	155
6.3	Représentation schématique des distributions de pressions sur le côté dépression . . . . .	155
7.1	Schéma descriptif de la veine d'essai du CREMHyG . . . . .	165
7.2	Vue schématique du Venturi 4° et de la poche de cavitation . . . . .	166
7.3	Dynamique de la poche observée par Barre et al. [14] sur Venturi 4° . . . . .	167
7.4	Maillage 251 × 62 de la géométrie Venturi 4° . . . . .	172
7.5	Vue schématique du Venturi 8° et de la poche de cavitation . . . . .	176
7.6	Dynamique de la poche observée par Aeschlimann et al. [3] sur Venturi 8° . . . . .	178
7.7	Illustration des mécanismes d'instabilités sur Venturi 8° . . . . .	179
7.8	Illustration du mécanisme d'instabilité d'onde de condensation sur Venturi 8° . . . . .	180
7.9	Maillage 174 × 56 de la géométrie Venturi 8° . . . . .	184
7.10	Ligne d'extraction sur laquelle sont équirépartis 50 points de mesure . . . . .	186

8.1	Evolution du taux de vide : modèles de turbulence . . . . .	193
8.2	Visualisation de la dynamique de poche. Temps entre deux images : $\Delta t = 0, 1sec$ . . . . .	197
8.3	Gradients de masse volumique : modèles de turbulence . . . . .	198
8.4	Gradients de masse volumique : sans correction de Reboud . . . . .	198
8.5	Taux de vide et vitesses moyennes : modèles de turbulence . . . . .	199
8.6	Pressions statique et fluctuante : modèles de turbulence . . . . .	200
8.7	Gradient volumique et critère Q du modèle $k - \omega$ -SST . . . . .	200
8.8	Taux de vide et vitesses moyennes : influence du paramètre $n$ (SA) . . . . .	201
8.9	Pression statique et fluctuante : influence du paramètre $n$ (SA) . . . . .	202
8.10	Taux de vide et vitesses moyennes : influence du paramètre $n$ ( $k - \epsilon$ ) . . . . .	203
8.11	Pression statique et fluctuante : influence du paramètre $n$ ( $k - \epsilon$ ) . . . . .	204
8.12	Evolution du taux de vide : modèles <i>SAS</i> . . . . .	206
8.13	Gradients de masse volumique et critère Q (SA) : avec et sans <i>SAS</i> . . . . .	206
8.14	Gradients de masse volumique et critère Q ( $k - \ell$ ) : avec et sans <i>SAS</i> . . . . .	207
8.15	Taux de vide et vitesses moyennes : influence du terme <i>SAS</i> . . . . .	208
8.16	Pression statique et fluctuante : influence du terme <i>SAS</i> . . . . .	209
8.17	Evolution du taux de vide : modèles de cavitation . . . . .	212
8.18	Visualisation de la dynamique de poche . . . . .	213
8.19	Gradients de masse volumique et critère Q : modèles de cavitation . . . . .	214
8.20	Taux de vide et vitesses moyennes : modèle de cavitation . . . . .	215
8.21	Pression statique et fluctuante : modèle de cavitation . . . . .	216
8.22	Cavitation sans transfert de masse . . . . .	216
8.23	Pression statique et fluctuante (SA) : influence du terme $C_{des}$ . . . . .	217
8.24	Pression statique et fluctuante ( $k - \ell - SAS$ ) : influence du terme $C_{des}$ . . . . .	218
8.25	Gradients de masse volumique et critère Q : modèles 3- et 4-équations . . . . .	220
8.26	Evolution du taux de vide : modèles 3- et 4-équations . . . . .	222
8.27	Gradients de masse volumique et critère Q : modèle (SA) . . . . .	223
8.28	Gradients de masse volumique et critère Q : modèle $k - \ell$ . . . . .	223
8.29	Taux de vide et vitesses moyennes : modèles 3- et 4-équations . . . . .	224
8.30	pression statique et fluctuante : modèles 3- et 4- équations . . . . .	225
9.1	Spectres fréquentiels expérimentaux des puits 1 à 6 . . . . .	231
9.2	Evolution du taux de vide : influence de la vitesse minimale du son . . . . .	234
9.3	Densité de probabilité du taux de cavitation à différentes vitesses minimales du son . . . . .	234
9.4	Spectre fréquentiels : influence de la vitesse minimale du son . . . . .	236
9.5	Taux de vide et vitesses moyennes : influence de la vitesse minimale du son . . . . .	237
9.6	Pression statique et fluctuante : influence de la vitesse minimale du son . . . . .	239
9.7	Répartition du champ de pression aux puits 1 à 3 . . . . .	239
9.8	Visualisation de la dynamique de poche . . . . .	240
9.9	Spectres fréquentiels : modèle sinusoïdal et de mélange des gaz raides . . . . .	242
9.10	Taux de vide et vitesses moyennes : influence du modèle de cavitation . . . . .	243
9.11	Pression statique et fluctuante : influence de la vitesse minimale du son . . . . .	244
9.12	Visualisation de la dynamique de poche : $\Delta t \sim 10 msec$ . . . . .	247



9.13	Visualisation de la dynamique de poche : $\Delta t \sim 2 \text{ msec}$	248
9.14	Visualisation de la dynamique de poche : $\Delta t = 0.2 \text{ msec}$	249
9.15	Correlation des pressions et taux de vide : $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$	251
9.16	Identification du phénomène rapide à l'aval du puits 3	252
9.17	Correlation des pressions et taux de vide : $c_{min} = 0,47 \text{ m/s}$	253
9.18	Corrélation entre puits amont et puits $i$	254
9.19	Evolution du taux de vide : modèles relaxés ou à saturation	258
9.20	Densité de probabilité du taux de cavitation pour des modèles relaxés ou à saturation	258
9.21	Spectres fréquentiels en condition de saturation ( $\rho_v = \rho_v^{sat}$ )	259
9.22	Taux de vide et vitesses moyennes : influence de la relaxation	260
9.23	Pression statique et fluctuante : influence de la relaxation	261
9.24	Variation de $c_{Wallis}$ en zone non cavitante	262
9.25	Evolutions temporelles du nombre de Mach	263
9.26	Evolutions temporelles de la pression	264
9.27	Evolution du taux de vide : relaxation en zone de cavitation	266
9.28	Spectres fréquentiels avec relaxation en zone de cavitation	267
9.29	Profils moyens de la vitesse du son, du taux de vide et de la pression à l'aval du col	268
9.30	Taux de vide et vitesses moyennes : relaxation en zone de cavitation	269
9.31	Pression statique et fluctuante : relaxation en zone de cavitation	270
9.32	Evolution du taux de vide : modèles à 3- et 4-équations	272
9.33	Densité de probabilité du taux de cavitation en modèles à 3- et 4-équations	273
9.34	Spectres fréquentiels en modèles à 3- et 4-équations	274
9.35	Taux de vide et vitesses moyennes : modèles à 3- et 4-équations	275
9.36	Pression statique et fluctuante : modèles à 3- et 4-équations	276
9.37	Gradients de masse volumique en milieu de veine	285
9.38	Taux de vide et vitesses moyennes	287
9.39	Pression statique et fluctuante	288
9.40	Visualisation instantanée des poches de cavitation dans le plan ( $y = 6 \text{ mm}$ )	289
9.41	Visualisation instantanée dans le plan ( $y = 8 \text{ mm}$ )	289
9.42	Profils moyens des vitesse verticale $v$ et transversale $w$	290
9.43	Visualisation instantanée des poches de cavitation dans le plan ( $y = 6 \text{ mm}$ )	292
9.44	Visualisation instantanée : comparaison systèmes 3- et 4-équations modèle $k - \ell$	294
9.45	Visualisation instantanée : comparaison systèmes 3- et 4-équations modèle SAS	295
9.46	Visualisation du taux de vide et du vecteur vitesse au puits 3	296
9.47	Représentation des lignes transversales	296
9.48	Représentation du vecteur vitesse et du taux de vide dans les plans ( $y, z$ )	297
9.49	Représentation du vecteur vitesse et du taux de vide dans les plans ( $x, z$ )	298
9.50	Gradient de la masse volumique aux abords et au centre de la veine	298
9.51	Profils moyens transversaux du taux de vide et de vitesse longitudinale	300
9.52	Profils moyens transversaux de vitesse verticale et transversale	301
C.1	Evaluation du terme Coeff par rapport à 1	332



# Liste des tableaux

3.1	Coefficients du modèle Spalart-Allmaras . . . . .	57
3.2	Coefficients du modèle $k - \epsilon$ . . . . .	59
3.3	Coefficients du modèle $k - \omega$ . . . . .	60
3.4	Coefficients du modèle $k - \omega - SST$ . . . . .	61
3.5	Coefficients du modèle $k - \ell$ . . . . .	62
3.6	Coefficients du modèle $k - \ell - SAS$ . . . . .	64
4.1	Formulation des grandeurs thermodynamiques, termes sources et vitesses du son des modèles à l'équilibre, avec et sans prise en compte des effets thermodynamiques	104
4.2	Hypothèses thermodynamiques et caractéristiques des modèles . . . . .	105
5.1	Types de frontières et relations caractéristiques associées . . . . .	147
7.1	Point de fonctionnement du Venturi 4° . . . . .	165
7.2	Point de fonctionnement du Venturi 8° . . . . .	177
8.1	Calculs sur Venturi 4° : modèles de turbulence . . . . .	192
8.2	Calculs sur Venturi 4° : influence du coefficient $n$ . . . . .	195
8.3	Calculs sur Venturi 4° : terme $SAS$ . . . . .	205
8.4	Calculs sur Venturi 4° : modèle de cavitation . . . . .	211
8.5	Calculs sur Venturi 4° : introduction d'un coefficient de destruction . . . . .	217
8.6	Calculs sur Venturi 4° : modèles 3- et 4-équations . . . . .	219
8.7	Calculs sur Venturi 4° : 3- et 4-équations . . . . .	220
9.1	Calculs sur Venturi 8° : variation la vitesse minimale du son . . . . .	232
9.2	Calculs sur Venturi 8° : et gaz raides . . . . .	240
9.3	Calculs sur Venturi 8° : modèles relaxés et à saturation . . . . .	257
9.4	Calculs sur Venturi 8° : modèle relaxé en zone de cavitation . . . . .	265
9.5	Calculs sur Venturi 8° : modèles à 3- et 4-équations . . . . .	271
9.6	Paramètres des calculs 3D effectués sur le Venturi 4° . . . . .	284
B.1	Coefficients du modèle $k - \sqrt{k}\ell$ . . . . .	323
C.1	Valeurs des quantités phasiques . . . . .	332



# Nomenclature

$c$	vitesse du son	$m.s^{-1}$
$C_p$	capacité calorifique à pression constante	$kg.m^2.K^{-1}.s^{-2}$
$D$	diffusion d'énergie cinétique turbulente	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
$E$	energie totale	$kg.m^2.s^{-2}$
$e$	energie interne	$kg.m^2.s^{-2}$
$f_j$	composante $j$ du vecteur des forces volumiques	$kg.m.s^{-2}$
$g$	enthalpie libre	$kg^2.m^2.s^{-2}$
$h$	enthalpie	$kg^2.m^2.s^{-2}$
$k$	énergie cinétique turbulente	$m^2.s^{-2}$
$L_{vk}$	échelle de longueur de Von Karman	$m$
$\ell$	échelle de longueur turbulente définie par Rotta	$m$
$M$	flux de masse turbulent	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
$M_k$	transfert de quantité de mouvement entre les phases	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
$\dot{m}$	débit massique par unité de surface de la phase vapeur vers la phase liquide	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
$P$	production d'énergie cinétique turbulente	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
$Pr$	nombre de Prandtl	
$p$	pression	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$P_{vap}$	pression de vaporisation	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$q$	flux de chaleur	$kg^2.s^{-3}$
$q^t$	flux de chaleur turbulent	$kg^2.s^{-3}$
$Q_k$	transfert d'énergie entre les phases	$kg.m^{-1}.s^{-3}$
$Re$	nombre de Reynolds	

---

$S$	tenseur des taux de déformation	$s^{-1}$
$T$	température	$K$
$t$	temps	$s$
$u_j$	composante $j$ de la vitesse	$m.s^{-1}$
$\alpha$	taux de vide	
$\epsilon$	dissipation d'énergie cinétique turbulente	$m^2.s^{-3}$
$\epsilon_d$	dissipation d'énergie cinétique turbulente dilatationnelle	$m^2.s^{-3}$
$\epsilon_s$	dissipation d'énergie cinétique turbulente solénoïdale	$m^2.s^{-3}$
$\gamma$	tension superficielle	
$\Gamma_k$	taux local de production de masse de la phase $k$	$kg.m^{-3}.s^{-1}$
$\lambda$	conductivité thermique	$kg^2.m.s^{-3}.K$
$\mu$	viscosité dynamique moléculaire	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\mu_t$	viscosité dynamique turbulente	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\sigma_{entree} = \frac{P_{entree} - P_{vap}}{\frac{1}{2}\rho_{ref}U_{ref}}$	paramètre de cavitation en entrée	
$\sigma_{ij}$	tenseur des contraintes visqueuses	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$\rho$	masse volumique	$kg.m^{-3}$
$\tau_{ij}$	tenseur des contraintes turbulentes	$kg.m^{-1}.s^{-2}$

# Introduction

Les travaux de la présente thèse s'inscrivent dans le cadre de l'étude et de la modélisation des écoulements cavitants menés au sein du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels. L'enjeu consiste ici à proposer la modélisation d'un phénomène qui provoque, souvent, des conséquences négatives sur l'environnement au sein duquel il prend naissance.

La cavitation désigne le changement de phase d'un fluide de son état liquide à l'état vapeur créé par une diminution de pression sans apport énergétique de chaleur. En écoulement, un fluide est soumis à des accélérations locales dont l'augmentation de vitesse engendre une diminution de la pression statique qui peut, sous certaines conditions, causer sa vaporisation. Ces conditions s'appliquent lorsque, localement, la pression statique décroît en deçà de la pression de vapeur saturante. Au delà du phénomène physique, la cavitation modifie les propriétés même de l'écoulement qui, à l'origine monophasique, devient désormais diphasique. A cela s'ajoutent les caractéristiques liées au changement de phase que sont le transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre les phases. Lorsque l'écoulement rencontre une zone de re-compression, c'est-à-dire un lieu où la pression dépasse sa valeur saturante, les structures de vapeur auront tendance à se condenser pour retrouver leur état liquide. C'est typiquement ce phénomène qui constitue un effet néfaste pour le domaine environnant. Localement, le collapse de structures plus ou moins importantes peut être brutal et générer la formation d'une onde de pression dont l'intensité se traduit par une destruction de l'équipement. Outre l'aspect mécanique, le collapse est associé à un crépitement caractéristique, facilement identifiable. Dès lors, l'étude et la compréhension de ce phénomène concerne de nombreux secteurs industriels : que ce soit le domaine de l'hydraulique pour la protection et la diminution de l'endommagement des installations, la motorisation aérospatiale avec les écoulements à haute vitesse au sein des turbopompes ou encore le secteur sous-marin dont la propulsion ne doit pas générer d'ondes sonores. En se cantonnant uniquement aux applications de la propulsion marine, la cavitation peut se manifester sous différentes formes autour d'une hélice : présence de bulles isolées, développement d'une poche de cavitation ou création de filaments tourbillonnaires dans un vortex. Chaque comportement ne présente pas les mêmes conséquences en terme d'érosion. Les phénomènes liés à une diminution de la pression du fluide sur un aubage sont les plus fréquents ; ils engendrent la formation d'une cavité diphasique, remplie de bulles, dont les collapses provoquent l'endommagement. Deux mécanismes principaux d'implosion des structures gazeuses peuvent participer à la détérioration du matériau : l'émission d'ondes de surpression sphériques créées par le mouvement radial oscillant des bulles autour de leurs positions d'équilibre ; la formation d'un microjet, à proximité des parois, qui scinde la bulle en deux et, en se dirigeant vers la paroi, impose une forte pression sur le métal. Bien que ces

phénomènes entraînent les perspectives d'études à des échelles réduites, leurs descriptions démontrent les enjeux que représentent leurs compréhensions. L'ensemble de ces considérations a ainsi motivé la mise en place de nombreuses recherches à la fois expérimentales, dans l'optique d'observer le comportement de tels écoulements, et numériques, afin de prédire les conditions de leur apparition.

C'est dans ce contexte que le LEGI entreprend depuis plusieurs années diverses expériences, principalement sur des géométries de Venturi [173, 14, 175, 3], ou plus récemment sur une marche descendante [108], souvent destinées à des applications aérospatiales. En parallèle, de nombreux modèles numériques ont été développés et calibrés à partir des résultats d'essais [34, 134, 125, 58, 37].

La modélisation d'un écoulement cavitant s'intègre donc dans la catégorie des écoulements diphasiques et peut, en cela, s'inspirer d'études issues d'autres disciplines : la combustion, l'ébullition et les réactions chimiques. Au sein même de cette catégorie il convient de distinguer les écoulements qui concernent uniquement le transport d'une phase dispersée par une phase continue, des écoulements plus complexes avec échanges phasiques et transformations chimiques et thermodynamiques. Dès lors que la dynamique du fluide est régit sur les équations de conservation de Navier Stokes, le degré de résolution des interactions entre phases peut à son tour être subdivisé en deux axes.

- Les modèles 2-fluides résolvent les équations de conservation pour chaque état de fluide. Bien que plus coûteux en terme de résolution numérique, ils prennent en compte les déséquilibres entre phases.
- Les modèles 1-fluide qui considèrent le mélange diphasique comme un seul fluide homogène à partir d'une hypothèse d'équilibre mécanique entre phases. Selon la réduction du modèle, le nombre d'équations à résoudre est plus ou moins atténué, de trois à cinq. Dans la démarche adoptée par ce manuscrit, l'hypothèse d'égalité des vitesses de chaque phase au sein du mélange est associée à celle d'une approche simplifiée à une seule pression et une seule température de mélange. Dès lors la résolution s'apparente à celle d'un système monophasique à trois équations de conservation.

La précision des modèles d'écoulements monophasiques réside dans le degré de résolution des échelles spatiales et temporelles. Typiquement, trois types de résolutions peuvent être envisagées.

- La simulation numérique directe (Direct Numerical Simulation : DNS) résout l'ensemble des échelles spatiales et temporelles de l'écoulement.
- La simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation : LES) conserve la résolution des échelles spatiales et temporelles des structures à haut niveau d'énergie et propose de modéliser les plus petites échelles
- La simulation statistique (Reynolds Average Navier-Stokes : RANS) moyenne temporellement les équations de Navier Stokes et modélise les échelles de la turbulence.

L'approche statistique pour un fluide homogène est la plus simple à mettre en place. D'une part elle dédouane les calculs d'une discrétisation fine du domaine d'étude ; d'autre part, la réduction du système simplifie la résolution numérique.

Après avoir défini les simplifications théoriques associées à la reproduction d'un écoulement



---

diphase, la suite du raisonnement est confrontée à trois difficultés principales : l'impact de la turbulence sur la dynamique de l'écoulement, la modélisation des interactions thermodynamiques liées au changement de phase et l'établissement d'un schéma numérique robuste et précis.

La prise en compte des influences de la turbulence n'est pas inhérente à chaque résolution ; les écoulements à faible nombre de Reynolds ou les phénomènes de vaporisation brutale, causée par exemple par la propagation d'une onde de choc, font souvent appel à des solveurs Eulériens. Dans le cas d'écoulements avec formation d'une couche limite plus ou moins décollée, la problématique est différente. Il convient alors d'une part de reproduire les zones de re-circulation associées à des diminutions locales de la pression et d'autre part de modéliser les agitations de l'écoulement en présence de structures de vapeur. La modélisation de la turbulence est largement inspirée du domaine monophasique ; elle repose sur l'hypothèse d'une viscosité turbulente calculée au moyen de différents systèmes d'équation de transport [37]. Néanmoins, la turbulence possède des propriétés spatio-temporelles qui s'étendent sur une large gamme d'échelle et qui ne peuvent être toutes quantifier par les techniques de mesure actuelles. Ainsi, bien que de récentes campagnes expérimentales [1, 2, 4, 108] s'emploient à mesurer la dynamique du changement de phase et son interaction avec la turbulence, il n'en reste pas moins que le calibrage des modèles est réalisé à partir d'une base de donnée encore insuffisante.

Le modèle homogène, et en particulier les hypothèses d'égalité entre quantités thermodynamiques qu'il implique, annihilent la modélisation des déséquilibres entre phases, pourtant bien présents en écoulement cavitant. Les grandeurs thermodynamiques du mélange sont déduites des quantités conservatives au moyen d'équations d'état dont les formulations peuvent être obtenues analytiquement ou modifiées empiriquement de façon à reproduire, par exemple, des effets de métastabilité sur la pression. L'écriture d'une équation de continuité sous sa forme homogène supprime, quant à elle, la modélisation des transferts de masse entre phases. Dès lors, le taux de présence locale de la quantité de vapeur peut être déterminé de deux manières : soit déduit directement des valeurs de la densité du mélange, et a fortiori piloté par l'équation de continuité ; soit calculé à partir d'une équation de transport destinée d'une part à reproduire l'influence des phénomènes advectifs et d'autre part à modéliser les mécanismes d'apparition et de disparition respectivement associés aux zones de dilatation et de compression du fluide. C'est ici qu'intervient l'intérêt principal de la présente étude qui propose d'évaluer la valeur ajoutée d'une équation supplémentaire sur la reproduction des phénomènes de cavitation.

Enfin, la simulation est confrontée à la difficulté de schématiser numériquement un écoulement comportant des zones compressibles et incompressibles associées aux gradients de masse volumiques et nombre de Mach.

Au travers de ces problématiques, la pertinence d'un modèle de cavitation ne peut être évaluée qu'au terme d'un protocole qui comporte plusieurs étapes. Dans un premier temps, il convient de confronter la modélisation homogène aux résultats numériques de modèles 2-fluides en se cantonnant à l'utilisation de solveurs Eulériens pour l'étude de phénomènes simples, tels que le développement de la cavitation consécutif à la propagation d'une onde de détente. Par la suite, afin de répondre aux préoccupations industrielles, il est indispensable de se ramener à des écoulements canoniques, documentés dans la littérature et en particulier par le corpus expérimental. En cela, les géométries de Venturi comportent de nombreux avantages ; ce type de profil facilite

l'instrumentation et la compréhension des mécanismes liés au développement de la cavitation, la forme du divergent reproduit les champs de pression existants sur les profils d'aubes et enfin les instabilités de l'écoulement, propres à chaque angle d'ouverture, permettent d'évaluer la faculté d'adaptation d'un modèle à différentes configurations. Ces instationnarités se manifestent principalement par la présence de recirculations responsables d'une destabilisation de la poche de cavitation.

Plus récemment, le progrès des techniques de mesure a permis de mettre en évidence l'existence d'autres instabilités telles que la formation d'ondes de pression générées par le collapse des structures de vapeur. En ce qui concerne ces mécanismes, ceux-ci possèdent des temps caractéristiques et des vitesses de propagation qui posent problème à la quantification expérimentale. Intervient alors le rôle des simulations. Les calculs ont en effet pour vocation d'apporter un complément d'information par rapport à l'analyse de phénomènes locaux et quasi instantanés. Si la présente étude n'a pas la prétention de quantifier de façon exacte l'ensemble des mécanismes liés à la cavitation, elle s'inscrit néanmoins dans une démarche conjointe entre essais et simulations, au sein de laquelle les mesures empiriques permettent de calibrer des modèles dont les calculs pourront à leur tour motiver la mise en place d'expériences approfondies.

A l'issue de cette introduction, le manuscrit est structuré en cinq parties. Dans un premier temps, les équations de conservation de la mécanique des fluides sont mises en place, dans le cadre monophasique, puis étendues au fluide homogène. Ces équations sont couplés à différents modèles de turbulence présentés dans le cadre d'une hypothèse de viscosité turbulente. Enfin cette première partie introduit la modélisation de la cavitation en détaillant les fermetures thermodynamiques, la formulation de l'équation de transport de la fraction volumique de vapeur, et la validation des modèles sur des études à une seule dimension. La discrétisation du système d'équations et les méthodes employées pour répondre aux problématiques d'écoulements à compressibilité variable sont abordées en deuxième partie, lors de la présentation du code de calcul. La troisième partie répertorie les études destinées à la compréhension des mécanismes liés à la cavitation partielle avec une attention particulière portée sur la mise en place des essais menés sur les géométries de Venturi. Les simulations menées en écoulement bidimensionnels et l'évaluation des différents modèles de cavitation pour ce type de configuration sont synthétisés au cours d'une quatrième partie. Celle-ci propose différentes orientations d'analyse de l'écoulement dans l'optique de proposer, à partir des résultats de simulations, des éléments de réponse aux interrogations de la communauté scientifique. Les études bidimensionnelles sont étendues aux trois directions l'espace au cours d'une cinquième partie. Elle vise à évaluer le degré d'adaptation des différents modèles, à vérifier dans quelle mesure l'hypothèse d'un écoulement en moyenne bidimensionnel est pertinente et à analyser la reproduction de mécanismes caractéristiques de cas tridimensionnels.

Première partie

Modélisation



# Chapitre 1

## Modélisation d'un écoulement cavitant

*L'objectif de cette section consiste à présenter les différentes méthodes de modélisation d'écoulements multiphasiques. Cette catégorie d'écoulements peut se rencontrer sous différentes formes :*

- deux fluides séparés par une interface,*
- deux fluides séparés par une zone de mélange,*
- deux fluides pour lesquels l'interface ou la zone de mélange est créée par changement de phase.*

*Le phénomène de cavitation sous entend l'apparition de zone de vapeur au sein d'un milieu liquide et entre ainsi dans le cadre des écoulements diphasiques. Cependant il prend des formes très différentes selon la configuration d'écoulement. La modélisation de l'évolution d'une bulle de vapeur est par exemple très éloignée de la reproduction d'un écoulement cavitant où la partie diphasique est considérée comme une zone de mélange. Plusieurs démarches ont été proposées en fonction des applications. Une présentation succincte des stratégies de modélisation des écoulements avec interface est dans un premier temps proposée. A cette partie succède une description plus étoffée des méthodes de modélisation de la cavitation.*

## 1.1 Modélisation des écoulements avec interfaces

Les écoulements compressibles avec interfaces concernent des écoulements de deux fluides aux propriétés physiques et thermodynamiques différentes et séparés par une surface définie. L'évolution de cette zone de séparation est suivie à partir d'équations supplémentaires incorporées au système. Ce type de situation concerne aussi bien les écoulements diphasiques, tels que l'étude du comportement d'une bulle dans un liquide, que des écoulements monophasiques composés de deux liquides séparés par une interface.

Les simulations numériques de ces écoulements sont basées sur la résolution des équations d'Euler ou de Navier Stokes pour chacun des deux fluides, couplées à une équation de suivi d'interface. Dans leur article, Saurel et Le Metayer [149] répertorient les principales méthodes :

- *Méthode lagrangienne*  
L'interface est caractérisée par des positions spécifiques qui se déplacent en fonction de la vitesse locale.
- *Méthode Front Tracking*  
Cette méthode utilise un maillage fixe. Un solveur eulérien est employé pour les points distants de l'interface mais un schéma spécifique résout les points à proximité de l'interface.
- *Méthode Level set*  
Elle définit une fonction interface dans le domaine de calcul dont la courbe de niveau zéro est l'interface à décrire. Une équation de transport permet de prédire les mouvements de l'interface dans un champ de vitesse donné.

Le changement de phases est un phénomène difficile à prendre en compte par ces modèles qui font apparaître au niveau de l'interface plusieurs vitesses : la vitesse de chacune des phases et la vitesse de l'interface. La modélisation est bien souvent limitée aux écoulements bidimensionnels puisque l'ajout d'une dimension renforce la difficulté et le temps de calcul.

## 1.2 Modélisation moyennée pour les écoulements cavitants

### 1.2.1 Présentation

Le phénomène de cavitation est un cas particulier d'écoulements diphasiques. A partir d'une phase pure liquide, une seconde phase vapeur est créée et évolue en fonction des configurations locales de l'écoulement. En raison des caractéristiques différentes que présente ce genre de phénomène, chaque situation requiert une méthode de modélisation spécifique. Le suivi d'interface entre la phase liquide et vapeur n'est par exemple plus envisageable lorsqu'il s'agit de modéliser des phénomènes où la partie diphasique désigne une zone de mélange composée d'une phase vapeur dispersée dans la phase liquide.

Par ailleurs la plupart des problèmes de cavitation ne nécessite pas de connaître la valeur instantanée de chaque variable. En effet, pour des raisons de coût de calcul, la résolution s'intéresse le plus souvent aux grandeurs moyennes. A partir de là, trois catégories d'écoulements, auxquels correspondent plusieurs stratégies de modélisation, peuvent être distinguées.

#### Les écoulements à bulles

Différents modèles permettent d'étudier l'apparition, l'évolution et le collapse d'une bulle isolée au sein d'un liquide. La simulation repose sur un système d'équations compressibles, ou non, pour l'écoulement principal de la phase liquide couplé à un modèle de dynamique de bulle basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset. Ces modèles reproduisent uniquement le gonflement et la contraction des bulles et la phase gaz doit ainsi être initialement présente. D'autre part ces modèles sont restreints à la seule topologie d'écoulements à bulle et ne peuvent être étendus aux écoulements à poche de cavitation.

### Les écoulements à poche

Les simulations concernent essentiellement la modélisation de la cavitation qui apparaît sur des géométries bidimensionnelles telles que les profils d'aube ou les venturis. Les techniques de modélisations sont basées sur un modèle de surface libre pour la poche et d'un système d'équations incompressibles Euler ou Navier-Stokes pour l'écoulement liquide [48, Chapitre 12]. La cavité est modélisée comme une surface de courant qui évolue à la pression constante de saturation. L'écoulement non cavitant extérieur interprète ainsi la cavité comme une condition limite qui évolue au cours du processus itératif. Cette procédure est limitée à des conditions quasi-stationnaires.

Une autre stratégie [72] concerne l'emploi d'une méthode Volume Of Fluid couplée à un système d'équations incompressibles. La procédure consiste à imposer initialement une forme de la cavité dès la première itération. Cette méthode ne permet donc pas la création de poche, l'écoulement de la phase externe doit comporter une seule phase et les lâchers de bulles ou de nuages ne sont par exemples pas pris en compte. Le caractère incompressible de l'écoulement principal limite également le modèle aux écoulements à faibles Mach.

### Les modèles de mélange

Les modèles de mélanges divisent l'écoulement en trois zones : les phases de liquide et vapeur pure et une zone de mélange. La modélisation repose sur la résolution des équations d'Euler ou Navier Stokes fermées par des équations d'état qui permettront d'en déduire la pression et la température. Des modèles simplifiés supposent que le mélange évolue à l'équilibre mécanique (égalité des pressions) et thermique (égalité des températures). L'approche compressible permet l'extension à des champs de vitesse élevés et ces modèles sont capables de reproduire la formation d'une interface.

Les modèles simplifiés peuvent néanmoins être limités sur certains aspects. L'hypothèse d'équilibre thermodynamique supprime les états métastables des fluides. D'autre part, le transfert de masse est supposé instantané. Cette approche s'applique au cas d'écoulements à poche mais ne peut reproduire le comportement d'un écoulement à bulle.

La suite de la présentation développe les stratégies de reproduction d'écoulements diphasiques à partir de modèles de mélange.

#### 1.2.2 Le système à résoudre pour les modèles de mélange

La résolution d'un système diphasique consiste à déterminer pour chaque phase  $k$  :

- la masse volumique  $\rho_k$ ,
- la vitesse  $u_{k,j}$  dans les trois directions  $j$ ,

- l'énergie totale  $E_k$  décomposée comme la somme d'une énergie interne  $e_k$  et d'une énergie cinétique :

$$E_k = e_k + \frac{1}{2}u_k^2$$

Le système présente donc cinq inconnues par phases et est fermé pour chaque fluide à l'aide :

- de deux équations de conservation de la masse et l'énergie,
- de trois équations de conservation de la quantité de mouvement, projetées dans les trois directions  $j$ .

Cette mise en équation introduit deux variables thermodynamiques supplémentaires : la pression  $p_k$  et la température  $T_k$ . Seules deux variables (ou toute combinaison de ces variables) parmi les cinq suivantes suffisent à déterminer l'état thermodynamique du fluide : l'énergie interne spécifique  $e_k$ , l'entropie spécifique  $s_k$ , le volume spécifique  $v_k = 1/\rho_k$ , la pression  $p_k$  ou la température  $T_k$ . Toutes les autres variables thermodynamiques sont des fonctions de ces deux variables indépendantes.

Pour déterminer ces grandeurs thermodynamiques les modèles utilisent des équations d'état qui consistent à exprimer la pression et la température de chaque phase en fonction des quantités calculées par les équations de conservation. Chaque modèle incorpore donc :

- une loi d'état pour la pression  $p_k$ ,
- une relation thermique liant la température  $T_k$  à l'énergie phasique  $e_k$ .

A partir de cette mise en équation théorique, les stratégies de résolution consistent à introduire une ou plusieurs hypothèses simplificatrices en fonction des phénomènes qui doivent être reproduits par les modèles. Le développement de la partie 1.2.4 présente la mise en équation d'une sélection de modèles de mélange et leur capacité à reproduire les phénomènes physiques liés à la cavitation.

### 1.2.3 Les modèles 2-fluides

Les modèles 2-fluides résolvent les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour chacune des phases. Ces modèles, plus coûteux en résolution numériques, présentent plusieurs avantages. Ils prennent en compte les déséquilibres entre phases (déséquilibre de la pression, de la vitesse, de la température), permettent de modéliser des mélanges métastables et sont théoriquement capable de faire coexister des écoulements à bulles et des poches de cavitation. La résolution d'une équation de conservation de la masse pour chaque phase offre la possibilité d'introduire des gaz incondensables, ce que ne permettent pas les modèles 1-fluide en zone de mélange.

La dénomination d'un modèle à  $n$ -équations réfère au nombre d'équations de conservation résolues. Le système présente en général un nombre pair d'équations pour un modèle 2-fluides auquel peut être ajoutée une équation de résolution de l'interface.

#### 1.2.3.1 Les modèles à 7-équations

Les modèles 2-fluides à 7-équations ont vu le jour avec les travaux de Baer et Nunziato [12]. Ils sont une évolution des modèles à 6-équations construits à partir de trois équations de conservation par phase. Ils évoluent avec deux vitesses, deux températures et le calcul des deux pressions fait



intervenir une équation d'état par phase. A cela s'ajoute une équation de transport de l'interface qui se transforme, une fois moyennée, en une équation de transport de la fraction volumique d'une des deux phases.

Les travaux de Saurel et al. [148, 149] ont démontré la capacité de ces modèles à différencier les phénomènes responsables d'une augmentation de la fraction volumique de vapeur. Le modèle mis en place distingue notamment le phénomène de gonflement des poches de vapeurs, lié à l'étirement du fluide, du phénomène d'évaporation propre à la cavitation et causé par un transfert de masse. Plus récemment Zein [190] a proposé une autre modélisation des transferts de masse en modifiant le calcul des coefficients de relaxation incorporés au terme source.

L'utilisation d'une loi d'état pour chaque phase permet de traiter des fluides aux propriétés thermodynamiques différentes. Néanmoins ces modèles sont très complexes à résoudre numériquement et impliquent une sensibilité des résultats par rapport aux méthodes de relaxation employées dans les différentes équations.

### 1.2.3.2 Les modèles à 6-équations

Les modèles à 6-équations se basent également sur la résolution de trois équations de conservation par phase mais n'utilisent pas d'équation supplémentaire pour le calcul de la fraction volumique de vapeur. Le système d'équations incorpore deux températures et le calcul des pressions présente deux stratégies :

- (1) La phase liquide est considérée comme incompressible et la pression du mélange est prise égale à celle de la phase vapeur. Cette méthode de résolution empêche néanmoins la reproduction des phénomènes d'étirement ou de compression de la phase liquide et la propagation d'une onde de détente, retrouvée dans certains types d'écoulements cavitants, ne peut par exemple pas être pris en compte.
- (2) Les deux phases sont compressibles et le système est fermé en supposant des pressions à l'équilibre au sein du mélange [117]. Deux équations d'état servent à déterminer la pression de chaque phase à partir des quantités phasiques [23, 135].

Enfin contrairement au modèle à 7-équations précédent, l'absence d'une équation de transport de l'interface rend le modèle incapable de résoudre des problèmes à phases séparées.

## 1.2.4 Les modèles 1- fluide ou modèles de mélange homogène

La complexité des modèles précédents a motivé l'apparition de modèles de mélange homogènes. Ceux-ci introduisent une hypothèse d'égalité des vitesses qui permet d'apparenter la dynamique diphasique à celle d'un seul et unique fluide dont les quantités caractéristiques évoluent en fonction du taux de présence de chacune des deux phases. Selon la réduction du modèle des hypothèses d'égalité de température ou de pression entre les phases peuvent être ajoutées.

### 1.2.4.1 Les modèles à 5-équations

Les modèles à 5-équations sont issus de la formulation à 7-équations à laquelle est intégrée des hypothèses d'égalité des pressions et vitesses de chaque phase. Le modèle type proposé par Kapila [82] se compose ainsi de deux équations de conservation de la masse, d'une équation de mélange de

conservation de la quantité de mouvement, d'une équation de mélange de conservation de l'énergie et d'une équation de transport de la fraction volumique d'une des deux phases. Cet archétype de modèle utilise un système d'équations hyperboliques largement utilisé dans le domaine de la supercavitation ou pour la reproduction d'états métastables du liquide observés par exemple après le passage d'une onde de détente. La pression est déterminée à l'aide d'une équation d'état et les températures et potentiels chimiques, calculés pour chacune des phases, ont pour vocation de reproduire les déséquilibres thermodynamiques et de relaxer le système d'équations.

De tels modèles ont démontré leur efficacité pour la simulation de perturbations de fortes intensités au sein de l'écoulement. Saurel et al. [150] adaptent par exemple leur système à 7-équations pour modéliser la propagation d'ondes de détente au sein d'un tube. Ils soulignent la capacité du modèle à reproduire les états métastables du liquide suite au passage de la perturbation qui engendre la formation de fronts d'évaporation et l'apparition de la cavitation. Le terme source de transfert de masse repose sur la modélisation des déséquilibres thermodynamiques quantifiés à partir de la différence d'enthalpie libre entre phase.

Plusieurs modèles de même architecture sont également disponibles dans la littérature [7, 90, 179] sans toutefois que leur application ait été dédiée à la cavitation.

#### 1.2.4.2 Les modèles à 4-équations

Les modèles à quatre équations se basent sur un modèle homogène à 3-équations de conservation auquel est ajoutée une équation de transport portant soit sur la masse volumique de l'une des deux phases, soit sur le taux de vide. L'objectif est d'incorporer des phénomènes de déséquilibres qui apparaissent avec le changement de phase.

La première catégorie de modèle est par exemple utilisée pour la simulation d'évaporation flash provoquée par une brutale chute de pression au sein du liquide. La production de vapeur est accompagnée de déséquilibres thermodynamiques importants entre chaque phase et la température du liquide dépasse sa valeur à saturation. Le modèle à l'équilibre composé de trois lois de conservation pour le mélange est relaxé par une équation supplémentaire pour la fraction volumique de la masse vapeur. Le terme source de cette équation contient un temps de relaxation qui tend à modéliser le temps de retour à l'équilibre thermodynamique. Ce temps est difficile à déterminer et est estimé soit à partir de données expérimentales [16, 43], soit à travers une analyse numérique qui repose sur l'optimisation de l'entropie du mélange [67].

Les modèles à 4-équations employés en cavitation [116, 92, 6, 155, 161, 74, 182, 191] utilisent une équation de transport de la fraction volumique de la phase vapeur. La résolution de ces modèles repose sur l'emploi de solveurs incompressibles ou compressibles.

La première catégorie utilise des algorithmes incompressibles pression-vitesse qui ne résolvent pas l'équation de conservation de la masse. La divergence nulle de la vitesse sert uniquement à simplifier le calcul des champs de vitesse et de pression déterminés à partir des équations de la quantité de mouvement. Le calcul de la masse volumique fait intervenir soit une loi d'état [34, 134] (voir partie 4.1.4.2), soit une équation supplémentaire pour la fraction volumique de la vapeur [155, 161]. Dans ce type de résolution, la pression est solution d'une équation de poisson et est considérée comme une variable hydrodynamique. Aucun couplage avec l'énergie du système n'est considérée.

La seconde catégorie résout l'équation de conservation de la masse et la pression est reliée au

système à l'aide d'une équation d'état. La problématique de ces solveurs réside dans la résolution des écoulements pour les domaines à faible nombre de Mach où la prédominance des termes de convection rendent le système raide et une convergence lente du solveur. La majorité des modèles adopte les solutions apportées par les méthodes de préconditionnement qui consistent à modifier la célérité des ondes acoustiques et à les rapprocher de la vitesse d'advection [92, 6, 152, 58].

#### 1.2.4.3 Les modèles à 3-équations

Le modèle à 3-équations en phase de mélange implique des hypothèses fortes dans la zone de mélange : les températures, pressions et enthalpie libre sont supposées à l'équilibre. Ils constituent les modèles HEM (Homogeneous Equilibrium Model) pour lesquels l'hypothèse d'équilibre thermodynamique accompagne les changements de phase. Plusieurs équations d'état offrent la possibilité de déterminer la pression à partir des autres quantités de mélanges, certaines sont introduites ci-après.

1. *Une équation d'état de type Van der Waals* ferme thermodynamiquement le système à la fois dans les phases pures et la zone de mélange. Ce modèle présente néanmoins l'inconvénient de ne plus être hyperbolique dans le mélange.
2. *Une équation d'état de mélange des gaz raides*, formulée à partir de son écriture en phase pure permet de conserver l'hyperbolicité [147]. Le système évolue en revanche à l'équilibre thermodynamique et les états métastables de la cavitation ne peuvent être reproduits.
3. *Une loi d'état reliant la pression à la masse volumique*. Elle peut se présenter sous la forme d'une loi logarithmique [104, 118, 152], d'un développement polynôme [166] ou encore d'une relation sinusoïdale [41, 58]. Cette dernière situation introduit de façon empirique un effet de déséquilibre sur la pression qui sera détaillé ultérieurement.



## Chapitre 2

# Equations de conservation du modèle de mélange homogène

*Au cours des travaux de thèse, l'approche adoptée pour la modélisation d'un écoulement cavitant est celle d'un mélange homogène. Celle-ci consiste à représenter l'environnement diphasique au sein d'un seul et même fluide. L'ensemble de ce chapitre a pour vocation de résumer un raisonnement, décomposé en trois étapes, qui permet d'aboutir à l'écriture d'un modèle de mélange homogène moyenné.*

- 1. Ecrire les équations de conservation locales instantanées de chaque phase.*
- 2. Moyenner temporellement les équations par phase.*
- 3. Assembler les équations phasiques moyennées pour obtenir le modèle de mélange homogène.*

*L'opérateur de moyenne fait apparaître, au sein des équations de conservation, des quantités fluctuantes qui représentent les agitations de la turbulence. Leurs modélisations font l'objet du chapitre 3.*

## 2.1 Equations de conservation locales instantanées phasiques

L'étude du système diphasique consiste, dans un premier temps, à représenter la dynamique de chaque phase. Pour cela, un volume de fluide est isolé ; celui-ci contient chacune des deux phases réparties dans leur espace respectif et séparées par une interface. Les bilans de conservation sont appliqués les deux volumes propres à chacune des phases et les échanges phasiques s'opèrent au travers de la surface de séparation.

### 2.1.1 Définition d'un volume de contrôle

Les équations de conservation locales instantanées diphasique sont définies sur un volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}$  divisé en un volume  $\mathcal{V}_1$  qui contient la phase 1 et un volume  $\mathcal{V}_2$  qui contient la phase 2. Les volumes  $\mathcal{V}_k$  sont séparés par la surface  $a(t)$ . Le contour de cette surface est délimité par la courbe  $C(t)$  dont  $\mathbf{N}$  est le vecteur normal (voir figure 2.1).

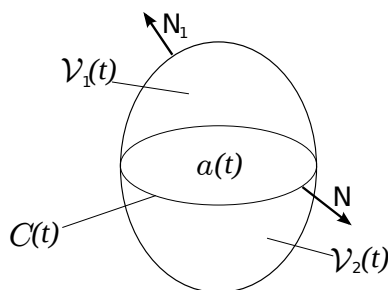


FIGURE 2.1 – Volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}$

### 2.1.2 Outils mathématiques

Le bilan intégral des équations de conservation s'obtient en travaillant sur le volume matériel  $\mathcal{V}$ . Cependant, afin d'écrire les équations de conservation pour chaque phase, l'intégrale sur le volume  $\mathcal{V}$  en trois parties : une intégrale sur le volume  $\mathcal{V}_1$ , une intégrale sur le volume  $\mathcal{V}_2$  et une intégrale surfacique sur  $a(t)$ . L'obtention des équations phasiques nécessite l'utilisation de plusieurs règles de calcul :

#### Règle de Leibniz

Pour un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  délimité par une surface se déplaçant à la vitesse  $v_{int}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{a(t)} \phi(x, t) v_{int} \cdot n d\mathcal{S} \quad (2.1)$$

où  $n$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $a$ , orienté vers l'extérieur du domaine  $\mathcal{V}$

#### Théorème du transport de Reynolds

Pour une fonction  $\phi_a$  définie sur la surface  $a(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)} \phi_a d\mathcal{S} = \int_{a(t)} \left( \frac{d\phi_a}{dt} + \phi_a \frac{\partial v_{int,l}}{\partial x_l} \right) d\mathcal{S} \quad (2.2)$$

**Théorème de Gauss en 3D**

$$\int_{a(t)} \phi n_i d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mathcal{V} \quad \text{pour un scalaire } \phi \quad (2.3)$$

$$\int_{a(t)} u_l n_l d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} d\mathcal{V} \quad \text{pour un vecteur } u_l \quad (2.4)$$

$$\int_{a(t)} \tau_{il} n_l d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \tau_{il}}{\partial x_l} d\mathcal{V} \quad \text{pour un tenseur } \tau_{il} \quad (2.5)$$

**Théorème de Gauss en 2D**

Soit  $\mathbf{N}$  le vecteur normal à la courbe  $C(t)$  délimitant la surface  $a(t)$  et orienté positivement vers l'extérieur. le théorème de Gauss fournit les relations :

$$\int_{C(t)} \phi_a \mathbf{N} d\mathcal{L} = \int_{a(t)} \left( \frac{\partial_s \phi_a}{\partial_s x_l} - \left( \frac{\partial_s \mathbf{N}}{\partial_s x_l} \right) \phi_a \mathbf{N} \right) d\mathcal{S} \quad (2.6)$$

$$\int_{C(t)} u_l \mathbf{N} d\mathcal{L} = \int_{a(t)} \frac{\partial_s u_{a,l}}{\partial_s x_l} d\mathcal{S} \quad (2.7)$$

où  $u_{a,l}$  représente la composante tangentielle à la surface  $a(t)$  du vecteur  $u_l$  et  $\frac{\partial_s}{\partial_s x_l}$  représente l'opérateur de divergence surfacique correspondant à la composante tangentielle à la surface  $a(t)$  de l'opérateur divergence.

Ces règles sont utilisées dans les paragraphes qui suivent pour établir les bilans de conservation de chaque phase.

**2.1.3 Écriture des équations de conservation locales instantanées****2.1.3.1 Equation locale instantanée de conservation de la masse**

Le bilan de conservation de la masse établi sur un volume  $\mathcal{V}$  permet d'obtenir :

- les équations phasiques de conservation de la masse pour chaque phase,

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

uniquement valables dans le volume  $\mathcal{V}_k$  occupée par la phase  $k$  et

- la relation de saut à l'interface  $a(t)$ ,

$$\sum_k \rho_k (u_{k,i} - v_{int,i}) \cdot n_i = 0 \quad (2.9)$$

Par la suite, le débit massique  $\dot{m}_k$  par unité de surface de la phase  $k$  vers la phase  $k'$  s'exprime :

$$\dot{m}_k = \rho_k (u_{k,i} - v_{int,i}) \cdot n_i \quad (2.10)$$

où  $v_{int,i}$  représente la vitesse de l'interface.

### 2.1.3.2 Equation locale instantanée de conservation de la quantité de mouvement

Le bilan de conservation de la quantité de mouvement établi sur un volume  $\mathcal{V}$  permet d'obtenir :

- les équations phasiques de conservation de la quantité de mouvement,

$$\frac{\partial \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{k,ij}}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

uniquement valables dans le volume  $\mathcal{V}_k$  occupée par la phase  $k$ .

- la relation de saut à l'interface  $a_i$ ,

$$\sum_k \dot{m}_k u_{k,i} - \mathbb{T}_{k,ij} n_j + \frac{\partial_s \gamma}{\partial_s x_j} - \left( \frac{\partial_s n_j}{\partial_s x_j} \right) \gamma n_i = 0 \quad (2.12)$$

avec :

- $\mathbb{T}_{k,ij} = -p_k \delta_{ij} + \sigma_{k,ij}$ ,
- $\gamma$  la tension superficielle,
- $\sigma_{k,ij} = 2\mu_k S_{k,ij} + \lambda_k \delta_{ij} S_{k,ij}$  les composantes du tenseur des contraintes visqueuses et où les termes du taux de déformations  $S_k$  s'expriment en fonction de la vitesse, tel que :  

$$S_{k,ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right)$$

### 2.1.3.3 Equation locale instantanée de conservation de l'énergie

Le bilan de conservation de l'énergie établi sur un volume  $\mathcal{V}$  permet d'obtenir :

- les équations phasiques de conservation de l'énergie en désignant  $E_k = e_k + \frac{u_{k,i} u_{k,i}}{2}$  :

$$\frac{\partial \rho_k E_k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_k E_k + p_k) u_{k,j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{k,ij} u_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_{k,j}}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

uniquement valables dans le volume  $\mathcal{V}_k$  occupé par la phase  $k$  et

- la relation de saut à l'interface  $a(t)$ ,

$$\sum_k \dot{m}_k E_k + q_{k,j} n_j - (\mathbb{T}_{k,ij} n_j) u_{k,i} = 0 \quad (2.14)$$

avec  $q_{k,j}$  le flux de chaleur de la phase  $k$ .

## 2.2 Equations de conservation moyennées phasiques

La modélisation RANS considère les variables instantanées des équations de Navier-Stokes comme des variables aléatoires. L'écoulement est décomposé en une partie moyenne et une partie turbulente en introduisant la moyenne de Reynolds.



### 2.2.1 Les opérateurs de moyenne

Les équations moyennées sont obtenues à partir d'un opérateur de moyenne. Le développement présente trois types d'opérateur : l'opérateur de moyenne d'ensemble, l'opérateur de moyenne temporelle et l'opérateur de moyenne spatiale.

La moyenne d'ensemble  $\overline{\phi(\mathbf{x}, t)}$  d'une fonction aléatoire  $\phi(\mathbf{x}, t)$  se définit comme la moyenne statistique sur l'ensemble des réalisations indépendante  $\phi^i$  :

$$\overline{\phi(\mathbf{x}, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

La moyenne temporelle  $\underline{\phi^i}(\mathbf{x}, t)$  d'une fonction aléatoire  $\phi(\mathbf{x}, t)$  se définit comme la moyenne sur un temps  $T$  d'une réalisation particulière  $\phi^i(\mathbf{x}, t)$  :

$$\underline{\phi^i}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi^i(\mathbf{x}, t) dt \quad (2.16)$$

Le deuxième terme de l'équation (2.16) est défini uniquement dans le cas de régime permanent. La moyenne spatiale  $\underline{\underline{\phi^i}}(\mathbf{x}, t)$  d'une fonction aléatoire  $\phi(\mathbf{x}, t)$  se définit comme la moyenne sur un domaine  $\Omega$  d'une réalisation particulière  $\phi^i(\mathbf{x}, t)$  :

$$\underline{\underline{\phi^i}}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \phi^i(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.17)$$

Le deuxième terme de l'équation (2.17) est défini uniquement dans le cas d'un écoulement homogène.

Dans le cas d'un écoulement permanent et homogène, la moyenne d'ensemble peut être remplacée par la moyenne temporelle ou la moyenne spatiale. Cette égalité provient de la notion d'ergodicité et permet d'écrire :

$$\overline{\phi(\mathbf{x}, t)} = \underline{\phi^i}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\phi^i}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

La suite suppose toujours être dans le cas où la notion d'ergodicité s'applique.

### 2.2.2 Décomposition d'une variable aléatoire

#### 2.2.2.1 Décomposition simple

Soit une variable aléatoire  $\phi$ . En appliquant l'opérateur de moyenne d'ensemble, cette fonction se décompose en une partie moyenne  $\overline{\phi}$  et une partie fluctuante  $\phi'$  :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \quad (2.19)$$

avec par définition  $\overline{\phi'} = 0$ .

### 2.2.2.2 Décomposition de Favre

Dans le cadre des écoulements compressibles, une décomposition pondérée par la masse proposée en premier par Favre [46] permet de conserver une écriture des équations de conservation identique à celle obtenue sans opération de moyenne. Dans ce cas,  $\phi$  se décompose en une partie moyenne de Favre et une partie fluctuante :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (2.20)$$

avec  $\tilde{\phi} = \frac{\rho\bar{\phi}}{\bar{\rho}}$  et  $\widetilde{\phi''} = 0$ .

### 2.2.2.3 Relations de Reynolds

L'opérateur de moyenne d'ensemble vérifie plusieurs relations dites relations de Reynolds. Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions aléatoires et  $\lambda$  un réel quelconque :

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi} \quad (2.21a)$$

$$\overline{\lambda\phi} = \lambda\bar{\phi} \quad (2.21b)$$

$$\overline{\phi\psi} = \bar{\phi\psi} + \overline{\phi'\psi'} \quad (2.21c)$$

$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial t}} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} \quad (2.21d)$$

$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x} \quad (2.21e)$$

$$\overline{\int\phi dt} = \int\bar{\phi} dt \quad (2.21f)$$

$$\overline{\int\phi dx} = \int\bar{\phi} dx \quad (2.21g)$$

## 2.2.3 Définition de l'opérateur de moyenne temporelle

La partie 2.2.1 des écoulements monophasiques introduit plusieurs opérateurs de moyenne : opérateur de moyenne d'ensemble, opérateur de moyenne temporelle, opérateur de moyenne spatiale. Dans ce manuscrit, seul l'opérateur de moyenne temporelle tel que le définit Ishii [75] est utilisé pour écrire les équations de conservation moyennées phasiques.

### 2.2.3.1 Définition de la fonction indicatrice de phase

Afin de repérer chacune des deux phases à tout instant  $t$  et en tout point  $x$  de l'espace, une fonction indicatrice de phase  $X_k(M(x, t))$  est définie par :

$$X_k(M(x, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente au point } M(x, t) \text{ à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

### 2.2.3.2 Opérateur local de moyenne temporelle

Cette partie s'intéresse, autour de l'instant  $t$ , à l'évolution des grandeurs phasiques sur une période  $T$ , suffisamment grande par rapport au temps caractéristique des fluctuations turbulentes et suffisamment petite par rapport au temps caractéristique de l'écoulement. Pendant cette période  $T$ , la phase  $k$  n'est présente que pendant une durée  $T_k$  (voir figure 2.2). Deux moyennes

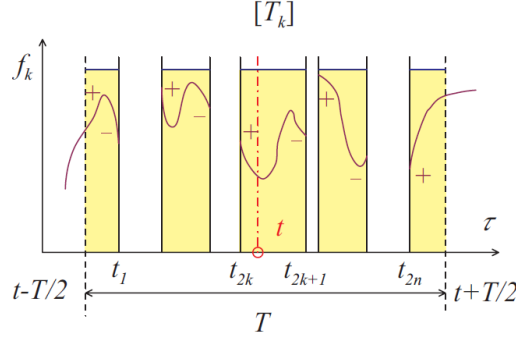


FIGURE 2.2 – Représentation de l'évolution d'une variable phasique  $f_k$  sur le temps  $T$ . Le temps  $T_k$  correspond à la somme des temps  $t_k$  pendant laquelle la fonction phasique  $f_k$  est définie.

temporelles peuvent alors être définies selon que la moyenne soit établie sur le temps  $T$  ou le temps de présence de la phase  $T_k$ .

La moyenne sur le temps  $T$  d'une variable phasique  $\phi_k$  est définie par :

$$\bar{\phi}_k = \frac{1}{T} \int_T \phi_k(x, t) d\tau \quad (2.23)$$

La moyenne sur le temps  $T_k$  d'une variable phasique  $\phi_k$  est définie par :

$$\bar{\bar{\phi}}_k = \frac{1}{T_k} \int_{T_k} \phi_k(x, t) d\tau \quad (2.24)$$

Il est intéressant de remarquer que le taux de présence local  $\alpha(x, t)$  peut s'écrire :

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{T} \int_T X_k(M(x, t)) d\tau = \frac{T_k}{T} = \frac{\bar{\phi}_k}{\bar{\bar{\phi}}_k} \quad (2.25)$$

avec la relation  $\sum_k \alpha_k = 1$ . En désignant par  $\phi$  une variable de mélange, sa moyenne temporelle s'écrit :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_T \phi(x, t) d\tau \quad (2.26)$$

qui peut être reliée aux moyennes de variable phasique selon l'égalité  $\bar{\phi} = \sum_k \bar{\phi}_k = \sum_k \alpha_k \bar{\bar{\phi}}_k$ .

Une moyenne pondérée par la masse notée  $\tilde{(\cdot)}$  est établie :

$$\tilde{\phi}_k = \frac{\overline{\rho_k \phi_k}}{\overline{\rho_k}} = \frac{\overline{\overline{\rho_k \phi_k}}}{\overline{\overline{\rho_k}}} \quad (2.27)$$

### 2.2.3.3 Décomposition des variables

Les équations moyennées par phase sont obtenues en décomposant chaque variable de l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante. La partie fluctuante représente à la fois une fluctuation phasique et une fluctuation turbulente. De même que pour les écoulements monophasiques, les champs de pression et de masse volumique sont décomposés en une partie moyenne phasique ( $\bar{\cdot}$ ) et une partie fluctuante ( $\tilde{\cdot}$ ) tandis que le champs de vitesse est décomposée en une partie moyenne pondérée par la masse ( $\overline{\cdot}$ ) et une partie fluctuante ( $\tilde{\cdot}$ ) :

$$\rho_k = \bar{\rho}_k + \rho'_k \quad \text{et} \quad u_{k,i} = \tilde{u}_{k,i} + u''_{k,i} = \frac{\overline{\rho_k u_{k,i}}}{\bar{\rho}_k} + u''_{k,i} \quad (2.28)$$

L'opérateur de moyenne respecte les propriétés suivantes :

$$\overline{\bar{\phi}} = \bar{\phi} \quad (2.29a)$$

$$\overline{\tilde{\phi}} = \tilde{\phi} \quad (2.29b)$$

$$\overline{\tilde{\phi}} = \tilde{\phi} \quad (2.29c)$$

$$\overline{\tilde{\phi}_k} = \tilde{\phi}_k \quad (2.29d)$$

$$\overline{\bar{\phi}} = \bar{\phi} \quad (2.29e)$$

$$\bar{\phi}_k = \alpha_k \bar{\phi}_k = \alpha_k \left( \tilde{\phi}_k + \overline{\tilde{\phi}_k} \right) \quad (2.29f)$$

$$\overline{\tilde{\phi}_k} = \bar{\phi}_k - \tilde{\phi}_k = \alpha_k \overline{\tilde{\phi}_k} - (1 - \alpha_k) \tilde{\phi}_k \quad (2.29g)$$

## 2.2.4 Ecriture des équations de conservation phasiques moyennées

### 2.2.4.1 Méthode

Afin d'établir les équations de conservation moyennées par phase, les équations de conservation instantanées sont intégrées sur la période  $T_k$ . Cependant, en raison de la discontinuité de la période  $T_k$  sur la période  $T$ , les opérateurs intégraux et différentiels ne sont pas commutatifs. La permutation de ces opérateurs nécessite d'utiliser la forme limite de la règle de Leibniz et la forme limite du théorème de Gauss.

#### Forme limite de la règle de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{T_k} \phi_k(x, t) d\tau = \int_{T_k} \frac{\partial \phi_k(x, t)}{\partial t} d\tau + \sum_{\text{disc de } T} \frac{1}{|v_{int,j} n_j|} \phi_k v_{int,j} n_j \quad (2.30)$$

La somme finie du deuxième membre de l'équation porte sur les discontinuités de la fonction  $\phi_k$  sur l'intervall  $T$ .

#### Forme limite du théorème de Gauss

$$\int_{T_k} \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_j} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{T_k} u_{k,j} d\tau + \sum_{\text{disc de } T} \frac{1}{|v_{int,j} n_j|} u_{k,j} n_j \quad (2.31)$$

### 2.2.4.2 Equation phasique moyennée de la conservation de la masse

L'équation instantanée phasique de conservation de la masse (2.8) est intégrée sur le temps  $T_k$ . En appliquant les formes limites de la règle de Leibniz (2.30) et du théorème de Gauss (2.31), il vient :

$$\frac{\partial T_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \frac{\partial T_k \overline{\rho_k u_{k,j}}}{\partial x_j} + \sum_{\text{disc de } T} \frac{1}{|v_{int,j} n_j|} \rho_k (u_{k,j} - v_{int,j}) n_j = 0 \quad (2.32)$$

L'équation précédente est divisée par  $T$  et fait apparaître le taux de présence local  $\alpha_k$

$$\frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,j}}}{\partial x_j} = \Gamma_k \quad (2.33)$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{u}_{k,j}}{\partial x_j} = \Gamma_k \quad (2.34)$$

avec  $\Gamma_k$  le taux local de production de masse de la phase  $k$

$$\Gamma_k = - \sum_{\text{disc de } T} \frac{\dot{m}_k}{T |v_{int,j} n_j|} = -\dot{m}_k \delta_I \quad (2.35)$$

La quantité  $\Gamma_k$  représente les échanges de masse par évaporation ou condensation sur l'interface. Le terme  $\delta_I$  est une distribution de Dirac associée à l'interface :

$$\delta_I = \sum_{\text{disc de } T} \frac{1}{T |v_{int,j} n_j|} \quad (2.36)$$

Par conservation de la masse, l'ensemble de l'écoulement vérifie la relation suivante :  $\sum_k \Gamma_k = 0$ .

### 2.2.4.3 Equation phasique moyennée de la conservation de la quantité de mouvement

La même procédure que précédemment est appliquée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement sans forces de volume (2.11).

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,i}}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_{k,i} u_{k,j}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_k \bar{p}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_k \bar{\sigma}_{k,ij}}{\partial x_j} + \mathbb{M}_k \quad (2.37)$$

avec :

$$\mathbb{M}_k = - \sum_{\text{disc de } T} \frac{(\dot{m}_k u_{k,i} + T_{k,ij} n_j)}{T |v_{int,j} n_j|} \quad (2.38)$$

$\mathbb{M}_k$  représente le transfert de quantité de mouvement entre les phases.

Le terme  $\overline{\rho_k u_{k,i} u_{k,j}}$  se décompose en partie moyenne et fluctuante :

$$\overline{\rho_k u_{k,i} u_{k,j}} = \bar{\rho}_k \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j} + \widetilde{\bar{\rho}_k u_{k,i}'' u_{k,i}''} \quad (2.39)$$

et l'équation (2.37) se transforme :

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{\rho_k u_{k,i}}}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{\rho_k \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j}}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{p_k}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{\sigma_{k,ij}}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_k \tau_{k,ij}}{\partial x_j} + \mathbb{M}_k \quad (2.40)$$

avec  $\tau_{k,ij}$  le tenseur des contraintes turbulentes égale à :

$$\tau_{k,ij} = -\overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,j}} \quad (2.41)$$

#### 2.2.4.4 Equation phasique moyennée de la conservation de l'énergie

La dernière étape consiste à intégrer l'équation phasique de conservation de l'énergie (2.13) sur le temps  $\mathbb{T}_k$ .

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{\rho_k E_k}}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{(\rho_k E_k + p_k) u_{k,j}}}}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{\sigma_{k,ij} u_{k,j}}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{q_{k,j}}}}{\partial x_j} + \mathbb{Q}_k \quad (2.42)$$

avec :

$$\mathbb{Q}_k = - \sum_{\text{disc de } \mathbb{T}} \frac{\dot{m}_k E_k - (\mathbb{T}_{k,ij} n_j) u_{k,i} + q_{k,i} n_i}{\mathbb{T} |v_{int,j} n_j|} \quad (2.43)$$

$\mathbb{Q}_k$  représente les transferts d'énergie entre les phases.

Les termes  $\overline{\overline{\rho_k E_k}}$ ,  $\overline{\overline{\rho_k E_k u_{k,j}}}$ ,  $\overline{\overline{p_k u_{k,j}}}$  et  $\overline{\overline{\sigma_{k,ij} u_{k,j}}}$  sont exprimés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\rho_k E_k}} &= \overline{\overline{\rho_k}} \left( \tilde{e}_k + \frac{\tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,i}}{2} \right) + \frac{1}{2} \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,i}} \\ \overline{\overline{p_k u_{k,j}}} &= \overline{\overline{p_k}} \tilde{u}_{k,j} + \overline{\overline{p_k u''_{k,j}}} \\ \overline{\overline{\rho_k E_k u_{k,j}}} &= \overline{\overline{\rho_k}} \left( \tilde{e}_k + \frac{\tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,i}}{2} \right) \tilde{u}_{k,j} + \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{e''_{k,i} u''_{k,j}} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,i} \tilde{u}_{k,j}} + \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,j} \tilde{u}_{k,i}} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,i} u''_{k,j}} \\ \overline{\overline{\sigma_{k,ij} u_{k,j}}} &= \overline{\overline{\sigma_{k,ij}}} \tilde{u}_{k,j} + \overline{\overline{\sigma_{k,ij} u''_{k,j}}} \end{aligned}$$

En posant  $\tilde{E}_k = \tilde{e}_k + \frac{\tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,i}}{2}$  et  $k_k = \frac{\widetilde{u''_{k,i} u''_{k,i}}}{2}$  l'énergie cinétique turbulente phasique, l'équation (2.42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \left( \tilde{E}_k + k_k \right)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \left[ \overline{\overline{\rho_k}} \left( \tilde{E}_k + k_k \right) + \overline{\overline{p_k}} \right] \tilde{u}_{k,j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \alpha_k \left( \overline{\overline{\sigma_{k,ij}}} + \tau_{k,ij} \right) \tilde{u}_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_k \overline{\overline{q_{k,j}}}}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial q_{k,j}^t}{\partial x_j} + \mathbb{Q}_k \end{aligned} \quad (2.44)$$

avec  $q_{k,j}^t$  le flux de chaleur turbulent phasique :

$$q_{k,j}^t = \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{e''_{k,i} u''_{k,j}} + \alpha_k \frac{1}{2} \overline{\overline{\rho_k}} \widetilde{u''_{k,i} u''_{k,i} u''_{k,j}} - \overline{\overline{(\rho_k - \sigma_{k,ij}) u''_{k,i}}} \quad (2.45)$$

### 2.2.4.5 Relations supplémentaires

A la suite des développements précédents, plusieurs relations entre les quantités phasiques moyennes sont rappelées.

- L'énergie totale  $\tilde{E}_k$  se répartie comme la somme d'une énergie interne et d'une énergie cinétique :

$$\tilde{E}_k = \tilde{e}_k + \frac{1}{2} \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,i} \quad (2.46)$$

- L'enthalpie  $\tilde{h}_k$  s'exprime à partir de la pression, l'énergie interne et la masse volumique selon la relation :

$$\tilde{h}_k = \tilde{e}_k + \frac{\overline{\overline{p_k}}}{\overline{\overline{\rho_k}}} \quad (2.47)$$

- L'enthalpie libre  $\tilde{g}_k$  s'exprime en fonction de l'entropie  $s_k$  :

$$\tilde{g}_k = \tilde{h}_k - \tilde{T}_k \tilde{s}_k \quad (2.48)$$

## 2.3 Equations de conservation moyennées pour un mélange homogène

### 2.3.1 Présentation

Le développement présenté jusqu'à maintenant évoquait la résolution de la dynamique de l'écoulement pour chacune des phases. La phase  $k$  qui occupe le volume  $\mathcal{V}_k$  a été moyennée sur la période  $T_k$  qui correspond au temps de présence sur la période totale  $T$ . Au final ce raisonnement conduit à l'écriture de deux fois trois équations de conservation moyennées. La suite de la démarche propose de rassembler les deux phases au sein d'un *mélange homogène* dont le volume  $\mathcal{V}$  est formé à partir des volumes  $\mathcal{V}_k$  phasiques. Une pondération des variables phasiques par leur taux de présence  $\alpha_k$  permet d'écrire un ensemble de variables de mélange. Cette approche s'applique aux écoulements dans lesquels les deux phases sont suffisamment mélangées et les particules de la phase dispersée suffisamment petites pour ne pas prendre en compte les mouvements relatifs. Les deux phases sont fortement couplées et sont supposées évoluer à la même température.

Après avoir introduit les variables de mélange, cette partie présentera l'écriture des équations de conservation moyennées pour un mélange homogène.

### 2.3.2 Les variables du mélange

#### 2.3.2.1 Les variables thermodynamiques

Les variables thermodynamiques du mélange sont définies à l'aide des variables phasiques et du taux de présence local  $\alpha_k$  de chacune des phases pour donner ainsi :

- une masse volumique du mélange,  $\rho_m = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}}$
- une pression du mélange,  $p_m = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{p_k}}$
- une énergie interne du mélange,  $\rho_m e_m = \sum_k \alpha_k \overline{\overline{\rho_k e_k}}$

- une enthalpie du mélange,  $\rho_m h_m = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k h_k}$
- une entropie du mélange,  $\rho_m s_m = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k s_k}$

### 2.3.2.2 Définition de la vitesse du mélange

Dans le cas d'un mélange, plusieurs vitesses sont définies. Une vitesse du centre de masse  $\rho_m u_{m,i}$  et une vitesse du centre de volume  $u_{v,i}$  sont introduites par les relations :

$$\rho_m u_{m,i} = \sum_k \alpha_k \overline{\rho_k} \tilde{u}_{k,i} \quad (2.49)$$

$$u_{v,i} = \sum_k \alpha_k \tilde{u}_{k,i} \quad (2.50)$$

Par la suite, les équations reposent sur la vitesse du centre de masse. La vitesse de glissement entre les phases  $k$  et  $k'$  s'exprime à travers la vitesse  $u_{r,i} = u_{k,i} - u_{k',i}$ . Dans l'hypothèse de mouvements relatifs négligeables entre les phases, le champ de vitesse est considéré par la suite comme homogène, ce qui impose :  $u_{r,i} = 0$ .

### 2.3.2.3 Le tenseur des contraintes visqueuses du mélange

Le tenseur des contraintes visqueuses moyen phasique  $\overline{\sigma}_{k,il}$  s'écrit, en négligeant les fluctuations phasiques de la viscosité dynamique  $\mu_k$  :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{k,ij} = & \overline{\mu}_k \left[ \frac{\partial \tilde{u}_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{k,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_{k,n}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] \\ & + \overline{\mu}_k \frac{1}{\alpha_k} \left[ \frac{\partial \overline{\alpha_k u''_{k,i}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\alpha_k u''_{k,j}}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{\alpha_k u''_{k,n}}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] \\ & + \overline{\mu}_k \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\text{disc de T}} \frac{1}{\Gamma |v_{int,j} n_j|} \left( u''_{k,i} n_i + u''_{k,j} n_j - \frac{2}{3} u''_{k,n} n_n \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

En première approximation les termes liés aux fluctuations ne sont pas pris en compte et les tenseurs phasiques  $\overline{\sigma}_{k,ij}$  sont approchés par :

$$\overline{\sigma}_{k,ij} = \overline{\mu}_k \left[ \frac{\partial \tilde{u}_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{k,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_{k,n}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] \quad (2.52)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses du mélange est défini par l'égalité  $\sigma_{m,ij} = \sum_k \alpha_k \overline{\sigma}_{k,ij}$ . En appliquant l'hypothèse de vitesses homogènes  $\tilde{u}_{k,i} = \tilde{u}_{k',i} = u_{m,i}$ , le tenseur  $\sigma_{m,ij}$  s'exprime :

$$\sigma_{m,ij} = \mu_m \left[ \frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{m,n}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] \quad (2.53)$$

avec :

- $\mu_m = \sum_k \alpha_k \mu_k$ ,
- $\frac{\mu(T)}{\mu(T_{ref})} = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{3/2} \frac{T_{ref} + S_1}{T + S_1}$  selon la loi de Sutherland, où  $S_1 = 110,4 K$  et  $T_{ref}$  représente une température de référence.



### 2.3.2.4 Le flux de chaleur du mélange

Le calcul du flux de chaleur  $q_{k,j}$  respecte la loi linéaire de Fourier :

$$q_{k,j} = -\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \quad (2.54)$$

qui fait intervenir la conductivité thermique  $\lambda_k$ . Celle-ci dépend de la température de la phase selon l'équation :  $\lambda_k = \frac{\mu_k(T_k)C_{p_k}(T_k)}{Pr}$ . Le nombre de Prandtl  $Pr$  désigne le rapport entre la viscosité cinématique  $\nu_k = \mu_k/\rho_k$  et la diffusivité thermique  $\lambda_k/\rho_k C_{p_k}$ . Le flux de chaleur moyenphasique  $\bar{q}_{k,j}$  s'écrit en négligeant les fluctuations de la conductivité thermique  $\lambda_k$  :

$$\bar{q}_{k,j} = -\bar{\lambda}_k \left[ \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial x_j} + \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\text{disc de T}} \frac{1}{\mathbb{T} |v_{int,j} n_j|} T'_{k,int} n_j \right] \quad (2.55)$$

avec  $T'_{k,int} = T_{k,int} - \bar{T}_k$  les fluctuations de température à l'interface et  $T_{k,int}$  la température à l'interface. En prenant des fluctuations de température à l'interface constantes, il vient :

$$\bar{q}_{k,j} = -\bar{\lambda}_k \left[ \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial x_j} + \frac{T'_{k,int}}{\alpha_k} \sum_{\text{disc de T}} \frac{1}{\mathbb{T} |v_{int,j} n_j|} n_j \right] = -\bar{\lambda}_k \left[ \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial x_j} - \frac{T'_{k,int}}{\alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right] \quad (2.56)$$

Si de plus, les fluctuations de température à l'interface sont négligées, c'est-à-dire qu'il y a équilibre thermique entre les phases et l'interface ( $T_{k,int} = \bar{T}_k = T_m$ ) alors :

$$\bar{q}_{k,i} = -\bar{\lambda}_k \left[ \frac{\partial T_m}{\partial x_i} \right] \quad (2.57)$$

Le flux de chaleur du mélange  $q_m$  est défini par  $q_{m,i} = \sum_k \alpha_k \bar{q}_{k,i}$ , il vient donc :

$$q_{m,i} = \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x_i} \quad (2.58)$$

avec  $\lambda_m = \sum_k \alpha_k \lambda_k$  la conductivité thermique du mélange et  $T_m$  la température du mélange.

## 2.3.3 Ecriture des équations de conservation moyennées pour le mélange

### 2.3.3.1 Equation de conservation moyennée de la masse pour un mélange homogène

En sommant sur l'ensemble des phases l'équation (2.34), l'équation de conservation de la masse pour le mélange homogène s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.59)$$

### 2.3.3.2 Equation de conservation moyennée de la quantité de mouvement pour un mélange homogène

En sommant sur l'ensemble des phases l'équation (2.40), l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_m u_{m,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,i} u_{m,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{m,ij} + \tau_{m,ij}}{\partial x_j} + \sum_k \mathbb{M}_k \quad (2.60)$$

avec  $\tau_{m,ij}$  le tenseur des contraintes turbulentes du mélange défini par :

$$\tau_{m,ij} = \sum_k \alpha_k \tau_{k,ij} = \sum_k -\overline{\alpha_k \rho_k u''_{k,i} u''_{k,j}} \quad (2.61)$$

La modélisation de ce terme peut être réalisée en appliquant l'hypothèse de Boussinesq :

$$\tau_{m,ij} = \mu_{tm} \left[ \frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{m,n}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho_m k_m \delta_{ij} \quad (2.62)$$

avec  $\mu_{tm}$  la viscosité turbulente du mélange et  $k_m$  l'énergie cinétique turbulente telle que :

$$\rho_m k_m = \sum_k \alpha_k \rho_k \frac{\overline{u''_{k,i} u''_{k,i}}}{2} \quad (2.63)$$

Le terme  $\sum_k \mathbb{M}_k$  représente le transfert de quantité de mouvement à l'interface. En utilisant la relation de saut à l'interface (2.12) et en faisant l'hypothèse d'une tension de surface  $\gamma$  constante à l'interface (i.e.  $\frac{\partial_s \gamma}{\partial_s x_j} = 0$ ) ce terme peut être approché par :  $\sum_k \mathbb{M}_k = \gamma \kappa n_i \delta_I$  où  $\gamma$  est la tension de surface,  $\kappa = \frac{\partial_s n_j}{\partial_s x_j}$  la courbure à l'interface,  $n_i$  le vecteur normal à l'interface et  $\delta_I$  la fonction de Dirac liée à l'interface. Dans le cas de l'hypothèse de fluide homogène sans tension surfacique ce terme est nul.

Il est intéressant de constater que l'équation (2.60) peut finalement se ré-écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_m u_{m,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,i} u_{m,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_m^*}{\partial x_i} + (\mu_m + \mu_{tm}) \left[ \frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{m,n}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] \quad (2.64)$$

avec  $p_m^* = p_m + \frac{2}{3} \rho_m k_m \delta_{ij}$ . Par la suite la notation  $p_m$  sera employée pour désigner la pression  $p_m^*$ .

### 2.3.3.3 Equation de conservation moyennée de l'énergie pour un mélange homogène

En sommant sur l'ensemble des phases l'équation (2.44), l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m (E_m + k_m)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m (E_m + k_m) + p_m] u_{m,j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\sigma_{m,ij} + \tau_{m,ij}) u_{m,j}}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial q_{m,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_{m,j}^t}{\partial x_j} + \sum_k \mathbb{Q}_k \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec  $E_m$  l'énergie du mélange,  $k_m$  l'énergie cinétique turbulente du mélange et  $q_{m,i}^t$  le flux de chaleur turbulent du mélange :

$$\begin{aligned}\rho_m E_m &= \rho_m e_m + \rho_m \frac{u_{m,i} u_{m,i}}{2} \\ \rho_m k_m &= \sum_k \alpha_k \rho_k \frac{\overline{u_{k,i}'' u_{k,i}''}}{2} \\ q_{m,j}^t &= \sum_k \alpha_k \left( \overline{\rho_k e_k'' u_{k,j}''} + \frac{1}{2} \overline{\rho_k u_{k,i}'' u_{k,i}'' u_{k,j}''} - \overline{(p_k - \sigma_{k,ij}) u_{k,j}''} \right)\end{aligned}$$

Le terme  $\sum_k Q_k$  représente le transfert d'énergie à l'interface. Dans le cas des hypothèses de fluide homogène sans tension de surface en équilibre thermique, ce terme est nul.

Le flux de chaleur turbulent du mélange  $q_{m,j}^t$  s'exprime en fonction des flux de chaleur turbulent phasiques  $q_{k,j}^t = \sum_k \alpha_k q_{k,j}^t$  qui sont approximés par une fermeture analogue à une loi de Fourier :

$$q_{k,j}^t = \lambda_{tk} \frac{\partial T_m}{\partial x_j}$$

où les conductivités thermiques turbulentes par phase  $\lambda_{tk}$  s'expriment en fonction des viscosités turbulentes phasique  $\mu_{tk}$  et un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  selon :

$$\lambda_{tk} = \frac{\mu_{tk} C_{pk}}{Pr_t}$$

De là, en définissant la conductivité thermique du mélange turbulente du mélange  $\lambda_{tm} = \sum_k \alpha_k \lambda_{tk}$ , approximée par :

$$\lambda_{tm} \approx \frac{\mu_{tm} C_{pm}}{Pr_t}$$

avec  $\mu_{tm} = \sum_k \alpha_k \mu_{tk}$  et  $C_{pm} = \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k C_{pk}}{\sum_k \alpha_k \rho_k}$ , il vient finalement :

$$q_{m,j}^t = \lambda_{tm} \frac{\partial T_m}{\partial x_j} \approx \frac{\mu_{tm} C_{pm}}{Pr_t} \frac{\partial T_m}{\partial x_j} \quad (2.66)$$

#### 2.3.3.4 Relations supplémentaires

A la suite des développements précédents, plusieurs relations entre les quantités moyennes peuvent être rappelées.

- L'énergie totale  $E_m$  se répartie comme la somme d'une énergie interne et d'une énergie cinétique :

$$E_m = e_m + \frac{1}{2} u_{m,i} u_{m,i} \quad (2.67)$$

- L'enthalpie  $h_m$  s'exprime à partir de la pression, l'énergie interne et la masse volumique selon la relation :

$$h_m = e_m + \frac{p_m}{\rho_m} \quad (2.68)$$

- L'enthalpie libre  $g_m$  qui s'exprime en fonction de l'entropie  $s_m$  :

$$g_m = h_m - T_m s_m \quad (2.69)$$

### 2.3.4 Hypothèses effectuées au sein du mélange

Au sein du mélange les deux phases en présence, la vapeur et le liquide, coexistent. Le fluide est considéré comme un mélange homogène dont la modélisation comprend plusieurs hypothèses simplificatrices.

**Hypothèse 1** Hypothèse de mélange homogène.

L'hypothèse d'homogénéité suppose qu'il n'y a pas de glissement entre les phases c'est-à-dire que les vitesses tangentielles des phases liquide et vapeur sont égales :

$$u_l^t = u_v^t$$

D'autre part, dans le cas d'équations moyennées, les vitesses normales à l'interface ( $u_l^n$  pour la phase liquide et  $u_v^n$  pour la phase vapeur) sont toutes deux égales à la vitesse moyenne de l'interface<sup>1</sup> :

$$u_l^n = u_v^n$$

Ces deux égalités permettent de conclure à une égalité des vitesses moyennes de la phase liquide et vapeur au sein du mélange, telle que :

$$u_v = u_l = u_m \quad (2.70)$$

**Hypothèse 2** Hypothèse d'équilibre thermique.

L'hypothèse d'équilibre thermique égalise les températures de la phase vapeur et de la phase liquide du mélange :

$$T_v = T_l = T_m \quad (2.71)$$

**Hypothèse 3** Hypothèse d'équilibre mécanique.

Les deux phases en présence au sein du mélange sont supposées évoluer à l'équilibre mécanique, c'est-à-dire à la même pression :

$$p_v = p_l = p_m \quad (2.72)$$

### Conséquences des hypothèses simplificatrices

La liste des hypothèses précédentes permet de simplifier la mise en équation du système des équations de conservation pour un mélange homogène. En effet ces équations font à l'origine apparaître des termes de transfert à l'interface détaillés ci-après.

---

1. Rappel : Soit  $\Gamma_k$  le taux de production de masse de la phase  $k$  tel que  $\Gamma_k = \dot{m}_k \delta_I = (u_{k,j} - v_{int,j}) n_j \delta_I$ . En sachant que  $\sum_k \Gamma_k = 0$  on en déduit que  $u_l^n = u_v^n$

- Les échanges de masse à l'interface  $\sum_k \Gamma_k$  avec :

$$\Gamma_k = - \sum_{\text{disc de T}} \frac{\dot{m}_k}{\mathbb{T} |v_{int,j} n_j|} = -\dot{m}_k \delta_I = -\rho_k (u_{k,i} - v_{int,i}) \cdot n_i \delta_I$$

L'égalité des vitesses au sein du mélange permet de supprimer ce terme dans l'équation de conservation de la masse au sein du mélange.

- Les échanges de quantité de mouvement à l'interface  $\sum_k \mathbb{M}_k$  avec :

$$\mathbb{M}_k = - \sum_{\text{disc de T}} \frac{(\dot{m}_k u_{k,i} + \mathbb{T}_{k,ij} n_j)}{\mathbb{T} |v_{int,j} n_j|}$$

et

$$\mathbb{T}_{k,ij} = -p_k \delta_{ij} + \sigma_{k,ij}$$

Les hypothèses d'équilibre cinématique et mécanique au sein du mélange suppriment la somme des transferts de quantité de mouvement  $\sum_k \mathbb{M}_k$  dans l'équation de conservation du même nom.

- Les transferts d'énergie à l'interface  $\sum_k \mathbb{Q}_k$  avec :

$$\mathbb{Q}_k = - \sum_{\text{disc de T}} \frac{\dot{m}_k e_k + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,i} - (\mathbb{T}_{k,ij} n_j) u_{k,i} + q_{k,i} n_i}{\mathbb{T} |v_{int,j} n_j|}$$

Les hypothèses d'équilibre cinématique, mécanique et thermique annulent ce terme de transfert dans l'équation de conservation de l'énergie.



## Chapitre 3

# Les modèles de turbulence

*Que ce soit lors de l'écriture par phase ou dans le cadre d'un mélange homogène, la décomposition du système en une partie moyenne et une partie fluctuante fait apparaître, au sein des équations de conservation, des quantités turbulentes, exprimées en fonction de variables fluctuantes. Ces quantités demeurent inconnues et nécessitent donc d'être modélisées. Les méthodes adoptées reposent sur une modélisation à viscosité turbulente qui permet de relier linéairement les inconnues aux grandeurs issues des équations de conservation.*

*Les influences du modèle de turbulence sur ledit modèle de cavitation ont été plus largement étudiés au cours de précédents travaux; les auteurs ont proposé une extension des simulations à partir de modèles hybrides RANS/LES. La fin de ce chapitre présente succinctement les résultats de ces études.*

### 3.1 Le problème de fermeture des équations

L'écriture des équations de conservation moyennées a fait apparaître des termes supplémentaires :

- le tenseur des contraintes turbulentes du mélange :

$$\tau_{m,ij} = \sum_k \alpha_k \tau_{k,ij} = \sum_k -\alpha_k \overline{\rho_k u''_{k,i} u''_{k,j}}$$

- le flux de chaleur turbulent du mélange :

$$q_{m,j}^t = \sum_k \alpha_k \left( \overline{\rho_k e''_k u''_{k,j}} + \frac{1}{2} \overline{\rho_k u''_{k,i} u''_{k,i} u''_{k,j}} - \overline{(p_k - \sigma_{k,ij}) u''_{k,j}} \right)$$

La fermeture du système d'équation nécessite d'introduire une modélisation de ces quantités turbulentes.

#### Modélisation au premier ordre

L'approche au premier ordre propose d'estimer les corrélations doubles des fluctuations de vitesse apparaissant dans les équations de Navier-Stokes moyennées par l'introduction d'une relation algébrique entre contraintes turbulentes et grandeurs physiques moyennes. Par analogie avec la loi de Newton pour les contraintes d'agitation moléculaire, Boussinesq a proposé une relation linéaire pour la modélisation du tenseur des contraintes turbulentes :

$$\tau_{m,ij} = \mu_{tm} \left[ \frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{m,n}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho_m k_m \delta_{ij} \quad (3.1)$$

avec  $k_m$  l'énergie cinétique turbulente. La modélisation du flux de chaleur turbulente suit également une relation linéaire par rapport aux variations de température, analogue à une loi de Fourier :

$$q_{m,j}^t = \lambda_{tm} \frac{\partial T_m}{\partial x_j} \approx \frac{\mu_{tm} C_{pm}}{Pr_t} \frac{\partial T_m}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

Ces fermetures d'équations permettent, à partir d'une relation simple, de calculer des moments d'ordre deux en fonction de variables résolues d'ordre un. Toutes les inconnues sont remplacées par une seule inconnue scalaire : la viscosité turbulente de mélange  $\mu_{tm}$ . Cette approche implique néanmoins plusieurs hypothèses.

- La turbulence est isotrope aux petites échelles.
- Le tenseur des contraintes turbulentes apparaît dans les équations de Navier Stokes en raison de la non linéarité du terme convectif. Or, la relation de Boussinesq confère à ce tenseur un caractère linéaire et diffusif en contradiction avec son origine.
- La relation de Boussinesq inhibe tous les effets de mémoire propres à la turbulence.

#### Modélisation au second ordre

En prenant le seul exemple du tenseur  $\tau_{m,ij}$  une seconde option consisterait à résoudre les équations de transport pour chacune de ses composantes. Ce choix ajoute au système des inconnues



supplémentaires du troisième ordre, de la forme  $\overline{\rho_k u''_{k,i} u''_{k,i} u''_{k,j}}$ . Ces termes nécessitent à leur tour l'utilisation de modèles nécessaires à la fermeture du système d'équation. Bien que ce type de démarche présente une modélisation plus proche de la physique, celle-ci engendre la multiplication d'équation et à fortiori l'augmentation du coût de calcul.

**Apparté** La modélisation précédente s'appliquait aux grandeurs diphasiques du mélange indicées  $m$ . Pour plus de lisibilité, les grandeurs utilisées dans les équations de fermetures seront ici exempt de leurs indices  $m$  ou  $l$ .

## 3.2 La modélisation à $n$ équations

### 3.2.1 Présentation

La modélisation au premier ordre nécessite de calculer l'inconnue scalaire  $\mu_t$  : la viscosité turbulente. Dès 1925 Prandtl propose de déterminer cette viscosité à partir de la longueur de mélange  $\ell_m$  analogue au libre parcours moyen en théorie cinétique des gaz. Pour un écoulement cisailé 2D il relie ainsi :

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

Cette relation utilisée dans les écoulements cisailés libres nécessite néanmoins d'affecter une valeur à  $\ell_m$ . Aucune équation supplémentaire n'est ajoutée au système. Il s'agit donc ici d'un *modèle de turbulence à zéro équation*.

Par analyse dimensionnelle, il est remarquable que la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$  est proportionnelle au produit d'une vitesse et d'une échelle de longueur :

$$[\nu_t] = [U][L] \quad (3.3)$$

L'énergie cinétique turbulente  $k$  est la façon la plus courante d'exprimer l'échelle de vitesse, telle que :

$$\nu_t = \sqrt{k} L_\mu \quad (3.4)$$

En revanche l'échelle de longueur  $L_\mu$  doit être estimée.

Le taux de dissipation  $\epsilon$  correspond à un phénomène visqueux qui se produit pour les plus petites échelles de la turbulence. Cependant la quantité d'énergie dissipée sous forme de chaleur n'est pas déterminée par les plus petites structures elles mêmes. En effet, selon la cascade d'énergie de Kolmogorov, ce sont les plus gros tourbillons qui sont responsables du taux d'énergie transmis aux plus petites structures et par conséquent du taux de dissipation turbulente. Ainsi d'un point de vue dimensionnelle, la dissipation turbulente peut s'exprimer en fonction de l'énergie cinétique turbulente et d'une échelle de longueur  $L_\epsilon$ , appelée aussi échelles intégrales, caractéristiques des plus grosses structures :

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\epsilon}$$

L'hypothèse réalisée par la plupart des modèles qui font suite est de considérer que les deux échelles,  $L_\mu$  et  $L_\epsilon$ , qui caractérisent respectivement deux mécanismes distincts i.e. de mélange

turbulent et de transfert d'énergie vers les plus petites échelles, sont proportionnelles. Cette supposition permet notamment de transformer l'équation (3.4) sous la forme :

$$\nu_t = \sqrt{k} \frac{L_\mu}{L_\epsilon} \frac{k^{3/2}}{\epsilon} = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.5)$$

qui fait apparaître la constante de proportionnalité  $C_\mu$ . La relation (3.5) reprend donc les grands principes de la physique de la turbulence : la diffusivité globale de la turbulence est liée aux plus gros tourbillons et pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, la viscosité moléculaire  $\mu$  n'intervient pas. Finalement deux échelles caractéristiques, l'énergie  $k$  et l'échelle de longueur  $\ell$  servent à décrire l'état de la turbulence en un point et un instant donné. Elles jouent le même rôle que les variables d'états de pression et de température. Elles nécessitent à leurs tours des lois d'états qui permettront de les relier au système d'équation.

En premier lieu, Prandtl a proposé de résoudre l'équation de la l'énergie cinétique turbulente pour calculer  $k$ , tandis que la détermination de  $\ell$  restait empirique. Ce type de résolution fait apparaître le premier *modèle de turbulence à une équation*. Par la suite Kolmogorov évalue l'échelle de longueur à partir de la relation :

$$\ell = \frac{\sqrt{k}}{\omega}$$

où  $\omega$  caractérise la fréquence des plus gros tourbillons. Il propose dès lors d'ajouter une équation de transport pour  $\omega$  et développe en 1942 le premier *modèle de turbulence à deux équations*. Ces raisonnements sont à la base du développement de modèles de turbulence à une ou deux équations de transport développés en mécanique des fluides numériques.

## 3.2.2 Modèle à transport de viscosité turbulente

### 3.2.2.1 Modèle de Spalart et Allmaras

Le modèle mis en place par Spalart et Allmaras [167, 168] écrit directement une équation de transport pour la viscosité cinématique turbulente modifiée :  $\nu_t = f_{\nu 1} \tilde{\nu}$ . Sous forme conservative cette équation s'exprime :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \tilde{\rho} \tilde{u}_k \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \tilde{\rho} \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\rho} \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \\ &- \left( c_{\omega 1} f_\omega - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \tilde{\rho} \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

- $f_{\nu 1}$  est un terme d'amortissement visqueux calculé par  $f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}$  où  $\chi = \tilde{\nu}/\nu$
- $P_\nu = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\rho} \tilde{\nu}$  représente le terme de production de viscosité turbulente avec  $\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2}$  où  $S = \sqrt{2 \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}}$  et  $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$  et  $d$  la distance à la paroi la plus proche. Ce terme introduit deux autres fonctions d'amortissements  $f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}$  et  $f_{t2} = c_{t3} \cdot \exp(-c_{t4} \chi^2)$

–  $D_\nu = (c_{\omega 1} f_\omega - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}) \bar{\rho} \frac{\bar{\nu}^2}{d^2}$  est le terme de diffusion de la viscosité turbulente. Il introduit

$$f_\omega = g \left( \frac{1+c_{\omega 3}}{g^6+c_{\omega 3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{\omega 2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\bar{\nu}}{S \kappa^2 d^2} \text{ et } c_{\omega 1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}$$

Les valeurs algébriques des constantes introduites par ce modèle sont récapitulées dans le tableau 3.1 :

TABLE 3.1 – Coefficients du modèle Spalart-Allmaras

$c_{b1}$	$c_{b2}$	$\sigma$	$\kappa$	$c_{\omega 2}$	$c_{\omega 3}$	$c_{\nu 1}$	$c_{t3}$	$c_{t4}$
0,1335	0,622	$\frac{2}{3}$	0,41	0,3	2	7,1	1,1	2

### 3.2.3 Modèles à deux équations de transport

#### 3.2.3.1 Introduction

La partie 3.2 a présenté la viscosité turbulente comme le produit d'une vitesse et d'une longueur. Un grand nombre de modèles de turbulence propose de calculer chacune des deux grandeurs caractéristiques à partir d'une équation de transport. Si la vitesse est à chaque fois déduite d'une équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$ , la diversité des modèles repose sur le choix du calcul de l'échelle de la seconde variable, utilisée pour exprimer l'échelle de longueur  $\ell$ . Comme montré précédemment, deux échelles apparaissent au sein de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente : l'une,  $L_\mu$  reliée à la viscosité turbulente, l'autre  $L_\epsilon$  à la dissipation. Les modèles à échelle unique relient ces deux longueurs entre elles en supposant que la dissipation s'adapte aux transferts d'énergie.

A partir de ces considérations, plusieurs quantités transportées peuvent être utilisées pour construire cette longueur :

- la dissipation de l'énergie turbulente  $\epsilon$  qui est reliée à l'énergie et la longueur  $L_\epsilon$  par la relation  $\epsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\epsilon}$ ,
- la fréquence caractéristique de la turbulence  $\omega$  qui peut être interprétée comme l'échelle de temps caractéristique de la dissipation de l'énergie cinétique  $k$ , telle que  $\omega = \frac{\epsilon}{k}$  et donc  $\ell = \frac{k^{1/2}}{\omega}$ ,
- une échelle de longueur  $\ell$  qui permet de calculer directement la longueur caractéristique  $\ell_c$ .

La modélisation à deux équations de transport peut ainsi être divisée en trois familles principales, les modèles  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$  et  $k - \ell$  déclinés sous différentes variantes.

#### 3.2.3.2 Les modèles incompressibles

La plupart des modèles utilisent l'énergie cinétique turbulente  $k$  pour définir l'échelle de vitesse de la relation (3.3). La modélisation repose alors sur la fermeture des termes de droite de l'équation (A.12) de transport de  $k$ . Une seconde équation de transport est introduite pour calculer une échelle de longueur  $\ell$  de la turbulence. Celle-ci peut être reliée à la dissipation  $\epsilon$  ou à la fréquence caractéristique  $\omega$ . L'enjeu consiste donc à proposer en seconde équation, soit une équation sur  $\ell$ , soit une forme réduite de l'équation (A.19) de transport de la dissipation. Afin de

limiter le nombre de terme à modéliser, l'équation (A.12) de transport de  $k$  et l'équation (A.19) de transport de  $\epsilon$  sont simplifiées en négligeant les termes liés à la compressibilité du champs turbulent et en posant  $\rho' = 0$ . C'est à partir de ces considérations que sont construits les modèles présentés ci-après.

### a/ Le modèle $k - \epsilon$

Le modèle  $k - \epsilon$  de Jones et Launder [79] présente une équation de transport pour l'énergie cinétique  $k$  et une seconde pour le transport de la dissipation  $\epsilon$ . Les termes spécifiques à la compressibilité de l'écoulement, exprimés dans l'équation (A.12) de transport de  $k$  à travers les corrélation pressions contraintes  $\Pi_{ij}$  et le flux de masse turbulent  $M_{ij}$ , ne sont pas pris en compte.

Les termes de diffusion sont reliés à l'énergie cinétique turbulent par une hypothèse de gradient. La diffusion visqueuse s'exprime désormais :

$$\bar{\rho}D^V = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

et par analogie la diffusion turbulente est modélisée par :

$$\bar{\rho}D^T = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

où  $\sigma_k$  est l'équivalent d'un nombre de Schmidt turbulent. L'équation de transport pour la dissipation  $\epsilon$  est construite par analogie de l'équation sur  $k$ . Enfin des termes de bas Reynolds et de proche paroi sont ajoutés :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \bar{\rho}P_k - \bar{\rho}\check{\epsilon} - \check{D} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\check{\epsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \check{\epsilon} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \check{\epsilon}}{\partial x_j} \right] = c_{\epsilon 1} \frac{\check{\epsilon}}{k} \bar{\rho}P_k - \bar{\rho}c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\check{\epsilon}^2}{k} + E \quad (3.8)$$

La dissipation turbulente  $\bar{\rho}\epsilon$  est modélisée par la relation :

$$\bar{\rho}\epsilon = \overline{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

qui peut être comparée à la dissipation solénoïdale de l'équation générale (A.18) proposée par Gatski. Dans les équations (3.7) et (3.8) l'expression de la dissipation est modifiée de sorte que :

$$\bar{\rho}\check{\epsilon} = \bar{\rho}\epsilon - \check{D} \quad \text{avec} \quad \check{D} = 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l}$$

Les équations de transport font apparaître les quantités de viscosité turbulente  $\mu_t$ , de production d'énergie cinétique  $P_k$  et le terme de bas Reynolds  $E$  qui s'écrivent :

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.9)$$

$$\bar{\rho} P_k = \tau_{il} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

$$E = 2 \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right]^2 \quad (3.11)$$

Les fonctions d'amortissements sont reliées au nombre de Reynolds turbulent  $R_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$  de la façon suivante :

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-2,5}{1 + R_t/50}\right) \quad \text{et} \quad f_2 = 1 - 0,3 \exp(-R_t^2)$$

Les constantes du modèle son récapitulées dans le tableau 3.2 :

TABLE 3.2 – Coefficients du modèle  $k - \epsilon$

$C_\mu$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0,09	1,57	2	1	1,3

### b/ Le modèle $k - \omega$ de Wilcox

Le modèle  $k - \omega$ , proposé par Wilcox, comporte une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une équation de transport pour la fréquence caractéristique  $\omega$ . Les simplifications employées dans l'équation (3.7) demeurent identiques pour ce modèle. L'équation sur  $\omega$  est construite à partir du changement de variable  $\omega \approx \frac{\epsilon}{k}$ .

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] = \bar{\rho} P_k - \beta^* \bar{\rho} k \omega \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \omega - (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \alpha \frac{\omega}{k} \bar{\rho} P_k - \beta \bar{\rho} \omega^2 \quad (3.13)$$

La viscosité turbulente s'exprime :

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho} k}{\omega} \quad (3.14)$$

Les constantes du modèle sont enfin exprimées dans le tableau 3.3. Ce modèle présente l'avantage de ne comporter aucune fonction d'amortissement dans les seconds membres des équations de transport, ni dans l'expression de la viscosité turbulente. En revanche, le modèle est très sensible aux valeurs  $\omega_e$  imposées à l'extérieur de la couche limite. Pour améliorer le comportement du modèle Menter a proposé un modèle bi-couche associant les équations  $k - \epsilon$  et  $k - \omega$  [109]. Le modèle résultant, nommé modèle  $k - \omega - SST$  est présenté dans la partie qui suit.

TABLE 3.3 – Coefficients du modèle  $k - \omega$ 

$\alpha$	$\beta$	$\beta^*$	$\sigma$	$\sigma^*$
$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{40}$	0,09	0,5	0,5

### c/ Le modèle $k - \omega - SST$

Le modèle a été proposé par Menter [109] qui choisit d'associer les modèles  $k - \omega$  et  $k - \epsilon$  en évaluant les capacités de chaque modèle à reproduire la turbulence en fonction de la zone étudiée. A l'extérieur de la couche limite, la forte influence de  $\omega$  altère le bon comportement du modèle  $k - \omega$ . L'intégration du modèle  $k - \epsilon$  jusqu'à la paroi nécessite quant à lui l'introduction de multiples fonctions d'amortissement. L'idée consiste donc à superposer un modèle bi-couches avec l'utilisation du modèle  $k - \omega$  dans la région interne de la couche limite, relié au modèle  $k - \epsilon$  à l'extérieur de la couche limite au moyen d'une fonction de transfert. Seule l'équation sur  $\omega$  est modifiée pour donner finalement :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] = \bar{\rho} P_k - \beta^* \bar{\rho} k \omega \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \omega - (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] &= \frac{\gamma}{\nu_t} \bar{\rho} P_k - \beta \bar{\rho} \omega^2 \\ &+ 2(1 - F_1) \frac{\bar{\rho} \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.16)$$

où la fonction  $F_1$  est la fonction d'amortissement permettant de passer du modèle  $k - \omega$  au modèle  $k - \epsilon$ . Elle s'exprime :

$$F_1 = \tanh(\zeta^4) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta &= \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right) ; \frac{4\rho\sigma_\omega 2k}{D_\omega y^2} \right] \\ D_\omega &= \max \left( \frac{\rho\sigma_\omega 2}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_l} \frac{\partial \omega}{\partial x_l} ; 10^{-20} \right) \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $y$  correspond à la distance à la paroi. Menter ajoute au modèle la correction SST "Shear Stress Transport". Elle fait suite à la comparaison des rapports entre la contrainte de cisaillement  $\widetilde{u_i'' u_j''}$  et l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Numériquement ce rapport peut s'exprimer :

$$\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{\bar{\rho}k} = \sqrt{C_\mu \frac{P_k}{\epsilon}} \quad (3.18)$$

alors qu'expérimentalement ce rapport se résume à :

$$\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{\bar{\rho}k} = \sqrt{C_\mu} \approx 0,3 \quad (3.19)$$

Dans le cas d'écoulements en présence de forts gradients positifs de pression, le rapport entre production  $P_k$  et dissipation  $\epsilon$  peut être nettement supérieur à 1, ce qui engendre une surestimation

de la contrainte de cisaillement et indirectement une sous-estimation des gradients de pression. Par conséquent, un limiteur de viscosité turbulente dans la zone externe de la couche limite est inséré au modèle :

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho}k/\omega}{\max\left(1, \frac{SF_2}{a_1\omega}\right)} \quad (3.20)$$

avec

$$S = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.21)$$

et  $F_2$  le limiteur de viscosité :

$$F_2 = \tanh(\iota^2) \quad \text{avec} \quad \iota = \max\left(2\frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega}\right) \quad (3.22)$$

Les constantes du modèle sont tirées respectivement des modèles  $k - \omega$  (indicées 1) et  $k - \epsilon$  (indicées 2). Pour une constante  $\phi$  se déduit à partir de la relation :

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2$$

où les constantes de chaque modèle sont rappelées dans le tableau 3.4.

TABLE 3.4 – Coefficients du modèle  $k - \omega - SST$

$\beta^*$	$a_1 = \sqrt{\beta^*}$	$\kappa$		
0,09	0,3	0,41		
$\sigma_1^*$	$\sigma_1$	$\beta_1$	$\sigma_{\omega 1}$	$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_1 \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$
0,5	0,5	0,075	0	0,55
$\sigma_2^*$	$\sigma_2$	$\beta_2$	$\sigma_{\omega 2}$	$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_2 \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$
0,85	0,856	0,0828	0,856	0,44

#### d/ Le modèle $k - \ell$ de Smith

Le modèle comporte une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une équation sur l'échelle de longueur  $\ell$  dont la formulation est proposée par Smith [163, 164, 165] à partir du modèle de Rotta (voir partie annexe B.1.1). L'auteur justifie l'intérêt du changement de variable  $k\ell$  d'une part à cause des difficultés engendrées par le calcul de l'énergie cinétique turbulente dans la sous-couche visqueuse; d'autre part, par les valeurs significativement faibles de la quantité  $k\ell$  en proche paroi avec  $k \propto y^2$  et  $\ell \propto y$ . En basant sa seconde équation sur la

quantité  $\ell$  Smith propose de baser son modèle sur les équations :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \bar{\rho} P_k - \frac{\bar{\rho} (2k)^{3/2}}{B_1 \ell} - 2\mu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \ell - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\ell} \right) \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \right] &= (2 - E_2) \frac{\bar{\rho} \sqrt{2k}}{B_1} \left[ 1 - \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{\ell} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\ell} \right) \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 + \bar{\rho} \ell \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \\ &\quad + \frac{2}{k} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\ell} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.24)$$

La viscosité turbulente introduit une fonction d'amortissement de sorte que :

$$\mu_t = \mu \chi f_\mu = \rho \frac{(2k)^{1/2} \ell}{B_1^{1/3}} f_\mu \quad (3.25)$$

avec :

$$\chi = \rho \frac{(2k)^{1/2} \ell}{\mu B_1^{1/3}}, \quad f_\mu = \left( \frac{C_1^4 f_1 + C_2^2 \chi^2 + \chi^4}{C_1^4 + C_2^2 \chi^2 + \chi^4} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad f_1 = \exp \left[ -50 \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 \right]$$

La variable  $d$  représente la distance à la plus proche paroi. Les constantes sont définies dans le tableau 3.5 :

TABLE 3.5 – Coefficients du modèle  $k - \ell$

$\kappa$	$B_1$	$E_2$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\ell$
0,41	18	1,2	25,2	2	1,43	1,43

### e/ Le modèle de Spalart et Allmaras - SAS

Une adaptation du modèle de Spalart et Allmaras incluant un terme SAS (voir partie annexe B.1.2.2) a été proposée par Decaix et Goncalves [37]. Dans un premier temps les auteurs étudient une version simplifiée du modèle initial en ne prenant pas en compte les termes bas Reynolds ( $f_{\nu 1} = 1$ ,  $f_\omega = 1$  et  $f_{\nu 2} = 0$ ) et en supprimant le terme introduit pour la stabilité du calcul en écoulement laminaire ( $f_{t2} = 0$ ). L'équation de transport de la quantité  $\tilde{\nu}$  s'écrit sous sa forme réduite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \bar{\rho} \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] &= c_{b1} \tilde{S} \bar{\rho} \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \\ &\quad - c_{\omega 1} \bar{\rho} \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$



L'intérêt de ces simplifications réside dans la nouvelle expression du terme source. Le terme SAS est introduit à travers le terme de destruction :

$$D_\nu = -c_{\omega 1} \bar{\rho} \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \quad (3.27)$$

Le paramètre  $d$  qui représente la distance à la paroi est remplacé par l'échelle de Von Karman  $L_{vk}$ . L'équilibre entre production et destruction dans le terme source permet de redéfinir la viscosité turbulente :

$$\tilde{\nu} = L_{vk}^2 \tilde{S} \quad (3.28)$$

Celle-ci est ainsi proportionnelle à l'échelle de Von Karman et s'ajuste donc au niveau de turbulence résolue.

Dans un second temps les termes bas Reynolds sont réintroduits :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \tilde{\rho} \tilde{u}_k \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \tilde{\rho} \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\rho} \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \\ &\quad - c_{\omega 1} f_\omega \bar{\rho} \xi_{SAS} \frac{\tilde{\nu}^2}{L_{vk}^2} - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \bar{\rho} \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

La constante  $\xi_{SAS}$  est utilisée comme paramètre de réglage. Les auteurs remarquent qu'en prenant la valeur spécifique  $\xi_{SAS} = \kappa^2$ , le troisième terme du membre de droite retrouve son comportement du modèle de base :  $-c_{\omega 1} f_\omega \bar{\rho} \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2}$ . En effet, dans une couche limite bidimensionnelle de type logarithmique l'échelle de Von Karman s'exprime :

$$L_{vk} = \kappa \left| \frac{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}} \right| = \kappa y = \kappa d \quad (3.30)$$

et donc :

$$\frac{\xi_{SAS}}{L_{vk}^2} = \frac{1}{d^2} \quad (3.31)$$

### f/ Le modèle $k - \ell - SAS$

A partir des travaux de Menter et Egorov et du modèle  $k - \sqrt{k\ell} - SAS$  (voir partie annexe B.1.2.1), Decaix et Goncalves [37, 38] ont proposé un modèle  $k - \ell - SAS$ . Le raisonnement est établi à partir d'un changement de la variable  $\sqrt{k\ell}$  en  $\ell$  dans l'équation (B.17) initiale du modèle  $k - \sqrt{k\ell}$ , tandis que l'équation sur  $k$  (B.16) reste inchangée. L'équation sur  $\ell$  finalement obtenue s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \ell - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \right] &= \bar{\rho} \frac{\ell}{k} P_k \left( \xi_1 - \frac{1}{2} - \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{v\kappa}} \right)^2 \right) + \frac{\rho \sqrt{2k}}{B_1} \left( 1 - \frac{B_1 \xi_3}{\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{k} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{1}{\ell} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} + \frac{\ell}{2k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \left( \frac{1}{\sigma_\phi} - \frac{1}{\sigma_k} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dans l'optique de comparer l'équation de l'échelle de longueur turbulente  $\ell$  avec termes SAS à l'équation (3.24) de Smith, les auteurs remarquent la correspondance des viscosités turbulentes issue des équations (B.17) et (3.24) :

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu^{1/4} k^{1/2} \ell = \bar{\rho} \frac{(2k)^{1/2} \ell}{B_1^{1/3}} \quad (3.33)$$

En effet,  $C_\mu = 0,09 \approx \left[ \frac{\sqrt{2}}{B_1^{1/3}} \right]^4 = 0,0848$ .

Les paramètres du modèles sont similaires à ceux précisés dans les tableaux B.1 et 3.5 et sont résumés dans le tableau 3.6. Il est intéressant de comparer l'équation de transport (3.33) à l'équa-

TABLE 3.6 – Coefficients du modèle  $k - \ell - SAS$

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\sigma_\phi$	$\sigma_k$	$B_1$	$\kappa$
0,8	1,47	0,0288	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	18	0,41

tion de transport sur  $\ell$  proposée par Smith afin de cibler les paramètres ajoutés par le modèle SAS.

**Production** Le terme de production  $P^{(k-\ell-SAS)} = \bar{\rho} \frac{\ell}{k} P_k \left( \xi_1 - \frac{1}{2} - \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 \right)$  peut être comparé au terme présent à l'origine dans l'équation de Smith  $P^{(k-\ell)} = \frac{\ell}{k} P_k \left( \frac{E_1}{2} - 1 \right)$  et que celui-ci annule en choisissant  $E_1 = 2$ . Le terme SAS apparaît via le rapport  $\xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2$ .

**Destruction** Le terme de destruction  $D^{(k-\ell-SAS)} = \frac{\rho \sqrt{2k}}{B_1} \left( 1 - \frac{B_1 \xi_3}{\sqrt{2}} \right)$  est comparable au terme  $D^{(k-\ell)} = (2 - E_2) \frac{\bar{\rho} \sqrt{2k}}{B_1} \left[ 1 - \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 \right]$  en omettant les termes bas Reynolds  $\left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2$ .

**Terme de gradient** Les termes de gradients sont formulés de manière identique avec le coefficient supplémentaire bas Reynolds  $\left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2$  qui intervient dans l'équation de Smith.

**Terme supplémentaire** Le terme  $\frac{\ell}{2k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \left( \frac{1}{\sigma_\phi} - \frac{1}{\sigma_k} \right)$  est propre au modèle  $k - \ell$ -SAS mais il s'annule en paramétrant  $\sigma_\Phi = \sigma_k = \frac{2}{3}$  comme pour le modèle  $k - \sqrt{k} \ell$ -SAS.

**Terme compressible** Le modèle de Smith comprend un terme supplémentaire  $\bar{\rho} \ell \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}$  qui est utilisée pour les écoulements compressibles [165].

Au vu des remarques précédentes, les auteurs décident de modifier le modèle initial de Smith en ajoutant un terme de production  $P^{(SAS)} = \frac{\ell}{k} P_k \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2$  à l'équation sur  $\ell$ . Finalement le

système d'équation pour le modèle  $k - \ell$ -SAS s'exprime :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \bar{\rho} P_k - \frac{\bar{\rho} (2k)^{3/2}}{B_1 \ell} - 2\mu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \ell - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\ell} \right) \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \right] &= \frac{\ell}{k} P_k \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 \\ &+ (2 - E_2) \frac{\bar{\rho} \sqrt{2k}}{B_1} \left[ 1 - \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 \right] \\ &- \frac{1}{\ell} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\ell} \right) \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 + \bar{\rho} \ell \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \\ &+ \frac{2}{k} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\ell} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où le coefficient  $\xi_2 = 1,47$  est tiré du modèle de Menter.

Le modèle de Smith présente à l'origine un comportement intéressant en proche paroi. L'ajout du terme SAS ne doit pas modifier ces caractéristique et c'est pourquoi plusieurs conditions sont ajoutées à ce modèle. D'une part, le terme supplémentaire est activé uniquement en zone diphasique. D'autre part, cette modification n'intervient pas à proximité de la paroi. Pour implémenter cette condition le modèle considère :

$$P^{SAS} = \begin{cases} \frac{\ell}{k} P_k \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 (f_1 - f_{1o}) & \text{si } f_1 - f_{1o} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.36)$$

La fonction  $f_1 = \exp \left[ -50 \left( \frac{\ell}{\kappa d} \right)^2 \right]$  est tirée du modèle initial de Smith. A proximité de la paroi, l'échelle de la longueur turbulente est proportionnelle à  $\kappa d$  et la fonction  $f_1$  tend vers 0. Loin de la paroi celle-ci tend vers 1. La fonction  $f_{1o}$  joue le rôle de fonction de seuil qui assure au modèle une activation du paramètre SAS uniquement loin des parois.

### 3.2.3.3 Les modèles compressibles

Les modèles de turbulence présentés jusqu'ici sont issus d'un développement pour des applications monophasiques supposées incompressibles. Or, comme le démontre la relation (A.29) de la section A.3 de la partie annexe, la divergence des fluctuations de la vitesse par phase n'est pas nulle pour les écoulements diphasiques, même si chaque phase pure est considérée comme incompressible. Dès lors la modélisation de la turbulence en écoulement cavitant devrait incorporer des termes supplémentaires, présents à l'origine dans les équations de transport des quantités turbulentes, qui prennent en compte la compressibilité. Ces termes sont notamment étudiés pour les écoulements monophasiques à haute vitesse où ils apparaissent dans l'équation (A.12) de l'énergie cinétique turbulente et la dissipation dilatationnelle de l'équation (A.18). Des travaux expérimentaux ont été menés en couches de mélange [13, 122] et ont révélé que ces termes supplémentaires pouvaient provoquer une diminution du taux d'évasement.

Les études numériques de Coutier et al. [33] se sont intéressées à la reproduction d'écoulements

cavitants au moyen de modèles de turbulence compressible. Les corrections de compressibilité reprennent celles proposées par Wilcox [188] pour le modèle  $k - \omega$ . Les résultats font état d'une amélioration de la prédiction des phénomènes fréquentiels liés à l'apparition de la cavitation sur Venturi ou hydrofoil.

En ce qui concerne le code caviflow, l'influence numérique des termes de compressibilité a été testée par Decaix et Goncalves [39]. Ils incorporent pour cela le terme de dissipation dilatationnelle  $\epsilon_d$ , le terme de corrélation pression-dilatation  $\Pi$  et le terme de contribution du flux de masse turbulent  $M$  dans leurs calculs. La modélisation des deux premiers termes adopte les formulations de Sarkar [144, 143] :

$$\epsilon_d = \alpha_1 \epsilon_s M_t^2 \quad (3.37)$$

$$\bar{\rho}\Pi = -\alpha_2 \bar{\rho} P_k M_t + \alpha_3 \bar{\rho} \epsilon_s M_t^2 \quad (3.38)$$

où  $\epsilon_s$  désigne la dissipation solénoïdale,  $M_t$  un nombre de Mach turbulent et  $P_k$  la production issue de l'équation sur  $k$ . Les coefficients  $\alpha_k$  sont déterminés par  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 0,15$  et  $\alpha_3 = 0,2$ . Le flux de masse turbulent respecte la formulation de Jones [78] qui établit :

$$\bar{\rho}M = -\frac{\mu_t}{\bar{\rho}^2 \sigma_p} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (3.39)$$

où le nombre de Schmidt turbulent est fixé à 1. Les simulations réalisées en écoulements 2D sur géométrie de Venturi [39] ont révélé la capacité des modèles à reproduire certaines instabilités présentes en zone de mélange sans avoir recours à un limiteur de la viscosité turbulente. En revanche la simulation d'instationnarités plus complexes qui apparaissent lorsque l'angle du Venturi augmente ne sont pas prises en compte par ces modèles. Les auteurs remarquent enfin le nombre croissant de paramètres à fixer par rapport aux résultats expérimentaux et la difficulté de les calibrer.

Les simulations présentées dans ce manuscrit ne prennent pas en compte les effets de turbulence compressible.

### 3.3 Limiteur de viscosité turbulente : la correction de Reboud

Les modèles de turbulence, développés en majeure partie pour des applications monophasiques, ont tendance à surestimer la valeur de la viscosité turbulente en zone diphasique. Afin d'intégrer le modèle  $k - \epsilon$  à un code de cavitation, Reboud [129] propose d'ajouter un limiteur de la viscosité turbulente. Il remplace pour cela la masse volumique  $\rho_m$  du mélange par une fonction  $f(\rho_m)$  qui modifie l'expression de la viscosité turbulente :

$$\mu_t = f(\rho_m) C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.40)$$

$$f(\rho_m) = \rho_v + \left( \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v - \rho_l} \right)^n (\rho_l - \rho_v) \quad (3.41)$$

Cette modification a été appliquée avec succès à d'autres modèles [33, 29] pour des géométries de type Venturi ou hydrofoil en fixant la valeur de  $n = 10$ . Decaix et Goncalves ont largement étudié

l'influence de cette correction à travers différents travaux [37, 38, 39]. Ils présentent notamment des études paramétriques de  $n$  et témoignent d'une nette amélioration dans la reproduction d'instationnarités caractéristiques des écoulements cavitants.

### 3.4 Les modèles hybrides RANS/LES

Cette partie a pour vocation de présenter succinctement les modèles hybrides RANS/LES utilisés en écoulement cavitant et fait référence aux calculs menés à l'aide du code caviflow. Ces modèles de turbulence n'ont pas été étudiés au cours de la thèse.

#### 3.4.1 L'approche DES

L'approche DES a été initiée par Spalart pour les modèles monophasiques [169]. Elle repose sur le concept d'étendre les modèles RANS à la LES en modifiant le modèle de turbulence de Spalart et Allmaras (voir partie 3.2.3.2). L'idée est de redéfinir l'échelle de longueur  $d$  représentant la distance à la paroi et qui intervient dans le terme de diffusion  $D_\nu \propto 1/d^2$ . L'objectif consiste à diminuer l'échelle de longueur  $d$  afin d'augmenter la diffusion et par conséquent la viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$ . Une nouvelle échelle de longueur  $\tilde{d}$  est pour cela introduite en définissant :

$$\tilde{d} = \min(d, C_{DES}\Delta) \quad \text{avec} \quad C_{DES} = 0,65 \quad \text{et} \quad \Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (3.42)$$

où la valeur de la constante  $C_{DES}$  est déterminée dans le cas de la décroissance de la turbulence isotrope [160]. Dans l'hypothèse d'équilibre entre les phénomènes productifs  $P_\nu = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\rho}\tilde{\nu}$  et dissipatifs  $D_\nu = (c_{\omega 1}f_\omega - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}f_{t2})\tilde{\rho}\frac{\tilde{\nu}^2}{\tilde{d}^2}$  de la turbulence, la viscosité turbulente devient :

$$\tilde{\nu} = \tilde{d}^2\tilde{S} \quad (3.43)$$

Dans le cas où le modèle passe à une modélisation DES cette relation devient :

$$\tilde{\nu} = C_{DES}^2\Delta^2\tilde{S} \quad (3.44)$$

qui est comparable à l'écriture de la viscosité sous maille  $\nu_{SGS} = C_s\Delta_{SGS}\left|\tilde{S}\right|$  proposé par Smagorinsky [162]. Les limites de ce modèle résident dans la difficulté de passer d'une simulation RANS proche paroi à une simulation LES au loin. Bien souvent, la taille de la maille dans la zone de transition est suffisamment petite pour que le limiteur (3.42) passe en modèle DES mais trop grande pour obtenir un bon comportement de la LES. D'autre part, le calcul de la taille de maille  $\Delta$  n'est pas unique. Pour les modèles RANS/LES celle-ci s'exprime :

$$\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

tandis que la LES prévoit :

$$\Delta = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^{1/3}$$

Différentes versions améliorées (la ZDES ou la DDES) ont été envisagées pour palier ces problèmes comme le présente Decaix [37].

L'approche DES a été transposée aux écoulements cavitants en premier par Kunz et al. en 2003 [93] qui propose une DES construite à partir d'un modèle  $k - \epsilon$ . Une fonction  $F_{DES}$  est pour cela introduite dans la modélisation du terme de destruction de l'équation d'énergie cinétique turbulente (3.7) :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \bar{\rho} P_k - \bar{\rho} \epsilon F_{DES} \quad (3.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} F_{DES} &= \max \left[ \frac{L_\epsilon}{C_{DES} \Delta}; 1 \right] \\ \Delta &= \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ L_\epsilon &= \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \end{aligned}$$

La fonction  $F_{DES}$  permet de maintenir le comportement RANS du modèle dans les zones proches paroi où le maillage ne permet pas de résolution des échelles de la turbulence. Dans les zones éloignées, où le maillage raffiné permet une résolution des plus grandes structures, la fonction  $F_{DES}$  est supérieure à 1 et le niveau de destruction de l'énergie cinétique turbulente augmente. Cette approche a par la suite été étendue à d'autres écoulements cavitants [85].

Les travaux de Decaix [37] se sont eux aussi intéressés à une modélisation DES et DDES de la turbulence pour des écoulements cavitants de type Venturi. Pour cela, ils adaptent le modèle de turbulence de Spalart et Allmaras au cas d'un modèle homogène. Les résultats des simulations témoignent des difficultés à reproduire les bons comportements des poches de cavitation sur géométries de Venturi. Le modèle DES a tendance à passer rapidement aux calculs d'une LES, même dans des zones où le maillage n'est pas adapté à de telles simulations. La modélisation DDES se cantonne quand à elle à une modélisation RANS et les évolutions recherchées ne sont jamais obtenues. Dans l'optique d'améliorer ces résultats une modification arbitraire de la constante  $C_{DES}$  ou le raffinement du maillage ont été envisagés. Si la première solution fournie des résultats a posteriori, la seconde ne permet pas d'obtenir le bon comportement de la poche. Au vu de ces résultats, il apparaît finalement que la DES et la DDES, conçues à l'origine pour la simulation d'écoulements décollés loin des parois, sont difficilement transposables à l'étude de la cavitation sur géométrie de Venturi.

### 3.4.2 Réflexion sur la modélisation de la turbulence

Les modèles de turbulence utilisés au cours de ces travaux de thèse entrent dans le cadre d'une modélisation RANS avec hypothèse de Boussinesq. Cette modélisation permet d'exprimer le tenseur des contraintes turbulentes (2.61), d'après la relation (2.62), c'est-à-dire en fonction d'une viscosité turbulente scalaire et du tenseur de déformation. Cette viscosité est modélisée à partir d'une ou deux équations d'évolution des quantités turbulentes. Ainsi, l'efficacité de la reproduction des phénomènes turbulents réside à la fois dans l'écriture des équations de transport, mais également, dans l'expression qui relie la viscosité turbulente aux quantités turbulentes.

Au cours de ses études sur l'interaction turbulence-cavitation d'un écoulement de marche descendante, Maurice [108] compare les valeurs d'une viscosité turbulente expérimentale, exprimée

comme le rapport entre le tenseur de Reynolds et le tenseur des déformations, à celle d'une viscosité turbulente modélisée par un modèle  $k - k\ell$  de Rotta ou d'un modèle  $k - \epsilon$ . Pour cela, il utilise la topologie des champs de vitesse moyennés en temps et calculés sur la hauteur d'eau en trois sections de référence. La réflexion est menée en écoulement bidimensionnel et confronte les valeurs moyennes de la viscosité turbulente expérimentale, mesurée directement à partir des champs moyens des fluctuations et gradients de vitesse, aux valeurs moyennes des viscosités turbulentes reconstruites à partir des relations issues des modèles  $k - k\ell$  ou  $k - \epsilon$ . Ces travaux témoignent d'un comportement paradoxal entre la viscosité turbulente mesurée, qui diminue avec le niveau de cavitation, et les viscosités calculées par les modèles qui sont systématiquement surestimées, et ce, d'autant plus que le niveau de cavitation augmente. Ainsi, même si l'énergie cinétique turbulente et la dissipation turbulente étaient correctement prédites par les équations de transport, la viscosité turbulente se trouverait toujours surévaluée par rapport à une valeur mesurée en expérience. Dans un deuxième temps, les mesures sont étendues à la quantification de la variation d'anisotropie au sein de l'écoulement. Les résultats font part d'une forte augmentation de l'énergie cinétique dans la zone de cisaillement causée principalement par la composante transversale de la vitesse. Ces effets tridimensionnels semblent associés aux mécanismes de contraction et de dilation des structures de vapeur, moins contraint par le cisaillement en direction  $z$  qu'en direction  $x$  ou  $y$ . L'augmentation de l'énergie cinétique turbulente en écoulement cavitant pourrait notamment provenir du terme de turbulence compressible pression-dilatation  $\Pi$ , présent à l'origine dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente (A.12), et absent des modèles classiques. En écoulement cavitant, la modélisation des phénomènes turbulents aurait ainsi tendance à sous estimer les augmentations de l'énergie cinétique turbulente et, par voie de conséquence, la diminution de la viscosité turbulente liée à l'augmentation du taux de vapeur.

Ces études ne possèdent pas d'équivalent en géométrie de Venturi. Il convient donc de relativiser l'interprétation de ces résultats observés sur un écoulement de marche de descendante dont le taux d'anisotropie varie fortement, limitant ainsi l'application de l'hypothèse de Boussinesq. Néanmoins le raisonnement proposé par Maurice permet d'expliquer le recours à un limiteur de viscosité (3.40) des études numériques de Reboud et al. [129] et interroge quant à l'efficacité d'extrapoler les modèles de turbulence, issus des études monophasiques, au cas de fluides homogènes.





## Chapitre 4

# Modélisation de la cavitation

*La formulation des équations de conservation fait intervenir des variables d'état, telles que la température et la pression qui permettent de décrire l'agitation moléculaire à l'échelle macroscopique. Ces inconnues supplémentaires sont reliées au système à partir d'équations d'état. Dans les zones de phase pure, les équations d'état de mélange des gaz raides décrivent les évolutions des variables d'état. Au sein du mélange, l'hypothèse de pressions à l'équilibre entre phases supprime les effets de métastabilités, pourtant bien présents au sein des phénomènes de cavitation. Dès lors deux expressions de la pression de mélange sont envisagées. La première relation est issue d'une formulation barotrope, elle est obtenue de façon empirique et consiste à relier la pression au taux de vapeur selon une loi sinusoïdale, dont le lissage autour de la pression de vaporisation est censé modéliser les déséquilibres thermodynamiques. La deuxième relation est obtenue de façon analytique selon la démarche qui aboutit au modèle de mélange des gaz raides. Chaque expression de la pression de mélange influence d'une part celle de la vitesse du son et d'autre part la construction du terme de transferts massiques de l'équation de transport du taux de vide. Ce chapitre présente les différentes fermetures thermodynamiques et est cloturé par une analyse du comportement de chaque modèle à travers une étude Eulérienne unidimensionnelle.*

## 4.1 Equations d'état

La fermeture thermodynamique du système des équations de conservation nécessite d'incorporer des relations supplémentaires : des équations d'état. Celles-ci correspondent à la modélisation des propriétés thermodynamiques du fluide et consistent à écrire des relations algébriques entre les variables thermodynamiques. Le phénomène de cavitation se manifeste par un changement de phase de l'état liquide à l'état vapeur. Afin de modéliser ce mécanisme, il convient donc de considérer le fluide sous ses trois états : liquide, mélange et vapeur. Ces conditions impliquent, par conséquent, de construire des équations d'état capables de modéliser toutes les phases du fluide.

Le modèle proposé repose sur des hypothèses d'équilibres locaux mécaniques et thermodynamiques entre constituants. Cela signifie que les deux phases sont supposées évoluer à la même vitesse et que les phénomènes de vaporisation et de condensation sont instantanés. Dès lors, il est possible de rapporter le mélange diphasique à un problème monophasique exprimé à partir des variables de mélange.

### 4.1.1 Thermodynamique générale

En thermodynamique classique, deux variables suffisent à représenter l'état thermodynamique d'un fluide monophasique. Cette opération est réalisée au moyen d'une équation d'état qui relie l'énergie interne, la densité et l'entropie. Plusieurs équations d'état, dont certaines sont présentées en partie suivante, sont proposées dans la littérature en fonction du type de fluide et du modèle étudié.

Le diagramme de la figure 4.1(a) représente la courbe de coexistence  $P^{sat}(T)$ <sup>1</sup> qui relie la pression à la température lors du changement de phase. La courbe de coexistence divise le plan  $(T, p)$  en deux régions où l'une ou l'autre des deux phases est à l'état stable. En tout point de la courbe, l'égalité des enthalpies libres est vérifiée et les deux phases coexistent. Sur la représentation  $(1/\rho, p)$  de la figure 4.1(b), le mélange où les deux phases coexistent est appelé la *zone de saturation*, c'est le lieu où les phases vapeur et liquide sont à l'équilibre. Cette région est encadrée par deux courbes connectées entre elles au point critique  $(1/\rho_c, p_c)$  qui correspond également au passage de l'isotherme  $T = T_c$ . A l'intérieur de la zone diphasique, chaque point est traversé par une isotherme qui, dans le plan  $(1/\rho, p)$  est représentée par une ligne horizontale. Ces courbes peuvent être obtenues expérimentalement [99] et correspondent à l'équilibre thermodynamique des températures, des pressions et des enthalpies libres des deux phases.

Néanmoins, il est difficile de dériver une unique équation d'état qui puisse décrire à la fois les phases pures et le mélange. Au lieu de cela, l'idée consiste à formuler pour chaque zone, de phase pure ou de mélange, une loi spécifique, de façon à ce que chaque état du fluide possède sa propre thermodynamique.

### 4.1.2 Fermeture thermodynamique dans les phases pures

*La fermeture thermodynamique dans les phases pures* consiste à relier la pression d'une phase pure aux autres quantités déjà calculées. La littérature propose plusieurs relations, les paragraphes

1. Par la suite, la pression de saturation  $P^{sat}$  sera plus couramment nommée pression de vaporisation  $P_{vap}$ .

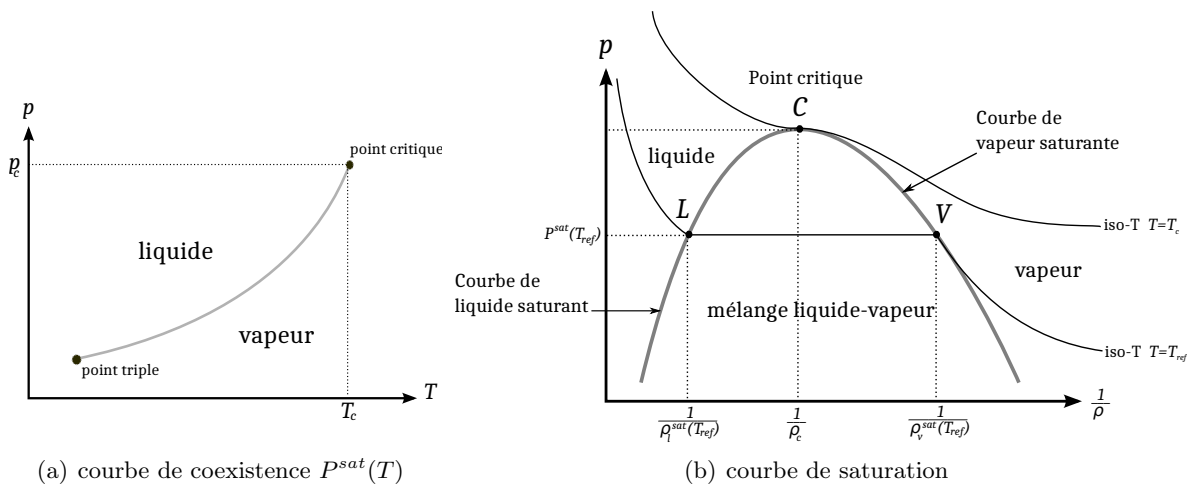


FIGURE 4.1 – Courbes de coexistence et de saturation

suivants sélectionnent les principales.

#### 4.1.2.1 Loi des gaz parfaits

La loi des gaz parfaits relie la pression à la température au sein d'un volume  $V_k$  :

$$p_k V_k = n R T_k$$

avec  $R = 8,314 \text{ J}/(\text{K}, \text{kg})$ , la constante des gaz parfaits. Cette loi s'écrit également :

$$p_k = \rho r T_k$$

avec  $r = R/M = C_{p_k} - C_{v_k}$ . La fermeture thermique détaillée en équation (4.2) permet d'exprimer la pression en fonction de la masse volumique et de l'énergie interne. En prenant une énergie interne de référence nulle il vient :

$$p_k(\rho_k, e_k) = (\gamma_k - 1)\rho_k e_k$$

où le coefficient  $\gamma_k = \frac{C_{p_k}}{C_{v_k}}$  représente le rapport des chaleurs spécifiques.

Cette loi n'est applicable que pour les faibles masse volumiques inférieures à  $30 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et permet de relier simplement l'énergie interne ou l'enthalpie à la température :

$$\begin{aligned} e_k &= C_{v_k} T_k \\ h_k &= C_{p_k} T_k \end{aligned}$$

#### 4.1.2.2 Loi de Van der Waals

La loi de Van der Waals relie la pression à la température et au volume spécifique  $v_k = 1/\rho_k$  :

$$p_k = \frac{r T_k}{v_k - b} - \frac{a}{v_k^2}$$

Le terme  $\frac{rT_k}{v_k - b}$  représente l'effet répulsif intermoléculaire tandis que le terme  $\frac{a}{v_k^2}$  reproduit l'attraction moléculaire responsable de la cohésion des liquides. Il est intéressant de remarquer que les effets attractifs augmentent en fonction de la masse volumique. Cette loi évolue ainsi des zones gazeuses, où les effets attractifs sont nuls, vers les zones liquides où ils sont présents. Cependant la loi d'état produit une vitesse du son négative dans la zone de transition de phase. L'hyperbolicité du système des équations de conservation est alors perdue [150].

#### 4.1.2.3 Equation d'état des gaz raides en phase pure

L'équation d'état des gaz raides de la phase  $k$  relie la pression  $p_k$  à deux variables thermodynamiques indépendantes, l'énergie interne  $e_k$  et la masse volumique  $\rho_k$  fournies par les équations de conservation :

$$p_k(\rho_k, e_k) = (\gamma_k - 1)\rho_k(e_k - q_k) - \gamma_k p_{k,\infty} \quad (4.1)$$

De cette équation découle l'expression de la température en phase pure :

$$T_k(\rho_k, e_k) = \frac{1}{C_{p_k}} \left( e_k + \frac{p_k}{\rho_k} - q_k \right) = \frac{1}{C_{p_k}} (h_k - q_k) \quad (4.2)$$

L'équation (4.1) reproduit les effets moléculaire attractifs et répulsifs propre à chaque phase pure. Le terme  $q_k$ , qui désigne l'énergie de formation, et les paramètres  $\gamma_k$  et  $p_{k,\infty}$  sont des coefficients constants liés aux propriétés thermodynamiques du fluide. La quantité  $(\gamma_k - 1)\rho_k(e_k - q_k)$  représente l'effet répulsif intermoléculaire et  $-\gamma_k p_{k,\infty}$  l'attraction moléculaire responsable de la cohésion de la matière. Les effets attractifs sont ici constants et la remarque faite pour l'équation d'état de Van der Waals, qui considère une augmentation de ces effets en fonction de la croissance de la masse volumique, n'est ici plus valide.

Par combinaison des équations (4.2) et (4.1), il vient :

$$\rho_k(p_k, T_k) = \frac{p_k + p_{\infty,k}}{(C_{p_k} - C_{v_k})T_k} \quad (4.3)$$

Les enthalpies  $h_k$ , entropies  $s_k$  et enthalpies libres  $g_k$  de chaque phase s'expriment également à partir d'équations d'état des gaz raides [150] :

$$h_k(T_k) = \gamma_k C_{v_k} T_k + q_k \quad (4.4)$$

$$s_k(p_k, T_k) = C_{v_k} \ln \left( \frac{T_k^{\gamma_k}}{(p_k + p_{k,\infty})^{\gamma_k - 1}} \right) + q'_k \quad (4.5)$$

$$g_k(p_k, T_k) = (\gamma_k C_{v_k} - q'_k) T_k - C_{v_k} T_k \ln \left( \frac{T_k^{\gamma_k}}{(p_k + p_{k,\infty})^{\gamma_k - 1}} \right) + q_k \quad (4.6)$$

où le terme  $q'_k$  désigne une entropie de référence.

L'écriture des équations d'état pour chaque fluide nécessite le calcul de cinq paramètres :  $\gamma_k$ ,  $p_{k,\infty}$ ,  $C_{v,k}$ ,  $q_k$  et  $q'_k$ . Ceux-ci sont déterminés à partir des valeurs à saturation de la pression  $P_{vap}(T_k)$ , des enthalpies  $h_{k,exp}(T_k)$ , des volumes spécifiques phasiques  $1/\rho_{k,exp}(T_k)$  et de la chaleur latente de vaporisation  $L_{v,exp}(T_k) = h_{v,exp}(T_k) - h_{l,exp}(T_k)$ . La méthode de calcul est présentée en partie Annexe C.1 . Le paramètre  $q_k$  est non nul uniquement lorsqu'il y a changement de phase.

### 4.1.3 Equation d'état thermique dans le mélange

L'équation d'état thermique adapte l'écriture de l'équation d'état des gaz raides en phase pure à la zone diphasique. Elle est obtenue via l'équilibre des température par phase :

$$T_m = T_l = \frac{h_l - q_l}{C_{p_l}} = T_v = \frac{h_v - q_v}{C_{p_v}} = \frac{h_m - q_m}{C_{p_m}}$$

L'équation d'état thermique exprime la température de mélange  $T_m$  en fonction de l'énergie interne de mélange  $e_m$ , la masse volumique  $\rho_m$  et le taux de vide  $\alpha$  :

$$T_m(\rho_m, e_m) = \frac{h_m(\alpha) - q_m(\alpha)}{C_{p_m}(\alpha)} = \frac{e_m(\alpha) + p_m(\alpha)/\rho_m(\alpha) - q_m(\alpha)}{C_{p_m}(\alpha)} \quad (4.7)$$

avec

$$\rho_m C_{p_m}(\alpha) = \alpha \rho_v C_{p_v} + (1 - \alpha) \rho_l C_{p_l} \quad (4.8)$$

Quelque soit la fermeture thermodynamique choisie par la suite pour déterminer la pression du mélange, le système d'étude utilise l'équation d'état des gaz raides (4.7) pour exprimer la température.

### 4.1.4 Fermeture thermodynamique dans le mélange

#### 4.1.4.1 Equation d'état de mélange des gaz raides

Une équation d'état des gaz raides au sein du mélange est obtenue via l'équilibre des pressions par analogie à celle utilisée en phase pure. Elle permet d'évaluer la pression de mélange  $p_m$  et la température de mélange  $T_m$  à partir des deux quantités thermodynamiques indépendantes : l'énergie interne de mélange  $e_m$  et la masse volumique de mélange  $\rho_m$  calculées à partir des équations de conservation du mélange [58]. Ces variables de mélange sont quantifiées à l'aide du taux de vide  $\alpha$ .

$$p_m(\rho_m, e_m, \alpha) = (\gamma_m(\alpha) - 1)\rho_m(e_m - q_m(\alpha)) - \gamma_m(\alpha)p_{m,\infty}(\alpha) \quad (4.9)$$

avec :

$$\frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} = \frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1 - \alpha}{\gamma_l - 1} \quad (4.10)$$

$$\rho_m q_m(\alpha) = \alpha \rho_v q_v + (1 - \alpha) \rho_l q_l \quad (4.11)$$

$$p_{m,\infty}(\alpha) = \frac{\gamma_m(\alpha) - 1}{\gamma_m(\alpha)} \left[ \alpha \frac{\gamma_v}{\gamma_v - 1} p_{v,\infty} + (1 - \alpha) \frac{\gamma_l}{\gamma_l - 1} p_{l,\infty} \right] \quad (4.12)$$

Les enthalpies  $h_m$ , entropies  $s_m$  et enthalpies libres  $g_m$  sont déterminées à l'aide d'un système d'équations d'état des gaz raides [150] adapté au mélange :

$$h_m(\alpha, T_m) = C_{p_m}(\alpha) T_m + q_m(\alpha) \quad (4.13)$$

$$s_m(\alpha, p_m, T_m) = C_{v_m}(\alpha) \ln \left( \frac{T_m^{\gamma_m}}{(p_m + p_{m,\infty}(\alpha))^{\gamma_m - 1}} \right) + q'_m(\alpha) \quad (4.14)$$

$$g_m(\alpha, p_m, T_m) = (\gamma_m(\alpha) C_{v_m}(\alpha) - q'_m(\alpha)) T_m(\alpha) - C_{v_m}(\alpha) T_m \ln \left( \frac{T_m^{\gamma_m}}{(p_m + p_{m,\infty}(\alpha))^{\gamma_m - 1}} \right) + q_m(\alpha) \quad (4.15)$$

avec

$$\rho_m C_{v_m}(\alpha) = \alpha \rho_v C_{v_v} + (1 - \alpha) \rho_l C_{v_l} \quad (4.16)$$

$$\rho_m q'_m(\alpha) = \alpha \rho_v q'_v + (1 - \alpha) \rho_l q'_l \quad (4.17)$$

#### 4.1.4.2 Loi d'état sinusoïdale

##### Présentation de la loi d'état

Historiquement cette loi a été proposée par Delannoy [41] pour la modélisation d'écoulements cavitants incompressibles. Les systèmes incompressibles calculent directement le champ de pression à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en itérant sur le champ des vitesses qui, pour satisfaire l'équation de continuité, est à divergence nulle. A l'origine, le raisonnement consistait à déduire la masse volumique à partir d'une loi barotrope  $\rho_m = f(p_m)$ .

L'approche usuelle d'un modèle de cavitation considère l'apparition du mélange diphasique en deçà d'une pression seuil  $P_{vap}$ . L'évolution de la masse volumique en fonction de la pression présente alors un point anguleux et une décroissance qui s'amorce seulement pour les pressions inférieures à la pression seuil. La démarche de Delannoy propose de relier la masse volumique du mélange à la pression à l'aide d'une fonction sinusoïdale en créant ainsi une métastabilité autour de la pression de vapeur saturante :

$$\rho_m(p_m) = \frac{\rho_l + \rho_v}{2} + \frac{\rho_l - \rho_v}{2} \sin \left( \frac{p_m - P_{vap}}{c_{min}^2} \frac{2}{\rho_l - \rho_v} \right) \quad (4.18)$$

##### Cas d'un écoulement compressible

Dans le cas d'un écoulement compressible la masse volumique est calculée à partir de l'équation de conservation de la masse. Cette fois-ci la loi d'état a pour objectif de déduire la pression de mélange à partir de la masse volumique :

$$p_m(\rho_m, T_m) = P_{vap}(T_m) + \left( \frac{\rho_l(T_m) - \rho_v(T_m)}{2} \right) c_{min}^2 \text{Arcsin} \left( 1 - 2 \frac{\rho_m - \rho_l(T_m)}{\rho_v(T_m) - \rho_l(T_m)} \right) \quad (4.19)$$

Par définition, le taux de vide s'exprime en fonction de la masse volumique du mélange et des masses volumiques par phase, de sorte que :

$$\alpha = \frac{\rho_m - \rho_l(T_m)}{\rho_v(T_m) - \rho_l(T_m)} \quad (4.20)$$

Dans le cadre de simulations utilisant des modèles avec transport taux de vide, la quantité  $\alpha$  n'est pas déduite directement de la masse volumique mais est calculée à partir d'une équation supplémentaire. La suite du raisonnement consiste à remplacer la variable  $\alpha$  dans l'équation (4.19) et de calculer la pression de mélange à partir du taux de vide :

$$p_m(\alpha, T_m) = P_{vap}(T_m) + \left( \frac{\rho_l(T_m) - \rho_v(T_m)}{2} \right) c_{min}^2 \text{Arcsin}(1 - 2\alpha) \quad (4.21)$$

La loi présente plusieurs caractéristiques.

- En mélange isotherme, la pression de vaporisation et les masses volumiques phasiques demeurent constantes. La pente minimale de la courbe est proportionnelle à  $-c_{min}^2$  et s'obtient pour un taux de vide  $\alpha = 0,5$ .
- La diminution de pression dans le mélange s'opère pour des pressions  $P_{vap} + \Delta p_m$  supérieures à la pression de vaporisation. Le delta des pressions se calcule pour un taux de vide nul :

$$\Delta p_m = \left( \frac{\rho_l - \rho_v}{2} \right) c_{min}^2 \frac{\pi}{2}$$

Cette formulation a pour objectif d'introduire artificiellement un phénomène de déséquilibre mécanique entre les phases.

La loi d'état sinusoïdale propose uniquement l'introduction d'une loi spécifique pour la pression de mélange. Le calcul de la température de mélange demeure similaire à la situation précédente et utilise une équation d'état de mélange des gaz raides (4.2) pour  $T_m$ .

### Raccord de la loi d'état avec la phase pure

Un coefficient correcteur  $A$  est ajouté à l'équation (4.21) tel que :

$$p_m(\alpha, T_m) = P_{vap}(T_m) + \left( \frac{\rho_l(T_m) - \rho_v(T_m)}{2} \right) c_{min}^2 \text{Arcsin}(A(1 - 2\alpha)) \quad (4.22)$$

La constante  $A$  est fixée à une valeur proche de 1 pour assurer le raccord avec une vitesse du son finie à proximité des phases pures.

Les différentes expressions de la pression en fonction de l'équation d'état employées pour fermer le modèle sont récapitulées au sein du tableau 4.1. Une comparaison des hypothèses thermodynamiques ainsi que des caractéristiques du modèle est également proposée par l'intermédiaire du tableau 4.2.

#### 4.1.5 Réflexion sur l'utilisation d'une équation d'état

La fermeture thermodynamique du système d'équation présentée ici, s'établit soit à partir d'un calcul de la pression au moyen des grandeurs thermodynamiques issues des équations de conservation (dans le cas d'un modèle à 4-équations avec équation d'état de mélange des gaz raides) ; soit à partir d'une formule empirique qui relie la pression aux valeurs du taux de vide (dans le cas d'un modèle à 4-équations avec loi d'état sinusoïdale) ou à la masse volumique du mélange (dans le cas d'un modèle à 3-équations sans équation de transport de taux de vide). La formulation du modèle de mélange des gaz raides est mise en place analytiquement sous une hypothèse d'équilibre des pressions et températures phasiques. Le modèle de cavitation est activé uniquement pour des pressions inférieures à la pression de vaporisation et cette équation d'état ne prend, par exemple, pas en compte des phénomènes d'avance à la cavitation. Dans le cas d'une loi d'état sinusoïdale, la pression est reliée de façon quasi linéaire au taux de vide ou à la masse volumique du mélange. La fonction sinus intervient, en effet, uniquement dans l'optique de

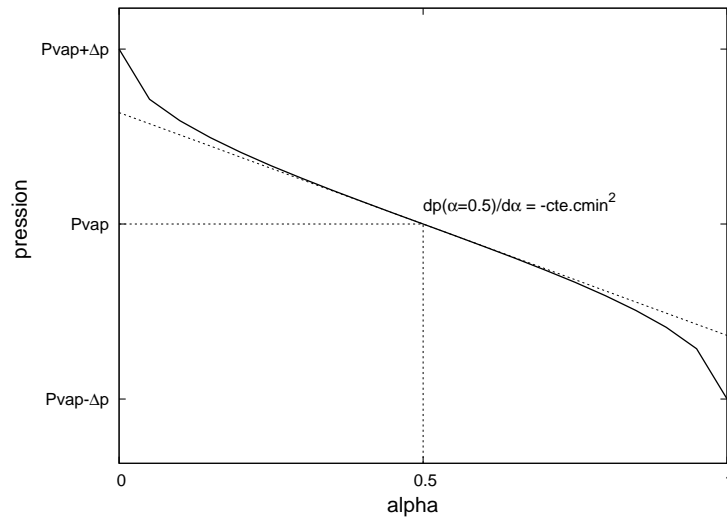


FIGURE 4.2 – Illustration de la loi d'état sinusoïdale. La pente minimale est obtenue à  $\alpha = 0,5$  et est proportionnelle à  $-c_{min}^2$

lisser les discontinuités aux frontières du changement de phase et permet de prendre en compte des effets d'avance à la cavitation. Quoi qu'il en soit, l'ensemble des équations d'état utilisées en mélange homogène, pour des écoulements isothermes, relie la pression à la masse volumique du mélange (ou au taux de vide) par une relation bijective. Les techniques de mesure récentes utilisées par Maurice [108] pour l'étude expérimentale d'un écoulement de marche descendante cavitant ont permis de confronter ses résultats à une modélisation barotrope de l'écoulement. Il s'intéresse, pour cela, au cas particulier d'une cavitation très développée pour laquelle le fluide atteint des taux de vapeur de l'ordre de 50%. Dans les trois zones de vaporisation, de transport et de condensation de l'écoulement, il observe qu'à une même densité de mélange, moyennée en temps, peuvent correspondre plusieurs valeurs de pressions moyennées en temps, toutes inférieures à la pression de vaporisation. Son analyse questionne ainsi l'hypothèse d'une évolution barotrope du fluide. Il convient néanmoins de modérer l'interprétation de ces résultats expérimentaux. Premièrement les mesures de masse volumique sont intégrées sur la largeur du canal d'écoulement ; les moyens techniques permettent seulement de comparer une densité moyennée en espace avec des valeurs de pression locales. Deuxièmement, les valeurs de pression moyennée en temps ne sont pas mesurées directement mais sont déduites par intégration de l'équation de conservation de quantité mouvement.

Les essais menés par Ganesh sur une géométrie de Venturi [49] donnent un autre aperçu de la corrélation entre pression et taux de vide en conditions cavitantes. En comparant les fréquences principales des oscillations de pression et de taux de vide, il met en avant les valeurs comparables des transformées de Fourier issues des deux signaux pour des niveaux de cavitation suffisamment développés. Dès lors, même si ces observations ne renseignent pas davantage sur le comportement barotrope ou non de l'écoulement, celles-ci témoignent d'un lien entre les variations de pression



et du taux de vapeur au sein l'écoulement.

## 4.2 Expression de la vitesse du son

La vitesse du son représente les petites variations de masse volumique, de pressions ou de vitesses qui se propagent à l'intérieur d'un fluide à la célérité d'une onde acoustique. Elle caractérise ainsi la propagation des perturbations adiabatiques et réversibles qui se déplacent dans le fluide au repos. Elle s'exprime en fonction de la pression  $p$  et de la masse volumique  $\rho$  du milieu considéré à entropie  $s$  constante :

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

L'étude qui suit se place dans le cadre d'écoulements non visqueux régis par un système d'équations hyperboliques.

### 4.2.1 Vitesse du son dans le mélange

La vitesse du son dans la zone diphasique évolue entre deux bornes. La borne supérieure qui représente la célérité d'une onde acoustique dans un milieu sans transfert de masse ou de chaleur (Wallis [185]) tandis que la borne inférieure définit la vitesse du son dans un mélange à l'équilibre thermodynamique :

$$c_{eq} \leq c_m < c_{Wallis} \quad (4.23)$$

Le calcul de la vitesse du son dans le mélange utilise l'expression de la pression de mélange  $p_m$  et dépend donc de la fermeture thermodynamique employée. Cette section présente les formulations de la célérité en fonction des modèles de cavitation et différencie les expressions de la vitesse du son avec ou sans effets thermodynamiques.

### 4.2.2 Vitesse du son sans transfert de masse

La vitesse du son de Wallis est calculée en faisant l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique local pour le mélange et en négligeant les échanges massiques et thermiques entre phase. Elle s'exprime comme une moyenne harmonique pondérée de la vitesse du son dans chaque phase :

$$\frac{1}{\rho_m c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l c_l^2} \quad (4.24)$$

Le modèle utilise la formulation (4.24) dans les zones d'écoulement où la pression est supérieure à la pression de vaporisation. Ainsi :

$$c = c_{Wallis} \quad \text{si } p_m > P_{vap} \quad (4.25)$$

Au sein de l'expression (4.24), la masse volumique du liquide est toujours prise à saturation. Néanmoins, il est possible de relaxer thermodynamiquement la masse volumique de la phase vapeur calculée selon l'équation d'état (4.3) des gaz raides. Deux approches ont été étudiées sur le calcul de la vitesse du son de Wallis :

- vitesse du son à saturation,

$$\frac{1}{\rho_m c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v^{sat}(T_{ref})c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l^{sat}(T_{ref})c_l^2} \quad (4.26)$$

- vitesse du son relaxée,

$$\frac{1}{\rho_m c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v(p_m, T_m)c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l^{sat}(T_{ref})c_l^2} \quad (4.27)$$

Une modification de la vitesse du son dans les zones de pression élevée engendre des différences de la vitesse de propagation des ondes dans les zones à faible de taux de vide. Une étude de l'influence de chaque formulation est proposée au sein de ce manuscrit.

### 4.2.3 Vitesse du son avec transfert de masse

#### 4.2.3.1 Expression générale

Dans les zones de faible pression :  $p_m < P_{vap}$ , le phénomène de vaporisation se met en place et le calcul de la vitesse du son est reconsidéré. La démonstration de la partie Annexe C.3.1 propose d'exprimer celle-ci en fonction des enthalpies et energies internes de mélange selon la formulation :

$$c^2 = c_m^2 = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{s_m} = \frac{h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}} \quad \text{si } p_m < P_{vap} \quad (4.28)$$

où les différents termes peuvent être développés comme suit :

$$h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} = \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} - \rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} &= \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} \\ &+ \frac{(\rho_v h_v - \rho_l h_l)}{\rho_l - \rho_v} \left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m, \alpha} \left[ \alpha \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial T_m} \right)_{p_m} + (1 - \alpha) \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial T_m} \right)_{p_m} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

#### 4.2.3.2 Vitesse du son à l'équilibre

Lorsque le système incorpore des échanges massiques entre les phases, la vitesse du son décroît jusqu'à atteindre la vitesse du son à l'équilibre thermodynamique [127]. La célérité est évaluée en supposant que le système est localement à l'équilibre thermodynamique complet : égalité de pression, température et de l'enthalpie libre entre les phases. Un système supposé à l'équilibre introduit plusieurs relations.

- L'égalité des pressions, températures et enthalpies libres de chaque phase s'écrit :

$$p_v = p_l = p_m, \quad T_v = T_l = T_m \quad \text{et} \quad g_v = g_l$$

- A l'équilibre thermodynamique, la pression et la température peuvent être liées, avec pour exemple la relation logarithmique de la loi de Dupré. Ces deux quantités ne varient pas en fonction de la masse volumique :

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right)_{T_m} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T_m}{\partial \rho_m}\right)_{p_m} = 0$$

- La pression du mélange est une pression à l'équilibre qui est égale à la pression de vaporisation du liquide :  $p_m = P_{eq} = P_{vap}$ . Par conséquent, les variations de pression en fonction de la température sont évaluées à partir de celle de la pression de vaporisation :

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial T_m}\right)_{\rho_m} \approx \frac{dP_{vap}}{dT_m}$$

Cette relation permet d'en déduire les variations de température par rapport à la pression :

$$\left(\frac{\partial T_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\frac{dP_{vap}}{dT_m}}$$

- La pression à l'équilibre permet d'estimer des variations de masse volumique phasiques par phases égales à celles qui s'opèrent à la pression de vaporisation :

$$\left(\frac{\partial \rho_k}{\partial T_m}\right)_{p_m} \approx \left(\frac{d\rho_k}{dT_m}\right)_{P_{vap}}$$

A partir des relations précédentes, les formulations du numérateur (4.29) et du dénominateur (4.30) de la vitesse du son peuvent être simplifiées :

$$h_m - \left(\frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m}\right)_{p_m} = \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m} &= \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} \\ &+ \frac{(\rho_v h_v - \rho_l h_l)}{\rho_l - \rho_v} \frac{1}{\frac{dP_{vap}}{dT_m}} \left[ \alpha \left(\frac{d\rho_v}{dT_m}\right)_{P_{vap}} + (1 - \alpha) \left(\frac{d\rho_l}{dT_m}\right)_{P_{vap}} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Au sein de ces expressions, les quantités phasiques  $\rho_k$  et  $h_k$  sont évaluées à partir des équations d'état (4.3) et (4.4) en prenant les valeurs de pression de vaporisation et de température de référence de sorte que :

$$\rho_k(p_m, T_m) \approx \rho_k(P_{vap}, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref}) = \frac{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty, k}(T_{ref})}{(C_{p_k} - C_{v_k})T_{ref}} \quad (4.33)$$

$$h_k(T_m) \approx h_k(P_{vap}, T_m) = h_k^{sat}(T_{ref}) = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k \quad (4.34)$$

D'autre part, l'égalité des enthalpies libres permet d'exprimer les variations de pression autour d'une température de référence de la façon suivante (voir démonstration en Annexe C.3.2) :

$$\frac{dP_{vap}^{eq}(T_{ref})}{dT_m} = \frac{\frac{C}{T_{ref}} - \frac{B}{T_{ref}^2}}{1 - \frac{D}{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty,v}} - \frac{D}{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty,l}}} \quad (4.35)$$

avec  $B$ ,  $C$  et  $D$  des constantes détaillées en partie annexe.

Enfin les variations de masse volumique phasique sont évaluées à partir des tables thermodynamiques par linéarisation autour d'une température de référence :

$$\left( \frac{d\rho_k}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \approx \left( \frac{\rho_k(T_{ref} + \Delta T_m) - \rho_k(T_{ref} - \Delta T_m)}{2\Delta T_m} \right)_{P_{vap}} \quad (4.36)$$

La vitesse du son pour un mélange à l'équilibre thermodynamique s'exprime finalement :

$$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}}{\frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} + \frac{(\rho_v^{sat} h_v - \rho_l^{sat} h_l)}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \frac{1}{\frac{dP_{vap}^{eq}}{dT_m}}} \left[ \alpha \left( \frac{d\rho_v}{dT_m} \right)_{P_{vap}} + (1 - \alpha) \left( \frac{d\rho_l}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \right] \quad (4.37)$$

#### 4.2.3.3 Modélisation de la vitesse du son avec effets thermodynamiques

La modélisation qui fait suite prend en compte les effets thermodynamiques engendrés par la réaction endothermique de la cavitation. La transformation du liquide en vapeur consomme de l'énergie au milieu environnant et engendre un refroidissement local. Dans le cas de l'eau froide, ce refroidissement est très faible et influence peu les grandeurs thermodynamiques du fluide. En revanche, pour les fluides thermosensibles, l'apport de chaleur de la part du liquide est plus important et les grandeurs thermodynamiques du fluide évoluent de manière significative par rapport aux variations de température. Pour une température locale plus faible, la pression de vaporisation diminue et le développement de la cavitation est atténué, ce qu'on appelle le retard thermique à la cavitation. Les formulations de la vitesse du son proposées dans cette partie incorporent les variations thermodynamiques et s'appliquent au cas de fluides thermosensibles.

##### a/ Modèle pour une équation d'état de mélange des gaz raides

La vitesse du son est ici formulée en prenant en compte les variations thermodynamique du fluide pour un système fermé par une équation d'état de mélange des gaz raides. La modélisation reprend les formulations (4.31) et (4.32) de l'expression de la vitesse du son en paragraphe 4.2.3.2. En revanche, les conditions dans le mélange diffèrent de celles d'un système à l'équilibre thermodynamique complet : un déséquilibre sur les enthalpies libres est ajouté. Par conséquent, la relation (4.35) du calcul du coefficient  $\frac{dP_{vap}^{eq}}{dT_m}$  n'est plus valide. D'autre part, contrairement au cas d'équilibre pour lequel le mélange est isotherme à la température constante  $T_{ref}$ , les masses volumiques et enthalpies phasiques évoluent désormais en fonction de la température du mélange

$T_m$ . Leurs calculs diffèrent ainsi du cas à l'équilibre qui utilisaient les relations (4.34) et (4.36).

Les considérations précédentes modifient l'expression de la vitesse du son dont la méthode de calcul est présentée ci-après. L'enthalpie de la phase  $k$  s'exprime en fonction de la température à partir de l'équation d'état (4.4) :

$$h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_m + q_k$$

Les masses volumiques phasiques sont supposées égales à leur valeur à saturation. Elles évoluent linéairement en fonction de la température de sorte que :

$$\rho_k(p_m, T_m) \approx \rho_k(P_{vap}, T_m) = \rho_k^{sat}(T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref}) + \left( \frac{d\rho_k}{dT_m} \right)_{P_{vap}} (T_m - T_{ref}) \quad (4.38)$$

avec

$$\left( \frac{d\rho_k}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \approx \left( \frac{\rho_k(T_{ref} + \Delta T_m) - \rho_k(T_{ref} - \Delta T_m)}{2\Delta T_m} \right)_{P_{vap}}$$

Les variations de la pression de vaporisation sont modélisées de la même manière :

$$P_{vap}(T_m) = P_{vap}(T_{ref}) + \frac{dP_{vap}}{dT_m}(T_m - T_{ref}) \quad (4.39)$$

en estimant le gradient par linéarisation autour d'une température de référence :

$$\frac{dP_{vap}}{dT_m} \approx \left( \frac{P_{vap}(T_{ref} + \Delta T_m) - P_{vap}(T_{ref} - \Delta T_m)}{2\Delta T_m} \right) \quad (4.40)$$

La vitesse du son s'exprime finalement :

$$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)}}{\frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} + \frac{(\rho_v h_v - \rho_l h_l)}{\rho_l - \rho_v} \frac{1}{\frac{dP_{vap}}{dT_m}} \left[ \alpha \left( \frac{d\rho_v}{dT_m} \right)_{P_{vap}} + (1 - \alpha) \left( \frac{d\rho_l}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \right]} \quad (4.41)$$

### b/ Modèle pour une loi d'état sinusoïdale

Le modèle sinusoïdal a pour objectif d'introduire des petits déséquilibres de pression lors du changement de phase. L'enjeu consiste à ne plus considérer le changement de phase comme une réaction isobare à la pression de vaporisation  $P_{vap}$  mais comme un mécanisme au cours duquel la pression dans le mélange évolue en fonction du taux de vide créé. L'objectif ici est de proposer une vitesse du son formulée à partir d'un système fermé par une loi d'état sinusoïdale et qui prend en compte les variations thermodynamiques au sein du mélange. La mise en place d'un tel modèle repose sur plusieurs considérations.

- Pour une température donnée, le changement de phase introduit des variations de pression en fonction de la fraction volumique de vapeur créée.

- Les masses volumiques phasiques sont supposées constantes et égales à leur valeur à saturation pour la température de référence :

$$\rho_k(p_m, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref})$$

Cette condition relie directement le taux de vide à la masse volumique du mélange :

$$\alpha = \frac{\rho_m - \rho_l^{sat}}{\rho_v^{sat} - \rho_l^{sat}} \quad (4.42)$$

- Les variations de pression dans le mélange sont supposées égales à celles de la pression de vaporisation :

$$\left( \frac{\partial p_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{dP_{vap}}{dT_m}$$

Cette relation permet d'en déduire les variations de température par rapport à la pression. Celles-ci sont calculées comme l'inverse des variations de pression par rapport à la température :

$$\left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\frac{dP_{vap}}{dT_m}}$$

- Les enthalpies de chacune des phases sont constantes et égales à leur valeur pour la température de référence  $T_{ref}$  :

$$h_k(T_m) \approx h_k(T_{ref}) = h_k^{ref} = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$$

En suivant la démonstration en Annexe C.3.4, les hypothèses précédentes modifient les expressions du numérateur (4.29) et dénominateur (4.30) dans la formulation de la vitesse du son (4.28) :

$$h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} = \frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} \frac{dP_{vap}}{dT_m} + \rho_m C_{p_m} \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}} \quad (4.43)$$

$$\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} = \rho_m C_{p_m} - \frac{dP_{vap}}{dT_m} \quad (4.44)$$

Les calculs des termes  $\rho_m C_{p_m}$ , et  $\frac{dP_{vap}}{dT_m}$  utilisent respectivement les formulations (4.8) et (4.40). La vitesse du son s'exprime finalement :

$$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} \frac{dP_{vap}}{dT_m} + \rho_m C_{p_m} \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}}{\rho_m C_{p_m} - \frac{dP_{vap}}{dT_m}} \quad (4.45)$$

#### 4.2.3.4 Modélisation de la vitesse du son sans effets thermodynamiques

Les fluides, tels que l'eau froide, possèdent une sensibilité faible par rapport aux variations de température. Le refroidissement lié à la cavitation est ainsi moins prononcé et n'affecte quasiment pas les grandeurs thermodynamiques du fluide. La modélisation présentée dans cette section considère ainsi que les enthalpies phasiques  $h_k$  et la masse volumique  $\rho_l$  du liquide sont constantes et déterminées à partir d'une température de référence  $T_{ref}$ . Les variations de la pression de vaporisation par rapport à la température sont également supposées faible. Un écart de température par rapport à l'état de saturation à la température de référence peut néanmoins être introduit par l'intermédiaire d'une masse volumique de la phase vapeur calculée avec l'équation d'état des gaz raides (4.3).

##### a/ Modèle pour une équation d'état de mélange des gaz raides

La modélisation qui suit se base sur une écriture réduite de la vitesse du son (4.41) en proposant plusieurs simplifications.

- La masse volumique de la phase liquide est constante et égale à sa valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  :

$$\rho_l(p_m, T_m) \approx \rho_l^{sat}(T_{ref}) \quad \text{soit} \quad \left( \frac{d\rho_l}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \approx 0$$

- La masse volumique de la phase vapeur suit l'équation d'état des gaz raides (4.3) :

$$\rho_v(p_m, T_m) = \frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v_v}T_m}$$

- La pression de vaporisation est constante et égale à sa valeur pour la température de référence  $T_{ref}$  :

$$P_{vap}(T_m) \approx P_{vap}(T_{ref}) \quad \text{soit} \quad \frac{dP_{vap}}{dT_m} \approx 0$$

- Les enthalpies de chacune des phases sont constantes et égales à sa valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  :

$$h_k(T_m) \approx h_k(T_{ref}) = h_k^{ref} = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$$

- Le dénominateur (4.30) de l'expression générale de la vitesse du son (4.28) d'après une estimation des différents coefficients calculés à leur valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  (voir démonstration en Annexe C.3.3) :

$$\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} \quad (4.46)$$

Les considérations précédentes permettent d'aboutir à une expression réduite de la vitesse du son :

$$c_m^2 = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v)} \quad (4.47)$$

Cette expression introduit une vitesse du son avec couplage faible au champ thermique via la masse volumique de la phase vapeur. En pratique, une formulation simplifiée est utilisée pour améliorer la convergence des calculs. Elle considère la masse volumique de la phase vapeur constante et égale à sa valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  :  $\rho_v(p_m, T_m) \approx \rho_v^{sat}(T_{ref})$ . Des simulations avec une vitesse du son couplée au champ thermique ont été testées pour le cas d'une loi d'état sinusoidale dont la formulation est présentée dans le paragraphe suivant.

### b/ Modèle pour une loi d'état sinusoidale

Une même expression réduite de la vitesse du son est également proposée pour un système fermé par une loi d'état sinusoidale. Elle s'applique aux fluides non thermostensibles et repose sur plusieurs simplifications.

- La masse volumique de la phase liquide est constante et égale à sa valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  :

$$\rho_l(p_m, T_m) \approx \rho_l^{sat}(T_{ref}) \quad \text{soit} \quad \left( \frac{d\rho_l}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \approx 0$$

- La masse volumique de la phase vapeur suit l'équation d'état des gaz raides (4.3) :

$$\rho_v(p_m, T_m) = \frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v_v}T_m}$$

- Les variations de pression de vaporisation par rapport à la température sont négligées de la capacité thermique du mélange (voir démonstration Annexe C.3.4) :

$$\frac{dP_{vap}}{dT_m} \ll \rho_m C_{p_m}$$

- Les enthalpies de chacune des phases sont constantes et égales à leur valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  :

$$h_k(T_m) \approx h_k(T_{ref}) = h_k^{ref} = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$$

- Le dénominateur (4.30) de l'expression générale de la vitesse du son (4.28) d'après une estimation des différents coefficients calculés à leur valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  (voir démonstration en Annexe C.3.3) :

$$\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} \quad (4.48)$$

Ces considérations permettent de modéliser une vitesse du son avec couplage faible au champ thermique :

$$c_m^2 = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v)} + \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}} \quad (4.49)$$

Une expression simplifiée de cette vitesse du son a été envisagée en considérant la masse volumique de la phase vapeur constante et égale à sa valeur à saturation pour la température de référence  $T_{ref}$  :  $\rho_v(p_m, T_m) \approx \rho_v^{sat}(T_{ref})$ . En pratique cette simplification a été retenue pour la majorité des calculs. Néanmoins une comparaison entre les résultats obtenus avec une vitesse du son relaxée ou une vitesse du son à saturation est proposée en partie 9.5.1.



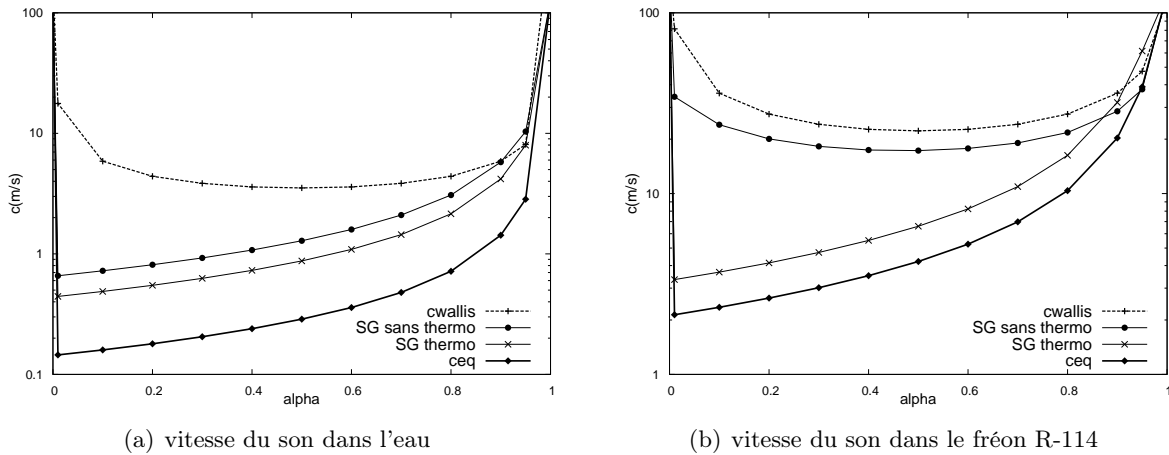


FIGURE 4.3 – Vitesses du son pour une équation d'état de mélange des gaz raides en conditions isothermes et avec effets thermodynamiques : (a) courbes d'évolution dans l'eau ; (b) courbes d'évolution dans le fréon-R114.

#### 4.2.4 Etude du comportement de la vitesse du son

Cette partie a pour objectif de représenter les évolutions des différentes formulations de la vitesse du son en fonction du taux de vide. Les vitesses du son avec transferts de masse sont encadrées en borne supérieure par la vitesse du son de Wallis et en borne inférieure par la vitesse du son d'un mélange à l'équilibre. Pour chaque loi d'état les modèles avec et sans effets thermodynamiques sont comparés.

##### a/ Modèle pour une équation d'état de mélange des gaz raides

Les vitesses du son dans la zone diphasique sont représentées en figure 4.3 pour l'eau froide et pour un fluide thermosensible, le fréon R-114. Pour l'eau comme pour le fréon, avec un modèle sans effets thermodynamiques, le comportement de la vitesse du son est semblable à celui obtenu lorsque le système est à l'équilibre : la vitesse est minimale à faible taux de vide, puis croît à mesure que la concentration de vapeur augmente. La prise en compte des effets thermodynamiques pour le cas de l'eau engendre simplement une translation de la vitesse du son vers des valeurs plus élevées. En revanche pour un fluide thermosensible, lorsque la formulation prend en compte les variations de température, la vitesse du son présente une évolution parabolique et un seuil minimal situé à  $\alpha = 0,5$ .

##### b/ Modèle pour une loi d'état sinusoïdale

Les vitesses du son dans le mélange sont proposées pour chaque fluide en figure 4.4. En eau froide, les formulations avec ou sans effets thermodynamiques n'influencent quasiment pas le calcul de la vitesse du son pour les faibles valeurs du taux de vide. En revanche, lorsque le mélange évolue vers des compositions de vapeur pure le comportement de la vitesse du son sans effets thermodynamique s'oriente vers la célérité de Wallis tandis que le modèle avec effets

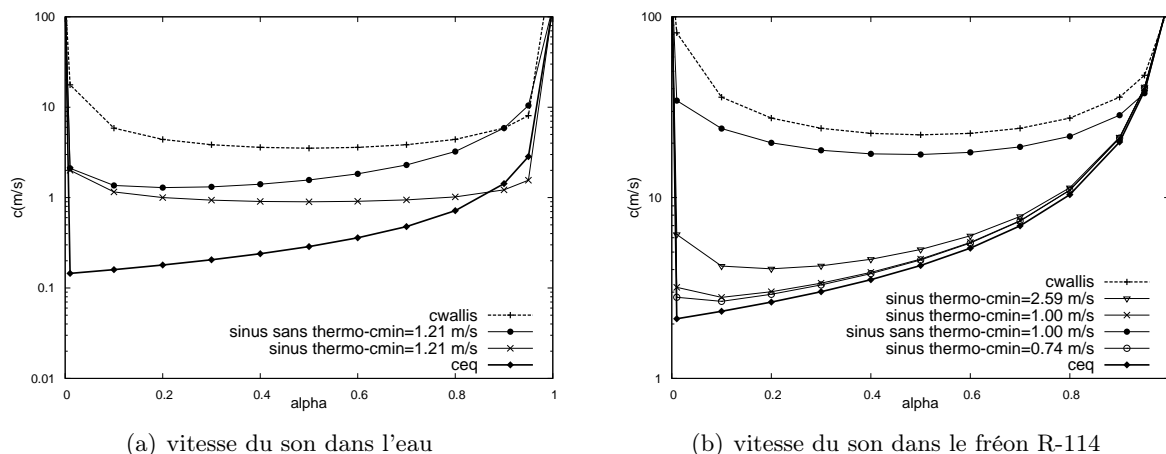


FIGURE 4.4 – Vitesses du son avec loi d'état sinusoïdale en conditions isothermes et avec effets thermodynamiques : (a) courbes d'évolution dans l'eau ; (b) courbes d'évolution dans le fréon R114. Résultats à  $t = 3,2 \text{ ms}$  et  $|u| = 2 \text{ m/s}$   $\alpha_0 = 10^{-2}$

thermodynamiques prévoit des valeurs proches de la vitesse du son pour un mélange à l'équilibre thermodynamique.

Les courbes tracées pour le fluide thermosensible, le fréon R114 démontrent que le paramètre  $c_{min}$  influence le calcul de la vitesse du son avec effets thermodynamiques seulement pour les faibles valeurs de taux de vide. Dans ce domaine, la vitesse du son augmente avec la valeur de  $c_{min}$ . Lorsque le mélange évolue vers des compositions de vapeurs plus importantes, la sensibilité du modèle diminue et le comportement de la vitesse du son s'apparente au calcul de la vitesse du son pour un mélange à l'équilibre thermodynamique. Les courbes révèlent également la différence avec un modèle sans effets thermodynamiques pour un fluide thermosensible. Un tel modèle prévoit des valeurs de la vitesse du son plus élevées et un comportement comparable aux célérités de Wallis.

Chaque expression de la vitesse du son formulée en fonction du modèle d'étude est résumée dans le tableau 4.1.

#### 4.2.5 Raccord entre vitesse du son de la phase pure et du mélange

En phases pures le calcul de la vitesse du son repose sur une équation d'état des gaz raides. Dans le mélange, la vitesse du son s'exprime soit à partir d'une équation d'état de mélange des gaz raides soit une loi d'état sinusoïdale. Le second cas nécessite des conditions de raccord entre la zone diphasique et la zone de liquide pure. La continuité avec la phase de vapeur pure n'est pas traitée puisque cet état n'est jamais atteint par les simulations.

#### Conditions de raccord

Le raccord s'établit en considérant que le mélange diphasique atteint l'état liquide. Par simplification les quantités phasiques sont prises à leurs valeurs saturantes et les effets thermody-

namiques ne sont plus pris en compte ; autrement dit la pression de vaporisation ne dépend plus de la température mais est fixée par sa valeur à température de référence. L'ensemble de ces conditions impliquent les simplifications qui suivent.

- Le taux de vide  $\alpha$  est nul,  $\alpha = 0$
- La pression de vaporisation est approchée par :  $P_{vap}(T_m) \approx P_{vap}(T_{ref})$
- La pression de mélange  $P_{vap} + \Delta p_m$  de l'équation (4.21) est égale à la pression  $p_l$  du liquide (4.1)
- La vitesse du son au sein du mélange  $c_m$  exprimée par l'équation (4.45) est égale à la vitesse du son  $c_l$  du liquide.

Les considérations précédentes permettent de relier la loi d'état sinusoidale du mélange à l'équation d'état des gaz raides pour le liquide. Cette démarche conduit à un système à deux équations et deux inconnues qui permet de déterminer  $A$  et  $c_{min}$  :

$$\frac{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}}{2} c_{min}^2 \text{Arcsin } A = \rho_l^{sat} (\gamma_l - 1) C_{v_l} T_{ref} - p_{\infty, l} - P_{vap}(T_{ref}) \quad (4.50)$$

$$\frac{A c_{min}^2}{\sqrt{1 - A^2}} = c_l^2 = (\gamma_l - 1) C_{p_l} T_{ref} \quad (4.51)$$

### Conditions aux limites de la célérité minimale

Au sein du mélange, le champ de pression s'étend sur une plage de largeur  $2\Delta p_m$  centrée sur la pression de vaporisation  $P_{vap}$ . La quantité  $\Delta p_m$  doit être inférieure à la pression de vaporisation afin que la loi sinusoidale ne présente pas de pressions négatives sur sa borne inférieure. Cette condition impose une valeur maximale de  $c_{min}$  lors du paramétrage :

$$c_{min} < \sqrt{\left( \frac{2P_{vap}}{\text{Arcsin}(A) \cdot (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} \right)} \quad (4.52)$$

Soit en eau froide à  $T_{ref} = 293 \text{ K}$  en prenant  $P_{vap}(T_{ref}) = 2340 \text{ Pa}$  et les valeurs à saturation des masse volumiques  $\rho_l^{sat}(T_{ref}) = 998,16 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_v^{sat}(T_{ref}) = 0,0173 \text{ kg.m}^{-3}$  :

$$c_{min} < 1,73 \text{ m.s}^{-1}$$

## 4.3 Equation de transport du taux de vide

### 4.3.1 Présentation

L'écriture d'un modèle homogène à 3-équations tel qu'il est présenté en partie 1.2.4.3 simplifie la modélisation de l'écoulement diphasique. Au sein du mélange, les hypothèses établies en partie 2.3.4 supposent l'égalité des vitesses de chaque phase, l'équilibre mécanique et thermique. Ces considérations réduisent la capacité des simulations à prendre en compte les déséquilibres entre phases pourtant largement observés en cavitation. La modélisation de certains déséquilibres peut être introduite artificiellement par les équations d'état utilisées pour fermer le système d'équation. La formulation sinusoidale présentée en partie 4.1.4.2 a par exemple pour objectif de reproduire

une diminution progressive de la pression de mélange à mesure que le taux de vapeur s'accroît. Le système à 4-équations présenté en partie 1.2.4.2 ajoute une équation qui calcule directement la fraction volumique de vapeur du mélange. Contrairement au modèle précédent la quantité de vapeur n'est plus déduite analytiquement à partir de la masse volumique mais est considérée comme une quantité convectée par l'écoulement et dont les phénomènes de production et de destruction sont modélisés par un terme source. Cette équation supplémentaire permet de relaxer thermodynamiquement le système par rapport à un modèle à 3-équations.

Une étude comparative a été menée par Goncalves [53] entre les modèles à 5- 4- et 3-équations exposés en partie 1.2.4 pour la simulation du phénomène de cavitation au sein d'un tube à détente. Les solutions obtenues pour les modèles avec équation de transport de taux de vide sont superposables. En revanche, le modèle à 3-équations sous estime la fraction volumique de vapeur dans les zones de détente et diverge dès lors que la vitesse des ondes de détentes augmente.

Les paragraphes suivants proposent dans un premier temps un état de l'art des modèles de cavitation utilisant un système d'équation avec transport de taux de vide comparable aux travaux de la thèse. Dans un second temps, la formulation de l'équation de transport est exposée et la présentation s'attarde sur l'expression du terme source relatif à cette équation. La plupart des modèles quantifie le débit massique à partir de la différence entre la valeur de la pression de mélange et la pression de vaporisation. Le modèle présenté dans cette thèse considère que le transfert de masse est piloté par les mécanismes de dilatation, qui favorisent l'évaporation, et de compression qui engendrent un retour à l'état liquide. Pour cela le terme de transfert massique est formulé comme le produit de la divergence du champ de vitesse et d'un coefficient dont l'expression dépend de la vitesse du son dans le mélange.

## 4.3.2 Débit massique entre phases

### 4.3.2.1 Expression issue de la théorie de la cinétique moléculaire

L'expression du débit massique à l'interface peut s'exprimer à partir de la théorie cinétique des gaz. Pour cela, la fonction de distribution pour la vitesse moléculaire selon Maxwell s'exprime :

$$f = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \right)$$

avec  $m$ , la masse d'une particule,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température et  $c_d$  la célérité dans la direction  $d$ . En supposant que l'interface se comporte comme un plan mathématique sans influence sur la fonction de distribution, il est possible d'évaluer le débit massique maximal par unité de surface de liquide :

$$\dot{m}_l = \sqrt{\frac{1}{2\pi r_e}} \frac{p_l}{\sqrt{T_l}}$$

en prenant  $r_e$  la constante des gaz spécifiques de l'eau et en faisant l'hypothèse de gaz parfaits tels que  $p_l = nk_B T_l = \rho_l r_e T_l$  avec  $n$  le nombre de particule qui franchissent l'interface. Un même raisonnement peut être mené côté vapeur et le transfert massique total entre les deux phases peut donc s'exprimer :

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r_e}} \left( \frac{p_l}{\sqrt{T_l}} - \frac{p_v}{\sqrt{T_v}} \right)$$

Les expériences de Hertz [69] puis Knudsen [88] ont démontré que les taux d'évaporation mesurés sont inférieurs à ceux prédits par la théorie et ont permis d'introduire l'équation de Hertz-Knudsen [15] qui ajoute au système précédent des coefficients d'évaporation  $\sigma_e$  et de condensation  $\sigma_c$  relatifs à la perte d'énergie au passage de l'interface :

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r_e}} \left( \sigma_e \frac{P_{vap}(T_l)}{\sqrt{T_l}} - \sigma_c \frac{p_v(T_v)}{\sqrt{T_v}} \right)$$

où la pression du liquide est prise égale à la pression de vaporisation. Malgré les travaux de Young [189] qui démontrent que les coefficients  $\sigma_e$  et  $\sigma_c$  ne sont pas forcément égaux, la plupart des études les considèrent comme tels.

$$\dot{m} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2\pi r_e}} \left( \frac{P_{vap}(T_l)}{\sqrt{T_l}} - \frac{p_v(T_v)}{\sqrt{T_v}} \right) \quad (4.53)$$

Plusieurs études expérimentales [9, 107] ont eu pour objectif d'évaluer les coefficients d'évaporation et de condensation sans parvenir à des valeurs communes.

#### 4.3.2.2 Expression issue de l'équation de Rayleigh-Plesset

Le terme source est dans ce cas établi par analogie du grossissement d'une bulle isolée sphérique. La dynamique de la bulle répond à l'équation de Rayleigh-Plesset [21] :

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{R}{dt} \right)^2 = \frac{p(R) - p_\infty(t)}{\rho_l} - \frac{2\gamma}{\rho_l R} - 4 \frac{\mu}{\rho_l R} \frac{dR}{dt} \quad (4.54)$$

avec  $p = p_g + P_{vap}$  la pression totale de la bulle décomposée en une pression partielle des gaz dissous et la pression de vaporisation. Le terme  $\gamma$  désigne la tension superficielle de la bulle et  $\mu$  la viscosité dynamique du liquide.

Lorsque le gradient de pression est suffisamment grand et prédomine devant les autres termes et que les dérivées du second ordre peuvent être négligées, la croissance de la bulle est pilotée par l'expression simplifiée :

$$\left| \frac{dR}{dt} \right| \approx \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|P_{vap} - p_m|}{\rho_l}} \quad (4.55)$$

Cette approximation est ensuite employée par les modèles qui considèrent le transfert de masse proportionnel aux variations du rayon d'une bulle :

$$\dot{m} \propto \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|P_{vap} - p_m|}{\rho_l}} \quad (4.56)$$

#### 4.3.2.3 Expression issue de l'enthalpie libre

Saurel et al. [150] utilisent le second principe de la thermodynamique de création d'entropie de mélange pour exprimer le terme de transfert de masse. A partir des équations de variation d'entropie de chaque phase, les auteurs aboutissent à l'inégalité :

$$\frac{H(T_l - T_v)^2}{\rho_m} + (g_l - g_v) T_I \dot{m} \geq 0$$

avec  $H$  un coefficient d'échange de chaleur,  $T_k$  et  $g_k$  les températures et enthalpies libre par phase,  $T_I$  une température d'interface exprimée en fonction des températures de chaque phase. Pour que l'inégalité soit toujours vérifiée le débit massique  $\dot{m}$  est exprimé selon :

$$\dot{m} = \nu(g_l - g_v) \quad (4.57)$$

avec  $\nu$  un paramètre positif qui contrôle le taux de relaxation du système par rapport à l'équilibre thermodynamique. La méthode de calcul de  $\dot{m}$  est décrit en partie 4.3.3.3.

### 4.3.3 Les termes sources dans les modèles de cavitation

Le paragraphe propose plusieurs expressions du transfert de masse utilisées pour des modèles de mélange avec une équation de transport du taux de vide. Les modèles sont regroupés selon leur formulation dérivée d'une des trois approches présentée en partie 4.3.2 :

- modélisation à partir de la pression du mélange,
- modélisation à partir de l'équation de Rayleigh Plesset,
- modélisation à partir de l'enthalpie libre.

#### 4.3.3.1 Modélisation à partir de la pression du mélange

Les modèles qui sont présentés dans cette partie proposent une expression du débit massique similaire à (4.53) et ont été en grande partie répertoriés par [182]. La plupart considère que les échanges s'opèrent à l'équilibre thermique, et n'intègrent donc pas l'expression de la température. En revanche ils incorporent souvent un temps de relaxation censé modéliser le temps de retour à l'équilibre thermodynamique. Les écarts de pression statique sont en général adimensionnés par une pression dynamique.

##### a/ Modèle de Merkle (1998)

Le modèle de Merkle [116] utilise une équation de conservation de la fraction massique de la phase vapeur :

$$\frac{\partial x_v}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial x_v}{\partial x_j} = -\frac{x_v}{\tau_v} = \frac{x_l}{\tau_l} \quad \text{avec} \quad \alpha \rho_v = x_v \rho_m \quad \text{et} \quad \alpha \rho_l = x_l \rho_m$$

Le terme source est défini par :

$$\frac{1}{\tau_v} = \begin{cases} 0 & \text{si } p_m < P_{vap} \\ \frac{1}{k\tau_{ref}} \left| \frac{p_m - P_{vap}}{q} \right| & \text{si } p_m > P_{vap} \end{cases} \quad (4.58)$$

avec une expression analogue pour le terme de condensation de  $\tau_l$ . Le temps caractéristique de l'écoulement est exprimé par  $\tau_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}$  et  $k$  est une constante fixée empiriquement. Le terme  $q$  est posé comme une pression dynamique de référence  $q = 0,5\rho_m U_{ref}^2$ .

**b/ Modèle de Kunz (2000)**

Le modèle de Kunz [92] utilise d'une équation de transport de la fraction volumique de liquide et distingue les termes liés à la vaporisation  $\dot{m}^-$  de ceux liés à la condensation  $\dot{m}^+$  :

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l u_{m,j}}{\partial x_j} = (\dot{m}^+ + \dot{m}^-)$$

avec :

$$\dot{m}^- = \frac{C_{dest} \rho_v \alpha_l \text{Min}(0, p_m - P_{vap})}{\rho_l (\rho_l U_{ref}^2 / 2) t_\infty} \quad \text{et} \quad \dot{m}^+ = \frac{C_{prod} \rho_v \alpha_l^2 (1 - \alpha_l)}{\rho_l t_\infty} \quad (4.59)$$

Le terme de vaporisation est établi de façon similaire aux termes de Merkle. Il est pris proportionnel à l'écart entre pression de mélange et pression de vaporisation et fait intervenir une pression dynamique de référence et un temps de relaxation  $t_\infty$ . Le terme de condensation est obtenu à partir d'une expression simplifiée du potentiel de Ginzburg-Landau. Ce modèle fait intervenir deux constantes empiriques  $C_{dest}$  et  $C_{prod}$  qui doivent être calées par l'utilisateur à l'aide de données expérimentales.

**c/ Modèle de Senocak et Shyy (2002)**

A partir du modèle de Kunz, les auteurs proposent une formulation qui fait intervenir les transferts de masse et de moment à l'interface. Les termes de condensation et d'évaporation incorporent les vitesses normales à l'interface de la phase vapeur  $u_v^n$  et de l'interface  $u_I^n$  telles que :

$$\dot{m}^- = \frac{\rho_l \alpha_l \text{Min}(0, p_m - P_{vap})}{\rho_v (u_v^n - u_I^n)^2 (\rho_l - \rho_v) t_\infty} \quad \text{et} \quad \dot{m}^+ = \frac{(1 - \alpha_l) \text{Max}(0, p_m - P_{vap})}{(u_v^n - u_I^n)^2 (\rho_l - \rho_v) t_\infty} \quad (4.60)$$

avec

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha_l}{|\nabla \alpha_l|} \quad \text{et} \quad u_v^n = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}$$

L'échelle de temps  $t_\infty$  est calculée en fonction d'une longueur caractéristique et d'une vitesse de référence. Enfin le calcul de la vitesse à l'interface nécessite de localiser sa position, ce que les auteurs réalisent en calculant le gradient de la fraction volumique par phase.

**d/ Modèle de Saito (2003)**

Le modèle de Saito [140] ajoute aux équations de conservation d'un mélange homogène, une équation de conservation de la masse de la phase vapeur. Une loi d'état de mélange permet de fermer le système. Elle repose sur une pondération par le titre massique de la phase vapeur  $x_v$  et sur les lois d'états de chaque phase : loi de Tamman pour le liquide et loi des gaz parfaits pour la vapeur. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho_l} (1 - x_v) + \frac{1}{\rho_v} x_v \quad \text{et} \quad \rho_m = \frac{p_m (p_m + p_c)}{K (1 - x_v) p_m (T_m + T_c) + r_e x_v (p_m + p_c) T_m}$$

où  $T_c$ ,  $p_c$  sont des constantes et  $r_e$  la constante des gaz spécifiques de l'eau. L'expression du terme source s'inspire de la formulation de Hertz-Knudsen (4.53) qui fait intervenir un

écart de pression  $P_{vap} - p_m$  et une température de saturation  $T_{sat}$  :

$$\dot{m} = \begin{cases} \dot{m}^+ = C_e A \alpha (1 - \alpha) \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{P_{vap} - p_m}{\sqrt{2\pi R T_{sat}}} & \text{si } p_m < P_{vap} \\ \dot{m}^+ = C_c A \alpha (1 - \alpha) \frac{P_{vap} - p_m}{\sqrt{2\pi R T_{sat}}} & \text{si } p_m \geq P_{vap} \end{cases} \quad (4.61)$$

avec  $A = C_a \alpha (1 - \alpha)$ , un paramètre qui représente la taille de la surface d'échange entre les deux phases. La pression de vapeur est calculée en fonction de la température selon une formule empirique et les constantes  $C_a$ ,  $C_c$  et  $C_e$  sont fixées par l'utilisateur.

#### e/ Modèle de Utturkar (2005)

Le modèle de Senocak et Shyy fait l'hypothèse de la formation d'une poche de vapeur séparée de l'écoulement liquide par une fine interface diphasique. A partir des observations de cavitation en fluide cryogénique [73] qui décrit les zones de vapeur comme une zone de mélange avec un taux de vapeur plus faible qu'en eau froide, Utturkar [182] adapte la modélisation (4.60) sous la forme :

$$\dot{m}^- = \frac{\rho_l \alpha_l \text{Min}(0, p_m - P_{vap})}{\rho_- (u_m^n - u_I^n)^2 (\rho_l - \rho_v) t_\infty} \quad \text{et} \quad \dot{m}^+ = \frac{\rho_l (1 - \alpha_l) \text{Max}(0, p_m - P_{vap})}{\rho_+ (u_m^n - u_I^n)^2 (\rho_l - \rho_v) t_\infty} \quad (4.62)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\rho_l}{\rho_-} &= \frac{\rho_l}{\rho_v} + \left(1 + \frac{\rho_l}{\rho_-}\right) \exp(-(1 - \alpha_l)/\beta) \\ \frac{\rho_l}{\rho_+} &= \frac{\rho_l}{\rho_m} \end{aligned}$$

où les indices + et - désignent respectivement les processus de condensation et d'évaporation et  $\beta$  est un paramètre fixé empiriquement. Les vitesses de la zone diphasique et la normale à l'interface reprennent le calcul des modèles précédents :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha_l}{|\nabla \alpha_l|} \quad \text{et} \quad u_m^n = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}$$

#### f/ Modèle de Hosangadi et Ahuja (2005)

Le modèle de Hosangadi et Ahuja [74] reprend la formulation de Merkle pour évaluer le terme source de l'équation de transport de taux de vide  $m_t = \dot{m}^- \alpha \rho_v + \dot{m}^+ (1 - \alpha) \rho_l$  dans l'équation de transport :

$$\frac{\partial \rho_v \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_v \alpha u_{m,j}}{\partial x_j} = m_t$$



avec

$$\dot{m}^- = \begin{cases} 0 & \text{si } p_m < P_{vap} \\ \frac{1}{\tau_v} \frac{U_{ref}}{L_{ref}} \left[ \frac{p_m - P_{vap}}{\rho_l U_{ref}^2 / 2} \right] & \text{si } p_m > P_{vap} \end{cases} \quad (4.63)$$

$$\dot{m}^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } p_m > P_{vap} \\ \frac{1}{\tau_l} \frac{U_{ref}}{L_{ref}} \left[ \frac{p_m - P_{vap}}{\rho_l U_{ref}^2 / 2} \right] & \text{si } p_m < P_{vap} \end{cases}$$

Les constantes  $\tau_v$  et  $\tau_l$  sont des paramètres ajustables qui représentent respectivement des temps de vaporisation et de condensation. Cette formulation implémentée dans le code commercial CRUNCH CFD a permis le calcul de la chute de performance d'un inducteur en fluide cryogénique

#### 4.3.3.2 Modélisation à partir de l'équation de Rayleigh Plesset

La construction du terme source reprend la théorie d'un modèle de dynamique de bulle dans un milieu liquide basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset simplifiée. L'évolution de la poche est représentée par analogie à celui du rayon d'une bulle dont le gonflement et la contraction sont approximés en fonction de la pression (4.55).

##### a/ Le modèle de Sauer (2001)

Le modèle développé par Sauer [153] à l'Université de Karlsruhe est implémenté dans le code CAVKA (CAVitation KARlsruhe). Chaque cellule est supposée contenir un nombre  $N_b$  de bulles qui permet d'évaluer la concentration  $n_0$  de bulles de vapeur par unité de volume de liquide pur. Le taux de vide représente le volume de vapeur  $V_v$  présent dans une cellule de volume  $V_{cell}$  et s'exprime en fonction de la concentration :

$$\alpha = \frac{V_v}{V_{cell}} = \frac{N_b \frac{4}{3} \pi R^3}{V_v + V_l} = \frac{n_0 \frac{4}{3} \pi R^3}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3}$$

L'équation de transport

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_{m,j}}{\partial x_j} = \dot{m} \quad (4.64)$$

fait intervenir un terme de production de vapeur

$$\dot{m} = \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{n_0 4 \pi R^2}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \frac{dR}{dt} = \frac{n_0 4 \pi R^2}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_m - P_{vap}|}{\rho_l}} \quad (4.65)$$

Le modèle prévoit également une cavitation avec effets thermodynamiques en ajoutant une équation de conservation de l'enthalpie de mélange  $h_m$  qui permet de calculer les variations de température du système et d'adapter les valeurs de la pression de mélange.

### b/ Le modèle de Singhal (2002)

Singhal [161] propose également de calculer les termes de production et de destruction de vapeur en partant de l'équation de Rayleigh-Plesset. Le modèle considère, au sein du mélange, la présence de liquide, de vapeur et de gaz non condensables quantifiés par leurs titres massiques respectifs :  $x_l$ ,  $x_v$  et  $x_g$ . La masse volumique est ainsi évaluée en fonction des différents constituants et de leurs titres massiques respectifs :

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho_v} + \frac{1}{\rho_g} + \frac{1 - x_v - x_g}{\rho_l}$$

L'évolution de la quantité de vapeur est ensuite contrôlée par l'équation :

$$\frac{\partial x_v \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial x_v \rho_m u_{m,j}}{\partial x_j} = R_e - R_c \quad (4.66)$$

où  $R_e$  et  $R_c$  sont les termes sources de vaporisation et de condensation de la phase vapeur :

$$R_e = C_e \frac{\sqrt{k}}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_{vap} - p_m}{\rho_l}} (1 - x_v - x_g) \quad \text{si } p_m < P_{vap} \quad (4.67)$$

$$R_c = C_c \frac{\sqrt{k}}{\sigma} x_g \quad \text{sinon} \quad (4.68)$$

Les coefficients  $\sigma$  et  $k$  désignent respectivement la tension de surface et l'énergie cinétique locale tandis que  $C_e$  et  $C_c$  sont des constantes ajustables. cette formulation du terme source est implémentée dans les codes commerciaux Fluent et ACE+.

### c/ Le code CFX

Le terme source de l'équation (4.64) utilise là encore l'approximation (4.55). Le nombre de germes présents dans le liquide diffère selon le processus de changement de phase. Au cours de la vaporisation ce nombre est donné par la relation :

$$N_{bv} = (1 - \alpha_v) \frac{3\alpha_d}{4\pi R^3}$$

qui dépend des fractions volumiques de la phase vapeur  $\alpha_v$  et des gaz incondensables  $\alpha_d$ . La condensation fait intervenir le nombre :

$$N_{bc} \frac{3\alpha_v}{4\pi R^3}$$

Par suite le taux de transfert est formulé :

$$\dot{m} = \begin{cases} \dot{m}^+ = F_v N_{bv} \rho_v 4\pi R_b^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_{vap} - p_m}{\rho_l}} & \text{si } p_m < P_{vap} \\ \dot{m}^- = F_c N_{bc} \rho_v 4\pi R_b^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_m - P_{vap}}{\rho_l}} & \text{si } p_m > P_{vap} \end{cases} \quad (4.69)$$

$F_v$  et  $F_c$  sont des constantes empiriques qui représentent la différence des échelles de temps entre les phénomènes de vaporisation et de condensation, tandis que  $R_b$  désigne le rayon initial des bulles.

### 4.3.3.3 Modélisation pour un système à 5-équations à partir de l'enthalpie libre

Le modèle de Saurel [150] est constitué, pour les quantités de mélange, d'une équation de conservation de la quantité de mouvement et d'une équation de conservation de l'énergie. Le transfert de masse intervient dans les équations de conservation de la masse de chaque phase et une équation de transport du taux de vide :

$$\frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_{m,j}}{\partial x_j} = \dot{m} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial (1 - \alpha) \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_l u_{m,j}}{\partial x_j} = -\dot{m} \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{\Gamma_v}{\alpha} + \frac{\Gamma_l}{1 - \alpha} \right) Q \quad (4.72)$$

avec  $\dot{m}$  le débit massique de la phase vapeur vers la phase liquide et  $Q$  le transfert de chaleur tels que :

$$\dot{m} = \nu \rho_m (g_l - g_v) \quad \text{et} \quad Q = H(T_l - T_v)$$

qui font respectivement intervenir les enthalpies libre  $g_k$  et température  $T_k$  de chaque phase. La quantité  $\Gamma_k = \frac{1}{\rho_k} \left( \frac{\partial p_k}{\partial e_k} \right)_{\rho_k}$  est le coefficient de Grüneisen de chaque phase, calculée à partir des équations d'état des gaz raides. Les coefficients  $\nu$  et  $H$  sont des paramètres de relaxation fixé selon les conditions.

La résolution s'effectue en deux étapes :

1. Le système est résolu sans transfert de masse ou de chaleur :  $\dot{m} = 0$  et  $Q = 0$ .
2. Une fois l'évolution hydrodynamique obtenue l'objectif est de reproduire les phénomènes d'échange à l'interface qui se produisent à l'équilibre thermodynamique totale. Cela sous entend qu'à distance de l'interface  $\nu = H = 0$  et qu'à proximité l'équation du taux de vide s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = \frac{\dot{m}}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{\Gamma_v}{\alpha} + \frac{\Gamma_l}{1 - \alpha} \right) Q$$

A la fin du pas de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  le système est supposé avoir atteint l'équilibre thermodynamique et les variables au temps  $t^n$  sont prises égales à celles calculées par l'étape 1. Deux équations d'évolution des différences de température  $\Delta T = T_l - T_v$  et d'enthalpie libre  $\Delta g = g_l - g_v$  servent à déterminer  $Q$  et  $\dot{m}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} &= A Q + B \dot{m} \\ \frac{\partial \Delta g}{\partial t} &= A' Q + B' \dot{m} \end{aligned}$$

ou les coefficients  $A, B, A'$  et  $B'$  sont des fonctions des variables d'écoulements. L'hypothèse d'équilibre thermodynamique, atteint à la fin de l'itération, permet finalement de calculer  $Q$  et  $\dot{m}$  à l'aide de deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  :

$$\begin{aligned} Q &= f_1(A, A', B, B', (\Delta T)^n, (\Delta g)^n, \Delta t) \\ \dot{m} &= f_2(A, A', B, B', (\Delta T)^n, (\Delta g)^n, \Delta t) \end{aligned}$$

L'application de ce modèle est disponible dans plusieurs travaux [151, 190, 126] qui adaptent la modélisation pour des systèmes à 6- ou 7-équations.

#### 4.3.4 Formulation de l'équation de transport

La formulation du système mis en place dans ce manuscrit reprend la réduction des modèles 2-fluides en un système homogène à 5-équations proposée par Kapila [82] en ajoutant, aux hypothèses d'égalité de pression et de vitesse entre phases, une hypothèse d'équilibre thermique. Les deux équations de conservation de la masse présentent, à l'origine, dans le modèle à cinq-équations sont ici rassemblées en une seule équation de mélange. L'équation de transport est établie pour la fraction volumique de vapeur et comporte un terme source dont la formulation s'inspire de [119, 62] qui font intervenir les vitesses du son phasiques et la divergence du champ de vitesse. La première étape de l'écriture de l'équation de transport fait intervenir les équations de conservation de la masse pour chaque phase avec transfert à l'interface.

##### Conservation de la masse pour la phase vapeur

L'équation de conservation de la masse pour la phase vapeur incorpore un terme  $\dot{m}$  qui représente le débit massique de la phase liquide vers la phase vapeur.

$$\frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_{v,j}}{\partial x_j} = \dot{m} \quad (4.73)$$

##### Conservation de la masse pour la phase liquide

L'équation de conservation de la masse pour la phase liquide est analogue à la précédente.

$$\frac{\partial (1 - \alpha) \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) \rho_l u_{l,j}}{\partial x_j} = -\dot{m} \quad (4.74)$$

##### Développement de l'équation de conservation de la masse pour la phase vapeur

Le développement de l'équation (4.73) s'effectue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \rho_v \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha u_{v,j} \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} + u_{v,j} \rho_v \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + \alpha \rho_v \frac{\partial u_{v,j}}{\partial x_j} &= \dot{m} \\ \Leftrightarrow \rho_v \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{v,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right) + \alpha \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \rho_v \frac{\partial u_{v,j}}{\partial x_j} + u_{v,j} \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} \right) &= \dot{m} \\ \Leftrightarrow \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{v,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right) + c_v^2 \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + u_{v,j} \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} \right) + \rho_v c_v^2 \frac{\partial u_{v,j}}{\partial x_j} &= \dot{m} \frac{c_v^2}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.75)$$

##### Développement de l'équation de conservation de la masse pour la phase liquide

Un raisonnement identique au précédent fournit l'expression équivalente pour la phase liquide en développant l'équation (4.74) :

$$-\frac{\rho_l c_l^2}{1 - \alpha} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{l,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right) + c_l^2 \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + u_{l,j} \frac{\partial \rho_l}{\partial x_j} \right) + \rho_l c_l^2 \frac{\partial u_{l,j}}{\partial x_j} = -\dot{m} \frac{c_l^2}{1 - \alpha} \quad (4.76)$$

### Utilisation de l'hypothèse d'équilibre mécanique entre les phases

La seconde étape du raisonnement consiste à rassembler les équations de conservations de la masse phasiques en une seule équation de transport du taux de vide. Pour cela, l'hypothèse d'équilibre mécanique entre les phases permet d'écrire l'égalité :

$$p_v(\rho_v, s_v) = p_l(\rho_l, s_l)$$

qui peut se développer de la façon suivante :

$$\left( \frac{\partial p_v}{\partial \rho_v} \right)_{s_v} \frac{d\rho_v}{dt} + \left( \frac{\partial p_v}{\partial s_v} \right)_{\rho_v} \frac{ds_v}{dt} = \left( \frac{\partial p_l}{\partial \rho_l} \right)_{s_l} \frac{d\rho_l}{dt} + \left( \frac{\partial p_l}{\partial s_l} \right)_{\rho_l} \frac{ds_l}{dt}$$

La suite du raisonnement suppose l'écoulement isentropique ce qui simplifie la relation précédente :

$$\begin{aligned} c_l^2 \frac{d\rho_l}{dt} &= c_v^2 \frac{d\rho_v}{dt} \\ \Leftrightarrow c_l^2 \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + u_{l,j} \frac{\partial \rho_l}{\partial x_j} \right) &= c_v^2 \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + u_{v,j} \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

### Ecriture de l'équation de transport du taux de vide

La formulation finale utilise l'hypothèse d'équilibre cinétique entre les phases :

$$u_v = u_l = u_m$$

En soustrayant membre à membre les deux équations (4.75) et (4.76) et en utilisant la relation (4.77), le raisonnement aboutit à l'écriture de l'équation de transport de taux de vide qui s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = \frac{\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2}{\rho_v c_v^2 + \frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha}} \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \dot{m} \frac{\frac{c_l^2}{1-\alpha} + \frac{c_v^2}{\alpha}}{\frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha}}$$

Cette équation de transport du taux de vide se note sous sa forme simplifiée :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho_I} \quad (4.78)$$

où sont introduits le coefficient  $K$  et la masse volumique à l'interface  $\rho_I$  :

$$K = \frac{\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2}{\frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} + \frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha}} \quad \text{et} \quad \rho_I = \frac{\frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha}}{\frac{c_l^2}{1-\alpha} + \frac{c_v^2}{\alpha}}$$

Chaque paramètre fait intervenir les expressions de la vitesse du son des phases pures et est par conséquent applicable uniquement dans le cadre d'une résolution compressible des

phases pures.

Le terme source se décompose en un terme de relaxation mécanique des poches de gaz :

$$K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} \quad (4.79)$$

proportionnel à la divergence de la vitesse. Ce terme pilote l'évolution de la fraction volumique de vapeur par accroissement des germes de gaz dans les zones de détente et diminution dans les zones de compression. Il modélise un mécanisme qui s'opère sans transfert de masse. Les phénomènes de changement de phase sont pris en compte par la partie

$$\frac{\dot{m}}{\rho_I} \quad (4.80)$$

Ce terme contient une variable  $\dot{m}$  qui modélise les échanges massiques entre phases.

Les paragraphes suivants s'intéressent à la contribution de chacun de ces termes dans l'équation d'évolution du taux de vide. Plusieurs formulations du terme  $\dot{m}$  peuvent être proposées afin de modéliser le transfert de masse. Une sélection de modèle est détaillée en partie 4.3.6.

#### 4.3.5 Terme source de relaxation mécanique

La partie  $K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$  du terme source de l'équation (C.16) représente les relaxations mécaniques du système. La fraction volumique de vapeur diminue dans les zones de compression et s'accroît dans les zones de détente, exactement comme cela pourrait être observé dans le cas d'une bulle isolée.

Saurel [150] et Zein [190] étudient la contribution de ce terme dans l'expérience d'un tube à détente. L'onde de détente est formée au milieu du tube et se propage dans le liquide en imposant une vitesse négative à gauche et une vitesse positive à droite. L'équation sur  $\alpha$  est calculée sans le terme de transfert de masse et les résultats sont comparés à la solution analytique. La fraction volumique de vapeur augmente au centre du domaine et atteint environ 10%. Ce phénomène est causé uniquement par croissance des germes de vapeur initialement présents dans le tube et la pression au sein du tube diminue en deçà de la pression de la vaporisation.

Dans un second temps, la même étude est réalisée en prenant en compte la cavitation via l'introduction du terme source de transfert de masse  $\dot{m}$  est ajouté au modèle. En début de perturbation, la phase liquide se détend jusqu'à la pression de vaporisation. Ensuite le phénomène de cavitation se met en place accompagné de la formation d'un front d'évaporation. Au sein de la poche de vapeur la fraction volumique de la vapeur atteint désormais 60%. Lorsqu'une onde de détente plus violente est activée en augmentant la vitesse les auteurs remarquent que la zone de mélange est quasiment l'état de vapeur pure.

Les conclusions précédentes mettent en évidence le rôle joué par les ondes de détente et de compression dans l'évolution de la fraction volumique de vapeur. Le terme  $K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$  contribue à 17% de création de la fraction volumique du taux de vide dans la modélisation précédente et représente en cela une partie non négligeable du terme source.

### 4.3.6 Terme source de transfert de masse

Le paramètre  $\dot{m}$  du terme source modélise le transfert de masse entre les phases causé par les mécanismes d'évaporation et de condensation au sein du mélange. Comme évoqué en partie 4.3.3.1, les méthodes de modélisation sont vastes et peu de références expérimentales permettent de quantifier précisément la contribution de ce terme. Les travaux de Maurice [108] ont tenté d'évaluer ce coefficient à partir de mesures de taux de vide au sein d'un écoulement cavitant de marche descendante. Néanmoins, pour ce type d'essais, la pression est mesurée aux parois, il s'agit là d'une pression rayonnée des agitations des grandes échelles. Le champ de vitesse est reconstruit à partir d'un champ de pression exempt des plus petites structures ; il est par conséquent peu précis et empêche une calibration fiable de ce terme source. Néanmoins, les essais restreints à certains points de l'écoulement et les méthodes POD-LSE d'estimation du champ de vitesse ne permettent pas de proposer une calibration fiable de ce terme source.

Dans le cadre des études numériques, deux catégories de modèles ont été implémentés dans l'équation de transport de taux de vide.

#### Terme source empirique

La formulation sépare les phénomènes de vaporisation  $\dot{m}^+$  et de condensation  $\dot{m}^-$  et reprend l'écriture proposée par Hosangadi et Ahuja [5]. Le taux de transfert est piloté à partir des écarts de la pression de mélange par rapport à la pression de vaporisation. Un tel modèle ne respecte plus la condition (4.23) selon laquelle la vitesse du son au sein du mélange est inférieure à la vitesse de Wallis établie sans changement de phase (voir annexe C.3.5.1).

#### Terme source de la divergence de la vitesse

Cette modélisation estime que les transferts de masse s'opèrent dans les zones de contraction ou d'étirement du fluide, les premières donnent lieu au phénomène de condensation tandis que les deuxièmes favorisent l'évaporation. Le terme de transfert  $\dot{m}$  est ainsi considéré proportionnel à la divergence des vitesses du fluide :  $\dot{m} = Z \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$ . Il est possible de montrer que l'expression du coefficient  $Z$  dépend de la vitesse du son du mélange. Suivant la fermeture thermodynamique employée la formulation de la célérité dans le mélange n'est pas la même et se répercute directement sur le calcul du terme de transfert massique. Un tel modèle respecte la condition (4.23) selon laquelle la célérité des ondes est bornée par la vitesse dans un milieu sans changement de phase et la vitesse au sein d'un fluide où les échanges s'opèrent à l'équilibre thermodynamique (voir annexe C.3.5.2).

La suite de cette section présente l'implémentation des différents modèles dans le système de mélange homogène à 4-équations. L'expression du coefficient  $Z$  est détaillée en fonction de la fermeture employée. Des études numériques sur une géométrie 1D ont également été menées afin de comparer l'influence de la formulation du terme source. Les résultats sont détaillés en partie 4.4.

#### 4.3.6.1 Terme source empirique

##### Présentation

Le transfert de masse est divisé en deux termes qui modélisent les phénomènes de condensation et de vaporisation. Le modèle testé est similaire à celui proposé par Hosangadi et Ahuja [5]. Il comporte deux paramètres ajustables  $C_{prod}$  et  $C_{des}$  qui permettent respectivement de calibrer les taux de vaporisation et de condensation. L'expression de  $\dot{m}$  est rappelée ci-après :

$$\dot{m} = \dot{m}^+ + \dot{m}^- = C_{prod} \frac{\rho_v}{\rho_l} (1 - \alpha) \frac{\min(0, p_m - P_{vap})}{\rho_{ref} U_{ref}^2 / 2} - C_{des} \frac{\rho_v}{\rho_l} \alpha \frac{\max(0, p_m - P_{vap})}{\rho_{ref} U_{ref}^2 / 2} \quad (4.81)$$

Le transfert de masse est piloté par l'écart entre la pression de mélange  $p_m$  et la pression de vaporisation  $P_{vap}$ . Néanmoins dans la littérature l'évaluation de la pression lors de l'apparition de la cavitation n'est pas claire. Pour l'implémentation dans le système à 4-équations, la pression de vaporisation  $P_{vap}$  est fixée à partir de la température de référence. Un paramètre  $\epsilon = 10^{-3}$  est introduit afin d'autoriser des valeurs du champ de pression moyen légèrement inférieures à  $P_{vap}$  tel que  $p_m = P_{vap} - \epsilon$ . Par ailleurs cette formulation autorise des valeurs de taux de vide supérieures à un et un limiteur est ajouté au modèle pour maintenir le taux de vide dans son domaine physique d'évolution.

### Calcul de la vitesse du son

Le débit massique (4.81) est calculé de façon linéaire à partir des seules variables de pression de mélange  $p_m$  et du taux de vide  $\alpha$ . Le transfert de masse est construit indépendamment de tout gradient sur une des variables primitives du vecteur  $(\alpha, p_m, u_m, e_m)$ . Le développement de la partie Annexe C.3.5.1 démontre que la vitesse du son au sein du mélange est par conséquent égale à celle Wallis ce qui, d'un point de vue thermodynamique, n'est pas cohérent.

#### 4.3.6.2 Terme source de divergence de la vitesse

Une autre catégorie de terme source peut être formulée en considérant que les transferts de masse sont pilotés par les étirements et compressions du fluide. Cette méthode évalue le paramètre  $\dot{m}$  comme une quantité proportionnelle à la divergence de la vitesse :

$$\dot{m} = Z \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$$

Le coefficient de proportionnalité  $Z$  est évalué en remplaçant le terme de transfert de masse dans le système des équations de mélange. La partie Annexe C.3.5.2 démontre que ce coefficient dépend de la vitesse du son du mélange :

$$Z = \frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \left( 1 - \frac{c_m^2}{c_{Wallis}^2} \right) \quad (4.82)$$

La formulation de  $c_m$  diffère selon la fermeture thermodynamique employée. En reprenant les équations d'état présentées en partie 4.1.4 deux termes sources peuvent être proposés.



### Terme source pour une loi d'état sinusoïdale

En remplaçant la vitesse du son par son expression (4.49) dans l'équation (4.82) le terme des transferts de masse s'exprime désormais :

$$\dot{m} = \frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \left[ 1 - \frac{\frac{\gamma_m(\alpha) - 1}{\rho_m} \left( \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} (h_v - h_l) \right) + \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}}{c_{Wallis}^2} \right] \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} \quad (4.83)$$

En pratique les masses volumiques sont prises à leur valeur à saturation. Il est judicieux de remarquer que dans la zone de mélange la vitesse du son est inférieure à celle de Wallis d'après (4.23) et par conséquent :

$$\begin{aligned} c_m^2 &< c_{Wallis}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{c_{min}^2}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} &< c_{Wallis}^2 \end{aligned}$$

Le signe du transfert de masse ne dépend donc que de la divergence de la vitesse. Seule la dynamique du fluide de mélange détermine la création ou destruction de la fraction volumique de vapeur.

### Terme source pour une équation d'état de mélange des gaz raides

Le terme source est ici construit sur un schéma identique au précédent, où les transferts massiques sont supposés proportionnels à la divergence du champ des vitesses. La différence porte sur l'expression de la vitesse du son dans le mélange. La formulation du terme source s'obtient en remplaçant  $c_m$  par son expression (4.47) dans l'équation (4.82) :

$$\dot{m} = \frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \left[ 1 - \frac{\frac{\gamma_m(\alpha) - 1}{\rho_m} \left( \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} (h_v - h_l) \right)}{c_{Wallis}^2} \right] \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} \quad (4.84)$$

Les enthalpies et masses volumiques par phase sont, en générale, prises à leurs valeurs à saturation. Cette écriture libère le modèle des paramètres ajustables qui étaient en revanche présents dans les écritures précédentes. Le modèle qui repose sur l'équation d'état de mélange des gaz raides considère donc que la fermeture thermodynamique est la même en phase pure et dans le mélange. Néanmoins, les déséquilibres de pression ne sont plus évalués de la même manière que pour le modèle sinusoïdal qui activait le modèle de cavitation pour des pressions  $P_{vap} + \Delta p_m$  supérieures à la pression de vaporisation.

Les différentes expressions des termes sources en fonction du modèle sont répertoriées dans le tableau 4.1.

#### 4.3.7 Tableaux récapitulatifs des formulations associées à chaque modèle

TABLE 4.1 – Formulation des grandeurs thermodynamiques, termes sources et vitesses du son des modèles à l'équilibre, avec et sans prise en compte des effets thermodynamiques

modèles à l'équilibre thermodynamique				
Modèle	pression	contraintes thermodynamiques	vitesse du son pour $p_m < P_{vap}$	
3-équations à l'équilibre	$p_k = p_m = P_{vap}(T_{ref})$ $\frac{dP_{vap}^{eq}}{dT_m} = \left[ \left( \frac{C}{T_{ref}} - \frac{B}{T_{ref}^2} \right) / \left( \frac{1}{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty,v}} - \frac{D}{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty,l}} \right) \right]$	$T_k = T_m$ $g_v = g_l$ $\left. \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right _{T_m} = \left. \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right _{p_m} = 0$ $\rho_k(p_m, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref})$ $\frac{d\rho_k}{dT_m} \approx \frac{\rho_k(T_{ref} + \Delta T_m) - \rho_k(T_{ref} - \Delta T_m)}{2\Delta T_m}$ $h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$	$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}}{\frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} + \frac{\rho_v^{sat} h_v^{ref} - \rho_l^{sat} h_l^{ref}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \frac{1}{\frac{dP_{vap}^{eq}}{dT_m}}} \sum_k \alpha_k \left( \frac{d\rho_k}{dT_m} \right)_{P_{vap}}}$	
modèles sans effets thermodynamiques				
Modèle	pression	contraintes thermodynamiques	équation sur $\alpha$	vitesse du son pour $p_m < P_{vap}$
3-équations sinus	$p_m(\rho_m, T_m) = P_{vap}(T_{ref}) + \left( \frac{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}}{2} \right) c_{min}^2 \text{Arcsin}(1 - 2\alpha)$	$T_k = T_m$ $T_m = \frac{e_m(\alpha) + \frac{p_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha)} - q_m(\alpha)}{C_{p_m}}$ $\rho_k(p_m, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref})$ $h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$	$\emptyset$ $\alpha = \frac{\rho_m - \rho_l}{\rho_v - \rho_l}$	$c_m^2 = \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}} + (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}$
4-équations sinus	$p_m(\alpha, T_m) = P_{vap}(T_m) + \left( \frac{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}}{2} \right) c_{min}^2 \text{Arcsin}(1 - 2\alpha)$	$T_k = T_m$ $T_m = \frac{e_m(\alpha) + \frac{p_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha)} - q_m(\alpha)}{C_{p_m}}$ $\rho_l(p_m, T_m) = \rho_l^{sat}(T_{ref})$ $\rho_v(p_m, T_m) = \frac{p_m}{(\gamma_v - 1) C_{v_v} T_m} \text{ si } p_m > P_{vap}$ $h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$	$\dot{m} = \frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} \times \left[ 1 - \frac{c_m^2}{c_{Wallis}^2} \right]$	$c_m^2 = \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}} + (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}$
4-équations gaz raides	$p_m(\rho_m, e_m, \alpha) = -\gamma_m(\alpha) p_{m,\infty}(\alpha) + (\gamma_m(\alpha) - 1) \rho_m (e_m - q_m(\alpha))$	$T_k = T_m$ $T_m = \frac{e_m(\alpha) + \frac{p_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha)} - q_m(\alpha)}{C_{p_m}}$ $\rho_k(p_m, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref})$ $h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$	$\dot{m} = \frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} \times \left[ 1 - \frac{c_m^2}{c_{Wallis}^2} \right]$	$c_m^2 = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}$

modèles avec effets thermodynamiques			
Modèle	pression	contraintes thermodynamiques	vitesse du son pour $p_m < P_{vap}$
4-équations sinus	$p_m(\alpha, T_m) = P_{vap}(T_{ref}) + \frac{dP_{vap}}{dT_m}(T_m - T_{ref}) + \left(\frac{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}}{2}\right) c_{min}^2 \text{Arcsin}(1 - 2\alpha)$	$T_k = T_m$ $T_m = \frac{e_m(\alpha) + \frac{p_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha)} - q_m(\alpha)}{C_{p_m}}$ $\rho_k(p_m, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref})$ $h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_{ref} + q_k$	$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m(\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} \frac{dP_{vap}}{dT_m} + \rho_m C_{p_m} \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (1 - 2\alpha)^2}}}{\rho_m C_{p_m} - \frac{dP_{vap}}{dT_m}}$
4-équations gaz raides	$p_m(\rho_m, e_m, \alpha) = -\gamma_m(\alpha) p_{m,\infty}(\alpha) + (\gamma_m(\alpha) - 1) \rho_m (e_m - q_m(\alpha))$ $\frac{dP_{vap}}{dT_m} \approx \frac{P_{vap}(T_{ref} + \Delta T_m) - P_{vap}(T_{ref} - \Delta T_m)}{2\Delta T_m}$	$T_k = T_m$ $T_m = \frac{e_m(\alpha) + \frac{p_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha)} - q_m(\alpha)}{C_{p_m}}$ $\rho_k(p_m, T_m) = \rho_k^{sat}(T_{ref}) + \left(\frac{d\rho_k}{dT_m}\right)_{P_{vap}} (T_m - T_{ref})$ $\frac{d\rho_k}{dT_m} \approx \frac{\rho_k(T_{ref} + \Delta T_m) - \rho_k(T_{ref} - \Delta T_m)}{2\Delta T_m}$ $h_k(T_m) = \gamma_k C_{v_k} T_m + q_k$	$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m(\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}}{\frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} + \frac{\rho_v^{sat} h_v - \rho_l^{sat} h_l}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}} \frac{1}{dT_m} \sum_k \alpha_k \left(\frac{d\rho_k}{dT_m}\right)_{P_{vap}}}$

TABLE 4.2 – Hypothèses thermodynamiques et caractéristiques des modèles

Modèle	4-équations sinus	4-équations gaz raides	3-équations sinus	3-équations à l'équilibre
Equations de conservation	1 masse 1 quantité de mouvement 1 énergie + $\alpha$	1 masse 1 quantité de mouvement 1 énergie + $\alpha$	1 masse 1 quantité de mouvement 1 énergie	1 masse 1 quantité de mouvement 1 énergie
Equilibre des vitesses	oui	oui	oui	oui
Equilibre des pressions	effet de déséquilibre	oui	effet de déséquilibre	oui
Equilibre des températures	oui	oui	oui	oui
Equilibre des enthalpies libres	non	non	non	oui
Etats métastables	phase vapeur	phase vapeur	non	non

## 4.4 Etude comparative des modèles de cavitation

### 4.4.1 Présentation du cas d'étude

Une étude comparative, qui évalue chaque modèle sur un écoulement 1D de tube à détente, a été menée au LEGI [53]. Deux ondes de détente d'intensité différentes sont successivement étudiées. L'étude numérique présente les résultats obtenus pour un système à 4-équations avec trois termes sources différents et les compare à ceux présentés par Zein et al. [190] pour un modèle à 7-équations. Cette étude s'associe à celle proposée par Saurel et al. [150] pour un modèle à 5-équations.

Les essais consistent à remplir un tube d'eau d'un mètre de long, de masse volumique  $\rho_l = 1150 \text{ kg.m}^{-3}$ , à la température  $T = 355 \text{ K}$ , soumis à la pression atmosphérique et pour une pression de vaporisation fixée à  $P_{vap} = 51000 \text{ Pa}$ . Une légère fraction volumique de vapeur  $\alpha_0 = 10^{-2}$  est initialement introduite dans le liquide. Une perturbation est créée au centre du tube par étirement du liquide à la vitesse de  $-2 \text{ m/s}$  à gauche et  $+2 \text{ m/s}$  à droite. Dans un premier temps, cette perturbation est suivie de deux ondes de détente rapides qui se propagent de part et d'autre du tube et provoquent une augmentation de la fraction volumique uniquement par dilatation du fluide. La poche de gaz formée résulte uniquement de la relaxation mécanique et, en premier lieu, aucun transfert de masse n'a lieu. Les ondes de détentes engendrent l'apparition de déséquilibres thermodynamiques et rendent le liquide métastable. Elles provoquent, dans un second temps, la formation de fronts d'évaporation et la création de vapeur causée par une diminution de la pression du liquide en deçà de la pression de vaporisation (voir figure 4.5). La vitesse de propagation des fronts d'évaporation est nettement inférieure à celle des ondes de détentes.

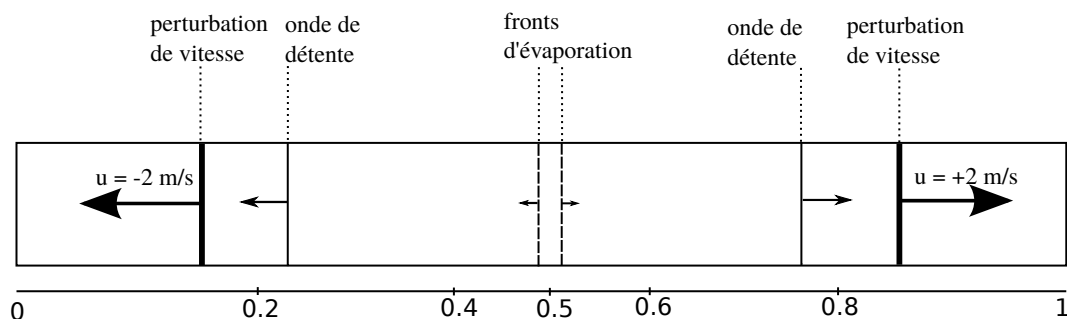


FIGURE 4.5 – Schéma de la simulation d'un tube à détente. Représentation à  $t \approx 3,2 \text{ ms}$

### 4.4.2 Simulations numériques sans transferts de masse

Les calculs sont effectués à partir du système à 4-équations. À l'instant initial la perturbation est provoquée par l'introduction d'une discontinuité de vitesse  $|u| = 2 \text{ m/s}$  au centre du tube. Le schéma numérique utilisé est un schéma de Rusanov (voir partie 5.3.2.2) sur un maillage de 5000 cellules et le pas de temps est fixé à  $10^{-7} \text{ s}$  et dont l'ordre de grandeur reste suffisamment faible

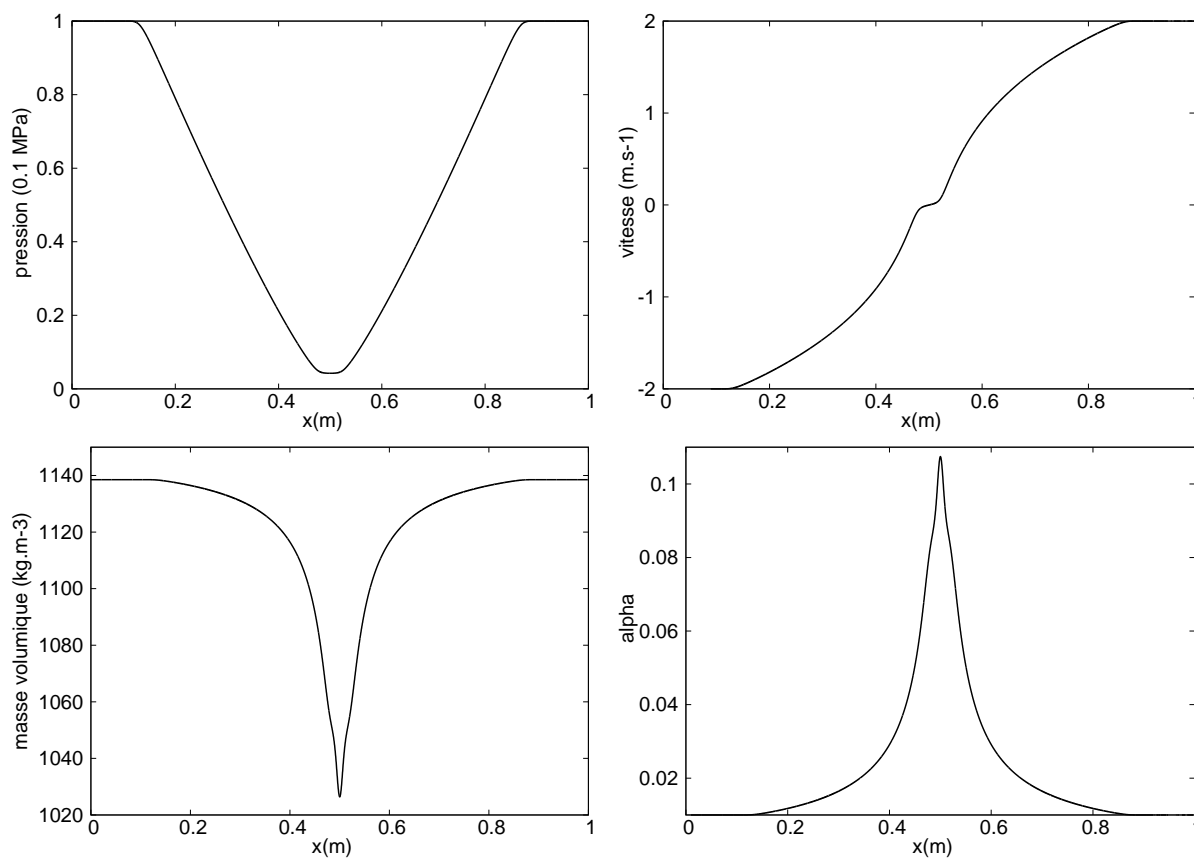


FIGURE 4.6 – Solutions obtenues avec un système à 4-équations sans transferts de masse :  $\dot{m} = 0$ . Résultats à  $t = 3,2 \text{ ms}$ ,  $|u| = 2 \text{ m/s}$  et  $\alpha_0 = 10^{-2}$

par rapport au temps caractéristique du phénomène de l'ordre de la milliseconde.

Dans un premier temps, les simulations n'incluent pas de transfert de masse. Les solutions obtenues sont présentées en figure 4.6 à l'instant  $t = 3,2 \text{ ms}$ . Le passage des ondes de détente provoque un étirement du fluide responsable du gonflement des germes de vapeur et de l'augmentation du taux de vide à partir du centre du tube. Le phénomène est modélisé par la contribution  $K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$ . Les courbes illustrent l'importance de cette partie du terme source qui génère près de 15% de la fraction volumique de vapeur obtenue en prenant en compte la cavitation.

### 4.4.3 Simulations numériques avec transferts de masse

#### 4.4.3.1 Comparaison des résultats obtenus pour chaque terme source

Les simulations menées dans cette section incorporent le transfert de masse en ajoutant la contribution de  $\dot{m}$  au sein du terme source. Elles sont menées avec les mêmes conditions initiales que celles présentées dans le paragraphe précédent. L'étude vise à comparer les résultats obtenus

avec un terme source formulé soit à l'aide d'une loi empirique, (4.81), une loi sinusoïdale (4.83) ou une équation d'état de mélange des gaz raides (4.84). Le modèle empirique dépend des constantes  $C_{prod}$  et  $C_{des}$  en fixant pour ces simulations  $C_{des} = 0$  puisque seul le phénomène d'évaporation est observé pour ce cas. Le calibrage de la constante  $c_{min}$  est également étudié par la suite.

Les résultats sont présentés en figure 4.7 où ils sont comparés aux solutions obtenues par Zein [190] pour un modèle à 7-équations. Chaque modèle reproduit le phénomène d'évaporation. Les paramètres ajustables des modèles empirique et sinusoïdale calibrés aux valeurs de  $C_{prod} = 1$  et  $c_{min} = 1,31 \text{ m/s}$  fournissent les meilleurs résultats. A l'instant d'observation, le modèle des gaz raides sous estime légèrement la quantité de vapeur à l'intérieur de la poche.

La figure 4.8 propose de juger l'influence des constantes ajustables de chaque modèle sur le taux de production de vapeur. Il apparaît clairement l'importance que revêt le calibrage du coefficient de production dont la valeur  $C_{prod} = 1$  semble la mieux appropriée au cas de référence. La constante  $c_{min}$  modifie d'une part la largeur de la poche qui augmente selon  $c_{min}$  et d'autre part le taux de vide maximal qui à contrario diminue pour les valeurs élevées de la constante. Enfin le modèle de mélange des gaz raides présente l'avantage d'être libre de tout calibrage et fournit des résultats en bon accord avec le cas de référence.

Les graphes de la figure 4.9 ont pour objectif de représenter la capacité de chaque modèle à reproduire les variations de pression liées à l'évaporation. Le modèle avec terme source empirique (4.81) utilise l'équation d'état de mélange des gaz raides (4.9) pour le calcul de la pression à partir des autres variables de mélange. Les simulations ont révélé une intégration compliquée de ce terme source dans le système d'équation. Afin que le calcul ne diverge pas, une condition sur la pression a été ajoutée. Dans le mélange celle-ci est bornée par la valeur minimale de  $p_m = P_{vap}(T_{ref}) - \epsilon$ , où  $\epsilon$  est fixé arbitrairement à la valeur de  $10^{-3}$ . Cet artifice impose une pression constante à l'intérieur de la poche et le modèle n'est plus en mesure de reproduire les diminutions liées à l'évaporation. Les deux autres modèles prévoient une chute de pression à l'intérieur de la cavité. Ce phénomène est fidèle à celui observé par Saurel [150] lorsque la simulation est prolongée jusqu'à un temps de  $0,59 \text{ ms}$  et qui est amplifié en augmentant la vitesse des ondes de détente [150, 190, 126]. En ce qui concerne la modélisation, les variations de pression ont différentes origines. Pour le modèle sinusoïdale l'augmentation du taux de vide pilote la chute de pression. Par ailleurs, en raison de la symétrie de la loi, le champ de pression calculé est supérieur à la valeur seuil de  $P_{vap} = 51000 \text{ Pa}$  dans le liquide métastable. L'amplitude de la chute des pressions dépend directement de la pente de la loi sinusoïdale. Elle s'accroît à mesure que la pente diminue, c'est-à-dire que valeur de  $c_{min}$  augmente. Pour mieux s'en convaincre les évolutions de la pression en fonction du taux vide sont tracées sur la figure 4.10 pour les trois valeurs de  $c_{min} \in \{0,51; 1,31; 1,93\} \text{ m/s}$ . Pour le modèle de mélange des gaz raides la pression est déduite à partir des grandeurs thermodynamiques et sa diminution est corrélée à une chute de la température dans la cavité.

#### 4.4.4 Diminution de la fraction volumique de gaz initiale

Le même protocole que le précédent est mené avec une fraction initiale de vapeur dans le liquide de  $\alpha_0 = 10^{-10}$ . Cette nouvelle condition initiale permet de comparer les simulations à un

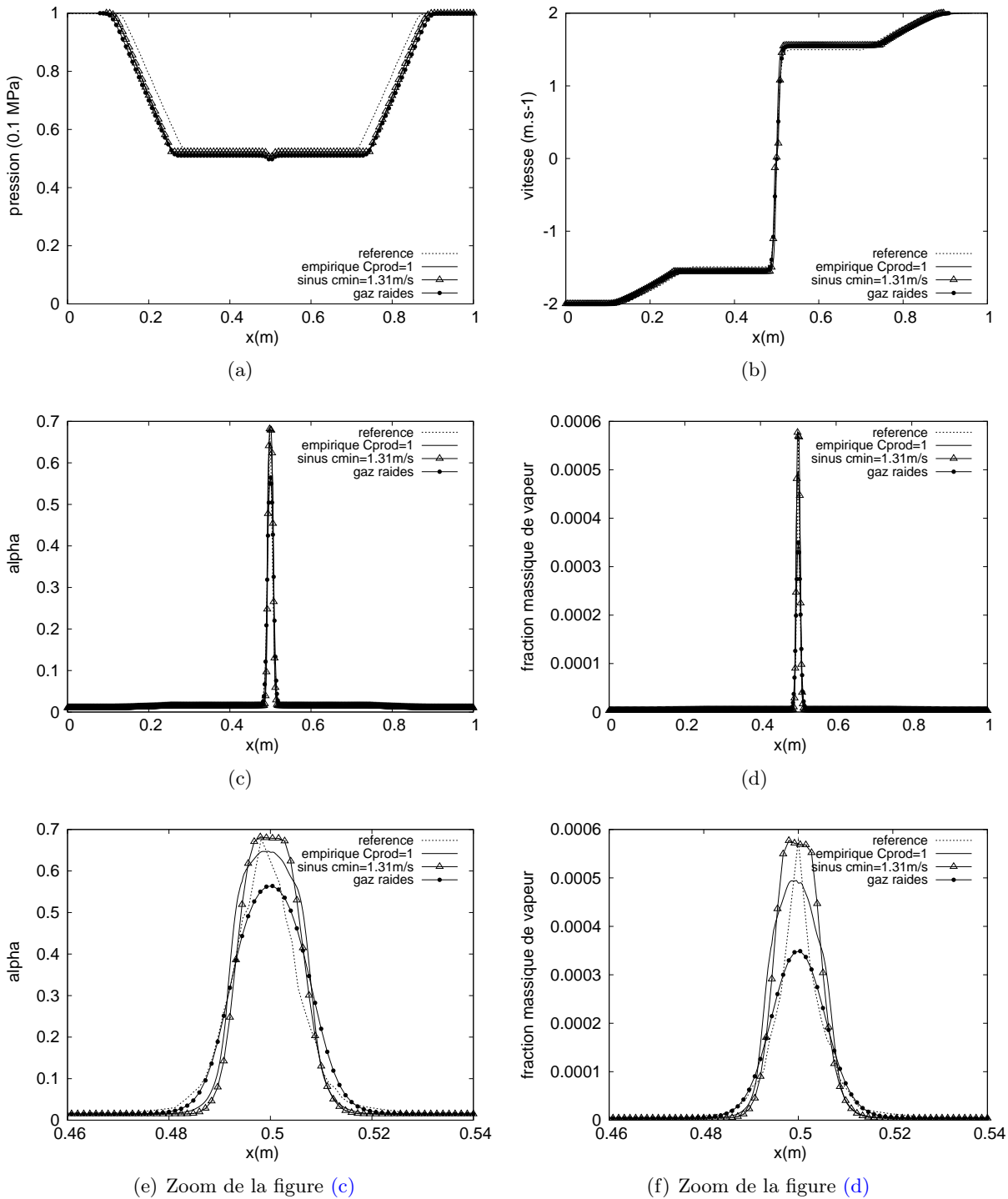


FIGURE 4.7 – Simulations avec un système à 4-équations avec transferts de masse. Comparaison avec la solution de référence (Zein et al. [190]) des résultats obtenus avec trois termes source : (a) profils de pression ; (b) profils de vitesse ; (c),(e) profils du taux de vide ; (d),(f) profils de la fraction volumique de vapeur. Résultats à  $t = 3,2 \text{ ms}$  et  $|u| = 2 \text{ m/s}$   $\alpha_0 = 10^{-2}$

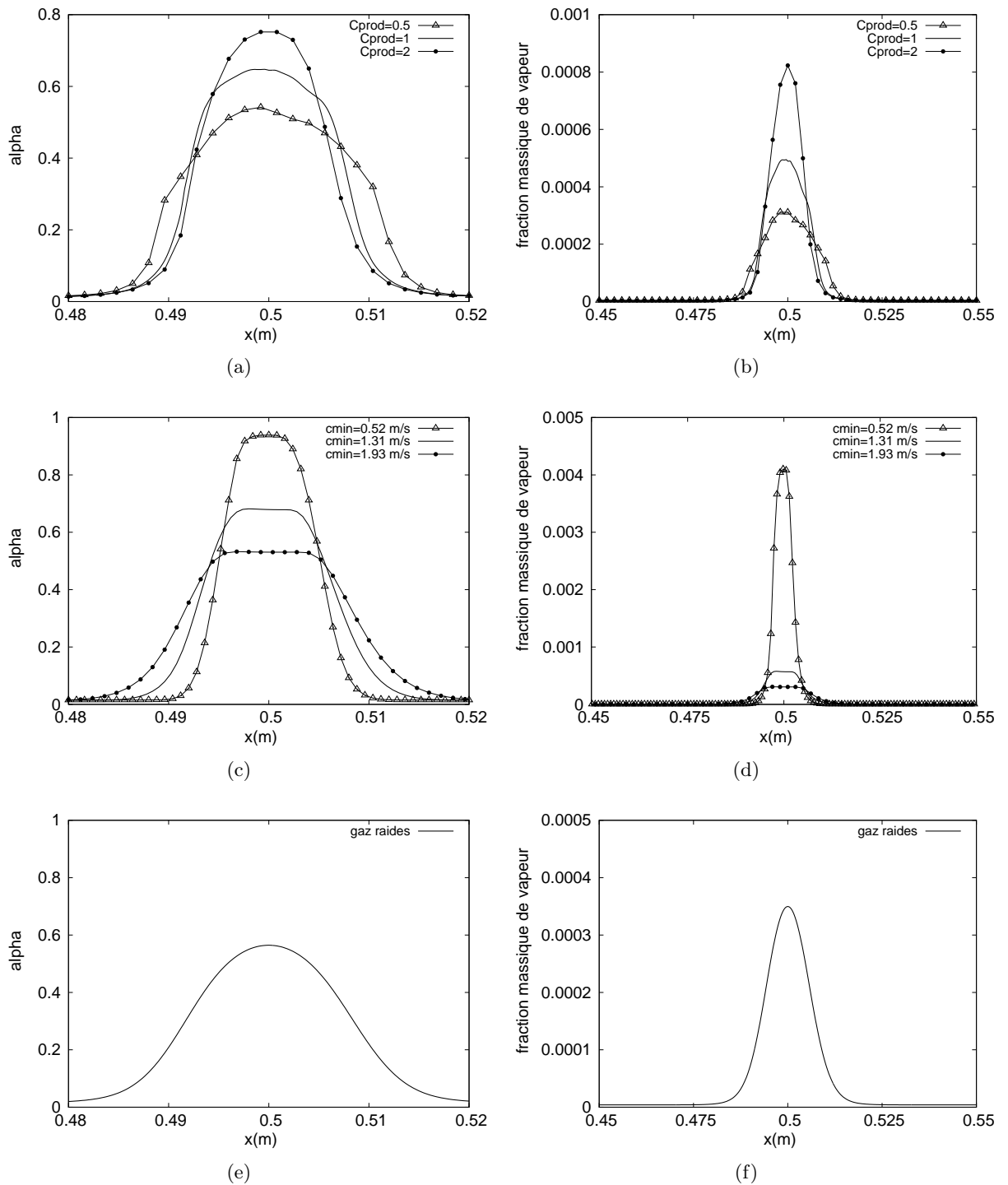


FIGURE 4.8 – Influence des paramètres des termes sources sur le taux de production de vapeur : (a)–(b) influence de  $C_{prod}$  pour le modèle empirique; (c)–(d) influence de  $c_{min}$  pour le modèle sinusoïdale; (e)–(f) modèle des gaz raides. Résultats à  $t = 3,2$  ms et  $|u| = 2$  m/s  $\alpha_0 = 10^{-2}$



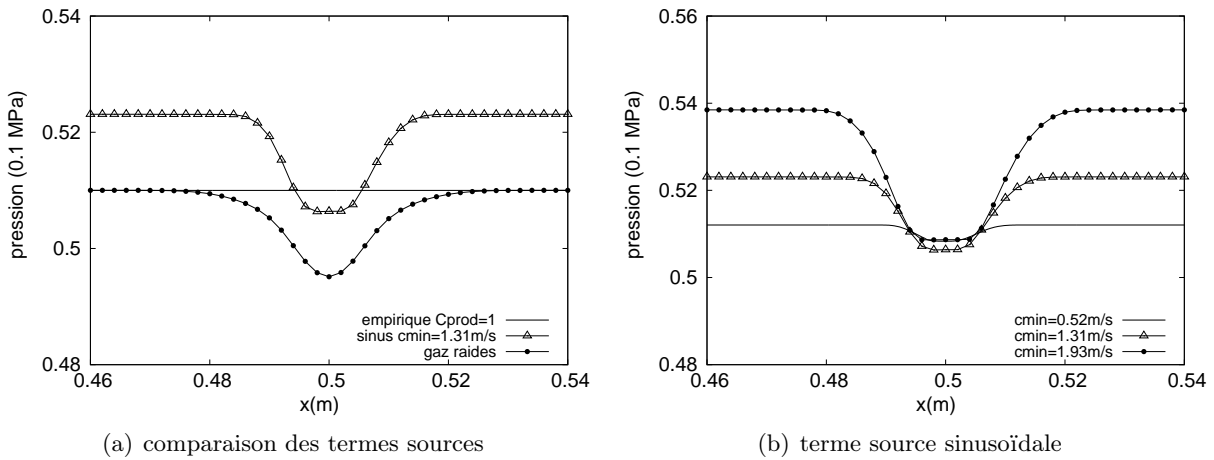


FIGURE 4.9 – Reproduction des fronts d'évaporation par la pression : (a) comparaison des résultats pour les trois termes sources ; (b) étude de l'influence de  $c_{min}$  pour un terme source sinusoïdale. Résultats à  $t = 3,2 \text{ ms}$  et  $|u| = 2 \text{ m/s}$   $\alpha_0 = 10^{-2}$

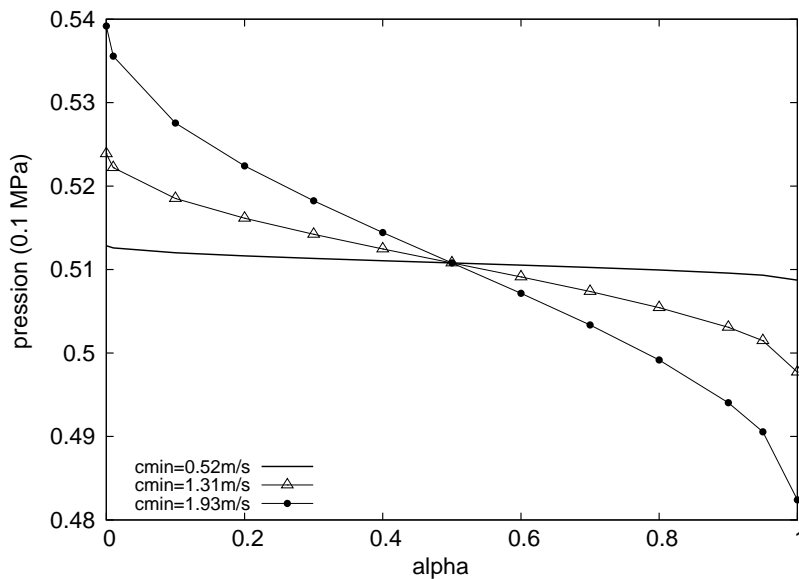


FIGURE 4.10 – Evolution de la pression pour une loi sinusoïdale. Représentation en fonction des conditions thermodynamiques :  $T_{ref} = 355 \text{ K}$ ,  $\rho_v^{sat} = 0,315 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_l^{sat} = 970,61 \text{ kg.m}^{-3}$ . En zone non cavitante ( $\alpha \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$ ), la loi prévoit des pressions d'autant plus élevées que le coefficient  $c_{min}$  est grand. A contrario, à l'intérieur de la poche de cavitation ( $\alpha > 0,5$ ) une valeur élevée de  $c_{min}$  engendre un calcul de pressions plus faibles.

modèle à 3-équations, sans équation de transport de taux de vide, pour lequel les calculs débutent en liquide pure puis sont raccordés au modèle de mélange. Il n'existe cependant pas de solution de référence et cette partie propose uniquement une comparaison entre modèles.

La vitesse du son dans le liquide est désormais amplifiée. Elle augmente en effet de  $c_{son}(\alpha = 10^{-2}) = 80 \text{ m/s}$  à  $c_{son}(\alpha = 10^{-10}) = 1400 \text{ m/s}$ . Les phénomènes observés jusqu'à maintenant sont par conséquent plus rapides et l'instant d'observation est réduit à  $t = 0,2 \text{ ms}$ .

La formation de la poche de cavitation est représentée pour chaque modèle en figure 4.11. La valeur de  $C_{prod} = 1$  usitée jusqu'ici pour le modèle empirique prévoit désormais des valeurs de taux de vide plus faibles à l'intérieur de la poche. Pour obtenir un taux de vapeur supérieure à 60% le coefficient nécessite d'être élevé d'un ou deux ordres de grandeurs soulignant ainsi la dépendance du modèle aux conditions d'utilisation. Par ailleurs, lorsque le modèle est calibré par rapport à la valeur maximale du taux de vide, la largeur de la poche est surestimée par rapport aux autres résultats.

Le modèle sinusoïdale est moins sensible aux conditions initiales. Bien que le taux de vide maximal à l'intérieur de la poche soit toujours dépendant du paramétrage de  $c_{min}$ , celui-ci atteint rapidement des valeurs similaires à la situation précédente pour  $c_{min} = 1,31 \text{ m/s}$ . Les simulations sont comparées au modèle à 3-équations sans transport de taux de vide et fermé par une loi d'état sinusoïdale. Pour une même valeur de  $c_{min}$  le système réduit prévoit des taux de vide inférieurs à ceux calculés par le modèle à 4-équations. Cette différence a été remarquée dans [53] où elle est amplifiée lorsque la vitesse des ondes de détentes s'accroît.

Enfin le modèle avec un terme source de mélange des gaz raides calcule une valeur maximale du taux de vide inférieure à celle prévue par le modèle sinusoïdale. Une même tendance avait déjà pu être observée pour les conditions initiales précédentes.

#### 4.4.5 Modélisation avec effets thermodynamiques

Une troisième série de calcul est effectuée en augmentant la discontinuité de vitesse initiale jusqu'à  $|u| = 100 \text{ m/s}$  dans un liquide contenant une fraction volumique initiale de vapeur de  $\alpha = 10^{-2}$ . Pour de telles vitesses, le phénomène d'évaporation est plus intense et le taux de vide à l'intérieur de la poche de cavitation atteint des valeurs proche de 1. Le changement de phase introduit des effets thermodynamiques : celui-ci ne se produit plus à température constante mais s'accompagne d'un refroidissement en deçà de la température de référence. Ce phénomène modifie la valeur de la pression de vaporisation qui doit désormais prendre en compte le changement de température à l'intérieur de la poche. La sensibilité de la pression à la température dépend de la nature du fluide. Une étude approfondie qui incorpore les résultats du fluide thermosensible, le fréon R114, est proposée dans [54]. Ce manuscrit se contente de présenter en figure 4.12 les résultats obtenus à l'instant  $t = 1,5 \text{ ms}$  pour le seul cas de l'eau et de les comparer aux solutions d'un modèle bi-fluides de Zein et al. [190].

Le coefficient  $\frac{dP_{vap}}{dT}$  formulé par l'équation (4.40) est évalué entre l'intervalle de température  $[250 \text{ K}, 355 \text{ K}]$  à la valeur de  $300 \text{ Pa/K}$ . Chaque modèle prévoit une même valeur du taux de vide tandis que la fraction massique de vapeur est deux fois plus élevée pour les modèles de mélange homogène. Cette différence s'explique par la méthode de calcul de la masse volumique

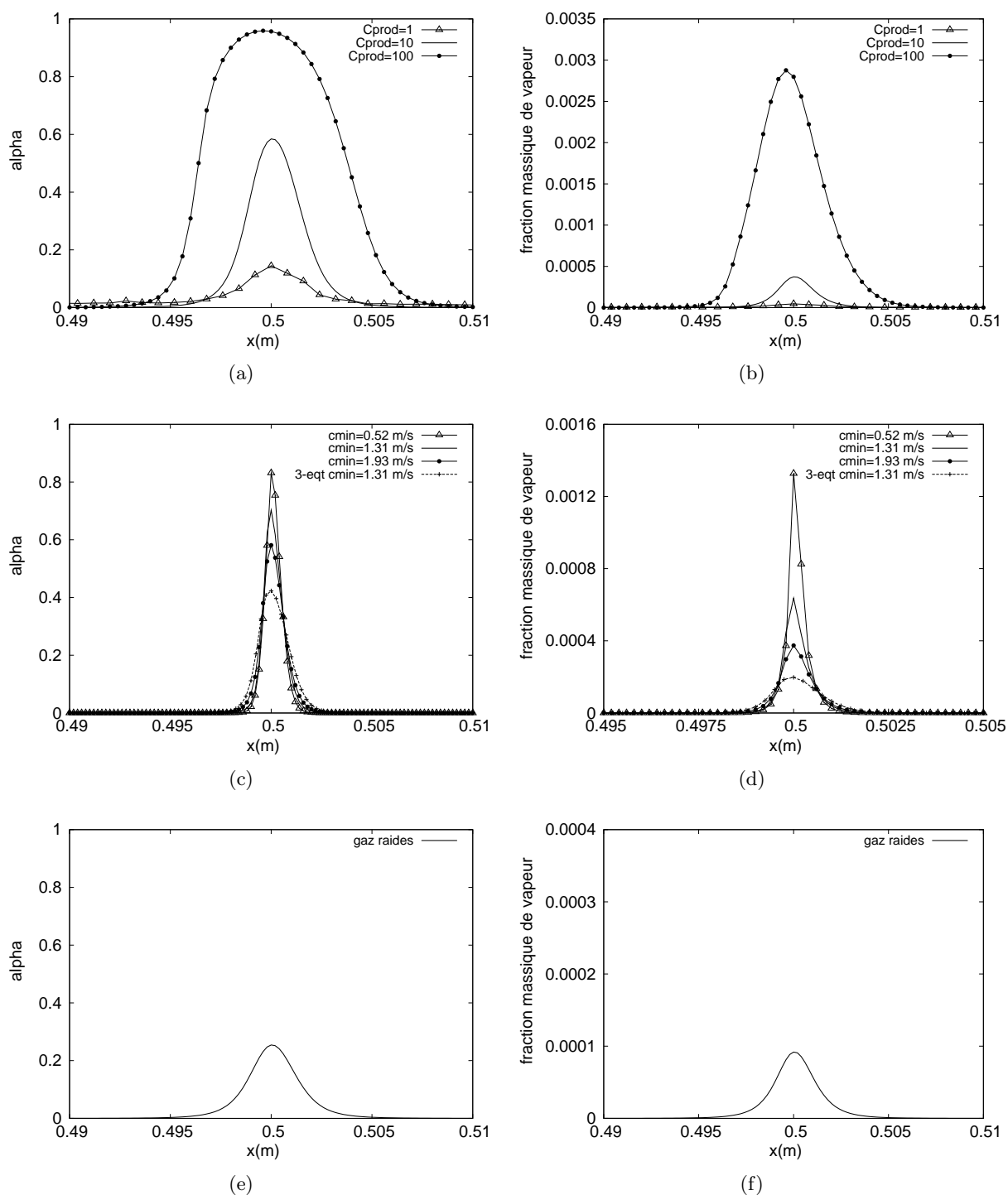


FIGURE 4.11 – Production du taux de vapeur en diminuant le taux de vide initial : (a)–(b) variation de  $C_{prod}$  pour terme source empirique ; (c)–(d) étude de l’influence de  $c_{min}$  pour un terme source sinusoïdale et comparaison au modèle à 3-équations ; (e)–(f) terme source de mélange des gaz raides. Résultats à  $t = 3,2 \text{ ms}$  et  $|u| = 2 \text{ m/s}$   $\alpha_0 = 10^{-10}$

de vapeur  $\rho_v$  déterminée à partir de la température de mélange pour un modèle homogène et à partir de la température de la phase vapeur pour un modèle bi-fluides. Une évaluation de la chute des températures provoquée par le changement de phase est proposée pour chaque modèle 1-fluide sans que ces résultats ne puissent être comparés au cas de référence bi-fluides, absent de l'article [190]. Cette diminution de la température s'accompagne d'une baisse de la pression de l'ordre de  $0,03 \text{ MPa}$  en deçà de la pression  $P_{vap}(T_{ref})$ . Le calcul des vitesses aux alentours des fronts d'évaporation diffère entre l'évolution très raide des modèles homogènes et le profil plus régulier du modèle bi-fluides. La vitesse du son dans le cas d'un modèle de mélange des gaz raides est légèrement inférieure à celle de Wallis à proximité des fronts d'évaporation tandis que le modèle sinusoïdale prévoit des valeurs largement inférieures. A l'intérieur de la cavité, la tendance s'inverse : les valeurs du modèle sinusoïdale se rapprochent de celles de Wallis tandis que le modèle de mélange des gaz raides prévoit des vitesses deux fois plus petites.

La figure 4.13 propose d'évaluer le rôle de la formulation avec effets thermodynamiques dans le calcul de la pression et de la vitesse du son. Il s'avère que lorsque les variations de température associées au changement de phase sont conséquentes, celles-ci modifient largement le calcul des pressions. Le calcul de la vitesse du son est également sensible au modèle employé, l'amplitude des variations est augmentée lorsque la formulation avec effets thermodynamique est usitée.

Les calculs qui font suite dans ce manuscrit se cantonnent au cas de l'eau froide dans des domaines d'application où les variations de température demeurent suffisamment faible pour que les simulations ne nécessitent pas d'activer les modèles avec effets thermodynamiques.

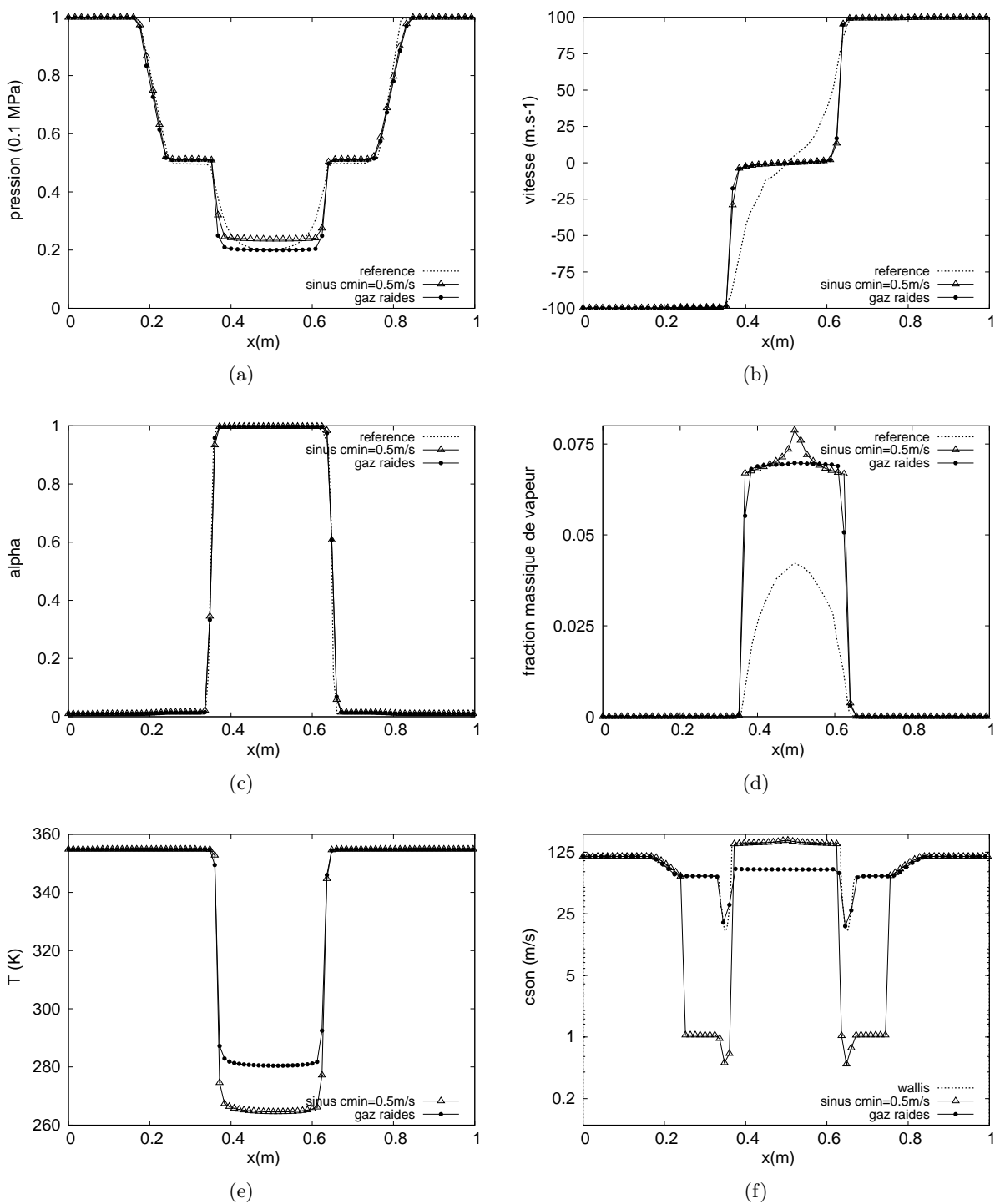


FIGURE 4.12 – Simulations avec un système à 4-équations avec transferts de masse. Comparaison avec la solution de référence (Zein et al. [190]) des résultats obtenus pour un modèle avec effets thermodynamiques : (a) profils de pression ; (b) profils de vitesse ; (c) profils du taux de vide ; (d) profils de la fraction volumique de vapeur ; (e) profils de la température ; (f) profils de la vitesse du son ;. Résultats à  $t = 1,5 \text{ ms}$  et  $|u| = 100 \text{ m/s}$   $\alpha_0 = 10^{-2}$

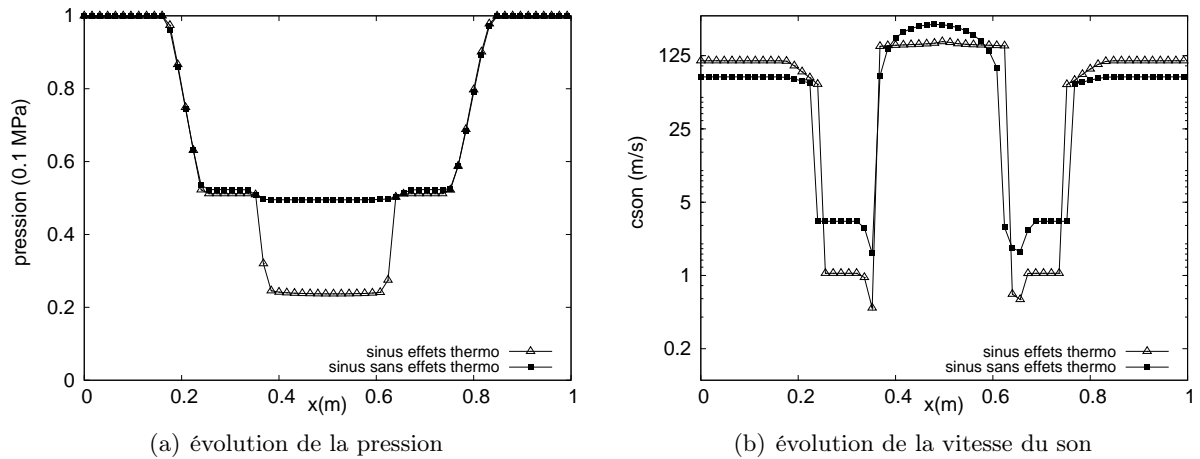


FIGURE 4.13 – Comparaison des modèles avec et sans effets thermodynamiques : (a) calcul des profils de pression ; (b) calcul des profils de la vitesse du son. Résultats à  $t = 1,5 \text{ ms}$  et  $|u| = 100 \text{ m/s}$   $\alpha_0 = 10^{-2}$

#### 4.4.6 Conclusion

Les simulations présentées dans cette section avaient pour objectif d'évaluer la capacité du code de calcul à reproduire les accroissements de la fraction volumique de vapeur causées soit par étirements du fluide sans transferts de masse entre phase, soit par cavitation. Le modèle prévoit d'adapter sa formulation lorsque les variations de température liées au changement de phase s'intensifient ou lorsque les calculs utilisent un fluide thermosensible. Les deux contributions du terme source de l'équation de transport de taux de vide sont donc tour à tour étudiées. En situation non cavitante, les profils de pressions, de vitesse, de masse volumique et de taux de vide sont en bon accord avec la solution de référence. Les résultats démontrent l'importance du terme modélisant les phénomènes de relaxation mécanique dans l'expression du terme source. Suite à l'étirement du fluide, celui-ci engendre une augmentation non négligeable de la fraction volumique de vapeur. La suite de l'étude propose de tester trois formulations du terme de transfert massique entre phase. Un premier modèle empirique basé sur la différence de pression de mélange par rapport à la pression de vaporisation est comparé à deux autres modèles. Ces deux modèles sont formulés en faisant l'hypothèse que les transferts de masse sont proportionnels au terme de la divergence des vitesses. Le coefficient de proportionnalité est déduit soit à partir de la loi d'état sinusoïdale, soit grâce à l'équation d'état de mélange des gaz raides. Les calculs révèlent la difficulté du modèle empirique à reproduire les variations de pression liées à l'évaporation et l'importance du paramétrage des coefficients. Les deux autres modèles sont plus aptes à présenter des résultats en accord avec la solution cavitante de référence. Ils s'adaptent également d'avantage aux modifications des conditions initiales. Le modèle sinusoïdale incorpore un coefficient  $c_{min}$  qui permet d'ajuster les déséquilibres de pression mais nécessite un calibrage de la part de l'utilisateur. Le modèle de mélange des gaz raides présente en revanche l'avantage d'être exempt de toute constante supplémentaire.

---

Enfin une dernière partie propose de comparer les simulations à celles obtenues dans le cas d'un modèle à 3-équations, sans transport de taux de vide. Les résultats révèlent l'atout de l'équation de transport supplémentaire sans laquelle le taux de fraction volumique de vapeur a tendance à être sous estimé en zone cavitante.





Deuxième partie

Code de calculs



## Chapitre 5

# Le code de calculs Caviflow

*Ce chapitre a pour objectif de présenter les schémas numériques du code de calculs. La résolution numérique des équations aux dérivées partielles repose sur la méthode des volumes finis et la simulation des phénomènes instationnaires fait intervenir une intégration temporelle à pas de temps dual. Les écoulements cavitants associent des zones liquide incompressibles et des zones de mélange fortement compressibles. Cette configuration nécessite une extension du solveur compressible vers les écoulements bas-Mach quasi-incompressibles. La méthode mise en place consiste à préconditionner le système afin de réduire l'écart entre les valeurs propres dans les zones de calcul à faible nombre de Mach. La seconde partie de ce chapitre présente le choix des conditions aux limites. La zone pariétale est le siège d'importants gradients de vitesse qui nécessitent, dans le cas présent, l'utilisation de lois de paroi. Enfin les conditions en entrée et en sortie sont déterminées à partir des relations caractéristiques d'un système hyperbolique.*

## 5.1 Le système d'équations

Le système des équations de conservation couplé à l'équation de transport du taux de vide  $\alpha$  et aux équations de transport des quantités turbulentes s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho_m u_{m,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,i} u_{m,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{m,ij} + \tau_{m,ij}}{\partial x_j} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho_m (E_m + k_m)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m (E_m + k_m) + p_m) u_{m,j}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\sigma_{m,ij} + \tau_{m,ij}) u_{m,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_{m,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_{m,j}^t}{\partial x_j} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_{m,j}}{\partial x_j} = (K + \alpha) \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho I} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \rho_m k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m k u_{m,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_m + \frac{\mu_m^t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \rho_m P_k - \rho_m \psi \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \rho_m \psi}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m \psi u_{m,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_m + \frac{\mu_m^t}{\sigma_\psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right] = C_{\psi 1} \rho_m \frac{\psi}{k} P_k - C_{\psi 2} \rho_m \frac{\psi^2}{k} \quad (5.6)$$

La variable  $k$  désigne l'énergie cinétique turbulente tandis que  $\psi$  réfère à la seconde variable transportée. Les équations de transport associées reprennent la formulation générale des modèles de turbulence à deux équations. Les termes de droite des équations (5.5) et (5.6) modélisent les phénomènes productifs et dissipatifs de la turbulence.

Le système d'équations précédent peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (F_c(w) - F_v(w, w_n))}{\partial x_j} = S(w) \quad (5.7)$$

où  $w$  représente le vecteur des variables conservatives,  $F_c$  le vecteur des flux convectifs,  $F_d$  le vecteur des flux visqueux et  $S$  le vecteur des termes sources comme explicités ci-après.

$$w = \begin{pmatrix} \rho_m \\ \rho_m u_{m,i} \\ \rho_m (E_m + k_m) \\ \alpha \\ \rho_m k \\ \rho_m \psi \end{pmatrix} \quad F_c = \begin{pmatrix} \rho_m u_{m,j} \\ \rho_m u_{m,i} u_{m,j} + p_m \\ \rho_m (E_m + k_m) + p_m \\ \alpha u_{m,j} \\ \rho_m k u_{m,j} \\ \rho_m \psi u_{m,j} \end{pmatrix}$$

$$F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{m,ij} + \tau_{m,ij} \\ (\sigma_{m,ij} + \tau_{m,ij}) u_{m,j} - q_{m,j} - q_{m,j}^t \\ 0 \\ \left( \mu_m + \frac{\mu_m^t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \\ \left( \mu_m + \frac{\mu_m^t}{\sigma_\psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (K + \alpha) \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho I} \\ \rho_m P_k - \rho_m \psi \\ C_{\psi 1} \rho_m \frac{\psi}{k} P_k - C_{\psi 2} \rho_m \frac{\psi^2}{k} \end{pmatrix}$$

## 5.2 L'approche volumes finis

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles du système (5.7) repose sur la méthode des volumes finis. Celle-ci consiste à découper le domaine de calcul en une somme finie de volumes de contrôle  $\mathcal{V}$  puis à intégrer les inconnues sur chaque volume. Le schéma numérique utilise une formulation *cell-centered* qui place les inconnues au centre de chaque maille. Pour un maillage structuré, ce schéma peut être représenté par la figure 5.1(a). Chaque volume de contrôle

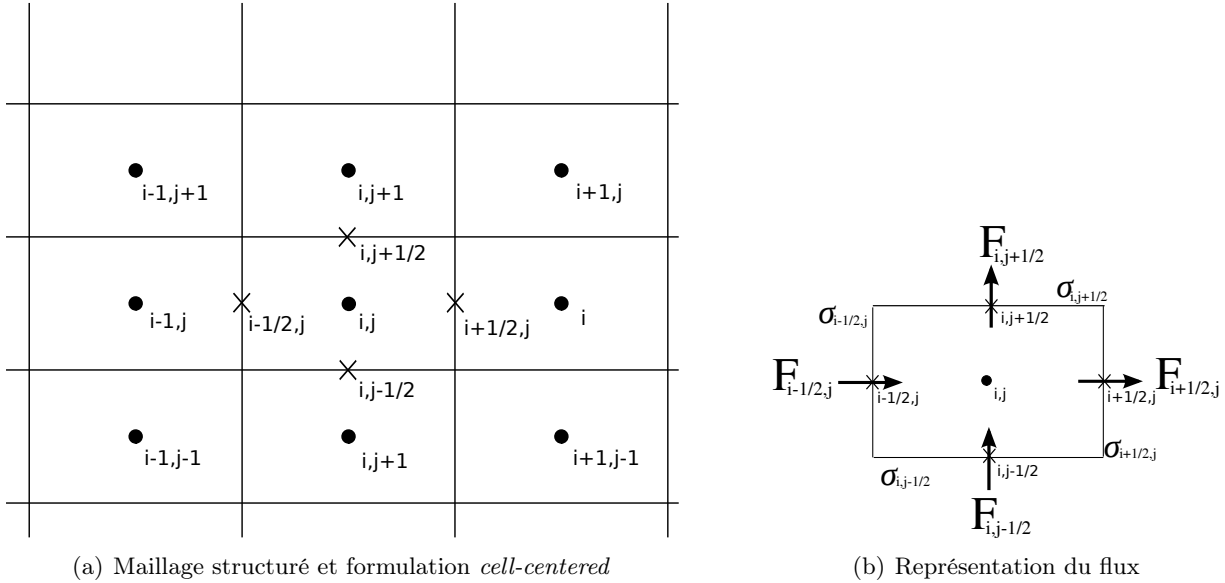


FIGURE 5.1 – Schéma de la discrétisation spatiale de la formulations *cell-centered* pour une méthode des volumes finis

est réperé par le point  $(i, j)$  situé en son centre ou les variables du vecteur  $w$  sont évaluées. Le système d'équations (5.7) est intégré spatialement sur chaque volume de contrôle.

En rappelant le théorème de Green-Ostrogradski sur un volume  $\mathcal{V}$  délimitée par la frontière  $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial F_c(w_{i,j})}{\partial x_j} dV = \int_{\mathcal{S}} F_c(w_{i,j}) n_j d\sigma$$

le système (5.7) s'écrit sous sa forme semi-discrétisé :

$$\begin{aligned} & \int_{V_{i,j}} \frac{\partial w_{i,j}}{\partial t} dV_{i,j} \\ & - F_{c_{i-1/2,j}} \sigma_{i-1/2,j} + F_{c_{i+1/2,j}} \sigma_{i+1/2,j} - F_{c_{i,j-1/2}} \sigma_{i,j-1/2} + F_{c_{i,j+1/2}} \sigma_{i,j+1/2} \\ & - F_{v_{i-1/2,j}} \sigma_{i-1/2,j} + F_{v_{i+1/2,j}} \sigma_{i+1/2,j} - F_{v_{i,j-1/2}} \sigma_{i,j-1/2} + F_{v_{i,j+1/2}} \sigma_{i,j+1/2} = S_{i,j} V_{i,j} \end{aligned}$$

où la représentation du flux  $F$  au travers de chaque interface  $\sigma$  est schématisé en figure 5.1(b) Soit une fonction  $\phi_{i,j}$  sur un maillage cartésien uniforme ( $x_i = i\delta x, y_j = j\delta y$ ), avec les pas d'espace  $\delta x$  et  $\delta y$  et le pas de temps  $\Delta t$  associés à ce maillage. La suite du raisonnement utilise plusieurs opérateurs et quantités définis ci-après.

- Les opérateurs aux différences  $\delta\phi$  :

$$\delta_1\phi_{i+\frac{1}{2},j} = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} \quad (5.8)$$

$$\delta_2\phi_{i,j+\frac{1}{2}} = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} \quad (5.9)$$

- Les opérateurs aux moyennes  $\mu\phi$  :

$$\mu_1\phi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j}) \quad (5.10)$$

$$\mu_2\phi_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}) \quad (5.11)$$

- La quantité  $\Delta w_{i,j}^n = w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n$
- Les quantités  $\sigma_1 = \frac{\Delta t}{\delta x}$  et  $\sigma_2 = \frac{\Delta t}{\delta y}$
- La matrice jacobienne des flux convectifs par direction  $x$  :

$$A_c = \frac{\partial F_{c_x}}{\partial w}$$

- La matrice jacobienne des flux convectifs par direction  $y$  :

$$B_c = \frac{\partial F_{c_y}}{\partial w}$$

La résolution consiste à calculer les flux au travers de chaque interface du volume de contrôle. Le traitement des flux convectifs est découplé des flux visqueux tandis que les termes sources contenus dans les équations de transport sont traités à part. Les parties qui suivent s'emploient à détailler les formulations explicites et implicites du système différentiel.

## 5.3 Schéma explicite

### 5.3.1 Présentation

La résolution explicite consiste à évaluer les termes de discrétisation spatiale à l'instant  $n$ . Le système exact (5.7) peut être approché par le schéma explicite suivant :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t} + \left( \frac{\delta_1(F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2(F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} \right)_{i,j}^n = S_{i,j}^n \quad (5.12)$$

En approchant les flux convectifs et visqueux par les flux numériques, il vient :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t} + \left( \frac{(F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{c_{i-\frac{1}{2},j}}) - (F_{v_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{v_{i-\frac{1}{2},j}})}{\delta x} + \frac{(F_{c_{i,j+\frac{1}{2}}} - F_{c_{i,j-\frac{1}{2}}}) - (F_{v_{i,j+\frac{1}{2}}} - F_{v_{i,j-\frac{1}{2}}})}{\delta y} \right)^n = S_{i,j}^n \quad (5.13)$$

Les flux convectifs  $F_c$  dépendent uniquement des variables conservatives du vecteur  $w$  tandis que les flux visqueux  $F_v$  font intervenir à la fois les variables de  $w$  mais également leurs gradients dans chaque direction. Par la suite les flux convectifs et visqueux seront ainsi traités séparément.

### 5.3.2 Discrétisation des flux convectifs

Les flux numériques aux faces des cellules de contrôle  $(i, j)$  peuvent être évalués en utilisant les états présents de part et d'autre de la face considérée. Ainsi, le flux convectif qui traverse la face  $\sigma_{i+\frac{1}{2},j}$  est évalué à partir des valeurs au sein des cellules  $(i, j)$  et  $(i+1, j)$  :

$$F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}(F_{c_{i,j}} + F_{c_{i+1,j}}) \quad (5.14)$$

L'utilisation de ce schéma centré entraîne une erreur de troncature à l'ordre 2 en espace. Ce schéma est dit instable parce qu'insuffisamment diffusif et nécessite d'être stabilisé à l'aide d'une dissipation artificielle. Pour cela, les coefficients  $D_1$  et  $D_2$  sont respectivement introduits dans les directions  $x$  et  $y$  afin de stabiliser le schéma. Dans la direction  $x$  cette modification s'écrit :

$$F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}(F_{c_{i+1,j}} + F_{c_{i,j}}) - D_{1_{i+\frac{1}{2},j}}(w_{i+1,j} - w_{i,j}) \quad (5.15)$$

Finalement, en définissant les dissipations numériques  $d_1(w) = D_1(w)\delta_1 w$  et  $d_2(w) = D_2(w)\delta_2 w$ , la discrétisation des flux convectifs au travers des surfaces  $\sigma_{i+\frac{1}{2},j}$  et  $\sigma_{i,j-\frac{1}{2}}$  s'écrit :

$$F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} = ((\mu_1 F_c) - d_1(w))_{i+\frac{1}{2},j} \quad (5.16)$$

$$F_{c_{i,j-\frac{1}{2}}} = ((\mu_2 F_c) - d_2(w))_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

L'estimation de la dissipation artificielle peut se faire au moyen de différents schémas qui sont détaillés dans les sous parties suivantes.

#### 5.3.2.1 Le schéma de Roe

Le schéma de Roe s'établit à partir de l'expression initiale des flux convectifs à l'interface  $(i+\frac{1}{2}, j)$  :

$$F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}(F_{c_{i,j}} + F_{c_{i+1,j}}) = \frac{1}{2}A_c(w_{i,j} + w_{i+1,j}) \quad (5.18)$$

Ce flux numérique conduit à un schéma centré instable qui peut être stabilisé en le décentrant suivant le signe des valeurs propres de  $A_c$  de sorte que :

$$F_c^d{}_{i+\frac{1}{2},j} = F_{c_{i,j}}^+ + F_{c_{i+1,j}}^+ = A_c^+ \omega_{i,j} + A_c^- w_{i+1,j}$$

où, en introduisant  $\Lambda^+$ , la matrice diagonale des valeurs propres positives de  $A_c$ , et  $\Lambda^-$ , la matrice diagonale des valeurs propres négatives, les matrices  $A_c^+$  et  $A_c^-$  peuvent s'exprimer :

$$\begin{aligned} A_c^+ &= R\Lambda^+R^{-1} \\ A_c^- &= R\Lambda^-R^{-1} \end{aligned}$$

En introduisant les relations

$$\begin{aligned} A_c &= A_c^+ + A_c^- \\ |A_c| &= A_c^+ - A_c^- \end{aligned}$$

le flux décentré peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} F_{c_{i+\frac{1}{2},j}}^d &= \frac{1}{2}A_c(w_{i+1,j} - w_{i,j}) - \frac{1}{2}(A_c^+ - A_c^-)(w_{i+1,j} - w_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{c_{i+1,j}} + F_{c_{i,j}}) - \frac{1}{2}|A_c|(w_{i+1,j} - w_{i,j}) \end{aligned}$$

Dans le cas d'étude, la matrice  $A_c$  dépend de  $w$  et par conséquent, il est nécessaire d'introduire un état intermédiaire  $\tilde{w}$  pour calculer la valeur  $\tilde{A}_c$  de  $A_c$ . La matrice  $\tilde{A}_c$  dépend des états à droite et à gauche et est considérée comme figée entre deux instants successifs  $n$  et  $n + 1$ . Elle doit respecter les conditions suivantes :

- $\tilde{A}_c$  doit être diagonalisable à valeurs propres réelles
- $\tilde{A}_c(w_R, w_L)(w_R - w_L) = F_{c_x}(w_R) - F_{c_x}(w_L)$
- $\tilde{A}_c(w, w) = A(w)$

Roe introduit un vecteur moyen  $\tilde{w}$  définit par :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}} \\ \tilde{\rho} &= a\rho_L \\ \tilde{u} &= \frac{u_L + au_R}{1+a} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L + aH_R}{1+a} \end{aligned}$$

en rappelant que  $H = \rho E + p$ . Il démontre que la matrice  $\tilde{A}_c$  est identique à la matrice  $A_c(\tilde{w})$  [133]. Finalement, le schéma de Roe s'écrit sous la forme :

$$F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}(F_{c_{i+1,j}} + F_{c_{i,j}}) - D_{1_{i+\frac{1}{2},j}}(w_{i+1,j} - w_{i,j}) \quad \text{avec} \quad D_{1_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}|\tilde{A}_{c_{i+\frac{1}{2},j}}| \quad (5.19)$$

### 5.3.2.2 Le schéma de Rusanov

Le schéma de Rusanov utilise des coefficients de dissipation numérique purement scalaires qui s'écrivent :

$$D_1(w) = \frac{1}{2}\rho(A_c) \quad \text{et} \quad D_2(w) = \frac{1}{2}\rho(B_c)$$

où  $\rho$  désigne le rayon spectral de la Jacobienne associée.

### 5.3.2.3 Le schéma de Jameson-Schmidt-Turkel

Le schéma consiste à ajouter un terme en dérivée première du vecteur  $w$  avec un coefficient  $\epsilon^{(2)}$  et un terme en dérivée troisième du vecteur  $w$  avec un coefficient  $\epsilon^{(4)}$ . Ces deux termes sont "pilotés" respectivement par des coefficients  $k^{(2)}$  et  $k^{(4)}$  qui peuvent être ajustés pendant la simulation. Ainsi

$$\begin{aligned} D_{1_{i+\frac{1}{2},j}}(\delta w) &= D_{1_{i+\frac{1}{2},j}}(w_{i+1,j} - w_{i,j}) = \epsilon^{(2)}{}_{i+\frac{1}{2},j}\rho(A_{i+\frac{1}{2},j})(w_{i+1,j} - w_{i,j}) \\ &\quad - \epsilon^{(4)}{}_{i+\frac{1}{2},j}\rho(A_{i+\frac{1}{2},j})(w_{i+2,j} - 3w_{i+1,j} + 3w_{i,j} - w_{i-1,j}) \end{aligned}$$



Le coefficient  $\epsilon^{(2)}$  est défini par :

$$\begin{aligned}\epsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j} &= k^{(2)} \max[\nu_i; \nu_{i+1}] \\ \nu_i &= \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}}\end{aligned}$$

$k^{(2)}$  étant un paramètre qui peut être fixé entre 0 et 1. Pour les écoulements cavitants le senseur  $\nu$  peut être construit sur la masse volumique  $\rho$  tel que :

$$\nu_i = \frac{|\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}|}{\rho_{i+1} + 2\rho_i + \rho_{i-1}}$$

Enfin le coefficient  $\epsilon^{(4)}$  a pour but d'amortir les oscillations de faibles amplitudes qui empêchent le schéma de converger vers un état stationnaire. Ce terme n'est activé que loin des chocs par la formule :

$$\epsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j} = \max\left[0, k^{(4)} - \epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^2\right]$$

avec  $k^{(4)}$  un paramètre compris entre 0,008 et 0,064.

Dans les simulations qui suivent, le code Caviflow utilise le schéma de Jameson-Schmidt-Turkel pour la discrétisation des flux convectifs moyen et un schéma de Roe pour la discrétisation des flux convectifs du champ turbulent.

#### 5.3.2.4 Discrétisation des flux visqueux

L'expression des flux visqueux de l'équation (5.7) nécessite l'évaluation du vecteur  $w$  et de leurs dérivées spatiales  $\frac{\partial w}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w}{\partial y}$  sur chacune des faces du volume de contrôle. Il apparaît en effet que

$$F_{v_{i+\frac{1}{2},j}} = F_v \left( w_{i+\frac{1}{2},j}; \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j}; \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \right) \quad (5.20)$$

Pour un maillage cartésien régulier de pas d'espace  $\delta_x$  et  $\delta_y$  d'ordre  $h$ , les quantités  $w_{i+\frac{1}{2},j}$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$  et  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$  sont évaluées en utilisant des formules centrées d'ordre 2.

$$\begin{aligned}w_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{w_{i,j} + w_{i+1,j}}{2} + O(h^2) &= (\mu_1 w)_{i+\frac{1}{2},j} + O(h^2) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\delta x} + O(h^2) &= \frac{(\delta_1 w)_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x} + O(h^2) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\delta y} + O(h^2)\end{aligned}$$

Le calcul du vecteur  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$  nécessite d'évaluer les états de  $w$  aux interfaces  $\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$  et  $\sigma_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ . Cette opération s'obtient en faisant la moyenne des quatres cellules adjacentes.

$$w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{w_{i,j} + w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1} + w_{i,j+1}}{4} + O(h^2) = (\mu_1 \mu_2 w)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

et donc :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{(\delta_2 \mu_1 \mu_2 w)_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} + O(h^2)$$

Le flux visqueux s'exprime finalement :

$$F_{v_{i+\frac{1}{2},j}} = F_v \left( \mu_1 w_{i+\frac{1}{2},j}; \frac{\delta_1 w_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x}; \frac{(\delta_2 \mu_1 \mu_2 w)_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} \right) \quad (5.21)$$

## 5.4 Schéma implicite

### 5.4.1 Présentation

Le schéma explicite est contraint par la condition de stabilité CFL, restrictive sur le pas de temps qui doit être choisi pour atteindre l'état stationnaire. Ainsi le schéma explicite (5.12) exigera un grand nombre d'itérations en temps pour converger vers l'état stationnaire. En contrepartie ces itérations seront peu coûteuses puisque le caractère explicite du schéma autorise un passage direct de l'état  $n$  à l'état  $n+1$ .

Avec l'utilisation d'un schéma implicite, la contrainte de stabilité dans le choix de  $\Delta t$  n'est plus nécessaire. Le flux numérique  $F^n$  est remplacé par son évaluation  $F^{n+1}$ , ce qui conduit au schéma :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t} + \left( \frac{(F_{c_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{c_{i-\frac{1}{2},j}}) - (F_{v_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{v_{i-\frac{1}{2},j}})}{\delta x} + \frac{(F_{c_{i,j+\frac{1}{2}}} - F_{c_{i,j-\frac{1}{2}}}) - (F_{v_{i,j+\frac{1}{2}}} - F_{v_{i,j-\frac{1}{2}}})}{\delta y} \right)^{n+1} = S_{i,j}^{n+1}$$

Le terme source au pas de temps  $(n+1)\Delta t$  peut être évalué à l'aide d'un développement de Taylor faisant intervenir sa jacobienne. Néanmoins en première approximation dans les calculs celui-ci est pris égale à sa valeur au temps  $n\Delta t$  :

$$S_{i,j}^{n+1} \approx S_{i,j}^n$$

### 5.4.2 Discrétisation des flux convectifs

L'évaluation des flux convectifs au pas de temps  $n+1$  utilise un développement de Taylor qui permet, après linéarisation autour du pas de temps  $n$ , d'obtenir les relations :

$$(F_{c_x})^{n+1} = (F_{c_x})^n + (A_c)^n \mu_1 \Delta w^n - D_1^n \delta_1 \Delta w^n \quad (5.22)$$

$$(F_{c_y})^{n+1} = (F_{c_y})^n + (B_c)^n \mu_2 \Delta w^n - D_2^n \delta_2 \Delta w^n \quad (5.23)$$

### 5.4.3 Discrétisation des flux visqueux

Le développement de Taylor des flux visqueux est plus complexe puisqu'il fait intervenir les matrices jacobiennes des dérivées spatiales de  $w$ . Afin d'obtenir une contribution visqueuse

aussi simple que l'expression des flux numériques convectifs non visqueux, certaines matrices jacobiniennes sont écartées pour obtenir au final un développement simplifié :

$$F_{v_x}^{n+1} = F_{v_x}^n + (A_{v1})^n \frac{(\delta_1 \Delta w)^n}{\delta x} \quad (5.24)$$

$$F_{v_y}^{n+1} = F_{v_y}^n + (B_{v2})^n \frac{(\delta_1 \Delta w)^n}{\delta y} \quad (5.25)$$

où

$$A_{v1} = \frac{\partial F_{v_x}}{\partial w} \quad \text{et} \quad B_{v2} = \frac{\partial F_{v_y}}{\partial w}$$

#### 5.4.4 Ecriture simplifiée du schéma implicite

Les discrétisations précédentes permettent d'écrire le système implicite sous une forme simplifiée :

$$\mathcal{H}_{i,j}^n \Delta w_{i,j}^n = -\Delta t \mathcal{R}_{i,j}^n$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta w_{i,j}^n &= w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n \\ \mathcal{R}_{i,j}^n &= \left( \frac{\delta_1 (F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2 (F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} - S \right)_{i,j}^n \\ \mathcal{H}_{i,j}^n &= \left( I_d + \sigma_1 \delta_1 (A_c)^n \mu_1 + \sigma_2 \delta_2 (B_c)^n \mu_2 - \sigma_1 \delta_1 \left( D_1 + \frac{A_{v1}}{\delta x} \right)^n \delta_1 - \sigma_1 \delta_2 \left( D_2 + \frac{B_{v2}}{\delta y} \right)^n \delta_2 \right)_{i,j} \end{cases}$$

## 5.5 Schéma implicite sans matrice

### 5.5.1 Discrétisation des flux convectifs

Les formulations (5.22) et (5.23) peuvent être simplifiées par une approche sans matrice qui admet les simplifications qui suivent.

- Les matrices de dissipation  $D^n$  sont remplacées par la dissipation scalaire du schéma de Rusanov  $\frac{1}{2} \rho_c^n$  qui fait intervenir le rayon spectral  $\rho_c^n$  de  $D^n$ .
- Les approximations  $(A_c)^n \mu_1 \Delta w^n \approx \mu_1 \Delta (F_{c_x})^n$  et  $(B_c)^n \mu_2 \Delta w^n \approx \mu_2 \Delta (F_{c_y})^n$  sont réalisées.

Ces simplifications conduisent à l'écriture suivante des flux convectifs sans matrice :

$$(F_{c_x})^{n+1} = (F_{c_x})^n + \mu_1 \Delta (F_{c_x})^n - \frac{1}{2} \rho_{c1}^n \delta_1 \Delta w^n \quad (5.26)$$

$$(F_{c_y})^{n+1} = (F_{c_y})^n + \mu_2 \Delta (F_{c_y})^n - \frac{1}{2} \rho_{c2}^n \delta_2 \Delta w^n \quad (5.27)$$

### 5.5.2 Discrétisation des flux visqueux

L'expression sans matrice des flux visqueux est également simplifiée par l'utilisation du rayon spectral. Les scalaires  $\rho_{v1}$  et  $\rho_{v2}$ , respectivement issus du calcul des rayons spectraux des matrices  $\frac{A_{v1}}{\delta x}$  et  $\frac{B_{v2}}{\delta y}$  s'expriment :

$$\rho_{v1} = \rho \left( \frac{A_{v1}}{\delta x} \right) \quad \text{et} \quad \rho_{v2} = \rho \left( \frac{B_{v2}}{\delta y} \right) \quad (5.28)$$

La formulation des flux visqueux sans matrice devient alors :

$$F_{v_x}^{n+1} = F_{v_x}^n + (\rho_{v1})^n (\delta_1 \Delta w)^n \quad (5.29)$$

$$F_{v_y}^{n+1} = F_{v_y}^n + (\rho_{v2})^n (\delta_2 \Delta w)^n \quad (5.30)$$

### 5.5.3 Le système implicite sans matrice

Les simplifications précédentes conduisent à la ré-écriture du système implicite sous la forme :

$$\mathcal{H}_{i,j}^n \Delta w_{i,j}^n = -\Delta t \mathcal{R}_{i,j}^n - \sigma_1 \delta_1 \mu_1 (\Delta F_{c_x})_{i,j}^n - \sigma_2 \delta_2 \mu_2 (\Delta F_{c_y})_{i,j}^n$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta w_{i,j}^n &= w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n \\ \mathcal{R}_{i,j}^n &= \left( \frac{\delta_1 (F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2 (F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} - S \right)_{i,j}^n \\ \mathcal{H}_{i,j}^n &= \left( I_d - \sigma_1 \delta_1 \left( \frac{1}{2} \rho_{c1} + \rho_{v1} \right)^n \delta_1 - \sigma_2 \delta_2 \left( \frac{1}{2} \rho_{c2} + \rho_{v2} \right)^n \delta_2 \right)_{i,j} \end{cases}$$

## 5.6 Intégration temporelle

### 5.6.1 Approche à pas de temps local

La dérivée temporelle des différents schémas présentés jusqu'à maintenant est évaluée par un schéma du premier ordre en temps :

$$\frac{\partial w_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (5.31)$$

Le pas de temps d'intégration  $\Delta t$  peut être fixée par une méthode à *pas de temps local* qui consiste à fixer pour chaque cellule du maillage un  $\Delta t$  spécifique. Ce pas de temps a pour contrainte de respecter une condition de stabilité de type CFL telle que à la maille  $(i, j)$  :

$$(\Delta t)_{i,j} = CFL \min \left[ \frac{\delta x}{\rho(A_c)}, \frac{\delta y}{\rho(B_c)} \right]$$

où  $\rho(A_c)$  (respectivement  $\rho(B_c)$ ) désigne le rayon spectral de la matrice jacobienne des flux convectifs par direction  $x$  (respectivement par direction  $y$ ). Le nombre de CFL fixé par l'utilisateur doit ainsi être inférieur au CFL limite de la zone de stabilité du schéma numérique employé.

Dans les études qui suivent, les calculs utilisent l'approche à pas de temps local lors de l'initialisation. Cette étape ne converge pas forcément vers une solution stationnaire mais elle est, dans un second temps, relayée par une méthode à pas de temps dual (voir partie 5.6.2) utilisée pour la simulation d'écoulements instationnaires.

### 5.6.2 Approche à pas de temps dual

La résolution des écoulements instationnaires, peut être envisagée à partir du schéma implicite (5.22) en utilisant dans chacune des cellules un pas de temps unique  $\Delta t$ . Cette technique à *pas de temps global* fait apparaître une discrétisation  $\frac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t}$  précise à l'ordre 1 en temps. L'inconvénient que présente cette approche réside dans l'utilisation d'un pas de temps suffisamment petit suivant la précision souhaitée.

Cette solution est abandonnée au profit d'une approche à *pas de temps dual*. Dans un premier temps, une discrétisation à l'ordre 2 en temps est appliquée au schéma implicite en vue d'améliorer la précision du calcul :

$$\frac{3w_{i,j}^{n+1} - 4w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \left( \frac{\delta_1(F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2(F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} \right)_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n \quad (5.32)$$

La résolution des équations instationnaires consiste à résoudre le schéma (5.32) à chaque pas de temps  $\Delta t$  avant de passer à l'itération suivante. Pour cela, un second temps fictif  $\tau$  est introduit au sein de chaque pas de temps physique  $\Delta t$ . Le passage d'une itération physique à une autre nécessite la résolution d'un système stationnaire en itérant sur le pas de temps fictif. Un terme artificiel de dérivée en temps fictif est ajouté au système (5.32) et conduit à la discrétisation suivante :

$$\frac{w_{i,j}^{n,m+1} - w_{i,j}^{n,m}}{\Delta \tau} + \frac{3w_{i,j}^{n,m+1} - 4w_{i,j}^{n,m} + w_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \left( \frac{\delta_1(F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2(F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} \right)_{i,j}^{n,m+1} = S_{i,j}^n \quad (5.33)$$

Ce schéma ajoute donc aux itérations  $n$  du pas de temps physique  $\Delta t$  les sous-itérations  $m$  du pseudo pas de temps  $\Delta \tau$ . L'état  $w^{n,m+1}$  correspond ainsi au temps fictif  $(m+1)\Delta \tau$  lors du processus de convergence de l'état physique au temps  $n\Delta t$  vers le temps  $(n+1)\Delta t$ . La convergence est obtenue théoriquement lorsque les sous itérations  $m$  ont atteint l'état stationnaire, c'est-à-dire lorsque  $\Delta w^{n,\infty} = 0$ . Pour ce type de résolution, seul le pas de temps fictif  $\Delta \tau$  est soumis à une condition de stabilité type CFL, telle que :

$$(\Delta \tau)_{i,j} = CFL \min \left[ \frac{\delta x}{\rho(A_c)}, \frac{\delta y}{\rho(B_c)} \right]$$

En pratique le système passe à l'itération physique suivante si le processus itératif en pas de temps dual vérifie : soit un critère sur le résidu, soit un avancement limite de sous-itérations  $m$ . La linéarisation des flux numériques s'effectue autour du temps fictif  $(n, m)$  pour mener au système implicite sans matrice suivant :

$$\mathcal{H}_{i,j}^{n,m} \Delta w_{i,j}^{n,m} = -\Delta \tau \mathcal{R}_{i,j}^{n,m} - \sigma_1 \delta_1 \mu_1 (\Delta F_{c_x})_{i,j}^{n,m} - \sigma_2 \delta_2 \mu_2 (\Delta F_{c_y})_{i,j}^{n,m}$$

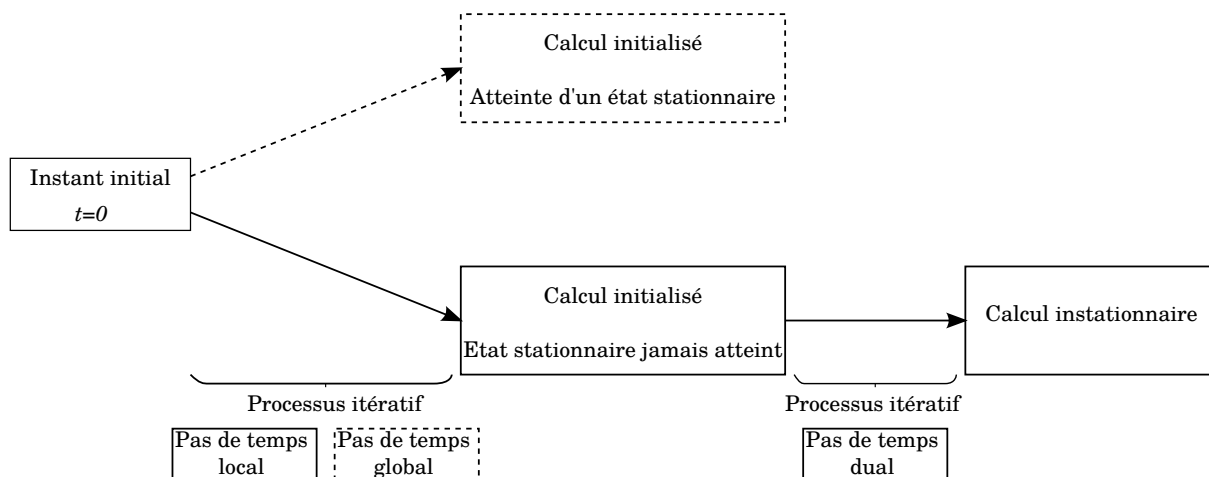


FIGURE 5.2 – Mise en place d'un calcul instationnaire

avec :

$$\begin{cases} \Delta w_{i,j}^{n,m} &= w_{i,j}^{n,m+1} - w_{i,j}^n \\ \mathcal{R}_{i,j}^{n,m} &= \frac{3w_{i,j}^{n,m} - 4w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \left( \frac{\delta_1(F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2(F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} - S \right)^{n,m} \\ \mathcal{H}_{i,j}^{n,m} &= \left( \left( 1 + \frac{3}{2}\lambda \right) I_d - \sigma_1 \delta_1 \left( \frac{1}{2}\rho_{c1} + \rho_{v1} \right)^{n,m} \delta_1 - \sigma_2 \delta_2 \left( \frac{1}{2}\rho_{c2} + \rho_{v2} \right)^{i,j} \delta_2 \right)^{i,j} \end{cases}$$

où on a introduit :

$$\lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \quad \sigma_1 = \frac{\Delta\tau}{\delta x} \quad \sigma_2 = \frac{\Delta\tau}{\delta y} \quad (5.34)$$

## 5.7 Traitement des termes sources

Le traitement des termes sources est divisé en deux parties. Les termes sources des quantités turbulentes font l'objet d'une approche implicite sans matrice [115], tandis que les termes sources issus de l'équation de transport de taux de vide sont calculés explicitement.

La matrice des termes sources est rappelée ci-dessous :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (K + \alpha) \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho I} \\ \rho_m P_k - \rho_m \psi \\ C_{\psi 1} \rho_m \frac{\psi}{k} P_k - C_{\psi 2} \rho_m \frac{\psi^2}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_\alpha \\ S_T \end{pmatrix}$$

Un exemple de résolution peut être donnée pour un modèle de turbulence  $k - \epsilon$  :

$$S_T = \begin{pmatrix} \rho_m P_k - \rho_m \check{\epsilon} - \check{D} \\ C_{\epsilon 1} \rho_m \frac{\check{\epsilon}}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \rho_m \frac{\check{\epsilon}^2}{k} + E \end{pmatrix}$$

où les termes bas Reynolds font référence aux relations :

$$\check{D} = 2\nu_m \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad E = 2 \frac{\mu_m \mu_m^t}{\rho_m} \left( \frac{\partial^2 u_{m,i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

Les grandeurs turbulentes s'expriment en fonction d'un vecteur  $w_{k,\check{\epsilon}} = (\rho_m k, \rho_m \check{\epsilon})$ , d'un terme de production  $P_k$  et de termes bas Reynolds  $\check{D}$  et  $E$ . L'approche sans matrice consiste à remplacer le terme source par son rayon spectral. Celui-ci est défini à partir du jacobien de la matrice  $S$ . La méthode de résolution simplifiée calcule uniquement le rayon spectral de la matrice contenant les variables du vecteur  $w_{k,\check{\epsilon}}$  et considère que les termes de production  $P_k$  et bas Reynolds  $\check{D}$  et  $E$  sont figés.

Enfin seule la partie négative du rayon spectral notée ainsi  $\rho_t^-$  est conservée. L'implication du terme source s'écrit au final :

$$S_{i,j}^{n,m+1} = S_{i,j}^{n,m+1} + \rho_t^- \Delta(w_{k,\check{\epsilon}})_{i,j}^n \quad (5.35)$$

## 5.8 Préconditionnement des écoulements à bas nombre de Mach

### 5.8.1 Les équations d'ondes

La classification des équations aux dérivées partielles rassemble les équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Les équations hyperboliques modélisent la propagation d'ondes à vitesse finie dans un milieu, avec pour exemple connu le système linéaire de la propagation du son dans un milieu homogène. Les équations d'Euler qui expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans un fluide parfait compressible forment un système d'équations hyperboliques.

#### 5.8.1.1 Equations types

Pour une grandeur  $w(x, t)$  il existe deux grands types d'équation hyperbolique :

- l'équation des ondes homogènes :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

- l'équation hyperbolique :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

qui est hyperbolique si et seulement si  $A$  est diagonalisable à valeurs propres réelles, pour tout  $w$ . Dans le cas scalaire, ce système se ramène à l'équation de convection pure :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

## 5.8.2 Problématique des écoulements à faible nombre de Mach

### 5.8.2.1 Présentation

Les écoulements cavitants associent des zones quasiment incompressibles de phase liquide et des zones de mélange liquide/vapeur fortement compressibles. Cette particularité implique un large spectre de nombre de Mach avec  $M < 0,1$  en phase liquide et  $M > 1$  en zone de mélange. Selon la configuration de l'écoulement rencontrée, la modélisation repose soit sur l'utilisation d'un solveur *incompressible pression-vitesse* soit sur un solveur *compressible densité*. Les premiers introduisent la pression dans l'équation de continuité tandis que les seconds résolvent les équations de conservation à partir du vecteur de variables conservatives  $(\rho, \rho u, \rho E)$ . Deux stratégies peuvent ainsi être mises en place pour résoudre des écoulements présentant une plage étendue du nombre de Mach : soit l'extension des solveurs incompressibles vers les écoulements à Mach élevé [20, 136] soit l'extension des solveurs compressibles vers les écoulements bas-Mach. La mise en place du code de cavitation opte pour la seconde méthode qui voit apparaître deux difficultés principales lors des calculs à faibles nombre de Mach.

1. L'écart entre les valeurs propres du système conduit à des problèmes de convergence.
2. L'approximation des fluctuations de pression qui repose sur le nombre de Mach diffère entre un problème continu et discretisé.

La solution adoptée dans ce manuscrit repose sur les travaux précurseurs de Turkel [181]. Sa méthode propose de multiplier les termes de dérivées temporelles des équations d'Euler par une matrice de préconditionnement bas-Mach qui, en diminuant l'écart entre les valeurs propres du système, réduit la différence entre la partie acoustique et la partie convective et évite certains problèmes numériques.

Dans un premier temps la démarche consiste à ré-écrire les équations de conservation à l'aide d'un nouveau jeu de variables primitives. Plusieurs vecteurs de variables primitives peuvent être proposés. Le préconditionnement de Turkel repose par exemple sur le vecteur de variables entropiques  $w = (p, u, s)$ . Par la suite d'autres chercheurs ont proposé leurs propres préconditionnement basés sur des vecteurs différents tel que le vecteur  $w = (p, u, T)$  notamment employé dans les travaux de Choi et Merkle [31].

Le code Caviflow utilise le vecteur de variables  $w = (p, u, e)$ . Les relations de passage permettront ensuite de se ramener à un système d'équations d'Euler exprimé en variables conservatives. Les deux paragraphes suivants ont pour objectif de présenter les deux difficultés inhérentes aux écoulements à faible nombre de Mach.

### 5.8.2.2 Ecart entre vitesses d'ondes

Le développement de ce paragraphe consiste à transformer le système des équations Euler 1D écrit initialement en variables conservatives en un système de variables primitives. Ce système est couplé à l'équation de transport du taux de vide :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u}{\partial x} = (K + \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\dot{m}}{\rho_I}$$



L'écriture générale du système d'équation 1D est présentée ci-dessous :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_c(w)}{\partial x} = S(w) \quad (5.36)$$

Les flux visqueux ne sont ici pas pris en compte,  $F_c$  désigne les flux convectifs,  $w$  le vecteur des variable conservatives :  $w = (\rho, \rho u, \rho \tilde{E}, \alpha)$  et  $S$  le terme source issu de l'équation de transport du taux de vide. L'énergie totale  $\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{u^2}{2}$  fait intervenir l'énergie interne  $\tilde{e} = e - q_l$  avec  $q_l$  l'énergie de formation du liquide. Ce système peut être reformulé à partir d'un vecteur de variables primitives  $W = (p, u, \tilde{e}, \alpha)$  :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_e \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (5.37)$$

avec

$$A_e = \begin{pmatrix} u & \rho c^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u & 0 \\ 0 & -K & 0 & u \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne des flux convectifs par rapport aux variables primitives telle que

$$A_e = \frac{\partial F_c}{\partial W}$$

Les valeurs propres de  $A_e$  sont :

$$u; \quad u; \quad u + c; \quad u - c$$

et représentent la vitesse matérielle des ondes de pression et les vitesses des ondes acoustiques. La suite du raisonnement introduit le nombre de conditionnement qui représente le rapport entre la plus grande valeur propre de  $A_e$  et la petite :

$$N = \frac{u + c}{u - c}$$

Si aucun preconditionnement n'est appliqué, ce rapport sera inversement proportionnel au nombre de Mach, tandis que pour un système preconditionné ce rapport est limité à la valeur <sup>1</sup> :

$$N = \frac{1 \pm \text{sign}(u)\sqrt{5}}{2}$$

D'autre part, le pas de temps utilisé par le solveur compressible repose sur une condition CFL :

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\rho(A_e)}$$

qui fait intervenir le rayon spectral  $\rho(A_e) = u + c$ . A faible nombre de Mach, cette condition impose donc un pas de temps faible qui n'est pas forcément nécessaire pour résoudre la dynamique de l'écoulement.

1. en prenant un paramètre  $\beta$  de l'ordre du nombre de Mach

### 5.8.2.3 Développement asymptotique de la pression

Le paragraphe évoque la deuxième raison qui justifie l'utilisation d'une méthode de préconditionnement pour la résolution d'écoulement à faible nombre de Mach à l'aide d'un code compressible. La justification est largement évoquée dans la thèse de Viozat [184] ou dans [63].

La première étape de la démarche met en place une écriture adimensionnée des équations d'Euler compressibles. Au sein de l'équation de conservation de la quantité de mouvement l'apparition du coefficient  $\frac{1}{M_*^2}$ , où  $M_* = u_*/c_*$  est un nombre de Mach exprimé avec les vitesses et célérités de référence, permet de mieux cerner la difficulté engendrée par la résolution d'un tel système lorsque le nombre de Mach devient faible. En se plaçant dans une configuration à "petit Mach" chaque quantité peut subir un développement asymptotique en puissance de Mach. La pression adimensionnée s'exprime par exemple :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + M_* \tilde{p}_1 + M_*^2 \tilde{p}_2 + \dots$$

Les quantités développées sont ensuite remplacées dans le système d'équations continues et les termes de même puissance de Mach sont rassemblés. Ce raisonnement implique que les fluctuations de pression soient constantes en espace jusqu'à l'ordre  $M_*^2$ .

$$\tilde{p}(x, t) = \tilde{P}_0(t) + M_*^2 \tilde{p}_2(x, t)$$

Dans un second temps les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont discrétisées à l'aide d'un schéma de Roe. En insérant le développement asymptotique de chaque variable dans le système discrétisé, puis, en regroupant les éléments d'une même puissance de Mach, les auteurs démontrent que seules les fluctuations de pression à l'ordre 0 sont constantes en espace. Autrement dit, d'après les équations discretisées, le développement asymptotique se simplifie de la façon suivante :

$$\tilde{p}(x, t) = \tilde{P}_0(t) + M_* \tilde{p}_1(x, t)$$

Cette affirmation est clairement en désaccord avec le cas continu où les fluctuations de pression étaient d'échelle  $M_*^2$ . Ainsi sur un maillage à pas constant, les solutions des équations discretisées exposent des fluctuations de pression qui sont supérieures au cas continu. De plus, le rapport entre les fluctuations de pression numériques et exactes sera d'autant plus grand que le nombre de Mach tend vers 0.

Les observations précédentes ont motivé une nouvelle méthode de discrétisation du système des équations de conservations en modifiant le terme de dissipation du schéma de Roe à l'aide d'une méthode de préconditionnement. Les auteurs obtiennent des valeurs constantes des fluctuations de pression de l'ordre 1 et aboutissent au développement asymptotique suivant :

$$\tilde{p}(x, t) = \tilde{P}_0(t) + M_* \tilde{p}_1(x, t)$$

qui assure la cohérence avec le système continu.

Cette démonstration justifie donc l'emploi de la méthode de préconditionnement présentée ci-après pour l'extension des codes compressibles vers les régimes bas-Mach

### 5.8.3 La méthode de preconditionnement

#### 5.8.3.1 Expression du système preconditionné en variables primitives

La méthode de preconditionnement reprend le système d'équation (5.37) et multiplie le terme de dérivée temporelle du système (5.37) par une matrice de preconditionnement notée  $P_e^{-1}$ . Le système preconditionné s'écrit alors :

$$P_e^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} + A_e \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (5.38)$$

avec

$$P_e^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $\beta$  un paramètre proportionnel au nombre de Mach. La formulation proposée par Choi et Merkle [31] s'écrit :

$$\beta^2 = \min[\max(M^2, \theta M_\infty^2), 1]$$

Ainsi pour des écoulements dont le nombre de Mach est supérieur à 1,  $\beta^2 = 1$  et aucun preconditionnement n'est appliqué au système. Dans les zones où la vitesse de l'écoulement est particulièrement faible, un limiteur  $\theta$  permet de contrôler la valeur minimale prise par  $\beta^2$ .

La multiplication de (5.38) par  $P_e$  permet d'obtenir le système propre pré-conditionné :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P_e A_e \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (5.39)$$

dont les valeurs propres sont :

$$u; \quad u; \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ u(1 + \beta^2) \pm \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 u^2 + 4\beta^2 c^2} \right]$$

Le preconditionnement de la dérivée temporelle permet ainsi d'améliorer les problèmes de convergence évoqués par le point 1. de la partie 5.8.2.

#### 5.8.3.2 Expression du système preconditionné en variables conservatives

##### Préconditionnement de la dérivée temporelle

La forme quasi-linéaire des équations Euler 1D exprimées en variables conservatives est rappelée ci-après :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A_c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5.40)$$

La suite de la démarche consiste à multiplier la dérivée temporelle par une matrice de preconditionnement  $P_c^{-1}$  :

$$P_c^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + A_c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5.41)$$

telle que  $P_c^{-1} = \frac{\partial w}{\partial W} P_e^{-1} \frac{\partial W}{\partial w}$  et  $A_c = \frac{\partial F_c}{\partial w}$  la matrice Jacobienne des flux convectifs. Les expressions des matrices de passage  $\frac{\partial w}{\partial W}$  et  $\frac{\partial W}{\partial w}$  sont donnés en partie Annexe C.4.3.

La matrice  $P_c^{-1}$  peut s'écrire comme la somme de la matrice identité  $I_d$  et d'une matrice idempotente  $M$  :

$$P_c^{-1} = I_d + \frac{(1 - \beta^2)}{\beta^2} \times M$$

En introduisant la quantité  $J = \frac{\frac{\gamma-1}{\bar{c}^2}(e - A)}{(\rho_l - \rho_v) + C \left( \frac{\gamma-1}{\bar{c}^2} \right)}$ , la matrice  $M$  devient :

$$M = \frac{F}{G} \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} - A & -u & 1 & -C \\ (\frac{u^2}{2} - A)u & -u^2 & u & -Cu \\ (\frac{u^2}{2} - A)E & -uE & E & -CE \\ (\frac{u^2}{2} - A)J & -uJ & J & -CJ \end{pmatrix}$$

Par suite, la matrice inverse peut être facilement calculée et se met sous la forme :

$$P_c = I_d + (\beta^2 - 1) \times M$$

### Préconditionnement de la dissipation

La section 5.8.2.3 évoque l'intérêt du preconditionnement de la dissipation  $d_i$  issue du schéma de discrétisation des flux convectifs (voir partie 5.3.2). Le point de départ du raisonnement consiste à écrire une forme quasi-linéaire des équations Euler 1D preconditionnés :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P_c A_c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5.42)$$

La dérivée spatiale est ensuite discretisée par un schéma décentré d'ordre 1 de type Roe, tel que :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P_c A_c \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( |P_c A_c| \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.43)$$

En multipliant cette expression par  $P_c^{-1}$  et en revenant à une formulation conservative le preconditionnement du terme temporelle et de la dissipation s'obtient :

$$P_c^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_c(w)}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( P_c^{-1} |P_c A_c| \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.44)$$

Après discrétisation cette formulation s'écrit sous la forme implicite :

$$P_c^{-1} \left( \frac{\Delta w}{\Delta t} \right)_{i,j}^n + \left( \frac{\delta_1 F}{\delta x} \right)_{i,j}^{n+1} = 0 \quad (5.45)$$

avec :

$$F = F_{c_x} - \frac{1}{2}P_c^{-1}|P_c A_c|\delta_1 w$$

qui peut être simplifiée en remplaçant la matrice  $|P_c A_c|$  par son rayon spectral  $\rho(P_c A_c)$  :

$$F = F_{c_x} - \frac{1}{2}P_c^{-1}\rho(P_c A_c)\delta_1 w$$

Cette écriture est semblable à l'expression initiale (5.16) où un terme de dissipation est ajoutée aux flux visqueux de sorte que :

$$F = F_{c_x} - \tilde{d}_1(w)$$

avec

$$\tilde{d}_1(w) = \tilde{D}_1(w)\delta_1 w \quad \text{et} \quad \tilde{D}_1(w) = \frac{1}{2}\rho(P_c A_c)P_c^{-1} = \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{c1}P_c^{-1}$$

Par suite, en extrapolant au cas 2D et en reproduisant le raisonnement pour les équations de Navier Stokes de la partie 5.2, le schéma preconditionné pour les équations de Navier-Stokes s'obtient finalement sous la forme :

$$\mathcal{H}_{i,j}^{n,m} \Delta w_{i,j}^{n,m} = -\Delta \tau \mathcal{R}_{i,j}^{n,m} - \sigma_1 \delta_1 \mu_1 (\Delta F_{c_x})_{i,j}^{n,m} - \sigma_2 \delta_2 \mu_2 (\Delta F_{c_y})_{i,j}^{n,m} \quad (5.46)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta w_{i,j}^{n,m} &= w_{i,j}^{n,m+1} - w_{i,j}^n \\ \mathcal{R}_{i,j}^{n,m} &= \frac{3w_{i,j}^{n,m} - 4w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \left( \frac{\delta_1(F_{c_x} - F_{v_x})}{\delta x} + \frac{\delta_2(F_{c_y} - F_{v_y})}{\delta y} - S \right)_{i,j}^{n,m} \\ \mathcal{H}_{i,j}^{n,m} &= \left( \left( P_c^{-1} \mathbf{1} + \frac{3}{2}\lambda I_d \right) - \sigma_1 \delta_1 \left( \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{c1}P_c^{-1} + \rho_{v1} \right) \delta_1 - \sigma_2 \delta_2 \left( \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{c2}P_c^{-1} + \rho_{v2} \right) \delta_2 \right)_{i,j}^{n,m} \end{cases}$$

### Système preconditionné sans matrice

La partie 5.8.3.2 a démontré que la matrice de preconditionnement du système écrit en variable conservative pouvait s'exprimer :

$$P_c = I_d + (\beta^2 - 1) \times M$$

avec  $M$  une matrice idempotente, c'est-à-dire qui vérifie l'égalité  $M^2 = M$ . Cette propriété permet d'inverser la matrice  $P$  :

$$P^{-1} = I_d + \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \times M$$

De plus, la matrice  $\mathcal{H}_{i,j}^{n,m}$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_{i,j}^{n,m} = a_{i,j}^{n,m} (P_c^{-1})_{i,j}^{n,m} + b_{i,j}^{n,m} I_d$$

avec :

$$\begin{cases} a_{i,j}^{n,m} &= \left( 1 - \sigma_1 \delta_1 \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{c1}\delta_1 - \sigma_2 \delta_2 \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{c2}\delta_2 \right)_{i,j}^{n,m} \\ b_{i,j}^{n,m} &= \left( \frac{3}{2}\lambda - \sigma_1 \delta_1 \rho_{v1}\delta_1 - \sigma_2 \delta_2 \rho_{v2}\delta_2 \right)_{i,j}^{n,m} \end{cases}$$

En utilisant la propriété d'idempotence de  $M$  l'inverse de  $\mathcal{H}_{i,j}^{n,m}$  s'obtient facilement et s'exprime :

$$(\mathcal{H}^{-1})_{i,j}^{n,m} = \left( \frac{1}{a+b} \left( I_d + \frac{a(\beta^2 - 1)}{a + b\beta^2} \right) M \right)_{i,j}^{n,m}$$

La démarche permet ainsi d'inverser le système (5.46) et d'en déduire le terme  $\Delta w_{i,j}^{n,m}$ , tel que :

$$\Delta w_{i,j}^{n,m} = (\mathcal{H}^{-1})_{i,j}^{n,m} \left( -\Delta \tau \mathcal{R}_{i,j}^{n,m} - \sigma_1 \delta_1 \mu_1 (\Delta F_{c_x})_{i,j}^{n,m} - \sigma_2 \delta_2 \mu_2 (\Delta F_{c_y})_{i,j}^{n,m} \right) \quad (5.47)$$

Ce schéma est finalement résolu par une méthode de Jacobi par point.

## 5.9 Conditions aux limites

### 5.9.1 L'approche lois de paroi

La modélisation de la physique d'un écoulement turbulent nécessite l'utilisation d'un maillage très raffiné. La région interne de la couche limite est en effet le siège de forts gradients de vitesse et de température selon la direction perpendiculaire à la paroi. En revanche, l'analyse de l'évolution des vitesses au sein d'une couche limite turbulente bidimensionnelle présente un profil "universel" c'est à dire que leurs variations ne dépend pas des conditions de l'écoulement. Ce constat permet de définir des lois de vitesse et de représenter le frottement pariétal dans la première cellule du maillage sans recourir aux calculs des gradients de la vitesse.

Cette simplification est employée dans le code de calcul en respectant la démarche qui suit.

- Une loi analytique de vitesse  $u^+ = f(y^+)$  est utilisée pour le calcul du champ moyen et du frottement pariétal  $\tau_p$ .
- L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  est intégrée jusqu'à la paroi, le calcul du terme de production  $P_k$  dans la première cellule repose sur la valeur de  $\tau_p$ .
- La seconde variable turbulente transportée est calculée analytiquement.
- La viscosité turbulente du modèle de Spalart et Allmaras est calculée à l'aide d'une relation de longueur de mélange.

### 5.9.2 Calcul du champ moyen

Le calcul des grandeurs du champs moyen repose sur l'existence d'une relation universelle reliant la vitesse à la distance à la paroi par l'intermédiaire du frottement pariétal. Pour cela, dans la zone de la couche limite, des vitesses et longueurs adimensionnelles sont introduites :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu_p} \quad \text{avec} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}} \quad (5.48)$$

où  $\nu_p$  et  $\rho_p$  désignent respectivement la viscosité cinématique et la masse volumique à la paroi. Selon l'importance de la viscosité, la couche limite peut être divisée en trois zones distinctes :

**La sous-couche linéaire** :  $y^+ < 5$

Les effets de la turbulence sont ici négligeables par rapport aux effets visqueux. Le profil de vitesse suit une loi linéaire :

$$u^+ = y^+$$

**La zone de turbulence développée :  $y^+ > 40$** 

Dans cette région, le frottement est principalement turbulent et la contribution de la viscosité est négligée devant la contrainte de cisaillement turbulent. Le profil de vitesse suit une loi logarithmique :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (5.49)$$

où  $\kappa$  est un facteur de proportionnalité égale à la constante de Von Karman proche de 0,41 et  $C \approx 5,25$ .

**La zone tampon :  $5 < y^+ < 40$** 

Cette zone correspond à une zone de raccord où les effets visqueux et turbulents coexistent.

Par la suite, la région de paroi est simplifiée en raccordant lois linéaires et logarithmique si bien que la loi de paroi bi-couche utilisée est définie par :

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ & \text{si} & \quad y^+ < 11.13 \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.25 & \text{si} & \quad y^+ > 11.13 \end{aligned} \quad (5.50)$$

où 11.13 correspond à l'ordonnée du raccord entre couches.

La vitesse moyenne est calculée au centre de la maille adjacente à la paroi en utilisant les équations de Navier Stokes. A partir des valeurs de la vitesse et de la viscosité au centre de la cellule, une méthode itérative appliquée à la loi de vitesse fournit la valeur de  $u_\tau$ . Par suite le tenseur des contraintes dans la couche limite peut être déduit simplement. Enfin le modèle émet l'hypothèse que la loi de paroi utilisée reste valide pour un écoulement instationnaire et diphasique.

**5.9.3 Calcul du champ turbulent****5.9.3.1 L'énergie cinétique turbulente**

Le calcul des modèles de turbulence à deux équations est également modifiée. L'équation sur l'énergie cinétique turbulente est intégrée jusqu'à la paroi mais le terme de production  $P_k$  est imposé dans la première cellule à partir des lois de vitesse. Son intégration dans la première maille s'écrit :

$$P_k = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \tau_{xy}^t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) dy \quad (5.51)$$

où  $y_n$  correspond à la hauteur de la première maille. Le calcul du terme de production reprend l'approche de Viegas et Rubesin [183] qui intègrent l'expression (5.51) en supposant que dans la sous-couche visqueuse d'épaisseur  $y_v^+ = 5$ , la composante  $\tau_{xy}^t$  du tenseur de Reynolds est nulle et qu'en dehors,  $\tau_{xy}^t$  est égal à  $\tau_p$ . Finalement en utilisant la relation (5.48), l'intégration conduit à l'expression suivante de la production :

$$P_k = \frac{\tau_p^{3/2}}{\kappa y_c \sqrt{\rho_p}} \ln \frac{y_c}{y_v} + \tau_p \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \left( 1 - \frac{y_v}{y_c} \right) \quad (5.52)$$

Cette méthode suppose que la sous-couche visqueuse est contenue dans le centre de la première maille. Dans le cas de maillage fin, pour lesquels le centre de la première maille serait dans la sous-couche visqueuse, la production est imposée à zéro.

### 5.9.3.2 La seconde variable transportée

La seconde variable du modèle turbulent est calculée à partir d'une relation analytique qui fait intervenir l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une échelle caractéristique de la turbulence.

- Pour le modèle  $k - \epsilon$  la relation de Chen et Patel [28] propose de déduire  $\epsilon$  à partir de  $k$  et d'une longueur de dissipation :

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{k^{3/2}}{\ell_\epsilon} \\ \ell_\epsilon &= \frac{\kappa y_n}{C_\mu^{3/4}} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-Re_t C_\mu^{3/4}}{2\kappa}\right) \right] \\ Re_t &= \frac{\sqrt{k} y_n}{\nu}\end{aligned}$$

- Pour le modèle  $k - \omega$  la formulation précédente est adaptée en utilisant le changement de variable  $\omega = \frac{\epsilon}{C_\mu k}$ .
- Pour le modèle  $k - \ell$  la relation  $\ell = \kappa y$  permet également d'utiliser les équations de Chen et Patel.

### 5.9.3.3 Le modèle de Spalart et Allmaras

Le modèle à une équation de Spalart et Allmaras nécessite le calcul de la viscosité turbulente dans la première maille à partir de  $\mu_t$  donnée par une formulation de longueur de mélange :

$$\mu_t = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad \text{avec} \quad l_m = \rho \kappa^2 y^2 \left( 1 - \exp\left(\frac{y^+}{26}\right) \right)^2 \quad (5.53)$$

et en utilisant l'expression du gradient de vitesse dans la zone logarithmique  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{\tau_p}{\mu_p}$ . Les relations du modèle de Spalart et Allmaras liant  $\tilde{\nu}$  à  $\mu_t$  :

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{\nu 1} \quad f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu}$$

permettent de relier la viscosité du modèle dans la première maille à la viscosité turbulente par une équation de degré 4 :

$$(\rho \tilde{\nu})^4 - \mu_t (\rho \tilde{\nu})^3 = \mu^3 \mu_t C_{v1}^3 \quad (5.54)$$

qui n'admet qu'une seule racine positive :

$$\rho \tilde{\nu} = \frac{1}{4} \left[ \mu_t + C_2 + \left( 3\mu_t - C_2^2 + \frac{2\mu_t^3}{C_2} \right)^{1/2} \right]$$

avec



$$\begin{aligned}
C_0 &= \mu\mu_t C_{v1} & C_1 &= C_0^3 \sqrt{3} \left( \frac{256C_0^3}{\mu_t^6} + 27 \right)^{1/2} \\
C_2 &= \left[ \mu_t + 4(C_-^{1/3} - C_+^{1/3}) \right]^{1/2} & C_{\pm} &= \frac{C_1}{18} \pm 0,5C_0^2
\end{aligned}$$

## 5.9.4 Conditions limites en entrée et en sortie

### 5.9.4.1 Caractéristiques d'un système hyperbolique

Le traitement des conditions d'entrée et de sortie du domaine repose sur l'utilisation des relations caractéristiques associées au système hyperbolique des équations d'Euler, dont la description de la méthode est donnée par Hirsch [70, 71]. La démarche est simplifiée en considérant, dans un premier temps, le système hyperbolique des équations d'Euler non préconditionnées écrit à partir du vecteur de variables primitives entropiques en dimension trois :  $W_s = (p, u, v, w, s, \alpha)$ . Le système s'écrit dans la direction  $x$  perpendiculaire aux parois d'entrée et de sortie de la veine :

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} + A_s \frac{\partial W_s}{\partial x} = 0 \quad (5.55)$$

avec la matrice :

$$A_s = \begin{pmatrix} u & \rho c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & -K & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

La matrice  $A_s$  est diagonalisable à valeurs propres réelles  $\lambda_k$  :

$$u; \quad u; \quad u; \quad u; \quad u + c; \quad u - c$$

Les équations différentielles partielles peuvent être transformées en un système d'équations différentielles ordinaires. Pour cela le système (5.55) est multiplié par le vecteur propre à gauche  $L_k$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$  de la matrice  $A_s$  (i.e.  $L_k A_s = \lambda_k L_k$ ) :

$$L_k \left( \frac{\partial W_s}{\partial t} + A_s \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) = L_k \left( \frac{\partial W_s}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.56)$$

Pour  $k$  fixé, la famille de courbes  $\mathcal{C}^k$  définies par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k$$

est introduite de sorte que le système (5.56) s'écrive plus simplement :

$$L_k \frac{dW_s}{dt} = 0 \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C}^k. \quad (5.57)$$

Les courbes  $\mathcal{C}^k$  constituent une famille de courbes caractéristiques.

En considérant les six vecteurs propres linéairement indépendants, il est possible de former six équations scalaires de la forme (5.57) linéairement indépendantes et de remplacer le système de cinq équations différentielles partielles par un système de cinq équations différentielles ordinaires.

#### 5.9.4.2 Relations caractéristiques

##### Écriture sans préconditionnement

Les six vecteurs propres  $L_k$  associés aux valeurs propres  $\lambda_k$  s'expriment :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_5 = \begin{pmatrix} \frac{K}{\rho c^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

Ils permettent d'aboutir à six relations caractéristiques qui s'écrivent comme des équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - \rho c \frac{du}{dt} &= 0 \\ \frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{dw}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} - \frac{K}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} + \rho c \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations sont ensuite discrétisées au niveau des frontières :

$$\begin{aligned} (p^c - p^s) - \rho c (u^c - u^s) &= 0 \\ v^c - v^s &= 0 \\ w^c - w^s &= 0 \\ p^c - p^s - c^2 (\rho^c - \rho^s) &= 0 \\ \rho(\alpha^c - \alpha^s) - K(\rho^c - \rho^s) &= 0 \\ (p^c - p^s) + \rho c (u^c - u^s) &= 0 \end{aligned}$$

où l'exposant  $^s$  denote les variables obtenues par le schéma numérique et l'exposant  $^c$  dénote les variables à calculer à la frontière.

**Système préconditionné**

Dans un deuxième temps, le système 5.55 est reconsidéré en ajoutant la matrice de préconditionnement  $P_e$ . Le système préconditionné devient :

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} + P_e A_s \frac{\partial W_s}{\partial x} = 0 \quad (5.59)$$

La matrice  $P_e A_s$  est diagonalisable à valeurs propres réelles  $\lambda_k$  :

$$u; \quad u; \quad u; \quad u; \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ u(1 + \beta^2) \pm \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 u^2 + 4\beta^2 c^2} \right]$$

En pratique, seuls les vecteurs propres à gauche  $L_1$  et  $L_6$  associés aux valeurs propres des ondes acoustiques  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  sont modifiés. Il s'écrivent :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho c^2 \beta^2}{\lambda_- - u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho c^2 \beta^2}{\lambda_+ - u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

et vérifient les relations  $L_1 P_e A_s = \lambda_- L_1$  et  $L_6 P_e A_s = \lambda_+ L_6$ .

Les relations caractéristiques sont modifiées et s'écrivent désormais :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \frac{\rho c^2 \beta^2}{\lambda_- - u} \frac{du}{dt} &= 0 \\ \frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{dw}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} - \frac{K}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} + \frac{\rho c^2 \beta^2}{\lambda_+ - u} \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

et sont discretisées au niveau des frontières sous la forme :

$$(\lambda_- - u)(p^c - p^s) + \rho c^2 \beta^2 (u^c - u^s) = 0 \quad (5.61)$$

$$v^c - v^s = 0 \quad (5.62)$$

$$w^c - w^s = 0 \quad (5.63)$$

$$p^c - p^s - c^2 (\rho^c - \rho^s) = 0 \quad (5.64)$$

$$(\lambda_+ - u)(p^c - p^s) + \rho c^2 \beta^2 (u^c - u^s) = 0 \quad (5.65)$$

$$\rho(\alpha^c - \alpha^s) - K(\rho^c - \rho^s) = 0 \quad (5.66)$$

### 5.9.4.3 Description de la frontière

Les relations caractéristiques permettent de déterminer les quantités du champ moyen à la frontière. Le raisonnement s'établit à partir des valeurs propres de la matrice  $P_e A_s$  du système (5.59). En effet, le comportement du système d'Euler au niveau de la frontière dépend des vitesses de propagation des ondes qui sont égales aux valeurs propres d'un système hyperbolique :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,n} = \lambda_{2,n} = \lambda_{3,n} = \lambda_{4,n} &= u_n \\ \lambda_{+,n} &= \frac{1}{2} \left[ u_n(1 + \beta^2) + \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 u_n^2 + 4\beta^2 c^2} \right] \\ \lambda_{-,n} &= \frac{1}{2} \left[ u_n(1 + \beta^2) - \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 u_n^2 + 4\beta^2 c^2} \right] \end{aligned} \quad (5.67)$$

Le terme  $u_n$  représente la composante normale de la vitesse à la frontière. Les quatre premières valeurs propres correspondent à la propagation d'onde matérielle, tandis que les deux suivantes représentent des ondes acoustiques. Chaque  $\lambda_k$  représente ainsi la vitesse de propagation d'une perturbation à travers la frontière associée. Lorsque l'information se propage de l'extérieur du domaine, vers l'intérieur, alors la caractéristique est entrante et il est nécessaire d'imposer une condition limite physique au domaine. Cette situation s'apparente au cas où  $\lambda_k$  est positif, et pour lequel l'information associée à la caractéristique provient de l'extérieur. En revanche lorsque  $\lambda_k$  est à valeur négative, la propagation se produit depuis l'intérieur du domaine vers l'extérieur. L'information traverse la frontière en sortant du domaine et la condition à la limite doit être imposée numériquement à partir des relations caractéristiques et des valeurs calculées. Le nombre de conditions limites physiques à imposer aux frontières dépendent ainsi du nombre de caractéristiques entrantes dans le domaine. L'évaluation aux limites peut être résumée à partir du nombre de Mach normale à la frontière  $M_n = \frac{u_n}{c}$  dont les différents cas sont répertoriés dans le tableau 5.1.

Chaque cas est détaillé ci-après.

- Entrée subsonique :

Cette condition correspond au cas d'écoulements qui entrent dans le domaine de calcul avec une vitesse normale subsonique :  $1 > M_n > 0$ . Parmi les valeurs propres du système (5.59), cinq sont à valeurs positives et seule  $\lambda_{-,n}$  est négative. Par conséquent cinq quantités doivent être imposées en entrée tandis que l'utilisation d'une relation caractéristique permet de déterminer la variable restante. L'équation (5.65) relie les valeurs calculées numériquement  $u^s$  et  $p^s$  aux valeurs à la frontière  $u^c$  et  $p^c$ . Par suite les relations entre pression et pression d'arrêt, température et température d'arrêt permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{p_{i\infty}}{p^c} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^c}{c(T^c)} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ \frac{p_{i\infty}}{p^c} = \left( \frac{T_{i\infty}}{T^c} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{cases} \quad (5.68)$$

et de raccorder ainsi la pression à la vitesse :  $u^c = f(p^c)$ . Les cinq variables à imposer sont finalement : la pression d'arrêt  $p_{i\infty}$ , la température d'arrêt  $T_{i\infty}$ , un taux de vide initiale  $\alpha_0$  et, dans le cas 3D, les angles d'incidence  $\alpha_{i\infty}$  et de dérapage  $\beta_{i\infty}$  qui permettent de relier la vitesse à ses composantes normales et tangentielles.

- **Sortie subsonique :**  
Pour de tels écoulements,  $0 > M_n > -1$  et cinq valeurs propres sont à valeurs négatives. Seule  $\lambda_{-,n}$  est positive. Cinq relations caractéristiques sont ainsi utilisées pour extrapoler les valeurs numériques de l'intérieur du domaine jusqu'à la frontière. Une seule variable reste à imposer, il s'agit de la pression statique.
- **Entrée supersonique :**  
Toutes les caractéristiques sont entrantes. En effet le cas  $M_n > 1$  implique des valeurs positives sur l'ensemble des valeurs propres. Le vecteur  $W_s$  est entièrement imposé.
- **Sortie supersonique :**  
Dans le cas  $-1 > M_n$ , il n'y a aucune caractéristique entrante. Toutes les valeurs propres sont négatives et les variables à la frontière sont calculées par extrapolation des variables au bord du domaine.

TABLE 5.1 – Types de frontières et relations caractéristiques associées

Type de frontière	Entrée subsonique	Sortie subsonique	Entrée supersonique	Sortie supersonique
Nombre de Mach normal	$1 > M_n > 0$	$0 > M_n > -1$	$M_n > 1$	$-1 > M_n$
Relations caractéristiques utilisables	Eq.(5.65)	Eq.(5.62), (5.63), Eq.(5.64), (5.65) et Eq.(5.66)	-	Eq.(5.61), Eq.(5.62), Eq.(5.63), Eq.(5.64), Eq.(5.65) et Eq.(5.66)
Nombre de conditions limites à imposer	5	1	6	0

#### 5.9.4.4 Champ turbulent

La présentation précédente concerne les conditions limites du champ moyen. Pour le champ turbulent, les grandeurs transportées doivent être imposées à l'infini. Celles-ci peuvent être calculées en imposant le taux de turbulence  $T_u$  et en utilisant la valeur de la viscosité turbulente à l'infini. Les relations entre variables turbulentes permettent d'écrire pour les conditions limites à l'infini :

$$\begin{aligned}
 (\rho k)_\infty &= \frac{3}{2} T_u^2 \rho_\infty U_\infty^2 \\
 (\rho \epsilon)_\infty &= C_\mu \frac{(\rho k)_\infty^2}{\mu_{t\infty}} \\
 (\rho \omega)_\infty &= \rho \frac{(\rho k)_\infty^2}{\mu_{t\infty}} \\
 (\rho \nu)_\infty &= \mu_{t\infty}
 \end{aligned}$$

La valeur de  $\mu_{t\infty}$  est déterminée par une relation simple comme une fraction de  $\mu_\infty$  :  $\mu_{t\infty} = 0.1\mu_\infty$ .



## Troisième partie

# Etat de l'art

des instabilités de cavitation partielle et des études sur Venturi





## Chapitre 6

# Les instabilités de cavitation partielle

*L'étude de la cavitation sous-entend l'analyse de comportements diversifiés. La suite des travaux se cantonne au phénomène de cavitation partielle qui se développe à proximité d'une paroi. Celui-ci se traduit par la formation d'une poche attachée dans la zone de recirculation, dont la dynamique est soumise aux instabilités extérieures. Dans la majorité des cas, les observations expérimentales identifient un mécanisme de jet rentrant liquide généré en aval de la poche et qui progresse à contre courant entre la paroi et la zone de vapeur. Celui-ci déstabilise la partie attachée de la poche et provoque, dans certaines situations, l'arrachement de structures diphasiques. En zone de re-compression, le collapse de ces nuages de vapeur engendre la formation d'une onde de suppression dont la propagation peut à son tour participer aux instationnarités de l'écoulement. La compréhension de ces phénomènes permettra d'évaluer la capacité des simulations à reproduire les phénomènes caractéristiques de la cavitation partielle*

## 6.1 Régimes de cavitation

### 6.1.1 Cavitation par poche

La partie qui suit a pour objectif de présenter les mécanismes de formation d'une poche le long d'une paroi. Cette introduction s'inspire de la description de la cavitation par poche dont le lecteur trouvera une version plus détaillée au sein de [48, Chapitre 4]. Le long d'une paroi, la création de vapeur peut prendre deux formes principales : (1) une cavitation par bulles séparées les unes des autres qui connaissent une phase de croissance avant d'imploser en zone de re-compression ; (2) une cavitation par poche attachée pour laquelle une cavité se fixe sur la paroi. C'est ce second type de cavitation que les études numériques de cette thèse s'emploient à modéliser.

Le développement de la cavitation par poche attachée est souvent associé à un bulbe laminaire de la couche limite. La zone "morte" de recirculation formée à l'aval du décollement favorise la création d'une poche abritée de l'écoulement principal. En fonction du paramètre de cavitation et de l'angle d'incidence deux formes de poche peuvent prendre naissance dans la zone de basse pression. Lorsque la zone de recollement se situe sur la surface du profil, une poche de *cavitation partielle* se développe le long de la paroi. En revanche lorsque la fermeture de la poche se situe à l'aval de la géométrie la poche s'étend jusqu'à atteindre un état de *supercavitation*. Ce dernier cas est largement observé en conditions de pression très basse sur des profils d'aube. Par la suite, deux catégories de poche de cavitation partielle sont distinguées en fonction du type d'écoulement présent en zone de fermeture de poche. La cavité est dite *fermée* lorsqu'elle possède une longueur quasiment stable avec une interface nette et une zone de fermeture exempte de bulles. Elle est en revanche qualifiée de cavité *ouverte* lorsque sa longueur varie plus ou moins périodiquement et que des lâchers de nuages de vapeur se produisent à l'aval de la poche attachée. Sur un profil d'aube, Le et al. [96] explorent les deux types de fermeture de cavitation partielle en faisant varier l'angle d'incidence et le nombre de cavitation (voir figure 6.2).

### 6.1.2 Cavitation partielle

#### 6.1.2.1 Présentation

Les écoulements à cavitation partielle sont caractérisés par la formation d'une poche attachée dont les instationnarités se manifestent par la présence d'oscillations et une dynamique parfois très instable. La formation de bulles autour d'un profil a longtemps été le principal régime à éviter en raison de l'érosion causée par leurs implosions. Néanmoins, les régimes de cavitation partielle peuvent eux aussi s'avérer très néfastes. Le terme de cavitation instable est employé pour désigner des situations où la cavité ne présente pas de comportement stationnaire. Dans certaines conditions, les instabilités sont marquées par la formation de structures arrachées à la poche puis convectées par l'écoulement avant d'imploser en zone de re-compression.

Ces lâchers de nuages de vapeur peuvent avoir différentes origines. Dans certains cas, ces nuages de cavitation sont générés par des lâchers tourbillonnaires remplis de bulles de vapeur ou produits par des perturbations périodiques imposées par l'écoulement. Ces perturbations sont par exemple provoquées par les interactions rotor-stator des aubes de pompe et de turbine. Les géométries d'inducteur ont également révélé des oscillations de poche et des lâchers de structures dont les fréquences pouvaient être couplées à celles des cavités formées sur les autres pales [64].

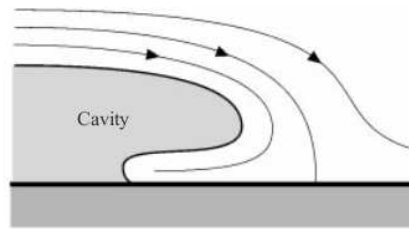


FIGURE 6.1 – Illustration du jet rentrant liquide en fermeture de poche attachée [24]

D'autres observations révèlent la présence d'instabilités causées par la cavité elle-même. Les études expérimentales et numériques identifient la présence de deux phénomènes principaux responsables de ces instationnarités : la formation d'un jet rentrant liquide en zone de fermeture de poche associé à des ondes de pression générées par le collapse des plus grosses structures.

### 6.1.2.2 Les mécanismes de déstabilisation de la poche attachée

La plupart des observations de cavitation partielle sur des profils d'aubes remarque que les lâchers de structures cavitantes font suite à une déstabilisation de la poche. Ces perturbations sont localisées dans la zone de dépression et interagissent sur la fermeture de la poche. Elles ont pour origine : la formation d'un jet rentrant liquide, dont la recirculation qu'il crée en poche paroi peut engendrer la segmentation de la poche ; ou la propagation d'ondes de pression générées par le collapse de structures cavitantes dans les régions de re-compression.

#### Les instabilités de jet rentrant liquide

Le développement d'un jet rentrant liquide en fermeture de poche et les oscillations qu'il provoque est le type d'instabilité la plus courante. Knapp et al. [87] donnent une description de cette recirculation qui se forme à l'aval de la poche. La fermeture de la cavité se produit lorsque l'écoulement externe recolle à la paroi. Les lignes de courant se présentent alors perpendiculairement au profil, une partie continue sa progression vers l'aval tandis que le reste se dirige à contre-courant (figure 6.1). Ce phénomène conduit à la formation d'un jet rentrant liquide qui se développe entre la poche de vapeur et la frontière solide. Plusieurs travaux ont permis de mettre en évidence la présence d'un jet rentrant à l'aval de la poche attachée [106, 146], mais sa formation ne se produit pas forcément pour tous types de poche de cavitation. En effet, lorsque la cavité attachée reste suffisamment fine, aucune recirculation ne s'établit et les études de Gopalan [61] font part de la formation, la convection puis le collapse de tourbillons en épingles à cheveux remplis de bulles.

De Lange et al. [35, 36] ont étudié expérimentalement le phénomène de jet rentrant sur des profils de type NACA. A partir d'une certaine incidence, les auteurs remarquent le comportement cyclique de la cavité qui se développe le long du profil. Dans un premier temps la poche de cavitation apparaît à proximité du bord d'attaque puis s'étend sur le côté dépression. Lorsque la poche atteint une longueur suffisante, qui avoisine en général la moitié de la longueur de corde, une recirculation liquide se met en place en fin de poche à proximité de la paroi. Le jet rentrant

entame alors sa progression jusqu'au bord d'attaque où il vient diviser la cavité en deux ; une partie est arrachée et convectée vers l'aval sous la forme d'un nuage de vapeur, tandis que l'autre partie reste attachée au profil. Kubota et al. [91] ont mesuré la vitesse de convection de ces structures et ont constaté que celle-ci était nettement inférieure à celle de l'écoulement principal. Le nuage implode finalement lorsqu'il rencontre la zone de re-compression située au bord de fuite. Dans le même temps, la partie attachée de la poche de cavitation reprend son extension et un nouveau cycle se met en place. La même chronologie a été étudiée par Kawanami et al. [83] qui observent que le phénomène peut être contrôlé en introduisant un obstacle sur la paroi du profil, avortant ainsi la progression du jet rentrant. Un tel régime de cavitation peut s'avérer bien plus destructeur que la simple présence d'une cavité stable. Le et al. [97] ont par exemple mesuré d'importants pics de pression lors de l'implosion des bulles présentes au sein du nuage de vapeur.

D'autres expériences se sont intéressées, plus en détail, à la dynamique du jet rentrant liquide. Pham et al. [128] et Sakoda et al. [142] s'accordent pour dire que la vitesse est du même ordre de grandeur que celle de l'écoulement principal, mais qu'elle s'amenuise à mesure que le jet rentrant se rapproche du bord d'attaque. Les paramètres extérieurs qui permettent d'entretenir la progression de ce jet restent sujet à débat. Récemment, les observations de Stanley et al. [172], à partir de caméra rapide, suggèrent une progression du jet rentrant liquide vers l'amont favorisée par la propagation d'ondes de pression causées par le collapse des nuages de vapeur. L'injection de colorant dans le liquide [80, 96, 83] a quant à elle permis de mettre en évidence la nature cyclique du jet rentrant ; en différents instants, la présence de marqueurs est identifiée à la fois à proximité du bord d'attaque et au sein des structures convectées.

La formation de nuages de vapeur à l'aval de la poche dépend de plusieurs conditions extérieures. Le et al. [96] fournissent une description du comportement global de la cavité qui se développe sur la partie plane d'un profil d'aube plan-convexe (figure 6.2). Les auteurs remarquent que les pulsations de vapeurs se développent dans un domaine limité conditionné par l'angle d'attaque et le nombre de cavitation. La production de nuages de vapeur s'établit pour une taille de poche avoisinant la moitié de la longueur de corde ( $l/c=0,5$ ). Leroux et al. [100] s'emploient également à étudier l'apparition de lâchers de structure autour d'un profil NACA en faisant varier le nombre de cavitation. Ils distinguent deux types de cavités : pour une taille n'excédant pas la moitié de la longueur de corde, la cavité est considérée comme stable ; à mesure que cette taille augmente, la croissance de la poche est ralentie et est compensée par des lâchers périodiques de nuages de vapeur. Selon Callenaere et al. [24], deux paramètres de l'écoulement conditionnent le comportement dynamique d'une cavité partielle : (1) l'intensité du gradient adverse de pression et (2) l'épaisseur de la cavité par rapport à celle du jet rentrant liquide. Le phénomène principal du gradient de pression adverse se produit généralement en zone de décollement de la couche limite et impose une croissance de la pression dans le sens de l'écoulement. Cette caractéristique est largement observée sur le côté dépression d'une aube (figure 6.3). Lorsque le gradient de pression adverse est suffisant, un jet rentrant se développe en zone de fermeture [94]. Les chercheurs observent ensuite deux types de comportement. Pour une épaisseur de poche attachée suffisamment large, le jet rentrant progresse jusqu'au bord d'attaque sans fragmenter la cavité ; la formation d'un nuage de vapeur est rendu possible [24, 171, 172]. En revanche lorsque cette épaisseur est comparable à celle du jet rentrant, ce dernier destabilise la poche en arrachant des micro-structures à la cavité ; le phénomène observé [24] n'est dans ce cas plus comparable aux

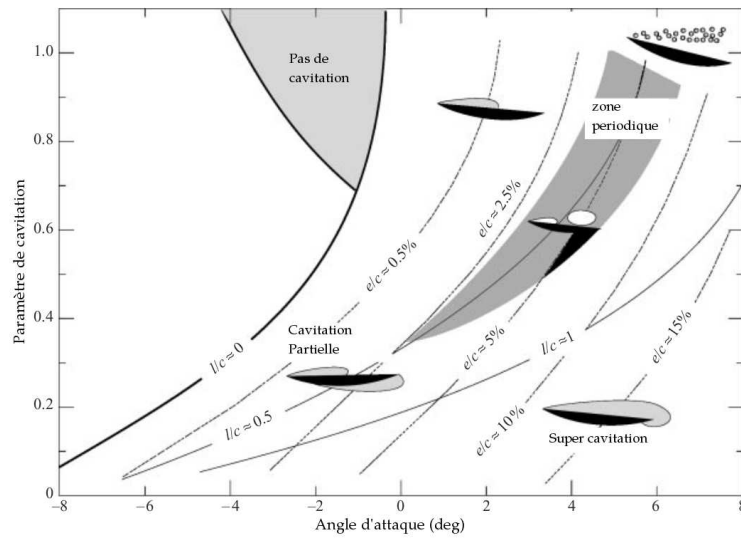


FIGURE 6.2 – Comportement de la poche cavitante autour d'un profil d'aube plan-convexe. La zone périodique correspond à la présence d'un jet rentrant et le développement de nuages de vapeurs. Les longueurs et épaisseurs de poche adimensionnées par la longueur de corde sont respectivement désignées par  $l/c$  et  $e/c$  [96]

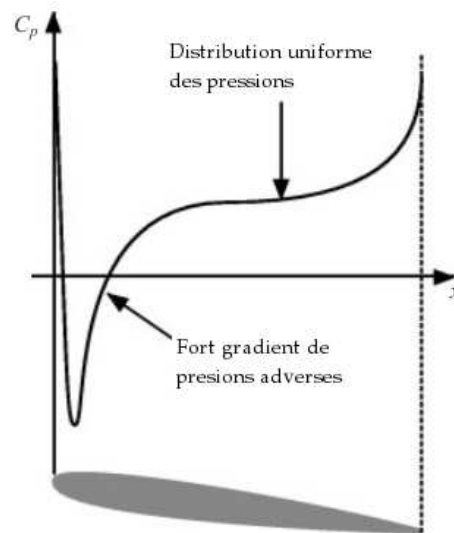


FIGURE 6.3 – Représentation schématique des distributions de pressions sur le côté dépression d'une aube [24]

oscillations cycliques précédentes. Plus récemment Keil et al. [84] ont proposé de repérer l'apparition de lâchers de structures à partir d'un nombre de Reynolds critique. Celui-ci est mesuré pour une vitesse du jet rentrant égale à la vitesse de croissance de la poche. Lorsque la vitesse de la recirculation en proche paroi n'est pas suffisante, la cavité se stabilise ; en revanche, lorsque le jet rentrant s'intensifie la partie attachée est déstabilisée et le phénomène de lâchers de nuages de vapeur se met en place.

### Les instabilités d'ondes de pression

Plusieurs travaux se sont intéressés à l'étude du collapse des structures de vapeur pour des régimes de cavitation partielle sur un profil d'aube. Le phénomène est caractérisé par un pulse de pression d'une durée très courte et de forte amplitude. Ces pics de pressions ont par exemple été mesurés expérimentalement par Le et al. [96] et Reisman et al. [130] ou reproduits numériquement par Keil et al. [84].

L'onde de pression qui résulte du collapse d'un nuage de vapeur est comparable au mécanisme de condensation observé sur une bulle de gaz. Wang et al. [187] proposent en ce sens une étude analytique de la propagation d'une onde au sein d'un nuage de bulles en couplant la dynamique de l'écoulement résolu par un système d'équations homogènes avec celle de chaque bulle calculée par les équations de Rayleigh-Plesset. Suite au passage d'une onde de détente, les bulles situées en périphérie vont s'effondrer et la perturbation se propage ainsi vers l'intérieur du nuage. Ce phénomène génère alors un choc dont l'intensité est démultipliée par le nombre de bulles. Dans un second temps, la même équipe a proposé une observation expérimentale des chocs à l'intérieur d'un nuage de vapeur. Au sein de cette étude, les instationnarités sont générées par oscillations du profil de l'aube [131] et les essais révèlent le mécanisme d'un jet rentrant similaire à celui évoqué jusqu'ici. La valeur ajoutée de ces travaux repose sur l'effort des auteurs à mesurer les variations de pression dans le tunnel au cours d'un cycle de production de nuages de vapeur. Deux catégories de pics de pressions sont identifiées : des impulsions *globales* périodiques de plus grandes intensités relevées au même instant par les différents capteurs ; et des impulsions *locales* réparties aléatoirement dans le temps et l'espace. Les auteurs interprètent ces résultats comme la présence de deux types d'ondes de choc : le collapse de l'ensemble de la cavité provoque des impulsions globales tandis que l'implosion locale de plus petites structures est générée par la déstabilisation de la poche ou par des perturbations à proximité du bord d'attaque.

Ces instabilités d'ondes de pression sont relatées par plusieurs équipes sur d'autres géométries. Les travaux de Sato et al. [141, 145] proposent d'étudier expérimentalement les instationnarités de lâchers de structures cavitantes à l'aval d'un Venturi divergent de  $10^\circ$ . En s'appuyant sur des images obtenues par caméras à haute fréquence ils identifient, au cours d'un cycle, plusieurs phénomènes. Dans un premier temps, un nuage de vapeur est arraché à la partie attachée de la poche et est convectée en aval. Ensuite, dans la zone de re-compression, le nuage de vapeur collapse puis se vaporise à nouveau en plus petite structure de manière comparable au rebond d'une bulle de vapeur. Au cours de la convection du nuage, la partie attachée s'est reformée. Enfin, les ondes de pression générées par le collapse des structures de vapeur sont diffusées en aval et en amont. Leur propagation pourrait être responsable de la mise en place d'un jet rentrant liquide sous la poche attachée qui contribuerait ensuite à l'arrachement d'un nouveau nuage de vapeur. La même équipe a récemment étendu ces analyses à la géométrie d'une tuyère formée par un

convergent-divergent [66] ; les résultats font état des phénomènes similaires à ceux observés sur la géométrie d'un Venturi. Des phénomènes comparables ont été observés par Stanley et al. [172] qui proposent de générer une instabilité de cavitation à l'aide d'un rétrécissement de diamètre d'un orifice cylindrique. Les instationnarités se présentent sous la forme de lâchers périodiques de structures de vapeur combinés à un mécanisme de jet rentrant. Les caméras à fréquence rapide révèlent une remontée des ondes de pression générées par le collapse des nuages de vapeur. La recirculation liquide est observée en proche paroi tout au long d'un cycle et les ondes de pression déstabilisent périodiquement la poche de cavitation. Lorsque ces ondes s'associent à la perturbation de jet rentrant, un nuage de vapeur est arraché puis convecté vers l'aval.

Les travaux expérimentaux de Leroux et al. [100] s'intéressent aux instabilités d'ondes de chocs en menant une campagne de mesure de pression sur la paroi d'un profil NACA soumis à un écoulement de cavitation partielle. Le processus de déstabilisation de la poche est très similaire à celui observé pour ce type d'expérience. La poche attachée débute sa croissance sans qu'aucun nuage ne soit formé, à partir de la moitié de la longueur de corde, cette croissance est ralentie et compensée par la mise en place de lâchers de structures de vapeurs. La cavité n'excède pas les deux tiers de la longueur de corde et les auteurs remarquent qu'à cet instant celle-ci est soumise à deux types d'instabilités : la formation d'un jet rentrant liquide marquée par l'apparition d'un pic de pression en milieu de poche et des ondes de choc provoquées par le collapse des structures de vapeur au bord de fuite. La présence de ces ondes est révélée par une soudaine diminution de pression mesurée à l'intrados et à laquelle succède une déstabilisation de la poche et son arrachement. La cavité est alors divisée en deux, la partie aval est convectée par l'écoulement tandis que la partie attachée continue de croître. Lorsque le nuage de vapeur atteint le bord de fuite celui-ci se condense et la cavité résiduelle diminue subitement. Cette observation est probablement causée par l'onde de choc provoquée par le collapse de la structure de vapeur. La déstabilisation de la poche pourrait ainsi être la combinaison de deux phénomènes, un jet rentrant et une onde de pression provoquée par le collapse de structures de vapeurs. Cette théorie vient corroborer les résultats présentés sur les géométries précédentes et les auteurs mentionnent des travaux similaires menées par Arndt et al. [11]. A partir d'études expérimentales couplées à des calculs LES, l'équipe de Arndt propose de distinguer deux types de mécanismes pour la formation de nuages de vapeurs. Ils utilisent pour cela le paramètre  $\sigma/2\alpha$ , où  $\sigma$  désigne le nombre de cavitation et  $\alpha$  l'angle d'attaque. Pour les petites valeurs de ce paramètre le phénomène de jet rentrant domine tandis que pour les plus grandes valeurs, l'arrachement est consécutif aux pics de pressions provoqués par l'implosion de bulles ; la transition s'établit pour une valeur frontière  $\sigma/2\alpha = 4$ .

## 6.2 Vitesse de propagation des ondes

En cavitation partielle, le collapse des structures de vapeur engendre la formation d'ondes de pression qui se propagent au sein de l'écoulement à travers le fluide. Au sein du mélange diphasique, la célérité de ces ondes est soumise aux différentes compositions du milieu de transport. En effet, la vitesse du son varie significativement selon le taux de présence de vapeur ; dans l'eau liquide pure, elle atteint des ordres de grandeur de  $1500 \text{ m/s}$  contre  $450 \text{ m/s}$  dans la vapeur. Dans la zone de mélange, la vitesse du son subit une sévère diminution pour atteindre, selon Wal-

lis [185], des valeurs de l'ordre de 4  $m/s$ . La transition entre chaque domaine peut être brusque, en raison des fortes variations de la masse volumique et les effets de compressibilité, évalués à partir du nombre de Mach, différent d'une zone à l'autre en fonction du taux de vapeur. La prise en compte de ces caractéristiques est un paramètre essentiel à la compréhension des comportements instationnaires relatifs aux mécanismes de lâchers périodiques de structures cavitantes. Cela sous-entend une estimation adaptée de la vitesse du son locale en milieu cavitant.

La modélisation proposée par Wallis [185] fait intervenir les vitesses du son et masses volumiques par phase et varie en fonction du taux de vide local. Cependant cette expression ne prend pas en compte les transferts de masse et de chaleur. La formulation de Nguyen et al. [120] diffère légèrement de celle Wallis, principalement en zone de mélange où la dissymétrie du profil en fonction du taux de vapeur est plus marquée ; mais le développement suppose là encore une propagation des perturbations sans changement de phase. Brennen [22] propose une expression plus complète de la vitesse du son où les transferts de masse et de chaleur sont pris en compte. Cette formulation dépend en revanche des propriétés thermodynamiques de chaque phase qui nécessitent un calibrage expérimental.

Plusieurs expériences ont été menées dans l'optique de mesurer la vitesse de propagation d'onde en milieu diphasique. Dans un mélange d'air et d'eau, l'équipe de Henry et al. [68] mesure le temps de propagation d'une onde de pression entre deux sections où sont disposées des sondes piezo-électriques. Costigan et al. [32] proposent pour des valeurs de taux de vide comprises entre 0,04 et 0,5, plusieurs valeurs de la vitesse de propagation d'une onde de pression ; celles-ci sont relevées à partir d'une seule sonde de pression disposée au sein d'un tube où l'onde de détente est générée par fermeture des vannes d'introduction d'air et d'eau. Les travaux de Testud et al. [178] s'intéressent à la formation d'un écoulement cavitant au travers d'un diaphragme. À l'aide d'une méthode basée sur les relevés de trois sondes de pression, ils mesurent, en régime de supercavitation, des vitesses du son minimale qui descendent jusqu'à 13  $m/s$ . Néanmoins les taux de vide qui correspondent aux mesures ne sont pas mentionnés. Enfin les essais de Shamsborhan et al. [8] reprennent également des études de cavitation à l'aval d'un diaphragme et mesurent, en fonction du taux de vide, la vitesse de propagation des perturbations à l'aide de trois sondes de pression. La méthode de post-traitement de la vitesse du son est basée sur un processus itératif qui permet d'incorporer au calcul les variations du nombre de Mach et les résultats insistent sur la nécessité de prendre en compte les effets de compressibilité pour les taux de vide les plus élevés.

D'un point de vue numérique, les études de l'influence de la vitesse du son sur la reproduction des phénomènes cavitants concernent principalement les modèles fermés par une loi d'état barotrope. Les simulations de Coutier-Delgosha et al. [34] mentionnent le calibrage nécessaire de la vitesse du son minimale  $c_{min}$  caractéristique de la loi barotrope pour obtenir un comportement de poche de cavitation représentatif de l'expérience. L'influence de ce paramètre est également évoqué par Pascarella et al. [124] puis par Rolland et al. [134]. Dans le modèle à 4-équations, ici présenté, la formulation de la vitesse du son dépend de la fermeture thermodynamique et son influence sur la simulation du comportement de la poche est largement évoquée dans la partie résultat.



## 6.3 Fréquence des instabilités de cavitation

### 6.3.1 Présentation

La partie 6.1.2.2 propose un résumé des différents mécanismes évoqués par la littérature pour tenter d'expliquer la formation et la convection de lâchers de structures de vapeurs qui apparaissent en régime de cavitation partielle. La plupart des études s'intéresse aux instabilités de cavitation formées autour de multiples géométries : Venturi, profils NACA, profils d'aubes ou orifices cylindriques. Le rôle prépondérant d'un jet rentrant liquide qui se développe sous la partie attachée de la cavité est largement évoqué et les expériences relatent d'une mise en place cyclique de lâchers de nuages de cavitation. Il semblerait que les ondes de pression créées par le collapse des structures de vapeur puissent s'ajouter aux facteurs de déstabilisation de la poche. Combinées au mécanisme de jet rentrant, ces ondes contribueraient à l'arrachement d'une partie de la poche attachée et à la formation d'un phénomène cyclique.

Le collapse des structures de vapeur engendre des fluctuations de pression dans les zones cavitantes. Afin de quantifier la périodicité du phénomène de production de nuages et de déterminer une fréquence des instabilités, plusieurs études ont analysé les oscillations de pression. Une mesure de ces oscillations permet de quantifier la périodicité du phénomène en déterminant une fréquence des instabilités. Cette partie présente les études qui incorporent un relevé de ces fréquences ; l'objectif est, ici, de montrer comment évoluent les résultats en fonction de la géométrie d'étude ou des paramètres caractéristiques d'écoulements cavitants.

### 6.3.2 Analyses fréquentielles

Les travaux de Reisman et al. [130] présentent une analyse des oscillations de pression mesurées à l'aide de sondes piezo-électriques positionnées sur la partie extradors d'un profil d'aube. La démarche consiste à mesurer les pressions instationnaires puis d'en déduire des spectres fréquentiels. L'expérience est réalisée pour trois nombres de cavitation obtenus en modifiant l'angle d'attaque et les résultats montrent une variation des pics fréquentiels en fonction du taux de cavitation. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus par Arndt et al. [10] pour un régime de cavitation stationnaire sur profil d'aube. En élargissant leurs travaux au cas d'un profil NACA [86], les chercheurs distinguent deux régimes caractéristiques selon le développement de la cavitation. Pour des valeurs faibles de  $\sigma$ , les lâchers se mettent en place à de faibles fréquences qui varient peu en fonction du nombre de cavitation. L'augmentation de  $\sigma$  modifie la valeur des fréquences harmoniques de façon significative ; le pic fréquentiel se déplace vers les hautes fréquences et continue d'augmenter avec le nombre de cavitation. Les résultats de Leroux et al. [100] viennent corroborer ces observations. Selon leurs interprétations, la valeur des fréquences est directement corrélée à la longueur de poche et a fortiori au nombre de cavitation. Pour une taille de poche inférieure à la moitié de la corde, les oscillations se concentrent en fin de poche et leurs fréquences dépendent de la longueur de la cavité. À partir d'une taille supérieure à la moitié du profil, les instabilités et les lâchers de structure se mettent en place et la fréquence des phénomènes oscillatoires diminue. La dynamique des poches de cavitation sur des géométries Venturi, censées reproduire les conditions d'écoulement autour des pâles d'hélice, présentent les mêmes caractéristiques. En effet, les études de Ganesh [49] témoignent d'une réduction de la fréquence des oscillations prin-

principales lorsque que le nombre de cavitation diminue. Ces études fréquentielles ont été étendues à d'autres géométries. Stanley et al. [171] quantifient la fréquence des lâchers de structures au sein d'un orifice cylindrique par analyse d'images de caméra rapide. Pour les plus hautes valeurs de  $\sigma$  testées, des lâchers périodiques associés à une fréquence caractéristique sont identifiés. En revanche, en régime de supercavitation, la taille de la cavité attachée s'accroît et le phénomène cyclique disparaît. Les études de Nishimura et al. [121] proposent, sur une géométrie semblable, d'étudier l'évolution des fréquences en modifiant tour à tour le diamètre de la veine, la pression d'injection puis le nombre de cavitation. Chaque paramètre influe sur la fréquence des oscillations et seul le nombre de Strouhal demeure constant au cours des différentes expériences.

### 6.3.3 Résonance de cavitation

Parmi les recherches expérimentales qui se sont intéressées à l'évolution des pressions au cours de l'apparition de la cavitation, plusieurs ont remarqué, sous certaines conditions, une amplification des fluctuations et la mise en place d'un phénomène de résonance. Les travaux de Li et al. [101, 193] observent une instabilité particulière qui ne disparaît pas en changeant le nombre de cavitation. Ainsi, la fréquence caractéristique du phénomène de résonance se démarque des autres perturbations, liées à la cavité ou à la turbulence, dont les spectres fréquents varient en fonction du taux de vapeur créé. Les auteurs ont élargi leurs études en opérant sur trois systèmes cavitants et en modifiant le nombre de cavitation. Dans un premier temps, ils relèvent la fréquence des oscillations du système en conditions non cavitantes, puis, à mesure que la cavitation se développe, l'amplitude du mode de résonance s'accroît mais sa fréquence demeure similaire à celle du système en condition liquide. Ces observations laissent ainsi supposer que le phénomène cyclique de lâchers de nuages de vapeur s'adapte à la fréquence caractéristique du système monophasique.

Les conclusions précédentes sont néanmoins difficilement généralisables et semblent dépendre des conditions expérimentales. Les travaux de Ruchonnet et al. [139] s'intéressent à l'influence de la cavitation sur la résonance acoustique en plaçant, pour cela, un obstacle au sein d'une conduite hydraulique. Les chercheurs observent une nette diminution de la fréquence de résonance et des modes propres lors de l'apparition et le développement de la cavitation.

### 6.3.4 Spectres fréquents sur géométries venturi

Le comportement instationnaire de lâchers de nuages de vapeur a largement été observé sur les géométries de type Venturi. Ce régime de cavitation s'établit néanmoins lorsque l'angle de décrochage au niveau du col est suffisamment prononcé. En effet, les études sur Venturi  $4^\circ$  témoignent de la formation d'une poche attachée associée à un jet rentrant liquide en zone de fermeture pour des régimes de  $\sigma/2\alpha \approx 4$ . Ce type de cavitation ne présente pas de périodicité [177, 174, 134, 14].

Les travaux de Stutz et Reboud [175] se sont intéressés aux instabilités de cavitation sur un Venturi dont l'angle de décrochage de  $8^\circ$  engendre des lâchers périodiques au point de fonctionnement de  $\sigma/2\alpha \approx 7,5$ . A partir d'un signal de pression mesuré à l'aval de la cavité les chercheurs observent la mise en place d'un phénomène cyclique de période de 22 ms correspondant à une fréquence des oscillations d'environ 45 Hz. Cette fréquence avoisine les valeurs relevées à la fois

par Aeschlimann et al. [3] puis par Ganesh [49] sur une géométrie et avec des conditions d'étude semblables (même vitesse d'injection et même nombre de cavitation).

Plusieurs études ont tenté de reproduire numériquement les phénomènes cycliques de lâchers de structures. Le modèle diphasique d'un système d'Euler à 5-équations proposé par LeMartelot et al. [98] a permis d'obtenir une fréquence de production de nuage de  $43 \text{ Hz}$  associée à des pics fréquents des oscillations de pressions compris entre  $40$  et  $50 \text{ Hz}$ . Chebli et al. [27] proposent pour leur part, un modèle homogène avec équation de transport du taux de vide couplé à une modélisation RANS de la turbulence. Les résultats sur la géométrie Venturi  $8^\circ$  dépendent du modèle de turbulence et la fréquence de  $45 \text{ Hz}$  est approchée avec un système d'équation  $k - \epsilon$ .



## Chapitre 7

# Etude de la cavitation sur géométries de Venturi

*Les géométries de Venturi facilitent la mise en place de mesures expérimentales et l'étude des mécanismes de cavitation partielle. En effet, l'écoulement est en moyenne quasiment bidimensionnel et les champs de pression s'apparentent à ceux de profils d'aube. Dès lors, des campagnes à la fois expérimentales et numériques ont vu le jour sur des géométries dont les mécanismes d'instationnarités varient en fonction de l'angle d'incidence. Ce chapitre répertorie les travaux expérimentaux destinés à la compréhension des instabilités qui se développent sur des géométries plus complexes utilisées pour des applications industrielles. Au delà de cette exploration, ces essais permettent, en parallèle, le développement de divers modèles numériques qui seront mentionnés au cours de ce chapitre. Enfin, les paramètres nécessaires à la mise en application du modèle de cavitation présenté jusqu'ici sont détaillés pour les deux profils de Venturi  $4^\circ$  et Venturi  $8^\circ$ .*

## 7.1 Présentation

Le développement de la cavitation sur des géométries de Venturi est le thème de nombreuses campagnes expérimentales qui s'intéressent plus particulièrement au phénomène de cavitation partielle. Une majorité de ces travaux [173, 174, 134, 14, 3] s'adresse au secteur aérospatial pour lequel la cavitation apparaît autour des inducteurs de turbopompes. Plusieurs séries d'essais [81, 19, 65] ont ainsi été menées sur des géométries d'inducteur. Cependant, la complexité des écoulements au sein des machines tournantes rend difficile l'interprétation physique des instabilités liées à la cavitation. Dans l'optique d'obtenir d'avantage d'informations sur les poches de cavitation qui se développent sur le côté basse pression des aubes d'inducteur, des études sur des géométries plus simple de type Venturi ont ainsi été proposées. D'une part, ce type de géométrie facilite l'instrumentation et la compréhension des mécanismes liés au développement de la cavitation ; d'autre part la forme du divergent permet de reproduire les champs de pression existant sur les profils d'aubes. Deux géométries de Venturi ont pour cela été retenues.

Le Venturi  $4^\circ$  comprend un angle d'ouverture de  $4^\circ$  après le col et permet d'atteindre le point de fonctionnement nominal d'un inducteur ; la poche de cavitation possède une dynamique quasiment stable. Les études réalisées sur cette géométrie permettent de mieux comprendre la composition de la poche. Premièrement celles-ci démontrent que la cavité n'est pas composée de vapeur pure mais d'un mélange diphasique liquide-vapeur. Deuxièmement, les observations témoignent de la formation d'un jet rentrant liquide qui se développe en zone de fermeture, même dans le cas d'une poche de cavitation stable. Ces résultats modifient ainsi totalement la perception des poches de cavitation qui étaient jusqu'alors considérées sans dynamique interne et sans interaction avec l'écoulement externe.

La seconde géométrie du Venturi  $8^\circ$  est développée pour l'étude du fonctionnement à débit partiel de l'inducteur. Cette géométrie est formée par un angle d'ouverture de  $8^\circ$  après le col. Son régime d'écoulement reproduit un angle d'incidence élevé entre le fluide et l'aube qui est caractérisé par la formation, à l'aval du col, de tourbillons composés d'un mélange diphasique et convectés par l'écoulement principal. Ces instationnarités peuvent expliquer les comportements instables observés sur les géométries réelles d'inducteurs. Les mesures effectuées sur le Venturi  $8^\circ$  montrent également la formation de poches de cavitation composées d'un mélange liquide-vapeur dont le taux de vide n'excède pas 25%.

Les parties suivantes introduisent les différentes études expérimentales menées sur ces deux géométries. Chaque campagne d'essais ne présente par forcément les mêmes méthodes de mesure. Ainsi, les techniques utilisées et les résultats obtenus par les différentes équipes seront systématiquement présentés.

## 7.2 Le Venturi $4^\circ$

### 7.2.1 Présentation de la veine d'essai

Une première série d'expérience sur Venturi  $4^\circ$  a été proposée par Stutz et al. [173], puis prolongée par la suite, pour les mêmes conditions d'essai par Barre et al. [14]. La géométrie d'étude présente une longueur de référence  $L_{ref} = 0,520 m$ , une section d'entrée de  $0,044 m$  de large et  $0,050 m$  de haut et une section au col égale à  $S_{col} = 43,7 \times 44 mm^2$ . Le convergent-divergent est

formé par un angle de fermeture de 4,5° avant le col et un angle d'ouverture de 4° après le col. La vitesse de référence est mesurée dans la section d'entrée :  $U_{ref} = U_{entree} = 10,8 \text{ m/s}$ . Le procédé expérimental consiste à diminuer progressivement la pression dans la veine afin de déclencher la formation vapeur. Le taux de cavitation est quantifié à partir du nombre de cavitation  $\sigma_{ref}$  défini par :

$$\sigma_{ref} = \frac{P_{ref} - P_{vap}}{0,5\rho U_{ref}^2}$$

où  $\rho$ ,  $P_{vap}$ ,  $P_{ref}$  représentent respectivement la masse volumique du liquide, la pression de vaporisation et la pression de référence en entrée ( $P_{ref} = P_{entree}$ ). Les mesures sont menées à l'aide d'une bi-sonde optique qui permet de quantifier le taux de vide, la vitesse et la longueur des structures de vapeur. Une présentation d'avantage détaillée sur la mise en place des bi-sondes optiques est disponible dans la littérature [173, 174]. Les différentes stations de mesure sont placées aux distances de 5,1, 20,9, 38,4, 55,8 et 73,9 .10<sup>-3</sup>m à l'aval du col. La boucle d'essais est présentée en figure 7.1, une vue de la veine d'essais est disponible sur la figure 7.2 et le tableau 7.1 résume le point de fonctionnement du Venturi qui fait intervenir le taux de cavitation en entrée :  $\sigma_{entree}$ .

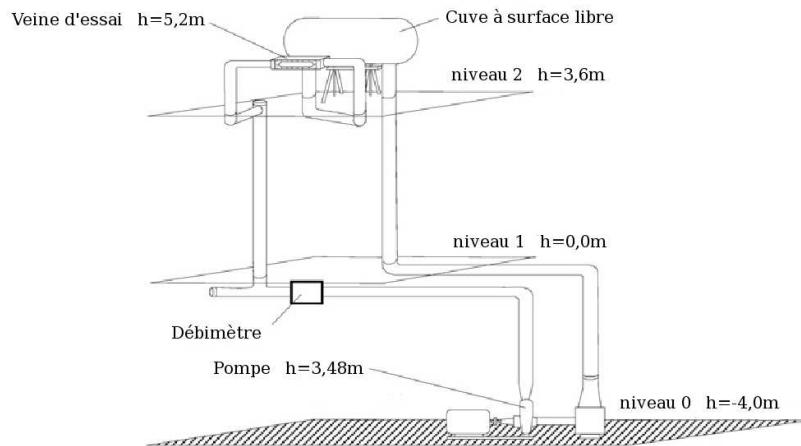


FIGURE 7.1 – Schéma descriptif de la veine d'essai du CREMHyG

TABLE 7.1 – Point de fonctionnement du Venturi 4°

$U_{entree} (m.s^{-1})$	$P_{entree} (Pa)$	$\sigma_{entree}$	$T_{ref} (K)$	$Re_{ref}$
10.8	36 000	$\approx 0.55$	$\approx 293$	$2.7 \cdot 10^6$

### 7.2.2 Résultats expérimentaux

Les études de Stutz et Reboud ont été menées pour la première fois en 1996 au CREMHyG [173]. La longueur de cavité moyenne étudiée est de  $L_{cav} = 80 \text{ mm}$  obtenue avec une vitesse d'entrée  $U_{ref} = 10,8 \text{ m/s}$  à laquelle correspond une vitesse au col de  $12,4 \text{ m/s}$ . Une partie

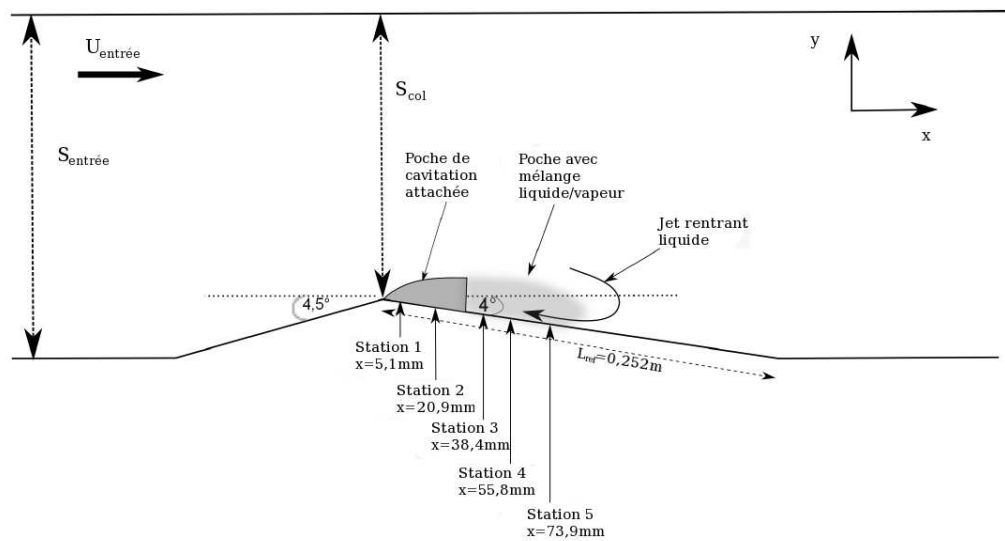


FIGURE 7.2 – Vue schématique du Venturi 4° et de la poche de cavitation

de l'étude consiste à tester l'influence du nombre de Reynolds sur trois longueurs de cavité :  $L_{\text{cav}} = 45\text{ mm}$ ,  $80\text{ mm}$  et  $110\text{ mm}$ ; associées respectivement aux vitesses d'entrée  $U_{\text{ref}} = 7,2\text{ m/s}$ ,  $10,8\text{ m/s}$  et  $14,4\text{ m/s}$ . Pour ces applications, le nombre de cavitation varie entre 0,6 et 0,75.

Une première partie de l'étude concerne la topologie de l'écoulement externe. Pour cela, les évolutions de pression à l'aval de la cavité sont tracées pour les trois régimes de cavitation; au sein de la poche de cavitation la pression demeure quasiment à la pression de vaporisation puis augmente en zone de recollement. Les champs de vitesse moyenne sont mesurés à l'aide d'un anémomètre doppler-laser et une géométrie des lignes de courant est proposée par intégration des vitesses moyennes sur l'axe vertical.

Dans un deuxième temps, l'écoulement à l'intérieur de la poche est étudié en traçant les profils moyens de vitesse et de taux de vide. Ils mettent en évidence la présence d'un mélange diphasique dans la cavité dont le taux de vapeur évolue entre 80% sur la partie amont et 10% sur la partie aval. Les auteurs interprètent cette réduction du taux de vide comme une diminution du phénomène de vaporisation qui se produit principalement sur le premier tiers de la poche de cavitation. A proximité de la paroi, les profils de vitesse révèlent la présence d'une recirculation qui apparaît uniquement en conditions de cavitation et dont le jet rentrant remonte jusqu'à  $30\text{ mm}$  du col. Il est intéressant de remarquer que les changements du nombre de cavitation n'affectent pas la topologie globale de l'écoulement; la répartition du taux de vide à l'intérieur de la poche ne varie quasiment pas en fonction de  $\sigma$ . Finalement ces travaux précurseurs permettent de mieux comprendre les mécanismes liés au développement de la cavitation sur Venturi 4°. Le phénomène de jet rentrant est clairement identifié et les mesures de pression proposent une cartographie de la recompression sur une dynamique de poche attachée. Ces travaux ont été prolongés en étudiant l'impact de la rugosité de la paroi sur la recirculation [174]. Il s'avère que le taux de vide, la



vitesse moyenne et le mécanisme de jet rentrant ne sont pas influencés par les frottements en paroi ; la présence d'un grand nombre de bulles semble en effet limiter les effets de la rugosité.

**Les études de Barre et al.** se sont également intéressées à la géométrie de Venturi 4° [14] ; dont une représentation de la poche est disponible en figure 7.3). Elles utilisent la boucle d'essai mise en place par Stutz et ont pour condition d'entrée la vitesse de référence  $U_{ref} = 10,8 \text{ m/s}$ . Les champs de taux de vide et de vitesses sont déterminés aux mêmes stations que celles présentées en figure 7.2. Ces travaux améliorent les conditions d'essai de Stutz par l'utilisation d'une nouvelle génération de bi-sondes optiques où la distance entre capteurs est diminuée, favorisant ainsi la détection d'une structure de vapeur. D'autre part le temps d'acquisition de 300 s comparé aux 9 s de Stutz augmente la convergence des résultats statistiques.

Au sein de ces travaux, les résultats obtenus aux cinq stations de mesure sont confrontés à ceux de Stutz. Qualitativement, les profils sont dans l'ensemble assez similaires, néanmoins, les deux premières stations à l'aval du col révèlent un taux de vide supérieur à celui mesuré par le passé, pour atteindre désormais des valeurs maximales d'environ 90% de vapeur. Sur la seconde partie de la poche le taux de vapeur est élevé à mi-hauteur de cavité et diminue significativement à proximité de la paroi. Ces résultats sont la signature du jet rentrant liquide observé par Stutz. En ce qui concerne le champ de vitesse, celui-ci permet d'identifier la formation d'un écoulement cisailé en première partie de poche et le mécanisme de jet rentrant se produit uniquement entre les stations 3 et 5 avec la mise en place d'une recirculation sur la moitié inférieure de la poche. Ces observations diffèrent des profils de Stutz qui témoignent d'un écoulement adverse jusqu'au niveau de la station 1. Le temps d'acquisition supérieur et les progrès des calculs des fonctions de densité de probabilité pourraient expliquer l'amélioration des résultats obtenus par les essais de Barre et al.

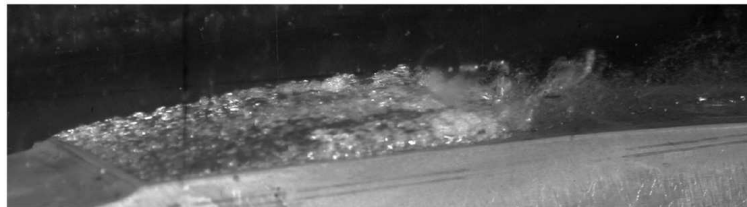


FIGURE 7.3 – Dynamique de la poche observée par Barre et al. [14] sur Venturi 4°

### 7.2.3 Etudes numériques

Un grand nombre d'études numériques utilise les géométries de type Venturi afin d'évaluer les modèles de cavitation. Ces travaux s'appuient, en majorité, sur les résultats d'essai présentés en section 7.2.2. Cette partie s'emploie à présenter les simulations numériques sur Venturi 4° évoquées par la littérature.

### 7.2.3.1 Etat de l'art des études numériques

**L'équipe de Lindau et al.** propose un système d'équations préconditionné et résolu implicitement en temps [103]. Les équations de conservation sont formulées pour un fluide homogène et la quantité locale de vapeur est déterminée par l'utilisation d'une équation de transport de la fraction volumique. La pression est calculée via l'équation de conservation de la masse, tandis que l'équation de transport de la fraction volumique permet de déduire la masse volumique au sein du mélange. Cette résolution n'incorpore pas d'équation d'état supplémentaire. Les phénomènes turbulents sont modélisés par le couple d'équations  $k - \epsilon$ . Les simulations effectuées sur la géométrie Venturi  $4^\circ$  [102] présentent une sur-estimation du taux de vide dans la zone de poche attachée et des difficultés à capturer le phénomène de jet rentrant en fermeture de poche.

**Le modèle de Coutier et al.** est testé sur des géométries de Venturi [34]. Il se compose d'un système d'équations RANS en fluide homogène couplé à une modélisation  $k - \epsilon$  de la turbulence qui incorpore une correction de Reboud visant à diminuer la viscosité turbulente. Les phénomènes de vaporisation et de condensation sont contrôlés par une loi d'état barotropique à partir de laquelle la masse volumique du mélange est déduite des valeurs de la pression. La résolution numérique se base la méthode des volumes finis pour un algorithme SIMPLE. Les résultats des simulations sont comparés aux données expérimentales de Stutz et al. [173] et mettent en évidence l'intérêt de l'utilisation de la correction de Reboud sur la viscosité turbulente qui améliore reproduction de la recirculation en proche paroi.

**Les simulations de Shin et al.,** sur la géométrie de Venturi  $4^\circ$ , sont réalisées à partir d'un solveur compressible. Une méthode de préconditionnement est utilisée pour reproduire les écoulements à faible nombre de Mach [159] et le modèle des équations de conservation pour un fluide homogène est couplé à une équation de transport de taux de vide. Ces simulations négligent les effets de la turbulence mais incorporent une formule spécifique pour le calcul de la viscosité du mélange. Les profils de vitesse et de taux de vide moyen obtenus pour la géométrie Venturi sont en bon accord avec les données expérimentales de Stutz [173].

**Le modèle de Senocak et al.** repose sur un algorithme de couplage pression-vitesse appliqué à un système d'équations RANS associé à une équation de transport de la fraction volumique liquide [156]. Les équations de conservations sont couplées à un modèle  $k - \epsilon$  pour la turbulence. Les résultats des simulations témoignent des difficultés à reproduire le jet rentrant en raison d'une sur-estimation de la viscosité turbulente.

**Dumond et al.** proposent une simulation des phénomènes de cavitation à partir de modèles à équation de transport d'une fonction de densité de probabilité [44]. L'exemple le plus connu pour ce type de modèle est l'équation de Boltzmann utilisée en théorie cinétique pour décrire l'évolution d'un gaz hors équilibre. En se basant sur des précédentes études, menées dans le domaine de la combustion, les auteurs adaptent une méthode à champs stochastiques qui permet de résoudre l'équation de transport de la fonction de densité de probabilité dans un cadre Eulerien, évitant ainsi un couplage complexe avec un solveur Lagrangien. Les calculs sont réalisés à l'aide

d'un modèle homogène dont la simulation des phénomènes turbulents adopte une approche LES. Contrairement aux modèles à équation de transport de taux de vide classiques, qui utilisent des grandeurs moyennées du fluide et modélisent au sein du terme source une moyenne des transferts de masse, l'équation de transport de la fonction de densité de probabilité de la fraction de vapeur améliore la reproduction des phénomènes non linéaires présents à l'interface. Pour cela, les transferts de masse instantanés au sein de chaque champ stochastique sont régis par une équation du type Rayleigh-Plesset. Les auteurs présentent les résultats obtenus sur une géométrie de Venturi 4° et sur une veine cylindrique à double rétrécissement.

**Rolland et al.** ont prolongé, au sein du LEGI [134], les calculs numériques initiés par Coutier et al. [34]. Ces travaux explorent l'influence du paramètre ajustable  $c_{min}$  issu de la loi d'état barotrope. Le comportement quasi stable de la partie amont est mieux reproduit lorsque les valeurs de la vitesse du son minimale dans le mélange,  $c_{min}$ , sont fixées aux valeurs inférieures. Une seconde partie de l'étude menée par Forte Patella et al. [125] présente les résultats obtenus pour les calculs instationnaires. Ces simulations modifient la dynamique de la poche en zone de fermeture dont la longueur oscille entre 40 et 74 *mm*. Le phénomène de jet rentrant n'est pas clairement identifié par les profils de vitesse.

**Rodio et al.** ont plus récemment proposé une analyse des incertitudes de paramètres d'un écoulement stationnaire sur Venturi 4° [132]. Lors de la confrontation entre études numérique et expérience, les auteurs révèlent que le choix du modèle de cavitation, et plus précisément la quantification du taux de vide, joue un rôle moins important que les incertitudes expérimentales liées aux conditions d'entrée.

### 7.2.3.2 Etudes numériques avec Caviflow

Après avoir évoqué les différentes études numériques sur Venturi 4° répertoriées par la littérature, cette partie a pour vocation de dresser un historique des calculs menés à partir du code Caviflow.

**Le code de calcul** est basé sur une résolution compressible des écoulements cavitants. Le système d'équations RANS est couplé à un modèle de turbulence du premier ordre. Une méthode de préconditionnement est implémentée pour traiter le calcul des zones faiblement compressibles. A l'origine le modèle diphasique repose sur un système à 3-équations de conservation en fluide homogène fermé par une équation d'état et les premières simulations en écoulement cavitant ont été comparées aux résultats obtenus avec un autre code interne : IZ [134, 125]. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [55] ; ils mettent en avant une amélioration de la prédiction du jet rentrant liquide pour le code compressible Caviflow.

**Les modèles de cavitation.** Plusieurs axes de recherches ont été menés à partir du modèle de cavitation à 3-équations. Pour ce modèle, le calcul de la pression au sein du mélange utilise soit une loi d'état barotrope, soit une équation d'état de mélange des gaz raides. L'article [58] présente l'écriture du système d'équations hyperboliques et la formulation de la vitesse du son

obtenue pour chaque équation d'état. La comparaison avec les données expérimentales de Barre et al. [14] constate une meilleure reproduction des instabilités avec le modèle barotrope.

**Les modèles avec effets thermodynamiques.** Dans un second temps les simulations ont été étendues au cas de fluides thermosensibles tel que le fréon R-114 avec, pour objectif, la modélisation des effets thermodynamiques liés à la cavitation [59]. La démarche consiste à prendre en compte les variations de température au sein des équations de fermeture de la loi d'état barotrope ou du mélange des gaz raides. Les résultats, comparés aux données expérimentales, montrent certaines lacunes du modèle de mélange des gaz raides. En revanche, le modèle barotrope avec effets thermodynamiques améliore la modélisation et, pour des vitesses d'injection faibles, permet de reproduire la chute de température caractéristique de la cavitation d'un fluide cryogénique.

Au sein de ces études, Goncalves et al. [60] s'intéressent aux propriétés thermodynamiques des équations d'état de chaque modèle et plus particulièrement aux bornes de la vitesse du son dans le mélange. Les chercheurs mettent en avant les adaptations nécessaires de la fermeture barotrope pour un fluide thermosensible et proposent une première formulation d'un modèle à 4-équations avec transport de taux de vide. Afin d'assurer la cohérence thermodynamique de ce modèle, les auteurs suggèrent d'incorporer les écritures différentielles des variables thermodynamiques au sein de la vitesse du son. Dans ce manuscrit, les différentes formulations de la vitesse du son avec prise en compte des effets thermodynamiques sont répertoriées en partie 4.2.3.3.

Plus récemment, le modèle 4-équations avec effets thermodynamiques a été détaillé dans l'article [54] ; il met en avant l'intérêt de l'équation supplémentaire de transport de taux de vide pour la reproduction d'un écoulement thermosensible en comparant plusieurs modélisations du transfert entre phases.

**La modélisation de la turbulence.** Le système à trois équations de conservation en fluide homogène est couplé à un modèle de turbulence à une ou deux équations de transport. Les interactions entre la modélisation de la cavitation et la reproduction des effets turbulents ont fait l'objet d'une thèse soutenue par Decaix [37]. A partir d'un modèle de cavitation barotrope les études confrontent plusieurs modèles de turbulence :

- modèles avec limiteur de la viscosité turbulente ( $k - \epsilon$  réalisable,  $k - \omega - SST$ ),
- modèles avec correction de Reboud (Spalart et Allmaras,  $k - \epsilon$ ,  $k - \ell$ ),
- modèles avancés (Spalart et Allmaras-*SAS*,  $k - \ell - SAS$ ),
- modèles hybrides (Spalart et Allmaras-*DES*, Spalart et Allmaras-*DDES*),
- modèles avec termes de turbulence compressible.

Chaque modèle repose sur la relation de Boussinesq, adaptée de sa version en écoulement monophasique, qui a tendance à sur-estimer la viscosité turbulente dans les zones diphasiques et par conséquent à diminuer le développement d'un jet rentrant en zone proche paroi. Plusieurs démarches ont ainsi été menées afin de corriger les modèles de turbulences standard. La correction de Reboud [129] qui consiste à introduire un limiteur au sein même du calcul de la viscosité turbulente a été testée avec succès par de nombreux auteurs [29, 33, 125, 158, 170, 192]. Les travaux de Menter [110, 111] proposent quant à eux une correction SST destinée à diminuer la viscosité turbulente dans les zones de fort gradient de pression positif. Une variante de ce modèle, basée sur les conditions de réalisabilité [45], a été étudiée pour les écoulements cavitants instationnaires [52]. Un troisième

type de modèles, nommé SAS, inclut un terme à échelle adaptative. Cette approche s'inspire des travaux en écoulement monophasique réalisés par Menter [112] et incorpore, au sein de la seconde équation de transport, une échelle de longueur turbulente qui s'ajuste par rapport aux échelles déjà résolues de l'écoulement. Les autres corrections de la viscosité sont basées sur la prise en compte des effets compressibles de la turbulence. Les termes de correction proposés par Wilcox [188] dans le cas d'écoulements compressibles ont par exemple été testés pour des écoulements instationnaires périodiques [33].

Les travaux de Decaix étudient la dynamique de poche sur une géométrie Venturi de 4° en comparant les profils de pression moyenne, pression fluctuante, vitesse moyenne et taux de vide moyen aux données expérimentales de Barre et al. [14]. Ce mémoire aboutit aux enseignements suivants.

1. Le limiteur de viscosité turbulente nécessite un paramétrage à posteriori afin de reproduire la topologie de l'écoulement expérimental. La plupart des modèles de turbulence simulent une convection de nuages de vapeur qui n'est pas observée expérimentalement
2. Deux calculs présentant des profils moyens de taux de vide identiques peuvent simuler des fluctuations de pression différentes.
3. Deux calculs reproduisant le phénomène de recirculation en fermeture de poche peuvent avoir des profils moyen de taux de vide différents.
4. Le modèle hybride *DES* simule une poche attachée trop petite et sur-estime la convection des lâchers de nuages de vapeur tandis que le modèle *DDES* empêche le développement du jet rentrant.

Plusieurs adaptations des modèles de turbulence aux conditions diphasiques ont été proposées au cours de ces travaux et leurs influences sur le comportement de la poche a fait l'objet d'une publication [38]. Les auteurs concentrent leurs études au cas d'un modèle turbulent  $k - \ell$  dont ils proposent une formulation SAS à échelle adaptative.

Une seconde étude s'est intéressée à la prise en compte des termes turbulents compressibles pour les modèles  $k - \epsilon$  et  $k - \omega$  [39]. Parmi les termes supplémentaires incorporés pour les modélisations sur Venturi 4°, l'ajout de la dissipation dilatationnelle permet le développement d'un jet rentrant liquide sans avoir recours à une méthode de diminution de la viscosité turbulente. Les résultats montrent ainsi la présence de phénomènes turbulents compressibles en zone de mélange. Néanmoins le manque de données expérimentales concernant les quantités turbulentes dans les écoulements cavitants à haut Reynolds ne permet pas de calibrer et d'ajuster ces modèles de turbulence compressible.

**Le choix du maillage** Parallèlement à ces travaux, Goncalvès et Decaix [57] ont étudié l'influence du maillage et son raffinement dans la zone de proche paroi où la cavité partielle se développe et interagit avec la couche limite turbulente. Les simulations menées pour plusieurs modèles de turbulences, révèlent que les phénomènes de jet rentrant et l'estimation du taux de vide sont améliorés en utilisant une loi de paroi plutôt qu'un maillage très fin. Les comparaisons ont également permis d'extraire un maillage optimal  $251 \times 62$  composé de 251 noeuds dans la direction longitudinale et 62 noeuds dans la direction transversale et dont le raffinement n'améliore pas le

comportement de la poche dans la couche limite. Les valeurs de  $y^+$  pour un tel maillage ont été mesurées entre 12 et 17 pour les écoulement non cavitant avec décollement.

#### 7.2.4 Paramètres numériques

La mise en place des calculs cavitants nécessite le paramétrage de plusieurs variables numériques détaillées au sein de ce paragraphe. Le choix des valeurs numériques fait suite aux études paramétriques précédemment réalisées sur le code de calcul Caviflow. Les calculs 2D sont réalisés sur un maillage raffiné  $251 \times 62$  présenté en figure 7.4.

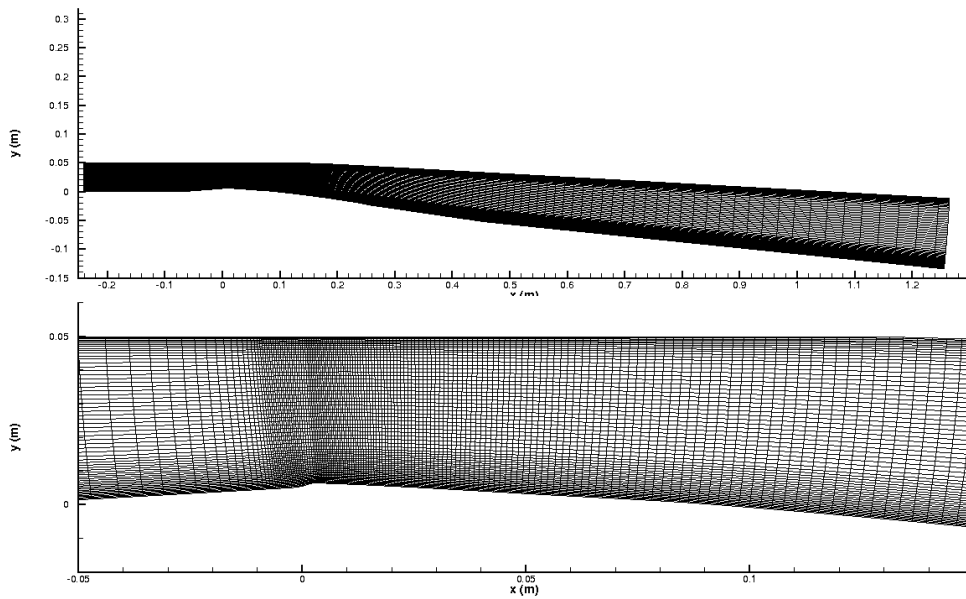


FIGURE 7.4 – Maillage  $251 \times 62$  de la géométrie Venturi  $4^\circ$

**Initialisation des calculs non-cavitants.** La méthode de résolution consiste à initialiser les calculs à partir d'un champ d'écoulement uniforme non cavitant qui fait appel à une approche à pas de temps local. Cette méthode consiste à fixer pour chaque cellule  $(i, j)$  du maillage un  $\Delta t$  spécifique dont la valeur dépend du nombre de CFL imposé par l'utilisateur et du maillage. La résolution temporelle comprend un pas de temps minimum  $\Delta t_{min}^* = \frac{\Delta t \cdot c_{ref}}{L_{ref}} = 10^{-4}$  adimensionné par la vitesse du son génératrice  $c_{ref} = 110,71 \text{ m/s}$  et la longueur de corde  $L_{ref} = 0,252 \text{ m}$ , auquel correspond un pas de temps physique minimal  $\Delta t_{min} = 2,28 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ .

Les autres paramètres numériques sont fixés à partir des conditions suivantes.

- Le nombre de CFL est fixé à  $CFL = 10$ .
- 15 sous-itérations dans l'algorithme de Jacobi sont appliquées pour la résolution implicite du système.
- Le paramètre de pré-conditionnement est calibré à  $K = 1$ .
- Les coefficients de dissipation du schéma de Jameson sont fixés à  $k^{(2)} = 0$  et  $k^{(4)} = 0,032$ .

- L'énergie cinétique turbulente à l'infini est spécifiée  $k_\infty = 0,0045m^2s^{-2}$  et correspond à un taux de turbulence  $Tu = 0,5\%$ .
- La deuxième variable turbulente à l'infini, en fonction du modèle utilisé (type  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \ell$  ou SA), est respectivement implémentée à :  
 $\epsilon_\infty = 17m^2s^{-3}$ ,  $\omega_\infty = 44000s^{-1}$ ,  $\ell_\infty = 1,4 \cdot 10^{-6}m$  ou  $\mu_{t\infty} = 10^{-4}Pa.s$ .
- La pression de référence du liquide est fixée à  $P_{\infty l} = 12\,110\,000 Pa$ .

**Formation de la poche de cavitation.** La poche de cavitation est, dans une première étape, amenée à un état établi par une approche à pas de temps local et ce n'est qu'ensuite que l'écoulement est résolu en temps physique par une approche à pas de temps dual. Ainsi, la période transitoire qui permet la formation de la poche, n'est pas résolue en temps et permet d'économiser du temps de calcul. Une étude comparative entre une résolution à pas de temps local ou dual pour le régime transitoire a précédemment été réalisée [37] sans constater de différences lors des simulations instationnaires. Les calculs diphasiques nécessitent des ajustements numériques supplémentaires : le paramètre de préconditionnement  $K$  est augmenté, la dissipation numérique du schéma de Jameson est modifiée avec un choix des coefficients  $k^{(2)} \in \{1; 2; 3\}$  et  $k^{(4)} = 0,040$  et le nombre de CFL est réduit à  $CFL = 0,3$ .

**Calculs cavitants instationnaires.** Lorsque la poche de cavitation atteint la taille moyenne observée en condition expérimentale, le régime transitoire est abandonné au profit de calculs instationnaires menés en pas de temps dual. Cette méthode consiste à résoudre pour chaque pas de temps physique  $\Delta t$  un nombre maximal  $m$  de sous-itérations fixé, dans le cas du Venturi 4°, à  $m = 100$ .

**Les conditions aux limites** des calculs sont ici détaillées.

- *A la paroi inférieure*, la vitesse nulle reproduit la condition d'adhérence.
- *En entrée*, les vitesses normales entrant dans le domaine de calcul sont inférieures à la vitesse du son. Il s'agit d'une frontière d'entrée subsonique qui nécessite d'imposer 4 variables : la pression d'arrêt  $P_i = 92854,8 Pa$ , la température d'arrêt  $T_i = 293 K$ , les angles d'incidence  $\alpha = 0^\circ$  et de dérapage  $\beta = 0^\circ$ .
- *En sortie* la frontière adopte les conditions d'une sortie subsonique. Seule la pression statique  $p_m$  doit être imposée. En pratique celle-ci est implémentée dans le code en valeur adimensionnée  $Prd = \frac{p_m + P_{\infty l}}{P_i + P_{\infty l}}$  et est ajustée de manière à obtenir une longueur de cavité proche des conditions expérimentales.

### 7.2.5 Les quantités analysées

Une première partie de l'analyse des résultats numériques porte sur une comparaison avec les données expérimentales de l'équipe de Barre et al. [14]. Les autres post-traitements proposent une interprétation des instabilités reproduites par le modèle mais ces études n'ont cependant pas d'équivalent expérimental.

### 7.2.5.1 Grandeurs moyennes comparées aux essais

**Le nombre de cavitation** Expérimentalement, le nombre de cavitation qui calibre le régime d'étude est calculé en entrée de veine selon la formulation :

$$\sigma_{entrée} = \frac{P_{entrée} - P_{vap}}{0,5\rho_l U_{entrée}^2}$$

La pression d'entrée est une pression moyenne mesurée au plancher, la vitesse est déduite des valeurs du débit et la valeur de la pression de vaporisation est celle de l'eau à la température de référence  $T_{ref}$ . Numériquement les pressions et vitesses qui permettent de calculer le nombre de cavitation sont relevées puis moyennées en entrée à mi-hauteur de veine.

**Pression statique et pression RMS** La prédiction des champs de pression est une donnée essentielle pour les applications industrielles. Dans l'exemple d'un inducteur de turbopompe, le taux de recompression renseigne sur la présence, ou non, des phénomènes cavitants en entrée de pompes. Ainsi, pression statique et pression RMS ont été relevées expérimentalement afin de dresser une cartographie des champs de pressions. Ces quantités sont mesurées à l'aide de neuf sondes disposées à l'aval du col. L'objectif est d'évaluer la chute de pression à l'intérieur de la poche et de quantifier le taux de recompression lors du retour à l'état liquide. Pour chaque station de mesure, la pression moyenne  $\bar{p}_m$  est déterminée à l'aide d'une fonction de densité de probabilité. Les fluctuations de pressions  $p'_m$  sont ensuite estimées à partir de la différence entre pression instantanée  $p_m$  et pression moyenne  $\bar{p}_m$ . Pour chaque sonde, la valeur des oscillations  $P_{RMS}$  sur une période d'essai T est obtenue grâce à une moyenne quadratique :

$$P_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t_i=1}^{t_n} p'_m(t_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t_i=1}^{t_n} (p_m(t_i) - \bar{p}_m)^2} \quad (7.1)$$

Les pressions sont tracées par rapport à un axe des abscisses décalé d'une valeur  $x_i = -0,13 m$  afin de correspondre aux courbes expérimentales.

**Les profils moyens de vitesse et de taux de vide** permettent de mieux appréhender la topologie d'un écoulement cavitant sur Venturi. D'une part les profils de vitesses expérimentaux identifient clairement le phénomène de recirculation, d'autre part le taux de vide permet d'analyser la répartition de la fraction volumique à l'aval du col et le jet rentrant liquide en proche paroi. Lors de la mise en place d'un essai, les signaux relevés de façon séquentielle sur un espace temps sont moyennés afin d'obtenir une représentation statistique de l'écoulement. Le profil de taux de vide est ainsi tracé par une simple moyenne arithmétique. En ce qui concerne les profils de vitesse les signaux peuvent être traités soit à partir d'une fonction de densité de probabilité soit à partir d'une moyenne arithmétique. Sur les géométries de Venturi, l'écoulement, dans la zone de cisaillement, est soumis à de fortes intermittences. Typiquement, les essais sur Venturi 4° [14] témoignent de la présence d'un champ des vitesses longitudinale bipolaire passant d'une vitesse négative la plus probable  $u = -2 m/s$  à une vitesse positive  $u = 8 m/s$ . Sur la géométrie de Venturi 8°, les stations 1 et 2 sont soumises à de fortes fluctuations causées par les oscillations



périodiques. En raison de la répartition non Gaussienne des vitesses mesurées expérimentalement, l'approche qui consiste à déterminer la valeur la plus probable permet de mieux représenter le champ de vitesse à la fois en terme de recirculation proche paroi mais également au niveau de la zone de cisaillement. Aussi le tracé des vitesses de référence adopte cette dernière approche.

Naturellement la question est de déterminer la démarche à adopter pour le traitement des vitesses numériques. Les études de Decaix [37] ont comparé les profils de vitesse aux trois stations de mesures du Venturi 8° obtenus avec un modèle de turbulence  $k - \ell$  avec correction de Reboud ou un modèle  $k - \ell - SAS$ . Dans le premier cas, la répartition des vitesses n'est pas totalement Gaussienne et le profil moyen diffère légèrement de celui tracé à partir des valeurs les plus probables. Le second modèle ne présente pas de différences. Par ailleurs, une approche probabilistique nécessite la manipulation d'un grand nombre de données afin que les valeurs statistiques soient convergées. Cette rigueur est cependant difficilement envisageable en raison du coût de calcul et du nombre de cas tests étudiés. C'est pourquoi les comparaisons qui font suite utilisent la valeur moyenne des signaux de vitesse numérique.

### 7.2.5.2 Dynamique de l'écoulement

**Le gradient de masse volumique et le critère Q.** Dans l'optique d'illustrer la dynamique de la poche à un instant donné, deux grandeurs sont introduites.

Le *gradient de masse volumique* consiste à proposer une visualisation de type Schlieren qui isole et accentue les petites variations spatiales de densité de l'écoulement. Celui-ci est calculé à partir de la masse volumique du mélange  $\rho_m$  selon la formulation suivante :

$$G = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial x_i} \right)^2} \quad (7.2)$$

Le *critère Q* utilise le second invariant du tenseur des gradients de vitesse pour visualiser les structures tourbillonnaires. Il permet de définir les tourbillons comme la région où l'écoulement est dominé par le tenseur rotation et s'exprime selon la formulation :

$$Q = -\frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (7.3)$$

où  $\Omega_{ij}$ , la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse mesure la rotation tandis que  $S_{ij}$ , la partie symétrique mesure le cisaillement. Après simplification le critère Q s'exprime finalement :

$$Q = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.4)$$

Les structures tourbillonnaires sont identifiées par une représentation des iso-valeurs de Q positives alors que leurs centres sont identifiés par les valeurs maximales de Q.

**Représentation spatio-temporelle du taux de vide** L'observation des évolutions temporelles de la poche est réalisée en analysant les répartitions du taux de vide dans la veine sur un espace temps. A chaque instant  $t$ , la valeur maximale du taux de vide sur la hauteur de veine est projetée sur l'axe  $x$  des abscisses. La répétition de cette opération pour chaque pas de temps permet d'obtenir une représentation spatio-temporelle  $x - t$  du taux de vide maximale dans la zone d'observation.

## 7.3 Le Venturi 8°

### 7.3.1 Présentation de la veine d'essai

Les séries d'expériences auxquelles réfèrent cette étude ont été menées au sein du CREMHyG par Stutz et al. [175], [176] puis développées par l'équipe de Aeschlimann et al. [3]. Les essais sont réalisés dans un tunnel de cavitation de longueur de corde de  $L_{ref} = 0,224 m$ , de largeur de  $0,044 m$ . La hauteur varie entre  $0,045 m$  en entrée et  $0,0343 m$  au niveau du col de manière à composer un canal convergent-divergent. L'angle de fermeture avant le col est égal à  $18^\circ$  et l'angle d'ouverture après le col est de  $8^\circ$ . Les dimensions sont similaires à celles utilisées par Lush et al. [106] dont les essais avaient permis d'identifier la formation de nuages de vapeur caractéristiques de cette géométrie. Les mesures reposent sur une technique de bi-sondes optiques disposées à l'aval du col. Quatre sondes sont placées directement sous le col aux abscisses de  $13,7, 31,5$  et  $49,9 \cdot 10^{-3} m$ . Elles servent notamment à relever les profils de pression, vitesse et taux de vide dans la zone cavitante de l'écoulement. Plus en aval, aux abscisses de  $67,7, 106, 126,9, 147,1$  et  $168,3 \cdot 10^{-3} m$  quatre autres sondes sont destinées à quantifier les évolutions de pression à l'aval de la région de collapse (figure 7.5). Le point de fonctionnement qui sert de référence aux études numérique est identique à celui fixé par l'équipe de Aeschlimann et al. [3] et est résumé dans le tableau 7.2.

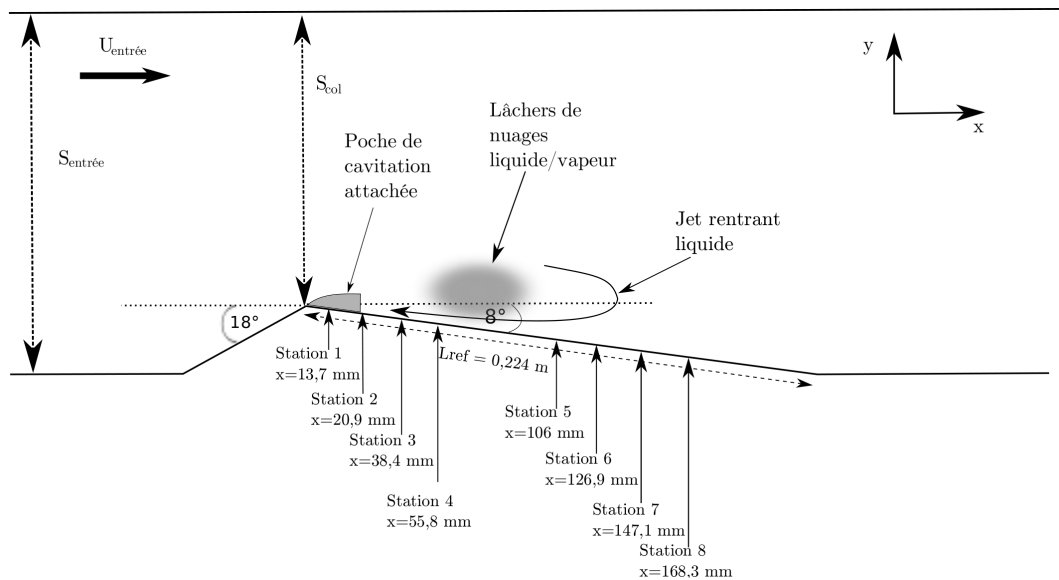


FIGURE 7.5 – Vue schématique du Venturi 8° et de la poche de cavitation

TABLE 7.2 – Point de fonctionnement du Venturi 8°

$U_{entrée} (m.s^{-1})$	$P_{entrée} (Pa)$	$\sigma_{entrée}$	$T_{ref} (K)$	$Re_{ref}$
7,04	55 000	$\approx 1,99$	$\approx 293$	$1,57 \cdot 10^6$

### 7.3.2 Résultats expérimentaux

**Les essais de Stutz et al.** étudient la cavitation sur Venturi 8° pour des longueurs moyennes de poche comprises entre 30 et 50 mm ; la vitesse d'entrée est pour cela fixée entre les valeurs  $U_{ref}$  de 7,9 à 12 m/s [175]. L'étude de l'écoulement interne de la poche de cavité est menée pour une seule vitesse de  $U_{ref} = 8$  m/s qui forme une poche d'une longueur moyenne de  $L_{cav} = 0,045$  m.

La forme et la dynamique des structures de cavitation sont observées à partir d'images filtrées ; les 180 images illustrant la mise en place d'environ 35 cycles fournissent une description caractéristique de la mise en place d'un nuage. La durée moyenne d'un cycle est d'environ 22 ms. Lors de la première moitié du cycle, la cavité croît pour atteindre deux fois sa taille d'origine, un nuage est ensuite arraché à la poche attachée et convecté à une vitesse qui évolue entre  $0,4U_{ref}$  et  $U_{ref}$ . Au cours du cycle, le taux de vide reste relativement faible, variant de 6 à 21% pour les trois premières sondes et les profils de vitesse démontrent la présence d'une recirculation qui se développe sous la cavité de vapeur, le long de paroi solide. Cette recirculation apparaît uniquement en condition cavitante et est accentuée par le collapse des structures de vapeur.

**Barre et al.** prolongent les études du CREMHyG dans l'objectif d'améliorer la précision des mesures en utilisant une nouvelle génération de bi-sondes optiques [3]. La boucle d'essai et la position des capteurs restent identiques aux études de référence mais la durée d'acquisition est nettement augmentée. Chaque campagne d'essai comprend 40 s d'acquisition et est répétée une centaine de fois pour aboutir à un temps total de 4000 s d'acquisition par sonde. Cette durée dépasse amplement les 6 s proposées par Stutz et al. [175].

Suivant les conditions de vitesse et de pression imposées en entrée, les chercheurs observent également différents régimes de cavitation. Les conditions de référence sont fixées à la vitesse d'entrée de  $U_{ref} = 7,04$  m/s pour laquelle se développe une poche attachée de longueur moyenne de  $L_{cav} = 0,045$  m et des lâchers cycliques à la fréquence moyenne de 45 Hz (voir figure 7.6). Dans leur article [3], les chercheurs insistent sur la méthodologie mise en place pour le post-traitement des données. Les profils de vitesse et de taux de vide obtenus par une méthode de moyenne ou par sélection de la valeur la plus probable diffèrent largement et l'observation des phénomènes instationnaires, tels que l'estimation du jet rentrant, est améliorée par la seconde méthode. Enfin, une partie des études est consacrée à la mesure des variations de pression le long de l'écoulement. Les données permettent d'en déduire un spectre fréquentiel des oscillations de pression pour chaque sonde.

Les simulations numériques de ce manuscrit seront systématiquement comparées à la base de données de Aeschlimann et al. [3].

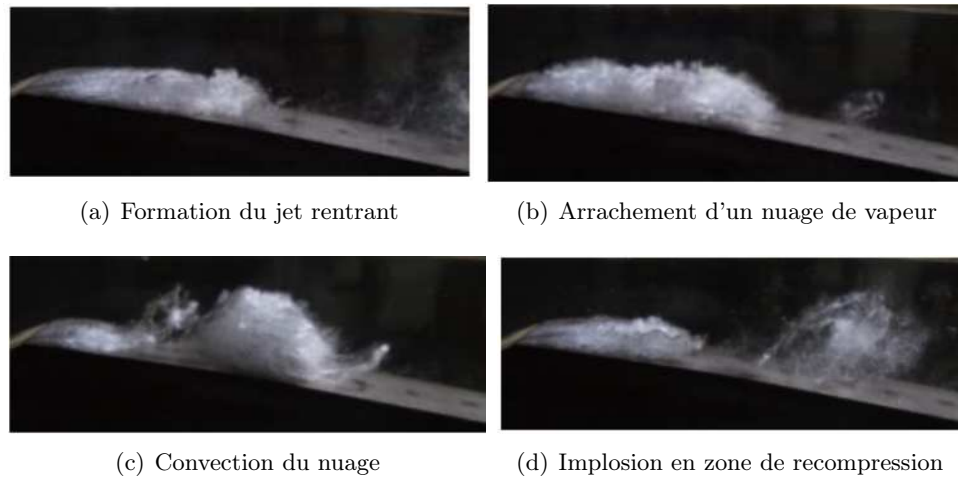


FIGURE 7.6 – Dynamique de la poche observée par Aeschlimann et al. [3] sur Venturi  $8^\circ$

**L'équipe de Sato et al.** étudie les mécanismes de jet rentrant et de lâchers de nuages à l'aide de caméra à haute fréquence sur une géométrie qui diffère légèrement de celle du CREMHyG [175]. Celle-ci possède un angle de fermeture à  $45^\circ$  et un angle d'ouverture que les utilisateurs peuvent faire varier entre  $8$  et  $18,4^\circ$ . Seules les observations faites sur l'angle le plus faible sont ici présentées. Par rapport aux études du CREMHyG, les conditions expérimentales sont également différentes. Pour obtenir un régime de cavitation avec transport de nuages, les chercheurs fixent une vitesse d'entrée deux fois inférieure à celle du CREMHyG. A partir des analyses d'images video ces recherches identifient la présence d'ondes de pression générées pas le collapse des nuages de vapeur. Ces ondes, dont une partie remonte l'écoulement, favorisent la formation du jet rentrant liquide et engendrent l'arrachement des nouvelles structures de vapeur.

**La thèse de Ganesh** représente à ce jour les travaux expérimentaux les plus récents concernant l'étude cyclique de lâchers de structures de vapeur en cavitation partielle [49]. Dans l'optique de comparer leurs résultats aux travaux de Stutz et al., les essais sont réalisés sur une géométrie de Venturi  $8^\circ$  semblable à celle du CREMHyG et mettent en oeuvre des techniques de mesure modernes. Les observations qualitatives de la dynamique de poche sont réalisées à l'aide d'une caméra à haute fréquence. Plusieurs capteurs de pression sont disposés le long de paroi afin de mesurer les champs de pression statique et fluctuantes tandis que les mesures de vitesse sont obtenues grâce à la technique optique de type LDV. Enfin l'évolution de la phase vapeur dans l'écoulement est quantifiée au moyen d'une mesure par absorption de rayon X de la distribution spatiale du taux de vide intégrée sur la largeur.

En fonction des conditions d'essai, les études distinguent trois catégories de dynamique de poche. Le premier régime d'*apparition* de la cavitation est obtenu avec un nombre de cavitation  $\sigma = 2,46$  pour lequel des bulles de cavitation sont créées au niveau du col. Par diminution du nombre de cavitation à la valeur de  $\sigma = 2,06$  les essais présentent un régime *transitoire* auquel les instationnarités de décrochement et transport de structure vapeur apparaissent. Un troisième régime *périodique* est présenté en augmentant le taux de cavitation jusqu'à  $\sigma = 1,95$ . Dans ces

conditions les phénomènes cycliques de croissance et de collapse des structures cavitantes sont accentués.

L'étude du régime *transitoire* à la vitesse d'entrée  $U_{ref} = 8 \text{ m/s}$  permet une comparaison aux conditions d'essai proposées par Stutz et al. [175]. A partir des vidéos à haute fréquence et des mesures par rayons X, les observations témoignent de décrochements de structures de vapeur de la poche attachée et l'analyse des résultats permet d'identifier deux mécanismes responsables du comportement instationnaire de la cavité. Une première instabilité est causée par un jet rentrant liquide (voir figure 7.7(a)), comparable à celui observé par les travaux de Stutz et al. [175], qui se forme en fermeture de poche et dont la recirculation en zone de proche paroi provoque l'arrachement de la partie aval de la poche. Une seconde instabilité se met en place pour des tailles de cavité plus grandes qui peuvent atteindre localement des taux de vide supérieurs à 90%. Lorsque la cavité atteint une taille maximale celle-ci collapse dans sa zone de fermeture; une onde de condensation se forme dès lors en partie aval de la poche et se propage jusqu'au col en diminuant de façon drastique la quantité de gaz au sein de la cavité. Une fois au col, l'ensemble de la poche est arrachée puis convectée par l'écoulement. Ce phénomène apparaît pour le régime *transitoire* (voir figure 7.7(b)) et s'accroît en régime *périodique* (voir figure 7.8).

Ces analyses proposent une nouvelle interprétation des instabilités de lâchers de structure que les chercheurs distinguent du phénomène de jet rentrant liquide. En effet, l'épaisseur du jet rentrant ne peut être égale à celle de la poche de cavitation, sans quoi, la ligne de courant à l'interface formerait, en zone de fermeture, un angle de 180° avec un rayon de courbure extrêmement fin. Ainsi, le front de condensation, vertical par rapport à la hauteur de la poche, ne peut être propulsé uniquement par une recirculation du liquide, ce qui atteste ainsi la propagation d'une onde.

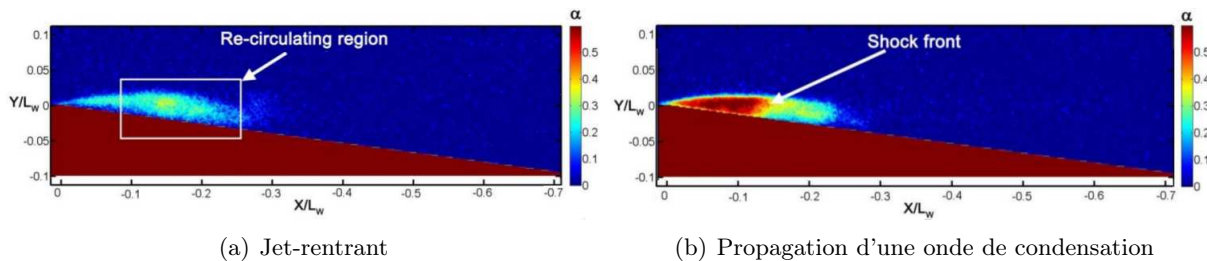


FIGURE 7.7 – Illustration par absorption de rayon X des mécanismes d'instabilités sur Venturi 8° d'après Ganesh [49] : régime de cavitation *transitoire* ( $\sigma = 2.06$ ).

### 7.3.3 Etudes numériques

#### 7.3.3.1 Etat de l'art des études numériques

Dans la continuité des travaux menés sur la géométrie de Venturi 4°, plusieurs modèles de cavitation ont également été testés sur une géométrie de Venturi 8°. Cette partie propose un bilan des travaux numériques évoqués par la littérature.

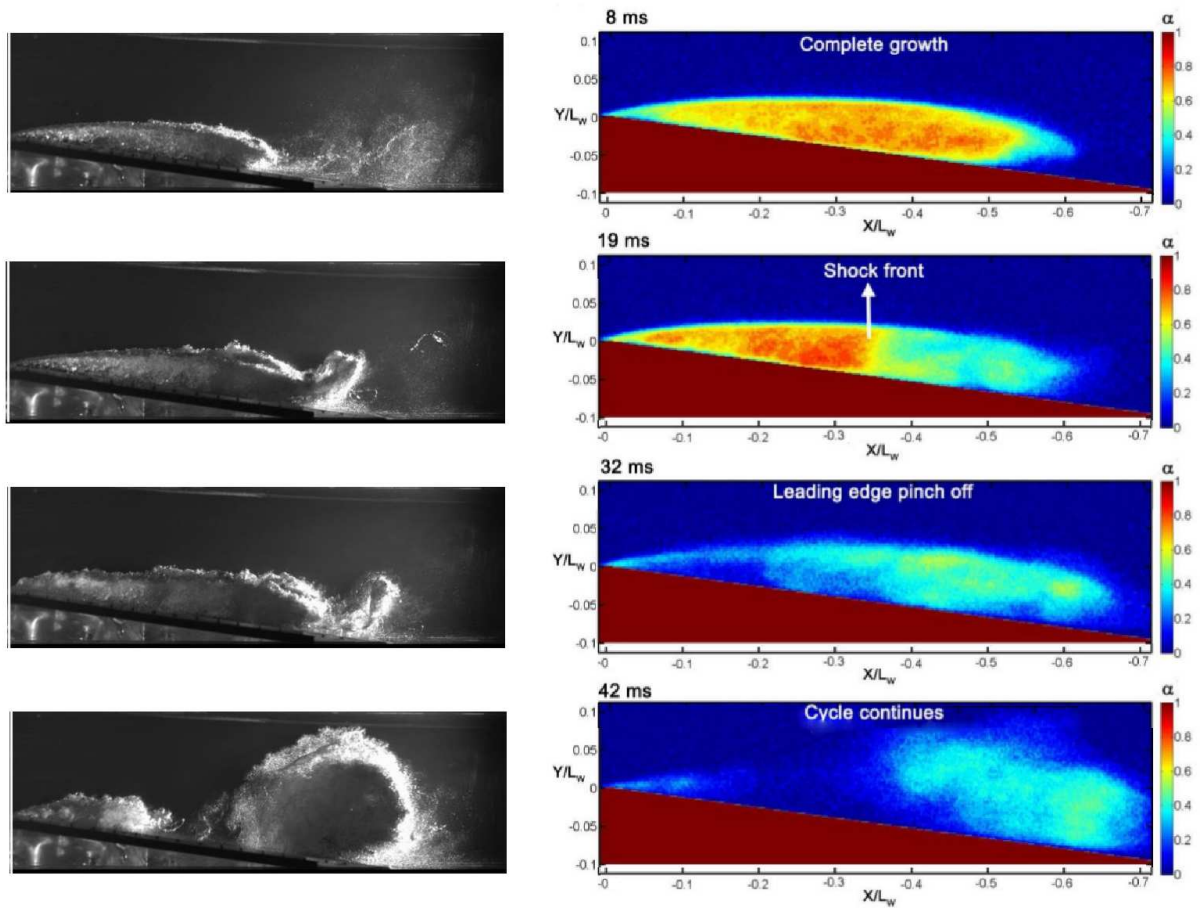


FIGURE 7.8 – Illustration par caméra haute fréquence et absorption de rayon X du mécanisme d'instabilité d'onde de condensation sur Venturi  $8^\circ$  d'après Ganesh [49] : régime de cavitation *périodique* ( $\sigma = 1,95$ ).

**Les simulations de Coutier et al.** sur la géométrie de Venturi 8° [34] sont réalisées avec un modèle identique au cas d'étude du Venturi 4°, présenté en partie 7.2.3.1. Les résultats sont comparés aux données expérimentales fournies par Stutz et al. [175, 176] en prenant pour référence une vitesse d'entrée  $U_{ref} = 7,2 \text{ m/s}$ , un nombre de cavitation  $\sigma = 2,4$ , une longueur de poche attachée  $L_{cav} = 0,05 \text{ m}$  et une fréquence de formation de nuages de  $45 \text{ Hz}$ . Le temps de simulation est d'environ  $7 \text{ s}$ . Dans une première partie, l'objectif des calculs consiste à évaluer la capacité du modèle à reproduire les profils de taux de vide et de vitesse moyenne tandis qu'une seconde étude s'intéresse aux instabilités caractéristiques de la géométrie de Venturi 8°.

Les résultats font part de l'influence du modèle de turbulence et, en l'occurrence, de l'importance de la valeur de la viscosité turbulente lors de la reproduction des instationnarités. Le modèle de turbulence classique produit une poche attachée dont la longueur est surestimée et dont la dynamique ne présente pas de phénomènes instables. La prédiction est améliorée en diminuant la viscosité turbulente au moyen de la correction de Reboud. Le modèle de turbulence adapté corrige les profils de vitesse et de taux de vide et améliore la prédiction des instabilités de jet rentrant et d'arrachement de structures de vapeur. Une observation qualitative des cycles de lâchers est proposée par une représentation spatio-temporelle du taux de vide. Les chercheurs quantifient les fluctuations fréquentielles de la poche de vapeur en calculant la transformée FFT du signal de pression en entrée de la veine et obtiennent une fréquence d'environ  $52 \text{ Hz}$ . Les oscillations quasi périodiques de la poche sont conformes aux observations expérimentales. Les résultats numériques présentent cependant quelques perturbations qui affectent le comportement périodique ; celles-ci seraient causées par l'implosion des nuages de vapeur qui pourraient retarder la mise en place du cycle suivant.

L'influence du nombre  $n$  utilisé pour la correction de Reboud est également étudiée ; ce paramètre ne perturbe pas les oscillations auto-entretenues de la poche à partir du moment où sa valeur est suffisamment grande pour que les instabilités soient générées. Un paramétrage de  $n = 10$  engendre la mise en place des instationnarités et est retenu pour l'ensemble de l'étude.

**Shin et al.** dans l'article [159] prolongent leurs études numériques sur Venturi 4° à la géométrie de Venturi 8°. Les résultats présentent uniquement les profils de vitesse et les visualisations illustrent l'agitation de la poche et la formation de lâchers de vapeur. Cependant les auteurs ne font pas mention de la fréquence des instabilités.

**Senocak et al.** modifient leur algorithme basé sur un couplage pression-vitesse [156] en un algorithme PISO destiné à améliorer la reproduction des instationnarités [157]. L'objectif est d'adapter le code de calcul présenté pour le Venturi 4° à l'étude des problèmes instationnaires. Le couplage avec un modèle turbulent  $k - \epsilon$  classique est conservé et les effets de compressibilité, caractéristiques d'un écoulement diphasique, sont étudiés en proposant deux formulations de la vitesse du son. Les résultats sont comparés aux données de Stutz et al. [176] et ne présentent pas la mise en place de lâchers périodiques mais uniquement des oscillations de la poche.

**Chen et al.** modélisent les écoulements cavitants sur Venturi 8° à partir d'un schéma numérique de volumes finis associé à un algorithme SIMPLE [29]. Les phénomènes de cavitation sont introduits à partir d'un modèle de mélange homogène où pression et masse volumique sont reliées par

une loi barotrope. L'influence de la turbulence est prise en considération à partir d'un modèle  $k - \epsilon - RNG$  avec correction de Reboud. Les profils moyens de vitesse et de taux de vide sont comparés aux résultats expérimentaux de Stutz et al. [176] et la fréquence des oscillations de pression en entrée correspond aux 45  $Hz$  mesurés lors des essais.

**LeMartelot et al.** appliquent leur système d'Euler à 5-équations [98] à la géométrie de Venturi  $8^\circ$  et comparent leurs résultats aux données expérimentales de Aeschlimann et al. [3]. L'étude s'intéresse aux phénomènes cycliques caractéristiques de la géométrie Venturi  $8^\circ$  en mesurant les oscillations de pression en sortie de divergent. Le spectre fréquentiel obtenu présente une amplitude maximale aux alentours de 45  $Hz$  en accord avec les mesures expérimentales.

**La thèse de Chebli** a pour thématique l'étude du développement de la cavitation sur des géométries de type NACA et de Venturi  $8^\circ$ . Les auteurs implémentent, sur la base d'un algorithme SIMPLE, un modèle homogène avec équation de transport de taux de vide. Ce système est couplé soit à un modèle de turbulence du premier ordre : modèle  $k - \epsilon - RNG$  ou  $k - \omega - SST$  modifié par une correction de Reboud ; soit à un modèle de turbulence du second ordre : modèle aux tensions de Reynolds  $RSM - SSG$  [26]. Les résultats mettent en avant la sensibilité des simulations par rapport au modèle de turbulence employé. La validation numérique repose sur la valeur du nombre de Strouhal et la fréquence des oscillations caractérisant les cycles de cavitation. Les spectres fréquentiels sont obtenus pour chaque modèle à partir du signal de pression relevé en entrée de veine et présentent, après calibration, une amplitude maximale proche des valeurs expérimentales. Des fréquences secondaires, générées par l'implosion des structures de vapeurs sont également identifiées sur le signal de pression d'entrée.

### 7.3.3.2 Etudes numériques avec Caviflow

**Le solveur compressible** est appliqué au cas du Venturi  $8^\circ$  en reprenant les schémas numériques utilisés pour les simulations sur Venturi  $4^\circ$ . Les premiers calculs ont été comparés au code incompressible IZ du LEGI et publiés dans [55]. Une attention particulière est portée sur la reproduction des fréquences d'oscillation de poche à la fréquence de 45  $Hz$  ; les DFT du volume de vapeur sont tracés pour chaque code de calcul et présentent un pic fréquentiel qui approche les valeurs expérimentales. Les différences entre solutions compressible et incompressible concernent essentiellement les dynamiques de poche. La version à 3-équations de conservation de Caviflow modélise une poche attachée permanente à l'aval du col associée à la production de petites structures qui collapseraient rapidement lors de leur convection. Le code incompressible IZ produit en revanche des structures de taille plus importante et l'intensité du jet rentrant provoque périodiquement la disparition de la poche attachée.

**La modélisation de la turbulence** et son couplage aux modèles de cavitation est largement étudiée au sein des travaux de Decaix [37] sur la géométrie de Venturi  $8^\circ$ . Les modèles testés sont similaires à ceux présentés en partie 7.2.3.2 et les résultats ont permis d'aboutir aux conclusions qui suivent.



1. Les simulations présentent une relative stabilité par rapport au calcul du nombre de cavitation en fonction des modèles de turbulence utilisés.
2. L'obtention d'un profil de pression en accord avec les résultats expérimentaux n'est pas forcément associé à une prédiction correcte du profil de taux de vide.
3. Les modèles de turbulence qui reproduisent le mieux la convection de nuages de vapeur sont ceux qui sous-estiment le plus la recompression en aval de la poche et amplifient les fluctuations.
4. Deux calculs dont les profils de viscosité turbulente sont comparables ne présentent pas nécessairement des profils de vitesse ou de taux de vide similaires.

D'autre part, comme cela avait été le cas pour le Venturi 4°, la prise en compte des termes turbulents compressibles a fait l'objet d'une campagne de calcul et les résultats sont présentés dans [38]. Alors que l'introduction des termes compressibles pour la simulation des écoulements sur Venturi 4° permettait d'améliorer la modélisation en reproduisant notamment le jet rentrant liquide, leur effet sur la modélisation en Venturi 8° est moins probant. Pour ces calculs, la fréquence des phénomènes cycliques est sous estimée pour les deux modèles de turbulence compressible  $k-\epsilon$  et  $k-\omega$ .

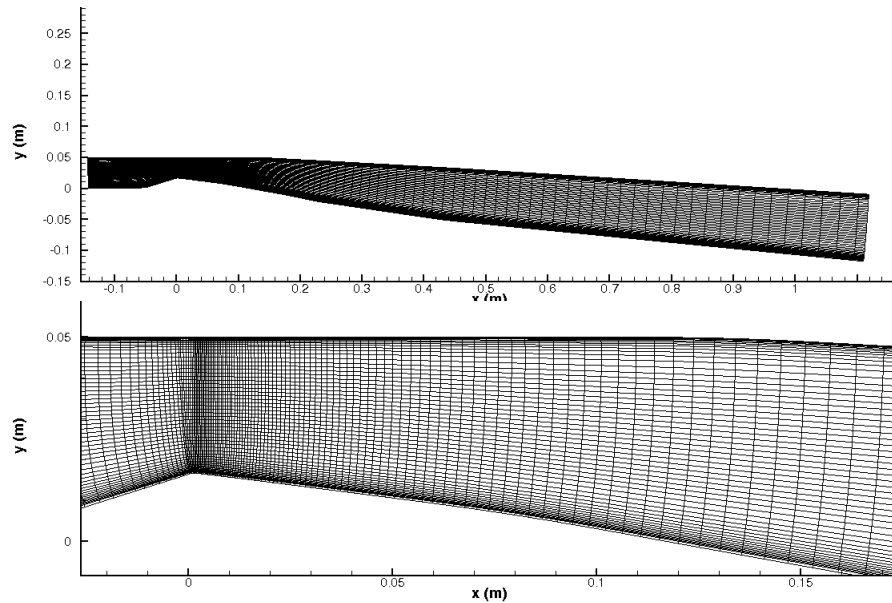
**Le choix du maillage** pour la géométrie de Venturi 8° fait suite aux études réalisées au sein de [57]. Dans un premier temps les résultats confrontent les simulations réalisées avec, puis sans lois de parois. Cette démarche a permis de discriminer la deuxième approche qui ne reproduit pas les phénomènes cycliques de cavitation. Dans un deuxième temps l'influence du maillage est étudiée en raffinant plus ou moins la zone de proche paroi. En se référant aux valeurs du nombre de cavitation et de la fréquence des oscillations en entrée, il s'avère que les meilleures prédictions sont obtenues avec le maillage le plus grossier.

### 7.3.4 Paramètres numériques

Les paramétrages du schéma numérique utilisés pour les calculs cavitants sont semblables à ceux présentés en partie 7.2.4 et sont succinctement détaillés dans ce paragraphe. Les calculs 2D sont réalisés à partir du maillage  $174 \times 56$  dont les performances ont été mises en avant au cours de précédentes études. Une représentation de ce maillage est proposé en figure 7.9.

**Initialisation des calculs non cavitants.** Le champ d'écoulement uniforme non cavitant est initialisé à partir d'une approche à pas de temps local dont la valeur minimale de  $\Delta t_{min}^* = \frac{\Delta t \cdot c_{ref}}{L_{ref}} = 10^{-4}$  est adimensionnée par la vitesse du son génératrice  $c_{ref} = 110,71 \text{ m/s}$  et la longueur de corde  $L_{ref} = 0,224 \text{ m}$ . A ce pas de temps adimensionné correspond un pas de temps physique minimal  $\Delta t_{min} = 2,02 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ . Les autres paramètres numériques sont fixés à partir des conditions qui suivent.

- Le nombre de CFL est fixé à  $CFL = 10$ .
- 15 sous-itérations dans l'algorithme de Jacobi sont appliquées pour la résolution implicite du système.
- Le paramètre de pré-conditionnement est calibré à  $K = 1$ .

FIGURE 7.9 – Maillage  $174 \times 56$  de la géométrie Venturi  $8^\circ$ 

- Les coefficients de dissipation du schéma de Jameson sont fixées à :  $k^{(2)} = 0$  et  $k^{(4)} = 0,032$ .
- L'énergie cinétique turbulente à l'infini est spécifiée  $k_\infty = 0,0045m^2s^{-2}$  et correspond à un taux de turbulence  $Tu = 0,5\%$ .
- La deuxième variable turbulente à l'infini en fonction du modèle utilisé (type  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \ell$  ou SA) est respectivement implémentée à :  
 $\epsilon_\infty = 17m^2s^{-3}$ ,  $\omega_\infty = 44000s^{-1}$ ,  $\ell_\infty = 1,4 \cdot 10^{-6}m$  ou  $\mu_{t\infty} = 10^{-4}Pa.s$ .
- La pression de référence du liquide est fixée à  $P_{\infty l} = 12\,110\,000 Pa$

**La formation de la poche de cavitation** est obtenue en activant le modèle de cavitation mais en conservant, dans un premier temps, l'approche stationnaire à pas de temps local. Pour le modèle de cavitation, les ajustements numériques suivant sont requis : le paramètre de préconditionnement  $K$  est augmenté, la dissipation numérique du schéma de Jameson en ajustant les coefficients  $k^{(2)} \in \{1; 2; 3\}$  et  $k^{(4)} = 0,040$  et le nombre de CFL est réduit à  $CFL = 0,1$ .

**Calculs cavitants instationnaires** Les instabilités sont reproduites à partir des calculs instationnaires obtenus par une approche à pas de temps local. Afin d'améliorer la convergence des calculs du sous pas de temps, le nombre de sous-itérations est augmenté à la valeur  $m = 150$ .

**Les conditions aux limites** sont fixées de la façon suivante.

- *A la paroi inférieure*, la vitesse nulle reproduit la condition d'adhérence.
- *En entrée*, les vitesses normales entrant dans le domaine de calcul sont inférieures à la vitesse du son. La frontière d'entrée subsonique nécessite d'imposer quatre variables : la pression

d'arrêt  $P_i = 80487,5 \text{ Pa}$ , la température d'arrêt  $T_i = 293 \text{ K}$ , les angles d'incidence  $\alpha = 0^\circ$  et de dérapage  $\beta = 0^\circ$ .

- *En sortie* la frontière adopte les conditions d'une sortie subsonique. Seule la pression statique  $p_m$  doit être imposée ; elle s'exprime en valeur adimensionnelle  $Prd = \frac{p_m + P_{\infty l}}{P_i + P_{\infty l}}$ . Cette pression est ajustée de manière à obtenir un nombre de cavitation analogue aux conditions expérimentales.

### 7.3.5 Les quantités analysées

#### 7.3.5.1 Grandeurs moyennes comparées aux essais

L'analyse des grandeurs moyennes adopte la même démarche que celle présentée en partie 7.2.5 pour la géométrie de Venturi 4°. La base de données expérimentales du Venturi 8° fournit les profils moyens du taux de vide et de la vitesse aux trois premières stations à l'aval du col, tandis que les évolutions de pression moyenne et de pression RMS sont tracées sur huit stations de mesure. Expérimentalement, ces valeurs moyennes sont obtenues au bout d'un temps d'acquisition de 40 s par essai et la valeur la plus probable est extraite du champ de données. Pour le post-traitement numérique, le temps d'acquisition d'environ 2 s n'assure pas la convergence de la fonction probabilistique ; les données sont par conséquent moyennées arithmétiquement.

#### 7.3.5.2 Dynamique de l'écoulement

**Les spectres fréquentiels** sont tracés à partir du signal de pression pariétale. Expérimentalement, les signaux sont mesurés en entrée de veine et aux huit sondes placées à l'aval du col du Venturi 8°. La démarche pour obtenir le spectre des fréquences est similaire à celle employée en expérience ; le signal des pressions brutes est filtré à partir d'un filtre passe bas afin d'éliminer les bruits de fréquence supérieure à 200 Hz puis subit une transformation de Fourier rapide FFT. Le temps d'acquisition numérique est d'environ 2 s ce qui correspond à l'étude d'une centaine de répétition cyclique à fréquence de 45 Hz. Ce protocole est à comparer aux 40 s de chaque essai réalisé par l'équipe de Aeschlimann et al. [3]. La valeur ajoutée de ces études repose sur l'analyse locale des fluctuations de pression et la comparaison aux données expérimentales. Jusqu'ici les mesures numériques fréquentielles, disponibles dans la littérature, étaient réalisées soit à partir des variations du volume de vapeur [55, 37] soit à partir du signal de pression mesuré en entrée [34, 29] ou en sortie de veine [98].

**Les corrélations spatio-temporelles** ont pour objectif de représenter la nature de l'écoulement à partir des valeurs du taux de vide et de la pression. Cette étude qualitative mesure énergétiquement la similitude entre différents signaux. Bien que ce type d'analyse ne puisse se référer à aucune base de données expérimentales pour la géométrie de Venturi, les récents travaux de Maurice [108] ont utilisé cette méthode de post-traitement pour l'étude expérimentale de la cavitation sur un écoulement de marche descendante.

Les cartes de corrélation sont présentées sous la forme d'iso-contour et permettent de remonter à plusieurs informations concernant la dynamique de l'écoulement. D'une part, les tracés du taux de vide permettent d'obtenir les échelles spatio-temporelles des structures de vapeur et leurs

vitesses de convection. D'autre part, les cartes de pression établissent une correspondance avec la quantité de vapeur et identifient la présence de phénomènes discrets tels que la propagation d'ondes. La démarche consiste à disposer 50 points de mesure équirépartis sur une ligne d'écoulement de 6 cm placée à l'aval du col à 2,5 mm de la paroi (voir figure 7.10). La fonction de corrélation mesure les similitudes des signaux  $s$  relevés tous les  $\Delta t = 4,0 \cdot 10^{-5}$  s entre chaque points  $x$  espacés de  $\Delta x = 1,2$  mm. Elle est définie par :

$$R_s(x, \Delta x, \Delta t) = \frac{s(x, t)s(x + \Delta x, t + \Delta t)}{\sqrt{s^2(x).s^2(x + \Delta x)}} \quad (7.5)$$

où  $s$  réfère au signal du taux de vide ou de la pression.

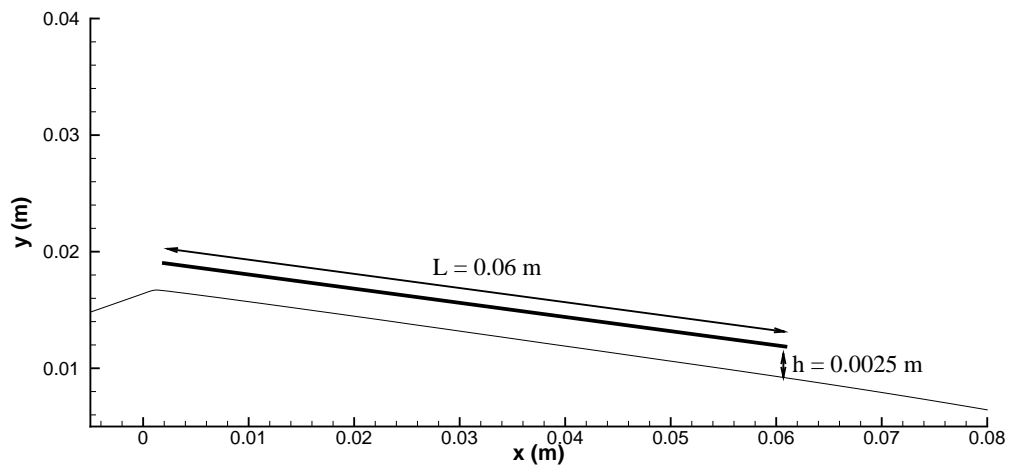


FIGURE 7.10 – Ligne d'extraction sur laquelle sont équirépartis 50 points de mesure

**Les évolutions temporelles** des quantités de taux de vide, de pression et du nombre de Mach sont étudiées en différents points de l'écoulement. Pour cela des capteurs numériques sont disposés à la verticale des stations de mesure à une distance 2,5 mm de la paroi. Ce dispositif n'a pas d'équivalent expérimental mais vise à améliorer la compréhension des mécanismes d'arrachement, de convection puis de collapse des structures de vapeur.

Quatrième partie

Simulations 2D



## Chapitre 8

# Etudes sur géométrie de Venturi 4°

*Le présent chapitre propose une synthèse des simulations réalisées sur la géométrie du Venturi 4°. Les phénomènes instationnaires caractéristiques de cette géométrie sont minimales en comparaison à la géométrie de Venturi 8°, facilitant ainsi les paramétrages numériques. L'influence de chaque partie du modèle est évaluée en trois grandes étapes.*

- *Modèles de turbulence : cette partie présente les résultats obtenus à partir de modèles de turbulence du premier ordre, basés sur un calcul de la viscosité turbulente à une ou deux équations de transport. La simulation d'écoulements cavitants à proximité de parois nécessite une diminution de la viscosité turbulente, soit par ajout d'une fonction correctrice, soit à partir d'un modèle de turbulence avancé à échelle adaptative.*
- *Modèles de cavitation : les résultats obtenus avec chacune des deux équations d'état sont ici comparés. Cette partie propose également des adaptations du terme source de l'équation de transport de taux de vide, afin d'augmenter le taux de destruction de vapeur en zone de fermeture de poche.*
- *Modèles à 3- et 4-équations : à travers cette étude, les simulations évaluent l'influence de l'équation supplémentaire de transport de taux de vide sur le comportement de la poche de cavitation.*

## 8.1 Introduction

Les études menées sur le Venturi 4° ont pour vocation de présenter la capacité du code à reproduire les instabilités observées expérimentalement et détaillées en partie 6.1.2.2 ; celles-ci se mettent en place pour des régimes de  $\sigma/2\alpha \approx 4$  qui correspond à un état de transition entre la formation d'une poche stable et le développement d'oscillations. Ce chapitre concentre des illustrations qualitatives, destinées à visualiser la dynamique des phénomènes cavitants, et retrace la topologie moyenne et fluctuante de l'écoulement à l'aide de la répartition des champs de vitesse, de taux de vide ou de pression. Pour cela, les profils moyens de chaque grandeur et les fluctuations de pression sont confrontés aux données expérimentales afin de quantifier la capacité des calculs à modéliser la répartition du taux de vapeur dans la poche de cavitation, à capturer le phénomène de jet rentrant et à reproduire la recompression du fluide à l'aval de la zone cavitante. En ce qui concerne la modélisation, les résultats présentent, dans un premier temps, l'influence des modèles de turbulence sur la dynamique d'un écoulement cavitant. La viscosité turbulente joue un rôle prépondérant pour la modélisation de l'écoulement diphasique. Par conséquent, les efforts des simulations concernent la mise en place d'un système d'équations capable de reproduire les profils de champs de vitesses mesurés, en essai, de part et d'autre de la couche de cisaillement. Pour cela, l'étude renseigne sur la calibration nécessaire au paramétrage des limiteurs de viscosité turbulente. Les résultats numériques sont ensuite comparés à ceux obtenus avec des modèles de turbulence avancés à échelle adaptative dont la mise en équation présente l'avantage d'être exempt de limiteur sur la viscosité. Dans un second temps, la présentation s'oriente vers l'étude du modèle de cavitation et compare les résultats obtenus pour l'une ou l'autre des deux équations d'état proposées pour la fermeture thermodynamique du système. Mais la reproduction des phénomènes cavitants ne repose pas uniquement sur le calcul de la pression de mélange, elle nécessite une modélisation adaptée du terme source de l'équation de transport. Cette étude porte ainsi une attention particulière quant à la contribution d'un système compressible sur la modélisation des phénomènes de relaxation mécanique et propose d'adapter le terme source lorsque le taux de destruction de la phase vapeur nécessite d'être augmenté. Enfin la dernière partie de ce chapitre met en avant le rôle de cette équation de transport en comparant les résultats obtenus avec, ou sans, équation supplémentaire.

Les études menées sur la géométrie de Venturi 4° dans le cadre de la thèse ont donné lieu à deux publications scientifiques. Le premier article [56] présente la mise en place du système à 4-équations et discute du paramétrage du terme source. La validation du modèle est dans un premier temps menée pour des cas non visqueux appliqués au collapse d'une bulle isolée soumise à une onde de pression puis à l'étude des interactions entre bulles. Les simulations RANS sont ensuite réalisées pour des écoulements instationnaires sur Venturi avec modélisation de la cavitation au moyen d'une loi d'état sinusoïdale. Ces premiers calculs mettent en avant la sensibilité du calibrage du taux de destruction de vapeur au sein du terme source. Le second article [25]<sup>1</sup> confronte le code de calcul Caviflow à celui du code OpenFOAM. En ce qui concerne les aspects numériques, le code OpenFOAM repose sur un solveur qui adopte une approche prédiction-correction de la pression couplant des algorithmes SIMPLE et PISO ; la modélisation de la cavitation est réalisée au moyen d'une équation de transport sur le taux de vide. Les résultats soulignent les difficultés,

---

1. disponible en fin de manuscrit



---

de la part des calculs OpenFOAM, à reproduire la diminution caractéristique du taux de vapeur à l'aval de poche attachée ainsi que les recirculations provoquées par le jet rentrant. La calibration des termes de production et de destruction qui apparaissent dans la formulation du terme de transfert de masse semble être un élément essentiel à la modélisation de l'écoulement diphasique. Ces deux articles servent d'introduction aux études menées en écoulements instationnaires avec un modèle à 4-équations. La suite du manuscrit s'emploie à développer plus en détail les analyses et modifications envisagées au cours des travaux de thèse.

## 8.2 Modèles de turbulence

Cette partie rassemble les simulations réalisées dans l'optique de déterminer l'influence du modèle turbulent sur la topologie de l'écoulement. Les résultats sont présentés pour un seul modèle de cavitation utilisant une loi d'état sinusoïdale. Les campagnes de calcul menées avec une équation d'état de mélange des gaz raides ont conduit à des résultats comparables et ne sont pas détaillées ici. Dans un premier temps, la présentation confronte les simulations obtenues avec différents modèles du premier ordre et fait état des corrections a posteriori nécessaires à la reproduction de la dynamique de l'écoulement de référence. Une seconde section prolonge l'étude au cas de modèles de turbulence à échelle adaptative.

### 8.2.1 Correction de Reboud

#### 8.2.1.1 Présentation

La modélisation des phénomènes turbulents confronte cinq modèles de turbulence du premier ordre :

- un modèle à une équation de transport de Spalart et Allmaras (*SA*),
- quatre modèles à deux équations de transport,  $k - \ell$  (*KL*),  $k - \epsilon$  (*KEPS*),  $k - \omega$  et  $k - \omega - SST$  (*KW - SST*)

La modification a posteriori de la viscosité turbulente est analysée par comparaison à un calcul équivalent sans correcteur. Le paramétrage des calculs instationnaires est synthétisé dans le tableau 8.1. Par rapport à l'expérience, le nombre de cavitation est, pour l'ensemble des calculs, supérieur à la valeur de référence  $\sigma_e = 0,55$ . Les simulations sont en effet calibrées par rapport à une longueur de poche moyenne mesurée à partir des profils moyens de taux de vide et ajustées à l'aide de la pression de sortie *Prd*. D'un point de vue numérique, les calculs *SA* sont ceux qui présentent la plus grande robustesse et peuvent être réalisés avec des valeurs du nombre de CFL les plus élevées. La dissipation numérique est quant à elle ajustée à partir du coefficient  $k^{(2)}$  du schéma de Jameson-Schmidt-Turkel et varie peu d'un calcul à l'autre.

TABLE 8.1 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : étude du modèle de turbulence avec correction de Reboud

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2,2 \cdot 10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	Dissipation numérique
SA-sans-Reboud	0,61	<i>Prd</i> =0,9982	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$\emptyset$	$k^{(2)} = 3,0$
SA-Reboud-n6	0,61	<i>Prd</i> =0,9982	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	$k^{(2)} = 3,0$
KL-sans-Reboud	0,61	<i>Prd</i> =0,9978	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$\emptyset$	$k^{(2)} = 2,5$
KL-Reboud-n6	0,61	<i>Prd</i> =0,9978	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n=6$	$k^{(2)} = 2,5$
KEPS-Reboud-n6	0,68	<i>Prd</i> =0,9977	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \epsilon$	$n=6$	$k^{(2)} = 2,5$
KW-Reboud-n6	0,67	<i>Prd</i> =0,9970	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \epsilon$	$n=6$	$k^{(2)} = 6,0$
KW-SST-Reboud-n6	0,64	<i>Prd</i> =0,9966	0,08	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \omega - SST$	$n=6$	$k^{(2)} = 2,5$

### 8.2.1.2 Dynamique de la poche de cavitation

Une analyse spatio-temporelle de la dynamique de la cavité est proposée en figure 8.1 par projection des valeurs maximales du taux de vide à l'aval du col. La poche de cavitation se divise en deux parties : la partie attachée se forme au niveau du décrochement du col, elle possède un taux de vapeur particulièrement élevé, pouvant dépasser les 90% ; la partie aval est composé d'un mélange liquide-vapeur soumis aux instabilités de l'écoulement. Cette visualisation qualitative démontre la sensibilité de la dynamique de poche par rapport au modèle de turbulence choisi. Les différences de représentation de la cavité au cours du temps peuvent s'expliquer par l'écoulement relativement stable sur Venturi  $4^\circ$ , dont les calculs dans la couche limite, et a fortiori les modélisations de la viscosité turbulente en zone de fermeture, pilotent la dynamique de la poche. La figure 8.2 compare le comportement des poches par visualisation à intervalles régulier du champs de taux de vide. La répartition du taux de vide diffère selon le modèle de turbulence, avec la présence de pulsations de la poche pour les modèles  $SA$  et  $k - \ell$  et, au contraire, une longueur quasiment constante dans le cas des modèles  $k - \varepsilon$  et  $k - \omega$ .

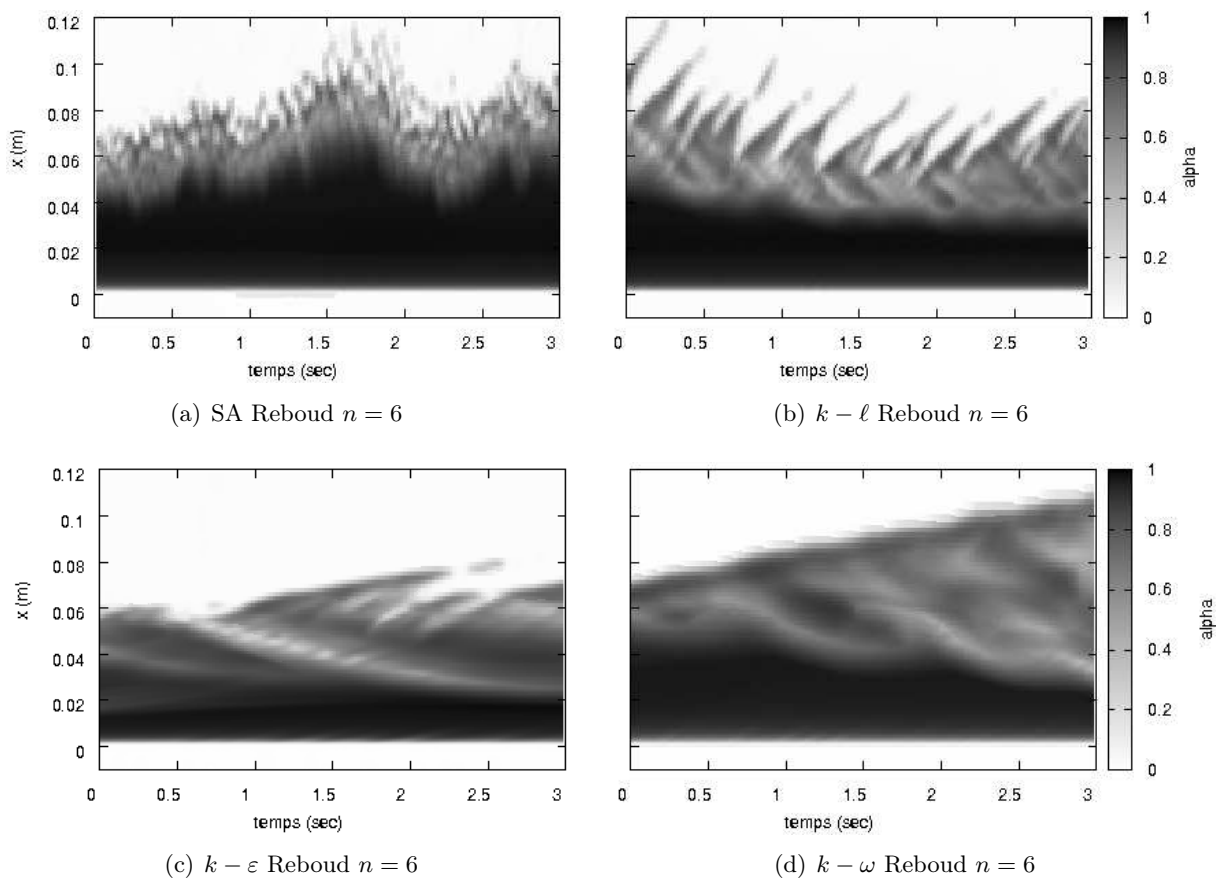


FIGURE 8.1 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps avec différents modèles de turbulence

Afin de mieux appréhender la répartition de la vapeur au sein de la poche de cavitation, le gradient de la masse volumique est représenté en figure 8.4. Pour les modèles avec correction de Reboud, cette représentation met en avant la séparation de poche en une partie amont attachée et une partie aval soumise aux phénomènes de déstabilisation. Une illustration identique est proposée en figure 8.4 pour des modèles sans correction de Reboud. Elle met en avant l'enjeu que revêt la réduction de la viscosité turbulente en zone diphasique, sans laquelle, la modélisation ne reproduit pas les instabilités de fermeture de poche. Ce constat est également mis en évidence sur la figure 8.5 à partir du tracé des profils moyens de taux de vide et de vitesse sur cinq puits de mesures répartis le long de l'écoulement. La modélisation sans correcteur de viscosité engendre, d'une part, une surestimation des valeurs de taux de vide et, d'autre part, ne reproduit pas les profils de vitesse négative en seconde partie de poche. En ce qui concerne les modèles avec correcteur de viscosité, les profils sont dans l'ensemble en bon accord avec les mesures de référence. En effet, les instabilités de fermeture de poche, caractérisées par une diminution du taux de vapeur et la présence de vitesses négatives à partir du uits 3 sont reproduites dans l'ensemble des cas. Il convient néanmoins de modérer la qualité de ces résultats en rappelant que l'obtention d'une longueur de poche conforme à l'expérience requiert un calibrage a posteriori de la condition de sortie par l'utilisateur.

### 8.2.1.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

La topologie du champ de pression est étudiée en traçant, en figure 8.6(a), les valeurs moyennes de la pression statique et fluctuante le long de la paroi. La modélisation sans correcteur de viscosité sous estime la taille de la zone de mélange en aval de la poche. Par conséquent, la longueur de la zone de vapeur est surestimée et la re-compression est plus brutale que la référence expérimentale. En revanche, la réduction de la viscosité turbulente en zone diphasique permet de modéliser une position plus en amont de la re-compression, et ce, quel que soit le modèle de turbulence employé. Si l'abscisse du début de la re-compression reste le même, la valeur de la pression statique mesurée à l'aval de la poche varie d'un modèle à l'autre et les temps nécessaires pour retrouver des valeurs de pression analogues à celles du liquide ne sont pas homogènes. Ce phénomène est à mettre en relation avec le taux de vide moyen de la figure 8.5. Parmi les modèles avec correcteur de viscosité, ceux qui possèdent la vitesse de re-compression la plus lente présentent une surestimation du taux de vide en zone de fermeture de poche.

En ce qui concerne le taux de fluctuation des pressions, les simulations avec correction de Reboud positionnent le pic des perturbations au niveau du cas de référence. Le taux de diminution des oscillations dans la zone recomprimée varie en revanche selon le modèle de turbulence. Le modèle *SA – Reboud – n6* surestime en effet les fluctuations en aval de la zone diphasique. Au vu du comportement du modèle sans correcteur de Reboud, cette sur-évaluation peut s'expliquer par des oscillations de viscosité turbulente trop élevées en zone de fermeture de poche. La partie 8.3.3, présentée plus loin, démontre qu'une meilleure modélisation du taux de destruction de la phase vapeur au sein du terme source permet d'améliorer ces résultats.

### 8.2.1.4 Limites du couplage aux modèles de turbulences

Toutes les simulations ne sont pas équivalentes devant le modèle de turbulence employé. Si les modèles Spalart et Allmaras,  $k - \ell$  et  $k - \epsilon$  présentent un paramétrage numérique et des résultats communs, les calculs avec un modèle  $k - \omega$  nécessitent d'augmenter drastiquement le coefficient  $k^{(2)}$  de dissipation numérique. De plus, des simulations supplémentaires menées avec un modèle  $k - \omega - SST$  n'ont pas permis d'obtenir une dynamique de poche conforme aux observations expérimentales. En effet, comme l'illustrent les gradients de masse volumique et le critère Q de la figure 8.7, la modélisation ne prend pas en compte la recirculation de la couche limite.

## 8.2.2 Influence du coefficient de la correction de Reboud

### 8.2.2.1 Présentation

La fonction correctrice de Reboud est destinée à diminuer la viscosité turbulente en zone diphasique et comprend un coefficient correcteur  $n$  usuellement fixé à la valeur  $n = 10$ . Une étude est réalisée en implémentant le coefficient  $n$  aux valeurs de 4, 6 et 10. Les paramètres des différents calculs sont répertoriés dans le tableau 8.2 et la valeur minimale permettant d'obtenir une dynamique de poche en accord avec l'expérience est conservée pour les futures études.

TABLE 8.2 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : influence du coefficient  $n$

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 2.10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud
SA-Reboud-n4	0,60	$Prd=0, 9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=4$
SA-Reboud-n6	0,61	$Prd=0, 9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$
SA-Reboud-n10	0,61	$Prd=0, 9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=10$
KEPS-Reboud-n4	0,66	$Prd=0, 9977$	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \epsilon$	$n=4$
KEPS-Reboud-n6	0,68	$Prd=0, 9977$	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \epsilon$	$n=6$
KEPS-Reboud-n10	0,69	$Prd=0, 9977$	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \epsilon$	$n=10$

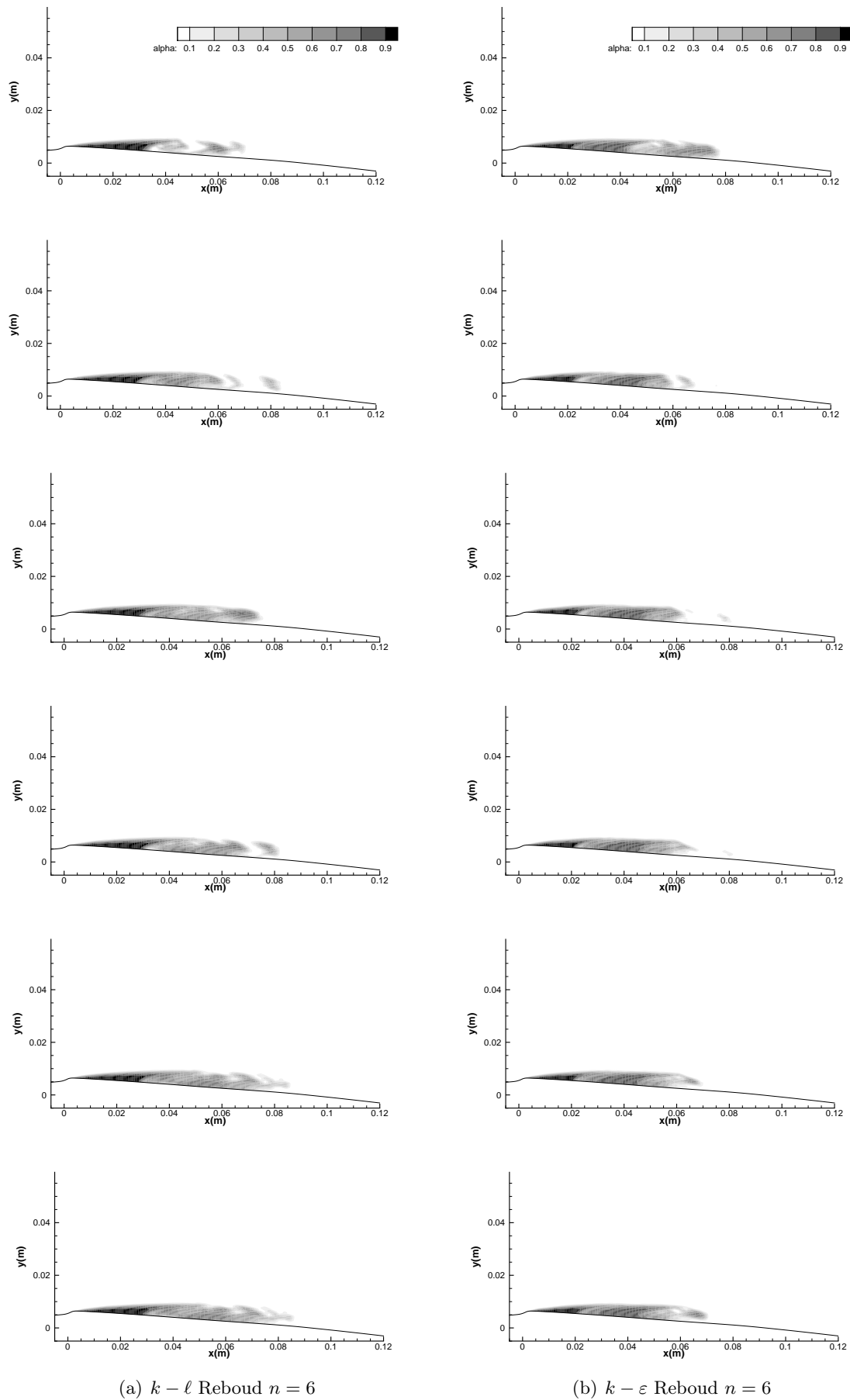
### 8.2.2.2 Dynamique de la poche de cavitation

Les profils moyens de taux de vide et de vitesse sont tracés en figures 8.8 et 8.10 respectivement pour les modèles de turbulence Spalart et Allmaras et  $k - \epsilon$ . Au vu des résultats, il est possible d'extraire une tendance générale quant à l'influence du coefficient réducteur de viscosité. A la valeur inférieure de  $n = 4$ , la diminution de fraction de vapeur est sous-estimée et, pour le modèle Spalart et Allmaras, la recirculation des vitesses n'est pas reproduite. La modélisation du comportement de la poche est améliorée lorsque le coefficient  $n$  est élevé. Les études paramétriques ont été étendues jusqu'aux valeurs  $n = 16$  sans présenter de distinction significatives par rapport au cas  $n = 6$ .

### 8.2.2.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

L'étude paramétrique du coefficient  $n$  est élargie avec l'analyse des champs moyens de pression statique et fluctuante, tracés respectivement en figures 8.9 et 8.11 pour les modèles de turbulence de Spalart et Allmaras et  $k - \epsilon$ . L'évolution des profils moyens en fonction de la valeur des

coefficient  $n$  présente des caractéristiques comparable à l'analyse des champs de taux de vide et de vitesse. En deçà d'une valeur  $n = 6$  l'efficacité de la correction de Reboud est réduite et altère la prédiction des champs moyens de pression statique. En ce qui concerne les fluctuations de pression, il est intéressant de constater que les observations faites entre modèles de turbulence se généralisent ici. Quelle que soit la valeur de  $n$ , le modèle de Spalart et Allmaras a toujours tendance à surestimer les fluctuations de pression à l'aval de la zone de fermeture de poche. Pour le modèle  $k - \epsilon$ , les fluctuations sont bien localisées pour des valeurs de  $n$  supérieures ou égales à 6, plus étendues pour une valeur de  $n$  égale à 4.

FIGURE 8.2 – Visualisation de la dynamique de poche. Temps entre deux images :  $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$

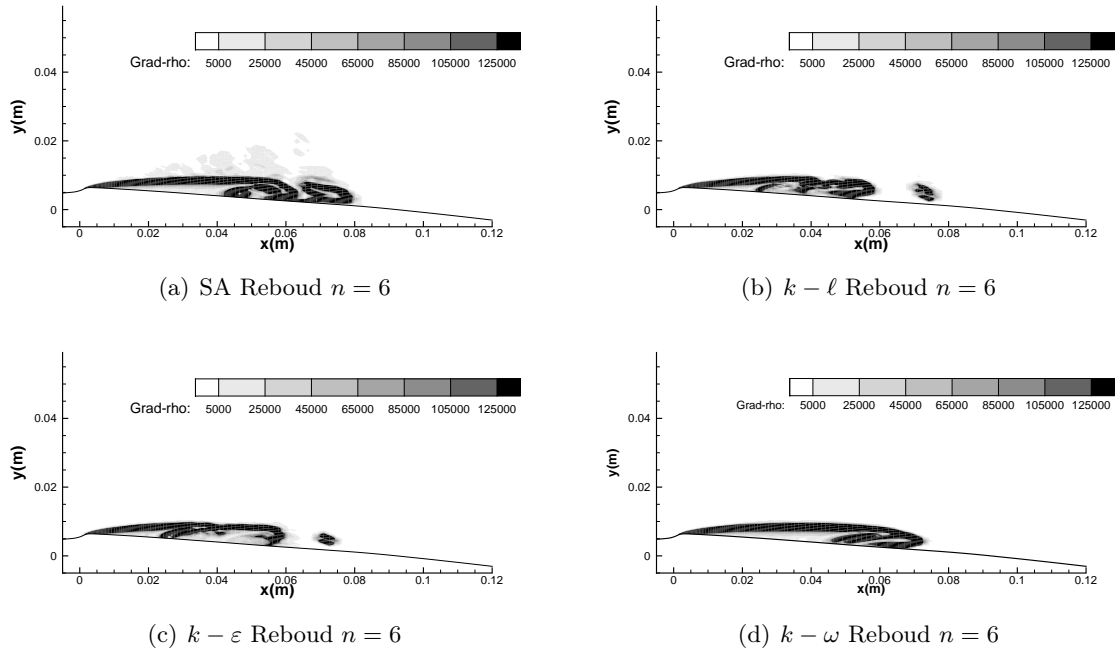


FIGURE 8.3 – Comparaison des gradients de masse volumique : étude pour différents modèles de turbulence

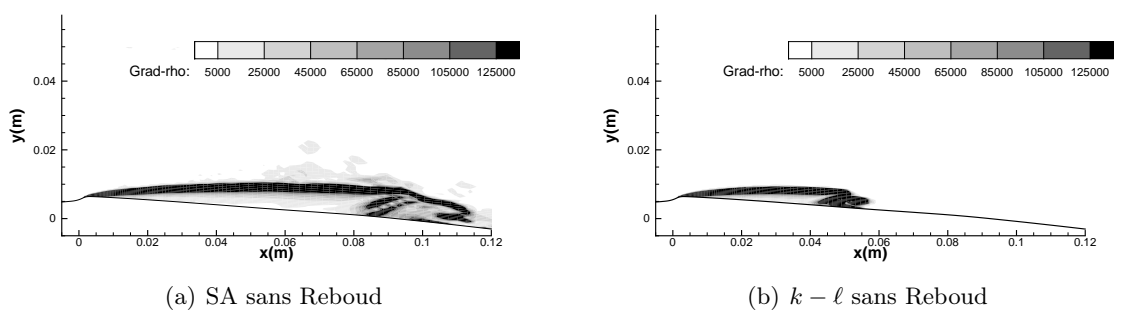


FIGURE 8.4 – Comparaison des gradients de masse volumique : modèles sans correction de Rebound



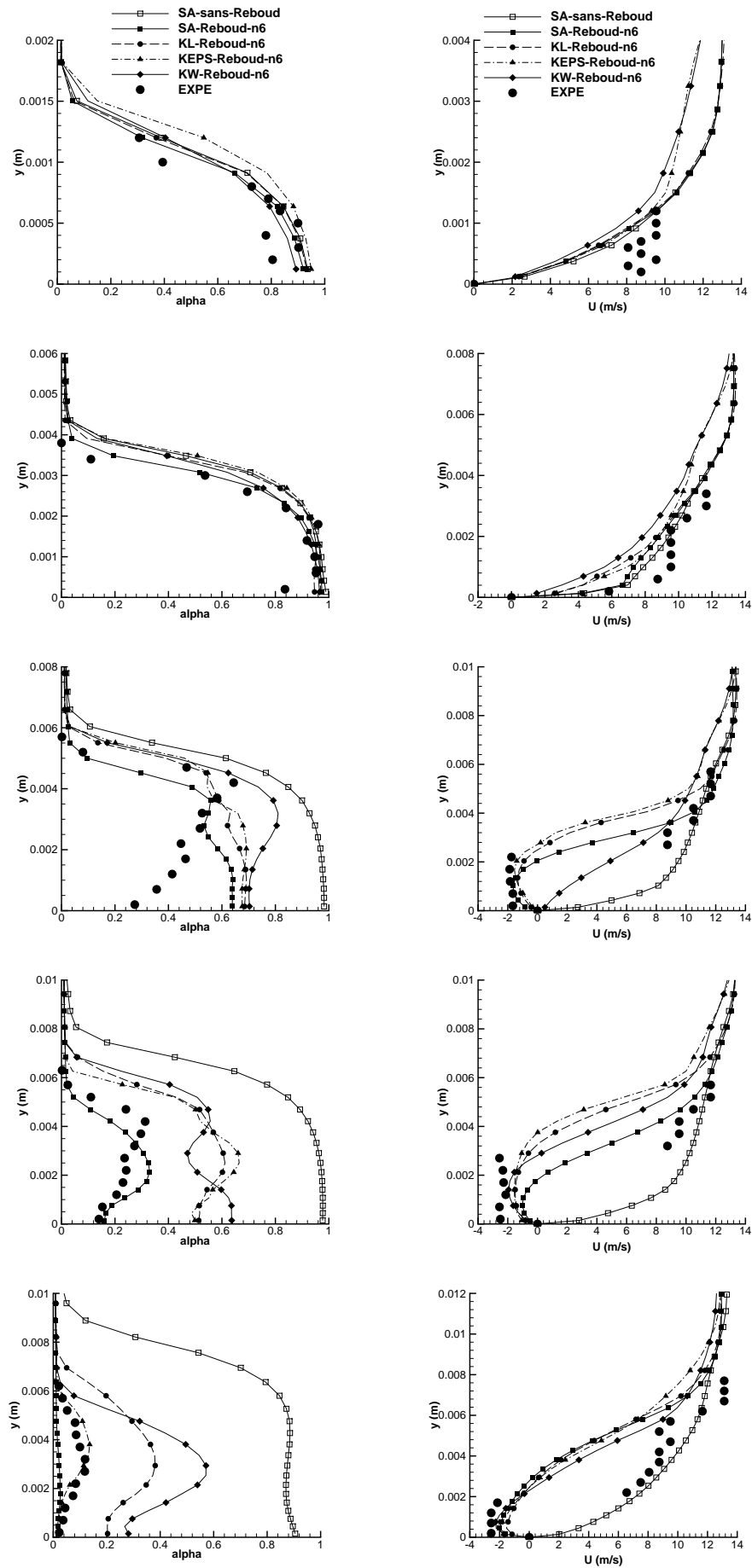


FIGURE 8.5 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : étude de l'influence du modèle de turbulence

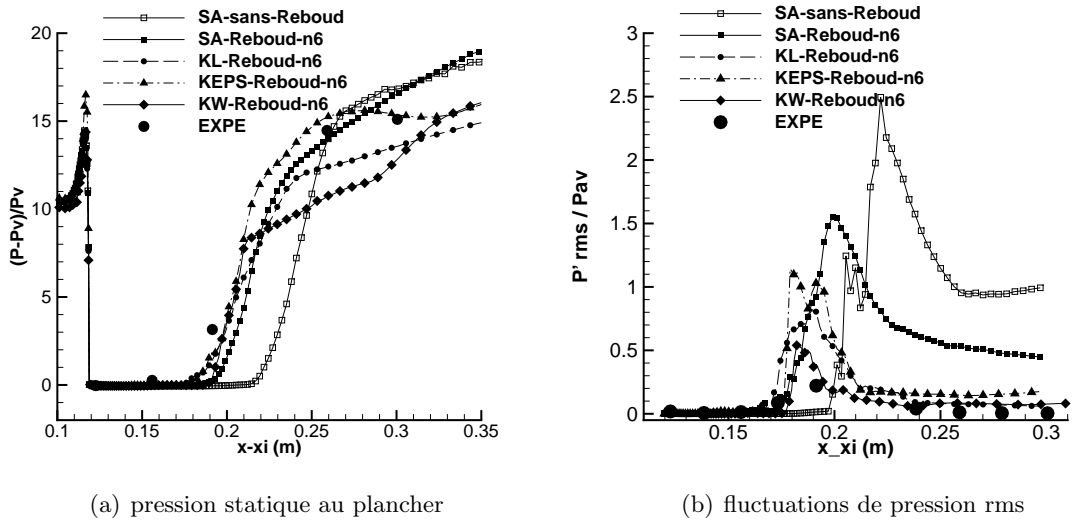


FIGURE 8.6 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence du modèle de turbulence

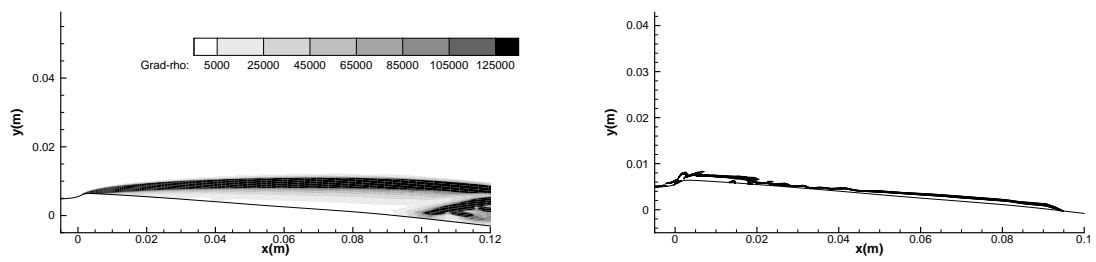


FIGURE 8.7 – Gradient volumique et critère Q du modèle  $k-\omega$ -SST

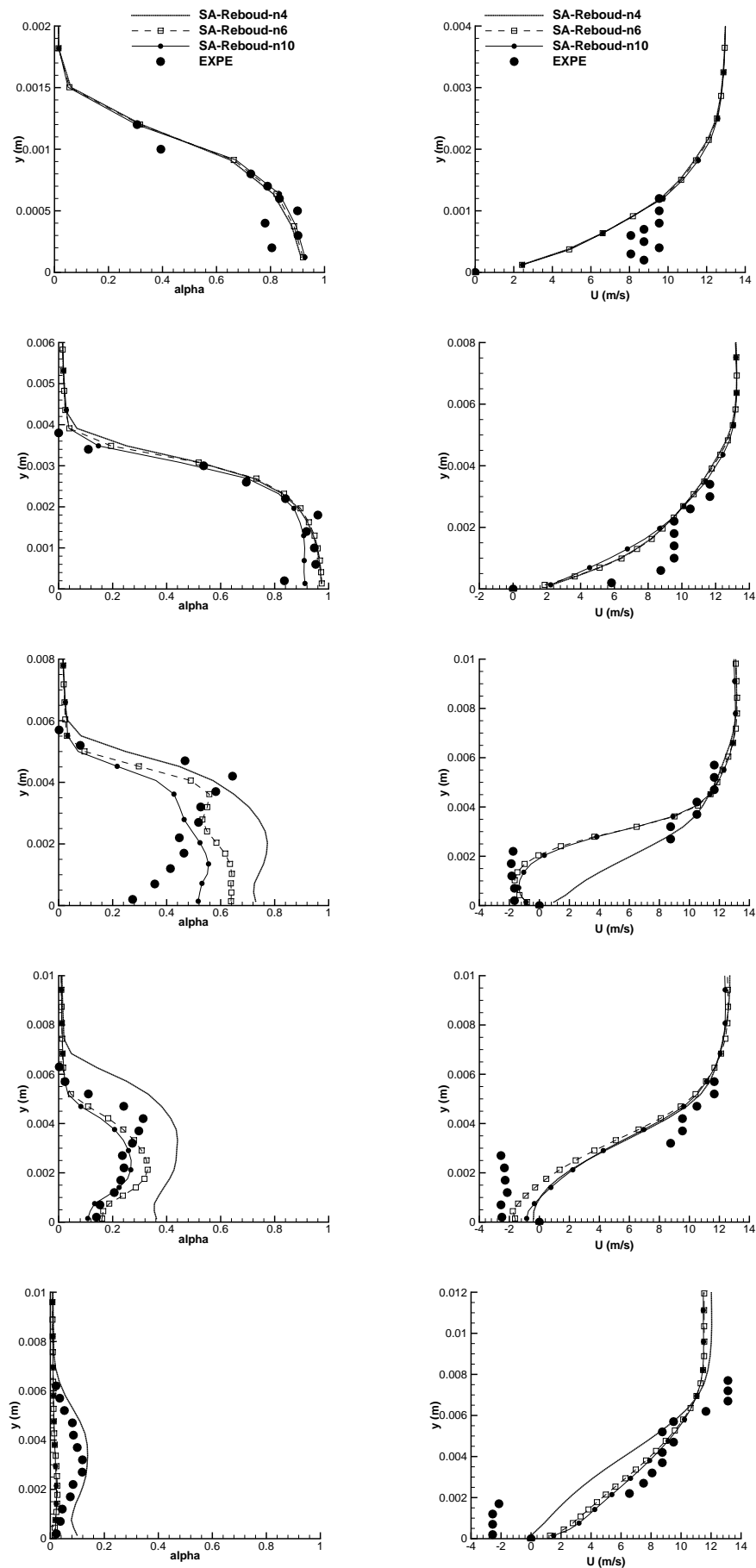


FIGURE 8.8 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : étude de l'influence du paramètre  $n$  en modèle Spalart et Allmaras

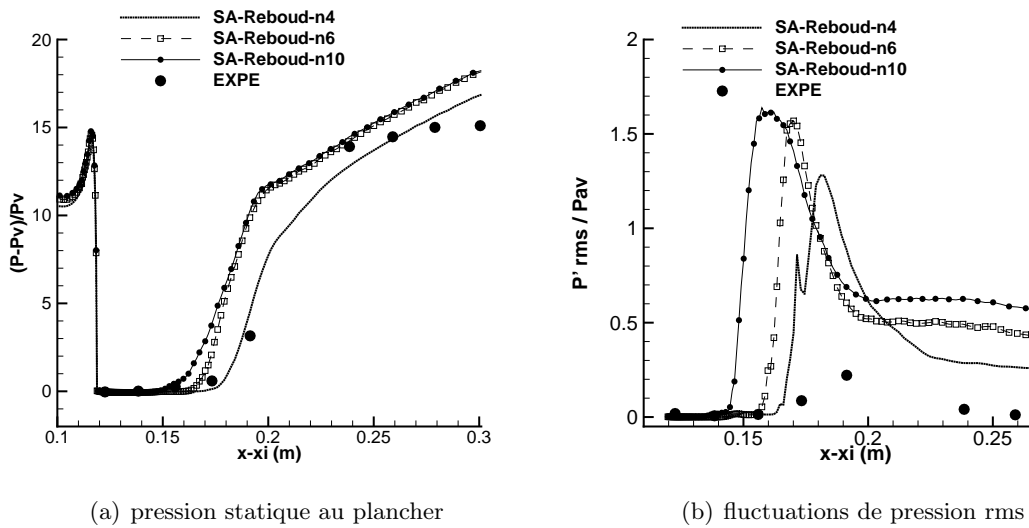


FIGURE 8.9 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence du paramètre  $n$  en modèle Spalart et Allmaras

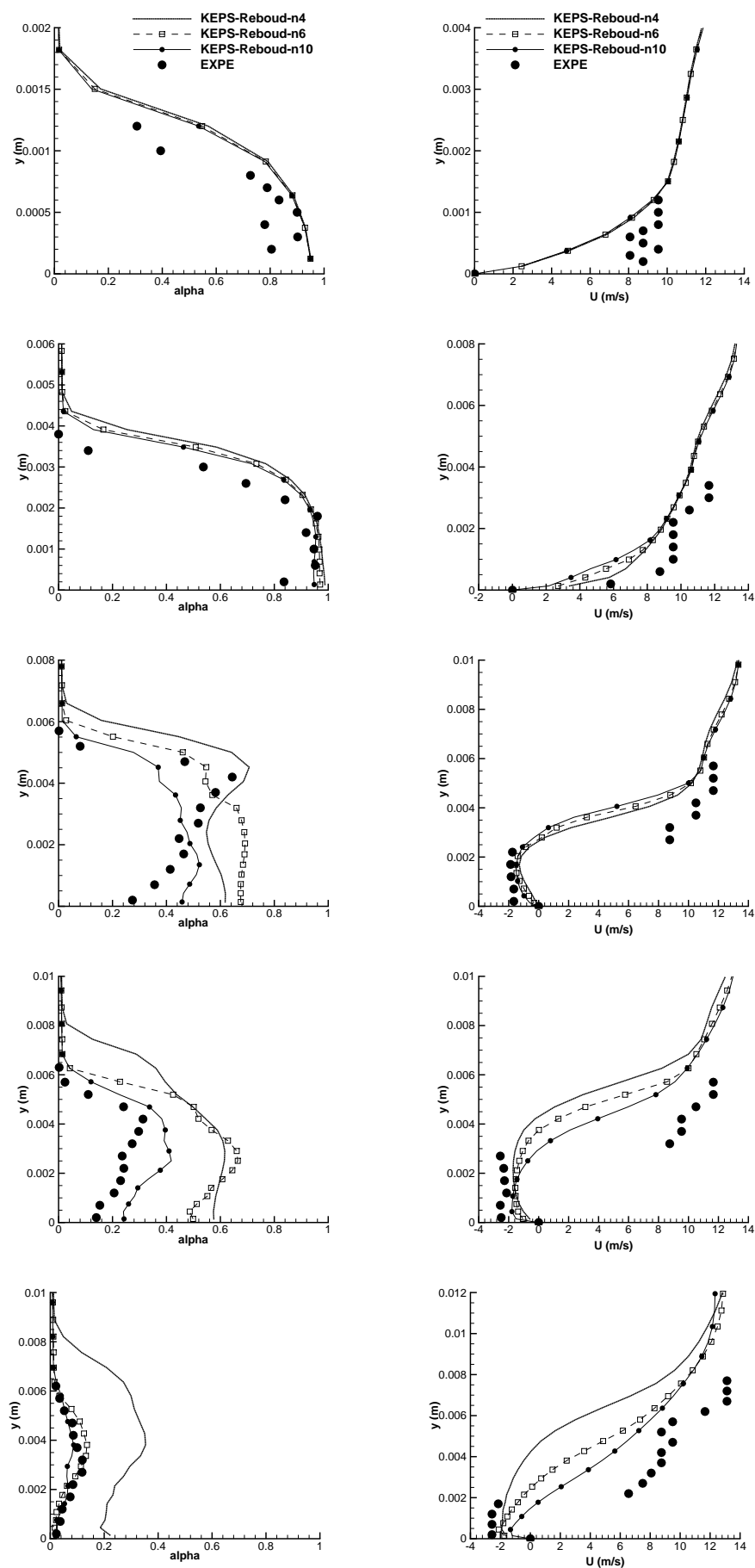


FIGURE 8.10 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : étude de l'influence du paramètre  $n$  en modèle  $k - \epsilon$

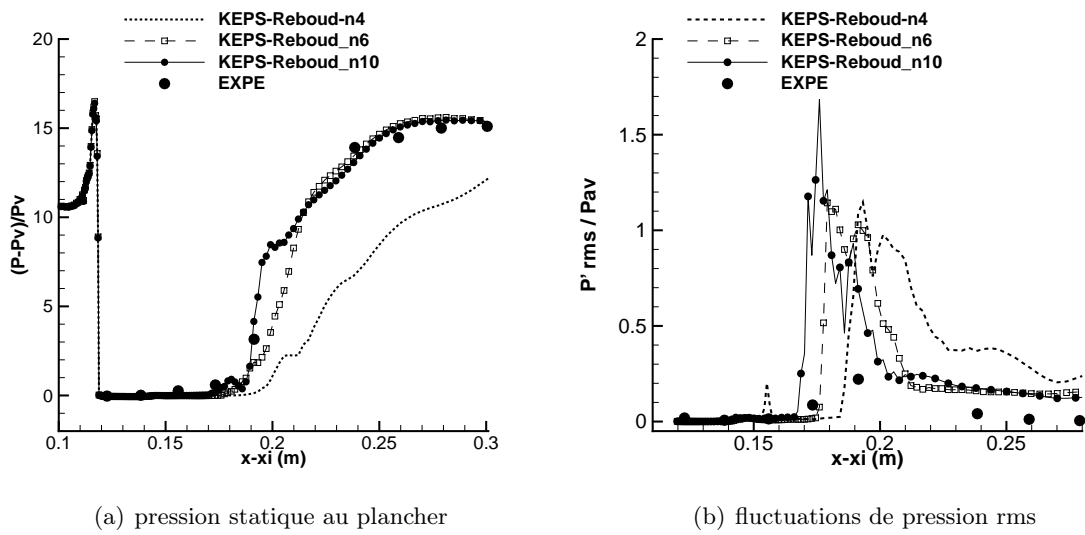


FIGURE 8.11 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence du paramètre  $n$  en modèle  $k - \epsilon$

### 8.2.3 Introduction du terme SAS

#### 8.2.3.1 Présentation

L'analyse des calculs précédents a mis en avant le rôle essentiel que revêt la correction de Reboud. La modification de la viscosité turbulente améliore la capacité des modèles à capturer les instabilités de jet rentrant. Une autre modélisation est possible à partir d'un modèle à échelle adaptative. L'introduction d'une composante *SAS* exempt le modèle de tout calibrage sur la viscosité turbulente mais nécessite de fixer les constantes du terme SAS et d'encadrer le domaine d'application du modèle. L'influence des modèles à échelle adaptative est étudiée à partir des deux modèles de turbulence Spalart et Allmaras et  $k - \ell$  en paramétrant :

- la zone d'activation uniquement dans le domaine où le taux de vide est supérieur à 10%,
- la constante  $\xi_2 = 1,47$  selon la valeur fixée par Menter pour le modèle  $k - \ell - SAS$ ,
- la constante  $\xi_{SAS} = 1$  pour le modèle  $SA - SAS$ .

Le reste du paramétrage numérique est détaillé au sein du tableau 8.3.

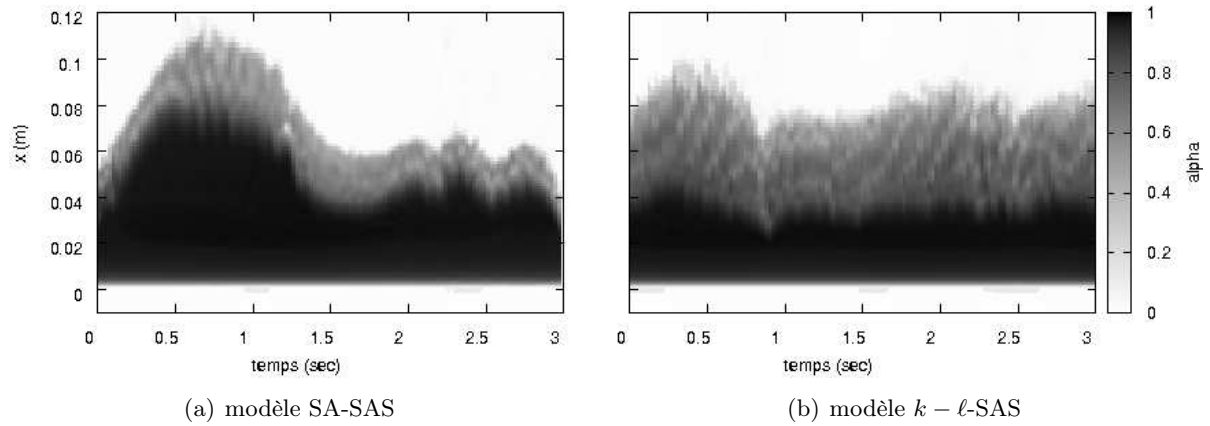
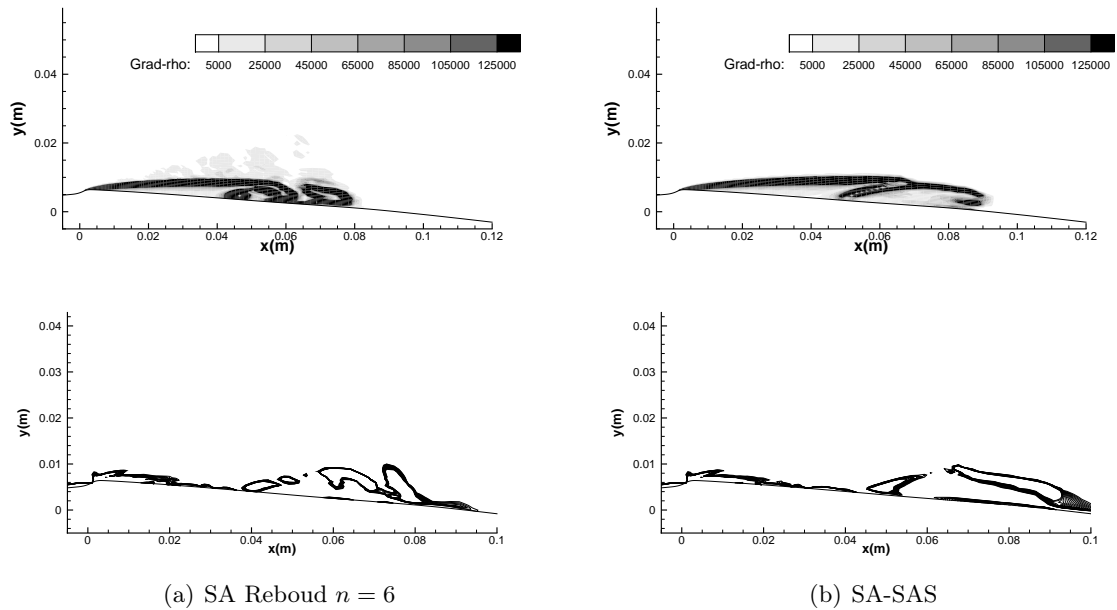
TABLE 8.3 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : modèles de turbulence avec termes *SAS*

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2,2 \cdot 10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	Activation terme <i>SAS</i>
SA-Reboud-n6	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	$\emptyset$
SA-SAS	0,61	$Prd=0,9982$	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.-SAS	$\emptyset$	$\alpha > 0,1$
KL-Reboud-n6	0,61	$Prd=0,9978$	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n=6$	$\emptyset$
KL-SAS	0,61	$Prd=0,9984$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$ -SAS	$\emptyset$	$\alpha > 0,1$

#### 8.2.3.2 Dynamique des poches de cavitation

L'analyse qualitative du comportement de la poche s'effectue au moyen de la représentation spatio-temporelle du taux de vide maximal sur la figure 8.12. Une comparaison de la dynamique des poches avec celle des modèles classiques de la figure 8.1 met en avant une fréquence des oscillations plus élevée avec l'introduction du terme *SAS*. Par ailleurs, les représentations bidimensionnelles du gradient de masse volumique et du critère Q en figures 8.13 et 8.25 font quant à elles apparaître des compositions de poche semblables qui comportent chacune : une partie attachée développée à partir du col ; une zone de recirculation en fin de poche composée d'un mélange liquide/vapeur et soumise aux instabilités turbulentes.

L'analyse des profils moyens de taux de vide et de vitesse fournie d'avantage d'informations sur la répartition de la vapeur et la modélisation des instabilités en fermeture de poche. D'une manière générale, les profils sont en bon accord avec l'expérience et traduisent ici l'efficacité des modèles à échelles adaptatives pour reproduire le mécanisme de jet rentrant, et ce, sans avoir recours à une correction supplémentaire sur la viscosité turbulente.

FIGURE 8.12 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps en modèles *SAS*FIGURE 8.13 – Comparaison des gradients de masse volumique et critère  $Q$  en modèle Spalart et Allmaras avec et sans terme *SAS*



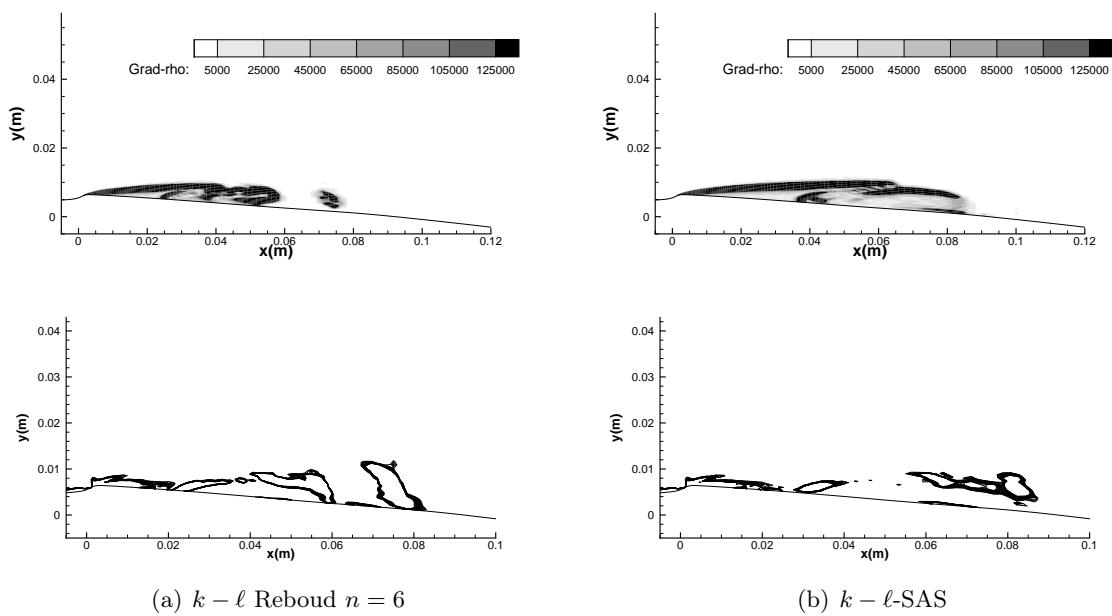


FIGURE 8.14 – Comparaison des gradients de masse volumique et critère  $Q$  en modèle  $k-l$  avec et sans terme  $SAS$

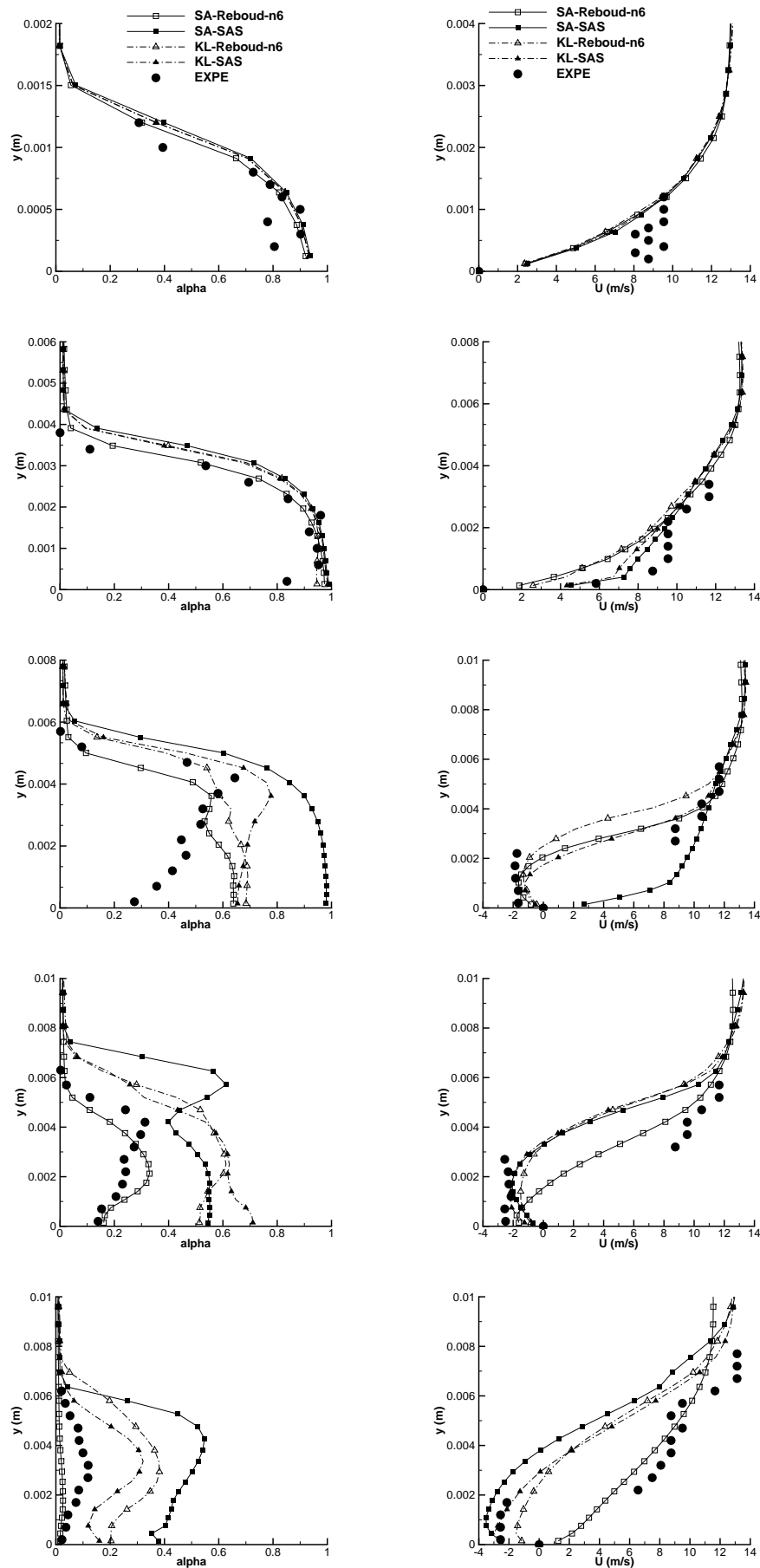


FIGURE 8.15 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : étude de l'influence du terme *SAS*

### 8.2.3.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

L'étude comparative des pressions pariétales en figure 8.16(a) atteste de la capacité des modèles *SAS* à reproduire un profil de re-compression conforme aux valeurs expérimentales. Concernant les oscillations de pression, qui se développent en zone de fermeture, aucune tendance générale ne peut être mise en lumière. En effet, si les deux modèles *SAS* positionnent le pic des perturbations dans la zone de référence, l'intensité des oscillations diffère totalement d'un cas à un autre. A l'aval du maximum des pressions fluctuantes, le calcul *k-l-SAS* surestime le taux de perturbation. Cette surestimation des pressions pourrait provenir du couplage avec le modèle de cavitation et, comme présenté en partie 8.3.3, ces valeurs peuvent être corrigées en augmentant le taux de destruction de la phase vapeur.

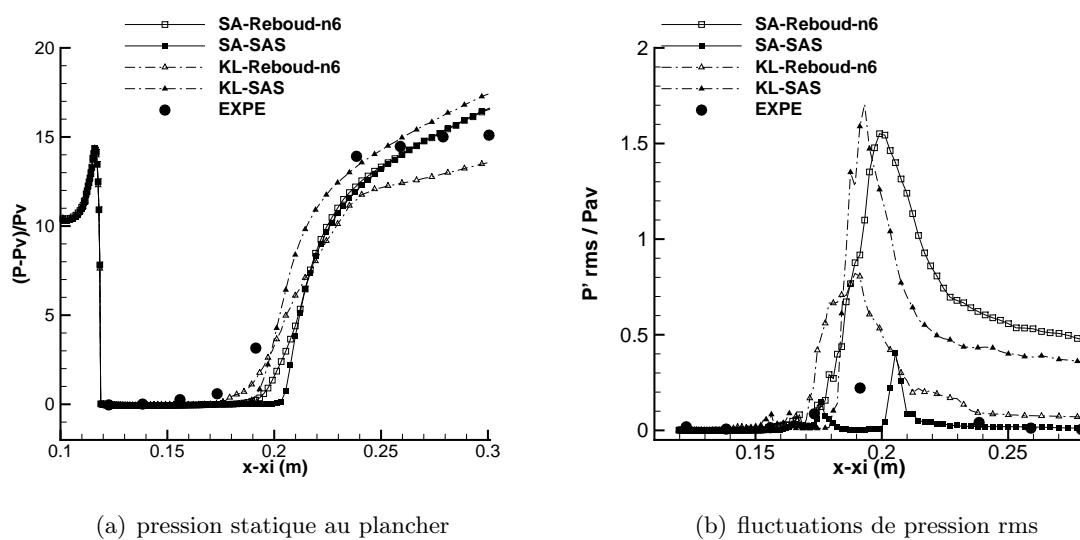


FIGURE 8.16 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence du terme *SAS*

### 8.2.4 Conclusion partielle

La partie présentée a pour objectif d'étudier l'influence des modèles de turbulence indépendamment du modèle de cavitation. La géométrie de Venturi  $4^\circ$  possède un décrochement relativement faible et engendre la formation d'une cavité quasiment stable dont la dynamique est sensible aux modélisations à l'intérieur de la couche limite et en particulier aux valeurs de la viscosité turbulente. Les critères d'analyse jugent la capacité des modèles à reproduire le mécanisme de jet rentrant, caractéristique de cette géométrie. Les résultats démontrent l'importance d'ajouter un correcteur de la viscosité turbulente aux modèles de turbulence. En terme de robustesse, les résultats similaires obtenus à partir de plusieurs modèles du premier ordre témoignent de la souplesse du code par rapport au couplage turbulent. D'autre part, bien que le correcteur de la viscosité turbulente nécessite un paramétrage supplémentaire, la configuration retenue peut s'appliquer à

l'ensemble des modèles. Enfin, des modèles de turbulence à échelle adaptative calculent un spectre plus large des longueurs turbulentes et diminuent la viscosité turbulente. Ces modèles présentent ainsi une topologie de l'écoulement conforme au cas expérimental sans avoir recours à une fonction correctrice.

## 8.3 Modèles de cavitation

Après avoir dressé le bilan de l'influence des modèles de turbulence au cours des parties précédentes, la suite de la présente étudie les résultats obtenus en fonction de deux modèles de cavitation différents : une loi d'état sinusoïdale ; ou une équation d'état de mélange des gaz raides. L'ensemble de l'étude se déroule à partir du seul modèle de turbulence de Spalart et Allmaras. Dans un second temps, la contribution du terme de relaxation mécanique, issu du terme source de l'équation de transport du taux de vide, est évalué à partir d'un calcul sans transfert de masse. Enfin la troisième section propose d'augmenter le taux de destruction de la phase vapeur dans l'optique de corriger la surestimation, par certains calculs, des oscillations en zone de re-compression. L'efficacité du terme supplémentaire est évaluée à partir du tracé des champs moyens de pression fluctuante.

### 8.3.1 Modèle avec équation d'état de mélange des gaz raides

#### 8.3.1.1 Présentation

L'objectif de cette section consiste à comparer les simulations réalisées avec deux expressions différentes de la pression de mélange. Le paramétrage numérique de chaque calcul est résumé au sein du tableau 8.4 ; dans un souci de juger uniquement l'influence de la fermeture thermodynamique, les variables ajustables ont été implémentées à des valeurs proches. Le calcul *SG – SA – Reboud – n6* est cependant moins robuste que le cas *Sinus – SA – Reboud – n6* et nécessite par conséquent de diminuer le nombre de CFL et d'augmenter le taux de dissipation numérique.

TABLE 8.4 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : étude du modèle de cavitation

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 2 \cdot 10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	Dissipation numérique
Sinus-SA-Reboud-n6	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	$k^{(2)} = 3,0$
SG-SA-Reboud-n6	0,61	$Prd=0,9983$	0,15	0,1	4-eqt gaz raides	S.-A.	$n=6$	$k^{(2)} = 5,5$

#### 8.3.1.2 Dynamique de la poche de cavitation

Les dynamiques de poche obtenues avec chacune des équations d'état sont comparables via la représentation spatio-temporelle de l'évolution du taux de vide en figure 8.17. Les visualisations identifient deux comportements distincts des phénomènes cavitants ; la loi d'état sinusoïdale engendre des battements de la poche de cavitation, tandis qu'avec une équation d'état de mélange des gaz raides, de petits lâchers de structures se mettent en place. Ces différences sont également visible par les représentations bidimensionnelles de la poche de cavitation, à différents pas de temps, en figure 8.18 ; le modèle sinusoidale possède une poche diphasique de longueur oscillante tandis que le modèle de mélange des gaz raides simule l'arrachement et la convection des structures de vapeur. Ces observations apportent de nouveaux éléments par rapport aux fermetures du modèle qui pilotent la dynamique de l'écoulement. Le caractère oscillant de la poche semble, en effet, ne pas dépendre uniquement de la modélisation de la turbulence, mais également du

couplage au modèle de la cavitation. Bien que les évolutions instantanées de la poche diffèrent selon la fermeture thermodynamique, la répartition du taux de vide est en revanche assez similaire d'un modèle à l'autre. Chaque simulation décompose en effet la poche de cavitation en une partie amont attachée et une partie aval soumise aux recirculations de l'écoulement.

En ce qui concerne la topologie moyenne de l'écoulement, les profils moyens de taux de vide et de vitesse sont comparés en figure 8.20. Ces résultats illustrent la capacité du modèle de mélange des gaz raides à reproduire, en terme de moyenne, le mécanisme de jet rentrant caractérisé par un taux de vapeur qui diminue à distance du col et la recirculation d'un fluide quasiment liquide en sortie de poche.

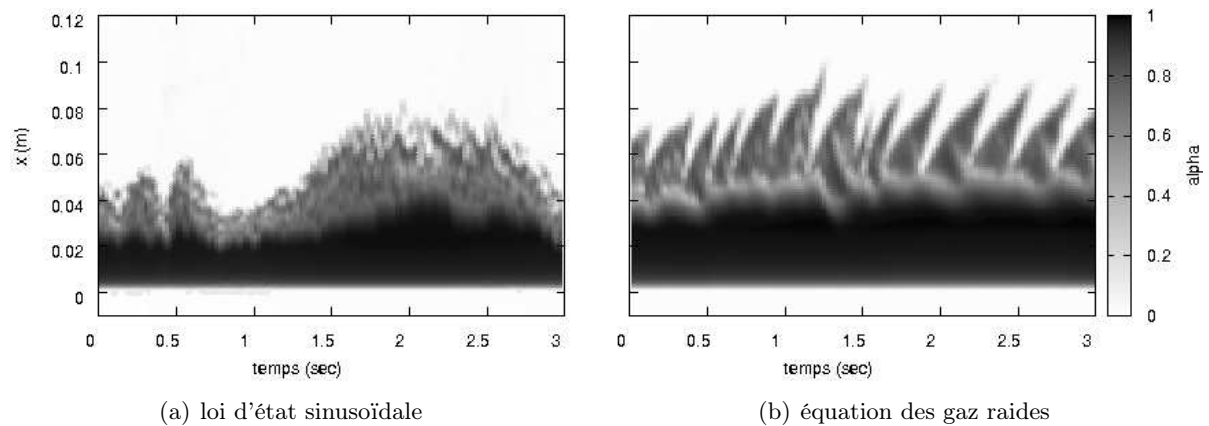


FIGURE 8.17 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps avec différents modèles de cavitation

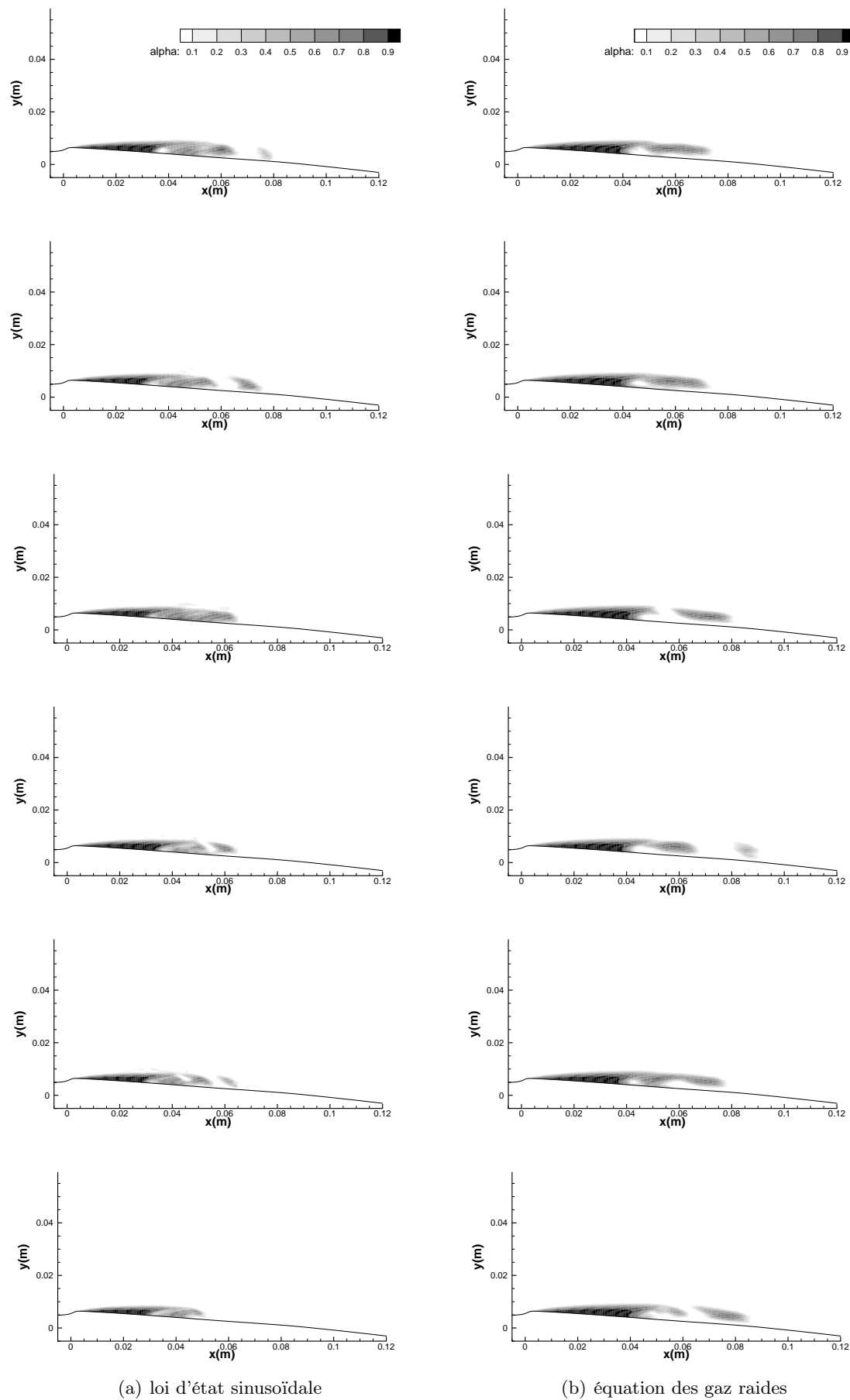
### 8.3.1.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

L'évolution de pression moyenne statique et fluctuante, au niveau de la paroi, est analysée en figure 8.21. La comparaison par rapport aux valeurs expérimentales atteste d'une bonne reproduction de la re-compression à l'aval de la poche avec le modèle de mélange des gaz raides. La courbe des valeurs moyennes des fluctuations présente une position des maximum en bon accord avec l'expérience et prend en compte la diminution des perturbations en zone de re-compression. Par rapport à un calcul fermé par une loi d'état sinusoïdale, le modèle de mélange des gaz raides a tendance à atténuer l'amplitude maximale des oscillations et se rapproche ainsi de la valeur du seul point qui permet de quantifier expérimentalement le taux maximal des fluctuations.

### 8.3.2 Etude sans transfert de masse

Le terme source de l'équation de transport du taux de vide est formé à partir :

- d'un terme de relaxation mécanique,  $K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$ ,
- d'un terme de transfert de masse,  $\dot{m} = Z \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j}$ .

FIGURE 8.18 – Visualisation de la dynamique de poche. Temps entre deux images :  $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$

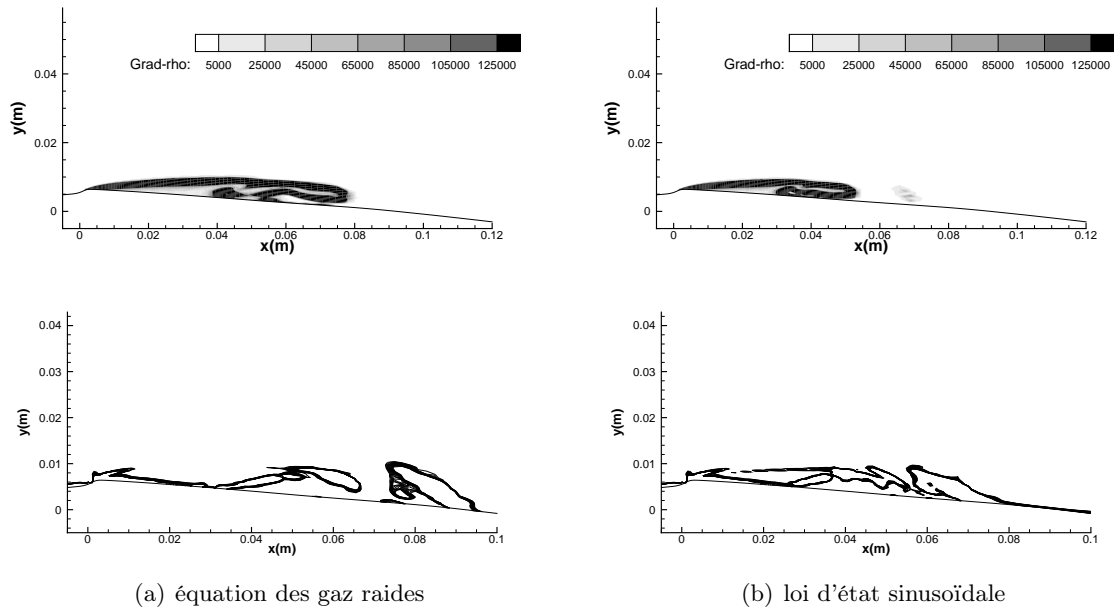


FIGURE 8.19 – Comparaison des gradients de masse volumique et critère  $Q$  pour deux modèles de cavitation

Dans l'optique d'appréhender la contribution de chacun de ces termes, une simulation est menée en incorporant uniquement la partie de relaxation mécanique. Pour cela, le calcul est réalisé avec une loi d'état sinusoïdale et un modèle de turbulence de Spalart et Allmaras en conditions stationnaires. Le développement de la cavitation est représenté en figure 8.22 à partir de la répartition du taux de vide et du gradient de la masse volumique. Les résultats font part d'un accroissement non négligeable de la fraction volumique de vapeur, pouvant dépasser localement les 80%. Ce taux de vapeur est formé, ici, uniquement à partir de l'éirement du fluide, c'est-à-dire sans transfert de matière de la phase liquide vers la phase vapeur. En prolongeant le calcul, la poche de vapeur continue son expansion et révèle une prédominance des effets dilatatoires par rapport aux effets de compression. Bien que ces interprétations reposent sur une analyse qualitative, elles soulignent cependant l'importance de prendre en considération la compressibilité du fluide, dont la dilatation engendre une augmentation significative du taux de vapeur.

### 8.3.3 Influence du paramètre $C_{des}$

#### 8.3.3.1 Présentation

L'étude comparative des modèles de turbulence présentée en partie 8.2 a mis en lumière la difficulté, de certains calculs, à reproduire la diminution des fluctuations de pression dans la zone de re-compression. Ces observations peuvent s'expliquer par un taux de destruction de la phase vapeur trop faible dans l'équation de transport du taux de vide. Afin d'améliorer la prédiction de ces modèles, l'ajout d'un terme de destruction  $\dot{m}_{des}$  au terme de transfert de masse  $\dot{m}$  a ainsi été



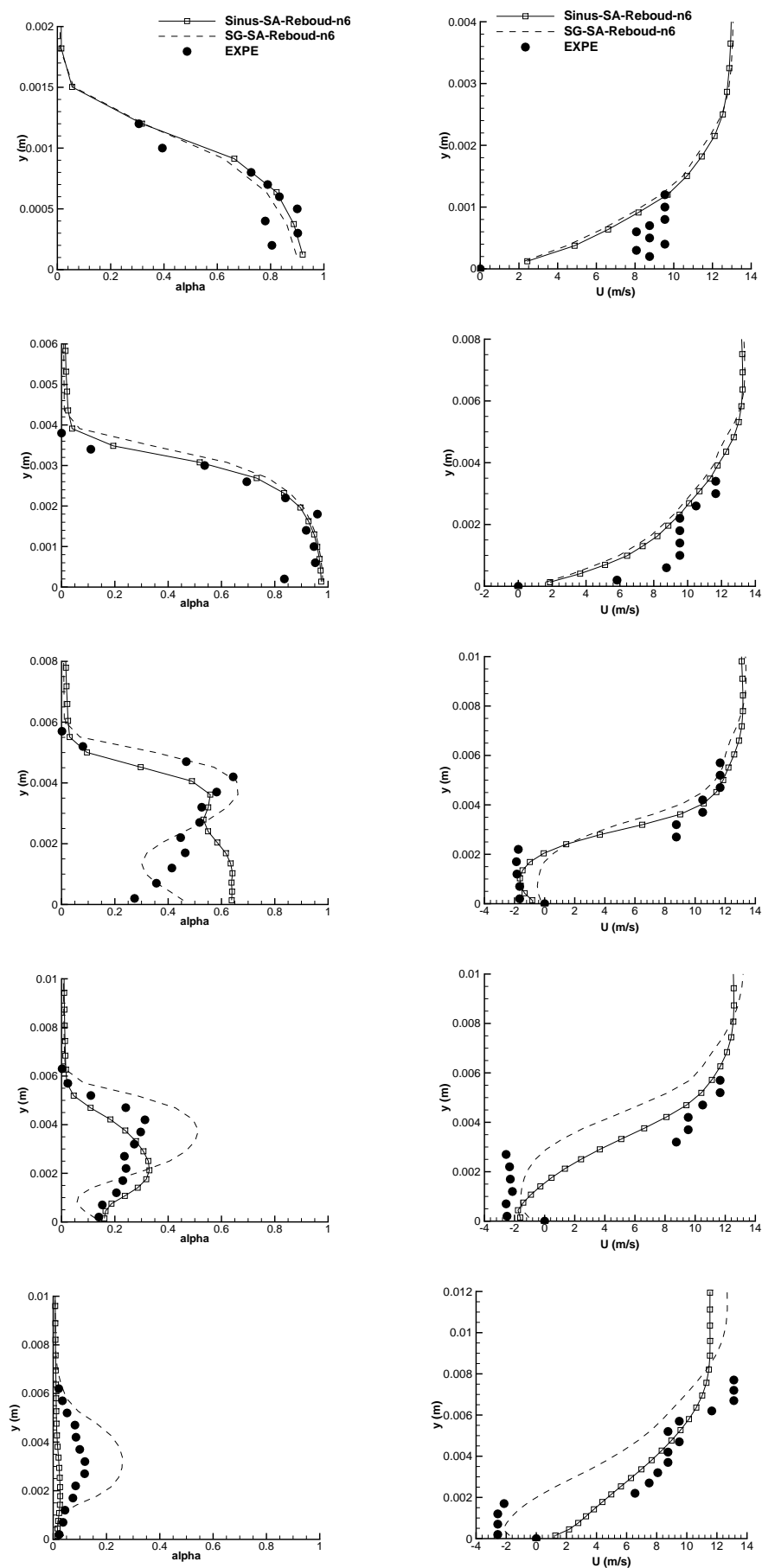


FIGURE 8.20 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : étude de l'influence du modèle de cavitation

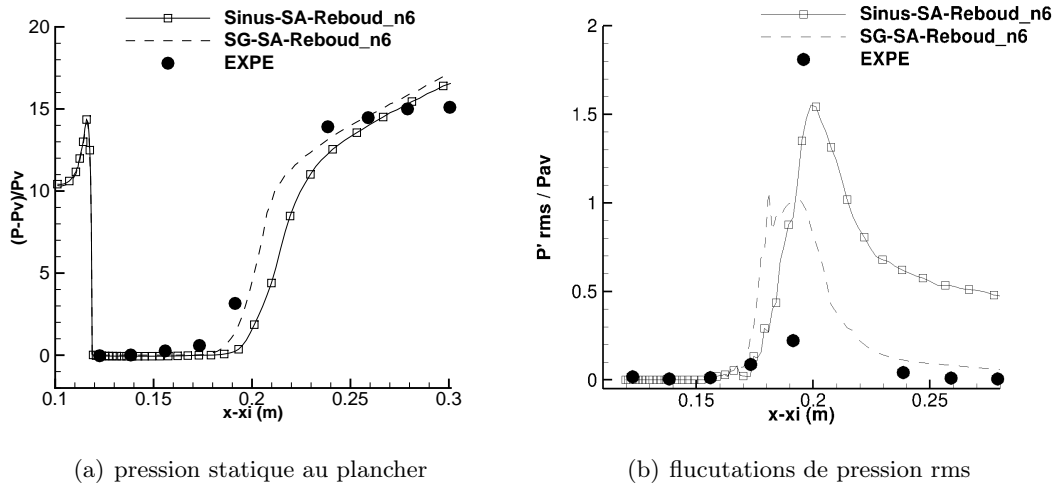


FIGURE 8.21 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence du modèle de cavitation

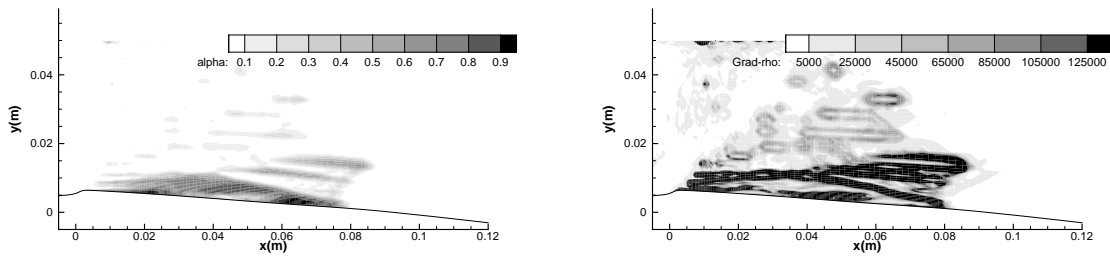


FIGURE 8.22 – Taux de vide et gradient de masse volumique pour un calcul stationnaire sans transfert de masse

envisagé. Celui-ci s'exprime selon la formulation de Hosangadi et Ahuja [74] :

$$\dot{m}_{des} = -C_{des} \alpha \frac{\rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat}} \frac{\max(0, p_m - P_{vap})}{0.5 \rho_{ref} u_{m,ref}^2} \quad (8.1)$$

où le coefficient  $C_{des}$  est une constante ajustable.

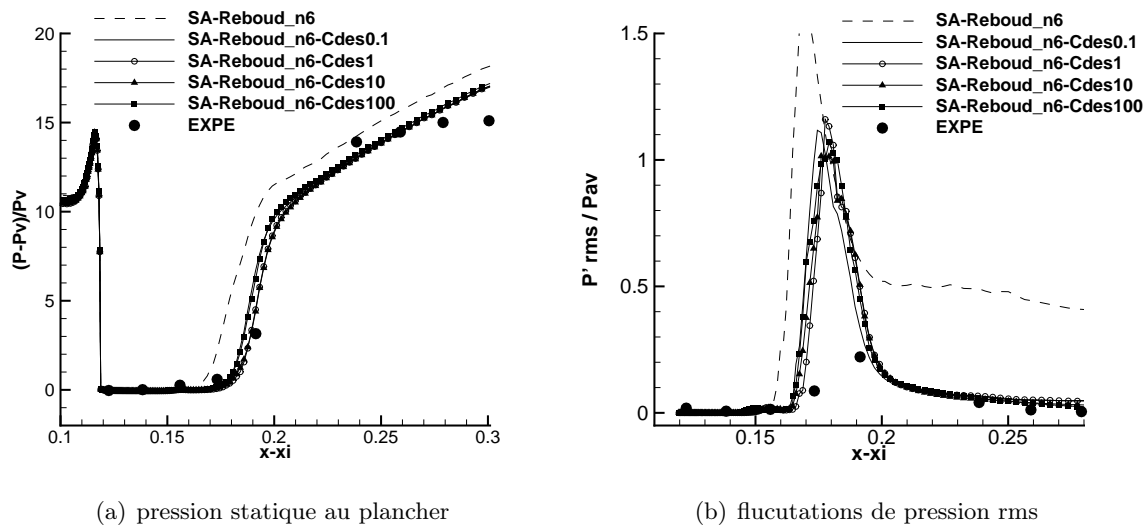
Le rôle du terme de destruction, ajouté dans l'équation de transport de taux de vide, est étudié pour les calculs *SA - Reboud - n6* et *KL - SAS* présentés en parties 8.2.1 et 8.2.3. L'étude paramétrique consiste à faire varier la valeur du coefficient  $C_{des}$  au cours de simulations résumées au sein du tableau 8.5. Le tracé des profils moyens de taux de vide et de vitesse a révélé que les variations du coefficient de destruction n'avaient quasiment pas d'influence sur la topologie moyenne de l'écoulement. Ainsi, seules les évolutions des champs de pression moyenne et fluctuante sont ici présentées.

TABLE 8.5 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : introduction d'un coefficient de destruction

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t \times 2, 2.10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	Coeff. $C_{des}$
SA-Reboud-n6	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	0.
SA-Reboud-n6-Cdes0.1	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	0.1
SA-Reboud-n6-Cdes1	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	1
SA-Reboud-n6-Cdes10	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	10
SA-Reboud-n6-Cdes100	0,61	$Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=6$	100
KL-SAS	0,61	$Prd=0,9984$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k-l$ -SAS	$\emptyset$	0.
KL-SAS-Cdes1	0,62	$Prd=0,9984$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k-l$ -SAS	$\emptyset$	1
KL-SAS-Cdes10	0,61	$Prd=0,9984$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k-l$ -SAS.	$\emptyset$	10
KL-SAS-Cdes100	0,63	$Prd=0,9984$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k-l$ -SAS	$\emptyset$	100
KL-SAS-Cdes1000	0,68	$Prd=0,9984$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdale	$k-l$ -SAS	$\emptyset$	1000

### 8.3.3.2 Champ moyen de pression statique et fluctuante

Les courbes des figures 8.23 et 8.24 permettent d'identifier une diminution des fluctuations moyennes de pression dans la zone de re-compression, à mesure que le taux de destruction est augmenté. Néanmoins, le paramétrage nécessaire à la diminution de ces oscillations diffère selon les modèles de turbulence employés. Dans le cas du calcul *SA-Reboud-n6*, la valeur seuil  $C_{des} = 0.1$  suffit à réduire le taux de fluctuation jusqu'à la valeur expérimentale tandis que le calcul *KL-SAS* nécessite, en revanche, d'élever le coefficient aux valeurs de l'ordre  $C_{des} = 100$ . En parallèle de l'évolution des pressions fluctuantes, la pression moyenne statique pariétale est tracée pour chaque calcul en figures 8.23 et 8.24. Les courbes démontrent un impact limité de l'augmentation du taux de destruction sur les profils moyens de re-compression.

FIGURE 8.23 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante (SA) : influence du terme  $C_{des}$

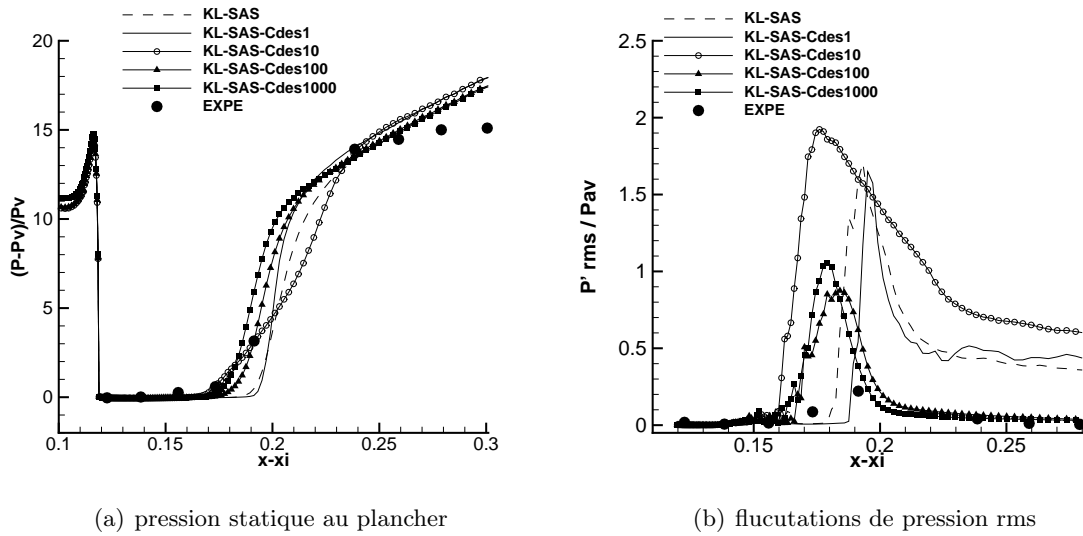


FIGURE 8.24 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante ( $k - \ell - SAS$ ) : influence du terme  $C_{des}$

### 8.3.4 Conclusion partielle

La fermeture du système d'équation par une loi d'état sinusoïdale ou une équation d'état de mélange des gaz raides donne lieu à des topologies d'écoulement similaires et en bon accord avec les données expérimentales. Les différences entre chaque modèle résident dans la dynamique de la poche de cavitation au cours du temps. En effet, pour un même modèle de turbulence, les oscillations de poche sont plus lentes dans le cas d'un modèle fermé par une équation de mélange des gaz raides. Néanmoins, comme le démontre la partie 8.2, la modélisation de la turbulence joue également un rôle important sur la dynamique des instabilités en fin de poche. Autrement dit, la modélisation des perturbations en zone diphasique dépend à la fois du calcul de la viscosité turbulente et de la pression de mélange.

Au delà de ces considérations temporelles, il est important de garder à l'esprit que la fermeture thermodynamique par une équation de mélange des gaz raides fournit un calcul des grandeurs moyennes conforme aux valeurs expérimentales. Ces résultats témoignent d'une certaine robustesse du système à 4-équations, dont la topologie moyenne de l'écoulement est correctement modélisée avec l'un ou l'autre des deux modèles de cavitation.

Au sein des parties 8.2.1.3 et 8.2.3.3, la surestimation des oscillations de pression faisait part de la nécessité d'augmenter le taux de destruction de vapeur dans les zones de re-compression. Dans la seconde section de cette étude, un terme de destruction est ainsi ajouté au terme source de l'équation d'évolution du taux de vide. Des résultats probants sont apportés par le terme supplémentaire, mais celui-ci nécessite néanmoins un paramétrage empirique qui diffère selon les simulations.

## 8.4 Modèles à 3- et 4-équations

L'un des objectifs clés de ce manuscrit est d'évaluer l'apport d'une équation de transport de taux de vide pour la reproduction des phénomènes cavitants. Cette partie est donc consacrée à la comparaison entre les résultats du modèle à 4-équations et ceux obtenus, par les travaux de thèse de Decaix [37], pour un modèle à 3-équations. Une première partie confronte les résultats obtenus par les modèles fermés thermodynamiquement par une équation d'état de mélange des gaz raides. Par la suite, l'étude reprend les simulations basées sur un calcul de la pression de mélange à partir d'une loi d'état sinusoidale. Les topologies d'écoulements cavitants sont comparées en utilisant deux modèles de turbulences différents.

### 8.4.1 Modèles avec équation d'état de mélange des gaz raides

#### 8.4.1.1 Présentation

Les calculs effectués dans cette section utilisent l'équation d'état de mélange des gaz raides. Le paramétrage des modèles avec et sans équation de transport de taux de vide est résumé dans le tableau 8.6 ; le calcul à 4-équations  $SA - SG - 4 - eqt$  est identique à celui présenté en partie 8.3.

TABLE 8.6 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : comparaison modèles 3- et 4-équations en équation d'état de mélange des gaz raides

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 2 \cdot 10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	Coeff. $C_{des}$
SA-SG-4-eqt	0,61	prd $Prd=0, 9982$	0,3	0,1	4-eqt gaz raides	S.-A.	$n=6$	$\emptyset$
SA-SG-3-eqt	0,58	prd $Prd=0, 9984$	0,3	0,1	3-eqt gaz raides	S.-A.	$n=10$	$\emptyset$

#### 8.4.1.2 Dynamique de la poche de cavitation

Les formes de poche de cavitation obtenues avec chacun des deux modèles sont comparées au sein de la figure 8.25 à l'aide du gradient de masse volumique et du critère Q. Le modèle à 3-équations ne reproduit pas le mélange liquide-vapeur soumis aux perturbations d'un jet rentrant. La modélisation surestime en effet la longueur de la poche attachée et l'équation d'état de mélange des gaz raides semble, par conséquent, peu adaptée à un modèle à 3-équations. Ce constat peut s'expliquer à partir de la formulation de l'équation d'état qui n'intègre pas d'effet de déséquilibre sur la pression ; la transition de la partie cavitante à la phase liquide s'effectue ainsi de manière brutale et ne modélise pas la zone à faible taux de vapeur. La forme de poche est améliorée par les simulations d'un système à 4-équations ; les aspects de transport couplés aux transferts de masse du terme source favorisent la modélisation des zones transitoires à faible taux de vide. Pour un système à 3-équations, les résultats les plus proches des valeurs expérimentales, avaient été obtenus avec une loi d'état sinusoidale. La suite de l'étude évalue donc l'influence de l'équation de transport à partir de cette seconde fermeture thermodynamique.

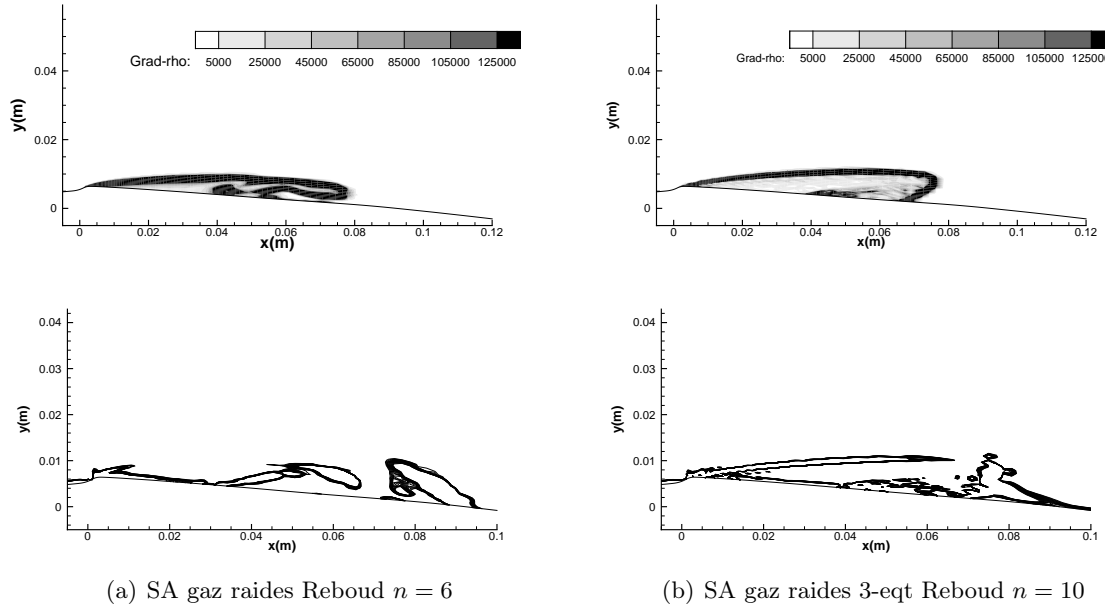


FIGURE 8.25 – Comparaison des gradients de masse volumique et critère  $Q$  : modèles 3- et 4-équations

## 8.4.2 Modèles avec loi d'état sinusoïdale

### 8.4.2.1 Présentation

Le paramétrage des calculs à 4-équations est analogue à celui de partie 8.2 et la comparaison au modèle à 3-équation s'appuie sur les deux modèles de turbulence : Spalart et Allmaras et  $k - \ell$ . Dans un souci d'étudier uniquement l'influence de l'équation de transport, tous les calculs utilisent la même correction de Reboud en fixant le coefficient  $n = 10$ . Les autres paramètres sont répertoriés au sein du tableau 8.7

TABLE 8.7 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 4° : comparaison modèles 3- et 4-équations en loi d'état sinusoïdale

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2,2 \cdot 10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	Dissipation numérique
SA-Reboud-n10	0,61	prd $Prd=0,9982$	0,3	0,1	4-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=10$	$k^{(2)} = 3,0$
SA-3eqt-Rbd-n10	0,58	prd $Prd=0,9984$	0,2	0,2	3-eqt sinusoïdal	S.-A.	$n=10$	$k^{(2)} = 1,0$
KL-Reboud-n10	0,61	prd $Prd=0,9982$	0,1	0,1	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n=10$	$k^{(2)} = 2,5$
KL-3eqt-Rbd-n10	0,58	prd $Prd=0,9984$	0,2	0,2	3-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n=10$	$k^{(2)} = 1,0$

### 8.4.2.2 Dynamique des poches de cavitation

La représentation spatio-temporelle du taux de vide offre une vision globale du comportement de la poche ; elle est ici employée en figure 8.26 afin d'étudier le rôle joué par l'équation de transport sur la dynamique de la poche. Ces visualisations démontrent une plus grande sensibilité des modèles à 4-équations par rapport aux perturbations locales de l'écoulement. La modélisation des phénomènes instationnaires se traduit soit par des oscillations de poche à fréquence élevée (dans le cas d'un modèle de Spalart et Allmaras), soit par la convection de structures diphasiques (dans le cas d'un modèle  $k - \ell$ ). Ces instationnarités sont, en revanche, beaucoup moins marquées pour les modèles à 3-équations. En effet, pour ces modèles, la longueur de la poche de cavitation et le taux de vapeur ne varient quasiment pas au cours du temps, et ce, quel que soit le modèle de turbulence employé.

Les différences entre modèles à 3- et 4-équations concernent principalement les évolutions des phénomènes cavitants au cours de temps. En ce qui concerne la représentation de l'écoulement bidimensionnel à un instant donné, celle-ci varie très peu d'un modèle à un autre comme l'attestent les figures 8.27 et 8.28 où sont illustrées la répartition du taux de vide et la position des recirculations.

La troisième partie de l'étude concerne l'analyse des grandeurs moyennes de taux de vide et de vitesse qui sont comparées à l'expérience en figure 8.29. Les profils moyens confirment les observations faites à partir des visualisations instantanées du gradient de masse volumique ; chaque modèle prédit une répartition de vapeur quasiment identique et les profils de vitesse moyenne illustrent, dans chaque cas, la formation d'une recirculation caractéristique du mécanisme de jet rentrant. Ces observations permettent d'aboutir à une conclusion importante par rapport à la modélisation des phénomènes cavitants sur la géométrie de Venturi 4°. A partir du moment où la viscosité turbulente est suffisamment réduite en zone diphasique, l'ensemble des simulations est apte à reproduire les instabilités caractéristiques de l'écoulement ; en terme de grandeurs moyennes, la modélisation de la cavitation et de la turbulence n'influe quasiment pas sur les résultats.

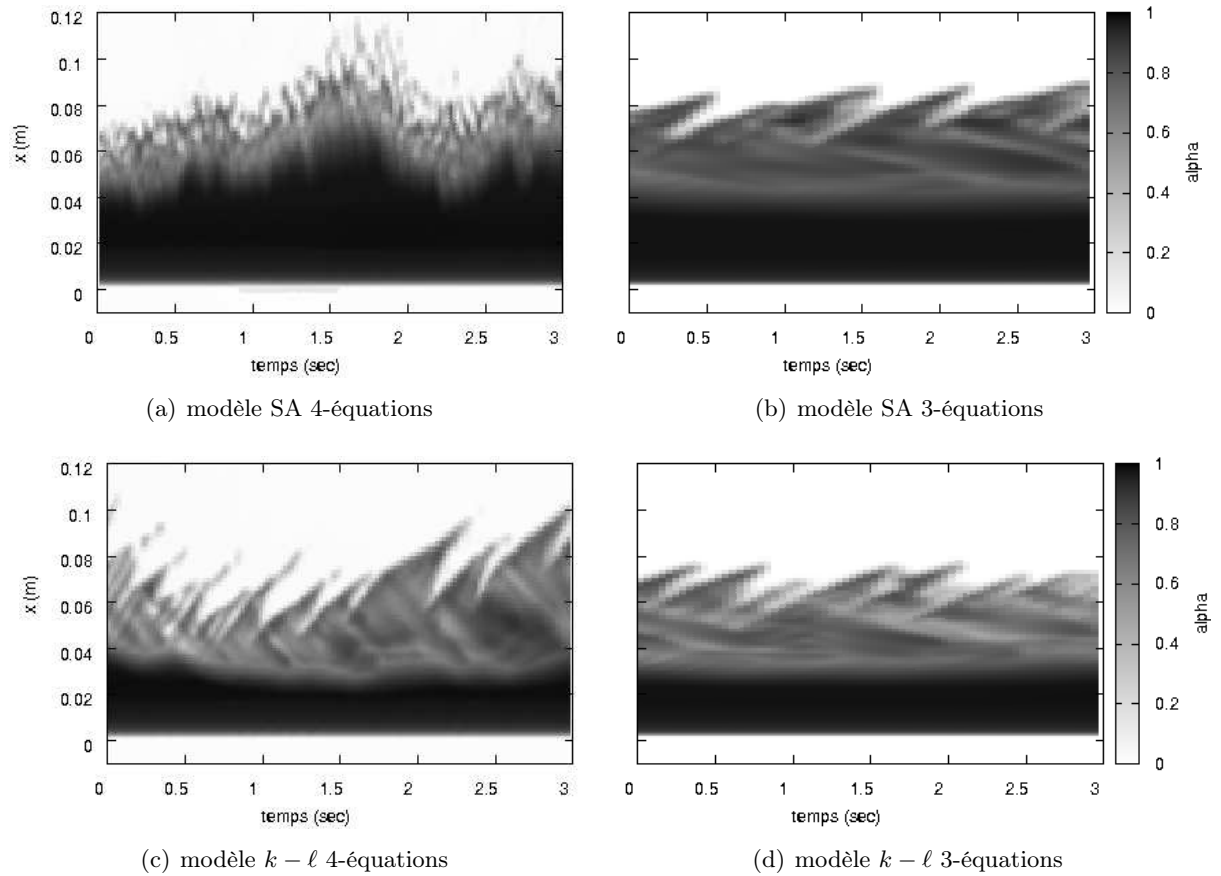


FIGURE 8.26 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps en modèles 3- et 4-équations



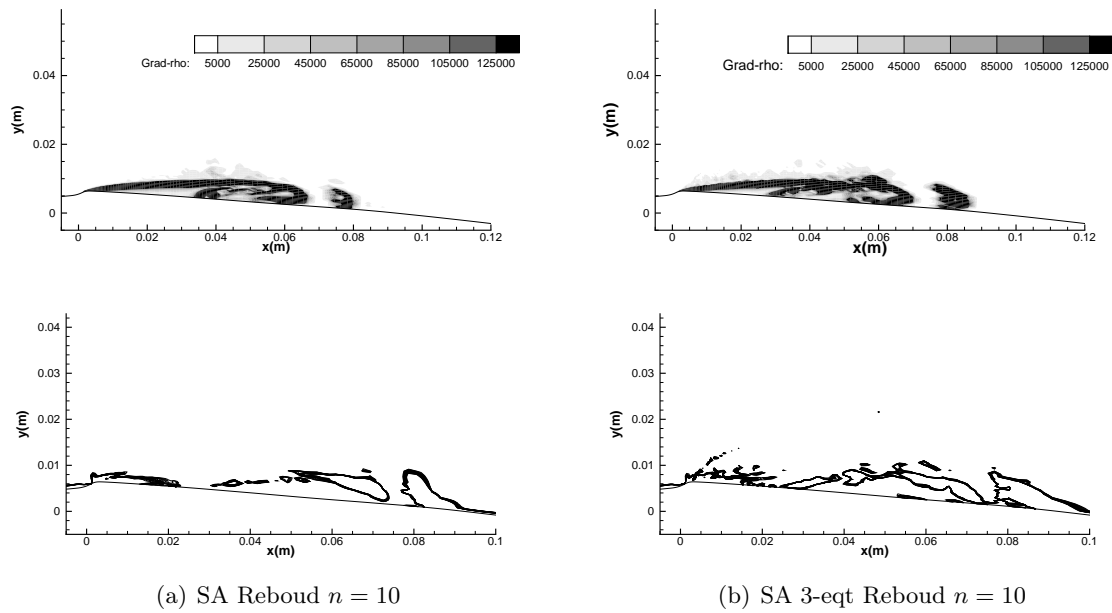


FIGURE 8.27 – Comparaison des gradients de masse volumique et critère  $Q$  en modèle de Spalart et Allmaras

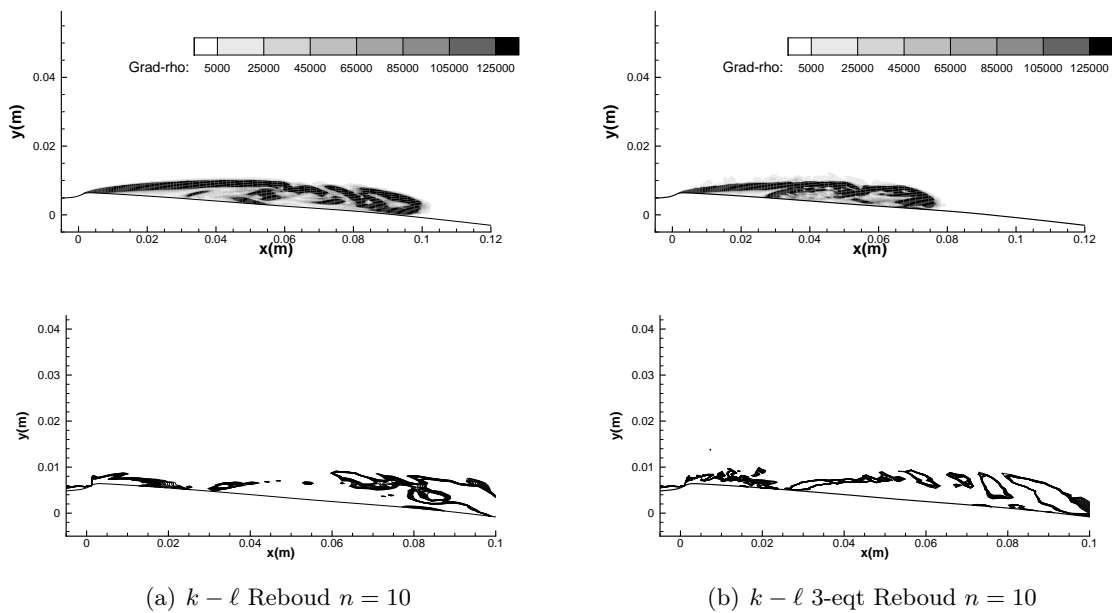


FIGURE 8.28 – Comparaison des gradients de masse volumique et critère  $Q$  en modèle  $k-l$

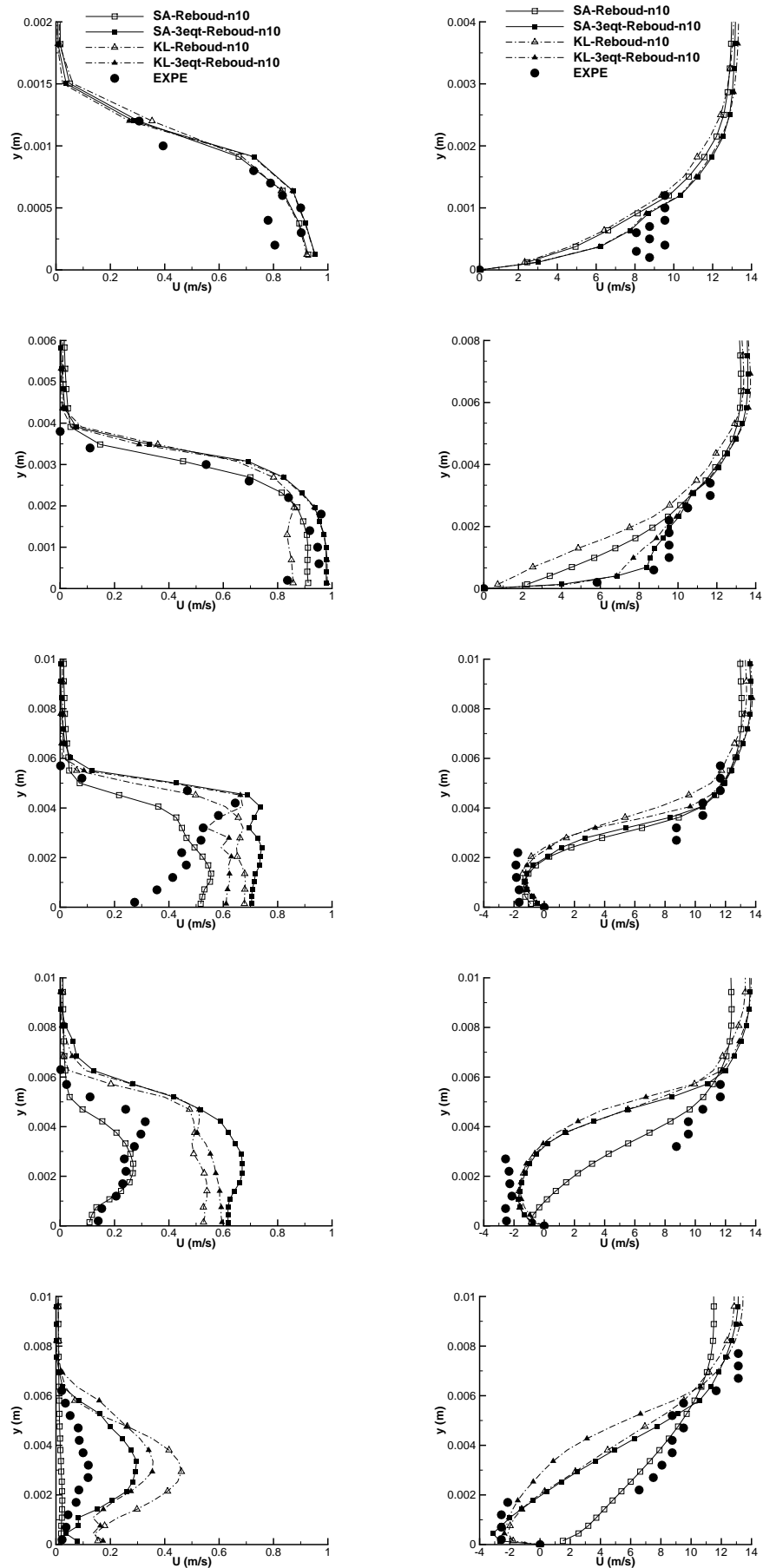


FIGURE 8.29 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : étude en modèles 3- et 4-équations

### 8.4.2.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

La fin de l'étude comparative, entre les modèles à 3- et 4-équations de transport, s'intéresse aux profils de pression moyenne statique et fluctuante tracés en figure 8.30. Une fois encore, les grandeurs moyennées ne permettent pas de discriminer un modèle par rapport à un autre. Dans l'ensemble, chaque calcul propose des profils en bon accord avec l'expérience. Seul le calcul *SA – Reboud – n10*, dont la longueur de poche est légèrement inférieure à celle des autres simulations, prédit un zone de recompression légèrement en amont du cas de référence. Concernant les pressions moyennes fluctuantes, chaque simulation positionne le pic des instabilités à proximité du point expérimental. L'amplitude de ces oscillations varie peu d'un cas à un autre, et la surestimation du calcul *SA – Reboud – n10* en zone de recompression peut être corrigée par augmentation du taux de destruction (voir partie 8.3.3).

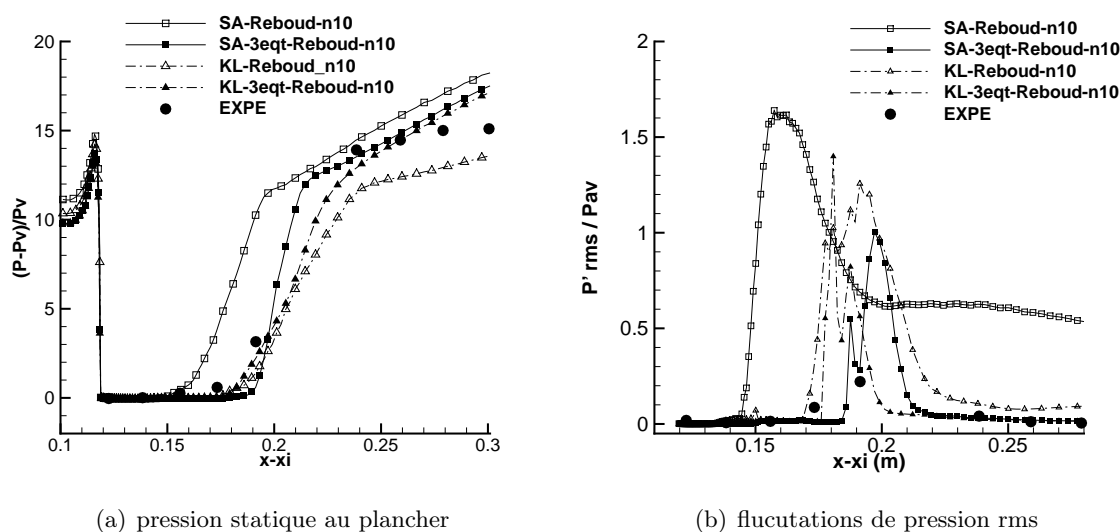


FIGURE 8.30 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante ( $k - \ell - SAS$ ) : modèles 3- et 4- équations

### 8.4.3 Conclusion partielle

La première partie de l'étude évalue la capacité d'un modèle à 3-équations, couplé à une équation d'état de mélange des gaz raides, à reproduire les phénomènes cavitants par rapport à un modèle à 4-équations. Les résultats démontrent qu'en l'absence d'effets de déséquilibre sur la pression, la modélisation des zones diphasiques est mal reproduite lorsque le calcul du taux de vide n'est pas régi par une équation de transport. La valeur ajoutée d'un système à 4-équation réside dans sa capacité à mieux reproduire les instationarités en zone de recirculation, en augmentant la fréquence des oscillations de la poche et en modélisant la convection de structures diphasiques. Bien que, pour une loi d'état sinusoïdale, la topologie moyenne de l'écoulement soit quasiment identique à un calcul à 3-équations, l'évolution temporelle de la poche de cavitation au cours

du temps est en revanche différente. La notion de transport de vapeur favorise, en effet, la mise en place de phénomènes convectifs dans la partie oscillante de la poche. Certes, la synthèse des calculs à 3-équations, introduits ici, ne suffit pas à résumer l'ensemble des études effectuées à partir de ce modèle, mais celle-ci fournit des pistes d'analyse quant à la contribution de l'équation de transport du taux de vide.

## 8.5 Conclusion

L'étude du modèle de cavitation est réalisée sur une géométrie de Venturi  $4^\circ$ . L'angle d'ouverture faible au niveau du col engendre la formation de phénomènes de cavitation dont les instabilités réduites offrent la possibilité de tester un grand nombre de configurations numériques. L'efficacité des différents modèles est jugée selon leur capacité à reproduire la topologie de l'écoulement observée en expérience. Les essais témoignent de la formation d'une zone cavitante séparée en une partie amont, à concentration de vapeur élevée, et une partie aval composée d'un mélange liquide-vapeur. En moyenne, la longueur de la poche de cavitation varie peu et le retour à l'état liquide s'effectue dans la zone de re-compression, soumise aux instationnarités de l'écoulement. Les perturbations se manifestent par des oscillations de pression lors de la re-compression du mélange diphasique. Cette zone de fermeture favorise la naissance d'un jet rentrant liquide qui remonte l'écoulement entre la paroi et la cavité et dont le mécanisme est caractérisé par une diminution de la fraction volumique de vapeur.

En régime cavitant, la dynamique de l'écoulement est pilotée principalement par les instabilités de la couche limite. Par conséquent, la bonne reproduction numérique de l'écoulement réside dans la modélisation des phénomènes turbulents et a fortiori dans la qualité du calcul de la viscosité turbulente en zones diphasiques. Dans un premier temps, les calculs mettent en avant la difficulté des modèles de turbulence classiques à modéliser les zones où la masse volumique diminue de façon significative. La sur-estimation de la viscosité turbulente avorte, en effet, le développement d'une recirculation à proximité de la paroi et l'ajout de la fonction correctrice de Reboud est nécessaire au calcul des zones diphasiques. Une autre approche consiste à employer des modèles de turbulence avancés, de type SAS, qui calculent un spectre plus large des échelles de longueur turbulente et réduisent ainsi la valeur de la viscosité dans les zones de raffinement du maillage. La seconde partie de l'étude s'intéresse à la modélisation de la cavitation. Par rapport aux précédentes simulations en modèle homogène, les présents travaux proposent d'appliquer une nouvelle fermeture thermodynamique à partir d'une équation d'état de mélange des gaz raides. Sur la géométrie de Venturi  $4^\circ$ , cette loi d'évolution de la pression, implémentée dans un modèle à 4-équations, apporte des résultats en bon accord avec l'expérience. L'étude du modèle cavitant s'intéresse, ensuite, à la formulation du terme source de l'équation de transport de taux de vide. Les analyses mettent en avant l'importance d'une résolution compressible de l'écoulement pour la reproduction des mécanismes de relaxation du fluide. Pour certains calculs, l'ajout d'un terme de destruction de la quantité de vapeur permet de diminuer le taux de d'oscillations des pressions à l'aval de la poche de cavitation.

Enfin, la troisième partie de l'étude évalue la valeur ajoutée de l'équation de transport par rapport à un modèle à 3-équations, pour lequel le taux de vide est calculé de façon analytique, en fonction de la densité locale. Lorsque les quantités de l'écoulement sont moyennées en temps, les modèles à 3- et 4-équations approchent tous deux le comportement expérimental. La distinction entre chaque modèle est plus prononcée lors de l'analyse spatio-temporelle de l'évolution de la poche. Le modèle à 4-équations améliore, en effet, le développement de phénomènes convectifs dans la zone d'instabilités diphasiques.

La synthèse de ces analyses met en avant un couplage complexe entre la formulation de l'équation de transport du taux de vide, le calcul de la viscosité turbulente et la fermeture thermodynamique

par une équation d'état. Les dynamiques de poche, analysées de façon qualitative à partir des représentations spatio-temporelles, illustrent la sensibilité des simulations au paramétrage des modèles turbulents et cavitants. Toutefois, la faible quantité de données expérimentales, qui renseignent sur les évolutions des phénomènes cavitants au cours du temps, ne permet pas de discriminer certains résultats par rapport aux autres.

## Chapitre 9

# Etudes sur géométrie de Venturi 8°

*La géométrie de Venturi 8° possède un degré d'instationnarités plus élevé et représente, en cela, un enjeu intéressant pour le calibrage des modèles de cavitation. Expérimentalement, les études font état d'instabilités marquées par l'arrachement et la convection de structures de vapeur répétées de façon quasiment périodique. Ce chapitre évalue la capacité des simulations à reproduire ces instationnarités en explorant plusieurs axes.*

- *Modèles de cavitation : le paramétrage de la loi d'état sinusoidale, et en particulier la vitesse minimale du son, joue un rôle important sur la la fréquence des instabilités de la poche. Par ailleurs chaque équation d'état présente sa propre dynamique de poche et cette partie compare les résultats de simulations obtenus pour chaque fermeture.*
- *Propagation des ondes de pression : outre le mécanisme de jet rentrant, la littérature témoigne d'une seconde instabilité liée à la propagation d'ondes de pression générées par le collapse de structures diphasiques. Cette partie propose, à travers le tracé de fonctions de corrélations, d'analyser plus en détail la capacité des simulations à capturer de type d'instabilités.*
- *Relaxation thermodynamique de la masse volumique de la phase vapeur : l'ajout d'une équation supplémentaire pour le calcul du taux de vide permet, en théorie, de relaxer thermodynamique une variable supplémentaire au sein du système d'équation. Dès lors, la valeur de la masse volumique de la phase vapeur peut être soit fixée à saturation, soit calculée en fonction des autres variables thermodynamique. Cette partie analyse l'effet de la relaxation thermodynamique en étudiant son influence, dans un premier temps, en régions non cavitantes, puis, au sein des zones diphasiques.*
- *Modèles 3- et 4-équations : la dynamique de la poche de cavitation sur Venturi 8° possède des aspects convectifs dont l'équation de transport supplémentaire sur le taux de vide est censée améliorer la reproduction. Ces améliorations sont évaluées en comparant les résultats obtenus à partir de systèmes à 3- et 4-équations.*

## 9.1 Introduction

Les simulations réalisées sur la géométrie de Venturi 4° avaient pour objectif d'analyser les performances du code de calcul en comparant les résultats à une base de données expérimentales. Les résultats d'essais comportent, en majorité, des grandeurs moyennes et seule une analyse des phénomènes statistiques était réalisée. La dynamique du fluide sur la géométrie de Venturi 8° engendre la formation d'une couche limite détachée et de structures cavitantes convectées de façon intermittente par l'écoulement principal. Ce phénomène s'apparente aux instabilités principales qui se développent sur les machines tournantes en condition cavitante. L'étude de la géométrie de Venturi 8° constitue en cela un enjeu majeur en vue de la compréhension des mécanismes qui naissent en condition de débit partiel sur les machines hydrauliques. La nature des instationarités qui déstabilisent la poche et engendrent la mise en place de lâchers quasi-périodiques restent sujet à débat. L'état de l'art réalisé en partie 6.1.2.2 référence plusieurs études expérimentales menées en condition de cavitation partielle. Deux mécanismes de déstabilisation sont identifiés : la formation d'un phénomène de recirculation, dont le jet rentrant liquide provoque l'arrachement de nuages de vapeur ; et la propagation d'ondes de pression causées par le collapse des structures de cavitation. Si les mesures expérimentales mettent en évidence la présence de ces instabilités, la prédominance d'un phénomène par rapport à un autre n'est cependant pas établie. Selon le classement de Arndt [11] présenté en partie 6.1.2.2 sur la plage de fonctionnement  $\sigma/2\alpha \approx 7, 16$ , ici étudiée, les instabilités d'ondes devraient a priori jouer un rôle prépondérant. Dans l'optique d'apporter des éléments de réponse, une cartographie expérimentale de l'écoulement moyen sur Venturi 8° a été dressée grâce aux mesures de pression, de taux de vide et de vitesse de Aeschlimann [3]. D'un point de vue expérimental, ces mesures permettent de quantifier la répartition de la phase vapeur et de mesurer le taux de recompression pour des régimes comparables à ceux d'une machine hydraulique à débit partiel. D'un point de vu numérique, ces quantités moyennes offrent une base de donnée essentielle au calibrage des simulations. Néanmoins les agitations périodiques de cet écoulement peuvent être causées par des phénomènes instantanés que les moyennes statistiques ne permettent pas d'identifier. C'est pourquoi, une analyse plus fine de l'écoulement sur Venturi 8° doit être envisagée. Pour cela, les mesures de Aeschlimann proposent d'étudier les phénomènes de propagation d'ondes en réalisant des relevés de pression sur la longueur de l'écoulement ; elles permettent de corrélérer les données de chaque station et d'analyser les fréquences d'oscillation de l'écoulement. En s'appuyant sur les phénomènes observés expérimentalement, les simulations ont pour objectif de révéler quels sont les mécanismes reproduits numériquement et d'identifier les paramètres qui modifient la modélisation des phénomènes cavitants.



## 9.2 Base de données expérimentales

Les agitations de l'écoulement dans la zone de cavitation et dans la région de re-compression ont été mesurées de façon expérimentale à partir des signaux de pression pariétale. Ces mesures ont été réalisées à l'aide de sondes piezo-électriques sur un temps d'acquisition d'environ 120 sec qui permet de rassembler environ six millions de points à la fréquence de 50 kHz. Elles permettent, après filtrage du signal brut, d'obtenir les spectres des fluctuations de pression aux six premières stations de mesure (voir figure 9.1). Les relevés mettent en évidence une pulsation fréquentielle

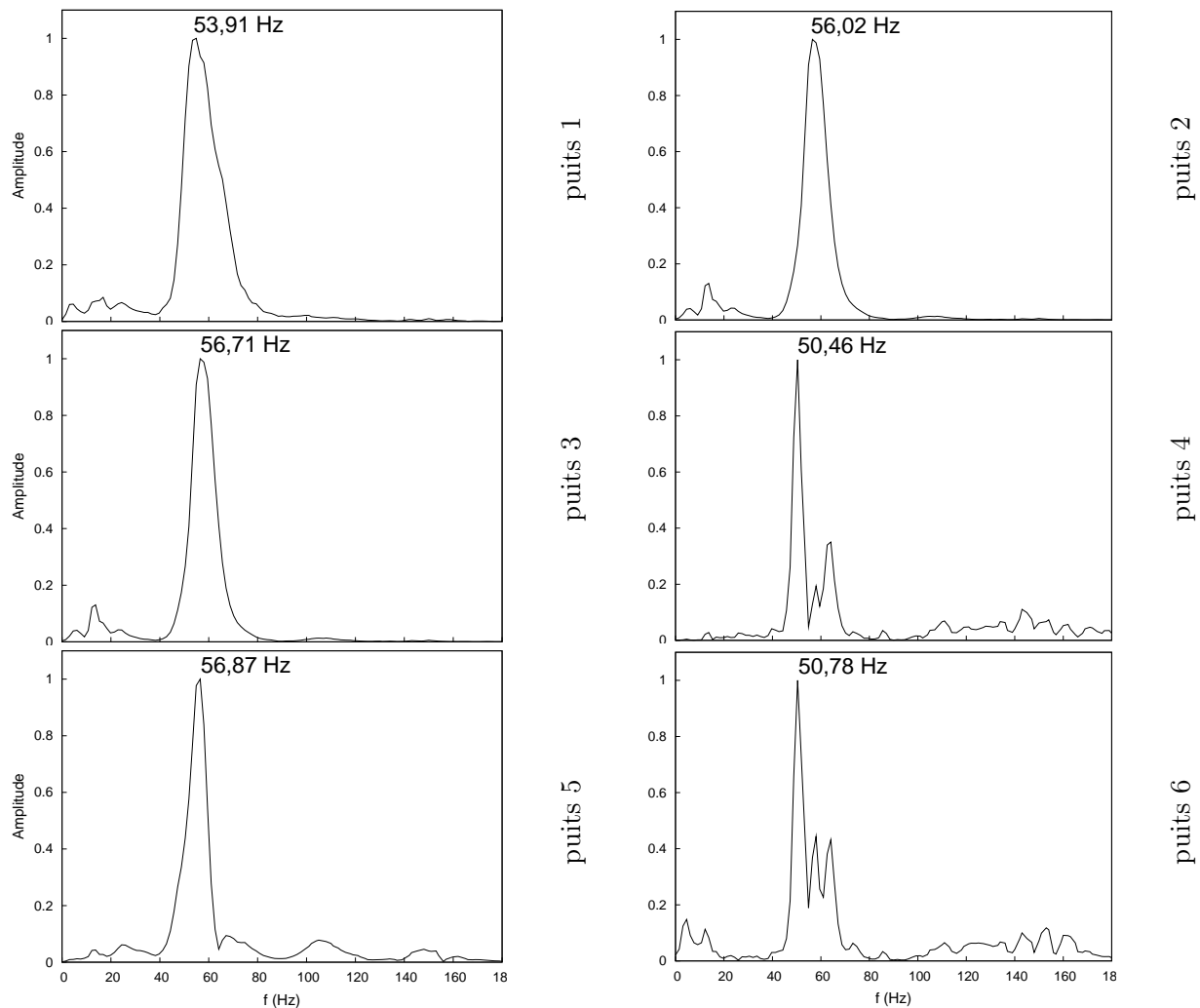


FIGURE 9.1 – Spectres fréquentiels expérimentaux des puits 1 à 6

autour de 50 Hz. Pour l'analyse des résultats, une comparaison est proposée à partir des signaux numériques des trois premiers puits, dans la zone où se concentrent les phénomènes de cavitation.

### 9.3 Modèles de cavitation

Cette partie rassemble les résultats de calculs obtenus à partir de deux modèles de cavitation introduits au sein d'un système à 4-équations. La première catégorie de modèle calcule la pression de mélange à partir d'une loi d'état sinusoïdale ; elle incorpore une constante paramétrable  $c_{min}$  qui définit la vitesse minimale du son au sein du mélange et ajuste les effets de déséquilibre des pressions. Cette vitesse du son doit nécessairement majorer la valeur de la vitesse du son d'un mélange à l'équilibre thermodynamique. Dans le respect de cette condition, la constante  $c_{min}$  est paramétrée de façon empirique en amont du calcul.

La seconde catégorie de modèle calcule la pression de mélange à partir d'une équation d'état de mélange des gaz raides ; celle-ci redéfinit l'expression de la vitesse du son et le modèle ne comporte pas de constante ajustable supplémentaire. Cependant, cette modélisation ne prend pas en compte les effets de déséquilibre de la pression présentes au sein de la loi d'état sinusoïdale.

A partir de visualisations qualitatives de l'écoulement, de mesure des quantités moyennes et d'analyses fréquentielles, cette partie s'emploie à comparer les capacités de chaque modèle à reproduire les caractéristique de l'écoulement cavitant sur géométrie de Venturi 8°.

#### 9.3.1 Modèle avec loi d'état sinusoïdale

##### 9.3.1.1 Présentation

L'influence du modèle de cavitation en loi d'état sinusoïdale est étudié au travers de quatre calculs différents dont le paramétrage est résumé en tableau 9.2. L'ensemble de ces calculs est réalisé avec un seul modèle de turbulence  $k - \ell$  à viscosité turbulente réduite par une correction de Reboud. L'étude paramétrique consiste ici à faire évoluer la vitesse minimale du son  $c_{min}$ .

TABLE 9.1 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 8° : variation la vitesse minimale du son

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 0.10^{-3} s$	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	$c_{min}$ (m/s)
$c_{min} = 0.47 m/s$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n = 10$	0.47
$c_{min} = 0.92 m/s$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n = 10$	0.92
$c_{min} = 1.36 m/s$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n = 10$	1.36
$c_{min} = 1.57 m/s$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n = 10$	1.57

##### 9.3.1.2 Dynamique de la poche de cavitation

La figure 9.2 propose quatre représentations spatio-temporelles des évolutions de poche de cavitation en fonction du paramétrage de la vitesse minimale du son. Chaque simulation reproduit une zone diphasique, séparée en une cavité attachée, formée directement à l'aval du décrochement au col en  $x = 0 cm$  et des structures de vapeur, arrachées périodiquement aux environs de  $x = 0,01 m$  puis convectées par l'écoulement principal. Le phénomène possède une périodicité faible et l'espace temps de 0,5 sec suffit, ici, à capter plusieurs reproduction du cycle. L'analyse de ces représentations de poche montre que le nombre de lâchers s'accroît à mesure que le

paramètre  $c_{min}$  augmente. Physiquement, cela signifie que la fréquence de destabilisation de la poche est plus élevée lorsque la célérité de propagation des perturbations augmente. Ces instabilités se manifestent par des fragmentations de poche plus nombreuses et amplitude plus élevée des oscillations de la poche attachée. Bien que les dynamiques diffèrent d'un calcul à l'autre, chaque simulation possède néanmoins un taux de cavitation identique.

Les discordances entre simulations qui ont été évoquées jusqu'ici reposent uniquement sur une analyse qualitative du comportement de la poche. Une analyse plus fine peut être menée en examinant les signaux de pression pariétale ; ils renseignent sur les oscillations locales du fluide et permettent de cartographier la fréquence des pulsations le long de la zone de cavitation. En figure 9.4, l'augmentation des fréquences fondamentales avec la vitesse minimale du son,  $c_{min}$ , vient corroborer les observations de la figure 9.2. Les oscillations de pression sont, en effet, provoquées par le collapse des structures de cavitation et l'augmentation de la réponse fréquentielle en fonction de  $c_{min}$  illustre la mise en place de lâchers périodiques de plus en plus rapides. Par ailleurs, il est important de remarquer que le pic fréquentiel des calculs  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$  et  $c_{min} = 1,57 \text{ m/s}$  est moins prononcé au niveau du puits 3. Pour ces simulations, le taux de vapeur des structures convectées s'amenuise rapidement, le rebond du collapse est moins marqué, et par conséquent, l'amplitude des oscillations de pression diminue.

Dans la zone de cavitation, les profils statistiques de la répartition du taux de vide et de vitesse permettent d'estimer la capacité des calculs à reproduire la topologie moyenne de l'écoulement ; les données sont rassemblées en figure 9.5. Bien que le tracé expérimental des vitesses présente des discontinuités, il est possible d'identifier une recirculation à proximité de la paroi, signature de la formation d'un jet rentrant. Ce phénomène est identifiable sur les puits 1 et 2 ; il témoigne de la présence d'un écoulement inverse qui remonte quasiment jusqu'au niveau du col et empêche l'extension de la poche attachée. En terme de moyenne, chaque calcul prévoit des profils de vitesse similaires, quelle que soit la valeur de  $c_{min}$ . En revanche, des différences apparaissent pour la répartition de vapeur ; l'augmentation de la vitesse minimale du son intensifie la fréquence des perturbations, les pulsations de la cavité attachée s'accroissent et le taux de vapeur des structures convectées s'amenuise.

Finalement, les modélisations avec les valeurs de  $c_{min}$  les plus élevées sont celles qui reproduisent au mieux la dynamique des phénomènes cavitants. Ces affirmations se vérifient à partir de l'analyse fréquentielle des mouvements oscillatoires et lors du tracé des grandeurs statistiques.

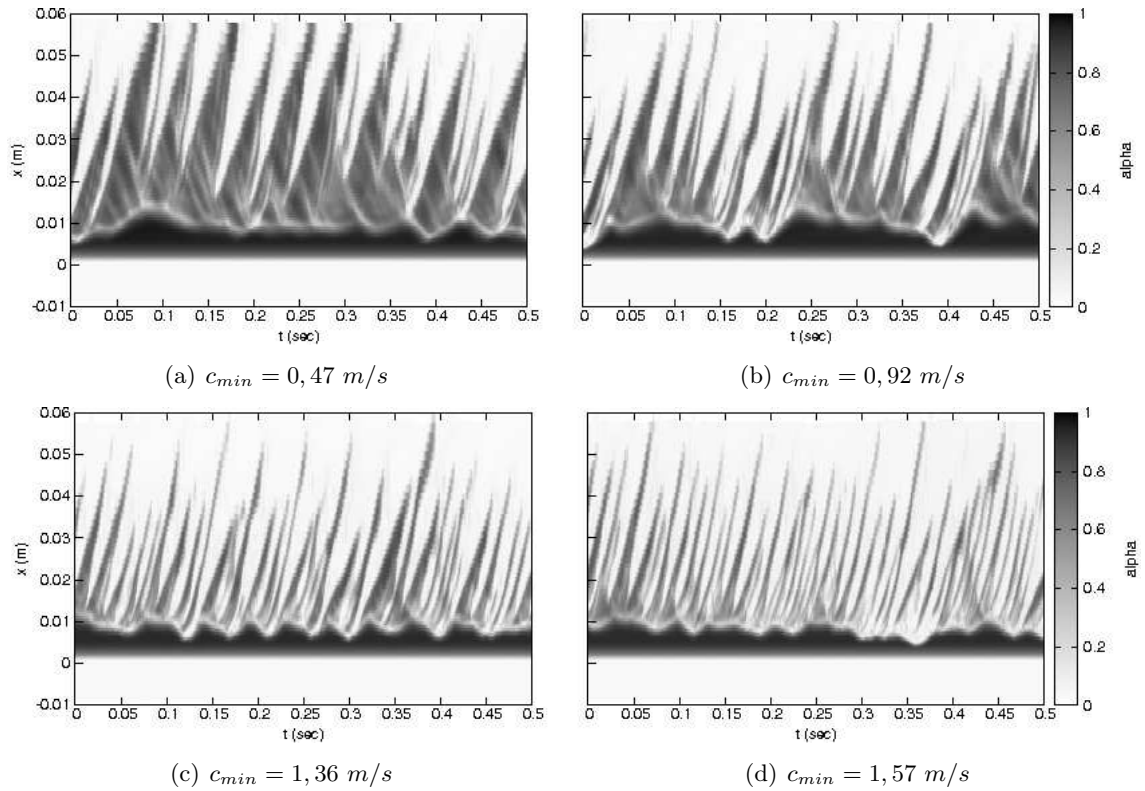


FIGURE 9.2 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps : augmentation de la fréquence des lâchers avec la vitesse minimale du son

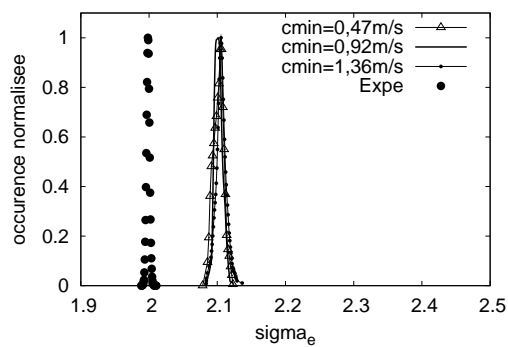
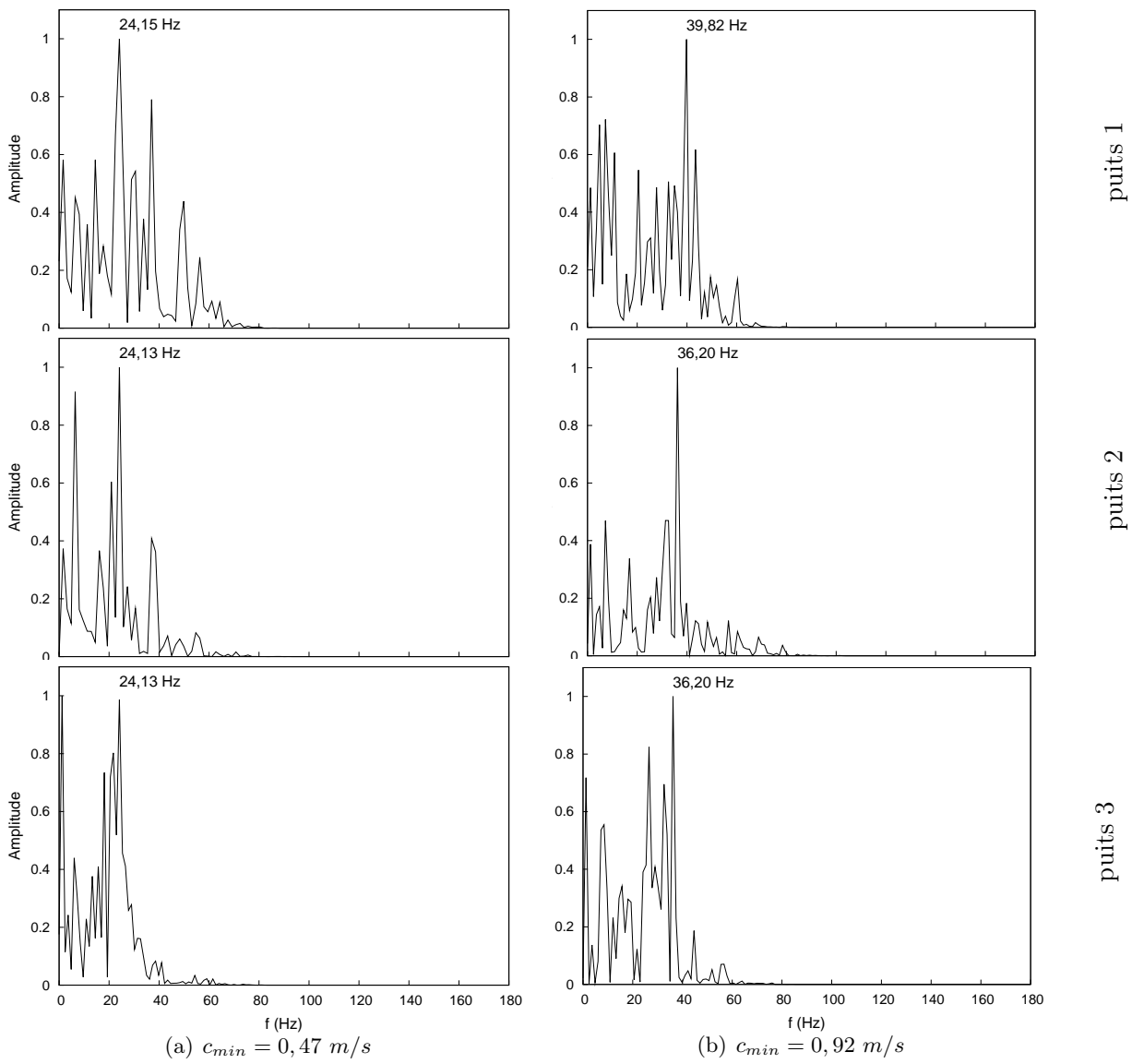


FIGURE 9.3 – Densité de probabilité du taux de cavitation à différentes vitesses minimales du son



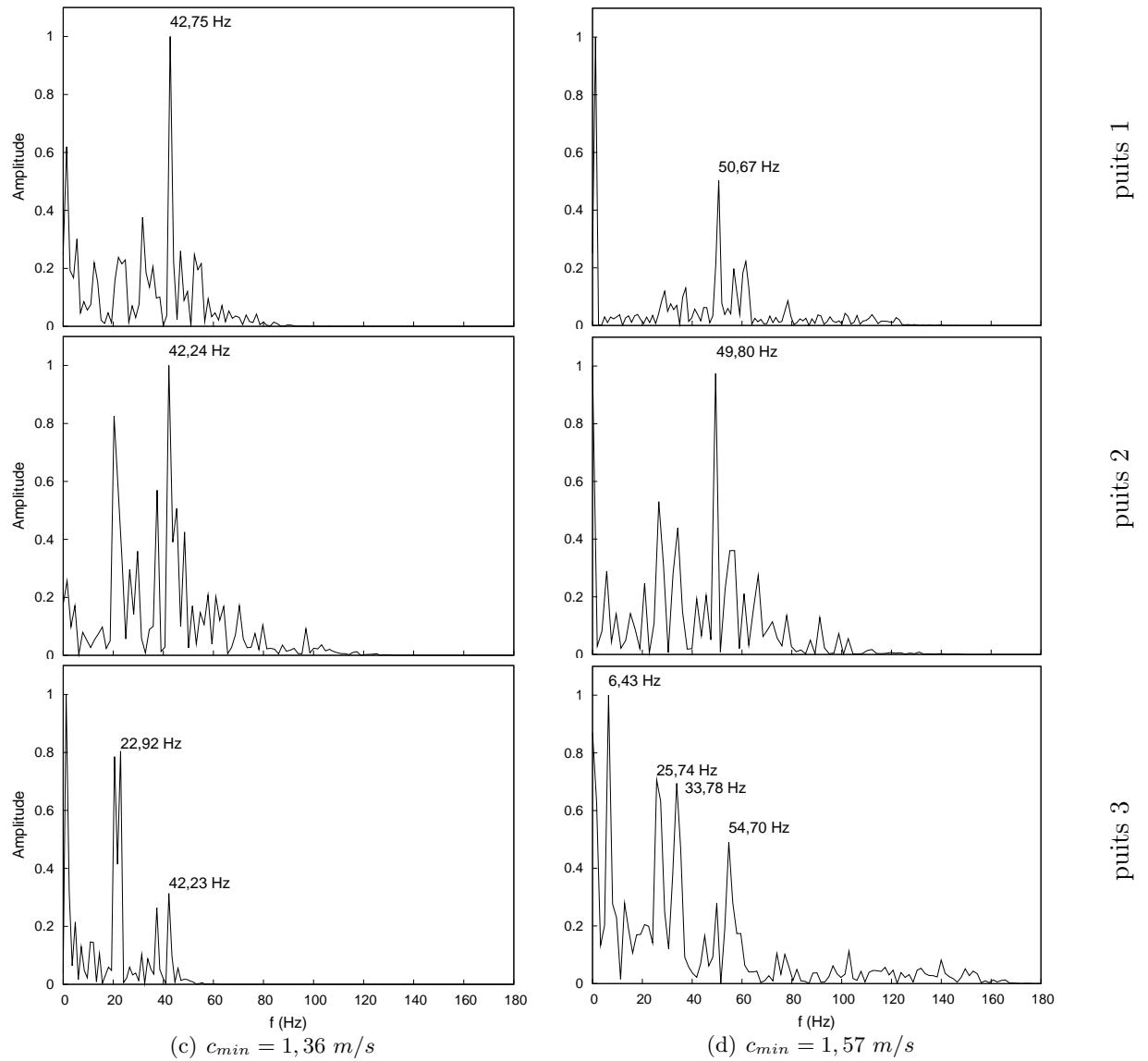


FIGURE 9.4 – Comparaison des spectres fréquentiels aux puits 1 à 3 à différentes vitesses minimales du son

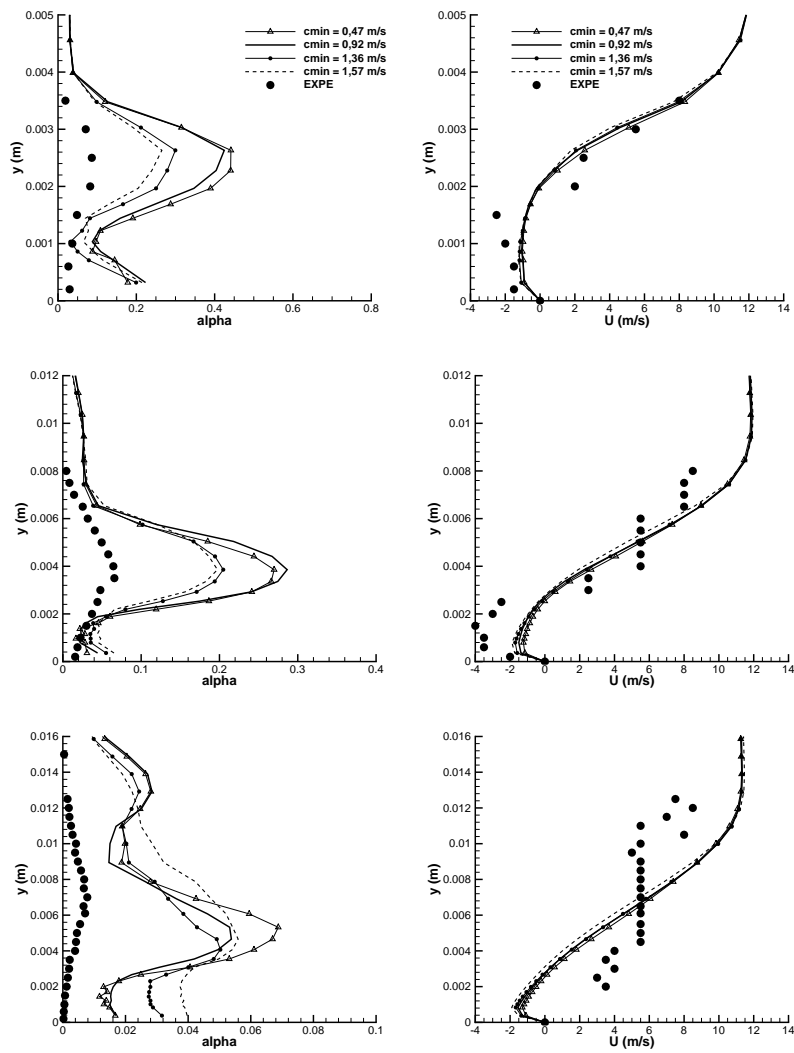


FIGURE 9.5 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes aux trois puits de mesure : étude de l’influence de la vitesse minimale du son

### 9.3.2 Champ moyen de pression statique et fluctuante

D'un point de vue théorique, les variations de la vitesse minimale du son modifient la loi d'état sinusoïdale qui pilote le calcul des pressions dans le mélange. En effet, plus la valeur de  $c_{min}$  augmente, plus la plage des pressions sur laquelle le modèle de cavitation est activé s'élargie. Si le paragraphe précédent a su montrer que ces ajustements modifiaient la dynamique instantanée de la poche, les profils moyens ne sont cependant pas modifiés. La figure 9.6 témoigne, en effet, d'un taux d'oscillations identique d'un calcul à l'autre. Dans l'ensemble, l'abscisse du début de la re-compression est globalement bien estimée mais le taux de re-compression à l'aval de la poche est à chaque fois sous-évalué. En ce qui concerne les fluctuations de pression, expériences et simulations s'accordent à positionner le maximum des perturbations au niveau de la zone de re-compression, mais les calculs ont tendance à augmenter l'amplitude des fluctuations. Il est difficile de juger si cette surestimation est réelle ou si elle est évaluée par rapport à un nombre de points expérimentaux trop faibles qui ne permettent pas de capter la présence de maximums locaux.

Le tracé des fonctions de densité de probabilité de la pression pariétale aux trois premiers puits de mesure fournit d'avantage d'information quant à la répartition des pressions. Au puits 1, situé juste à l'aval de la partie attachée de la poche, l'amplitude des oscillations est faible et la répartition s'opère de façon quasi-symétrique autour de la pression moyenne. Ce comportement est globalement bien reproduit par les simulations qui présentent une plage de répartition d'un ordre de grandeur comparable à l'expérience. Au deuxième puits, l'expérience prévoit une répartition quasi gaussienne autour de la pression moyenne, alors que les calculs ont tendance à surestimer les basses pressions. Au puits 3, les fluctuations de pression causées par la convection des structures et la propagation d'ondes de collapse, sont plus marquées. Par conséquent, le tracé expérimental présente une répartition plus large des pressions. La croissance de ces agitations, par rapport aux puits amonts, est bien reproduit par les calculs mais l'amplitude des oscillations est largement surestimée par rapport à l'expérience.

Ces analyses renseignent sur l'évolution des pressions le long de la ligne d'écoulement cavitant mais il convient de rester prudent lors des interprétations statistiques. Les résultats numériques sont, en effet, obtenus au bout d'un temps de calcul de quatre secondes et sont mis en parallèle avec des résultats expérimentaux dont le temps de mesure atteint des valeurs presque cent fois supérieures.



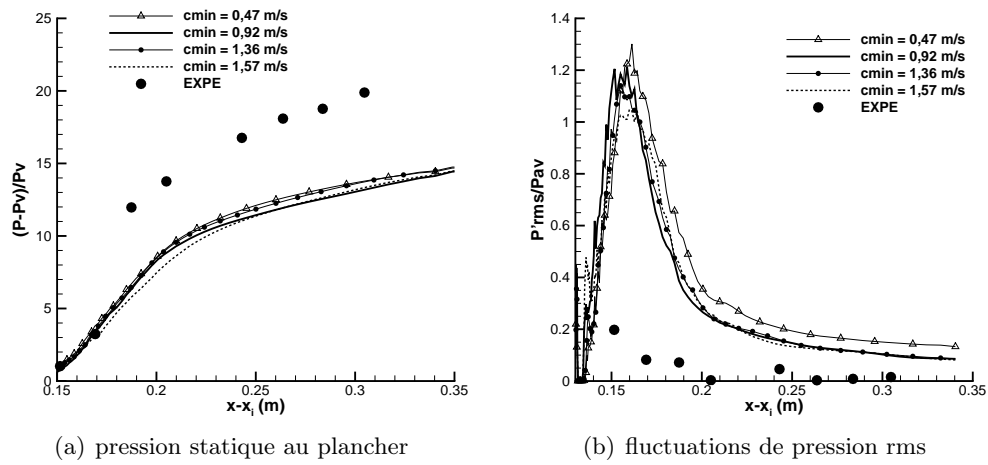


FIGURE 9.6 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence de la vitesse minimale du son

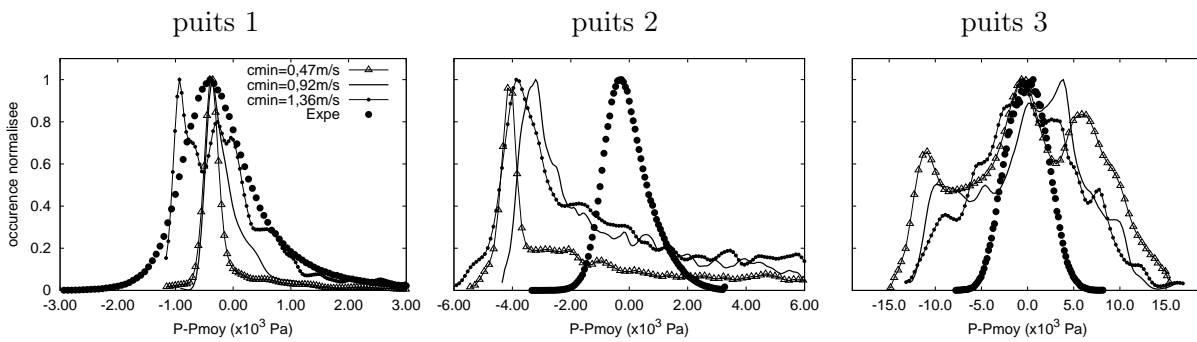


FIGURE 9.7 – Répartition du champ de pression aux puits 1 à 3

### 9.3.3 Modèle avec équation d'état de mélange des gaz raides

#### 9.3.3.1 Présentation

L'étude de la modélisation des phénomènes cavitants est prolongée en présentant les résultats obtenus avec un modèle à 4-équations fermé, dans le mélange, par une équation d'état des gaz raides (stiffened gas : *SG*). Les calculs sont couplés à un modèle de turbulence  $k - \ell$  et comparés aux résultats d'un modèle avec loi d'état sinusoïdale. Ce dernier est calibré avec une vitesse minimale du son  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$ ; le paramétrage des deux simulations est résumé dans le tableau 9.2.

TABLE 9.2 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 8° : modèle sinusoïdal et modèle gaz raides

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t \times 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Rebond	$c_{min} \text{ (m/s)}$
$c_{min} = 1.36 \text{ m/s}$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$k - \ell$	$n = 10$	1.36
SG	2.1	$Prd = 0.9981$	0.1	0.02	4-eqt gaz raides	$k - \ell$	$n = 10$	$\emptyset$

#### 9.3.3.2 Dynamique de la poche de cavitation

La représentation spatio-temporelle du taux de vide maximal au sein de la veine est illustrée en figure 9.8. Par comparaison au modèle sinusoïdal, le modèle de mélange des gaz raides présente une

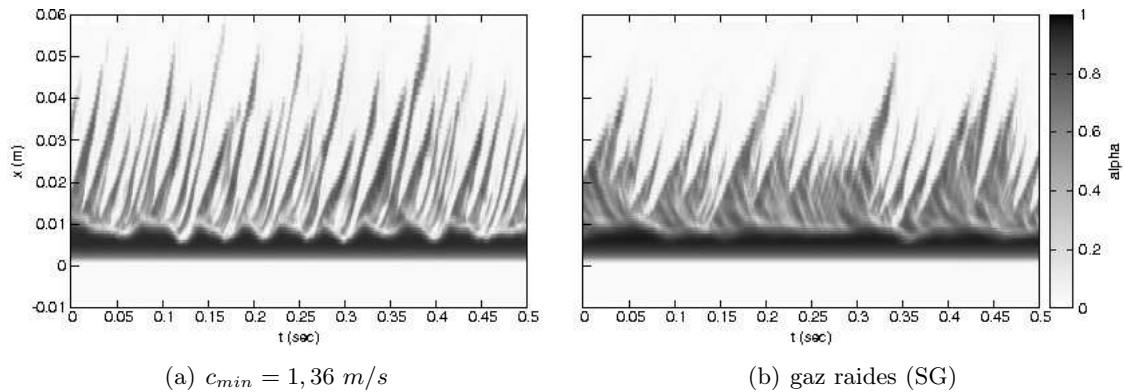


FIGURE 9.8 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps. Comparaison entre modèle sinusoïdal et modèle gaz raides

poche attachée moins soumise aux perturbations de l'écoulement et qui conserve une longueur constante. Cette tendance est quantifiable en mesurant le taux de vide moyen au niveau du puits 1 (voir figure 9.10). La partie stable de la poche maintient le taux de vapeur local à des valeurs moyennes supérieures à celles du modèle sinusoïdal. La taille des structures convectées est également modifiée par le choix du modèle de cavitation. Elles sont plus importantes en modèle

de mélange des gaz raides mais se condensent plus rapidement. Ce phénomène peut s'expliquer à partir de la formulation de l'équation d'état qui restreint la plage d'activation du modèle de cavitation par rapport à une loi sinusoïdale. La diminution plus rapide de la quantité de vapeur le long de l'écoulement, se confirme avec le tracé du taux de vide moyen en figure 9.10 : pour le modèle de mélange des gaz raides, la quantité de vapeur est dans un premier temps surestimée au niveau du puits 2 avant de retrouver des valeurs comparables à l'expérience au niveau du puits 3. Concernant le phénomène cyclique d'arrachement et de convection des structures diphasiques, celui-ci s'établit à une fréquence légèrement inférieure à celle relevée expérimentalement. Cette tendance est mesurée par le tracé des spectres fréquentiels de pression en figure 9.9 où les modes principaux des puits 1 et 2 avoisinent les  $40 \text{ Hz}$ . Sur cette figure, seuls les deux premiers puits permettent de relever correctement les agitations liées au phénomène cavitant ; au puits 3 les structures de vapeur se raréfient et leur collapse n'impacte quasiment plus le champ de pression locale.

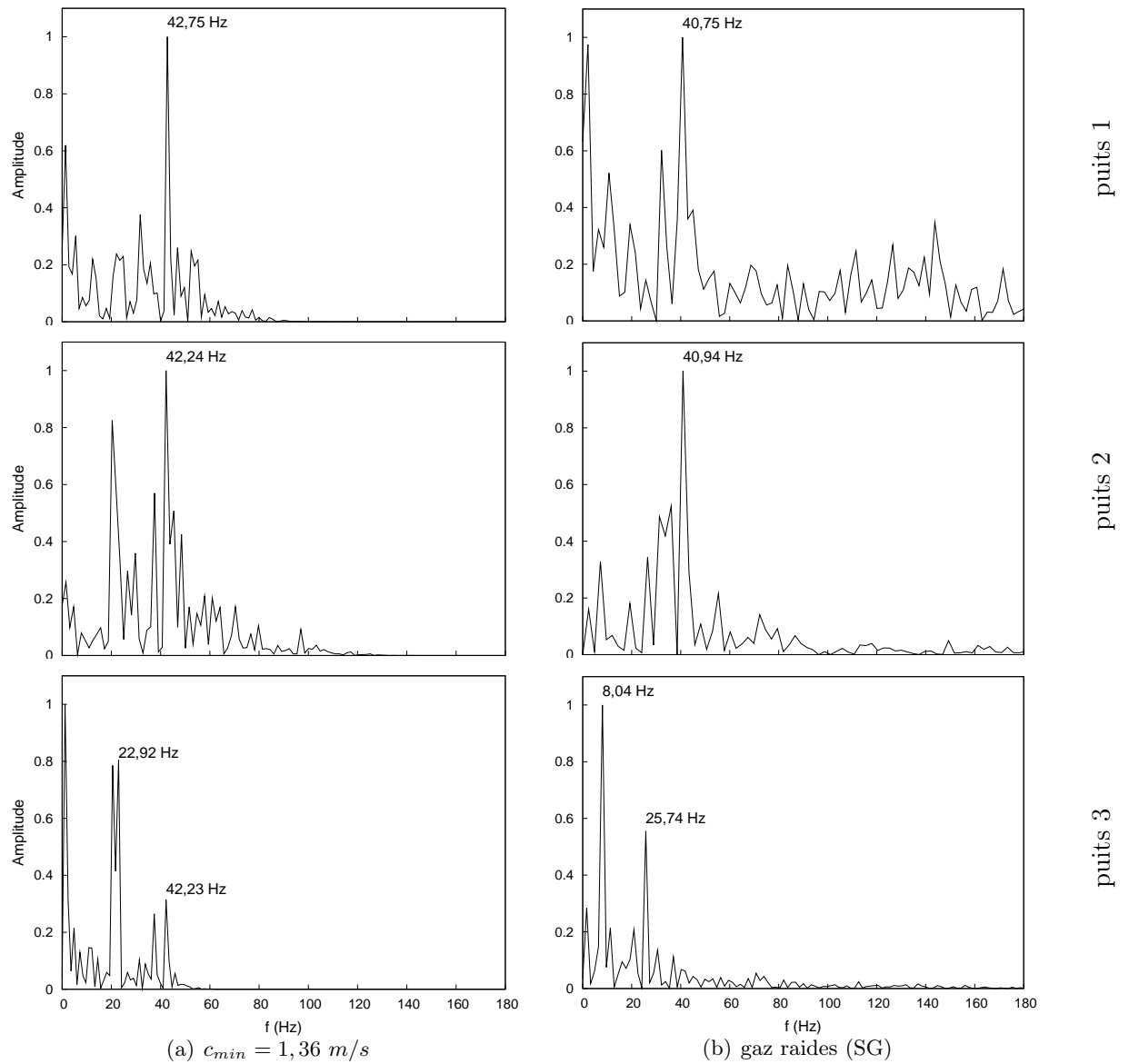


FIGURE 9.9 – Comparaison des spectres fréquentiels aux puits 1 à 3 en modèle sinusoïdal :  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$  et en modèle de mélange des gaz raides

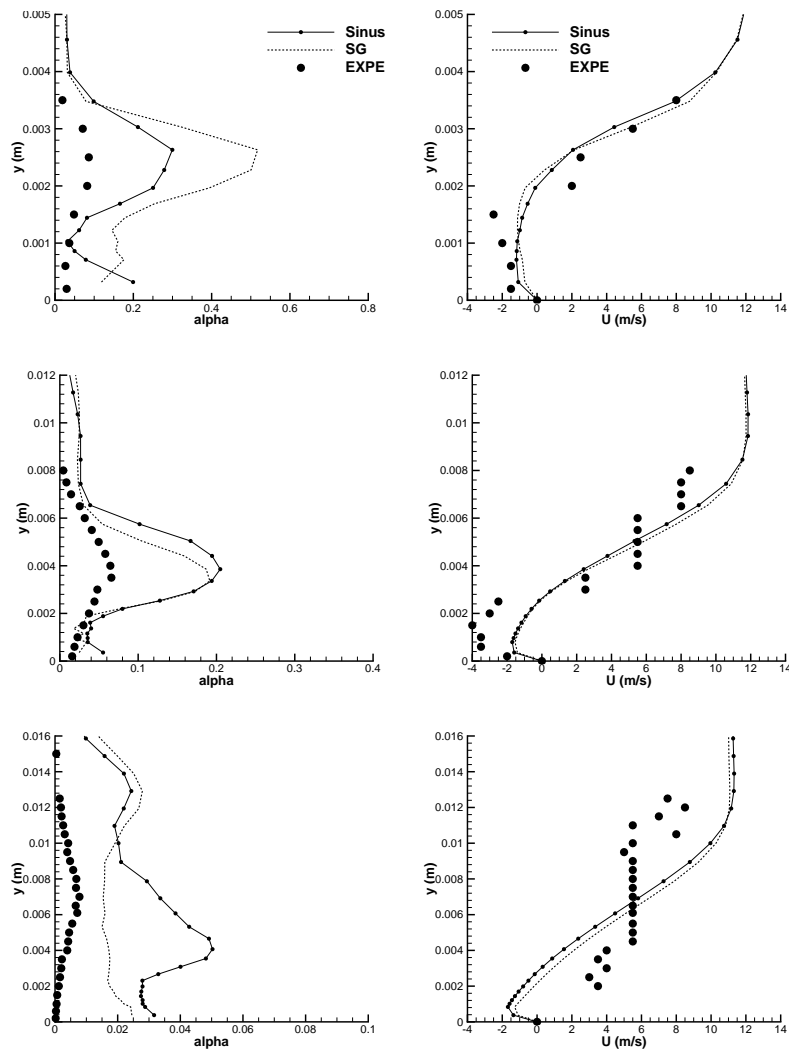


FIGURE 9.10 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 3 (haut en bas) : étude de l'influence du modèle de cavitation

### 9.3.3.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

La capacité des deux modèles de cavitation à reproduire les champs moyens de pression statique et fluctuante est évaluée en figure 9.11. Le modèle de mélange des gaz raides a tendance à améliorer le taux de re-compression en aval de la poche, même si les valeurs demeurent inférieures au cas expérimental. En mélange des gaz raides, la formulation de la pression impose une re-compression plus rapide lorsque le taux de vide diminue, la nature de l'équation d'état accélère ainsi la vitesse de condensation des structures et augmente les valeurs du champ de pression statique. En revanche, en ce qui concerne les fluctuations de pression, l'amplitude des oscillations ne varie quasiment pas d'un modèle à l'autre ; seule une diminution plus rapide de ces fluctuations apparaît en modèle de mélange des gaz raides. Cette différence est à mettre en lien avec les écarts observés sur les profils de re-compression.

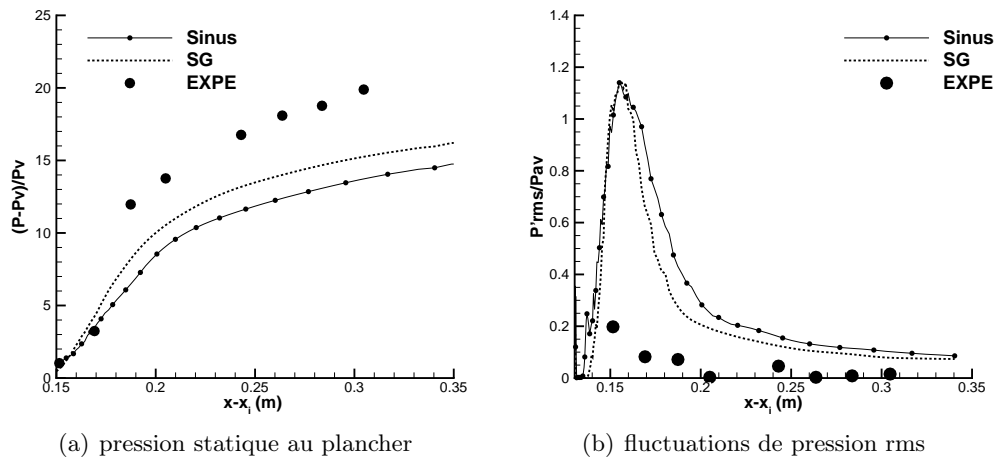


FIGURE 9.11 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence de la vitesse minimale du son

### 9.3.4 Conclusion partielle

Cette partie étudie l'influence du modèle de cavitation sur l'écoulement instable d'une géométrie de Venturi 8°. La fermeture thermodynamique par une loi d'état sinusoïdale nécessite de calibrer la valeur de la vitesse minimale du son. D'après les résultats, l'augmentation de la vitesse de propagation des perturbations accélère la fréquence des lâchers de structures de vapeur et les valeurs expérimentales d'environ 50 Hz sont approchées uniquement pour le paramètre le plus élevé de  $c_{min} = 1,57$  m/s. Néanmoins, dans ce cas, la taille des nuages diminue et leurs collapsus ne provoquent pas de perturbations au-delà de la troisième station de mesure. C'est pourquoi, par la suite, le calcul réalisé en valeur de  $c_{min} = 1,36$  m/s sera retenu comme cas de référence. En ce qui concerne les grandeurs moyennes, l'augmentation de  $c_{min}$  n'engendre pas de différences significatives ; le champ de vitesse moyenne demeure identique pour chaque calcul et la diminution

---

de la taille des structures convectées est compensée par l'augmentation du nombre de lâchers. Le tracé des champs de pression au niveau du plancher permet d'approfondir la comparaison entre expériences et simulations. Les instationnarités de l'écoulement sont quantifiées à l'aide des fluctuations de pression. Les modèles positionnent le maximum dans la zone de condensation, en bon accord avec l'expérience, mais ont tendance à amplifier les oscillations et à sous-estimer la re-compression à l'aval du col. La seconde partie de l'étude introduit le cas d'un modèle de cavitation fermé par une équation d'état de mélange des gaz raides ; cette équation s'obtient de façon analytique et n'incorpore pas d'effets de déséquilibre sur les pressions. Par conséquent, les simulations présentent une re-compression plus élevée à l'aval de la poche, qui se traduit par la convection de structures de vapeur sur des distances plus courtes qu'avec un modèle couplé à une loi d'état sinusoïdale.

## 9.4 Etude du phénomène de propagation d'ondes de pression

Les instationnarités de l'écoulement cavitant sur Venturi 8° se manifestent par l'arrachement de structures diphasiques. Pour expliquer ces instabilités, plusieurs mécanismes ont été identifiés par les études expérimentales. Le décollement de la couche limite à l'aval du col engendre, en régime cavitant, la formation d'une recirculation qui empêche l'extension d'une poche attachée. Plus en aval, le collapse des structures de vapeur génère des variations de pression dont la propagation d'ondes participe à la déstabilisation de la partie amont de la poche. Dans l'optique d'apporter des éléments de réponse sur les évolutions du champ de pression en zone de cavitation, cette partie propose d'analyser plus en détail les instationnarités de l'écoulement.

### 9.4.1 Analyse qualitative de la propagation d'ondes

Une première étude, consiste à représenter les évolutions temporelles des champs de pression et de taux de vide. Ces visualisations sont illustrées en figure 9.12 sur une période de 50 *msec* qui correspond à la mise en place de deux cycles. A la fin du premier cycle, la condensation du nuage N provoque la formation de fronts de pression qui viennent impacter la zone de dépression amont. Ce phénomène est plus facilement identifiable en figure 9.13, où le temps d'observation est réduit à 10 *msec*; suite à la condensation du nuage de vapeur, le fluide se comprime et se dilate alternativement et des fronts de pression se forment à intervalles réguliers d'environ 2 *msec*. En figure 9.14, le pas de temps d'observation est réduit à 0,2 *msec* et il est désormais possible d'identifier la propagation d'un seul front aux instants  $t_i = 0,5 \text{ msec}$  et  $t_i = 0,8 \text{ msec}$ .

Bien que purement qualitatifs, ces post-traitements constituent un premier élément d'analyse pour l'identification des ondes de pression générées par le collapse des structures cavitantes.

### 9.4.2 Correlations entre puits

#### Cartes de corrélations

Les valeurs issues des calculs numériques permettent de tracer les fonctions de corrélations spatio-temporelles de la répartition de pression et de vapeur le long de la zone de cavitation. Les relevés sont pour cela effectués en disposant cinquante points de mesure sur une ligne de 6 *cm* de long placée à 2,5 *mm* de la paroi (voir partie 7.3.5.2). Les fonctions de corrélations fournissent plusieurs informations sur la dynamique de l'écoulement : tracées en fonction du taux de vide, elles renseignent sur les échelles spatiales et temporelles des structures de vapeur et leurs vitesses de convection ; tracées en fonction de la pression, elles permettent de discerner les phénomènes lents liés à la convection des poches diphasiques formées au centre des structures tourbillonnaires, des phénomènes rapides, liés à la propagation d'ondes. Les fonctions de corrélations  $R_p$  et  $R_\alpha$  mesurent respectivement les similitudes de la pression et du taux de vide relevés tous les  $\Delta t = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  entre chaque points espacés de  $\Delta x = 1,2 \text{ mm}$ . Elles sont représentées sur la figure 9.15 sous la forme d'iso-contours mesurés à la verticale des trois premiers puits. Les cartes de corrélations font part d'un phénomène convectif, lié au transport des structures de vapeur à environ 11 *m/s*, comparable à la vitesse débitante. Cependant, sur les cartes de pression, apparaît une seconde forme de corrélation représentée par des iso-contours verticaux qui s'intensifient à partir du puits 3. Cette forme de corrélations peut être interprétée comme la signature d'ondes de pression qui



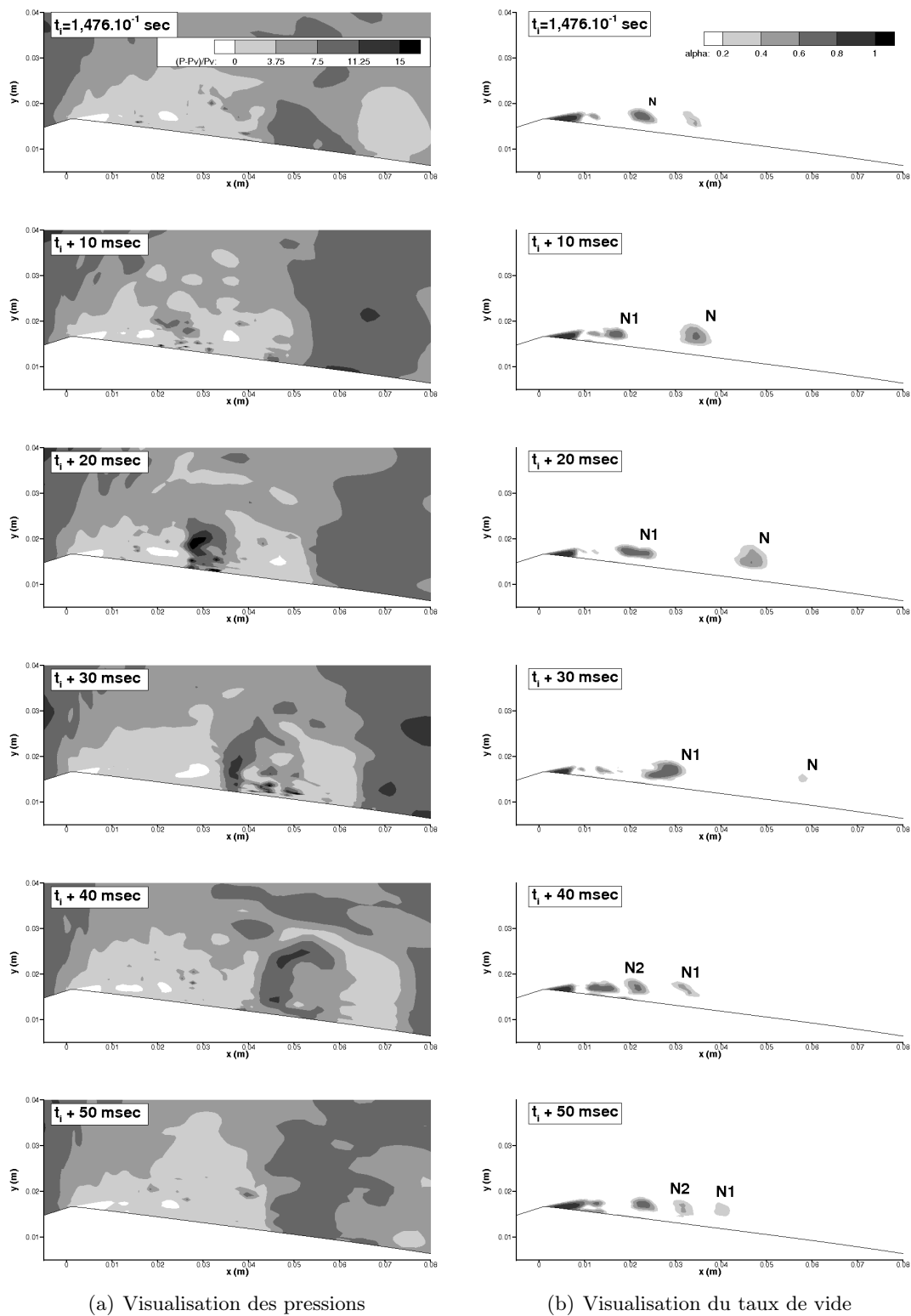
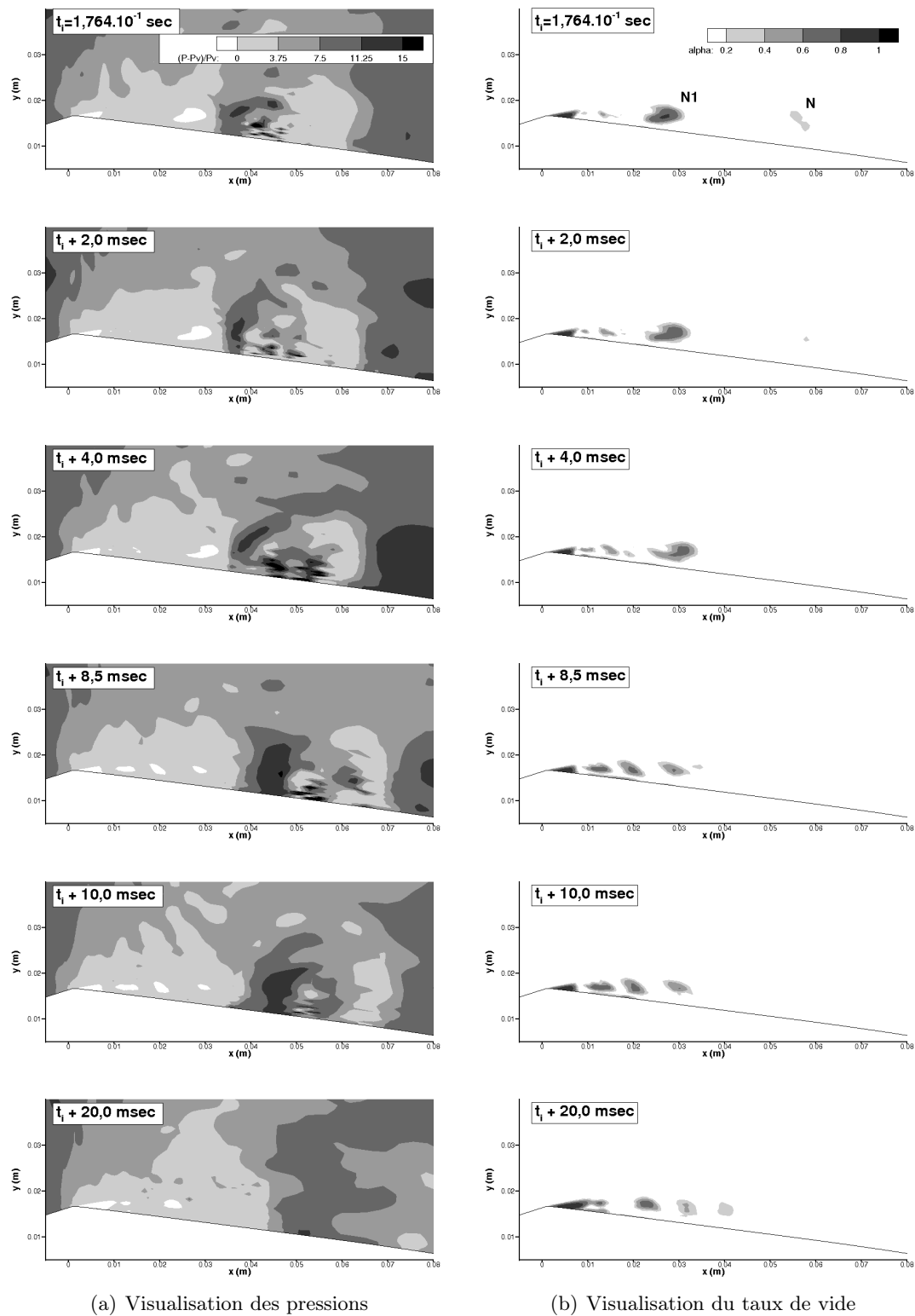


FIGURE 9.12 – Visualisation de la dynamique de poche. Temps entre deux images :  $\Delta t \sim 10$  msec

FIGURE 9.13 – Visualisation de la dynamique de poche. Temps entre deux images :  $\Delta t \sim 2 \text{ msec}$

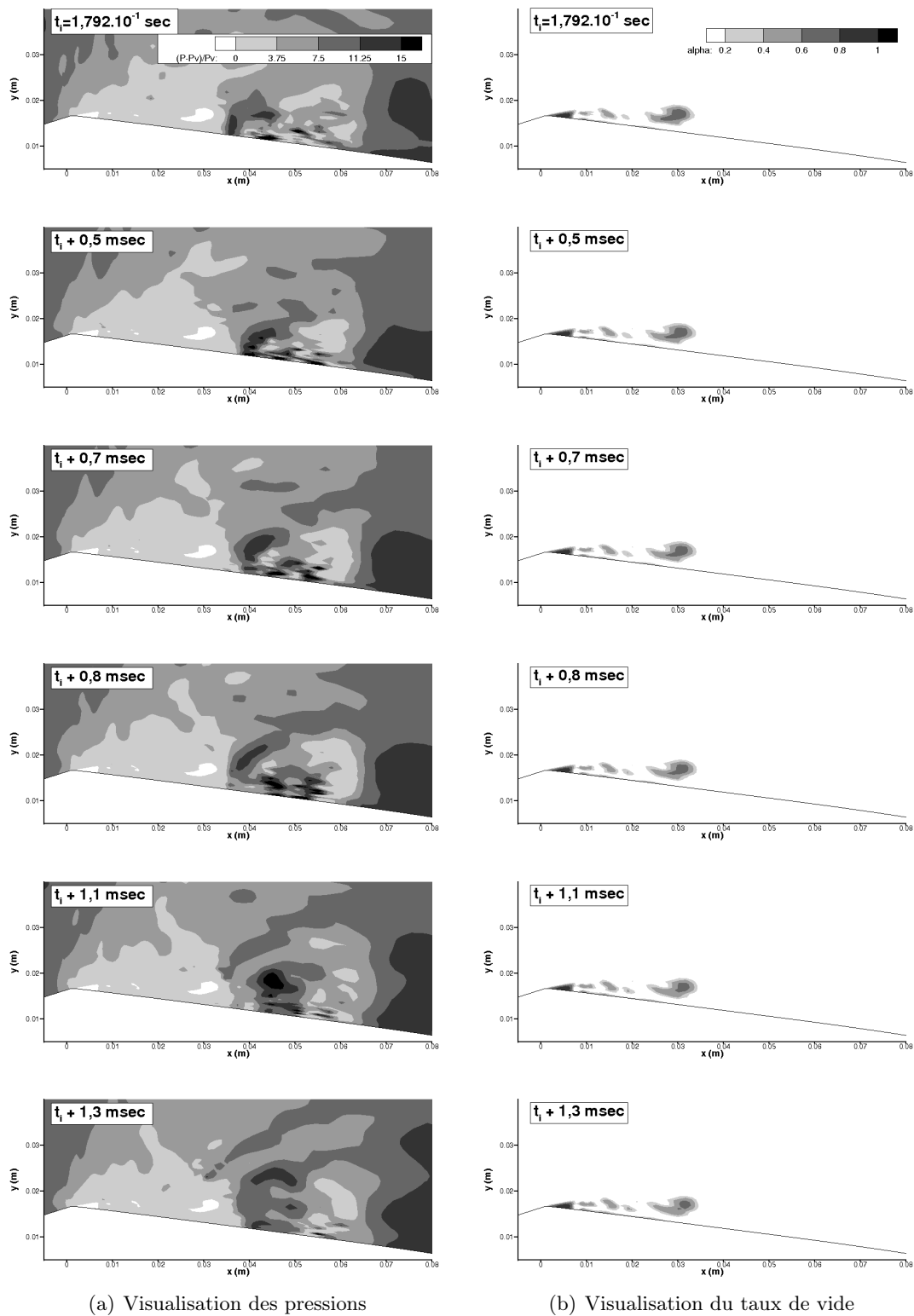


FIGURE 9.14 – Visualisation de la dynamique de poche. Temps entre deux images :  $\Delta t = 0.2$  msec

se propagent à grande vitesse dans toutes les directions de l'écoulement. Ces corrélations s'accroissent à l'aval du puits 3 (voir figure 9.16), là où se produit le collapse des structures de vapeur. La suite de l'analyse consiste à déterminer si ces phénomènes très rapides peuvent être interprétés comme une remontée d'information vers l'amont, auquel cas cette vitesse secondaire aurait une pente légèrement négative. Le pas de temps d'acquisition correspond, ici, à deux itérations de calcul, soit :  $\Delta t_{acquisition} = 2 \times 4.0.10^{-5} = 8,0.10^{-5} \text{ sec}$ . La distance maximale sur laquelle les champs sont corrélés n'excède pas la valeur de  $\Delta x_{max} = 0,015 \text{ m}$ ; en supposant que les perturbations sont transmises au sein du liquide à la célérité de  $c_{liq} = 110,708 \text{ m/s}$ , l'onde parcourt la distance  $\Delta x_{max}$  en  $\Delta t_{parcours} = \frac{0,015}{110,708} = 13,5.10^{-5} \text{ sec}$ , ce qui reste de l'ordre d'un  $\Delta t_{acquisition}$ . Autrement dit, la résolution temporelle permet, tout juste, d'obtenir une pente négative au sein des cartographies spatio-temporelles des pressions; sans pour autant offrir la possibilité de zoomer d'avantage sur le phénomène. Ce raisonnement peut servir d'explication à la forme quasi verticale des corrélations secondaires, dans le cas où celles-ci seraient associées à la propagation d'une perturbation au sein du liquide. L'étude est étendue en proposant, en figure 9.17, une cartographie des corrélations lorsque le paramètre de la vitesse du son est réduit à  $c_{min} = 0,47 \text{ m/s}$ . Comparée au cas précédent, la tache de corrélations est plus large en temps ce qui signifie que la dynamique de convection est plus lente pour ce calcul. Ces observations confirment les différences constatées en partie 9.3.1 sur la visualisation des dynamiques de poche en figure 9.2.

### Courbes de corrélations

Les cartographies précédentes donnent un aperçu des corrélations de pression et de taux de vide au sein de l'écoulement sans pour autant proposer d'équivalent expérimental. Elles offrent simplement une interprétation qualitative de la dynamique instantanée de l'écoulement. Expérimentalement, une étude des corrélations sur Venturi 8° a néanmoins été réalisée en traçant les courbes de corrélations croisées entre les signaux de pression pariétale des trois premiers puits et le signal d'entrée. Les résultats d'essai sont présentés en figure 9.18; chaque corrélation croisée présente, au puits  $i$ , un temps optimal  $\tau E_i$  négatif qui signifie que le puits amont est déphasé du signal aval d'un temps égal à  $\tau E_i$ . Autrement dit, certaines oscillations de pression remontent l'écoulement et sont perçues en entrée avec un temps de retard égal à  $\tau E_i$ . Il est intéressant de constater une hiérarchisation du temps  $\tau E_3$  par rapport aux temps  $\tau E_2$  et  $\tau E_1$  qui confirme le sens de propagation de l'amont vers l'aval. En ce qui concerne les corrélations croisées des signaux numériques, le temps de calcul est largement inférieur à la période d'essai expérimentale. Par conséquent, la convergence des mesures statistiques est limitée et le pic du temps optimal de corrélation est moins prononcée. Néanmoins, en se fiant aux résultats de la figure 9.18, les corrélations croisées numériques présentent elles aussi un déphasage négatif avec des temps de décalage de l'ordre de grandeur des cas expérimentaux. En conclusion, même si ces observations ne permettent pas d'affirmer, avec certitude, de la reproduction du phénomène observé en expérience, elles fournissent un élément supplémentaire quant à la théorie de la propagation d'ondes de pression consécutive au collapse des structures diphasiques.

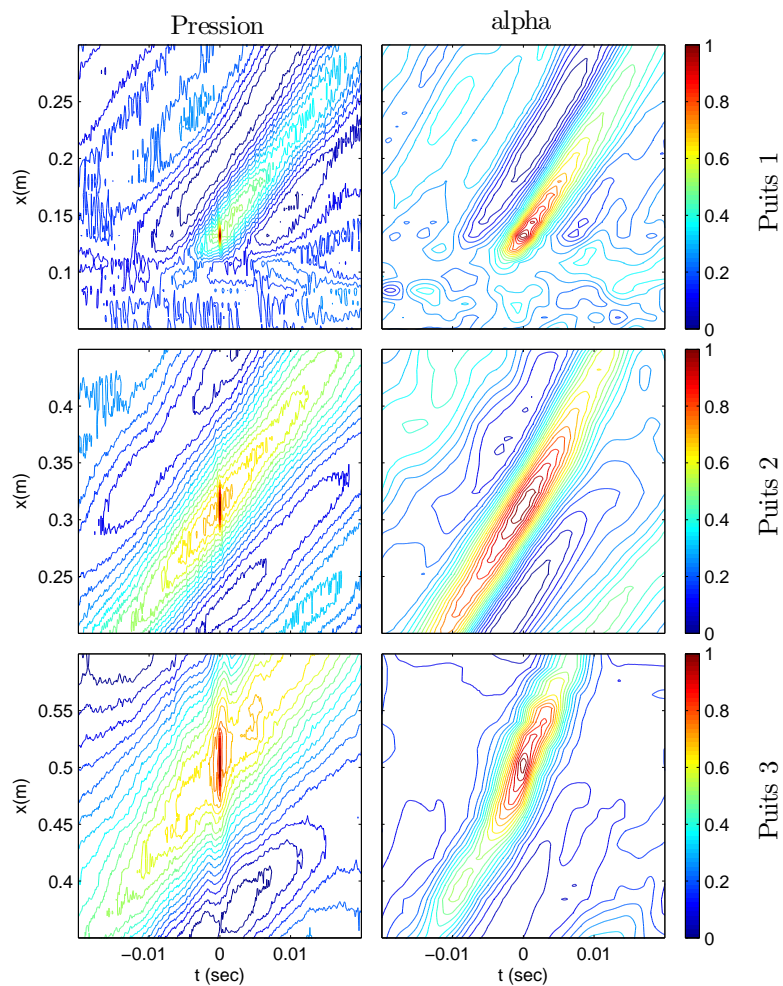


FIGURE 9.15 – Correlation des pressions et taux de vide aux trois puits : calcul pour un modèle sinusoïdal  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$  ; discrétisation des fonctions de corrélations : ( $\Delta t = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  ;  $\Delta x = 1,2 \text{ mm}$ )

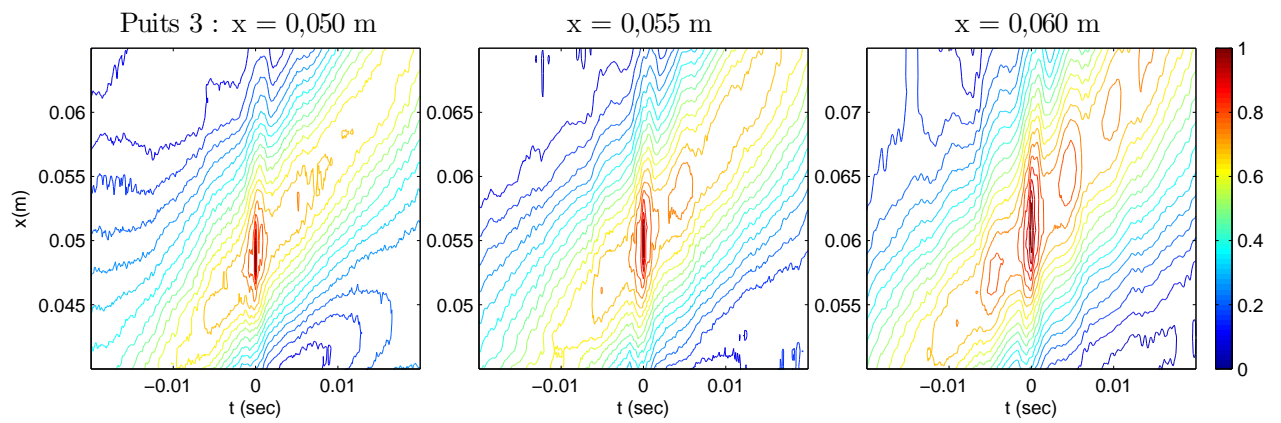


FIGURE 9.16 – Identification du phénomène rapide à l’aval du puits 3 : calcul pour un modèle sinusoïdal  $c_{min} = 1,36$  m/s ; discrétisation des fonctions de corrélations : ( $\Delta t = 4,0 \cdot 10^{-5}$  s ;  $\Delta x = 1,2$  mm)

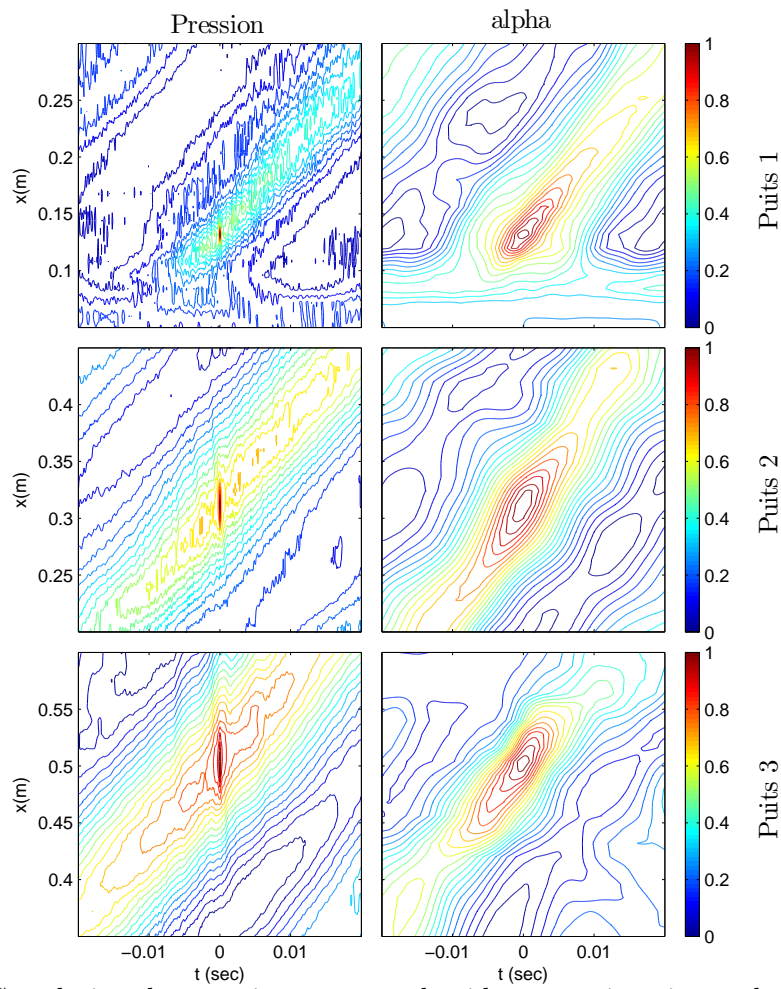


FIGURE 9.17 – Correlation des pressions et taux de vide aux trois puits : calcul pour un modèle sinusoïdal  $c_{min} = 0,47 \text{ m/s}$ ; discrétisation des fonctions de corrélations : ( $\Delta t = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ ;  $\Delta x = 1,2 \text{ mm}$ )

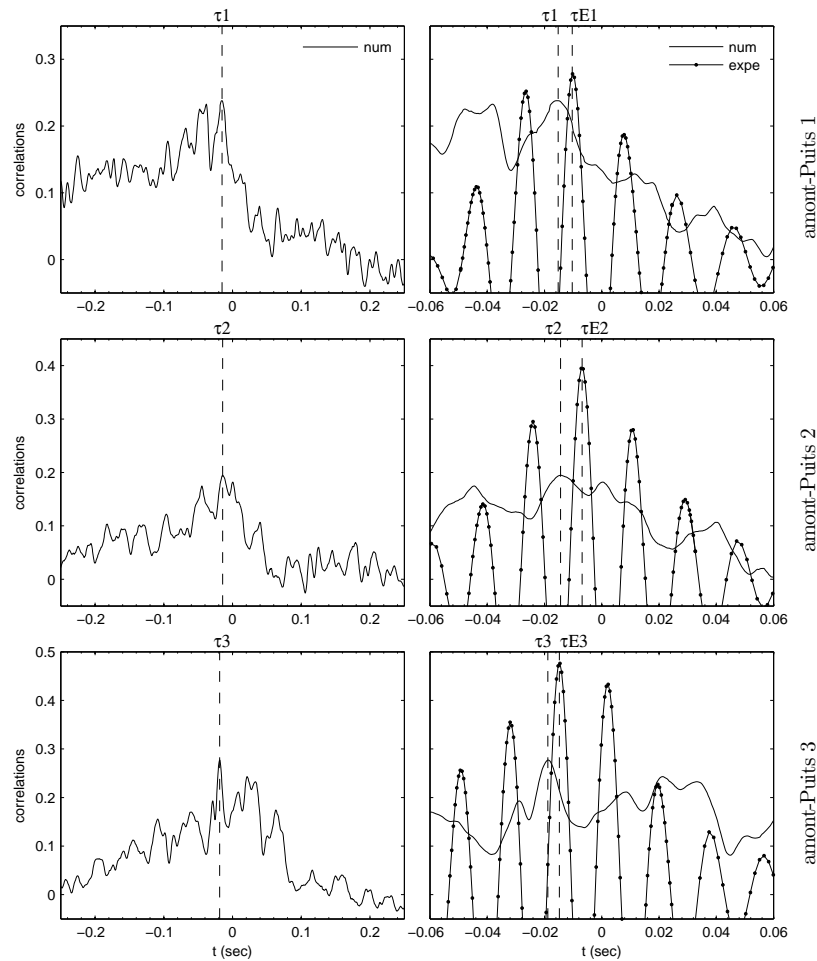


FIGURE 9.18 – Correlation entre puits amont et puits  $i$  :  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$

### 9.4.3 Conclusion partielle

Une analyse numérique des évolutions de pression est menée, dans la zone de cavitation, dans l'optique d'identifier les instationnarités de l'écoulement générées par le collapse des structures diphasiques. Dans un premier temps, cette étude est réalisée en représentant le champ de pression au sein de la veine à différents pas de temps. Ces visualisations illustrent, de façon qualitative, la formation d'ondes de sur-pression, diffusées dans toutes les directions et qui viennent impacter la région diphasique. Afin d'observer plus clairement la propagation de ces discontinuités, les fonctions de corrélations des signaux de pression sont dans un deuxième temps tracées à proximité de la zone de collapse. Elles mettent en avant la présence d'un phénomène convectif, lié au décrochement d'un nuage vapeur, et des corrélations plus rapides qui peuvent être interprétées comme la propagation d'une discontinuité dans un milieu quasi-liquide. Enfin, dans l'optique d'étudier les correspondances entre signaux de pression, les corrélations entre puits sont tracées



---

à partir des signaux bruts de pression expérimentale ; ils mettent en avant un déphasage négatif par rapport au signal d'entrée qui témoigne d'une remontée d'information dans l'écoulement. Ces courbes de corrélations sont ensuite comparées à celles issues des simulations ; bien que le temps d'analyse soit significativement plus court, les calculs numériques permettent également d'obtenir des temps optimaux de corrélations négatifs.

## 9.5 Relaxation thermodynamique de la masse volumique de la phase vapeur

Dans un modèle à 3-équations, chaque masse volumique phasique est fixée à sa valeur à l'équilibre à saturation. Néanmoins, l'ajout d'une équation de transport supplémentaire pour le calcul du taux de vide permet de relaxer l'équilibre thermodynamique en introduisant un état métastable pour la vapeur. La masse volumique de la phase vapeur est pour cela déterminée en fonction de l'équation d'état (4.3) des gaz raides. Ce raisonnement permet de reproduire une métastabilité sur l'ensemble de l'écoulement. Cependant, en pratique, les zones quasi liquides (où la pression de mélange  $p_m$  respecte l'inégalité  $p_m > P_{vap}$  pour le modèle de mélange des gaz raides ou  $p_m > P_{vap} + \Delta p_m$  dans le cas d'une loi d'état sinusoïdale) se distinguent des zones de cavitation (où  $p_m < P_{vap}$  ou  $p_m < P_{vap} + \Delta p_m$  en loi d'état sinusoïdale). Il est ainsi possible d'envisager quatre types de configuration selon les zones où les états métastables sont modélisés.

1. La masse volumique de la phase vapeur est fixée à sa valeur saturante pour l'ensemble de l'écoulement.
2. La masse volumique de la phase vapeur est relaxée en zones non cavitantes et fixée à sa valeur saturante en zones de cavitation.
3. La masse volumique de la phase vapeur est relaxée en zones de cavitation et fixée à sa valeur saturante en zones non cavitantes.
4. La masse volumique de la phase vapeur est relaxée dans toutes les zones de l'écoulement.

Jusqu'à maintenant, l'ensemble des calculs utilisait la configuration 2, où l'état métastable était appliqué uniquement aux zones non cavitantes. Afin d'étudier l'influence de ce paramétrage, cette partie présente, dans un premier temps, les résultats de simulations menées avec la configuration 1. Ces calculs ont été réalisés avec deux fermetures thermodynamique différentes : une loi d'état sinusoïdale puis une équation d'état de mélange des gaz raides. Dans un second temps, l'état métastable est introduit uniquement en zone de cavitation selon la configuration 3 avec un modèle à loi d'état sinusoïdale. Enfin, le cas numéro 4 n'a pas permis d'obtenir une solution stable en terme de résolution numérique.

### 9.5.1 Modèles relaxés en zones non cavitantes

#### 9.5.1.1 Présentation

Dans l'optique d'étudier l'effet de la relaxation thermodynamique de la phase vapeur en zone non cavitante, les calculs menés jusqu'ici peuvent être comparés aux résultats de simulations obtenus en fixant les masses volumiques à saturation dans l'ensemble de l'écoulement. Cette analyse revient donc à confronter les deux configurations qui suivent.

- $\rho_v = \frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v_v}T_m}$  dans les zones où  $p_m > P_{vap}$  (ou  $p_m > P_{vap} + \Delta p_m$  pour une loi d'état sinusoïdale) : configuration 2,
- $\rho_v = \rho_{sat}$  quelle que soit la zone de l'écoulement : configuration 1.

Les résultats sont comparés pour deux fermetures thermodynamiques et le paramétrage de chaque calcul est résumé dans le tableau 9.3.

TABLE 9.3 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 8° en modèles relaxés et à saturation

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 0.10^{-3} \text{ s}$	Modèle de cavitation	$\rho_v(p_m, T_m)$ si $p_m > P_{vap}$	$\rho_v(p_m, T_m)$ si $p_m < P_{vap}$
$\rho_v$ $c_{min} = 1.36 \text{ m/s}$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$\frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v,v}T_m}$	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$
$\rho_v = \rho_v^{sat}$ $c_{min} = 1.36 \text{ m/s}$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$
$\rho_v$ SG	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	gaz raides	$\frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v,v}T_m}$	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$
$\rho_v = \rho_v^{sat}$ SG	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	gaz raides	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$

### 9.5.1.2 Dynamique de la poche de cavitation

Les configurations de modèles récapitulées en tableau 9.3 simulent différentes dynamiques de poche dont les évolutions temporelles sont représentées en figure 9.19. Dans le cas d'une simulation avec loi d'état sinusoidale (figures 9.19(a) et 9.19(b)), la méthode de calcul de  $\rho_v$  ne modifie pas la périodicité des cycles de lâchers de nuages. Cependant, lorsque la masse volumique de la phase vapeur est fixée à saturation (figure 9.19(b)), l'écoulement a tendance à se stabiliser ; la partie attachée de la poche de cavitation n'oscille quasiment plus, les nuages sont arrachés à intervalles réguliers et le taux de vapeur de ces structures est inférieur à celui des modèles métastables. Lorsque le système est fermé par une équation d'état de mélange des gaz raides, le calcul avec une masse volumique fixée à saturation (figure 9.19(d)) présente lui aussi une dynamique de poche plus stable. Comparé à un calcul à densité de vapeur relaxée (figure 9.19(c)), le phénomène de cavitation est moins prononcé, la partie attachée de la poche est plus courte et génère des lâchers de micro-structures. Bien que chacun des quatre calculs présente des dynamiques d'écoulement différentes, le nombre de cavitation tracé en figure 9.20 ne varie quasiment pas d'un cas à un autre ; le calcul *sinus*  $\rho_v = \rho_v^{sat}$  modélise une cavitation établie et régulière avec un nombre de cavitation légèrement plus faible ; le calcul *SG*  $\rho_v = \rho_{sat}$  présente une cavitation très peu développée associée au nombre de cavitation le plus élevé.

En ce qui concerne les fluctuations de l'écoulement, le calcul à saturation pour une loi d'état sinusoidale présente, en figure 9.21(a), des fréquences légèrement inférieures à celles mesurées pour une densité de vapeur relaxée (voir figure 9.4(c)). Dans le cas d'un modèle de mélange des gaz raides, les résultats sont plus difficile à interpréter. En effet la taille réduite des structures convectées diminue l'amplitude des oscillations et altère les mesures aux différents puits. Les spectres fréquentiels de la figure 9.21(b) retranscrivent principalement les phénomènes basse fréquence de 24, 13 Hz, associés au collapse des plus grosses structures, générées à intervalles relativement espacés. Enfin, les profils moyens de la figure 9.22 apportent un complément d'information sur la topologie des différents écoulements. Les vitesses moyennes de chaque calcul reproduisent les recirculations proche paroi, caractéristiques de la formation d'un jet rentrant liquide. Les différences d'un calcul à l'autre concernent davantage la répartition du taux de vide ; les calculs menés pour des masses volumiques à saturation présentent, à chaque station, les fractions de vapeur moyenne les plus faibles et améliorent ainsi la prédiction par rapport aux tracés expérimentaux.

En résumé, les effets métastables modifient la reproduction des instationnarités en modélisant des

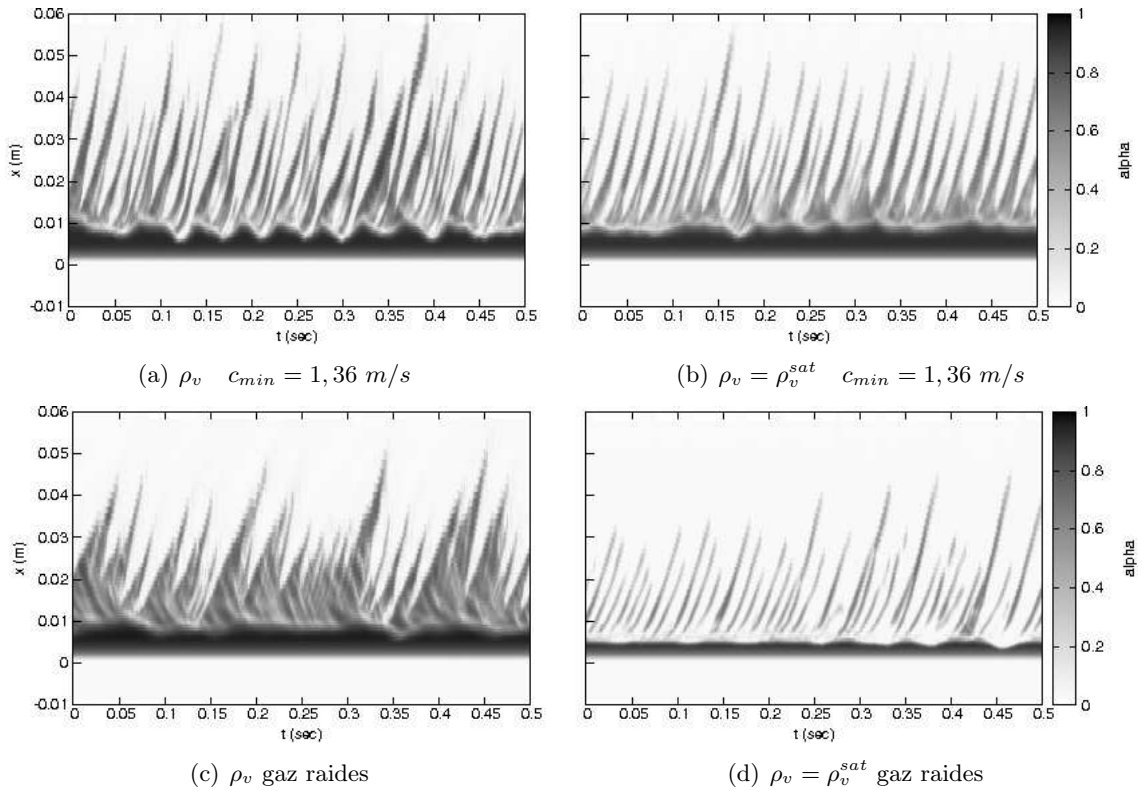


FIGURE 9.19 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps : stabilisation de la poche et régularité des lâchers pour les modèles à saturation

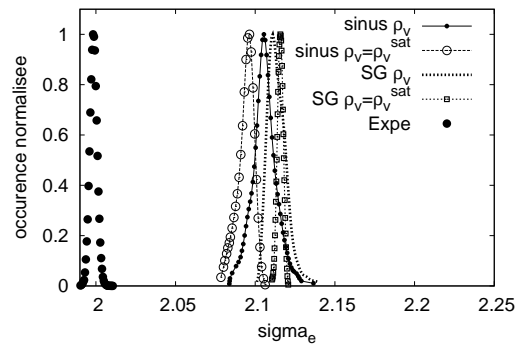


FIGURE 9.20 – Densité de probabilité du taux de cavitation pour des modèles relaxés ou à saturation

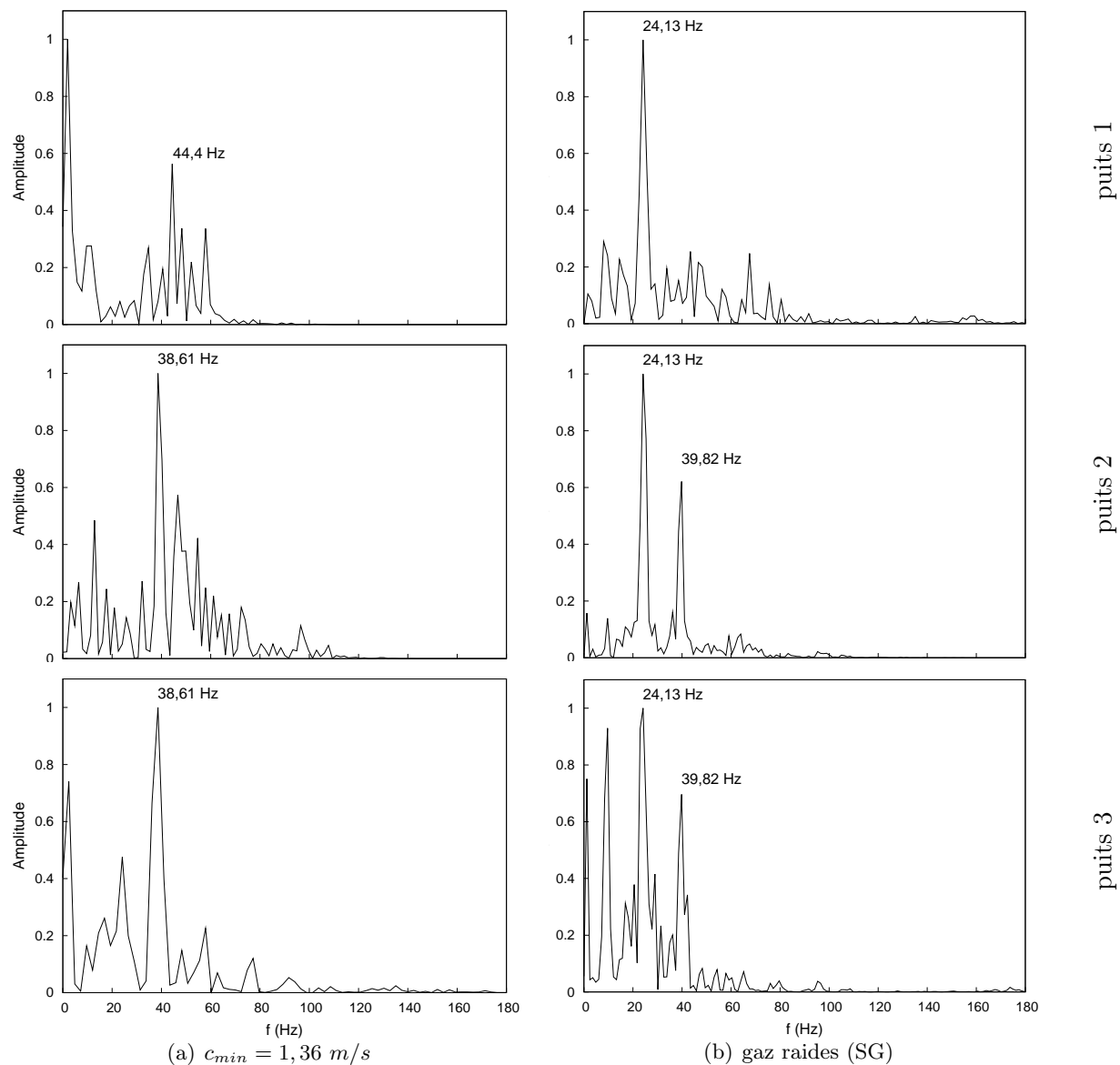


FIGURE 9.21 – Comparaison des spectres fréquentiels aux puits 1 à 3 en condition de saturation ( $\rho_v = \rho_v^{sat}$ ) avec modèle sinusoïdal  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$  et modèle de mélange des gaz raides : diminution de la fréquence par rapport aux modèles relaxés

phénomènes cavitant plus aléatoires et moins réguliers que dans le cas de valeurs à saturation. Néanmoins, cette modélisation surestime le taux de création de vapeur qui, en valeurs moyennes, dépasse les valeurs expérimentales.

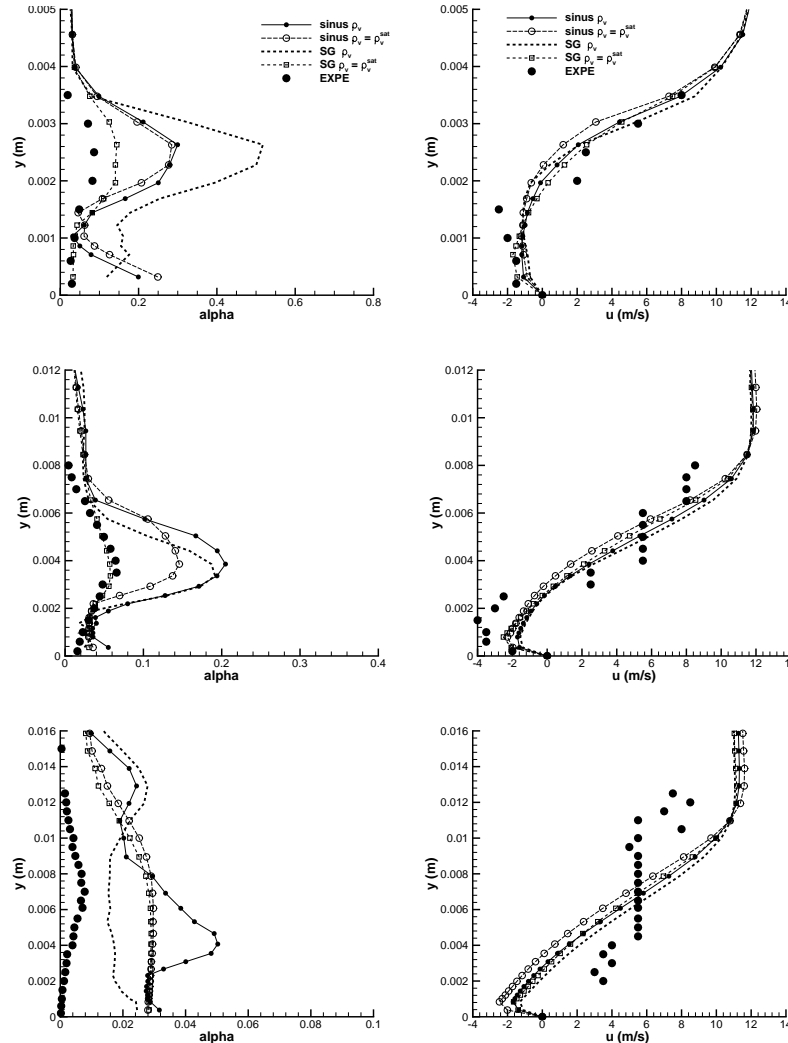


FIGURE 9.22 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes aux trois puits de mesure : étude de l'influence de la relaxation thermodynamique

### 9.5.1.3 Champ moyen des pressions statiques et fluctuantes

La pression moyenne statique et fluctuante est représentées en figure 9.23. Cette figure montre que deux simulations utilisant une même équation pour le calcul de la pression de mélange, c'est-à-dire soit une loi d'état sinusoidale, soit une équation de mélange des gaz raides, possèdent un taux de re-compression similaire alors que leur poche de cavitation présente pourtant des com-

portements différents. En figure 9.23(a), la re-compression des modèles avec loi d'état sinusoïdale, intervient plus tardivement dans l'écoulement ; cette tendance est due à la formulation de la loi d'état dont le lissage des pressions autour de la pression de vaporisation ralentit le phénomène de re-compression.

Le tracé des pressions fluctuantes en figure 9.23(b) compare la modélisation des agitations de l'écoulement des calculs avec, et sans, relaxation thermodynamique. Les masses volumiques fixées à leurs valeurs à saturation diminuent sensiblement le taux d'oscillation en zone de fermeture. Afin d'expliquer ces différences, il est intéressant de regarder la formulation de la vitesse du son

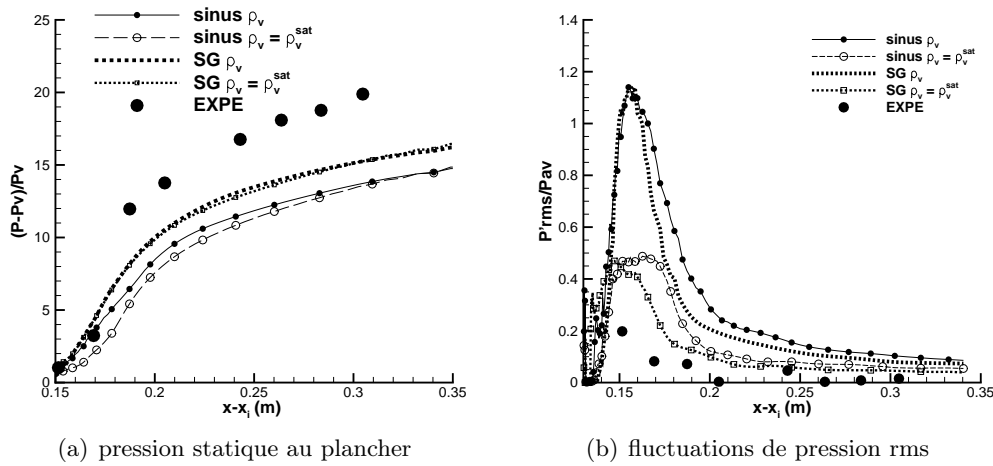


FIGURE 9.23 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence de la relaxation thermodynamique

sans transfert de masse. Celle-ci s'exprime selon la formulation de Wallis (4.24) rappelée ici :

$$\frac{1}{\rho_m c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l c_l^2}$$

où la masse volumique de la phase vapeur est fixée à la valeur constante de  $\rho_v^{sat}$  pour les calculs à saturation, et évolue selon l'équation (4.3) des gaz raides pour les calculs métastables. En supposant une évolution isotherme de l'écoulement, les variations de  $\rho_v$  dans le cas métastable, sont indexées sur celles de la pression. Les points expérimentaux de la figure 9.23(b) font part, dans la zone de re-compression, de fluctuations de pression de  $\pm 20\%$  autour de la valeur moyenne. Ces fluctuations engendrent des variations de  $\rho_v$  du même ordre de grandeur qui se traduisent, pour un même taux de vide, par un encadrement de la vitesse du son de  $\pm 15$  m/s par rapport à un calcul à saturation (voir figure 9.24). Ainsi, les calculs avec une masse volumique de la phase vapeur variable amplifient la vitesse de propagation des discontinuités et par conséquent, renforcent les oscillations de pression.

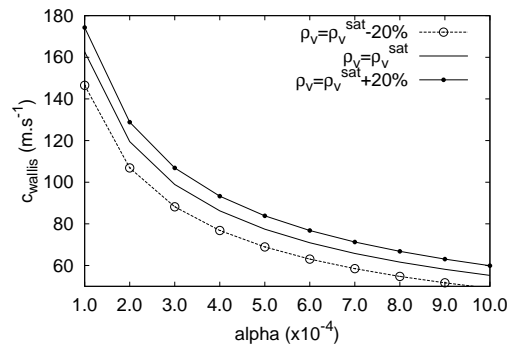


FIGURE 9.24 – Variation de  $c_{Wallis}$  en zone non cavitante : étude de l'influence des variations de la masse volumique de la phase vapeur

#### 9.5.1.4 Mesure des instationnarités de l'écoulement

L'étude du champ moyen des pressions fluctuantes a permis d'identifier un taux d'instationnarités plus important pour les simulations menées avec une masse volumique de vapeur variable. Dans l'optique de comparer les évolutions temporelles de simulations avec, et sans, effets métastables, des mesures sont réalisées au sein de la zone de cavitation. Celles-ci consistent à relever sur un espace temps, le taux de vide, le nombre de Mach et la pression statique en trois points, disposés entre les puits 2 et 3 à une distance de 2,5 mm de la paroi ; les résultats sont présentés dans le cas d'un modèle avec une loi d'état sinusoïdale.

La mesure du nombre de Mach en figure 9.25 renseigne sur l'intensité des perturbations au sein d'un fluide compressible. La relaxation de la masse volumique de la phase vapeur en zone non cavitante intensifie les variations de la vitesse du son et amplifie les oscillations du nombre de Mach ; celui-ci franchit, à plusieurs reprises, la zone sonique. En revanche lorsque les masses volumiques sont fixées à saturation, les oscillations sont moins prononcées ; elles surviennent à la suite du passage d'une structure cavitante et se cantonnent à des valeurs subsoniques. Dans la continuité de cette analyse, les mesures instantanées de la pression statique sont présentées en figure 9.26. Ces mesures accentuent les différences entre modèle métastable et modèle à saturation. Le passage d'une structure de vapeur perturbe localement l'écoulement et provoque, pour une densité de vapeur variable, des augmentations de pression près de vingt fois supérieures à la pression de vaporisation. En revanche, ces oscillations sont largement atténuées lorsque la modélisation est réalisée avec une densité de vapeur constante.

Ces observations locales sont autant d'informations qui permettent de mieux cerner les différentes dynamiques de poche observées, de manière qualitative, en figure 9.19.



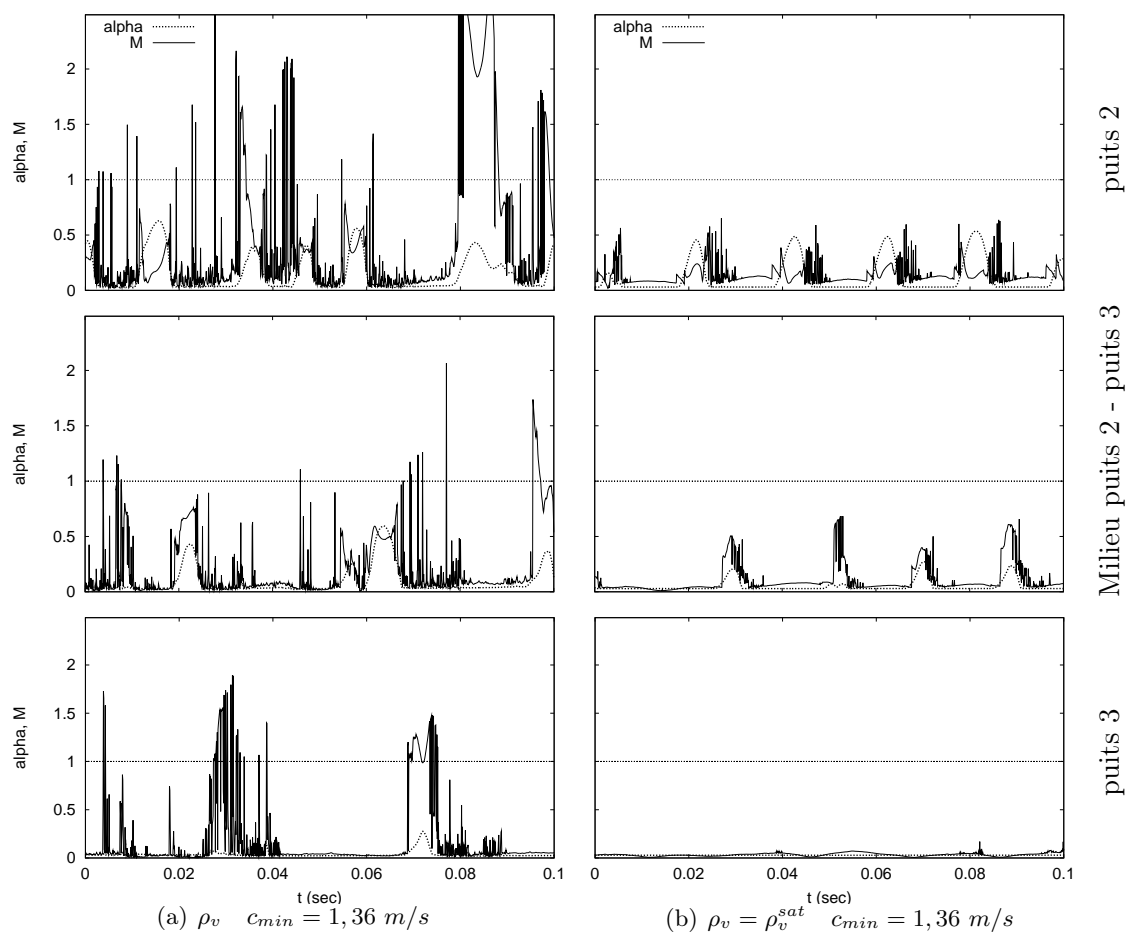


FIGURE 9.25 – Evolutions temporelles du nombre de Mach : étude de l'influence de la relaxation thermodynamique en modèle sinusoïdal  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$

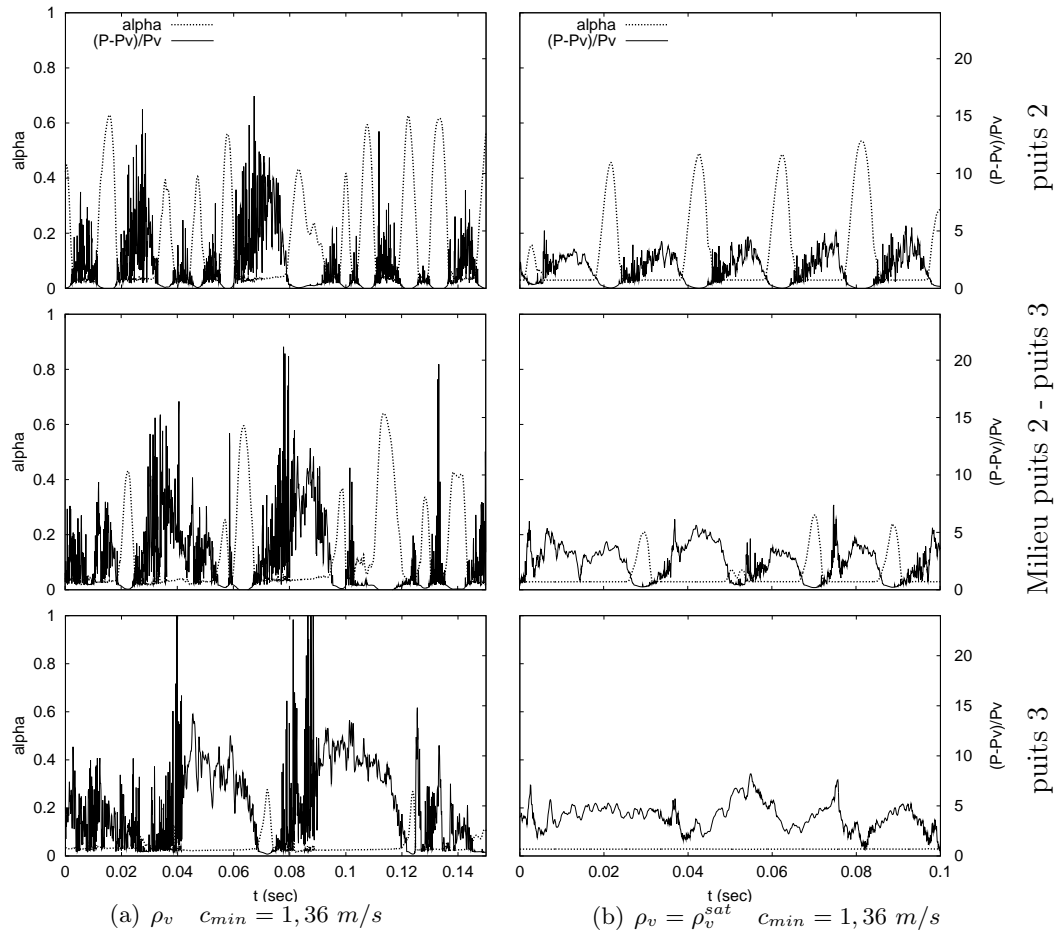


FIGURE 9.26 – Evolutions temporelles de la pression : étude de l'influence de la relaxation thermodynamique en modèle sinusoïdal  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$

## 9.5.2 Modèle relaxé en zones de cavitation

### 9.5.2.1 Présentation

La partie 9.5.1 avait pour objectif d'étudier l'effet d'une relaxation thermodynamique de la phase vapeur en zones non cavitantes. Pour cela, une comparaison a été menée entre des calculs à densité de vapeur variable dans les zones de pression supérieure à la pression de vaporisation et des calculs à densité de vapeur constante dans tout l'écoulement. Désormais, l'étude consiste à analyser les conséquences d'effets métastables en zone de cavitation ; deux configurations sont pour cela confrontées dans le cas d'un modèle en loi d'état sinusoïdale :

- $\rho_v = \frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v_v}T_m}$  dans les zones où  $p_m < P_{vap} + \Delta p_m$  : configuration 3,
- $\rho_v = \rho_{sat}$  quelle que soit la zone de l'écoulement : configuration 1.

Le calcul à masse volumique constante sert ici de calcul de comparaison, il est identique à celui présenté en partie 9.5.1 ; les paramètres sont récapitulés dans le tableau 9.4.

TABLE 9.4 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 8° : modèle relaxé en zone de cavitation et modèle à saturation

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 0.10^{-3} s$	Modèle de cavitation	$\rho_v(p_m, T_m)$ si $p_m > P_{vap}$	$\rho_v(p_m, T_m)$ si $p_m < P_{vap}$
$\rho_v$ $c_{min} = 1,36 m/s$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$	$\frac{p_m}{(\gamma_v - 1)C_{v_v}T_m}$
$\rho_v = \rho_v^{sat}$ $c_{min} = 1,36 m/s$	2.1	$Prd = 0.9979$	0.1	0.02	4-eqt sinusoïdal	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$	$\rho_v^{sat}(T_{ref})$

### 9.5.2.2 Dynamique de la poche de cavitation

La dynamique de la poche de cavitation pour un modèle relaxé thermodynamiquement en zones de cavitation est représentée en figures 9.27(a) et 9.27(c) sur des périodes respectives de 1 et 2 s. Elle peut être comparée à la dynamique d'une simulations avec masse volumique de vapeur à saturation représentée sur une période de 1 s en figure 9.27(b). La modélisation métastable des zones de cavitation se traduit par une augmentation des phénomènes cavitants ; la longueur de la poche attachée s'accroît par rapport à un calcul à saturation et la taille des structures convectées est plus importante. Ces modifications engendrent une dynamique plus lente des lâchers de structure de vapeur qui est quantifiable à partir des spectres des fluctuations de pression de la figure 9.28. En modèle métastable, chaque puits retranscrit des phénomènes basse fréquence, inférieurs à 20 Hz.

Il est important de rappeler que la relaxation de la masse volumique de la phase vapeur en zone de cavitation modifie la méthode de calcul de la vitesse du son. En supposant une évolution quasi isotherme de l'écoulement, les variations de  $\rho_v$  selon l'équation (4.3) des gaz raides sont corrélées à celle de la pression qui, dans les zones de décrochement, descend en deçà de la pression de vaporisation. Autrement dit, la masse volumique de la phase vapeur relaxée prend des valeurs inférieures à sa valeur à saturation dans les régions de cavitation intense. D'après la formulation (4.49) de la vitesse du son dans le mélange, ces variations engendrent une baisse significative des valeurs de la célérité en zone diphasique.

L'ensemble de ce raisonnement analytique est confirmé par la figure 9.29 sur laquelle sont tracés les profils moyens de la vitesse du son, de la pression et du taux de vide à une distance de  $x = 6,1 \text{ mm}$  du col. La comparaison s'effectue au sein de la partie attachée de la poche de cavitation et chaque calcul présente des profils de pression et de taux de vide similaires. Les différences concernent la vitesse du son au sein de la zone diphasique ; celle-ci est diminuée pour le calcul à densité de vapeur variable (figure 9.29(a)). La vitesse de propagation des perturbations plus faible dans le cas métastable, peut expliquer l'accroissement de la poche attachée et la diminution de fréquence d'arrachement de structures de vapeur. Le tracé des profils moyens

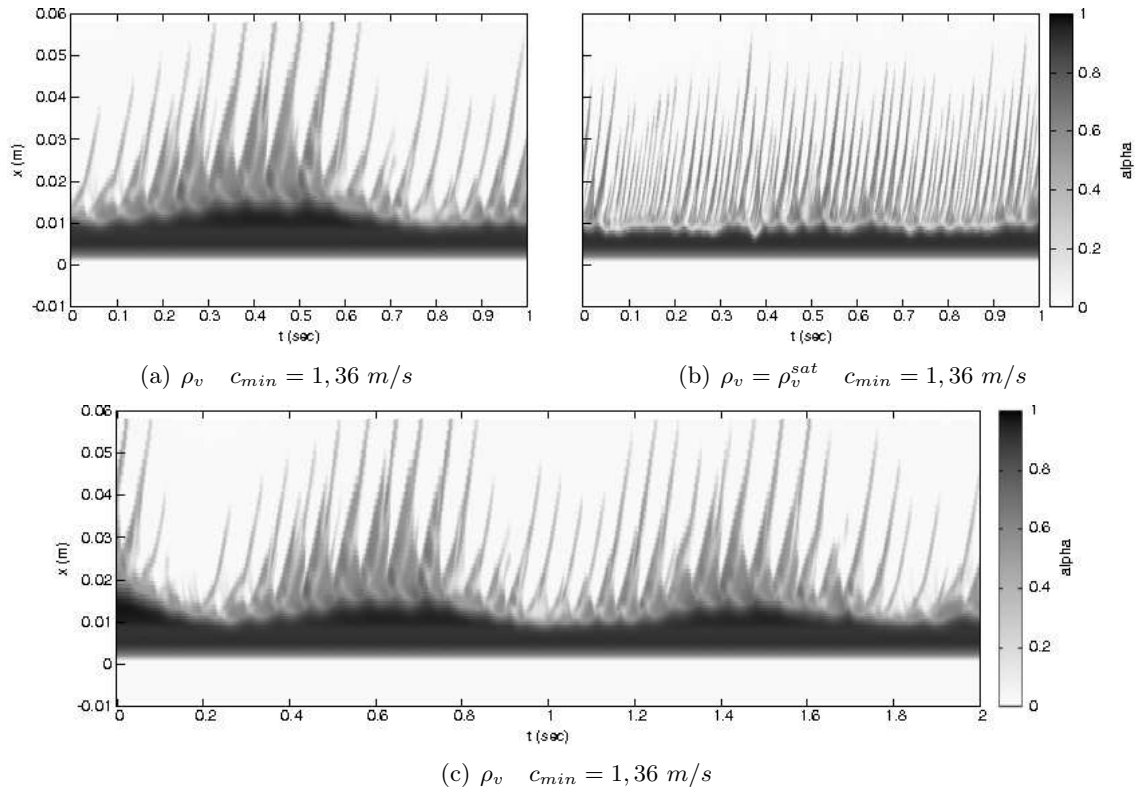


FIGURE 9.27 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps : dynamique des lâchers de vapeur plus lente lors de la relaxation thermodynamique en zone de cavitation ( $\rho_v$ ) par rapport à une condition de saturation ( $\rho_v = \rho_v^{sat}$ )

de taux de vide et de vitesse en figure 9.30 renseigne sur les différentes topologies d'écoulement modélisées par chaque configuration. La vitesse moyenne du calcul à densité de vapeur variable ne prévoit pas de recirculation au niveau du puits 1 ; cette absence est causée par une taille de poche attachée trop importante. En ce qui concerne les autres puits, les grosses structures convectées dans le cas de calculs à masse volumique variable engendrent une surestimation du taux de vide moyen.

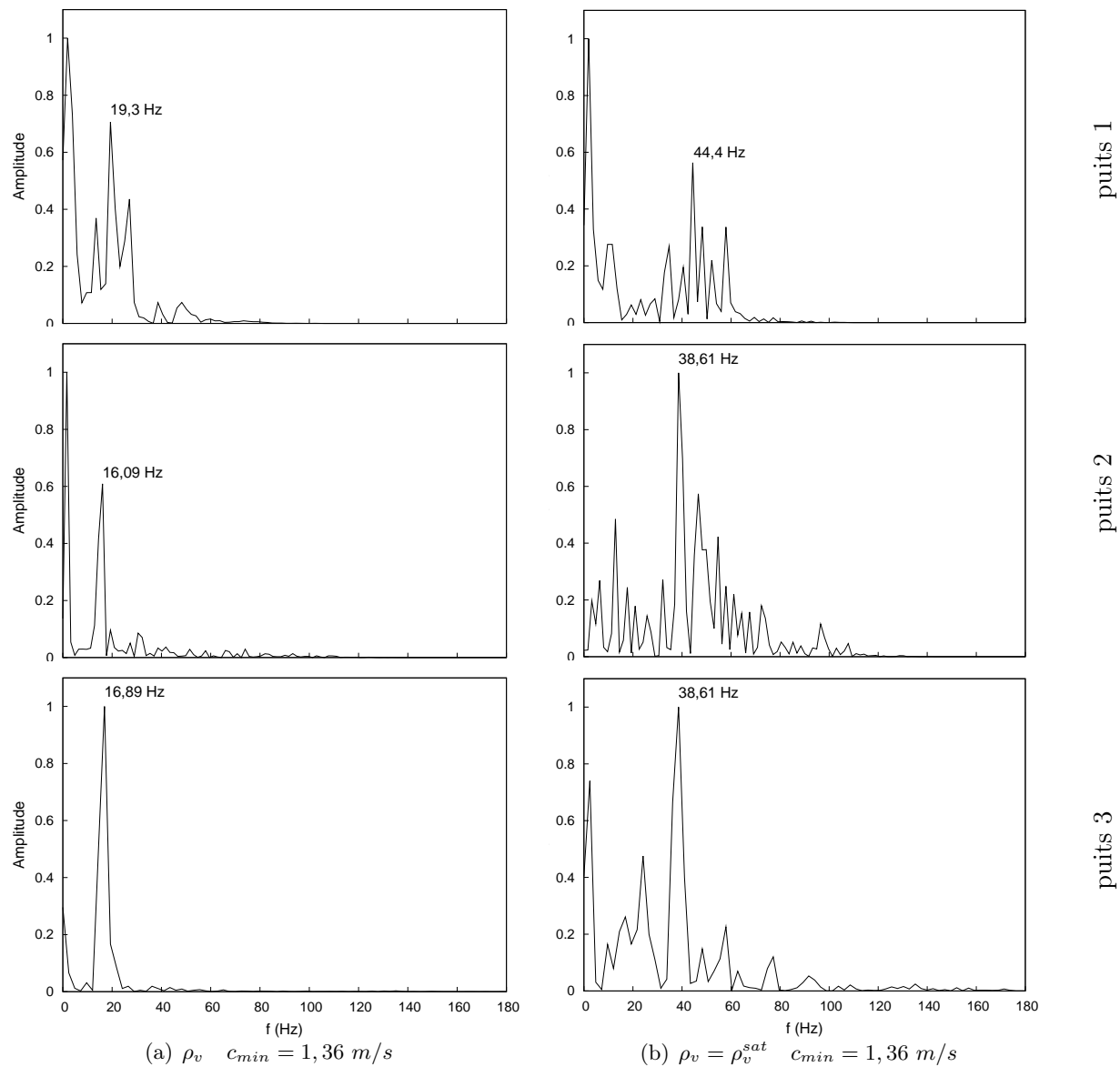


FIGURE 9.28 – Comparaison des spectres fréquentiels aux puits 1 à 3 : diminution de la fréquence lors de la relaxation thermodynamique en zone de cavitation ( $\rho_v$ ) par rapport à une condition de saturation ( $\rho_v = \rho_v^{sat}$ )

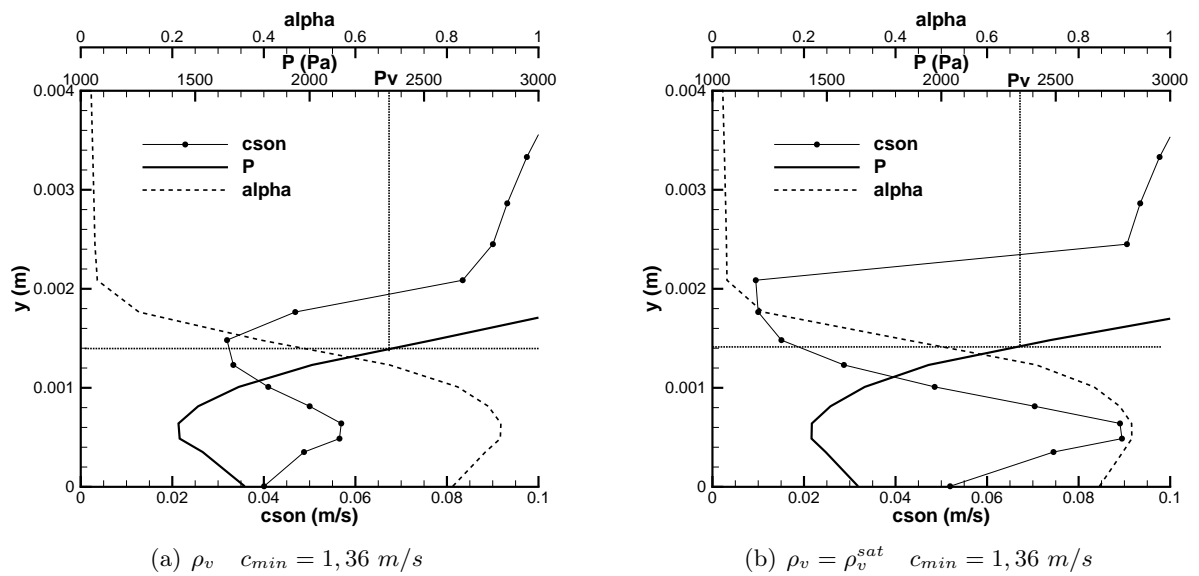


FIGURE 9.29 – Tracés des profils moyens de la vitesse du son, du taux de vide et de la pression à l’aval du col :  $x = 6,1 \text{ mm}$ . En zone diphasique : diminution de la fréquence lors de la relaxation thermodynamique en zone de cavitation ( $\rho_v$ ) par rapport à une condition de saturation ( $\rho_v = \rho_v^{sat}$ )

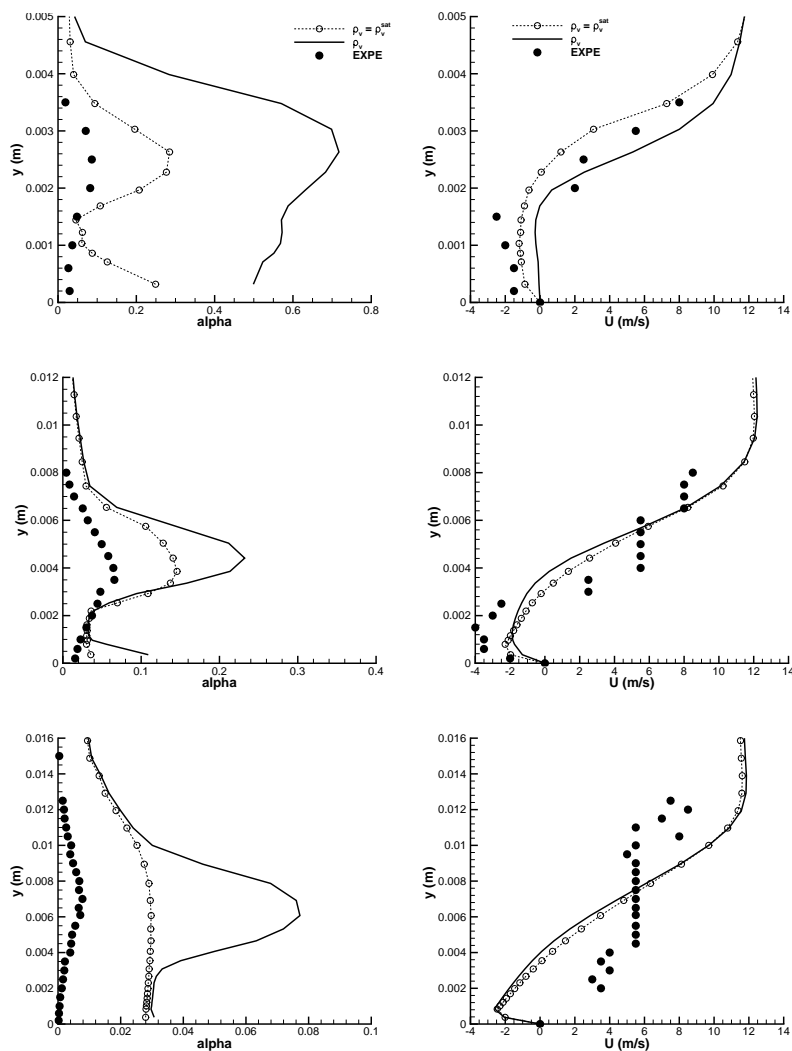


FIGURE 9.30 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes aux trois puits de mesure : étude de l'influence de la relaxation thermodynamique en zone de cavitation

### 9.5.2.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

La figure 9.31 compare les champs moyens de pressions statique et fluctuante obtenus pour des calculs métastables et à saturation. Les tracés présentent peu de différences significatives. A masse volumique de vapeur variable, la recompression est légèrement retardée, en raison d'un développement de la cavitation plus prononcé par rapport au cas à saturation. Pour le cas métastable, les structures possèdent une taille plus importante et leur collapse amplifie le pic d'oscillations en zone de fermeture.

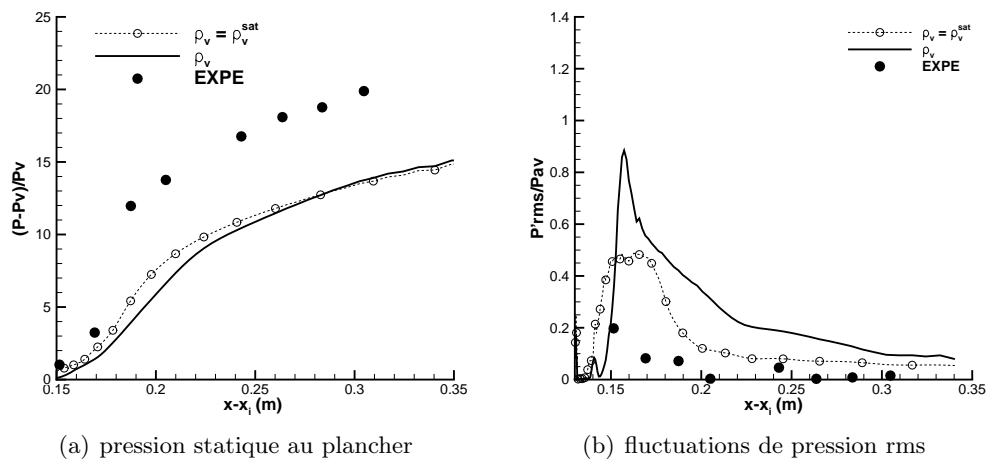


FIGURE 9.31 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : étude de l'influence de la relaxation thermodynamique en zone de cavitation

### 9.5.3 Conclusion partielle

La présentations de cette partie a pour objectif d'évaluer les effets de la relaxation thermodynamique de la phase vapeur dans le cadre d'un modèle à 4-équations. Jusqu'ici, cette modélisation métastable était implémentée uniquement dans les zones non cavitantes. Dans un premier temps, la démarche consiste à comparer ces simulations métastables aux résultats de simulations menées à densité de vapeur constante dans l'ensemble de l'écoulement. Lorsque les masses volumiques sont fixées à saturation, le taux d'instationnarité diminue de façon significative ; cela se traduit par une réduction de la fréquence des lâchers de structures diphasiques et une diminution des fluctuations de pression et du nombre de Mach. Une seconde analyse consiste à réaliser un calcul à masse volumique de vapeur variable uniquement dans les zones de cavitation. Comparée à une simulation menée avec des valeurs à saturation, les variations de la phase vapeur au sein des régions diphasiques diminuent la vitesse de propagation des perturbations. Cette particularité favorise l'extension de la partie attachée de la poche et la formation de nuages de vapeur de tailles plus importantes dont la fréquence de lâcher est nettement diminuée.



## 9.6 Modèles 3- et 4-équations

En partie 8.4, les comparaisons entre les modèles à 3- et 4-équations ont permis d'évaluer la valeur ajoutée par l'addition d'une équation de transport du taux de vapeur pour la simulation d'un écoulement de Venturi 4°. Afin d'étudier plus en détail l'influence de l'équation supplémentaire, une analyse similaire est ici proposée à partir des résultats de simulations sur le Venturi 8°. Sur cette géométrie, les aspects de transport sont amplifiés et les simulations doivent ainsi être en mesure de reproduire l'arrachement et la convection des structures tourbillonnaires diphasiques.

### 9.6.1 Comparaison pour deux modèles de turbulence : $k-\ell$ et Spalart-Allmaras

#### 9.6.1.1 Présentation

Pour cette étude comparative, les modèles à 3- et 4-équations sont fermés thermodynamiquement par une loi d'état sinusoidale. Les simulations en modèle à 3-équations sont tirées des travaux de Decaix [37] qui utilisent un paramétrage de la vitesse du son minimale de  $c_{min} = 0,92 \text{ m/s}$ . Cette valeur est inférieure à celle de  $c_{min} = 1,36 \text{ m/s}$  avec laquelle le modèle à 4-équations présente la meilleure reproduction de l'écoulement. Dans l'optique d'élargir le champ de comparaison, les calculs sont réalisés avec deux modèles de turbulence : modèle  $k-\ell$  et Spalart-Allmaras avec correcteur de viscosité. L'ensemble des paramètres numériques est résumé au sein du tableau 9.5.

TABLE 9.5 – Paramètres des calculs effectués sur le Venturi 8° en modèles à 3- et 4-équations

Calcul	$\sigma_e$	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence	Correction de Reboud	$c_{min}$ (m/s)
KL 4-eqt	2.1	0.1	0.02	4-eqt sinusoidal	$k-\ell$	$n = 10$	1.36
SA 4-eqt	2.12	0.1	0.02	4-eqt sinusoidal	SA	$n = 10$	1.36
KL 3-eqt	2.1	0.1	0.02	3-eqt sinusoidal	$k-\ell$	$n = 10$	0.92
SA 3-eqt	2.07	0.1	0.02	3-eqt sinusoidal	SA	$n = 10$	0.92

### 9.6.2 Dynamique de la poche de cavitation

Les dynamiques de poche sont représentées en figure 9.32 avec des taux de cavitation quasiment identiques d'un cas à l'autre (voir figure 9.33). Ces visualisations mettent en avant le rôle joué par l'équation de transport. Les modèles à 3-équations divisent la cavité en deux : une première partie se forme directement à l'aval du col, elle est succédée par une zone de mélange au sein de laquelle le taux de vapeur est amoindri. La partie attachée conserve une longueur constante qui diffère de la modélisation à 4-équations pour laquelle de légères oscillations peuvent être observées. Mais la majorité des distinctions concerne la seconde partie de la poche. En l'absence d'équation de transport, la modélisation des phénomènes convectifs est nettement moins prononcée ; la partie aval s'apparente à une poche de cavitation à faible de taux de vide qui s'agite selon la fréquence de battement de l'écoulement. L'arrachement et la convection de structures diphasiques, jusqu'ici observés en modèles à 4-équations, sont inexistantes pour les modèles à

3-équations. Bien que la dynamique des phénomènes cavitants en modèle à 3-équations s'éloigne

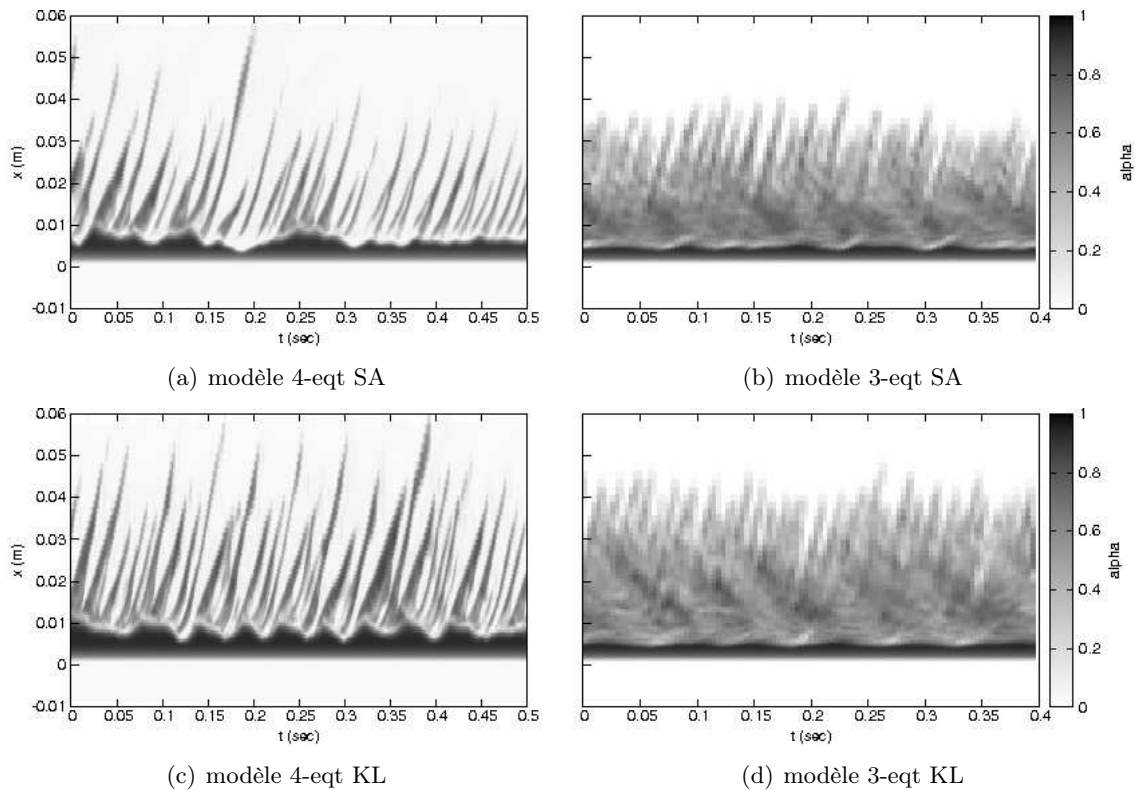


FIGURE 9.32 – Evolution du taux de vide maximal au cours du temps en modèle à 3- et 4-équations. Etude avec deux modèles de turbulence : Spalart et Allmaras et  $k - \ell$

de celle décrite par l'expérience, les résultats de simulations fournissent néanmoins des valeurs moyennes qui approchent celles des essais. En effet, sur la figure 9.34, les fréquences d'agitation de la cavité s'apparentent à celles des lâchers de nuage de vapeur : les spectres fréquentiels du modèle à 3-équations relèvent des fréquences de  $40 \text{ Hz}$  qui avoisinent les valeurs expérimentales. En ce qui concerne le tracé des profils moyens de taux de vide et de vitesse de la figure 9.35, la topologie de l'écoulement varie selon la présence, ou non, de l'équation de transport. La modélisation à 3-équations sur-estime dans un premier temps le taux de vapeur formé au niveau du puits 1, c'est-à-dire directement à l'aval du col. Les vitesses pariétales négatives témoignent d'une bonne reproduction de la recirculation mais, contrairement aux modèles à 4-équations, ce phénomène n'est pas accompagné d'une diminution du taux de vide à proximité de la paroi. Dans la zone d'élargissement, le taux de vide moyen des modèles à 3-équations subit ensuite une rapide diminution pour finalement atteindre des valeurs nulles au niveau du puits 3. Cette topologie contraste avec celle prévue par la modélisation à 4-équations qui reproduit la présence de vapeur sur l'ensemble de la longueur d'étude. Ces résultats apportent davantage d'informations sur l'influence de la méthode de calcul du taux de vide. Lorsque celui-ci est estimé directement à partir de la masse volumique du mélange - dans le cas d'un modèle à 3-équations - la condensation est

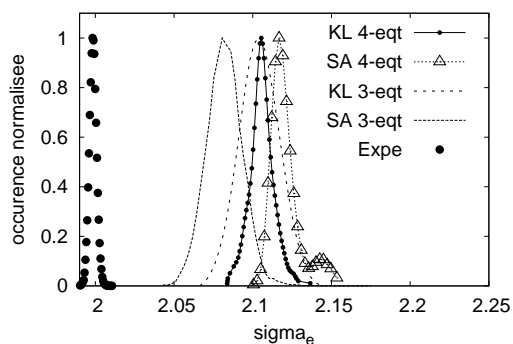


FIGURE 9.33 – Densité de probabilité du taux de cavitation en modèles à 3- et 4-équations

brutale. Il est alors nécessaire de sur-estimer la quantité créée dans la première partie de la cavité afin d'obtenir une taille de poche comparable au cas expérimental. En revanche, l'équation de transport permet d'homogénéiser la répartition du taux de vide.

La figure 9.35 renseigne également sur l'influence du modèle de turbulence sur la topologie moyenne de l'écoulement. Au vu des résultats, le modèle de Spalart et Allmaras engendre une condensation plus rapide des structures de vapeur. Il est difficile d'interpréter comment le modèle de turbulence modifie la reproduction des phénomènes de cavitation. Une explication possible pourrait résider dans la capacité de chaque modèle à reproduire des structures tourbillonnaires de taille plus ou moins importante et au sein desquelles se concentre la vapeur.

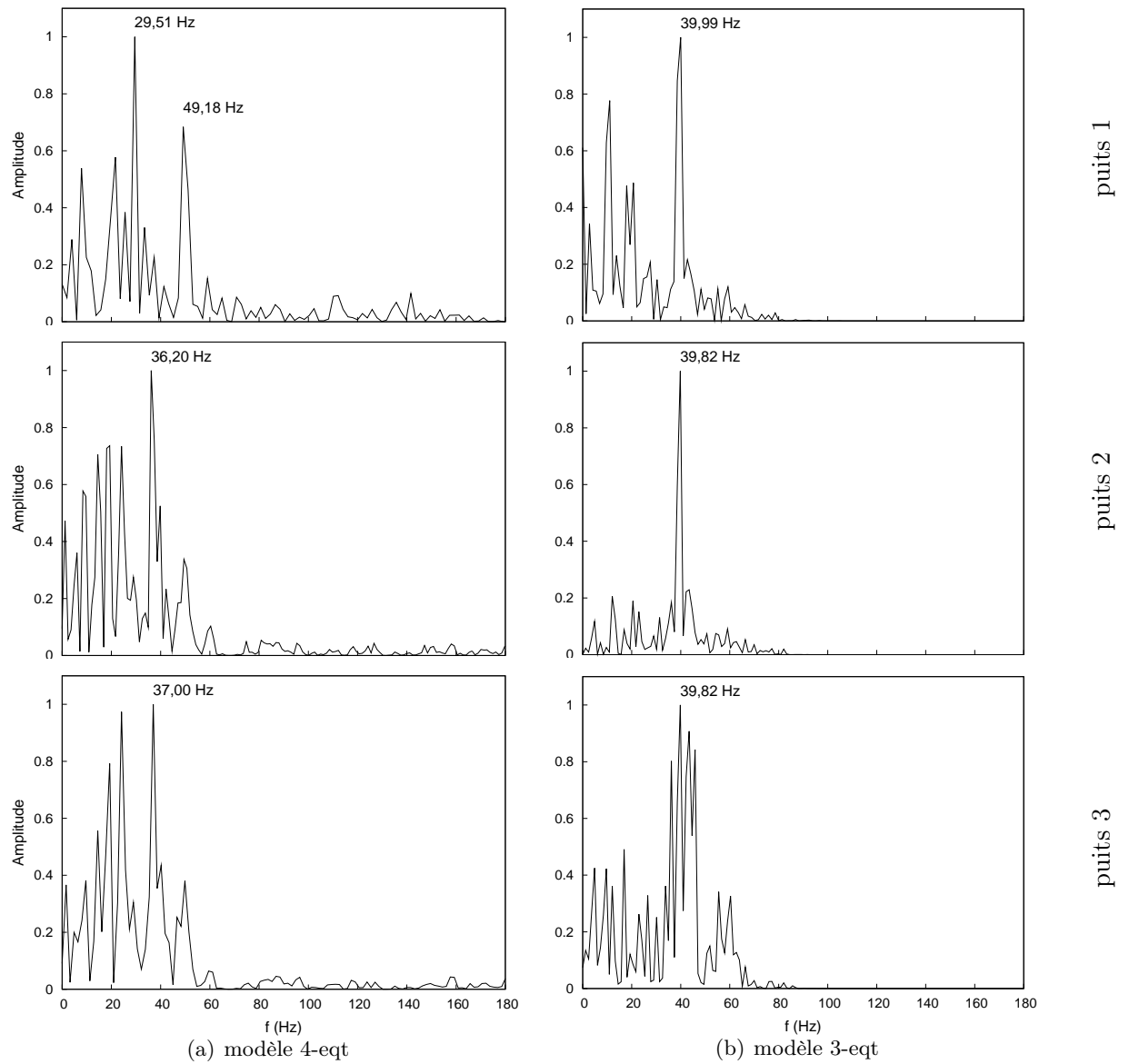


FIGURE 9.34 – Comparaison des spectres fréquentiels aux puits 1 à 3 pour des modèles à 3- et 4-équations (Spalart et Allmaras)

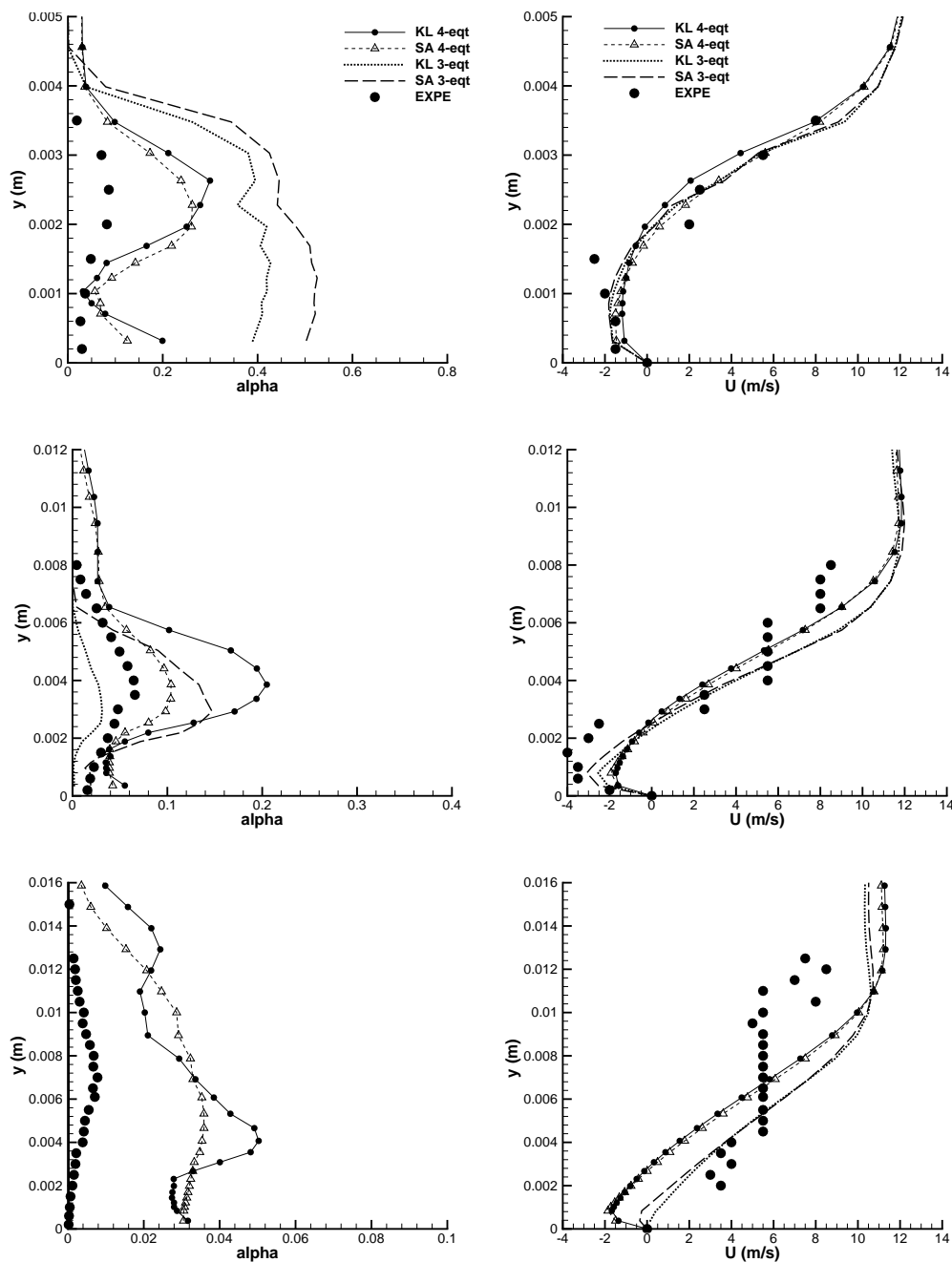


FIGURE 9.35 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes aux trois puits de mesure : comparaison entre modèles à 3- et 4-équations

### 9.6.2.1 Champ moyen de pression statique et fluctuante

Les profils moyens de pression statique de la figure 9.36(a) comparent les capacités de chaque modèle à évaluer la chute de pression inhérente à la zone de cavitation et le taux de re-compression en sortie de poche. Au vu des tracés, le modèle à 3-équations présente un profil de re-compression en très bon accord avec l'expérience, tandis que les modèles à 4-équations sous-estime ces augmentations de pression. En ce qui concerne les fluctuations de pression, mesurées en figure 9.36(b), l'équation de transport altère la prédiction numérique en amplifiant le taux d'oscillation dans la zone de fermeture. Ces deux observations sont à mettre en parallèle avec les profils moyens de taux de vide de la figure 9.35. Sans équation de transport, le calcul du taux de vide est calqué sur l'évolution de la densité du mélange ; la moindre augmentation de pression favorise une diminution du taux de vide qui à son tour accélère le processus de re-compression. Il s'avère que lorsque le taux de vide est déterminé comme une quantité transportée, les phénomènes de condensation deviennent plus lents et se soumettent aux conditions extérieures. Cette caractéristique augmente le taux d'instationnarités et ralentit le phénomène de re-compression.

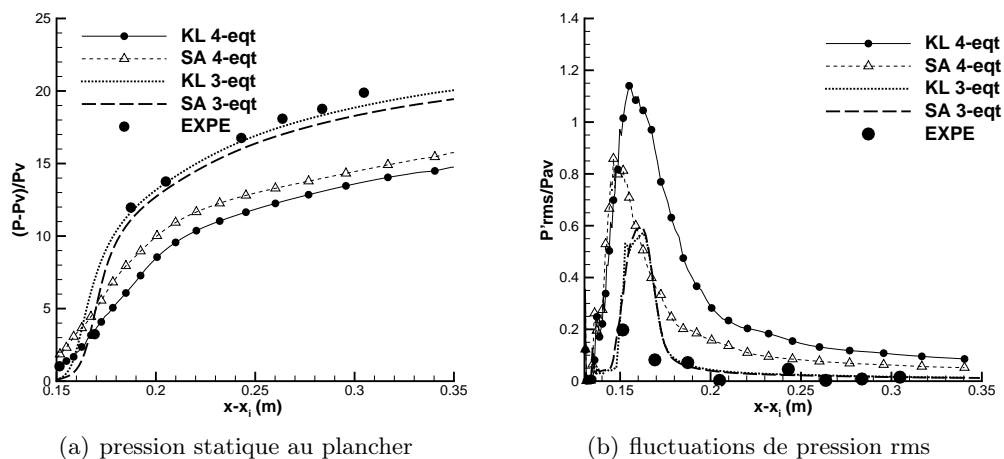


FIGURE 9.36 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : comparaison entre modèle à 3- et 4-équations

### 9.6.3 Conclusion partielle

La comparaison entre modèles à 3- et 4-équations évalue les conséquences de la méthode de calcul du taux de vide pour la reproduction de l'écoulement instable du Venturi 8°. La majeure partie des différences se concentrent dans la simulation des phénomènes instantanés ; l'équation de transport favorise la mise en place des mécanismes observés expérimentalement, en l'occurrence l'arrachement et la convection de structure diphasique. Lorsque la fraction de vapeur est évaluée directement en fonction de la densité de mélange, les aspects de transport disparaissent et les phénomènes cavitants se présentent sous la forme d'une poche diphasique dont la longueur oscille

---

à la fréquence de battement de l'écoulement. En ce qui concerne la topologie moyenne de l'écoulement, le modèle à 3-équations simule une diminution brutale de la quantité de vapeur en zone de re-compression. Ce comportement plus raide nécessite ainsi de sur-estimer le taux de vapeur en première partie de poche afin d'obtenir une taille du domaine de cavitation conforme aux références expérimentales. Le modèle à 3-équations présente néanmoins l'avantage d'améliorer le tracé des champs moyens de pression par rapport aux modèles à 4-équations. Le phénomène de condensation est plus rapide avec ce type de modèle, il accélère ainsi la re-compression en fermeture de poche et corrige la prédiction des profils.

## 9.7 Conclusion

Les simulations sur Venturi 8° ont pour objectif d'évaluer la capacité des modèles à reproduire les instationnarités de cette géométrie. La topologie de l'écoulement est évaluée à partir de grandeurs moyennes qui renseignent sur : l'intensité des recirculations, la répartition de la quantité de vapeur, le taux de recompression ou l'amplitude des oscillations. La dynamique instantanée nécessite en revanche une analyse approfondie. Le tracé des fréquences d'oscillations le long de la région de cavitation est une donnée essentielle à l'estimation des phénomènes cycliques. D'autres analyses, telles que les corrélations entre puits ou le tracé des grandeurs instantanées, contribuent à la compréhension des mécanismes responsables de la déstabilisation des poches de cavitation. Au vu des résultats numériques, la modélisation des conditions métastables semble jouer un rôle prépondérant. D'une part, les effets de déséquilibre thermodynamique modifient directement la fréquence des cycles de lâchers. La sensibilité des résultats au paramètre ajustable de la vitesse minimale du son,  $c_{min}$ , témoigne à la fois de l'importance de la plage de modélisation des pressions cavitantes mais également de la formulation utilisée pour la célérité des perturbations. Ces aspects se confirment lors de la comparaison entre modèles de cavitation ; bien que les valeurs moyennes obtenues avec les deux lois d'état soient comparables, la dynamique instantanée diffère d'une simulation à l'autre. La compressibilité de l'écoulement représente également un paramètre important du modèle. A travers la masse volumique de la phase vapeur, les conséquences d'une relaxation thermodynamique sont successivement traitées en zone non cavitante puis en région diphasique. Il s'avère qu'au sein du liquide, les modèles relaxés accentuent le taux de fluctuations ; cela se traduit par : une dynamique plus irrégulière, une légère augmentation de la fréquence des perturbations, et par un accroissement des amplitudes d'oscillation de pression et du nombre de Mach qui franchit, de façon intermittente, la frontière sonique. Ces observations questionnent sur la reproduction, de la part des simulations, de phénomènes instationnaires, évoqués par la littérature, tels que la propagation d'ondes consécutives au collapse de vapeur. En revanche, au sein des zones diphasiques, la relaxation thermodynamique n'assure pas la cohérence avec les observations expérimentales ; les simulations font part d'une surestimation des phénomènes de cavitation et d'une diminution de la vitesse de propagation des perturbations. Là encore, la question de l'influence de la modélisation de la vitesse du son en zone de mélange peut être posée. Enfin, la notion de convection des éléments diphasiques dans un écoulement cavitant fait l'objet d'une comparaison entre modèles avec et sans équation de transport. Les résultats mettent en avant la valeur ajoutée de la modélisation des phénomènes convectifs sur la dynamique de l'écoulement. Bien que chaque modèle soit en mesure d'assurer une cohérence en terme de valeurs moyennes, les mécanismes d'arrachement et de convection de structures cavitantes sont reproduits uniquement par les modèles à transport de taux de vide.



Cinquième partie

**Simulations 3D**



---

*Les simulations, jusqu'ici bidimensionnelles, sont désormais étendues en configuration 3D sur la géométrie de Venturi 4°. Les résultats sont comparés, en moyenne, à la base de données expérimentales mesurées en milieu de veine. Au delà des profils moyens, les écoulements 3D font apparaître des instationnarités liées à la troisième dimension; celles-ci se développent par effets de bord et viennent renforcer les instabilités de la poche de cavitation. En revanche, le manque de références sur les effets tridimensionnels ne permet pas valider complètement ces mécanismes. Ainsi, l'analyse des présentes simulations s'appuie en grande partie sur la campagne de calcul précédemment menée pour un système à 3-équations. La démarche mise en place propose de comparer les modèles de cavitation et les modèles de turbulence. Pour ces derniers, l'accent est mis sur une comparaison entre modèles standards et modèles avancés de type SAS. Enfin une étude plus détaillée des mécanismes instationnaires est menée dans l'optique de proposer une explication aux instabilités caractéristiques d'un écoulement cavitant tridimensionnel.*

## 9.8 Etat de l'art des études d'écoulements cavitants 3D

### 9.8.1 Etudes expérimentales et numériques

Les travaux numériques présentés jusqu'ici étaient cantonnés à une étude bidimensionnelle des phénomènes de cavitation. Les raisons de cette restriction proviennent principalement du coût de calcul engendré par l'extension à la troisième direction. Le bien fondé de ces études repose sur la forme des géométries d'études qui présentent majoritairement des profils bidimensionnels et dont les écoulements sont supposés homogènes, en moyenne, dans la direction transversale. Néanmoins, les calculs 3D présentent un intérêt particulier dans la reproduction des phénomènes de turbulence à partir de modèles hybrides RANS/LES ou LES qui reposent sur un processus tridimensionnel de cascade énergétique. D'autre part, même si en moyenne l'écoulement est relativement 2D, la dynamique de la poche présente des instationnarités dans les trois directions de l'espace.

Les observations sur des profils d'aubes à l'aide de caméras rapides ont permis de mettre en évidence les structures tridimensionnelles associées au phénomène de cavitation ; le jet rentrant présente une progression non uniforme sur l'envergure et les zones de lâchers se répartissent de façon inhomogène sur la largeur de la géométrie [36]. Le mécanisme de jet rentrant se divise ainsi en un jet rentrant de côté, qui réfère à la partie du jet qui possède une vitesse majoritairement transverse et orientée des parois latérales vers le centre ; et un jet rentrant vers l'amont qui prend forme dans la zone de fermeture de la poche. La prédominance de l'un des deux jets est dictée par la forme de la poche, chacun pouvant influencer le phénomène de lâchers [47]. De part sa courbure, la ligne de fermeture engendre des variations importantes sur l'épaisseur de la poche et la répartition du taux de vide et les interactions avec les parois latérales compliquent la compréhension des mécanismes de déstabilisation. Dans l'optique de s'affranchir des contraintes latérales de la veine d'essai, les travaux de Foeth [47] proposent une étude expérimentale sur une aube avec vrillage du profil qui permet l'apparition de la cavitation uniquement dans la zone médiane. Enfin, dans la lignée de ces études expérimentales, les travaux de Maurice sur un écoulement de marche descendante cavitant [108] dévoilent l'importance de la prise en compte de la troisième dimension en insistant sur la prépondérance des fluctuations de la vitesse liquide transversale dans la zone de transport de taux de vide.

En parallèle de ces expériences, plusieurs simulations numériques ont été menées dans l'optique de reproduire la dynamique d'écoulements instationnaires sur profils d'aubes ou Venturis à partir de modèles homogènes. Des codes compressibles non visqueux ont par exemple été proposés afin d'étudier les phénomènes sur profils d'aubes avec vrillage [154, 89]. L'étude des interactions entre cavitation et turbulence a également été envisagée à partir de codes turbulents 3D qui proposent différentes modélisations des phénomènes turbulents. L'approche la moins coûteuse consiste à résoudre les équations moyennées d'un système instationnaire URANS au sein duquel la turbulence est modélisée au premier ordre. Les récentes études de Park et al. [123] sur une géométrie d'aube vrillée ont montré la capacité des modèles URANS à reproduire les instabilités liées aux plus grosses structures tandis que des approches LES plus fines ont été testées à la fois sur les profils d'aubes et sur les géométries de Venturis [186, 42]. Cependant, il est important de souligner qu'en raison du coût des calculs, ces simulations sont réalisées sur des maillages grossiers et ne sont pas pleinement résolues. La diminution du temps de calcul à proximité des parois peut être envisagée en implémentant un modèle de loi de paroi logarithmique, tel que

celui introduit dans les solveurs LES implicites de Bensch et al. [18] ou Lu et al. [105]. Malgré la faible envergure des profils, les simulations mettent en avant la présence de vortex cavitants secondaires. Une autre stratégie de réduction des coûts repose sur l'emploi de méthodes hybrides type DES sur des géométries d'aubes [93] ou d'ogives [85]. Une étude comparative entre modèles URANS, DES et LES implicite a dans ce sens été proposée, sur une géométrie d'aube avec vrillage, par les travaux de Bensch [17]; les résultats font part d'une bonne reproduction des instabilités, excepté pour l'approche URANS. L'approche hybride des modèles PANS basés sur un modèle de turbulence  $k - \epsilon$  est au départ destinée aux études aérodynamiques, et a été adaptée au domaine de la propulsion marine [76] ou pour des géométries d'aubes vrillées [77]. Ce type de résolution est à mi-chemin entre les modèles non-résolus RANS et totalement résolus de la DNS; ces modèles introduisent pour cela les ratios  $f_k$  (respectivement  $f_\epsilon$ ) de la partie non résolue de l'énergie cinétique turbulente (respectivement du taux de dissipation) par rapport à la partie globale.

### 9.8.2 Simulations 3D en modèles à 3-équations

Les simulations d'écoulements 2D menées en modèles homogènes à 3-équations ont été étendues au cas 3D pour l'étude d'une géométrie de Venturi 4°. Au sein des campagnes de calcul plusieurs approches de la modélisation de la turbulence ont été envisagées. Les simulations ont dans un premier temps été effectuées avec des modèles classiques  $k - \ell$  et Spalart-Allmaras avant de se concentrer par la suite sur des modèles hybrides de type DES ou à échelle adaptative [37]. L'ensemble des simulations 2D repose sur une hypothèse forte d'écoulements, en moyenne, homogènes dans la troisième direction de l'espace; dans l'objectif de déterminer la pertinence de cette simplification, les résultats de calculs 3D sont comparés à leurs équivalents en 2D. En ce qui concerne les profils de vitesse moyenne et de taux de vide en milieu de veine, les faibles écarts observés permettent de valider les hypothèses d'écoulements bidimensionnels. En revanche, les champs de pression diffèrent; les calculs 3D intensifient les instabilités de l'écoulement, cela se traduit par une augmentation de l'amplitude des fluctuations associée à une re-compression plus lente en zone de fermeture de poche. Enfin, deux dynamiques de poche apparaissent selon le modèle choisi pour la simulation des phénomènes turbulents. En modèle DES, des jets rentrant de côté se forment de part et d'autre, depuis les parois latérales vers le centre et la destabilisation de la poche se manifeste majoritairement en milieu de veine. Les modèles à échelles adaptatives présentent quant à eux un phénomène de battement de poche, d'une paroi à l'autre, où les périodes de croissance de poche se produisent en opposition de phase. Ces observations s'expliquent numériquement par le développement de tourbillons de coin qui dévient, de manière alternative, le jet rentrant en direction du centre de la veine. L'analyse de ces résultats questionne sur le rôle joué par les modèles de turbulence qui pourraient influencer le comportement de la poche.

## 9.9 Simulations 3D en modèles à 4-équations

### 9.9.1 Etude globale et champs moyens

#### 9.9.1.1 Présentation

L'objectif de cette partie est d'évaluer la capacité du modèle à reproduire l'écoulement tridimensionnel sur une géométrie de Venturi 4°. Les simulations sont pour cela effectuées à partir du maillage 2D extrudé sur 62 noeuds dans l'envergure. Les parois latérales sont prises en compte et possèdent la condition aux limites des lois de paroi. Dans l'optique d'étudier l'influence de la fermeture thermodynamique le système à 4-équations est fermé soit par une loi d'état sinusoidale soit une équation d'état de mélange des gaz raides. Le modélisation de la turbulence est réalisée à partir des équations  $k - \ell$  avec correcteur de Reboud ou pour un modèle avancé à échelle adaptative  $k - \ell - SAS$ . Ces trois simulations sont comparées d'une part aux résultats obtenus pour un système à 3-équations et d'autre part aux profils moyens d'un calcul bidimensionnel. Le paramétrage de chaque simulation est résumé dans le tableau 9.6. Au préalable de l'étude comparative,

TABLE 9.6 – Paramètres des calculs 3D effectués sur le Venturi 4°

Calcul	$\sigma_e$	Condition de sortie	Nb de CFL	$\Delta t$ $\times 2, 2 \cdot 10^{-3}$ sec	Modèle de cavitation	Modèle de turbulence
KL-sinus	0,63	$Prd=0,9975$	0,1	0,1	4-eqt sinusoidal	$k - \ell$
KL-SG	0,63	$Prd=0,9977$	0,1	0,1	4-eqt gaz raides	$k - \ell$
KL-SAS	0,63	$Prd=0,9975$	0,1	0,1	4-eqt sinusoidal	$k - \ell - SAS$
KL-3eqt	0,62	nrd $M=0,043$	0,2	0,1	3-eqt sinusoidal	$k - \ell$
SA- SAS-3eqt	0,62	nrd $M=0,043$	0,2	0,05	3-eqt sinusoidal	S.-A.- SAS
KL-sinus-2D	0,61	$Prd=0,9978$	0,1	0,1	4-eqt sinusoidal	$k - \ell$

il convient de remarquer certains points par rapport à la méthodologie. Premièrement, comme présenté par la suite, les simulations 3D augmentent le taux d'instabilité dans le sillage de la poche. Ainsi la masse volumique de la phase vapeur est fixée à sa valeur à saturation. Deuxièmement les comparaisons qualitatives avec le système à 3-équations qui concernent la modélisation SAS de la turbulence prennent en référence une simulation avec modèle Spalart et Allmaras - SAS (SA- SAS). En effet bien que les deux calculs 3-équations  $k - \ell - SAS$  et SA- SAS aient précédemment démontré une dynamique caractéristique commune [40], les mouvements latéraux de poche sont plus marqués pour la seconde catégorie de modèle. Or, afin de conserver une homogénéité entre les comparaisons à 4-équations, un seul modèle de turbulence  $k - \ell$  est ici implémenté. En définitive la présente étude propose de comparer l'influence du terme SAS à partir de représentations qualitatives d'une simulation à 4-équations  $k - \ell - SAS$  à celle d'une simulation à 3-équations SA- SAS.

#### 9.9.1.2 Dynamique de la poche de cavitation

Afin d'analyser la dynamique de chaque poche de cavitation, une coupe bidimensionnelle de l'écoulement est dans un premier temps réalisée à mi-envergure dans le plan ( $z = 2,5$  cm). En figure 9.37, les visualisations instantanées du gradient de la masse volumique de vapeur sont ainsi comparées à celles obtenues avec un modèle à 3-équations. D'un point de vue qualitatif, chaque configuration permet de reproduire une poche de cavitation scindée en une première

partie attachée, formée directement à l'aval du col, et une seconde partie diphasique. Sur ces illustrations il est intéressant de remarquer que la poche d'un modèle de mélange des gaz raides est recondensée de manière plus rapide (voir figure 9.37(b)) tandis que la taille de sillage est élargie pour le modèle à 4-équations SAS et le système à 3-équations (voir figure 9.37(d)). Afin

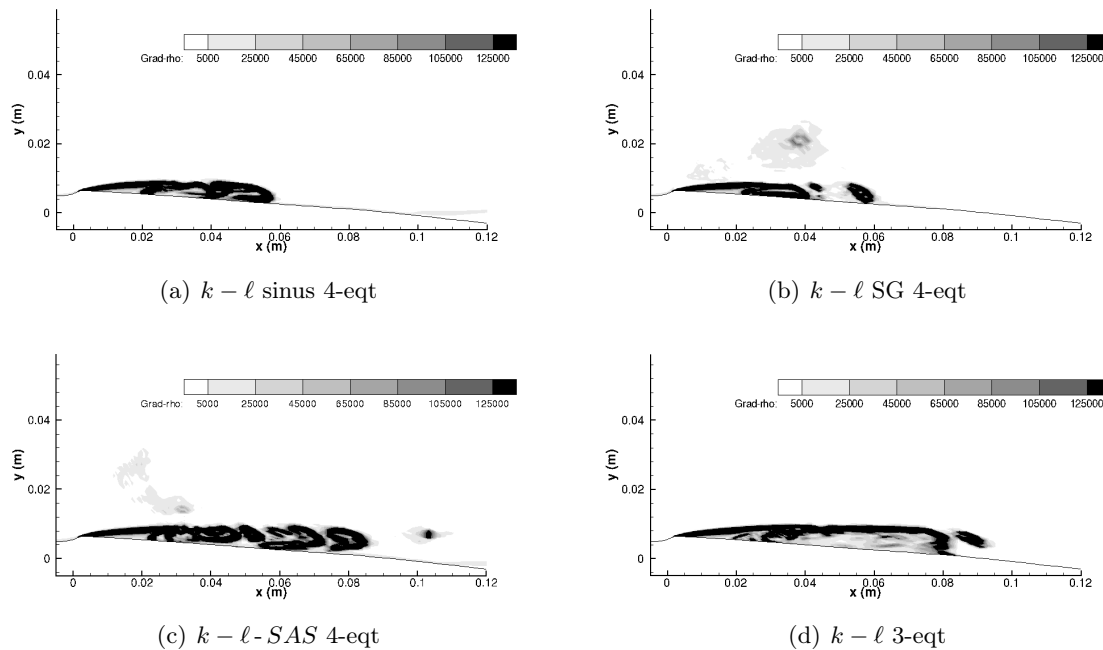


FIGURE 9.37 – Comparaison des gradients de masse volumique : représentation dans le plan ( $z = 2,5 \text{ cm}$ ) pour les calculs 3D

de comparer les résultats de simulations 3D aux données expérimentales, les profils moyens de vitesse et de taux de vide sont présentés en figure 9.38. Ces tracés permettent d'approfondir les observations précédentes ; globalement, le modèle à 4-équations a tendance à accélérer le collapse des structures diphasiques. Alors que la taille de la poche attachée est correctement estimée par ces modèles - d'après les profils de taux de vide aux puits 1 et 2 - la zone de mélange située en aval est en général écourtée pour atteindre de faibles proportions de vapeur au niveau des puits 4 et 5. En ce qui concerne la dynamique moyenne de l'écoulement, la recirculation longitudinale est bien marquée aux puits 3 et 4 mais prend fin au niveau du puits 5 en l'absence de structures diphasiques. Le calcul à 4-équations SAS se distingue néanmoins des analyses précédentes ; celui-ci présente une taille de sillage diphasique plus grande - avec des taux de vapeur relevés jusqu'au niveau du puits 5 - associé à une intensité très prononcée de la recirculation longitudinale. Enfin, en modèle à 3-équations la condensation est là aussi plus lente et la simulation permet la création d'une plage plus étendue de la zone diphasique.

En définitive, les effets 3D semble jouer un rôle non négligeable sur le calcul du taux de vide. Par rapport aux simulations 2D, il est par exemple nécessaire de diminuer la pression imposée en sortie afin de favoriser l'extension de la poche (voir tableau 9.6). La suite de l'analyse tente

d'expliquer la cause de cette manipulation, la recirculation longitudinale est en effet désormais couplée avec des jets rentrants transverses qui augmentent la compression du fluide et qui, d'après la formulation du terme source d'un système à 4-équations, amplifient le taux de destruction de vapeur en milieu de veine. Une modélisation plus fine de l'échelle turbulente semble néanmoins compenser la condensation rapide de la poche de vapeur. Au vu des profil moyens, la modélisation SAS vient renforcer le jet rentrant liquide et accroît la quantité de vapeur arrachée à la partie stable de la poche puis convectée en aval.

### 9.9.1.3 Champ moyen de pression statique et fluctuante

D'une manière générale, les simulations 3D ont tendance à surestimer le paramètre de cavitation en entrée  $\sigma_{entree}$  par rapport aux simulations 2D. Ce constat est valable aussi bien pour les modèles à 3- ou 4-équations et témoigne de la variation du champ de pression alors même que la condition de sortie a été au préalable adaptée. Afin d'expliquer ces différences, ce paragraphe analyse l'évolution moyenne de la pression en région de cavitation. En figure 9.39, les tracés de la pression moyenne au plancher viennent corroborer les observations du paragraphe précédent ; le modèle de mélange des gaz raides présente la re-compression la plus rapide, le modèle sinusoïdal à 4-équations  $k - \ell$  accélère légèrement le retour aux valeurs d'une pression liquide et enfin, le sillage étendue du modèle à 4-équations  $k - \ell$ -SAS offre le profil de pression le plus proche du tracé expérimental. D'autre part, l'ensemble des modèles avec équation de transport de taux de vide surestiment le taux de fluctuation des pressions dans la zone de fermeture. Ces observations avaient déjà pu être faites dans le cadre des simulations 2D sans pour autant impacter la topologie moyenne de l'écoulement. Or il semble que pour des écoulements 3D, ces perturbations modifient la condensation des structures diphasiques. A ce sujet, la méthode de calcul de la pression au sein du mélange a son importance ; pour la suite de l'analyse il est intéressant de souligner que le modèle de mélange des gaz raides possède l'amplitude des fluctuations la plus élevée.

### 9.9.2 Influence de l'équation d'état

Suite à l'étude de la topologie moyenne des écoulements 3D à mi-envergure, cette partie propose de détailler l'influence de la fermeture thermodynamique sur le comportement de la poche de cavitation. Dans l'optique de comparer la répartition de la vapeur sur la largeur, celle-ci est représentée en figure 9.40, dans le plan ( $y = 6 \text{ mm}$ ), à l'altitude où les effets du jet rentrant sont les plus marqués. Les calculs fermés par une loi d'état sinusoïdale ou une équation d'état de mélange des gaz raides simulent une poche en forme de U : la quantité de vapeur prédomine à proximité des parois latérales, tandis que le milieu de la veine est soumis aux recirculations de l'écoulement. Néanmoins, la pression métastable modélisée par la loi sinusoïdale améliore la modélisation de la cavitation dans le sillage. En effet, à l'aval de la partie attachée, composée essentiellement de vapeur, le modèle sinusoïdal présente une zone diphasique répartie sur l'envergure. En revanche, le calcul de la pression par l'équation d'état de mélange des gaz raides ne comporte pas d'effets métastables ; la re-compression s'établit de manière brutale et le fluide passe quasiment instantanément de l'état vapeur à l'état liquide. Ces observations viennent illustrer les fortes agitations de pression constatées en figure 9.39.

Les différences entre simulations étaient moins prononcées en écoulements 2D mais sont ici am-



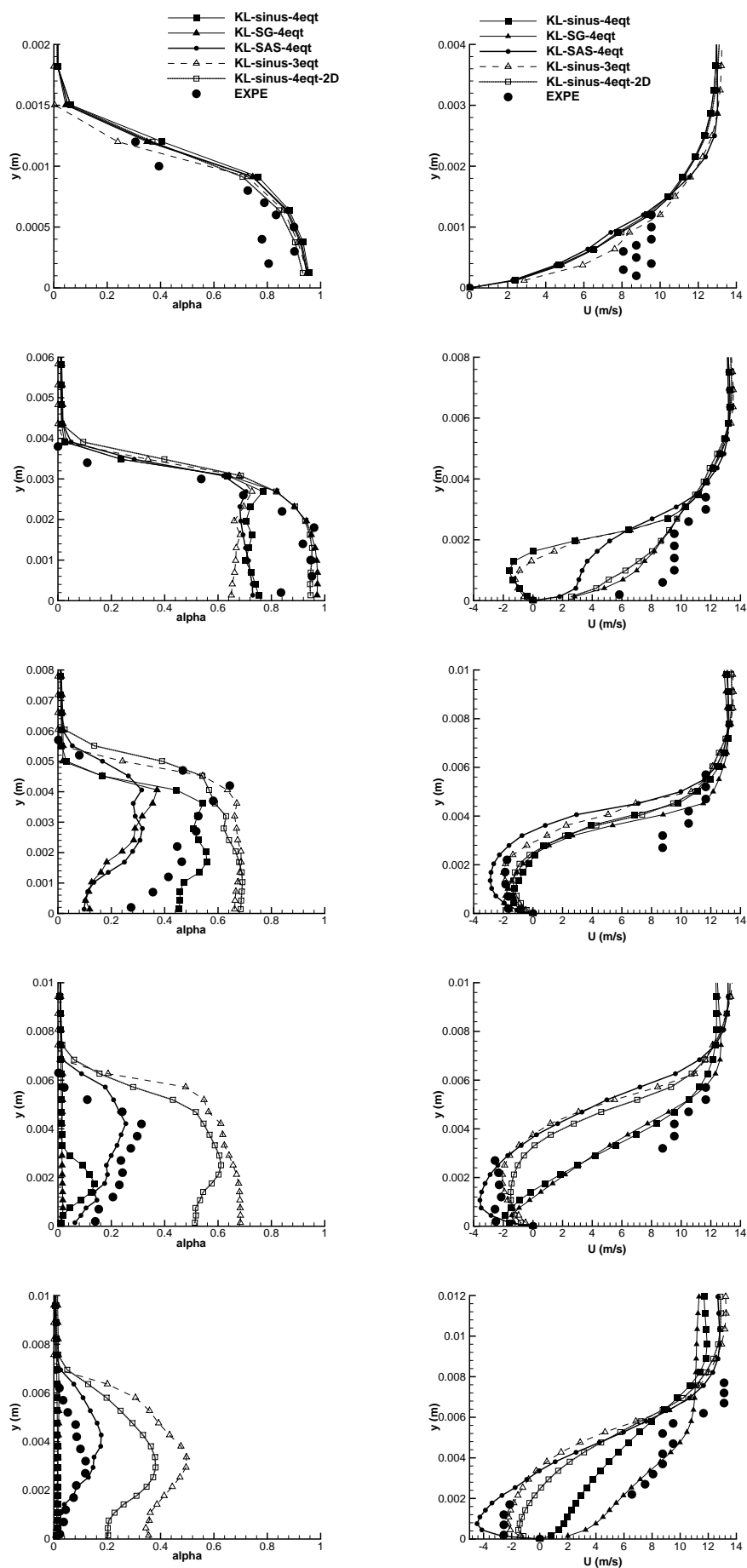


FIGURE 9.38 – Tracés des taux de vide et vitesses moyennes des puits 1 à 5 (haut en bas) : comparaison entre profils en milieu de veine ( $z = 2,5 \text{ cm}$ ) et simulation 2D

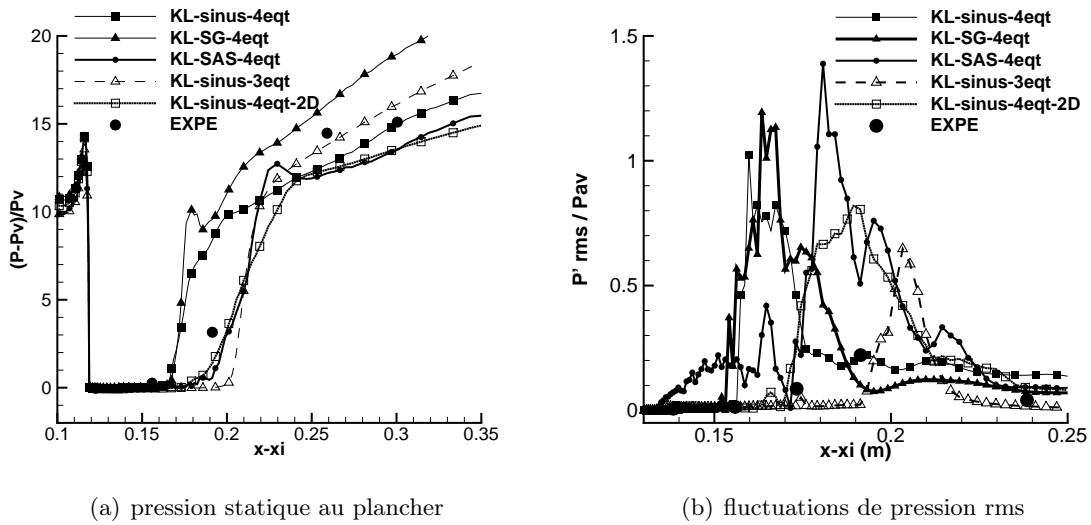


FIGURE 9.39 – Tracés du champ moyen de la pression statique et fluctuante : comparaison entre profils en milieu de veine ( $z = 2,5 \text{ cm}$ ) et simulation 2D

plifiées par les effets 3D. La figure 9.40 propose d'identifier, de manière qualitative, les zones de contraction du fluide en représentant la divergence de la vitesse. A l'aval de la re-compression, le modèle de mélange des gaz raides condense immédiatement les structures de vapeur tandis que les effets de pressions métastables du modèle sinusoïdal permettent de conserver un mélange diphasique. Ce phénomène est piloté par le mécanisme de jet rentrant. En s'éloignant de la paroi inférieure (voir figure 9.41 dans le plan ( $y = 8 \text{ mm}$ )), l'influence de ce dernier diminue, la compression est moindre et le calcul de mélange des gaz raides tolère, en partie centrale, une région de transition diphasique légèrement plus étendue.

### 9.9.2.1 Écoulement moyen bidimensionnel et vitesses aux bords

Les représentations du taux de vide sur les figures précédentes dévoilent une répartition non homogène des structures de vapeur sur l'envergure. Les mécanismes pouvant expliquer ces hétérogénéités seront détaillés par la suite. Néanmoins, il convient de vérifier au préalable une hypothèse forte posée au départ des simulations 2D : l'écoulement est en moyenne bidimensionnel en milieu de veine, c'est-à-dire que sa vitesse transversale  $w$  est statistiquement nulle. Pour cela, la figure 9.42 se concentre sur le modèle  $k - \ell - \text{sinus}$  et fournit les profils moyens des vitesses verticales  $v$  et transversales  $w$  en zone centrale ( $z = 2,5 \text{ cm}$ ) et de part et d'autre de l'envergure ( $z = 0,4 \text{ cm}$  et  $z = 4,6 \text{ cm}$ ). Les tracés sont reproduits au niveau des puits 2 à 4, là où les instabilités prépondèrent, et fournissent plusieurs informations. Premièrement, les profils à mi-envergure montrent, qu'en moyenne, le fluide ne subit pas de déplacement latéral sur la partie centrale de la géométrie. Cette vérification est un élément important quant à la validation des simulations 2D. Deuxièmement, ces profils renseignent sur la dynamique moyenne de l'écoulement à proximité des bordures. Ils mettent en avant un mouvement globalement hélicoïdal du fluide en zones latérales.

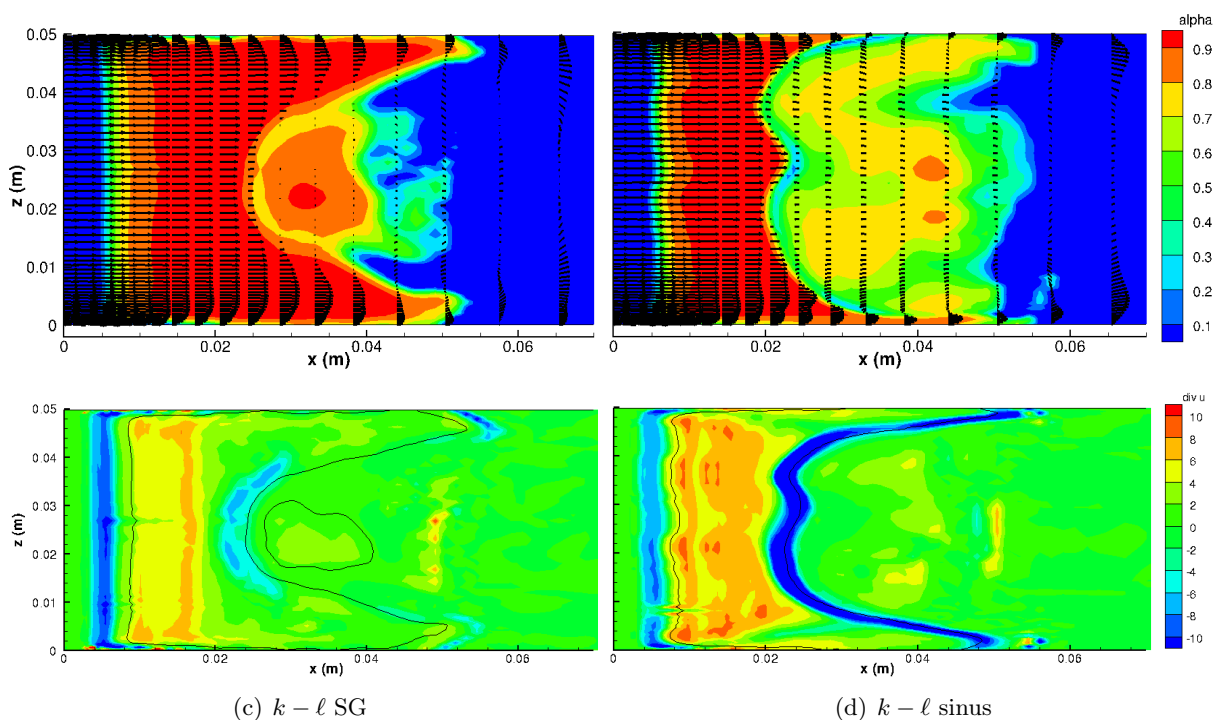


FIGURE 9.40 – Visualisation instantanée des poches de cavitation et de la divergence de la vitesse (avec isocontour de  $\alpha > 0,85$ ) dans le plan horizontal ( $y = 6\text{ mm}$ ) : comparaison des lois d'état

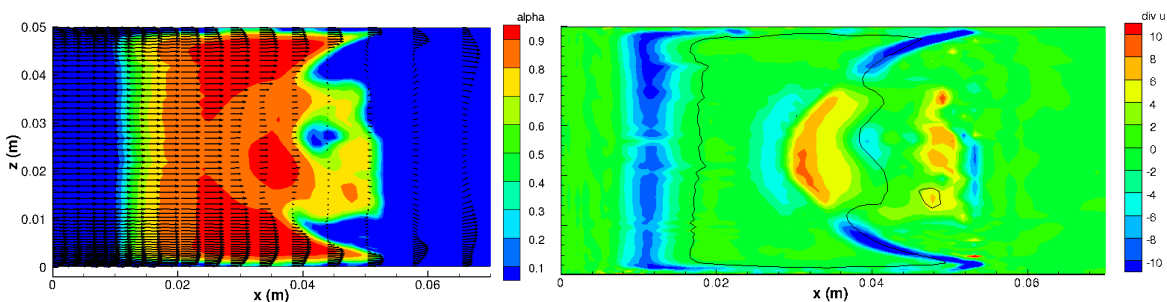


FIGURE 9.41 – Visualisation instantanée des poches de cavitation et de la divergence de la vitesse (avec isocontour de  $\alpha > 0,85$ ) dans le plan horizontal ( $y = 8\text{ mm}$ ) : modèle de mélange des gaz raides

Le liquide amont contourne la poche de cavitation par le dessus (pour  $y > 1,8 \text{ mm}$  : la vitesse  $v$  est négative; la vitesse  $w$  est positive en  $z = 4,6 \text{ cm}$  et négative en  $z = 0,4 \text{ cm}$ ) et s'infiltré par les côtés au sein de la zone diphasique (pour  $y < 1,8 \text{ mm}$  : la vitesse  $w$  est négative en  $z = 4,6 \text{ cm}$  et positive en  $z = 0,4 \text{ cm}$ ). A proximité de la paroi, l'écoulement présente donc un jet rentrant latéral qui vient renforcer la recirculation longitudinale. Dans la lignée de ces observations, la partie 9.9.4 propose une étude approfondie de la dynamique instantanée des écoulements 3D cavitants.

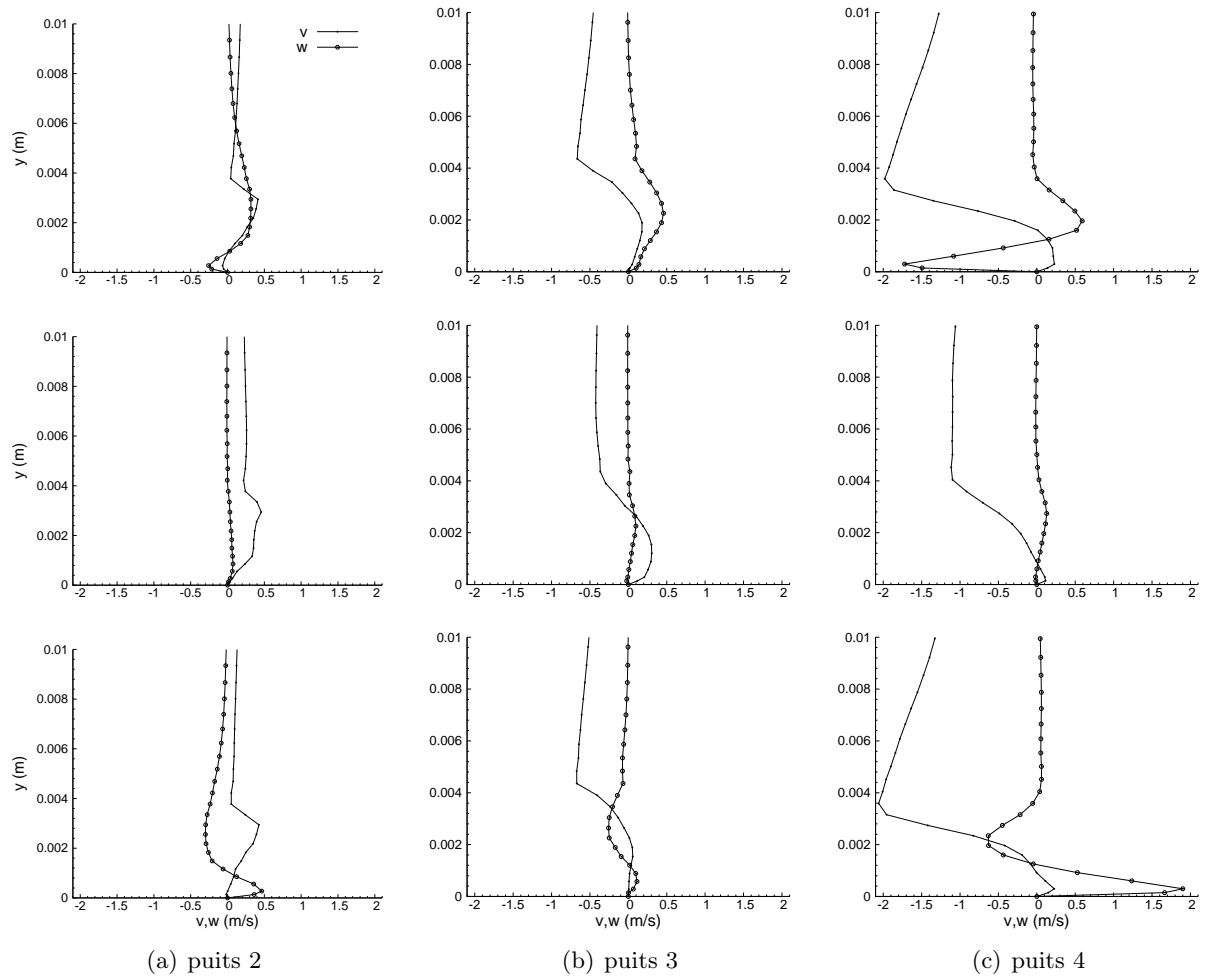


FIGURE 9.42 – Profils moyens des vitesse verticale  $v$  et transversale  $w$  pour les puits de mesure 2 à 4 aux positions transversales (de bas en haut)  $z = 0,4 \text{ cm}$ ,  $z = 2,5 \text{ cm}$  et  $z = 4,6 \text{ cm}$

### 9.9.3 Influence du modèle de turbulence

Dans le cadre des écoulements 3D, il est judicieux de s'intéresser aux effets du niveau de résolution de la turbulence sur la dynamique de l'écoulement. En cela, les modèles de turbulence RANS avancés de type SAS proposent, en théorie, une résolution plus fine des agitations de l'écoulement. En modèle à 3-équations, les simulations avaient permis de constater des dynamiques différentes entre modèles classiques et modèles SAS. En l'occurrence, l'ajout du terme SAS engendrait des battements de poche latéraux, qui n'apparaissaient pas sur la topologie d'écoulements obtenus avec un modèle classique dont la répartition s'établissait en forme de U [40]. Ce phénomène a été mis en évidence pour des calculs 3-équations couplés à des modèles  $k - \ell$ -SAS ou de Spalart et Allmaras - SAS (SA-SAS). La première catégorie présente un mode oblique de formation de la poche mais celle-ci est clairement plus visible pour la seconde modélisation. C'est pourquoi, les études comparatives qui suivent prennent pour élément de référence un calcul de 3-équations SA-SAS. Cette partie propose ainsi de visualiser de façon qualitative les écoulements obtenus avec un système à 4-équations associé à un modèle classique ou un modèle de type SAS. Les résultats seront comparés aux simulations des systèmes à 3-équations.

#### 9.9.3.1 Répartition de la vapeur

La figure 9.43 offre un premier aperçu de la répartition de la vapeur sur l'envergure, en représentant le taux de vide et les vecteurs de vitesse longitudinale dans le plan ( $y = 6 \text{ mm}$ ). Les modèles de turbulence classiques (figures 9.43(a) et 9.43(b)) prédisent une répartition homogène sur la largeur avec un léger accroissement à proximité des parois. Le sillage est soumis aux effets d'un jet rentrant à dominante longitudinale mais qui est renforcé par les effets de bords. Le modèle à 3-équations offre par ailleurs une zone diphasique plus étendue et retarde la position de la re-compression de l'écoulement. Ces illustrations sont à mettre en parallèle avec les interprétations réalisées à partir des profils moyens de la partie 9.9.1.

Les modèles de turbulence avancés modifient le comportement global de la poche. La représentation instantanée du calcul à 3-équations SAS sur la figure 9.43(d) laisse entrevoir la dynamique de battements latéraux illustrée qualitativement en partie 9.9.3.2 tandis que le terme SAS en calcul à 4-équations (figure 9.43(c)) renforce l'intensité du jet rentrant en partie centrale.

#### 9.9.3.2 Evolution temporelle

Les visualisations instantanées qui précèdent sont approfondies en représentant la dynamique des différentes poches au cours d'une période  $T_0 \approx 0,15 \text{ s}$  qui correspond à la durée d'un cycle de battements constatés pour un modèle à 3-équations SAS.

Sur cette période, la figure 9.44 met en avant la dynamique très lente proposée par le système à 3-équations de type  $k - \ell$ ; le sillage n'évolue quasiment pas au cours du temps et illustre la relative stabilité de l'écoulement dans cette région. Le système à 4-équations conserve quant à lui une répartition de vapeur en forme de U mais présente une zone de sillage plus active où les phénomènes de condensation et de vaporisation se produisent plus rapidement que pour le système à 3-équations. Ces dynamiques contrastées témoignent une nouvelle fois de l'impact de la méthode de calcul du taux de vide. Pour un système à 3-équations, celui-ci est déduit analytiquement à

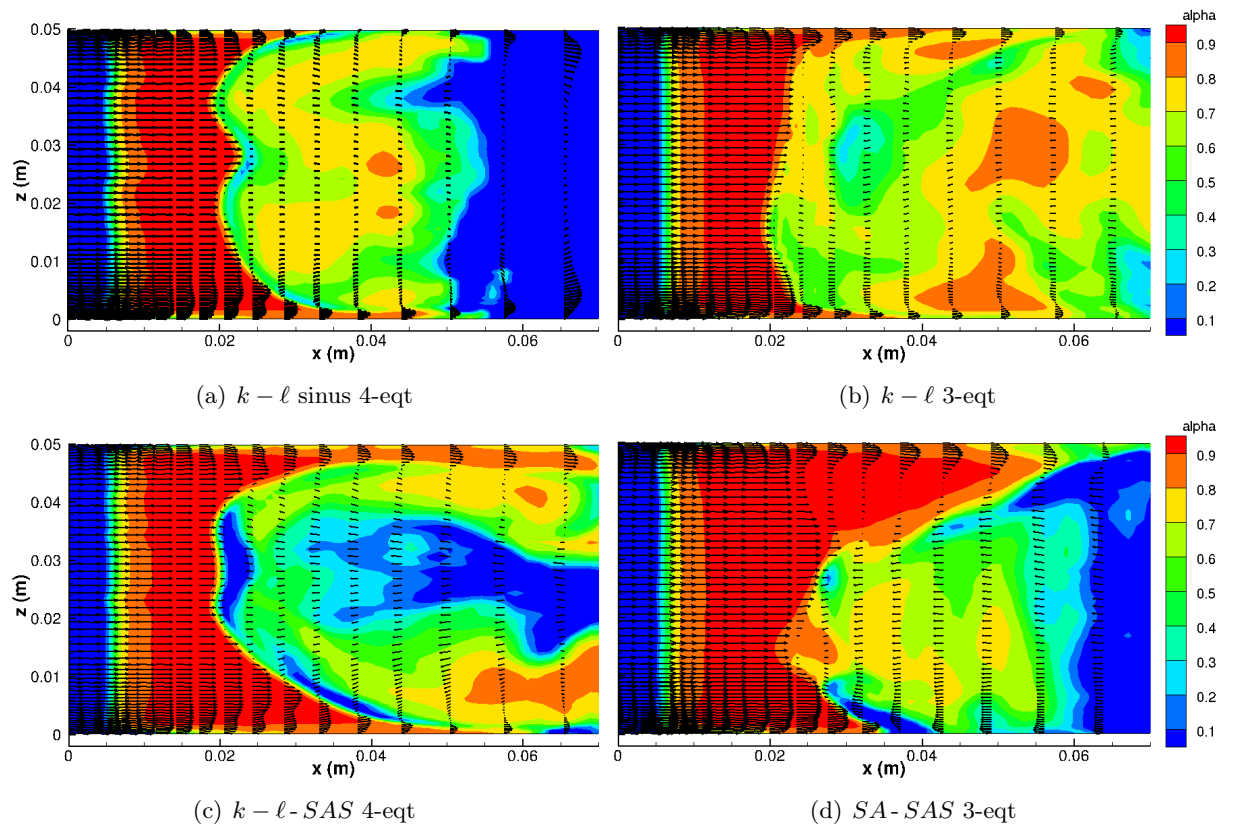


FIGURE 9.43 – Visualisation instantanée des poches de cavitation dans le plan horizontal ( $y = 6 \text{ mm}$ )

partir des valeurs de la masse volumique du mélange, les structures diphasiques évoluent lentement dans le temps. L'ajout d'une équation d'évolution et d'un terme source favorisent en revanche des variations du taux de vapeur local plus rapides.

Concernant l'influence du modèle de turbulence sur la dynamique de la poche, il est difficile de comprendre le rôle joué par le terme SAS. En effet les phénomènes de battements latéraux d'un système à 3-équations SAS (voir figure 9.45) ne sont pas retrouvés lors des simulations en système à 4-équations qui possèdent une topologie d'écoulement symétrique (voir figure 9.46). Pour cette dernière configuration, le terme SAS intensifie la force du jet rentrant par rapport à un modèle classique comme si la résolution plus fine de la turbulence participait à un accroissement des instabilités. Quoi qu'il en soit, ce type de modélisation fournit des comportements de poches caractéristiques, difficilement comparables aux modèles standards. D'un point de vue théorique la question de l'influence du degré de résolution de l'échelle turbulente mérite d'être posée. Mais il convient cependant d'être prudent par rapport à l'interprétation de ces résultats. En effet, comme cela avait été mentionné au cours des précédentes simulations [37], la taille du maillage est modeste. Dans de telles conditions, les calculs SAS n'entrent pas dans la catégorie d'un modèle sous-maille qui permettrait de capturer plus d'informations du champ moyen que les modèles classiques.

## 9.9.4 Analyse approfondie d'un écoulement 3D

### 9.9.4.1 Présentation

Les analyses menées jusqu'ici ont mis en avant, au sein des écoulements 3D, la présence d'instabilités et de mécanismes liés à la troisième dimension. En terme de fluctuations, les pressions RMS de la figure 9.39 dévoilent un accroissement de l'amplitude des oscillations pour les simulations 3D. Par rapport à ces observations, le développement d'instabilités à proximité des parois pourrait influencer la dynamique de l'écoulement au centre de la veine en venant notamment renforcer l'intensité du jet rentrant. La formation de tourbillons de coin a déjà été évoquée au cours des études menées avec un système à 3-équations [40]. Selon le modèle de turbulence choisi, ceux-ci se forment symétriquement de chaque côté de la veine, ou bien se renforcent alternativement selon les battements latéraux de la poche.

En ce qui concerne les configurations testées pour un modèle à 4-équations, les simulations présentent à chaque fois un développement quasi-symétrique de la poche de cavitation et des tourbillons de coin. Bien qu'au centre de la veine l'écoulement conserve un caractère bidimensionnel, les instabilités latérales méritent d'être détaillées afin d'apporter davantage d'informations sur le comportement des structures de cavitation en configuration 3D. La présente analyse se concentre sur le cas du modèle sinusoïdal couplé au système d'équation  $k - \ell$  de la turbulence (modèle KL-sinus du tableau 9.6). Pour cela, l'attention est portée sur trois abscisses de la géométrie représentés en figure 9.47 :

- les positions  $x = 8 \text{ mm}$  et  $x = 18 \text{ mm}$  présentent l'écoulement au sein de la partie attachée de la poche,
- les positions  $x = 38 \text{ mm}$  et  $x = 55 \text{ mm}$  correspondent respectivement à celles des puits 3 et 4 ; sous l'effet du jet rentrant, le taux d'instabilité est localement amplifié et les structures diphasiques subissent pleinement la re-compression.

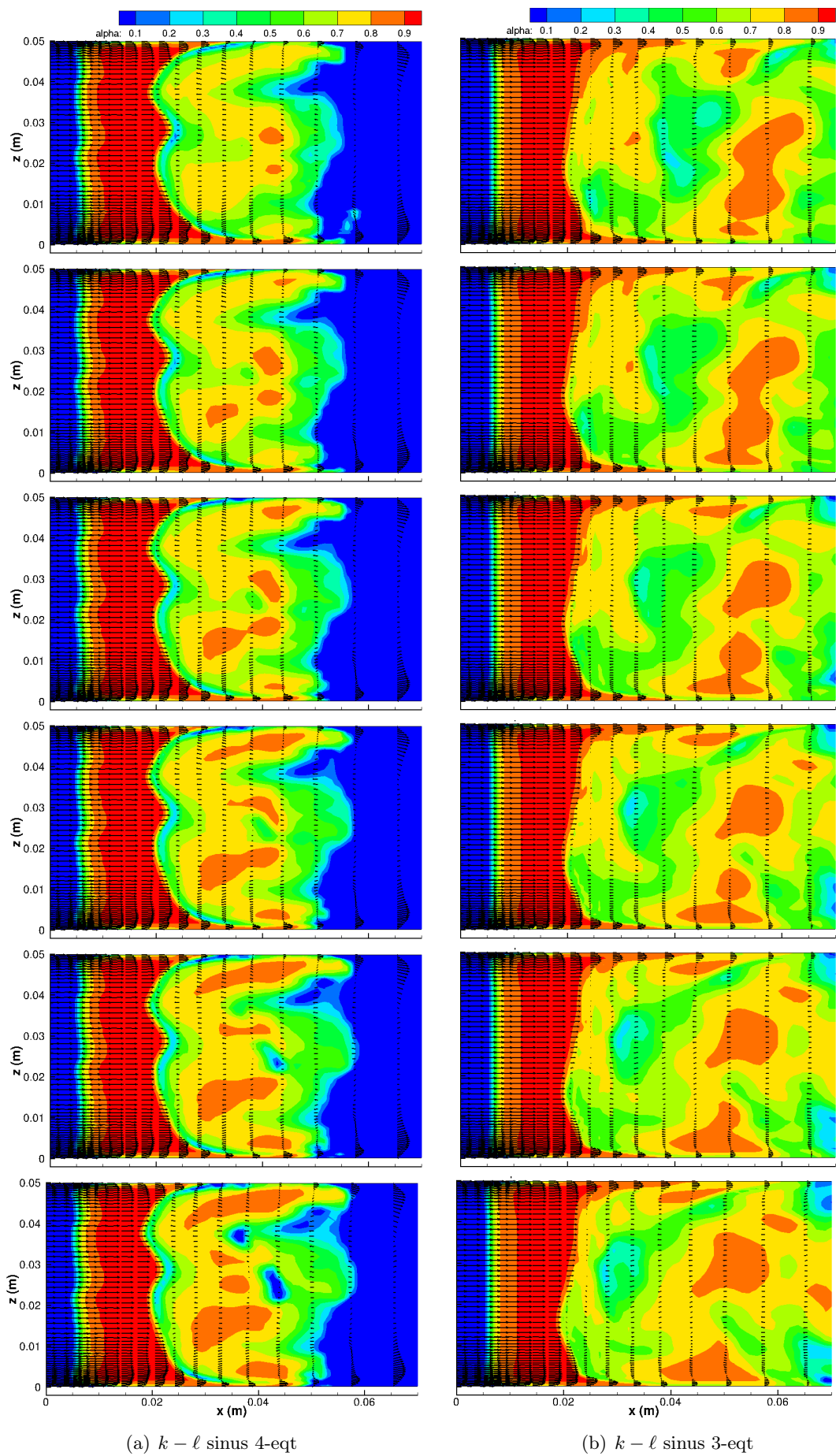


FIGURE 9.44 – Visualisation instantanée ( $y = 6 \text{ mm}$ ). Temps total  $T_0 \approx 0,15 \text{ s}$ ; temps entre deux images  $T_0/6 \approx 0,025 \text{ s}$



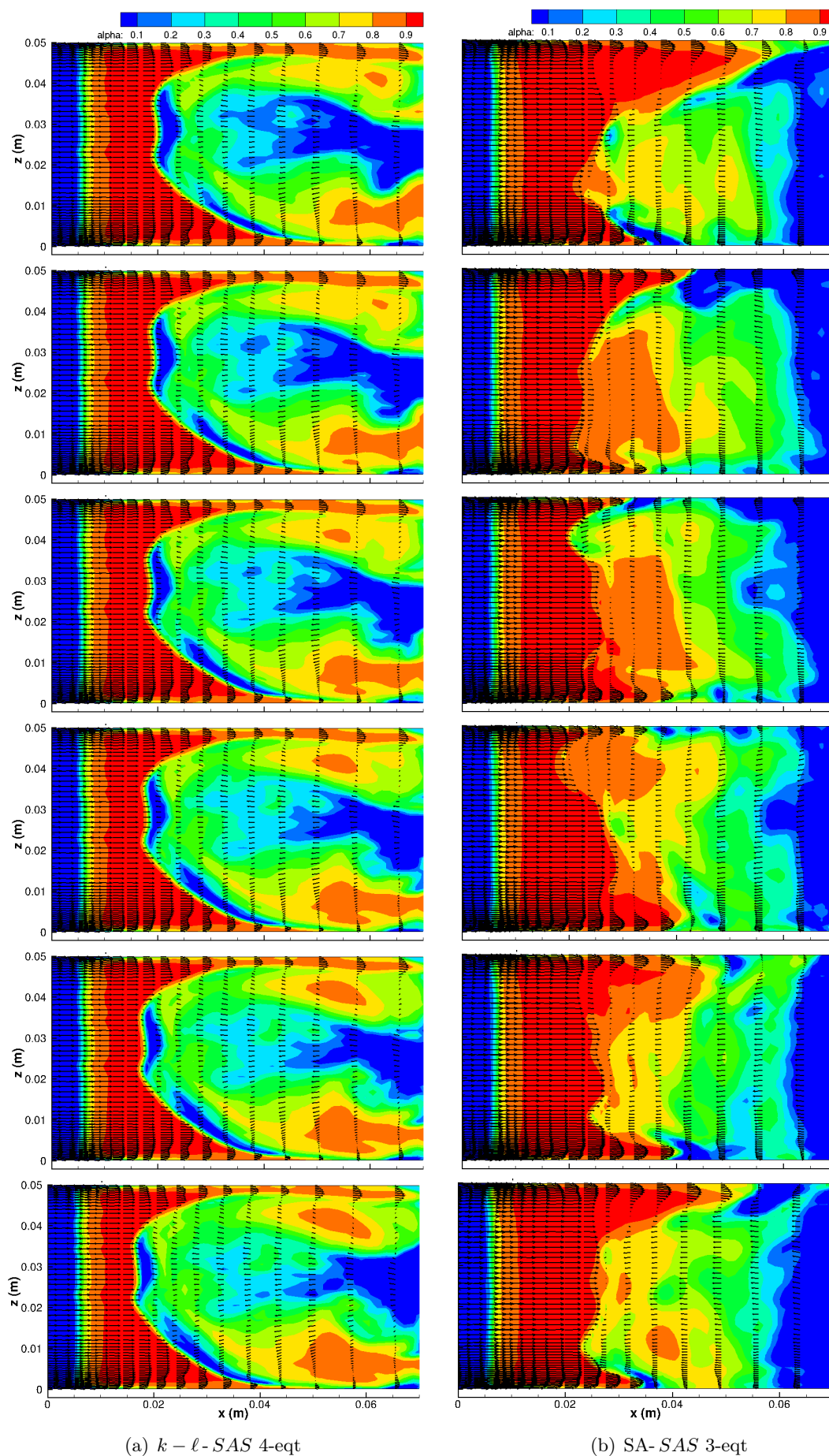


FIGURE 9.45 – Visualisation instantanée ( $y = 6 \text{ mm}$ ). Temps total  $T_0 \approx 0,15 \text{ s}$ ; temps entre deux images  $T_0/6 \approx 0,025 \text{ s}$

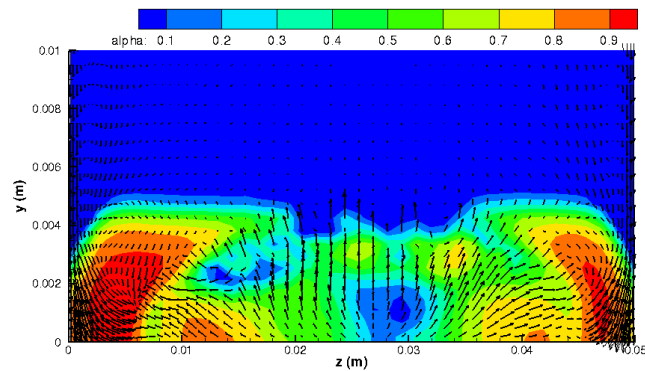


FIGURE 9.46 – Visualisation du taux de vide et du vecteur vitesse au puits 3 ( $x = 38 \text{ mm}$ ) pour une simulation 4-équations  $k - \ell - SAS$  : mise en évidence de la symétrie de l'écoulement

Les méthodes d'analyse se basent sur des représentations instantanées de l'écoulement au moyen de coupes verticales ainsi que sur une étude statistique des champs de vitesse et de taux de vide à l'altitude de  $y = 6 \text{ mm}$ , où l'intensité du jet rentrant est maximale.

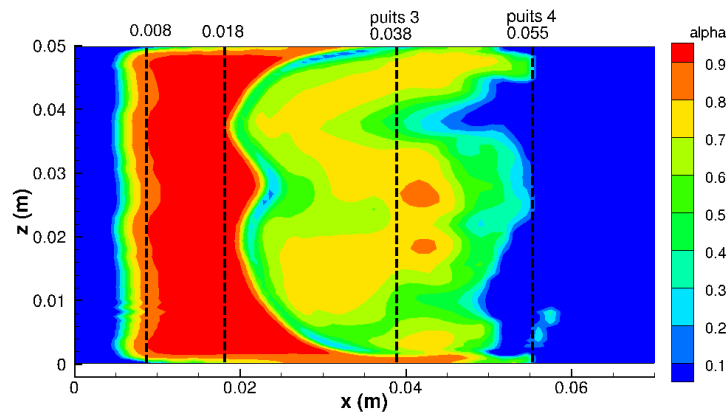


FIGURE 9.47 – Représentation des lignes transversales aux abscisses  $x = 8 \text{ mm}$ ,  $x = 18 \text{ mm}$ ,  $x = 38 \text{ mm}$  et  $x = 55 \text{ mm}$ , dans le plan horizontal ( $y = 6 \text{ mm}$ )

#### 9.9.4.2 Tourbillons de coin

En partie 9.9.2.1, les tracés des profils moyens de la vitesse transversale  $w$  ont mis en évidence les déplacements transverses subits par le fluide aux abords de la géométrie. Ces phénomènes prennent naissance en début de poche et s'accroissent dans la zone de fermeture à hauteur du puits 4. Ces mécanismes sont associés à la présence locale de tourbillons, formés à partir du décrochement au col. Les coupes verticales de la figure 9.48 offrent une observation qualitative de ces phénomènes au niveau des quatre abscisses définies précédemment. Directement à l'aval du col, à l'abscisse  $x = 8 \text{ mm}$ , l'écoulement subit l'incidence de la géométrie, le fluide poursuit dans un premier temps son ascension initiée par son parcours amont. La partie attachée de la

poche ne s'étend pas entièrement jusqu'au niveau des parois latérales. Entre les extrémités de la cavité et la paroi, subsiste une zone non cavitante au sein de laquelle s'engouffre le liquide situé au-dessus de la poche ; celui-ci est aspiré en direction du plancher où il se vaporise et vient nourrir la poche en vapeur. Plus en aval (en  $x = 38 \text{ mm}$  puis  $x = 55 \text{ mm}$ ), la concentration de vapeur diminue, les tourbillons formés en amont augmentent en intensité et sont nourris par le recollement du fluide. En zone de fermeture, les différences de vitesse entre l'écoulement rapide à proximité de la paroi et la zone de sillage quasi-stagnante engendrent la formation de tourbillons comparables à ceux générés par une instabilité de Kelvin Helmholtz et illustrés par la figure 9.49). Ces phénomènes pariétaux modifient la répartition de la vapeur sur l'envergure. D'une part les

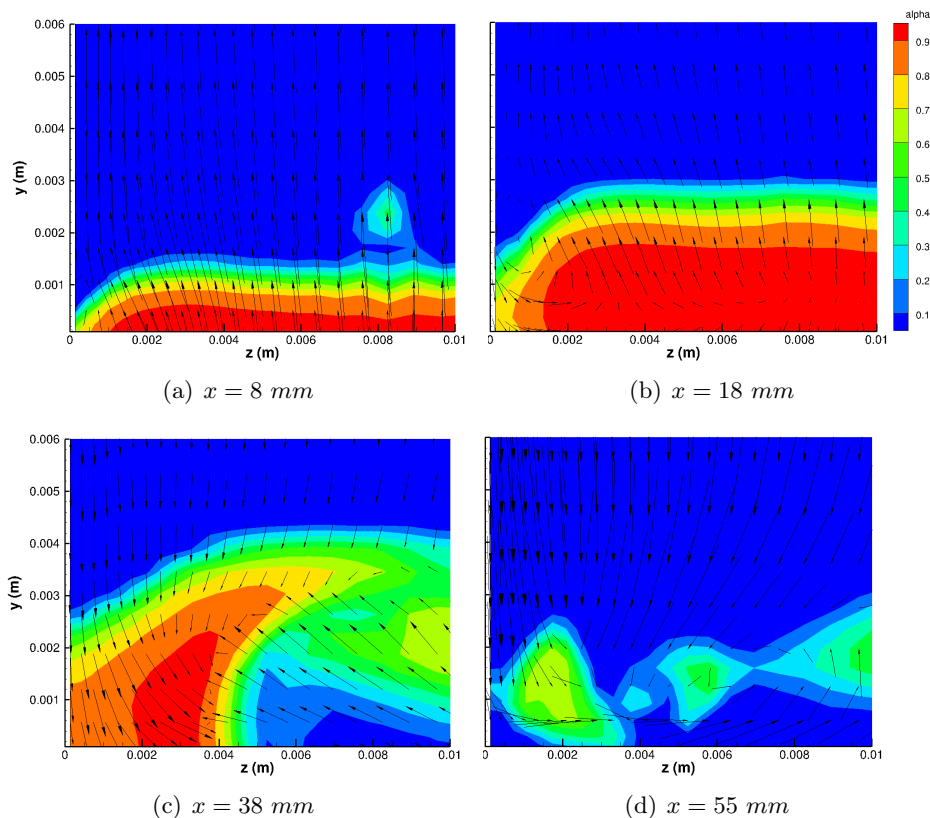


FIGURE 9.48 – Représentation du vecteur vitesse et du taux de vide dans la poche attachée (plans  $x = 18 \text{ mm}$  et  $x = 30 \text{ mm}$ ) et dans la zone de re-circulation (plans  $x = 38 \text{ mm}$  et  $x = 55 \text{ mm}$ )

tourbillons favorisent un maintien des pressions faibles, d'autre part, le fluide possède localement une quantité de mouvement plus importante qui retarde l'impact du jet rentrant longitudinal sur les structures cavitantes. Ces mécanismes favorisent le développement d'une poche attachée en forme de U et la prédominance d'instabilités au centre de la veine. Cette répartition hétérogène de la vapeur est bien illustrée par les coupes longitudinales de la figure 9.50 réalisées à la fois au centre ( $z = 2,5 \text{ cm}$ ) et aux abords de la géométrie ( $z = 0,2 \text{ cm}$  et  $z = 4,8 \text{ cm}$ ).

Bien que purement qualitatives, ces descriptions vont servir de prémisse à l'interprétation des profils moyens transversaux de la partie 9.9.4.3 qui suit.

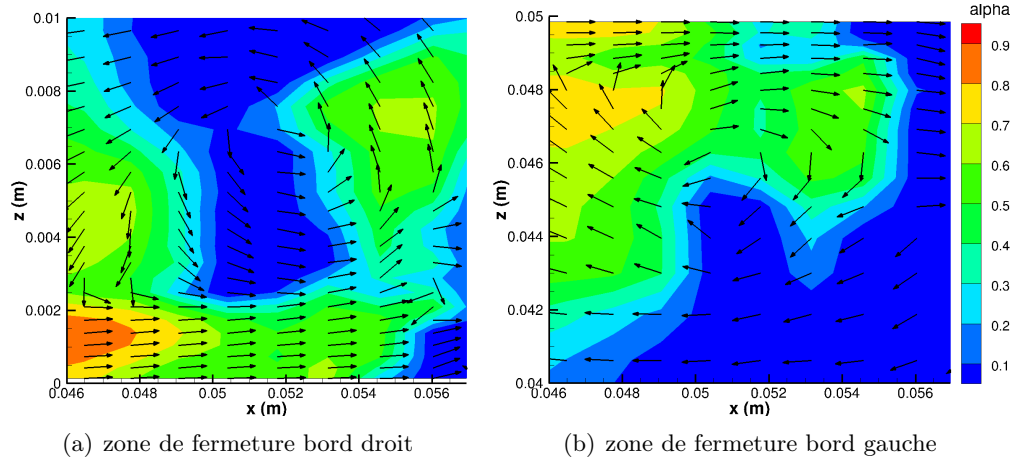


FIGURE 9.49 – Représentation du vecteur vitesse uniforme et du taux de vide en zone de fermeture dans le plan horizontal ( $y = 6 \text{ mm}$ )

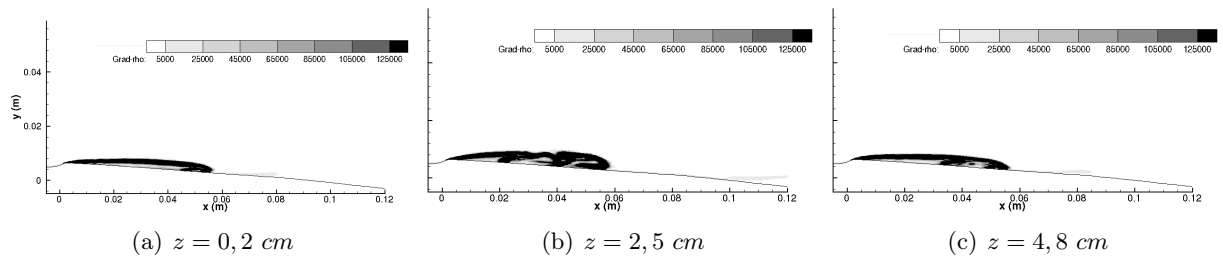


FIGURE 9.50 – Gradient de la masse volumique aux abords et au centre de la veine

### 9.9.4.3 Profils moyens transversaux

Les profils moyens transversaux de taux de vide et de la vitesse longitudinale  $u$  sont tracés en figure 9.51 ; ils renseignent sur la répartition de vapeur selon l'envergure et l'évolution de la vitesse dans sa direction principale. Au sein de la poche attachée ( $x = 8 \text{ mm}$  et  $x = 18 \text{ mm}$ ) le taux de vide atteint des valeurs maximales, excepté à proximité des parois où l'absence de vapeur permet l'infiltration du liquide. L'abscisse ( $x = 38 \text{ mm}$ ) marque la fin de la partie stable de la cavité. Le gradient de pression adverse favorise la recirculation longitudinale et accélère la condensation des structures diphasiques en partie centrale. De part et d'autre de la géométrie, le fluide s'insère dans des veines d'écoulement d'environ  $5 \text{ mm}$  d'épaisseur ; la quantité de mouvement  $y$  est localement plus élevée et engendre le maintien d'une quantité de vapeur supérieure à celle observée en partie centrale.

Afin de mieux cerner la dynamique observée sur les tranches latérales de l'écoulement, la figure 9.52 répertorie les valeurs moyennes de la vitesse verticale  $v$  et transversale  $w$ . La ligne transversale de coordonnée ( $x = 8 \text{ mm}; y = 6 \text{ mm}$ ) se positionne sur la partie supérieure de la poche attachée. Ici, le fluide contourne la cavité ; il conserve une vitesse verticale  $v$  positive (mouvement de bas en haut), en partie centrale, les déplacements latéraux sont inexistant, mais, à proximité des bordures, le fluide est aspiré au sein des veines liquides (vitesse  $w$  négative à gauche et positive à droite). D'après la forme du Venturi, la ligne de mesure suivante ( $x = 18 \text{ mm}; y = 6 \text{ mm}$ ) est positionnée en partie inférieure de la poche attachée. Dans cette région, la formation de tourbillons en bordure est mise en évidence par un mouvement du fluide qui s'opère de haut en bas et en direction du centre de la veine (vitesse  $w$  positive à gauche et négative à droite). Plus en aval, (aux abscisses  $x = 38 \text{ mm}$ ), le mouvement hélicoïdal est conservé sur les parties latérales. Le mécanisme d'aspiration est toujours visible au niveau des parois mais, sous l'impulsion de la recirculation longitudinale, l'accumulation de fluide en partie centrale est évacuée vers les extrémités (au puits 3 : vitesse  $w$  négative sur  $0,5 < z < 2,5 \text{ cm}$  et positive sur  $2,5 < z < 4,5 \text{ cm}$ ). Enfin au niveau du puits 4, la quantité de vapeur réduit drastiquement, les phénomènes de contournement ne sont désormais plus visibles et les tourbillons de coin laissent place à des lâchers tourbillonnaires comparables aux instabilités de Kelvin Helmholtz (voir figure 9.49).

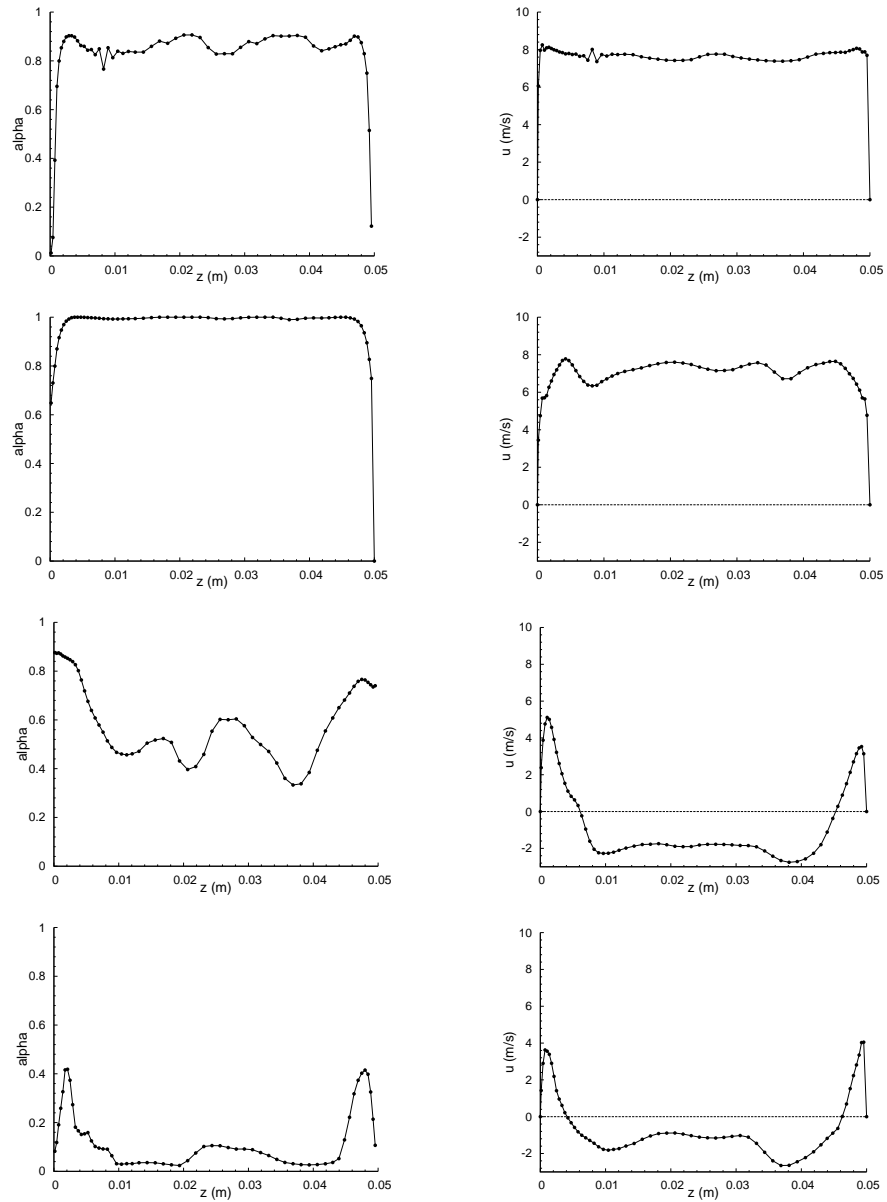


FIGURE 9.51 – Profils moyens transversaux du taux de vide  $\alpha$  et de vitesse longitudinale  $u$  : aux abscisses (de haut en bas)  $x = 8$  mm,  $x = 18$  mm,  $x = 38$  mm et  $x = 55$  mm, dans le plan horizontal ( $y = 6$  mm)

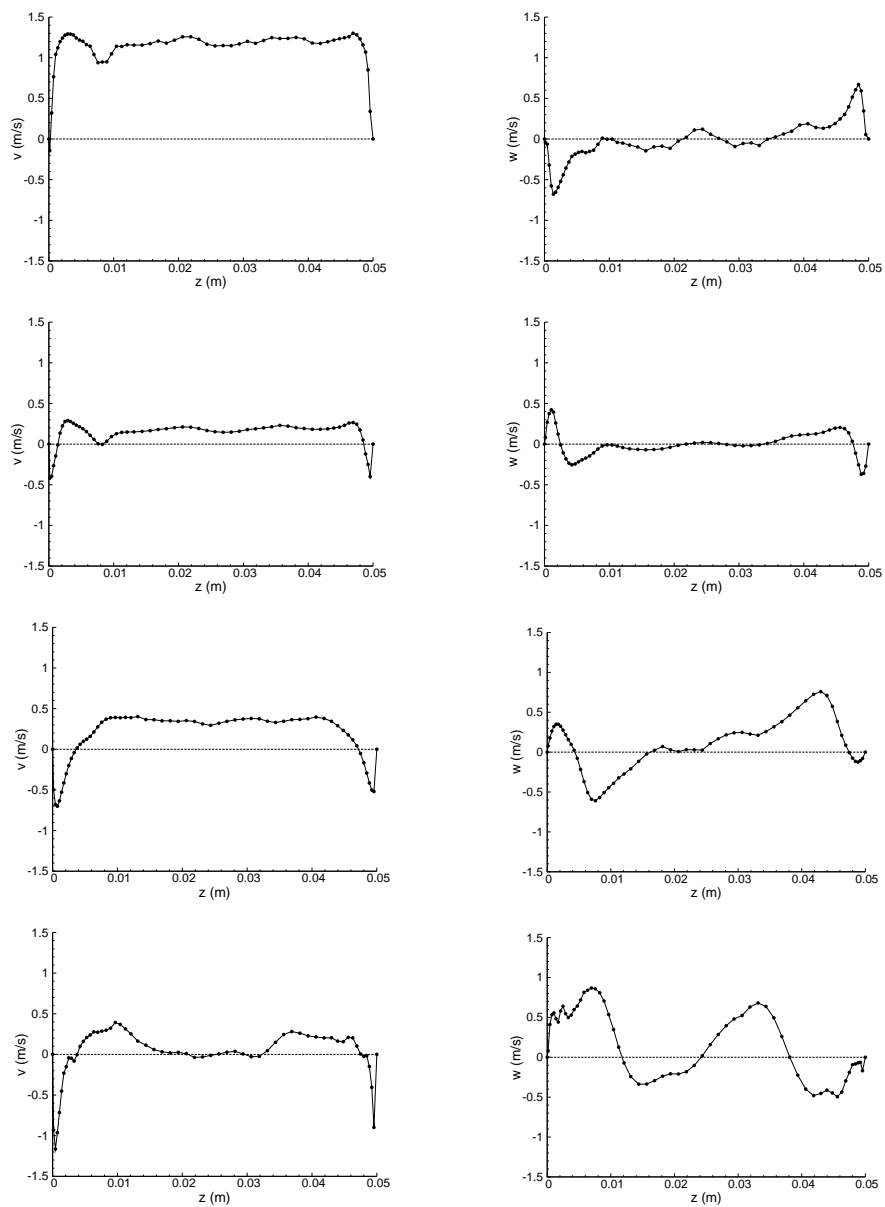


FIGURE 9.52 – Profils moyens transversaux de vitesse verticale  $v$  et transversale  $w$  : aux abscisses (de haut en bas)  $x = 8 \text{ mm}$ ,  $x = 18 \text{ mm}$ ,  $x = 38 \text{ mm}$  et  $x = 55 \text{ mm}$ , dans le plan horizontal ( $y = 6 \text{ mm}$ )

## 9.10 Conclusion

Le présent chapitre présente les résultats de simulations obtenus à partir d'un modèle à 4-équations pour une configuration d'écoulements cavitants 3D. Dans la lignée des études menées en deux dimensions, les calculs sont réalisés avec les deux fermetures thermodynamiques testées jusqu'ici : une loi d'état sinusoïdale ou une équation d'état de mélange des gaz raides. La modélisation de la turbulence emploie soit un modèle classique  $k - \ell$  soit une modélisation avancée de type SAS.

Les simulations 3D comportent trois objectifs principaux résumés ci-après.

- Mesurer la capacité des modèles à reproduire la topologie de l'écoulement en s'affranchissant de l'hypothèse d'un écoulement moyen bidimensionnel.
- Etudier l'influence de l'équation de transport de taux de vide sur la dynamique des phénomènes cavitants.
- Analyser les instabilités caractéristiques d'une configuration 3D.

Pour répondre à ces problématiques, les profils moyens tracés en milieu de veine représentent un élément d'étude important. Ils permettent à la fois de calibrer chaque calcul par rapport aux données expérimentales et proposent une comparaison entre résultats de simulations 2D et 3D. Ces mesures statistiques témoignent de la sensibilité des calculs par rapport à l'équation d'état choisie pour le calcul de la pression de mélange. D'un point de vue théorique, seule la formulation de la loi d'état sinusoïdale incorpore une modélisation des effets métastables liés aux phénomènes de la cavitation. En effet, la pression calculée via l'équation de mélange des gaz raides ne reproduit pas les phénomènes d'avance à la cavitation. Numériquement, cela se traduit par une re-compression brutale dans le cas d'un modèle de mélange des gaz raides et au contraire une meilleure reproduction du sillage diphasique de la part du modèle sinusoïdal. Ces différences sont caractéristiques du cas 3D, elles peuvent être interprétées comme la multiplication des instabilités en zone de fermeture qui impactent directement la re-compression de la phase vapeur. Cette hypothèse est appuyée par la mise en évidence de fluctuations moyennes de pression qui augmentent d'une part par rapport aux simulations 2D et d'autre part par rapport à un système à 3-équations. Dans ce sens, les représentations qualitatives de poche illustrent la présence d'un sillage plus perturbé lors des simulations avec équation de transport de taux de vide.

Les précédentes études 3D menées en modèles à 3-équations [40] mettaient en avant l'influence de la modélisation turbulente sur la dynamique de la poche. En l'occurrence, le modèle avancé de type SAS, qui propose en théorie une résolution plus fine des agitations de l'écoulement, simulaient la formation d'une instabilité transverse marquée par des oscillations latérales de la poche. Néanmoins, le manque de données expérimentales et l'absence de simulations 3D menées avec d'autres codes ne permettaient pas de déterminer si ces perturbations représentaient un phénomène physique ou étaient un artefact du modèle de turbulence. Afin de répondre à cette question la présente étude propose le couplage du système à 4-équations avec un modèle de turbulence de type SAS. Cette dernière configuration ne reproduit pas les effets de battements latéraux de la poche et remet ainsi en question la reproduction d'un phénomène lié au degré de résolution de l'échelle turbulente. Néanmoins, par rapport à un modèle classique, l'analyse qualitative du comportement de la poche témoigne d'une dynamique caractéristique de la modélisation de type SAS qui a tendance à renforcer l'instabilité de jet rentrant longitudinal.



Enfin, l'analyse de l'écoulement 3D se concentre sur l'étude de phénomènes caractéristiques liés à la prise en compte de la troisième dimension. Les simulations s'accordent sur une répartition de vapeur hétérogène sur l'envergure de la géométrie engendrée par des effets de bords. La poche formée au niveau du col constitue un obstacle à l'écoulement du liquide amont qui la contourne par le dessus et s'infiltré en partie dans des veines d'écoulements latéraux. Le long des parois, le fluide possède une vitesse accrue qui favorise le développement de tourbillons de coin. Localement, la quantité de mouvement augmente et le fluide est moins soumis aux effets du jet rentrant longitudinal. Au fil de l'écoulement la quantité de vapeur décroît, les tourbillons de coins ont tendance à s'étirer et viennent renforcer le jet rentrant longitudinal.

Au terme de ce chapitre, il convient cependant de rester très prudent par rapport à l'interprétation des différents résultats. D'une part les mesures de références sont tirées de données statistiques mesurées en milieu de veine. Celles-ci ne fournissent pas de renseignement sur les évolutions instantanées de la poche et sur sa dynamique transverse. Ainsi, les mécanismes identifiés par les simulations, présentés à l'aide de visualisations qualitatives ou quantifiés statistiquement, ne possèdent pas d'élément de comparaison. D'autre part, le coût de calcul est multiplié par vingt par rapport à une simulation 2D. Comme l'évoque cette présentation, le paramétrage des conditions de sortie des calculs 2D n'est pas extrapolable au cas 3D et la sensibilité des calculs par rapport aux modèles de cavitation et de turbulence n'est pas la même d'une dimension à l'autre. En conséquence, les études paramétriques des simulations 3D sont ici restreintes mais laissent entrevoir un champ d'expansion ambitieux qui pourrait contribuer à la fois à un calibrage affiné des différents modèles et à une plus grande universalité de l'interprétation des mécanismes 3D.



# Conclusion

## Travaux réalisés

La présente thèse a pour thématique la modélisation et la simulation d'un écoulement turbulent cavitant. Elle s'inscrit dans un contexte scientifique qui vise à améliorer la reproduction numérique de phénomènes complexes impliquant à la fois les problématiques du diphasique, des transferts d'une phase à l'autre et de la turbulence. Elle s'aligne dans la continuité de travaux numériques basés sur une approche moyennée des équations de Navier-Stokes pour un fluide homogène, au sein desquels une attention particulière était portée sur les interactions entre le champ diphasique et la modélisation de la turbulence [37]. Cette étude est motivée par la volonté d'améliorer la simulation des mécanismes de changement de phase et, de manière plus générale, la dynamique de l'écoulement cavitant en ajoutant une équation de transport de la fraction volumique de vapeur.

Afin de répondre aux attentes industrielles, les calculs se focalisent sur des écoulements de cavitation partielle qui se développe le long de paroi. Celle-ci est marquée par la formation, en fin de poche, d'un jet rentrant liquide et l'arrachement, puis la convection, de nuages de vapeur qui sont autant de phénomènes particuliers que la simulation doit être en mesure de capturer. Si les précédentes études avaient permis d'améliorer le couplage avec la modélisation de la turbulence, elles se heurtaient néanmoins à la difficulté de reproduire les instationnarités liés aux phénomènes d'advection des structures de vapeur.

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont fermées par des équations d'état qui permettent de raccorder les grandeurs thermodynamiques au système. La formulation de la pression joue un rôle essentiel sur la dynamique d'un écoulement cavitation puisqu'elle détermine en partie l'apparition et la destruction de la vapeur. Un large panel d'équations thermodynamiques est ainsi disponible dans la littérature afin de caractériser le comportement du fluide. Les présents travaux proposent de comparer deux écritures. La première est adaptée d'une loi barotrope ; elle relie la pression au taux local de vapeur et adopte, autour de la valeur médiane, un lissage de type sinusoïdale censé modéliser les effets hors équilibre. Cette loi est formulée de manière empirique et l'intervalle de la métastabilité dépend d'une valeur minimale de la vitesse du son dans le mélange. La deuxième relation est obtenue de manière analytique en respectant la démarche d'obtention de l'équation d'état des gaz raides. Chacune de ces deux approches joue un rôle essentiel sur la mise en place théorique du modèle en modifiant : d'une part la formulation de la vitesse du son, qui, par définition fait intervenir les petites variations

de pression; et d'autre part l'expression du terme de transfert de masse, construit à partir de l'équation d'état.

L'écriture moyennée des équations de la mécanique des fluides et la formulation en fluide homogène supprime toute possibilité de calculer de façon exacte les transferts de matière d'une phase à l'autre. Une fois encore ces échanges massiques doivent faire intervenir un modèle. Au sein de cette étude, l'ensemble de ces échanges est supposé proportionnel au gradient de la vitesse, selon un phénomène de gonflement mécanique du fluide dont les évolutions sont ainsi pilotées par un accroissement de la fraction volumique de vapeur dans les zones d'étirement et, au contraire, une diminution en zones de compression.

Dès lors que le modèle de cavitation est clairement défini, la première étape de son évaluation consiste à simuler des phénomènes de cavitation simples, unidimensionnels et exempt de la problématique turbulente. Cette tâche est réalisée à partir de simulations de propagation d'une onde de détente. Ces études aboutissent à une première validation du modèle avec équation de transport; chaque fermeture thermodynamique est à même de capturer les topologies de l'écoulement, avec, dans le cas d'une loi d'état sinusoïdale, la nécessité de calibrer le paramètre de la vitesse minimale du son.

La deuxième étape met en place une étude approfondie du comportement de chaque modèle à partir d'écoulements à haut nombre de Reynolds et dont la dynamique nécessite d'incorporer la modélisation de la turbulence. Deux géométries de Venturi sont pour cela étudiées.

- Le Venturi 4° possède une dynamique de poche transitionnelle; les instationnarités sont marquées par le développement d'un jet rentrant liquide en zone de fermeture.
- Le Venturi 8° est caractérisé par une taille de poche attachée très faible à l'aval de laquelle se forment des tourbillons composés d'un mélange diphasique et convectés par l'écoulement principal. Sur ce profil, la présence d'un jet rentrant liquide est associée à d'importantes oscillations de pression, causées par le collapse des structures de vapeur.

La pertinence du modèle de cavitation repose ainsi sur sa capacité à capturer chacune de ces instabilités.

Sur la géométrie du Venturi 4° la dynamique de l'écoulement diphasique est pilotée par les instabilités de la couche limite. En cela, les simulations du comportement de la poche de cavitation dépendent de la modélisation des phénomènes turbulents, c'est-à-dire du calcul de la viscosité turbulente. Les résultats mettent en avant la difficulté des modèles de turbulence classiques à reproduire les instabilités en zones diphasiques; la raison provient d'une sur-estimation de la viscosité turbulente qui annihile le développement d'une recirculation à proximité de la paroi et dont l'erreur est corrigée par l'utilisation d'une fonction correctrice de Reboud. Les calculs de cette géométrie permettent également d'étendre l'étude des interactions entre modèles de cavitation et modèles de turbulence à échelles adaptatives de type SAS. Ces derniers présentent l'avantage d'étendre le spectre des échelles de longueur turbulente calculées, atténuant ainsi les valeurs de la viscosité turbulente dans les zones de raffinement du maillage.

L'évaluation des modèles de cavitation consiste à juger d'une part les effets de l'équation de transport de taux de vide, et d'autre part l'influence du choix de l'une ou l'autre des équations d'état. Les aspects de transport apportés par l'équation supplémentaire est clairement mise en avant sur chacune des deux configurations étudiées. Si la topologie moyenne de l'écoulement n'est

pas modifiée par la méthode de calcul du taux de vapeur, l'équation de transport améliore néanmoins la reproduction des phénomènes de convection. Ces différences sont d'autant plus visibles lorsque l'angle d'ouverture augmente. L'analyse du comportement des modèles, selon le choix de l'équation d'état, nécessite de faire la distinction entre : une étude de la topologie moyenne de l'écoulement ; et une quantification de phénomènes épisodiques, liées aux instationnarités. Expérimentalement, les profils moyens de la vitesse et de la répartition de taux de vide sont bien renseignés et offrent une base de donnée de référence pour la validation des calculs. A cela, s'ajoute le tracé du profil moyen de re-compression en aval de la poche qui, pour des applications industrielles, renseigne sur l'étendue de la région de cavitation. Enfin, l'amplitude moyenne des oscillations de pression est mesurée en zone de fermeture de poche et permet d'évaluer le taux d'agitation de l'écoulement.

Sur chacune des deux géométries, les modèles de cavitation capturent une topologie d'écoulement en bon accord avec l'expérience et ces résultats témoignent de la faculté du code à reproduire le mécanisme du jet rentrant liquide. Les études sur Venturi  $4^\circ$  sont menées à la fois en configurations 2D et 3D ; elles permettent d'une part de valider l'hypothèse d'écoulements en moyenne bidimensionnel en milieu de veine et d'autre part de mettre en évidence l'influence de la troisième dimension quant à la simulation de phénomènes cavitants. Sur la géométrie de Venturi  $8^\circ$ , la modélisation du taux de vide comme une quantité transportée altère le calcul moyen du champ de pression. Il s'avère, en effet, que cette approche allonge la zone de cavitation, ce qui, par voie de conséquence, retarde la re-compression du fluide et amplifie les agitations. La suite de la procédure comparative entre références expérimentales et simulations numériques concerne l'étude de phénomènes intermittents, tels que la propagation d'ondes de condensation sur Venturi  $8^\circ$ . Les essais proposent de mesurer ces phénomènes à l'aide des spectres fréquentiels des oscillations de pression. Cette analyse plus fine révèle, dans un premier temps, une dynamique instantanée sensible au choix de l'équation de l'état, qui, selon la méthode de calcul de la pression et en particulier la plage de modélisation des pressions cavitantes, capture des fréquences différentes. Puisque les formulations de la pression modifient directement celles des vitesses du son, ces résultats révèlent le rôle particulier joué par la vitesse de propagation des perturbations sur la dynamique de l'écoulement. Mais la majeure partie des différences constatées d'un modèle à l'autre provient de la méthode de calcul de la masse volumique de vapeur. En effet, l'écriture d'une équation supplémentaire permet, en théorie, de relaxer thermodynamiquement une des variables du système. Cette étude propose ainsi de comparer les dynamiques obtenues à partir des simulations menées avec une densité de vapeur fixée à saturation ou déterminée en fonction d'une équation d'état. Les résultats mettent en avant l'importance de considérer la métastabilité de la phase vapeur dans les zones non cavitantes, c'est-à-dire, là où la vitesse de propagation des ondes de pression est la plus rapide. La relaxation thermodynamique implique des lâchers de structures de vapeur, de tailles irrégulières, associés à un accroissement des amplitudes d'oscillation de pression et du nombre de Mach qui franchit, par intermittence, la frontière sonique. Ces observations posent la question d'une reproduction, de la part des simulations, d'un phénomène de propagation d'ondes formées par le collapse des structures de vapeur et clairement évoqué par la littérature. La méthodologie de post-traitements proposées pour l'observation des phénomènes de propagation s'appuie sur des fonctions de corrélations spatio-temporelles du taux de vide et de la pression. Cette démarche reprend l'analyse utilisée récemment pour l'étude expérimentale d'un écoulement cavitant sur une

géométrie de marche descendante [108]. Ces mesures numériques nécessitent cependant d'être interprétées avec prudence ; elles sont en effet orphelines de références expérimentales sur géométrie de Venturi et la célérité des ondes est soumise au pas de temps de la discrétisation.

## Perspectives

Au vu de l'écriture théorique du modèle et des résultats obtenus sur des configurations 2D et 3D, de nombreuses pistes d'études sont envisageables. Le code de simulation possède, à l'heure actuelle, un coût de calcul trop important pour envisager une étude paramétrique approfondie ; mais son développement algorithmique, menée en parallèle de cette thèse laisse entrevoir des perspectives ambitieuses. D'une manière générale, ces travaux méritent d'être prolongés sur d'autres géométries d'étude. En effet, bien que le code ait démontré une certaine robustesse d'adaptation à la fois à travers des applications 1D du tube à détente mais également 2D et 3D sur différentes géométries de Venturi, les présentes conclusions nécessitent d'être validées sur des écoulements académiques. En cela, la base de donnée expérimentale établie en parallèle de cette thèse sur une géométrie de marche descendante [108], constitue désormais un élément de référence pour de futures comparaisons.

Au delà de ces propositions, certains aspects de ce manuscrit méritent d'être approfondies. Sur les écoulements 3D de géométrie de Venturi  $8^\circ$ , l'ajout d'une équation de transport a permis d'obtenir la simulation d'écoulements cavitants, améliorant ainsi la robustesse du code par rapport à sa version en 3-équations. Néanmoins, le comportement de la poche obtenue s'éloigne du cas expérimental. Il semble, au vu des résultats, que la troisième dimension amplifie la recirculation à l'aval du col et par conséquent sur-estime la dimension de la poche attachée. D'un point de vue numérique cette dynamique peut être calibrée à partir de différents paramètres, tels que la pression imposée en sortie de veine, la méthode de calcul de la viscosité turbulente, ou encore le taux de destruction de la quantité de vapeur du terme source.

A plus long terme, la précision des simulations passe par une diminution de la quantité d'informations modélisées. Pour cela, la mise en place du système d'équations peut être entièrement repensée selon une approche LES qui propose de simuler des plus grandes échelles et de restreindre la modélisation aux plus petites structures dissipatives. Au cours de cette thèse, cette démarche a été envisagée en appliquant la méthode au cas d'un modèle de mélange homogène ; elle s'établit en trois étapes successives :

1. convoluer les équations de conservations locales et instantanés phasiques par une fonction indicatrice de phase,
2. écrire le système sous forme monofluide et simplifier les équations en utilisant les relations de saut,
3. filtrer les équations précédemment obtenues.

L'écriture théorique de ce modèle laisse apparaître plusieurs subtilités. Dans un premier temps, cette mise en équation fait intervenir des termes spécifiques à l'interface : la tension de surface, la courbure et les transferts massiques instantanés. En effets, contrairement à une approche statistique, où les échanges étaient supposés nulles en quantités moyennes, ces termes ne disparaissent

pas lors de l'opération de filtrage. D'autre part, au terme de ce raisonnement subsistent de nombreux termes sous-mailles qui nécessitent d'être hiérarchisés afin de conserver une modélisation des seuls termes dominants. La littérature fait part de différents travaux [30, 95, 180] qui adoptent ce formalisme pour des études diphasiques sans changement de phase.

Enfin la mise en oeuvre de ce système d'équations théoriques nécessite des applications 3D puisque le processus de cascade énergétique sur lequel repose la turbulence est tridimensionnel. Cela sous-entend d'entreprendre en parallèle un travail de développement des performances du code de calcul, qui, serait dès lors utilisé sur des maillages plus fins que pour les simulation RANS.





Sixième partie

Annexes



# Annexe A

## Equations supplémentaires

Les modèles de turbulence utilisés pour la présente modélisation sont issus de leurs formulation en écoulement monophasique. Cette partie annexe présente différentes équations de transport relatives aux quantités turbulentes issues des équations d'un fluide monophasique.

### A.1 Equations d'évolution des champs fluctuants

Les équations de conservation moyennées font apparaître des champs fluctuants, dont les grandeurs peuvent intervenir dans la modélisation de la turbulence. Il est possible d'obtenir des équations du champ fluctuant par différence entre les équations instantanées et équations moyennées.

#### A.1.1 Equation de conservation des fluctuations de la masse volumique

L'équation de conservation des fluctuations de la masse volumique  $\rho'$  s'exprime :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} + \rho' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \rho u_j''}{\partial x_j} \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.2 Equation de conservation des fluctuations de la quantité de mouvement

L'équation de conservation des fluctuations de la quantité de mouvement  $\rho u_i''$  s'exprime :

$$\rho \frac{\partial u_i''}{\partial t} + \rho \tilde{u}_j \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \rho u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \rho u_j'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [-p \delta_{ij} + \sigma_{ij}] + \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{p} \delta_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{\rho} \tau_{ij}] \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Equation de transport des quantités turbulentes

### A.2.1 Equation de transport du tenseur des contraintes turbulentes

L'équation de transport du tenseur des contraintes turbulentes  $\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$  s'obtient à partir de la décomposition :

$$\overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \overline{\rho u_i'' u_j''} \quad (\text{A.3})$$

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} = u_j \frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \overline{\rho u_j}}{\partial t} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \left( \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial t} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.4})$$

Daprès [51], cette équation peut être réarrangée pour s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_k \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial x_k} = P_{ij} + \Pi_{ij} + M_{ij} - \bar{\rho} \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} D_{ijk}^T) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} D_{ijk}^V) \quad (\text{A.5})$$

La partie de gauche représente l'advection du tenseur des contraintes turbulentes. Le premier terme de la partie droite rassemble le taux de production formé par le gradient de l'écoulement principal :

$$P_{ij} = -\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_k'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \quad (\text{A.6})$$

Le second représente les corrélations pression-contraintes :

$$\Pi_{ij} = \overline{p' \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right)} = \overline{p' \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} \quad (\text{A.7})$$

Le terme  $M_{ij}$  est spécifique aux écoulements compressibles et représente la contribution du flux de masse turbulent au bilan d'énergie :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{jk}}{\partial x_k} \right) + \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{jk}}{\partial x_k} \right) + \frac{\overline{\rho' u_j'}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Le tenseur du taux de dissipation s'exprime :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \epsilon_{ij} &= \overline{\sigma_{ik}'' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} + \sigma_{jk}'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \\ &= \overline{\sigma_{ik}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + \sigma_{jk}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Les deux derniers termes sont des termes de diffusion, causée à la fois par la vitesse turbulente et les fluctuations de pression :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}D_{ijk}^T &= - \left[ \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \overline{p' (u_i'' \delta_{jk} + u_j'' \delta_{ik})} \right] \\ &= - \left[ \overline{\widetilde{\bar{\rho} u_i'' u_j'' u_k''}} + \overline{p' (u_i'' \delta_{jk} + u_j'' \delta_{ik})} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

tandis que les termes de diffusion visqueuse s'écrivent :

$$\bar{\rho}D_{ijk}^V = \overline{\sigma_{ik}'' u_j''} + \overline{\sigma_{jk}'' u_i''} = \overline{\sigma_{ik}' u_j'} + \overline{\sigma_{jk}' u_i'} \quad (\text{A.11})$$

### A.2.1.1 Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k = \frac{1}{2} \widetilde{u_i'' u_i''}$  est déduite directement de l'équation (A.5) en exprimant  $k$  comme la demi trace du tenseur des contraintes turbulentes :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j k}{\partial x_j} = P_{ij} + \Pi - \bar{\rho} \epsilon_{ij} + M_{ij} + \frac{\partial \bar{\rho} D_{ij}^T}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\rho} D_{ij}^V}{\partial x_j} \quad (\text{A.12})$$

La partie de droite fait apparaître des quantités similaires au cas du tenseur des contraintes turbulentes. La production du gradient de vitesse de l'écoulement principal s'exprime

$$P_{ij} = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$$

Deux termes spécifiques aux écoulements compressibles sont issus d'une part des corrélations pressions contraintes :

$$\Pi = \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$$

et d'autre par de la contribution du flux de masse turbulent :

$$M_{ij} = \frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

Enfin apparaissent, le tenseur du taux de dissipation :

$$\bar{\rho} \epsilon_{ij} = \overline{\sigma_{ij}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$$

et les termes de diffusion :

$$\bar{\rho}(D_{ij}^T + D_{ij}^V) = \bar{\rho} \frac{\widetilde{u_i'' u_i''}}{2} u_j'' + \overline{p' u_i'' \delta_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}' u_i''}$$

### A.2.2 Equation de transport de la dissipation turbulente

Le tenseur du taux de dissipation qui apparaît dans l'équation de transport du tenseur des contraintes turbulentes (A.4) est défini par la relation (A.9). Il peut également être exprimé à partir des fluctuations du tenseur des taux de contraintes  $s'$  et du tenseur des taux de rotations  $w'$  [50] :

$$\bar{\rho}\epsilon_{ij} = \overline{\sigma'_{ik}s'_{kj}} + \overline{s'_{ik}\sigma'_{kj}} - (\overline{\sigma'_{ik}w'_{kj}} - \overline{w'_{ik}\sigma'_{kj}}) \quad (\text{A.13})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses moyenné s'exprime :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= 2 \overline{\left( S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right)} \\ &= 2\bar{\mu} \left( \bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{S}_{kk} \delta_{ij} \right) + 2\mu' \overline{\left( s'_{ij} - \frac{1}{3} s'_{kk} \delta_{ij} \right)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La partie fluctuante de ce tenseur peut s'exprimer en effectuant la soustraction entre la partie totale et la partie moyenne, de sorte que :

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= 2\bar{\mu} \left( s'_{ij} - \frac{1}{3} s'_{kk} \delta_{ij} \right) + 2\mu' \left( s'_{ij} - \frac{1}{3} s'_{kk} \delta_{ij} \right) \\ &= 2\mu' \left( \bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{S}_{kk} \delta_{ij} \right) - 2\mu' \overline{\left( s'_{ij} - \frac{1}{3} s'_{kk} \delta_{ij} \right)} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Il est possible de déduire une expression de l'équation de transport générale pour la dissipation turbulente à partir des relations (A.13) et (A.15), mais son expression engendre plusieurs corrélations d'ordres élevés qu'il serait nécessaire de fermer.

Pour les cas compressibles, une expression simplifiée peut lui est préférée en utilisant une forme scalaire de  $\epsilon$ . Pour cela, seule la partie isotrope du tenseur est conservée et la partie anisotrope est prise égale à 0, de sorte que :

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} \quad \text{et} \quad d_{ij}^{(\epsilon)} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Dans ce cas l'expression scalaire du taux de dissipation se déduit des relations (A.13) et (A.15) :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\epsilon &= 2\bar{\mu} \overline{s'_{ik}s'_{ki}} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \overline{s'_{kk}s'_{ll}} \\ &\quad + 2\mu' \overline{s'_{ij}\bar{S}_{ij}} - \frac{2}{3} \mu' \overline{s'_{kk}\bar{S}_{ll}} + 2\mu' \overline{s'_{ik}s'_{ki}} - \frac{2}{3} \mu' \overline{s'_{kk}s'_{ll}} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

En négligeant les fluctuations de la viscosité dynamique  $\mu' \approx 0$  [50] propose l'écriture simplifiée suivante :

$$\bar{\rho}\epsilon \approx \underbrace{\overline{\mu\omega'_i\omega'_i}}_{\bar{\rho}\epsilon_s} + 2\bar{\mu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial \overline{u'_k u'_l}}{\partial x_l} - 2\overline{u'_k s'_{ll}} \right]}_{\bar{\rho}\epsilon_{inh}} + \underbrace{\frac{4}{3} \overline{\mu s'_{kk} s'_{ll}}}_{\bar{\rho}\epsilon_d} \quad (\text{A.18})$$

avec le vecteur des fluctuations de vorticité  $\omega'_k = e_{kji} w'_{ij}$  où  $e_{kji}$  désigne le tenseur d'ordre 3 des permutations. Finalement les dissipations turbulentes sont décomposées en trois parties :

- $\bar{\rho}\epsilon_s$  la contribution solénoïdale,
- $\bar{\rho}\epsilon_{inh}$  la contribution formée par l'inhomogénéité de la turbulence,
- $\bar{\rho}\epsilon_d$  la partie dilatationnelle spécifique aux écoulements compressibles.

Pour l'écriture de l'équation de transport, seule la contribution solénoïdale est retenue par [50] qui propose l'écriture suivante :

$$\frac{D\epsilon_s}{Dt} = P_{\epsilon_s}^1 + P_{\epsilon_s}^2 + P_{\epsilon_s}^3 - \Upsilon_{\epsilon_s} + T_{\epsilon_s} + D_{\epsilon_s} + T_{\epsilon_s}^c + B_{\epsilon_s} + F_{\epsilon_s} + \frac{\epsilon_s}{\bar{\mu}} \frac{D\bar{\mu}}{Dt} \quad (\text{A.19})$$

Les termes de production sont divisés en trois parties,

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_s}^1 &= 8\bar{\mu} \left( \overline{w'_{ij}w'_{jk}S_{ki}} + \overline{w'_{ij}s'_{jk}W_{ki}} \right) \\ &= 2\bar{\mu} \left[ \left( \overline{\omega'_i\omega'_j S_{ij}} + \overline{\omega'_i s'_{ij} \bar{\Omega}_j} \right) - \left( \overline{\omega'_i\omega'_i S_{jj}} + \overline{\bar{\Omega}_i\omega'_i s'_{jj}} \right) \right] \end{aligned}$$

la production turbulente associée aux gradients de la vitesse moyenne et où  $\bar{\Omega}_j$  désigne le vecteur de la vorticité moyenne,

$$P_{\epsilon_s}^2 = -2\bar{\mu} \overline{u'_k \omega'_i \frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial x_k}} \quad (\text{A.20})$$

la production causée par le gradient de vorticité moyenne, et

$$P_{\epsilon_s}^3 = 2\bar{\mu} \left( \overline{\omega'_i \omega'_j s'_{ji}} - \overline{\omega'_i \omega'_i s'_{jj}} \right) \quad (\text{A.21})$$

la production par étirement des tourbillons générés par le gradient des fluctuations de vitesse.

La destruction visqueuse s'exprime :

$$\Upsilon_{\epsilon_s} = 2\bar{\mu} \overline{\left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\omega'_r}{\rho} \right) \right] \left( e_{rji} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} \right)} \quad (\text{A.22})$$

Le transport par la turbulence et la diffusion visqueuse sont respectivement donnés par les équations :

$$T_{\epsilon_s} = -\bar{\mu} \overline{\frac{\partial u'_k \omega'_i \omega'_i}{\partial x_k}} \quad (\text{A.23})$$

et

$$D_{\epsilon_s} = 2\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\left[ \frac{\omega'_r}{\rho} \left( e_{rji} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} \right) \right]} \quad (\text{A.24})$$

Le terme

$$T_{\epsilon_s}^c = \overline{\bar{\mu} \omega'_i \omega'_i s'_{kk}} \quad (\text{A.25})$$

désigne le transport turbulent compressible et

$$B_{\epsilon_s} = -2\bar{\mu} \overline{\left( \frac{\omega'_r}{\rho^2} \right) \left[ e_{rij} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right]} \quad (\text{A.26})$$

est un terme barocline due à la force exercée par le gradient de pression.

Enfin

$$F_{\epsilon_s} = 2\bar{\mu} \overline{\left( \frac{\omega'_r}{\rho^2} \right) \left[ e_{rji} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right]} \quad (\text{A.27})$$

sont les contributions relatives au gradient des contraintes visqueuses.

### A.3 Equation de transport des fluctuations de la masse volumique avec échanges massiques

Dans le cas diphasique, l'équation de transport des fluctuations de la masse volumique de chaque phase s'obtient par différence entre l'équation instantanée (2.8) et l'équation moyennée (2.34) :

$$\frac{\partial \rho'_k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_k u''_{k,j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho'_k \tilde{u}_{k,j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho'_k u''_{k,j}}{\partial x_j} = \frac{1}{\alpha_k} \left[ \bar{\rho}_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \bar{\rho}_k \tilde{u}_{k,j} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} - \Gamma_k \right] \quad (\text{A.28})$$

En supposant les phases incompressibles,  $\rho'_k = 0$  et en remarquant l'égalité  $\tilde{u}_k = \bar{u}_k$  l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial u'_{k,j}}{\partial x_j} = \frac{1}{\alpha_k} \left[ \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \bar{u}_{k,j} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} - \frac{\Gamma_k}{\bar{\rho}_k} \right] = -\frac{\partial \bar{u}_{k,j}}{\partial x_j}$$

En utilisant la forme limite du théorème de Gauss (2.31) et les relations (2.25) et (2.36) le développement se poursuit :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{u}_{k,j}}{\partial x_j} &= -\overline{\frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_j}} + \frac{1}{T_k} \sum_{\text{disc de T}} \frac{1}{|v_{int,j} n_j|} u_{k,j} n_j \\ &= u_{k,j} \cdot n_j \frac{\delta I}{\alpha_k} \\ &= u'_{k,j} \cdot n_j \frac{\delta I}{\alpha_k} \end{aligned}$$

Soit finalement l'égalité :

$$\frac{\partial u'_{k,j}}{\partial x_j} = u'_{k,j} \cdot n_j \frac{\delta I}{\alpha_k} \quad (\text{A.29})$$

qui signifie que la divergence des fluctuations de la vitesse par phase n'est pas nulle pour les écoulements diphasiques, même si chaque phase pure est considérée comme incompressible.



# Annexe B

## Modèles de turbulence supplémentaires

### B.1 Modèles avec échelle intégrale de la turbulence

#### B.1.1 Le modèle $k - k\ell$ de Rotta

Une des remarques qui peut être faite par rapport aux modèles  $k - \epsilon$  ou  $k - \omega$  est de baser la résolution de l'échelle de longueur sur la dissipation de la turbulence  $\epsilon$ . Or le phénomène dissipatif s'établit aux plus petites échelles du spectre turbulent, c'est-à-dire aux échelles de la viscosité turbulente  $L_\mu$ , et l'objectif initial de modéliser la physique des plus gros tourbillons est perdu. D'autre part l'équation simplifiée du transport de la dissipation (3.8) est obtenue par analogie sur l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et implique par conséquent l'omission de certains termes et phénomènes physiques représentés dans l'équation de transport exacte. A partir de ce constat, une autre approche a été proposée par Rotta [138, 137] qui propose de baser sa seconde équation de transport sur la quantité  $k\ell$  où la longueur  $\ell$  représente l'échelle intégrale de la turbulence.

Le modèle  $k - k\ell$  formulé par Rotta [138] est synthétisé dans l'article [112] dont cette présentation s'inspire en grande partie. En considérant un écoulement bidimensionnel dont le cisaillement dominant s'établit dans la direction  $\vec{y}$ , Rotta définit la quantité  $\Psi = k\ell$  par la relation :

$$k\ell = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ii}(\vec{x}, r_y) dr_y \quad (\text{B.1})$$

où le facteur  $\frac{3}{16}$  est choisi arbitrairement. Le tenseur  $R_{ij}$  est défini par l'équation :

$$R_{ij}(\vec{x}, r_y) = \overline{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + r_y)} \quad (\text{B.2})$$

qui exprime la corrélation entre un point fixe par rapport au référentiel et un point se déplaçant selon la direction  $\vec{y}$  et où l'opérateur de moyenne d'ensemble  $(\bar{\cdot})$  est employé. Afin d'établir l'équation de transport sur  $\psi$  Rotta respecte la démarche suivante.

1. L'équation de transport des fluctuations au point fixe est multipliée par les fluctuations de vitesse au point mouvant.
2. L'équation de transport des fluctuations au point mouvant est multipliée par les fluctuations de vitesse au point fixe.

3. Les deux équation de transport sont sommées.
4. La relation obtenue est intégrée selon la direction  $\vec{y}$ .
5. L'équation est moyennée selon une moyenne d'ensemble.

Il obtient au final l'équation :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} + \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \bar{u}(\vec{x} + r_y)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}(\vec{x})}{\partial x} R_{ii} dr_y \right]}_{\text{convection}} = \\
& \underbrace{-\frac{3}{16} \frac{\partial \bar{u}(\vec{x})}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} R_{21} dr_y - \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{u}(\vec{x} + r_y)}{\partial y} R_{12} dr_y}_{\text{production}} \\
& + \underbrace{\frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_k} (R_{(ik)i} - R_{i(ik)}) dr_y + \nu \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial r_k^2} dr_y}_{\text{destruction}} \\
& \underbrace{-\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_{(i2)i} + \frac{1}{\rho} (\overline{p'v'} + \overline{v'p'}) \right] dr_y - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}}_{\text{diffusion}} \quad (B.3)
\end{aligned}$$

Le premier indice se réfère au point fixe et est regroupé entre parenthèse pour les indices trois. Le référentiel est choisi en prenant pour direction  $\vec{y}$  celle du cisaillement principal et  $\bar{u}$  représente la moyenne d'ensemble pour la vitesse dans la direction  $\vec{x}$ . Ainsi, dans les termes de convection, le terme intégral comporte des dérivées par rapport à  $x$  qui sont négligeables au devant des termes intégraux, en dérivées partielles par rapport à  $y$ , du membre de droite.

Le second terme du membre de droite :

$$I = -\frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{u}(\vec{x} + r_y)}{\partial y} R_{12} dr_y \quad (B.4)$$

contient le gradient des vitesses moyennes au point mouvant. Afin de modéliser ce terme, Rotta propose un développement en série de Taylor selon la direction de déplacement du point mouvant :

$$\frac{\partial \bar{u}(\vec{x} + r_y)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}(\vec{x})}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}(\vec{x})}{\partial y^2} r_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{u}(\vec{x})}{\partial y^3} r_y^2 + \dots \quad (B.5)$$

qui, une fois ré-introduit dans l'équation (B.4), permet d'obtenir la relation :

$$I \approx \frac{\partial \bar{u}(\vec{x})}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} dr_y + \frac{\partial^2 \bar{u}(\vec{x})}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y dr_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{u}(\vec{x})}{\partial y^3} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y^2 dr_y + \dots \quad (B.6)$$

Le premier terme de cette expression peut être regroupé avec le terme de production de l'équation (B.3). Le terme en dérivée seconde est négligé par Rotta qui considère donc que la principale contribution ajoutée au terme intégral provient du terme en dérivée troisième. D'autre part il

introduit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} L_{12,1} &= \frac{3}{16 \overline{u'v'}} \int_{-\infty}^{\infty} (R_{12} + R_{21}) dr_y \\ L_{12,n} &= \left[ \frac{3}{16(n-1)! \overline{u'v'}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y^{n-1} dr_y \right]^{1/n} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Il les modélise par :

$$L_{12,1} = \tilde{\xi}_1 \ell \quad \text{et} \quad L_{12,3}^3 = \tilde{\xi}_2 \ell^3$$

en émettant l'hypothèse que toutes les échelles de longueur issues de l'équation (B.7) sont proportionnelles les unes aux autres.

Le terme de destruction est modélisé par :

$$\frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_k} (R_{(ik)i} - R_{i(ik)}) dr_y + \nu \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial r_k^2} dr_y \approx \tilde{\xi}_3 k^{3/2} \quad (\text{B.8})$$

Enfin le terme de diffusion est modélisé par une hypothèse de gradient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_{(i2)i} + \frac{1}{\rho} (\overline{p'v'} + \overline{v'p'}) \right] dr_y - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \quad (\text{B.9})$$

où  $\sigma_\Psi$  représente le coefficient de diffusion et  $\nu_t$  la viscosité cinématique turbulente telle que :

$$\nu_t = C_\mu \frac{\Psi}{\sqrt{k}} \quad (\text{B.10})$$

Finalement le modèle  $k - k\ell$  se compose du système d'équation suivant :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\ell} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad \text{avec} \quad P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = -\overline{u'v'} \left( \hat{\xi}_1 \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \hat{\xi}_2 \ell^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} \right) - \hat{\xi}_3 k^{3/2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \quad (\text{B.12})$$

Les coefficients sont proposés par Rotta [138] sont présentées ci-après :

- $\hat{\xi}_1 = 1.2$ ,
- $0,11 < \hat{\xi}_3 < 0.13$  qui couvre l'intervalle du coefficient de Loitsianskii ( $2 < \sigma < 4$ ) pour une turbulence isotrope décroissante,
- $\hat{\xi}_2$  est déterminée à partir des contraintes de raccord dans la zone logarithmique ( $\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$  ;  $k = \sqrt{C_\mu} u_\tau^2$  ;  $\ell = \kappa y$  ;  $\nu_t = \mu_t \kappa y$ ) :

$$\hat{\xi}_2 = -\frac{1}{2\kappa^2} \left( \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_3 \frac{1}{C_\mu^{3/4}} + \frac{1}{\sigma_\Psi} \kappa^2 \frac{1}{C_\mu^{1/2}} \right) \implies -3,24 < \hat{\xi}_2 < -2,88 \quad (\text{B.13})$$

La principale différence de l'équation de  $k - \ell$  par rapport aux autres modèles est l'apport d'un terme en dérivée troisième du champ de vitesse. Les autres membres possèdent en effet leur

équivalent dans les modèles  $k - \epsilon$  ou  $k - \omega$ . L'hypothèse de négliger le terme en dérivée seconde repose sur la nature du produit  $R_{12}r_y$  qui est antisymétrique et dont la contribution devient nulle en intégrant entre  $-r_y$  et  $+r_y$ . Le terme en dérivée troisième devient ainsi l'élément principal dans la détermination de l'échelle de longueur. Cependant, ce type de modèle implique plusieurs difficultés évoqués dans [112] lors de sa mise en place. D'un point de vue physique, il n'y a pas de raison à ce que la dérivée troisième influence fortement l'échelle turbulente. Par ailleurs le terme  $-\overline{u'v'}\hat{\xi}_2\ell^3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial y^3}$  est positif dans la région de couche limite et endosse ainsi le rôle d'un terme source alors qu'il devrait s'apparenter à un terme puits afin d'obtenir un profil de vitesse logarithmique. A partir de ces analyses Menter et Egorov ont proposé un modèle dérivé présenté ci après.

## B.1.2 Le modèle $k - \sqrt{k}\ell$ - SAS

### B.1.2.1 Présentation du modèle

Les travaux de Menter et Egorov [114, 112, 113] reprennent la mise en équation de Rotta qui propose de calculer l'échelle de longueur turbulente à partir d'une équation de transport sur  $k\ell$ . Cependant, ils partent du principe que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}r_y dr_y$  ne peut plus être considérée égale à zéro pour un écoulement inhomogène et nécessite d'être modélisé. Les auteurs prennent pour exemple le cas d'une couche limite logarithmique, au sein de laquelle la distribution  $R_{12}$  n'est plus symétrique. Pour ce type d'écoulement, les tourbillons qui se développent au dessus du point fixe auront une taille supérieure à ceux formés en dessous. Le niveau de corrélation serait par conséquent plus important pour les tourbillons supérieurs et l'hypothèse d'homogénéité ne tient plus. Dans ce modèle, la contribution principale pour la détermination de l'échelle de longueur provient du terme en dérivée seconde de l'équation (B.6).

Un tel raisonnement nécessite de définir un indicateur de "non homogénéité" exprimé par la longueur de l'échelle turbulente de Von Karman :

$$L_{vk} = \kappa \left| \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}} \right| \quad (\text{B.14})$$

Ce terme comprend :

- $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ , la dérivée seconde de la vitesse qui est nulle en écoulement homogène
- $\kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  qui, une fois multiplié par l'échelle de longueur turbulente  $\ell$ , permet d'adimensionner la quantité  $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$

Le terme en dérivée seconde peut ainsi être introduit dans la seconde équation de transport en considérant :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}r_y dr_y \approx P_k \frac{k\ell}{k} \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 \quad \text{avec} \quad P_k = \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{B.15})$$

Finalement, Menter propose un modèle  $k - \Phi$  à deux équations de transport avec désormais  $\Phi = \sqrt{k}\ell$  :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \bar{\rho} P_k - C_\mu^{3/4} \bar{\rho} \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \Phi - \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] = \frac{\Phi}{k} \bar{\rho} P_k \left( \xi_1 - \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 \right) - \xi_3 \bar{\rho} k \quad (\text{B.17})$$

avec :

$$\mu_t = C_\mu^{1/4} \bar{\rho} \Phi, \quad L_{vk} = \kappa \left| \frac{U'}{U''} \right|, \quad |U'| = S, \quad |U''| = \sqrt{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}} \quad (\text{B.18})$$

Les coefficients du modèles sont donnés dans le tableau B.1 après calibration du modèle sur des écoulements de couche limite et des écoulements cisailés libres.

TABLE B.1 – Coefficients du modèle  $k - \sqrt{k}\ell$

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\sigma_\phi$	$\sigma_k$	$C_\mu$	$\kappa$
0,8	1,47	0,0288	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0,09	0,41

### B.1.2.2 La Scale Adaptive Simulation

Dans leur article [112] Menter et Egorov s'emploient à démontrer l'intérêt des modèles dérivés de la formulation de Rotta par rapport au modèles de turbulence précédents. Les équations des modèles  $k - \epsilon$  ou  $k - \omega$  standard ne permettent pas de déterminer directement l'échelle de longueur de la turbulence. En prenant pour exemple les équations de transport du modèle  $k - \omega$ , il vient pour l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j k - (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] = \bar{\rho} P_k - \beta^* \bar{\rho} k \omega$$

où le terme source se divise en un terme de production qui s'exprime :  $\bar{\rho} P_k = \mu_t S^2 = \bar{\rho} \frac{k}{\omega} S^2$  selon les relations (3.10) et (3.14), et un terme de destruction :  $\beta^* \bar{\rho} k \omega$ . L'équilibre du terme source conduit finalement à la relation :

$$S \sim \omega$$

Ainsi, la seule variable introduit par le terme source est le tenseur du taux de déformation  $S$ , exprimé à partir du gradient des vitesses de l'écoulement moyen et de dimension  $[S] = [\mathcal{T}^{-1}]$ . La seule information transmise par l'écoulement moyen à l'écoulement turbulent est donc une information temporelle, en l'occurrence la fréquence turbulente  $\omega$ . Le constat sur la seconde équation de transport est le même :

$$\frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \omega - (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \alpha \frac{\omega}{k} \bar{\rho} P_k - \beta \bar{\rho} \omega^2$$

puisque le terme source à l'équilibre conduit également à la relation  $S \sim \omega$ . La seule échelle de longueur introduite par les modèles de turbulence provient de l'expression du terme de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_t \sigma^{(*)} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \sim \mu_t \frac{\theta}{\delta^2} \quad \text{avec} \quad \theta = k \text{ ou } \omega \quad \text{selon l'équation}$$

et où  $\delta$  est proportionnel à l'épaisseur de la couche cisailée. La même démonstration est possible pour le modèle  $k - \epsilon$ .

Le comportement des modèles basés sur une équation de transport du terme  $k\ell$  est différent. L'équation de transport sur  $k$  fournit toujours une information temporelle mais l'originalité provient du terme source lié à l'équation sur  $k\ell$  qui permet d'estimer une échelle de longueur de la turbulence. Pour le modèle  $k - \sqrt{k}\ell$ , le terme source issu de l'équation (B.16) permet d'établir :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}P &\sim \rho \frac{k^2}{k^{1/2}\ell} C_\mu^{3/4} \\ \Leftrightarrow C_\mu^{1/4} \bar{\rho} k^{1/2} \ell S^2 &\sim \bar{\rho} \frac{k^2}{k^{1/2}\ell} C_\mu^{3/4} \\ \Leftrightarrow S^2 &\sim \frac{k}{\ell^2} = \omega \end{aligned}$$

et d'estimer une échelle de temps de la turbulence. Le terme source de l'équation (B.17) conduit, pour sa part, à la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}\ell}{k} \bar{\rho} P_k \left( \xi_1 - \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 \right) &\sim \xi_3 \rho k \\ \Leftrightarrow C_\mu^{3/4} \ell^2 \frac{k}{\ell^2} \left( \xi_1 - \xi_2 \left( \frac{\ell}{L_{vk}} \right)^2 \right) &\sim \xi_3 k \\ \Leftrightarrow \ell &\sim \left[ \frac{\xi_1 - \xi_3 / C_\mu^{3/4}}{\xi_2} \right]^{1/2} L_{vk} \end{aligned}$$

La seconde équation de transport transmet donc au modèle une échelle de longueur  $\ell$  proportionnelle à l'échelle de Von Karman  $L_{vk}$ .

L'échelle de Von Karman a été introduite par la relation (B.14), et mesure la variation des contraintes de cisaillement dans l'écoulement. Pour un écoulement dans lequel les contraintes de cisaillement sont homogènes, le terme  $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$  tend vers 0 et l'échelle de la turbulence prend alors des valeurs infinies. Menter interprète ce phénomène comme la fusion des tourbillons qui partagent le même temps de retournement quel que soit leur position. L'intérêt de l'introduction de cette nouvelle échelle intervient dans le cas d'écoulements non homogènes, pour lesquels les tourbillons ne partagent plus la même fréquence et dont la taille est par conséquent liée au taux de contrainte local et à ses variations spatiales.

Les développements précédents résument ainsi la structure des modèles SAS. L'échelle de longueur turbulente s'ajuste par rapport aux échelles déjà résolues de l'écoulement et fournit un spectre de turbulent dont la taille des plus petites structures est limitée par la taille de grille du maillage.

## Annexe C

# Modélisation d'un écoulement cavitant

### C.1 Paramètres thermodynamiques de la loi d'état des gaz raides

Saurel [150] présente une méthode de détermination des capacités calorifiques  $C_{p_k}$  et  $C_{v_k}$ , du coefficient  $p_{\infty,k}$  et de l'énergie de référence  $q_k$  de chaque phase à partir des données expérimentales des valeurs à saturation de la pression  $P_{vap}(T_k)$ , des enthalpies  $h_{k,exp}(T_k)$ , des volumes spécifiques phasiques  $1/\rho_{k,exp}(T_k)$  et de la chaleur latente de vaporisation  $L_{v,exp}(T_k) = h_{v,exp}(T_k) - h_{l,exp}(T_k)$ .

La méthode est brièvement présentée ci-après :

- L'expression de l'enthalpie (4.4) donne :

$$\frac{dh_k}{dT_k} = \gamma_k C_{v,k} = C_{p_k}$$

Cette relation détermine le coefficient  $C_{p_k}$  à partir d'une approximation linéaire entre deux états de références  $T_{ref,0}$  et  $T_{ref,1}$  de sorte que :

$$C_{p_k} = \frac{h_{k,exp}(T_{ref,1}) - h_{k,exp}(T_{ref,0})}{T_{ref,1} - T_{ref,0}}$$

et permet le calcul des énergies de référence :

$$q_k = h_{k,exp}T_{ref,0} - C_{p,k}T_{ref,0}$$

- L'utilisation de la courbe de pressions de vaporisation  $P_{vap}(T_k)$  donne les valeurs des masses volumiques à saturation. L'équation (4.3) permet d'écrire :

$$\rho_{k,sat}(T_k) = \frac{P_{vap}(T_k) + p_{\infty,k}(T_k)}{(C_{p,k} - C_{v,k})T_k} \quad (C.1)$$

A partir d'une différentiation logarithmique il vient :

$$d \ln(\rho_{k,sat}(T_k)) = d \ln(P_{vap}(T_k) + p_{\infty,k}) - d \ln(T_k)$$

L'intégration entre deux états de référence donne :

$$\ln(\rho_{k,sat}(T_{ref,1})) - \ln(\rho_{k,sat}(T_{ref,0})) = \ln(P_{vap}(T_{ref,1}) + p_{\infty,k}) - \ln(P_{vap}(T_{ref,0}) + p_{\infty,k}) + \ln(T_{ref,0}) - \ln(T_{ref,1})$$

et permet le calcul des coefficients  $p_{\infty,k}$  :

$$p_{\infty,k} = \frac{T_{ref,1}P_{vap}(T_{ref,0})/\rho_{k,sat}(T_{ref,0}) - T_{ref,0}P_{vap}(T_{ref,1})/\rho_{k,sat}(T_{ref,1})}{T_{ref,0}/\rho_k(T_{ref,1}) - T_{ref,1}/\rho_k(T_{ref,0})}$$

- L'équation (C.1) prise à la température de référence  $T_{ref,0}$  et le calcul précédent de  $C_{p,k}$  donnent une approximation de  $C_{v,k}$  :

$$C_{v,k} = C_{p,k} - \frac{P_{vap}(T_{ref,0}) + p_{\infty,k}}{T_{ref,0}\rho_k(T_{ref,0})}$$

- L'approximation de  $\gamma_k$  se déduit facilement :

$$\gamma_k = \frac{C_{p,k}}{C_{v,k}}$$

- Les constantes entropiques  $q'_k$  sont fixées telles que  $q'_l = 0 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $q'_v$  est choisie de manière à obtenir la meilleure cohérence entre les courbes théoriques et expérimentales.

L'ensemble des simulations proposé dans ce manuscrit utilise une loi d'état des gazs raides au sein des phases pures. La suite de la modélisation consiste à proposer des équations d'états exprimant la température et la pression au sein du mélange

## C.2 Expression de la vitesse du son dans une phase pure

Dans la phase pure, le système est fermée thermodynamiquement par une équation d'état des gazs raides. Il est possible d'obtenir une equation simplifiée de la vitesse du son au sein de la phase  $k$ , dépendant uniquement de la température  $T_k$  :

$$c_k = (\gamma_k - 1)C_{p_k}T_k \quad (\text{C.2})$$

### Démonstration

La vitesse du son sur une isentropique s'exprime par la relation :

$$c_k^2 = \left( \frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k}$$

or

$$dp_k = \left( \frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{e_k} d\rho_k + \left( \frac{\partial p_k}{\partial e_k} \right)_{\rho_k} de_k = c_k^2 d\rho_k$$



Sur une isentropique  $ds_k = 0$ , donc

$$de_k = T_k ds_k - p_k d\left(\frac{1}{\rho_k}\right) = \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k$$

d'où

$$c_k^2 = \left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k}\right)_{e_k} + \frac{p_k}{\rho_k^2} \left(\frac{\partial p_k}{\partial e_k}\right)_{\rho_k}$$

soit encore :

$$c_k^2 \left(\frac{\partial e_k}{\partial p_k}\right)_{\rho_k} = \left(\frac{\partial p_k}{\partial e_k}\right)_{\rho_k} \left(\frac{\partial e_k}{\partial p_k}\right)_{\rho_k} + \frac{p_k}{\rho_k^2}$$

or

$$\left(\frac{\partial e_k}{\partial p_k}\right)_{\rho_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k}\right)_{e_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial e_k}\right)_{p_k} = -1$$

donc

$$c_k^2 = \frac{\frac{p_k}{\rho_k^2} - \left(\frac{\partial e_k}{\partial \rho_k}\right)_{p_k}}{\left(\frac{\partial e_k}{\partial p_k}\right)_{\rho_k}} \quad (\text{C.3})$$

En exprimant  $e_k$  grâce à la loi d'état des gazs raides :

$$e_k = \frac{p_k + \gamma_k p_{k,\infty}}{(\gamma_k - 1)\rho_k} + q_k$$

La relation (C.3) se simplifie pour donner :

$$c_k^2 = \frac{\gamma_k (p_k + p_{k,\infty})}{\rho_k}$$

d'autre part en utilisant les relations des gazs raides :

$$\begin{aligned} p_k &= (\gamma_k - 1)\rho_k(e_k - q_k) - \gamma_k p_{k,\infty} \\ T_k &= \frac{1}{C_{p_k}} \left( e_k + \frac{p_k}{\rho_k} - q_k \right) \end{aligned}$$

et en égalisant :

$$(e_k - q_k) = \frac{p_k + \gamma_k p_{k,\infty}}{(\gamma_k - 1)\rho_k} = C_{p_k} T_k - \frac{p_k}{\rho_k}$$

soit

$$\gamma_k \frac{p_{k,\infty} + p_k}{\rho_k} = (\gamma_k - 1) C_{p_k} T_k$$

Finalement une relation simplifiée de la vitesse du son est obtenue :

$$c_k^2 = (\gamma_k - 1) C_{p_k} T_k$$

### C.3 Vitesse du son dans le mélange

#### C.3.1 Expression générale de la vitesse du son

La vitesse du son dans le mélange peut s'exprimer à partir des enthalpies, énergie internes et masse volumique du mélange selon la formulation :

$$c_m^2 = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{s_m} = \frac{h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}} \quad (\text{C.4})$$

Un développement des différents termes est proposé ci-après :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial \rho_m} \right)_{\rho_m} &= \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} + \frac{(\rho_v h_v - \rho_l h_l)}{\rho_l - \rho_v} \left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m, \alpha} \left[ \alpha \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial T_m} \right)_{p_m} + (1 - \alpha) \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial T_m} \right)_{p_m} \right] \\ h_m - \left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} &= \frac{\rho_v \rho_l}{\rho_m(\rho_l - \rho_v)} (h_v - h_l) - \rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} \end{aligned}$$

*Démonstration*

#### Expression de la vitesse du son

En partant de la relation thermodynamique sur l'énergie interne de mélange :

$$de_m = T_m ds_m + \frac{p_m}{\rho_m^2} d\rho_m$$

il vient :

$$d(\rho_m e_m) = \rho_m T_m ds_m + h_m d\rho_m$$

La relation entre l'énergie interne de mélange et l'enthalpie donne également :

$$d(\rho_m h_m) = d(\rho_m e_m) + dp_m \rho_m T_m ds_m + h_m d\rho_m$$

Par suite, l'expression différentielle de  $\rho_m h_m$

$$d(\rho_m h_m) = \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} d\rho_m + \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} dp_m$$

permet d'obtenir l'égalité

$$\left[ \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{\rho_m} - 1 \right] dp_m = \rho_m T_m ds_m + \left[ h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} \right] d\rho_m$$

La vitesse du son sur une isentropique se déduit finalement :

$$c_m^2 = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{s_m} = \frac{h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}}{\left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{\rho_m} - 1} = \frac{h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}} \quad (\text{C.5})$$

### Expression des coefficients

La première étape consiste à développer le dénominateur :

$$\left(\frac{\partial \rho_m \epsilon_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m} = \alpha \left(\frac{\partial \rho_v \epsilon_v}{\partial p_v}\right)_{\rho_m} + (1 - \alpha) \left(\frac{\partial \rho_l \epsilon_l}{\partial p_l}\right)_{\rho_m} + (\rho_v h_v - \rho_l h_l) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_m}\right)_{\rho_m}$$

D'après l'équation d'état

$$e_k = \frac{p_k + \gamma_k p_{k,\infty}}{(\gamma_k - 1)\rho_k} + q_k$$

il vient :

$$\left(\frac{\partial \rho_k e_k}{\partial p_k}\right)_{\rho_k} = \frac{1}{\gamma_k - 1}$$

et donc

$$\alpha \left(\frac{\partial \rho_v \epsilon_v}{\partial p_v}\right)_{\rho_m} + (1 - \alpha) \left(\frac{\partial \rho_l \epsilon_l}{\partial p_l}\right)_{\rho_m} = \frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1 - \alpha}{\gamma_l - 1} = \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1}$$

D'autre part en développant

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_m}\right)_{\rho_m, T_m} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho_m}\right)_{p_m, T_m} \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial T_m}\right)_{\alpha, p_m} \left(\frac{\partial T_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m, \alpha} \\ &= \frac{1}{\rho_l - \rho_v} \left( \alpha \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial T_m}\right)_{p_m} + (1 - \alpha) \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial T_m}\right)_{p_m} \right) \left(\frac{\partial T_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m, \alpha} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\left(\frac{\partial \rho_m \epsilon_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m} = \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} + \frac{(\rho_v h_v - \rho_l h_l)}{\rho_l - \rho_v} \left(\frac{\partial T_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m, \alpha} \left[ \alpha \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial T_m}\right)_{p_m} + (1 - \alpha) \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial T_m}\right)_{p_m} \right]$$

### C.3.2 Vitesse du son pour un modèle à l'équilibre thermodynamique

La vitesse du son dans le mélange pour un système à l'équilibre thermodynamique complet peut s'exprimer :

$$c_m^2 = \left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right)_{s_m} = \frac{h_m - \left(\frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m}\right)_{p_m}}{\left(\frac{\partial \rho_m \epsilon_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m}}$$

Les hypothèses introduites en partie 4.2.3.2 fournissent une expression simplifiée des différents coefficients :

$$\begin{aligned} h_m - \left(\frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m}\right)_{p_m} &= \frac{\rho_v^{\text{sat}} \rho_l^{\text{sat}} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}})} \\ \left(\frac{\partial \rho_m \epsilon_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m} &= \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} \\ &+ \frac{(\rho_v^{\text{sat}} h_v - \rho_l^{\text{sat}} h_l)}{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}} \frac{1}{\frac{dP_{\text{vap}}}{dT_m}} \left[ \alpha \left(\frac{d\rho_v}{dT_m}\right)_{P_{\text{vap}}} + (1 - \alpha) \left(\frac{d\rho_l}{dT_m}\right)_{P_{\text{vap}}} \right] \end{aligned}$$

L'hypothèse d'égalité des enthalpies libre permet d'évaluer les variations de pressions de vaporisations en fonction de la température selon la formulation :

$$\frac{dP_{vap}^{eq}(T_{ref})}{dT_m} = \frac{\frac{C}{T_{ref}} - \frac{B}{T_{ref}^2}}{1 - \frac{D}{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty,v}}} \quad (C.6)$$

avec  $B$ ,  $C$  et  $D$  des coefficients constants.

Démonstration

A l'équilibre thermodynamique les enthalpies libres sont supposées égales :

$$\begin{aligned} g_l &= g_v \\ \Leftrightarrow h_l - T_m s_l &= h_v - T_m s_v \end{aligned}$$

L'utilisation de l'équation (4.6) permet d'écrire :

$$\ln(p_m + p_{\infty,v}) = A + \frac{B}{T_m} + C \ln(T_m) + D \ln(p_m + p_{\infty,l}) \quad (C.7)$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  dépendent des paramètres phasiques :

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_{pl} - C_{pv} + q'_v - q'_l}{C_{pv} - C_{vv}} & B &= \frac{q_l - q_v}{C_{pv} - C_{vv}} \\ C &= \frac{C_{pv} - C_{pl}}{C_{pv} - C_{vv}} & D &= \frac{C_{pl} - C_{vl}}{C_{pv} - C_{vv}} \end{aligned}$$

Par dérivation de (C.7) il vient :

$$\frac{dp_m(T_m)}{dT_m} = \frac{\frac{C}{T_m} - \frac{B}{T_m^2}}{1 - \frac{D}{p_m + p_{\infty,v}}} \quad (C.8)$$

La suite du développement évalue la pression dans le mélange à partir de la pression de vaporisation pour une température de référence, soit :  $p_m(T_m) = P_{vap}(T_{ref})$ . L'expression (C.8) est modifiée pour s'écrire désormais :

$$\frac{dP_{vap}^{eq}(T_{ref})}{dT_m} = \frac{\frac{C}{T_{ref}} - \frac{B}{T_{ref}^2}}{1 - \frac{D}{P_{vap}(T_{ref}) + p_{\infty,v}}} \quad (C.9)$$

### C.3.3 Vitesse du son avec transferts de masse pour une équation d'état de mélange des gaz raides

#### a/ Modèle sans effets thermodynamiques

Le modèle sans effets thermodynamique propose de relaxer la masse volumique de la phase vapeur en la calculant à partir de l'équation (4.3) des gaz raides. L'estimation :

$$\left( \frac{d\rho_k}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \approx 0$$

est valable que pour la phase liquide mais n'est pas vérifiée pour la phase vapeur. Aussi une estimation des coefficients du dénominateur (4.30) doit être effectuée avant de proposer une écriture simplifiée de la vitesse du son sans effets thermodynamique de la forme :

$$c_m^2 = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v)} \quad (C.10)$$

#### *Démonstration*

L'objectif de la démonstration consiste à proposer une écriture simplifiée de l'équation (4.30) sous la forme :

$$\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1}$$

En considérant que la masse volumique de la phase liquide est constante et égale à sa valeur à saturation :  $\left( \frac{d\rho_l}{dT_m} \right)_{P_{vap}} \approx 0$  cela revient à démontrer qu'en eau froide :

$$\frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1} \gg \frac{(\rho_v h_v^{ref} - \rho_l^{sat} h_l^{ref})}{\rho_l^{sat} - \rho_v} \left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m, \alpha} \alpha \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial T_m} \right)_{p_m}$$

En considérant que :

$$\left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m, \alpha} \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial T_m} \right)_{p_m} = \frac{1}{c_v^2}$$

il faut vérifier que pour toutes valeurs de  $\alpha$  :

$$\underbrace{\frac{(\rho_v h_v^{ref} - \rho_l^{sat} h_l^{ref})}{\rho_l^{sat} - \rho_v} \alpha \frac{1}{c_v^2} (\gamma_m(\alpha) - 1)}_{\text{Coeff}} \ll 1$$

Pour cela le terme Coeff est comparé à 1 pour les valeurs des quantités phasiques du tableau C.1 sur une plage de  $\alpha$  de 0 à 1. La Figure C.1 démontre que ce coefficient est petit devant l'unité, en particulier pour les valeurs inférieures à la valeur médiane de  $\alpha$  à laquelle est étudié l'écoulement. Par la suite ce terme sera négligé pour la modélisation de la vitesse du son avec couplage au champ thermique. Finalement :

$$\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1}$$

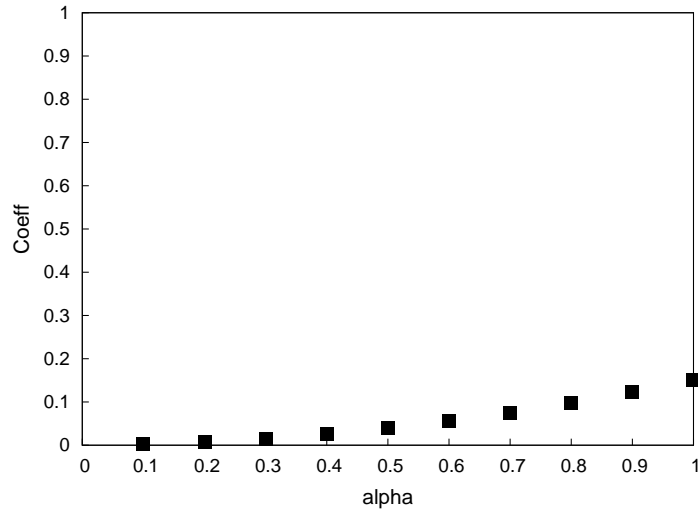


FIGURE C.1 – Evaluation du terme Coeff par rapport à 1

et

$$c_m^2 \approx (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v \rho_l^{sat} (h_v^{ref} - h_l^{ref})}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v)}$$

TABLE C.1 – Valeurs des quantités phasiques

$\rho_v^{sat}(T_{ref})$	$\rho_l^{sat}(T_{ref})$	$C_{v_v}$	$C_{v_l}$	$\gamma_v$	$\gamma_l$	$T_{ref}$	$c_v$
$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	-	-	$K$	$m.s^{-1}$
0.0173	1.01	1421.67	4141.58	1.32	1.01	293	423.1

### C.3.4 Vitesse du son avec transferts de masse pour une loi d'état sinusoïdale

#### a/ Modèle avec effets thermodynamiques

A partir des hypothèses de la partie 4.2.3.3 il est possible d'exprimer la vitesse du son au sein du mélange avec prise en compte des effets thermodynamiques selon la formulation :

$$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} \frac{dP_{vap}}{dT_m} + \rho_m C_{p_m} \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}}{\rho_m C_{p_m} - \frac{dP_{vap}}{dT_m}}$$

Démonstration

La démonstration repart de l'expression générale de la vitesse du son (4.28) :

$$c_m^2 = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{s_m} = \frac{h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}}$$

où le numérateur peut se développer :

$$h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} = \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} - \rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}$$

L'objectif consiste à faire apparaître les variations de pressions en fonction de la masse volumique, pour cela la démonstration utilise l'égalité :

$$- \left( \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{T_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} -\rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}} &= \rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{T_m} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}} \\ &= \rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{T_m} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m}} \end{aligned}$$

Le modèle considère les masse volumique par phase constantes et égales à leurs valeurs à saturation. Le taux de vide est alors relié linéairement à la masse volumique du mélange et ainsi :

$$\left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{T_m} = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \alpha} \right)_{T_m} = \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}$$

D'autre part en estimant les variations de température par rapport à la pression selon la relation

$\left( \frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} \approx \frac{1}{\frac{dP_{vap}}{dT_m}}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}} &= \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m} \left( \frac{\partial p_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m}} \\ &= \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} \frac{dP_{vap}}{dT_m} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m}} \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m} &= \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m} - \left( \frac{\partial p_m}{\partial T_m} \right)_{\rho_m} \\ &= \rho_m C_{p_m} - \frac{dP_{vap}}{dT_m} \end{aligned}$$

la vitesse du son s'exprime finalement

$$c_m^2 = \frac{\frac{\rho_l^{sat} \rho_v^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} \frac{dP_{vap}}{dT_m} + \rho_m C_{p_m} \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}}{\rho_m C_{p_m} - \frac{dP_{vap}}{dT_m}}$$

### b/ Modèle sans effets thermodynamiques

Le modèle sans effets thermodynamiques néglige les variations de pressions de vaporisation et de masse volumique en fonction de la température et propose de calculer la vitesse du son selon la formulation :

$$c_m^2 = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} + \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}$$

#### Démonstration

La démonstration repart de l'expression générale de la vitesse du son (4.28) :

$$c_m^2 = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_{s_m} = \frac{h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}}$$

où le numérateur peut se développer :

$$h_m - \left( \frac{\partial \rho_m h_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m} = \frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} - \rho_m C_{p_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \rho_m} \right)_{p_m}$$

En utilisant la relation (4.30) avec  $\left( \frac{\partial \rho_k}{\partial T_m} \right)_{p_m} \approx 0$  il vient :

$$\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m} = \frac{1}{\gamma_m(\alpha) - 1}$$

et donc

$$\frac{\rho_v \rho_l (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l - \rho_v)} \frac{1}{\left( \frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m}} = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})}$$



D'autre part en reprenant le développement de la partie Annexe C.3.4 et en considérant

$\left(\frac{\partial p_m}{\partial T_m}\right)_{\rho_m} \approx \frac{dP_{vap}}{dT_m} \ll \rho_m C_{p_m}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
-\rho_m C_{p_m} \left(\frac{\partial T_m}{\partial \rho_m}\right)_{p_m} \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho_m e_m}{\partial p_m}\right)_{\rho_m}} &= \rho_m C_{p_m} \left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right)_{T_m} \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho_m e_m}{\partial T_m}\right)_{\rho_m}} \\
&= \rho_m C_{p_m} \left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right)_{T_m} \frac{1}{\rho_m C_{p_m} - \underbrace{\left(\frac{\partial p_m}{\partial T_m}\right)_{\rho_m}}_{\ll \rho_m C_{p_m}}} \\
&\approx \left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right)_{T_m} \\
&= \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}
\end{aligned}$$

Donc, finalement :

$$c_m^2 = (\gamma_m(\alpha) - 1) \frac{\rho_v^{sat} \rho_l^{sat} (h_v - h_l)}{\rho_m (\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat})} + \frac{Ac_{min}^2}{\sqrt{1 - (A(1 - 2\alpha))^2}}$$

### C.3.5 Vitesse du son au sein du terme source

#### C.3.5.1 Vitesse du son dans un terme source empirique

Lorsque le terme de transfert de masse  $\dot{m}$  est exprimé comme un terme empirique :

$$\dot{m} = \dot{m}^+ + \dot{m}^- = C_{prod} \frac{\rho_v}{\rho_l} (1 - \alpha) \frac{\min(0, p_m - P_{vap})}{0.5 \rho_{ref} U_{ref}^2} - C_{des} \frac{\rho_v}{\rho_l} \alpha \frac{\max(0, p_m - P_{vap})}{0.5 \rho_{ref} U_{ref}^2}$$

la vitesse du son au sein du mélange est égale à la vitesse du son de Wallis.

$$c_m = c_{Wallis}$$

#### Démonstration

La démonstration simplifiée s'effectue en utilisant les équations de conservation Euler 1d du mélange couplés à l'équation d'évolution du taux de vide. Le système est écrit en variables primitives  $W = (p_m, u_m, e_m, \alpha)$ . Pour cela il convient de rappeler l'équation d'évolution de la pression déduite de l'équation d'évolution sur  $\alpha$  et de l'équation de conservation de la masse de la phase vapeur :

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial p_m}{\partial x_j} + \rho_v c_v^2 \left(1 + \frac{K}{\alpha}\right) \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} = \frac{\dot{m} c_v^2}{\alpha} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \quad (C.11)$$

De là en introduisant  $C = \rho_v c_v^2 \left(1 + \frac{K}{\alpha}\right)$  le système matriciel s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_e \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\dot{m}}{\rho_l} S \quad (C.12)$$

avec

$$A_e = \begin{pmatrix} u_m & C & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_m} & u_m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_m}{\rho_m} & u_m & 0 \\ 0 & -K & 0 & u_m \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} c_v^2(\rho_l - \rho_v)/\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce système est hyperbolique et a pour valeurs propres  $(u_m; u_m; u_m - c_m; u_m + c_m)$ . De là, en utilisant la valeur propre  $\lambda = u_m - c_m$  il vient :

$$\begin{aligned} \det[A_e - (u_m - c_m)I_4] &= 0 \\ \Leftrightarrow c_m^2(c_m^2 - \frac{C}{\rho_m}) &= 0 \end{aligned}$$

De là en utilisant les expressions de  $C$  et  $K$  :

$$C = \rho_v c_v^2 \left(1 + \frac{K}{\alpha}\right) \quad \text{et} \quad K = \frac{\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2}{\frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} + \frac{\rho_l c_l^2}{1 - \alpha}}$$

la vitesse du son du mélange se déduit :

$$\rho_m c_m^2 = C = \frac{\rho_l \rho_v c_l^2 c_v^2}{\alpha \rho_l c_l^2 + (1 - \alpha) \rho_v c_v^2} = \rho_m c_{Wallis}^2 \quad (\text{C.13})$$

### C.3.5.2 Vitesse du son dans un terme source en divergence de la vitesse

Lorsque le terme source de transfert de masse  $\dot{m}$  est supposé proportionnel à la divergence de la vitesse :  $\dot{m} = Z \frac{\partial u_m}{\partial x}$ , la célérité au sein du mélange n'est plus strictement égale à celle de Wallis. Celle-ci suit la relation :

$$\rho_m c_m^2 = \rho_m c_{Wallis}^2 \left(1 - Z \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v}\right) \quad (\text{C.14})$$

et respecte la condition (4.23) où la vitesse de mélange est inférieure à celle de Wallis lorsqu'il y a transfert de masse.

#### Démonstration

En remplaçant dans l'équation (C.11) le terme  $\dot{m}$  par  $Z \frac{\partial u_m}{\partial x}$  le système matriciel (C.12) est modifié et s'écrit désormais :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_e \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

avec

$$A_e = \begin{pmatrix} u_m & C - \frac{Zc_v^2}{\alpha\rho_I}(\rho_I - \rho_v) & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_m} & u_m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_m}{\rho_m} & u_m & 0 \\ 0 & -K - \frac{Z}{\rho_I} & 0 & u_m \end{pmatrix}$$

Or d'après l'expression de  $\rho_I$  :

$$\rho_I = \frac{\frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha}}{\frac{c_l^2}{1-\alpha} + \frac{c_v^2}{\alpha}}$$

le développement de  $C - \frac{Zc_v^2}{\alpha\rho_I}(\rho_I - \rho_v)$  donne :

$$C - \frac{Zc_v^2}{\alpha\rho_I}(\rho_I - \rho_v) = C \left( 1 - Z \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v} \right)$$

En reprenant le raisonnement de la partie C.3.5.1, l'expression de la vitesse du son au sein du terme source devient :

$$\rho_m c_m^2 = C \left( 1 - Z \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v} \right) = \frac{\rho_l \rho_v c_l^2 c_v^2 \left( 1 - Z \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v} \right)}{\alpha \rho_l c_l^2 + (1-\alpha) \rho_v c_v^2} = \rho_m c_{Wallis}^2 \left( 1 - Z \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v} \right)$$

ce qui fournit la relation finale :

$$\rho_m c_m^2 = \rho_m c_{Wallis}^2 \left( 1 - Z \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v} \right) \quad (C.15)$$

## C.4 Autres développements de l'équation de transport de taux de vide

### C.4.1 Equation de la forme $\alpha\rho_v$

L'expression générale du taux de vide :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{m,j} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = K \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho_I} \quad (C.16)$$

peut être transformée de façon à faire apparaître la quantité massique de la phase vapeur  $\alpha\rho_v$

$$\frac{1}{\rho_I} \frac{d(\alpha\rho_v)}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \left( K + \frac{\alpha\rho_v}{\rho_I} \right) \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \quad (C.17)$$

Démonstration

A partir de l'équation de conservation de la masse pour la phase vapeur on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \alpha \rho_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial x_j} &= \dot{m} \\ \Leftrightarrow \frac{d\alpha \rho_v}{dt} &= \dot{m} - \alpha \rho_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\end{aligned}$$

L'équation de transport du taux de vide donne aussi :

$$\frac{\dot{m}}{\rho_I} = \frac{d\alpha}{dt} - K \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

ou encore :

$$\frac{\dot{m}}{\rho_I} = \frac{d\alpha}{dt} + K \frac{1}{\rho} \frac{d\rho_m}{dt}$$

**C.4.2 Equation de la forme  $\rho_v$** 

A partir des développements précédents il est possible de déduire deux équations remarquables pour le transport de la masse volumique vapeur  $\rho_v$  :

$$\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{1}{\alpha} \left( \dot{m} - \rho_v \frac{d\alpha}{dt} \right) - \rho_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{\rho_I}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\rho_I}{\rho_m} \left( \frac{K}{\alpha} + \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) \frac{d\rho_m}{dt} \quad (\text{C.19})$$

Démonstration

Ces expressions s'obtiennent directement en développant le terme  $\frac{d(\alpha \rho_v)}{dt}$  dans (C.17).

**C.4.3 Equation d'évolution de la pression**

Les équations de conservation de la masse permettent d'aboutir à une équation qui régit l'évolution de la pression

$$\frac{d\rho_m}{dt} = \frac{\dot{m} c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) - \rho c_{Wallis}^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (\text{C.20})$$

où  $c_{Wallis}$  est la célérité du son de Wallis qui correspond à la vitesse de propagation d'une onde acoustique lorsqu'il n'y a pas de transfert de masse entre les phases :

$$\frac{1}{\rho c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v^2 c_v^2} + \frac{1 - \alpha}{\rho_I c_l^2}$$

Démonstration

En combinant les équations (C.16) et (C.18) il est possible de développer :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_v}{dt} &= \frac{1}{\alpha} \left( \dot{m} - \rho_v \left( K \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\dot{m}}{\rho_I} \right) \right) - \rho_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= \frac{\dot{m}}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) - \rho_v \left( 1 + \frac{K}{\alpha} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de la célérité par phase :

$$\left( \frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k}$$

il est possible de relier les dérivées temporelles de la pression et de la masse volumique par phase à la célérité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_m}{\partial \rho_v} \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial p_m}{\partial t} + u_j \frac{\partial p_m}{\partial x_j} \\ \Leftrightarrow c_v^2 \frac{d\rho_v}{dt} &= \frac{dp_m}{dt} \end{aligned}$$

En remplaçant dans le développement précédent il vient :

$$\frac{1}{c_v^2} \frac{dp_m}{dt} = \frac{\dot{m}}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) - \rho_v \left( 1 + \frac{K}{\alpha} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

L'expression de la célérité du son de Wallis :

$$\frac{1}{\rho c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v^2 c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_I c_I^2}$$

permet ensuite d'écrire :

$$\rho c_{Wallis}^2 = \frac{\rho_I \rho_v c_I^2 c_v^2}{(1-\alpha)\rho_v c_v^2 + \alpha \rho_I c_I^2} = \rho_v c_v^2 \left( 1 + \frac{K}{\alpha} \right)$$

et d'aboutir à l'équation :

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{\dot{m} c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) - \rho c_{Wallis}^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

#### C.4.4 Ecriture différentielle de $\rho \tilde{e}_m$

L'écriture différentielle fait intervenir des expressions modifiées des énergies internes  $e_m$  et  $e_k$  respectivement du mélange et de la phase  $k$  auxquels est soustrait l'énergie interne de référence de la phase liquide :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_m &= e_m - q_l \\ \tilde{e}_k &= e_k - q_l \end{aligned}$$

L'énergie totale de mélange s'exprime par conséquent :

$$\tilde{E}_m = e_m - q_l + \frac{1}{2} u_m^2$$

Par suite l'écriture différentielle de  $\rho\tilde{e}_m$  avec les variables  $(p_m, \rho_m, \alpha)$  est présentée ci dessous :

$$\begin{aligned} d(\rho_m\tilde{e}_m) &= Ad\rho_m + Bdp_m + Cd\alpha \\ A &= \left( \frac{\partial \rho_m \tilde{e}_m}{\partial \rho} \right)_{p_m, \alpha} = \alpha(q_v - q_l) \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial \rho_m} \right)_{\alpha} = \alpha(q_v - q_l) \frac{\tilde{c}^2}{c_v^2} \\ B &= \left( \frac{\partial \rho_m \tilde{e}_m}{\partial p_m} \right)_{\rho_m, \alpha} = \frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1 - \alpha}{\gamma_l - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \\ C &= \left( \frac{\partial \rho_m \tilde{e}_m}{\partial \alpha} \right)_{\rho_m, p_m} = \rho_v(e_v - q_v) - \rho_l(e_l - q_l) + \rho_l(q_v - q_l) \end{aligned}$$

où  $\tilde{c}$  est une vitesse pondérée de la célérité dans chaque phase, telle que :

$$\frac{1}{\tilde{c}^2} = \frac{1 - \alpha}{c_l^2} + \frac{\alpha}{c_v^2}$$

### Démonstration

Les variables conservatives  $(\rho_v\tilde{e}_v, \rho_l\tilde{e}_l)$  sont exprimées en fonctions de  $(\rho_v, \rho_l, p_m)$

$$\begin{aligned} d(\rho_v\tilde{e}_v) &= \left( \frac{\partial \rho_v \tilde{e}_v}{\partial \rho_v} \right)_p d\rho_v + \left( \frac{\partial \rho_v \tilde{e}_v}{\partial p_m} \right)_{\rho_v} dp_m = A_v d\rho_v + B_v dp_m \\ d(\rho_l\tilde{e}_l) &= \left( \frac{\partial \rho_l \tilde{e}_l}{\partial \rho_l} \right)_p d\rho_l + \left( \frac{\partial \rho_l \tilde{e}_l}{\partial p_m} \right)_{\rho_l} dp_m = A_l d\rho_l + B_l dp_m \end{aligned}$$

En différenciant respectivement les équations des gazs raides pour la vapeur et le liquide, il vient :

$$\begin{aligned} d(\rho_v\tilde{e}_v) &= \frac{1}{\gamma_v - 1} dp_m + (q_v - q_l) d\rho_v \\ d(\rho_l\tilde{e}_l) &= \frac{1}{\gamma_l - 1} dp_m \end{aligned}$$

Par identification, les coefficients s'expriment :

$$A_v = q_v - q_l; \quad A_l = 0; \quad B_v = \frac{1}{\gamma_v - 1}; \quad B_l = \frac{1}{\gamma_l - 1}$$

D'autre part en développant par phase il vient :

$$\begin{aligned} d(\rho\tilde{e}_m) &= d(\alpha\rho_v\tilde{e}_v) + d((1 - \alpha)\rho_l\tilde{e}_l) \\ &= \alpha d(\rho_v\tilde{e}_v) + \rho_v\tilde{e}_v d\alpha + (1 - \alpha)d(\rho_l\tilde{e}_l) - \rho_l\tilde{e}_l d\alpha \\ &= (\alpha B_v + (1 - \alpha)B_l) dp_m + \alpha A_v d\rho_v + (1 - \alpha)A_l d\rho_l + (\rho_v\tilde{e}_v - \rho_l\tilde{e}_l) d\alpha \\ &= \frac{dp_m}{\gamma_m - 1} + A_v d(\alpha\rho_v) - \rho_v A_v d\alpha + (\rho_v\tilde{e}_v - \rho_l\tilde{e}_l) d\alpha \\ &= \frac{dp_m}{\gamma_m - 1} + (q_v - q_l) d(\alpha\rho_v) + A' d\alpha \end{aligned}$$

avec

$$A' = \rho_l\tilde{e}_l - \rho_v\tilde{e}_v + \rho_v A_v = \rho_l(e_l - q_l) - \rho_v(e_v - q_v)$$

D'autre part, l'écriture différentielle de  $\alpha\rho_v$  s'exprime d'après C.4.1 :

$$d(\alpha\rho_v) = \rho_I d\alpha + \frac{\rho_I}{\rho_m} \left( K + \frac{\alpha\rho_v}{\rho_I} \right) d\rho_m$$

Ainsi :

$$d(\rho_m \tilde{e}_m) = \left( \alpha(q_v - q_l) \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial \rho_m} \right)_\alpha \right) d\rho_m + \left( \frac{1}{\gamma - 1} \right) dp_m + \left( \rho_v(e_v - q_v) - \rho_l(e_l - q_l) + \rho_I(q_v - q_l) \right) d\alpha$$

Il reste à développer le terme  $\left( \frac{\partial \rho_v}{\partial \rho_m} \right)_\alpha$ .

En remarquant que :

$$K\rho_I = \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2)}{(1-\alpha)c_v^2 + \alpha c_l^2} \quad \text{et} \quad \alpha\rho_v = \frac{\alpha\rho_m c_l^2}{(1-\alpha)c_v^2 + \alpha c_l^2}$$

il vient :

$$\frac{K\rho_I + \alpha\rho_v}{\alpha\rho_m} = \frac{\rho_I}{\rho_m} \left( \frac{K}{\alpha} + \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) = \frac{c_l^2}{(1-\alpha)c_v^2 + \alpha c_l^2} = \frac{\tilde{c}^2}{c_v^2}$$

et donc finalement :

$$\left( \frac{\partial \rho_v}{\partial \rho_m} \right)_\alpha = \frac{\rho_I}{\rho_m} \left( \frac{K}{\alpha} + \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) = \frac{\tilde{c}^2}{c_v^2}$$

#### C.4.5 Expression des matrices de passage

Les matrices de passage entre le vecteur des variables primitives  $W = (p_m, u_m, \tilde{e}_m, \alpha)^t$  et le vecteur des variables conservatives  $w = (\rho_m, \rho_m u_m, \rho_m \tilde{E}_m, \alpha)^t$  s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial w} = \begin{pmatrix} (\gamma_m - 1) \left( \frac{u_m^2}{2} - A \right) & -(\gamma_m - 1)u_m & (\gamma_m - 1) & -(\gamma_m - 1)C \\ -\frac{u_m}{\rho_m} & \frac{1}{\rho_m} & 0 & 0 \\ \frac{u_m^2 - \tilde{E}_m}{\rho_m} & -\frac{u_m}{\rho_m} & \frac{1}{\rho_m} & 0 \\ \frac{u_m^2}{2} - A - B\tilde{c}^2 & \frac{u_m}{\rho_m} & \frac{1}{\rho_m} & 1 \\ \frac{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C}{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C} & \frac{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C}{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C} & \frac{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C}{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{F}{G(\gamma_m - 1)} & 0 & -\frac{\rho_m(F + C)}{G} & \frac{FC}{G} \\ \frac{F}{G(\gamma_m - 1)}u_m & \rho_m & -\frac{\rho_m(F + C)}{G}u_m & \frac{FC}{G}u_m \\ \frac{F}{G(\gamma_m - 1)}\tilde{E}_m & \rho_m u_m & -\frac{\rho_m}{G} \left[ (F + C) \left( \frac{u_m^2}{2} + A \right) + C \frac{\tilde{c}^2}{\gamma_m - 1} \right] & \frac{FC}{G}\tilde{E}_m \\ -\frac{\tilde{e}_m - A - \frac{\tilde{c}^2}{\gamma_m - 1}}{G(\gamma_m - 1)} & 0 & -\frac{\rho_m \tilde{c}^2}{G(\gamma_m - 1)} & \frac{F(\tilde{e}_m - A)}{G} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$F = \frac{\tilde{c}^2}{\gamma_m - 1}(\rho_l - \rho_v) + C$$

$$G = (\tilde{e}_m - A)(F + C) - C \frac{\tilde{c}^2}{\gamma_m - 1}$$

*Démonstration*

A partir des démonstrations précédentes on a une première écriture différentielle des variables primitives  $W = (p, u, \tilde{e}, \alpha)$  en fonction des variables conservatives  $w = (\rho, \rho u, \rho \tilde{E}, \alpha)$ .

$$du_m = \frac{1}{\rho_m} d(\rho_m u_m) - \frac{u_m}{\rho_m} d\rho_m$$

$$\rho_m d\tilde{e} = \left( \frac{u_m^2}{2} - \tilde{e}_m \right) d\rho_m - u_m d(\rho_m u_m) + d(\rho_m \tilde{E}_m)$$

$$Bd\rho_m = d(\rho_m \tilde{e}_m) - Ad\rho_m - Cd\alpha = d(\rho_m \tilde{E}_m) - u_m d(\rho_m u_m) + \left( \frac{u_m^2}{2} - A \right) d\rho_m - Cd\alpha$$

Les équations d'évolution de la pression et du taux de vide permettent ensuite d'obtenir l'écriture différentielle de la pression en fonction du taux de vide et de la masse volumique. En remplaçant (C.16) dans (C.20) et en utilisant la relation  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$  il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dp_m}{dt} &= \frac{\rho_I c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{K}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \frac{\rho_v c_v^2}{\rho_m} \left( 1 + \frac{K}{\alpha} \right) \frac{d\rho_m}{dt} \\ &= \frac{\rho_I c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\rho_I c_v^2}{\rho} \left( \frac{K}{\alpha} + \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) \frac{d\rho_m}{dt} \\ &= \frac{\rho_I c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) \frac{d\alpha}{dt} + \tilde{c}^2 \frac{d\rho_m}{dt} \end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{\rho_I c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) = \frac{\rho_m \tilde{c}^2}{\alpha} \left( \frac{1 - \frac{\rho_v}{\rho_I}}{\frac{K}{\alpha} + \frac{\rho_v}{\rho_I}} \right) = \frac{\frac{\rho_m \tilde{c}^2}{\rho_I \alpha} (\rho_I - \rho_v)}{\frac{\rho_m}{\rho_I} \left( \frac{K \rho_I + \alpha \rho_v}{\alpha \rho_m} \right)} = \frac{\frac{\tilde{c}^2}{\alpha} (\rho_I - \rho_v)}{\frac{c_l^2}{(1 - \alpha)c_v^2 + \alpha c_l^2}}$$

Or :

$$\rho_I - \rho_v = \frac{\frac{\rho_I c_l^2}{1 - \alpha} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} - \frac{\rho_v c_l^2}{1 - \alpha} - \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha}}{\frac{c_l^2}{1 - \alpha} + \frac{c_v^2}{\alpha}} = \frac{\rho_I c_l^2 \alpha - \rho_v c_l^2 \alpha}{c_l^2 \alpha + c_v^2 (1 - \alpha)} = (\rho_I - \rho_v) \alpha \frac{c_l^2}{(1 - \alpha)c_v^2 + \alpha c_l^2}$$

donc :

$$\frac{\rho_I c_v^2}{\alpha} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_I} \right) = (\rho_I - \rho_v) \tilde{c}^2$$



et finalement :

$$\frac{dp_m}{dt} = (\rho_l - \rho_v)\tilde{c}^2 \frac{d\alpha}{dt} + \tilde{c}^2 \frac{d\rho}{dt}$$

De là se déduit une écriture différentielle de la pression sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\tilde{c}^2} dp_m = d\rho_m + (\rho_l - \rho_v)d\alpha$$

Les développements précédents permettent d'aboutir à l'écriture différentielle du taux de vide en fonction des variables primitives :

$$(B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C) d\alpha = d(\rho_m \tilde{E}_m) - u_m d(\rho_m u_m) + \left( \frac{u_m^2}{2} - A - B\tilde{c}^2 \right) d\rho_m$$

Les variables primitives  $W = (p_m, u_m, \tilde{e}_m, \alpha)$  s'expriment finalement en fonction des variables conservatives  $w = (\rho_m, \rho_m u_m, \rho \tilde{E}_m, \alpha)$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dp_m = (\gamma_m - 1) \left( \frac{u_m^2}{2} - A \right) d\rho - (\gamma_m - 1) u_m d(\rho_m u_m) + (\gamma_m - 1) d(\rho \tilde{E}_m) - (\gamma_m - 1) C d\alpha \\ du_m = -\frac{u_m}{\rho_m} d\rho_m + \frac{1}{\rho_m} d(\rho_m u_m) \\ d\tilde{e}_m = \left( \frac{u_m^2 - \tilde{E}_m}{\rho_m} \right) d\rho_m - \frac{u_m}{\rho_m} d(\rho_m u_m) + \frac{1}{\rho_m} d(\rho_m \tilde{E}_m) \\ d\alpha = \frac{\frac{u_m^2}{2} - A - B\tilde{c}^2}{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C} d\rho_m + \frac{u_m}{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C} d(\rho_m u_m) + \frac{1}{B\tilde{c}^2(\rho_l - \rho_v) + C} d(\rho_m \tilde{E}_m) \end{array} \right.$$



# Bibliographie

- [1] V. Aeschlimann and S. Barre. PIV-LIF determination of mean velocity field and Reynolds stress tensor in a cavitating mixing layer. In *7<sup>th</sup> International Symposium on Cavitation CAV2009, Ann Arbor, USA*, 2009.
- [2] V. Aeschlimann, S. Barre, and H. Djeridi. Velocity field analysis in an experimental cavitating mixing layer. *Physics of Fluids*, 23 :055–105, 2011.
- [3] V. Aeschlimann, S. Barre, and H. Djeridi. Unsteady cavitation analysis using phase averaging and conditional approaches in a 2D Venturi. *Open Journal of Fluid Dynamics*, 3 :171–183, 2013.
- [4] V. Aeschlimann, S. Prothin, S. Barre, and H. Djeridi. High speed visualizations of the cavitating vortices of 2d mixing layer. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 31 :171–180, 2012.
- [5] V. Ahuja and A. Hosangadi. A numerical study of cavitation in cryogenic fluids, part I : mean flow parametric studies. In *6th International Symposium on Cavitation CAV2006, Wageningen, The Netherlands*, September 11–15 2006.
- [6] V. Ahuja, A. Hosangadi, and S. Arunajatesan. Simulations of cavitating flows using hybrid unstructured meshes. *Journal of Fluids Engineering*, 123(2) :331–340, 2001.
- [7] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 181(2) :577–616, 2002.
- [8] H. Shamsborhan and O. Coutier-Delgosha and G. Caignaert and F. A. Nour. Experimental determination of the speed of sound in cavitating flows. *Experiments in Fluids*, 49 :1359–1373, 2003.
- [9] A. F. Mills and R. A. Seban. The condensation coefficient of water. *International journal of Heat and Mass Transfer*, 10 :1815–1827, 1967.
- [10] R.E.A. Arndt, C. R. Ellis, and S. Paul. Preliminary investigation of the use of air injection to mitigate cavitation erosion. In *Proceeding ASME Symposium on Bubble Noise and Cavitation Erosion in Fluid Systems.*, 1993.
- [11] R.E.A. Arndt, C.C.S. Song, M. Kjeldsen, J. He, and A. Keller. Instability of partial cavitation : A numerical/experimental approach. In *National Academies Press*, 2000.
- [12] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 12 :861–889, 1986.

- 
- [13] S. Barre, C. Quine, and J.P. Dussauge. Compressibility effects on the structure of supersonic mixing layers : experimental results. *Journal of Fluid Mechanics*, 259 :47–78, 1994.
- [14] S. Barre, J. Rolland, G. Boitel, E. Goncalves, and R. Fortes Patella. Experiments and modelling of cavitating flows in Venturi : attached sheet cavitation. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28 :444–464, 2009.
- [15] J. Barret and C. Clement. Kinetic evaporation and condensation rates and their coefficient. *Journal Colloid and Interface Sciences*, 150 :352, 1992.
- [16] M. Barret, E. Faucher, and JM. Herard. Schemes to compute unsteady flashing flows. *AIAA Journal*, 40(5) :905–913, 2002.
- [17] R. Bensow. Simulation of the unsteady cavitation on the Delft twist11 foil using RANS, DES and LES. In *Second International Symposium on Marine Propulsors, Hamburg, Germany*, June 2011.
- [18] R. Bensow and G. Bark. Implicit les predictions of the cavitating flow on a propeller. *Journal of Fluids Engineering*, 132, 2010.
- [19] J. De Bernardi, F. Jousselin, and A. Von Kaenel. Experimental analysis of instabilities related to cavitation in turbopump inducer. In *Proceedings of 1st International Symposium on Pumps Noise and Vibration*, 1993.
- [20] H. Bijl and P. Wesseling. A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates. *Journal of Computational Physics*, 141, 1998.
- [21] C.E. Brennen. Cavitation and bubble dynamics. Oxford University Press, 1995.
- [22] C.E. Brennen. *Fundamentals of Multiphase Flow*. 2005.
- [23] P.B. Butler, M.F. Lembeck, and H. Krier. Modelling of shock development transition to detonation initiated by burning in porous propellant beds. *Combustion & Flame*, 46, 1982.
- [24] M. Callenaere, J. P. Franc, J. M. Michel, and M. Riondet. the cavitation instability induced by the development of a re-entrant jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 444 :223–256, 2001.
- [25] B. Charriere, J. Decaix, and E. Goncalves. A comparative study of cavitation models in a venturi flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 49 :287–297, 2014.
- [26] R. Chebli. *Simulation 2D et 3D des écoulements cavitants : développement d’un algorithme original dans Code Saturne et étude de l’influence de la modélisation de la turbulence*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, 2015.
- [27] R. Chebli, O. Coutier-Delgosah, and B. Audebert. Development of algorithm based on the fractional time step for the simulation of cavitation. In *21ème Congrès Français de la Mécanique*, 2006.
- [28] H.C Chen and V.C. Patel. Near-wall turbulence models for complex flows including separation. volume 26, 1985.
- [29] Y. Chen, C.J. Lu, and L. Wu. Modelling and computation of unsteady turbulent cavitation flows. *Journal of Hydrodynamics*, 18(5) :559–566, 2006.
- [30] J. Chesnel, T. Menard, J. Reveillon, and F.-X. Demoulin. Subgrid analysis of liquid jet atomization. *Atomisation and Spray Technology*, 21, 2011.

- [31] YH. Choi and CL. Merkle. The application of preconditioning to viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 105(2) :207–223, 1993.
- [32] G. Costigan and P. B. Whalley. Measurements of the speed of sound in air-water flows. *Chemical Engineering Journal*, 66 :131–135, 1997.
- [33] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, and JL. Reboud. Simulation of unsteady cavitation with a two-equation turbulence model including compressibility effects. *Journal of Turbulence*, 3(58), 2002.
- [34] O. Coutier-Delgosha, JL. Reboud, and Y. Delannoy. Numerical simulation of the unsteady behaviour of cavitating flow. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 42 :527–548, 2003.
- [35] D.F. de Lange, G.J. Bruin, and L. van Wijngaarden. On the mechanism of cloud cavitation - experiments and modelling. In *2nd International Symposium on Cavitation CAV1994, Tokyo, Japan, April 5-7 1994*.
- [36] D.F. de Lange and G.J. de Bruin. Sheet cavitation and cloud cavitation, re-entrant jet and three-dimensionality. *Applied Scientific Research*, pages 91–114, 1998.
- [37] J. Decaix. *Modélisation et simulation de la turbulence compressible en milieu diphasique : application aux écoulements cavitants instationnaires*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [38] J. Decaix and E. Goncalves. Time-dependent simulation of cavitating flow with  $k - \ell$  turbulence models. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68 :1053–1072, 2012.
- [39] J. Decaix and E. Goncalves. Compressible effects modelling in turbulent cavitating flows. *European J. of Mechanics B/Fluids*, 39 :11–31, 2013.
- [40] J. Decaix and E. Goncalves. Investigation of three-dimensional effects on a cavitating venturi flow. *International of Heat and Fluid Flow*, pages 1–20, 2013.
- [41] Y. Delannoy and JL. Kueny. Two phase flow approach in unsteady cavitation modelling. In *Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME-FED, vol. 98, pp.153-158*, 1990.
- [42] N. Dittakavi, A. Chunekar, and S. Frankel. Large eddy simulation of turbulent-cavitation interactions in a Venturi nozzle. *Journal of Fluids Engineering*, 132(12) :121301, 2010.
- [43] P. Downar-Zapolski, Z. Bilicki, L. Bolle, and J. Franco. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 22(3) :473–483, 1996.
- [44] J. Dumond, F. Magnagnato, and A. Class. Stochastic-field cavitation model. *Physics of Fluids*, 25 :073302, 2013.
- [45] P.A. Durbin. Limiters and wall treatments in applied turbulence modeling. *Fluid Dyn. research*, 41(1) :012203, 2009.
- [46] A. Favre. *La turbulence en mécanique des fluides : bases théoriques et expérimentales, méthodes statistiques*. Gauthier-Villars, 1976.
- [47] E.J. Foeth. *The structure of three-dimensional sheet cavitation*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2006.

- [48] J.P. Franc, F. Avellan, B. Belahadji, J.Y. Billard, L. Briançon-Marjollet, D. Fréchou, D.H. Fruman, A. Karimi, J.L. Kueny, and J.M. Michel. *La cavitation. Mécanismes physiques et aspects industriels*. Presse Universitaire de Grenoble, 1995.
- [49] H. Ganesh. *Bubbly shock propagation as a cause of sheet to cloud transition of partial cavitation and stationary cavitation bubbles forming on a delta wing vortex*. PhD thesis, the University of Michigan, 2015.
- [50] T. Gatski and J-P. Bonnet. *Compressibility, turbulence and high speed flow*. Elsevier, 2009.
- [51] T. Gatski, O. Metais, and J. Ferziger. Modelling compressibility effects on turbulence. In *New Tools in Turbulence Modelling, Centre de Physique des Houches*, pages 73–104, 1996.
- [52] E. Goncalves. Numerical study of unsteady turbulent cavitating flows. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 30(1) :26–40, 2011.
- [53] E. Goncalves. Numerical study of expansion tube problems : Toward the simulation of cavitation. *Computers & Fluids*, 72 :1–19, 2013.
- [54] E. Goncalves. Modeling for non isothermal cavitation using 4-equation models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 76 :247–262, 2014.
- [55] E. Goncalves, M. Champagnac, and R. Fortes Patella. Comparison of numerical solvers for cavitating flows. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 24(6) :201–216, 2010.
- [56] E. Goncalves and B. Charriere. Modelling for isothermal cavitation with a four-equation model. *International Journal of Multiphase Flow*, 59 :54–72, 2014.
- [57] E. Goncalves and J. Decaix. Wall model and mesh influence study for partial cavities. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 31(1) :12–29, 2012.
- [58] E. Goncalves and R. Fortes Patella. Numerical simulation of cavitating flows with homogeneous models. *Computers & Fluids*, 38(9) :1682–1696, 2009.
- [59] E. Goncalves and R. Fortes Patella. Numerical study of cavitating flows with thermodynamic effect. *Computers & Fluids*, 39(1) :99–113, 2010.
- [60] E. Goncalves and R. Fortes Patella. Constraints on equation of state for cavitating flows with thermodynamic effects. *Applied Math. and Computation*, 217 :5095–5102, 2011.
- [61] S. Gopalan and J. Katz. Flow structure and modeling issues in the closure region of attached cavitation. *Physics of Fluids*, 12(4) :895–911, 2000.
- [62] H. Guillard and M. Labois. Numerical modelling of compressible two-phase flows. In *ECCOMAS CFD 2006, The Netherlands*. <http://proceedings.fyper.com/eccomascfd2006>, 2006.
- [63] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & Fluids*, 28(1) :63–86, 1999.
- [64] T. Hashimoto, M. Yoshida, M. Watanabe, K. Kamijo, and Y. Tsujimoto. Experimental study on rotating cavitation of rocket propellant pump inducers. In *32nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, July 1-3 1996, Lake Buena Vista, Florida*, 1996.

- [65] W. Hassan, S. Legoupil, D. Chambellan, and S. Barre. Dynamic localization of vapor fraction in turbopump inducers by x-ray tomography. In *IEEE-TNS (Transaction on Nuclear Sciences)*, 2008.
- [66] S. Hayashi and K. Sato. Unsteady behavior of cavitating waterjet in an axysymmetric convergent-divergent nozzle : high speed observation and image analysis based on frame difference method. *Journal of Flow Control, Measurement & Visualization*, 2, 2014.
- [67] P. Helluy and N. Seguin. Relaxation models of phase transition flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(2) :331–352, 2006.
- [68] R. E. Henry and M. A. Grolmes and H. K. Fauske. Pressure pulse propagation in two-phase one- and two-component mixtures. In *Argonne National Laboratory*, 1971.
- [69] H. Hertz. On the evaporation of liquids, especially mercury, in vacuo. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 17, 1882.
- [70] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows - fundamentals of numerical discretization, volume I. John Wiley & Sons, 1988.
- [71] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows, volume II. John Wiley & Sons, 1990.
- [72] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201–225, 1991.
- [73] J. Hord. Cavitation in liquid cryogenes, vol 4, combined correlations for venturi, hydrofoil, ogives and pumps. Technical report, NASA, 1974. TM CR-2448.
- [74] A. Hosangadi and V. Ahuja. Numerical study of cavitation in cryogenic fluids. *Journal of Fluids Engineering*, 127(2) :267–281, 2005.
- [75] CM. Ishii and T. Hibiki. Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. Springer, 2006.
- [76] B. Ji, X. Luo, X. Peng, Y. Wu, and H. Xu. Numerical anaysis of cavitation evolution and excited pressure fluctuation around a propeller in a non-uniform wake. *Int. Journal of Multiphase Flow*, (43) :13–21, 2012.
- [77] B. Ji, X. Luo, X. Peng, and H. Xu. Partially-averaged Navier-Stokes method with modified  $k - \varepsilon$  model for cavitating flow around a marine propeller in a non-uniform wake. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, (55) :6582–6588, 2012.
- [78] W.P. Jones. Prediction methods for turbulent flows. In *Von Karman Institute, Lecture Series 1979-2*, 1979.
- [79] W.P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15 :301–314, 1972.
- [80] F. Jousselein, Y. Delannoy, E. Sauvage-Boutar, and B. Goirand. Experimental investigations on unsteady attached cavities. *AMSE-FED*, 116 :61–66, 1991.
- [81] K. Kamijo, T. Shimura, and M. Watanabe. An experimental investigation of cavitating inducer instability. In *ASME Winter Annual Meeting*, 1977.
- [82] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D.S. Stewart. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials : reduced equations. *Physics of Fluids*, 13(10) :3002–3024, 2001.

- [83] Y. Kawanami, H. Kato, H. Yamaguchi, M. Tanimura, and Y. Tagaya. Mechanism and control of cloud cavitation. *Journal of Fluids Engineering*, 119(4) :788–794, 1997.
- [84] T. Keil, P. F. Pelz, and J. Buttenbender. On the transition from sheet to cloud cavitation. In *Proceedings on the 8<sup>th</sup> International Symposium on Cavitation, Sigapore, 2012*.
- [85] M. Kinzel, J. Lindau, L. Peltier, R. Kunz, and S. Venkateswaran. Detached-eddy simulations for cavitating flows. In *AIAA-2007-4098, 18<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid dynamics Conference, Miami, USA, 2007*.
- [86] M. Kjeldsen, R. E. A. Arndt, and M. Effertz. Spectral Characteristics of Sheet/Cloud Cavitation. *Journal of Fluids Engineering*, 122, 2000.
- [87] R. T. Knapp, J. W. Daily, and F.G. Hammit. *Cavitation*. McGraw-Hill, 1970.
- [88] M. Knudsen. Maximum rate of vaporization of mercury. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 47, 1915.
- [89] A.H. Koop and H.W. Hoeijmakers. Unsteady sheet cavitation on three-dimensional hydrofoil. In *7<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow, Tampa, USA, 2010*.
- [90] J.J. Kreeft and B. Koren. A new formulation of Kapila’s five-equation model for compressible two-fluid flow, and its numerical treatment. *Journal of Computational Physics*, 229(18) :6220–6242, 2010.
- [91] A. Kubota, H. Kato, H. Yamaguchi, and M. Maeda. Unsteady structure measurement of cloud cavitation on a foil section using conditional sampling technique. *Journal of Fluids Engineering*, 111(2) :204–210, 1989.
- [92] R.F. Kunz, D.A. Boger, D.R. Stinebring, T.S. Chyczewski, J.W. Lindau, H.J. Gibeling, S. Venkateswaran, and T.R. Govindan. A preconditioned Navier-Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction. *Computers & Fluids*, 29(8) :849–875, 2000.
- [93] R.F. Kunz, J.W. Lindau, T. Kaday, and L.J. Peltier. Unsteady RANS and detached-eddy simulations of cavitating flow over a hydrofoil. In *5<sup>rd</sup> International Symposium on Cavitation CAV2003, Osaka, Japan, 2003*.
- [94] K.R. Laberteaux and S.L. Ceccio. Partial cavity flows. Part1. Cavities forming on models without spanwise variation. *Journal of Fluid Mechanics*, 431 :1–41, 2001.
- [95] J. Larocque, S. Vincent, D. Lacanette an P. Lubin, and J.-P. Caltagirone. Parametric study of les subgrid terms in a turbulent phase separation flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31 :536–544, 2010.
- [96] Q. Le, J. P. Franc, and J. M. Michel. Partial cavities : global beahviour and mean pressure distribution. *Journal of Fluids Engineering*, 115 :243–248, 1993a.
- [97] Q. Le, J. P. Franc, and J. M. Michel. Partial cavities : pressure pulse distribution around cavity closure. *Journal of Fluids Engineering*, 115 :249–254, 1993b.
- [98] S. LeMartelot, B. Nkonga, and R. Saurel. Liquid and liquid-gas flow at all speeds. *Journal of Computational Physics*, 255 :53–82, 2013.
- [99] E. W. Lemmon and M. O. McLinden ans D. G. Friend. *Thermophysical Properties of Fluid Systems*. National Institute of Standards ans Technology, 2000.



- [100] J-B. Leroux, J.A. Astolfi, and J.Y. Billard. An Experimental Study of Unsteady Partial Cavitation, journal = *Journal of Fluids Engineering*, year = 2004, pages = 94-101.
- [101] S. C. Li, Z. G. Zuo, S. H. Liu, Y. L. Wu, and S. Li. Cavitation resonance. *Journal of Fluids Engineering*, 130(1) :031302–1–031302–7, 2008.
- [102] JW. Lindau, RF. Kunz, DA. Boger, DR. Stinebring, and HJ. Gibeling. High Reynolds number, unsteady, multiphase CFD modeling of cavitating flows. *Journal of Fluids Engineering*, 124(3) :124–607, 2002.
- [103] JW. Lindau, S. Venkateswaran, RF. Kunz, and CL. Merkle. Development of a fully-compressible multi-phase Reynolds-Averaged Navier-Stokes model. In *AIAA Paper 2001-2648, 15th Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, California*, June 2001.
- [104] TG. Liu, BC. Khoo, and WF. Xie. Isentropic one-fluid modelling of unsteady cavitating flow. *Journal of Computational Physics*, 201(1) :80–108, 2004.
- [105] N-X. Lu, R. Bensow, and G. Bark. LES of unsteady cavitation on the Delft twisted foil. *Journal of Hydrodynamics, serie B*, 22(5) :784–790, 2010.
- [106] P.A. Lush and S.R Skipp. High speed cine observations of cavitating flow in a duct. *Int. Journal of Heat Fluid Flow*, 7 :283–290, 1986.
- [107] R. Marek and J. Straub. Analysis of the evaporation coefficient and the condensation coefficient of water. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 44 :39–53, 2001.
- [108] G. Maurice. *Etude expérimentale de l'interaction turbulence cavitation dans un écoulement de marche descendante cavitant : application à la problématique du backflow à l'amont des inducteurs de turbopompes spatiales*. PhD thesis, Université de Grenoble, France, 2014.
- [109] F.R. Menter. Improved two-equation  $k - \omega$  turbulence models for aerodynamic flows. Technical report, NASA Technical Memorandum 103975, October 1992.
- [110] F.R. Menter. Zonal two equation  $k - \omega$  turbulence models for aerodynamic flows. In *AIAA 93-2906, 24th Fluid Dynamics Conference - Orlando, Florida*, 1993.
- [111] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8) :1598–1605, 1994.
- [112] F.R. Menter. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. Part 1 : Theory and model description. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85(1) :113–138, 2010.
- [113] F.R. Menter. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. Part 2 : Application to complex flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85(1) :139–165, 2010.
- [114] F.R. Menter and Y. Egorov. A scale-adaptive simulation model using two-equation models. In *AIAA 2005-1095, 43rd Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, 2006.
- [115] B. Merci, J. Steelant, J. Vierendeels, K. Riemsdagh, and E. Dick. Computational treatment of source terms in two-equation turbulence models. *AIAA Journal*, 38(11) :2085–2093, 2000.
- [116] C.L. Merkle, J. Feng, and P.E. Buelow. Computation modeling of the dynamics of sheet cavitation. In *3<sup>rd</sup> International Symposium on Cavitation CAV1998, Grenoble, France*, 1998.

- [117] S. Mimouni, A. Archer, J. Lavieville, M. Boucker, and N. Mchitoua. Modelling and computation of unsteady cavitation flows. *La Houille Blanche*, 6 :121–128, 2006.
- [118] JB. Moreau, O. Simonin, and C. Habchi. A numerical study of cavitation influence on diesel jet atomisation. In *19th annual meeting of the institute for liquid atomization and spray systems, Nottingham, England*, September 2004.
- [119] A. Murrone. *Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach*. PhD thesis, Université de Provence, France, 2003.
- [120] D.L. Nguyen, E.R.F. Winter, and M. Grenier. Sonic velocity in two-phase systems. *International Journal Multiphase Flow.*, 7 :311–320, 1981.
- [121] S. Nishimura, O. Takakuwa, and H. Soyama. Similarity law on shedding frequency of cavitation cloud by a cavitating jet. *Journal of Fluid Science and Technology*, 7 :405–69420, 2012.
- [122] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer : an experimental study. *Journal of Fluid Mechanics*, 197 :680–681, 1988.
- [123] S. Park and S.H. Rhee. Numerical analysis of the three-dimensional cloud cavitating flow around a twisted hydrofoil. *Fluid Dynamics Research*, 45 :015502, 2013.
- [124] C. Pascarella, V. Salvatore, and A. Ciucci. Effects of speed of sound variation on unsteady cavitating flows by using a barotropic model. In *5th International Symposium on Cavitation CAV2003, Osaka, Japon*, November 2003.
- [125] R. Fortes Patella, S. Barre, and J. L. Reboud. Experiments and modelling of cavitating flows in venturi. Part II : unsteady cavitation. In *6th International Symposium on Cavitation CAV2006, Wageningen, The Netherlands*, 2006.
- [126] M. Pelanti and K. M. Shyue. A mixture-energy-consistent six-equations two-phase numerical model for fluids with interfaces, cavitation and evaporation waves. *Journal of Computational Physics*, 259, 2014.
- [127] F. Petitpas, J. Massoni, R. Saurel, E. Lapedie, and L. Munier. Diffuse interface model for high speed cavitating underwater systems. *Int. Journal of Multiphase Flow*, 35 :747–759, 2009.
- [128] T. M. Pham, F. Larrarte, and D. H. Fruman. Investigation of unsteady sheet cavitation and cloud cavitation mechanisms. *Journal of Fluids Engineering*, 121 :289–296, 1999.
- [129] J-L. Reboud, B. Stutz, and O. Coutier. Two-phase flow structure of cavitation : experiment and modelling of unsteady effects. In *3rd International Symposium on Cavitation CAV1998, Grenoble, France*, 1998.
- [130] G.E. Reisman and C.E. Brennen. Pressure pulses generated by cloud cavitation. In *Symposium on Cavitation and Gas-Liquid Flows in Fluid Machinery and Devices.*, 1996.
- [131] G.E. Reisman, Y.-C. Wang, and C.E. Brennen. Observations of shock waves in cloud cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 355 :255–283, 1998.
- [132] M.G. Rodio and P. Congedo. Robust analysis of cavitating flows in Venturi tube. *European J. of Mechanics B/Fluids*, 2014.

- [133] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [134] J. Rolland, R. Fortes Patella, E. Goncalves, G. Boitel, and S. Barre. Experiments and modelling of cavitating flows in venturi. Part I : stable cavitation. In *6<sup>th</sup> International Symposium on Cavitation CAV2006, Wageningen, The Netherlands*, 2006.
- [135] E. Romensky, D. Zeidann, A. Slaouti, and E.F. Toro. Hyperbolic conservative model for compressible two phase flow. 2003.
- [136] C. Rossow. A blended pressure/density based method for the computation of incompressible and compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 185, 2003.
- [137] J.C. Rotta. *Turbulente Strömungen*. BG Teubner.
- [138] J.C. Rotta. Über eine methode zur berechnung turbulenter scherströmungen. *Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen*, Rep. 69 :A14, 1968.
- [139] N. Ruchonnet, S. Alligné, C. Nicolet, and F. Avellan. Cavitation influence on hydroacoustic resonance in pipe. *Journal of Fluids and Structures*, 28 :180–193, 2012.
- [140] Y. Saito, I. Nakamori, and G. Ikoha. Numerical analysis of unsteady vaporous cavitating flow around a hydrofoil. 2003.
- [141] Y. Saito and K. Sato. Bubble collapse propagation and pressure wave at periodic cloud cavitation. In *6th International Conference on Multiphase FLOW, Leipzig, Germany*, July 9–13 2007.
- [142] M. Sakoda, R. Yakushiji, R. Maeda, and M. Yamaguchi. Mechanism of cloud cavitation generation on a 2-d hydrofoil. 2001.
- [143] S. Sarkar, G. Erlebacher, and M.Y. Hussaini. Compressible homogeneous shear : simulation and modeling. Technical report, NASA ICASE Report No 92-6, 1992.
- [144] S. Sarkar, G. Erlebacher and M.Y. Hussaini, and H.O. Kreiss. The analysis and modeling of dilatational terms in compressible turbulence. Technical report, NASA ICASE Report No 89-79, 1989.
- [145] K. Sato, Y. Noto, Y. Wada, and Y. Sugimoto. Reentrant motion in cloud cavitation due to cloud collapse and pressure wave propagation. In *Proceedings of ASME 3rd Joint US-European Fluids Summer Meeting, Montreal, Canada*, August 1–5 20010.
- [146] K. Sato, Y. Taguchi, and S. Hayashi. High speed observation of periodic cavity behavior in a convergent-divergent nozzle for cavitating water jet. *Journal of Flow Control, Measurement & Visualization*, 1, 2013.
- [147] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :425–467, 1999.
- [148] R. Saurel and R. Abgrall. A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 21(3) :1115–1145, 1999.
- [149] R. Saurel and O. Le Metayer. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 431 :239–271, 2001.

- [150] R. Saurel, F. Petitpas, and R. Abgrall. Modelling phase transition in metastable liquids : application to cavitating and flashing flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 607 :313–350, 2008.
- [151] R. Saurel, F. Petitpas, and A. Berry. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1678–1712, 2009.
- [152] S.J. Schmidt, I.H. Sezal, and G.H. Schnerr. Compressible simulation of high-speed hydrodynamics with phase change. In *European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS 2006, Delft, The Netherlands*, September 2006.
- [153] G.H. Schnerr and J. Sauer. Physical and numerical modeling of unsteady cavitation dynamics. In *4th Int. Conference on Multiphase Flow ICMF01, New Orleans, USA*, June 2001.
- [154] G.H. Schnerr, I.H. Sezal, and S.J. Schmidt. Numerical investigation of three-dimensional cloud cavitation with special emphasis on collapse induced shock dynamics. *Physics of Fluids*, 20 :040703, 2008.
- [155] I. Senocak and W. Shyy. A pressure-based method for turbulent cavitating flow computations. *Journal of Computational Physics*, 176(2) :363–383, 2002.
- [156] I. Senocak and W. Shyy. Interfacial dynamics-based modelling of turbulent cavitating flow, part 1 : Model development and steady-state computations. *International journal for numerical methods in fluids*, 44 :975–995, 2004.
- [157] I. Senocak and W. Shyy. Interfacial dynamics-based modelling of turbulent cavitating flow, part 2 : Time-dependent computations. *International journal for numerical methods in fluids*, 44 :997–1016, 2004.
- [158] J.H. Seo and S.K. Lele. Numerical investigation of cloud cavitation and cavitation noise on a hydrofoil section. In *7th International Symposium on Cavitation CAV2009, Ann Arbor, USA*, 2009.
- [159] B.R. Shin, Y. Iwata, and T. Ikohagi. Numerical simulation of unsteady cavitating flows using a homogeneous equilibrium model. *Computational Mechanics*, 30 :388–395, 2003.
- [160] M.L. Shur, P.R. Spalart, M. Strelets, and A. Travin. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 4*, 1999.
- [161] A.K. Singhal, M.M. Athavale, H. Li, and Y. Jiang. Mathematical basis and validation of the full cavitation model. *Journal of Fluids Engineering*, 124(3) :617–624, 2002.
- [162] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91 :99–164, 1963.
- [163] B.R. Smith. The  $k - kl$  turbulence model and wall layer model for compressible flows. In *AIAA 90-1483, 21st Fluid and Plasma Dynamics Conference - Seattle, Washington*, 1990.
- [164] B.R. Smith. A near wall model for the  $k - l$  two equation turbulence model. In *AIAA 94-2386, 25th Fluid Dynamics Conference - Colorado Springs, Colorado*, 1994.
- [165] B.R. Smith. Prediction of hypersonic shock wave turbulent boundary layer interactions with the  $k - l$  two-equation turbulence model. In *AIAA 95-0232, 33rd Aerospace science meeting and exhibiting -Reno, Nevada*, 1995.

- [166] CS. Song. Current status of CFD for cavitating flows. In *9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Honolulu, Hawaii*, February 2002.
- [167] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *AIAA 92-0439, 30<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting – Reno, Nevada*, January 6-9 1992.
- [168] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aéronautique*, (1) :5–21, 1994.
- [169] P.R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings and on hybrid RANS//LES approach. In *1st AFSOR Int. Conf. on DNS/LES - Ruston*, 1997.
- [170] V. Srinivasan, A.J. Salazar, and K. Saito. numerical simulation of cavitation dynamics using a cavitation-induced-momentum-defect (cimd) correction approach. *Applied Mathematical Modelling*, 33 :1529–1559, 2009.
- [171] C. Stanley, T. Barber, B. Milton, and G. Rosengarten. Periodic cavitation shedding in a cylindrical orifice. *Experiments in Fluids*, 51 :1189–1200, 2011.
- [172] C. Stanley, T. Barber, and G. Rosengarten. Re-entrant jet mechanism for periodic cavitation shedding in a cylindrical orifice. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 50 :169–176, 2013.
- [173] B. Stutz. *Analyse de la structure diphasique et instationnaire de poches de cavitation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [174] B. Stutz. Influence of roughness on the two-phase flow structure of sheet cavitation. *Journal of Fluids Engineering*, 125 :652–659, 2003.
- [175] B. Stutz and J.L. Reboud. Experiments on unsteady cavitation. *Experiments in Fluids*, 22 :191–198, 1997.
- [176] B. Stutz and J.L. Reboud. Measurements within unsteady cavitation. *Experiments in Fluids*, 29 :545–552, 1997.
- [177] B. Stutz and J.L. Reboud. Two-phase flow structure of sheet cavitation. *Physics of Fluids*, 9(12) :3678–3686, 1997.
- [178] P. Testud, P. Moussou, A. Hirschberg, and Y. Aurégan. Noise generated by cavitating single-hole and multi-hole orifices in a water pipe. *Journal Fluid Structures*, 23 :163–189, 2007.
- [179] B. Tian, E. Toro, and C.E. Castro. A path-conservative method for a five-equation model of two-phase flow with an HLLC-type Riemann solver. *Computers & Fluids*, 46(1) :122–132, 2011.
- [180] A. Toutant. *Modélisation physique des interactions entre interfaces et turbulence*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [181] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 172(2) :277–298, 1987.
- [182] Y. Utturkar, J. Wu, G. Wang, and W. Shyy. Recent progress in modelling of cryogenic cavitation for liquid rocket propulsion. *Progress in Aerospace Sciences*, 41 :558–608, 2005.

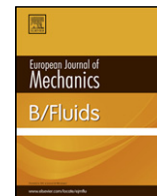
- 
- [183] J.R. Viegas, M.W. Rubesin, and C.C. Horstman. On the use of wall functions as boundary conditions for two-dimensional separated compressible flows. In *AIAA 85-0180, 23<sup>rd</sup> Aerospace Sciences Meeting – Reno, Nevada*, January 14-17 1985.
- [184] C. Viozat. *Calcul d'écoulements stationnaires et instationnaires à petit nombre de Mach, et en maillages étirés*. PhD thesis, Université de Nice, Sophia Antipolis, France, 1998.
- [185] G. Wallis. One-dimensional two-phase flow. New York : McGraw-Hill, 1967.
- [186] G. Wang and M. Ostojca-Starzewski. Large eddy simulation of sheet/cloud cavitation on a NACA0015 hydrofoil. *Applied Mathematical Modelling*, 31(3) :417–447, 2007.
- [187] Y.-C. Wang and C. E. Brennen. Shock wave development in the collapse of a cloud of bubbles. In *ASME Cavitation and Multiphase Flow Forum*, pages 15–20, 1994.
- [188] D. Wilcox. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries Inc., 1998.
- [189] J.B. Young. The condensation and evaporation of liquid droplets in pure vapor at arbitrary knudsen number. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 34 :1649, 1991.
- [190] A. Zein, M. Hantke, and G. Warnecke. Modeling phase transition for compressible two-phase flows applied to metastable liquids. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2964–2998, 2010.
- [191] XB. Zhang, LM. Qiu, Y. Gao, and XJ. Zhang. Computational fluid dynamic study on cavitation in liquid nitrogen. *Cryogenics*, 48 :432–438, 2008.
- [192] L. Zhou and Z. Wang. Numerical simulation of cavitation around a hydrofoil and evaluation of a RNG  $k - \varepsilon$  model. *Journal of Fluid Engineering*, 130(1) :011302, 2008.
- [193] Z. G. Zuo, S. C. Li, S. H. Liu, S. Li, and H. Chen. An attribution of cavitation resonance : volumetric oscillations of cloud. *Journal of Hydrodynamics*, 21(2) :152–158, 2009.

Septième partie

Article scientifique







## A comparative study of cavitation models in a Venturi flow



Boris Charrière<sup>a</sup>, Jean Decaix<sup>b</sup>, Eric Goncalvès<sup>a,c,\*</sup>

<sup>a</sup> LEGI - University of Grenoble, 1025 rue de la Piscine, 38400 St Martin d'Herès, France

<sup>b</sup> University of Applied Sciences, Western Switzerland, CH-1950 Sion, Switzerland

<sup>c</sup> ENSMA - Pprime, 86961 Futuroscope Chasseneuil, France

### HIGHLIGHTS

- Three cavitation models based on a void ratio transport equation are compared.
- A new free-parameter model is proposed using a mixture of stiffened gas.
- Comparisons are performed on a turbulent Venturi case with experimental data.

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 9 January 2014

Received in revised form

28 July 2014

Accepted 15 October 2014

Available online 23 October 2014

#### Keywords:

Cavitation

Mass transfer

Homogeneous model

RANS simulation

### ABSTRACT

This paper presents a numerical study of an aperiodic cavitation pocket developing in a Venturi flow. The mass transfer between phases is driven by a void ratio transport equation model. A new free-parameter closure relation is proposed and compared with other formulations. The re-entrant jet development, void ratio profiles and pressure fluctuations are analysed to discern results accuracy. Comparisons with available experimental data are done and good agreement is achieved.

© 2014 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

### 1. Introduction

Cavitation is the formation of vapour cavities within a given liquid due to pressure drop. It may be observed in various engineering systems such as hydraulic constructions, aeronautics, aerospace, power systems and turbomachinery. The cavitation development may be the origin of several negative effects, such as noise, vibrations, performance alterations, erosion and structural damages. This makes cavitation an important issue in design and operation, which should be controlled, or at least well understood.

Among the cavitation types that may develop, partial cavitation pockets are often observed in hydraulic machines and is known to be responsible for severe damage. Cavitating Venturis are one of the simplest cases to study such cavities, both experimentally and numerically. This kind of cavitation is characterized by a partial vapour cavity that detaches from the solid body and extends downstream with the existence of a re-entrant jet. The dynamic of these cavitation sheets, the interaction between cavitation and

turbulence, the behaviour of the turbulent boundary layer are not yet well known and understood.

Although the numerical modelling of such cavitation has received a great deal of attention, it is still a very difficult and challenging task to simulate such complex unsteady two-phase flow with an acceptable accuracy. Cavitating flows are challenging to model, since they are turbulent with a complex interaction with two-phase structures, highly dynamic and involve non equilibrium thermodynamic states. Several numerical models have been developed to investigate such cavitating flows, especially with one-fluid Reynolds-Averaged Navier–Stokes (RANS) solvers. The homogeneous mixture model treats the cavitating flows as a mixture of two fluids behaving as one. These models are based on the assumption of local kinematic equilibrium between phases (the local velocity is the same for both phases), local thermal and mechanic equilibrium between the two components (local temperature and pressure equality between phases). These models are composed by three conservation laws for mixture quantities (mass, momentum and total energy). This model cannot reproduce strong thermodynamic non equilibrium effects but, because of its simplicity, it is often used for numerical simulations [1–8].

By assuming that one pure phase is on a metastable state, a supplementary mass equation or void fraction equation is added. Various formulations of four-equation model have been expressed. A

\* Corresponding author at: LEGI - University of Grenoble, 1025 rue de la Piscine, 38400 St Martin d'Herès, France.

E-mail address: [eric.goncalves@legi.grenoble-inp.fr](mailto:eric.goncalves@legi.grenoble-inp.fr) (E. Goncalvès).

### Nomenclature

$c$	Speed of sound
$C_p, C_v$	Thermal capacities
$E$	Total energy
$e$	Internal energy
$k$	Turbulent kinetic energy
$P$	Static pressure
$P_{vap}$	Vapour pressure
$P_r, P_{rt}$	Molecular and turbulent Prandtl numbers
$Q$	Total heat flux
$Re_L$	Reynolds number based on the length $L$
$T$	Temperature
$u, v$	Velocity components
$V$	Vector velocity
$w$	Conservative variables
$Y$	Mass fraction of gas
$\dot{m}$	Mass transfer
$\alpha$	Void fraction
$\gamma$	Ratio of thermal capacities
$\varepsilon$	Dissipation rate
$\lambda, \lambda_t$	Molecular and turbulent thermal conductivity
$\mu, \mu_t$	Molecular and eddy viscosity
$\rho$	Density
$\rho_l$	Interfacial density
$\sigma$	Cavitation number
$\tau$	Total stress tensor
$\omega$	Specific dissipation
$()_l$	Liquid value
$()_v$	Vapour value
$()^v$	Viscous
$()^t$	Turbulent

very popular formulation has been developed to simulate turbulent cavitating flows [9–14]. The main difficulty is related to the formulation of the source term and the tunable parameters involved for the vaporization and condensation processes. Moreover, these models are not thermodynamically well-posed [15]. Another popular model devoted to ebullition problems uses a relaxation term (Homogeneous Relaxation Model). The source term involves a relaxation time estimated from experimental data [16] or with an optimization problem on the mixture entropy [17]. An original formulation was recently proposed for the mass transfer between phases assuming its proportionality with the divergence of the mixture velocity. This model was validated on various inviscid and turbulent applications [18,19].

The present work is devoted to the numerical study of a partial cavitation pocket appearing on a Venturi geometry. For this test case, a transitional behaviour is observed between a stable pocket and a periodic cycles pocket. A particular emphasis is placed on the comparison of various void ratio transport equation models and their ability to capture the re-entrant jet phenomenon. An in-house finite-volume code solving a four-equation RANS compressible system was developed [19]. A new cavitation model is investigated using a mixture of stiffened gas equation of state (EOS). The formulation does not involve any tunable parameter. Validation and comparisons are done with experimental measurements (time-averaged void ratio and velocity profiles, RMS wall pressure fluctuations). A comparison is proposed with OpenFOAM simulations in which the Kunz's void ratio transport equation model is considered. The opensource software OpenFOAM was used and validated in cavitating flows by various authors [20–22].

In this paper, we will first review the theoretical formulation, including physical models, equation of state and elements of the

numerical methods. This is followed by sets of results on a Venturi geometry and discussions.

## 2. The LEGI's numerical tool

The code is based on the solving of the one-fluid compressible RANS system with transport-equation turbulence models.

### 2.1. Reynolds-Averaged Navier–Stokes compressible equations

The compressible one-fluid RANS equations are used, coupled with a one- or two-equation turbulence model. For low Mach number applications, an inviscid preconditioner is introduced. These equations can be expressed as:

$$P_c^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(F_c - F_v) = S \quad (1)$$

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \\ \rho E \\ \alpha \\ \rho k \\ \rho \Psi \end{pmatrix}; \quad F_c = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V \otimes V + p \bar{I} \\ (\rho E + p)V \\ \alpha V \\ \rho k V \\ \rho \Psi V \end{pmatrix};$$

$$F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\overline{\tau^v}} + \overline{\overline{\tau^t}} \\ (\overline{\overline{\tau^v}} + \overline{\overline{\tau^t}}) \cdot V - Q^v - Q^t \\ 0 \\ (\mu + \mu_t/\sigma_k) \text{grad } k \\ (\mu + \mu_t/\sigma_\psi) \text{grad } \Psi \end{pmatrix}$$

where  $w$  denotes the vector of conservative variables and the void ratio,  $F_c$  and  $F_v$  the convective and viscous flux densities and  $S$  the source terms, which concern the void ratio equation and the turbulent transport equations. The expression of the preconditioning matrix  $P_c$  is given in [19].  $k$  is the mixture turbulent kinetic energy (TKE) and  $\Psi$  is a mixture turbulent variable. In multiphase flow, the divergence of the fluctuating phase velocity is not zero [23]. Therefore, supplementary terms appear in the mixture TKE equation (pressure-dilation term, dilatational dissipation rate), which are not taken into account in the present paper.

The exact expression of the eddy-viscosity  $\mu_t$  and the source terms depends on the turbulence model as well as constants  $\sigma_k$  and  $\sigma_\psi$ .

The total stress tensor  $\overline{\tau}$  is evaluated using the Stokes hypothesis, Newton's law and the Boussinesq assumption. The total heat flux vector  $Q$  is obtained from the Fourier law involving a turbulent thermal conductivity  $\lambda_t$  with the constant Prandtl number hypothesis.

$$\overline{\tau} = \overline{\overline{\tau^v}} + \overline{\overline{\tau^t}}$$

$$= (\mu + \mu_t) \left[ (\text{grad } V + (\text{grad } V)^t) - \frac{2}{3} (\text{div } V) \bar{I} \right] + \frac{2}{3} \rho k \bar{I}$$

$$Q = Q^v + Q^t = -(\lambda + \lambda_t) \text{grad } T \quad \text{with } \lambda_t = \frac{\mu_t C_p}{P_{rt}}. \quad (2)$$

In pure phases, the viscosity is assumed to be constant. The mixture viscosity is defined as the arithmetic mean of the liquid and vapour viscosities:

$$\mu(\alpha) = \alpha \mu_v + (1 - \alpha) \mu_l. \quad (3)$$

The mixture thermal conductivity  $\lambda$  is also defined as the arithmetic mean of the liquid and vapour values:

$$\lambda(\alpha) = \alpha \frac{\mu_v C_{pv}}{P_{rv}} + (1 - \alpha) \frac{\mu_l C_{pl}}{P_{rl}}. \quad (4)$$

The turbulent Prandtl number  $P_{rt}$  is set to 1.

To compute the pressure and the temperature, an equation of state (EOS) is necessary to link these thermodynamic quantities to the internal energy and the density. For the pure phases, we used the convex stiffened gas EOS:

$$P(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho(e - q) - \gamma P_\infty \quad (5)$$

$$P(\rho, T) = \rho(\gamma - 1)C_v T - P_\infty \quad (6)$$

$$T(\rho, h) = \frac{h - q}{C_p} \quad (7)$$

where  $\gamma = C_p/C_v$  is the heat capacity ratio,  $C_p$  and  $C_v$  are thermal capacities,  $q$  the energy of the fluid at a given reference state and  $P_\infty$  is a constant reference pressure.

## 2.2. A void ratio transport equation

A void ratio equation can be expressed as [24]:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha V) = (K + \alpha) \text{div} V + \frac{\dot{m}}{\rho_l} \quad (8)$$

$$K = \left( \frac{\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2}{\frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha}} \right); \quad \rho_l = \left( \frac{\frac{\rho_l c_l^2}{1-\alpha} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha}}{\frac{c_v^2}{\alpha} + \frac{c_l^2}{1-\alpha}} \right) \quad (9)$$

where  $\dot{m}$  is the mass transfer between phases and  $\rho_l$  the interfacial density.

By assuming that the mass transfer is proportional to the divergence of the velocity, it is possible to build a family of models in which the mass transfer  $\dot{m}$  is expressed as [18]

$$\dot{m} = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_l - \rho_v} \left( 1 - \frac{c^2}{c_{wallis}^2} \right) \text{div} V \quad (10)$$

where  $c_{wallis}$  is the propagation velocity of acoustic waves without mass transfer [25]. This speed of sound is expressed as a weighted harmonic mean of speeds of sound of each phase:

$$\frac{1}{\rho c_{wallis}^2} = \frac{\alpha}{\rho_v c_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l c_l^2}. \quad (11)$$

A first model was built using the speed of sound associated with a sinusoidal barotropic EOS [18,19]. In the following, this model will be named 4-equation barotropic model. It involves one tunable parameter  $c_{baro}$  interpreted as the minimum value of the speed of sound in the mixture. For all simulations the value was set to 0.5 m/s.

## 2.3. A new cavitation model

The new model is based on a mixture of stiffened gas EOS. By assuming the pressure equilibrium between phases, an expression for the pressure can be deduced, function of the void ratio  $\alpha$  and the vapour mass fraction  $Y = \alpha \rho_v / \rho$ :

$$P(\rho, e, \alpha, Y) = (\gamma(\alpha) - 1)\rho(e - q(Y)) - \gamma(\alpha)P_\infty(\alpha) \quad (12)$$

$$\frac{1}{\gamma(\alpha) - 1} = \frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1-\alpha}{\gamma_l - 1} \quad (13)$$

$$q(Y) = Yq_v + (1-Y)q_l \quad (14)$$

$$P_\infty(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha) - 1}{\gamma(\alpha)} \left[ \alpha \frac{\gamma_v}{\gamma_v - 1} P_\infty^v + (1-\alpha) \frac{\gamma_l}{\gamma_l - 1} P_\infty^l \right]. \quad (15)$$

By assuming the thermal equilibrium between phases, the mixture temperature is expressed as:

$$T(\rho, h, Y) = \frac{h_l - q_l}{C_{p_l}} = \frac{h_v - q_v}{C_{p_v}} = \frac{h - q(Y)}{C_p(Y)} \quad (16)$$

$$C_p(Y) = YC_{p_v} + (1-Y)C_{p_l}. \quad (17)$$

The speed of sound in the mixture can be expressed as a function of the enthalpy of each phase (see Appendix):

$$\rho c^2 = \frac{1}{\gamma - 1} \left[ \frac{\rho_v \rho_l}{(\rho_l - \rho_v)} (h_v - h_l) \right]. \quad (18)$$

Enthalpies of pure phase  $h_l$  and  $h_v$  are computed with the mixture temperature  $T$ .

The mass transfer term is activated when the local pressure  $P$  is smaller than the vapour pressure  $P_{vap}$ . This model will be named 4-equation SG model. It does not involve any tunable parameter.

## 2.4. The turbulence model

Various turbulence models are considered: the Smith  $k - \ell$  model (KL) [26], the one-equation Spalart–Allmaras model (SA) [27] and the Jones–Launder  $k - \varepsilon$  model (KE) [28]. For a correct simulation of the re-entrant jet, the Rebound eddy-viscosity limiter is added [29–31]. For comparisons with the OpenFOAM solver, the Menter  $k - \omega$  SST model [32] is used, assuming the validity of the Bradshaw assumption [33] in a two-phase turbulent boundary layer.

## 2.5. Wall functions

For the modelling of flow close to the wall, a two-layer wall law approach is used:

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ \quad \text{if } y^+ < 11.13 \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.25 \quad \text{if } y^+ > 11.13 \\ u^+ &= \frac{u}{U_\tau}; \quad y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu_w}; \quad U_\tau^2 = \frac{\tau_w}{\rho_w} \end{aligned} \quad (19)$$

where  $\kappa = 0.41$  is the von Karman constant and the subscript ‘ $w$ ’ is used for a wall value.

We assume that wall functions are similar in a two-phase flow and in a single-phase flow. For unsteady flows, the existence of a wall law is assumed to be valid at each instant. These assumptions have been studied in [34] and comparisons were proposed with a thin boundary layer approach.

## 2.6. Numerics

The numerical simulations are carried out using an implicit CFD code based on a finite-volume discretization. For the mean flow, the convective flux density vector on a cell face is computed with the Jameson–Schmidt–Turkel scheme [35]. The artificial viscosity includes a second-order dissipation term  $D_2$  and a fourth-order dissipation term  $D_4$ , which involve two tunable parameters  $k^{(2)}$  and  $k^{(4)}$ .

The viscous terms are discretized by a second-order space-centred scheme. For the turbulence transport equations, the upwind Roe scheme [36] is used to obtain a more robust method. The second-order accuracy is obtained by introducing a flux-limited dissipation [37].

Time integration is achieved using the dual time stepping approach and a low-cost implicit method consisting in solving, at each time step, a system of equations arising from the linearization of a fully implicit scheme. The derivative with respect to the physical time is discretized by a second-order formula.

The numerical treatment of boundary conditions is based on the use of the preconditioned characteristic relationships. More details are given in [19].

### 3. The OpenFOAM code

The OpenFOAM code is an open source code distributed by ESI Group. It is based on an orientated object framework [38]. It provides a large variety of RANS turbulence models and cavitation models. For cavitation modelling, two ways are available: either to use an equation of state for the mixture or to use a transport equation for the volume fraction of liquid. The last one is retained for the present simulation.

#### 3.1. Cavitation model

The model is based on the incompressible RANS equations for a homogeneous mixture. The phase change is modelled using a transport equation for the liquid volume fraction  $\alpha_l$  that reads:

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + u_j \frac{\partial \alpha_l}{\partial x_j} = S \quad (20)$$

with  $S$  is the mass source term. Following Kunz development [10], the source term is expressed as the sum of a vaporization term  $m_v$  and a condensation term  $m_c$ :

$$S = m_v + m_c \quad (21)$$

with:

$$m_c = \frac{\rho}{\rho_l \rho_v} C_c \frac{\rho_v}{t_\infty} \alpha_{lim}^2 \frac{\max(P - P_{vap}; 0)}{\max(P - P_{vap}; 0.01 P_{vap})} \quad (22)$$

$$m_v = \frac{\rho}{\rho_l \rho_v} C_v \frac{\rho_v}{\frac{1}{2} \rho_l U_\infty^2 t_\infty} \min(P - P_{vap}; P_0) \quad (23)$$

$C_c$ ,  $C_v$ ,  $U_\infty$  and  $t_\infty$  are constant set by the user, whereas  $P_0$  and  $\alpha_{lim}$  are included to avoid non physical values. Usually  $U_\infty$  is set to the freestream value, and  $t_\infty$  represents a relaxation time not well defined in the literature. For the present computations, the following values are specified:

$$\begin{aligned} C_c &= 10; & C_v &= 8000; \\ U_\infty &= 10.8 \text{ m/s}; & t_\infty &= 0.005 \text{ s}. \end{aligned} \quad (24)$$

The model uncertainty should be analysed using non-intrusive stochastic methods as presented in [39].

#### 3.2. The turbulence model

The  $k - \omega$  SST model proposed by Menter [32] is used to solve the turbulent kinetic energy and the specific dissipation with the standard values of the different parameters.

#### 3.3. Numerics

The time derivatives are computed with the backward second order scheme.

Excepted for the volume fraction of liquid, the convective flux are discretized with the Total Variation Diminishing (TVD) scheme named 'limitedLinear' specific to OpenFOAM with the parameter set to 1.

Whereas the momentum equation and the Poisson equation are treated implicitly, the equation for the volume fraction of liquid is treated explicitly and separately. To maintain the boundedness of the liquid volume fraction, the Multidimensional Universal Limiter for Explicit Solution (MULES) is used and a counter-gradient is introduced to reduce the diffusion of the interface and enhanced the numerical stability. The convective flux of the transport equation for the volume fraction of liquid is computed with the van Leer scheme.

The set of equation is solved using a prediction–correction approach coupling the SIMPLE and PISO algorithm.

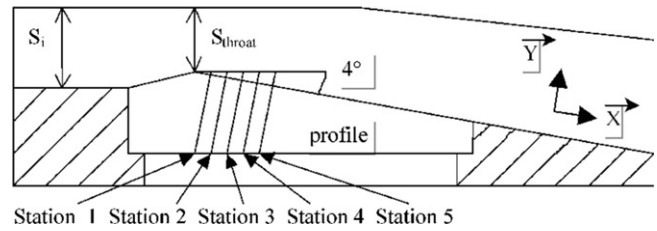


Fig. 1. Schematic view of the 4° Venturi profile.

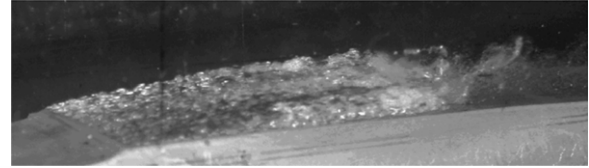


Fig. 2. Photograph of the cavitation pocket.

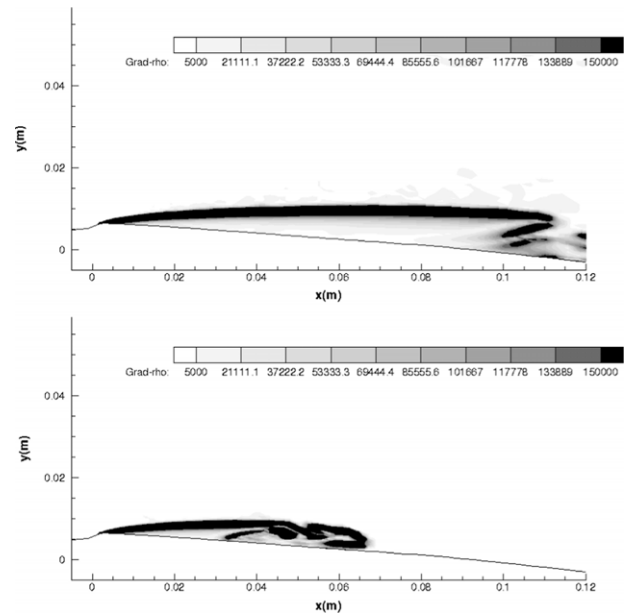


Fig. 3. Contours of the density gradient modulus, without limiter (top) and with limiter (bottom).

Table 1  
Unsteady computations, 4° Venturi.

Cav. model	Turb. model	$\sigma_{inlet}$	Attached and total sheet length (m)
4-eqt baro	SA	0.59	0.09–0.11
4-eqt baro	SA + Reboud	0.60	0.035–0.076
4-eqt baro	KL + Reboud	0.61	0.038–0.085
4-eqt baro	KE + Reboud	0.61	0.029–0.078
4-eqt SG	SA + Reboud	0.575	0.038–0.085
4-eqt SG	KW SST	0.595	0.030–0.10
4-eqt Foam	KW SST	0.585	0.070

## 4. Experimental and numerical parameters

### 4.1. Experimental conditions

The Venturi was tested in the cavitation tunnel of the CREMHyG (Centre d'Essais de Machines Hydrauliques de Grenoble). It is characterized by a divergence angle of 4°, illustrated in Fig. 1. The edge forming the throat of the Venturi is used to fix the separation point of the cavitation cavity. This geometry is equipped with five probing holes to allow various measurements such as the local

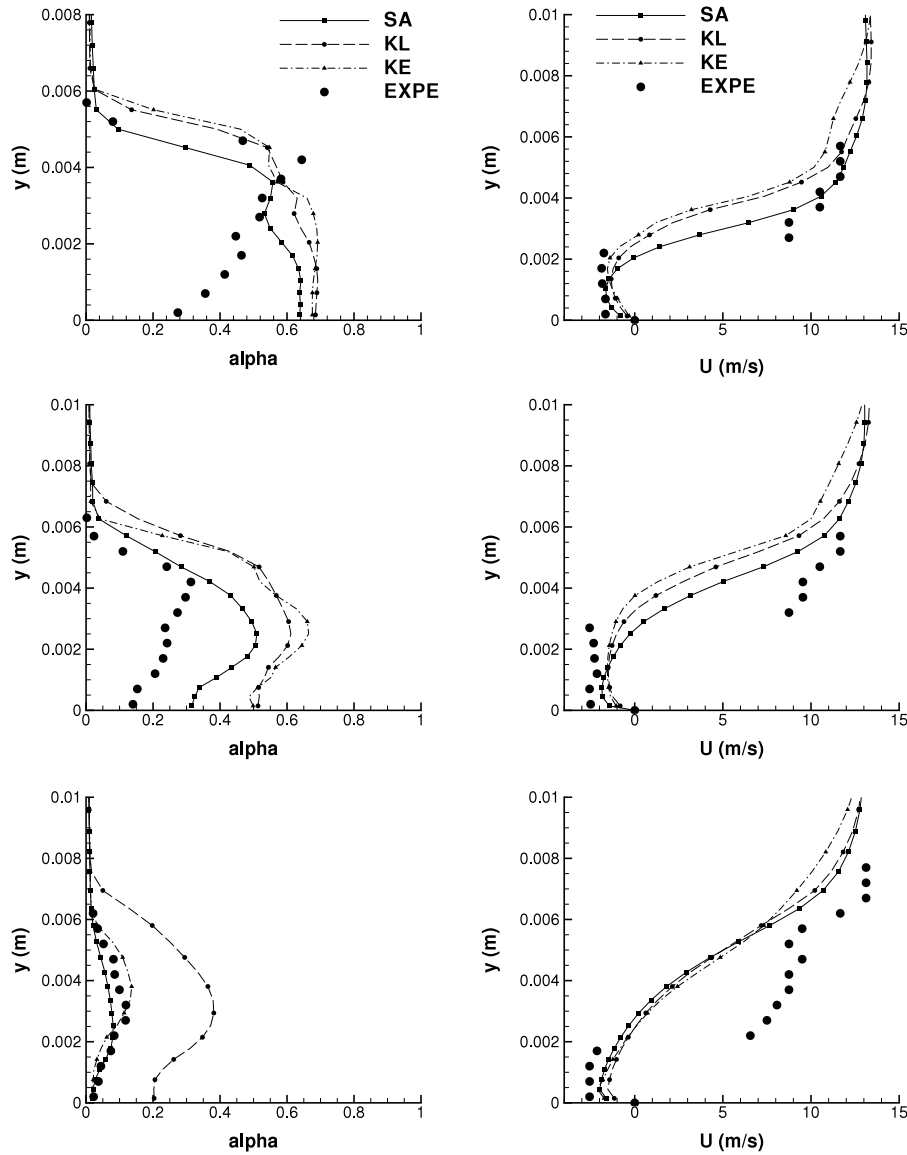


Fig. 4. Time-averaged velocity (right) and void ratio (left) profiles from station 3 to 5, 4-equation barotropic model.

void ratio, instantaneous local speed and wall pressure (Fig. 1). The velocity is evaluated as the most probable value and the void ratio is obtained from the signal of the double optical probe using a post-processing algorithm. The relative uncertainty on the void ratio measurement was estimated at roughly 15% [40].

The selected operating point is characterized by the following physical parameters [40]:

$$U_{inlet} = 10.8 \text{ m/s, the inlet velocity}$$

$$\sigma_{inlet} = \frac{P_{inlet} - P_{vap}}{0.5 \rho U_{inlet}^2} \simeq 0.55, \text{ the cavitation parameter in the inlet section}$$

$$T_{ref} \simeq 293 \text{ K, the reference temperature}$$

$$L_{ref} = 252 \text{ mm, the reference length}$$

$$Re_{L_{ref}} = \frac{U_{inlet} L_{ref}}{\nu} = 2.7 \cdot 10^6, \text{ the Reynolds number.}$$

With these parameters, a cavity length  $L$  ranging from 70 to 85 mm was obtained. The experimental views for this geometry show a relatively stable cavity behaviour (see Fig. 2). The attached cavity length corresponding to the end of the re-entrant jet is around 30–35 mm. For this geometry, no periodic cycles with large shedding were observed.

#### 4.2. Mesh and numerical parameters

The grid is a H-type topology. It contains 251 nodes in the flow direction and 62 nodes in the orthogonal direction. A special contraction of the mesh is applied in the main flow direction just after the throat to better simulate the two-phase flow area. The  $y^+$  values of the mesh, at the centre of the first cell, vary between 12 and 27 for a non cavitating computation.

Unsteady computations are performed with the dual time stepping method and are started from the non cavitating numerical solution. The numerical parameters are:

- the dimensionless time step,  $\Delta t^* = \frac{\Delta t U_{inlet}}{L_{ref}} = 4.88 \cdot 10^{-3}$
- sub-iterations of the dual time stepping method, 100
- the CFL number, 0.2
- Jacobi iterations for the implicit stage, 15
- the two coefficients of the artificial dissipation,  $k^{(2)} = 1$  and  $k^{(4)} = 0.045$ .

#### 5. Computational results

Various computations were performed by varying the cavitation model and the turbulence model, summarized in Table 1. The

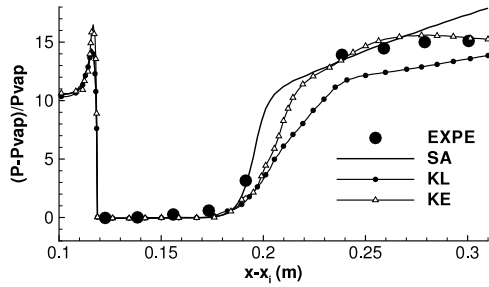


Fig. 5. Dimensionless time-averaged wall pressure evolution, 4-equation barotropic model.

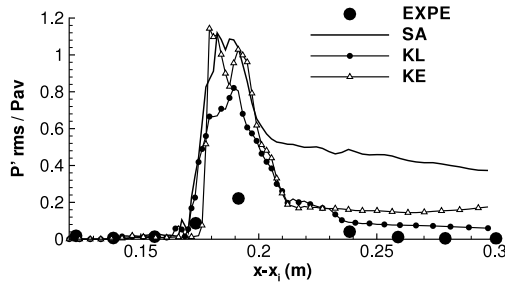


Fig. 6. RMS wall pressure fluctuations, 4-equation barotropic model.

goal was to obtain a sheet whose time-averaged attached and total length varied around 30–35 mm and 75–85 mm, respectively. The time of simulation is around 2.4 s.

### 5.1. Limitation of the eddy viscosity

A key point to compute the unsteadiness of the cavitation pocket is linked to the over-production of eddy viscosity by standard turbulence models. Previous simulations based on a three-equation model illustrated the importance of using an eddy-viscosity limiter to capture the re-entrant jet dynamics [30]. In this study, the Reboud limiter is added to the turbulence model. The effect of this limiter using the Spalart–Allmaras is shown in Fig. 3 where are plotted the contours of the density gradient modulus (Schlieren-like visualizations). When the turbulent viscosity is reduced by the correction, the length of attached cavity reaches the experimental value around 0.35 m and vapour clouds appear.

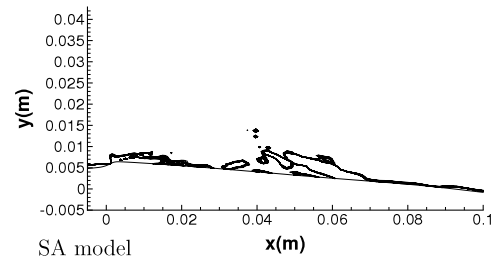
We observed the same effect for other turbulence models and results are not presented.

### 5.2. Turbulence models comparison

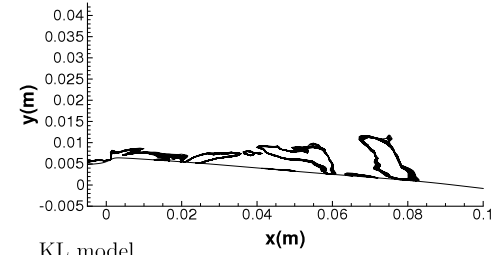
Computations are done using the four-equation barotropic model associated to three turbulence models in which the Reboud limiter is added. All numerical values are obtained by a time-averaged statistical treatment over a simulation time of 2 s.

Fig. 4 presents the void ratio and velocity profiles from stations 3 to 5. At stations 1 and 2, inside the attached cavity, all simulations provide the same results in close agreement with the experimental data and are not presented. At station 3, the re-entrant jet is observed on the velocity measurement. All simulations indicate a recirculating behaviour with a re-entrant jet extending through half the sheet thickness. For the void ratio profiles, the three simulations give very close results.

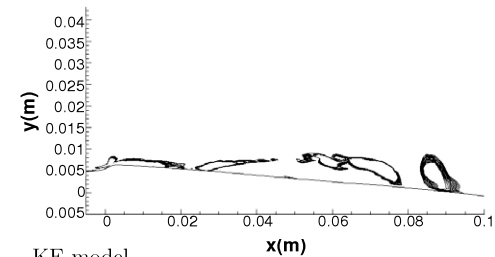
At stations 4 and 5 the whole of simulation capture the re-entrant jet characterized by negative velocities close to the wall. As regard to the void ratio profiles, we observe an over-estimation at station 4 using the  $k-\phi$  models and a better estimation using the Spalart–Allmaras model. At station 5, the  $k-\ell$  turbulence model overestimates a little the length of the cavity.



SA model



KL model



KE model

Fig. 7. Isolines of the dimensionless Q-criterion. Turbulence models comparison, 4-equation barotropic model.

The dimensionless wall pressure distribution  $\frac{P-P_{vap}}{P_{vap}}$  is plotted in Fig. 5 versus the distance  $x - x_{inlet}$ . The first five data are located inside the cavity (where the void ratio and velocity profiles are measured). All models provide a pressure distribution similar to the experimental measurements upstream of the re-compression.

The Root Mean Square (RMS) wall pressure fluctuations are plotted in Fig. 6 versus the distance  $x - x_{inlet}$ . The pressure fluctuation is divided by the time-averaged pressure  $P_{av}$ . Experimental data indicate an augmentation of pressure fluctuations at the end of the sheet cavity. All simulations predict a peak of pressure fluctuations located close to the experimental abscissa. The magnitude of the peak is overestimated by all computations. Nevertheless, downstream the cavity, the pressure fluctuations are over-predicted using the Spalart–Allmaras and  $k-\varepsilon$  turbulence models. This phenomenon has already been observed in a previous study and can be corrected by modifying the source term in the void ratio equation [19].

The dynamic of cavitation pocket is also studied with the iso-lines of the Q-criterion. Positive values of the Q-criterion, defined as the second invariant of the velocity gradient tensor  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  [41],

$$Q = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (25)$$

are used to identify vortices and local rotational areas. A dimensionless quantity is built using the inlet velocity and the reference length. Iso-lines levels vary between 0.005 and 0.1. The results are illustrated in Fig. 7. For all turbulence models, the shear layer creates vortical clouds of cavitation, which are convected by the mean flow. The simulated flow dynamic is similar between the three computations.

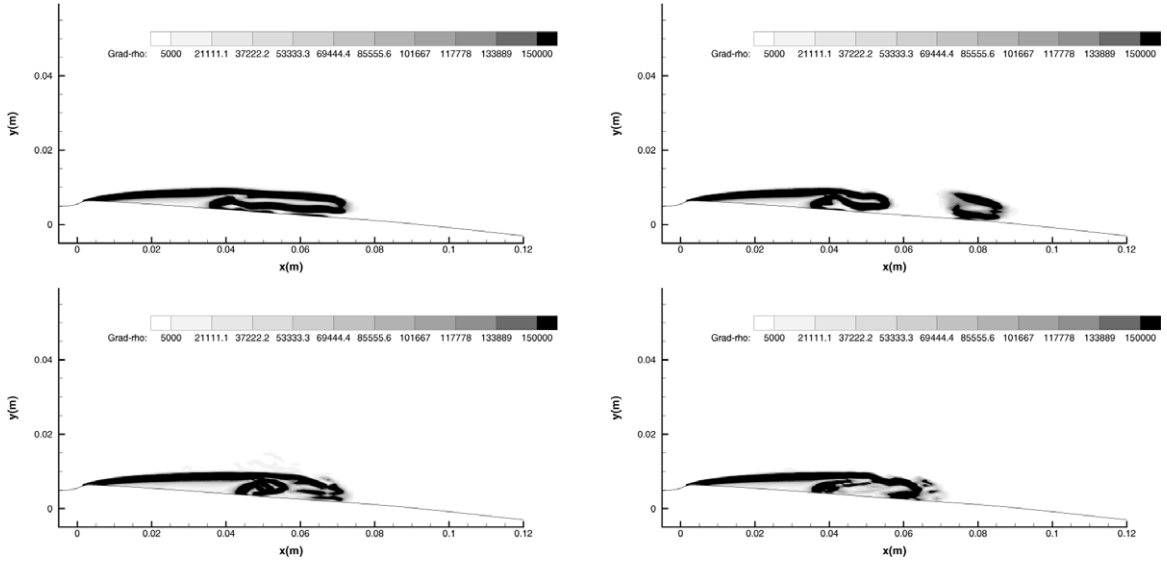


Fig. 8. Density gradient modulus ( $\text{kg m}^{-4}$ ) for 4-eqt SG model (left) and 4-eqt barotropic model (right).

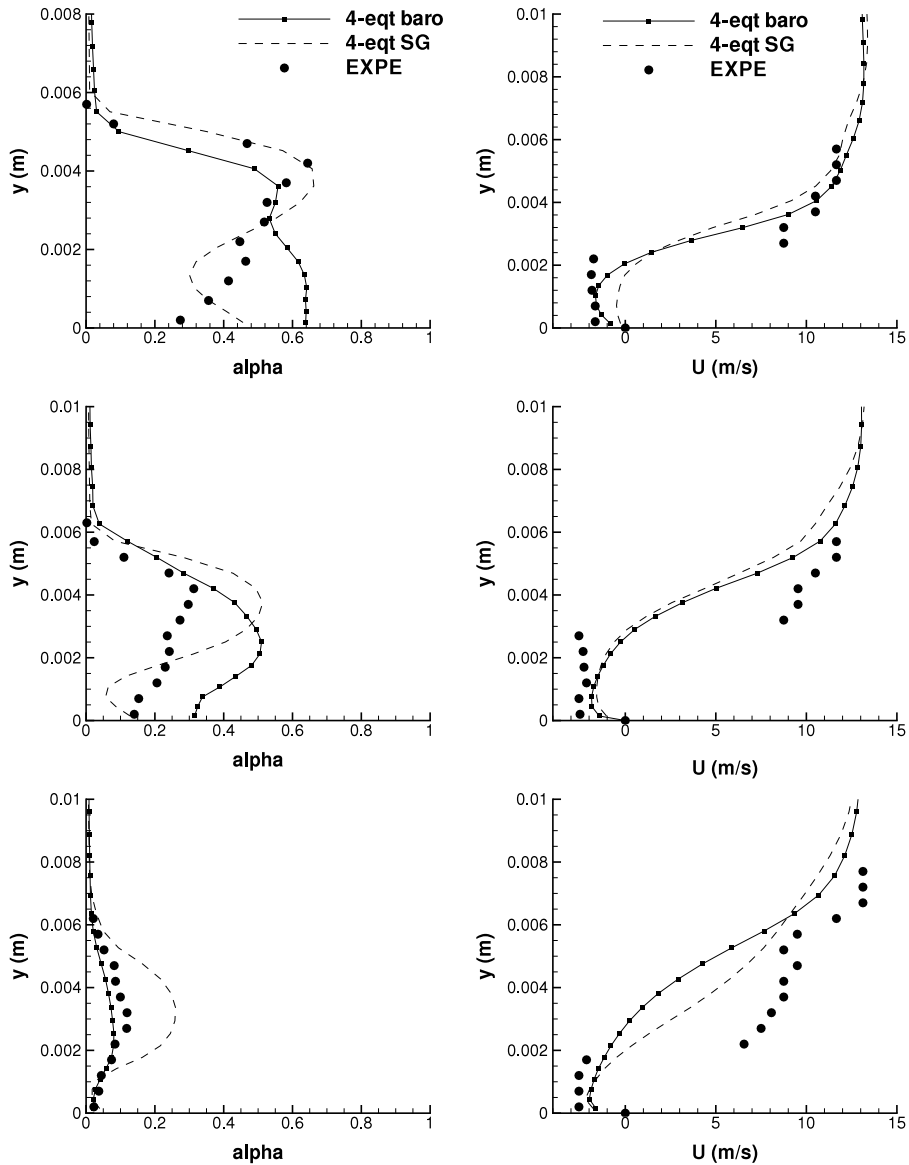
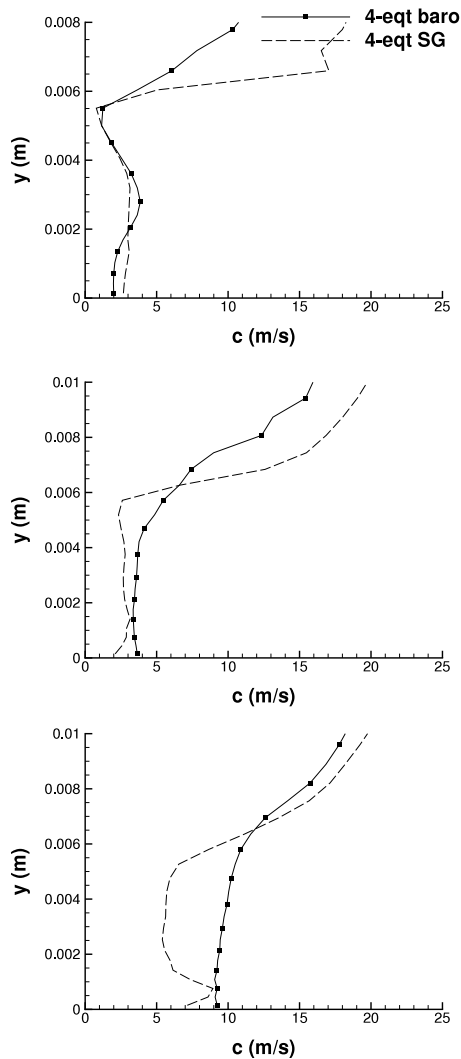


Fig. 9. Time-averaged velocity (right) and void ratio (left) profiles from station 3 to 5, 4-equation models comparison.



**Fig. 10.** Time-averaged mixture speed of sound profiles from station 3 to 5, 4-equation models comparison.

To conclude, similar results have been obtained with the three turbulence models associated to an eddy viscosity limiter. The re-entrant jet is well estimated but vapour ratio tends to be overestimated especially in the recirculating area (station 3 and 4). The influence of the turbulence model is weak for this partial cavitation pocket.

In the next part, a mixture of stiffened gas EOS is proposed to replace the barotropic EOS and to investigate the cavitation model influence.

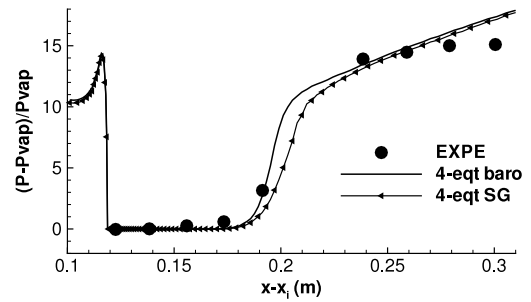
### 5.3. Cavitation models comparison

For this study, the Spalart–Allmaras turbulence model is chosen and the two formulations of 4-equation model are compared.

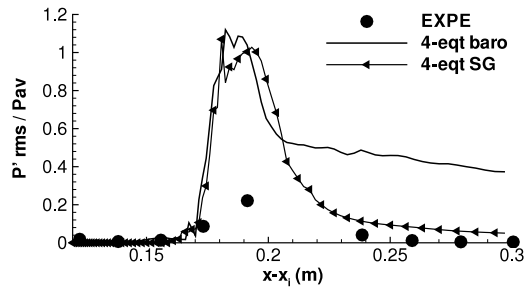
The dynamic of the cavitation sheets is proposed in Fig. 8 where the contours of the density gradient modulus are presented at two different times. Both simulations propose similar dynamics and the generation of vapour cloud shedding is clearly illustrated.

A more precise comparison is led by studying void ratio and velocity profiles, which are presented in Fig. 9 from stations 3 to 5. At region of attached cavity sheet (stations 1 and 2), both simulations provide a well estimation of the cavity thickness and results are not presented.

Differences appear at station 3 where the four-equation SG cavitation model provides a better prediction of the void ratio



**Fig. 11.** Dimensionless time-averaged wall pressure evolution, 4-equation models comparison.



**Fig. 12.** RMS wall pressure fluctuations, 4-equation models comparison.

profile characterized by a significant decrease close to the wall. However, by comparison with the experimental data and the four-equation barotropic velocity profiles, this model underestimates the recirculating flow in this area. At stations 4 and 5 the four-equation SG cavitation model also reproduces the re-entrant jet on the half bottom of the cavity but it over-predicts the vapour ratio in the remaining part. The wall value of the void ratio is better simulated with the SG model.

As the term of mass transfer between phases explicitly involves the mixture speed of sound  $c$ , the time-averaged profiles are given in Fig. 10 from stations 3 to 5. At station 3, values obtained with both models are around 3 m/s inside the cavity for a distance  $y < 6$  mm, tend to 1 m/s at the cavity interface and rapidly increase in the liquid. At station 4, a quasi constant profile inside the cavity is observed with small discrepancies between the models. At station 5, the mixture speed of sound inside the cavity obtained with the 4-equation SG model is quite twice lower (except at the wall) in comparison with the 4-equation barotropic solution.

As it can be observed in Fig. 11 both models give a time-averaged wall pressure distribution in good agreement with the experimental data. The Root Mean Square (RMS) wall pressure fluctuations are plotted in Fig. 12. Both models predict a similar peak intensity at the same location. It appears that the four-equation SG cavitation model provides a better estimation of the pressure fluctuations decrease in the re-compression area.

This study reveals that the four-equation SG cavitation is well adapted to simulate the behaviour of the cavitation pocket especially in the closure part of the cavity. The small non equilibrium effect on the pressure introduced by the barotropic model seems to not improve results in comparison with the SG model. Moreover, this model presents the large advantage to not involve tunable parameters. In the next part, this model will be used to compare the LEGI's and OpenFOAM softwares.

### 5.4. Comparison with OpenFOAM simulations

Comparisons between the LEGI solver and OpenFOAM are proposed on a similar mesh using the  $k - \omega$  SST turbulence model.



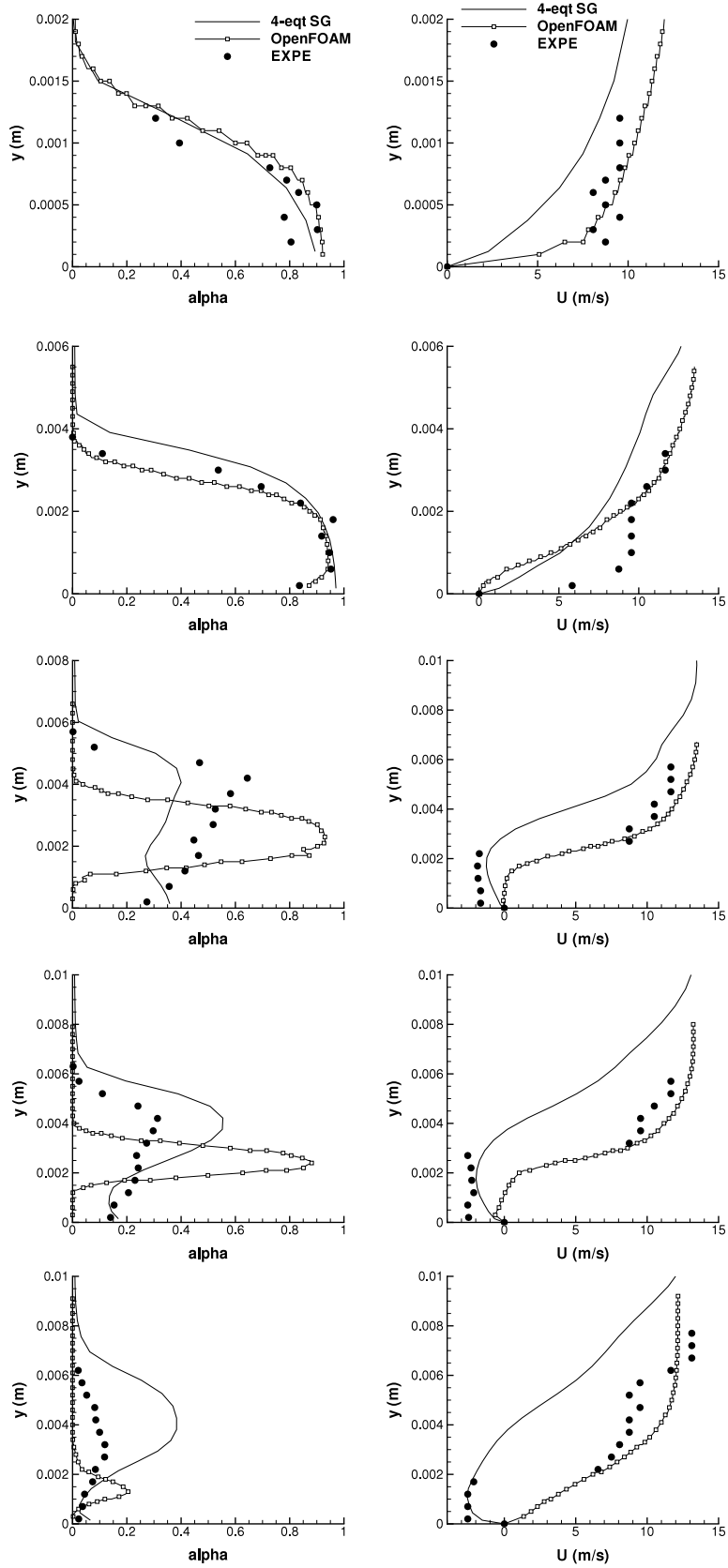


Fig. 13. Time-averaged velocity (right) and void ratio (left) profiles from station 1 to 5, LEGI solver versus openFOAM.

Only the cells near the outlet of the simulation domain differ between simulations due to the difference of numerical treatment for the outlet boundary condition. The considered cavitation models are the 4-equation SG model and the Kunz model for the Legi and OpenFoam codes, respectively. The time of simulation is about 2 s.

Time-averaged void ratio and velocity profiles are presented in Fig. 13 from stations 1 to 5. Inside the attached cavity sheet, at stations 1 and 2, the both solvers estimate a well cavity thickness and composition. At stations 3 and 4, the LEGI solver provides a better prediction of the void ratio decrease due to the presence of a mixture in this area. The OpenFOAM computation over-predicts the vapour quantity inside the cavity (95% instead of 70% at station 3 and 90% instead of 30% at station 3). Moreover, the thickness of the cavity is under-estimated and a pure liquid phase is simulated close to the wall. At station 5, both the cavity thickness and the re-entrant jet are badly simulated by the OpenFOAM software. Although the re-entrant phenomenon is well observed in experiments, the OpenFOAM simulation does not reproduce the recirculation area. Using the Spalart–Allmaras turbulence model, similar results were obtained (not presented here). Moreover, these results are in agreement with simulations presented in [42] using the same cavitation model and the  $k - \varepsilon$  turbulence model.

The time-averaged wall pressure distributions are compared in Fig. 14. The two models present a different re-compression area respectively located downstream the experimental measures with the LEGI solver and upstream with the OpenFOAM solver. The rate of re-compression is also under-estimated by the OpenFOAM solver.

A study of the Root Mean Square (RMS) wall pressure fluctuations is proposed in Fig. 15. The peak of fluctuations position is varying among the case. The OpenFOAM solver provides a maximum of fluctuations located upstream the closure area of the cavity sheet ( $x - x_i \approx 0.2$  in experiments), whereas it is predicted downstream by the LEGI solver.

To conclude, the topology of the cavitation pocket marks large discrepancies between the two softwares, especially as regards the re-entrant jet development. Maybe a better calibration of the production and evaporation constants appearing in the mass transfer formulation should improve the results for this test case.

## 6. Conclusion

An aperiodic partial cavitation pocket has been studied in a 2D Venturi configuration by numerical one-fluid unsteady RANS simulations. Numerical results have been compared with experimental data concerning the void ratio, streamwise velocity, wall pressure and wall pressure fluctuations.

First, calculations have been carried out with an in-house code. The one-fluid RANS equations have been successively coupled with the Smith  $k - \ell$ , the Spalart–Allmaras, the Jones–Launder  $k - \varepsilon$  and the Menter  $k - \omega$  SST turbulence models. Two cavitation models using an explicit formulation of the mass transfer between phases have also been compared: the first one based on a barotropic EOS and the second one based on a mixture of stiffened gas EOS. Comparisons revealed that similar results were obtained using different turbulence models when an eddy viscosity limiter is introduced. For this test case, the turbulence model influence is weak. Then, a cavitation model comparison was performed using the Spalart–Allmaras turbulence model. The SG four-equation model has improved the re-entrant jet simulation downstream the attached cavity by diminishing the void ratio values close to the wall. A better estimation of the pressure fluctuations is also provided by this model. A very positive point is the free-parameter formulation of the source term, which avoids poisonous calibration problems.

Secondly, simulations has been carried out with the OpenFOAM software using another formulation of void ratio transport equation cavitation models. Calculations were performed on a similar

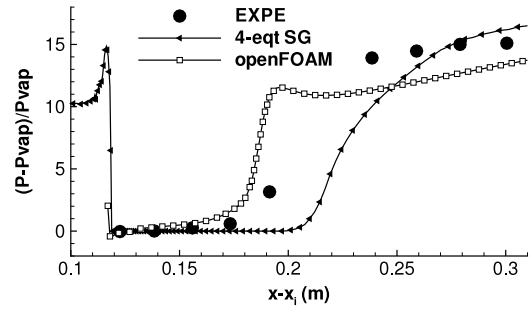


Fig. 14. Dimensionless time-averaged wall pressure evolution, LEGI solver versus openFOAM.

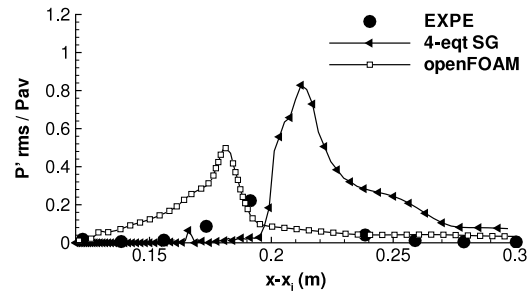


Fig. 15. RMS wall pressure fluctuations, LEGI solver versus openFOAM.

mesh using the Menter SST turbulence model. Large discrepancies appeared between the two solvers and the OpenFOAM simulations were not able to reproduce the re-entrant jet phenomenon. Maybe it is due to a calibration problem of the mass transfer term or to the lack of thermodynamic coherence. The new LEGI model is therefore very attractive to simulate such partial cavitation pockets.

Additional works are in progress to pursue comparative analyses between turbulence and cavitation models and to extend the formulation with thermodynamic effects.

## Appendix. The speed of sound in a mixture of stiffened gas

Starting from the usual thermodynamic relation

$$de = Tds + \frac{P}{\rho^2}d\rho \quad \text{or} \quad d(\rho e) = \rho Tds + hd\rho. \quad (26)$$

And with the differential of  $\rho e$ :

$$d(\rho e) = \left( \frac{\partial \rho e}{\partial \rho} \right)_p d\rho + \left( \frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_\rho dP. \quad (27)$$

We can obtain the differential of the pressure  $P$ :

$$\left( \frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_\rho dP = \rho Tds + \left[ h - \left( \frac{\partial \rho e}{\partial \rho} \right)_p \right] d\rho. \quad (28)$$

We deduce an expression of the speed of sound:

$$c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{h - \left( \frac{\partial \rho e}{\partial \rho} \right)_p}{\left( \frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_\rho}. \quad (29)$$

With the stiffened gas EOS, we have:

$$\left( \frac{\partial \rho e}{\partial P} \right)_\rho = \alpha \left( \frac{\partial \rho_v e_v}{\partial P} \right)_\rho + (1 - \alpha) \left( \frac{\partial \rho_l e_l}{\partial P} \right)_\rho = \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho e}{\partial \rho}\right)_p &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \alpha \left( \frac{P}{\gamma_v - 1} + \rho_v q_v + \frac{\gamma_v P_\infty^v}{\gamma_v - 1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \alpha) \left( \frac{P}{\gamma_l - 1} + \rho_l q_l + \frac{\gamma_l P_\infty^l}{\gamma_l - 1} \right) \right] \\ &= \frac{\rho_l h_l - \rho_v h_v}{\rho_v - \rho_v}. \end{aligned}$$

Finally, the speed of sound is:

$$\rho c^2 = \rho \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = (\gamma - 1) \left[ \frac{\rho_v \rho_l}{(\rho_l - \rho_v)} (h_v - h_l) \right]. \quad (30)$$

## References

- [1] D. Schmidt, C. Rutland, M. Corradini, A fully compressible, two-dimensional model of small, high-speed, cavitating nozzles, *Atomization Sprays* 9 (1999) 255–276.
- [2] T. Liu, B. Khoo, W. Xie, Isentropic one-fluid modelling of unsteady cavitating flow, *J. Comput. Phys.* 201 (1) (2004) 80–108.
- [3] T. Barberon, P. Helluy, Finite volume simulation of cavitating flows, *Comput. & Fluids* 34 (7) (2005) 832–858.
- [4] E. Sinibaldi, F. Beux, M. Salvetti, A numerical method for 3D barotropic flows in turbomachinery, *Flow Turbul. Combust.* 76 (2006) 371–381.
- [5] S. Schmidt, I. Sezal, G. Schnerr, Compressible simulation of high-speed hydrodynamics with phase change, in: *European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS 2006*, Delft, The Netherlands, 2006.
- [6] W. Xie, T. Liu, B. Khoo, Application of a one-fluid model for large scale homogeneous unsteady cavitation: the modified Schmidt model, *Comput. & Fluids* 35 (2006) 1177–1192.
- [7] E. Goncalves, R.F. Patella, Numerical simulation of cavitating flows with homogeneous models, *Comput. & Fluids* 38 (9) (2009) 1682–1696.
- [8] M. Bilanceri, F. Beux, M. Salvetti, An implicit low-diffusive HLL scheme with complete time linearization: application to cavitating barotropic flows, *Comput. & Fluids* 39 (2010) 1990–2006.
- [9] C. Merkle, J. Feng, P. Buelow, Computation modeling of the dynamics of sheet cavitation, in: *3rd International Symposium on Cavitation CAV1998*, Grenoble, France, 1998.
- [10] R. Kunz, D. Boger, D. Stinebring, T. Chyczewski, J. Lindau, H. Gabeling, S. Venkateswaran, T. Govindan, A preconditioned Navier–Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction, *Comput. & Fluids* 29 (8) (2000) 849–875.
- [11] G. Schnerr, J. Sauer, Physical and numerical modeling of unsteady cavitation dynamics, in: *4th Int. Conference on Multiphase Flow ICMF01*, New Orleans, USA, 2001.
- [12] I. Senocak, W. Shyy, A pressure-based method for turbulent cavitating flow computations, *J. Comput. Phys.* 176 (2) (2002) 363–383.
- [13] A. Singhal, M. Athavale, H. Li, Y. Jiang, Mathematical basis and validation of the full cavitation model, *J. Fluids Eng.* 124 (3) (2002) 617–624.
- [14] Y. Utturkar, J. Wu, G. Wang, W. Shyy, Recent progress in modelling of cryogenic cavitation for liquid rocket propulsion, *Prog. Aerosp. Sci.* 41 (2005) 558–608.
- [15] E. Goncalves, R.F. Patella, Constraints on equation of state for cavitating flows with thermodynamic effects, *Appl. Math. Comput.* 217 (2011) 5095–5102.
- [16] P. Downar-Zapolski, Z. Bilicki, L. Bolle, J. Franco, The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow, *Int. J. Multiph. Flow* 22 (3) (1996) 473–483.
- [17] P. Helluy, N. Seguin, Relaxation models of phase transition flows, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 40 (2) (2006) 331–352.
- [18] E. Goncalves, Numerical study of expansion tube problems: Toward the simulation of cavitation, *Comput. & Fluids* 72 (2013) 1–19.
- [19] E. Goncalves, B. Charriere, Modelling for isothermal cavitation with a four-equation model, *Int. J. Multiph. Flow* 59 (2014) 54–72.
- [20] R. Bensow, G. Bark, Simulating cavitating flows with LES in openfoam, in: *V ECCOMAS CFD*, Lisbon, Portugal, June 2010.
- [21] S. Park, S. Rhee, Computational analysis of turbulent super-cavitating flow around a two-dimensional wedge-shaped cavitator geometry, *Comput. & Fluids* 70 (2012) 73–85.
- [22] Z. Shang, Numerical investigations of supercavitation around blunt bodies of submarine shape, *Appl. Math. Model.* 37 (2013) 8836–8845.
- [23] J. Decaix, E. Goncalves, Compressible effects modelling in turbulent cavitating flows, *Eur. J. Mech. B Fluids* 39 (2013) 11–31.
- [24] R. Saurel, F. Petitpas, R. Abgrall, Modelling phase transition in metastable liquids: application to cavitating and flashing flows, *J. Fluid Mech.* 607 (2008) 313–350.
- [25] G. Wallis, *One-Dimensional Two-phase Flow*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [26] B. Smith, A near wall model for the  $k - l$  two equation turbulence model, in: *AIAA 94-2386*, 25th Fluid Dynamics Conference — Colorado Springs, Colorado, 1994.
- [27] P. Spalart, S. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *La Rech. Aérop.* 1 (1994) 5–21.
- [28] W. Jones, B. Lauder, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer* 15 (1972) 301–314.
- [29] J.-L. Reboud, B. Stutz, O. Coutier, Two-phase flow structure of cavitation: experiment and modelling of unsteady effects, in: *3rd International Symposium on Cavitation CAV1998*, Grenoble, France, 1998.
- [30] E. Goncalves, Numerical study of unsteady turbulent cavitating flows, *Eur. J. Mech. B Fluids* 30 (1) (2011) 26–40.
- [31] J. Decaix, E. Goncalves, Time-dependent simulation of cavitating flow with  $k - l$  turbulence models, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 68 (2012) 1053–1072.
- [32] F. Menter, Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.* 32 (8) (1994) 1598–1605.
- [33] P. Bradshaw, D. Ferriss, N. Atwell, Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, *J. Fluid Mech.* 28 (3) (1967) 593–616.
- [34] E. Goncalves, J. Decaix, Wall model and mesh influence study for partial cavities, *Eur. J. Mech. B Fluids* 31 (1) (2012) 12–29.
- [35] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel, Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge–Kutta time stepping schemes, in: *AIAA Paper* 81-1259, 1981.
- [36] P. Roe, Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes, *J. Comput. Phys.* 43 (1981) 357–372.
- [37] S. Tatsumi, L. Martinelli, A. Jameson, Flux-limited schemes for the compressible Navier–Stokes equations, *AIAA J.* 33 (2) (1995) 252–261.
- [38] H. Weller, G. Tabor, H. Jasak, C. Fureby, A tensorial approach to computational continuum mechanics using objected-oriented techniques, *Comput. Phys.* 12 (1998) 620–631.
- [39] M. Rodio, P. Congedo, Robust analysis of cavitating flows in Venturi tube, *Eur. J. Mech. B Fluids* 44 (2014) 88–99.
- [40] S. Barre, J. Rolland, G. Boitel, E. Goncalves, R.F. Patella, Experiments and modelling of cavitating flows in Venturi: attached sheet cavitation, *Eur. J. Mech. B Fluids* 28 (2009) 444–464.
- [41] J. Hunt, C. Wray, P. Moin, Eddies, Streams, and Convergence Zones in Turbulent Flows, *Tech. Rep.*, CTR-S88, Center for Turbulence Research, 1988.
- [42] J. Lindau, R. Kunz, D. Boger, D. Stinebring, H. Gabeling, High Reynolds number, unsteady, multiphase CFD modeling of cavitating flows, *J. Fluid. Eng.* 124 (3) (2002) 124–607.